

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
**UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE**  
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR  
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

N° d'ordre : ..... / 2011  
N° de série : .....

# **THESE**

*présentée à*

**L'UNIVERSITE DE CONSTANTINE**

*pour l'obtention*

**Du DOCTORAT D'ETAT**

*Spécialité : Electronique*

*Option : Contrôle*

*par*

**Abdelmalik BACHTARZI**

---

**COMMANDE DES SYSTEMES A STRUCTURE  
VARIABLE  
APPLICATIONS À UN GÉNÉRATEUR DE VAPEUR**

---

Soutenue le **03 Juillet 2011** devant le jury composé de :

Président	: <b>Mr SOLTANI Faouzi</b>	Professeur à l'Université de Constantine
Rapporteur	: <b>Mr BELARBI Khaled</b>	Professeur à l'Université de Constantine
Examineur	: <b>Mr CHAABI Abdelhafid</b>	Professeur à l'Université de Constantine
Examineur	: <b>Mr LADACI Samir</b>	Maître de conférences – Université de Skikda
Examineur	: <b>Mr SLIMANE Nouredine</b>	Maître de conférences – Université de Batna

## **AVANT – PROPOS**

*Je tiens à assurer de ma sincère et totale gratitude et de ma profonde reconnaissance mon directeur de thèse, Monsieur Khaled BELARBI, qui par sa confiance, ses conseils amicaux, ses explications pertinentes, a contribué de manière essentielle aux résultats utilisant la commande à structure variable. Il est à l'origine de ce travail et a contribué largement à sa réalisation. Par son souci de précision et de clarté, il m'a aidé à structurer et formuler ma pensée. Sa bonne humeur communicative, ses conseils judicieux en théorie de la commande m'ont permis d'atteindre ce résultat. En outre, il m'a permis de comprendre de ne jamais abandonner en recherche malgré les nombreux obstacles....*

*Je tiens à assurer également de ma sincère reconnaissance Monsieur Brahim BOUTAMINA, mon co-directeur de thèse, par ses encouragements et bienveillance constants, ses remarques pertinentes, son soutien et ses précieux conseils, son intuition sans faille et ses questions contextuelles exprimées avec beaucoup d'humour, a créé l'autonomie qui m'a permis d'explorer l'ensemble du domaine étudié. Il me fait un grand plaisir en participant à ce jury en tant qu' invité et je tiens à lui exprimer mes plus vifs remerciements.*

*C'est un honneur pour moi que Monsieur Faouzi SOLTANI ait accepté de participer à ce jury et d'en assumer la tâche de président. Je l'en remercie très sincèrement et très profondément car en acceptant de participer à cette commission, Monsieur SOLTANI témoigne de son intérêt pour mes travaux.*

*J'exprime ma profonde reconnaissance aux différents membres du jury qui ont accepté de juger ce mémoire et m'ont permis d'améliorer son contenu par leurs remarques pertinentes : Mr LADACI Samir, Mr SLIMANE Nouredine et Mr CHAABI Abdelhafid qui ont accepté d'être examinateurs de cette thèse.*

*Je n'oublie pas d'adresser mes vifs remerciements à tous mes collègues des départements de Génie Climatique, d'Electronique et du département de Génie Chimique qui m'ont encouragé de près ou de loin dans l'accomplissement de ce travail. Je n'ose citer de noms de peur d'oublier quelqu'un mais je garderai en mémoire leur soutien et leurs encouragements constants.*

*Je remercie tous les membres de ma petite famille en particulier ma femme et mes enfants qui m'ont accompagné moralement tout au long de ce parcours. Par leurs encouragements et leur appui inconditionnel et permanent, ils ont permis à ce travail d'arriver à son terme.*

*Je n'ai pas de talents particuliers.  
Je suis juste passionnément curieux.*

*(Pensées intimes, Lettre à Carl Seelig, 11 Mars 1952)*  
Albert Einstein

*En vérité, le chemin importe peu,  
La volonté d'arriver suffit à tout.*

Albert Camus

# Table des matières

## Avant-propos

### Introduction générale. . . . . 1

### 1. Formalisation mathématiques des systèmes à structure variable. . . . . 4

1.1. Introduction . . . . . 4

1.2. Formalisation classique du régime glissant. . . . . 4

1.3. Les deux méthodes d'étude de la commande à structure variable en régime glissant. 7

1.3.1. Equation d'état en mode de glissement exprimée à partir du gradient et du produit scalaire. . . . . 7

1.3.2. Commande équivalente. . . . . 9

1.3.3. Exemple. . . . . 10

1.4. Formalisation par la géométrie différentielle pour l'analyse et la synthèse des régimes glissants. . . . . 12

1.4.1. Mode de glissement. . . . . 12

1.4.2. La commande équivalente et la condition de glissement. . . . . 14

1.4.3. Condition d'existence et d'unicité de la commande équivalente . . . . . 15

1.4.4. Dépendance et indépendance du régime glissant idéal vis-à-vis des champs de vecteurs  $f(x)$  et  $g(x)$ . . . . . 18

1.4.5. Invariance des régimes glissants par rapport aux perturbations. . . . . 19

1.5. Formalisation de la structure variable dans le contexte de l'algèbre différentielle . . 20

1.5.1. Forme canonique de commande généralisée d'un système non linéaire monovariante et bouclage linéarisation. Exemple. . . . . 21

1.5.2. Forme canonique de commande généralisée d'un système monovariante non linéaire en poursuite. Algorithme à structure variable. . . . . 23

1.5.3. Forme canonique de commande généralisée à structure variable, associée à un système non linéaire multivariable dans le mode poursuite. . . . . 27

1.6. Conclusion. . . . . 28

### 2. Algorithme de commande à structure variable . . . . . 30

2.1. Introduction. . . . . 30

2.2. Conception de la commande par mode glissant. . . . . 31

2.2.1. Choix de la surface de glissement. . . . . 32

2.2.2. Principe d'invariance. . . . .	33
2.2.3. Condition de convergence et d'existence. . . . .	34
2.2.3.1. Fonction discrète (UTKIN) . . . . .	34
2.2.3.2. Fonction de Lyapunov. . . . .	35
2.2.4. Synthèse de la loi de commande. . . . .	35
2.2.4.1. Méthode de Phillipov. . . . .	35
2.2.4.2. Méthode d'UTKIN. . . . .	36
2.2.5. Les nouvelles visions de conception de commande des systèmes à structure variable. . . . .	38
2.2.5.1. L'approche de la loi d'arrivée pour la conception des SSV. . . . .	38
2.2.5.1.1. Attractivité à vitesse constante. . . . .	38
2.2.5.1.2. Attractivité à vitesse constante et à action proportionnelle. . . . .	39
2.2.5.1.3. Attractivité avec puissance de vitesse. . . . .	39
2.2.5.2. Remarques. . . . .	39
2.3. Propriétés de la structure de commande des SSV. . . . .	40
2.3.1. Structure libre. . . . .	40
2.3.2. Structure pré-spécifiée . . . . .	40
2.3.2.1. Structure de régulation par changement de retour d'état. . . . .	40
2.3.2.2. Structure de régulation par commutation (Relais) . . . . .	41
2.3.2.3. Structure de régulation par ajout de la commande équivalente. . . . .	42
2.4. Extensions méthodologiques dans l'élaboration de la commande. . . . .	42
2.4.1. Commande continue par bande de surface. . . . .	43
2.4.1.1. Première forme utilisée (SLOTINE) . . . . .	43
2.4.1.2. Deuxième forme utilisée ( Haraschimoto) . . . . .	48
2.4.2. Commande avec correction intégrale en régime permanent. . . . .	49
2.4.3. Commande sous optimale . . . . .	49
2.5. Conclusion. . . . .	50
<b>3. Description et modélisation du générateur de vapeur. . . . .</b>	<b>52</b>
3.1. Introduction. . . . .	52
3.2. Classification des générateurs de vapeurs. . . . .	53
3.3. Circulation de l'eau. . . . .	53
3.3.1. Circulation forcée. . . . .	53

3.3.2. Circulation naturelle. . . . .	53
3.4. Description de la chaudière. . . . .	54
3.4.1. Constitution. . . . .	54
3.4.2. Fonctionnement . . . . .	56
3.4.3. Régulation des générateurs de vapeurs. . . . .	57
3.4.3.1. La régulation du niveau d'eau dans le ballon . . . . .	57
3.4.3.2. La régulation de la combustion. . . . .	58
3.4.3.3. La régulation de la pression de vapeur. . . . .	59
3.5. Modèle dynamique du générateur de vapeur. . . . .	59
3.5.1. Modèle Non linéaire. . . . .	59
3.5.2. Modèle linéarisé . . . . .	61
<b>4. Simulations et tests. . . . .</b>	<b>62</b>
.	
4.1. Introduction. . . . .	62
4.2. Modèle Non linéaire sans contraintes sur les commandes. . . . .	62
4.2.1. Loi de commande. . . . .	64
4.2.2. Tests. . . . .	65
4.3. Modèle Non linéaire avec les contraintes sur les commandes. . . . .	66
4.3.1. Loi de commande. . . . .	66
4.3.2. Tests. . . . .	67
4.4. Commande sans terme discontinu. . . . .	67
4.4.1. Loi de commande. . . . .	67
4.4.2. Test avec le modèle initial. . . . .	
4.4.3. Test de robustesse. . . . .	68
4.4.4. Test de créneau. . . . .	70
4.5. Commande avec terme discontinu. . . . .	72
4.5.1. Loi de commande. . . . .	72
4.5.2. Test. . . . .	73
4.6. Méthode de la commande équivalente. . . . .	74
4.6.1. Loi de commande. . . . .	75
4.6.2. Test. . . . .	76
4.7. Modèle linéaire. . . . .	76
4.7.1. Linéarisation. . . . .	77

4.7.2. Tests.....	78.
4.8. Application du modèle linéaire avec une commande prédictive en mode glissant..	82
4.8.1. Généralités.....	82
4.8.2. Commande prédictive à base de modèle d'état en mode glissant.....	83
4.8.3. Application au générateur de vapeur.....	87
4.8.4. Simulations.....	88
4.8.4.1. Test 1.....	89
4.8.4.2. Test 2.....	90
4.8.5. Conclusion .....	91
4.9. Conclusion sur les différentes simulations .....	92
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>93</b>
<b>Références bibliographiques .....</b>	<b>95</b>
<b>Annexes : .....</b>	<b>94</b>
Annexes A : Linérisation.....	
Annexes B : Stabilité.....	
Annexes C : Fonction de Lyapunov.....	
Annexes D : Notion de géométrie différentielle .....	
<b>Notations et Acronymes .....</b>	

## **Introduction générale**

---

Le travail présenté dans ce mémoire s'insère dans le cadre des recherches menées par l'équipe « Commandes Robustes » appartenant au LARC. Un des objectifs de cette équipe est l'étude et la mise en œuvre d'algorithmes de commande dits à « Structure variable ».

De telles recherches se justifient par le fait que de nombreux systèmes peuvent faire l'objet de commande de ce type. En effet, la mise en œuvre de tels systèmes a un double avantage : d'une part, elle ne nécessite pas une identification des paramètres du processus commandé très précise puisque toutes les contraintes que la commande doit satisfaire qui sont de type égalité pour un système classique deviennent ici des contraintes de type inégalités ; d'autre part cet algorithme permet de s'attaquer à la commande de systèmes dont les paramètres varient dans le temps dans de larges proportions, ceci avec une loi de commande beaucoup plus facile à réaliser que celle d'un système auto-adaptatif avec modèle par exemple.

Ces deux propriétés essentielles font qu'une telle étude ait pu trouver sa place au sein du LARC dont plusieurs objectifs de recherche procèdent de préoccupations semblables sinon identiques.

Dans la discipline automatique, la commande adaptative est conçue pour la commande de processus complexes, dont les paramètres sont soit inconnus, soit incertains, soit variable au cours du fonctionnement. Néanmoins, lors de la modélisation des processus, certaines non linéarités sont négligées, le nombre d'états pris en compte est inférieur au nombre d'états réel du système et beaucoup de perturbations sont négligées. Un modèle mathématique est alors toujours une représentation approximative de la réalité physique. Par conséquent, il est indispensable de concevoir des algorithmes de commande assurant la robustesse du comportement du processus vis-à-vis des incertitudes sur les paramètres, leurs variations et sur les perturbations qui sont aléatoires.

La commande à structure variable qui est par nature une commande non linéaire possède cette robustesse. Elle se présente comme une commande adaptative passive sous sa forme la plus simple. Elle devient active quand les paramètres de l'algorithme de commande sont une fonction de l'état du processus. Cette approche est basée sur la commutation de fonctions de variables d'état, utilisées pour créer une variété ou hypersurface (Dimension supérieure à trois), dont le but est de forcer la dynamique du système à correspondre avec celle définie par l'équation de la variété. Quant l'état est maintenu sur cette variété, le système

est dit en régime glissant et sa dynamique devient insensible aux variations des paramètres du processus, aux erreurs de modélisation et à certaines perturbations tant que les conditions du régime glissant sont assurées.

Le travail présenté concerne le développement d'algorithme de commande à CSV appliquée aux systèmes non linéaires et plus précisément, la commande d'un générateur de vapeur d'une chaudière par une approche basée sur la théorie de la commande par mode glissant. Ce type de commande a suscité un grand intérêt parmi les chercheurs durant ces dernières années à cause de la simplicité de sa mise en œuvre et sa robustesse vis-à-vis des incertitudes de modélisation et des perturbations sur le système à commander. Cette technique est basée sur la détermination d'une loi de commande de façon que le point de fonctionnement du système s'approche d'une certaine surface de glissement, fonction du vecteur d'état du système et y demeurer. La loi de commande est conçue en deux étapes, la première est une étape d'approche de la surface de commutation et la deuxième, une étape de glissement sur celle-ci vers le point d'équilibre.

Le générateur de vapeur est un système multivariable dont les grandeurs à commander sont couplées. Diverses techniques ont été utilisées afin de commander ce système et notamment la commande décentralisée [8], la commande prédictive [40], et la commande par logique floue [26], [23] toutes ces techniques ont montrée leurs limites.

Plusieurs méthodes ont été étudiées pour déterminer ces lois d'approches en particulier la commande discontinue proposée par Utkin [57],[58],[59] [60] [61] qui ne peut prendre que deux valeurs suivant le signe de  $S(x)$ . La caractéristique principale de cette technique est sa structure variable avec la commutation autour de la surface choisie (surface de glissement), engendrant du coup des fréquences de commutation élevées des organes de commande qui peuvent provoquer une détérioration anticipée de l'organe de commande ou exciter des dynamiques hautes fréquences non considérées dans la modélisation du système. Ceci crée un phénomène de broutement (chattering en Anglais) autour de la surface de glissement qui peut endommager les actionneurs de commande dans la mesure où la commande va osciller entre deux valeurs suivants le signe de  $S(x)$  d'une part et ne permet pas généralement le glissement sur la surface d'autre part. Afin d'améliorer cette technique, la notion de commande équivalente fut introduite pour permettre au système de demeurer sur la surface définie par l'équation  $S(x) = 0$ . En pratique, ce type de commande permet l'approche du système de la surface de commutation avec un phénomène de broutement plus atténué que dans le cas de la commande discontinue.

Afin de résoudre le problème du broutement et de réduire son influence ou de l'éliminer complètement, d'autres méthodes ont été étudiées par Slotine [1] [43] [44] [45], Gao [22] [23] [24] [30], Hashimoto [27] [28] et Levant [33] en agissant sur la dynamique d'approche de la surface de glissement.

Toutes les recherches entreprises sur ce type de correcteurs sont justifiées par le fait que de nombreux systèmes dynamiques réels peuvent être asservis grâce à cette technique en raison de sa simplicité et de sa généralité. Ainsi, on peut retrouver avec la technique de commande en mode glissant, une approche commune pour la majorité des systèmes non linéaires, ce qui était réservé jusqu'alors aux seuls systèmes linéaires.

L'objectif principal de notre travail est la mise en œuvre de commande robuste pour les systèmes non linéaires. Pour cela notre mémoire sera structuré en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, de nature théorique, nous exposerons les bases mathématiques de la commande à structure variable. Nous développerons les différentes formalisations mathématiques de cette commande à savoir la formalisation classique, la formalisation par la géométrie différentielle et la formalisation dans le contexte de l'algèbre différentielle.

Le deuxième chapitre, plus méthodologique, nous indiquerons les différentes commandes exploitées avec les différents algorithmes de commande et les techniques permettant d'améliorer ces commandes.

Le troisième chapitre sera consacré à la modélisation du générateur de vapeur et les problèmes techniques liés à ce système complexe et sa linéarisation.

Le quatrième chapitre nous présenterons les différentes simulations avec les différentes lois de commande qui ont été élaborées aux chapitres 1 et 2. Afin de valider cette théorie et tester les différentes lois élaborées, on soumet notre système à plusieurs lois de commande. En première phase, la simulation sera faite sur le modèle non linéaire avec les différentes lois de commande. En deuxième phase, le modèle initial sera linéarisé autour d'un point de fonctionnement nominal et soumis à une commande asymptotiquement stable. En troisième phase, on applique une commande prédictive en mode glissant, après avoir discrétisé le modèle linéaire obtenu dans la deuxième phase.

# Chapitre 1 : Formalisations mathématiques des systèmes à structure variable

---

## 1.1 Introduction

Dans les années soixante, de nombreux travaux ont été publiés par l'équipe du professeur S.V. Emelyanov [15], sur une classe particulière des systèmes de commande dits à structure variable ; cette commande consiste à amener la trajectoire d'état du système bouclé vers une surface de glissement et à la faire commuter à l'aide d'une logique de commutation autour de la surface jusqu'au point d'équilibre. Ce sont les travaux effectués par Philippov [41] sur les équations à second membre discontinu qui amenèrent à l'idée de système à structure variable.

Dans ce premier chapitre, nous donnons une définition du concept de système de commande à structure variable et nous exprimons les caractéristiques essentielles de cette loi de commande à partir de différents outils théoriques de l'automatique linéaire et non linéaire. Nous pouvons définir les systèmes dits à structure variable de la manière suivante :

« Dans ces systèmes les paramètres du régulateur peuvent prendre deux valeurs, la commutation d'une valeur à une autre s'effectue à la traversée d'une hypersurface de l'espace de phase du système de façon à contraindre le point représentatif du mouvement du système à rester sur cette hypersurface d'où le nom de régime glissant.

Dans une première étape nous présenterons les concepts classiques utilisés pour la commande en régime glissant idéal du système linéaire et non linéaire, dans un environnement déterministe.

Nous rappellerons tout d'abord les propriétés mathématiques des équations différentielles à second membre discontinu, ainsi que la théorie classique du régime glissant

[ 41] [15] [57] [58]

## 1.2 Formalisation classique du régime glissant.

Soit le système d'équations différentielles :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

Où les seconds membres  $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  sont des fonctions continues par morceaux présentant des discontinuités sur une hypersurface  $S$ , d'équation :

$$S(x) = 0 \text{ avec } x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

Les fonctions  $f_i$  sont supposées définies dans un domaine  $G$  de l'espace des variables  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ; on pose  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ .

La surface  $S$  sépare l'espace d'état en deux parties  $G^+ (S > 0)$  et  $G^- (S < 0)$ , ce qui nous donne au voisinage de la surface  $S$  deux valeurs de  $f$  soit  $f^+$  et  $f^-$  sur la normale à la surface  $S$ , la normale étant orientée de  $G^-$  vers  $G^+$  (fig1.1).

Le théorème suivant, dû à Philippov, permet de préciser les conditions d'existence et d'unicité d'une solution  $x(t)$  de (1.1).

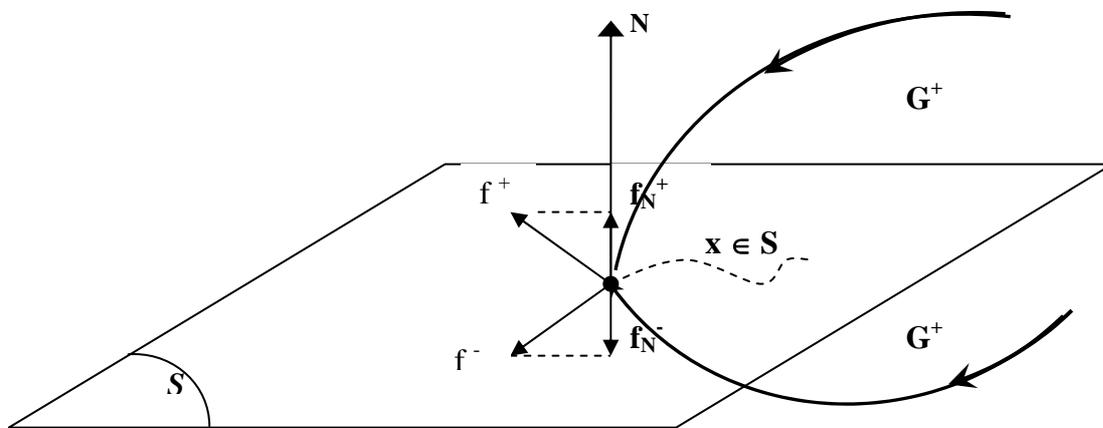


Figure 1.1 Espace d'état de dimension 3 et surface de glissement de dimension 2.

*Théorème* : Soit le système différentiel écrit sous la forme (1.1) satisfaisant la condition :

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq K \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

$K$  étant une constante arbitraire indépendante de  $t$  et de  $x$ , ces inégalités vérifiées pour  $t$  dans le domaine  $G = (G^- \cup G^+)$ . Soit la surface  $S$  deux fois différentiable, chacune des fonctions  $f_N^+$  et  $f_N^-$  étant continue sur  $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  appartenant à  $S$  et le vecteur  $h = f^+ - f^-$  étant continûment différentiable. Si en chaque point de la surface  $S$  une inégalité de type  $f_N^- > 0$  ou  $f_N^+ < 0$  est vérifiée (Pas obligatoirement la même en tout point de  $S$ ), il existe alors, dans le domaine  $G$ , une solution  $x(t)$  pour (1.1) et les propriétés d'unicité et de dépendance continue de cette solution par rapport aux conditions initiales sont vérifiées.

Ce théorème nous amène naturellement à penser que si l'on vérifie à la fois les conditions

$f_N^- > 0$  et  $f_n^+ < 0$ , la surface  $S$  sera attractive au moins dans un petit voisinage de  $S$ , pour toute solution  $x(t)$  de (1.1), puisque de chaque côté de  $S$  le vecteur vitesse est dirigé vers  $S$ . Il y a donc un régime glissant limite sur la surface  $S$ .

Supposons que le second membre de ce système possède une discontinuité, qui se produise sur la surface  $S$ , surface définie par :

$$S(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (1.2)$$

En dérivant (1.2) par rapport à  $t$ , on aura :

$$\dot{S} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.3)$$

Le second membre de cette expression n'est autre que le produit scalaire de la normale orientée à la surface  $S$  et du vecteur  $f$ .

Si les conditions du théorème précédent sont vérifiées, on déduit :

$$\begin{aligned} f_N^+ < 0 &\Rightarrow S > 0 \text{ et } \dots \dot{S} < 0 \\ f_N^- > 0 &\Rightarrow S < 0 \text{ et } \dots \dot{S} > 0 \end{aligned}$$

D'où

$$f_N^+ < 0 \text{ et } f_N^- > 0 \Rightarrow S \cdot \dot{S} < 0 \quad (1.4)$$

L'implication inverse est évidente et nous pouvons donc dire que les conditions  $(f_n^+ < 0 \text{ et } f_N^- > 0)$  et  $(S \cdot \dot{S})$  sont équivalentes.

La condition (1.4) qui assure que la surface  $S$  est attractive pour la trajectoire de phase, est l'inégalité fondamentale utilisée pour résoudre le problème de la synthèse (calcul des commandes) d'un système à structure variable commandé en régime glissant : sous certaines conditions le point représentatif de l'évolution du système dans l'espace de phase peut être maintenu sur une surface qui est choisie à priori. L'état du système bouclé est alors plongé dans l'état du système réduit de dimension inférieure et libre. Dans ce cas, les propriétés dynamiques du système bouclé ne dépendent plus des coefficients de la surface de glissement  $S$ , ce qui explique l'invariance de la structure variable aux perturbations ainsi que son applicabilité aux systèmes linéaires et non linéaires.

### 1.3 Les deux méthodes classiques d'étude de la commande par structure variable en régime glissant :

Les résultats sur les équations différentielles à second membre discontinu ont été exploités par Emelyanov et Utkin pour la mise en œuvre d'une commande à structure variable de système non linéaire [57]. Nous donnons ci-dessous deux expressions équivalentes pour l'équation d'évolution de la solution  $x(t)$ , trajectoire d'état du système en mode de glissement.

#### 1.3.1 Equation d'état en mode de glissement exprimée à partir du gradient et du produit scalaire.

Cette méthode est basée sur les résultats de Phillipov [41] qui est l'une des premières méthodes qui a montré l'existence et l'unicité de la solution des systèmes dynamiques à second membre discontinu en régime glissant. Phillipov a défini un champ de vecteurs moyen décrivant la trajectoire d'état en mode de glissement idéal. Ce champ de vecteurs moyen est obtenu par la moyenne géométrique ou par une combinaison convexe des champs de vecteurs définis de chaque côté de  $S$  (Figure 1.2). Ce champ de vecteurs moyen est tangentiel à la surface de glissement où le mode de glissement existe.

Soit le système non linéaire dont le fonctionnement est régi par un système différentiel de type (1.1), dans lequel la variable indépendante  $U$  désigne la commande :

$$\frac{dx}{dt} = f(U, x, t) \quad (1.5)$$

Considérons une commande non linéaire de type discontinue :

$$U = \begin{cases} U^+(x, t) & \text{si } S(x, t) > 0 \\ U^-(x, t) & \text{si } S(x, t) < 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Supposons que la partie droite de l'équation (1.5) présente une discontinuité à la traversée de la surface  $S(x, t)$  (Figure 1.2)

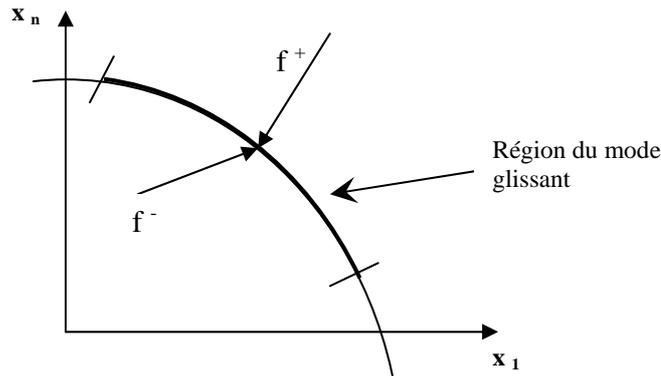


Figure 1.2 Schéma de principe montrant la région du mode de glissement et les champs de vecteurs associés selon une coupe de l'espace d'état.

Considérons le cas général d'une surface de glissement  $S(x,t) = 0$  ; la trajectoire d'état du système (1.5) piloté avec la loi de commande (1.6) est solution de l'équation suivante :

$$\frac{dx}{dt} = \mu f^+ + (1 - \mu) f^- = f^0 \tag{1.7}$$

avec  $0 \leq \mu \leq 1$  et  $f^0 = (f_1^0, \dots, f_n^0)$

$f^0$  est appelée par Utkin [61] , la vitesse d'état moyenne ( c'est un champ de vecteur moyen) sur la trajectoire d'état en mode de glissement idéal. Ce champ de vecteur moyen est tangentiel à la surface de glissement ; il est obtenu par la moyenne géométrique, ou par une combinaison convexe des champs de vecteurs définis de chaque côté de S (Figure 1.3).

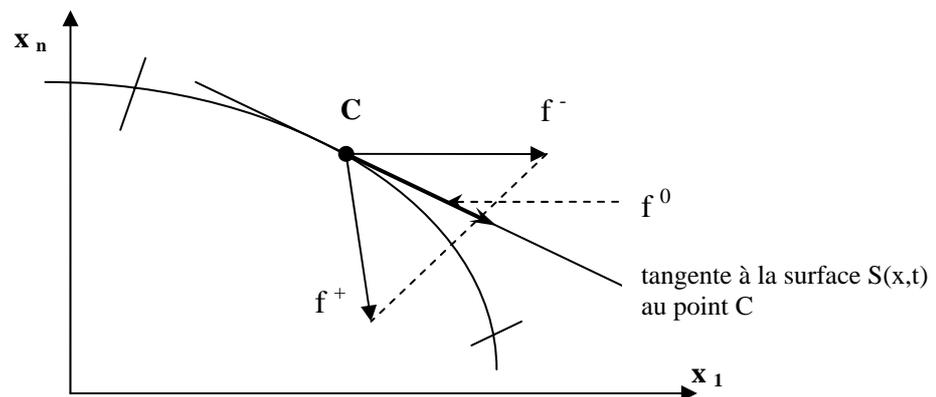


Figure 1.3 Schéma de principe de la construction du champ de vecteur moyen  $f^0$  dans l'espace d'état  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Soit  $\nabla S$  le gradient de  $S(x,t)$  et  $\langle \dots, \dots \rangle$  le produit scalaire de deux vecteurs.

En dérivant  $S(x,t) = 0$  par rapport à  $t$  , on aura :

$$\frac{dS(x,t)}{dt} = \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \cdot f^0 + \frac{\partial S}{\partial t} = \langle \nabla S, f^0 \rangle + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (1.8)$$

En tenant compte de (1.7) et (1.8) on aura :

$$\mu = \frac{\langle \nabla S, f^- \rangle + \frac{\partial S}{\partial t}}{\langle \nabla S, f^- - f^+ \rangle} \quad (1.9)$$

En portant l'expression de  $\mu$  dans (1.7) , l'équation d'état décrivant le système bouclé en régime glissant est :

$$\frac{dx}{dt} = \left[ \frac{\langle \nabla S, f^- \rangle + \frac{\partial S}{\partial t}}{\langle \nabla S, f^- - f^+ \rangle} \right] \cdot f^+ - \left[ \frac{\langle \nabla S, f^+ \rangle + \frac{\partial S}{\partial t}}{\langle \nabla S, f^- - f^+ \rangle} \right] \cdot f^- = f^0 \quad (1.10)$$

Cette équation donne lieu à une détermination de la trajectoire d'état  $x(t)$  en mode de glissement. Nous ferons deux remarques : si  $t$  n'est pas explicite alors on a  $x(t)$  fournie par l'équation (1.10) dans laquelle  $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$  ; de plus , la commande  $U$  qui n'est pas explicite dans l'équation (1.10) intervient dans la solution puisque  $f^-$  et  $f^+$  sont fonction de  $U$ .

### 1.3.2 Commande équivalente et équation d'état du régime glissant idéal.

Soit le système dynamique monovariante décrit par l'équation d'état suivante :

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) + g(x,t)U \quad (1.11)$$

Un vecteur de commande équivalente  $U_{eq}$  est défini pour obtenir les équations du régime glissant idéal ( sans retard ,sans seuil , sans hystérésis). Ce régime ayant lieu sur la surface  $S(x,t) = 0$ , on exprime que :

$$\frac{dS(x,t)}{dt} = 0$$

Cette équation est utilisée pour déterminer  $U_{eq}$

$$\frac{dS(x,t)}{dt} = \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial S}{\partial t} = \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^T \cdot [f(x,t) + g(x,t)U_{eq}] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

D'où

$$U_{eq}(x,t) = - \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^T \cdot g(x,t) \right]^{-1} \left\{ \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^T \cdot f(x,t) + \frac{\partial S}{\partial t} \right\} \quad (1.12)$$

Avec la condition d'existence

$$\left[ \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^T \cdot g(x, t) \right] \neq 0 \quad (1.13)$$

En portant l'expression de  $U_{eq}(x, t)$  dans l'équation (1.11) ; la trajectoire d'état d'état  $x(t)$  décrivant le système en régime glissant est solution de :

$$\frac{dx}{dt} = \left\{ I - g(x, t) \cdot \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \cdot g'(x, t) \right]^{-1} \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^T \right\} \cdot f(x, t) - g(x, t) \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \cdot g(x, t) \right]^{-1} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^T \quad (1.14)$$

L'équation (1.14) est équivalente à (1.10).

Le vecteur  $U_{eq}$  a un sens physique que l'on peut déduire des équations (1.6) :

$$U_{min} = \text{Min}\{U^+(x), U^-(x)\} < U_{eq}(x) < \text{Max}\{U^+(x), U^-(x)\} = U_{max}$$

On peut interpréter  $U_{eq}$  comme la valeur moyenne de  $U(t)$  lors de la commutation rapide entre  $U_{max}$  et  $U_{min}$  (Figure 1.4).

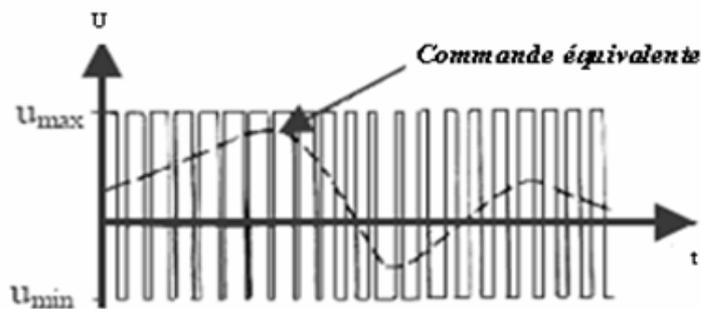


Figure 1.4 Grandeur de commande équivalente  $U_{eq}$

A titre d'exemple nous présenterons dans le paragraphe suivant les résultats précédents à un système linéaire du 2<sup>ème</sup> ordre auquel on appliquera une commande discontinue et une droite de commutation.

### 1.3.3 Exemple

Soit l'asservissement de la figure 1.5, considéré avec un fonctionnement en régulation ( $e(t) = 0$ ) et tel que l'ensemble partie commandée présente une fonction de transfert de la forme :

$$\frac{y}{U} = \frac{K}{(p^2 + 2\xi\omega p + \omega^2)} \quad \text{où } \omega > 0 \text{ et } p : \text{opérateur de Laplace}$$

Avec

$$K_{min} < K < K_{max}$$

$$\xi_{min} < \xi < \xi_{max}$$

On suppose que le système est non perturbé, ces inégalités traduisent l'effet des erreurs de modélisation.

