REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÉRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES FRERES MENTOURI – CONSTANTINE.1
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT ELECTRONIQUE

Département d'Electronique   Option : Télécommunications spatiales

THESE :

PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE DOCTORAT EN SCIENCES

Contrôle d'attitude d'un microsatellite, analyse multi objectives de la boucle de retour

PAR :

BENENIA MERIEM

Devant le jury :

Président :	**Pr.**	**BELARBI. K**	**Ecole Nationale Polytechnique de Constantine**
Rapporteur :	**Pr.**	**BENSLAMA. M**	**Université Mentouri-Constantine1**
Examinateur :	**Pr.**	**CHAABI.A**	**Université Mentouri-Constantine1**
Examinateur :	**Pr.**	**BENATIA. D**	**Université Batna 2**

REMERCIEMENTS

Je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné courage et patience pour mener à bien ce travail, qu'il soit béni et glorifié.

Je remercie vivement Monsieur BENSLAMA Malek, Professeur à l'université des Frères Mentouri. Constantine.1 pour avoir accepté d'être encadreur de cette thèse. Ses remarques m'ont permis de corriger et de finaliser au mieux ce travail. Merci pour vos encouragements et vos recommandations.

Je suis également reconnaissante à Monsieur BELARBI Khaled, Professeur à l'université Salah BOUBNIDER. Constantine 3, pour l'intérêt qu'il a accordé à ce travail en acceptant de le juger et de présider le jury.

Je remercie aussi Monsieur BENATIA Djamel, Professeur à l'Université Moustafa Benboulaid. Batna 2,

Monsieur CHAABI Abdelhafid, Professeur à l'université des Frères Mentouri. Constantine.1 qui ont accepté de faire partie du jury.

J'aimerais enfin exprimer toute ma gratitude à ma famille et à mes amies dont les encouragements et le soutien n'ont jamais fait défaut.

A

Ma Famille

Et

Mes Amies

Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude de systèmes de contrôle d'attitude d'un engin spatiale en se basant sur le développement des lois de commande robustes pour assurer la stabilisation du système de l'attitude . Ceci a été réalisé en combinant la théorie de contrôle des systèmes dynamiques et en appliquant les principes sur le système de contrôle d'attitude du satellite.

Ces recherches ont été réalisées, d'un point de vue théorique par la conception de deux lois de commande pour traiter le problème de deux façons différentes. Pour atteindre l'objectif une étude de modélisation d'attitude de satellite est d'abord abordée en partant des relations mathématique régissant le mouvement de rotation des corps rigides, plusieurs représentations de l'attitude d'un satellite ont été proposées.

Les travaux portaient principalement et en premier lieu sur la commande par mode glissant, qui a la propriété de robustesse face aux incertitudes du modèle, et aux perturbations externes. Le concept de contrôle considéré dans cette thèse était de discuter les différentes caractéristiques des surfaces de glissement en ajoutant un nouveau critère de choix. En plus d'un traitement d'une loi de commande basé sur le régulateur PD, et d'un estimateur pour compenser l'effet des paramètres incertains ou inconnus de l'inertie et de couples de perturbation.

En plus du traitement théorique, la thèse contient des résultats de simulations pour les contrôleurs développés.

Abstract

This thesis deals with the study of attitude control systems and the development of control laws to ensure the stabilization of the attitude system. This was achieved by combining the dynamic systems control theory and applying this principles on the satellite attitude control system.

This research was carried out from a theoretical point of view by the design of two control laws to treat the problem in two different ways. To achieve the goal a satellite attitude modeling study is first approached using mathematical relationships governing the rigid bodies rotational motion, several attitude representations have been proposed.

The work focused mainly on the sliding mode control, which has the property of robustness against the model uncertainties, and external disturbances. The control concept considered in this thesis was to discuss the different characteristics of the sliding surfaces by adding a new selection criterion. In addition to the study of a PD based controller, with an estimator to compensate the effect of uncertain or unknown parameters of inertia and disturbances.

In addition to the theoretical treatment, the thesis contains simulation results for the developed controllers.

ملخص

في هذه الأطروحة، نركز على دراسة أنظمة التحكم في التوجيه لمركبة فضائية تقوم على تطوير قوانين تحكم قوية لضمان استقرار نظام التوجيه. وقد تحقق ذلك من خلال الجمع بين نظرية التحكم في الأنظمة الديناميكية وتطبيق المبادئ على نظام التحكم في توجيه الاقمار الصناعية

تم إجراء هذا البحث من الجانب النظري من خلال تصميم قانونين للتحكم في المشكلة بطريقتين مختلفتين. ولتحقيق الهدف، يتم أولاً دراسة لنموذجة توجيه الأقمار الصناعية من العلاقات الرياضية التي تحكم الحركة الدورانية للأجسام الصلبة، وقد اقترحت عدة عروض لتوجيه القمر الصناعي

ركز العمل بشكل رئيسي على التحكم بواسطة الوضع المنزلق، والذي يمتلك خاصية القوة ضد عدم اليقين في النموذج، والاضطرابات الخارجية. كان مفهوم التحكم المذكور في هذه الرسالة هو مناقشة الخصائص المختلفة لأسطح الانزلاق بإضافة معيار اختيار جديد. بالإضافة إلى معالجة قانون التحكم على أساس، PDومقدر لتعويض تأثير المعاملات غير المؤكدة أو غير المعروفة و الاضطرابات الخارجية

بالإضافة إلى المعالجة النظرية، تحتوي الرسالة على نتائج محاكاة لأجهزة التحكم المقدمة

Table des Matières

Liste des figures

Chapitre 1

Modélisation d'attitude

Chapitre 2

Commande d'attitude par mode de glissement

Chapitre 3

Contrôle d'attitude basé sur le PD

Introduction Générale

Les satellites sont devenus un domaine d'application important dans le nouveau développement technologique. Ils sont utilisés dans de nombreux domaines à partir des télécommunications aux technologies de défense. Pour une mission réussie le satellite devrait être stabilisé à une attitude donnée. Ainsi, les manœuvres d'attitude du satellite ont un rôle important dans le bon fonctionnement des charges utiles embarquées. Ce qui a fait du contrôle d'attitude une partie importante dans la recherche sur les technologies spatiales. La conception correspondante des lois de commandes pour le contrôle d'attitude a donc fait l'objet d'une attention particulière au cours des dernières décennies. Plusieurs méthodes de contrôle et nombreuses approches avancées ont été développées au cours des dernières années depuis le lancement du premier satellite en 1957 pour les satellites rigides et flexibles (Eme'yanov) (Tayebi), (Chunodkar et Akella), (Forbes, Liu et Findlay) . Le travail de (Crouch,), (Byrnes et Isidori,) a souligné la nature géométrique et non linéaire du problème, et a jeté les bases pour les développements majeurs dans ce domaine. Une analyse assez complète du problème du contrôle d'attitude est présentée dans (Utkin), (Hamel) où un large éventail de techniques de contrôle, allant du contrôle proportionnel simple au contrôle adaptatif, a été proposé. Il faut souligner que de plus en plus de charges utiles avancées seront montées sur les satellites pour effectuer les missions prévues. L'attitude souhaitée doit être établie pour garantir que toutes les charges utiles puissent fonctionner normalement. En conséquence, un certain nombre d'exigences, notamment la précision de pointage d'attitude et la stabilité d'attitude, seront imposées au système de contrôle d'attitude du satellite. Cependant, les satellites seront toujours sous l'effet de couples perturbateurs et de l'incertitude d'inertie (Lim), (Xiao, Huo et Yang). Dans une certaine mesure, ces deux problèmes vont détériorer les performances de contrôle d'attitude. La dernière décennie a été marquée par un développement important dans la résolution de ces deux problèmes. Cependant, ce problème est toujours ouvert. Dans les littératures existantes et afin de trouver des solutions, il existe deux types d'approches. L'une consiste à considérer le couple de perturbations et l'incertitude d'inertie comme des perturbations localisées et incertitudes, puis à concevoir un contrôleur d'attitude robuste (Kim et Kim). Avec l'application d'un contrôleur aussi robuste, la robustesse est garantie face aux perturbations et à l'inertie incertaine. Par exemple, la théorie du contrôle $H\infty$ a été adoptée pour développer un contrôleur d'attitude robuste dans (Zanchettin, Calloni et Lovera), (Nagashio, Kida et Ohtani), (Hamada, Ohtani et Kida). Les performances de contrôle d'attitude souhaitées étaient garanties même en présence de perturbations externes, d'incertitudes du système et même de vibrations flexibles.

Prenant en compte les avantages du contrôle en mode glissant (SMC), particulièrement intéressantes, notamment une réponse rapide et une insensibilité aux paramètres incertains et aux perturbations. Le contrôle en mode glissant a été reconnu comme l'un des outils les plus efficaces pour concevoir des contrôleurs robustes pour un système dynamique non linéaire complexe d'ordre élevé fonctionnant dans diverses conditions (Xiao). Cette technique est largement utilisés pour la conception de lois de commande d'attitude robustes (Chen et Lo), (Hui et Li). Dans (Pukdeboon, Zinober et Thein), un contrôleur de mode glissant d'ordre élevé a été développé, et un suivi d'attitude avec une précision de pointage élevée a été réalisé. Le contrôleur proposé garantissait que la sortie du système était robuste face aux perturbations et incertitude d'inertie. Dans (Xia, Zhu et Fu), le problème du contrôle de suivi d'attitude malgré les perturbations et l'inertie incertaine a été résolu en présentant un contrôleur de mode glissant. Ce problème a également été étudié dans (Zhu, Xia et Fu)pour la manœuvre de stabilisation d'attitude de satellite avec un couple de sortie de l'actionneur contraint. . (Sahjendra et Ashok) - (Elmali et Olgac) combinent la linéarisation d'entrée / sortie avec la commande par mode glissant pour former un contrôleur hybride. De même, un contrôleur de suivi d'attitude en mode glissant a été présenté pour les engins spatiaux flexibles afin de compenser la perte additive et partielle des défauts d'efficacité des roues de réaction dans (Massey). Le contrôle adaptatif du mode de glissement flou pour la stabilisation d'attitude du satellite flexible est utilisé dans (Guan, Liu et Liu). Dans (Patel, Kumar et Behdinan), l'utilisation de la pression de rayonnement solaire pour le contrôle d'attitude des satellites sur des orbites elliptiques basée sur un contrôle de structure variable est considérée.

Les principaux avantages de contrôle en mode glissant, en tant qu'approche à structure variable (VSC), sont sa réponse dynamique rapide, sa robustesse, sa simplicité de conception et de mise en œuvre. Le principal inconvénient de SMC est le phénomène de chattering bien connu. De nombreuses méthodes ont été proposées pour résoudre ce problème, telles que la technique de la couche limite (Perruquetti).

Une commande floue est récemment introduite dans le contrôle par mode glissant pour atténuer les phénomènes de chattering. Dans (Hwang et Chang), les auteurs ont développé une méthode basée sur le principe du contrôle par mode glissant pour gérer efficacement le problème de chattering par l'application de la théorie des ensembles flous. Le travail de (Kim et Lee) a proposé une commande floue avec une surface de glissement floue, et a prouvé la stabilité du système de contrôle flou et la limite de l'erreur de poursuite. Les procédures de conception de ces méthodes se concentrent généralement sur les règles de contrôle floues fixes, qui sont généralement inappropriées et possèdent une faible adaptabilité à l'incertitude.

Par conséquent, diverses méthodes de réglage sont généralement utilisées pour améliorer les performances des commandes par mode glissant flou.

Dans la conception de contrôle d'attitude robuste, les perturbations et les incertitudes ne seront pas éliminés, et leur robustesse sera atteinte avec des performances de contrôle d'attitude acceptables ce qui est important de point de vue réduction des calculs et par conséquent diminution de la complexité de système de contrôle d'attitude.

En revanche, Une autre approche de contrôle d'attitude avec une bonne précision consiste à rejeter les perturbations et les incertitudes (B. Xiao, Q. L. Hu et S. William), (Chen et Huang), (Li, Su et Wang) (Feng, Yu et Han).

Pour ce type d'approche, l'amplitude ou sa limite supérieure du couple de perturbation et des incertitudes seront estimées, puis un contrôleur sera conçu pour les compenser. Pour atteindre cet objectif, la technique de contrôle adaptatif est une approche largement appliquée (Pisu et Serrani), (B. Xiao, Q. Hu et D. Wang). Dans (Yoon et Agrawal) , une loi d'estimation adaptative a d'abord été conçue pour estimer les paramètres d'inertie incertaine. En utilisant les informations estimées, un contrôleur non linéaire a été proposé pour la manœuvre de suivi d'attitude. Dans (Zou, Kumar et Hou), le réseau neuronal de Chebyshev a été adopté pour estimer l'incertitude de modèle dynamique introduite par la perturbation et les paramètres incertains. En plus certaines études sur le contrôle d'attitude à l'aide du contrôle adaptatif étaient également disponibles dans (Bustan, Sani et Pariz), (Zou), (Xiao, Hu et Zhang).

Une solution pour obtenir un contrôle avec élimination des perturbations et incertitudes est la conception d'une loi de commande basée sur l'observateur. Dans cette approche, un observateur est d'abord conçu pour estimer les perturbations et les incertitudes, et le contrôleur est développé en utilisant la valeur observée. Il existe actuellement un certain nombre d'études sur la conception d'observateurs permettant d'estimer les perturbations (Liu, Luo et Yang), (Ginoya, Shendge et Phadke), (Chen, Yang et Guo). Plus spécifiquement, lorsque les perturbations sont considérées comme une entrée inconnue, l'application du cadre théorique de 'Unknown-Input-Observer' (UIO) (Gao, Liu et Chen), devient un moyen efficace d'estimer les perturbations. Pour les systèmes linéaires ou non linéaires, le problème de la conception de lois de commandes à hautes performances utilisant l'UIO pour estimer les incertitudes et les perturbations du système a fait l'objet d'une étude approfondie (Pu, Yuan et Yi), (Phanomchoeng et Rajamani).

(Daly et Wang). D'autre part, le problème de la conception de l'approche d'élimination de perturbations basée sur l'observateur a également attiré une attention considérable dans le domaine de conception de lois de commande d'attitude des satellites et les véhicules aériens sans pilote ces dernières années, (Wu, Sun et Sun). Dans (Besnard, Shtessel et Landrum), un observateur en mode glissant a été présenté pour estimer les perturbations externes. Le problème de la conception d'un contrôleur basé sur l'observateur des perturbations pour la conception d'un système d'attitude d'un satellite a été résolu dans (Cong, Chen et Liu).

Si les approches précédentes sont analysées quantitativement en détail, on peut constater que, des lois de commande d'attitude robustes garantissent la robustesse face aux perturbations et aux incertitudes et avec une stabilité asymptotique. D'autre part, des approches de contrôle basées sur l'élimination de perturbations soient capables de stabiliser asymptotiquement le système d'attitude en boucle fermée, les contrôleurs conçus ont une structure complexe en permanence. Dans ce travail la conception de loi de commande en utilisant les deux approches a été présentée pour la commande d'attitude à l'aide des structures simples permettant de réaliser une manœuvre de suivi d'attitude de satellite.

Cette thèse est organisée comme suit :

Le premier chapitre est consacré à la modélisation et les différentes représentations d'attitude. Après avoir défini les relations fondamentales nécessaires pour l'étude du mouvement de rotation des corps rigides et qui s'appliquent à un grand nombre de problèmes d'ingénierie, et en particulier à l'étude du mouvement d'attitude des engins spatiaux. Nous aborderons les différentes représentations d'attitude du satellite qui utilisent souvent trois ou quatre paramètres incluent les angles d'Euler, le quaternion d'attitude, ainsi que les paramètres dérivés des quaternions unitaires, comme les paramètres de Rodriguez et paramètres

Le deuxième chapitre présente le contexte d'une technique de contrôle d'attitude robuste en mode glissant, basé sur les quaternions pour des manœuvres de repos-au-repos. L'approche proposée est définie de manière à ce que les paramètres sélectionnés de la commande puissent amener l'état du système rapidement à la surface de glissement, puis de le maintenir sur cette surface. Une fonction candidate de Lyapunov est utilisée pour garantir la stabilité du système dans le cadre de l'action des lois de contrôle proposée.

Le troisième chapitre aborde la conception d’une approche de contrôle avec une structure simple pour effectuer des manœuvres de suivi d’attitude pour les satellites rigides. Une loi d'estimation basée sur un observateur est d'abord proposée pour reconstruire l’incertitude de la dynamique. Un contrôleur de type proportionnel-dérivé (PD) comprenant un effort de contrôle de PD classique et une partie de contrôle de compensation est ensuite présenté. Le contrôle de compensation est conçu sur la base des informations estimées. De plus, les performances de contrôle peuvent être obtenues en ajustant les gains de contrôle dans le cadre théorique de la théorie de contrôle de PD classique.

Et nous finissons notre travail par une conclusion générale.

Chapitre 1

Modélisation d’attitude

I-1-Introduction

L'étude de la dynamique de rotation est d'une importance capitale pour la description du mouvement des satellites. Dans ce chapitre, nous s'intéressons principalement à l'attitude des engins spatiaux, et leurs différentes présentations**.**

I-2-Équations d'Euler du mouvement de rotation

C'est évident que l'attitude instantanée ne dépend pas seulement de la rotation cinématique, mais aussi de la dynamique de rotation qui détermine comment les paramètres de l'attitude changent avec le temps pour une vitesse angulaire spécifiée. Pour un satellite rigide, le repère de référence attaché au satellite pourrait être utilisé pour représenter son attitude. Cependant, dans ce cas, la vitesse angulaire ne peut pas être un paramètre arbitraire mais elle doit satisfaire les lois de rotation dynamique qui prend en compte la distribution de masse du satellite. Dans ce chapitre, nous allons dériver les équations de la dynamique de rotation, qui sont équivalentes aux lois de Newton pour la dynamique de translation. La dynamique de rotation du satellite, considérée comme un ensemble de particules de masse élémentaire, ∂m est décrite par l'équation du mouvement suivante, issue de la seconde loi de Newton

$$M = \sum (r \times \partial m \frac{dv}{dt}) \qquad (1.1)$$

Ou ''v'' est la vitesse totale (inertielle) de la particule, ''r'' est la position relative de la particule par rapport au point **O** (qui est l'origine du repère de référence), et $M = \sum (r \times \partial f)$ est le couple externe autour de O. Dans l'équation (1), on a supposé que tous les couples s'annulent en utilisant la troisième loi de Newton. Cela est dû au fait que les forces internes exercées entre deux particules quelconques constituant le corps du satellite, agissent le long de la ligne joignant les particules. En prenant la limite $\partial m \to 0$, on peut remplacer la somme sur les particules par une intégrale sur la masse, et on peut écrire :

$$M = \int (r \times \frac{dv}{dt}) dm \qquad (1.2)$$

Nous définissons également le moment cinétique d'une particule par (Hughes) : $\partial H = r \times \partial m v$.

En intégrant, le moment cinétique total du satellite peut être écrit comme suit :

$$H = \int r \times v dm \qquad (1.3)$$

En supposant que le satellite a une masse constante, La dérivation de l'équation (1.3) par rapport au temps, conduit à :

$$\frac{dH}{dt} = \int v \times v dm + \int r \times \frac{dv}{dt} dm \tag{1.4}$$

Le premier terme du côté droit de l'équation est égal à zéro, tandis que le second terme est facilement identifiable à partir de l'équation (1.2) qui est le couple extérieur ''M'' ; ainsi, nous avons **:**

$$\frac{dH}{dt} = M \tag{1.5}$$

Notez qu'il est utile de choisir ''**O**'' comme le centre de masse su satellite. Dans un tel cas, le repère mobile (**OXYZ**) est appelé le repère du satellite. Supposons que le satellite est un corps rigide, c'est-à-dire que la distance entre deux points sur le satellite ne change pas avec le temps. L'hypothèse du satellite rigide, (utile pour simplifier les équations du mouvement), est une approximation raisonnable de la dynamique de rotation de la plupart des engins spatiaux. Puisque le centre de la masse est un point fixe par rapport au satellite (Markley et Crassidis), l'amplitude du vecteur ''**r**'' est invariante par rapport au temps. Par conséquent, nous pouvons écrire l'expression de la vitesse totale d'un point arbitraire sur le satellite rigide situé au point **''r ''**, par rapport au point ''**O**'' comme suit :

$$v = v_0 + \omega \times r \tag{1.6}$$

Où $\mathbf{v_0}$ est la vitesse du centre de masse**,** **O**, et $\boldsymbol{\omega}$ est la vitesse angulaire du repère de référence avec l'origine **O**. Par conséquent, les équations. (3) et (6) conduisent à l'expression suivante du moment cinétique (Hughes) :

$$H = \int r \times v_0 dm + \int r \times (\omega \times r) dm \tag{1.7}$$

Le premier terme du côté droit de l'équation (7) peut être exprimé comme :

$$\int r \times v_0 dm = \left(\int r dm\right) \times v_0 \tag{1.8}$$

Qui disparaît par rapport à **O** qui est le centre de la masse ($\int r\, dm = 0$). Ainsi, nous avons :

$$H = \int r \times (\omega \times r) dm \tag{1.9}$$

Nous choisissons de résoudre toutes les équations dans le repère satellite dont les axes **XYZ** avec respectivement les vecteurs unitaires **i, j, k,** tels que :

$$r = xi + yj + zk \tag{1.10}$$

$$\omega = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k \tag{1.11}$$

$$H = H_x i + H_y j + H_z k \tag{1.12}$$

$$M = M_x i + M_y j + M_z k \tag{1.13}$$

En substituant les composantes vectorielles dans l'équation (1.9) et en simplifiant, nous aurons le produit matriciel pour le moment cinétique suivant :

$$H = J\omega \tag{1.14}$$

Où J est la matrice d'inertie, donné par :

$$J = \begin{pmatrix} \int (y^2 + z^2)dm & -\int xydm & -\int xzdm \\ -\int xydm & \int (x^2 + z^2)dm & -\int yzdm \\ -\int xzdm & -\int yzdm & \int (x^2 + y^2)dm \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

IL est clair que, **J** est une matrice symétrique. En termes de composants, **J** s'écrit comme suit :

$$J = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

Les composantes de la matrice d'inertie sont divisées en moments d'inertie, J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} et les produits d'inertie, J_{xy}, J_{yz}, J_{xz}. Cependant, si les axes du repère ne sont pas fixés au satellite, sa vitesse angulaire serait différente de ω (Goeree et Chatel) . Dans un tel cas, les moments et les produits d'inertie seraient variables dans le temps. Le principal avantage de l'écriture du moment cinétique sous la forme de l'équation (1.14) réside dans l'introduction d'une matrice d'inertie, dont les éléments décrivent une distribution de masse constante pour le satellite, ce qui nous permet d'avoir une matrice d'inertie constant. Si l'on choisit délibérément d'avoir les axes du repère satellite, OXYZ, fixés sur le satellite, et ainsi en rotation avec la même vitesse angulaire, ω, comme celle du satellite, les moments et les produits d'inertie seront invariants par rapport au temps. Un tel repère de référence, dont les axes sont rigidement attachés au corps, est appelé un repère fixé sur le satellite. À partir de ce moment, le repère du satellite **OXYZ** sera considéré comme le repère satellite-fixe. Par conséquent, ω dans l'équation (14) est la vitesse angulaire du satellite et J est une matrice constante.

Les équations du mouvement de rotation du satellite peuvent être obtenues dans le repère fixe en substituant l'équation (1.14) dans l'équation (1.5) :

$$M = J\frac{\partial \omega}{\partial t} + \omega \times (J\omega) \tag{1.17}$$

Où la dérivée temporelle partielle représente la dérivée temporelle prise dans le repère fixe :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \begin{Bmatrix} \frac{d\omega_x}{dt} \\ \frac{d\omega_y}{dt} \\ \frac{d\omega_z}{dt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{Bmatrix} \tag{1.18}$$

En remplaçant le produit vectoriel dans l'équation (17) par un produit matriciel nous pouvons écrire :

$$M = J\frac{\partial \omega}{\partial t} + S(\omega)J\omega \tag{1.19}$$

Ou

$$S(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & \omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

L'équation (1.19) représente trois équations différentielles ordinaires, scalaires, non linéaires, appelées les équations de la dynamique de rotation d'Euler. Ce sont les équations régissant la dynamique de rotation des satellites et leur solution donne la vitesse angulaire**, ω**, à un instant donné. Les variables du mouvement de rotation sont donc les paramètres cinématiques représentant l'attitude instantanée d'un repère fixe et la vitesse angulaire du satellite résolue dans le même repère**.**

I-3- Énergie cinétique de rotation

L'énergie cinétique d'un système de N particules :

$$T = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 \tag{1.21}$$

Où v_i est la vitesse de l'ieme particule (de la masse m_i), par rapport au centre de la masse **O**, qui se déplace avec une vitesse v_0. Lorsqu'elle est appliquée à un corps, la somme sur les particules est remplacée par une intégrale sur la masse (Markley et Crassidis) :

$$T = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\int v^2 dm \tag{1.22}$$

De l'équation (6), il est claire que pour un corps rigide, $v^2 = (\omega \times r) \cdot (\omega \times r)$, et on peut écrire

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \int (\omega \times r).(\omega \times r) dm \tag{1.23}$$

Le même résultat pourrait être obtenu en utilisant l'expression suivante définissant l'énergie cinétique et en substituant l'équation (1.6) :

$$T = \frac{1}{2} \int v.v dm \tag{1.24}$$

Le premier terme sur le côté droit de l'équation (1.23) représente l'énergie cinétique due à la translation du centre de masse, tandis que le second terme désigne l'énergie cinétique de rotation autour du centre de masse. L'expression de l'énergie cinétique de rotation du satellite, T_{rot}, peut être simplifiée en utilisant le moment cinétique [Equation (1.9)], menant à :

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \int (\omega \times r).(\omega \times r)\, dm = \frac{1}{2} \omega H = \frac{1}{2} \omega^T J \omega \tag{1.25}$$

Cette expression de l'énergie cinétique de rotation est très utile pour simplifier les équations d'Euler.

L'énergie cinétique de rotation est conservée s'il n'y a pas de couple externe appliqué au satellite. Ce fait est évident en prenant la dérivée temporelle de l'équation (1.25), et en substituant les équations d'Euler, Equation (1.18), avec M = 0 :

$$\frac{dT_{rot}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\omega}{dt}.H + \frac{1}{2} \omega.\frac{dH}{dt} = 0 \tag{1.26}$$

Puisque M = 0, le deuxième terme à droite de l'équation (1.26) disparaît en raison de l'équation (1.5), alors que le premier terme disparaît grâce à l'équation (1.17), qui produit :$(d\omega/dt) \cdot H = -\omega \cdot (\omega \times H) = 0$**.** En l'absence d'un couple externe (applications spatiales), la conservation de l'énergie cinétique de rotation et du moment cinétique, peut être efficacement utilisé pour obtenir des relations analytiques entre la vitesse angulaire et le matrice d'inertie.

I-4-Repère principal du satellite

Si on choisit une orientation particulière du repère fixe par rapport au satellite, Une grande simplification des équations d'Euler est alors possible, de telle sorte que les produits d'inertie J_{xy}, J_{yz}, J_{xz} disparaissent.

Un tel repère est appelé le repère principal fixe. La matrice d'inertie résolue dans le repère principal est une matrice diagonale, $\mathbf{J_p}$. considérons la matrice de rotation, C_p, définie par :

$$\begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} = C_p \begin{Bmatrix} i_p \\ j_p \\ k_p \end{Bmatrix} \tag{1.27}$$

La relation entre un vecteur résolu dans le repère principale et le même vecteur dans un repère arbitraire fixé au satellite c'est donc de passer par la matrice de rotation, **Cp**. Si nous continuons à désigner les vecteurs résolus dans le repère principal par l'indice **p**, nous avons :

$$\omega = C_p \omega_p \tag{1.28}$$

Maintenant, comme il n'y a pas de changement dans l'énergie cinétique de rotation causée par la transformation du repère, nous pouvons utiliser l'équation (25) et écrire :

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \omega^T J \omega = \frac{1}{2} \omega_p^T J_p \omega_p \tag{1.29}$$

En remplaçant l'équation (1.28) dans l'équation (1.29), et en comparant les termes des deux côtés de l'équation résultante, nous aurons :

$$\omega_p^T J_p \omega_p = \omega^T J \omega = \omega_p^T C_p^T J C_p \omega_p \tag{1.30}$$

Qui, en appliquant la propriété d'orthogonalité de la matrice de rotation, conduit à :

$$J_p = C_p^T J C_p \tag{1.31}$$

Puisque J_p est une matrice diagonale carrée, (Kreyszig) alors ces éléments diagonaux sont les valeurs propres distinctes de J, tandis que $\mathbf{C_p}$ a les vecteurs propres de J comme colonnes. Ainsi, l'équation (1.31) est la formule pour dériver la matrice d'inertie dans le repère principale et la matrice de transformation de coordonnées, **Cp,** à partir de l'analyse des valeurs propres de **J.**

La matrice d'inertie peut être diagonalisé par la procédure précédente pour produire la matrice d'inertie principal si et seulement si les moments d'inertie principaux sont distincts, ce qui est le cas pour un objet asymétrique. Pour un corps axisymétrique, deux moments d'inertie principaux sont égaux, mais il n'est ni nécessaire ni possible de suivre l'approche ci-dessus pour obtenir les moments d'inertie principaux (puisque les axes principaux sont facilement identifiables par symétrie). Par conséquent, à toutes fins pratiques, nous ne travaillerons que dans le repère principal, et la discussion suivante concerne les axes principaux du satellite, sans porter explicitement l'indice p.

I-5-Rotation du satellite sans couple extérieur

La rotation de l'engin spatial est généralement en l'absence de couples externes. Afin d'analyser la stabilité en rotation et les caractéristiques de contrôle des engins spatiaux, il est donc nécessaire d'étudier le mouvement des corps rigides sans couple. Le couple externe étant nul, le moment cinétique du corps rigide autour de son centre de masse (ou un point fixe) est conservé selon l'équation (1.5). Ainsi, nous pouvons exprimer les équations d'Euler pour un mouvement sans couple (M = 0) d'un corps rigide dans le repère principal comme suit :

$$\begin{aligned} J_{xx}\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z(J_{zz} - J_{yy}) &= 0 \\ J_{yy}\dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z(J_{xx} - J_{zz}) &= 0 \\ J_{zz}\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y(J_{yy} - J_{xx}) &= 0 \end{aligned} \qquad (1.32)$$

Pour un satellite asymétrique ayant des composantes de vitesse angulaire non nulle autour des trois axes, équation (1.32), il est difficile de résoudre les équations sous cette forme, mais il plus facile de faire l'intégration numérique.

Comme un corps rigide sans couple ne possède pas de mécanisme de dissipation d'énergie, son énergie cinétique de rotation est conservée conformément à l'équation (1.26). Cependant, un satellite est un corps rigide imparfait, généralement constitué de plusieurs corps rigides tournant l'un par rapport à l'autre (par exemple des roues de réaction et des gyroscopes), ainsi que les réservoirs des combustibles liquides. Les rotors et les propergols liquides fournissent des mécanismes de dissipation interne de l'énergie cinétique de rotation par frottement et mouvement de glissement, respectivement (Markley et Crassidis). Lors de l'analyse de la stabilité rotationnelle des satellites, il est donc vital de les considérer comme des objets semi-rigides qui dissipent continuellement de l'énergie cinétique jusqu'à ce qu'un équilibre stable soit atteint. Pour un corps semi-rigide, les équations d'Euler restent valables (le couple externe restant nul), mais l'énergie cinétique de rotation n'est pas conservée.

Nous allons résoudre les équations d'Euler sans couple, pour analyser les caractéristiques de stabilité en rotation des satellites rigides. Une telle analyse révélerait les axes sur lesquels un équilibre de rotation stable peut être atteint. Le processus d'obtention d'un équilibre stable à travers la rotation à vitesse constante autour d'un axe principal s'appelle la stabilisation de spin.

La stabilité est une propriété d'un équilibre et peut être définie de plusieurs manières. Pour notre propos, nous définirons un équilibre stable comme celui pour lequel une perturbation limitée ne produit pas une réponse illimitée. La perturbation peut être considérée comme la condition initiale, exprimée en termes d'une déviation initiale des variables de mouvement par rapport à l'équilibre. Dans une analyse de stabilité, il suffit d'étudier la réponse à une petite déviation initiale, car la stabilité n'est pas influencée par la grandeur de la perturbation.

