

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE CONSTANTINE 1  
FACULTE DES SCIENCES DE LA TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE**

**MEMOIRE**

**Présenté pour l'obtention du diplôme de Magistère en Electronique  
Option : Contrôle et Traitement du Signal**

**Par**

**BOUFRIOUA YUCEF**

*Maître-assistant*

**LES STATISTIQUES D'ORDRE SUPERIEUR :  
THEORIE ET APPLICATION**

**Soutenu le : 19/03/2013**

**Composition du jury :**

<b>Président:</b>	<b>Messaoud Boukezzata</b>	<b>Prof. Dép. d'Electronique Université Constantine 1</b>
<b>Rapporteur:</b>	<b>Faouzi Soltani</b>	<b>Prof. Dép. d'Electronique Université Constantine 1</b>
<b>Examineur:</b>	<b>Toufik Laroussi</b>	<b>Prof. Dép. d'Electronique Université Constantine 1</b>
<b>Examineur:</b>	<b>Saïd Benierbeh</b>	<b>M.C-A. Dép. d'Electronique Université Constantine 1</b>

## *Remerciements*

Je tiens tout d'abord à remercier mon ex-rapporteur Farid Marir pour m'avoir au début proposé le sujet et permis de mûrir les premières idées pour réaliser ce travail.

Mes vifs remerciements à Faouzi Soltani pour avoir accepté d'être rapporteur ; je lui suis reconnaissant d'avoir examiné avec attention mon travail.

Je suis très reconnaissant envers Toufik Laroussi et Saïd Benierbeh d'avoir accepté d'être examinateurs de mon mémoire. Ce fut un grand honneur de les avoir au sein du jury.

Merci à Messaoud Boukezzata pour l'honneur qu'il nous a fait d'avoir accepté la présidence du jury et d'avoir porté le rôle avec autant d'intérêt envers le travail présenté.

Naturellement, je ne peux oublier tous mes collègues et l'ensemble du personnel du département d'électronique, ainsi que tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

# SOMMAIRE

<b>Introduction générale</b> .....	7
<b>Chapitre I : Eléments principaux des statistiques d'ordre supérieur</b> .....	10
I.1- Introduction.....	11
I.2- Les statistiques d'ordre supérieur (S.O.S).....	12
I.3- Les outils clés des statistiques d'ordre supérieur.....	13
I.3.1- Fonctions caractéristiques, moments et cumulants dans le cas d'une variable aléatoire scalaire.....	13
I.3.2- Fonctions caractéristiques, moments et cumulants dans le cas de vecteurs aléatoires.....	17
I.3.3- Relation entre cumulants et moments de v.a. réelles.....	18
I.3.4- Quelques propriétés des moments et des cumulants.....	19
I.3.5- Signaux et variables aléatoires complexes.....	20
I.3.5.1- Définition des variables aléatoires complexes.....	20
I.3.5.2- Densité de probabilité.....	21
I.3.5.3- Fonction caractéristique.....	21
I.3.5.4- Moments et Cumulants d'une variable aléatoire complexe.....	22
I.3.5.5- Cumulant d'ordre quatre pour des variables aléatoires complexes.....	24
I.3.6- Corrélation d'ordre trois (triple corrélation).....	25

I.3.7- Filtrage d'une séquence i.i.d. ....	26
I.3.8- Support de la corrélation d'ordre trois d'une séquence i.i.d. filtrée par un filtre à réponse impulsionnelle finie .....	27
I.3.9- Identification de filtre à non minimum de phase .....	28
I.3.10- Kurtosis positif et kurtosis négatif .....	29
I.3.11- Corrélation d'ordre quatre des signaux complexes .....	30
I.3.12- Maximisation du kurtosis.....	31
I.4- Quelques formules préalables.....	32
I.4.1- Cas (a) : Il y a un minimum lorsque tous les $b(k)$ sont différents de zéro.....	35
I.4.2- Cas (b) : Il y a un col (point-selle) lorsque le nombre $N$ des $b(k)$ différents de zéro est inférieur à $K$ et supérieur à un.....	36
I.4.3- Cas (c) : Il y a un maximum lorsque un seul des $b(k)$ différent de zéro.....	38
<b>Chapitre II : Signaux aléatoires, fonctions de répartition, et moments de l'implantation ionique.....</b>	<b>41</b>
II.1- Introduction.....	42
II.2- Aspect typique aléatoire de l'implantation ionique.....	42
II.3- Probabilités et fonctions de répartitions.....	43
II.3.1- Quelques Propriétés essentielles des probabilités.....	43
II.3.2- Distributions.....	45
II.3.2.1- Distribution d'une variable aléatoire continue.....	45
II.3.2.2- Espérance mathématique.....	47
II.3.2.3- Variance écart type.....	48
II.3.2.4-principales familles usuelles des distributions.....	48
II.3.2.4.1- La distribution Gamma.....	49
II.3.2.4.2- La distribution Bêta.....	50
II.3.2.4.3- La distribution normale ou Gauss-Laplace.....	51

II.3.2.4.4- La distribution Log-normale.....	52
II.3.2.4.5- La distribution uniforme.....	53
II.3.2.4.6- La distribution Logistique.....	54
II.3.2.4.7- La distribution Normale centrée réduite .....	55
II.3.2.4.7- La distribution de pearson <i>IV</i> .....	59
<b>CHAPITRE III : Résultats et comparaison des valeurs calculées et expérimentales des quatre moments des profils de dopage issus d’implantation ionique</b> .....	<b>62</b>
III.1- Rappel des principaux objectifs de notre travail.....	63
III.2- Reconstitution des profils par la technique de simulation.....	64
III.3- Théorie des collisions et interaction ion-matière.....	64
III.3.1- Cycle minimal requis d’un processus de calcul.....	64
III.3.2- Algorithme et mode de calcul.....	70
III.3.3- Calcul des moments selon la théorie des statistiques d’ordre supérieur ( 4 <sup>ème</sup> ordre) .....	71
III.3.4- Profils expérimentaux.....	72
III.4- Résultats et discussion.....	75
<b>Conclusion</b> .....	<b>80</b>
<b>Bibliographie</b> .....	<b>82</b>
<b>Résumé</b>	

## *Introduction générale*

La théorie des probabilités a été particulièrement mise à contribution pour construire les modèles utilisés en traitement du signal. Cette branche très riche des mathématiques a été très développée depuis son origine dès le 17<sup>ème</sup> siècle par les précurseurs que furent Bernoulli, Fermat, Pascal et bien d'autres... Ses concepts de base sont les notions de variable aléatoire et de fonction (signal) aléatoire. Ces grandeurs sont décrites complètement à travers des lois (ou densités) de probabilité. On se limite bien souvent à une description donnée par les moments.

La plupart des résultats méthodologiques et des techniques de traitement du signal sont fondées sur une description simplifiée des signaux faisant appel aux moments d'ordre 1 et 2. Les fonctions de corrélation et les densités spectrales de puissance (spectres) en sont les outils de base. Ces grandeurs jouent un rôle essentiel dans la description de signaux dans tous les domaines d'application et dans la définition d'opérateurs fondamentaux : filtre adapté, filtre de Wiener, filtre de Kalman... Le statut particulier des signaux gaussiens, qui sont très répandus et pour lesquels la description à l'ordre 2 est complète, a largement contribué à la diffusion des techniques de traitement limité à l'ordre 2.

Le développement des moyens de traitement a permis dans un passé récent de prendre en compte une description plus subtile des signaux en utilisant des statistiques d'ordre supérieur à 2. Le fort courant de recherche sur cette nouvelle

méthodologie qui se développe depuis une trentaine d'années a suscité une série de colloques internationaux consacrés aux statistiques d'ordre supérieur (SOS) ou higher order statistics (HOS), et de nombreuses revues scientifiques leurs ont consacré des numéros spéciaux. Ces études débouchent sur de nouveaux algorithmes de traitement dans de nombreux domaines d'application. Citons l'astronomie ou sont apparues les premières techniques d'ordre supérieur, la géophysique, la prospection sismique, les communications, la parole, le sonar, le radar, les vibrations, le contrôle non-destructif, la microélectronique...

Parmi les raisons invoquées à l'appui de l'utilisation des SOS, outre leur plus grand degré de généralité, l'argument le plus solide est la possibilité qu'elles offrent de résoudre des problèmes non accessibles à l'ordre 2.

Dans ce mémoire de magistère, nous avons essayé de donner une contribution introduisant les statistiques d'ordre supérieur pour bien modéliser les divers profils issus d'implantations ioniques.