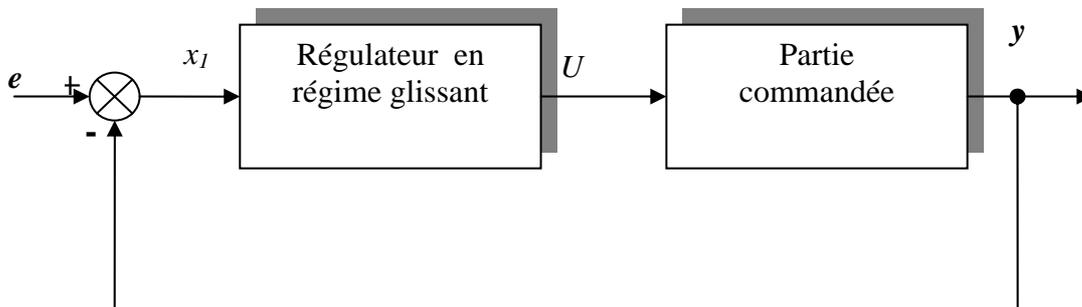


Figure 1.5 Exemple de système à structure variable avec régime glissant

La loi de commande choisie est de la forme  $U = \psi \cdot \varepsilon$  [57], avec  $\psi$  une fonction de type relais idéal pouvant prendre deux valeurs  $\psi^+$ ,  $\psi^-$  avec  $\psi^+ > \psi^-$ . Le système (1.1) devient en posant :

$$x = (x_1, x_2)^T \text{ et } x_2 = \dot{x}_1 \text{ (} e = 0 ; y = x_1 \text{)} ; \varepsilon = e - x_1$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -2\xi \cdot \omega \cdot x_2 - (K \cdot \Psi + \omega^2) \cdot x_1 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Soit  $S$ , la droite sur laquelle nous désirons que la discontinuité ait lieu (La commutation de  $U$  donc de  $\psi$ ). Son équation est :

$$S = \lambda \cdot x_1 + x_2 \quad (1.17)$$

La dérivée de  $S$  par rapport à  $t$ , évaluée sur  $S = 0$  et notée  $\dot{S}$  est proportionnelle à  $x_1$  (on suppose que  $e(t) = 0$ ) :

$$\dot{S} = (2\xi \cdot \omega \cdot \lambda - \lambda^2 - K \cdot \Psi - \omega^2) \cdot x_1 \quad (1.18)$$

Pour que le régime glissant soit effectif, tenant compte de la condition (1.4), nous sommes amenés à choisir les deux valeurs de  $\psi$  telle que :

$$U = \begin{cases} U^+ = -\Psi^+ x_1 & \text{si } x_1 \cdot S > 0 \\ U^- = -\Psi^- x_1 & \text{si } x_1 \cdot S < 0 \end{cases}$$

Ce qui impose :

$$\Psi^+ > \max_K \left[ \frac{2\xi \cdot \omega \cdot \lambda - \lambda^2 - \omega^2}{K} \right] \quad \text{et} \quad \Psi^- < \min_K \left[ \frac{2\xi \cdot \omega \cdot \lambda - \lambda^2 - \omega^2}{K} \right] \quad (1.19)$$

Le choix ainsi défini permet de satisfaire la condition de régime glissant quelles que soient les variations de paramètres définies en (1.15). Nous sommes donc assurés de l'insensibilité du système bouclé vis-à-vis des variations des paramètres  $K$  et  $\xi$ .

A partir de conditions initiales quelconques, avec des commandes  $\Psi^+ x_1$  et  $\Psi^- x_1$  remplissant (1.19), lorsque le point représentatif de l'évolution du système vient à rencontrer la droite, la trajectoire d'état devient la droite elle-même jusqu'au point de coordonnées (0,0) et cela quelles que soient les variations des paramètres  $K$  et  $\xi$  de la partie commandée.

La commande équivalente correspond à  $\dot{S} = 0$  s'écrit :

$$U_{eq} = \frac{2\xi \cdot \omega \lambda - \lambda^2 - \omega}{K}$$

La dynamique du système réduit est celle du système bouclé par le retour en mode de glissement, c'est-à-dire la dynamique d'équation  $\dot{x}_1 = -\lambda \cdot x_1$  qui n'est autre que la droite de glissement défini par  $S = 0$ . Ainsi les caractéristiques dynamiques du mouvement sont alors indépendantes des variations des paramètres de la partie commandée ainsi que des perturbations extérieures et ne dépendra que du paramètre  $\lambda$  caractérisant cette droite.

Le choix du coefficient  $\lambda$  de la droite de glissement  $S$  devra être tel que :

- ✓ L'origine soit stable pour toutes les trajectoires appartenant à la surface.
- ✓ Le comportement en régime glissant soit satisfait.

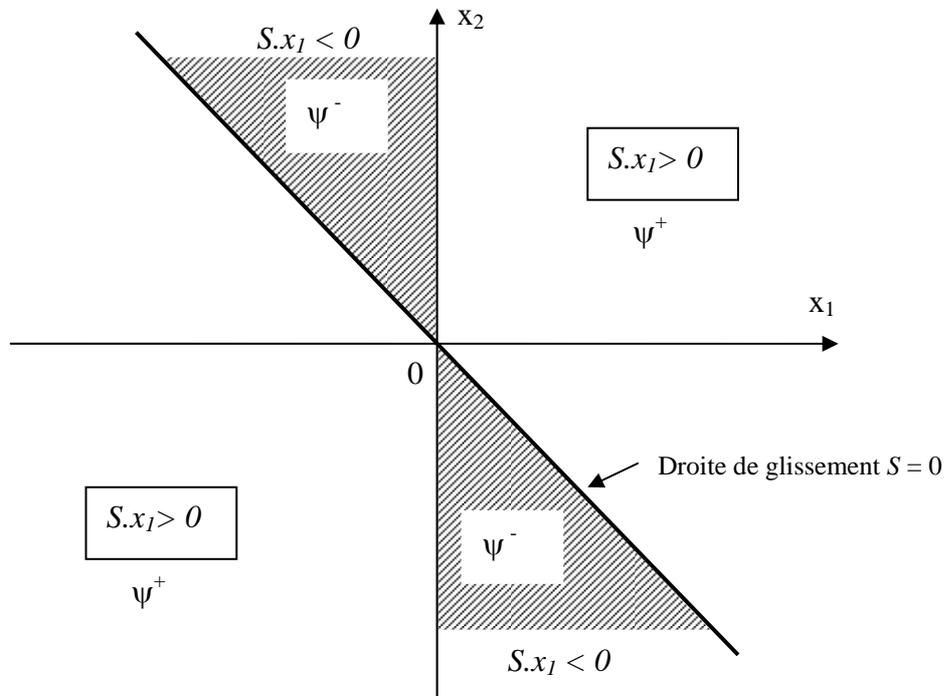


Figure 1.6 Plan de phase et différentes valeurs du gain de la commande  $U$

## 1.4 Formalisation par la géométrie différentielle pour l'analyse et la synthèse des régimes glissants.

Dans cette seconde formalisation nous utilisons des outils de base de la géométrie différentielle pour la synthèse des régimes glissants (mode de glissement, commande équivalente et invariance des régimes glissants par rapport aux perturbations).

### 1.4.1 Mode de glissement

Soit le système dynamique non linéaire décrit par l'équation (1.11) dans lequel le temps ne figure pas explicitement :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x) \cdot U \quad (1.20)$$

Où  $x \in X$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f(x)$  et  $g(x)$  des champs de vecteurs définis sur  $\mathbb{R}^n$ , avec  $g(x) \neq 0$

$$g(x) \neq 0; \forall x \in X, f(x) = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T, g(x) = [g_1, g_2, \dots, g_n]^T$$

La fonction commande  $U$  définie dans  $\mathbb{R}$ ,  $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Supposons que la fonction commande subisse une discontinuité de premier ordre sur une surface définie par une fonction continue  $S : X \rightarrow \mathbb{R}$ , dont le gradient est non nul sur  $X$ . L'ensemble suivant noté  $S$  sera défini ainsi :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : S(x) = 0\} \quad (1.21)$$

Et cet ensemble définit une hypersurface (variété de dimension  $(n-1)$ ), appelée surface de glissement.

Nous avons vu au paragraphe 1.3.1 que dans un système à structure variable, la condition de régime glissant entraînait l'introduction dans le régulateur d'une commutation de la commande entre deux valeurs différentes suivant le signe de  $S(x)$  :

$$U = \begin{cases} U^+(x) & \text{si } S(x) > 0 \\ U^-(x) & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

La commande  $U$  prend ainsi la valeur de deux fonctions continues en  $x$  et possède une discontinuité (avec  $U^+(x) \neq U^-(x)$ ) sur la variété formée par la surface de glissement dans l'espace d'état.

Nous désignons par  $L_h \sigma$  comme spécifié par [53], la dérivée directionnelle de la fonction scalaire  $\sigma$  suivant le champ de vecteur  $h$ .

A l'aide de la commande  $U$  définie en (1.22), la commutation d'une valeur à l'autre s'effectue à la traversée d'une hypersurface de l'espace des phases du système de façon à

contraindre le point représentatif du mouvement du système à rester sur cette hypersurface. On dit alors que le système est en régime glissant sur  $S$  chaque fois que :

$$\lim L_{f+g.U^+} \cdot S < 0 \quad \text{et} \quad \lim L_{f+g.U^-} \cdot S > 0 \quad (1.23)$$

Puisque  $\nabla S$  désigne le gradient de  $S(x)$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire de deux vecteurs la condition précédente (1.23) s'écrit sous la forme :

$$\lim \langle \nabla S, f + g.U^+ \rangle < 0 \quad \text{et} \quad \lim \langle \nabla S, f + g.U^- \rangle > 0 \quad (1.24)$$

Cette condition est équivalente à la condition classique (1.4) et traduit le résultat suivant :

La surface  $S$  sépare  $G$  ( domaine de l'espace des variables  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ) en deux parties  $G^+ (S > 0)$  et  $G^- (S < 0)$  ; si dans un petit voisinage les projections  $f+g.U^+$  et  $f+g.U^-$  sur le vecteur gradient de  $S$  sont de signes contraires , alors la surface  $S$  sera attractive et les champs commandés se dirigent vers la surface de commutation  $S$ .

La figure suivante (1.7) est à rapprocher de la figure (1.1).

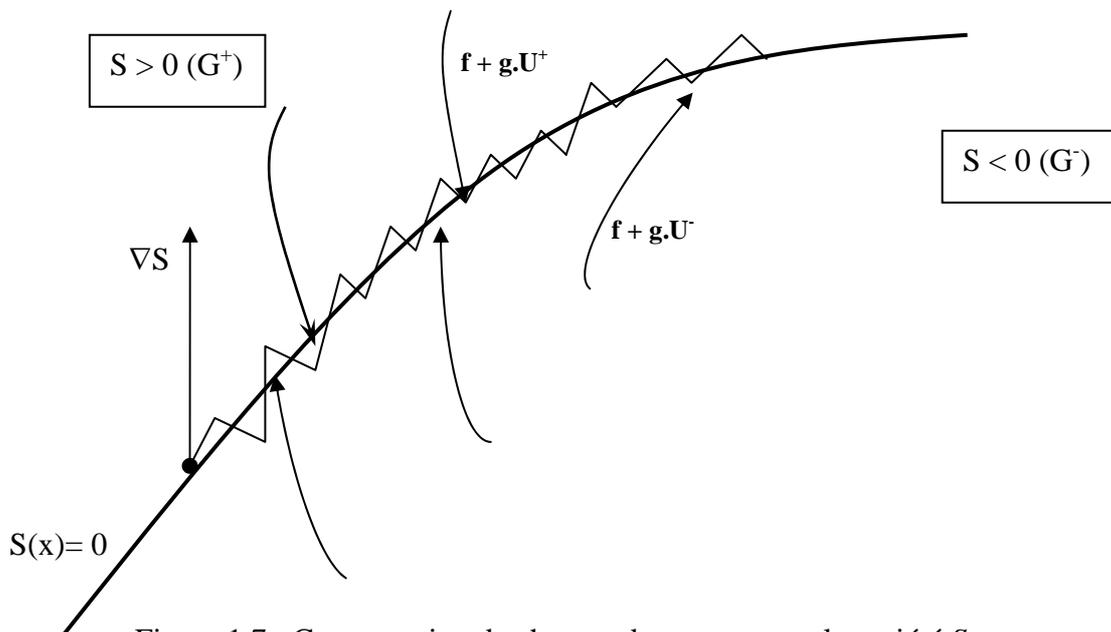


Figure 1.7 : Commutation de champs de vecteurs sur la variété  $S$

### 1.4.2 La commande équivalente et la condition de glissement

Le vecteur des commandes équivalentes  $U_{eq}$  est défini pour obtenir les équations du régime glissant idéal dans ce cas la commutation se traduit par une oscillation de fréquence infinie et d'amplitude nulle. Le point représentatif du mouvement du système glisse alors

parfaitement sur la surface de commutation. Ceci explique par le fait que la surface de glissement porte dans ce cas la trajectoire du système dans l'espace des phases.

Le mouvement glissant idéal est décrit en utilisant les conditions d'invariances suivantes :

$$S(x) = 0 \quad \text{et} \quad L_{f+g.U_{eq}}.S = \langle \nabla S, f + g.U_{eq} \rangle = 0 \quad (1.25)$$

Où  $U_{eq}$  est une loi de commande pour laquelle  $S$  est une variété locale invariante.

De l'équation (1.25), on déduit la commande équivalente :

$$U_{eq} = -\frac{\langle \nabla S, f \rangle}{\langle \nabla S, g \rangle} = -\frac{L_f.S}{L_g.S} \quad (1.26)$$

Cette expression pour la commande équivalente est en effet égale à l'expression de l'équation (1.12).

Notons par  $T_x X$  l'espace tangent à  $X$  en  $x$  et soit  $\Delta_S(x)$  un sous espace de  $T_x X$ , tel que :

$$\langle \nabla S, \Delta_S(x) \rangle = 0 \quad \text{ie} \quad \Delta_S(x) = \text{Ker} \nabla S$$

Où  $\Delta_S(x)$  est appelée distribution glissante associée à  $S$  et  $\text{Ker}$  représente le noyau de  $\nabla S$ .

Les conditions d'invariance (1.25) conduisent à :

$$f + g.U_{eq}|_{S=0} \in \text{Ker} \nabla S = \Delta_S(x) \quad (1.27)$$

L'équation (1.27) est équivalente à l'équation (1.12) dans le formalisme classique.

La dynamique du système commandé en mode de glissement idéal est alors décrite par :

$$\frac{dx}{dt} = f + g.U_{eq}(x)$$

Cette dynamique ne dépend que des coefficients de  $S = 0$ , hypersurface sur laquelle se trouve la trajectoire  $x(t)$  solution de (1.20).

### 1.4.3 Condition d'existence et d'unicité de la commande équivalente

Cette condition a été élaborée par [53].

**Lemme 1 :** Une condition nécessaire et suffisante pour définir une commande équivalente est que la condition de transversalité :

$$\langle \nabla S, g \rangle \neq 0 \quad (1.28)$$

Soit localement satisfaite sur  $S$ .

**Preuve :** Si la commande équivalente est bien définie (1.26) , alors nécessairement on aura :

$$\langle \nabla S, g \rangle = L_g S \neq 0$$

L'interprétation géométrique de cette condition est pour le champ de vecteur  $g$  :

$$g \notin \text{Ker} \nabla S = \Delta_S(x).$$

Autrement dit,  $g$  ne peut pas être tangentielle à la surface de glissement  $S$ , donc  $g$  est transversal à  $\text{Ker} \nabla S$ . De plus lorsque la commande équivalente existe localement sur  $S$ , elle est unique. La condition (1.28) doit être comparée à (1.13).

Pour montrer l'unicité de la commande équivalente, nous supposons que les conditions d'invariance (1.25) sont satisfaites pour deux commandes équivalentes  $U_{1eq}$  et  $U_{2eq}$ . D'après la condition (1.25) nous avons alors :

$$\langle \nabla S, f + g.U_{1eq} \rangle = \langle \nabla S, f + g.U_{2eq} \rangle = 0$$

Donc :

$$\langle \nabla S, g.(U_{1eq} - U_{2eq}) \rangle = 0$$

Comme la condition de transversalité est vérifiée ( Lemme1), on aura forcément :

$$U_{1eq} = U_{2eq}$$

**Lemme 2 :** Si le régime glissant existe localement sur  $S$  alors :

$$L_g S = \langle \nabla S, g \rangle < 0 \quad (1.29)$$

**Preuve :** A partir des conditions d'existence des régimes glissants sur  $S$  , données par les relations (1.23) et (1.24) on peut écrire :

$$L_{f+g.U^+} S = \langle \nabla S, f + g.U^+ \rangle < 0$$

$$L_{f+g.U^-} S = \langle \nabla S, f + g.U^- \rangle > 0$$

On déduit :

$$L_{f+g.U^+} S - L_{f+g.U^-} S = \langle \nabla S, f + g.U^+ \rangle - \langle \nabla S, f + g.U^- \rangle < 0$$

$$L_{(U^+ - U^-).g} S = (U^+ - U^-) \langle \nabla S, g \rangle < 0$$

D'où la relation :

$$(U^+ - U^-) L_g S = (U^+ - U^-) \langle \nabla S, g \rangle < 0$$

Tenant compte de l'hypothèse  $U^+ > U^-$ , il en résulte :  $L_g S = \langle \nabla S, g \rangle < 0$

**Théorème 1 :** Une condition nécessaire et suffisante d'existence locale des régimes glissants sur  $S$  est que localement dans  $X$  :

$$U^-(x) < U_{eq}(x) < U^+(x) \quad (1.30)$$

**Preuve :** Supposons que le régime glissant existe localement sur  $S$ , les inéquations (1.24) donnent :

$$\langle \nabla S, f + g.U^+(x) \rangle = \langle \nabla S, f \rangle + U^+(x)\langle \nabla S, g \rangle < 0$$

En vertu du lemme 2 (transversalité) et de l'équation (1.26)

$$\frac{\langle \nabla S, f \rangle}{\langle \nabla S, g \rangle} + U^+(x) = -U_{eq}(x) + U^+(x) > 0 \Rightarrow U_{eq}(x) < U^+(x)$$

Par le même raisonnement on établit :

$$\langle \nabla S, f + g.U^-(x) \rangle = \langle \nabla S, f \rangle + U^-(x)\langle \nabla S, g \rangle > 0$$

D'où :

$$\frac{\langle \nabla S, f \rangle}{\langle \nabla S, g \rangle} + U^-(x) = -U_{eq}(x) + U^-(x) < 0 \Rightarrow U^-(x) > U_{eq}(x)$$

Montrons l'implication inverse du théorème. Soit  $U_{eq}$  une fonction de commande qui satisfait les conditions (1.26) et (1.30), alors :

$$0 < U_{eq}(x) - U^-(x) < U^+(x) - U^-(x)$$

Ou encore :

$$0 < \frac{U_{eq}(x) - U^-(x)}{U^+(x) - U^-(x)} = W_{eq}(x) < 1$$

On a : 
$$U_{eq}(x) = U^+(x).W_{eq} + (1 - W_{eq})U^-(x)$$

Tenant de (1.25) on aura :

$$\langle \nabla S, f + g.U_{eq} \rangle = W_{eq} \langle \nabla S, f + g.U^+ \rangle + (1 - W_{eq}) \langle \nabla S, f + g.U^- \rangle = 0$$

Ces équations sont vraies si les expressions  $\langle \nabla S, f + g.U^+(x) \rangle$  et  $\langle \nabla S, f + g.U^-(x) \rangle$

sont de signes contraires sur  $S$ . Comme l'orientation de  $S$  est arbitraire, on peut toujours avoir localement sur  $S$  les conditions :

$$\langle \nabla S, f + g.U^-(x) \rangle > 0 \quad \text{et} \quad \langle \nabla S, f + g.U^+(x) \rangle < 0$$

Ceci nous amène au choix de la commande de la forme (1.6) :

$$U(x) = \begin{cases} U^+(x) & \text{si } S(x) > 0 \\ U^-(x) & \text{si } S(x) < 0 \end{cases}$$

qui satisfait :

$$\langle \nabla S, f + g.U_{eq} \rangle \Big|_{S=0} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \langle \nabla S, f + g.U^+ \rangle = \lim_{s \rightarrow 0} L_{f+g.U^+} S < 0$$

et

$$\langle \nabla S, f + g.U^-(x) \rangle \Big|_{S=0} = \lim_{s \rightarrow 0^-} \langle \nabla S, f + g.U^- \rangle = \lim_{s \rightarrow 0^-} L_{f+g.U^-} S > 0$$

Ceci explique l'existence du régime glissant sur la surface  $S$ . Ces inégalités représentent en effet les conditions d'existence du régime glissant données précédemment (1.23) et (1.24).

On aurait pu supposer  $U_{eq}(x)$  définie avec  $U^+ < U^-$  ; comme au paragraphe précédent, la condition nécessaire et suffisante d'existence locale du régime glissant peut être exprimée par :

$$U_{min} = \min\{U^+(x), U^-(x)\} < U_{eq}(x) < \max\{U^+(x), U^-(x)\} = U_{max}$$

#### 1.4.4 Dépendance et indépendance du régime glissant idéal vis-à-vis des champs de vecteurs $f(x)$ et $g(x)$ .

A partir de l'expression de la commande équivalente, donnée par (1.26) et (1.13) le mouvement du système sur  $S$ , dû à la commande équivalente est donné par :

$$\dot{x} = f(x) + g(x).U_{eq}(x) = \left[ I - g(x).(\langle \nabla S, g(x) \rangle)^{-1}.(\nabla S) \right] f(x) \quad (1.31)$$

Cette dernière équation caractérise le système en mode de glissement idéal qui représente la moyenne de la trajectoire du système décrit en (1.20) soumise à la commande donnée en (1.22) sur la surface de glissement  $S$ .

La condition d'invariance de la variété donnée en (1.27) sera de la forme :

$$f(x) + g(x).U_{eq}(x) = F.f(x) \in \ker \nabla S(x) = \Delta_S(x) \quad (1.32)$$

Où :

$$F = \left[ I - g(x) \langle \nabla S, g(x) \rangle^{-1} \langle \nabla S \rangle \right]$$

Représente l'opérateur de projection sur l'espace  $T_x X$ .

Le long de la distribution  $\Delta_s(x)$ , les composantes du champ vecteur  $f$  définissent seules la nature du mode de glissement idéal. Montrons en effet que le champ de vecteur  $g$  n'a aucune influence dans le mode de glissement idéal.

Pour cela, considérons la distribution  $G : x \rightarrow \text{Span}\{g(x)\}$  ; avec  $\text{Span}\{g(x)\}$ , l'espace engendré par la base  $g(x)$ . Soit une distribution de champ de vecteurs  $\Delta G \in \text{Span}\{g(x)\}$  ie, des vecteurs de la forme  $g(x).U(x)$ .

Considérons l'expression donnée par  $F.g(x).U(x)$ , on aura :

$$\begin{aligned} \left[ I - g(x) \langle \nabla S, g(x) \rangle^{-1} \langle \nabla S \rangle \right].g(x).U(x) = \\ \left[ g(x) - g(x) \langle \nabla S, g(x) \rangle^{-1} \langle \nabla S, g(x) \rangle \right].U(x) = 0.U = 0 \end{aligned} \quad (1.33)$$

Ainsi, le champ de vecteurs  $g(x)$  n'intervient pas dans le mode de glissement idéal définie par (1.32).

#### 1.4.5 Invariance des régimes glissants par rapport aux perturbations.

Considérons le système dynamique perturbé suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x).U(x) + \zeta \quad (1.34)$$

Avec :  $\zeta = \delta f(x)$ ,

$\zeta$  Représente les perturbations paramétriques du champ de vecteurs nominal  $f$ . On dit que le régime glissant possède une propriété d'invariance forte vis-à-vis du vecteur perturbateur  $\zeta$ , chaque fois que  $\zeta$  satisfait la définition suivante [44].

**Définition :** Le régime glissant idéal jouit de propriété d'invariance forte par rapport au signal de perturbation  $\zeta$  chaque fois que la dynamique du système en mode de glissement idéal est indépendante du signal de perturbation  $\zeta$ .

**Théorème 2 :** Le régime glissant sur la variété  $S$  du système perturbé (1.34), satisfait les propriétés d'invariance vis-à-vis de  $\zeta$ , si et seulement si le vecteur de perturbation satisfait la condition suivante :

$$\zeta \in \text{Span}\{g(x)\} \quad (1.35)$$

Avec  $\text{Span}$  l'espace engendré par la base  $g(x)$ .

**Preuve :** Pour le système dynamique perturbé (1.34), le régime glissant idéal est gouverné par :

$$\frac{dx}{dt} = F(f + \delta f)$$

Avec  $F$  l'opérateur de projection et  $\delta f \equiv \zeta$ .

La condition nécessaire vient du fait que si :

$$F.\zeta = \left[ I - g(x) \left( \langle \nabla S, g(x) \rangle \right)^{-1} \langle \nabla S \rangle \right].\zeta = 0$$

Alors on déduit :

$$\zeta = \left\{ g(x) \left( \langle \nabla S, g(x) \rangle \right)^{-1} \langle \nabla S \rangle \right\} \mu(x)$$

C'est-à-dire  $\zeta \in \text{Span}\{g(x)\}$  pour toute fonction scalaire continue  $\mu(x)$ .

La condition suffisante vient du fait que si  $\zeta \in \text{Span}\{g(x)\}$ , soit  $\zeta = g(x).\mathcal{G}(x)$  pour toute fonction scalaire continue  $\mathcal{G}(x)$ , alors tenant compte de (1.33) l'opérateur de projection  $F$  annule l'influence de  $\zeta \in \text{Span}\{g(x)\}$  sur la dynamique équivalente.

**Théorème 3 :** Soit  $\zeta \in \text{Span}\{g(x)\}$  et  $U_{eq}(x)$  la commande équivalente correspondant au régime sur  $S$  du système non perturbé (1.20). Soient  $U^+(x)$  et  $U(x)$  les bornes fixes de la loi de commande à structure variable, avec  $U^+(x) > U(x)$  localement dans  $X$ . Si le régime glissant existe pour le système perturbé (1.34) alors, nécessairement, le vecteur perturbateur s'écrit  $\zeta = g(x).\mathcal{G}(x)$  avec  $\mathcal{G}(x)$  une fonction scalaire continue bornée.

$$U_{eq}(x) - U^-(x) > \mathcal{G}(x) > U_{eq}(x) - U^+(x) \quad (1.36)$$

**Preuve :** Si le régime glissant existe pour le système perturbé alors d'après (1.24) :

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \left\langle \nabla S, f + g.U^+ + \zeta \right\rangle = \lim_{s \rightarrow 0} \left\langle \nabla S, f + \left( \mathcal{G} + U^+ \right) g \right\rangle < 0$$

et

$$\lim_{s \rightarrow 0^-} \left\langle \nabla S, f + g.U^- + \zeta \right\rangle = \lim_{s \rightarrow 0^-} \left\langle \nabla S, f + \left( \mathcal{G} + U^- \right) g \right\rangle > 0$$

Ceci correspond à l'existence du régime glissant pour le système non perturbé avec une loi de commande à structure variable de type :

$$U = \begin{cases} U^+ + \mathcal{G} & \text{si } S(x) > 0 \\ U^- + \mathcal{G} & \text{si } S(x) < 0 \end{cases}$$

Et d'après le théorème 1 du paragraphe précédent, on aura :

$$U^-(x) + \mathcal{G}(x) < U_{eq}(x) < U^+(x) + \mathcal{G}(x)$$

Ou encore :

$$U_{eq}(x) - U^-(x) > \mathcal{G}(x) > U_{eq}(x) + U^+(x)$$

Cette condition d'invariance par rapport aux perturbations se rapproche à la condition d'invariance par rapport aux perturbations externes développée dans la formalisation classique.

## **1.5 Formalisation de la structure variable dans le contexte de l'algèbre différentielle.**

Au niveau de ce paragraphe, nous allons nous intéresser au problème de la commande discontinue des systèmes non linéaires ayant une dynamique décrite à l'aide du concept « Forme Canonique de Commande Généralisée », introduit par M. Fliess [19] [20].

De la forme canonique de commande généralisée découle un bouclage dynamique permettant d'obtenir une dynamique linéaire pour le système bouclé [18] [19].

Une telle approche permet l'utilisation des bouclages discontinus par l'introduction des commutations de commande sur l'entrée ou les composantes de l'entrée. Ces discontinuités peuvent être utilisées pour résoudre certains problèmes de commande des systèmes non linéaires [50] [53]. De tels bouclages peuvent être synthétisés selon la technique des structures variables à régimes glissants.

Nous présenterons dans ce formalisme un bouclage à structure variable en régime glissant dans le mode poursuite de trajectoire et ce pour un système non linéaire.

### **1.5.1 Forme canonique de la commande généralisée d'un système non linéaire monovarié et bouclage linéarisation. Exemple**

Considérons le système non linéaire analytique monovarié de dimension  $n$  d'équations :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, U) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.37)$$

Où  $x$  désigne l'état,  $U$  la commande et  $y$  la sortie. La première équation est de la forme (1.20) ; il lui correspond après élimination de  $x$  une formulation implicite d'entrée-sortie du type :

$$C(y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}, U, \dot{U}, \dots, U^{(\alpha)}) = 0 \quad (1.38)$$

Il est possible d'obtenir un bouclage linéarisation qui soit générique de différents types de correcteurs.

### 1.5.1.1 Dynamique non linéaire et Algèbre différentielle :

Nous exploitons le formalisme de l'Algèbre différentielle et plus particulièrement les propriétés des corps commutatifs différentiels pour définir une dynamique non linéaire qu'elle soit généralisée (les dérivés de l'entrée  $U$  interviennent) ou dégénérée (seule la commande intervient).

Soit  $K$  un corps différentiels, corps commutatif muni d'une dérivation unique. Notons  $k\langle U \rangle$  le corps différentiel engendré par  $k$  (corps différentiel de base) et l'entrée  $U$ , avec  $k\langle U \rangle \subset K$ . Une dynamique est une extension différentielle algébrique  $K/k\langle U \rangle$  de type fini de  $k\langle U \rangle$ . Cette extension différentielle est dite finiment engendrée, c'est-à-dire engendrée par un nombre fini d'éléments : toute base de transcendance de cette extension est de dimension finie, appelée le degré de transcendance différentielle associé à cette base.

Soit  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  un état généralisé minimal qui est une base de transcendance de  $K/k\langle U \rangle$  ; alors la dépendance algébrique  $k\langle U \rangle$  de ses composantes et l'invocation du théorème des fonctions implicites [36] fournissent une représentation explicite de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= a_1(\zeta, U, \dot{U}, \dots, U^{(\alpha)}) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \dot{\zeta}_n &= a_n(\zeta, U, \dot{U}, \dots, U^{(\alpha)}) \end{aligned} \quad (1.39)$$

Il existe un élément  $\xi \in K$ , tel que  $K = k\langle U, \xi \rangle$  c'est-à-dire que  $K$  est différentiellement engendré par  $k\langle U \rangle$  et  $\xi$ .

Le degré de transcendance  $n$  de  $K/k\langle U \rangle$ , est alors le plus petit entier tel que  $\xi^{(n)}$  soit

$k \langle U \rangle$  algébriquement dépendant de  $\xi, \dot{\xi}, \dots, \xi^{(n-1)}$  (ce degré de transcendance correspond au nombre de conditions initiales nécessaires).

$\{\xi, \dot{\xi}, \dots, \xi^{(n-1)}\}$  est alors une base de transcendance de  $K/k \langle U \rangle$  et il est possible d'écrire :

$$c(\xi^{(n-1)}, \dots, \dot{\xi}, \xi, U, \dot{U}, \dots, U^{(\alpha)}) = 0 \tag{1.40}$$

On pose :  $\eta_1 = \xi, \dots, \eta_n = \xi^{(n-1)}$  alors  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$  est une base de transcendance de  $K/k \langle U \rangle$ , qui fournit pour le système d'équation ( 1.37) une généralisation non linéaire de la forme canonique de commande que l'on désigne par GCCF, écrite sous forme explicite locale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\eta}_1 = \eta_2 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dot{\eta}_{n-1} = \eta_n \\ \dot{\eta}_n = C(\eta, U, \dot{U}, \dots, U^{(\alpha)}) \end{array} \right. \tag{1.41}$$

$C$  est un polynôme à coefficient dans  $k$ .

**1.5.1.2 Formes canoniques généralisées de commande ( GCCF) et d'observabilité (GOCF).**

De la qualification de la variable de sortie  $y = \eta_1 = \xi$  comme élément primitif différentiel, la forme canonique d'observabilité généralisée ( GOCF), est présentée localement par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\eta}_1 = \eta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{\eta}_{n-1} = \eta_n \\ \dot{\eta}_n = C(\eta, U, \dot{U}, \dots, U^{(\alpha)}) \\ y = \eta_1 \end{array} \right. \tag{1.42}$$

Avec cette représentation d'état choisie, les composantes de l'état ont la signification physique de dérivées de la sortie.... ; il apparaît donc une reformulation de l'équation entrée-sortie du processus. Ainsi, la GOCF à  $(n+1)$  équations et la GCCF à  $n$  équations se correspondent.

### 1.5.1.3 Exemple :

Considérons le cas classique d'un système monovariable non linéaire, pour lequel les équations (1.37) s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + U \\ \dot{x}_2 = x_2 \cdot x_3 \\ \dot{x}_3 = U \cdot x_1 \\ y = x_1 \end{cases}$$

Par élimination de  $x$  on obtient pour l'équation (1.38) :

$$(\dot{y} - U)(\ddot{y} - \dot{U}) - (\ddot{y} - \ddot{U})^2 - U \cdot y(\dot{y} - U)^2 = 0$$

En prenant comme élément primitif différentiel la sortie  $y = x_1 = \eta_1$  et en définissant un nouvel état  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  avec  $\eta_1 = y = x_1; \eta_2 = \dot{x}_1; \eta_3 = \ddot{x}_1$  on obtient les formes canoniques GOCF et GCCF suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 = \eta_3 \\ \dot{\eta}_3 = U \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 - U^2 \cdot \eta_1 + \frac{(\eta_3 - \dot{U})^2}{\eta_2 - U} + \ddot{U} \\ y = \eta_1 \end{cases}$$

### 1.5.1.4 Bouclage linéarisant – Dynamique dégénérée et non dégénérée :

A partir de la forme GCCF ou de la GOCF, on introduit un bouclage linéarisant avec la formulation suivante [21] :

$$C(\eta, U, \dot{U}, \dots, U^{(\alpha)}) = \sum_{i=1}^n a_i \eta_i + b \cdot v \quad (a_1, a_2, \dots, a_n, b \in k) \quad (1.43)$$

Où  $v$  désigne une nouvelle entrée. De cette équation différentielle, où la commande  $U$  est l'inconnue, résulte une loi de bouclage dynamique sur l'état  $\eta$ . L'élaboration de la commande  $U$  consiste donc dans la résolution de cette équation qui apparaît comme générique de nombreux types de correcteurs caractérisés par les gains  $a_i$ , la nouvelle entrée  $v$  et le gain associé  $b$ . Le bouclage est dit statique si la GCCF du système ne contient pas des dérivées de l'entrée ; la dynamique est alors dégénérée. Lorsque les dérivés interviennent, la dynamique est dite généralisée (non dégénérée).

*Exemple* : Considérons l'exemple précédent, un bouclage linéarisant peut être écrit sous la forme (1.43) :

$$U \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 - U^2 \cdot \eta_1 + \frac{(\eta_3 - \dot{U})^2}{\eta_2 - U} + \ddot{U} = \sum_{i=1}^3 a_i \cdot \eta_1 + v$$

Où les  $a_i$ ,  $i=1, 2, 3$  sont choisis de façon que le système linéaire d'équation caractéristique  $a_1 + a_2 s + a_3 s^2 = 0$  soit stable.