I-5-1- Satellite Axisymétrique

Lorsque le satellite possède un axe de symétrie, les équations d'Euler sont encore plus simplifiées. Considérons un satellite tournant autour de son axe de symétrie, **OZ,** appelé axe longitudinal. En raison de la symétrie axiale, $\mathbf{J_{xx} = J_{yy}}$, et nous avons :

$$\begin{aligned} J_{xx}\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z(J_{zz} - J_{yy}) &= 0 \\ J_{xx}\dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z(J_{xx} - J_{zz}) &= 0 \\ J_{zz}\dot{\omega}_z &= 0 \end{aligned} \tag{1.33}$$

Il est clair, de l'équation (33) que le satellite est dans un état d'équilibre à chaque fois que ($\omega_x = \omega_y = 0$), appelé spin pur autour de l'axe de symétrie. Il est aussi évident de la dernière équation (33) que ($\dot{\omega}_z = 0$ ou $\omega_z = n$ = constante), quelles que soient les grandeurs de ω_x, $\omega_y = 0$. Supposons que le satellite était dans un état de spin pur lorsqu'une perturbation, $\omega_x(0)$, $\omega_y(0)$, est appliquée à l'instant t = 0. Examinons le mouvement résultant du satellite en résolvant les deux premières équations de la relation (33), qui sont écrites sous la forme de la matrice suivante :

$$\begin{Bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{Bmatrix} \tag{1.34}$$

Où $k = n\,(J_{zz} - J_{xx})/J_{xx}$. L'équation (34) représente les équations d'états linéaires, invariantes dans le temps, dont la solution avec la condition initiale, $\omega_x(0)$, $\omega_y(0)$ à t = 0, s'écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \end{Bmatrix} = e^{Kt} \begin{Bmatrix} \omega_x(0) \\ \omega_y(0) \end{Bmatrix} \tag{1.35}$$

Où e^{Kt} est la matrice exponentielle et

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} \tag{1.36}$$

Nous pouvons écrire la matrice exponentielle en utilisant la transformée de Laplace inverse comme suit :

$$e^{kt} = \mathcal{L}^{-1}(sI - K)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(kt) & -\sin(kt) \\ \sin(kt) & \cos(kt) \end{pmatrix} \tag{1.37}$$

Par conséquent, la solution est donnée par :

$$\begin{aligned} \omega_x(t) &= \omega_x(0)cos(kt) - \omega_y(0)\sin(kt) \\ \omega_y(t) &= \omega_x(0)\sin(kt) + \omega_y(0)\cos(kt) \end{aligned} \tag{1.38}$$

L'équation (1.33) implique que le mouvement de rotation d'un satellite axisymétrique, rigide, perturbé de son état d'équilibre du spin pur autour de l'axe longitudinal par une perturbation $\omega_x(0)$, $\omega_y(0)$, oscille dans le plan **OXY** (appelé, plan latéral), alors que la vitesse de rotation, $\omega_z = n$, n'est pas affectée. Cela provoque un mouvement conique du satellite perturbé autour de l'axe de symétrie. Une caractéristique importante de la solution donnée par l'équation (38) s'aperçoit facilement comme suit :

$$\omega_{xy}^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 = \omega_x^2(0) + \omega_y^2(0) = constante \tag{1.39}$$

Ce qui implique que la composante de vitesse angulaire dans le plan latéral est constante. Cette composante latérale de la vitesse angulaire, ω_{xy}, est responsable du mouvement conique appelé précession. La précession étant une oscillation d'amplitude constante, dont la grandeur est limitée par celle de la perturbation appliquée, on dit que le mouvement d'un satellite rigide autour de son axe de symétrie est inconditionnellement stable. La figure.1 montre la géométrie du mouvement de précession, où la vitesse angulaire, ω, fait un angle constant, $\alpha = \tan^{-1}(\omega_{xy}/n)$, avec l'axe de symétrie, OZ. De plus, le moment angulaire, $H = J_{xx}(\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j}) + J_{zz}n\mathbf{k}$, fait un angle constant, $\beta = \tan^{-1}(J_{xx}\omega_{xy}/J_{zz}n)$, avec l'axe de symétrie, appelé angle de nutation. L'axe de symétrie décrit ainsi un cône d'angle **α**, appelé cône du satellite, autour du vecteur de la vitesse angulaire, et un cône d'angle **β**, appelé cône spatial, autour du vecteur de moment cinétique. Dans la figure.1, on a supposé :

$J_{xx} > J_{zz}$, pour lequel $\beta > \alpha$

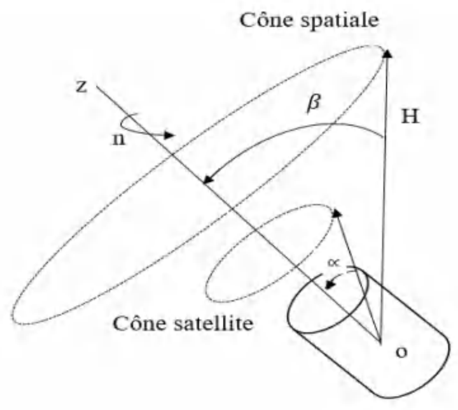


Figure 1.1 : Précession d'un engin spatial axisymétrique

Chaque fois que la dissipation d'énergie est présente dans un système dynamique, il y a une tendance à se déplacer vers l'état d'équilibre avec l'énergie cinétique la plus faible. Dans un état de spin pur autour d'un axe principal, il n'y a pas de dissipation d'énergie car les liquides tournent à la même vitesse que le satellite. Ainsi, le spin pur autour d'un axe principal est un état d'équilibre pour un satellite semi-rigide. Pour la rotation sans couple de satellite, l'énergie cinétique la plus faible est atteinte pour une rotation autour de l'axe principal. Cela peut être vu à partir de l'équation (1.25), en appliquant la loi de conservation du moment cinétique. Par conséquent, la dissipation d'énergie interne convertit finalement le mouvement de précession en une rotation autour de l'axe principal. Par conséquent, un satellite semi-rigide ne peut être stabilisé que sur son axe principal. En appliquant les résultats précédents à un tel satellite, il est nécessaire que $J_{zz} > J_{xx}$. Si l'axe de symétrie est l'axe mineur, le spin pur autour de celui-ci serait éventuellement converti en un mouvement de culbutage autour de l'axe principal majeur en présence de perturbations inévitables et de propergols liquides

Ce phénomène a été rencontré dans le premier satellite lancé par la NASA, nommé Explorer, rendant l'engin spatial cylindrique inutilisable après quelques jours en orbite. Pour cette raison, tous les satellites sont conçus pour avoir l'axe de symétrie comme l'axe principal majeur. On peut étudier la cinématique de l'attitude des satellites axisymétriques, stabilisés en rotation autour de l'axe longitudinal, en résolvant simultanément les équations cinématiques du mouvement avec les équations d'Euler. Comme le vecteur de moment cinétique, H, est fixe dans l'espace, le choix du repère inertiel de référence est évident avec l'axe K le long de H. Les paramètres cinématiques les plus couramment utilisés pour les engins spatiaux stabilisés par rotation sont les angles d'Euler (ψ) 3, (θ) 1, (φ) 3 (Steyn) (Halbwachs).

Comme l'axe de rotation de satellite en précession n'est jamais exactement aligné avec le moment cinétique ($\theta \neq 0$), la singularité de cette représentation d'attitude à $\theta = 0°$, 180° n'est pas rencontrée, éliminant ainsi le principal inconvénient de la représentation angulaire d'Euler.

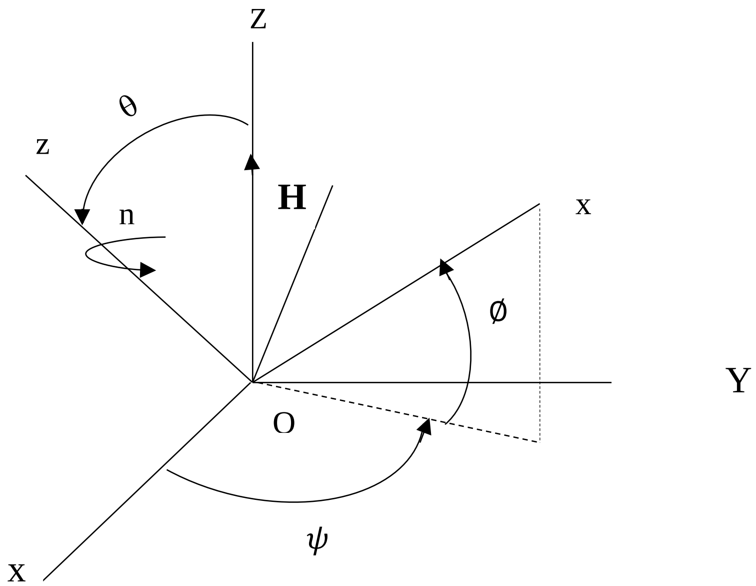


Figure 1.2 : Attitude d'un satellite axisymétrique en précession via des angles d'Euler 3-1-3.

Par conséquent, l'angle de nutation constant est donné par β = θ, et à partir de la Figure.2 représentant les angles d'Euler, nous avons :

$$\text{Sin}\,\theta = \frac{J_{xx}\omega_{xy}}{H} = \frac{J_{xx}\omega_{xy}}{\sqrt{J_{xx}\omega_{xy}^2 + J_{zz}n^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{J_{xx}n}{H} = \frac{J_{xx}n}{\sqrt{J_{xx}\omega_{xy}^2 + J_{zz}n^2}} \tag{1.40}$$

Les équations cinématiques générales pour les angles d'Euler (ψ) 3, (θ) 1, (φ) 3 ont été dérivées au (Annexe A) et sont répétées ici comme suit :

$$\begin{Bmatrix}\dot{\psi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\phi}\end{Bmatrix} = \frac{1}{sin\theta}\begin{pmatrix} sin\phi & cos\phi & 0\\ cos\,\phi sin\theta & -sin\emptyset sin\theta & 0\\ -sin\phi cos\theta & -cos\emptyset\,cos\theta & sin\theta\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{Bmatrix} \tag{1.41}$$

Par substitution de $\omega_z = n$ et l'équation (39) dans l'équation (41) nous avons :

$$\begin{gathered}\dot{\psi} = \frac{\omega_{xy}}{sin\theta}\\ \dot{\theta} = 0\\ \dot{\phi} = n - \frac{\omega_{xy}}{tan\theta}\end{gathered} \tag{1.42}$$

Puisque θ et ω_{xy} sont tous deux des constantes [équations (1.39) et (1.40)], les vitesses angulaires $\dot{\Psi}$ *et* $\dot{\phi}$ sont également des constantes, dont leurs autres expressions sont obtenues en substituant équation (1.40) dans l'équation (1.42) comme

$$\begin{gathered}\dot{\psi} = \frac{\sqrt{J_{xx}{\omega_{xy}}^2 + J_{zz}n^2}}{J_{xx}} \\ \dot{\theta} = 0 \\ \dot{\phi} = n\left(1 - \frac{J_{zz}}{J_{xx}}\right) = -k\end{gathered} \tag{1.43}$$

La vitesse angulaire $\dot{\psi}$ représente la vitesse de précession, tandis que $\dot{\phi}$ représente la vitesse de rotation totale du satellite dans le repère inertiel et est connu sous le nom de vitesse de rotation inertielle.

Si **Jxx> J_{zz} :** $\dot{\psi}$ a le même signe que celui de $\dot{\phi}$.

Si **Jxx <J_{zz}** : les vitesses angulaires $\dot{\psi}$ et $\dot{\phi}$ ont des signes opposés.

La solution pour les angles d'Euler est facilement obtenue par intégration de l'équation (1.43) (avec les conditions initiales à t = 0 : ψ (0), θ (0), φ (0)) comme suit :

$$\begin{gathered}\psi = \psi_0 \frac{\sqrt{J_{xx}{\omega_{xy}}^2 + J_{zz}n^2}}{J_{xx}} t \\ \theta = (0) \\ \phi = \phi(t) - kt = \phi(0) - n\left(1 - \frac{J_{zz}}{J_{xx}}\right) t\end{gathered} \tag{1.44}$$

Les angles ψ et φ varient donc linéairement en fonction du temps en raison d'une vitesse de précession constante, ω_{xy}.

I-5-2- Satellite asymétrique

Supposons qu'un satellite asymétrique est dans un état de spin pur de vitesse n autour de l'axe principal **OZ**, avant le moment t = 0 où une petite perturbation, $\omega_x(0)$, $\omega_y(0)$, est appliquée. A un instant ultérieur, les composantes de vitesse angulaire peuvent être exprimées par $\omega_z = n + \varepsilon$, et ω_x, ω_y. Comme une petite perturbation a été appliquée, nous pouvons traiter : ε, ω_x, ω_y en petites quantités et résoudre les équations d'Euler. Si la solution indique que ε, ω_x, ω_y croissent avec le temps de manière illimitée, il sera évident que notre hypothèse de petites déviations restant faibles est fausse, et nous avons affaire à un équilibre instable. Sinon, nous avons un équilibre stable. Par conséquent, avec l'hypothèse d'une petite déviation par rapport à l'équilibre, nous pouvons écrire les équations d'Euler approximatives linéarisées comme suit :

$$\begin{gathered} J_{xx}\dot{\omega}_x + n\omega_y(J_{zz} - J_{yy}) \approx 0 \\ J_{yy}\dot{\omega}_y + n\omega_x(J_{xx} - J_{zz}) \approx 0 \\ J_{zz}\dot{\varepsilon} \approx 0 \end{gathered} \tag{1.45}$$

Dans lesquels nous avons négligé les termes du seconds ordre (et supérieurs) impliquant : ε, ω_x, ω_y. Les deux premières équations de l'équation (1.45) peuvent être écrites sous la forme de la matrice vectorielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k_1 \\ k_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{Bmatrix} \tag{1.46}$$

Où $k_1 = n\,(J_{zz}-J_{yy})/\,J_{xx}$ et $k_2 = n\,(J_{zz}-J_{xx})/\,J_{yy}$. Etant dans une forme d'espace d'état linéaire, invariante dans le temps, ces équations approximatives sont résolues en utilisant la matrice l'exponentiel comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \end{Bmatrix} = e^{At} \begin{Bmatrix} \omega_x(0) \\ \omega_y(0) \end{Bmatrix} \tag{1.47}$$

Où e^{At} la matrice exponentielle désignant la matrice de transition et :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -k_1 \\ k_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.48}$$

Les valeurs propres de A déterminent si le mouvement qui suit sera limité et dénotent ainsi la stabilité ou l'instabilité. Ils sont obtenus comme suit :

$$|sI - K| = s^2 + k_1k_2 = 0 \tag{1.49}$$

Ou

$$s_{1,2} = \pm\sqrt{-k_1k_2} \tag{1.50}$$

D'après les valeurs propres de A, il existe deux possibilités pour la réponse :

a) $k_1k_2 < 0$, pour laquelle une valeur propre à une partie réelle positive, indiquant un mouvement croissant de manière exponentielle (non limité), ou
b) $k_1k_2 > 0$, pour laquelle les deux valeurs propres sont imaginaires, et le mouvement est une oscillation d'amplitude constante (bornée) autour de l'équilibre.

Par conséquent, pour la stabilité, nous devons avoir $k_1k_2 > 0$, ce qui implique que ($J_{zz} > J_{xx}$, $J_{zz} > J_{yy}$) ou ($J_{zz} < J_{xx}$, $J_{zz} < J_{yy}$). Hors d'ici, la stabilisation de spin d'un engin spatial asymétrique rigide est possible autour de l'axe principal majeur ou de l'axe principal mineur. Cela confirme notre conclusion de la section précédente, où l'engin spatial axisymétrique (qui, par définition, n'a que des axes majeurs et mineurs) était considéré comme inconditionnellement stable. Cependant, si l'on tient compte de la dissipation d'énergie interne, l'analyse de la section précédente indique qu'un engin spatial asymétrique et semi-rigide ne peut être stabilisé que sur l'axe principal.

Il existe une différence majeure entre l'oscillation stable de satellite asymétrique et le satellite axisymétrique étudié dans la section précédente. En raison de la présence d'une perturbation bornée non nulle ε, autour de l'axe de rotation, la composante de vitesse angulaire, $\omega_z = n + \varepsilon$, ne reste pas constante dans le cas du corps asymétrique. Cela se traduit par un mouvement de secouage (vibration) de l'axe de rotation dans lequel l'angle de nutation, β, change avec le temps. Un tel mouvement est appelé nutation de l'axe de rotation et se superpose au mouvement de précession.

En supposant que $k_1k_2 > 0$, nous avons de l'équation (1.47) :

$$e^{Kt} = \mathcal{L}^{-1}(sI - K)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{k_1k_2}t) & -\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}sin(\sqrt{k_1k_2}t) \\ \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}sin(\sqrt{k_1k_2}t) & cos(\sqrt{k_1k_2}t) \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

Par conséquent, la solution approximative linéarisée pour le mouvement de précession pour des petites perturbations est donnée par

$$\begin{aligned} \omega_x(t) &= \omega_x(0)\cos(\sqrt{k_1k_2}t) - \omega_y(0)\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}sin(\sqrt{k_1k_2}t) \\ \omega_y(t) &= \omega_x(0)\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}sin(\sqrt{k_1k_2}t) + \omega_y(0)cos(\sqrt{k_1k_2}t) \end{aligned} \quad (1.52)$$

Pour résoudre l'angle de nutation, il faut intégrer la dernière équation de l'équation (1.32). Cependant, en négligeant systématiquement le terme de second ordre, $\omega_x\omega_y$, dans cette équation due à l'hypothèse d'une petite perturbation, nous obtenons un résultat erroné de $\dot{\epsilon} = 0 \; ou \; \epsilon = constante$, dans l'équation (1.45). Par conséquent, l'analyse linéarisée est insuffisante pour modéliser la nutation d'un corps asymétrique. Nous devons laisser tomber l'hypothèse de petites perturbations et intégrer numériquement les équations d'Euler non linéaires, sans couple complètes, (équation (1.32)), pour une simulation précise de la précession et de la nutation combinées

Les équations cinématiques de l'attitude instantanée du satellite asymétrique en termes d'angles d'Euler sont données par l'équation (1.41), avec le choix (comme précédemment) du vecteur de moment cinétique constant sur l'axe K du repère inertiel. Grâce à une intégration numérique simultanée des équations cinématiques et des équations d'Euler non linéaires, nous pouvons obtenir l'attitude instantanée de l'engin spatial asymétrique et rigide.

I-6- Engin spatial avec propulseurs d'attitude

La stabilisation en rotation des satellites sans couple est une procédure simple et économique (comparée à la stabilisation à l'aide de couples appliqués de l'extérieur). Cependant, le contrôle du mouvement d'un satellite en rotation et l'effectuation des manœuvres d'attitude nécessaires est une tâche complexe. Généralement, tous les engins spatiaux ont un système de contrôle par réaction (reaction control system : RCS) qui utilise une paire de propulseurs de fusée (appelés propulseurs d'attitude) autour de chaque axe principal pour effectuer des manœuvres d'attitude. Lorsque des couples autour de chaque axe principal sont appliqués pour la stabilité et le contrôle, l'engin spatial est dit stabilisé sur trois axes, par opposition à un stabilisateur de spin. Les propulseurs d'attitude d'un RCS fonctionnent par paires avec une poussée égale et opposée, de sorte que la force externe nette reste inchangée.

La poussée des propulseurs est limitée à de courtes impulsions, qui peuvent être approximées par des impulsions de couple. Une impulsion de couple est définie comme un couple d'amplitude infinie agissant pour une durée extrêmement courte, provoquant ainsi une variation instantanée du moment cinétique du satellite autour de l'axe d'application.

Le concept de l'impulsion de couple est très utile pour analyser la rotation sur un seul axe d'un satellite, car il nous permet d'utiliser la théorie des systèmes linéaires bien connue (Chen). Dans lequel l'équation différentielle linéaire gouvernante est résolue à l'aide de la fonction impulsion unitaire, δ (t). La variation du moment cinétique provoquée par un couple impulsif, M (t) = M (0) δ (t), peut être obtenu comme la surface totale sous la courbe de couple en fonction du temps, donnée par :

$$\Delta H = \int_{-\infty}^{\infty} M(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} M(0)\delta(0)dt = M(0) \qquad (1.53)$$

Ainsi, l'impulsion de couple provoque une variation instantanée du moment cinétique, égale à la valeur du couple au moment de l'application de l'impulsion à t=0

I-6-1- Rotation impulsive sur un axe

Une manœuvre complexe, peut être réalisée sous la forme d'une séquence de rotations sur un seul axe, pour laquelle la théorie du contrôle linéaire, optimale dans le temps (Junkins et Turner), est la plus appropriée. Considérons un satellite rigide avec un moment d'inertie, J_{zz}, autour de l'axe de rotation, OZ, et équipé d'une paire de propulseurs d'attitude capables d'exercer un couple maximal élevé, M_z (0), pour une durée infinitésimale, $\Delta t \rightarrow 0$. Ce qui provoque une variation instantanée du moment cinétique de $\Delta H_z = M_z$ (0). Comme le couple est en fonction du temps et donné par $M_z (t) = M_z (0)\, \delta (t)$, les équations d'Euler se réduisent à ce qui suit :

$$\begin{gathered} \dot{\omega}_x = 0 \\ \dot{\omega}_y = 0 \\ J_{zz}\dot{\omega}_z = M_z(0)\delta(t) \end{gathered} \tag{1.54}$$

En termes de déplacement angulaire, θ autour de l'axe OZ, la dernière expression de l'équation (1.54) peut être écrite comme :

$$\ddot{\theta} = \frac{M_z(0)}{J_{zz}}\delta(t) \tag{1.55}$$

Dont la solution est facilement obtenue par intégration successive en utilisant la transformée de Laplace (Kreyszig) pour que ça soit :

$$\begin{gathered} \omega_z(t) = \dot{\theta} = \omega_z(0) + \frac{M_z(0)}{J_{zz}} u_s(t) \\ \theta(t) = \theta(0) + \omega_z(0)t + \frac{M_z(0)}{J_{zz}} r(t) \end{gathered} \tag{1.56}$$

Où θ (0), ω_z (0) se réfèrent à la condition initiale immédiatement avant l'application du couple, $u_s(t) = \int \delta(t)dt$ est la fonction échelon unitaire appliquée à t = 0, définie parn

$$u_s(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t \geq t_0 \end{cases} \tag{1.57}$$

Et $r(t) = \int u_s(t)dt$ est la fonction rampe appliquée à t = 0, définie par

$$r(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ (t - t_0), & t \geq t_0 \end{cases} \tag{1.58}$$

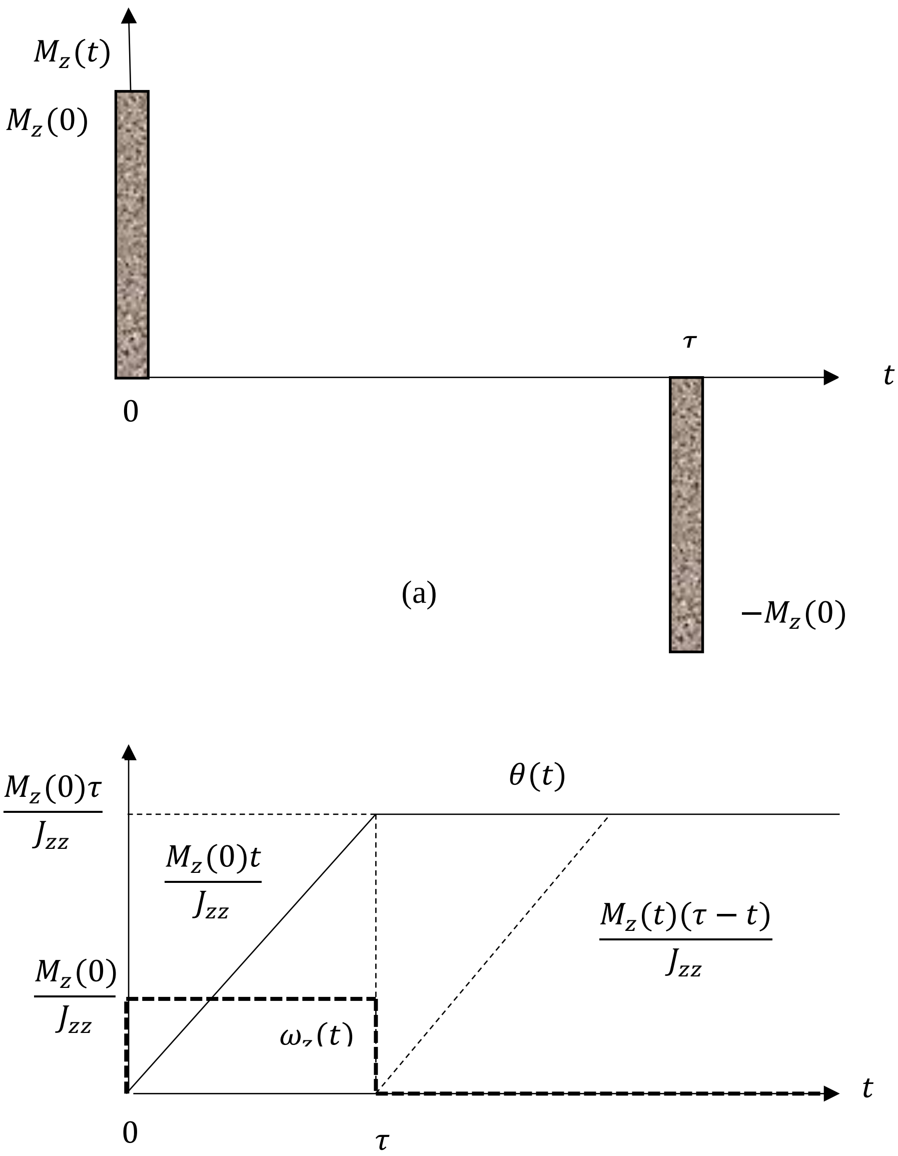
Dans une application pratique, le couple du propulseur, M_z(0), n'est pas infini et l'intervalle de temps, Δt, sur lequel agit le couple, tend vers zéro. Cependant, étant donné que Δt est beaucoup plus petit que la période de la manœuvre, il est approximatif (et utile) de supposer un couple impulsif de propulseur et d'utiliser l'équation (1.56) comme solution approximative. L'équation (1.56) implique que la réponse à une impulsion unique est un déplacement linéairement croissant et un changement dans la vitesse. Par conséquent, si la manœuvre nécessite un changement de vitesse angulaire (appelé manœuvre de rotation), une seule impulsion est suffisante. Cependant, si un déplacement donné sur un seul axe est souhaité, appelé manœuvre de repos au repos (rest to rest maneuver), il faut appliquer une autre impulsion de direction opposée, $-M_z(0)\,\delta(t-\tau)$, pour arrêter la rotation à temps $t = \tau$, lorsque le déplacement souhaité a été atteint. Puisque l'équation différentielle dominante, équation (1.55), est linéaire, sa solution obéit au principe de la superposition linéaire (Tewari). Ce qui permet une addition pondérée des réponses aux impulsions individuelles pour obtenir le déplacement total provoqué par des impulsions multiples. Par conséquent, la réponse nette à deux impulsions égales et opposées appliquées après un intervalle $t = \tau$ est donnée par

$$\begin{gathered}\omega_z(t) = \frac{M_z(0)}{J_{zz}}\left[u_s(t) - u_s(t-\tau)\right] \\ \theta(t) = \frac{M_z(0)}{J_{zz}}\left[r(t) - r(t-\tau)\right] + \omega_z\tau = \theta_d\end{gathered} \tag{1.59}$$

Par conséquent, la vitesse angulaire devient nulle et un déplacement constant souhaité, $\theta(t) = \theta_d$, est atteint à $t = \tau$. La grandeur de θ_d peut être contrôlée en faisant varier le temps τ auquel la seconde impulsion est appliquée (Figure 1.3). L'application de deux impulsions égales et opposées d'amplitude maximale pour obtenir un déplacement optimal dans le temps est appelée contrôle du bang bang. Il s'agit d'un contrôle en boucle ouverte**,** nécessitant uniquement le déplacement souhaité, par opposition au contrôle en boucle fermée (Tewari), pour lequel la connaissance du déplacement instantané, $\theta(t)$, est également requise. Le contrôle en boucle ouverte bang-bang, optimal dans le temps, s'applique exactement à tout système linéaire sans forces externes résistives et dissipative. Cependant, même lorsqu'une faible force d'amortissement est présente, on peut approximativement appliquer cette approche pour contrôler les systèmes linéaires.

I-6-2- Manœuvres d'attitude des satellites stabilisés par rotation

Les propulseurs d'attitude peuvent être utilisés pour contrôler l'attitude d'un satellite axisymétrique stabilisé par spin, qui implique une rotation sur plusieurs axes (précession). Si la vitesse de rotation est constante ($\omega_z = n$), les équations différentielles régissant la précession, équation (1.42), sont linéaires, ce qui permet d'utiliser le contrôle optimal, bang bang, en boucle ouverte de la même manière que la rotation sur un seul axe



(b)

Figure 1.3 : Manœuvre d'attitude optimale du repos au repos, sur un axe, en utilisant des propulseurs avec θ (0) = ω_z (0) = 0.

Pour appliquer l'approche de bang-bang, le mouvement de précession est excité en appliquant un couple normal à l'axe de rotation, puis en exerçant un autre couple égal et opposé pour arrêter la précession lorsque l'orientation de l'axe de rotation souhaitée est atteinte. Cependant, contrairement à la rotation sur un seul axe, les axes principaux d'un corps en mouvement de précession ne sont pas fixes dans l'espace. Par conséquent, les directions des deux impulsions de couple se rapportent aux axes d'inertie.

Soit un changement désiré de l'axe de rotation par l'application de couple d'impulsions par les propulseurs, comme le montre la figure.1.4. Après l'application de la première impulsion, ΔH_1, le moment cinétique change instantanément de $H_0 = J_{zz}nk$ à sa nouvelle valeur $H_1 = H_0 + \Delta H_1$, de sorte qu'un angle de nutation de $\beta = \theta_d/2$ est obtenu. Nous sélectionnons l'orientation du repère inertiel de telle sorte que oZ se situe le long du vecteur de moment cinétique intermédiaire, H_1, et OX coïncide avec l'axe principal OX au temps t = 0. Nous avons donc $\psi(0) = 0$, $\theta(t) = \theta d/2$, $\varphi(0) = 0$ en fonction des angles Euler 3-1-3. Il est clair de la figure.5, que la première impulsion de couple appliquée à l'axe de rotation à t = 0 est égale à

$$\Delta H_1 = J_{zz} n \tan\frac{\theta_d}{2}\left(\cos\frac{\theta_d}{2} J + \sin\frac{\theta_d}{2} k\right) = J_{zz} n \tan\frac{\theta_d}{2} j \tag{1.60}$$

Et provoque une rotation positive du vecteur de moment cinétique autour de -I. Comme le moment cinétique a été dévié de l'axe de rotation, le mouvement de précession est excité et peut se poursuivre pendant un demi-tour d'inertie ($\varphi = \pi$) jusqu'à ce que $i = -I$. A cet instant précis, la seconde impulsion,

$$\Delta H_2 = J_{zz} n \tan\frac{\theta_d}{2}\left(\cos\frac{\theta_d}{2} J - \sin\frac{\theta_d}{2} k\right) = J_{zz} n \tan\frac{\theta_d}{2} j \tag{1.61}$$

Est appliqué pour arrêter la précession en provoquant une rotation positive du vecteur de moment cinétique autour de I. Les moments cinétiques au début et à la fin de la précession sont donnés en termes d'axes principaux instantanés par

$$\begin{gathered} H_1 = J_{zz} nk + J_{zz} n \tan\frac{\theta_d}{2} j \\ H_2 = J_{zz} nk \end{gathered} \tag{1.62}$$

Il est important de souligner que les principaux axes utilisés dans les expressions pour H_1 et H_2 sont à des instants différents, séparés dans le temps par la moitié du temps de rotation inertiel. Le temps nécessaire pour subir un demi-tour d'inertie est donné par l'équation. (1.42)

$$t_{1/2} = \frac{\pi}{\dot{\emptyset}} = \frac{J_{xx}\pi}{n|J_{xx} - J_{zz}|} \tag{1.63}$$

Il est clair de l'équation (1.63) que le temps nécessaire pour atteindre la position finale est important si la vitesse de rotation, n, est faible ou si les deux moments d'inertie sont proches l'un de l'autre.

Bien que les deux impulsions soient opposées par rapport au repère inertiel, elles ont la même orientation dans le repère principal instantané fixe. Par conséquent, la même paire de propulseurs d'attitude peut être utilisée pour démarrer et arrêter la précession après des multiples demi-rotations inertielles ($\theta = \pm\ \pi,\ 2\pi,...$). Cependant, afin d'obtenir la plus grande déviation possible de l'axe de rotation (qui est égal à θ_d et se produit lorsque H_0, H_1, H_2 se trouvent tous dans le même plan) l'angle de précession, ψ, doit avoir changé exactement de $\pm\ 180^\circ$ lorsque la précession est arrêtée, ce qui nécessite que $|\dot{\psi}| = |\dot{\phi}|$. Sur la mise en équivalence des grandeurs des vitesses d'inertie et de précession dans l'équation (1.42), Il est clair que correspondance (l'appariement) de la précession avec la rotation inertielle est possible si et seulement si

$$cos\frac{\theta_d}{2} = \frac{J_{zz}}{|J_{xx}-J_{zz}|} \tag{1.64}$$

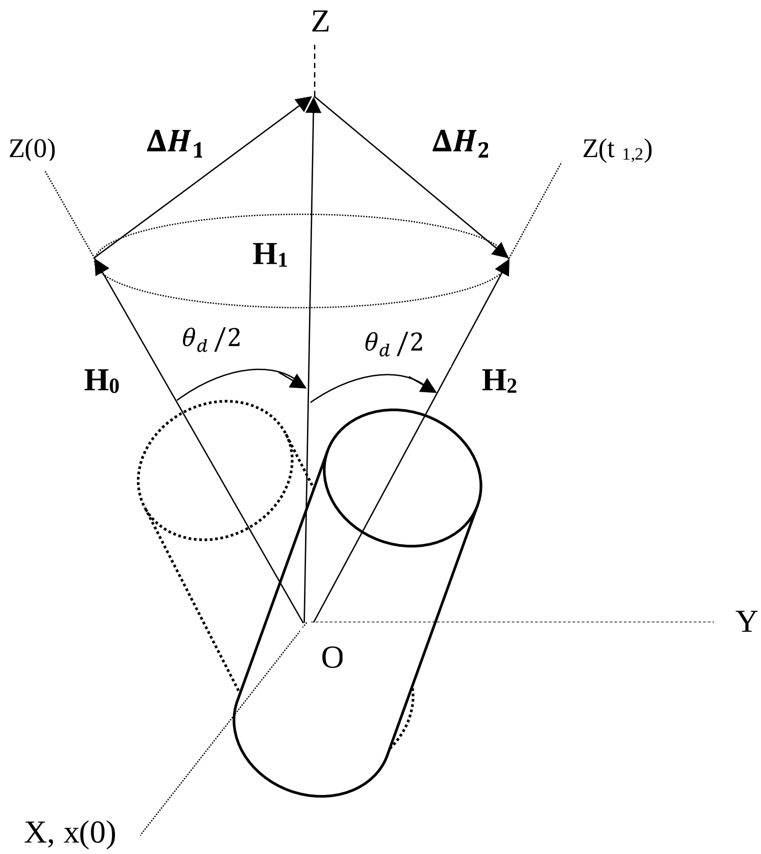


Figure 1.4 : Contrôle d'attitude optimal dans le temps d'un satellite axisymétrique stabilisé en rotation avec des propulseurs.