Un intérêt principal recherché en microélectronique et technologie des semiconducteurs est l'augmentation de la capacité d'intégration. On travaille toujours à la miniaturisation des dispositifs constituant les circuits intégrés qui deviennent de plus en plus performants et de moins en moins volumineux.

Dans ce contexte, on a travaillé sur les jonctions courtes qu'on appelle profils de dopage. Ils sont issus d'une implantation ionique qui consiste à introduire des atomes ionisés projectiles avec suffisamment d'énergie pour pénétrer dans l'échantillon cible (en général une plaquette). Cette opération est essentiellement utilisée pour doper le semiconducteur durant la fabrication des dispositifs d'une base et d'un émetteur dans un transistor bipolaire ou d'une zone de source et de drain dans un transistor MOS.

Expérimentalement, nous avons utilisé plusieurs implantations en laboratoire, avec des différentes doses (nombre d'atomes implantés par unité de surface) et différentes énergies (accélération des atomes dopants ionisés à des différentes énergies) afin de générer divers profils réels ; la cible étant en Silicium

polycristallin, le dopant étant le Bore par implantation et l'Azote par dopage in-situ.

Parallèlement, nous avons utilisé un programme pour calculer par simulation les 4 moments caractérisant les profils. Les données (entrée) sont la dose du dopant, son énergie, sa nature et la nature de la cible ; les résultats (sortie) sont les 4 moments (moyenne, variance, dissymétrie et kurtosis). La comparaison de ces résultats avec ceux issus des profils expérimentaux nous a donné un moyen pour déterminer les paramètres de l'implantation souhaité sans le recours systématique à la méthode expérimentale (appelée SIMS), qui est certes très précise car utilisant une microsonde ionique de très haute résolution mais qui présente en revanche l'inconvénient d'être destructive c'est-à-dire que l'échantillon analysé est détruit et irrécupérable.

Bien que l'implantation ionique est un processus technologique et expérimental très utilisé en microélectronique pour fabriquer les composants électroniques, il se trouve, néanmoins, que le mécanisme théorique et la représentation analytique qui le décrivent reposent sur une formulation mathématique souvent laborieuse et développent des modèles approchés, voire complexes. Dans la plupart des documents de références, rapportés dans la littérature, et qui traite son aspect théorique permettant sa description analytique, souvent, on faisait appel à des expressions de type gaussien présentant beaucoup d'insuffisance.

Pour interpréter correctement le profil de dopage d'une implantation ionique, représentative d'une étape décisive pendant un processus technologique de fabrication d'un composant microélectronique, il est souvent demandé de connaître les paramètres clés d'une telle implantation. En utilisant les statistiques d'ordre supérieur, le problème sera très bien résolu juste en prenant le moment d'ordre quatre (i.e. la « *moyenne* », la « *variance* », la « *dissymétrie* », et le « *kurtosis* ») pris dans le cas d'un modèle analytique simple régissant une implantation.

D'autres exemples peuvent également être traités de la même manière. On peut citer à titre d'indication le cas d'un signal rétrodiffusé dans une diffraction



électromagnétique par une surface (obstacle, sol, etc....), où il est nécessaire de modéliser souvent la surface et son interaction avec les ondes électromagnétiques. Dans ce cas aussi, le problème sera très bien résolu juste en prenant le moment d'ordre quatre du champ diffracté.

Ce mémoire est structuré de façon à être partagé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous avons exposé la théorie des statistiques d'ordre supérieur dans son ensemble. Après un bref rappel des principaux éléments de base sur lesquels reposent les fondements mathématiques de cette classe de statistiques, nous avons regroupé toutes les propriétés essentielles qui peuvent être, plus tard, exploitées dans la suite de ce travail. En particulier, certaines combinaisons non linéaires de tout ces moments appelées **cumulants**. Beaucoup de détails s'y trouvent inscrits.

Le second chapitre est consacré principalement à la méthode de calcul des quatre moments qui sont les paramètres clés des profils de dopage d'une implantation ionique en utilisant les statistiques d'ordre supérieur, limité au 4<sup>ème</sup> ordre. Nous y avons aussi rappelé les détails nécessaires à toute implantation ionique. En particulier, et comme la qualité des résultats se trouve liée à la problématique du choix du type de la distribution (ou de la fonction de répartition), nous avons voulu être trop explicites dans cette partie.

Dans le troisième chapitre, nous avons présenté les techniques de calcul et de simulation adéquate. En effet, cette partie est scindée en deux étapes distinctes : l'étape de reconstitution des profils et l'étape de détermination des moments. L'étape de reconstitution des profils est complètement décrite par la théorie des collisions issue de la mécanique classique. L'autre étape, en l'occurrence celle de la détermination des moments, est basée sur les statistiques d'ordre supérieur (4<sup>ème</sup> ordre).

Enfin, une conclusion générale est donnée comme couronnement de tout le travail.

# CHAPITRE I

*Eléments principaux  
des  
statistiques d'ordre supérieur*

## ***I.1- Introduction***

Toute série temporelle mesurée, relative à un phénomène physique, est soit déterministe, soit aléatoire [1].

Une série temporelle (ou signal) est déterministe si elle peut être décrite par une relation mathématique. Citons par exemple, la trajectoire d'un satellite en orbite autour de la terre. On distingue trois types de signaux représentant des phénomènes déterministes : les signaux périodiques, quasi-périodiques et transitoires.

Cependant, il existe de nombreux phénomènes physiques pour lesquels aucune fonction mathématique ne permet de les décrire. La hauteur des vagues dans l'océan lors d'une tempête en est un exemple. Pour les mesures associées à ces phénomènes, il n'existe aucun moyen de prédire leur valeur à un instant donné dans le future. Ces données sont par nature aléatoires et doivent être décrites en termes de probabilité et de moyennes statistiques. Néanmoins, comment décider si un phénomène physique est aléatoire ou déterministe.

En pratique, si une expérience peut être répétée de nombreuses fois et produire un résultat identique (aux erreurs de mesure près), alors le phénomène physique peut être considéré comme déterministe. Dans le cas contraire, le phénomène est considéré comme aléatoire.

Toute observation d'un phénomène aléatoire est unique [2]. En d'autres termes, chaque observation ne représente qu'un des multiples résultats possibles qui auraient pu se produire. Par exemple, supposons que l'on mesure la tension de sortie d'un générateur de bruit thermique en fonction du temps. Une série temporelle  $x_1(t)$  sera ainsi obtenue. Supposons de plus que, simultanément, on ait mesuré la tension de sortie de N autres générateurs, construits de manière identique. On obtiendra alors N séries temporelles,  $x_i(t)$ , différentes les unes des autres. Chacune de ces séries est une réalisation possible du phénomène physique aléatoire.

Par définition, l'ensemble des réalisations possibles d'un phénomène aléatoire est un processus aléatoire (ou stochastique), noté  $\{X(t)\}$ . A un instant donné, l'ensemble des valeurs relatives à chaque réalisation est une variable aléatoire.

Les différentes situations expérimentales produisent divers types de signaux. Les signaux aléatoires sont décrits par leurs propriétés statistiques, à partir des grandeurs moyennes, moments et cumulants qui leur sont associés.

Si les moments statistiques d'un processus aléatoire sont indépendants du temps, alors le processus est dit stationnaire. Dans le cas d'un processus stationnaire, si les moments sont identiques, lorsqu'ils sont calculés suivant différentes réalisations, alors le processus est ergodique.

## ***1.2- Les statistiques d'ordre supérieur (SOS)***

Les statistiques d'ordre supérieur (SOS) sont les moments d'ordre supérieur à 2 et certaines combinaisons non linéaires de ces moments appelées **cumulants** que nous allons noter **cum** tout le long du texte de ce mémoire. Elles sont utilisées essentiellement en complément aux statistiques d'ordre 2. Elles donnent une description plus complète des données et de leurs propriétés. Une analyse à l'ordre 2 examine les liens statistiques entre les valeurs à deux instants ou deux fréquences d'un signal. Ceci ne fournit qu'une description incomplète des propriétés statistiques d'un signal aléatoire (sauf s'il est gaussien). Pour approfondir l'analyse, il faut envisager les liens entre trois, quatre voire plus d'instant (ou fréquences). Les propriétés d'ordre supérieur des signaux aléatoires peuvent être

décrites, comme le sont les propriétés d'ordre 2, dans le domaine du temps ou dans le domaine des fréquences. L'étude dans le domaine du temps conduit aux multicorrélations, l'étude dans le domaine des fréquences aux multispectres [3].