### 1.5.2 Forme canonique de commande généralisée d'un système monovariante non linéaire en poursuite de trajectoire.

Considérons un asservissement pour lequel on veut déterminer une commande permettant de configurer le système défini par l'équation (1.37) dans la position que l'on désire correspondant à une trajectoire de référence définie par

$$\xi_R(t) = (y_R(t), \dot{y}_R(t), \dots, y_R^{(n-1)}(t))$$

Dans ce qui suit, on établit une dynamique pour l'erreur de poursuite  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n) = \eta - \xi_R(t)$  avec  $\eta(t) = (y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$  l'état du système. Puis on introduit un bouclage linéarisant et on cherche à annuler cette erreur en un temps fini par l'utilisation d'une surface glissante d'un algorithme à structure variable.

#### 1.5.2.1 Dynamique non linéaire de l'erreur de poursuite et bouclage :

A partir du système d'équation (1.41) et avec la notation  $\dot{e}_i = e_i^{(i-1)}$  ( $e_i$  coïncide avec la  $(i-1)$ ème dérivée  $i = 1, \dots, n$ ), on obtient un couple GCCF, GOCF relatif à l'erreur de poursuite écrite dans le cas d'une dynamique non dégénérée (les dérivées de l'entrée interviennent).

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{e}_{n-1} = e_n \\ \dot{e}_n = C(\xi_R(t) + e, U, \dot{U}, \dots, U^{(\alpha)}) - y_R^{(n)}(t) \\ e_1 = y - y_R \end{cases} \quad (1.44)$$

La dynamique résultante définie par le système d'équation (1.44) concerne le vecteur d'erreur  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ , entre l'état  $\eta$  du système et la trajectoire de référence  $\xi_R(t) = (y_R(t), \dot{y}_R(t), \dots, y_R^{(n-1)}(t))$  pour l'entrée  $U$ . Le système d'entrée  $U$ , de sortie  $y$  et

de consigne  $y_R$  peut être considéré comme bouclé avec  $\dot{e}_n$  qui est alors la fonction caractéristique du bouclage ( dans le cas d'un bouclage linéarisant  $\dot{e}_n$  peut être une fonction linéaire par rapport aux variables  $\dot{e}_i$  ).

### 1.5.2.2 Bouclage linéarisant avec régime glissant et commutation sur l'entrée :

Considérons les systèmes à structure variable qui permettent d'assurer le régime glissant sur une hypersurface définie par le vecteur  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ , dans le suivi d'une trajectoire de référence dont chaque point est défini par le vecteur :

$$\xi_R(t) = (y_R(t), \dot{y}_R(t), \dots, y_R^{(n-1)}(t))$$

Dans de tels systèmes , l'utilisation au niveau du contrôleur d'éléments de commutation, permet d'amener et de maintenir le point figuratif de l'évolution du système sur une hypersurface  $S$  de l'espace de phase d'équation  $S = 0$ . Supposons cette hypersurface linéaire par rapport aux variables d'état, son équation s'écrit :

$$S = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \quad \text{avec } \lambda_n = 1 \quad (1.45)$$

$\lambda_i$  représentent les coefficients de la surface de glissement  $S$ .

Lorsque le point figuratif a atteint cette hypersurface , le mouvement s'effectue en régime glissant. Le système jouit alors d'une propriété d'insensibilité vis-à-vis des variations de paramètres dynamiques et son comportement ne dépend plus que des paramètres  $\lambda_i$  qui définissent l'hypersurface de glissement.

On peut introduire la surface glissante dans l'équation d'un bouclage linéarisant de plusieurs manières [55] [36]. Nous présentons l'approche de [55].

Supposons que la surface  $S$  soit solution de :

$$\frac{dS}{dt} + \mu S = -\mu \cdot \Omega \cdot \text{Sgn}(S)$$

avec :

$$\begin{cases} \text{Sgn}(S) = +1 & \text{si } S > 0 \\ \text{Sgn}(S) = 0 & \text{si } S = 0 \\ \text{Sgn}(S) = -1 & \text{si } S < 0 \end{cases}$$

$$\mu > 0; \quad \Omega > 0$$

Alors la surface glissante est atteinte lorsque  $S = 0$  et ce en un temps fini

$$T = \mu^{-1} \cdot \ln \left[ 1 + \frac{|S(0)|}{\Omega} \right] \text{ et l'erreur s'annule.}$$

L'équation de la surface de glissement s'écrit sous la forme :

$$S = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = e_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i \quad \text{avec } \lambda_n = 1$$

En dérivant :

$$\dot{S} = \dot{e}_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \dot{e}_{i+1} = -\mu \left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + \Omega \cdot \text{Sgn} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) \right]$$

On en déduit pour le bouclage linéarisant

$$C(\xi_R(t) + e, U, \dot{U}, \dots, U^{(\alpha)}) = y_R^{(n)}(t) - \sum_{i=n}^{n-1} \lambda_i e_{i+1} - \mu \left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + \Omega \cdot \text{Sgn} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) \right] \quad (1.46)$$

Cette dernière équation où  $U$  est l'inconnue représente l'équation du correcteur discontinu avec retour d'état dynamique et à structure variable.

En régime glissant lorsque  $S = 0$  et  $dS/dt = 0$ , la dynamique résultante qui celle du système réduit de dimension  $(n-1)$  et libre, sera décrite par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_1 = e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{e}_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i \end{array} \right. \quad (1.47)$$

Le choix des paramètres  $\lambda_i$  garantit la stabilité du système en un temps fini.

### 1.5.2.3 Commande équivalente. Régime glissant généralisé et régime glissant dégénéré :

La commande équivalente  $U_{eq}$  du régime glissant idéal est la solution de l'équation différentielle implicite suivante :

$$C(\xi_R(t) + e, U_{eq}, \dot{U}_{eq}, \dots, U_{eq}^{(\alpha)}) = y_R^{(n)}(t) - \sum_{i=n}^{n-1} [\lambda_{i-1} - \lambda_{n-1} \cdot \lambda_i] e_i \quad \text{avec } \lambda_0 = 0$$

Au point d'équilibre, en régime glissant idéal, la poursuite de trajectoire vérifie l'équation :

$$C(\xi_R(t) + e, U, \dot{U}, \dots, U^{(\alpha)}) = y_R^{(n)}(t) \quad (1.48)$$

Ainsi, comme nous avons distingué deux dynamiques, l'une dégénérée (les dérivées de l'entrée interviennent) et l'autre dégénérée (quand seule la commande intervient), nous distinguerons deux types de régimes glissants :

- ✓ Les régimes glissants généralisés (ou non dégénérés) [19] : dans l'équation (1.46), la commutation se fait sur la dérivée d'ordre le plus élevé de l'entrée  $U$ . Ceci se traduit par un régime glissant de type nouveau où la discontinuité n'intervient plus sur l'entrée mais sur sa dérivée d'ordre le plus élevé. Ceci permet d'éviter les phénomènes de broutement ( Chattering), liés à des commutations trop rapides [53].
- ✓ Les régimes glissants dégénérés ou classiques : les dérivés de l'entrée n'interviennent pas dans l'équation du correcteur ou encore les commutations ont lieu sur l'entrée  $U$ . Dans ce mémoire nous traiterons uniquement de ce cas,( dégénéré).

Dans tout ce qui précède nous avons traité du cas de poursuite, mais cette théorie reste valable dans le cas du mode de régulation et les équations se simplifient car  $\xi_R = y_R$

### 1.5.3 Forme canonique de commande généralisée à structure variable, associée à un système non linéaire multivariable dans le mode poursuite.

La technique du régime glissant généralisée a été étendue à un système non linéaire multivariable , sous certaines contraintes, en ayant recours aux diverses techniques de découplage [21] [36]. Pour un système multivariable (  $m$  entrées et  $m$  sorties) , supposées découplées en poursuite de trajectoire, nous appliquons les résultats du paragraphe (1.5.2) , et à chaque sous système de dimension  $n_i$  , d'entrée  $U_i$  et de sortie  $y_i$  ; la trajectoire de référence correspondante est notée  $\xi_{R_i}$  . L'introduction du régime glissant s'effectue par le choix de  $m$  surface de commutations permettant de stabiliser chaque sortie  $y_i$  . Pour chaque sous système l'hyperplan de commutation correspondant dans l'espace d'état de l'erreur  $e$  sera :

$$S_i(e) = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} \cdot e_{ij} \quad \text{avec } \lambda_{ij} > 0; i = 1, 2, \dots, m \quad (1.49)$$

La sortie  $y_i$  étant influencée par les entrées et leurs dérivées. Si les conditions de glissement sont respectées, chaque sous système évolue en régime glissant sur son hypersurface , chaque erreur  $e_{ij}$  est stabilisée asymptotiquement sur l'origine.

Dans le cas dégénéré, l'approche proposée dans la suite du mémoire est une simplification du problème par découplage qui ramène le système multivariable à  $m$  système monovariabes avec une hiérarchisation des  $m$  surfaces de glissement [61].

La commande choisie pour le  $k$ ème sous-système est de la forme :

$$U_k = \begin{cases} U_k^+ & \text{si } S_k(e) > 0 \\ U_k^- & \text{si } S_k(e) < 0 \end{cases} \quad (1.50)$$

Au niveau de cette technique, le calcul de la commande  $U_k$  du  $k$ ème sous-système suppose que les  $(k-1)$  premiers sous-systèmes sont en mode de glissement et la commande  $U_k$  dépend des signes de  $S_{k+1} \dots S_m$ .

## 1.6 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons exposé une synthèse des principaux résultats sur la commande à structure variable en régime glissant idéal dans trois formalisations.

Dans la formalisation classique nous avons rappelé les concepts de base. La formalisation par la géométrie par la géométrie différentielle nous a permis d'interpréter de manière simple les principaux résultats des régimes glissants. Dans la formalisation par l'algèbre différentielle, le concept de bouclage linéarisation nous a conduit à une commande à structure variable en régime glissant avec commutation sur l'entrée valable pour le mode poursuite de trajectoire et pour le mode de régulation et hiérarchisée si le système est multivariable.

Nous avons étudié dans ces formalisations trois caractéristiques essentielles : La condition d'existence du régime glissant, la commande équivalente du régime glissant idéal et l'invariance du régime glissant par rapport aux perturbations. La commande définie assure la mise en régime glissant de l'état du système bouclé sur une hypersurface. Les propriétés dynamiques du système commandé ne dépendent plus que des paramètres de l'hypersurface de glissement : on peut affirmer que le système original est plongé dans l'état du système réduit et libre dont la dynamique est définie par la surface de glissement.

Dans le chapitre suivant, plus méthodologique, nous exposerons la détermination pratique des commandes effectives qui seront adaptés à la commande des systèmes non linéaires.

## Chapitre 2 : Algorithmes de commande à structure variable

---

### 2.1 Introduction

Ce sont les travaux de recherche effectués par A. F. PHILIPPOV publiés en 1960 [34] sur les équations à seconds membres discontinus qui ont donné naissance à l'idée de système de contrôle à structure variable, par la suite plusieurs travaux ont été effectués par l'équipe du Professeur S.V. EMEL'YANOV [15] et publiés en 1962 sur cette classe particulière de système de contrôle. Cette commande consiste à amener la trajectoire d'état du système à partir d'une condition initiale quelconque  $x(0) = x_0$  vers une surface de glissement (dans un temps fini) et la faire commuter à l'aide d'une logique de commutation autour de la surface jusqu'au point d'équilibre, d'où la notion de régime de glissement.

La commande à structure variable est une commande non linéaire, elle est caractérisée par la discontinuité de la commande aux passages d'une surface de commutation appelée surface de glissement.

Dans ce chapitre, nous donnons une définition du concept de système à structure variable et nous exprimons les caractéristiques essentielles de cette loi de commande à partir de différents outils théoriques de l'automatique linéaire et non linéaire.

### 2.2 Théorie de la commande par mode glissant :

Un système à structure variable est un système dont la structure change pendant son fonctionnement. Il est caractérisé par le choix d'une fonction et d'une logique de commutation. Ce choix permet au système de commuter d'une surface à une autre à tout instant [44], de plus, un tel système peut avoir de nouvelles propriétés qui n'existent pas dans chaque structure.

Dans la commande des systèmes à structure variable par mode de glissement, la trajectoire d'état est amenée vers une surface. Puis à l'aide de la loi de commutation, elle est obligée de rester au voisinage de cette surface. Cette dernière est appelée surface de glissement et le mouvement qui se produit le long de celle-ci est appelé mouvement de glissement [44],[23].

La trajectoire dans le plan de phase est constituée de trois parties distinctes, [17] :

- 1- le mode de convergence « MC » : c'est le mode durant lequel l'état du système se déplace à partir de n'importe quel point initial dans le plan de phase, et tend vers

la surface de commutation  $S(x) = 0$ . Ce mode est caractérisé par la loi de commande et le critère de convergence.

- 2- le mode de glissement « MG » : c'est le mode durant lequel la variable d'état a atteint la surface de glissement et tend vers l'origine du plan de phase. La dynamique de ce mode est caractérisée par le choix de la surface de glissement.  $S(x) = 0$
- 3- le mode du régime permanent « MRP » : ce mode est ajouté pour l'étude de la réponse du système autour de son point d'équilibre (origine du plan de phase), il est caractérisé par la qualité et les performances de la commande. [17] [24]

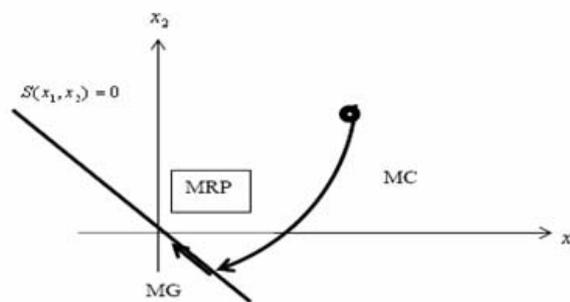


Figure 2.1 : Différents modes pour la trajectoire dans le plan de phase

Le fonctionnement d'un système à structure variable est caractérisé par les caractéristiques suivantes :

- Puisque l'état d'équilibre du système est l'origine du plan de phase, le comportement du système en mode glissant est le comportement du système en mode transitoire.
- Pendant le mode glissant, les dynamiques du système sont d'ordre inférieur aux dynamiques du système original et sont uniquement déterminées par les paramètres décrivant la droite de commutation.

### 2.3 Conception de la commande par mode glissant :

Les avantages de la commande par mode glissant sont importantes et multiples ; la haute précision, la bonne stabilité, la simplicité, l'invariance, la robustesse...etc. Ceci lui permet d'être particulièrement adapté pour le système ayant un modèle imprécis, [47].

Dans ce cas, la structure d'un contrôleur comporte deux parties: une partie continue représentant la dynamique du système durant le mode glissant et une autre discontinue représentant la dynamique du système durant le mode de convergence. Cette dernière est

importante dans la commande non linéaire car elle a pour rôle d'éliminer les effets d'imprécisions et des perturbations sur le modèle, [24]

La conception de la commande peut être effectuée en trois étapes principales très dépendantes l'une de l'autre, [30].

- Choix de la surface.
- L'établissement des conditions d'existence.
- Détermination de la loi de commande.

### 2.3.1 Choix de la surface de glissement :

La surface de glissement est une fonction scalaire telle que la variable à régler glisse sur cette surface et tend vers l'origine du plan de phase.

Pour un système défini par l'équation (2.1), le vecteur de surface  $S(x)$  à la même dimension que le vecteur de commande  $u$ .

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t).u \quad (2.1)$$

Avec :  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ , vecteur d'état du système.

$u = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$  : vecteur de commande.

$f$  : Fonction non linéaire et  $B$  : le gain de commande.

La surface est donnée par :

$$S_j(x) = \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot e_i \quad (2.2)$$

Avec :  $S_i(x) = 0$ , la fonction de commutation

$S(x) = [S_1(x), S_2(x), \dots, S_m(x)]^T$  : Le vecteur des surfaces.

$x_{ref_i} = [x_{ref1}, x_{ref2}, \dots, x_{refn}]^T$  : Le vecteur de référence (l'état désiré).

$e_i = x_i - x_{ref_i}$  : L'écart entre la variable à commander et sa référence

$e = [e_1, e_2, \dots, e_n]^T$  : Le vecteur de l'écart.

$c_{ij}$  : Paramètres de la surface de glissement.

$C$  : est une matrice de  $m \times n$  éléments de paramètres de la surface (matrice de pente de la droite de surface).

Le choix des paramètres de la surface se fait de façon satisfaisant les performances désirées.

Slotine [1] [43] propose une forme d'équation générale pour déterminer la surface de glissement qui assure la convergence d'une variable vers sa valeur désirée

$$S(x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right)^{r-1} \cdot e(x) \quad (2.3)$$

$$\text{Avec : } e(x) = x_i - x_{ref}$$

$\lambda$  : une constante positive

$r$  : degré relatif, égale au nombre de fois qu'il faut dériver la sortie pour faire apparaître la commande.

L'avantage de cette expression par rapport à la précédente est que à partir de cette équation on peut déterminer l'état du système en passant par des filtres passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre, en effet en posant «  $p = \frac{\partial}{\partial t}$  opérateur de Laplace », on aura «  $r - 1$  » éléments de filtres qui permettent de générer l'écart entre l'état du système et l'état désiré.

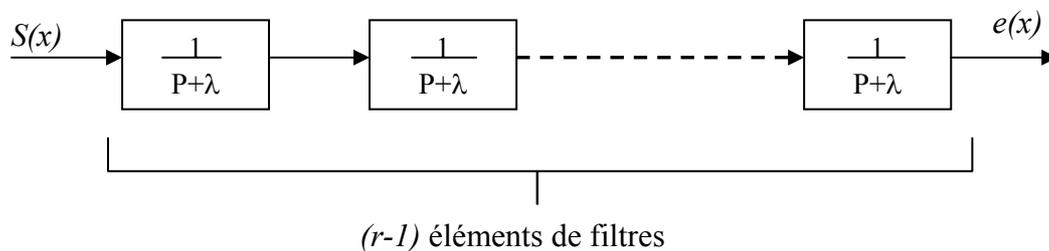


Figure 2.2 : Filtres de dérivations permettant de générer  $e(x)$

$S(x) = 0$  est une équation différentielle linéaire dont l'unique solution est :  $e(x) = 0$ ,

Ceci implique que l'état du système est égal à l'état désiré.

### 2.3.2 Principe d'invariance :

Une propriété essentielle du fonctionnement en mode glissant est présentée: l'insensibilité ou la robustesse vis à vis d'une certaine classe d'erreurs de modélisation ou de perturbations. Le modèle différentiel du système en mode glissant peut ainsi être complètement indépendant d'éventuelles erreurs de modélisations ou d'éventuels perturbations. On dit alors que le système vérifie la propriété d'invariance.

Cette propriété nécessite toutefois que certaines hypothèses appelées *matching conditions* Soient vérifiées par les perturbations.

On considère un modèle linéaire donné par:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A) \cdot x(t) + B \cdot u(t) + f(t). \quad (2.4)$$

où  $\Delta A$  et  $f(t)$  sont respectivement le terme d'erreurs de modélisation et une perturbation externe.

Définition: *matching conditions*

$\Delta A$  et  $f(t)$  vérifient l'hypothèse des matching conditions s'il existe  $\tilde{\Delta A} \in R^{n \times n}$  et  $\tilde{\Delta f} \in R^{n \times m}$  telles que:

$$\Delta A = B.\tilde{\Delta A} \quad \text{et} \quad f(t) = B.\tilde{\Delta f}$$

La signification physique de cette hypothèse est que l'on considère des incertitudes de modélisation ou une perturbation attaquant le système par la matrice d'entrée. L'intérêt de considérer un tel type d'incertitudes apparaît clairement si l'on suppose vérifiée l'hypothèse suivante :

On suppose pour la suite que :  $N(C) \cap R(B) = \phi$

Où  $R$  dénote l'espace engendré par les colonnes de  $B$  et  $C$  est la matrice définissant l'hypersurface de glissement.

$N(C)$  représente en termes géométriques, le sous espace  $S$  noyau de  $C$ .

Du fait que la trajectoire du système en mode glissant idéal est confinée dans  $N(C)$ , le comportement dynamique du système n'est alors pas affecté par tout vecteur appartenant à  $R(B)$ . Cela implique donc une invariance totale du mode glissant vis à vis des incertitudes vérifiant les matching conditions sous réserve d'un choix adéquat des valeurs limites de la commande.

### 2.3.3 Conditions de convergence et d'existence :

Les conditions d'existence et de convergence sont les critères qui permettent aux différentes dynamiques du système de converger vers la surface de glissement et d'y demeurer, indépendamment de la perturbation. Il existe deux considérations pour assurer le mode de convergence : une fonction discrète de commutation

#### 2.3.3.1 La fonction discrète de commutation :

Cette approche est la plus ancienne. Elle est proposée et étudiée par EMEL'YANOV et UTKIN [15] [57]. Il s'agit de donner à la surface une dynamique convergente vers zéro. Elle est donnée par:

$$\begin{cases} \dot{S}(x) > 0 & \text{si } S(x) < 0 \\ \dot{S}(x) < 0 & \text{si } S(x) > 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Cette condition peut être formulée comme suit:

$$\dot{S}(x).S(x) < 0 \quad (2.6)$$

Elle est globale mais ne garantit pas en revanche un temps d'accès fini.

Cette condition est toutefois difficile à utiliser pour faire la synthèse de la loi de commande, particulièrement dans le cas d'un système multi-entrées.

### 2.3.3.2 La fonction de LYAPUNOV

La fonction de LYAPUNOV est une fonction scalaire positive ( $V(x) > 0$ ) pour les variables d'état du système. La loi de commande doit faire décroître cette fonction  $\dot{V}(x) < 0$ . L'idée est de choisir une fonction scalaire  $S(x)$  pour garantir l'attraction de la variable à contrôler vers sa valeur de référence et de concevoir une commande  $u$  telle que le carré de la surface correspond à une fonction de LYAPUNOV.

Nous définissons la fonction de LYAPUNOV comme suit:

$$V(x) = \frac{1}{2} \cdot S^T(x) \cdot S(x) \quad (2.7)$$

La dérivée de cette fonction est:

$$\dot{V}(x) = S(x) \cdot \dot{S}(x) \quad (2.8)$$

Pour que la fonction  $V(x)$  puisse décroître, il suffit d'assurer que sa dérivée soit négative. Ceci n'est vérifiée que si la condition (2.5) est vérifiée.

L'équation (2.7) explique que le carré de la distance entre un point donné du plan de phase et la surface de glissement exprime par  $S^T(x) \cdot S(x)$  diminue tout le temps, contraignant la trajectoire du système à se diriger vers la surface à partir des deux côtés de cette dernière. Cette condition suppose un régime glissant idéal ou la fréquence de commutation est infinie [57].

### 2.3.4 Synthèse de la commande

Une fois la surface de glissement choisi, ainsi le critère de convergence, il reste à déterminer la condition nécessaire pour ramener la variable à contrôler vers la surface et ensuite vers son point d'équilibre en maintenant le mode de glissement

#### 2.3.4.1 Méthodes classiques de la synthèse de la synthèse des SSV :

##### 2.3.4.1.1 Méthode de PHILIPPOV [10] [57]:

L'une des premières approches est la méthode de Philipov. Cette approche est basée sur les résultats des travaux effectués par ce dernier sur les équations différentielles à second membre discontinu. Il propose une loi de commande qui prend deux valeurs suivant le signe de la surface de glissement :

$$u = \begin{cases} u^+(x, t) & \text{si } S(x) > 0 \\ u^-(x, t) & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Les valeurs exactes de  $u^+(x,t)$  et  $u^-(x,t)$  sont choisies afin qu'une condition d'accès soit vérifiée. C'est à dire telle que la trajectoire d'état atteigne la surface de commutation  $S(x)=0$  en un temps fini.

#### 2.3.4.1.2 Méthode de UTKIN :Méthode de la commande équivalente [57 ] [58]:

Plusieurs méthodes d'approche ont été utilisées pour décrire le mode de glissement lorsque la trajectoire du système atteint la surface de glissement ( $S(x) = 0$ ) [ ]. Dans ce paragraphe , la méthode adoptée est celle d'UTKIN connue sous le nom de commande équivalente. Cette méthode décrit la dynamique du système sur la surface de glissement. Elle permet de garder la variable contrôlée sur cette surface en imposant la valeur désirée en régime permanent de la grandeur d'entrée. Pour un système contrôlé donné, la première étape pour la réalisation d'une structure de régulation par ajout de la commande équivalente consiste à trouver un vecteur d'entrée équivalent  $U_{eq}$  de sorte que la trajectoire d'état du système à contrôler reste sur la surface de glissement prédéfinie. Une fois la commande équivalente déterminée, la dynamique du système peut être décrite par la substitution de  $U_{eq}$  dans l'équation d'état. En se basant sur la méthode d'Utkin, le calcul de la commande équivalente s'effectue en prenant en considération les conditions d'invariances suivantes :

$$\begin{cases} S(x) = 0 \\ \dot{S}(x) = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

La commande équivalente est une fonction continue qui sert à maintenir la variable à contrôler sur la surface de glissement  $S(x) = 0$ , elle est déduite en considérant que la surface est nulle et donc  $\dot{S}(x) = 0$ .

Elle peut être interpréter comme étant un retour d'état particulier jouant le rôle d'un signal de commande appliquée sur le système à commander,[ ].Elle peut être aussi interpréter autrement comme étant une valeur moyenne que prend la commande lors de la commutation rapide entre les valeurs  $u_{max}$  et  $u_{min}$  ,[9]

Soit le système :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x,t) + B(x,t).u \quad (2.11)$$

Pour l'existence du mode glissant implique :

- 1)  $\dot{S}(x(t)) = 0$
- 2)  $S(x(t)) = 0$

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \quad (2.12)$$

En remplaçant (3.6) dans (3.7), on trouve :

$$\frac{\partial S}{\partial x} \dot{x} = \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right] \cdot [f + B \cdot u_{eq}] = 0 \quad (2.13)$$

Où  $u_{eq}$  est la commande équivalente.

Avec  $S(x(t_0)) = 0$ , et pour que la commande équivalente puisse prendre une valeur finie, il

faut que  $\frac{\partial S}{\partial x} \cdot B(x, t) \neq 0$  (Non singulière)

Donc on obtient :

$$u_{eq} = - \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \cdot B(x, t) \right]^{-1} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} f(x, t) \quad (2.14)$$

Par conséquent, on peut déterminer le mouvement sur la surface de glissement pour tout instant :

$$\dot{x} = \left[ I - B(x, t) \left[ \frac{\partial S}{\partial x} B(x, t) \right]^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} \right] f(x, t) \quad (2.15)$$

Il est remarquable de constater que les dynamiques du système en mode glissant sont d'ordre inférieur au système original. Cette réduction d'ordre est aisément explicable par le nombre de variables d'état contraintes par la relation  $S(x) = 0$

La commande équivalente peut être interpréter comme la valeur moyenne que prend la grandeur de commande discontinue lors de la commutation rapide entre  $u_{max}$  et  $u_{min}$ , comme il représenté sur le schéma suivant :

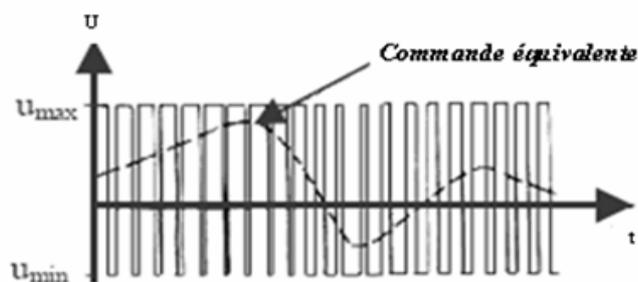


Figure II-2: commande équivalente

Ainsi, la commande équivalente est déduite à partir des conditions d'invariances données par (2.10). Cette commande permet d'assurer que la trajectoire de la grandeur contrôlée reste sur sa surface de glissement. Cependant, cette commande n'assure pas le contrôle en dehors de la surface de glissement. C'est pourquoi, il faut ajouter une nouvelle condition pour que l'état du système tende vers cette surface et l'atteigne. Cette nouvelle condition est la condition d'attractivité. Elle est développée dans [22] [23] [24]. Et nous allons la détailler dans le paragraphe suivant.

### 2.3.5 Les nouvelles visions de conception de commande des systèmes à structure variable :

Il y a plusieurs nouveaux concepts de la commande par le glissement des systèmes à structure variable, telle que l'approche développée par Gao [24] et Hung [30] et les approches basées la géométrie différentielle [53] ainsi que l'algèbre différentielle [18]. Nous allons présenter les différentes approches définies par [23] [24] [30].

#### 2.3.5.1 L'approche de la loi d'arrivée pour la conception de la VSS [23] :

Dans cet approche la loi d'arrivée est directement une équation différentielle spécifiant la dynamique de la fonction de commutation, cette équation de  $S(x)$  asymptotiquement stable est la même que la condition de glissement, de plus, les caractéristiques dynamiques du système dans le mode d'arrivée peut être contrôlé, par un choix des paramètres de l'équation différentielle.

La forme générale de la loi d'arrivée est :

$$\dot{S}(x) = -Q \cdot \text{sign}(S(x)) - K \cdot S(x) \quad (2.16)$$

Avec :

$$Q : \text{diag}[q_1, q_2, \dots, q_m] \quad , q_i > 0$$

$$\text{sign}(S) = [\text{sign}(S_1), \text{sign}(S_2), \dots, \text{sign}(S_m)]^T$$

$$K : \text{diag}[k_1, k_2, \dots, k_m] \quad , k_i > 0$$

Trois cas spéciaux pratiques de (2.16) sont donnés ci-dessous et développés par [24] :

##### 2.3.5.1.1 Loi d'arrivée avec une vitesse d'arrivée constante :

La loi d'arrivée dans ce cas est donnée par :

$$\dot{S}(x) = -Q \cdot \text{sign}(S(x)) \quad (2.17)$$

Cette loi force la trajectoire d'état à atteindre la surface de glissement à vitesse constante qui dépend de la valeur de  $Q$ . Le choix de  $Q$  dans ce cas doit éviter à la fois un temps

d'attractivité long (les termes de la matrice  $Q$  sont très petits) et la production de grandes oscillations (les termes de la matrice  $Q$  sont très grands).

Cette loi force la fonction de commutation  $S(x)$  à atteindre l'hyperplan de commutation  $S$  à une vitesse de commutation :  $|\dot{S}_i| = q_i$ . Le mérite de cette loi est sa simplicité .

### 2.3.5.1.2 Loi d'arrivée avec une vitesse d'arrivée constante et à action proportionnelle :

Evidement, par l'addition du terme proportionnelle  $-K.S(x)$  fait que la trajectoire d'état est forcée de s'approcher de la surface de glissement plus vite lorsque  $S$  est grande. Plus  $K$  est grande, plus le temps d'attractivité est rapide ; tandis que une petite valeur de  $Q$  réduit les oscillations. La loi d'arrivée dans ce cas est :

$$\dot{S}(x) = -Q.sign(S(x)) - K.S(x) \quad (2.18)$$

Il peut être montré que le temps d'arrivée pour que  $x$  se déplace de l'état initial  $x_0$  vers l'hyperplan  $S_i$  est fini, et il donné par :

$$\tau_i = \frac{1}{k_i} \ln \frac{k_i |S_i| + q_i}{q_i} \quad (2.19)$$

### 2.3.5.1.3 Loi d'arrivée avec puissance vitesse d'arrivée :

La loi dans ce cas c'est :

$$\dot{S} = -k_i |S_i|^\alpha sign(S_i) \quad , \text{ avec } 0 < \alpha < 1 ; \quad i = 1 \text{ à } m \quad (2.20)$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\dot{S}(x) = -K |S(x)|^\alpha .sign(S(x)) \quad (2.21)$$

Cette loi d'arrivée augmente la vitesse quand l'état du système est loin de l'hyperplan de commutation, et la réduit lorsque l'état est près. Par conséquent un intégrant (2.20) de

$S_i = S_{i0}$  à  $S_i = 0$  , le temps d'arrivée sera :

$$\tau_i = \frac{1}{(1-\alpha)k_i} .S_{i0}^{1-\alpha} \quad i = 1 \text{ à } m$$

(2.22)

Avec une telle structure, l'attractivité est bien contrôlée. L'absence du terme  $Q.sign(S(x))$  fait que les oscillations sont quasiment éliminées une fois la surface de glissement atteinte.

Le choix d'une structure d'attractivité permet de déterminer le vecteur d'entrée attractif  $U_{att}$ .

Ce vecteur sera particulièrement actif pendant le régime transitoire et imposera la dynamique du système.

## 2.4 Propriétés de la structure de commande des SSV.

La conception de la commande à structure variable peut être réalisée de deux façons différentes, libre ou pré-spécifiée. Dans les deux cas, l'objectif est de satisfaire la condition d'arrivée.

### 2.4.1 Structure libre :

Dans ce cas, la commande  $U(x)$  peut être trouvée généralement en contraignant la fonction de commutation aux conditions suivantes [30] :

$$a/ S_i \cdot \dot{S}_i < 0 \quad b/ \dot{V} = \frac{\partial}{\partial t}(S \cdot S^T) < 0 \quad c/ \dot{S}_i = -q_i \cdot \text{sign}(S_i) - k_i \cdot S_i$$

### 2.4.2 Structure pré-spécifiée :

Dans certains cas, il est commode de pré spécifier la structure de la commande à structure variable et ensuite déterminer les valeurs de gains du contrôleur tel que la loi d'arrivée désirée sera satisfaite.

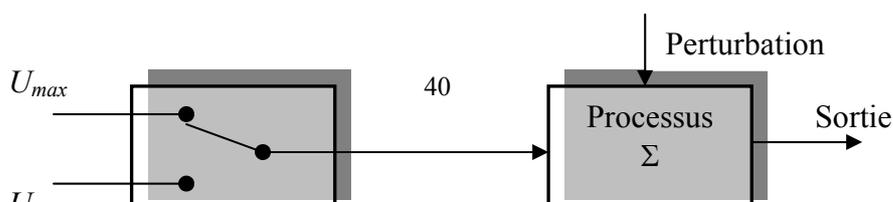
Dans les systèmes à structure variable utilisant la commande par mode de glissement, on peut trouver trois configurations de base pour la synthèse des différentes commandes. La première correspond à la structure la plus simple où la commutation a lieu au niveau de l'organe de commande lui-même : on la désignera : structure par commutation au niveau de l'organe de commande. La deuxième structure fait intervenir la commutation au niveau d'une contre – réaction d'état. La dernière structure est caractérisée par une commutation au niveau de l'organe de commande avec ajout de la commande équivalente. Cette dernière structure est la plus usuelle.

#### 2.4.2.1 La commande relais ( Relay control):

La commande à structure variable ici prend la forme d'un relais pour chaque élément du vecteur de la commande .le gain relais peut être de deux formes, constant ou dépend des état du système.

$$u_i(x) = \begin{cases} k_i^+ & \text{quand } S_i(x) > 0 \\ k_i^- & \text{quand } S_i(x) < 0 \end{cases} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.23)$$

Les vecteurs de  $k_i^+$  et  $k_i^-$  sont choisies de façon à satisfaire la condition d'arrivée désirée. Cette structure de commande est la plus classique et la plus exploitée. Elle correspond au fonctionnement tout ou rien des interrupteurs de puissance associés dans une grande majorité d'application aux variateurs de vitesse.