Parce que le cosinus d'un angle ne peut pas dépasser l'unité, cela implique que la précession et le spin inertiel ne peuvent être synchronisés que pour les corps avec $J_{xx} > 2J_{zz}$. L'équation (1.64) donne la plus grande déviation angulaire possible de l'axe de rotation (θ_d) pouvant être obtenue avec une paire donnée de propulseurs d'attitude et est obtenue lorsque $|\psi| = |\varphi| = \pi$. Puisque l'angle de nutation, $\beta = \theta_d / 2$, est déterminé purement par la grandeur de l'impulsion, sa valeur peut être différente de celle donnée en équation (1.64), auquel cas la déviation angulaire totale de l'axe de rotation est inférieure à 2β. D'après la discussion précédente, il est clair que pour une plus grande souplesse dans l'exécution des manœuvres axiales, plus d'une paire de propulseurs

Comme la valeur du couple appliqué pour chaque impulsion, M_y, est proportionnelle à tan (θ_d / 2), il en résulte qu'une modification de l'axe de rotation de $\theta_d = 180°$ serait infiniment coûteuse. Les manœuvres impulsives étant impossibles dans la pratique, il faut tenir compte du temps non nul, Δt, de la poussée du propulseur, ce qui conduit à un besoin moyen de couple du propulseur $M_y = \Delta H_1 / \Delta t$. En simulant la réponse du satellite suite d'une poussée de propulseur, il faut soigneusement modéliser la variation réelle du couple du propulseur avec le temps. Il existe deux manières distinctes de simuler le bang-bang, la réponse impulsionnelle d'un satellite axisymétrique stabilisé en spin :

a) calculer les composantes de vitesse angulaire de précession, ω_x, ω_y, dues aux impulsions appliquées, et les utiliser comme condition initiale pour simuler le mouvement sans couple, ou

b) simuler directement la réponse à les impulsions appliquées en résolvant les équations de mouvement avec un couple non nul. Parmi ces deux facteurs, le premier est une réponse initiale décrivant la précession entre les deux impulsions, tandis que le second inclut la réponse impulsionnelle provoquée par les impulsions elles-mêmes. Puisque $\theta \neq 0$ pour la première méthode, nous pouvons utiliser les angles d'Euler 3-1-3 pour une simulation d'attitude non singulière. Cependant, la seconde approche commence par un angle de nutation nul avant l'application de la première impulsion ; ainsi, la représentation d'angle d'Euler 3-1-3 est inappropriée ; à la place, la représentation de l'angle Euler 3-2-1 doit être utilisée dans (b). Les équations cinématiques du mouvement en termes des angles Euler (ψ) 3, (θ) 2, (φ) 1 sont facilement dérivées en utilisant les méthodes du Annexe A :

$$\begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} = \frac{1}{cos\theta} \begin{pmatrix} 0 & sin\phi & cos\phi \\ 0 & cos\phi\, cos\theta & -sin\phi\, cos\theta \\ 1 & sin\phi\, sin\theta & cos\phi\, sin\theta \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \tag{1.65}$$

Ici, nous employons le vecteur de moment cinétique initial, H_0, pour qu'il soit l'axe d'inertie, OZ. Par conséquent, l'angle de nutation, β, est donné par

$$\cos\beta = K.k = \cos\theta \cos\phi \tag{1.66}$$

Qui détermine β uniquement, comme $\beta \leq \pi$. Cependant, dans ce cas, l'angle de nutation, β, désigne l'écart total de l'axe de rotation par rapport à sa position initiale (plutôt que l'écart par rapport au moment cinétique intermédiaire H_1 de la représentation de l'angle Euler 3-1-3 représenté à la figure 1.4. Nous avons vu précédemment qu'une déflexion de 180° de l'axe de rotation nécessite une amplitude d'impulsion infinie, ce qui est pratiquement impossible. Par conséquent, nous simulons nécessairement une réponse impulsionnelle avec $\beta < \pi$, pour laquelle les angles Euler 3-2-1 sont non singuliers

I-6-3- Manœuvres asymétriques de satellites par les propulseurs d'attitude

Malheureusement, la discussion précédente sur le contrôle optimal du bang-bang dans le temps ne peut pas s'étendre à une rotation simultanée et arbitraire d'un satellite asymétrique autour de deux ou trois axes. Cela est dû à la nature non linéaire des équations asymétriques d'Euler lorsque plus d'une vitesse angulaire est différente de zéro, auquel cas la superposition linéaire des solutions ne s'applique pas et le contrôle optimal dans le temps n'est pas possible sous une forme fermée. Cependant, si les rotations sont faibles, les équations d'Euler sont rendues linéaires par approximation et l'approche bang-bang est valide. Une méthode pratique pour traiter les grandes rotations à plusieurs axes, et de repos au repos, consiste à les appliquer de manière séquentielle. Pour une telle approche, les propulseurs d'attitude autour des deux axes principaux sont capables de produire une orientation arbitraire (telle que les représentations d'attitude d'angle Euler 3-1-3). Bien entendu, on peut choisir de fixer des propulseurs d'attitude autour des axes mineurs et principaux, excluant ainsi la rotation instable des axes intermédiaires. Nous avons déjà couvert les rotations sur un seul axe ; ainsi, la modélisation de rotations multiples, séquentielles et à axe unique ne nécessite aucune discussion supplémentaire.

Il existe des algorithmes avancés de contrôle en boucle fermée (Tewari) permettant de dériver des couples de propulseurs pour une large et rapide manœuvre d'engins spatiaux asymétriques. La simulation de la réponse d'attitude d'un satellite à de tels couples avec des rotations simultanées, multi-axes, est donc essentielle. L'intégration numérique des équations d'Euler couplées non linéaires à des équations différentielles appliquées par couple et cinématique est possible avec Runge – Kutta et d'autres méthodes itératives.

I-7- Vaisseau spatial avec des rotors

Comme l'utilisation fréquente du système de contrôle de réaction du propulseur d'attitude (RCS) pour la stabilisation et le contrôle, implique une dépense de carburant importante, la plupart des satellites stabilisés à trois axes utilisent en outre des dispositifs à échange de moment (momentum exchange devices : ME D), qui consistent en des rotors capables d'exercer un couple interne sur le satellite autour de chaque axe principal. Comme le MED est entraînés en rotation par des moteurs électriques qui tirent leur puissance de panneaux solaires du satellite, ils fournissent un moyen sans carburant de contrôle d'attitude dans le fonctionnement normal du satellite. Nous allons considérer ici comment un satellite avec MED peut être modélisé et simulé avec précision.

Considérons un engin spatial dont la matrice d'inertie principal J et la vitesse angulaire sont résolus dans les axes principaux $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$. Considérons maintenant un rotor avec matrice d'inertie, J_r, autour des axes principaux du satellite, tournant à une vitesse angulaire par rapport au satellite, $\omega_r = (\omega_{rx}, \omega_{ry}, \omega_{rz})^T$, également résolu dans le repère principal du satellite Le moment cinétique net du système (satellite et rotor) est le suivant:

$$H = J\omega + J_r(\omega + \omega_r) \tag{1.67}$$

dont la dérivée temporelle est nulle (car aucun couple externe n'agit sur le système), et s'écrit comme suit :

$$\frac{dH}{dt} = (J + J_r)\frac{d\omega}{dt} + \frac{dJ}{dt}\omega + J_r\frac{d\omega_r}{dt} + \frac{dJ_r}{dt}\omega_r = 0 \tag{1.68}$$

Ou

$$J\frac{\partial\omega}{\partial t} + S(\omega)J\omega = -J_r\left[\frac{\partial(\omega+\omega_r)}{\partial t} + S(\omega)\omega_r\right] - S(\omega+\omega_r)J_r(\omega+\omega_r) \tag{1.69}$$

où S (ω) est la fonction de matrice asymétrique de ω donnée par l'équation (1.19). En Comparaison avec les équations d'Euler pour un corps rigide [équation (1.32)], on voit dans l'équation (1.69) que le satellite peut être traité comme un corps rigide, les termes du côté droit étant traités comme le couple appliqué par le rotor sur le satellite. Si plusieurs rotors se trouvent dans le satellite, le côté droit de l'équation (1.69) est remplacé par une sommation des termes correspondants de tous les rotors. L'équation (1.69) est une équation générale pour la rotation d'un satellite avec un rotor dont la vitesse angulaire peut changer dans le temps en raison d'une vitesse de rotation variable ainsi que d'un axe de spin variable. Si l'axe de rotation du rotor ne change pas par rapport au satellite, le moment cinétique du rotor autour d'un axe principal donné est directement échangé avec celui du satellite en changeant simplement la vitesse de rotation du rotor. Un tel rotor dont l'axe est fixe par rapport au satellite est appelé roue de réaction lorsqu'il est utilisé dans un satellite non stabilisé. Quand un grand rotor est utilisé pour contrôler un satellite axisymétrique stabilisé par rotation, son axe étant aligné avec l'axe de rotation du satellite, la configuration est appelée un satellite à double rotation. Alternativement, si la vitesse angulaire du rotor par rapport au satellite est fixe, mais que son axe est capable de basculer par rapport au satellite, appliquant ainsi un couple gyroscopique issu du dernier terme à droite de l'équation (1.69) le rotor peut être utilisé pour contrôler l'attitude d'un satellite asymétrique non pivotant. Un tel rotor avec un axe de rotation variable est appelé gyroscope à moment de contrôle (control moment gyroscope : CMG). Dans certains satellites avancés, le rotor peut avoir une vitesse de rotation variable et un axe variables et il est appelé gyroscope à contrôle de vitesse variable (variable-speed control moment gyroscope : VSCMG). Par conséquent, un VSCMG est le dispositif d'échange de moment le plus général, et les modèles pour une roue de réaction et un CMG peuvent être facilement dérivés en négligeant simplement certains termes spécifiques du côté droit de l'équation (1.69). Nous examinerons brièvement comment un VSCMG et un satellite à double rotation peuvent être modélisés de manière appropriée.

I-7-1- Gyroscope à contrôle de vitesse à vitesse variable

Considérons un rotor axisymétrique à vitesse de rotation variable, monté au centre de masse d'un satellite rigide de telle sorte que son axe de rotation soit libre de tourner dans toutes les directions (figure 1.5). Un tel rotor est appelé un gyroscope à cardan, et la disposition qui lui permet de tourner librement autour du satellite est appelé cardan. Le cardan peut être réalisé soit en utilisant des supports de rotor mécaniques articulés autour des trois axes principaux du satellite (appelés cardans), soit en utilisant une suspension magnétique. Parmi ceux-ci, le premier est plus couramment utilisé. Un moteur est utilisé pour appliquer le couple nécessaire sur le rotor VSCMG par rapport au satellite sur chaque axe principal, afin de déplacer le rotor d'une manière souhaitée, contrôlant ainsi le mouvement du satellite. Soit M_r le couple appliqué sur le rotor. Nous pouvons alors écrire les équations de mouvement du rotor par rapport au satellite comme suit :

$$M_r = J_r \frac{\partial \omega_r}{\partial t} + S(\omega_r) J_r \omega_r \tag{1.70}$$

Où S (ω_r) est la forme sous matrice asymétrique de ω_r donnée par l'équation (1.19). Le mouvement du satellite est décrit par les équations dynamiques, de l'équation (1.69) et les équations cinématiques représentant l'attitude. L'attitude instantanée des principaux axes de satellite pouvant être arbitraire, nous utiliserons la représentation non singulière du quaternion, q, q4 (Annexe. A). La cinématique d'attitude du satellite en termes de quaternion est donnée par (Annexe. A)

$$\frac{d\{q,q_4\}^T}{dt} = \frac{1}{2}\Omega\{q(t),q_4(t)\}^T \qquad (1.71)$$

Où Ω est la matrice asymétrique des composantes de vitesse angulaire suivante :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & -\omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.72)$$

Pour la simulation générale d'une manœuvre d'attitude, les équations (1.69), (1.70) et (1.71) doivent être intégrés dans le temps, avec des conditions initiales données, ω (0), ω_r (0) et q (0), q_4 (0) et un profil de couple moteur prescrit , M (t). En outre, la matrice d'inertie du rotor, J_r, qui dépend de l'orientation du rotor par rapport au satellite, doit être connue au début de la manœuvre.

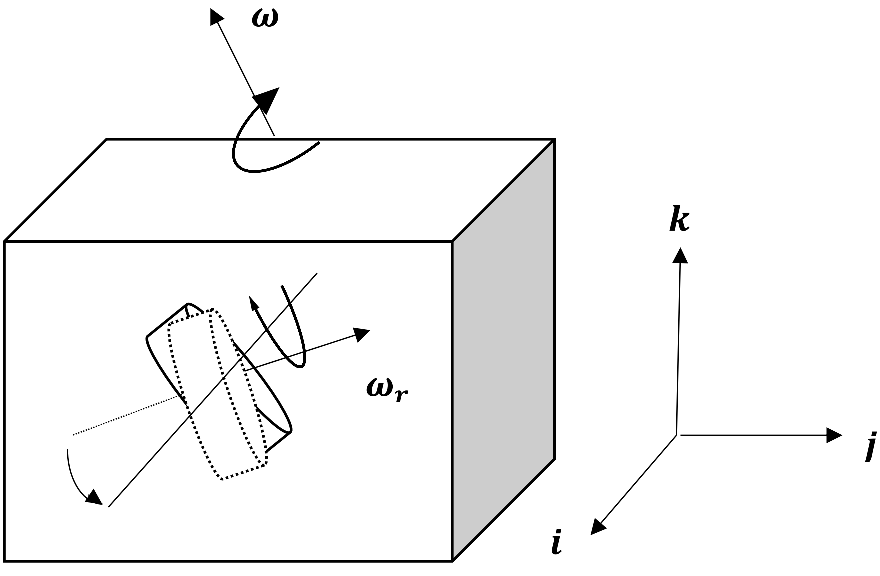


Figure 1.5 : Un satellite avec un VSCMG.

I-7-2- Satellite à deux spins

Souvent, les satellites doivent avoir une forme allongée. En effet, un satellite oblong est bien adapté aux longs emplacements de charge utile dans les lanceurs. Comme nous l'avons vu précédemment, le spin autour du petit axe est instable en raison de la dissipation d'énergie interne. Cependant, en utilisant un rotor dans une configuration à double rotation, le satellite oblong peut être stabilisé en rotation autour de son axe de symétrie (mineur). Une telle approche est couramment employée dans les satellites de communications stabilisés par spin. Considérons un engin spatial oblong avec un grand rotor autour de son axe de symétrie et une plate-forme sur laquelle une charge utile de communication est montée (figure.1.7). Il est nécessaire que la plate-forme tourne très lentement (généralement la vitesse de rotation de la planète par rapport à l'orbite), ω_p, de sorte que les antennes de communication soient toujours dirigées vers la station de réception. Le moment cinétique net de la configuration à double spin en présence d'une perturbation latérale, ω_x, ω_y, est obtenu à partir de l'équation (1.67) à être :

$$H = \left[J_p \omega_p + J_r\left(\omega_p + \omega_r\right)\right]k + J_{xy}(\omega_x i + \omega_y j) \tag{1.73}$$

Où J_p est le moment d'inertie de la plate-forme autour de l'axe de rotation, J_r est le moment d'inertie du rotor autour de l'axe de rotation, et J_{xy} est le moment d'inertie du système total (plate-forme et rotor) autour de l'axe latéral (majeur) axe. L'énergie cinétique de rotation du système peut être exprimée comme suit :

$$T = \frac{1}{2}\left(J_p + J_r\right)\omega_p^2 + \frac{1}{2}J_r\omega_r^2 + J_r\omega_r\omega_p + \frac{1}{2}J_{xy}\omega_{xy}^2 \tag{1.74}$$

Où $\omega_{xy}^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2$. Bien que le moment cinétique net soit conservé, l'énergie cinétique de rotation n'est pas conservée en raison de la dissipation d'énergie interne causée par le frottement entre la plate-forme et le rotor et d'agitation des propergols dans le RCS. La dissipation interne de l'énergie cinétique de la plate-forme est différente de celle du rotor, et chacun doit être conçu comme un corps rigide séparé avec différents couples de frottement. Le taux de variation de l'énergie cinétique de rotation totale est donné par

$$\dot{T} = J_p\omega_p\dot{\omega}_p + J_r\left(\omega_p + \omega_r\right)\left(\dot{\omega}_p + \dot{\omega}_r\right) + J_{xy}\omega_{xy}\dot{\omega}_{xy} \tag{1.75}$$

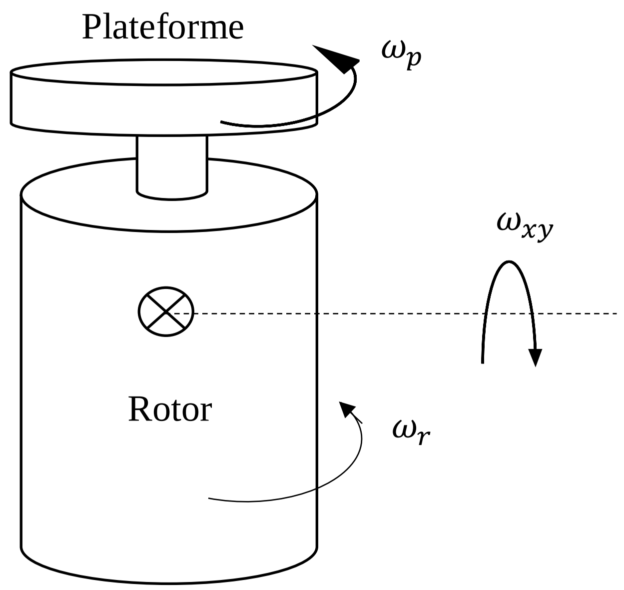


Figure 1.6 : Un satellite à double rotation

Notant que le taux de variation de la grandeur du moment cinétique est nul, nous avons ceci de l'équation (1.73) :

$$H\dot{H} = \left[J_p\omega_p + J_r\left(\omega_p + \omega_r\right)\right]\left[J_p\dot{\omega}_p + J_r\left(\dot{\omega}_p + \dot{\omega}_r\right)\right] + J_{xu}^2\omega_{xy}\dot{\omega}_{xy} = 0 \quad (1.76)$$

À partir duquel le terme relatif au taux de variation de l'énergie cinétique par précession peut être calculé comme suit :

$$J_{xy}\omega_{xy}\dot{\omega}_{xy} = -\frac{1}{J_{xy}}\left[J_p\omega_p + J_r\left(\omega_p + \omega_r\right)\right]\left[J_p\dot{\omega}_p + J_r\left(\dot{\omega}_p + \dot{\omega}_r\right)\right] \quad (1.77)$$

En substituant l'équation (1.77) dans l'équation (1.75) nous aurons :

$$T^{\dot{}} = \dot{T}_p + \dot{T}_r \quad (1.78)$$

Où $\dot{T}_p$ et $\dot{T}_r$ représentent respectivement le taux de variation de l'énergie cinétique de la plate-forme et du rotor, donné par

$$\dot{T}_p = J_p\left[\omega_p - \frac{1}{J_{xy}}\left\{J_p\omega_p + J_r\left(\omega_p + \omega_r\right)\right\}\right]\dot{\omega}_p \quad (1.79)$$

Et

$$\dot{T}_r = J_r \left[\omega_r + \omega_p - \frac{1}{J_{xy}} \{ J_p \omega_p + J_r (\omega_p + \omega_r) \} \right] (\dot{\omega}_p + \dot{\omega}_r) \tag{1.80}$$

Les deux $\dot{T}_p$ *et* $\dot{T}_r$ sont négatifs, en raison de la dissipation d'énergie interne due au frottement et à l'agitation des liquides. Cependant, la stabilité du mouvement dépend de la grandeur relative de ces termes de dissipation, afin que l'énergie cinétique de la précession soit réduite à zéro. Par conséquent, pour la stabilité, il est crucial que le rotor fournisse un puits d'énergie pour le mouvement de précession, c'est-à-dire

$$J_{xy} \omega_{xy} \dot{\omega}_{xy} = (\dot{T}_p - J_p \omega_p \dot{\omega}_p) + [\dot{T}_r - J_r (\omega_p + \omega_r)(\dot{\omega}_p + \dot{\omega}_r)] < 0 \tag{1.81}$$

Ou

$$-J_{xy} \omega_{xy} \dot{\omega}_{xy} = [J_p \omega_p + J_r (\omega_p + \omega_r)] \left[\frac{J_p}{J_{xy}} \dot{\omega}_p + \frac{J_r}{J_{xy}} (\dot{\omega}_p + \dot{\omega}_r \right] > 0 \tag{1.82}$$

Ce qui conduit à l'exigence

$$J_p \dot{\omega}_p + J_r (\dot{\omega}_p + \dot{\omega}_r) > 0 \tag{1.83}$$

Parce que $\omega_p > 0$ *et* $\omega_r > 0$. Puisque ω_p est petit, on peut négliger les termes du second ordre qui l'impliquent et sa dérivée temporelle, ce qui conduit aux approximations :

$$\begin{aligned} \dot{T}_p &\approx -\frac{J_p J_r}{J_{xy}} (\omega_p + \omega_r) \dot{\omega}_p \\ \dot{T}_r &\approx J_r \left(1 - \frac{J_r}{J_{xy}}\right) (\omega_p + \omega_r)(\dot{\omega}_p + \dot{\omega}_r) \end{aligned} \tag{1.84}$$

Il est à noter que les deux termes de dissipation d'énergie sont négatifs. Par conséquent, si le rotor a ($J_{xy} < J_r$), il résulte de l'équation (84) que $\dot{\omega}_p > 0$ *et* $\dot{\omega}_r > 0$. Pour un rotor avec ($J_{xy} > J_r$), et $\dot{\omega}_r < 0$. Ainsi, la plate-forme et un rotor avec ($J_{xy} < J_r$) accélèrent, tandis qu'un rotor avec ($J_{xy} > J_r$) ralentit en présence de la perturbation latérale, ω_{xy}. Ainsi, l'exigence de stabilité de l'équation (83) est rencontrée inconditionnellement par un rotor avec ($J_{xy} < J_r$), Toutefois, dans la pratique, le rotor est généralement avec ($J_{xy} > J_r$), pour lequel la stabilité exige que :

$$(J_p + J_r)\, \dot{\omega}_p > -J_r \dot{\omega}_r \tag{1.85}$$

En termes de dissipation d'énergie, l'exigence de stabilité pour un rotor avec ($J_{xy} > J_r$), est obtenue en éliminant $\dot{\omega}_p$ *et* $\dot{\omega}_r$ des équations. (1.84) et (1.85), en faisant l'hypothèse $\omega_p \ll \omega_r$:

$$-\dot{T}_p > -\dot{T}_r \frac{J_r}{J_{xy} - J_r} \tag{1.86}$$

Par conséquent, pour une configuration stable d'un satellite avec ($J_{xy} > J_r$), avec une faible vitesse de rotation couplée à un rotor avec ($J_{xy} > J_r$), la plate-forme doit perdre de l'énergie cinétique à une vitesse supérieure à celle du rotor. En raison de la Frottement entre le rotor et la plate-forme, la vitesse de rotation du rotor diminue et la plate-forme accélère même en l'absence de perturbation latérale. Si elles ne sont pas corrigées, le rotor et la plate-forme finiront par tourner au même rythme, ce qui entraîne une configuration instable. Pour éviter cela, un moteur est utilisé pour appliquer continuellement un petit couple au rotor. La plupart des satellites de communication utilisent une configuration à double rotation. Une application récente et intéressante de la stabilisation à double spin a été réalisée dans le vaisseau spatial interplanétaire Galileo de la NASA. Ce vaisseau spatial possédait une plate-forme inertielle (non pivotante) pour effectuer des communications avec la Terre pendant son voyage de six ans à Jupiter, tandis que son rotor, sur lequel plusieurs capteurs scientifiques et de navigation étaient montés, tournait à trois tours par minute.

En résumé, un satellite avec ($J_{xy} > J_r$), est stabilisé inconditionnellement autour de son axe de rotation mineur par un rotor avec ($J_{xy} < J_r$),. Cependant, si un rotor oblong doit être utilisé dans le même but, l'engin spatial doit perdre son énergie cinétique à un taux supérieur à celui du rotor. Pour modéliser la dynamique d'un satellite à double spin par des équations différentielles, il faut appliquer la conservation du moment cinétique (équation (1.68)) au système, ainsi que les équations d'Euler pour le rotor seul, en tenant compte de la dissipation d'énergie interne par frottement et glissement.

I-7-3- Satellite à gradient de gravité

Un satellite en orbite basse altitude peut générer un couple important en raison de la variation de la force de gravité le long de ses dimensions, appelée couple de gradient de gravité. Un tel couple est considéré comme négligeable en vol atmosphérique, en raison des moments aérodynamiques beaucoup plus importants. Cependant, dans l'espace, le couple du gradient de gravité est suffisamment important pour exercer une influence stabilisante (ou déstabilisante) sur un satellite. La grandeur du gradient de gravité peut être augmentée en utilisant un long vecteur dans la direction souhaitée. Pour un gros vaisseau spatial (comme la station spatiale) en orbite basse, le couple de gradient de gravité est capable de submerger le système de contrôle d'attitude au fil du temps s'il n'est pas correctement compensé. C'était une raison importante pour laquelle la mission Skylab a pris fin prématurément dans les années 1970. Nous allons modéliser la dynamique du gradient de gravité et effectuer une analyse de stabilité linéaire pour déterminer les attitudes stables des satellites. Considérons un satellite dans une orbite basse et circulaire. Le couple de gradient de gravité subi par le satellite peut être écrit comme suit :

$$M_g = \int \rho \times g \, dm \tag{1.87}$$

Où ρ localise une masse élémentaire, dm, par rapport au centre de masse de satellite (figure.1.7). L'accélération due à la gravité, g, est approximée par la loi de gravitation de Newton pour une planète sphérique, et peut être développée en utilisant le théorème binomial comme suit :

$$\begin{aligned} g &= -GM\frac{r+\rho}{|r+\rho|^3} \\ &= \frac{GM(r+\rho)}{r^3}\left(1 - 3\frac{r.\rho}{r^2} + \cdots\right) \end{aligned} \tag{1.88}$$

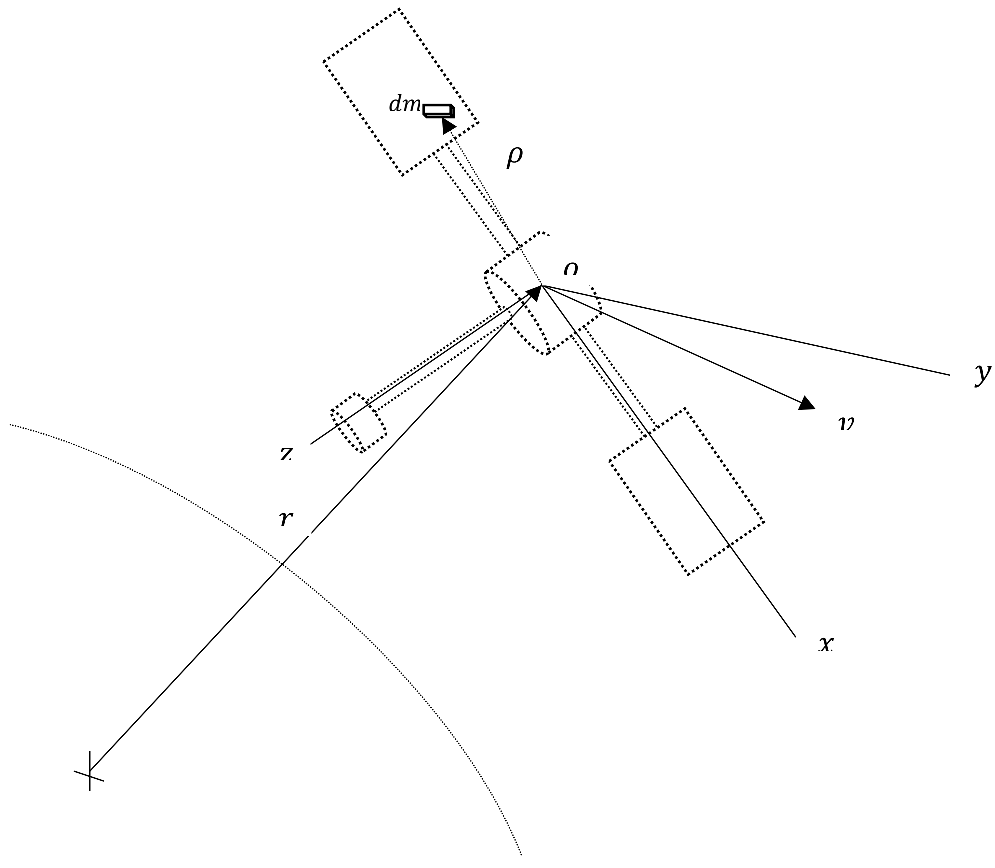


Figure 1.7 : Satellite à gradient de gravité avec axes principaux oxyz

Où M désigne la masse planétaire. Ignorant les termes d'ordre secondaire et supérieur dans l'équation (1.88), et réalisant l'intégrale de l'équation (1.87) en termes de composantes de r = Xi + Yj + Zk et ρ = xi + yj + zk , (où i, j, k sont les axes principaux du corps du satellite), nous avons :

$$M_g = M_{gx}i + M_{gy}j + M_{gz}k \tag{1.89}$$

Avec

$$\begin{aligned} M_{gx} &= \tfrac{3GM}{r^5} YZ(J_{zz} - J_{yy}) \\ M_{gy} &= \tfrac{3GM}{r^5} XZ(J_{xx} - J_{zz}) \\ M_{gz} &= \tfrac{3GM}{r^5} XY(J_{yy} - J_{xx}) \end{aligned} \tag{1.90}$$

En substituant les composantes du couple de gradient de gravité dans les équations d'Euler, équation (1.19), nous avons :

$$\begin{aligned} J_{xx}\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z(J_{zz} - J_{yy}) &= \tfrac{3GM}{r^5} YZ(J_{zz} - J_{yy}) \\ J_{yy}\dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z(J_{xx} - J_{zz}) &= \tfrac{3GM}{r^5} XZ(J_{xx} - J_{zz}) \\ J_{zz}\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y(J_{yy} - J_{xx}) &= \tfrac{3GM}{r^5} XY(J_{yy} - J_{xx}) \end{aligned} \tag{1.91}$$

Les équations du mouvement, équation (1.91), possèdent trois attitudes d'équilibre distinctes pour lesquelles deux des composantes de vitesse angulaire disparaissent et la troisième est égale à la vitesse orbitale, n. Par conséquent, l'un des axes principaux du satellite doit être perpendiculaire au plan orbital dans l'attitude d'équilibre. Soit j l'axe principal normal au plan de l'orbite. Afin d'étudier la stabilité des points d'équilibre, nous considérons l'attitude d'équilibre général où les deux axes principaux restants se situent respectivement dans la direction de la vitesse(i) et dans la direction du centre de la planète (k). Les grandeurs relatives des moments d'inertie principaux, J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}, détermineraient la stabilité des points d'équilibre. Nous considérerons de petites perturbations provenant de l'attitude d'équilibre général, représentées par les angles Euler 3-2-1 ψ (lacet), θ (tangage) et φ (roulis), respectivement.