Les SOS permettent la résolution de problèmes insolubles à l'ordre 2. Elles ont été également utilisées pour améliorer les solutions (conditionnement, identifiabilité...) déjà apportées par les techniques classiques.

Dans ce chapitre nous allons, tout d'abord, rappeler les principaux éléments de base sur lesquels reposent les fondements mathématiques de la théorie des statistiques d'ordre supérieur. Plus particulièrement, nous y exposerons toute une partie que nous avons utilisée pour notre application rapportée dans le dernier chapitre de ce mémoire de magister à savoir la description des profils de dopage issus d'implantation ionique, où la solution typique se trouve très bien adaptée avec les réalités expérimentales [4].

### ***1.3.- Les outils clés des statistiques d'ordre supérieur***

#### ***1.3.1- Fonctions caractéristiques, moments et cumulants dans le cas d'une variable aléatoire scalaire***

Soit  $\{ x \}$  un processus aléatoire stationnaire, et  $x$  une variable aléatoire associée à ce processus. Pour plus de clarté, nous considérons tout d'abord le cas d'une variable aléatoire à valeurs réelles. Puis, on généralisera ce résultat au cas d'une variable aléatoire multidimensionnelle à valeurs réelles et complexes.

Lorsque la v.a.  $x$  admet une densité de probabilité  $p_x(x)$ , la première fonction caractéristique  $P_x(u)$  est définie comme sa transformée de Fourier :

$$P_x(u) = E(e^{jux}) = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x) e^{jux} dx \dots\dots\dots (I-1)$$

où  $j$  désigne la racine carrée de -1.

Et, en calculant le développement en fonction des puissances de  $u$  :

$$P_x(u) = E(e^{jux}) = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x) \left( 1 + jux + \frac{j^2 u^2 x^2}{2!} + \frac{j^3 u^3 x^3}{3!} + \frac{j^4 u^4 x^4}{4!} + \dots \right) dx \dots \quad (I-2)$$

$$P_x(u) = E(e^{jux}) = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x) dx + ju \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x) x dx + \frac{j^2 u^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x) x^2 dx +$$

$$+ \frac{j^3 u^3}{3!} \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x) x^3 dx + \frac{j^4 u^4}{4!} \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x) x^4 dx + \dots + \dots \dots \dots \quad (I-3)$$

$$P_x(u) = 1 + juE(x) + \frac{j^2 u^2}{2!} E(x^2) + \frac{j^3 u^3}{3!} E(x^3) + \frac{j^4 u^4}{4!} E(x^4) + \dots \dots \dots \quad (I-4)$$

Le moment d'ordre  $k$  se calcule à partir de la première fonction caractéristique :

$$E(x^k) = \frac{1}{j^k} \left[ \frac{d^k P_x(u)}{du^k} \right]_{u=0} \dots \dots \dots \quad (I-5)$$

On appelle seconde fonction caractéristique le logarithme (népérien) de la première fonction caractéristique :

$$P_x''(u) = \log P_x(u) \dots \dots \dots \quad (I-6)$$

Son développement en série de Taylor donne des coefficients qui ne sont plus les moments de  $x$  mais ses « cumulants » que nous avons déjà noté « *cum* » dans les formules.

$$cum_k(x) = \frac{1}{j^k} \left[ \frac{d^k P_x''(u)}{du^k} \right]_{u=0} \dots\dots\dots (I-7)$$

Autrement dit, les dérivées de la seconde fonction caractéristique, prises à l'origine, définissent les *cumulants* qui sont les coefficients du développement en série de Taylor de la seconde fonction caractéristique.

De ce fait, les cumulants d'ordre 1 à 4 s'expriment en fonction des moments de 1 à 4 comme suit :

$$cum_1(x) = \mu_1(x)$$

$$cum_2(x) = \mu_2(x) - \mu_1(x)^2$$

$$cum_3(x) = \mu_3(x) - 3\mu_2(x)\mu_1(x) + 2\mu_1(x)^3$$

$$cum_4(x) = \mu_4(x) - 4\mu_3(x)\mu_1(x) - 3\mu_2(x)^2 + 12\mu_2(x)\mu_1(x)^2 - 6\mu_1(x)^4$$

Dans le cas de variables aléatoires centrées ( $\mu_1(x) = 0$ ), les expressions des cumulants se simplifient en :

$$cum_1(x) = 0$$

$$cum_2(x) = \mu_2(x)$$

$$cum_3(x) = \mu_3(x)$$

$$cum_4(x) = \mu_4(x) - 3\mu_2(x)^2$$

Lorsque la variable aléatoire  $x$  est gaussienne, sa seconde fonction caractéristique est un polynôme d'ordre 2, ce qui implique la nullité de tous ses cumulants d'ordre supérieur ou égal à 3. Cette propriété caractérise la loi gaussienne. Les variables gaussiennes sont donc entièrement décrites par leurs propriétés au second ordre. Ceci explique pourquoi les chercheurs en traitement du signal se sont longtemps limités au second ordre.

Le cumulante d'ordre un est la moyenne; le cumulante d'ordre deux est la variance (moment d'ordre deux après soustraction du carré de la moyenne). Le cumulante d'ordre trois (*skewness* en anglais, dissymétrie en français) est nul lorsque la variable aléatoire est centrée et sa densité de probabilité est symétrique. Nous nous intéresserons surtout au cumulante d'ordre quatre, facteur d'aplatissement, appelé « *kurtosis* » (mot grec signifiant : action de courber, convexité). La valeur du kurtosis caractérise le comportement à l'infini des densités de probabilité. Les densités de probabilité possédant un kurtosis négatif sont dites sous-gaussiennes et tendent vers 0 à l'infini plus rapidement que la loi gaussienne. Les densités de probabilités possédant un kurtosis positif, dites sur-gaussiennes, tendent moins vite vers 0 à l'infini que la loi gaussienne [3].

Les moments d'ordre supérieur d'un ensemble de variables aléatoires sont définis comme étant les espérances mathématiques de produits multiples. Si on note par  $x(n)$  un signal aléatoire stationnaire réel et discret, alors, les moments d'ordre 2, 3 et 4 sont définis, respectivement, par :

$$M_2(i) = E[x(n)x(n+i)] \dots \dots \dots (I-8)$$

$$M_3(i,j) = E[x(n)x(n+i)x(n+j)] \dots \dots \dots (I-9)$$

$$M_4(i,j,k) = E[x(n)x(n+i)x(n+j)(n+k)] \dots \dots \dots (I-10)$$

où l'opérateur  $E$  représente l'espérance mathématique.



Le cumulants de  $k^{\text{ème}}$  ordre, (noté  $C_k$ , ou «  $\text{cum}_k$  ») d'un ensemble de variables aléatoires est défini comme articulation ou combinaison non linéaire des moments d'ordre inférieur ou égale à  $k$  de ces variables. Contrairement aux moments, les cumulants sont invariants (insensibles) aux changements de la moyenne [5].

Si les variables aléatoires réelles ( $x_1, x_2, x_3, x_4$ ) sont à moyenne nulle, les cumulants de 2<sup>ème</sup>, 3<sup>ème</sup>, et de 4<sup>ème</sup> ordre sont définis, respectivement, comme suit :

$$\text{cum}(x_1, x_2) = C_2(x_1, x_2) = M_2(x_1, x_2) = E[x_1 x_2] \dots \dots \dots (I-11)$$

$$\text{cum}(x_1, x_2, x_3) = C_3(x_1, x_2, x_3) = M_3(x_1, x_2, x_3) = E[x_1 x_2 x_3] \dots \dots \dots (I-12)$$

$$\begin{aligned} \text{cum}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= C_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= E[x_1 x_2 x_3 x_4] - E[x_1 x_2]E[x_3 x_4] \\ &\quad - E[x_1 x_3]E[x_2 x_4] - E[x_1 x_4]E[x_2 x_3] \dots \dots \dots (I-13) \end{aligned}$$

Dans le cas où les moyennes des variables aléatoires ne sont pas nulles il suffit de remplacer  $x_i$  par  $x_i - E[x_i]$ .