**2.4.2.2 Le retour linéaire avec gains de commutation :**

La structure pré spécifiée est de la forme :

$$u(x) = \psi(x).x \tag{2.24}$$

Où  $\psi = [\psi_{ij}(x)]$  est une matrice de dimension  $m \times n$  d'éléments qui sont des gains dépendent des variables d'état du système. La structure des gains de commutation est donnée

$$\text{par : } \psi_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij} & \text{quand } S_i(x).x_j > 0 \\ \beta_{ij} & \text{quand } S_i(x).x_j < 0 \end{cases} \text{ pour } \begin{cases} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{cases} \tag{2.25}$$

Les paramètres  $\alpha_{ij}$  et  $\beta_{ij}$  sont choisis pour satisfaire la condition d'arrivée. C'est la structure la moins exigeante au niveau de la sollicitation de la commande.

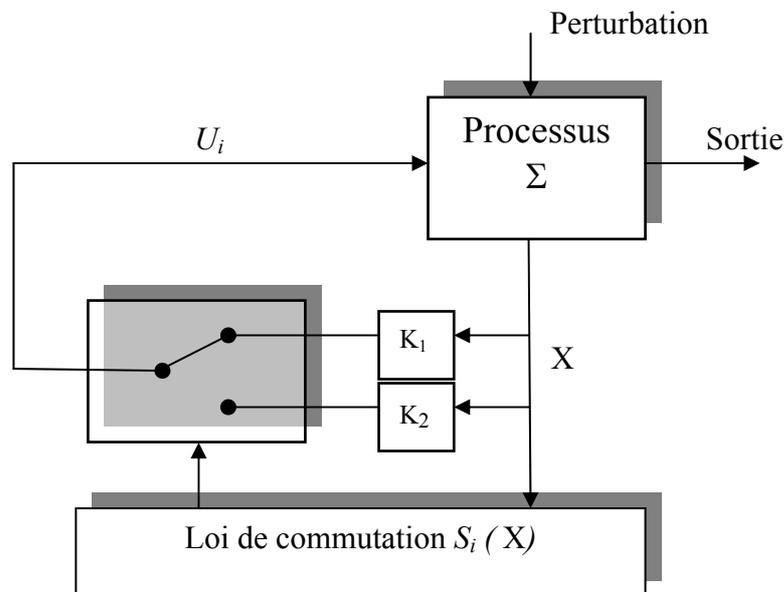


Fig. 2.5 : Structure de régulation par commutation au niveau de la contre réaction d'état.

Cette structure a été mise en œuvre dans la commande de moteurs à courant continu ainsi que dans la commande de machine à induction.

### 2.4.2.3 Augmentation de la commande équivalente :

Ici, la commande à structure variable prend la forme :

$$U = U_{eq} + \Delta U \quad (2.26)$$

Où  $U_{eq}$  c'est la commande équivalente du mode glissant alors que  $\Delta U$  est additionnée pour satisfaire la condition de glissement (condition d'arrivée) la forme la plus utilisée pour  $\Delta U$  est la commande relais.

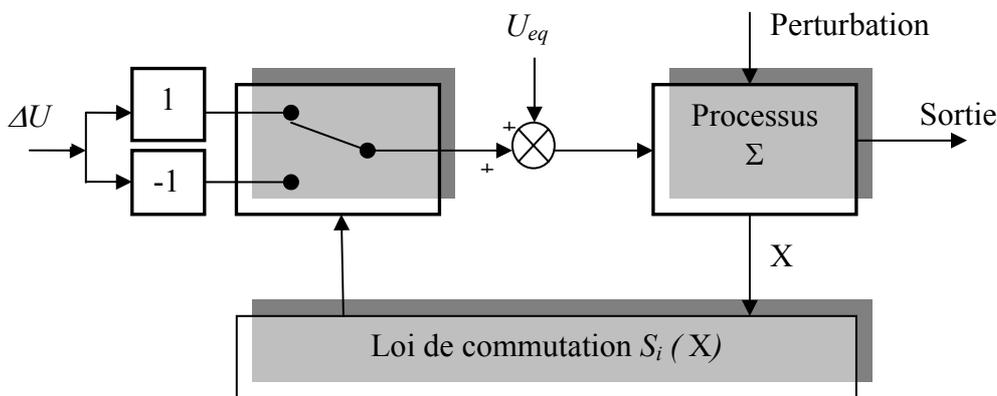


Fig.2.6 : Structure de régulation par ajout de la commande équivalente

Cette dernière structure présente un réel avantage. Elle permet de pré-positionner l'état futur du système grâce à la commande équivalente qui n'est rien d'autre que la valeur désirée du système en régime permanent. L'organe de commande est beaucoup moins sollicité, mais on est plus dépendant des variations paramétriques du fait de l'expression de cette commande équivalente. Nous avons choisi de baser notre étude sur ce type de configuration de la commande pour la raison principale suivante : une telle structure de par sa constitution, est très simple à élaborer et permet une sollicitation moindre de la commande. En effet, il est naturel d'ajouter la commande équivalente pour pré-positionner le système dans un état désiré permanent et stable, et de jouer ensuite sur le terme de commutation pour assurer la convergence vers cet état et y demeurer.

Aussi, cette méthode de commande a déjà été abordée dans les travaux [57] [58] qui a donné une entière satisfaction.

## 2.5 Extensions méthodologiques dans l'élaboration de la commande :

Une des hypothèses fondamentales dans l'analyse et la conception des systèmes à structures variables est que la commande peut être commutée d'une valeur à une autre suivant le signe d'une fonction de commutation, avec une fréquence infinie. Cependant, dans les systèmes réels, il est impossible de réaliser une telle commutation de la commande, pour différentes raisons (présence d'un retard de temps fini pendant le calcul de la commande, les limitations des actionneurs etc.).

Il n'est pas possible de commuter la commande à une vitesse infinie car la commutation peut exciter les dynamiques non modélisées ce qui conduit à des oscillations du vecteur d'états et de la commande à une fréquence finie. La trajectoire d'état oscille alors dans un voisinage de la surface de glissement, ce phénomène est appelé broutement ( Chattering). Il a plusieurs effets indésirables sur la qualité de la commande et sur le système, il peut :

- diminuer la précision
- produire une grande perte de chaleur dans les machines électriques.
- une fatigue des parties mécanique mobile

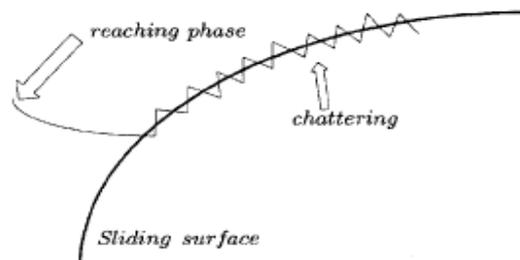


Figure 2.7 : Le phénomène de chattering

Ce phénomène est considéré comme un obstacle réel pour l'application de la commande à structure variable.

Pour remédier à ce problème plusieurs méthodes ont été proposées afin de diminuer l'effet de ce phénomène. Deux solutions analytiques ont été proposées :

## 2.5.1 Commande continue par Bande de surface :

### 2.5.1.1 1<sup>ère</sup> Forme continue de saturation :

Cette première forme continue a été développée par [1] [44] [45], elle consiste à approximer la commande discontinue par la loi continue au voisinage de la surface.

Les V.S.S ont une solide robustesse en présence de variations paramétriques et de perturbations et commencent à intéresser les ingénieurs comme méthode pratique pour la commande des processus complexes, multivariables et d'une façon générale des systèmes dont les paramètres varient et non connus a priori ( paramètres variables et modèle non précis) et affectés également de perturbations non connues exactement .

La robustesse des V.S.S est garantie par le régime glissant, qui garde la trajectoire du système invariante lorsque celui-ci est sous divers environnement. Cette nature robuste des régimes glissants est bonne et convient à la commande de mouvement parce que l'algorithme qui lui correspond est très simple à établir et facile à implanter sur micro-ordinateur afin de faire des simulations numériques confirmant les propriétés des V.S.S.

Le problème principal des régimes glissants est que la commande est discontinue sur la surface de glissement et par conséquent, elle va commuter régulièrement ( chattering ) et ce à chaque traversée de cette surface ceci à une fréquence théoriquement infinie . Une telle commande, en plus d'être difficile à réaliser en pratique, peut ne pas être directement applicable au système.

Pour résoudre ce problème, la fonction discontinue est remplacée par une fonction continue ceci au voisinage de la surface de glissement et l'on procédera à un lissage de la commande. Ainsi, on définira une "condition d'équilibre" , qui doit remplacer toutes les fonctions discontinues apparaissant au voisinage de cette surface de glissement [1] [43].

Le " chattering " étant indésirable, on peut remédier à cette situation en lissant la discontinuité de la commande dans une étroite bande limite avoisinant la surface de glissement (de commutation) , ainsi cette bande limite sera définie par :

$$B(t) = \{ X ; S(X,t) \leq \phi \} \quad \text{avec} \quad \phi > 0 \quad (2.27)$$

$$\begin{cases} \phi \text{ étant l'épaisseur de la bande, variant avec } t \\ \varepsilon = \frac{\phi}{\lambda^{n-1}} \text{ est la largeur de la bande.} \end{cases}$$

Ce lissage sera réalisée, en choisissant en dehors de la bande  $B(t)$  une loi de commande comme au auparavant satisfaisant la condition de glissement qui garantira l'attraction vers la bande et donc l'invariance positive : c'est-à-dire que toutes les trajectoires commençant dans  $B(t = 0)$  restent à l'intérieur de  $B(t)$  .

Cette nouvelle loi de commande sera établit en remplaçant dans l'expression de la commande "u(t)" (3-6), le terme  $sign(S)$  par la fonction  $(S/\Phi)$ , ceci à l'intérieur de la bande  $B(t)$ , comme c'est illustré par les figures 2.8 et 2.9.

Nous allons montrer, d'abord, que cette opération conduit à une poursuite avec une précision garantie, et plus généralement garantir cela pour toutes les trajectoires commençant dans  $B(t=0)$ : c'est-à-dire s'assurer que :

$$\begin{aligned} |\tilde{x}^{(i)}(t)| &\leq (2\lambda)^i \cdot \varepsilon \\ \text{pour } i &= 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ \text{avec la condition initiale: } &\tilde{X}(0) = 0 \end{aligned} \quad (2-28)$$

Par la relation (3-4), qui définit l'expression algébrique de la surface de glissement  $S(t)$  ;

$$s(X, t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \tilde{x} \quad (2.29)$$

De cette expression, nous remarquons que l'erreur de poursuite  $\tilde{x}(t)$  est obtenue à partir de  $s(X, t)$  en passant par des filtres passe-bas du 1er ordre. En effet, en posant  $p = d/dt$  (Opérateur de Laplace), on aura (n-1) éléments de filtres passe-bas qui permettent de générer  $\tilde{x}(t)$ .

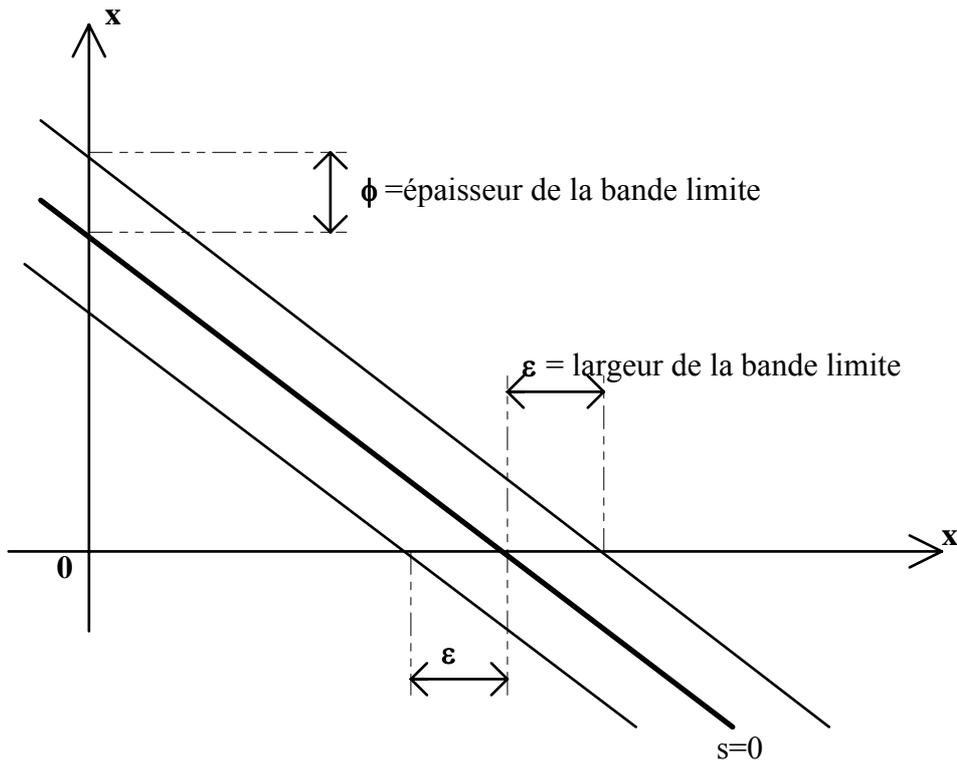
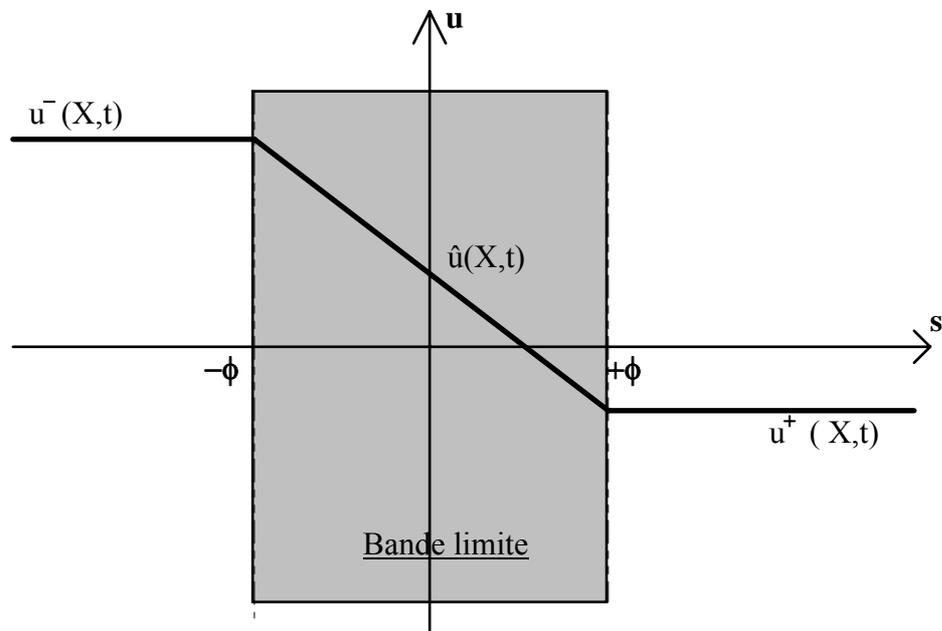


Figure 2.8 : Construction de la bande limite dans le cas où  $n=2$



**$u$  = loi de commande**  
 **$u = u^+$  pour  $s > 0$**   
 **$u = u^-$  pour  $s < 0$**   
 **$\hat{u}$  = commande équivalente**

Figure 2.9 : Loi de commande par bande continue au voisinage de la surface ite de glissement.

La représentation de ces filtres est donnée par la figure 2.10 .

On a :

$$Y_1(p) = L(y_1(t))$$

$$S(p) = L(s(t))$$

$$d'où : Y_1(p) = \frac{1}{p + \lambda} . S(p) = F_1(p) . F_2(p)$$

$$on\ aura : y_1(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} . s(\tau) d\tau$$

par ailleurs :  $|s(t)| \leq \phi$  ( bande limite de travail )

$$ce\ qui\ donnera : |y_1(t)| \leq \phi \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} . d\tau = \frac{\phi}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \leq \frac{\phi}{\lambda}$$

$$d'où : |y_1(t)| \leq \frac{\phi}{\lambda}$$

pour les (n - 1) éléments et tenant compte de (2 - 4) on aura :

$$|\tilde{x}(t)| \leq \frac{\phi}{\lambda^{n-1}} = \varepsilon$$

Similairement,  $\tilde{x}^{(i)}(t)$  peut être obtenu par les filtres suivants : [  $\tilde{x}^{(i)}(t)$  composantes de X(t) ] dont la représentation est donnée par la figure 2.10 .

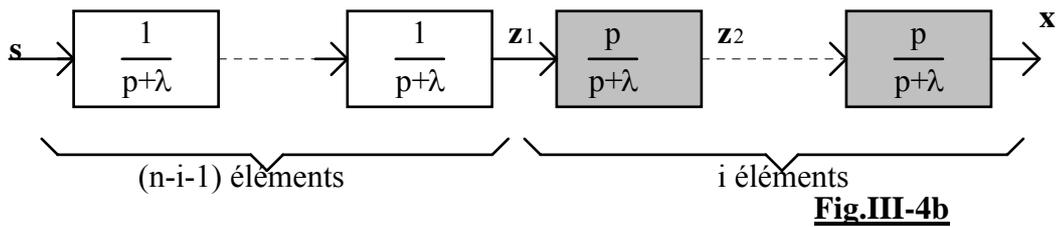
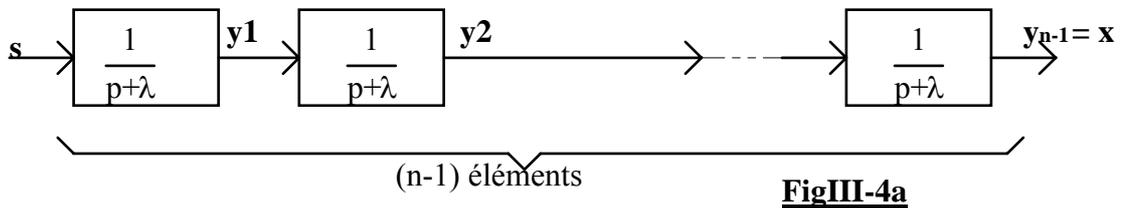


Figure 2.10 : Filtres de dérivation permettant de générer  $e(x)$  et  $e^{(i)}(x)$

comme auparavant on aura :

$$|z_1(t)| \leq \frac{\phi}{\lambda^{n-1-i}}$$

en tenant compte que :

$$\frac{p}{p+\lambda} = 1 - \frac{\lambda}{p+\lambda}$$

pour le premier filtre on aura :

$$z_2(t) = z_1(t) - \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \cdot z_1(\tau) \cdot d\tau$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } |z_2(t)| &\leq \frac{\phi}{\lambda^{n-1-i}} + \lambda \cdot \frac{\phi}{\lambda^{n-1-i}} \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \cdot d\tau \\ &\leq \frac{\phi}{\lambda^{n-1-i}} \left\{ 1 + \frac{\lambda}{\lambda} (1 + e^{-\lambda t}) \right\} \\ &\leq \frac{\phi}{\lambda^{n-1-i}} \left\{ 1 + \frac{\lambda}{\lambda} \right\} \end{aligned}$$

pour ième éléments on aura :

$$|\tilde{x}^{(i)}(t)| \leq \frac{\phi}{\lambda^{n-1-i}} \left\{ 1 + \frac{\lambda}{\lambda} \right\}^i$$

ou encore :

$$\begin{aligned} |\tilde{x}^{(i)}(t)| &\leq \frac{\phi}{\lambda^{n-1-i}} \cdot \frac{(2\lambda)^i}{\lambda^i} = \frac{\phi}{\lambda^{n-1}} \cdot (2\lambda)^i \\ |\tilde{x}^{(i)}(t)| &\leq (2\lambda)^i \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Ce qui signifiera que la précision du système est garantie pour toute évolution du système à l'intérieur de la bande  $B(t)$ .

Dans le cas où  $\tilde{X}(0) \neq 0$ , les limites sont obtenues asymptotiquement avec une constante de temps égale à  $(n-1)/\lambda$ .

De plus, comme on va le montrer le lissage de la discontinuité de la commande à l'intérieur de la bande  $B(t)$ , assigne essentiellement une structure de filtre passe-bas à la dynamique de  $s(t)$ , éliminant ainsi le "chattering".

La connaissance de cette structure de filtre, nous permet de régler la loi de commande pour réaliser un compromis entre la précision de poursuite et la robustesse de la commande.

L'épaisseur de la bande (couche)  $\phi$  sera variable dans le temps et variera de façon à exploiter toujours la largeur de la bande maximale de la commande.

Dans cette approche Slotine [1] [43][44] [45] a proposé de remplacer la fonction signe (dans le voisinage de la surface de commutation) de la loi de commande :

$$u = -k.sign(S) \quad (2.30)$$

par la fonction «  $sat(S)$  ».

Donc la commande discontinue devient alors :

$$u = -k.sat(S) \quad (2.31)$$

$$\text{Où } sat(S) = \begin{cases} \frac{S}{\phi} & \text{si } |S| \leq \phi \\ sign(s) & \text{si } |S| > \phi \end{cases} \quad (2.32)$$

Qui peut être donnée sur la figure 2.11 suivante :

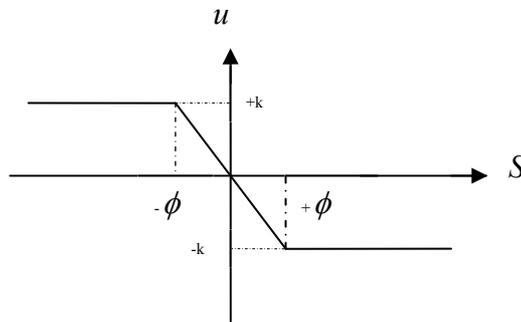


Figure 2.11 : Loi de commande par bande continue au voisinage de la surface de glissement

### 2.5.1.2 2<sup>ème</sup> Forme continue :

Une autre solution pour lisser la commande au voisinage des surfaces de commutation  $S_i = 0$ , cette solution est proposée par [27] [28], elle consiste à remplacer dans la bande  $|S_i| < \Phi_i$ , les fonctions discontinues  $sign(S_i)$  par des fonctions continues de la forme  $Cont(S)$  :

La commande discontinue sera alors de la forme :

$$\Delta u = -k.Cont(S) \quad (2.33)$$

$$\text{Où } cont = \begin{cases} \frac{S}{|S| + \delta} & \text{si } |S| \leq \phi \\ sign(s) & \text{si } |S| > \phi \end{cases} \quad (2.34)$$

Et qui peut être schématisée selon la figure 2.12 suivante :

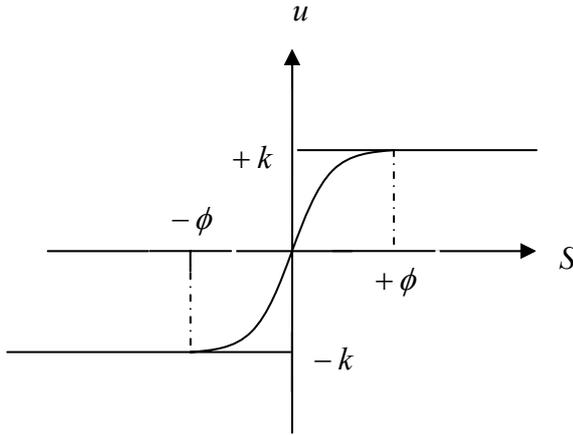


Figure 2.12 : La loi de commutation de lissage au voisinage de la surface de glissement

Dans le voisinage  $|S_i| \leq \Phi_i$ , la commande devient :

$$U = U_{eq} - K.Cont(S)$$

A l'extérieur de ce voisinage  $|S_i| > \Phi_i$ , la commande redevient discontinue de type :

$$U = U_{eq} - K.sgn(S)$$

### 2.5.2 Commande avec correction intégrale en régime permanent

L'action intégrale a pour but de diminuer l'erreur de poursuite en régime permanent, par contre elle peut provoquer des oscillations supplémentaires en régime transitoire.

L'espace où évolue la trajectoire de phase est divisé en deux parties. Au voisinage de  $S_i = 0$  dans  $|S_i| \leq \Phi_i$ , la correction intégrale peut être ajoutée à la commande continue définie en

(2.17). A l'extérieur de ce voisinage  $|S_i| > \Phi_i$ , cette correction est supprimée et la commande appliquée est une commande à structure variable classique.

Dans le voisinage  $|S_i| \leq \Phi_i$ , la fonction continue est définie par :

$$Cont(S) = \frac{S}{|S| + \delta} \quad \text{avec } \delta > 0$$

Pour améliorer le fonctionnement, le paramètre  $\delta$  est proposé adaptatif par un choix [21] :

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{pour } |S| > \Phi \\ \delta_0 + |\eta| & \text{pour } |S| \leq \Phi \end{cases}$$

Avec un caractère intégral pour le paramètre  $\eta$

$$\eta = \begin{cases} 0 & \text{pour } |S| > \Phi \\ \eta_0 \int_0^\tau S dt & \text{pour } |S| \leq \Phi \end{cases}$$

En ajoutant la correction intégrale à  $\Delta U$  on aura :

$$\Delta U = K \cdot \frac{S}{|S| + \delta + \eta} + \gamma \quad (2.35)$$

$$\text{Avec : } \gamma = \begin{cases} 0 & \text{pour } |S| > 0 \\ \gamma_0 = \int_0^\tau S \cdot dt & \text{pour } |S| \leq 0 \end{cases}$$

Les termes  $\eta_0$ ,  $\delta_0$ ,  $\gamma_0$  sont des constantes ou des paramètres adaptatifs au système étudié.

La commande totale est de la forme :

$$U = U_{eq} - \Delta U + \gamma \quad (2.36)$$

Ce type de commande avec correction intégrale assure une meilleure précision en régime permanent ; il est bien adapté pour le suivi des références, la commande est continue avec (2.29), c'est-à-dire le système suit presque parfaitement la référence désirée (sans oscillations notables). Si la référence est modifiée brutalement, la commande à structure variable redevient de type classique :  $U = U_{eq} - K \cdot \text{sgn}(S)$ .

La constante  $\Phi$  est déterminée à partir des commutations de la surface.

## 2.6 Conclusion

La commande à structure variable (CSV) est par nature une commande non linéaire. La caractéristique principale de ces systèmes est que leurs lois de commande se modifient d'une manière discontinue selon une logique déterminée. Les commutations de la commande s'effectue en fonction des variables d'état, utilisées pour créer une variété ou hypersurface dite de glissement dont le but est de forcer la dynamique du système à correspondre avec celle définie par l'équation de l'hypersurface. Quand l'état est maintenu sur cette hypersurface le système est en régime glissant. Au niveau de ce deuxième chapitre nous nous sommes efforcés de montrer les différentes formes de lois de commande et nous remarquons que cette loi est constituée de deux composantes : la commande équivalente qui maintient la trajectoire d'état du système à contrôler sur la surface de glissement et d'autre part une commande attractive qui représente la transition de la trajectoire d'état à partir d'un point initial jusqu'au début de la phase du mode de glissement.

On retient de ce chapitre que plusieurs propriétés sur les systèmes à structure variable contrôlés par une commande directe par mode de glissement peuvent être observées, à savoir :

- ✓ Le système de commande basé sur une commande directe par mode de glissement est dépendant du signe de la fonction de commutation  $S(x)$ .

- ✓ La commande directe par mode de glissement est caractérisée par deux modes : le mode d'attractivité et le mode de glissement.
- ✓ La commande directe par mode de glissement s'adapte bien aux systèmes dont le contrôle est discontinu.

## Chapitre 3 : Description et modélisation de la chaudière

---

### 3.1 Introduction

Les propriétés de la vapeur d'eau ont fait l'objet de très nombreuses études en raison de son usage courant dans de nombreux domaines, notamment dans l'industrie, et de son rôle important dans divers phénomènes naturels, comme les échanges thermiques au sein de l'atmosphère terrestre. La production de la vapeur se fait à partir d'une chaudière.

La chaudière est un dispositif permettant de chauffer l'eau par une source de chaleur et de produire de la vapeur, la source de chaleur peut être fournie par une combustion d'un carburant (gaz, fuel,...etc.) et d'air ou une résistance électrique. Industriellement on utilise les chaudières pour produire la vapeur nécessaire au fonctionnement de certains processus.

Sous l'effet de la chaleur, l'eau se transforme en vapeur à très haute température, cette vapeur est utilisée comme force motrice d'entraînement des turbines qui transforment l'énergie mécanique en énergie électrique.

Le schéma de la Chaudière-Turbine pour la production d'électricité est donné par la figure suivante:

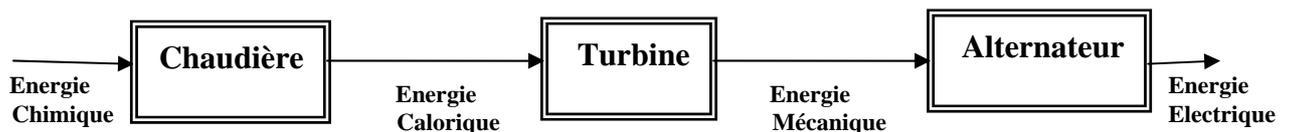


Figure 3.1 : schéma du système Chaudière-Turbine

### 3.2 Classification des générateurs de vapeurs

On peut classer les générateurs de vapeur des chaudières selon plusieurs critères (la conception, les dimensions, la capacité de production de la vapeur etc...). La classification selon la conception permet de distinguer les deux types suivants :

#### 3.2.1 Les chaudières à tubes de fumées

Elles sont constituées par un réservoir à l'intérieur duquel se trouvent des tubes. Les fumées de combustion circulent à l'intérieur de ces derniers tandis que l'eau les baigne à

l'intérieur. Ce type de chaudières est employé dans les petites installations de puissance de vaporisation.

### **3.2.2 Les chaudières à tubes d'eau:**

Dans les chaudières à tubes d'eau, les fumées baignent les tubes à l'intérieur desquels s'écoule l'eau. L'avantage de cette formule est surtout la sécurité de ne pas avoir de grandes quantités d'eau dans la chaudière même.

Ce type se divise en deux catégories :

#### **3.2.2.1 Chaudière à tubes d'eau du type horizontal:**

Les faisceaux de tubes d'eau sont disposés horizontalement.

#### **3.2.2.2 Chaudières à tubes d'eau du type vertical :**

Les faisceaux de tubes d'eau sont disposés verticalement. De cette façon on améliore la circulation de l'eau et de la vapeur.

## **3.3 Circulation de l'eau**

On appelle circulation le mouvement continu et régulier de l'eau ou du mélange d'eau et de vapeur dans les circuits des ensembles de chaudières.

La circulation à deux objectifs principaux :

- assurer le refroidissement correct des tubes situés dans les zones les plus chaudes.
- assurer la génération de vapeur.

On distingue deux types de circulation : la circulation forcée et la circulation naturelle.

### **3.3.1 La circulation forcée:**

La circulation de l'eau dans les tubes est assurée à l'aide d'une pompe. Cette configuration est nécessaire quand la hauteur des tubes est faible ou quand la pression est très élevée c'est-à-dire que la différence de densité entre le liquide et la vapeur est insuffisante pour créer une circulation naturelle.

### **3.3.2 La circulation naturelle :**

Elle est produite par la pesanteur sous l'effet de la différence existante entre la masse spécifique de l'eau et celle d'un mélange d'eau et de vapeur. L'eau d'appoint (eau froide) est introduite dans un ballon supérieur, vu que la densité de cette eau est plus grande que celle de l'eau plus chaude déjà existante, elle va descendre naturellement par différence de densité. Durant cette descente, elle commence à s'échauffer jusqu'à ce qu'elle atteigne une zone où elle devient très chaude et sa densité beaucoup plus faible, dans ce cas, elle remonte et revient au ballon dans lequel elle a été introduite.

### 3.4 Description de la chaudière

La chaudière étudiée est de type à tubes d'eau à circulation naturelle. Elle a pour rôle de fournir de la vapeur sèche pour entraîner la turbine.

#### 3.4.1 Constituant de la chaudière :

Un générateur de vapeur comprend essentiellement ( figure 3.2)

- La chambre de combustion : foyer dans lequel le combustible est brûlé.
- Le ventilateur de soufflage : il envoie l'air nécessaire à la combustion. L'air reçoit de la chaleur cédée par les gaz de combustion.
- Le réchauffeur d'air: pour réchauffer l'air ambiant en utilisant la chaleur des gaz de combustion
- Le ventilateur de tirage: qui aspire les gaz de combustion pour les refouler dans l'atmosphère à travers une cheminée.
- L'économiseur: qui permet le réchauffement de l'eau nécessaire au ballon.
- Le réservoir: qui reçoit l'eau sortante de l'économiseur.
- Le faisceau de vaporisation (écran) : il est alimenté par l'eau venant du réservoir. La vapeur saturée produite se rassemble au-dessus du niveau d'eau dans le ballon.
- Les surchauffeurs: ils reçoivent la vapeur saturée contenue dans le ballon. Leurs rôles sont de dessécher et surchauffer la vapeur.
- Le resurchauffeur: qui reçoit la vapeur détendue dans le corps haute pression de la turbine. La température de la vapeur augmente pendant sa circulation dans le resurchauffeur pour atteindre à sa sortie une température voisine ou égale à la température de la vapeur surchauffée.
- La cheminée: qui permet l'évacuation des gaz de combustion après leur dépoussiérage dans le dépoussiéreur.