Soit l'attitude d'équilibre du satellite donnée par les axes du corps non perturbés, c'est-à-dire : i^e , j^e, k^e. La vitesse angulaire inertielle de la triade non perturbée, c'est-à-dire i^e, j^e, k^e, résolue dans les axes instantanés du satellite, i, j, k, après une petite perturbation de l'attitude,Φ,θ, ψ, est $nj^e = n\psi i + nj - n\Phi k$, tandis que la perturbation de la vitesse angulaire de l'attitude d'équilibre est donnée par $\dot{\phi}i + \dot{\theta}j + \dot{\psi}k$. Par conséquent, la vitesse angulaire inertielle du satellite devient :

$$\omega = (\dot{\emptyset} + n\psi)i + (n + \dot{\theta})j + (\dot{\psi} - n\phi)k \tag{1.92}$$

Le vecteur position résolu dans le repère du satellite est

$$\Gamma = \mathrm{r}(-\sin\theta i + \sin\phi\cos\theta j + \cos\phi\cos\theta k \tag{1.93}$$

Ce qui conduit à $X \approx -r\theta$, $Y \approx r\varphi$ et $Z \approx r$, pour la petite perturbation qui est substituée dans les équations d'Euler, équation (1.91), avec la vitesse angulaire, équation (1.92) donne les équations linéarisées suivantes du mouvement de rotation :

$$\ddot{\phi} = \frac{(J_{xx}-J_{yy}+J_{zz})n}{J_{xx}}\dot{\psi} - \frac{4n^2(J_{yy}-J_{zz})}{J_{xx}}\phi \tag{1.94}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{3n^2(J_{xx}-J_{zz})}{J_{yy}}\theta \tag{1.95}$$

$$\ddot{\psi} = -\frac{(J_{xx}-J_{yy}+J_{zz})n}{J_{zz}}\dot{\phi} - \frac{n^2(J_{yy}-J_{xx})}{J_{zz}}\psi \tag{1.96}$$

De toute évidence, le mouvement de tangage linéaire à faible perturbation est découplé de la dynamique de roulis et peut être résolu sous une forme fermée. Si $J_{xx} > J_{zz}$, le mouvement de tangage est une oscillation stable d'amplitude constante donnée par

$$\theta(t) = \theta(0)\cos n\sqrt{\frac{3(J_{xx}-J_{zz})}{J_{yy}}}t \tag{1.97}$$

Cette oscillation non amortie est appelée libration et nécessite un mécanisme d'amortissement actif, par exemple à travers une roue de réaction. La dynamique couplée du lacet-roulis, les équations. (1.94) et (1.96) (également appelée nutation) semble avoir l'équation caractéristique suivante :

$$s^4 + n^2(1 + 3j_x + j_x j_z)s^2 + 4n^4 j_x j_z = 0 \tag{1.98}$$

Avec

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{J_{yy}-J_{zz}}{J_{xx}} \\ j_z &= \frac{J_{yy}-J_{xx}}{J_{zz}} \end{aligned} \tag{1.99}$$

Pour la stabilité, toutes les racines, s, de l'équation caractéristique doivent avoir des parties réelles non positives, ce qui implique des valeurs réelles et négatives des deux solutions quadratiques, s^2, et conduit aux conditions de stabilité nécessaires et suffisantes suivantes :

$$\begin{gathered} 1 + 3j_x + j_x j_z \geq 4\sqrt{j_x j_z} \\ j_x j_z > 0 \end{gathered} \tag{1.100}$$

On peut montrer (Wertz) que pour un satellite à dissipation d'énergie interne, la seule attitude de gradient de gravité stable est celle avec $J_{yy} > J_{xx} > J_{zz}$, car il permet d'obtenir l'énergie cinétique la plus faible équation (1.100). Ainsi, le petit axe devrait pointer vers (ou vers l'extérieur) du centre de la planète, tandis que l'axe principal devrait se situer le long de l'orbite normale. Une telle attitude est adoptée pour la plupart des engins spatiaux asymétriques en orbite basse et constitue également l'attitude commune des lunes de notre système

I-8- Conclusion

Les équations de mouvement de rotation d'Euler régissent la dynamique de rotation des corps rigides et leur solution donne la vitesse angulaire à un instant donné. Outre les équations cinématiques, et les équations d'Euler décrivent complètement l'évolution de l'attitude d'un corps rigide sous l'influence d'un vecteur de couple variant dans le temps. Lorsqu'elles sont exprimées dans un repère satellite fixe, les équations d'Euler impliquent des moments constants et des produits d'inertie. Dans un repère principal fixe, les produits d'inertie disparaissent, produisant une matrice d'inertie diagonale. Le mouvement sans couple des engins spatiaux rigides est un exemple de manœuvres de rotation conservatrices, dans lequel à la fois le moment angulaire et l'énergie cinétique de rotation sont conservés. Alors que la rotation d'un satellite rigide autour d'un petit axe ou du grand axe est inconditionnellement stable. Un engin spatial semi-rigide tend toujours vers l'état d'équilibre avec l'énergie cinétique de rotation la plus faible (un spin pur autour du grand axe). Les manœuvres optimales en temps sont une méthode importante en boucle ouverte pour contrôler la rotation et l'attitude des engins spatiaux et se composent d'au moins d'une paire d'impulsions de couple convenablement synchronisées, (contrôle bang-bang). D'autres méthodes de stabilisation et de contrôle du mouvement des satellites sont l'utilisation des rotors (double rotation, roues de réaction et gyroscope à moment de contrôle), de gradient de gravité et de couples magnétiques.

Chapitre 2

Commande d’attitude par mode de glissement

II-1-Introduction

On présente dans ce chapitre une méthode de conception de système de contrôle pour les manœuvres d'attitude à trois axes de rotation d'un engin spatial rigide basé sur la commande par mode glissant.

La détermination des paramètres du contrôleur pour les systèmes non linéaires nécessite un grand temps de calcul et d'effort pour essayer et tester les performances du système. La plupart des travaux réalisés dans ce domaine ne visaient pas comment les paramètres du contrôleur peuvent être choisis. D'autres travaux les calculent par des essais. Nous présentons dans ce chapitre, une règle mathématique systématique pour calculer les paramètres précis de la commande avec une surface de glissement linéaire et pour tout état initial garantissant que le système atteint l'état désiré en temps fini. De plus le broutement est atténué en utilisant une technique de couche limite d'épaisseur variable, de manière à obtenir une performance globale élevée.

II-2- Description du système

Les équations du mouvement de l'attitude d’un satellite peuvent être divisées en deux parties : l’équation cinématique et l'équation dynamique du mouvement (Sidi).

II-2-1- Équations cinématiques du mouvement

La partie cinématique d'attitude d'un satellite peut être représentée en utilisant différents paramètres d'attitude, mais la représentation par les quaternions ne représente pas de singularité et elle est libre de la composante trigonométrique. Par conséquent, cette représentation est largement utilisée pour étudier le comportement d'attitude du satellite. La cinématique du modèle satellitaire est la partie qui exprime la relation entre l'attitude et les vitesses angulaires du satellite. Les équations cinématiques à travers la représentation du quaternion unitaire sont données comme suit :

$$\dot{q} = \frac{1}{2}\,\Xi(q)\omega \tag{2.1}$$

Ou,

$$\Xi(q) = \begin{bmatrix} q_4 I_{3x3} + [q_v \times] \\ -q_v^T q_v \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

I_{3x3} est la matrice d'identité et $[q_v \times]$ est une matrice carrée non symétrique exprimée par :

$$[q_v \times]=\begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Notons qu'un autre élément du quaternion d'attitude «q_4» est automatiquement déterminé à partir de l'équation :$q^T q = q_v^T q_v + q_4^2 = 1$

ω Est le vecteur de la vitesse angulaire du satellite représenté dans le repère satellite par rapport au repère inertiel.

II-2-2- Équation dynamique de mouvement

L'équation dynamique de l'attitude d'un satellite rigide est donnée par :

$$I\dot{\omega} = -[\omega \times]I\omega + u + d \tag{2.4}$$

Ou $\omega = [\omega_1\ \omega_2\ \omega_3]^T \in R^{3\times1}$ est la vitesse angulaire du satellite, $u = [u_1\ u_2\ u_3]^T \in R^{3\times1}$ est le vecteur de la commande, $d = [d_1\ d_2\ d_3]^T \in R^{3\times1}$ est le vecteur des perturbations bornées agissant sur le corps de satellite, et I est la matrice d'inertie.

Pour la simplicité, on met $f = -I^{-1}\big[[\omega \times]I\omega\big]$; $b = I^{-1}$

Donc,

$$\dot{\omega} = f + bu + d \tag{2.5}$$

II-2-3- Le système d'erreurs

Définissons le signal d'erreur par :

$$q_e(t) = q_v(t) - r(t) \tag{2.6}$$

En général, le suivi du comportement asymptotique de la loi de commande est plus pratique que celui qui utilise l'erreur initiale entre le système de référence et le système réel.

II-2-4- Détermination de la référence

La trajectoire de référence pour le quaternion d'attitude doit être déterminée. Pour ce faire, supposons que les états initial (q^0_{13}) et final (q^f_{13}) du quaternion sont donnés par :

$$q_{13}(t_0) = q^0_{13} \qquad \text{à}\ t = o,\ \ et \quad q_{13}(t_f) = q^f_{13} \qquad \text{à}\ \ t \rightarrow \infty$$

$$r(t) = q^0_{13} + (q^f_{13} - q^0_{13})(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{2.7}$$

Où,r $= [\, r_1\, r_2\, r_3]^T \in\ R^{\,3} \quad et\, \tau > 0$ est la constante du temps que nous devons sélectionner. Nous remarquons que les dérivées d'ordre supérieur de cette trajectoire de référence existent. Les dérivées temporelles du signal de référence sont :

$$\dot{r}(t) = (q^f_{13} - q^0_{13})(\frac{1}{\tau})e^{-t/\tau} \tag{2.8}$$

$$\ddot{r}(t) = (q^f_{13} - q^0_{13})(\frac{1}{\tau^2})e^{-t/\tau} \tag{2.9}$$

Avec $\omega_e = \omega - \omega_d$, ω_d est la vitesse angulaire désirée du satellite et elle est égal à zéro donc $\omega_e = \omega$. Par conséquent, l'équation dynamique de l'erreur est la même que celle dans l'équation (2.5). Alor le vecteur d'erreur d'état (q_e, ω) est envoyé au module du contrôle pour calculer le signal de commande.

L'objectif du contrôle est d'amener l'état du système (q, ω), de l'états initial (q (0), ω(0)) à l'états souhaité (final) (q^f, ω^f), tandis que la contrainte $|\omega| \leq \omega_{max}$ est satisfaite pendant la manœuvre d'attitude.

Hypothèse 1 : Dans les équations du modèle du satellite (2.1) et (2.5), le quaternion unitaire q et la vitesse angulaire du satellite ω sont obtenu par le contrôle par retour d'état.

Hypothèse 2 : la vitesse angulaire initiale du satellite est nulle.

II-3- Conception de la loi de commande d'attitude

La conception d'une loi de commande en mode glissant (SMC) implique la conception d'une surface de glissement qui représente la dynamique stable souhaitée et une loi de commande qui rend la surface de glissement conçu attractive (Bastoszewicz et zuk), (Young et Utkin). La trajectoire de phase d'un SMC peut être étudiée en deux parties, représentant deux modes du système. Les trajectoires commencent depuis une condition initiale donnée hors de la surface de glissement et tend vers la surface de glissement. C'est la phase d'atteinte ou de convergence et le système dans cette partie de la trajectoire est sensible aux perturbations. Quand le franchissement de la surface de glissement se produit, la phase de glissement commence (Young et Utkin) (Bastoszewicz et zuk). Dans cette phase les trajectoires sont insensibles aux incertitudes des paramètres et aux perturbations.

II-3-1- Conception de la surface de glissement

Une surface de glissement sous une forme vectorielle est définie comme suit :

$$s(t) = \dot{q}_e + c_1 q_e - c_0 \int q_e \, dt = 0 \tag{2.10}$$

Où c_1, c_2 sont des constantes réelle la surface de glissement,

Notons que $q_e = [q_{e1} \quad q_{e2} \quad q_{e3}]^T \epsilon \, R^{3\times1}$ représente le vecteur d'erreur

et $s = [s_1 \quad s_2 \quad s_3]^T \ \epsilon \, R^{3\times1}$la surface de glissement, divise l'espace d'état en deux parties (Bastoszewicz et zuk)

Nous supposons que la condition de glissement déterminée comme suit est satisfaite :

$$\frac{1}{2}\frac{d^2S}{dt^2} \leq -\eta|s|, \eta > 0 \tag{2.11}$$

Le contrôleur en mode glissant peut être construit à partir de l'équation vectorielle de la surface de glissement.

La commande en mode glissant est construite selon la condition $\dot{s} = 0$. Et, (d'après l'Annexe C), la forme finale de la commande en mode glissant et qui satisfait la condition de glissement de l'équation de glissement (2.11) est représentée sous la forme suivante, (Doruk)

$$u = \beta^{-1}[\ddot{r} - \alpha - c_1(\dot{q} - \dot{r}) - c_0(q - r) - k.sgn\,(s)] \tag{2.12}$$

Où : K est une matrice de gain carré du troisième ordre diagonale à déterminer, Sgn (s), représente le vecteur de la fonction de signe. α, β sont les paramètres définis dans l'équation

(26, Annexe C), et c_1, c_0 sont des matrices diagonales constantes, nous supposons que β^{-1} existe. Nous donnons :

$$\beta^{-1} = \frac{1}{q_4}\begin{bmatrix} q_4^2 + q_1^2 & q_3q_4 + q_2q_1 & q_3q_1 - q_2q_4 \\ -q_3q_4 + q_2q_1 & q_4^2 + q_2^2 & q_4q_1 + q_3q_2 \\ q_3q_1 + q_2q_4 & -q_4q_1 + q_3q_2 & q_4^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

II-3-2- Premier cas de sélection de la surface de glissement (pour $c_0 = 0$)

Le système (2.10) décrivant la surface de glissement montre clairement que si la constante c_0 est égal à zéro, on obtient une surface de glissement linéaire comme suit :

$$s(t) = \dot{q}_e + c_1 q_e = 0 \tag{2.13}$$

II-3-2-1- Conception de la loi de commande

La loi de commande en mode glissant est divisée en deux parties principales (Perruquetti et Barbot);

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_d(t) \tag{2.14}$$

Le premier élément du contrôleur proposé est :

$u_q(t) = [u_{1q} \quad u_{2q} \quad u_{3q}]^T$, qui rend la surface de glissement s (t) invariante et il est calculé en mettant $\dot{s}$ à zéro considérant que s (t) est nul.

La deuxième composante $u_d(t) = [u_{1d} \quad u_{2d} \quad u_{3d}]^T$, est un effort supplémentaire de contrôle qui force le quaternion d'attitude et la vitesse angulaire à atteindre la surface de glissement en un temps fini malgré les perturbations et il est calculé selon la loi d'atteinte constante (Bastoszewicz et zuk), (Slotine et Li) comme :

$$u_d = -K\, sgn(s) \tag{2.15}$$

Où, k est un vecteur de gain défini et positif

$$sign(s) = \begin{Bmatrix} 1 & for\ s > 0 \\ -1 & for\ s < 0 \end{Bmatrix}$$

À partir de l'équation (2.12), nous pouvons déterminer u_q (t) comme suit :

$$u_q(t) = \beta^{-1}[\ddot{r} - \alpha - c_1(\dot{q} - \dot{r})] \tag{2.16}$$

La loi de commande dans l'équation (2.12) et dans ce cas (c0 = 0) a deux paramètres de conception (c1, k) qui doivent être sélectionnés pour assurer la stabilité et de meilleures performances. La pente de la surface de glissement, c_1, est sélectionnée de telle sorte que le système lors de la phase de glissement soit stable. La plupart des études obtiennent les valeurs appropriées en essayant de nombreuses exécutions de l'algorithme. Et ce processus est répété chaque fois que l'erreur initiale est modifiée. Pour le contrôle d'attitude des engins spatiaux, ces paramètres devraient être connus en temps réel. L'algorithme proposé suggère une règle géométrique pour calculer la matrice de gain à rétroaction discontinue pour un contrôle en mode glissant rapide

II-4- Sélection des paramètres de la surface de glissement

II-4-1- Sélection du vecteur du gain de Feedback k pour ($c_0 = 0$)

Dans cette section, nous proposons une technique de commande par mode de glissement rapide, basée sur une surface de commutation linéaire. En fait, l'utilisation d'un signal k discontinu et suffisamment grand est nécessaire pour compléter la condition d'accessibilité en présence des perturbations, mais aussi faible que possible afin de limiter le broutement (chattering).

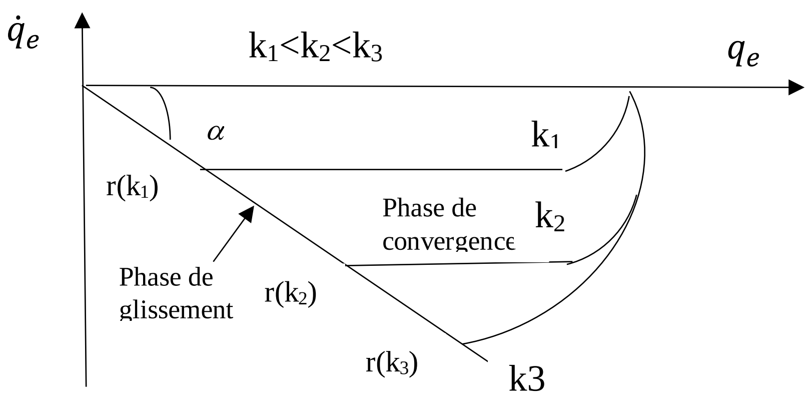


Figure 2.1 : Plan de phase de l'erreur pour différentes valeurs de k

Pour une faible valeur de k, les trajectoires d'état prennent plus de temps et un long chemin pour atteindre la surface de glissement, et inversement. Par conséquent, pour une pente de surface de glissement prédéterminée, il existe une certaine valeur de k qui réduit la phase d'atteinte, et diminue par conséquent le temps d'atteinte.

En substituant l'erreur de l'équation (2.6) dans le signal de commande u de l'équation (2.12), on obtient **:**

$$\ddot{q}_e - c_1\dot{q}_e = k\, sgn(s) \tag{2.17}$$

L'objectif est d'obtenir la valeur de k pour laquelle on aura le plus petit temps d'atteinte possible jusqu'à la surface de glissement. Pour cela, on peut voir sur la figure 1 que, pour une valeur prédéterminée de c_1, il existe une valeur du vecteur de gain k qui permet d'atteindre rapidement le temps, et réduit la phase d'atteinte.

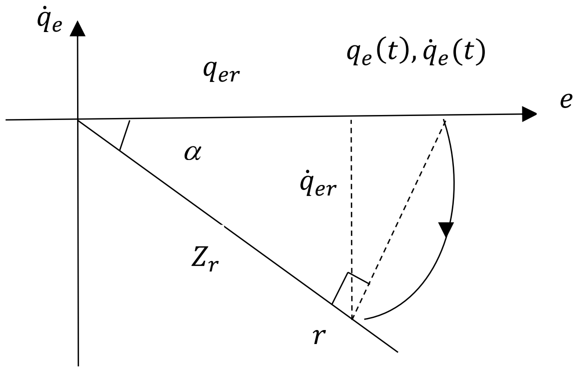


Figure 2.2 : Sélection de la position du point d'atteinte

On remarque que k dépend principalement de la position du point d'atteinte $(q_e(t), \dot{q}_e(t))$ et de la pente de la surface de glissement c_1, prise égale à 1. Donc, pour diminuer le temps de la phase de convergence (dans cette phase le système est cessible aux perturbations), le point d'atteinte " r " est sélectionné comme l'intersection entre une ligne perpendiculaire à la surface de glissement au point initial, pour diminuer le chemin de la trajectoire comme le montre la figure.2.2.

A partir de la figure 2.2, on peut distinguer quelques égalités :

$$Z_r = q_e(0)\cos\alpha \;;avec \quad \alpha = artg\,(c1) \tag{2.18}$$

$$q_{er} = Z_r \cos\alpha \ = q_e(0) cos^2\alpha \tag{2.19}$$

$$\dot{q}_{er} = Z_r \sin\alpha \ = q_e(t) \ \cos\alpha \ \sin\alpha \ = \frac{q_e(t)}{2} \sin 2\alpha \tag{2.20}$$

Si nous dérivons l'équation (2.19), nous obtenons :

$$\ddot{q}_{er} = q_e(0)(cos^2\alpha - sin^2\alpha) = q_e(0)\cos(\alpha) \tag{2.21}$$

Pour obtenir k, dans l'équation 2.17, on met : $\ddot{q}_e = \ddot{q}_{er}, \ et \ \ \dot{q}_e = \dot{q}_{er}$

II-4-2- La surface de glissement du second cas (pour $c_0 \neq 0$)

La surface de glissement est définie dans l'équation 2.10, dans ce cas, le signal de commande sera le même que celui de l'équation 2.12 et l'accès rapide n'est pas discuté dans ce cas.

II-5- Evitement du problème de chattering

Le phénomène de broutement (chattering) est généralement perçu comme un mouvement d'oscillation autour de la fonction de commutation. Ces vibrations du signal de commande peuvent causer des dommages au niveau des actionneurs. La méthode de la couche limite sert à réduire ce broutement ; L'idée de base est de remplacer la fonction de signe par une fonction de saturation sat (s / ε) (DAL et Teodorescu), définie comme suit :

$$sat(s_i, \varepsilon_i) = \begin{cases} 1 & pour \quad s_i > \varepsilon_i \\ \frac{s}{\varepsilon} & pour \quad |s_i| \le \varepsilon_i \\ -1 & pour \quad s_i < -\varepsilon_i \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3 \tag{2.22}$$

Plus la largeur de la couche limite est grande plus le signal de contrôle est lisse, cependant, dans ce cas ça ne conduit plus le système à l'origine mais à l'intérieur de la couche limite choisie. Une très petite épaisseur de la couche introduit à nouveau le phénomène de broutement. (Chyun-Chau) a présenté une méthode pour supprimer le phénomène de chattering tout en préservant la précision du contrôle et en économisant l'énergie. La loi de contrôle développée utilise la méthode de la couche limite d'épaisseur variable comme suit :

$$z = \sqrt{\omega^2 + (c1q_e)^2} \tag{2.23}$$

Ou z est appelé le vecteur de l'erreur, l'épaisseur de la couche limite est calculée comme suit :

$$\varepsilon = s_0 + \tan(\theta)\|z\| \tag{2.24}$$

Où (s_0, θ) sont des constantes positives de la conception. Plus la norme du vecteur d'erreur z est élevée, plus l'épaisseur de la couche limite est grande.

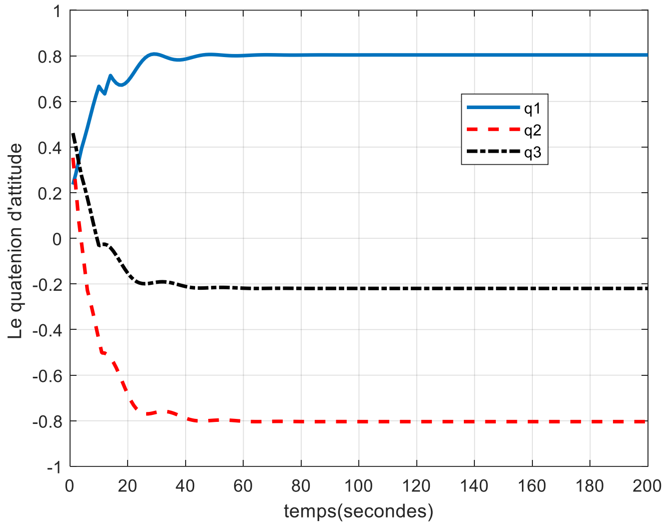
II-6- Résultat de simulation

Le problème du contrôle d'attitude d'un engin spatial rigide est simulé dans cette section, et les résultats sont présentés afin d'illustrer les performances de la loi de commande par mode glissant proposée dans ce chapitre. Considérons un satellite rigide avec la matrice d'inertie nominale I = [14.28 0 0 ; 0 15,74 0 ; 0 0 12,5] $kg.m^2$. L’orientation initiale du quaternion d’attitude est q(0)= [0.2 -0.4 0.5 0.742], (qui est équivalent aux angles d'Euler initiaux E (0) = [20 -15 10] deg), et le la valeur initiale de la vitesse angulaire est (0) = $[0, 0, 0]^T$ rad / s. L’attitude finale désirée est qf = $[0.8, - 0.8, -0.22, 0.5731]^T$

Le gain, k = [0.03992 0.03564 0.01563] requis pour diriger le satellite de la condition initiale de l'attitude à l'attitude souhaitée. La pente, c1 = [1 1 1]. En utilisant la fonction qui remplace la fonction signum, les signaux de contrôle ne sont pas perturbés. Les paramètres de conception de la couche limite sont $s_0 = 0.1k, \quad \theta = \frac{\pi}{10}$

Pour valider la loi de commande développée, les résultats de simulation sont comparés entre les deux cas de surface de glissement ; le premier cas avec une surface de glissante non linéaire et dans ce cas la sélection des paramètres n’est pas utilisée et le deuxième cas avec une surface de glissement linéaire et le paramètre sélectionné k. Les résultats de simulation de contrôleur en mode glissant sont comme suit :

II-6-1- Premier cas



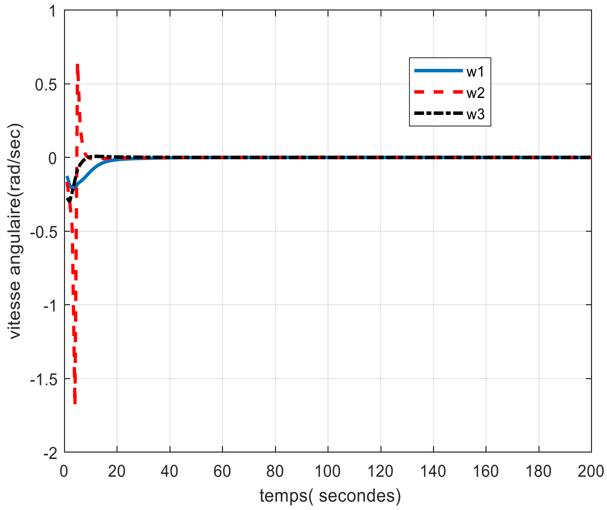


Figure 2.3 : Résultats de la simulation pour $c_0 \neq 0$

Dans ce cas, une surface de glissement non linéaire est utilisée pour concevoir la commande du système. L'attitude et la vitesse désirées sont atteintes, près de 40 secondes. Les performances du suivi asymptotique sont garanties

II-6-2-Deuxieme cas

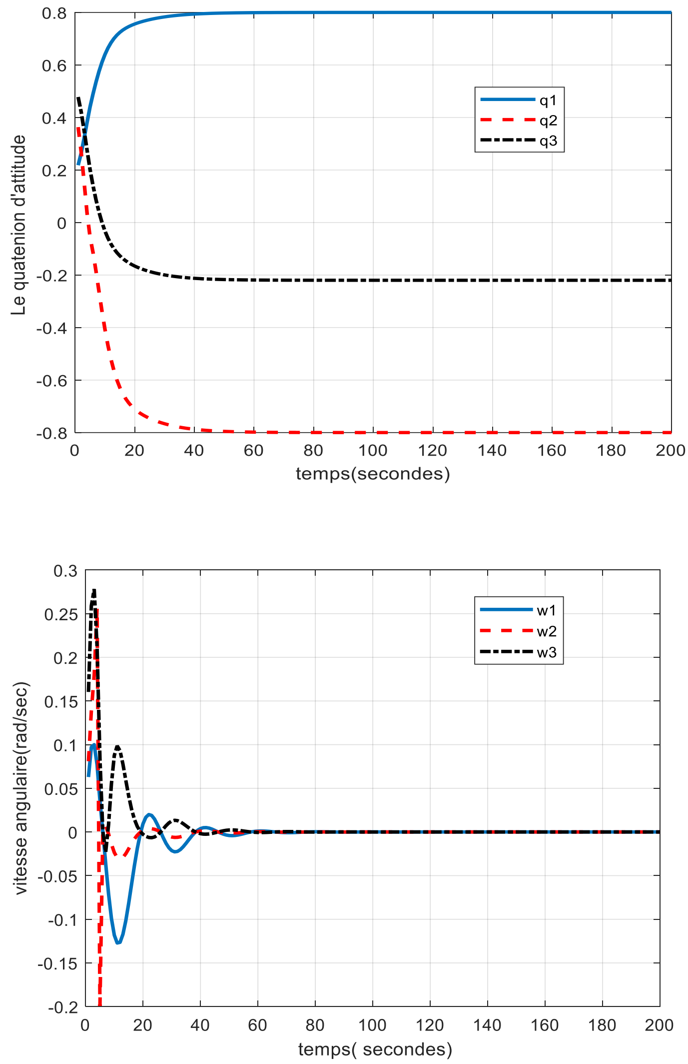
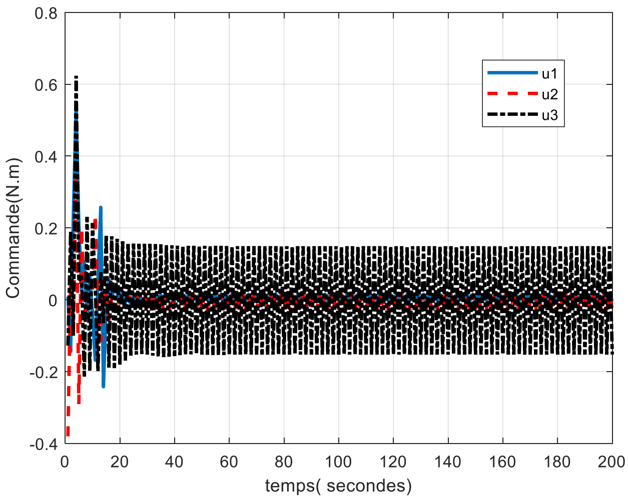


Figure-2.4 : Résultats de la simulation pour $c_0 = 0$

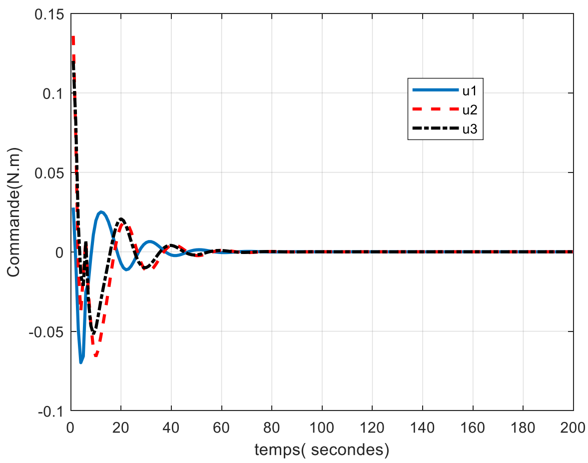
Dans le cas de c0 = 0, une surface de glissement linéaire est introduite pour le calcul de du signal de la commande. La réponse du quaternion d'attitude suit asymptotiquement le quaternion d'attitude finale. Les réponses de la vitesse angulaire convergent vers le zéro. La stabilité du système est garantie. Le quaternion d'attitude atteint son attitude désirée dans les environs de 30 s. Les performances du suivi asymptotique sont satisfaisantes.

En comparant les résultats de simulation obtenues pour les deux surfaces de glissement, on constate que la commande avec une surface linéaire et avec l'utilisation de la méthode de sélection du gain du contrôle k a donné un suivi de l'attitude de référence avec une réponse plus rapide, que celle avec une surface non linéaire, ce qui n'est pas possible dans le cas ordinaire. Ou l'utilisation des surfaces linéaires dans des lois de commande par mode de glissement est satisfaisante en termes de stabilité, toutefois, la dynamique imposée par ce choix est relativement lente et pour surmonter ce problème, on utilise des surfaces de glissement non linéaires. Mais avec la technique proposée on peut surmonter ce problème sans avoir besoin d'utiliser des fonctions de commutation non linéaires qui donne des commandes plus complexes.

Evitement du problème de chattering



(5-a)



(5-b)

Figure 2.5 : Le signal de la commande

L'effet de l'épaisseur de la couche limite est illustré à la figure 2.5. Pour le signal de commande de la figure (2.5-a), la fonction signum est utilisée, ce qui a donnée des fortes vibrations au niveau de la commande. L'utilisation de la méthode de couche limite d'épaisseur variable, a permet d'éliminer le broutement (chattering), et aussi le signal est plus lisse et ses valeurs extrêmes sont plus basses, comme indiqué sur la figure (2.5-b).

II-7- Conclusion

Dans ce chapitre, une loi de commande non linéaire en mode glissant pour les manœuvres de contrôle d'attitude d'un satellite, avec une sélection de la surface de glissante est conçue. Le vecteur du quaternion est adopté pour une représentation globale de l'attitude sans singularités ni fonctions trigonométriques.

La procédure de sélection des surfaces de glissement pour la commande proposée présente la possibilité de choisir entre deux surfaces de glissements selon la valeur d'une constante c0. Et puis d'introduire une méthode de sélection d'une autre variable k pour accélérer le mode de convergence vers la surface de glissement dans le cas de c0 = 0 (cas d'une surface linéaire) et ainsi réduire l'influence des perturbations extérieures sur le système. Dans cette procédure, les performances globales du système se sont améliorées par rapport au contrôleur en mode glissant classique utilisant une surface linéaire et ainsi diminuer la nécessité d'utiliser des surfaces non linéaires exigent plus de calculs ce qui rend la loi de commande plus complexe.

De plus, l'utilisation d'une couche limite d'épaisseur variable a permet d'éliminer le problème de broutement (chattering). La faisabilité et l'efficacité de la couche limite d'épaisseur variable ont été démontrées.

Chapitre 3

Contrôle d’attitude basé sur le PD

.

III-1-Introduction

L'intégration d'un correcteur de type dérivé dans un système permet d'améliorer la stabilité du système. Le contrôleur de type proportionnel dérivé (PD) basé sur un observateur, permet d'estimer avec précision le couple incertain dû aux perturbations et aux incertitudes des paramètres. Et peut être utilisé pour concevoir une loi de commande de type PD pour le système d'attitude

III-2- Modèle mathématique du système d'attitude du satellite rigide

Dans ce chapitre le vecteur de paramètres de Rodriguez modifiés $p = [p_1 \ \ p_2 \ \ p_3]^T$ sera utilisé pour représenter l'attitude du satellite. Alors, le modèle dynamique d'un satellite rigide peut être décrit comme suit (B. Xiao, Q. L. Hu et S. William) :

$$\dot{p} = G(p)\omega \tag{3.1}$$

$$J\dot{\omega} = -S(\omega)J\omega + u + d \tag{3.2}$$

Où $G(p) = \frac{1}{4}[(1 - p^T p)I_3 + 2p^x + 2pp^T]$, I_3 est la matrice d'identité 3×3, $\omega \in \mathcal{R}^3$ désigne la vitesse angulaire du satellite, la matrice définie et positive J $\in \mathcal{R}^3$ représente le moment d'inertie, u $\in \mathcal{R}^3$ représente le couple de commande total, d $\in \mathcal{R}^3$ représente le couple de perturbation incluant les perturbations internes et externes, et S (x) désigne une matrice asymétrique vérifiant S(x) y = x × y pour tout vecteur x, y $\in \mathcal{R}^3$. Ici, × désigne le produit vectoriel.