### ***1.3.2- Fonctions caractéristiques, moments et cumulants dans le cas de vecteurs aléatoires***

Il est nécessaire d'utiliser ces définitions assez lourdes pour traiter le cas des fonctions aléatoires vectorielles. Soit un vecteur  $\vec{x}$  de composantes ( $x_1, \dots, x_n$ ). La fonction caractéristique de ce vecteur sera une fonction de  $N$  variables,

$\vec{u}=(u_1, \dots, u_N)^T$  calculée comme la transformée de Fourier multidimensionnelle de la densité de probabilité  $p_x(x_1, \dots, x_N)$  [6] :

$$P_x(u_1, \dots, u_N) = \int_{R^N} e^{jx^T u} p_x(x_1, \dots, x_N) dx_1, \dots, dx_N \dots\dots\dots (I-14)$$

Le développement de cette fonction fera apparaître les moments joints d'ordre  $k$  quelconque, en particulier les moments joints d'ordre trois et quatre :

$$P_x(u_1, \dots, u_N) = \sum_{k \geq 0} \frac{j^k}{n_1! \dots n_N!} E(x_1^{n_1} \dots x_N^{n_N}) u_1^{n_1} \dots u_N^{n_N} \dots\dots\dots (I-15)$$

où les  $n_1, \dots, n_N$  vérifient :

$$n_1 + \dots + n_N = k \dots\dots\dots (I-16)$$

Le développement de la seconde fonction caractéristique (logarithme de la première)

$$P_x''(u_1, \dots, u_N) = \log P_x(u_1, \dots, u_N) \dots\dots\dots (I-17)$$

donne encore les cumulants joints.

### ***1.3.3- Relation entre cumulants et moments de v.a. réelles***

En identifiant les développements de la seconde fonction caractéristique et du logarithme de la première, on obtient les relations entre cumulants et moments.

Ainsi le cumulants d'ordre un est égal au moment d'ordre un [7] :

$$E(x(t_1)) = cum_1(x(t_1)) \dots\dots\dots(I-18)$$

$$E(x(t_1)x(t_2)) = cum_1(x(t_1))cum_1(x(t_2)) + cum_2(x(t_1))x(t_2)) \dots\dots\dots(I-19)$$

ou encore :

$$cum_2(x(t_1)x(t_2)) = E(x(t_1)x(t_2)) - E(x(t_1)) E(x(t_2)) \dots\dots\dots(I-20)$$

Le cumulants d'ordre deux est égal à la variance (après soustraction du carré de la moyenne au moment d'ordre deux.) Pour donner les formules à l'ordre trois nous supposons que le signal est à moyenne nulle. Dans ce cas :

$$cum_3(x(t_1)x(t_2)x(t_3)) = E(x(t_1)x(t_2)x(t_3)) \dots\dots\dots(I-21)$$

Si  $x(t)$  a une moyenne nulle, il y a identité entre moment et cumulants d'ordre trois, exactement comme à l'ordre deux ; mais ce n'est pas le cas si  $x(t)$  n'est pas de moyenne nulle. A l'ordre quatre nous donnerons les relations en supposant que les densités de probabilité sont centrées et symétriques,  $p_x(-\vec{x})=p_x(\vec{x})$  et donc que les moments et cumulants d'ordre trois sont nuls, ce qui est le cas dans la plupart des applications.

On a alors la relation :

$$\begin{aligned} E(x(t_1)x(t_2)x(t_3)x(t_4)) &= cum_4(x(t_1)x(t_2)x(t_3)x(t_4)) \\ &+ cum_2(x(t_1)x(t_2)) cum_2(x(t_3)x(t_4)) \\ &+ cum_2(x(t_1)x(t_3)) cum_2(x(t_2)x(t_4)) \\ &+ cum_2(x(t_1)x(t_4)) cum_2(x(t_2)x(t_3)) \dots\dots\dots(I-22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(x(t_1)x(t_2)x(t_3)x(t_4)) &= cum_4(x(t_1)x(t_2)x(t_3)x(t_4)) \\ &+ E(x(t_1)x(t_2))E(x(t_3)x(t_4)) \\ &+ E(x(t_1)x(t_3))E(x(t_2)x(t_4)) \end{aligned}$$

$$+ E(x(t_1)x(t_4))E(x(t_2)x(t_3)) \dots \dots \dots (I-23)$$

Un moment d'ordre  $k$  se déduit des moments d'ordre inférieur par addition d'un terme qui n'en dépend pas et n'est autre que le cumulants d'ordre  $k$ .

En particulier :

$$cum_4(x) = E(x^4) - 3(E(x^2))^2 \dots \dots \dots (I-24)$$

### ***1.3.4- Quelques propriétés des moments et des cumulants***

- Multiplication des variables par des constantes :

$$E(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_N x_N) = \left( \prod_{i=1}^N \alpha_i \right) E(x_1, \dots, x_N) \dots \dots \dots (I-25)$$

(relation similaire pour les cumulants)

- Permutation des variables si on modifie l'ordre des variables  $(x_1, \dots, x_N)$  les moments et cumulants sont inchangés.

- Addition des variables :

$$E(x_1 + y_1, \dots, x_N) = E(x_1, \dots, x_N) + E(y_1, \dots, x_N) \dots \dots \dots (I-26)$$

(relation similaire pour les cumulants)

- Invariance par translation d'une variable pour les cumulants d'ordre supérieur à un :

$$cum_k(x_1 + c, \dots, x_N) = cum_k(x_1, \dots, x_N) \dots \dots \dots (I-27)$$

(cette relation n'est pas vérifiée pour les moments).

- Sommes de variables indépendantes : si  $x_i$  et  $y_i$  sont deux variables aléatoires indépendantes.

$$cum_k(x_1 + y_1, \dots, x_N + y_N) = cum_k(x_1, \dots, x_N) + cum_k(y_1, \dots, y_N) \dots \dots \dots (I-28)$$

(cette relation n'est pas vérifiée pour les moments).

- Indépendance des composantes : Si les premières composantes  $x_1, \dots, x_p$  sont indépendantes des dernières :

$$cum_k(x_1, \dots, x_N) = cum_k(x_1, \dots, x_p) + cum_k(x_{p+1}, \dots, x_N) \dots \dots \dots (I-29)$$

(cette relation n'est pas vérifiée pour les moments).

Par conséquent, les cumulants des échantillons d'une séquence d'échantillons indépendants de moyenne nulle  $x(t_1), \dots, x(t_N)$  sont tous nuls sauf si :

$$t_1 = t_2 = \dots = t_N \dots \dots \dots (I-30)$$

Un des intérêts majeurs des cumulants est la conséquence de l'indépendance qui simplifie considérablement les formules et les traitements. En particulier, si deux signaux sont indépendants et que l'un d'entre eux est gaussien à moyenne nulle, les cumulants d'ordre supérieur à deux seront ceux du deuxième signal car les cumulants du signal gaussien sont nuls; on peut ainsi étudier les caractéristiques des signaux malgré la présence d'un bruit additif gaussien [8].

### ***1.3.5- Signaux et variables aléatoires complexes***

#### ***1.3.5.1-Définition des variables aléatoires complexes***

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles. Avec ces deux variables aléatoires réelles, on peut construire la variable aléatoire complexe

$$Z = X + jY .$$

Les réalisations de  $Z$  sont les nombres complexes  $z=x+jy$  construits avec les réalisations de  $X$  et de  $Y$ .

***1.3.5.2-Densité de probabilité***

Aux variables aléatoires réelles  $X$  et  $Y$  on associe une densité de probabilité d'amplitude  $f(x,y)$ . Cette dernière ne dépend pas uniquement de  $z$ . En effet, toute fonction de  $x$  et  $y$  peut se représenter comme une fonction de  $z$  et de son complexe conjugué  $z^*$ . Ceci conduit à définir une variable aléatoire complexe comme une variable aléatoire à 2 dimensions formée de  $Z$  et de  $Z^*$ , avec

$$Z = X + jY \quad \text{et} \quad Z^* = X - jY,$$

on retrouve  $X$  et  $Y$  par

$$X = (Z + Z^*)/2 \quad \text{et} \quad Y = (Z - Z^*)/2j$$

La densité de probabilité d'amplitude est alors la fonction de  $z, z^*$

$$g(z, z^*) = f((z+z^*)/2, (z-z^*)/2j) \dots \dots \dots (I-31)$$

Pour obtenir toutes les informations contenues dans la variable complexe, on doit donc considérer simultanément  $Z$  et  $Z^*$ . Cette remarque est la clé de l'étude des variables aléatoires complexes et donne la solution des problèmes mettant en jeu ces variables [3].

***1.3.5.3-Fonctions Caractéristiques***

La première fonction caractéristique est donnée par [3] :

$$P_{z,z^*}(u, u^*) = E\left[ e^{\frac{j(zu^* + uz^*)}{2}} \right] \dots \dots \dots (I-32)$$

la deuxième fonction caractéristique est le logarithme (népérien) de la première fonction caractéristique:

$$P''_{z,z^*}(u, u^*) = \log\left( P_{z,z^*}(u, u^*) \right) \dots \dots \dots (I-33)$$

A partir de ces deux fonctions caractéristiques découlent les définitions des statistiques d'ordre supérieur (les moments et les cumulants), qu'on définira dans le paragraphe suivant. Il existe des relations entre les moments et les cumulants d'une variable aléatoire complexe, semblables au cas réel [9].