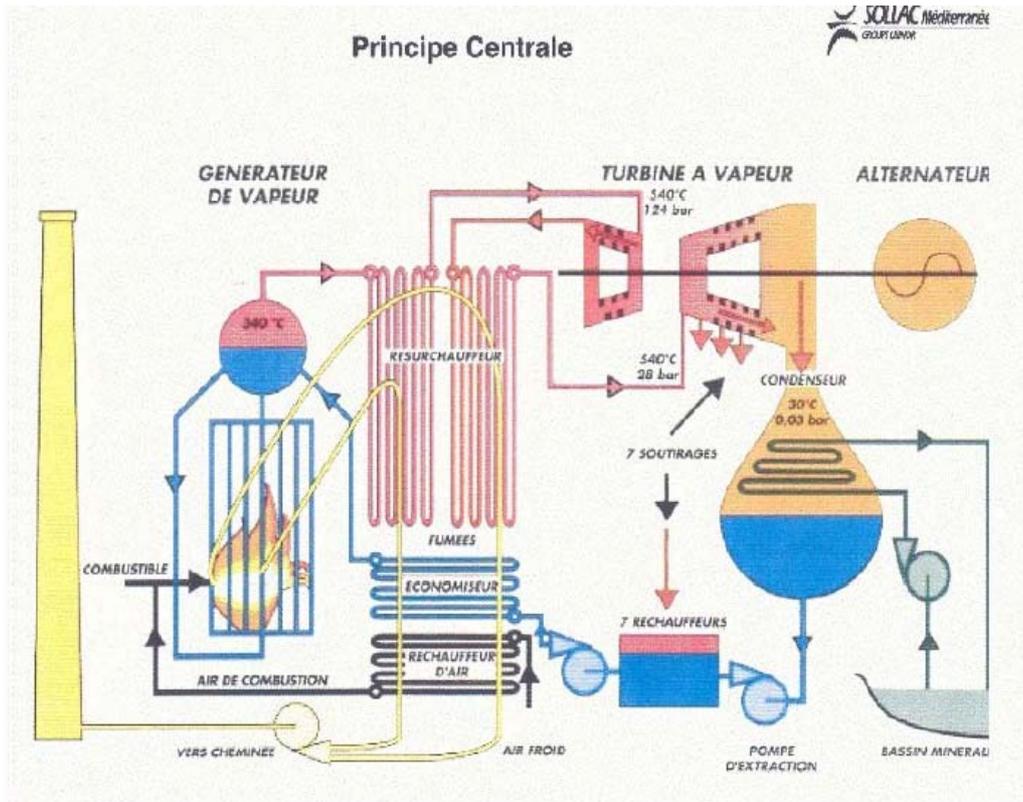


Figure 3.2: Schéma d'une centrale électrique

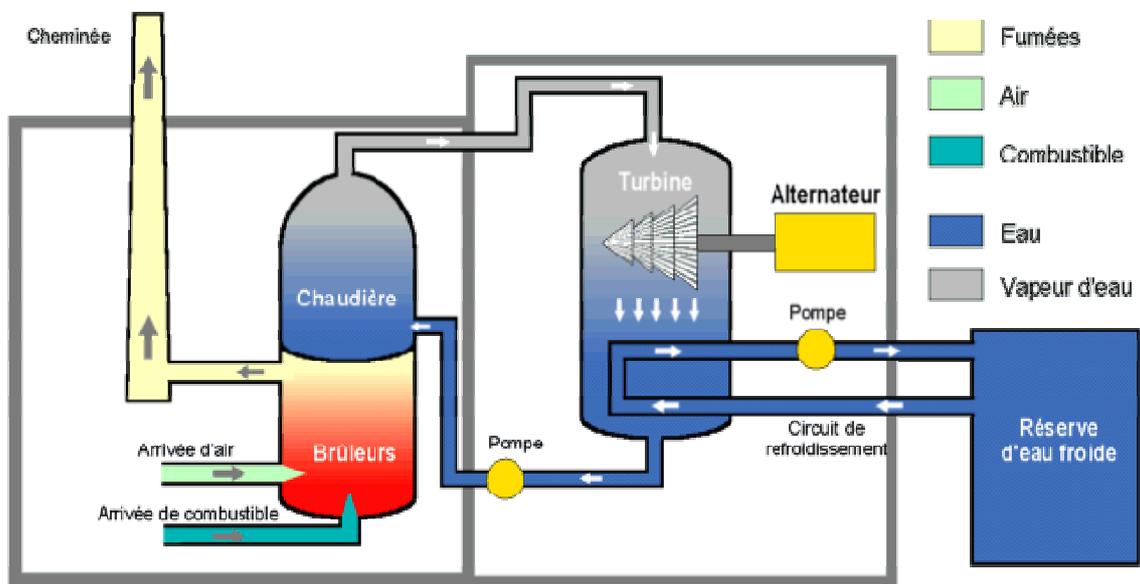


Figure 3.3 : Schéma synoptique d'une centrale avec les différents fluides circulants

### 3.4.2 Principe de fonctionnement

Ce type de chaudière possède deux réservoirs appelés collecteur (en partie inférieure) et ballon supérieure (ou encore ballon de vaporisation), reliés par un faisceau de tubes vaporisateurs, dans cet ensemble circule l'eau qui se transforme en vapeur.

Les gaz chauds produits par le brûleur sont directement en contact avec les tubes vaporisateurs, à l'intérieur de ceux-ci se produit la vaporisation. La vapeur ainsi générée est collectée dans le ballon supérieur, l'eau excédentaire est ramenée vers le ballon inférieur par des tubes de chute non sou chaleur.

La vapeur saturée, une fois sortie du réservoir, passe dans les surchauffeurs avant d'être admise au niveau de la turbine.

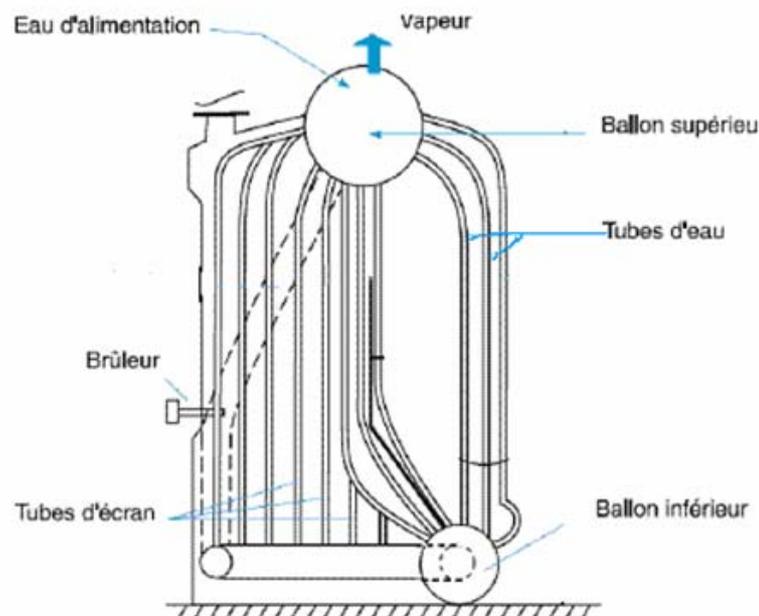


Figure 3.4 : Schéma de constitution d'un générateur de vapeur

Pour le bon fonctionnement de la chaudière, les exigences suivantes doivent être autant que possible satisfaites :

- Du point de vue de l'utilisation, il faut:

- Que le débit de vapeur réclamé puisse être assuré à chaque instant;
- Que la pression à la sortie de la chaudière soit constante, ou bien déterminée en fonction de la charge et par conséquent de la puissance électrique à la sortie de l'alternateur ;

- Que la chaudière s'adapte rapidement aux variations de la charge, par exemple la puissance électrique consommée de jour est inférieure à celle consommée de nuit et par conséquent une influence directe sur la consommation de combustible.
- Du point de vue économique, il faut :
- Que le débit de vapeur soit produit avec un minimum de consommation du combustible.
- Du point de vue sécurité, il faut :
- Que le niveau du plan de l'eau dans le ballon soit maintenu entre d'étroites limites (généralement le niveau est au milieu du ballon).

Toutes ces exigences ne seront jamais satisfaites par le fonctionnement du groupe chaudière-turbine seul, alors on est amené à identifier les grandeurs à régler du processus permettant le bon fonctionnement du générateur de vapeur et ces grandeurs sont les suivantes :

- Le niveau d'eau dans le ballon d'eau chaude
- La pression de vapeur
- La puissance électrique produite

La figure suivante donne un aperçu sur l'identification des grandeurs à régler par rapport aux équipements de l'installation :

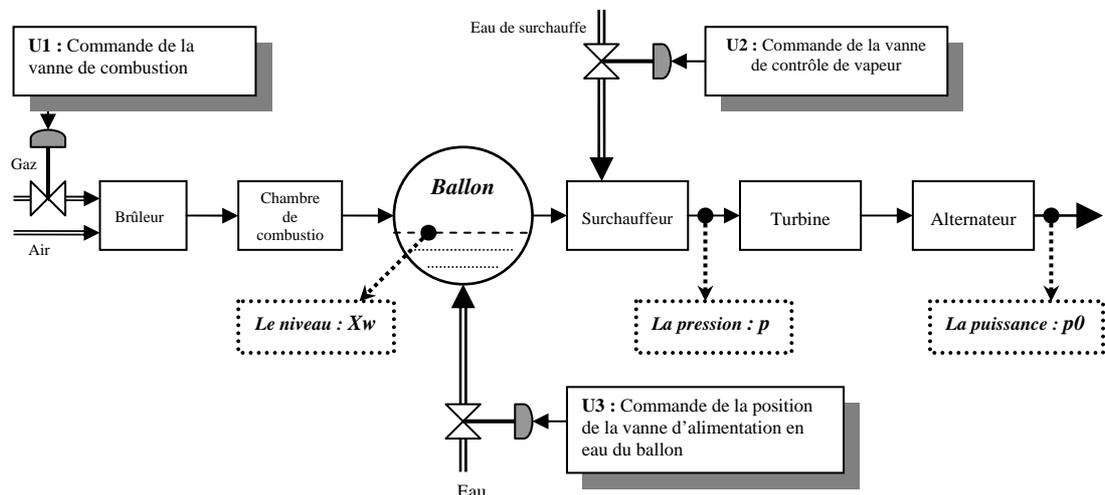


Figure 3.5 : Schéma fonctionnel d'un générateur de vapeur avec identification des variables contrôlées

### 3.4.3 Régulation du générateur de vapeur

Pour tenir compte des exigences énumérées ci dessus et assurer un bon fonctionnement du système, une automatisation du fonctionnement de la chaudière s'avère nécessaire.

On peut considérer la commande du générateur de vapeur comme un circuit de régulation assez complexe. Cependant on peut décomposer cette régulation multiple, difficile à considérer dans son ensemble, en circuits distincts relativement indépendants les uns des autres et qui sont la régulation de la puissance de sortie, le niveau d'eau, et la pression de la vapeur dans le ballon.

#### 3.4.3.1 La régulation du niveau d'eau dans le ballon

Le but de la régulation du niveau d'eau dans le réservoir est de le maintenir constamment entre deux limites relativement proches quelque soient les conditions de fonctionnement.

Le niveau d'eau dans le ballon ne doit jamais être trop bas, sinon il y a risque de surchauffe de la vapeur d'eau produite qui peut entraîner l'éclatement du ballon. De plus, il faut assurer la quantité suffisante qui garantit le refroidissement des parties métalliques de la chaudière en contact avec les fumées.

Il ne doit pas non plus être trop haut, sinon l'eau liquide risque de passer dans les circuits de vapeur. La régulation automatique du niveau maintient en permanence celui-ci dans des limites acceptables.

La principale perturbation du niveau dans le ballon est le débit de consommation de vapeur. De manière naturelle le débit de soutirage de vapeur est intégrateur du niveau, et donc une augmentation de ce débit provoquera à terme une baisse du niveau, mais cet effet est occulté dans un premier temps par un phénomène dynamique de gonflement.

Une augmentation du débit de vapeur fait chuter la pression dans le ballon, ce qui provoque la détente des bulles de vapeur au sein du liquide et un accroissement de la vaporisation se traduisant par une augmentation du niveau alors que la quantité réelle de liquide diminue.

Il y a trois systèmes de réglage du niveau suivant la précision exigée :

- 1- La régulation à un élément : pilotée par le niveau.
- 2- La régulation à deux éléments : pilotée par le niveau et le débit de vapeur.
- 3- Le perfectionnement classique est la régulation à trois éléments, pilotée par le débit de vapeur, le débit d'eau, et le niveau. Le signal pilotant la vanne d'alimentation résulte alors de la différence entre le débit de vapeur et le débit d'eau, ce qui évite de modifier le débit

d'eau plus que nécessaire, même en cas de variations importantes. On évite ainsi d'accentuer les fluctuations de pression. Le niveau agit toujours en terme correctif à plus longue échéance. La régulation à trois éléments autorise des variations de puissances rapides.

### **3.4.3.2 La régulation de la combustion**

La régulation de la combustion a pour but de maintenir constante la pression de la vapeur à la sortie de la chaudière en agissant sur le débit du combustible qui doit s'adapter rapidement aux variations de la charge.

Les gaz de combustion ont besoin d'être mélangés avec une quantité adéquate d'air pour que la combustion puisse se faire dans les meilleures conditions techniques

Le deuxième but de cette régulation est d'optimiser le processus de combustion en agissant sur le rapport gaz de combustion - air.

Le système de contrôle de la combustion doit tenir compte des spécifications suivantes :

- La demande en carburant ne peut jamais excéder le débit d'air mesuré.
- En cas d'augmentation de la charge, la demande de carburant doit suivre la demande d'air.
- La demande d'air ne peut jamais être inférieure au débit de carburant mesuré.
- En cas de diminution de la charge, la demande d'air doit suivre le carburant.

### **3.4.3.3 régulation de puissance électrique en sortie**

Le maintien à une valeur constante de la température à la sortie de la chaudière et de la pression dans le ballon quelles que soient la charge et les perturbations éventuelles sont d'une importance primordiale aussi bien pour le bon fonctionnement de la chaudière que pour sa durée de vie et pour celle de la turbine.

La température de la vapeur en tant que grandeur à régler est mesurée à sortie de la chaudière, à ce moment là on peut agir sur celle-ci par injection d'eau afin de conserver la température constante à une valeur prédéterminée.

La température de la vapeur est régulée en variant le débit d'eau aspergée sur la vapeur de sortie du surchauffeur. Une station de désurchauffe par vaporisation d'eau est située entre les sections de sur chauffage de température haute et basse.

Un système de contrôle de température de la vapeur de sortie de la surchauffeur. L'entrée en retour au contrôleur principal est la température mesurée de la vapeur du surchauffeur. Le point de référence est déterminé par l'opérateur. La sortie du contrôleur secondaire la vitesse de changement de débit d'air fournit une anticipation aux changement de la température de sortie du surchauffeur. La sortie du contrôleur secondaire est l'entre de demande de position de la vanne de contrôle de la vaporisation d'eau.

### 3.5 Modèle dynamique de la chaudière

#### 3.5.1 Modèle :

Dans cette section nous présentons le modèle mathématique d'un ensemble chaudière – turbine. Le modèle est basé sur les travaux d'Astrom et Eklund effectués sur le système Chaudière – Turbine P16/G16 à SYDVENSKRAFT AB Plant in Malo, Suède en 1969. [2]

Leur modèle a été ensuite étendu pour inclure la puissance, et Bell et Astrom [7] l'ont combiné à leur travail pour produire un modèle non linéaire multivariable admettant comme variables d'entrée le débit de combustible (fuel), la position de la vanne de contrôle de vapeur (pression), et le débit d'eau d'alimentation du ballon et comme variables de sorties la pression de vapeur dans le ballon, la puissance électrique et la déviation du niveau d'eau.

L'inclusion de l'équation d'évaporation et la dynamique de la densité de fluide dans le modèle de Bell et Astrom apporte une prédiction raisonnable de la dynamique du niveau d'eau dans le ballon. Bien que le modèle soit d'ordre réduit, il est capable d'illustrer une dynamique complexe associée au système réel [2].

Les dynamiques du système sont données par les équations différentielles suivantes: [11].

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -0.0018 \cdot u_2 \cdot p^{9/8} + 0.9 \cdot u_1 - 0.15 \cdot u_3 \\ \frac{dp_0}{dt} = ((0.073 \cdot u_2 - 0.016) \cdot p^{9/8}) - 0.1 \cdot p_0 \\ \frac{dp_f}{dt} = \frac{(141.0 \cdot u_3 - (1.10 \cdot u_2 - 0.190) \cdot p)}{85} \end{cases} \quad (3.1)$$

Où :

- $p$  : la pression dans le ballon ( $\text{Kg/cm}^2$ );

- $p_0$ : la puissance électrique (MW);

- $p_f$ : la densité du fluide ( $\text{Kg/m}^3$ ).

Les entrées normalisées du système sont:

- $u_1$  : position de la vanne de combustion;

- $u_2$  : position de la vanne de contrôle de vapeur ;

- $u_3$  : position de la vanne de l'eau d'alimentation.

Les limitations suivantes imposées sur les vannes sont:

$$\begin{cases} |du_1 / dt| \leq 0.007 / \text{sec} \\ -2 / \text{sec} \leq du_2 / dt \leq 0.02 / \text{sec} \\ |du_3 / dt| \leq 0.05 / \text{sec} \end{cases} \quad (3.2)$$

Et les positions de toutes les vannes sont comprises entre [0,1].

Les sorties du système sont  $p$ ,  $p_0$  et  $X_w$  le niveau d'eau dans le ballon. La pression et la puissance sont simplement les deux premières variables d'état du système, alors que le niveau d'eau est donné par les relations auxiliaires suivantes:

$$\begin{aligned} X_w &= 0.05 \cdot (0.13073 \cdot p_f + 100 \cdot \alpha_{cs} + \frac{q_e}{9} - 67.975) \\ \alpha_{cs} &= \frac{(1 - 0.001538 \cdot p_f) \cdot (0.8 \cdot p - 25.6)}{p_f \cdot (1.0394 - 0.0012304 \cdot p)} \\ q_e &= (0.854 \cdot u_2 - 0.147) \cdot p + 45.59 \cdot u_1 - 2.514 \cdot u_3 - 2.096 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Où:

- $q_e$  : est le taux d'évaporation (Kg/s);
- $\alpha_{cs}$  : est un indicatif de la qualité de vapeur.

Les caractéristiques de la chaudière étudiée sont les suivantes:

- Débit vapeur en marche poussée maximum : 350t /h
- Débit vapeur en marche continue de pointe : 320t /h
- Débit d'eau d'alimentation en marche continue de pointe : 320t /h
- Le flux de la chaleur en marche continue de pointe : 200 MJ/s
- Pression de la vapeur saturée à l'intérieur de réservoir : 64 bars
- Température de la vapeur saturée a l'intérieur du réservoir : 280 °C
- Température de la vapeur surchauffée : 500 °C
- Température de l'eau d'alimentation : 135 °C

### 3.5.2 Importance du générateur de vapeur et problèmes de réglage :

Le générateur de vapeur est un élément essentiel pour le fonctionnement des centrales électriques. La régulation du niveau d'eau de ces générateurs pose beaucoup de problèmes à basse charge et on estime que 30% des arrêts d'urgences constatées sont imputables à la régulation du niveau d'eau. Il faut souligner que le générateur de vapeur est un système à déphasage non minimal, fortement non linéaire et difficile à identifier étant donné qu'on ne peut l'isoler du reste de la centrale. Les mesures du débit de vapeur sortant du générateur deviennent de mauvaise qualité à faible charge, ce qui dégrade le terme d'anticipation. Ces aspects de grande variabilité, combinés à la mauvaise qualité des mesures, rendent la commande classique et actuellement exploitée peu efficace et nécessite la reprise en manuel de la régulation lors des démarrages ou des fonctionnements aux basses charges. Le but de

cette recherche est de proposer un contrôleur robuste tenant compte des difficultés de réglage, et de l'environnement défavorable aux faibles charges.

Le générateur de vapeur est un système multivariable dont les grandeurs à commander sont couplées. Diverses techniques ont été utilisées afin de commander ce système et notamment la commande décentralisée [15], la commande prédictive [22], et la commande par logique floue [16], [23]. Ces commandes ont montré leurs limites surtout lorsque le système est non linéaire et ses paramètres peuvent varier et lui-même soumis à des perturbations aléatoires. Dans le chapitre suivant, nous envisageons la commande d'un générateur de vapeur d'une chaudière par une approche basée sur la théorie de la commande par mode glissant. Ce type de commande a suscité un grand intérêt parmi les chercheurs durant ces dernières années à cause de la simplicité de sa mise en œuvre et sa robustesse vis-à-vis des incertitudes de modélisation et des perturbations sur le système à commander.

## Chapitre 4 : Simulations et Tests

---

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons appliquer les différents algorithmes de commande développés au chapitre 2 et ce pour commander une chaudière à vapeur. Ce système est non linéaire et c'est un système multivariable possédant trois sorties : le niveau d'eau dans le ballon, la pression de vapeur et la puissance électrique et trois entrées qui seront assimilées aux signaux appliqués sur les vannes : une vanne pour le contrôle du débit d'alimentation de l'eau du ballon, une vanne pour contrôler le débit de combustible et une troisième vanne pour le contrôle du débit de vapeur qui sera injecté sur la turbine pour générer l'électricité. Afin de tester l'aptitude et la validité de ces différents algorithmes à structure variable sur notre processus, nous procéderons à plusieurs tests de simulations : en première phase, l'application sera faite sur le modèle non linéaire. En deuxième phase, le modèle sera linéarisé autour d'un point de fonctionnement nominal et on lui appliquera une commande asymptotiquement stable. En troisième phase, on applique une commande prédictive en mode glissant, après discrétisation du modèle linéaire obtenu au niveau de la deuxième phase.

### 4.2 Le modèle non linéaire sans contraintes sur les commandes:

#### 4.2.1 le modèle utilisé :

le modèle d'état est décrit par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t} &= -0.0018.u_2.p^{\frac{9}{8}} + 0.9.u_1 - 0.15.u_3 \\ \frac{\partial p_0}{\partial t} &= (0.073.u_2 - 0.016).p^{\frac{9}{8}} - 0.1.p_0 \\ \frac{\partial p_f}{\partial t} &= \frac{(141.u_3 - (1.1.u_2 - 0.19).p)}{85}\end{aligned}\tag{4.1}$$

Ce modèle peut l'écrit sous la forme standard suivant :

$$\dot{x} = f(t, x) + B(x, t).u\tag{4.2}$$

Avec :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial p_0}{\partial t} \\ \frac{\partial p_f}{\partial t} \end{bmatrix}; f = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.016p^{\frac{9}{8}} - 0.1p_0 \\ \frac{0.19}{85}p \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.0018p^{\frac{9}{8}} & -0.15 \\ 0 & 0.073.p^{\frac{9}{8}} & 0 \\ \frac{141}{85} & \frac{-1.1p}{85} & 0 \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

$$\text{Soit le vecteur d'état donné par : } x = [p, p_0, p_f]^T \quad (4.5)$$

Où :

$p$  : Pression (Kg/cm<sup>2</sup>)

$p_0$  : Puissance électrique (Mw)

$p_f$  : Densité du fluide (Kg/m<sup>3</sup>)

$$\text{La surface de glissement est donnée par : } S(x) = C.(x - x_{ref}) \quad (4.6)$$

$$\text{Avec : } S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$c_{ij}$  : paramètres de la surface de commutation.

Dans cette partie on va appliquer une commande discontinue qui contraint le système à évoluer au voisinage de la surface de glissement.

En utilisant l'approche de la loi d'arrivée de GAO [24] qui est modélisée par une équation différentielle spécifiant la dynamique de la fonction de commutation.

$$\dot{S}(x) = -Q.sign(s) - K.S \quad (4.7)$$

Pour cette loi de GAO la condition de la stabilité est vérifiée selon le critère de Lyapunov.

On choisit la fonction de Lyapunov :  $V(x) = \frac{1}{2}S^T(x).S(x)$  est une fonction scalaire positive.

La condition la convergence est donnée par:

$$\dot{V}(x) < 0$$

En dérivant l'équation de Lyapunov :

$$\dot{V}(x) = \dot{S}^T(x).S(x) \quad (4.8)$$

En remplaçant (4.7) dans (4.8) on trouve :

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= ((-Q \cdot \text{sign}(S(x)) - KS(x)))^T \cdot S(x) \\ &= -\text{sign}(S(x))^T Q^T \cdot S(x) - S(x)^T \cdot K^T \cdot S(x)\end{aligned}$$

On a :  $Q = \text{diag}([q_1 \quad q_2 \quad q_3])$  et  $K = \text{diag}([k_1 \quad k_2 \quad k_3])$

Avec :  $\left\{ \begin{array}{l} q_1 > 0 \quad , \quad q_2 > 0 \quad \text{et} \quad q_3 > 0 \\ k_1 > 0 \quad , \quad k_2 > 0 \quad \text{et} \quad k_3 > 0 \end{array} \right.$  ainsi que :

En tenant compte de l'expression de  $S(x)$ , on peut montrer que  $\dot{V}(x)$  est un vecteur dont toutes les composantes sont négatives quelque soit  $S(x)$ .

Ceci implique que l'état du système tend asymptotiquement vers son point d'équilibre.

#### 4.2.2 Calcul de la loi de commande :

Dans cette loi on néglige le terme de discontinuité dans la loi d'arrivée de GAO développée dans [23] [24] :

$$\dot{S}(x) = -KS(x) \quad (4.9)$$

On remarque que les conditions de convergence sont assurées.

$$S(x) = C(x - x_{ref})$$

$$\dot{S}(x) = C \cdot \dot{x} = -KS(x)$$

Donc :  $C \cdot (f + B \cdot u) = -K \cdot S(x)$

$$u = -(C \cdot B)^{-1} (C \cdot f + K \cdot S(x)) \quad (4.10)$$

Les matrices  $C$  et  $K$  sont choisies par le concepteur de manière à garantir la convergence de la trajectoire vers la surface de glissement.

Dans ce premier test nous allons amener le système au point de fonctionnement suivant :

$x_{ref} = [118.8 ; 85.06 ; 470.8]$  à partir du point nominal  $x(0) = [108 ; 66.65 ; 428]$

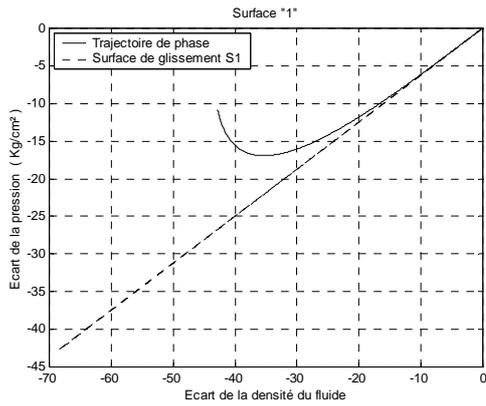


Figure 4.1 : Trajectoire de phase et surface de glissement  $S1$

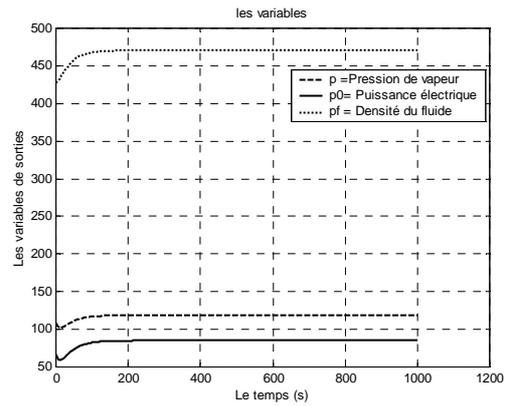


Figure 4.4 : Les sorties  $p$  ;  $p0$  ;  $pf$

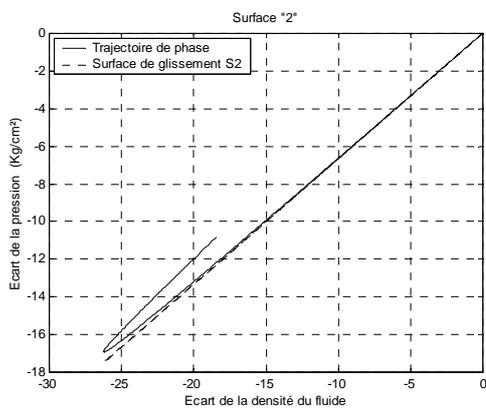


Figure 4.2 : Trajectoire de phase et surface de glissement  $S2$

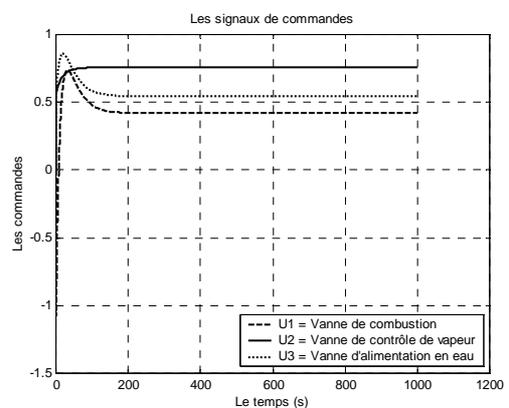


Figure 4.5 : les commandes  $U1$ ;  $U2$ ;  $U3$

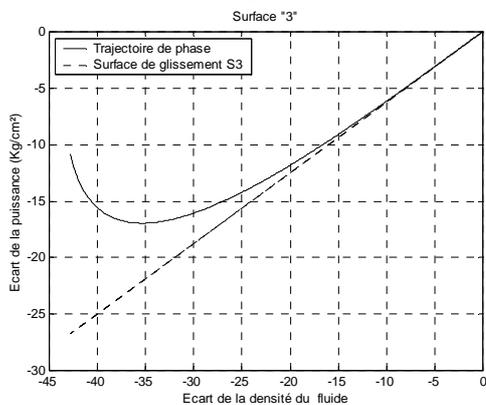


Figure 4.3 : Trajectoire de phase et surface de glissement  $S3$

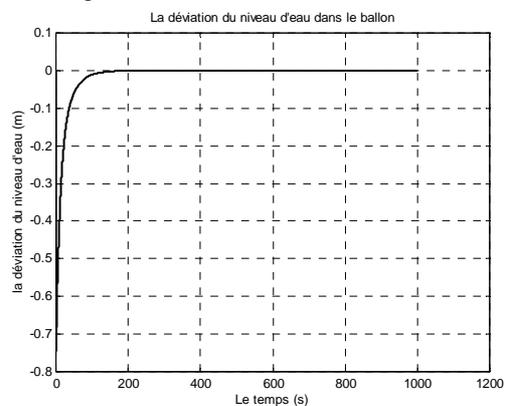


Figure 4.6 : Déviation du niveau d'eau

**L'analyse des résultats de ce premier test donne les remarques et les observations suivantes :**

les courbes des figures (4.1-4.2-4.3), montrent que les trajectoires d'état dans le plan de phase convergent asymptotiquement vers les surfaces de glissement.

Les courbes qui représentent les commandes montrent que ces dernières rejoignent bien leurs références, avec un certain dépassement au début de la simulation pour les commandes  $U1$  et  $U3$ . L'observation des courbes de la figure 4.4 montre que les variables d'état suivent parfaitement et rapidement ces références sans erreurs statiques en régime permanent. Après un certain temps le niveau se stabilise parfaitement à la valeur désirée au bout de 200sec. Donc on peut conclure que notre contrôleur arrive à bien commander le système, tout en assurant la convergence de l'état du système vers le point d'équilibre.

### 4.3 Modèle non linéaire avec contraintes :

Dans cette simulation on introduit les contraintes physiques sur le modèle précédant, celles-ci concernant les commandes des vannes, ainsi que leurs dérivées.

La simulation est effectuée avec le même contrôleur utilisé précédemment.

Les contraintes sont les suivantes :

$$0 < u_1 \leq 1$$

$$0 < u_2 \leq 1 \quad \text{Et}$$

$$0 < u_3 \leq 1$$

$$\left| \frac{\partial u_1}{\partial t} \right| \leq 0.007 / \text{sec}$$

$$-2 / \text{sec} \leq \frac{\partial u_2}{\partial t} \leq 0.02 / \text{sec}$$

$$\left| \frac{\partial u_3}{\partial t} \right| \leq 0.05 / \text{sec}$$

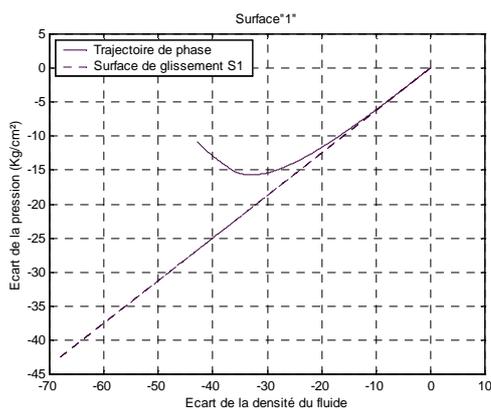


Fig. 4.7 : Trajectoire de phase et surface de glissement  $S1$

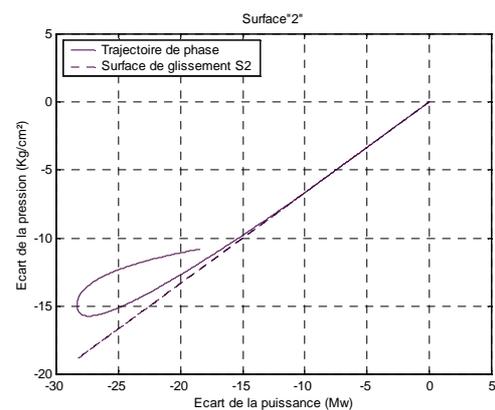


Fig. 4.8 : Trajectoire de phase et surface de glissement  $S2$

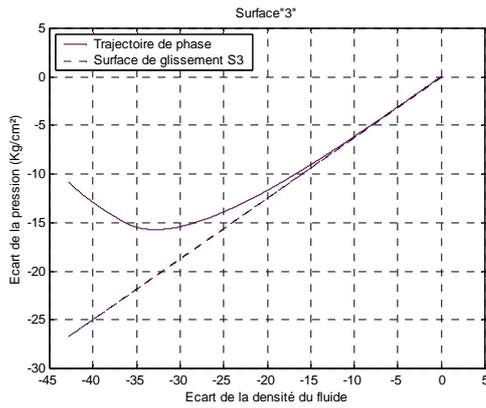


Fig. 4.9 : Trajectoire de phase et surface de glissement  $S_3$

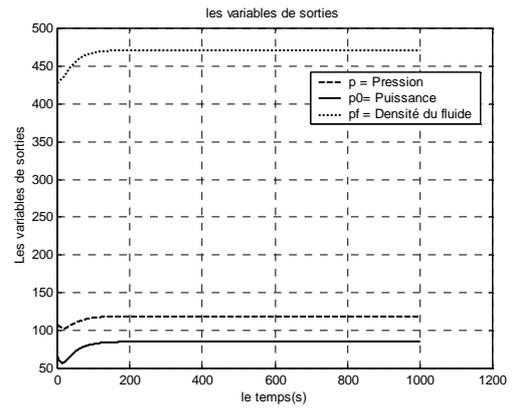


Fig. 4.10 : Les sorties  $p$  ;  $p_0$  ;  $pf$

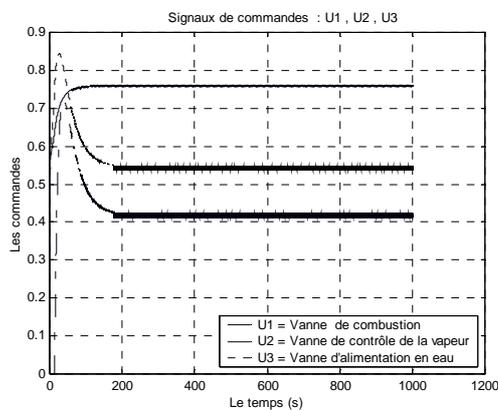


Fig. 4.11 : les commandes  $U_1$ ;  $U_2$ ;  $U_3$

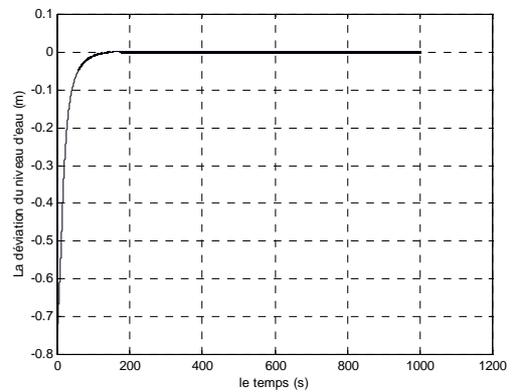


Fig. 4.12 : Déviation du niveau d'eau

**Les résultats des différents tests nous amènent à donner les observations suivantes :**

Les figures 4.7, 4.8 , 4.9 donnent les réponses dans les plans de phases et montrent clairement qu'ils rejoignent le point d'équilibre asymptotiquement aux diverses droites de glissement. Les figures 4.10, 4.11 et 4.12. Représentent les sorties du système ainsi que les commandes et montrent que le contrôleur arrive à stabiliser le système au point de fonctionnement désiré.