Supposons qu'un vecteur de paramètres de Rodriguez modifié $p_d \in \mathcal{R}^3$ désigne la trajectoire d'attitude à suivre recherchée. La vitesse angulaire souhaitée est supposée être $\omega_d \in \mathcal{R}^3$. Ensuite, la dynamique d'erreur de suivi d'attitude en boucle ouverte du satellite peut être décrite comme suit (B. Xiao, Q. L. Hu et S. William) :

$$\dot{p}_e = G\ (p_e)\omega_e \tag{3.3}$$

$$J\dot{\omega}_e = -S(\omega_e + R(p_e)\omega_d)J(\omega_e + R(p_e)\omega_d) + J[S(\omega_e)R(p_e)\omega_d - R(p_e)\dot{\omega}_d] + u + d \tag{3.4}$$

Où $p_e \in \mathcal{R}^3$ est l'erreur de suivi d'attitude. Elle dénote l'écart entre l'attitude du satellite p et l'attitude souhaitée p_d. $\omega_e \in \mathcal{R}^3$ est l'erreur de suivi de la vitesse angulaire, et est calculée comme suit : $\omega_e = \omega - C(p_e)\omega_d$. $C(p_e) \epsilon \mathcal{R}^3$ désigne la matrice de rotation. L'expression de $C(p_e)$ est donnée dans (Annexe. A) par :

$$C(p_e) = I + \frac{8S^2(p_e) - 4(1 - p_e^T p_e)S(p_e)}{(1 + p_e^T p_e)^2} \tag{3.5}$$

Il faut noter qu'en raison de la consommation du carburant et du mouvement de la charge utile à bord, la matrice d'inertie J serait incertaine dans la pratique. Par conséquent, J peut être noté $J = J_0 + \Delta J$. Ici, $J_0 \in \mathcal{R}^3$ est définie et positive représente l'inertie nominale du satellite, tandis que $\Delta J \in \mathcal{R}^3$ désigne la partie incertaine de l'inertie. Ensuite, la dynamique de l'équation (4) peut être réécrite comme :

$$J_0 \dot{\omega}_e = -S(\omega_e) J_0 \omega + \tau_u + u \tag{3.6}$$

Où $\tau_u = [\tau_{u1} \quad \tau_{u2} \quad \tau_{u3}]^T \in \mathcal{R}^3$ désigne l'incertitude des paramètres de la dynamique ou un couple incertain agissant sur la dynamique de l'erreur de suivi d'attitude, et il en résulte que :

$$\tau_u = d - S(C(p_e)\omega_d) J C(p_e)\omega_d - J S(C(p_e)\omega_d)\omega_e - S(C(p_e)\omega_d) J \omega_e - S(\omega_e)\Delta J \omega - \Delta J \dot{\omega}_e - J C(p_e)\dot{\omega}_d \tag{3.7}$$

En regardant dans l'équation (3.7), on peut savoir que τ_u résulte du couple de perturbation d et des incertitudes de la matrice d'inertie J.

III-3- Formulation du problème

Pour réaliser le contrôle d'attitude du satellite même en présence des incertitudes de l'inertie et d'un couple perturbateur, une approche de commande de type proportionnel-dérivé (PD) sera présentée. L'architecture du système d'attitude en boucle fermée qui en résulte est illustrée à la figure 3.1. Dans cette approche, le contrôleur de type PD développé intègre deux efforts de contrôle : l'un est l'effort de la commande du PD en tant que puissance de contrôle de base, et l'autre est l'effort de contrôle de compensation pour compenser les incertitudes de la dynamique τ_u. Ce contrôle de compensation est synthétisé sur la base des informations estimées fournie par la loi d'estimation proposée. Cette loi d'estimation est conçue pour estimer exactement la dynamique incertaine τ_u. Ensuite, en utilisant les informations estimées, une loi de commande est synthétisée pour obtenir une convergence asymptotique globale de l'erreur de suivi de la trajectoire.

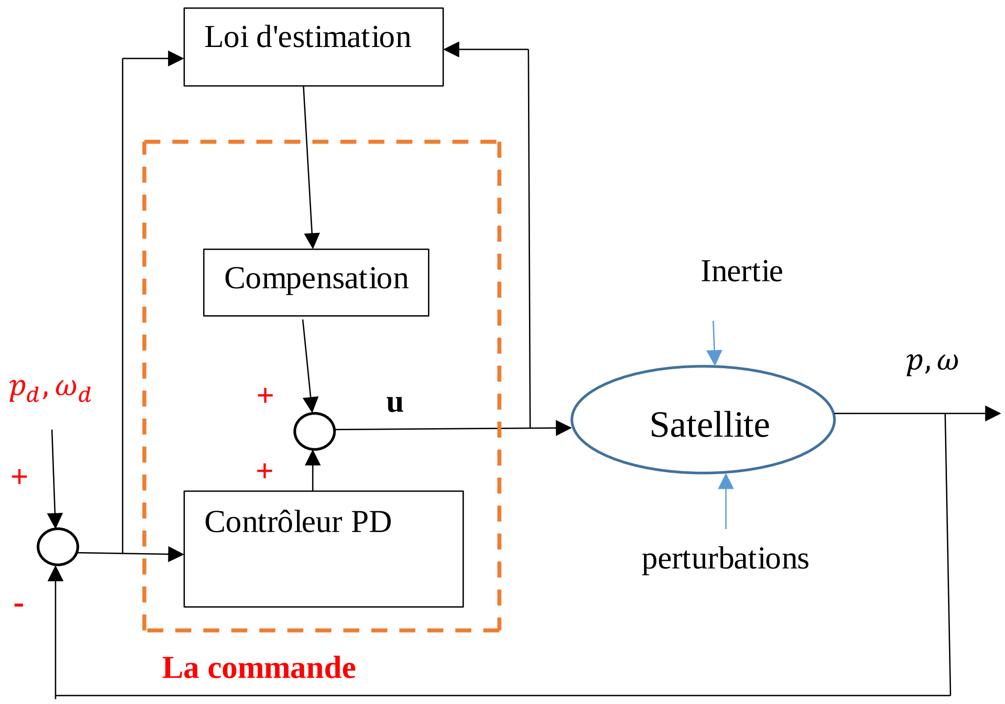


Figure 3.1 : Schéma fonctionnel du système d’attitude du satellite obtenu à partir de l’approche de contrôle de type PD proposée**.**

III-3-1-Estimation des incertitudes de la dynamique

Pour estimer les incertitudes des paramètres de la dynamique τ_u , le système dans l’équation (3.6) est tout d'abord réécrit dans la forme linéaire suivante :

$$\dot{\omega}_e = -k_1 J_0^{-1}\omega_e + \tau_{reg\_u} + J_0^{-1}u \tag{3.8}$$

Où $\tau_{reg\_u} = J_0^{-1}[k_1\omega_e - S(\omega_e)J_0\omega_e + \tau_u]$, et il peut être considéré comme la dynamique incertaine regroupée ; $k_1 \in \mathcal{R}$ est une constante positive.

Introduisons un système auxiliaire sous la forme :

$$\dot{x}_a = -k_1 J_0^{-1}x_a + J_0^{-1}u \tag{3.9}$$

Où $x_a \in \mathcal{R}^3$ est l'état mesurable de ce système linéaire. Ensuite, l’erreur entre l’état x_a de l’équation (3.9) et l’état ω_e de l’équation (3.8) peut être définie comme :

$$z = \omega_e - x_a \tag{3.10}$$

De manière correspondante, on peut obtenir de (3.8) et (3.9) que la dynamique de z est telle que :

$$\dot{z} = -k_1 J_0^{-1} z + \tau_{reg\_u} \tag{3.11}$$

Pour la dynamique d'erreur dans l'équation (3.11), un observateur non linéaire est proposé :

$$\dot{\hat{z}} = -k_2 k_3 \hat{z} + \frac{1}{k_2}\dot{y} + k_3 y + k_4 \lfloor e \rceil^{\frac{m}{n}} \tag{3.12}$$

Où $\hat{z}$ est l'estimation de z. $k_2, k_3\ et\ k_4$ sont les gains positifs de l'observateur, $e = z - \hat{z}$ désigne l'erreur de l'observateur, $y = k_2 z$, $\dot{y}$ est la différenciation numérique de la mesure y, $\lfloor e \rceil^{\frac{m}{n}} = [|e_1|^{\frac{m}{n}} sgn(e_1) \quad |e_2|^{\frac{m}{n}} sgn(e_2) \quad \dots \quad |e_n|^{\frac{m}{n}} sgn(e_n)]^T$, $n \in \mathcal{R}\ et\ m \in \mathcal{R}$ sont deux entiers impairs positifs satisfaisant m < n.

Sur la base de l'analyse ci-dessus, il est connu que les signaux z et y sont mesurables. Alors, les deux théorèmes suivants peuvent être obtenus.

Théorème 1**.** L'erreur de l'observateur **e** est stable dans le temps. C'est-à-dire qu'il existe une constante positive $t_f \in \mathcal{R}$ telle que $e(t) \equiv 0 \qquad pour\ t \geq t_f$

Preuve. On peut déduire de la définition de **e** et de (3.11) et (3.12) que la dynamique de l'erreur de l'observateur **e** est telle que

$$\dot{e} = \dot{z} - \dot{\hat{z}} = \dot{z} + k_2 k_3 \hat{z} - \frac{1}{k_2}\dot{y} - k_3 y - k_4 \lfloor e \rceil^{\frac{m}{n}} = \dot{z} + k_2 k_3 \hat{z} \frac{1}{k_2} k_2 \dot{z} - k_2 k_3 z - k_4 \lfloor e \rceil^{\frac{m}{n}} = -k_3 k_2 e - k_4 \lfloor e \rceil^{\frac{m}{n}} \tag{3.13}$$

On choisit une candidate positive et défini de la fonction de Lyapunov pour l'erreur de l'observateur (3.13) comme :

$$V_1 = \frac{1}{2} e^T e \tag{3.14}$$

Différencions l'équation (14) et insérons (13) conduit à :

$$\dot{V}_1 = e^T \dot{e} = e^T \left(-k_2 k_3 e - -k_4 \lfloor e \rceil^{\frac{m}{n}} \right) = -2k_2 k_3 V_1 - k_4 e^T \lfloor e \rceil^{\frac{m}{n}} \leq -2k_2 k_3 V_1 - 2^{\frac{m+n}{2n}} k_4 V_1^{\frac{m+n}{2n}} \tag{3.15}$$

Puisque m et n sont deux entiers impairs positifs ainsi que m < n, on aura $0 < \frac{m+n}{2n} < 1$. En résolvant l'inégalité (3.15), on obtient $V_1(t) \equiv 0$ pour tout $t \geq t_f$, où $t_f \in \mathcal{R}$ est tel que :

$$t_f \leq \frac{n}{k_2 k_3 (n-m)} \ln \frac{2^{\frac{n-m}{2n}} k_2 k_3 V_1^{\frac{n-m}{2n}}(0) + k_4}{k_4} \tag{3.16}$$

Où $V_1(0)$ est la valeur initiale de V_1. À ce stade, on peut obtenir de l'équation (3.14) que e (t) = 0 est valable pour $t \geq t_f$.

Théorème 2. Avec l'application de l'observateur proposé dans (3.12), on peut concevoir une loi d'estimation $\tau_{est} = [\tau_{est1} \quad \tau_{est2} \quad \tau_{est3}]^T$ comme :

$$\tau_{est} = J_0 \hat{\tau}_{reg\_u} - k_1 \omega_e + S(\omega_e) J_0 \omega_e \tag{3.17}$$

Ou

$$\hat{\tau}_{reg\_u} = (k_1 k_2 J_0^{-1} \hat{z} + \dot{y})/k_2 \tag{3.18}$$

Ensuite, les incertitudes de la dynamique représentées par τ_u peuvent être estimée avec précision en utilisant τ_{est}. De plus, cette estimation est obtenue après un temps fini et avec une erreur d'estimation nulle.

Preuve. Définir l'erreur d'estimation entre τ_u et τ_{est} comme :

$\tau_e = [\tau_{e1} \quad \tau_{e2} \quad \tau_{e3}]^T = \tau_u - \tau_{est}$,

Alors :

$$\tau_e = [J_0 \tau_{reg\_u} - k_1 \omega_e + S(\omega_e) J_0 \omega_e] - J_0 \hat{\tau}_{reg_u} - k_1 \omega_e + S(\omega_e) J_0 \omega_e] = J_0(\tau_{reg_u} - \hat{\tau}_{reg_u}) \tag{3.19}$$

En substituant les équations (3.11) et (3.18) dans (3.19), on obtient :

$$\tau_e = J_0 \left[\tau_{reg\_u} - \frac{1}{k_2}(k_1 k_2 J_0^{-1} \hat{z} + \dot{y})\right] = J_0 \left[\tau_{reg\_u} - \frac{1}{k_2}\left(k_1 k_2 J_0^{-1} \hat{z} - k_1 k_2 J_0^{-1} z + k_2 \tau_{reg\_u}\right)\right] = k_1 e \tag{3.20}$$

Par ailleurs, du théorème 1 et de sa preuve on peut déduire que e (t) = 0 pour tout $t \geq t_f$. Sur la base de (3.20), ça donne :

$$\tau_e(t) = 0\,, \qquad t \geq t_f \tag{3.21}$$

ce qui implique que, τ_u peut être reconstruit en utilisant τ_{est} après le temps fini t_f. L'erreur d'estimation reste à zéro après un temps fini t_f. Ceci complète la preuve.

On peut obtenir de l'équation (3.21) que l'erreur d'estimation τ_e pour la dynamique incertaine τ_u sera toujours égale à zéro après un temps fini t. Cela signifie que la dynamique incertaine τ_u est totalement estimée par τ_{est} après t_f. De plus, la valeur de t_f peut être réglée pour être aussi petite que possible en ajustant les gains de l'observateur k_2, k_3, k_4, m et n. Plus la valeur de t_f est faible, plus la dynamique incertaine τ_u sera estimée par τ_{est} avec une vitesse plus rapide. La preuve du théorème 2 montre que l'observateur développé peut garantir que l'erreur d'estimation soit stable dans un temps fini, alors que la plupart des observateurs d'états étendus existants et les observateurs de modes glissants ne peuvent que garantir que l'erreur d'estimation soit stable et asymptotique (Liu, Luo et Yang), (Ginoya, Shendge et Phadke), (Chen, Yang et Guo), (Gao, Liu et Chen), (Pu, Yuan et Yi). De ce point de vue, on peut théoriquement conclure que la loi d'estimation proposée dans l'équation (3.17) est capable de fournir une estimation plus rapide et précise de la dynamique incertaine τ_u en comparaison avec les observateurs avec une stabilité d'estimation asymptotique. Ces informations estimées avec précision sont importantes pour la conception ultérieure d'une loi de commande d'attitude. Il faut noter qu'un certain nombre d'études sur les observateurs de perturbations et des incertitudes sont disponibles dans la littérature, telles que l'observateur d'état étendu et l'observateur en mode glissant (Liu, Luo et Yang) . Cependant, pour la plupart des observateurs en mode glissant (Liu, Luo et Yang), la limite supérieure de la perturbation externe doit être connue, c'est-à-dire $\|\tau_u\| \leq \sigma$ (où σ est une limite supérieure connue), et la perturbation externe devrait satisfaire à la limite $\lim_{t\to\infty} \dot{\tau}_u = 0$. En ce qui concerne la plupart des observateurs d'états étendus tels que (Ginoya, Shendge et Phadke), (Chen, Yang et Guo), (Gao, Liu et Chen), (Pu, Yuan et Yi). Les perturbations doivent satisfaire à certaines dynamiques. Sinon, ça ne peut pas se transformer en un système d'état étendu. L'observateur proposé peut libérer toutes ces conditions limites.

En résumant l'analyse ci-dessus, on peut conclure que l'observateur proposé est meilleur que les observateur des perturbations connus, tel que l'observateur d'états étendus que (Ginoya, Shendge et Phadke), (Chen, Yang et Guo), (Gao, Liu et Chen), (Pu, Yuan et Yi) et l'observateur en mode glissant (Liu, Luo et Yang), (Liu, Laghrouche et Harmouche), (Liu, Laghrouche et Wack).

III-3-2- Conception d'une loi de commande d'attitude de type PD

En utilisant la valeur estimée avec précision, de la dynamique incertaine τ_u, dans l'équation (3.6), le résultat principal de la conception d'une commande à simple structure permettant d'accomplir la manœuvre de contrôle de suivi d'attitude peut être résumé dans le théorème suivant

Théorème 3. Considérons le système de contrôle d'attitude du satellite rigide décrit par les équations (3.3) à (3.4) avec des couples de perturbation et incertitudes de l'inertie. Avec l'application de la loi d'estimation de l'équation (3.17), concevons un contrôleur de type PD de la manière suivante :

$$u = -k_p p_e - k_d \omega_e - \tau_{est} \tag{3.22}$$

Où le scalaire positif $k_p \epsilon \mathcal{R}$ est le gain proportionnel et le scalaire positif $k_d \epsilon \mathcal{R}$ est le gain dérivé. Ensuite, l'erreur de suivi de l'attitude du satellite p_e et l'erreur de suivi de la vitesse angulaire correspondante ω_e seront asymptotiquement stables.

La manœuvre de suivi d'attitude peut être accomplie avec une convergence asymptotique. Une précision de pointage élevée peut être garantie.

Preuve**.** Pour la dynamique de suivi d'attitude réécrite dans l'équation (3.6), choisissons une fonction candidate de Lyapunov comme :

$$V_2 = \frac{1}{2} \omega_e^T J_0 \omega_e + 2k_p \ln(1 + p_e^T p_e) \tag{3.23}$$

Différencions (3.23) et insérons (3.3), (3.6) et (3.22)

$$\dot{V}_2 = \omega_e^T [-S(\omega_e) J_0 \omega_e + \tau_u + u] + 2k_p \frac{2\rho_e^T G(\rho_e)\omega_e}{1+\rho_e^T \rho_e}$$

$$= \omega_e^T [-k_p \rho_e - k_d \omega_e - \tau_{est} + \tau_u] + 2k_p \frac{2\rho_e^T G(\rho_e)\omega_e}{1+\rho_e^T \rho_e} \tag{3.24}$$

En utilisant la définition de $G(p_e)$, on met $p_e^T G(p_e)$ comme

$$p_e^T G(p_e) = \frac{1}{4}(1 + p_e^T p_e) p_e^T \tag{3.25}$$

Ensuite, la substitution de l'équation (3.25) et $\tau_e = \tau_u - \tau_{est}$ dans l'équation (3.24) a pour résultat

$$\dot{V}_2 = -k_d \omega_e^T \omega_e + \omega_e^T \tau_e \tag{3.26}$$

En utilisant le résultat du théorème 2, à savoir, $\tau_e(t) = 0$, $t \geq t_f$ il en résulte que

$$\dot{V}_2 = -k_d \omega_e^T \omega_e \leq 0\,, \quad t \geq t_f \tag{3.27}$$

Intégrant l'inégalité (3.27) de t_f à ∞, on a

$$\int_{t_f}^{\infty} \dot{V}_2(l) dl \leq V_2(t_f) - V_2(\infty) \leq V_2(t_f) < \infty \tag{3.28}$$

Comme la fonction de Lyapunov est radiale-illimitée, tous les signaux restent liés. Avec l'application du lemme de Barbalat, on peut prouver la continuité uniforme de $\dot{V}_2$, $\dot{V}(t)_2 \to 0$ quand $t \to \infty$. Cela garantit que $\lim\limits_{t\to\infty} \ddot{V}_2(t) = 0$ car $\dot{V}_2$ est uniformément continu. À cette fin, on peut obtenir de (3.27) que $\lim\limits_{t\to\infty} \omega_e(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to\infty} \dot{\omega}_e(t) = 0$. Il résulte des équations (3.6) et (3.22) que

$$J_0\dot{\omega}_e = -S(\omega_e)J_0\omega_e - k_p p_e - k_d\omega_e - \tau_{est} + \tau_u \tag{3.29}$$

Et

$$J_0\dot{\omega}_e = -S(\omega_e)J_0\omega_e - k_p p_e - k_d\omega_e \ , \quad t \geq t_f \tag{3.30}$$

Par conséquent, ceci peut être utilisé avec $\lim\limits_{t\to\infty} \omega_e(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to\infty} \dot{\omega}_e(t) = 0$ pour montrer que $\lim\limits_{t\to\infty} p_e(t) = 0$. En conséquence, le système de suivi d'attitude en boucle fermée est globalement stable et asymptotique. Le contrôle d'attitude de haute précision est atteint.

On peut voir de l'équation (3.22) que la loi de commande proposée est à structure simple, et elle se compose de deux parties : l'une est l'effort de contrôle de la commande PD $-(k_p p_e + k_d\omega_e)$, et l'autre est $-\tau_{est}$. La dernière partie de la commande est conçue et utilisée pour compenser les incertitudes de la dynamique. Ceci est réalisé grâce à l'estimation parfaite des paramètres incertains de la dynamique en utilisant la loi d'estimation développée dans l'équation (3.17). L'effort de contrôle du PD est conçu comme une puissance de contrôle nominale pour le système d'attitude. En conséquence, lors de l'application du contrôleur pour effectuer une manœuvre de suivi d'attitude. En conséquence, à la suite des démonstrations du théorème 1, du théorème 2 et du théorème 3, les procédures permettant de choisir les gains dans le contrôleur de l'équation (3.22) et les gains dans la loi d'estimation dans l'équation (3.17) peuvent être résumées comme suit :

Étape 1 : Choisir arbitrairement k_1 positif pour la loi d'estimation (3.17).

Étape 2 : Choisir k_2, k_3, k_4, m et n en fonction de l'équation (3.16) et satisfaisants la condition $m < n$. Le choix des valeurs plus grandes pour : m/n, k_2, k_3 ou k_4 conduira à un plus petit f_t. En conséquence, l'estimation des incertitudes de la dynamique peut être obtenue dans un délai beaucoup plus court.

Étape 3 : Sélection d'un k_p positif. Cette valeur affectera le temps de stabilisation de la commande dans l'équation (3.22). Une valeur plus grande de k_p se traduira par une valeur plus petite du temps d'établissement.

Étape 4 : Choisir une valeur positive de k_d. Il convient de noter qu'un plus grand k_d entraînera un plus petit dépassement de la commande (3.22).

III-3-3-Conception de la loi de commande avec considération de la dynamique de l'actionneur

Bien que le contrôleur de l'équation (3.22) soit conçu sans tenir compte de la dynamique de l'actionneur, cette approche de contrôle est également efficace pour réaliser une manœuvre de suivi d'attitude lorsque la dynamique de l'actionneur est prise en compte. Ceci peut être validé comme suit. Supposons que l'attitude du satellite soit contrôlée à l'aide de N actionneurs, et que la dynamique de ces actionneurs peut être représentée par

$$u_{app} = f(v) \tag{3.31}$$

Où $v = [v_1 \quad v_2 \ \dots \ v_n]^T \in \mathcal{R}^N$ est une entrée de ces N actionneurs, le vecteur $u_{app} = [u_{app\_1} \quad u_{app\_2} \ \dots \ u_{app\_N}]^T \in \mathcal{R}^N$ est le couple réel généré à partir des actionneurs, et $f(v) = [f_1(v_1) \quad f_2(v_2) \ \dots \ f_N(v_n)]^T \in \mathcal{R}^N$ désigne le vecteur de l'équation dynamique de N actionneurs. Sur la base de l'équation (3.31), le couple total u dans l'équation (3.2) peut être calculé comme suit :

$$u = Du_{app} = Df(v) \tag{3.32}$$

Où $D \in \mathcal{R}^{3\times N}$ est la matrice d'allocation d'actionneur.

En notant $\Delta v \in \mathcal{R}^N$ la différence entre l'entrée des actionneurs et leur couple de sortie, on a

$$\Delta v = u_{app} - v = f(v) - v \tag{3.33}$$

Ensuite, il résulte de (3.32) et (3.33) que

$$u = Dv + D\Delta v \tag{3.34}$$

À cette fin, la dynamique d'attitude du satellite avec la dynamique d'actionneur considérée peut être écrite sous la forme de l'équation (3.6), où le terme u dans cette équation sera écrit :

$$u = Dv \tag{3.35}$$

Et l'incertitude τ_u dans l'équation (3.7) est remplacée par

$$\tau_u = d - S(R(\rho_e)\omega_d)JR(\rho_e)\omega_d - JS(R(\rho_e)\omega_d)\omega_e + D\Delta v - S(R(\rho_e)\omega_d)J\omega_e - S(\omega_e)\Delta J\omega_b - \Delta J\dot{\omega}_e - JR(\rho_e)\dot{\omega}_d \quad (3.36)$$

Par conséquence, la dynamique incertaine τ_u donnée par l'équation (3.36) peut encore être estimée avec précision en utilisant la loi d'estimation proposée dans l'équation (3.17). De plus, en appliquant la loi de commande de l'équation (3.22), le système de suivi d'attitude en boucle fermée sera asymptotiquement stable. Il faut noter qu'à ce stade, l'entrée de commande est l'entrée de la dynamique de l'actionneur **v,** mais pas du couple de commande total **u**. Cependant, l'entrée de commande **v** peut être obtenue à partir des équations (3.22) et (3.35) comme :

$$v = D^x(-k_p\rho_e - k_d\omega_e - \tau_{est}) \quad (3.37)$$

où $D^x \in \mathcal{R}^{3\times N}$ désigne le pseudo-inverse de $D \in \mathcal{R}^{3\times N}$.

Théorème 4. Pour le système de contrôle d'attitude dans les équations (3.3) et (3.4) avec des couples de perturbation, des incertitudes de la dynamique du système, et une dynamique d'actionneur, et en appliquant la loi d'estimation de l'équation (3.17) et la loi de commande de l'équation (3.37) pour les actionneurs en tant qu'entrée de commande, le système de suivi d'attitude en boucle fermée peut être garanti comme étant asymptotiquement stable.

Preuve :

Bien que la dynamique de l'actionneur soit prise en compte dans la conception de la loi de commande, la loi de commande développée est exempte de la dynamique de l'actionneur. Cela implique que cette loi de commande est indépendante de la dynamique de l'actionneur et en est libre. Ceci est très bénéfique en pratique. En effet, lorsque l'on prend en compte la dynamique de l'actionneur, les lois de commande classiques dépendent fortement de la dynamique de l'actionneur. Cependant, la dynamique précise des actionneurs ne serait pas établie. Par conséquent, ces lois de commande classiques dépendant de la dynamique des actionneurs auraient une influence négative sur les performances du contrôle d'attitude. De ce point de vue, on peut conclure de ces analyses que la loi de commande du type PD proposée dans l'équation (3.37) est intéressante pour l'ingénierie des satellites afin d'obtenir de bonnes performances de contrôle d'attitude.

III-4- Résultats de Simulation

Cette section présente les résultats de simulation sur un satellite rigide qui a le moment d'inertie

$$J = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 42.5 & 0 \\ 0 & 0 & 52.2 \end{bmatrix} \mathrm{kgm}^2$$

Les trajectoires souhaitées sont :

$$\omega_d = \begin{bmatrix} 0.03 \sin(\frac{\pi t}{200}) \\ 0.03\, sin(\frac{\pi t}{300}) \\ 0.03\, sin(\frac{\pi t}{250}) \end{bmatrix} \frac{rad}{s} \qquad avec\colon \; p_d = [0.02 \quad -0.03 \quad 0.05]^T$$

En simulation, un couple de perturbation $d = 2 \times 10^{-4} \times [sin\,(0.8t) \quad cos\,(0.5t) \quad cos\,(0.3t)]$ Nm est simulé. De plus, le satellite aura une incertitude d'inertie de 20%, soit $\Delta J = 0.2\,J$. Les gains de la commande en (3.22) sont choisis comme étant $k_p = 5\; et\; k_d = 15$. Les gains de la loi d'estimation pour l'observateur sont choisis comme suit :

$k_1 = 5$, $k_2 = 26$, $k_3 = 74$, $k_4 = 155$, $n = 93$ et $m = 97$. L'attitude initiale est $p = [06 \; - 0.5 \;\; 0.3]^T$ et la vitesse initiale est $\omega = [-0001 \quad 0.002 \quad -0.0009]^T$ rad / sec.

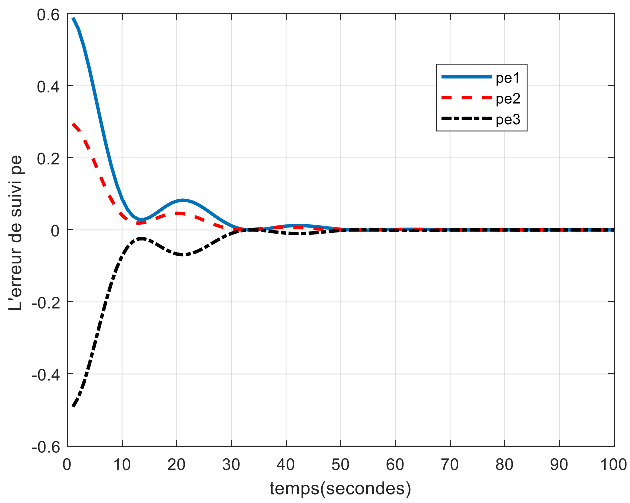


Figure. 3.2. L'erreur de suivi d'attitude p_e.

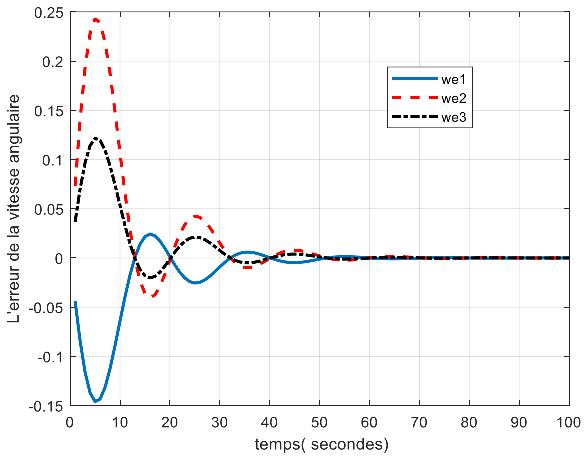


Figure. 3.3. L'erreur de suivi de la vitesse angulaire ω_e .

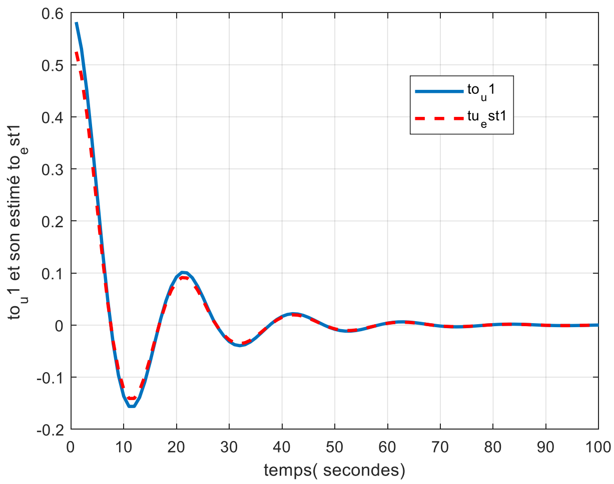


Figure.3.4 : τ_{u1} et sa valeur d'estimationτ_{est1}.

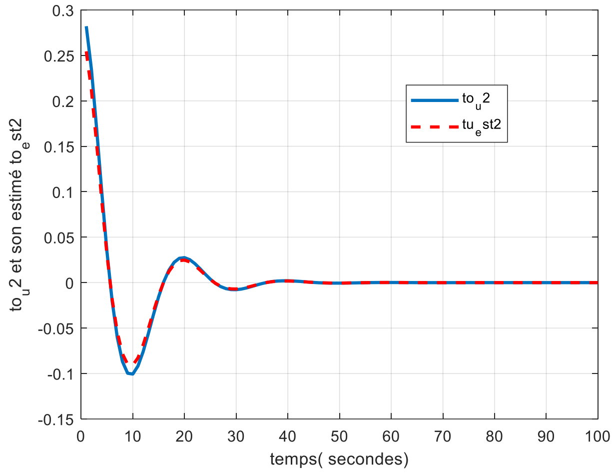


Figure. 3.5 : τ_{u2} et sa valeur d'estimation τ_{est2}

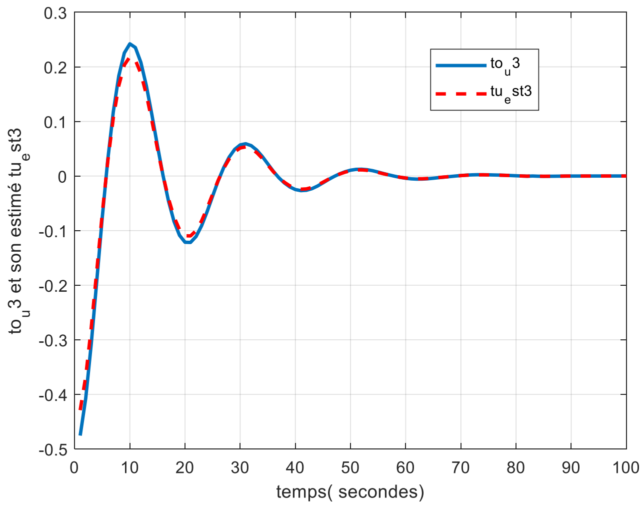


Figure.3.6 : τ_{u3} et sa valeur d'estimation τ_{u3} .

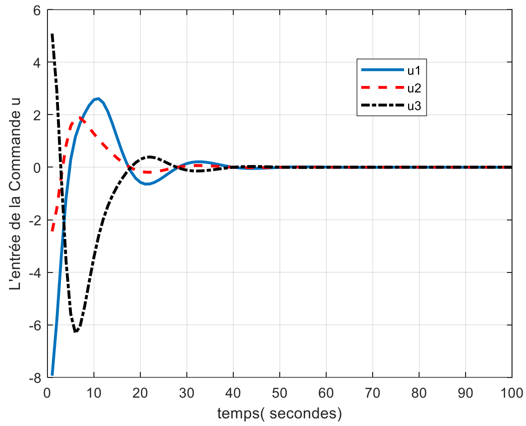


Figure.3.7 : La commande u.