#### ***1.3.5.4-Moments et Cumulants d'une Variable Aléatoire Complexe***

##### ***a- Moments***

Le moment d'ordre  $r = p+q$  est la dérivée partielle d'ordre  $r$  de la première fonction caractéristique, calculée en  $\mathbf{u}=0$ . On dérive  $p$  fois par rapport à  $\mathbf{u}$  et  $q$  fois par rapport à  $\mathbf{u}^*$ , de la même manière que dans le cas vectoriel réel:

$$E[\mathbf{z}^p \mathbf{z}^{*q}] = (-2j)^r \frac{\partial^r P_{\mathbf{z}, \mathbf{z}^*}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)}{\partial \mathbf{u}^p \partial \mathbf{u}^{*q}} \dots \dots \dots (I-34)$$

##### ***b- Cumulants***

Le cumulant d'ordre  $r = p+q$  est la dérivée partielle d'ordre  $r$  de la deuxième fonction caractéristique calculée en  $\mathbf{u}=0$ . On dérive  $p$  fois par rapport à  $\mathbf{u}$  et  $q$  fois par rapport à  $\mathbf{u}^*$  :

$$cum_r(\mathbf{z}, \mathbf{z}, \dots, \mathbf{z}, \mathbf{z}^*, \mathbf{z}^*, \dots, \mathbf{z}^*) = (-2j)^r \frac{\partial^r P''_{\mathbf{z}, \mathbf{z}^*}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)}{\partial \mathbf{u}^p \partial \mathbf{u}^{*q}} \dots \dots (I-35)$$

##### ***c- Propriétés***

Une propriété importante par rapport au cas réel est que une variable aléatoire complexe possède  $r+1$  moments ou cumulants d'ordre  $r$  au lieu d'un seul. Ceci découle du fait que l'on considère  $\mathbf{z}$  et  $\mathbf{z}^*$  simultanément. Il existe, par ailleurs, des relations entre les cumulants d'ordre  $r$  et les moments d'ordre inférieur ou égal à  $r$  et inversement. On se contentera ici de donner quelques exemples :

$$\begin{aligned}
 cum_1[z] &= E[z]. \\
 cum_2[z, z] &= E[z^2] - E[z]^2. \\
 cum_2[z, z^*] &= E[z, z^*] - E[z]E[z^*]. \\
 cum_3[z, z, z] &= E[z^3] - 3E[z]E[z^2] + 2E[z]^3. \\
 cum_3[z, z, z^*] &= E[z^2 z^*] - 2E[z]E[zz^*] - E[z^*]E[z^2] + 2E[z]^2 E[z^*]. \\
 cum_4[z, z, z, z] &= E[z^4] - 4E[z]E[z^3] - 3E[z^2]^2 + 12E[z]^2 E[z]^2 - 6E[z]^4. \\
 cum_4[z, z, z, z^*] &= E[z^3 z^*] - 3E[z]E[z^2 z^*] - E[z^*]E[z^3] - 3E[z^2]E[zz^*] \\
 &+ 6E[z^*]E[z]E[z^2] + 6E[z]^2 E[zz^*] - 6E[z]^3 E[z^*]. \\
 cum_4[z, z, z^*, z^*] &= E[z^2 z^{*2}] - 2E[z]E[zz^{*2}] - 2E[z^*]E[z^2 z^*] - E[z^2]E[z^{*2}] - 2E[zz^{*}]^2 \\
 &+ 2E[z]^2 E[z^*]^2 + 8E[zz^*]E[z]E[z^*] + 2E[z^{*2}]E[z^2] - 6E[z]^2 E[z^*]^2.
 \end{aligned}$$

Pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter à **[10]**.

Dans le cas où la variable aléatoire est centrée, on aura  $E[z]=E[z^*] = 0$ , ce qui conduit à des relations plus simples. D'autres propriétés de  $z$  peuvent simplifier encore ces expressions (circularité, par exemple). Les moments et les cumulants d'une variable aléatoire complexe conservent les mêmes propriétés que dans le cas réel :

- \* Les moments et les cumulants satisfont la propriété de la multilinéarité :

$$\begin{aligned}
 E[(z_1 + \alpha z_2)z_3 \dots z_p] &= E[z_1 z_3 \dots z_p] + \alpha E[z_2 z_3 \dots z_p] \\
 cum[z_1 + \alpha z_2, z_3, \dots, z_p] &= cum[z_1, z_3, \dots, z_p] + \alpha cum[z_2, z_3, \dots, z_p]
 \end{aligned}$$

où les  $z_{k=1, \dots, p}$  sont des variables aléatoires complexes et  $\alpha$  est une constante déterministe complexe.

- \* Une permutation qui intervient dans l'expression des cumulants et des moments ne les modifie pas. Par exemple :



$$\mathit{cum}[z, z^*, z, z^*] = \mathit{cum}[z, z, z^*, z^*]$$

\* Invariance par translation déterministe : si  $z = y + t$ , où  $t$  est déterministe, alors les cumulants d'ordre supérieur ou égal à 2 de  $z$  sont identiques à ceux de  $y$ . La translation n'affecte que le cumulante d'ordre 1, c'est-à-dire la moyenne.

La propriété d'invariance par translation déterministe n'est pas vérifiée par les moments.

\* Si un groupe de variables aléatoires complexes peut être scindé en deux sous-groupes de variables indépendantes alors leur cumulante croisée est nul [3]. En d'autres termes si  $z_1$  et  $z_2$  sont deux variables aléatoires complexes indépendantes alors :

$$\forall z_3 \quad \mathit{cum}[z_1, z_2, z_3] = 0$$

Cette propriété est à la base des techniques de séparation de sources.

\* Propriété d'additivité : Le cumulante de la somme de vecteurs aléatoires indépendants est la somme des cumulants :  $\mathit{cum}_r[\mathbf{Y} + \mathbf{Z}] = \mathit{cum}_r[\mathbf{Y}] + \mathit{cum}_r[\mathbf{Z}]$  et ce quel que soit l'ordre  $r$ . Cette propriété, bien connue à l'ordre 2 (variance), n'est pas vérifiée par les moments.

### ***1.3.5.5- Cumulant d'ordre quatre pour des variables aléatoires complexes***

Nous supposons, comme c'est souvent le cas des constellations complexes utilisées en transmission numérique, que la variable aléatoire complexe  $z$  présente les symétries telles que :

$$E(z) = 0 \dots \dots \dots (I-36)$$

$$E(z^2) = 0 \dots \dots \dots (I-37)$$

(cette deuxième hypothèse n'est pas toujours supposée vérifiée; bien sûr, elle

n'implique pas que  $E(\|z\|^2) = 0$ .) .

$$E(z^3) = 0 \dots\dots\dots(I-38)$$

$$E(z^2 z^*) = 0 \dots\dots\dots(I-39)$$

Nous nous intéresserons plus particulièrement au cumulants:

$$\begin{aligned} cum_4[z(t_1), z(t_2), z^*(t_3), z^*(t_4)] &= E[z(t_1)z(t_2)z^*(t_3)z^*(t_4)] \\ &\quad - E[z(t_1)z(t_2)]E[z^*(t_3)z^*(t_4)] \\ &\quad - E[z(t_1)z^*(t_3)]E[z(t_2)z^*(t_4)] \\ &\quad - E[z(t_1)z^*(t_4)]E[z(t_2)z^*(t_3)] \\ &\quad \dots\dots\dots(I-40) \end{aligned}$$

les autres étant égaux à zéro pour plusieurs configurations intéressantes. Notons que les moments du deuxième ordre sont la plupart du temps nuls du fait des hypothèses sur  $z$ . Dans le cas particulier où les instants de mesure sont identiques :

$$t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t \dots\dots\dots(I-41)$$

$$\begin{aligned} cum_4(z(t), z(t), z^*(t), z^*(t)) &= \\ &E(\|z(t)\|^4) - 2E(\|z(t)\|^2)^2 - E(z^2(t))E(z^{*2}(t)) \dots\dots(I-42) \end{aligned}$$

(Le dernier terme s'annule dans le cas de l'hypothèse (I-37); noter la différence avec le cas des signaux réels).

On retrouve des formules similaires à celles du critère proposé par Godard; on pourra ainsi établir un lien entre les algorithmes d'égalisation fondés sur le "module constant" et ceux fondés sur la maximisation du kurtosis.