Les mêmes observations que le système sans contraintes sauf que les valeurs à commander mettent plus de temps pour se stabiliser, par ce que l'évolution des commandes n'est plus libre a cause des contraintes physiques imposées au système.

On remarque que le niveau d'eau dans le ballon se stabilise au bout de 330 sec.

On peut conclure que, malgré les contraintes imposées au système, le contrôleur est capable de stabiliser celui-ci.

**Les tests :****1-test de robustesse :**

Il consiste à connaître la réaction du contrôleur face à une variation des paramètres du modèle pendant le fonctionnement du système.

Pour tester la robustesse du contrôleur mis au point précédemment vis à vis d'éventuelles perturbations, on change les paramètres décrivant le modèle.

Pour cela on fait le test suivant :

De l'instant  $t = 0$  à  $t = 500s$  : On utilise le modèle de base décrit précédemment.

De  $t = 500s$  à  $t = 2000s$  : on utilise le modèle suivant :

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t} &= -0.0018.u_2.p^{\frac{9}{8}} + .u_1 - 0.2.u_3 \\ \frac{\partial p_0}{\partial t} &= (0.073.u_2 - 0.03).p^{\frac{9}{8}} - 0.1.p_0 \\ \frac{\partial p_f}{\partial t} &= \frac{(141.u_3 - (1.1.u_2 - 0.19).p)}{85}\end{aligned}$$

De  $t = 2000s$  à  $4000s$  le modèle utilisé est :

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t} &= -0.0018.u_2.p^{\frac{9}{8}} + .u_1 - 0.2.u_3 \\ \frac{\partial p_0}{\partial t} &= (0.073.u_2 - 0.03).p^{\frac{9}{8}} - 0.1.p_0 \\ \frac{\partial p_f}{\partial t} &= \frac{(150.u_3 - (1.5.u_2 - 0.3).p)}{85}\end{aligned}$$

Les résultats de la simulation donnent les graphes suivants

:

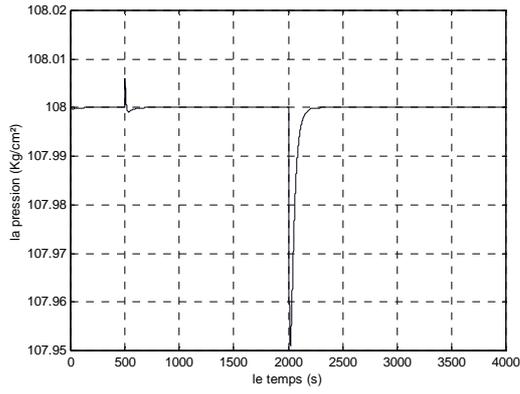


Fig. 4.13 : La pression ( $p$ )

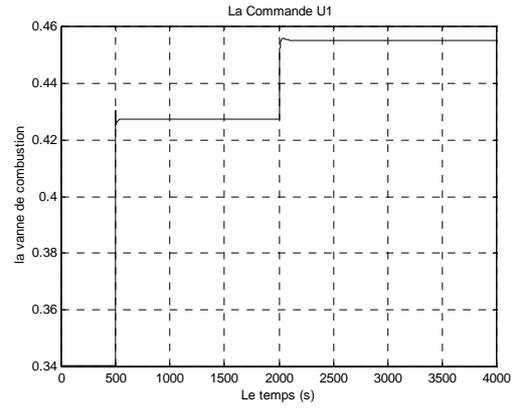


Fig. 4.14 : La commande  $U1$

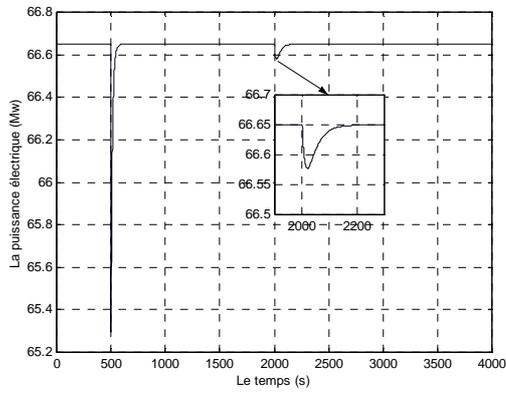


Fig. 4.15 : La puissance ( $p\theta$ )

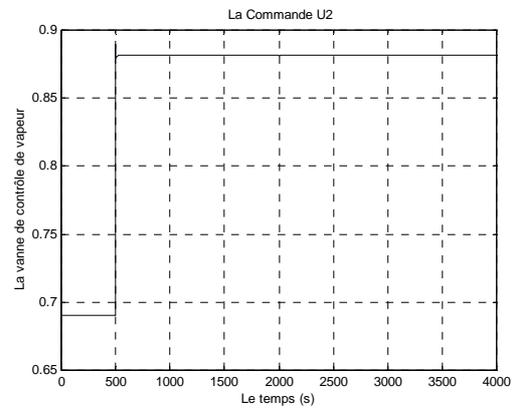


Fig. 4.16 : La commande  $U2$

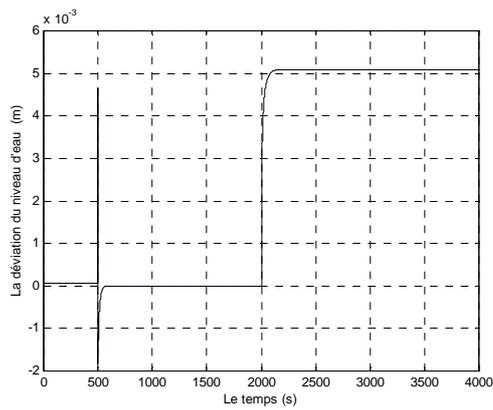


Fig. 4.17 : La déviation du niveau d'eau

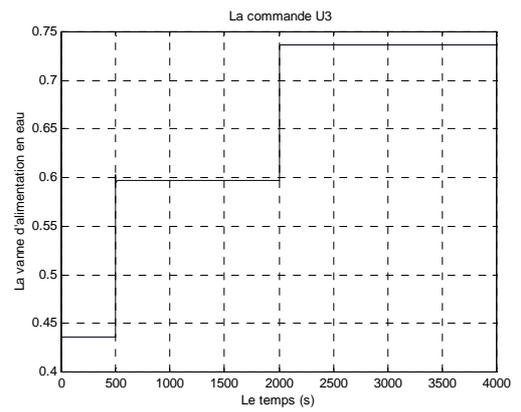


Fig. 4.18 : La commande  $U3$

**Observations :**

A chaque changement du modèle, les grandeurs à commander rejoignent les références. Désirées, avec des petites fluctuations au moment du changement des paramètres du modèle. on constate que le niveau d'eau dans le ballon se stabilise à une valeur légèrement différente de zéro ( $5.09 \cdot 10^{-3}$ ) pour le troisième modèle.

les commandes générées par le contrôleur sont stables et satisfont les contraintes imposées aux organes de commande.

On peut conclure que le contrôleur réagit parfaitement et rapidement aux variations des paramètres du modèle, en générant les commandes nécessaires à la stabilisation des variables du système aux références désirées.

**2-Test de créneau :**

Ce sont des simulations qui consistent à tester la réaction du contrôleur face à des changements du point de fonctionnement pour le vecteur d'état. Pour cela on soumet le système à plusieurs points de fonctionnement désiré selon les conditions suivantes :

- Pour  $0 < t \leq 1000s$  :  $X_{ref} = [ 108 ; 66.65 ; 428 ]$  ;  $U_{ref} = [ 0.34 ; 0.69 ; 0.435 ]$
- Pour  $1000 < t \leq 2000s$  :  $X_{ref} = [ 118.8 ; 85.06 ; 470.8 ]$  ;  $U_{ref} = [ 0.418 ; 0.759 ; 0.543 ]$
- Pour  $2000 < t \leq 3000s$  :  $X_{ref} = [ 129.6 ; 105.8 ; 513.6 ]$  ;  $U_{ref} = [ 0.505 ; 0.882 ; 0.663 ]$
- Pour  $3000 < t \leq 4000s$  :  $X_{ref} = [ 118.8 ; 85.06 ; 470.8 ]$  ;  $U_{ref} = [ 0.418 ; 0.759 ; 0.543 ]$
- Pour  $4000 < t \leq 5000s$  :  $X_{ref} = [ 108 ; 66.65 ; 428 ]$  ;  $U_{ref} = [ 0.34 ; 0.69 ; 0.435 ]$

Les résultats obtenus sont représentés par les figures suivantes :

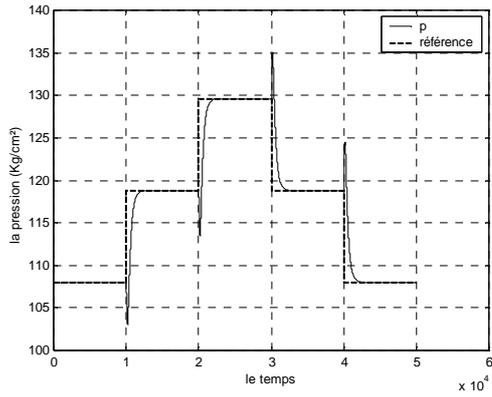


Fig. 4.19 : La pression de vapeur ( $p$ )

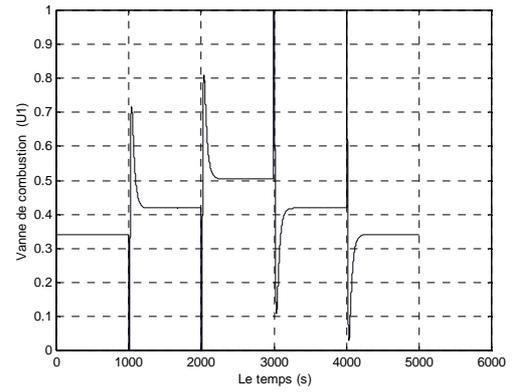


Fig. 4.20 : La commande de la vanne de combustion ( $U1$ )

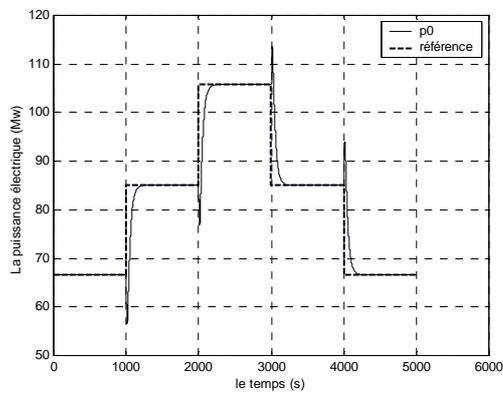


Fig. 4.21 : La puissance électrique ( $p0$ )

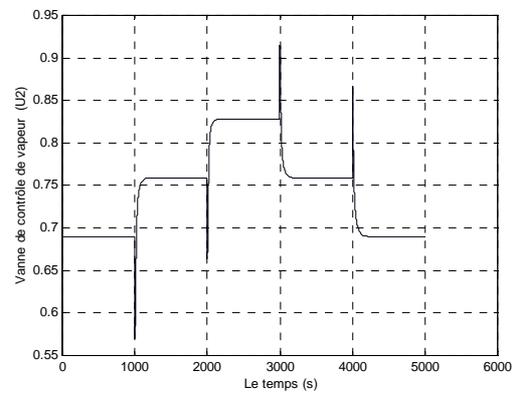


Fig. 4.22 : La commande de la vanne de contrôle de vapeur ( $U2$ )

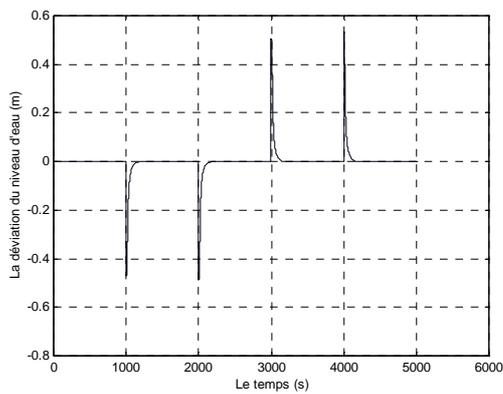


Fig. 4.23 : La déviation du niveau d'eau dans le ballon

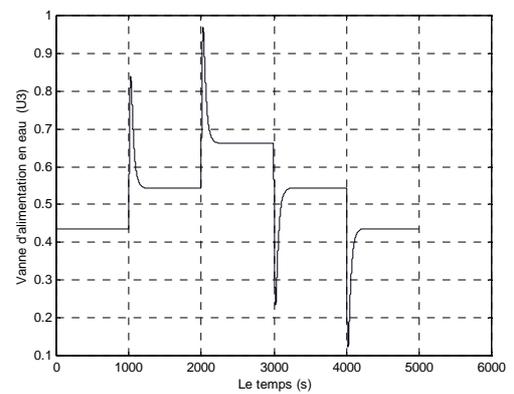


Fig. 4.24 : La commande de la vanne d'alimentation d'eau ( $U3$ )

### Observations sur les tests créneaux:

A chaque changement de référence, on remarque que :

- ✓ les variables de sortie se stabilisent aux valeurs désirées sans erreurs statiques.
- ✓ le contrôleur réussit à stabiliser le système en générant à chaque fois les commandes nécessaires.

### 4.4 Calcul de la commande avec terme discontinu :

Dans cette partie on introduit le terme de la discontinuité

$$\dot{S}(x) = -Q.\text{sign}(S(x)) - K.S(x) \quad (4.11)$$

La condition de convergence est toujours satisfaite dans ce cas selon la théorie de Lyapunov, comme on l'a montré au paragraphe ci-dessus.

Dans ce cas la loi de commande est donnée par la relation suivante :

$$u = -(C.B)^{-1} . (Q.\text{sign}(S) + K.S + C.f) \quad (4.12)$$

Les matrices  $C$ ,  $Q$  et  $K$  sont choisies par le concepteur de façon à assurer la convergence et réduire l'effet du broutement (chattering).

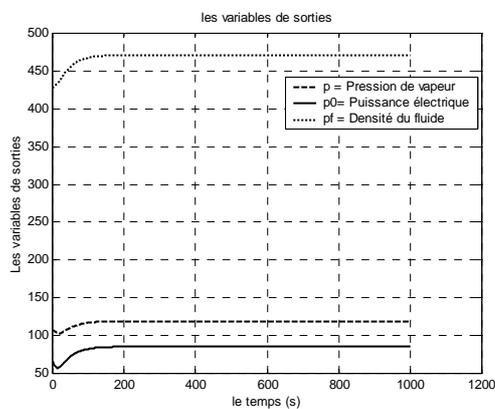


Fig. 4.25 : Les sorties  $p$  ;  $p0$  ;  $pf$

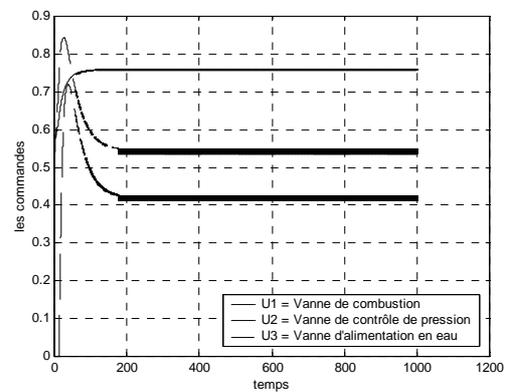


Fig. 4.26 : les commandes  $U1$ ;  $U2$ ;  $U3$

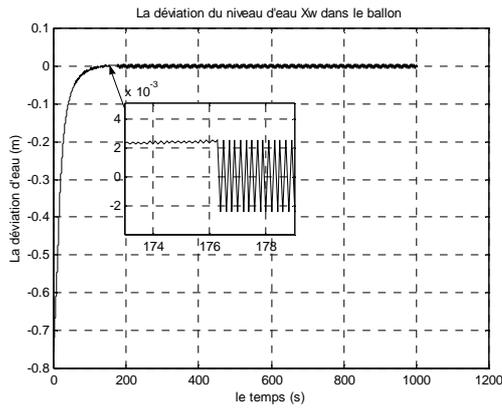


Fig. 4.27 : Déviation du niveau d'eau

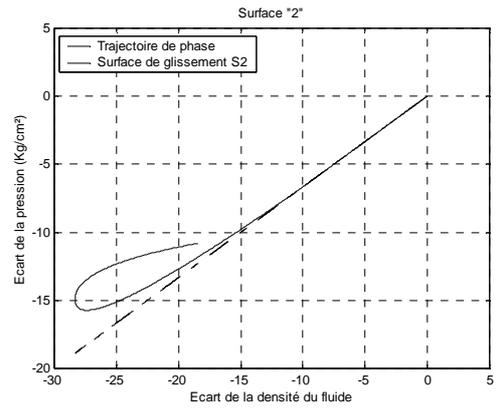


Fig. 4.28 : Trajectoire de phase et surface de glissement S2

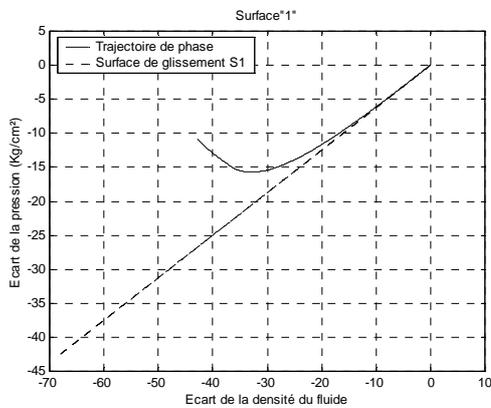


Fig. 4.29 : Trajectoire de phase et surface de glissement S1

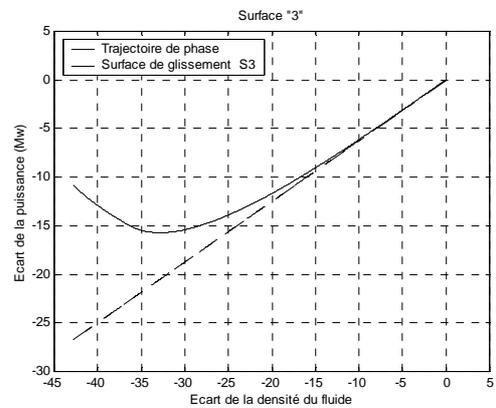


Fig. 4.30 : Trajectoire de phase et surface de glissement S3

Les courbes ci-dessus (figures 4.27 à 4.30 ) montrent que :

- ✓ toutes les trajectoires d'état convergent vers les surfaces de glissement puis rejoignent le point d'équilibre désiré (origine du plan de phase), tout en présentant de faibles oscillations autour des surfaces..
- ✓ toutes les variables de sortie du système oscillent légèrement autour des références désirées (amplitudes très petites ( $10^{-4}$ )) et peuvent être considérées comme stables.

## 4.5 Méthode de la commande équivalente :

Pour tenter d'éliminer le phénomène de broutement, on cherche une loi qui combine une loi discontinue utilisée pour satisfaire la condition de convergence, et l'autre continue pour assurer le glissement le long de la surface choisie.

La commande totale est donnée par :

$$u = \Delta u + u_{eq} \quad (4.13)$$

Avec :  $\Delta u = -Q \cdot \text{sign}(S(x))$  et  $Q = \text{diag}([q_1 \quad q_2 \quad q_3])$

### 4.5.1 Loi de commande :

La commande équivalente  $u_{eq}$  est calculée à partir des relations suivantes qui représentent les conditions d'invariance:

$$S(x) = 0 \quad , \quad \dot{S}(x) = 0 \quad (4.14)$$

Avec :

$$u_{eq} = -(C.B)^{-1} \cdot (C.f) \quad (4.15)$$

On obtient la commande totale suivante :

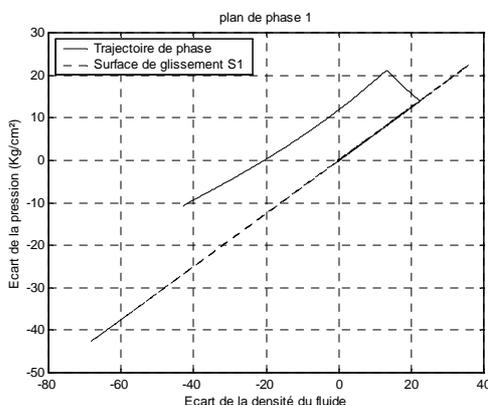
$$u = -Q \cdot \text{sign}(S) - (C.B)^{-1} \cdot (C.f) \quad (4.16)$$

Le choix de la matrice  $Q$  se fait de telle sorte à assurer la convergence.

Dans notre cas on a utilisé cette loi pour assurer la convergence des trajectoires vers des bandes voisines des surfaces de glissement. Une fois, ces voisinages atteints, on a utilisé la

fonction  $\frac{S(x)}{|S(x)| + \delta}$  ,  $\delta > 0$  au lieu de la fonction  $\text{sign}(S(x))$  afin de tenter d'éliminer le broutement (chattering).

Les résultats obtenus sont représentés par les figures ci- dessous :



surface de glissement  $S1$

Fig. 4.31 : Trajectoire de phase et

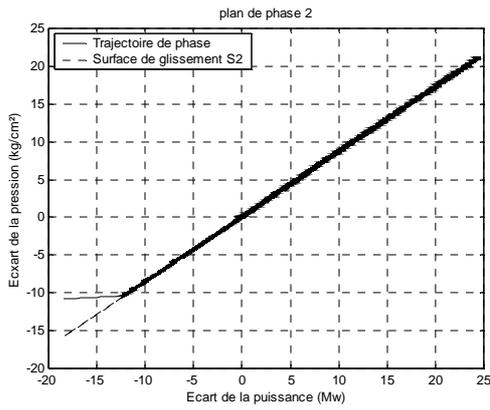


Fig. 4.32 : Trajectoire de phase et surface de glissement  $S_2$

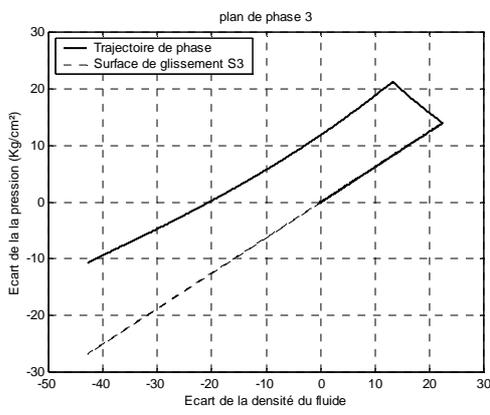


Fig. 4.33 : Trajectoire de phase et surface de glissement  $S_3$

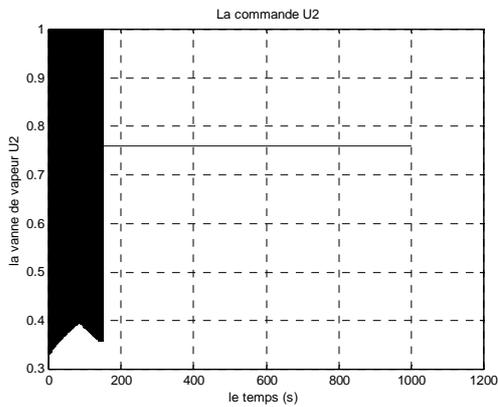


Fig. 4.35 : La commande  $U_2$

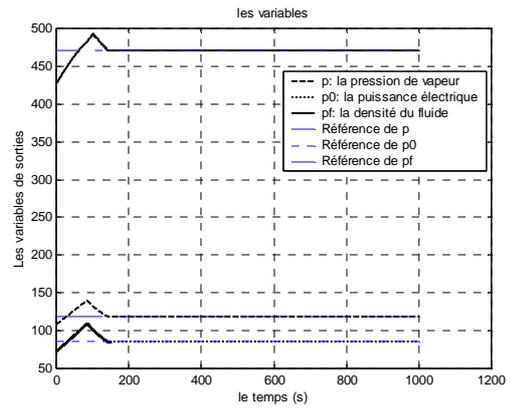


Fig. 4.37 : Les sorties  $p$  ;  $p_0$  ;  $pf$

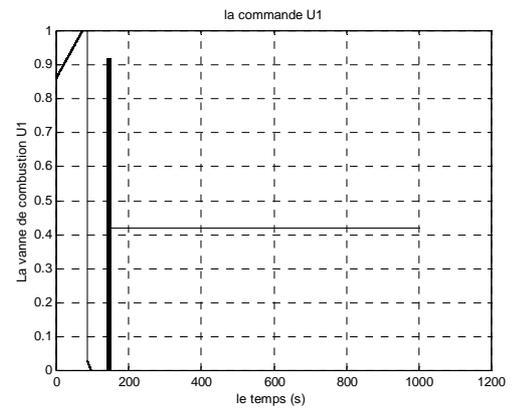


Fig. 4.34 : La commande  $U_1$

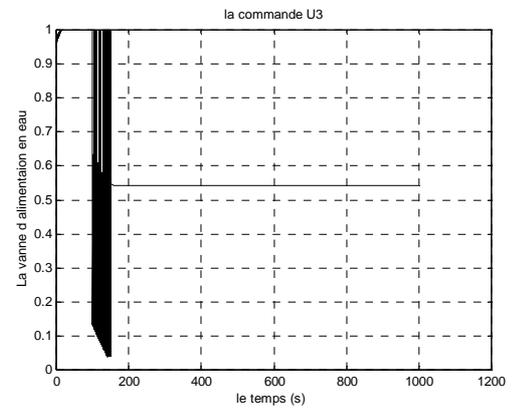


Fig. 4.36 : La commande  $U_3$

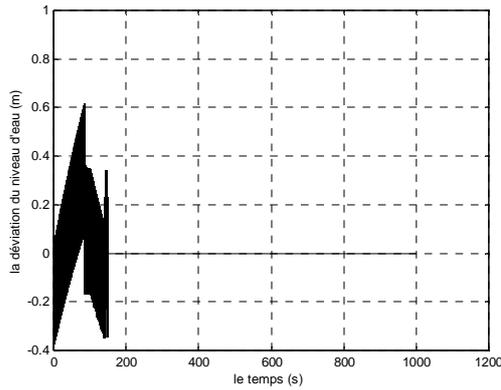


Fig. 4.38 : La déviation du niveau d'eau dans le ballon

**Observations :**

Le contrôleur arrive à stabiliser le système, en diminuant significativement le broutement.

**4.6 Commande du système par linéarisation :**

**4.6.1 Linéarisation et présentation de l'état du système :**

Notre système possède plusieurs points de fonctionnement qui sont définis dans le tableau suivant [ Tab. I ] :

	1	2	3	Nominal	4	5	6
	70 %	80 %	90 %	100%	110 %	120 %	130 %
$x^0_1$	75.60	86.40	97.20	180	118.8	129.6	140.4
$x^0_2$	15.27	36.65	50.52	66.65	85.06	105.8	128.9
$x^0_3$	299.6	342.4	385.2	428	470.8	513.6	556.4
$u^0_1$	0.156	0.209	0.271	0.34	0.418	0.505	0.6
$u^0_2$	0.483	0.552	0.621	0.69	0.759	0.828	0.897
$u^0_3$	0.183	0.256	0.340	0.435	0.543	0.663	0.793

Tab. I. Etats de fonctionnement du système

La linéarisation autour du point de fonctionnement nominal.

$$x^0 = [108;66.65;428] , u^0 = [0.34 \ 0.69 \ 0.436]^T.$$

De ces valeurs nominales, un modèle linéaire est obtenu par les séries de TAYLOR tronquées au premier ordre d'équation non linéaires.

Le dynamique non linéaire est de la forme standard :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u).$$

La linéarisation du système autour du point de fonctionnement  $(x^0, u^0)$  nécessite le calcul des matrices du système linéaire :

$$A' = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{(x^0, u^0)}, \quad B' = \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \right]_{(x^0, u^0)}$$

L'approximation linéaire du système est :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A' \cdot \bar{x} + B' \cdot \bar{u}$$

Où  $\bar{x} = x - x^0$  et  $\bar{u} = u - u^0$

Alors les matrices du système linéaire sont trouvées comme suit :

$$A' = \begin{pmatrix} -2.509 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 6.94 \cdot 10^{-2} & -0.1 & 0 \\ -6.69 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.349 & -0.15 \\ 0 & 14.155 & 0 \\ 0 & -1.389 & 1.659 \end{pmatrix}$$

#### 4.6.2 Synthèse de la loi de commande :

$$\dot{x} = A \cdot \bar{x} + B \cdot \bar{u}$$

$$S(x) = C \cdot (x - x_{ref})$$

$$\dot{S}(x) = -K \cdot S(x)$$

Les conditions de convergences sont assurées selon le critère de Lyapunov.

La loi de commande sera de la forme suivante :

$$\bar{u} = -inv(C \cdot B) \cdot (CA \cdot \bar{x} + K \cdot S(x)) \quad (4.17)$$

On garde les mêmes paramètres de la matrice  $C$  et  $K$ , utilisée dans la partie commande du système non linéaire avec les contraintes physiques imposées.

On trouve les résultats suivants :

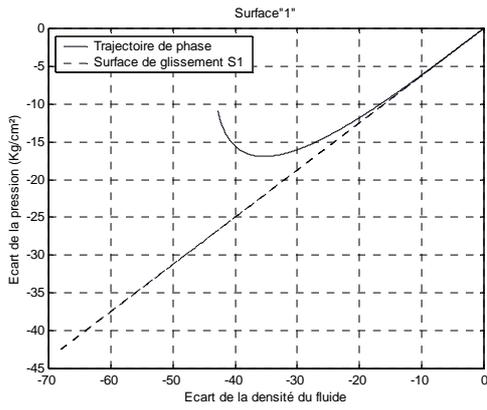


Fig. 4.39 : Trajectoire de phase et surface de glissement  $S1$

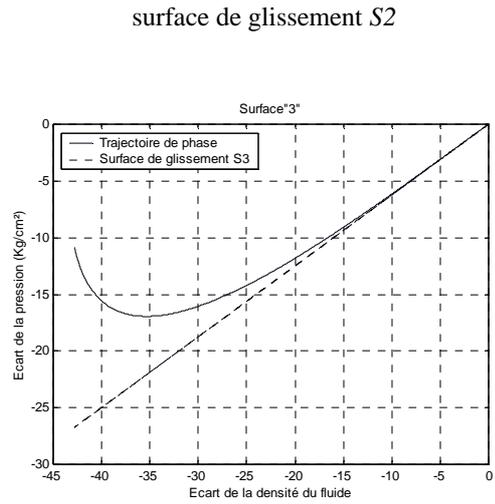


Fig. 4.43 : Trajectoire de phase et surface de glissement  $S3$

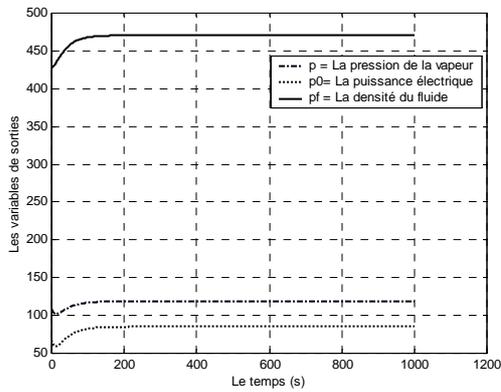


Fig. 4.40 : Les variables de sorties  $p$ ,  $p0$  et  $pf$

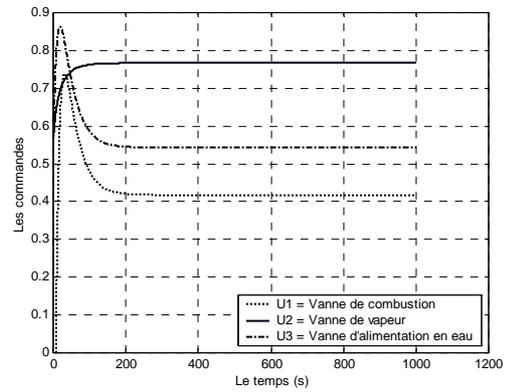


Fig. 4.42 : Les Commandes  $U1$ ,  $U2$  et  $U3$

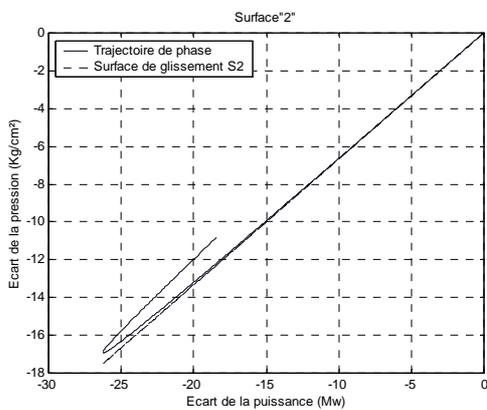


Fig. 4.41 : Trajectoire de phase et

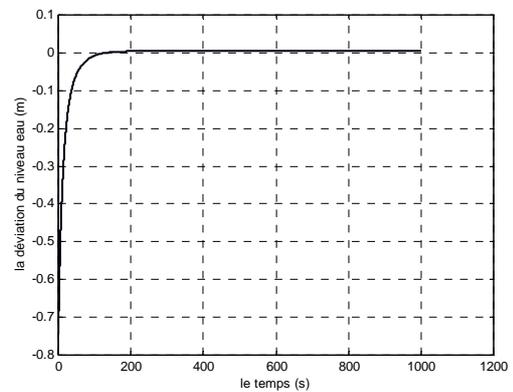


Fig. 4.44 : La déviation du niveau d'eau

dans le ballon

On observe que tous les résultats sont pratiquement identiques à ceux donnés par le système non linéaire avec contraintes, sauf une petite augmentation de (0.004) pour le niveau d'eau.

On peut conclure que le modèle linéaire a un comportement proche de celui du modèle non linéaire et peut remplacer ce dernier pour une éventuelle commande adaptée aux systèmes linéaires (LMI, la commande prédictive etc...)

## **4.7 Application du modèle linéaire avec une commande prédictive en mode glissant :**

### **4.7.1 Généralités :**

La commande prédictive (ou compensation ou correction anticipatrice) est une technique de commande avancée de l'automatique. Elle a pour objectif de commander des systèmes industriels complexes. Le principe de cette technique est d'utiliser un modèle dynamique du processus à l'intérieur du contrôleur en temps réel afin d'anticiper le futur comportement du procédé sur un horizon fini.

Le but de cette méthode est de générer à un instant courant «  $t$  » quelle que soit la valeur du retard du système, un signal de commande, et ceci, en calculant les prédictions sur le processus. Le signal de commande est tel qu'il minimise une fonction coût contenant généralement l'erreur sur la sortie et sur la commande.