Des résultats de contrôle de suivi d'attitude sont illustrés sur les figures 3.2 et 3.3, respectivement, on constate que la manœuvre de suivi d'attitude planifiée est accomplie avec succès. L'erreur de suivi de l'attitude et la vitesse angulaire sont asymptotiquement stables. Ceux-ci vérifient les conclusions du théorème 3 selon lesquelles le contrôleur conçu est capable de réaliser un contrôle de suivi d'attitude avec une précision de pointage et une stabilité d'attitude élevée, même lorsque le satellite est soumis à un couple de perturbation important et à des incertitudes d'inertie.

La haute performance du suivi d'attitude obtenue est due à la loi d'estimation basée sur l'observateur de l'équation (3.17). Les incertitudes de la dynamique et son estimation à l'aide de l'équation (3.17) sont illustrées aux Figures : 3.4, 3.5, 3.6, respectivement. On voit que ces couples incertains sont estimés avec précision. D'après les résultats obtenus, il est clair que l'état estimé τ_{est} converge vers une dynamique incertaine τ_{u} avec une convergence à temps fini. Ces résultats valident toutes les conclusions du théorème 2 selon lesquelles le schéma d'estimation développé peut reconstituer la dynamique incertaine en temps fini et avec une erreur d'estimation pratiquement nulle. Cela compensera complètement la dynamique incertaine. C'est également la raison pour laquelle la stabilité asymptotique du système en boucle fermée peut être garantie. L'entrée de commande correspondante est illustrée à la figure.3.7.

Le contrôleur de type PD proposé est capable de réaliser un contrôle de suivi d'attitude de haute précision, car l'effort de compensation incorporé basé sur une estimation incorporée est capable de compenser le couple de perturbation externe important.

III-5- Conclusion

Une approche de contrôle de type PD a été développée pour les satellites rigides afin de réaliser une manœuvre de suivi d'attitude. Des performances de contrôle de pointage de haute précision face au couple perturbateur, aux incertitudes des paramètres de la dynamique et même à la dynamique de l’actionneur sont obtenues. Avec l’application de cette approche, ces dynamiques incertaines peuvent être compensées. Un contrôle d’élimination des perturbations et de l'inertie incertaine a été obtenu. Ceci est dû à la loi d'estimation incorporée basée sur l'observateur, conçue pour estimer la dynamique incertaine avec une convergence en temps fini de l'erreur d'estimation. En conséquence, il était garanti que le système de suivi d’attitude en boucle fermée était asymptotiquement stable. La structure de la commande de type PD proposé était assez simple. De plus, cette approche n’implique pas une procédure de conception exigée avec moins de calcul à bord. Il faut noter que les trajectoires d’attitude souhaitées ont été suivies de manière asymptotique.

Conclusion Générale

Dans cette thèse, une étude de problème de contrôle d'attitude des satellites en utilisant deux méthodes de contrôle différentes a été présentée.

L'orientation des satellites en orbite change progressivement avec le temps. Leur attitude doit être contrôlées afin d'atteindre l'attitude de référence recherchée. Pour cela une description du modèle mathématique du satellite est importante. La modélisation à l'aide d'une description de l'attitude a été traitée dans ce travail. Les trois principaux concepts mathématiques utilisés pour représenter l'attitude d'un corps rigide dans un espace tridimensionnel ce sont : la matrice de rotation, les angles d'Euler et le quaternion unitaire. A ceux-ci, il s'ajoute un quatrième, le vecteur de rotation (axe principale/angle d'Euler), qui présente les avantages des angles d'Euler et des quaternions, mais ni les singularités du premier, ni la contrainte quadratique du dernier. Il existe plusieurs autres représentations, dont les relations avec les trois représentations principales sont également décrites tels que les paramètres de Rodriguez et Rodriguez modifiés.

Des méthodes de stabilisation et de contrôle du mouvement des satellites sont aussi traitées comme l'utilisation des rotors (double rotation, roues de réaction), le gradient de gravité.

La théorie des modes glissants a une attention particulière dans le domaine de l'aérospatiale. La technique permet l'utilisation d'un modèle de système d'ordre inférieur pour générer des commandes de contrôle. D'autre part, le système est robuste aux perturbations externes et inclut également une dynamique non modélisée (les incertitudes dans le model du système d'attitude).

La conception d'une loi de commande à structure variable pour la dynamique d'attitude de satellite rigide avec une représentation par le quaternion unitaire, et deux surfaces de glissement ont été établies. La loi de commande en mode glissant a été conçue pour forcer les variables d'état du système en boucle fermée à converger vers les valeurs souhaitées. L'approche proposée est définie de manière à ce que les paramètres de contrôleur sélectionnés puissent forcer l'état du système à atteindre rapidement la surface de glissement, puis à le maintenir sur cette surface avec moins d'erreurs de suivi. Les résultats de la simulation montrent que le mouvement le long du mode de glissement est insensible aux variations de paramètre et aux perturbations. De plus, la commande développée réduit le temps de d'atteinte et améliore les performances des surfaces linéaires et atténue les vibrations en utilisant une technique de couche limite d'épaisseur variable.

Dans une autre étude dans ce travail, un système de suivi d'attitude en boucle fermée garantissant une stabilité asymptotique globale grâce au contrôleur de type PD a été présentée. Les perturbations et les incertitudes des paramètres d'inertie sont rejetés. De plus, en tenant compte de la dynamique de l'actionneur, la loi de commande proposée est également indépendante de la dynamique des actionneurs. L'observateur incorporé est capable de fournir une estimation rapide et précise de la dynamique incertaine. Une telle estimation peut être réalisée en temps fini et l'erreur d'estimation est nulle après ce temps fini.

D’autre part si les deux approches présentées dans ce travail sont analysées en termes de résultats de réponses données, on peut constater que, bien que les approches de contrôle basées sur l’élimination des perturbations soient capables de stabiliser asymptotiquement le système d'attitude en boucle fermée. La commande conçu a une structure plus complexe, que celle de la commande d’attitude en mode glissant garantissant la robustesse face aux perturbations et aux incertitudes, en un temps fini et avec rapidité de réponse.

La contribution principale de ce travail est la procédure de sélection des paramètres de gain de contrôle pour les surfaces linéaires. Cela après avoir sélectionner le type de la surface de glissement elle-même à partir d’une seule expression en changeant la valeur d’une constante c0. La procédure de commande proposée est de choisir en premiers lieu entre deux surfaces de glissements selon la valeur de la constante c0. Et puis d’introduire une méthode de sélection d’une autre variable k pour accélérer le mode de convergence vers la surface de glissement dans le cas de c0 = 0 (cas d’une surface de glissement linéaire). Et cela pour augmenter les performances de la commande par mode glissant utilisant une surface linéaire et diminuer la nécessité d’utiliser des surfaces non linéaires exigent plus de calculs ce qui rend la loi de commande plus complexe. L’objectif de contrôle est de concevoir une commande avec une structure simple et demandant moins de calculs à bord toute en garantissant des meilleures performances avec l’introduction de la technique de la couche limite à épaisseur variable pour atténuer l’effet des vibrations (chattering).

Annexe A

A-1-Introduction

La présentation de la modélisation cinématique et dynamique d'un satellite nécessite d'utiliser :

• Une analyse vectorielle rigoureuse de la cinématique rotationnelle.

• Déterminer les relations de base des transformations de repères de manière utilisable pour les équations de mouvement de rotation.

• Introduire plusieurs représentations cinématiques alternatives (angles d'Euler, axe Euler / angle principal, matrice de rotation, quaternions, paramètres de Rodrigues et Rodrigues modifiés) et leur évolution dans le temps.

A-2- Définitions de base et opérations vectorielles

La quantité de base en dynamique est un vecteur. Un vecteur a à la fois une amplitude et une direction et est représenté par des coordonnées le long de trois axes perpendiculaires, appelés un repère de référence. Chaque axe du repère de référence est représenté par un vecteur unitaire, défini comme un vecteur d'amplitude unitaire. Considérons un vecteur, A, écrit en termes de coordonnées le long d'un repère de référence constitué d'une triade formée par les vecteurs unitaires, i, j, k, comme suit :

$$A = A_x i + A_y j + A_z k \tag{A.1}$$

Ou simplement comme :

$$A = \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} \tag{A.2}$$

Où les composants, A_x, A_y, A_z sont les coordonnées celons les axes i, j, k respectivement. Comme nous le verrons plus loin, il est possible de transférer les composantes d'un vecteur vers un autre repère de références en utilisant une transformation de coordonnées. Deux (ou plusieurs) vecteurs peuvent être ajoutés ou soustraits en ajoutant ou en soustrayant leurs composantes respectives référées au même repère de références. Les vecteurs peuvent être multipliés de deux manières différentes : le produit scalaire et le produit vectoriel. Comme leurs noms l'indiquent, le produit scalaire de deux vecteurs est un scalaire (une quantité ayant seulement une amplitude), tandis qu'un produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur. Le produit scalaire de deux vecteurs, $\vec{A}$ et $\vec{B}$, est défini par :

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\ cos\theta \tag{A.3}$$

où A, B sont les amplitudes respectives des deux vecteurs et θ l'angle entre eux. D'après cette définition, il est clair que le produit scalaire de deux vecteurs ayant la même direction est le produit de leurs amplitudes, tandis que deux vecteurs perpendiculaires ont un produit scalaire nul. Par conséquent, il en résulte que

$$\vec{A}.\vec{\imath} = A_x\ ; \quad \vec{A}.\vec{\jmath} = A_y\ ; \qquad \vec{A}.\vec{k} = A_z \tag{A.4}$$

on peut écrire le produit scalaire de deux vecteurs, $\vec{A} = A_x.\vec{\imath} + A_y.\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$ et $\vec{B} = B_x.\vec{\imath} + B_y.\vec{\jmath} + B_z\vec{k}$, comme :

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = \{A_xA_yA_z\}\begin{Bmatrix} B_x \\ B_y \\ b_z \end{Bmatrix} = \vec{A}^T\vec{B} \tag{A.5}$$

Dans l'équation (A.5) nous avons dénoté la transposition d'un vecteur avec un exposant T, obtenu en disposant les composants dans une ligne [plutôt que sous la forme de colonne de l'équation (A.2). Par conséquent, le produit scalaire est la somme des produits des composantes des deux vecteurs (Kreyszig)

Le produit vectoriel, $\vec{A} \times \vec{B}$, est défini comme suit :

a- L'amplitude est donnée par | $\vec{A}\ \times\ \vec{B}$ | = AB.sin θ, où θ est l'angle entre les deux vecteurs.
b- La direction de $\vec{A}\ \times\ \vec{B}$ est normale au plan formé par les deux vecteurs et est donnée par la règle de la main droite. figure(A.1).

D'après cette définition, il est clair que le produit vectoriel de deux vecteurs quelconques ayant la même direction (ou la direction opposée) est nul, tandis que deux vecteurs perpendiculaires l'un à l'autre ont un produit vectoriel d'amplitude égale au produit de leurs amplitudes. De plus, $\vec{A}\ \times\ \vec{B} = -\vec{A}\ \times\ \vec{B}$. Un repère : i, j, k est dit direct si sa triade de vecteurs unitaires est disposée de telle sorte que i × j = k. Par conséquent, en référence à un repère direct, nous pouvons écrire le produit vectoriel de deux vecteurs, $\vec{A} = A_x.\vec{\imath} + A_y.\vec{\jmath} + A_z\vec{k}\ et\ \vec{B} = B_x.\vec{\imath} + B_y.\vec{\jmath} + B_z\vec{k}$,comme suit :

$$\vec{A}\ \times\ \vec{B}\ = (A_yB_z - A_zB_y)\vec{\imath} + (A_zB_x - A_xB_z)\vec{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k} \tag{A.6}$$

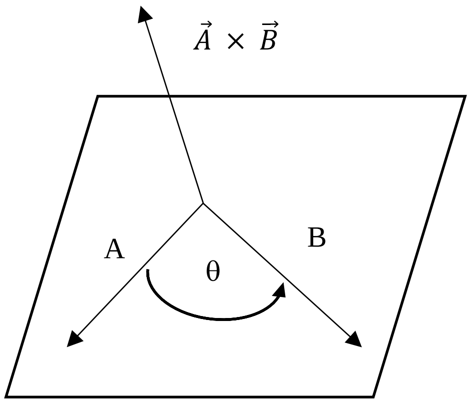


Figure A.1 : Produit vectoriel de deux vecteurs, A et B.

En introduisant la notation abrégée du déterminant d'une matrice carrée, on peut écrire l'équation (A.6) comme :

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{A.7}$$

Les définitions précédentes nous permettent de déduire les identités suivantes concernant le produit vectoriel :

$$A \times (B \times C) = B(A.C) - C(A.B) \tag{A.8}$$

$$(A \times B) \times C = B(A.C) - A(B.C) \tag{A.9}$$

$$(A \times B).(C \times D) = (A.C)(B.D) - (A.D)(B.C) \tag{A.10}$$

$$(A \times B) \times (C \times D) = \big(A.(B \times D)\big)C - (A.(B \times C))D \tag{A.11}$$

On peut vérifier ces résultats avec des calculs manuels des équations. (A.5) et (A.7).

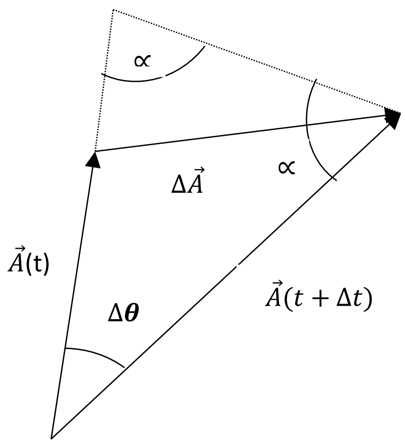


Figure A.2 : changement d'un vecteur

La dérivée temporelle d'un vecteur, A, est définie comme suit :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t} \tag{A.12}$$

Où ΔA représente la variation totale provoquée par les changements à la fois de l'amplitude et de la direction, comme le montre la Figure A.2. On peut voir à partir de la Figure A.2 qu'un triangle isocèle est formé en prolongeant le vecteur A (t) jusqu'à ce que son amplitude devienne égale à A (t + Δt). Dans la limite Δt → 0, nous avons Δθ → 0, et donc α → π /2. Par conséquent, les deux lignes en pointillés sur la figure.2 représentent l'extension et la rotation de A, respectivement, et nous avons :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta\vec{A} = [A(t+\Delta t) - A(t)]\frac{\vec{A}(t)}{A(t)} + \omega \times \vec{A}(t)\Delta t \tag{A.13}$$

Où ω est la vitesse angulaire de A, dirigée dans le plan de la Figure A.2 avec l'amplitude donnée par

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{A.14}$$

Par substitution de l'équation (A.13) dans l'équation (A.12), nous avons

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA}{dt}\frac{\vec{A}}{A} + \omega \times \vec{A} \tag{A.15}$$

où le premier terme sur le côté droit représente la dérivée temporelle due à un changement de l'amplitude, et le second, dû à la rotation. Un observateur tournant à la même vitesse angulaire que $\vec{A}$ ne remarquerait que le premier terme, tandis qu'un observateur stationnaire remarquerait les deux termes.

A-3- Systèmes de coordonnées et matrice de rotation

Un vecteur peut être exprimé dans une variété de systèmes de coordonnées, chacun étant représenté par une triade de vecteurs unitaires. Un nombre quelconque de systèmes de coordonnées différents peut être obtenu en tournant les axes orthogonaux autour de l'origine, O. Parfois, il est nécessaire d'utiliser un repère avec une origine différente, O'. Par conséquent, la transformation générale d'un repère en un autre consiste en une translation de l'origine et en une rotation des axes autour de la nouvelle origine. Cependant, la translation de l'origine est obtenu facilement en spécifiant le vecteur de déplacement R de O à O' (Figure.3), et ses dérivées temporelles, tels que le déplacement, la vitesse et l'accélération, r, v, a respectivement, dans le repère original sont liés à leurs homologues r', v', a' dans le nouveau repère par

$$\begin{aligned} r &= R + \acute{r} \\ v &= \frac{dR}{dt} + \acute{v} \\ a &= \frac{d^2R}{dt^2} + \acute{a} \end{aligned} \tag{A.16}$$

Puisque la translation des repères n'est pas très importante, nous nous concentrerons plutôt sur les transformations de coordonnées impliquant une rotation

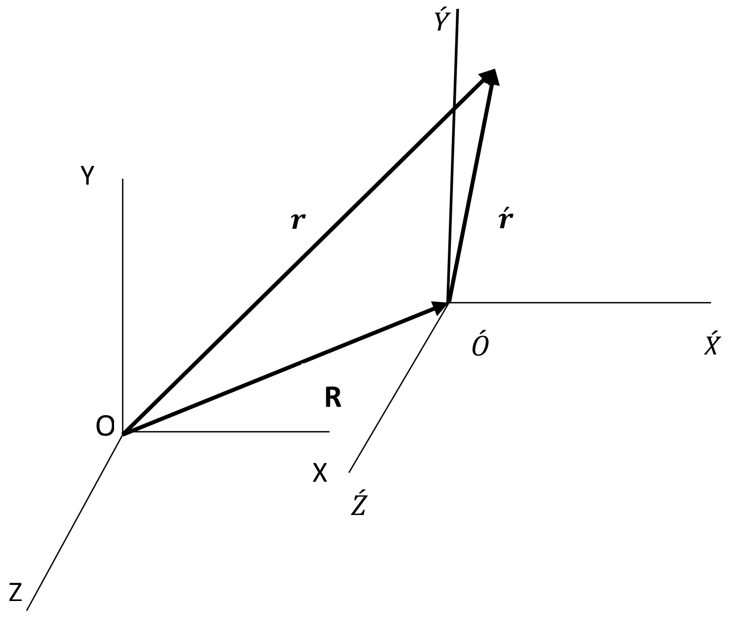


Figure A.3 : Translation d'un repère de coordonnées.

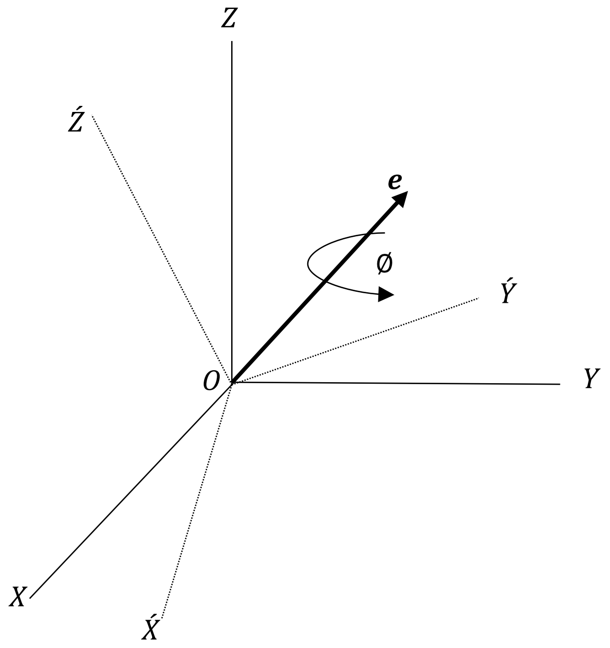


Figure A.4 : Rotation d'un repère de coordonnées.

Considérons un repère (OXYZ) avec les axes OX, OY et OZ, respectivement désignés par les vecteurs unitaires i, j, k. une rotation de repère autour de l'origine, O, produit un nouveau repère, (OX'Y'Z') Désignée par i', j', k' (Figure A.4). Considérons maintenant un vecteur, $\vec{A}$, exprimé alternativement en termes de composantes dans les repères d'origine et de rotation, comme suit:

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_Z\vec{k} = \acute{A}_x\vec{\acute{i}} + \acute{A}_y\vec{\acute{j}} + \acute{A}_z\vec{\acute{k}} \tag{A.17}$$

Qui peut être écrit sous forme de matrice comme

$$A = (i\ j\ k)\begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} = (\acute{i}\acute{j}\acute{k})\begin{Bmatrix} \acute{A}_x \\ \acute{A}_y \\ \acute{A}_z \end{Bmatrix} \tag{A.18}$$

Afin de trouver la relation entre les deux repères, nous prenons les produits scalaires $\vec{A}.\vec{\acute{i}}, \vec{A}.\vec{\acute{j}}, et\ \vec{A}.\vec{\acute{k}}$

$$\begin{Bmatrix} \acute{A}_x \\ \acute{A}_y \\ \acute{A}_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \acute{i} & i & \acute{i} & j & \acute{i} & k \\ \acute{j} & i & \acute{j} & j & \acute{j} & k \\ \acute{k} & i & \acute{k} & j & \acute{k} & k \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} \tag{A.19}$$

Nous pouvons également prendre des produits scalaires de A avec i, j et k pour avoir ce qui suit :

$$\begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} i & \acute{\imath} & i & \acute{\jmath} & i & \acute{k} \\ j & \acute{\imath} & j & \acute{\jmath} & j & \acute{k} \\ k & \acute{\imath} & k & \acute{\jmath} & k & \acute{k} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \acute{A}_x \\ \acute{A}_y \\ \acute{A}_z \end{Bmatrix} \qquad (A.20)$$

Nous réécrivons l'équation (A.19) comme :

$$\begin{Bmatrix} \acute{A}_x \\ \acute{A}_y \\ \acute{A}_z \end{Bmatrix} = C \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} \qquad (A.21)$$

où C est la matrice suivante constituée des cosinus des angles (équation (A.3)) entre les axes des deux repères et est donc appelée matrice de cosinus directeurs ou matrice de rotation :

$$C = \begin{pmatrix} \acute{\imath} & i & \acute{\imath} & j & \acute{\imath} & k \\ \acute{\jmath} & i & \acute{\jmath} & j & \acute{\jmath} & k \\ \acute{k} & i & \acute{k} & j & \acute{k} & k \end{pmatrix} \qquad (A.22)$$

La transformation de coordonnées, équation. (A.19), peut également être exprimé comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \acute{\imath} \\ \acute{\jmath} \\ \acute{k} \end{Bmatrix} = C \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} \qquad (A.23)$$

De l'équation (A.19) et (A.20), il est clair que la matrice de rotation a la propriété suivante

$$C^T C = C C^T I \qquad (A.24)$$

Il résulte que $C^{-1} = C^T$. Une matrice avec cette propriété est dite orthogonale, puisque les vecteurs formés à partir des colonnes de la matrice sont orthogonaux. De l'équation (A.24), on peut aussi en déduire que le déterminant, $| C | = \pm 1$. Une rotation pour laquelle $| C | = 1$ s'appelle une rotation propre. Il est facile de voir à partir de la définition de la matrice de rotation, équation. (A.21), que deux rotations successives d'un repère peuvent être représentées simplement en multipliant les matrices de rotation des rotations comme suit :

$$\acute{\acute{C}} = \acute{C} C \qquad (A.25)$$

Où la rotation C'' est obtenu en subissant d'abord une rotation C, suivie d'une rotation C'

A-4- Axe d'Euler et Angle Principal

D'après la discussion ci-dessus, il est clair qu'une rotation d'un repère peut être représentée par une matrice de rotation, C. Une rotation peut également être décrite en spécifiant l'axe de rotation, ainsi que l'angle sous lequel le repère a été tourné. Cette expérience commune est formalisée dans le théorème d'Euler, selon lequel l'orientation relative de toute paire de repères est déterminée de manière unique par une rotation selon l'angle,Φ autour d'un axe fixe passant par l'origine commune, appelé axe d'Euler. Cette rotation unique s'appelle l'angle principal. Une représentation graphique de la rotation principale est illustrée dans la figure A.4, où une rotation dans le sens inverse des aiguilles d'une montre est considérée comme positive par la règle de la main droite. Le théorème d'Euler fournit donc une description de la rotation en utilisant un vecteur unitaire $\vec{e}$, représentant la direction de l'axe d'Euler, et l'angle de rotation principal, Φ. Avant d'utiliser la nouvelle représentation, nous devons savoir comment ces deux quantités peuvent être obtenues. Un aperçu de l'axe d'Euler peut être obtenu en analysant les valeurs propres et les vecteurs propres (Kreyszig) de la matrice de rotation. Soit $\vec{c}$ un vecteur propre associé à la valeur propre, λ de C :

$$C\vec{c} = \lambda\vec{c} \tag{A.26}$$

En pré-multipliant l'équation (A.26) par le conjugué hermitien (Kreyszig)de chaque côté, nous avons

$$(Cc)^H(Cc) = \bar{\lambda}\lambda c^H c = 0 \tag{A.27}$$

Et puisque C : est réel et satisfait l'équation. (A.24)

$$(\bar{\lambda}\lambda - 1)c^H c = 0 \tag{A.28}$$

Ce qui implique que

$$\bar{\lambda}\lambda = 1 \tag{A.29}$$

Parce que **c**, est non nul. L'équation (A.29) indique que toutes les valeurs propres de **C** ont des valeurs unitaires. Maintenant, C, étant une matrice 3×3, a trois valeurs propres. Étant donné que les valeurs propres complexes se présentent en paires conjuguées, Il en résulte que l'une des valeurs propres de **C** doit être réelle, pour laquelle l'équation (A.26) devient

$$Cc_1 = c_1 \tag{A.30}$$

et ce qui implique que le vecteur propre, c_1, associé à $\lambda = 1$ est inchangé par la rotation. Il en résulte également des équations. (A.24) et (A.30) que $c_1^T c_1 = 1$, c'est-à-dire que c_1 est un vecteur unitaire. Par conséquent, il est clair que l'axe d'Euler (étant invariant sous la rotation du repère de coordonnées) est représenté par $e = C_1$. Les deux autres valeurs propres de C, étant des conjugués complexes avec une amplitude unitaire, peuvent être écrites comme suit :

$\lambda_{2,3} = e^{\pm i\beta} = \cos\beta \pm i \sin\beta$. Ainsi, de l'équation (A.26), nous avons

$$Cc_{2,3} = e^{\mp i\beta} c_{2,3} \tag{A.31}$$

A partir de la représentation plane complexe d'un vecteur, le facteur $e^{i\beta}$ multipliant un vecteur implique une rotation par angle β. Ainsi, les vecteurs propres, $c_{2,\,3}$ (conjugués complexes), subissent une rotation par angle β lorsque le repère est tourné autour de l'axe c_1. Une conséquence de C étant orthogonale équation (A.24)) est que ses vecteurs propres sont perpendiculaires. Puisque $c_{2,\,3}$ sont perpendiculaires à c_1, leur rotation doit être égale à l'angle de rotation du repère. Par conséquent, $\Phi = \beta$. Une méthode simple pour obtenir l'angle de rotation principal est la trace de C (Kreyszig) :

$$traceC = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + e^{i\phi} + e^{-i\phi} = 1 + 2\cos\phi \tag{A.32}$$

Ou

$$\cos\phi = 1/2(traceC - 1) \tag{A.33}$$

Il y a deux valeurs de Φ, qui ne diffèrent que par le signe, qui satisfont l'équation (A.33), chacune ayant un axe d'Euler, **e**, dans des directions opposées. Cela ne provoque aucune ambiguïté, car une rotation de Φ autour de **e** est la même chose qu'une rotation de −Φ autour de **−e**.

Les transformations de repères les plus simples sont des rotations autour des axes d'un repère, appelées rotations élémentaires. Une rotation positive de (OXYZ) autour de, OX par un angle Φ est représentée par la matrice de rotation

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \tag{A.34}$$

Alors que la matrice de rotation pour une rotation positive autour de, OY du même angle est

$$C_2 = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} \tag{A.35}$$

De même, une rotation positive autour de OZ par Φ est donnée par

$$C_3 = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.36}$$

Une transformation de repère plus compliquée peut être obtenue par de multiples rotations sur un axe dans une succession donnée, en utilisant des matrices de rotation élémentaires.

En termes des éléments (i, j) de C (notés c_{ij}), l'équation (A.30) et (A.33) conduisent aux expressions explicites suivantes pour les composants de l'axe d'Euler, **e** :

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{C_{23}-C_{32}}{2\sin\phi} \\ e_2 &= \frac{C_{31}-C_{13}}{2\sin\phi} \\ e_3 &= \frac{C_{12}-C_{21}}{2\sin\phi} \end{aligned} \tag{A.40}$$

Il est clair de l'équation (A.40) que l'axe d'Euler est défini uniquement pour les rotations non nulles.

A-5- Angles d'Euler

Considérons maintenant l'orientation ou l'attitude d'un repère par rapport à un autre repère. Une telle description est très utile pour représenter l'attitude d'un véhicule de vol (ou de tout autre objet) auquel un repère est rigidement attaché, en référence à un second repère. Deux représentations d'attitude sont déjà discutées, par la matrice de rotation et la combinaison Axe d'Euler / angle principal. A partir de la discussion précédente, il est clair qu'une orientation générale peut également être obtenue en utilisant des rotations successives autour des axes du repère. Le plus grand nombre de rotations nécessaires pour spécifier de manière unique une orientation donnée, appelé degrés de liberté de rotation, est de trois. Par conséquent, nous pouvons employer trois angles, chacun autour d'un axe spécifique, pour décrire une orientation donnée. Une telle représentation de l'attitude par trois angles s'appelle une représentation d'angle d'Euler et les angles concernés sont connus sous le nom d'angles d'Euler. La séquence des rotations axiales commence par la plus importante dans la représentation de l'angle d'Euler.

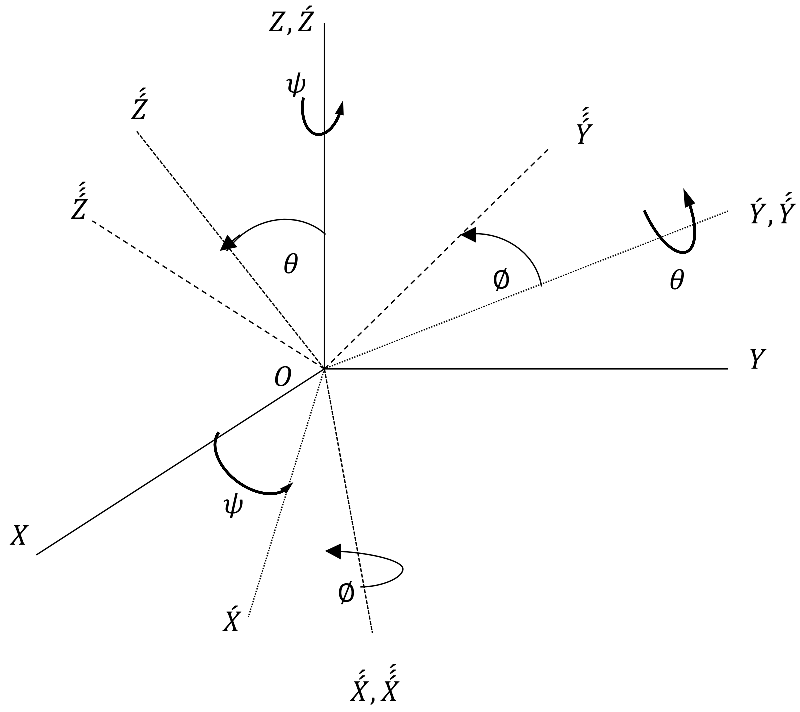


Figure A.5 : L'angle d'angle d'Euler, (ψ) 3, (θ) 2, (φ) 1.

On peut spécifier les angles d'Euler et les axes des rotations séquentielles en utilisant une notation telle que (ψ) 3, (θ) 2, (φ) 1, ce qui dénote une rotation de (OXYZ) par un angle ψ autour de OZ, aboutissant à l'orientation intermédiaire, (OX'Y'Z'), Suivi d'une rotation par l'angle θ autour de OY', Résultant en (OX''Y''Z''), puis une rotation finale par un angle Ø autour de OX'', pour produire la nouvelle orientation, (OX'''Y'''Z'''). Cette orientation d'angle d'Euler, qui décrit l'attitude par les angles : le lacet (ψ), le tangage (θ) et le roulis (Ø), est illustrée dans la Figure.5. La matrice de rotation pour l'orientation (ψ) 3, (θ) 2, (Ø) 1 est la suivante :

$$C = C_1(\phi)C_2(\theta)C_3(\psi) =$$
$$\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ (\sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi) & (\sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi) & \sin\phi\cos\theta \\ (\cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi) & (\cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi) & \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix} \quad (41)$$

Cependant, il n'est pas nécessaire que tous les trois axes de coordonnées soient impliqués dans la description d'une orientation particulière. Par exemple, les astronomes et les physiciens utilisent traditionnellement les angles d'Euler classiques (ω) 3, (i) 1, (Ω) 3 pour représenter l'orientation d'un plan orbital par rapport à un repère céleste. Un ensemble d'angles d'Euler qui commence et se termine par le même axe, tel que : (ω) 3, (i) 1, (Ω) 3, est dit symétrique. Les ensembles symétriques et asymétriques d'angles d'Euler sont qualitativement différents et il est généralement beaucoup plus facile de manipuler les premiers. Afin de spécifier l'attitude selon les angles d'Euler, nous devons être en mesure de les déterminer uniquement à partir de la matrice de rotation. De l'équation. (A.41) les angles d'Euler pour la représentation (ψ) 3, (θ) 2, (∅) 1 peuvent être déterminés en fonction de la transformation inverse suivante :

$$\begin{gathered} \phi = tan^{-1}\frac{C_{23}}{C_{33}} \\ \theta = -sin^{-1} C_{13} \\ \psi = tan^{-1}\frac{C_{12}}{C_{11}} \end{gathered} \tag{A.42}$$

Où c_{ij} représente l'élément (i, j) de C. Bien sûr, ni c_{11} ni c_{33} ne doivent disparaître ; sinon les angles ∅ et ψ ne peuvent pas être déterminés.