### ***1.3.6- Corrélation d'ordre trois (triple corrélation)***

Si le moment d'ordre un est nul, elle s'écrit dans le cas des signaux réels (elle n'est guère utilisée dans le cas complexe car les symétries des constellations impliquent souvent sa nullité) :

$$E( (x(t_1) x(t_2) x(t_3) ) \dots \dots \dots (I-43)$$

Si  $x(t)$  est stationnaire à l'ordre trois

$$r_x^{(3)}(\tau_1, \tau_2) = E(x(t) x(t+\tau_1) x(t+\tau_2)) \dots \dots \dots (I-44)$$

(la stationnarité à l'ordre trois est plus contraignante que la stationnarité à l'ordre deux: Un signal peut être stationnaire à l'ordre deux sans l'être à l'ordre trois).

Cette fonction appliquée à la sortie d'un filtre linéaire inconnu permet d'en retrouver les paramètres lorsque l'entrée du filtre est un bruit blanc ou une séquence i.i.d. sans faire référence au signal d'entrée à condition que la corrélation d'ordre trois existe. Cette identification aveugle peut aussi se réaliser dans le domaine des fréquences [11].

### ***1.3.7- Filtrage d'une séquence i.i.d.(independent and identically distributed)***

Un signal i.i.d.  $x(t)$  a une triple corrélation qui est nulle partout sauf à l'origine du plan où elle est égale au facteur d'asymétrie (*skewness*)  $cum_3(x)$ . Si  $x(t)$  est filtré par une filtre numérique non récursif de réponse impulsionnelle  $b(t)$ , produisant la sortie  $y(t)$  [12] :

$$y(t) = \sum_k b(k)x(t-k) \dots\dots\dots(I-45)$$

la corrélation d'ordre trois de  $y(t)$  est :

$$r_x^{(3)}(\tau_1, \tau_2) = E\left(\sum_{k,k',k''} x(t-k)b(k)x(t-k'+\tau_1)b(k')x(t-k''+\tau_2)b(k'')\right) \dots\dots(I-46)$$

en réarrangeant les termes :

$$r_x^{(3)}(\tau_1, \tau_2) = E\left(\sum_{k,k',k''} b(k)b(k')b(k'')E(x(t-k)x(t-k'+\tau_1)x(t-k''+\tau_2))\right) \dots\dots(I-47)$$

$x(t)$  étant une séquence i.i.d., les seuls termes de la somme qui ne sont pas nuls vérifient :

$$t - k = t - k' + \tau_1 = t - k'' + \tau_2 \dots\dots\dots(I-48)$$

soit :

$$k' = t - \tau_1 \dots\dots\dots(I-49)$$

$$k'' = t - \tau_2 \dots\dots\dots(I-50)$$

ce qui se traduit par :

$$r_3^{(y)}(\tau_1, \tau_2) = cum_3(x)\left(\sum_{k,k',k''} b(k)b(k-\tau_1)b(k-\tau_2)\right) \dots\dots\dots(I-51)$$

La sommation est une génération d'un calcul de corrélation classique : ici on fait intervenir un double produit et trois valeurs de la fonction, au lieu du produit de deux valeurs dans la corrélation d'ordre deux.

***I.3.8- Support de la corrélation d'ordre trois d'une séquence i.i.d. filtrée par un filtre à réponse impulsionnelle finie***

La fonction de transfert est :

$$B(z) = \sum_{k=0}^K b(k)z^{-k} \dots\dots\dots(I-52)$$

D'après l'équation (I-51) :

$$r_3^{(y)}(\tau_1, \tau_2) = cum_3(x) \left( \sum_{k,k',k''} b(k)b(k-\tau_1)b(k-\tau_2) \right) \dots\dots\dots(I-53)$$

Lorsque  $k$  est fixé, le domaine de variation du couple de variables  $(\tau_1, \tau_2)$  est :

$$k - K \leq \tau_1 \leq k \dots\dots\dots(I-54)$$

$$k - K \leq \tau_2 \leq k \dots\dots\dots(I-55)$$

La corrélation d'ordre trois présente plusieurs symétries en particulier le changement de signe simultané sur les deux variables  $\tau_1$ , et  $\tau_2$ , l'échange de ces variables  $\tau_1$ , et  $\tau_2$ , ainsi que la transformation **[13]** :

$$\nu_1 = -\tau_1 \dots\dots\dots(I-56)$$

$$\nu_2 = \tau_2 - \tau_1 \dots\dots\dots(I-57)$$

***1.3.9- Identification de filtre à non minimum de phase (Giannakis et Mendel)***

La corrélation d'ordre deux permet de retrouver les caractéristiques d'un filtre à minimum de phase par factorisation spectrale (filtre à réponse impulsionnelle finie) ou d'un filtre récursif stable par résolution des équations de Yule-Walker (algorithme de Levinson) [14, 15, 16]. On ne peut pas à partir de ces informations séparer les racines d'un filtre qui seraient soit à l'intérieur soit à l'extérieur du cercle de rayon un. On voit que cette identification est possible lorsqu'on se base sur la corrélation d'ordre trois. Si on fixe  $\tau_2 = K$ , l'équation (I-51) reliant la corrélation d'ordre trois aux coefficients du filtre devient :

$$r_3^{(y)}(\tau_1, K) = cum_3(x) \left( \sum_k b(k)b(k - \tau_1)b(k - K) \right) \dots\dots\dots(I-58)$$

Comme  $(k - K)$  ne doit pas être négatif pour que  $b(k - K)$  ne soit pas nul, la somme se réduit à un seul terme non nul ( $k = K$ ) :

$$r_3^{(y)}(\tau_1, K) = cum_3(x)b(0)b(K)b(K - \tau_1) \dots\dots\dots(I-59)$$

On remarque que si la densité de probabilité de  $x(t)$  est symétrique, le moment d'ordre trois est nul et cette identification n'est pas possible; il faudra alors étendre l'approche à l'ordre quatre, à condition que le cumulante d'ordre quatre de  $x(t)$  ne soit pas nul. Dans le cas des signaux d'entrée gaussiens tous les cumulants d'ordre supérieur à deux sont nuls et il n'est pas possible d'effectuer cette identification de filtres non minimum de phase [17, 18,19].

### ***1.3.10- Kurtosis positif et kurtosis négatif***

Dans les applications en égalisation on s'intéresse surtout au cumulants d'ordre quatre, et il peut être important (par exemple dans les hypothèses de Godard et Benveniste) de connaître le signe du kurtosis du signal étudié (le signal émis et le signal reçu ont des kurtosis de même signe s'ils ne sont pas perturbés par des bruits non gaussiens). On parle de variable "sur-gaussienne" quand le kurtosis est positif (loi de Cauchy par exemple) et de variable "sous-gaussienne" quand le kurtosis est négatif (variable équirépartie). Si une densité de probabilité est bornée dans  $[-A, A]$  centrée et de variance fixée, le kurtosis le plus petit (négatif) est obtenu lorsque :

$$p(x) = \frac{1}{2}\delta(x - A) + \frac{1}{2}\delta(x + A) \dots\dots\dots(I-60)$$

pour une variance égale à  $A^2$ . Si la densité de probabilité est bornée dans  $[-A, A]$  centrée et de variance fixée égale à  $\sigma^2$  (on suppose que  $A^2 > 3\sigma^2$ ), le kurtosis le plus grand (positif) est obtenu lorsque :

$$p(x) = (1 - \alpha)\delta(x) + \frac{\alpha}{2}\delta(x - A) + \frac{\alpha}{2}\delta(x + A) \dots\dots\dots(I-61)$$

pour une variance fixée  $\sigma^2$  et où  $\alpha$  est égal à  $\sigma^2/2A^2$  :

### ***1.3.11- Corrélation d'ordre quatre des signaux complexes***

Nous supposons que les moments d'ordre un et trois sont nuls. Le cumulants d'ordre quatre s'écrit dans le cas des signaux stationnaires [20, 21] :

$$\begin{aligned} cum_x^{(4)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = & E(x(t), x(t + \tau_1)x^*(t + \tau_2)x^*(t + \tau_3)) \\ & - E(x(t)x(t + \tau_1))E(x^*(t + \tau_2)x^*(t + \tau_3)) \\ & - E(x(t)x^*(t + \tau_2))E(x(t + \tau_1)x^*(t + \tau_3)) \\ & - E(x(t)x^*(t + \tau_3))E(x(t + \tau_1)x^*(t + \tau_2)) \\ & \dots\dots\dots(I.62) \end{aligned}$$

en particulier, si  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$

$$cum_x^{(4)}(0,0,0) = E(|x(t)|^4) - |E(x^2(t))|^2 - 2E(|x(t)|^2)^2 \dots\dots\dots(I-63)$$

Si, pour des raisons de symétrie de la densité de probabilité de  $x(t)$ , le terme  $E(x^2(t))$  s'annule, on retrouve les données utilisées par Godard dans le critère du module constant [15, 22].