La commande prédictive réalise à chaque période d'échantillonnage du contrôleur les mêmes étapes :

1. Calcul des prédictions des variables contrôlées jusqu'à un horizon de temps  $N_2$  grâce au modèle interne.
2. Calcul de la future loi de commande à appliquer sur les variables manipulées jusqu'à un horizon temporel  $N_u$ , en minimisant un critère choisi par le concepteur.
3. Seul le premier élément de la loi de commande calculée est appliqué sur le système.

4. Toutes ces étapes se répéteront ensuite jusqu'à la fin de la simulation.

Le modèle d'état utilisé pour le calcul de la commande est obtenu par linéarisation et discrétisation du modèle continu de la chaudière (modèle non linéaire).

#### 4.7.2 Commande prédictive à base de modèle d'état en mode glissant :

Le modèle d'état utilisé pour le calcul de la commande est obtenu par linéarisation et discrétisation du modèle continu de la chaudière (modèle non linéaire).

$$\begin{cases} x(k+1) = A.x(k) + B.u(k) \\ S(k) = C.e(x(k)) \end{cases} \quad (4.18)$$

avec :

$x(k)$  : le vecteur d'état

$S(k)$  : la surface de glissement

$e(x(k)) = x(k) - x_{ref}$  : l'erreur entre l'état actuel et la valeur désirée

$k$  : instant d'échantillonnage

$u(k)$  : commande

$A$  et  $B$  : les matrices d'état et de commande du système de dimensions adéquates

A partir de ce modèle discret on peut prévoir la réponse de la sortie du système dans les instants futurs :

##### 1- Calcul des prédictions des variables d'état :

$$\hat{x}(k+1) = A.x(k) + B.\hat{u}(k).$$

$$\hat{x}(k+2) = A.x(k+1) + B.\hat{u}(k+1).$$

$$\hat{x}(k+2) = A^2.x(k) + A.B.\hat{u}(k) + B.\hat{u}(k+1).$$

.....

$$\hat{x}(k+N_2) = A.\hat{x}(k+N_2-1) + B\hat{u}(k+N_2-1).$$

$$\hat{x}(k+N_2) = A^{N_2}.x(k) + A^{N_2-1}.B\hat{u}(k) + \dots + B.\hat{u}(k+N_2-1).$$

(4.19)

##### 2 Calcul des commandes prédites :

La commande changera aux temps  $k$  jusqu'à l'instant  $k+N_u-1$ , seulement, et restera constant après cela. Donc nous avons :

$$\hat{u}(k+i) = \hat{u}(k+N_u-1) \quad \text{pour } N_u < i < N_2-1$$

Les commandes futures peuvent être exprimées en fonction de  $\Delta\hat{u}(k)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}(k) = \Delta\hat{u}(k) + u(k-1) \\ \hat{u}(k+1) = \Delta\hat{u}(k+1) + \Delta\hat{u}(k) + u(k-1) \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \hat{u}(k+N_u-1) = \Delta\hat{u}(k+N_u-1) + \dots\dots + \Delta\hat{u}(k) + u(k-1) \end{array} \right. \quad (4.20)$$

En remplaçant dans l'équation (4. 6) on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}(k+1) = Ax(k) + B[\Delta\hat{u}(k) + u(k-1)] \\ \hat{x}(k+2) = A^2x(k) + AB[\Delta\hat{u}(k) + u(k-1)] + B[\underbrace{\Delta\hat{u}(k+1) + \Delta\hat{u}(k) + u(k-1)}_{\hat{u}(k+1)}] \\ \hat{x}(k+2) = A^2x(k) + (A+I)B\Delta\hat{u}(k) + B\Delta\hat{u}(k+1) + (A+I).B.u(k-1). \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \hat{x}(k+N_u+1) = A^{N_u+1}x(k) + (A^{N_u-1} + \dots + A+I)B\Delta\hat{u}(k) + \dots + (A+I)B\Delta\hat{u}(k+N_u-1) \\ \quad + (A^{N_u-1} + \dots + A+I).B.u(k-1) \\ \dots\dots\dots \\ \hat{x}(k+N_2) = A^{N_2}x(k) + (A^{N_2-1} + \dots\dots\dots + A+I)B\Delta\hat{u}(k) + \dots\dots\dots + (A^{N_2-N_u} + \dots + \\ \quad A+I)B\Delta\hat{u}(k+N_u-1) + (A^{N_2-1} + \dots + A+I)Bu(k-1) \end{array} \right. \quad (4.21)$$

Finalement nous pouvons écrire ceci sous forme matricielle comme suit :

$$\left[ \begin{array}{c} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k+2) \\ \dots \\ \hat{x}(k+N_u) \\ \hat{x}(k+N_u+1) \\ \dots \\ \dots \\ \hat{x}(k+N_2) \end{array} \right] = \underbrace{\left[ \begin{array}{c} A \\ A^2 \\ \dots \\ A^{N_u} \\ A^{N_u+1} \\ \dots \\ \dots \\ A^{N_2} \end{array} \right]}_{\text{Past}} * x(k) + \underbrace{\left[ \begin{array}{c} B \\ AB+B \\ \dots \\ \sum_{i=0}^{i=N_u-1} A^i B \\ \sum_{i=0}^{i=N_u} A^i B \\ \dots \\ \dots \\ \sum_{i=0}^{i=N_2} A^i B \end{array} \right]} * u(k-1) + \quad (4.22)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ AB + B & B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \sum_{i=0}^{i=N_u-1} A^i B & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & B \\ \sum_{i=0}^{i=N_u} A^i \cdot B & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & AB + B \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \sum_{i=0}^{i=N_2} A^i \cdot B & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \sum_{i=0}^{i=N_2-N_u} A^i B \end{bmatrix}}_{future} * \begin{bmatrix} \Delta \hat{u}(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta \hat{u}(k + N_u - 1) \end{bmatrix}$$

Les prédictions de la surface de glissement sont :

$$\begin{cases} \hat{S}(k+1) = c \cdot \hat{x}(k+1) - c \cdot xref(k+1) \\ \hat{S}(k+2) = c \cdot \hat{x}(k+2) - c \cdot xref(k+2) \\ \dots \\ \hat{S}(k+N_2) = c \cdot \hat{x}(k+N_2) - c \cdot xref(k+N_2) \end{cases} \quad (4.23)$$

Qui peut écrire sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} \hat{S}(k+1) \\ \hat{S}(k+2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{S}(k+N_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & c & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & c \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k+2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{x}(k+N_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & c & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & c \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} xref(k+1) \\ xref(k+2) \\ \cdot \\ \cdot \\ xref(k+N_2) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Une fois les prédictions faites, on doit trouver la future séquence de commande à appliquer sur le système pour atteindre la consigne désirée au niveau de la trajectoire de référence. Pour cela, on vient minimiser une fonction de coût qui diffère selon les méthodes mais généralement cette fonction contient les erreurs quadratiques entre la trajectoire de référence et les prédictions sur l'horizon de prédiction ainsi que la variation de la commande.

La fonction de coût choisie est la suivante:

$$J = V(k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_2} \hat{S}^T(k+i) \cdot Q(i) \cdot \hat{S}(k+i) + \frac{1}{2} \mu \sum_{i=0}^{N_u-1} \Delta \hat{u}^T(k+i) \cdot R(i) \cdot \Delta \hat{u}(k+i) \quad (4.25)$$

Avec  $\mu$  un coefficient de pondération,  $Q$  et  $R$  sont des matrices de pondérations, qui sont données par :

$$Q = \begin{bmatrix} Q(1) & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & Q(2) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \cdot & \dots & Q(N_2) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{bmatrix} R(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R(1) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & \cdot & \dots & R(N_u - 1) \end{bmatrix}$$

Nous pouvons réécrire la fonction de coût sous forme condensée :

$$V(k) = \frac{1}{2} \hat{S}^T(k) \cdot Q \cdot \hat{S}(k) + \mu \cdot \frac{1}{2} \Delta \hat{U}^T \cdot R \cdot \Delta \hat{U}(k) \quad (4.26)$$

Avec

$$\hat{S}(k) = \begin{bmatrix} \hat{S}(k + N_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{S}(k + N_2) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta \hat{U}(k) = \begin{bmatrix} \Delta \hat{u}(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta \hat{u}(k + N_u - 1) \end{bmatrix}$$

Les prédictions de  $S$  obtenues par remplacement de l'équation (4.9) dans l'équation (4.10) peuvent s'écrire :

$$\hat{S}(k) = \Psi \cdot x(k) + \lambda \cdot u(k-1) + \Theta \cdot \Delta \hat{U}(k) - C \cdot Xref(k) \quad (4.27)$$

$$C = \begin{bmatrix} c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Xref(k) = \begin{bmatrix} xref(k+1) \\ xref(k+2) \\ \cdot \\ \cdot \\ xref(k+N_2) \end{bmatrix}$$

avec  $\Psi$ ,  $\Theta$  et  $\lambda$  matrices définies dans (9).

En posant  $\zeta(k)$  l'erreur entre la surface prédite et la surface courante :

$$\zeta(k) = -\Psi \cdot x(k) - \lambda \cdot u(k-1) + C \cdot Xref(k) \quad (4.28)$$

La fonction coût s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2} (\Theta \Delta \hat{U}(k) - \zeta(k))^T \cdot Q \cdot (\Theta \Delta \hat{U}(k) - \zeta(k)) + \mu \cdot \frac{1}{2} (\Delta \hat{U}^T(k) \cdot R \cdot \Delta \hat{U}(k)) \\ V(x) &= \frac{1}{2} [(\Delta \hat{U}^T(k) \cdot \Theta^T - \zeta^T(k))] \cdot Q \cdot (\Theta \Delta \hat{U}(k) - \zeta(k)) + \mu \cdot \frac{1}{2} (\Delta \hat{U}^T(k) \cdot R \cdot \Delta \hat{U}(k)) \\ V(x) &= \frac{1}{2} \cdot \zeta^T(k) \cdot Q \cdot \zeta(k) - \Delta \hat{U}^T(k) \cdot \Theta^T \cdot Q \cdot \zeta(k) + \frac{1}{2} \Delta \hat{U}^T \cdot [\Theta^T \cdot Q \cdot \Theta + \mu \cdot R] \Delta \hat{U}(k) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Qui peut se mettre sous la forme :

$$V(k) = \text{const} - \Delta\hat{U}^T(k).F + \frac{1}{2}\Delta\hat{U}^T(k).H.\Delta\hat{U}(k) \quad (4.30)$$

$$\text{Où : } F = \Theta^T.Q.\zeta(k) \quad \text{et} \quad H = \Theta^T.Q.\Theta + \mu.R$$

On remarque que  $F$  et  $H$  ne dépendent pas de  $\Delta\hat{U}(k)$

Pour trouver  $\Delta\hat{U}(k)$  optimal, on annule le gradient de  $V(k)$ , ce qui donne :

$$\frac{\partial V(k)}{\partial \Delta\hat{U}(k)} = -F + H\Delta\hat{U}(k)$$

Donc l'ensemble optimal de mouvement de commande future est:

$$\Delta\hat{U}(k)_{opt} = H^{-1}.F \quad (4.31)$$

Seul le premier élément du vecteur  $\Delta\hat{U}(k)_{opt}$  est appliqué au système.

$$\Delta U(k) = [I_L, 0_L, \dots, 0_L].\Delta\hat{U}(k)_{opt} \quad (4.32)$$

Où:  $I_L$ : est la matrice identité.

D'où la commande à l'instant  $k$  :

$$U(k) = U(k-1) + \Delta\hat{U}(k)_{opt} \quad (4.33)$$

### 4.7.3 Application au générateur de vapeur :

La simulation consiste à commander la chaudière par un contrôleur prédictif en mode glissant dont l'algorithme a été élaboré ci-dessus. A cet effet, nous allons développer le modèle discret qui sera obtenu après avoir linéariser le modèle initial défini dans (1) et (2).

Notre système possède plusieurs points de fonctionnement qui sont définis par le tableau I :

La linéarisation sera effectuée autour du point de fonctionnement nominal défini par les entrées et les sorties suivantes :

$$x^0 = [108 ; 66.65 ; 428] \quad ; \quad u^0 = [0.34 ; 0.69 ; 0.435]$$

A partir de ces valeurs nominales, un modèle linéaire est obtenu par les séries de TAYLOR tronquées au premier ordre des équations non linéaires.

La dynamique non linéaire est de la forme standard :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u)$$

La linéarisation du système autour du point de fonctionnement  $(x^0, u^0)$  nécessite le calcul des matrices du système linéaire :

$$A' = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{(x^0, u^0)} ; \quad B' = \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \right]_{(x^0, u^0)}$$

L'approximation linéaire du système sera de la forme :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A' \bar{x} + B' \bar{u}$$

avec :  $\bar{x} = x - x^0$  et  $\bar{u} = u - u^0$

Les matrices du système linéaire sont données par :

$$A' = \begin{bmatrix} -2.509 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 6.94 \cdot 10^{-2} & -0.1 & 0 \\ -6.69 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B' = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.349 & -0.15 \\ 0 & 14.155 & 0 \\ 0 & -1.389 & 1.659 \end{bmatrix}$$

A partir de ce modèle linéaire notre système discret s'écrit sous forme

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A.x(k) + B.u(k) \\ S(k+1) &= C.x(k) \end{aligned} \quad (4.34)$$

On calcul les matrices  $A$  et  $B$ , avec un temps d'échantillonnage  $dt = 0.1s$ , on trouve :

$$A = \begin{bmatrix} 0.9997 & 0 & 0 \\ 0.0069 & 0.99 & 0 \\ 0.0007 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0.09 & -0.0349 & -0.0151 \\ 0 & -1.4155 & 0 \\ 0 & -0.1389 & 0.01659 \end{bmatrix}$$

Les paramètres de réglage de la commande prédictive utilisés dans cette simulation sont les suivants :

$$N_1 = 1 ; \quad N_2 = 6 \quad \text{et} \quad N_u = 4 ; \quad Q_{(3 \times N_2, 3 \times N_2)} \quad \text{et} \quad R_{(3 \times N_u, 3 \times N_u)}$$

Avec un choix convenable des matrices de pondération, des paramètres des surfaces de glissement et le paramètre  $\mu$ , les résultats de la simulation sont représentés par les deux tests suivants.

- ✓ Le premier concerne le modèle non linéaire qui a été linéarisé autour du point de fonctionnement puis discrétisé auquel on appliquera la commande prédictive définie par (4.18) et (4.20).
- ✓ Le deuxième test concerne la robustesse de ce contrôleur par rapport aux changements de références.

Les contraintes sur les commandes sont les suivantes pour les deux tests:

$$\begin{cases} 0 < u_1 \leq 1 \\ 0 < u_2 \leq 1 \\ 0 < u_3 \leq 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \left| \frac{\partial u_1}{\partial t} \right| \leq 0.007 / \text{sec} \\ -2 \leq \frac{\partial u_2}{\partial t} \leq 0.02 / \text{sec} \\ \left| \frac{\partial u_3}{\partial t} \right| \leq 0.05 / \text{sec} \end{cases} \quad (4.35)$$

avec :

$u_1$  = La commande de la vanne de combustion

$u_2$  = La commande de la vanne de contrôle de vapeur

$u_3$  = La commande de la vanne d'alimentation en eau du ballon.

## 4.7.4 Simulations :

### 4.7.4.1 Test 1

Ce test consiste à amener le système au point de fonctionnement  $x_{ref} = [118.8 ; 85.06 ; 470.8]$  à partir du point initial  $x(0) = [108 ; 66.65 ; 428]$

La loi de commande utilisée dans ce premier test est de la forme (4.33) et la surface de glissement est définie par (4.23) :

Les figures 4.45, 4.46 et 4.47 donnent les réponses dans les plans de phases et montrent clairement qu'ils rejoignent le point d'équilibre en suivant les droites de glissement sans broutement.

Les figures 4.48., 4.49 et 4.50 représentent les sorties du système ainsi que les commandes et montrent que le contrôleur prédictif en mode glissant arrive à stabiliser le système au point de fonctionnement désiré.

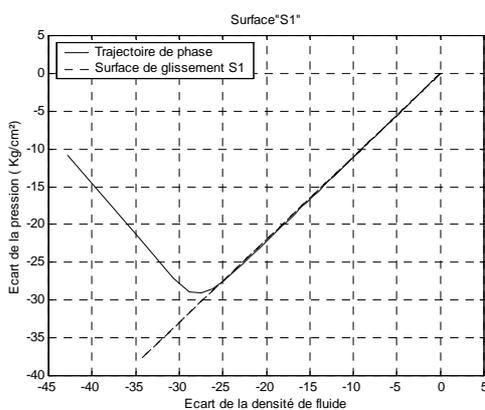


Fig. 4.45 : Trajectoire de phase et surface de glissement  $S1$

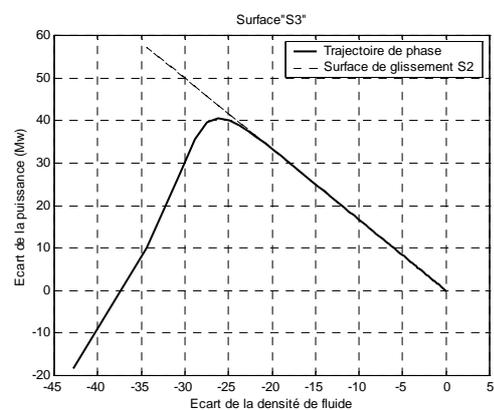


Fig. 4.46 : Trajectoire de phase et surface de glissement  $S3$

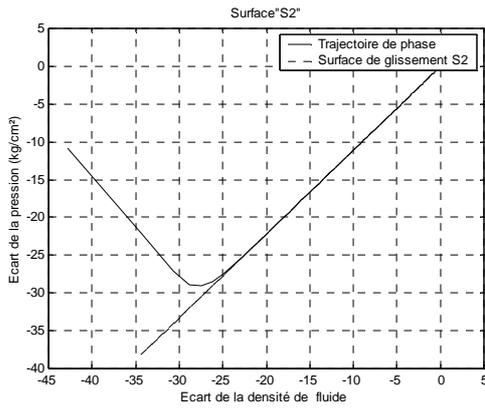


Fig. 4.47 : Trajectoire de phase et surface de glissement  $S_2$

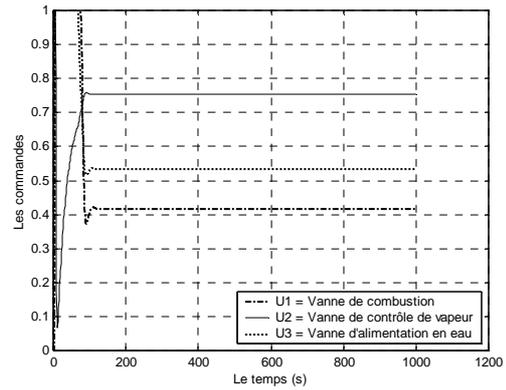


Fig. 4.48 : Les commandes  $U_1; U_2; U_3$

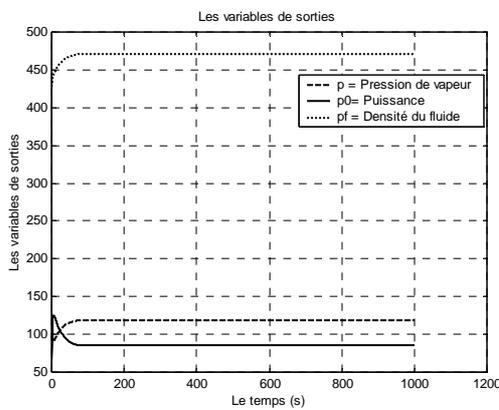


Fig. 4.49 : Les sorties  $p, p_0, p_f$

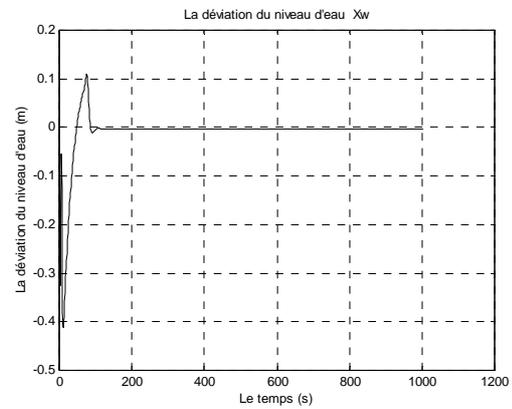


Fig. 4.50 : Déviation du niveau d'eau  $X_w$

#### 4.7.4.2 Test 2

Dans cette partie, la simulation consiste à tester la réaction du contrôleur face à des changements du point de fonctionnement pour le vecteur d'état. Pour cela on soumet le système à plusieurs points de fonctionnement désirés selon les conditions suivantes :

- Pour  $0 < t \leq 20s$  :  $X_{ref} = [ 108 ; 66.65 ; 428 ]$  ;  $U_{ref} = [ 0.34 ; 0.69 ; 0.435 ]$
- Pour  $20 < t \leq 50s$  :  $X_{ref} = [ 118.8 ; 85.06 ; 470.8 ]$  ;  $U_{ref} = [ 0.418 ; 0.759 ; 0.543 ]$
- Pour  $50 < t \leq 80s$  :  $X_{ref} = [ 129.6 ; 105.8 ; 513.6 ]$  ;  $U_{ref} = [ 0.505 ; 0.882 ; 0.663 ]$
- Pour  $80 < t \leq 100s$  :  $X_{ref} = [ 118.8 ; 85.06 ; 470.8 ]$  ;  $U_{ref} = [ 0.418 ; 0.759 ; 0.543 ]$
- Pour  $100 < t \leq 120s$  :  $X_{ref} = [ 108 ; 66.65 ; 428 ]$  ;  $U_{ref} = [ 0.34 ; 0.69 ; 0.435 ]$

Les résultats obtenus sont représentés par les figures suivantes avec  $dt = 01s$  :

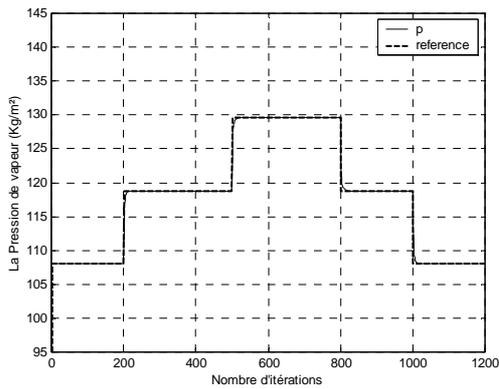


Fig. 4.51 : La pression de vapeur ( $p$ )

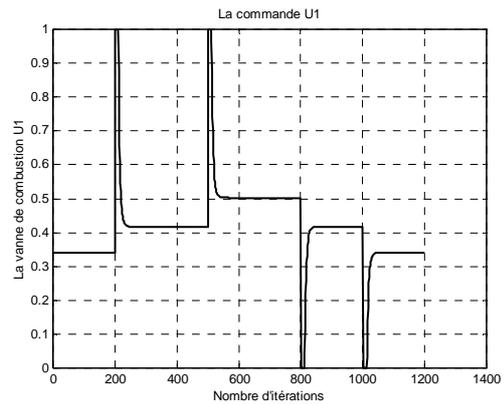


Fig. 4.52 : La commande  $U1$

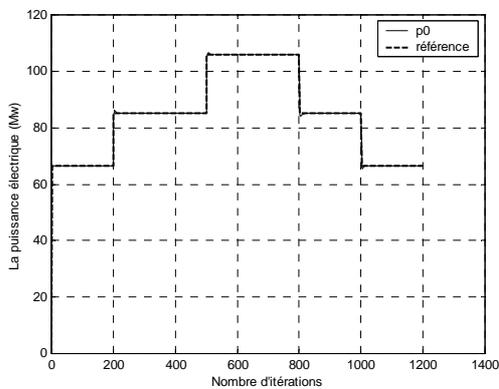


Fig. 4.53 : La puissance ( $p0$ )

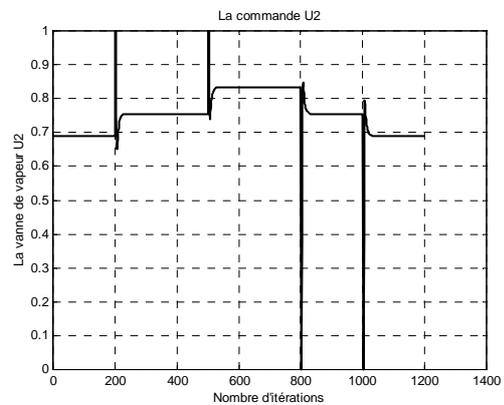


Fig.4.54 : La commande  $U2$

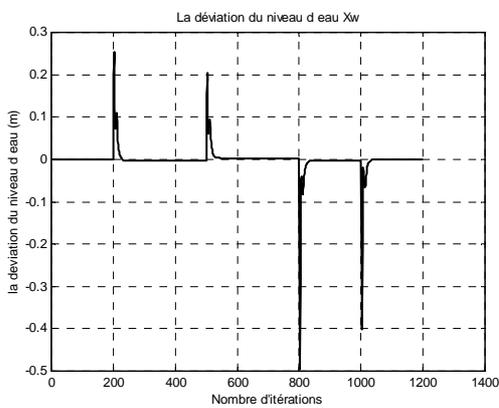


Fig. 4.55 : La déviation du niveau  $Xw$

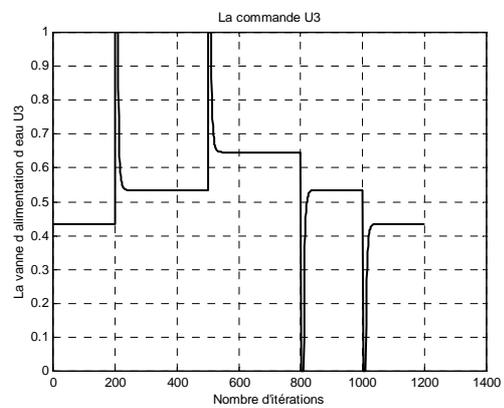


Fig.4.56 : La commande  $U3$

On remarque que les sorties du système ( Figures : 4.51, 4.53, 4.55) se stabilisent à chaque changement de référence et qu'elles convergent vers les valeurs désirées . Ainsi le contrôleur arrive à stabiliser le système en générant à chaque changement les commandes adéquates. Les commandes générées par le contrôleur prédictif satisfont les contraintes imposées aux organes de commandes.

Ainsi, nous pouvons déduire de ce test que le contrôleur prédictif à mode glissant réagit parfaitement et rapidement aux changements de références imposées au système et ce en générant les commandes adéquates à la stabilisation des variables de sorties.

#### **4.7.4.3 Conclusion sur les différents tests avec la commande prédictive:**

En général, la commande du générateur de vapeur est une approche monovariante à plusieurs boucles découplées. Dans ce travail, nous avons développé une commande multivariante sans découplage, basée sur la commande prédictive des systèmes à structures variables.

Les propriétés de robustesse font de cette commande prédictive en mode glissant, une commande intéressante notamment en terme de mise en œuvre pratique. Cette commande constitue en effet, une stratégie de commande performante, notamment l'élimination du broutement.

Au vu des résultats des différents tests, nous remarquons que le contrôleur est apte à :

- ✓ amener les différentes grandeurs de sorties vers les références désirées.
- ✓ réagir efficacement à différents points de fonctionnement en générant à chaque fois les commandes adéquates.

On remarque que la commande prédictive permet de respecter les contraintes sur les variables contrôlées et d'éviter les variations excessives sur les variables manipulées, la commande est plus douce. Cela permet une meilleure utilisation des actionneurs (Vannes) et l'augmentation de leurs durées de vie.

#### **4.8 Conclusion sur les différents tests de simulation :**

Les résultats des différentes simulations montrent que :

- ✓ Les différentes lois utilisées stabilisent le système au point de fonctionnement désiré.
- ✓ La commande par mode de glissement est très robuste vis-à-vis des changements des paramètres du système, des changements de références ainsi que des perturbations non connues.
- ✓ La commande prédictive par mode de glissement donne des résultats meilleurs quant à la rapidité de stabilisation du système
- ✓ Le phénomène de chattering est très réduit pour certaines lois et inexistant pour d'autres particulièrement pour la commande prédictive et la commande asymptotique sans terme discontinu.
- ✓ Le concepteur peut réduire l'effet du chattering en agissant sur les différents paramètres d'adaptation ou de pondération définis dans chaque loi de commande.

## Conclusion générale

---

En conclusion, on peut dire que les systèmes de commande à structure variable constituent une solution intéressante au problème de la commande de processus perturbés et à paramètres variables.

Leur simplicité de mise en oeuvre nous amène à penser qu'ils pourraient dans certains cas, remplacer avantageusement des commandes plus classiques, lorsque le fonctionnement en régime glissant est admissible pour la partie commandée.

L'usage de tels dispositifs de commande est particulièrement conseillé lorsque les variations de paramètres de la partie commandée et les perturbations agissant sur celle-ci entraînent, pour une commande classique, une trop grande dispersion des performances. Les résultats des diverses applications pour une poursuite de trajectoires présentées dans ce travail montrent la fidélité de réponse de ce type de commande, malgré les nombreuses imperfections apparentes (dérivées approchées, retards, effet de commutation ...), aussi le modèle de la partie commandée résultant lui-même d'une approximation grossière.

La synthèse de la loi de commande développée lors de ce travail présente les inconvénients suivants :

Il existe une phase " d'atteignabilité" dans laquelle les trajectoires démarrant des conditions initiales en dehors de la surface de glissement tendent vers cette surface. Les trajectoires dans cette phase sont sensibles aux variations de paramètres, de plus, la convergence vers la surface de glissement peut-être seulement asymptotique de façon à ce que les avantages du régime glissant ne peuvent être réalisés. Certains travaux ont suggéré pour éviter ces difficultés, l'usage de gains élevés en boucle de retour pour activer la phase d'atteignabilité ; ceci provoque, les inconvénients usuels associés avec des gains élevés en retour en particulier l'extrême sensibilité aux dynamiques négligées dans le modèle.

Les petites imperfections, inévitables au niveau de la commutation entre les lois de contrôles discontinues sur la surface de glissement, résultent dans le "chattering" de la trajectoire plutôt que dans le glissement le long de cette surface de commutation. Ceci comme nous l'avons déjà remarqué, excitera les dynamiques hautes fréquences négligées dans le modèle. Nous avons levé ces inconvénients en développant et en exploitant le concept de surface de glissement variables dans le temps et dans l'espace d'état et d'autre part en approximant le contrôle discontinu par un contrôle continu ce qui permettait d'éliminer la génération de l'effet " chattering" sans dégrader la précision de la poursuite.

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent l'étude et la mise en oeuvre sous forme de simulation de plusieurs types d'algorithmes de commande à structure variable.

Notre contribution se situe à différents niveaux :

- ✓ Du point de vue théorique, nous avons effectué une synthèse des différentes formalisations qui définissent la commande en régime glissant avec toutes ses propriétés se rapportant à ce mode de glissement, à la commande équivalente, la condition d'existence, d'unicité de la commande équivalente et l'invariance des régimes glissants par rapport aux perturbations.
- ✓ Du point de vue méthodologique, on s'est intéressé aux nouvelles lois de commande exploitées et définies par GAO avec des extensions permettant de les améliorer.
- ✓ Du point de vue simulation, développées au chapitre 4, les différentes lois de commande ont été appliquées à un processus non linéaire, complexe, et multivariable dont les variables de sorties sont couplées. On a exploité plusieurs lois qui assurent la convergence des trajectoires de phase vers les surfaces de glissement spécifiées. Ces lois se divisent en deux catégories :
  - Lois de commande sans terme discontinu
  - Lois de commande avec terme discontinu

Les perspectives que nous pouvons proposer au vu de ce travail, portent sur les points suivants :

- ✓ Développer la commande à structure variable sur les systèmes et processus énergétiques multivariables dont les modèles sont mal connus, soumis à des perturbations non identifiées. La commande sera développée sans faire le découplage des variables de sorties.
- ✓ Développer ce travail sur le même modèle du générateur de vapeur en travaillant dans l'espace et retrouver les hypersurfaces de glissement ainsi que les droites de glissement qui sont des intersections de ces plans. Dans notre travail, on a travaillé sur des plans de surface et à chaque droite correspond un coefficient nul au niveau de la matrice des surfaces de glissement.
- ✓ Notre travail était axé sur les lois de commande classique et améliorées, Utkin, Gao et Slotine, il serait intéressant de retrouver ces lois de commande sous le contexte des deux autres formalisations à savoir le contexte de la géométrie différentielle (Sira-Ramirez) et le contexte de l'algèbre différentielle (Fliess).
- ✓ Développer sur ce modèle la technique des modes glissant d'ordre supérieur et faire des comparaisons.

Enfin, nous pouvons dire que nous nous sommes efforcés au niveau de ce travail, de donner les fondements des systèmes à structures variables mais qu'un tel sujet est très vaste et présente bien des possibilités encore inexplorées aussi bien dans les applications et dans les fondements théoriques.

## REFERENCES

- [1] H. Asada and J.J.E. Slotine, "Robot analysis and control", John Wiley and sons, 1986.
- [2] K.J. Astrom, and K. Eklund, "A simplified non-linear model of a drum-boiler-turbine unit", I.J.C., Vol.16, pp.146-169, 1972.
- [3] A. Bachtarzi, B. Boutamina, K. Belarbi, "Synthèse d'algorithme de commande à structure variable. Application à une chaudière", Revue de l'Université Mentouri Constantine, Sciences et Technologie, Vol. B, N°30, pp. 41-50, Décembre 2009.
- [4] A. Bachtarzi, B. Boutamina, K. Belarbi, "Multivariable sliding mode control of a boiler", The 10<sup>th</sup> International Conference on Science and Techniques of Automatic Control, STA'09, Hammamet , Tunisia, Dec. 2009.
- [5] A. Bachtarzi, B. Boutamina, K. Belarbi, "Commande à structure variable d'un générateur de vapeur", Séminaire International sur le Génie Climatique et l'Énergétique, SIGCLE'2010, Constantine 06-07 Décembre 2010, Algérie.
- [6] A. Bachtarzi, B. Boutamina, K. Belarbi, "Predictive sliding mode control of a boiler system", The 11<sup>th</sup> International Conference on Science and Techniques of Automatic Control, STA'2010, Monastir , Tunisia, Dec. 2010.
- [7] R.D. Bell, K.J. Astrom, "Dynamic models for boiler-turbine-alternator units" , Report TFRT- 3192, Lund Institute of Technology , Sweden, 1987.
- [8] A. Ben-Abdenmour , K.Y. Lee, "A decentralized controller design for a power plant using robust local controller and functional mapping", IEEE Transaction on Energy Conversion, Vol.11, issue 2 , 1996.
- [9] H. Buhler, "Réglage par mode glissant", Presse Polytechniques romandes, Lausanne, 1986.
- [10] R.A. Decarlo, S.H. Zak, G.P. Matthews, "Variable Structure Control of nonlinear multivariable systems: A tutorial", IEEE, Vol.76, N°3 , pp. 212-232 , 1988.
- [11] R. Dimeo , K. Lee, " Boiler-Turbine control system design using a genetic Algorithm", IEEE Transaction on Energy Conversion, Vol. 10 , issue 4, 1995.
- [12] S. Drakunov, V.I. Utkin, "On discrete-time sliding mode", IFAC Symposium on Nonlinear Control System Design, pp. 484-489, 1989.
- [13] B. Drazenovic, "The invariance condition in variable structure system", Automatica, Vol.5, pp. 287-295, 1969.
- [14] I. Eker, "Sliding mode control with PID sliding surface and experimental application to an electromechanical plant", ISA Transactions, Vol.45, N°1, pp. 109-118, January 2006.