Les angles d'Euler ne sont pas uniques. De plus, il existe certaines orientations pour lesquelles les angles d'Euler ne peuvent pas être déterminés du tout à partir de la matrice de rotation, C. Dans un tel cas, la représentation d'angle d'Euler est dite singulière et devient inutile. Un exemple d'orientation singulière est (ψ) 3, (± 90◦) 2, (ϕ) 1, pour laquelle $c_{11} = c_{12} = c_{23} = c_{33} = 0$, et les angles ϕ et ψ deviennent indéterminés. Pour la plupart des avions, l'utilisation de la représentation d'angle d'Euler (ψ) 3, (θ) 2, (ϕ) 1 ne pose pas de problème, car (ψ) 3, (± 90◦) 2, (ϕ) 1 est rarement rencontré. Cependant, on ne peut pas en dire autant d'un vaisseau spatial, où l'attitude verticale est une possibilité. Bien sûr, dans un tel cas, on peut passer à un ensemble différent d'angles d'Euler (par exemple, (ψ) 3, (θ) 1, (ϕ) 3), pour lesquels une singularité particulière est évitée, mais la nouvelle représentation aurait une singularité à une autre orientation. Ainsi, une seule représentation par les angles d'Euler ne peut pas être utilisée lorsqu'une orientation arbitraire est possible. Ce défaut dans la représentation des attitudes par trois angles (ou trois paramètres quelconques) conduit à rechercher des représentations non singulières qui doivent nécessairement impliquer plus de trois paramètres. Deux choix évidents pour les représentations non singulières de l'attitude sont l'ensemble des neuf éléments de la matrice de rotation, ainsi que l'ensemble des quatre paramètres d'orientation résultant de la combinaison axe d'Euler / angle principal. Il est tout aussi évident que quatre paramètres d'orientation (ou plus) ne sont pas mutuellement indépendants [les éléments de la matrice de rotation obéissent à l'équation. (A.24), et les composantes de l'axe d'Euler doivent produire un vecteur unitaire]. Les angles d'Euler, comme tous les autres ensembles de trois paramètres, ont l'avantage d'être indépendants les uns des autres et constituent ainsi un ensemble minimal pour la représentation des attitudes. Cependant, leur utilisation est limitée aux applications où la rotation principale est restrictive aux orientations non singulières

A-6- Paramètres symétriques d'Euler (Quaternion)

Étant donné que la représentation d'axe d'Euler / angle principal ne présente pas de singularités, une représentation très utile peut en être déduite, appelée paramètres symétriques d'Euler, ou le quaternion. Un quaternion est un ensemble spécial composé de quatre paramètres scalaires mutuellement dépendants, q_1, q_2, q_3, q_4, de sorte que les trois premiers forment un vecteur, appelé la partie vectorielle,

$$q = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \tag{A.43}$$

et le quatrième, q_4, représente la partie scalaire. Pour la représentation d'attitude, le quaternion peut être déduit de l'axe d'Euler, **e**, et de l'angle de rotation principal, Φ, comme suit :

$$\begin{aligned} q_i &= e_i \sin\frac{\phi}{2} \qquad (i = 1,2,3) \\ q_4 &= \cos\frac{\phi}{2} \end{aligned} \tag{A.44}$$

Il est clair de l'équation. (A.44) que q_1, q_2, q_3, q_4 doivent satisfaire à l'équation :

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \tag{A.45}$$

Cette contrainte implique que le quaternion ne donne que trois paramètres scalaires indépendants, comme dans la représentation angle principal / axe d'Euler, ou les représentations d'attitude par les angles d'Euler. Puisque les quatre éléments du quaternion satisfont à la contrainte de l'équation (A.45), on peut dire que les orientations d'attitude varient le long de la surface d'une sphère unitaire à quatre dimensions sans aucune singularité. Ce fait est également évident à partir de l'angle principal, Φ, et des éléments du vecteur unitaire, e, représentant l'axe d'Euler. Le principal avantage de la représentation avec des quaternions par rapport à la combinaison axe d'Euler / angle principal (qui est également une représentation à quatre paramètres ne présentant pas de singularités) réside dans le fait que la première ne nécessite pas d'évaluation de la fonction trigonométrique intensive en calculs lorsqu'elle est dérivée de la matrice de rotation. La matrice de rotation, C, peut être écrite en termes de quaternion en substituant les définitions de l'équation (44) dans la formule d'Euler, conduisant à :

$$C = (q_4^2 - q^T q)I + 2qq^T - 2q_4 S(q) \qquad (A.46)$$

où S (q) est la fonction matrice asymétrique suivante formée par les éléments du vecteur q :

$$S(q)=\begin{pmatrix} 0 & -q_3 & -q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A.47)$$

Nous pouvons écrire l'équation (A.46) en termes des éléments de quaternion comme suit :

$$C = \begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_qq_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{pmatrix} \qquad (A.48)$$

qui donne les expressions suivantes permettant de calculer les éléments du quaternion à partir des éléments de la matrice de rotation, c_{ij}

$$q_1 = \frac{C_{23} - C_{32}}{4q_4}$$
$$q_2 = \frac{C_{31} - C_{13}}{4q_4} \qquad (A.49)$$
$$q_3 = \frac{C_{12} - C_{21}}{4q_4}$$

Avec

$$q_4 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 + C_{11} + C_{22} + C_{33}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 + traceC} \qquad (A.50)$$

Notons que deux signes sont possibles en calculant le quaternion à partir de C. Cependant, tout comme dans le cas de déduire l'angle principal / axe d'Euler à partir de la matrice de rotation (équation (A.33)) ceci ne provoque aucune ambiguïté, car une rotation de Φ autour de **e** est la même chose qu'une rotation de $-\Phi$ autour de **-e**. Ainsi, il n'y a pas de perte de généralité en prenant le signe positif dans l'équation. (A.50). Bien entendu, les expressions donnée ci-dessus ne sont valides que si $q_4 \neq 0$. Si q_4 est proche de zéro, on peut utiliser une représentation alternative, telle que :

$$q_2 = \frac{C_{12} - C_{21}}{4q_1}$$
$$q_3 = \frac{C_{31} - C_{13}}{4q_1} \qquad (A.51)$$
$$q_4 = \frac{C_{23} - C_{32}}{4q_1}$$

Ou

$$q_1 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 + C_{11} - C_{22} - C_{33}} \qquad (A.52)$$

De même, les deux autres expressions possibles du quaternion déduites à partir de la matrice de rotation impliquent la division par q_2 et q_3, respectivement. Parmi les quatre expressions possibles, la plus grande précision numérique est obtenue pour celle qui a le plus grand dénominateur, ce qui implique le plus grand argument de la racine carrée.

Le quaternion est une représentation compacte, non singulière de l'attitude, qui produit des expressions algébriques (plutôt que trigonométriques) pour les éléments de la matrice de rotation. Un autre avantage de l'utilisation du quaternion par rapport à d'autres représentations d'attitude réside dans sa combinaison facile pour des rotations successives. Quand l'orientation q'', q_4'' est obtenu en subissant d'abord une rotation q, q_4 suivie d'une rotation q', q_4', nous pouvons remplacer l'équation (A.48) des deux côtés

$$C(q'', q_4'') = C(q', q_4')C(q, q_4) \tag{A.53}$$

Pour obtenir le produit simple suivant, appelé la règle de composition :

$$\begin{Bmatrix} q_1'' \\ q_2'' \\ q_3'' \\ q_4'' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} q_4' & q_3' & -q_2' & q_1' \\ -q_3' & q_4' & q_1' & q_2' \\ q_2' & -q_1' & q_4' & q_3' \\ -q_1' & -q_2' & -q_3' & q_4' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} \tag{A.54}$$

La règle de composition de l'équation (A.54) est la propriété qui définit le quaternion (Whittaker), (Wertz) .Tout ensemble (q, q_4) satisfaisant à cette règle est appelé quaternion.

A-7- Paramètres de Rodrigues (vecteur de Gibbs)

Un ensemble de trois paramètres d'attitude, $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)^T$, appelés paramètres de Rodrigues, ou le vecteur de Gibbs, peut être directement dérivé du quaternion (q, q_4) comme suit :

$$\rho = \frac{q}{q_4} \tag{A.55}$$

qui, lorsqu'il est remplacé dans l'équation (A.44), les rendements

$$\rho = e \tan\frac{\emptyset}{2} \tag{A.56}$$

La règle de composition des paramètres de Rodrigues peut être déduite de celle du quaternion (équation (A.54)) comme suit soit le suivant :

$$\rho'' = \frac{\rho + \rho' - \rho' \times \rho}{1 - \rho . \rho'} \tag{A.57}$$

où ρ'' représente l'orientation finale obtenue en combinant ρ et ρ'. En utilisant la formule d'Euler, on peut déduire l'expression suivante de la matrice de rotation en fonction des paramètres de Rodrigues :

$$C = (I - S(\rho))(I + S(\rho))^{-1} \tag{A.58}$$

où S (ρ) est la matrice asymétrique suivant formée par les éléments de ρ :

$$S(\rho)=\begin{pmatrix} 0 & -\rho_3 & -\rho_2 \\ \rho_3 & 0 & -\rho_1 \\ -\rho_2 & \rho_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.59}$$

Les paramètres de Rodrigues peuvent être extraits des éléments de la matrice de rotation, c_{ij}, comme suit :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{C_{23}-C_{32}}{1+traceC\prime} \\ \rho_2 &= \frac{C_{31}-C_{13}}{1+traceC\prime} \\ \rho_3 &= \frac{C_{12}-C_{21}}{1+traceC\prime} \end{aligned} \tag{A.60}$$

Il est évident de l'équation (A.56) (ainsi que de l'équation (A.60)) que les paramètres de Rodrigues ont une singularité à $\Phi = n\pi$ (n = 1, 3, 5, ...), leur utilisation est donc limitée aux rotations principales de Φ <180°. L'ensemble à trois paramètres est donc similaire aux angles d'Euler en étant incapable de représenter une orientation arbitraire

A-8- Paramètres de Rodrigues modifiés

Afin d'étendre l'applicabilité des paramètres de Rodrigues pour les rotations principales supérieures à 180°, un ensemble à trois paramètres modifié est défini comme suit :

$$P = \frac{q}{1+q_4} \tag{A.61}$$

qui, lorsqu'il est substitué dans l'équation (A.44), produit :

$$P = e\, tan\frac{\emptyset}{4} \tag{A.62}$$

Clairement, le nouvel ensemble $p = (p_1, p_2, p_3)^T$ (appelé les paramètres de Rodrigues modifiés) ne présente pas de singularité pour les rotations principales de $\emptyset$ < 360°. Cependant, il existe une singularité à $\emptyset$ = 360°. La plupart des véhicules aérospatiaux non tournants ont des orientations avec $\emptyset$ < 360° et sont donc représentés par l'ensemble des paramètres de Rodrigues modifiés sans singularité. Puisque p est une représentation minimale, il est avantageux, par rapport au quaternion à quatre paramètres, de réduire le nombre d'équations cinématiques à résoudre pour l'attitude. La matrice de rotation peut être exprimée en termes de paramètres de Rodrigues modifiés en utilisant l'équation (A.46) comme suit :

$$C = I + \frac{4(p^T p - 1)}{(1 + p^T p)^2} S(p) + \frac{8}{(1 + p^T p)^2} S^2(p) \tag{A.63}$$

Où S (p) est la matrice asymétrique suivant les éléments de p :

$$S(p) = \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.64}$$

En substituant la relation entre les paramètres de Rodrigues et ceux de Rodrigues modifiés,

$$\rho = \frac{2p}{1 - p^T p} \tag{A.65}$$

dans l'équation (A.57), nous pouvons déduire la règle de composition assez compliquée suivante pour les paramètres de Rodrigues modifiés :

$$\acute{\acute{p}} = \frac{(1 - p^T p)\acute{p} + (1 - \acute{p}^T \acute{p})p - 2\acute{p} \times p}{1 + (p^T p)(\acute{p}^T \acute{p}) - 2p.\acute{p}} \tag{A.66}$$

A-9- Cinématique d'attitude

Abordons maintenant l'évolution d'un repère d'attitude dans le temps. Nous pouvons adopter l'une des différentes représentations d'attitude considérées ci-dessus pour décrire l'évolution de l'attitude. Prenons d'abord la représentation de la matrice de rotation. Considérons un repère en rotation, (OXYZ), avec des vecteurs unitaires, i, j, k, représentant respectivement les axes OX, OY, OZ, dont on s'intéresse à son changement d'attitude par rapport à un repère fixe arbitraire. Lorsque l'attitude change avec le temps, la matrice de rotation représentant l'orientation du repère en rotation par rapport à un repère fixe est C (t) fonction du temps. Pour trouver cette fonction, considérons une rotation principale infinitésimale, $\Delta\Phi$, dans un petit intervalle de temps, Δt, mesurée après un temps donné, t. La rotation est assez petite pour que nous puissions approcher $\cos \Delta\Phi \approx 1$, $\sin \Delta\Phi \approx \Delta\Phi$. De plus, nous supposons que Δt est si petit que l'axe de rotation, e (t), reste essentiellement inchangé. Ces hypothèses nous permettent d'écrire comme suit la matrice de rotation représentant le changement d'attitude dans l'intervalle de temps Δt en utilisant la formule d'Euler :

$$C(\Delta t) \approx I - \Delta\emptyset S(e) \tag{A.67}$$

Ou

$$C(\Delta t) \approx I - S(\Delta\emptyset e) \tag{A.68}$$

Avec

$$S(\Delta\emptyset e) = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta\emptyset e_z & \Delta\emptyset e_y \\ \Delta\emptyset e_z & 0 & -\Delta\emptyset e_x \\ -\Delta\emptyset e_y & \Delta\emptyset e_x & 0 \end{pmatrix} \tag{A.69}$$

Nous avons choisi de résoudre l'axe de rotation instantané dans le repère tournant, car C (Δt) décrit l'orientation du repère au temps t + Δt, par rapport à sa propre orientation antérieure au temps t, plutôt que par rapport au repère fixe. Ainsi, e (t) a ses composantes, e_x, e_y, e_z, résolues suivant les axes instantanés du repère tournant, i, j, k, au temps t. Soit les matrices de rotation C (t) et C (t + Δt) les attitudes du repère tournant par rapport à un repère fixe aux instants t et t + Δt, respectivement. La matrice de rotation, C (Δt), décrit l'évolution de l'attitude dans l'intervalle de temps, Δt, provoquée par une rotation principale de ΔΦ autour de **e**. Ainsi, C (Δt) désigne la rotation nécessaire pour produire C (t + Δt) à partir de C (t). Maintenant, ces matrices de rotation doivent obéir à la règle de composition pour les rotations successives, équation. (A.25), ce qui implique que l'orientation finale à l'instant t + Δt est liée à l'attitude initiale à l'instant t par :

$$C(t + \Delta t) = C(\Delta t)C(t) \tag{A.70}$$

En substituant (A.68) dans l'équation (A.70), nous pouvons écrire la dérivée temporelle de la matrice de rotation comme suit :

$$\frac{dC}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{C(t+\Delta t) - C(t)}{\Delta t} = -S(\omega)C(t) \tag{A.71}$$

Ou

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\emptyset e}{\Delta t} \tag{72}$$

est appelé le vecteur de vitesse angulaire du repère de référence. Il est important de souligner que la vitesse angulaire, ω (t), a ses composantes, ωx, ωy, ωz, au temps t résolues dans le repère tournant (plutôt que du repère fixe). La matrice asymétrique des composantes de vitesse angulaire est donc la suivante :

$$S\,(\omega)=\begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \tag{A.73}$$

L'équation (A.71) peut également être obtenue en différenciant simplement en fonction du temps les deux côtés de l'équation de définition de la matrice de rotation suivante :

$$\begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} = C \begin{Bmatrix} I \\ J \\ K \end{Bmatrix} \tag{A.74}$$

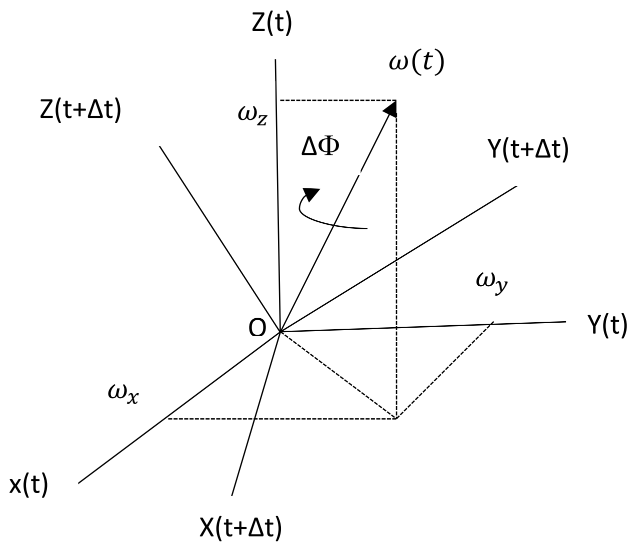


Figure A.6 : Un repère de référence tournant avec une vitesse angulaire, ω (t).

résultant en :

$$\begin{Bmatrix} \omega \times i \\ \omega \times j \\ \omega \times k \end{Bmatrix} = \frac{dC}{dt} \begin{Bmatrix} I \\ J \\ K \end{Bmatrix} \tag{A.75}$$

En appliquant la propriété de la matrice asymétrique : $S^{\,T}(\omega)$ = - S (ω), et en substituant l'équation (A.74) dans l'équation. (A.75), nous avons

$$-S(\omega)\begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} = \frac{dC}{dt} C^T \begin{Bmatrix} I \\ J \\ K \end{Bmatrix} \tag{A.76}$$

à partir duquel l'équation (A.71) suit à travers la propriété d'orthogonalité, l'équation (A.24).

Rappelons que la vitesse angulaire, ω (t), est résolue dans le repère de référence tournant (OXYZ), comme le montre la Figure A.6. Un tel choix d'axes est très pratique pour représenter la rotation d'un corps rigide. Dans un tel cas, les axes du repère de référence tournant sont fixés au corps rigide et peuvent être utilisés pour représenter l'attitude et la vitesse angulaire du corps par rapport à un repère inertiel (ou fixe dans l'espace). Rarement, il est souhaitable d'exprimer la vitesse angulaire avec ces composantes dans un repère inertiel. Dans un tel cas, la vitesse angulaire est appelée vitesse angulaire inertielle et est associée à la vitesse angulaire référencée par le satellite par. ω I = C^T(t) ω (t) en fonction de la transformation de coordonnée de l'équation. (A.21).

L'équation différentielle pour la matrice de rotation est l'équation (A.71), qui, avec une fonction donnée ω (t) et la condition initiale, C (0), devrait être résolu pour C (t) afin de décrire l'évolution de l'attitude. La solution, C (t), doit satisfaire à la condition d'orthogonalité de l'équation (A.24) ; en différenciant les deux côtés de l'équation, nous avons :

$$\frac{d}{dt} CC^T = \frac{d}{dt} C^T C = 0 \tag{A.77}$$

Cela implique que CC^T et $C^T C$ sont des matrices égales et constantes. Donc, si C (t) satisfait à l'équation (A.24) à un moment initial t = 0, elle l'a satisfait pour tout instant 't'. On peut facilement vérifier que l'équation différentielle de la matrice, de l'équation (A.71), satisfait à l'équation (A.77).

La vitesse angulaire, ω (t), varie généralement en fonction du temps et est obtenue à partir de la dynamique d'attitude, (Plutôt que de la cinématique). Même lorsque ω (t) a des éléments constants, un grand nombre de produits de matrice doit être calculé pour obtenir l'attitude en utilisant la matrice de rotation. Lorsque la vitesse angulaire, ω (t), n'a pas d'éléments constants, il devient assez difficile de résoudre l'équation différentielle (A.71), avec une matrice de coefficient S variant dans le temps, pour les neuf éléments de la matrice C (t). Au lieu de cela, il est beaucoup plus facile d'utiliser d'autres représentations d'attitude, telles que les angles d'Euler, le quaternion ou les paramètres de Rodrigues modifiés.

Considérons la représentation des angles d'Euler, (ψ) 3, (θ) 1, (φ) 3, qui est souvent utilisée pour l'attitude des engins spatiaux. Les trois rotations élémentaires successives requises dans cette représentation à partir d'un repère fixe (OXYZ), dont les axes sont respectivement I, J, K et ceux du repère tournant (Oxyz) d'axes i, j et k respectivement. La matrice de rotation reliant l'orientation finale de (Oxyz) à (OXYZ) peut être obtenue par

$$C = C_3(\emptyset)C_1(\theta)C_3(\psi) = \begin{pmatrix} (cos\,\psi\, cos\,\phi - sin\,\psi\, sin\,\phi\, cos\,\theta) & (sin\,\psi\, cos\,\phi + cos\,\psi\, sin\,\phi\, cos\,\theta) & sin\,\phi \sin\theta \\ -(cos\,\psi\, sin\,\phi + sin\,\psi\, cos\,\phi \cos\theta) & (-sin\,\psi \cos\phi + cos\,\psi \cos\phi \cos\theta) & cos\,\phi\, sin\,\theta \\ (sin\,\psi\, sin\,\theta) & -(cos\,\psi\, sin\,\theta) & cos\,\theta \end{pmatrix} \quad \text{(A.78)}$$

En termes de vitesses angulaires locales, $\dot{\emptyset}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ la vitesse angulaire, ω (t), peut être exprimée comme suit :

$$\omega(t) = \dot{\phi} k + \dot{\theta} \acute{\imath} + \dot{\psi} K \quad \text{(A.79)}$$

Ou

$$\acute{\imath} = i \cos\phi - j \sin\phi \quad \text{(A.80)}$$

Et

$$K = i \sin\phi \sin\theta + j \cos\phi \sin\theta + k \cos\theta \quad \text{(A.81)}$$

En remplaçant les équations (A.80) et (A.81) dans l'équation (A.79), nous avons

$$\omega(t) = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \sin\phi \sin\theta + \dot{\theta} \cos\phi \\ \dot{\psi} \cos\phi \sin\theta - \dot{\theta} \sin\phi \\ \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\phi} \end{Bmatrix} \quad \text{(A.82)}$$

Ou

$$\begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} = \frac{1}{sin\,\theta} \begin{Bmatrix} sin\,\phi & cos\,\phi & 0 \\ cos\,\phi\, sin\,\theta & -sin\,\phi\, sin\,\theta & 0 \\ -sin\,\phi\, cos\,\theta & -cos\,\phi\, cos\,\theta & sin\,\theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \quad \text{(A.83)}$$

L'équation (A.83) est la relation cinématique requise entre les angles d'Euler, ψ, θ, φ et la vitesse angulaire sous la forme de trois équations différentielles ordinaires du premier ordre couplées et non linéaires. Notons que cette relation a des singularités à θ = nπ (n = 0, 1, 3,..), Qui sont les singularités inhérentes à la représentation de l'angle d'Euler, (ψ) 3, (θ) 1, (φ) 3. Par conséquent, cette représentation est limitée aux rotations de 0 <θ <π, qui sont applicables aux attitudes des engins spatiaux et à l'orientation des plans orbitaux. Une représentation d'angle d'Euler différente, (ψ) 3, (θ) 2, (φ) 1 (Figure A.5), est couramment utilisée dans les applications aéronautiques et présente des singularités $\theta = n\pi / 2$ ($n = 1, 3, ...$), ce qui limite son application à $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

Pour un calcul cinématique compact qui a un plus grand étendue de validité, nous devons nous tourner vers les représentations d'attitude basées sur la combinaison axe d'Euler / angle principal, comme le quaternion et les paramètres de Rodrigues modifiés. Le quaternion a l'avantage d'être une représentation compacte (mais non minimale) et n'a pas de singularité pour la cinématique d'attitude. Ainsi, les applications dynamiques de vol modernes utilisent généralement le quaternion. Les équations cinématiques du repère tournant (oxyz) en termes de quaternion peuvent être obtenues à partir de l'équation (A.54). Comme dans la discussion précédente, nous considérons une rotation principale infinitésimale, ΔΦ, dans un petit intervalle de temps, Δt, tel que l'axe de rotation, $e(t) = e_x i + e_y j + e_z k$, reste essentiellement inchangé. Dans l'équation (A.54), nous substituons l'orientation à t + Δt, $\{\acute{q}, \acute{q_4}\} = \{q(t+\Delta t), q_4(t+\Delta t)$, qui est obtenu à partir de l'attitude initiale, q (t), q_4 (t), en subissant une rotation [q', q'_4] = [q (Δt), q_4(Δt)]. Ainsi, de la définition du quaternion, nous avons :

$$\begin{aligned} \acute{q}_1 &= e_x \sin\frac{\Delta\emptyset}{2} \\ \acute{q}_2 &= e_y\, sin\frac{\Delta\emptyset}{2} \\ \acute{q}_3 &= e_z\, sin\frac{\Delta\emptyset}{2} \\ \acute{q}_4 &= \cos\frac{\Delta\emptyset}{2} \end{aligned} \tag{A.84}$$

En les substituant dans l'équation (A.54), approximant cos ΔΦ ≈ 1, sin ΔΦ ≈ ΔΦ et en utilisant l'équation (A.72), nous pouvons écrire l'équation suivante pour l'évolution temporelle du quaternion :

$$\{q(t+\Delta t), q_4(t+\Delta t)\}^T \approx [I + \tfrac{1}{2}\Omega\Delta t]\{q(t), q_4(t)\}^T \tag{A.85}$$

Où Ω est la matrice asymétrique des composantes de la vitesse angulaire suivante :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{pmatrix} \tag{A.86}$$

Par conséquent, la dérivée temporelle du quaternion est :

$$\frac{d\{q,q_4\}^T}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\{q(t+\Delta t),q_4(t+\Delta t)\}^T - \{q(t),q_4(t)\}^T}{\Delta t} = \frac{1}{2}\Omega\{q(t),q_4(t)\}^T \qquad \text{(A.87)}$$

La forme linéaire, algébrique de l'équation différentielle de la matrice, de (A.87), est un avantage évident de la représentation par les quaternions. Contrairement aux angles d'Euler, il n'est pas nécessaire d'évaluer les fonctions trigonométriques dans le processus de résolution des équations cinématiques. La matrice Ω est soit constante, soit temporelle, selon que les composantes de la vitesse angulaire changent avec le temps. Dans les deux cas, nous pouvons adopter un schéma numérique pour intégrer cette équation différentielle linéaire pour le quaternion, q (t), q_4 (t). Nous pouvons diviser le temps final en intervalles plus petits et utiliser l'équation (A.87) dans chaque intervalle pour produire un historique du quaternion changeant. La division du temps en intervalles plus petits est nécessaire lorsque les composantes de vitesse angulaire (Ω) varient dans le temps, où l'équation (A.87) est employée avec un Ω différent dans chaque intervalle de temps. La taille de l'intervalle de temps dans un tel cas serait déterminée par le taux de variation des composantes de la vitesse angulaire. Une telle approximation quasi-stable de la matrice de coefficients variable dans le temps est couramment employée.

Conclusion

La transformation d'un référentiel à un autre (également appelée attitude d'un référentiel par rapport à un autre) implique une matrice de rotation orthogonale, C, dont les éléments peuvent être représentés par divers paramètres cinématiques, tels que les angles d'Euler, l'axe d'Euler / rotation principale, les paramètres symétriques d'Euler (quaternion), les paramètres de Rodrigues et de Rodrigues modifiés, etc. , alors que les ensembles à quatre paramètres, tels que le quaternion, sont sans singularité, mais également non minimaux. La cinématique d'attitude est régie par un ensemble d'équations différentielles ordinaires non linéaires en termes de matrice de rotation ou de l'un des paramètres d'attitude, qui doivent être intégrés dans le temps pour spécifier l'attitude instantanée d'un référentiel par rapport à un autre. Lorsque la vitesse angulaire d'un repère par rapport à un autre est constante, la cinématique d'attitude est décrite par un système linéaire d'équations différentielles.

Annexe B

Annexe B

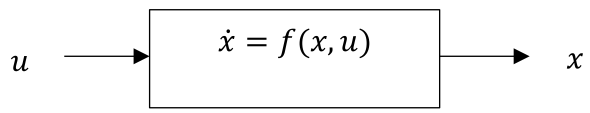
B-1 Introduction

B-1-1 Système contrôlé

Un système contrôlé (ou commandé) est un système différentiel de la forme :

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t)\big), \qquad x(t) \in M, \qquad u(t) \in U \tag{B.1}$$

En général le vecteur des états x(t) appartient à une variété différentielle M de dimension n (on supposera ici que M est un ouvert connexe de R^n), et les contrôles u(.) appartiennent à un ensemble de contrôles admissibles U, qui est un ensemble de fonctions localement intégrables d´définies sur [0 ; + ∞ à valeurs dans U $\subset R^m$. On suppose le champ de vecteur f suffisamment régulier, de sorte que pour toute condition initiale $x_0 \in M$ et tout contrôle admissible u(.) ∊ U, le système (1) admet une unique solution x(t) telle que x(0) = x0, et que cette solution soit d´définie sur [0 ; +1). On notera cette solution par x^f (t ; x0 ; u(.)). Quand il n'y a pas de risque de confusion, on pourra omettre dans cette notation le champ f, la condition initiale x_0, ou bien le contrôle u(.). Le système (1) est dit en boucle ouverte et est représenté par le diagramme suivant :



Parmi les objectifs principaux de la théorie du contrôle qui seront abordés dans ce volume, il y a les notions de contrôlabilité et de stabilisation. On se propose de d´définir ces notions et de rappeler les principaux résultats de contrôlabilité, de stabilisation et d'observabilité des systèmes linéaires :

$$\dot{X}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{B.2}$$

ou A est une matrice n × n appelée matrice d'´état et B une matrice n × m appelée matrice de commande. Les solutions de (2) sont données par

$$x\big(t, x_0, u(.)\big) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds \tag{B.3}$$

Il faut noter que certains problèmes pratiques sont mieux modélises par des équations aux d´dérivées partielles ou bien par des systèmes à ´évènements discrets

Annexe B

B-1-2- Approximation linéaire d'un système contrôlé :

Le système linéaire (B.2) s'obtient généralement par linéarisation du système non linéaire (B.1) autour d'un point d'équilibre (x_e ; u_e) pour lequel f (x_e; u_e) = 0. En effet, si on pose :

$$X = x - x_e, \quad U = u - u_e, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e), B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)$$

on obtient l'´équation :

$$\dot{X} = AX + BU + o(X, U)$$

Le système linéaire commandé $\dot{X} = AX + BU$ s'appelle alors l'approximation linéaire (ou le linéarisé tangent) du système non linéaire (1). Un des objectifs de l'automaticien consiste à d´déduire les propriétés du système non linéaire (1) de celles de son linéarisé tangent.

B-2- Contrôlabilité :

Un système est dit contrôlable si on peut le ramener à tout ´état prédéfini au moyen d'un contrôle. Plus précisément on pose la d´définition suivante :

Définition 1 On dit que le système (1) est contrôlable (ou commandable) si pour tous les ´états x_0, $x_1 \in M$, il existe un temps fini T et un contrôle admissible u(.) : [0; T] →U tel que

x_1 = x(T x0; u(.)).

B-2.1 Critère de contrôlabilité de Kalman

Il existe une caractérisation algébrique de la contrôlabilité d'un système linéaire due à Kalman.

Théorème 1 Le système linéaire (2) est contrôlable si et seulement si la matrice de contrôlabilité (ou de commandabilité) de Kalman

$$(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$$

est de rang n. On dit alors que la paire (A, B) est commandable.

Noter que la paire (A, B) est commandable si et seulement s'il existe T > 0 tel que la matrice

$$C_T = \int_0^T e^{sA} B \acute{B} e^{s\acute{A}} ds$$

soit inversible. Ici Á et B́ d´désignent les matrices transposées des matrices A et B.

Le contrôle u(.) qui transfère x_0 en x_1 = x(T, x_0; u(.)) est simplement donné par

$$u(t) = \acute{B}e^{(T-s)\acute{A}}C_T^{-1}(x_1 - e^{TA}x_0)$$

Comme on peut le vérifier en utilisant la formule (3).

B-2-2- Contrôlabilité locale d'un système non linéaire

Définition 2 On dit que le système (1) est localement contrôlable au point x_0 s'il existe un voisinage A de x_0 tel que pour tout $x_1 \in A$, il existe un temps fini T et un contrôle admissible

u(.) : [0; T] → U tel que x_1 = x(T; x_0; u(.)).

On ne dispose pas de condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité pour un système non linéaire. On a une condition suffisante de contrôlabilité locale qu'on peut obtenir par linéarisation.

Théorème 2 Supposons qu'il existe $u_0 \in R^m$ tel que U soit un voisinage de u_0 et f(x_0; u_0) = 0 Soient

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0), \qquad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)$$

Si le rang de la matrice (B, AB, ...,A^{n-1}B) est égal à n (c'est à dire que le système linéaire

$\dot{x}(t) = Ax + Bu$ est contrôlable), alors le système non linéaire (1) est localement contrôlable en x_0.