### ***I.3.12- Maximisation du kurtosis***

Le point de départ de l'approche de Benveniste est d'essayer de filtrer le signal mesuré  $x(t)$  pour que certaines caractéristiques de la densité de probabilité de  $y(t)$  se rapprochent le plus possibles des mêmes caractéristiques concernant le signal émis  $m(t)$ ; ce que font aussi Sato et Godard. Shalvi et Weinstein [23, 24] vont un peu plus loin; ils montrent qu'il suffit de maximiser (en valeur absolue) le kurtosis de la sortie pour trouver les paramètres de l'égaliseur à un retard et éventuellement à un déphasage près.

### ***I.4- Quelques formules préalables***

Nous reprenons pour préparer les calculs quelques formules semblables à celles de Godard [15] (en supposant toujours que  $m(t)$  est une séquence i.i.d.) :

$$E(|y(t)|^2) = E(|m(t-k)b(k)|^2) \dots\dots\dots(I-64)$$

$$E(|y(t)|^2) = E(|m(t)|^2) \sum_k |b(k)|^2 \dots\dots\dots(I-65)$$



Si on ne suppose pas *a priori* que  $E(m^2(t))$  est nul, on a aussi :

$$E(y(t)^2) = E(m(t)^2) \sum_k b(k)^2 \dots\dots\dots (I-66)$$

D'après les propriétés (I-42) :

$$\begin{aligned} E(|y(t)|^4) &= E(|m(t)|^4) \left( \sum_k |b(k)|^4 \right) \\ &+ 2(E(|m(t)|^2))^2 \left( \left( \sum_k |b(k)|^2 \right)^2 - \sum_k |b(k)|^4 \right) \\ &+ |E(|m(t)|^2)|^2 \left( \left| \sum_k |b(k)|^2 \right|^2 - \sum_k |b(k)|^4 \right) \dots\dots\dots (I-67) \end{aligned}$$

Le kurtosis  $cum_4(y)$  s'écrivant :

$$K(y) = cum_4(y) = E(|y(t)|^4) - 2(E(|y(t)|^2))^2 - |E(y^2(t))|^2 \dots\dots\dots (I-68)$$

On fait disparaître les termes d'ordre deux et on obtient d'après les équations (I-67) et (I-68) :

$$K(y) = K(m) \left( \sum_k |b(k)|^4 \right) \dots\dots\dots (I-69)$$

Ce résultat n'est valable que sous l'hypothèse selon laquelle  $m(t)$  est une séquence i.i.d. Cette formule implique que le kurtosis ne change pas de signe lorsqu'un signal est filtré par un signal linéaire [22]. Cette formule permet de mettre en évidence un résultat semblable à celui de Benveniste: Si les modules des signaux  $m(t)$  et  $y(t)$  ont la même variance

$$E(|y(t)|^2) = E(|m(t)|^2) \dots\dots\dots(I-70)$$

on a le résultat fondamental :

- (a)

$$|K(y)| \leq |K(m)| \dots\dots\dots(I-71)$$

$K(y)$  ayant toujours le même signe que  $K(m)$ .

- (b)

$$|K(y)| = |K(m)| \dots\dots\dots(I-72)$$

seulement si  $B(z)$  se réduit à un retard d'un nombre entier d'échantillons à un déphasage près.

En effet,

$$\left( \sum_k |b(k)|^2 \right)^2 = \left( \sum_k |b(k)|^4 \right) + \left( \sum_k \sum_{l \neq k} |b(k)|^2 |b(l)|^2 \right) \dots\dots\dots(I-73)$$

Le deuxième terme de la somme est toujours positif ou nul. Il n'est nul que lorsqu'un seul des  $|b(k)|^2$  est différent de zéro, d'où le résultat. Tout filtrage d'un signal i.i.d. tel que le signal de sortie ait la même variance que le signal d'entrée réduira donc le module du kurtosis du signal de sortie; il le conservera uniquement s'il réalise un simple décalage (d'un nombre entier d'échantillons). Retrouver le signal original revient donc à trouver un filtre tel que la séquence de sortie ait la même variance et le kurtosis maximum en valeur absolue. Il s'agit donc de retrouver les coefficients de l'égaliseur maximisant  $|K(y)|$  sous la contrainte :

$$\sum_k |b(k)|^2 = 1 \dots\dots\dots(I-74)$$

(imposer la contrainte reviendra en pratique à appliquer un gain à  $y(t)$  de manière à ce que la variance de  $|y(t)|$  soit égale à celle de  $|m(t)|$ .) Il faut toutefois s'assurer que cette recherche de maximum n'aboutit pas sur des maxima locaux (problème traité de manière moins simple dans les approches de Benveniste et Godard [15]). Pour recherche ce maximum on utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange :

$$L(B,\lambda) = \sum_k |b(k)|^4 - \lambda \left( \sum_k |b(k)|^2 - 1 \right) \dots\dots\dots(I-75)$$

Les points stationnaires de  $L(B, \lambda)$  vérifient :

$$\frac{\partial L(B,\lambda)}{\partial b(l)} = 4b(l) \left( |b(l)|^2 - \frac{\lambda}{2} \right) \dots\dots\dots(I-76)$$

pour tout  $l$  et :

$$\frac{\partial L(B,\lambda)}{\partial b(\lambda)} = - \sum_k |b(k)|^2 + 1 = 0 \dots\dots\dots(I-77)$$

D'après l'équation (I-78), il faut que ,

soit :

$$b(l) = 0 \dots\dots\dots(I-78)$$

soit :

$$|b(l)|^2 - \frac{\lambda}{2} = 0 \dots\dots\dots(I-79)$$

Supposons donc qu'il y ait  $N$  coefficients  $b(k)$  non nuls (et donc tous égaux en valeur absolue à  $\sqrt{\lambda/2}$  ). D'après la contrainte (I-79), il faut que soit :

$$|b(k)|^2 = 1/N \dots\dots\dots(I-80)$$

soit :

$$b(k) = 0 \dots\dots\dots(I-81)$$

On est amené à envisager trois cas :

- (a) Le cas où tous les  $|b(k)|$  sont égaux et valent donc  $1/K$  (en supposant qu'on ne considère que le cas où la chaîne complète : filtre + égaliseur est un filtre à réponse impulsionnelle finie, ce qui n'est pas très réaliste en théorie et n'est d'ailleurs pas envisagé dans l'article de Shalvi et Weinstein;

- (b) Le cas général où  $N \neq K$  et  $N \neq 1$ .

- (c) Le cas où un seul des  $b(k)$  est différent de zéro et vaut donc un; Shalvi et Weinstein montrent que les solutions sont des points selles (ou cols) dans le cas (b) et que le maximum n'est obtenu que dans le cas (c), le cas (a) donnant un minimum. Pour cela on étudie les petites variations réelles  $\varepsilon(l)$  des composantes  $|b(k)|^2$  telles que

$$\sum_l \varepsilon(l) = 0 \dots\dots\dots(I-82)$$

***1.4.1- Cas (a) : Il y a un minimum lorsque tous les  $b(k)$  sont différents de zéro***

Dans ce cas,  $N = K$ . Lorsqu'on ajoute une petite variation aux  $K$  composantes  $b(k)$  le critère (I-77) devient :

$$L(\mathbf{B} + \boldsymbol{\varepsilon}, \lambda) = \sum_k |b(k)|^4 + \sum_l \varepsilon^2(l) \dots \dots \dots (I-83)$$

La valeur du critère au point d'équilibre ( $\boldsymbol{\varepsilon}(l) = 0$ ) augmente quelle que soit la variation vérifiant la contrainte (I-83), et le point ne peut être qu'un minimum.

***I.4.2- Cas (b) : Il y a un col (point-selle) lorsque le nombre  $N$  de  $b(k)$  différents de zéro est inférieur à  $K$  et supérieur à un***

•(b1) Lorsqu'on ajoute au critère (I-77) une petite variation non nulle seulement pour les  $N$  composantes non nulles  $b(k)$  et nulle pour les  $(K - N)$  composantes nulles, on obtient :

$$L(\mathbf{B} + \boldsymbol{\varepsilon}, \lambda) = \sum_k |b(k)|^4 + \sum_l \varepsilon^2(l) \dots \dots \dots (I-84)$$

La valeur du critère au point d'équilibre ( $\boldsymbol{\varepsilon}(l) = 0$ ) est dépassée, et le point ne peut être qu'un minimum ou un point selle.