- [15] S.V. Emel'yanov, V.A. Taran, " Sur une classe de systèmes de régulation automatique à structure variable", Journal de l'académie des sciences d'URSS, Energétique et Automatique N°3, 1962.
- [16] S.V. Emel'yanov, "Variable Structure Control Systems", Moscow, Nauka, 1967.
- [17] R.B. Fernandez, J.K. Hedrick, "Control of multivariable nonlinear systems by sliding mode control," I.J.C., Vol.46, N°3, pp. 1019-1040, 1987.
- [18] M. Fliess, "Automatique et corps différentiels", Forum Math., Vol.1, pp.227-238, 1989.
- [19] M. Fliess, "Generalized controller canonical forms for linear and non linear dynamics", IEEE Trans. AC, Vol. , pp.994-1001, 1990.
- [20] M. Fliess, F. Messenger, "Vers une stabilisation non linéaire discontinue", Proc. 29th Int.Conf., "Analysis and optimization of systems", notes control Infor, Springer, Berlin ,1990.
- [21] M. Fliess, F. Messenger, "Sur la commande en régime glissant", C.R. Acad. Sc., Paris, T.313, série I, pp. 951-956, 1992.
- [22] W.B. Gao, "Synthesis of nonlinear control system via variable structure control," In Proc. China-Japan Joint Symposium System Control and Applications, 1989.
- [23] W.B. Gao, J.C. Hung, " Variable structure control system", IEEE Trans. Indust.,Applic. Vol. 40, N°1, pp.2-21, 1993.
- [24] W. Gao, J.C. Hung, "Variable structure control of nonlinear systems: A new approach", IEEE Trans., Ind electron, pp.45-55, 1993.
- [25] W. Gao, Y. Wang, and A. Homaifa, "Discrete-time variable structure control for continuous-time systems", IEEE Trans.Ind. Electron, Vol.42, pp. 117-122, Apr. 1995.
- [26] H. Habbi, M. Zelmat, B. Ould Bouamama, "A dynamic fuzzy model for a drum-boiler-turbine system", Automatica, Vol.39, pp.1213-1219, 2003.
- [27] H. Harashima, H. Hashimoto, K. Maruyama, "Practical robust control of robot arm using variable structure system", Proc. of IEEE, Int. Conf. on robotics and Automation, San Francisco, pp. 532-538, 1986.
- [28] H. Hashimoto, J.J.E Slotine, J.X. Xu and F. Harashima, "Practical design of V.S.S controller using Balance Condition", IEEE, International Conference on Robotics and automation, North Carolina, U.S.A - Avril 1987.
- [29] B.W. Hogg, N.M. El-Rabaie, "Multivariable generalized predictive control of Boiler system", IEEE Transaction on Energy conversion, Vol.6, Issue 2, pp.282-288, 1991.
- [30] J.Y. Hung, W. Gao , J.C. Hung, , " Variable structure control: A survey ", IEEE trans. Ind. Electron. , Vol. 40 , N°1 , pp. 2-21 , 1993.

- [31] S. Laghrouche, M. Smaoui, F. Plestan, X. Brun, “Higher order Sliding Mode Control based on optimal approach of an electropneumatic actuator” , I.J.C ,Vol. 79, pp.119-131 , 2006.
- [32] H. Lee, V.I. Utkin, “Chattering suppression methods in sliding mode control systems”, Annual Reviews in control, Elsevier, pp. 179-188, 2007.
- [33] A. Levant, “Principes of 2-Sliding mode design”, Automatica, Vol.43, pp. 576-586, 2007.
- [34] X. J. Liu , C.W. Chan, “Neuro-Fuzzy Generalized Predictive Control of boiler steam temperature”, IEEE, Transaction on Energy Conversion, Vol. 21, issue 4, pp. 900- 908, 2006.
- [35] J.M. Maciejowski, “Predictive control with constraints», Prentice Hall, Pearson Education Limited, Harlow, England, 2002.
- [36] F. Messenger, “Sur la stabilisation discontinue des systèmes“, Thèse Doctorat en sciences automatique, Orsay, Paris, 1992.
- [37] C. Mira, “ Systèmes asservis non linéaires,» Hermés, Paris, 1990...
- [38] H. Moradi, F. Bakhtiari-Nejad, “Robust control of an industrial boiler system: comparaison between two approaches: Sliding mode control -  $H_{\infty}$  technique.”, Energy Conversion and Management, Elsevier , Vol.50, pp. 1401-1410, 2009.
- [39] A.J. Morton, P.H Price, “The controllability of steam output pressure and water level in drum boilers”, Steam at work : industrial and marine steam plant, pp. 75-84, 1977.
- [40] M. Perez, E. Jimenez, E. F. Camacho, “Design of an explicit constrained predictive sliding mode controller “ IET Control theory and applications, Vol.4, N°4, pp.552-562, 2010
- [41] A.F. Philippov, “Differential equations with discontinuous right-hand side”, Annales mathématiques, sect. trans., Vol. 42, sect.2, pp. 199-231, 1964.
- [42] A. Sabanovic, F. Bilalovic, “Sliding mode control of AC drives”, IEEE, Transaction on industry applications, Vol.25, N°1, 1989.
- [43] J.J.E Slotine and S.S. Sastry, “Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators”, I.J.C., Vol.38, N°2, pp.465- 492, 1983.
- [44] J.J.E Slotine, “Sliding controller design for nonlinear systems”, I.J.C., Vol.40, N°2 , pp. 421-434, 1984.
- [45] J.J.E Slotine, “The robust control of robot manipulations”, Int J. of Robotics , Vol.4 , pp. 49-64,1985.

- [46] J.J.E Slotine and J.A. Coestsee, "Adaptative sliding controller synthesis for nonlinear systems", *I.J.C.*, Vol.43, N°6, pp. 1631-1651, 1986.
- [47] J.J.E. Slotine and W. Li, "Applied Non linear control", Englewood cliffs, New jersey, Prentice Hill, 1991.
- [48] H. Sira-Ramirez, "A Geometric approach to Pulse-Width-Modulated control design", *Proceeding of the conference on decision and control*, pp. 1771-1776, Los Angeles, CA., December, 1987.
- [49] H. Sira-Ramirez, "Sliding motions in Bilinear Switched Networks", *IEEE, Transactions on circuits and Systems*, Vol.CAS-34,N°8, pp.919-933, August, 1987.
- [50] H. Sira-Ramirez, "Variable Structure Control of non-linear systems", *Int.J.Systems SCI*, Vol.18, N°9, pp. 1673-1689, 1987.
- [51] H. Sira-Ramirez, "A Geometric Approach to the Feedback control of Switch Mode DC to DC power supplies", *IEEE, Transactions on circuits and systems*, Vol.35, N°10, pp. 1291-1298, October 1988.
- [52] H. Sira-Ramirez, "Sliding Mode Control in AC-to-AC Converters", *Anaïs do 77<sup>th</sup> congresso Brasileiro de Automatica*, pp. 452-457, Sao Paulo-Brazil, 1988.
- [53] H. Sira-Ramirez, "Differential Geometric Methods in Variable Structure Control", *I.J.C*, Vol.48, N°4, pp. 1359-1380, 1988.
- [54] H. Sira-Ramirez, "Sliding Mode Control on slow manifolds of DC-to-DC Powers Converters", *I.J.C.*, Vol.47, N°5, pp. 1323-1340, 1988.
- [55] H. Sira-Ramirez, "A Geometric Approach to Pulse-Width Modulated control in nonlinear Dynamical Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.34, N°2, pp. 184-187, February, 1989.
- [56] H. Sira-Ramirez, "Nonlinear discrete variable structure systems in quasi-sliding mode", *Int. J. Control*, 54-5, pp. 1171-1187, 1991.
- [57] V. I Utkin, "V.S.S. with sliding modes", *IEEE transaction automatic control*, Vol. AC-22, N°2, pp. 212-222, 1977.
- [58] V.I. Utkin, "Sliding modes and their Application in variable structure systems", *MIR Publishers*, Moscow, 1978.
- [59] V. I. Utkin, "Discontinuous control system: State of art in theory and application", *Institute of Control Sciences*, Ed. Mir, Moscow, USSR, 1978.
- [60] V.I. Utkin, K.K.D. Young, "Methods for constructing discontinuity planes in multidimensional variable structure systems," *Automat. Remote contr.*, Vol.39, N°10, pp. 1466-1470, 1978.
- [61] V.I. Utkin, "Sliding mode in control optimization", *Springer-Verlag*, Berlin, 1992.

- [62] V.I Utkin, “Sliding mode control design principles and applications to electric drives”, IEEE transactions on industrial Electronics, Vol. 40, N° 1, pp. 26-36, February 1993.
- [63] V.I. Utkin, J. Shi, “ Integral Sliding Mode in systems operating under uncertainty”, Proc. IEEE Conference on Decision and Control, CDC’96, Kobe, Japan, 1996.
- [64] V.I. Utkin, J. Guldner, J. Shi, “Sliding Mode Control in electromechanical systems”, Systems and Control Series, Taylor and Francis, 1999.
- [65] V.I. Utkin, , H. Lee, “ Chattering problem in sliding modes control systems”, VSS’06, pp. 346-350, Alghero, Italy , 2006.
- [66] K.D. Young, U. Ozguner, “ Variable Structure Systems, Sliding Mode and Nonlinear Control”, Springer Verlag, 1999.

# Annexes

---

## Annexe A : Linéarisation

Cette annexe rappelle quelques règles pour la linéarisation des relations non linéaires.

### 1. Fonction non linéaire d'une variable

Considérons la variable  $y$  fonction non linéaire de la variable  $x$  :

$$y = f(x)$$

On peut linéariser cette fonction par introduction de petites variations autour du point de fonctionnement  $P_0$  en posant :

$$\begin{aligned} y = y_0 + \Delta y &\cong f(x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 \cdot \Delta x \\ y_0 &= f(x_0) \end{aligned} \tag{A.1}$$

Où  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0$  représente la pente au point de fonctionnement  $P_0$

Ainsi on posera :

$$\Delta y = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 \cdot \Delta x = c \cdot \Delta x$$

### 2. Fonction non linéaire de deux variables :

Soit une fonction non linéaire de deux variables  $x_1$  et  $x_2$  :  $y = f(x_1, x_2)$

Cette fonction peut être linéarisée :

$$\begin{aligned} y = y_0 + \Delta y &\cong f(x_{10}, x_{20}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_0 \cdot \Delta x_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_0 \cdot \Delta x_2 \\ \Delta y &= \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_0 \cdot \Delta x_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_0 \cdot \Delta x_2 \\ \Delta y &= c_1 \cdot \Delta x_1 + c_2 \cdot \Delta x_2 \end{aligned} \tag{A.2}$$

## Annexe B : Stabilité

Un contrôle ou une commande en boucle ouverte est une application  $t \rightarrow u(t)$  d'un intervalle de temps dans l'espace des contrôles. Un contrôle en boucle ouverte, appelé aussi une rétroaction ou un bouclage ou encore un feedback, est une application  $u \rightarrow R(x)$  définie sur les variables d'état du système. Un des objectifs de la théorie du contrôle est de déterminer des rétroactions qui stabilisent le système en un état particulier.

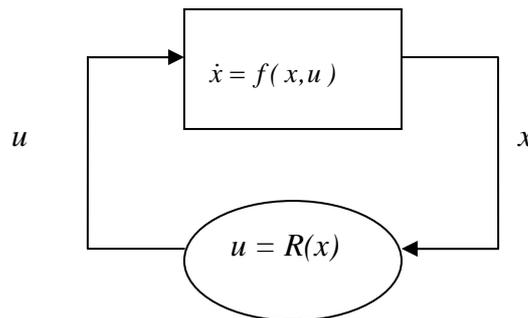
### 1 Bouclage statique

Définition sur le bouclage statique : On dit que  $u$  est un bouclage statique d'un système si sa valeur  $u(t)$  à l'instant  $t$  ne dépend que de  $x(t)$ , c'est-à-dire  $u = R(x)$  où  $R$  est une fonction.

Ce système s'écrit tout simplement

$$\dot{x} = f(x, R(x)) \quad (\text{B.1})$$

Il est représenté par le diagramme suivant :



Le problème de la stabilisation ou régulation consiste à maintenir le système près d'un équilibre  $x^*$ . Il s'agit donc de construire une loi de commande telle que  $x^*$  soit un équilibre asymptotiquement stable du système en boucle fermée.

### 2 Concept de stabilité

On se donne un système :

$$\dot{x} = f(x) \quad (\text{B.2})$$

Tel que  $f(0)=0$ , admettant  $x = 0$  comme équilibre.

**Définition 1 :** L'équilibre  $x=0$  du système (B.2) est dit stable si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour toute solution  $x(t)$  de (B.2) on ait :

$$\|x(0)\| < \eta \Rightarrow \forall t \geq 0; \|x(t)\| < \varepsilon$$

Si l'équilibre n'est pas stable on dit qu'il est instable.

**Définition 2 :** L'équilibre  $x=0$  du système (B.2) est dit attractif s'il existe  $r>0$  tel que pour toute solution  $x(t)$  de (B.2) on ait :

$$\|x(0)\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

L'équilibre  $x=0$  du système (B.2) est dit globalement attractif pour toute solution  $x(t)$  de (B.2) on a  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

L'ensemble  $\mathcal{B}$  défini par la propriété

$$x(0) \in \mathcal{B} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

s'appelle le bassin d'attraction de l'origine. Ainsi  $x = 0$  est attractif si  $\mathcal{B}$  est un voisinage de 0. Il est globalement attractif si  $\mathcal{B} = \mathbb{R}^n$ .

**Définition 3 :** L'équilibre  $x=0$  du système (B.2) est dit asymptotiquement stable s'il est stable et attractif. Il est dit globalement asymptotiquement stable (GAS) s'il est stable et globalement attractif.

**Définition 4 :** L'équilibre  $x=0$  du système (B.2) est dit exponentiellement stable s'il existe  $r > 0$ ,  $M > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que pour toute solution  $x(t)$  on ait :

$$\|x(0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| \leq M \|x(0)\| e^{-\alpha t}, \text{ pour tout } t \geq 0$$

L'équilibre  $x=0$  du système (B.2) est dit globalement exponentiellement stable s'il existe  $M > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que pour toute solution  $x(t)$  de (B.2) on a :

$$\|x(t)\| \leq M \|x(0)\| e^{-\alpha t}, \text{ pour tout } t \geq 0$$

On montre que, en général, stable n'implique pas attractif, attractif n'implique pas stable, exponentiellement stable implique asymptotiquement stable et asymptotiquement stable n'implique pas exponentiellement stable.

### 3 Stabilité des systèmes linéaires

Dans le cas des systèmes linéaires, attractif implique stable (donc asymptotiquement stable équivaut à attractif) et asymptotiquement stable équivaut à exponentiellement stable. De plus l'attractivité est toujours globale. En effet considérons le système linéaire :

$$\dot{x} = Ax \tag{B.3}$$

Où  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $n$ . La solution de (B.3) s'écrit

$$x(t) = e^{t.A} x(0) \tag{B.4}$$

La matrice exponentielle  $e^{tA}$  est définie par la série

$$e^{tA} = I + tA + \frac{1}{2!} t^2 A^2 + \dots + \frac{1}{n!} t^n A^n + \dots \tag{B.5}$$

Pour calculer cette matrice exponentielle on cherche les valeurs propres de la matrice A, c'est à dire les racines du polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda.I)$$

Le polynôme caractéristique est de degré n en  $\lambda$ . Il admet donc s racines distinctes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  de multiplicités algébriques  $m(\lambda_i)$ , satisfaisant la relation :

$$m(\lambda_1) + \dots + m(\lambda_s) = n$$

Par conséquent :

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m(\lambda_1)} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m(\lambda_s)}$$

L'indice  $\nu(\lambda)$  d'une valeur propre  $\lambda$  est le premier entier tel que la suite croissante des noyaux :

$$\text{Ker}(A - \lambda I)^\nu \subseteq \text{Ker}(A - \lambda I)^{\nu+1}$$

Soit stationnaire pour  $\nu \geq \nu(\lambda)$ . Pour toute valeur propre  $\lambda$  de A on aura :

$$1 \leq \nu(\lambda) \leq m(\lambda)$$

Le polynôme minimal  $M_A(\lambda)$  de A est donné par

$$M_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu(\lambda_1)} \dots (\lambda - \lambda_s)^{\nu(\lambda_s)}$$

Les valeurs propres de A sont réelles ou complexes. Si elles sont complexes, alorsq elles sont conjuguées deux à deux. Les composantes  $x_i(t)$  avec  $i = 1, \dots, n$  de la solution (B.4) sont des combinaisons linéaires, à coefficients constants de termes de la forme :

1.  $t^j . e^{t\lambda}$  où  $\lambda$  est une valeur propre réelle de A et  $0 \leq j \leq \nu(\lambda)$ .
2.  $t^j . e^{ta} . \cos bt$  et  $t^j . e^{ta} . \sin bt$ , c'est-à-dire les parties réelles imaginaires de  $t^j . e^{t\lambda}$ , où  $\lambda = a+ib$  est une valeur propre complexe de A et  $0 \leq j \leq \nu(\lambda)$ .
3. On en déduit le théorème suivant :

**Théorème 1:**

1. Si  $\exists j \text{Re}(\lambda_j) > 0$  où si  $\exists k \text{Re}(\lambda_k) = 0$  et  $\nu(\lambda_k) > 1$  alors  $x = 0$  est instable
2. Si  $\forall j \text{Re}(\lambda_j) < 0$  alors  $x = 0$  est globalement exponentiellement stable.

3. Si  $\forall j \operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0$  et  $\operatorname{Re}(\lambda_j) = 0 \Rightarrow \nu(\lambda_j) = 1$  et s'il existe  $k$  tel que  $\operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$  alors  $x = 0$  est stable mais non attractif.

Par conséquent pour un système linéaire  $\dot{x} = A.x$  les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) L'origine est attractive
- b) L'origine est globalement attractive
- c) L'origine est asymptotiquement stable
- d) L'origine est globalement asymptotiquement stable
- e) L'origine est exponentiellement stable
- f) L'origine est globalement exponentiellement stable
- g) Toutes les valeurs propres de  $A$  sont de partie réelle strictement négative ( Matrice  $A$  est une matrice de Hurwitz).

#### 4 Stabilisation d'un système linéaire

**Définition 5 :** On appelle bouclage d'état linéaire ( ou régulateur linéaire) du système (B.2)

Une loi de commande du type

$$u = K.x$$

Où  $K$  est la matrice de gain de dimension  $m \times n$ . Une telle loi est dite stabilisante si l'origine du système bouclée

$$\dot{x} = (A + BK)x \tag{B.6}$$

Est asymptotiquement stable.

**Théorème 2 :** Si la paire  $(A, B)$  est commandable on peut choisir la matrice de gains  $K$  pour placer arbitrairement les valeurs propres de la matrice  $(A+BK)$ .

Ce résultat , connu sous le nom de théorème de placements de pôles ( ou placement des modes propres du régulateur) , montre que l'on peut choisir la matrice  $K$  de telle sorte que la matrice  $A+BK$  soit de Hurwitz et que l'origine du système ( B.6) soit asymptotiquement stable. Donc tout système linéaire contrôlable est stabilisable.

#### 5 Stabilisation locale d'un système non linéaire

On a montré dans les paragraphes précédents qu'un système linéaire contrôlable peut être stabilisé asymptotiquement par un contrôle linéaire ( donc continu). Cette propriété n'est pas vraie pour un système non linéaire. Il y a des systèmes non linéaires localement ( et même globalement) contrôlables , qu'on ne peut pas stabiliser par un contrôle continu. Ce pendant si

l'approximation linéaire du système est contrôlable, alors on peut le stabiliser par un contrôle continu (et même linéaire). En effet, considérons un système commandé suivant :

$$\dot{x} = f(x, u), \quad \text{avec } f(0,0) = 0 \quad (\text{B.7})$$

On se propose de construire une loi de commande  $u = R(x)$  telle que le système en boucle fermée  $\dot{x} = f(x, R(x))$  admet l'origine comme équilibre asymptotiquement stable.

On considère alors l'approximation linéaire :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (\text{B.8})$$

Où les matrices  $A$  et  $B$  sont définies par :

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$$

Supposons que  $(A, B)$  soit commandable. Il existe alors une matrice  $K$  telle que la matrice  $(A+BK)$  soit de Hurwitz. Par conséquent le contrôle  $u = Kx$  stabilise globalement le système linéaire (B.8).

**Théorème 3 :** *Le contrôle  $u = Kx$  stabilise le système (B.7).*

En effet le système en boucle fermée s'écrit

$$\dot{x} = F(x) = f(x, Kx)$$

On aura :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial u}(0,0).K = A + BK$$

Donc  $x = 0$  est asymptotiquement stable pour le linéarisé. Le théorème de Lyapunov (Annexe suivante) permet d'affirmer que  $x = 0$  est asymptotiquement stable pour le système non linéaire  $\dot{x} = F(x)$ .

## Annexe C : Fonction de Lyapunov

Les fonctions de Lyapunov sont un outil puissant pour étudier la stabilité d'un équilibre. Considérons le système suivant :

$$\dot{x} = f(x) \quad (\text{C.1})$$

Tel que  $f(0)=0$ , admettant  $x=0$  comme équilibre.

Soit  $V : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  une fonction définie dans un voisinage de  $\Omega$  de l'origine et admettant des dérivées partielles continues. On note

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x) \cdot f(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) \cdot f_i(x)$$

La dérivée de la fonction  $V$  dans la direction du champ de vecteurs  $f$ . Cette dérivée s'appelle aussi la dérivée de Lie de  $V$  et se note  $L_f V$ . Pour toute solution  $x(t)$  de (C.1) on a :

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \dot{V}(x(t))$$

**Définition 1 :** On dit que  $V$  est une fonction de Lyapunov pour le système (C.1) en  $x = 0$  dans  $\Omega$ , si pour tout  $x \in \Omega$  on a :

1.  $V(x) > 0$  sauf en  $x = 0$  où  $V(0) = 0$
2.  $\dot{V}(x) \leq 0$

### Théorème 1:

1. S'il existe une fonction de Lyapunov pour (C.1) en  $x = 0$  dans un voisinage de  $\Omega$  de 0, alors  $x = 0$  est stable.
2. Si de plus  $x \neq 0 \Rightarrow \dot{V}(x) < 0$  alors  $x = 0$  est asymptotiquement stable.
3. Si de plus  $\Omega = \mathfrak{R}^n$  et  $V(x) \rightarrow \infty$  quand  $\|x\| \rightarrow \infty$  alors  $x = 0$  est GAS.

**Définition 2:** Une matrice carrée  $P$  d'ordre  $n$  est dite définie positive si et seulement si pour tout  $x \in \mathfrak{R}^n : x \neq 0 \Rightarrow x^T P x > 0$ .

Si  $P$  est une matrice symétrique alors ses valeurs propres sont réelles et on a

$$\lambda_{\min} \|x\| \leq x^T P x \leq \lambda_{\max} \|x\|$$

Pour vérifier qu'une matrice symétrique  $P$  est définie positive, il suffit de démontrer que tous ces mineurs principaux sont positifs.

**Théorème 2 :** Considérons un système linéaire

$$\dot{x} = A.x. \quad (C.2)$$

L'origine  $x = 0$  de ( C.2) est asymptotiquement stable si et seulement si pour toute matrice définie positive  $Q$ , il existe une matrice définie positive telle que :

$$A^T P + PA + Q = 0 \quad (C.3)$$

Dans ce cas  $V(x) = x^T P x$  est une fonction de Lyapunov pour le système (C.2) en  $x = 0$ .

Pour la preuve de ce théorème il suffit d'observer que :

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T .( A^T P + PA ).x = -x^T .Q.x$$

Donc ce théorème de Lyapunov s'applique et montre que  $x = 0$  est asymptotiquement stable.

Pour la réciprocité on définit :

$$P = \int_0^{+\infty} e^{A^T t} .Q.e^{At} dt$$

Cette intégrale est bien convergente car toutes les valeurs propres de la matrice  $A$  et donc aussi de sa transposée  $A^T$  sont de partie réelle strictement négative. La matrice  $P$  est définie positive car :

$$x \neq 0 \Rightarrow \forall t \geq 0; (e^{At} .x)^T .Q.e^{At} x > 0 \Rightarrow x^T P x > 0$$

On a :

$$A^T P + PA = \int_0^{+\infty} [A^T .e^{A^T t} Q e^{At} + e^{A^T t} Q e^{At} .A] dt$$

Comme

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A.e^{At} = e^{At} .A$$

On en déduit que

$$A^T e^{A^T t} Q e^{At} + e^{A^T t} Q e^{At} .A = \frac{d}{dt} e^{A^T t} Q e^{At}$$

Par conséquent

$$A^T P + PA = \left( e^{A^T t} Q e^{At} \right)_{t=0}^{t=\infty} = -Q$$

Donc  $P$  vérifie l'équation ( C.3) appelée l'équation matricielle de Lyapunov.

Pour construire une fonction de Lyapunov pour le système ( C.1) , il faut procéder de la manière suivante :

- ✓ Choisir une matrice définie positive  $Q$  ( Par exemple  $Q = I$  )
- ✓ Résoudre l'équation de Lyapunov ( C.2). Si on a choisi  $Q$  symétrique alors  $P$  sera symétrique aussi.
- ✓ Vérifier que  $P$  est définie positive.

## Annexe D : Notion de géométrie différentielle

Dans cette annexe nous présentons quelques outils mathématiques nécessaires à la compréhension de la géométrie différentielle.

On considère le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x) \cdot u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Avec :

$$\begin{aligned} f(x) &= [f_1, f_2, \dots, f_n]^T \\ g(x) &= [g_1, g_2, \dots, g_n]^T \\ x &= [x_1, x_2, \dots, x_n] \end{aligned}$$

### 1 Difféomorphisme

Une fonction  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$   $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (z_1, z_2, \dots, z_n)$  définie dans une région  $\Omega$  est un difféomorphisme local si :

- ✓  $\varphi(x)$  est une bijection
- ✓  $\varphi(x)$  et  $\varphi^{-1}(x)$  sont différentiables

Si ces deux conditions sont vérifiées pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  ( $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ), le difféomorphisme est dit global.

### 2 Dérivée de Lie

On considère une fonction scalaire  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et deux champs de vecteurs :  $f, g$  définis  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . La dérivée de Lie de  $h$  suivant le champ de vecteur  $f$  est une fonction scalaire définie par :

$$L_f h = \nabla h f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} f_i(x) \quad (\text{D.2})$$

Les dérivées de Lie d'ordre supérieur sont données par :

$$\begin{aligned} L_f^0 h &= h \\ L_f^i h &= L_f(L_f^{i-1} h) = \nabla(L_f^{i-1} h) f \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

La dérivée de la fonction  $L_f h$  suivant le champ de vecteur  $g$  est donnée par :

$$L_g L_f h = \nabla(L_f h) g = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(L_f h(x))}{\partial x_i} g_i(x) \quad (\text{D.4})$$

### 3 Crochet de Lie

Soient  $f$  et  $g$  deux champs de vecteurs dans  $\mathfrak{R}^n$ . Le crochet de Lie de  $f$  et  $g$  est un troisième champ de vecteur défini par :

$$ad_f g = [f, g] = \nabla g f - \nabla f g \quad (\text{D.5})$$

Le crochet de Lie d'ordre supérieur est défini comme suit :

$$\begin{aligned} ad_f^0 g &= g \\ ad_f^i g &= [f, ad_f^{i-1} g] \quad \text{avec } i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

### 4 Distribution

Une distribution  $D$  est un espace ou sous espace vectoriel engendrée par une base formée par les champs de vecteurs  $f_1, f_2, \dots, f_d$ , notée :

$$D = \text{span}\{f_1, f_2, \dots, f_n\} \quad (\text{D.7})$$

La distribution  $D$  est dite involutive si et seulement si elle est stable par crochet de Lie :

$$\forall x, y \in D : [x, y] \in D \quad (\text{D.8})$$

## Notations

$f(x)$ et $g(x)$	Champs de vecteurs définis sur $\mathcal{R}^n$
$f_N^+$ et $f_N^-$	Projections respectives de $f^+$ et $f^-$ sur la normale à la surface
$S(x)$	Surface de glissement
$\lambda$ et $C$	Coefficient de la surface de glissement
$U$	Commande
$\Delta U$	Composante de haute fréquence discontinue de la commande $U$
$U^+$ et $U^-$	Commandes discontinues
$V(x,t)$	Fonction de Lyapunov
$U_{eq}$	Commande équivalente sur le régime glissant idéal
$\nabla S$	Gradient de $S$ .
$\text{Ker}\nabla S$	Noyau de $\nabla S$
$L_h\sigma$	Dérivée directionnelle – Dérivée de Lie
$T_x X$	Espace tangent à $X$ en $x$ .
$\Delta_S(x)$	Sous espace de $T_x X$
$\text{Span}(g(x))$	Espace engendré par la base $g(x)$
$\mathcal{U}(x)$	Fonction scalaire
$U^{(\alpha)}$	$\alpha$ ième dérivée de l'entrée $U$ .
$\text{Cont}(S)$	Fonction de lissage au voisinage de la surface de glissement
$\text{Sat}(S/\Phi)$	Fonction de lissage au voisinage de la surface de glissement

$p$	Opérateur de Laplace ( d/dt)
$\mathcal{L} ; \mathcal{L}^{-1}$	Transformées directe et inverse de Laplace.
$k\langle u \rangle$	Corps différentiel de base engendré par k et l'entrée u
$\psi(x)$	Matrices des gains
$K, Q$	Matrices diagonales de pondérations assurant la convergence vers la surface de glissement.
$\eta_0 ; \delta_0 ; \gamma_0$	Paramètres adaptatifs du système pour un contrôle intégral
$\zeta$	Perturbations
$\xi_R$	Trajectoire de référence
$e(x)$	Ecart d'erreur

### **Acronymes**

VSS	Variable Structure Systems
SMC	Sliding Mode Control
MC	Mode de Convergence
MG	Mode de Glissement
MRP	Mode du Régime Permanent
GOCF	Forme Canonique d'Observabilité Généralisée
GCCF	Forme Canonique de Commande Généralisée
GAS	Globalement Asymptotiquement Stable

## « COMMANDE DES SYSTEMES A STRUCTURE VARIABLE »

Applications à un générateur de vapeur

### Résumé

De nombreux systèmes dynamiques présentent en plus des perturbations extérieures, des non linéarités et des perturbations paramétriques, le recours à des commandes robustes est donc souhaitable. Une solution réside dans la commande à structure variable travaillant en mode de glissement. Les systèmes dits à structures variables, sont des systèmes de commandes dans lesquels les paramètres du régulateur peuvent varier par à coups et prendre ainsi deux valeurs possibles suivant le signe d'une fonction dépendant des coordonnées du système dans l'espace de phase. Ceci permet, sous certaines conditions, de maintenir le point représentatif de l'évolution du système dans le plan de phase sur une surface dépendant de cette fonction, et qui peut être choisie a priori. Le système est dit alors en "régime glissant " ou en glissement sur la surface considérée. Dans ce cas, les propriétés dynamiques du système ne dépendent plus que des caractéristiques de la surface de glissement, et celui-ci jouit ainsi de la propriété d'insensibilité vis-à-vis des perturbations extérieures et des variations de paramètres de la partie commandée. L'intérêt de ce type de systèmes de commande, réside dans la simplicité de la solution apportée au problème de la réalisation d'une commande de qualité pour des processus à paramètres soient variables soient mal identifiés, ainsi l'analyse et la synthèse des systèmes de commande à structures variables se justifie par un double avantage :

- ✓ la mise en œuvre de tels systèmes ne nécessite pas une identification des paramètres, du processus commandé, très précise.
- ✓ d'autre part, cet algorithme permet de s'attaquer à la commande des systèmes dont les paramètres varient dans le temps et dans de larges proportions.

L'objectif de ce travail est de développer une commande robuste basée sur la théorie de la commande des systèmes à structure variable. A cet effet , nous développerons en premier lieu les différentes formalisations mathématiques des systèmes à structure variable , puis en deuxième phase nous ferons une synthèse des différentes lois de commandes qui sont exploitées , puis nous proposons une commande multivariable d'un générateur de vapeur par un contrôleur, obtenu à partir de la théorie de la commande à structure variable communément désignée par la théorie des modes glissants. Ce contrôleur réglera les positions des vannes de commande du débit de vapeur, du débit de combustible et la vanne d'alimentation en eau du ballon. Bien que les variables de sorties soient couplées, ce contrôleur réussit à assurer une commande satisfaisante du système.

**Mots clés** — *Commande à structure variable, modes glissants, surface de glissement, commande multivariable, générateur de vapeur, robustesse, stabilité.*

### Abstract:

The objective of this work is to develop a robust control based on the theory of control with variable structure systems. The advantage of such control systems is the simplicity of the solution to the problem of achieving quality control process parameters to be variables are poorly identified, and analysis and synthesis systems variable structure control is justified by a double advantage:

- Implementation of such systems does not require identification of the parameters of the controlled process, very accurate.
- The other hand, this algorithm can address the control of systems whose parameters vary in time and in large proportions.

This work describes a multivariable control of a boiler by sliding mode control. The mathematical model of the steam generator is a non-linear process, multivariable.

it is characterized by three inputs and three outputs which are coupled.

The manipulated variables are the input feed water, the fuel and the steam flow while the controlled variables are the water level, the pressure inside the drum and the output power. The results of simulation show that the controller gives good performance

**Keywords** — Variable structure control, sliding mode, sliding surface, multivariable control, boiler, robustness.

### **ملخص:**

تهدف هذه الدراسة الى تجلية التحكم الأوتوماتيكي في نظام تشغيل جهاز لتوليد الطاقة الكهربائية و هو مجموعة مولد بجاري- توربينية ، و يعتبر هذا النظام من الأنظمة التي أوليت اهتماما كبيرا من طرف المهندسين لكونها صعبة المراقبة. لتحقيق هذا الهدف لدينا ثلاث صمامات لمراقبة تدفق الماء إلى خزان التبخر , تدفق الوقود إلى غرفة الاشتعال و تدفق البخار إلى التربينية و هذا للتحكم في ارتفاع مستوى ماء الخزان و الضغط بداخله و كذا الطاقة الكهربائية المولدة.

النموذج الرياضي لهذا النظام غير خطي و معقد- متعدد المتغيرات. طبقنا على هذا النموذج طريقة التحكم بالا نزلاق و هي طريقة تتميز بالصلابة و القدرة على التحكم في الأنظمة المضطربة.

**الكلمات الرئيسية** — التحكم متغير الشكل ، التحكم بالانزلاق ، الصلابة ، التحكم في نظام متعدد المتغيرات، المبخر.