Noter que la contrôlabilité du linéarisé n'est pas une condition n´nécessaire de contrôlabilité

du système non linéaire. En fait, pour les systèmes non linéaires, il existe un critère simple, rappelant le critère de Kalman, qui permet d'aborder les questions de contrôlabilité. Expliquons-le sur le système particulier :

$$\dot{X}(t) = f(x) + ug(x), \quad |u| \leq 1$$

On appelle crochet de Lie des deux champs de vecteurs f et g le champ de vecteur d´défini par la formule :

Annexe B

$$x \to [f, g](x) = Df(x)g(x) - Dg(x)f(x)$$

et l'algèbre de Lie engendrée par f et g, notée L (f, g), la plus petite famille close pour l'opération de crochet qui contienne f et g. Le rang en x de (f, g) est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les valeurs en x des ´éléments de L (f ; g). Appelons ensemble des états accessibles à partir de x_0 l'ensemble des points qui peuvent être atteints à partir de x_0 un utilisant tous les contrôles admissibles. Un résultat fondamental est que, si le rang en x_0 de (f ; g) est égal à n, alors l'ensemble des états accessible à partir de x_0 est d'intérieur non vide. De ce résultat on d´déduit le critère de Kalman. En effet, considérons le système

$$\dot{x}(t) = A(x) + bu, \quad u \in \mathbb{R}$$

Ou le contrôle u est non borné. Les états accessibles du système

$$\dot{x}(t) = A(x) + bu, \quad |u| \leq 1$$

sont contenus dans l'espace vectoriel des états contrôlable à partir de x_0 du système où le contrôle est non borné. Si ces états accessibles sont d'intérieur non vide quel que soit x_0 le système sera contrôlable, puisqu'un sous espace vectoriel d'intérieur non vide est l'espace tout entier. Calculons les crochets :

$$[(x \to Ax), (x \to b)](x) = Ab,$$

$$[(x \to Ax), (x \to Ab)](x) = A^2 b,$$

$$\ldots\ldots.$$

$$[(x \to Ax), (x \to A^{n-2} b)](x) = A^{n-1} b,$$

0n voit que le critère de Kalman équivaut à la condition du rang.

B-3- Stabilisation

Un contrôle (ou une commande) en boucle ouverte est une application t → u(t) d'un intervalle de temps dans l'espace des contrôles. Un contrôle en boucle fermée, appelé aussi une rétroaction, ou un bouclage, ou encore un feed back, est une application u → R(x) définie sur les variables d'´état du système. Un des objectifs de la théorie du contrôle est de d´déterminer des rétroactions qui stabilisent le système en un état particulier.

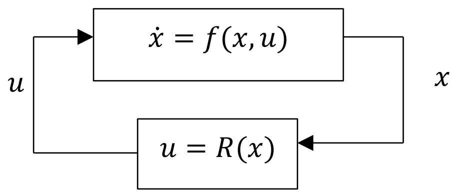
B-3-1- Bouclage statique

Définition 3 (Bouclage statique). On dit que u est un bouclage statique du système (1) si sa valeur u(t) à l'instant t ne d´dépend que de x(t), c'est à dire u = R(x) où R est une fonction.

Ce système s'écrit tout simplement

$$\dot{x}(t) = f((x), R(x)) \qquad (4)$$

Il est représenté par le diagramme suivant.



Le problème de la stabilisation (ou régulation) consiste à maintenir le système près d'un équilibre x*. Il s'agit donc de construire une loi de commande telle que x* soit un équilibre asymptotiquement stable du système en boucle fermée (B.4).

B-3-2- Concepts de stabilité

On se donne un système

$$\dot{x}(t) = f((x) \qquad (B.5)$$

Tel que f(0) = 0, admettant x = 0 comme équilibre (noter que par un changement de variable on peut toujours ramener l'équilibre à l' origine).

Définition 4 L'équilibre x = 0 du système (5) est dit stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute solution x(t) de (B.5) on ait

$$\|x(0)\| < \eta \Longrightarrow \forall t \geq 0 \|x(t)\| < \varepsilon$$

Si l'équilibre n'est pas stable on dit qu'il est instable.

Définition 5 L'équilibre x = 0 du système (5) est dit attractif s'il existe r > 0 tel que pour toute solution x(t) de (B.5) on ait

$$\|x(0)\| < r \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

L'équilibre x = 0 du système (5) est dit globalement attractif si pour toute solution x(t) de (B.5) on a $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$

L'ensemble B d´défini par la propriété

$$x(0) \in \mathcal{B} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

S'appelle le bassin d'attraction de l'origine. Ainsi x = 0 est attractif si $\mathcal{B}$ est un voisinage de 0. Il est globalement attractif si $\mathcal{B} = R^n$.

Définition 6 L'équilibre x = 0 du système (5) est dit asymptotiquement stable s'il est stable et attractif. Il est dit globalement asymptotiquement stable (GAS) s'il est stable et globalement attractif.

Définition 7 L'équilibre x = 0 du système (5) est dit exponentiellement stable s'il existe r > 0, M > 0 et $\alpha > 0$ tels que pour toute solution x(t) on ait

$$\|x(0)\| < r \Longrightarrow \|x(t)\| \leq M\|x(0)\|e^{-\alpha t} \text{ Pour tout } t \geq 0$$

L'équilibre x = 0 du système (B.5) est dit globalement exponentiellement stable s'il existe M > 0 et $\alpha > 0$ tels que pour toute solution x(t) de (B.5) on a $\|x(t)\| \leq M\|x(0)\|e^{-\alpha t}\cdot$ pour tout t≥¸ 0.

On montre que, en général, stable n'implique pas attractif, attractif n'implique pas stable, exponentiellement stable implique asymptotiquement stable, et asymptotiquement table n'implique pas exponentiellement table.

B-3-3- Approximation linéaire d'un système

Considérons un système

$$\dot{x}(t) = f(x) \tag{B.6}$$

tel que f(x*) = 0, de sorte que x = x* soit un équilibre du système. On note

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x*)$$

la matrice jacobéenne de f évaluée au point x*. Le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \qquad (B.7)$$

S'appelle le linéarisé (ou l'approximation linéaire) du système non linéaire (9) en x*. L'étude de la stabilité de l'origine pour le linéarisé permet dans certains cas de caractériser la stabilité de l'´équilibre x = x* de (9). Plus précisément on a le résultat suivant connu sous le nom de théorème de Lyapounov.

Théorème 4 Si x = 0 est exponentiellement stable pour (10) alors x = x* l'est pour (9).

B-3-4- Stabilisation locale d'un système non linéaire

Un système linéaire contrôlable peut être stabilisé asymptotiquement par un contrôle linéaire (donc continu). Cette propriété n'est pas vraie pour un système non linéaire. Il y a des systèmes non linéaires, localement (et même globalement) contrôlables, qu'on ne peut pas stabiliser par un contrôle continu. Cependant si l'approximation linéaire du système est contrôlable, alors on peut le stabiliser par un contrôle continu (et même linéaire). En effet considérons un système commandé

$$\dot{x}(t) = f(x, u), \qquad f(0,0) \qquad (B.8)$$

On se propose de construire une loi de commande u = R(x) telle que le système en boucle fermée

$$\dot{x}(t) = f\big(x, R(x)\big),$$

admet l'origine comme équilibre asymptotiquement stable. On considère alors l'approximation linéaire

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu \qquad (B.9)$$

où les matrices A et B sont définies par

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \;\; B = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$$

Supposons que (A ; B) soit commandable. Il existe alors une matrice K telle que la matrice A + BK soit de Hurwitz. Par conséquent le contrôle u = K x stabilise globalement le système linéaire (9).

Théorème 6 Le contrôle u = K x stabilise localement le système (7).

En effet le système en boucle fermée s'écrit

$$\dot{x}(t) = F(x) = f(x, Kx),$$

On a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)K = A + Bk,$$

Donc x = 0 est asymptotiquement stable pour le linéarisé. Le théorème de Lyapounov (Théorème 4) permet alors d'affirmer que x = 0 est asymptotiquement stable pour le système non linéaire $\dot{x}(t) = F(x)$

B-3-5- Fonctions de Lyapounov

Les fonctions de Lyapounov sont un outil puissant pour étudier la stabilité d'un équilibre. Considérons de nouveau le système

$$\dot{x}(t) = f(x) \tag{B.10}$$

tel que f(0) = 0, admettant x = 0 comme équilibre. Soit V : Ω → R une fonction définie dans un voisinage Ω de l'origine et admettant des dérivées partielles continues.

On note

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x).f(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) f_i(x)$$

la dérivée de la fonction V dans la direction du champ de vecteurs f. Cette dérivée s'appelle aussi la d´dérivée de Lie de V et se note $L_f V$. Pour toute solution x(t) de (10) on a

$$\frac{d}{dt}V\big(x(t)\big) = \dot{V}(x(t))$$

Définition 9 On dit que V est une fonction de Lyapounov pour le système (10) en x = 0 dansΩ, si pour tout $x \in \Omega$ on a

V (x) > 0 sauf en x = 0 où V (0) = 0

$\dot{V}(x) \leq 0$

Théorème 7

Annexe B

1. S'il existe une fonction de Lyapounov pour (10) en x = 0 dans un voisinage Ω de 0, alors x=0 est stable.

2. Si de plus $x \neq 0 \Longrightarrow \dot{V}(x) < 0$, alors x = 0 est asymptotiquement stable.

3. Si de plus Ω = R^n et V(x)→ ∞ quand $\|x\|$ → ∞ alors x = 0 est GAS.

Définition 10 Une matrice carrée P d'ordre n est dite définie positive si et seulement si pour tout $x \in R^n$

$$x \neq 0 \Longrightarrow \acute{x}Px > 0$$

Si P est une matrice symétrique alors ses valeurs propres sont réelles et on a

$$\lambda_{min}\|x\| \leq \grave{x}Px \leq \lambda_{max}\|x\|$$

Pour vérifier qu'une matrice symétrique P est définie positive, on peut utiliser le critère de Sylvester (P est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont positifs).

Théorème 8 Considérons un système linéaire

$$\dot{x} = Ax \tag{B.11}$$

L'origine x = 0 de (11) est asymptotiquement stable si et seulement si pour toute matrice d´définie positive Q il existe une matrice d´définie positive P telle que

$$\acute{A}p + PA + Q = 0 \tag{B.12}$$

En ce cas V (x) = $\acute{x}Px$ est une fonction de Lyapounov pour (11) en x = 0.

Pour la preuve de ce théorème il suffit d'observer que

$$\dot{V}(x) = \dot{\acute{x}} + \acute{x}P\dot{x} = \acute{x}(\acute{A}p + PA)x = -\acute{x}Qx$$

Donc le théorème de Lyapounov s'applique et montre que x = 0 est asymptotiquement stable. Pour la réciproque on définit

$$P = \int_0^{+\infty} e^{8\grave{A}}\, Q_e^{sA} ds$$

Cette intégrale est bien convergente car toutes les valeurs propres de la matrice A et donc aussi de sa transposée A' sont de partie réelle strictement n´ergative. La matrice P est définie positive car

$$x \neq 0 \Longrightarrow \forall s \geq 0 (e^{sA}x)'^{Q_e^{sA}} x > 0 \Longrightarrow x'Px > 0$$

Par ailleurs on a

$$A'P + PA = \int_0^{+\infty} [A' e^{sA'} Q_e^{sA} + e^{sA'} Q_e^{sA} A] ds$$

Comme

$$\frac{d}{ds} e^{sA} = A e^{sA} = e^{sA} A$$

on en déduit que

$$A' e^{sA'} Q_e^{sA} + e^{sA'} Q_e^{sA} A = \frac{d}{ds} e^{sA'} Q_e^{sA}$$

Par conséquent

$$A'P + PA = (e^{sA'} Q_e^{sA})_{s=0}^{s=+\infty} = -Q$$

Donc P vérifie l'équation (16) appelée l'équation matricielle de Lyapounov.

Pour construire une fonction de Lyapounov pour le système (15) il faut procéder de la manière suivante :

Choisir une matrice définie positive Q (par exemple Q = Id)

Résoudre l'´équation de Lyapounov (16). Si on a choisi Q symétrique alors P sera symétrique aussi.

Vérifier que P est définie positive.

B-4- Observabilité

B-4-1- Système commandé-observé

Dans beaucoup de situations pratiques, une partie seulement de l'état du système, appelée la sortie ou la variable observée, est mesurée. Un système commandé –observé est un système différentiel de la forme

$$\dot{x}(t) = f(x, u)$$

$$y = h(x) \tag{B.13}$$

où le vecteur x est le vecteur des ´états du système, le vecteur u celui des contrôles (entrées) et le vecteur y celui des variables observées (sorties). Ce système est dit en boucle ouverte et est représenté par le diagramme suivant.

$$u \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \dot{x} = f(x,u) \\ y = h(x) \end{array}} \longrightarrow y$$

Le système non linéaire sera dit observable si la sortie y(t) permet de retrouver l'état x(t).

Un observateur pour le système (13) est un système

$$\dot{\hat{x}}(t) = g(\hat{x}(t), y(t), u(t)) \qquad \text{(B.14)}$$

ayant comme entrées u(t) et y(t) (la sortie du système (13)) et tel que l'erreur

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

tende vers 0 quand t → ∞. L'équation de l'erreur est

$$\dot{e} = f(x,u) - g(x - e, h(x), u)$$

Selon que e = 0 est un équilibre GAS, asymptotiquement stable, ou exponentiellement stable, on dira que l'observateur est global, local ou exponentiel.

B-4.2 Critère d'observabilité de Kalman

Considérons le système linéaire commandé -observé

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x \in R^n, \qquad u \in R^m$$

$$y = Cx \qquad y \in R^n \qquad \text{(B.15)}$$

Définition 11 On dit que le système linéaire (15) est observable si pour tout état $x_0 \in R^n$, il existe un temps fini T et un contrôle admissible u(.) : [0; T] → U tel que la connaissance de y(t) pour t ∈ [0; T] permet de d´déterminer x0.

Il existe une caractérisation algébrique de l'observabilité d'un système linéaire due à Kalman.

Théorème 9 Le système linéaire (15) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité de Kalman

Annexe B

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

est de rang n. On dit alors que la paire (A ; C) est observable.

Noter que la paire (A ; C) est observable si et seulement s’il existe T > 0 tel que la matrice

$$O_T = \int_0^T e^{sA'}C'Ce^{sA}ds$$

soit inversible

Annexe C

La commande par feedback linéarisation appliquée au système d’attitude d'un satellite

Annexe C

La commande par feedback linéarisation appliquée au système d'attitude d'un satellite

1- Dynamique de base et théorie du contrôle

1- 1- Dynamique d'attitude et cinématique

$$J\dot{\omega} + \omega \times J\omega = u \tag{1}$$

Ou

J : Matrice d'inertie

ω **:** La vitesse angulaire,

u **:** Le vecteur de la commande

$$q = \begin{bmatrix} q_v \\ q_4 \end{bmatrix}, \qquad q_v = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \mathrm{I}\sin\frac{\phi}{2}, \quad q_4 = \cos\frac{\phi}{2} \tag{2}$$

I : est l'axe d'Euler et ϕ l'angle principal correspondant.

$$\dot{q} = \frac{1}{2}\Omega(\omega)q = \frac{1}{2}\Xi(q)\omega \tag{3}$$

Pour lesquels :

$$\Omega(\omega) = \begin{bmatrix} -[\tilde{\omega}] & \omega \\ -\omega^T & 0 \end{bmatrix}, \Xi(q) = \begin{bmatrix} q_4 \mathrm{I}_{3\times3} + [\tilde{q}_v] \\ -q_v \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$[\tilde{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega 3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Le quaternion doit aussi satisfaire : $q^T q = q_v^T q_v + q_4^2 = 1$ (6)

1-2- Linéarisation par retour d'état :

L'objectif de la représentation entrée-sortie est de trouver une relation directe entre la sortie du système et son entrée. Pour exprimer explicitement cette relation, il est nécessaire de dériver itérativement la sortie du système jusqu'à l'apparition de l'entrée u. On obtient alors

$$\dot{X} = f(X) + g(X)U \tag{7}$$

La fonction de sortie est définie par :

$$y(t) = h(X(t)) \tag{8}$$

Où **:** f(x) et g(x) sont des fonctions dans le champ des vecteur R^n , et le vecteur de commande et de sortie Les fonctions multi entrées, multi sortie correspondant sont.

$$u = [u_{1\,\ldots}\ u_m]^T \tag{9}$$
$$y = [y_{1\,\ldots}\ y_m]^T$$
$$h = [h_{1\,\ldots}\ h_m]^T$$

La linéarisation par retour d'état consiste à trouver des nombres naturels $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ et la commande par retour d'état

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \tag{10}$$

Où α et β sont des vecteurs lisses définis au voisinage d'un point $x_0 \in R^n$**,** det $\beta(x_0) \neq 0$

Tel que le système soit en boucle fermée

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v \\ y = h(x) \end{cases} \tag{11}$$

A la propriété suivante **:** la ρ^{eme} dérivée de la sortie satisfait

$$Y^\rho(t) = \begin{bmatrix} y_1^{\rho 1} \\ y_2^{\rho 2} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_i^{\rho i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ v_m(t) \end{bmatrix} = v(t) \tag{12}$$

Pour laquelle **:** v (t) est une fonction arbitraire qui est définie selon l'objectif de la loi de commande.

Pour chaque sortie (yi) le degré relatif ρi ρ peut être introduit comme suit :

$$\begin{aligned} y_i^1 &= \qquad L_f\, h_i(x) \\ y_i^2 &= \qquad L_f h_i\ (x) \\ &\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ y_i^{\rho i} &= L_{f\ h_i}(x) + \textstyle\sum_{i=1}^{m} L_{gj} L_f^{\rho-1} h_i(x) h_i(x)\, uj \end{aligned} \tag{13}$$

Ou $L_f^k h(x)$ est appelée la dérivée de lie de $L_f^{k-1} h(x)$ le long du champ de vecteur f et on assume que pour la dernière « j »,1 ≤j ≤m, satisfait : $L_{gj} L_f^{\rho-1} h_i(x) \neq 0$

Maintenant et par l'introduction de la notation **:**

$s = [s_{1\,\ldots}\ s_m]^T$ et :

$$F(x) = \begin{matrix} L_f^{\rho 1} h_1(x) \\ L_f^{\rho 2} h_2(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ L_f^{\rho m} h_m(x) \end{matrix} \tag{14}$$

La relation suivante avec représentation vectorielle peut être établie :

$$Y^{\rho}(t) = \mathrm{F(x)} + \mathrm{G(x)u} \tag{15}$$

Ou :

$$G(x) = \begin{bmatrix} L_{g1}\, L_f^{\rho 1} h_1(x) \ldots & L_{gm}\, L_f^{\rho 1} h_1(x) \\ L_{g1}\, L_f^{\rho 2} h_2(x) \ldots & L_{gm}\, L_f^{\rho 2} h_2(x) \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ L_{g1}\, L_f^{\rho m} h_m(x) \ldots & L_{gm}\, L_f^{\rho m} h_m(x) \end{bmatrix}$$

Si G(x) et inversible pour un certain point donné (x0), alors la loi de commande en entrée peut être écrite comme :

$$u\,(t)=G^{-1}(x)(-F(x)+v) \tag{16}$$

Alors que :

$$Y^{(\rho)} = v(t), \qquad t \in \Gamma \tag{17}$$

Maintenant pour la commande par retour d'état, le suivi asymptotique du signal de sortie est réalisé si le signal d'erreur est défini par **:**

$$e_i\,(t)=y_i(t)-r_i(t), \qquad i=1,2,\ldots, m \tag{18}$$

Où r_i est la i^{eme} trajectoire de référence pour la sortie correspondante.

La conception de la loi de commande se fait par la sélection du : v=vi (i=1,2,…,m) comme suit **:**

$$v_i(t) = r_i^{\rho i} - c_{i(\rho i-1)} e_i^{\rho i-1} - \cdots - c_{i1} e_i^1 - c_{i0} e_i \tag{19}$$

Alors la dynamique du système en boucle fermée s'écrit comme :

$$e_i^{\rho i} + c_{i(\rho i-1)} e_i^{\rho i-1} + \cdots + ci1 e_i^1 - c_{i0} e_i = 0 \tag{20}$$

Ou : (i=1,2,…..m) et cij sont des constantes pour un système stable en boucle fermée.

Le suivi asymptotique de la loi de commande est plus pratique que le suivi exact de la loi de commande utilisant l'erreur initiale entre la référence et le système actuel dans le cas général.

2.3. Commande par mode glissant :

Dans un contexte similaire, le contrôleur peut être étendu à un contrôleur par mode glissant pour un système de vecteur de dégrées relativesρ ,ρ ,...,ρ m 1 2 , la surface glissante est définie par **:**

$$S_i(t) = e_i^{\rho i-1} + c_{i(\rho i-1)} e_i^{\rho i-2} + \cdots + ci1\, e_i \; - c_{i0} \int e_i = 0 \quad (21)$$

M= 1,2, ... m

Après des calculs algébriques, la forme finale du contrôleur en mode glissant qui satisfait la condition de glissement dans l'équation (3.22) est représentée suivant la forme

u (t) = $G^{-1}(-\dot{s} + Y^{\rho} - F - K\, sgn(s))$ (23)

Où S= [S1,…,Sm]T est le vecteur de la surface de glissement

K= [K1,…, Km]T est une matrice de gain à déterminer

Et Sgn(s)=[sgn(s1),…,sgn(sm)]T représente le vecteur fonction signum

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \; ; \det\beta(x_0) \neq 0 \quad (24)$$

2- La loi de commande utilisant uniquement des quaternions :

2-1- La fonction de sortie :

$$\dot{y} = \dot{q}_v = -\frac{1}{2}\omega \times q_v + \frac{1}{2} q_4 \omega \quad (25)$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{4}\omega \times (\omega \times q_v) - \frac{1}{4}\omega^T q_v \omega + \frac{1}{2}([\tilde{q}_v] + q_4 I_{3\times3})(J^{-1}\omega) \times (J\ \omega) + \frac{1}{2}([\tilde{q}_v] + q_4 I_{3\times3}) J^{-1} u \equiv \alpha(\omega, q) + \beta(\omega, q) u$$

(26)

La trajectoire de référence pour le quaternion d'attitude est déterminée par :

$q_v = q_v^0$ à t=0, et $q_v(t_f) = q_v^f$ à t = ∞

Une trajectoire de référence pour les conditions aux limites est générée comme suit :

$$r(t) = q_v^0 + (q_v^f - q_v^0)(1 - e^{-t/\tau})$$

(27)

3-2- Conception de la loi de commande :

La forme généralisée de la loi de commande de suivi est proposée comme suit:

$$u = \beta^{-1}\left[\ddot{r}(t) - \alpha(t) - c_1(\dot{y}(t) - \dot{r}(t)) - c_0(y(t) - r(t))\right] \quad (28)$$

C_1, C_0 : sont des matrices diagonales constantes,

Annexe C

La commande par feedback linéarisation appliquée au système d'attitude d'un satellite

nous supposons que β^{-1} existe. Nous pouvons facilement voir que :

$$\beta^{-1} = \frac{1}{q_4}\begin{bmatrix} q_4^2 + q_1^2 & q_3 q_4 + q_2 q_1 & q_3 q_1 - q_2 q_4 \\ -q_3 q_4 + q_2 q_1 & q_4^2 + q_2^2 & q_4 q_1 + q_3 q_2 \\ q_3 q_1 + q_2 q_4 & -q_4 q_1 + q_3 q_2 & q_4^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Références

Besnard, L, Y B Shtessel et B Landrum. «Quadrotor vehicle control via sliding mode controller driven by sliding mode disturbance observer.» *Journal of the Franklin Institute* 349.2 (2012): 658-684.

Bustan, D, S H Sani et N Pariz. «Adaptive fault-tolerant spacecraft attitude control design with transient response control.» *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 19.4 (2014): 1404-1411.

Chen, C T. *Linear System Theory and Design*. Vol. Third Edition. New York: Oxford University Press, 1999.

Chen, W H, et al. «Disturbance-observer-based control and related methods—An overview.» *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 63.2 (2015): 1083-1095.

Chen, Y P et S C Lo. «Sliding-mode controller design for spacecraft attitude tracking maneuvers.» *IEEE transactions on aerospace and electronic systems* 29.4 (1993): 1328-1333.

Chunodkar, A A et M R Akella. «Switching angular velocity observer for rigid body attitude stabilization and tracking control.» *Journal of Guidance and Control Dynamics* 37.3 (2014): 869-878.

Cong, B L, Z Chen et X D Liu. «Disturbance observer-based adaptive integral sliding mode control for rigid spacecraft attitude maneuvers.» *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering* 227.10 (2013): 1660-1671.

Chyun-Chau, F. «variable-thickness boundary layers for sliding mode control.» *Journal of Marine Science and Technology* 16.288 (2008): 288-294.

Crassidis, J L, S R Vadali et F L Markley. «Optimal Tracking of Spacecraft Using Variable-Structure Control,.» *Proceedings of the Flight Mechanics/Estimation Theory Symposium, (Greenbelt, MD), NASA-Goddard Space Flight Center*. 1999. 201-214.

DAL, M et R Teodorescu. «Sliding mode controller gain adaptation and chattering reduction techniques for DSP-based PM DC motor drives.» 19.4 (2011): 531-549.

Daly, J M et D W Wang. «Time-Delayed Output Feedback Bilateral Teleoperation With Force Estimation for -DOF Nonlinear Manipulators.» *IEEE Transactions on Control Systems Technology, 22(1),* . 22.1 (2014): 299-306.

Doruk , R O. «Nonlinear Controller Design for a Reaction Wheel Actuated Observatory satellite.» Middle EastTechnical University, 2008.

Elmali, H et N Olgac. «Satellite attitude control via sliding mode with perturbation estimation.» *IEE Proc.-control theory application* 143.3 (1996): 276-282.

Emel'yanov, S V. «On pecularities of variables structure control systems with discontinuous switching functions.» *Doklady ANSSR* 153 (1963): 776-778.

Eme'yanov, S V. « Variable Structure Control Systems.» *Moscow. Nouka* (1967).

Feng, Y, X Yu et F Han. «High-order terminal sliding-mode observer for parameter estimation of a permanent-magnet synchronous motor.» *IEEE Transactions on industrial electronics, 60(10),* . 60.10 (2013): 4272-4280.

Forbes, J R, et al. «Magnetic attitude control of a flexible satellite.» *Jornal of Guidance. Control and Dynamics* 36.5 (2013): 1522-1527.

Gao, Z, X Liu et M Chen. «Unknown Input Observer-Based Robust Fault Estimation for Systems Corrupted by Partially Decoupled Disturbances.» *IEEE Trans. Industrial Electronics* 63.4 (2016): 2537-2547.

Ginoya, D, P Shendge et S Phadke. «Sliding mode control for mismatched uncertain systems using an extended disturbance observer.» *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 61.4 (2014): 1983-1992.

Goeree, B et G Chatel. *Attitude Dynamics, Techinal Note*. USA: University of Arizona, 1999.

Guan, P, X J Liu et J Z Liu. «Adaptive fuzzy sliding mode control for flexible satellite.» *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 18 (2005): 451-459.

Halbwachs, M Francois. *Rotation instantanée et angle d'Euler dans l'espace-temps,Annales de l'I.H.P.* 3 vols. Paris: Institut Henri Poincaré, 1959.

Hamada, Y, et al. «Synthesis of a linearly interpolated gain scheduling controller for large flexible spacecraft ETS-VIII.» *Control Engineering Practice* 19 (2011): 611-625.

Hamel, B. «Contribution à L'étude Mathématique des Systèmes de Réglage par Tout ou Rien.» *Centre d'études de mécanique* 1949.

Hughes, P C. «Spacecraft Attitude Dynamics.» *Courier Corporation* (2004).

Hui, L et J F Li. «Terminal sliding mode control for spacecraft formation flying.» *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic* 45.3 (2009): 835-846.

Junkins, C G et J D Turner. *Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers*. Amsterdam: Elsevier, 1986.

Hwang, G C et S Chang. «A stability approach to fuzzy control design for nonlinear system.»

Fuzzy Sets and Systems, 48 (1992): 279-287,.

Kim, K S et Y Kim. «Robust backstepping control for slew Maneuver using nonlinear tracking function.» *IEEE Transactions on control systems technology* 11.6 (2003): 822-829.

Kim, S W et J J Lee. «Design of a fuzzy controller with fuzzy sliding surface.» *Fuzzy Sets and Systems* 71.3 (1995): 359-367.

Kreyszig, E. *Advanced Engineering Mathematics*. New York: Wiley, 2001.

Li, Z, et al. «Nonlinear disturbance observer-based control design for a robotic exoskeleton incorporating fuzzy approximation.» *IEEE Transactions on Industrial Electronics, 62(9), 5763-5775.* 62.9 (2015): 5763-5775.

Lim, T W. «Thruster attitude control system design and performance for Tactical satellite 4 maneuvers.» *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 37.2 (2014): 403-412.

Liu, J, Laghrouche et Wack. «Observer-based higher order sliding mode control of power factor in three-phase AC/DC converter for hybrid electric vehicle applications.» *International Journal of Control* 87.6 (2014): 1117-1130.

Markley , F L et J L Crassidis. «Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control.» 33 (2014).

Massey, T et Y Shtessel. «Continuous traditional and high-order sliding modes for satellite formation control.» *Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 28, 4 (2005),* 28.4 (2005): 826—831.

Nagashio, T, et al. «Design and implementation of robust symmetric attitude controller for ETS-VIII spacecraft.» *Control Engineering Practice* 18.12 (2010): 1440-1451.

Patel, T r, K D Kumar et K Behdinan. «Variable structure control for satellite attitude stabilization in elliptic orbits using solar radiation pressure.» *Acta Astronautica* 64 (2009): 359-373.

Perruquetti, W et J P Barbot. «“sliding mode control in engineering.» *Marcel Dekker* (2002).

Pukdeboon, C, Alan s Zinober et M W Thein. «Quasi-Continuous Higher Order Sliding-Mode Controllers for Spacecraft-Attitude-Tracking Maneuvers.» *IEEE transactions on industrial electronics* 57.4 (2010): 1436-1444.

Phanomchoeng, G et R Rajamani. «Real-time estimation of rollover index for tripped rollovers with a novel unknown input nonlinear observer.» *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 19(2),* 19.2 (2014): 743-754.

Pisu, P et A Serrani, «Attitude tracking with adaptive rejection of rate gyro disturbances.» *IEEE American Control Conference*. 2008. 4839-4844.

Pu, Z, et al. «A class of adaptive extended state observers for nonlinear disturbed systems.» *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 62.9 (2015): 5858-5869.

Sahjendra, N S et I Ashok. «Nonlinear decoupling sliding mode.» *IEEE Trans. on aerospace and electronic systems* 25.5 (1989): 621-633.

Sidi, M J. *Spacecraft Dynamics and Control: a practical engineering approach*. Vol. 7. Cambridge university press, 1997.

« Applied nonlinear control.» *Prentice-Hall Inc* (1991).

Slotine, J J.E et W Li. «Applied nonlinear control.» Éd. Prentice Hall. Vol. 199. New Jersey, Englewood Cliffs, 1991. 1 vols.

Slotine, J J.E, J K Hedrick et E A Misawa. «On sliding observers for nonlinear systems.» *Journal of dynamic systems, Measurement, and Control* 109.3 (1986): 245-252.

Spong, M W et M Vidyasagar. «Robust nonlinear control of robot manipulators", IEEE Conf. decision, control, Ft Lauderdale., 1985.» *IEEE Conf. decision, control* (1985).

Steyn, W H. «A Multi-Mode Attitude Determination and Control System for Small satellites Ph.D (Engineering).» 1995.

Tayebi, A. «Unit quaternion-based output feedback for the attitude tracking problem.» *IEEE Transactions on Automatic Control* 53.06 (2008): 1516-1520.

Tewari, Ashish. *Modern Control Design with MATLAB and Simulink*. Chichester: Wiley, 2002.

—. «Optimal nonlinear spacecraft attitude control through Hamilton–Jacobi formulation.» *Journal of the Astronautical Sciences* (2002): 99-112.

Utkin, V I. «Sliding mode control design principles and applications to electric drives.» *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 40 (1993): 23-36.

—. «Sliding modes in control optimization.» *Springer-Verlag* (1992).

Wertz, J R. *Spacecraft Attitude Determination and Control*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1978.

Whittaker, E T. *Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*. Cambridge : Cambridge University Press, 1965.

Wu, S N, et al. «Sliding-mode control for staring-mode spacecraft using a disturbance observer.» *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering* 224.2 (2010): 215-224.

Wu, B, X Cao et Z Li. «Multi-objective output-feedback control for microsatellite attitude control: an LMI approach.» *Acta Astronautica* 64 (2009): 1021-1031.

Xia, Y, et al. «Attitude Tracking of Rigid Spacecraft With Bounded Disturbances.» *IEEE Transactions On Industrial Electronics 58.2 (2011): 647-659.*

Xiao, B, et al. «Attitude Tracking Control of Rigid Spacecraft With Actuator Misalignment and Fault.» *IEEE Trans. Contr. Sys. Techn.* 21.6 (2013): 2360-2366.

—. «Fault tolerant attitude stabilization for satellites without rate sensor.» *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 62.11 (2015): 7191-7202.

—. «Reaction wheel fault compensation and disturbance rejection for spacecraft attitude tracking with finite-time convergence.» *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 36.6 (2013): 1565-1575.

Xiao, B, Q L Hu et Y M Zhang. «Adaptive sliding mode fault tolerant attitude tracking control for flexible spacecraft under actuator saturation.» *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 20.6 (2012): 1605-1612.

Yoon, H et B N Agrawal. «Adaptive control of uncertain Hamiltonian multi-input multi-output systems: with application to spacecraft control.» *IEEE Trans. Control Syst. Technol* 17.4 (2009): 900-906.

Young, K david et Vadim I Utkin. «A Control Engineer's Guide to Sliding Mode Control .» *IEEE transactions on control systems technology* 7.3 (1999): 328-342.

Zanchettin, A M, A Calloni et M Lovera. «Robust magnetic attitude control of satellites.» *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 18.4 (2013): 1259-1268.

Zhu, Z, Y Q Xia et Y M Fu. «Adaptive sliding mode control for attitude stabilization with actuator saturation.» *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 58.10 (2011): 4898-4907.

Zou, A M. «Finite-Time Output Feedback Attitude Tracking Control for Rigid Spacecraft.» *IEEE Trans. Contr. Sys. Techn.* 22.1 (2014): 338-345.

Zou, A M, et al. «Finite-time attitude tracking control for spacecraft using terminal sliding mode and Chebyshev neural network.» *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 41.4 (2011): 950-963.