• (b2) Considérons le cas où au moins une des composantes  $b(k)$ , soit  $b(0)$ , est nulle. Les petites variations  $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$  sont nécessairement positives lorsque  $B(k) = 0$  car un carré de module ne peut qu'augmenter. Le critère est dans ce cas pour une petite variation vérifiant la contrainte (I-84)

$$L(\mathbf{B} + \boldsymbol{\varepsilon}, \lambda) = \varepsilon^2(0) + \sum_{k \neq 0} |b(k)|^2 + \boldsymbol{\varepsilon}(k)^2 \dots \dots \dots (I-85)$$

En remplaçant les  $b(k)$  par leurs valeurs :

$$L(B + \varepsilon, \lambda) = \varepsilon^2(0) + \sum_{k \neq 0} \left( \frac{1}{N} + \varepsilon(k) \right)^2 \dots \dots \dots (I-86)$$

En développant le carré :

$$L(B + \varepsilon, \lambda) = \varepsilon^2(0) + \sum_{k \neq 0} \left( \frac{1}{N} + 2\frac{1}{N}\varepsilon(k) + \varepsilon^2(k) \right)^2 \dots \dots \dots (I-87)$$

D'après la contrainte (I-84) :

$$\sum_{k \neq 0} \varepsilon(k) = -\varepsilon(0) \dots \dots \dots (I-88)$$

et le critère devient :

$$L(B + \varepsilon, \lambda) = \varepsilon^2(0) + \frac{1}{N} - 2\frac{1}{N}\varepsilon(0) + \sum_{k \neq 0} \varepsilon^2(k) \dots \dots \dots (I-89)$$

$$L(B + \varepsilon, \lambda) = \frac{1}{N} + \varepsilon^2(0) + \sum_{k \neq 0} \varepsilon^2(k) - 2\frac{1}{N}\varepsilon(0) \dots \dots \dots (I-90)$$

En négligeant les termes du deuxième ordre :

$$L(B + \varepsilon, \lambda) = \frac{1}{N} + - 2\frac{1}{N}\varepsilon(0) \dots \dots \dots (I-91)$$

une variation positive  $\varepsilon(0)$  entraîne dans ce cas une diminution du critère.

- (b3) Ainsi, en effectuant une petite variation dans une direction (premier cas

considéré), on augmente le critère (I-88); en effectuant une petite variation dans une autre direction on diminue ce critère (I-88); par conséquent, le point analysé est un point selle et non un point d'équilibre pour la recherche d'un maximum.

***1.4.3- Cas (c) : Il y a un maximum lorsqu'un seul des  $b(k)$  est différent de zéro***

Dans ce cas ce  $b(k)$  vaut un. On suppose que c'est le premier ( $k = 0$ ), mais on peut appliquer l'approche à n'importe lequel des  $b(k)$  (on rappelle que la solution n'est recherchée qu'à une translation temporelle près). Les petites variations  $\varepsilon(k)$  sont nécessairement positives lorsque  $b(k) = 0$  c'est à dire lorsque  $k \neq 1$  et donc la variation  $\varepsilon(0)$  est négative d'après la contrainte (I-84). Le critère est dans ce cas pour une petite variation vérifiant la contrainte (I-84) :

$$L(B + \varepsilon, \lambda) = \sum_{k \neq 0} \varepsilon(k) + (|b(0)|^2 + \varepsilon(0))^2 \dots\dots\dots(I-92)$$

D'après la contrainte (I-84) :

$$\sum_{k \neq 0} \varepsilon(k) = - \varepsilon(0) \dots\dots\dots(I-93)$$

Tous les  $\varepsilon(l)$  sont positifs lorsque  $l \neq 0$  , par conséquent, d'après la contrainte (I-84) :

$$\varepsilon(0) < 0 \dots\dots\dots(I-94)$$

Le critère devient :

$$L(\mathbf{B} + \boldsymbol{\varepsilon}, \lambda) = -\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{0}) + \mathbf{1} + 2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{0}) + \boldsymbol{\varepsilon}^2(\mathbf{0}) \dots\dots\dots(\text{I-95})$$

$$L(\mathbf{B} + \boldsymbol{\varepsilon}, \lambda) = \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{0}) + \boldsymbol{\varepsilon}^2(\mathbf{0}) \dots\dots\dots(\text{I-96})$$

En négligeant les termes du deuxième ordre :

$$L(\mathbf{B} + \boldsymbol{\varepsilon}, \lambda) = \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{0}) \dots\dots\dots(\text{I-97})$$

Une variation (nécessairement négative)  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{0})$  associée à n'importe quelle variation (nécessairement positive) des autres  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{l})$  entraîne donc une diminution du critère : il s'agit bien d'un maximum.

**Remarques :**

Le critère ne présente qu'un seul minimum, au signe près ou dans le cas complexe à un déphasage près: on peut multiplier  $\mathbf{B}(z)$  un facteur  $e^{j\varphi}$  dans le développement précédent sans rien changer au résultat; la constellation du signal après égalisation peut subir une rotation quelconque qu'il faudra compenser en introduisant une connaissance connue *a priori* du récepteur sur le message émis. Shalvi et Weinstein supposent que le filtre complet (canal + égaliseur) a une longueur infinie, et ne considèrent donc pas le cas du minimum absolu, obtenu lorsque tous les  $|\mathbf{b}(\mathbf{k})|^2$  sont identiques et égaux à  $1/K$ ; pour qu'il y ait un point selle il faut qu'au moins une des composantes  $\mathbf{b}(\mathbf{k})$  soit nulle. Sinon on se trouve toujours dans le cas (I-86): il y a augmentation du critère quelle que soit la variation  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k})$ : sur toutes les composantes non nulles et donc égales à  $1/K$  le kurtosis est minimum (on trouve le filtre de longueur  $\mathbf{k}$  qui mélange le plus les  $\mathbf{m}(t)$ ). Les considérations sur la recherche du maximum ont été faites en référence au canal complet ( $\mathbf{B}(z)$ ) et non de l'égaliseur  $\mathbf{C}(z)$ .



Le passage de  $\mathbf{B}(z)$  à  $\mathbf{C}(z)$  est immédiat: on passe de l'un à l'autre par une transformation linéaire inversible :

$$\mathbf{B}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{C}(z) \dots \dots \dots (I-98)$$

On peut effectuer la recherche du minimum en faisant varier les coefficients  $\mathbf{c}(\mathbf{k})$  et non les coefficients  $\mathbf{b}(\mathbf{k})$ .

## **CHAPITRE II**

### *Signaux aléatoires, Fonctions de répartition et Moments de l'implantation ionique*

## ***II.1- Introduction***

Dans ce deuxième chapitre, nous allons utiliser les statistiques d'ordre supérieur limité au 4<sup>ème</sup>, pour calculer les moments caractéristiques et les paramètres clés d'une implantation ionique. L'application de cette méthode s'est avérée la solution la plus adaptée à ce type de processus physico-expérimental. C'est un des rares aspects où l'association d'une méthode de calcul à un procédé expérimental constitue les éléments d'une technique et d'une solution à la fois.

Comme chaque ion implanté a un chemin aléatoire quand il traverse la cible, l'application d'une méthode basée sur les notions d'événements aléatoires devient beaucoup plus réaliste que les méthodes analytiques classiques. Cette méthode aléatoire a été considérée dans ce contexte très pratique très souple et qui mène directement à des résultats d'une grande précision.

De plus, ces processus de traitement et d'analyse sont toujours moins coûteux et ne nécessitent que des moyens de calculs, beaucoup plus disponibles de nos jours. Il faut rappeler aussi que c'est grâce à de telles techniques que l'implantation ionique dans les semi-conducteurs, et en particulier dans les matériaux à couches ultraminces, a pris une place de choix dans la technologie des circuits intégrés VLSI. C'est grâce à elles aussi que la maîtrise des profils de dopage et le contrôle de leur profondeur sont devenus possibles. Cette maîtrise des profondeurs contrôlées est bien nécessaire pour la réalisation des jonctions courtes spécifiques aux composants très rapides et offrant une capacité d'intégration très élevée.

## ***II.2- Aspect typique aléatoire de l'implantation ionique***

Le support expérimental utilisé dans notre travail est l'implantation ionique dans le silicium polycristallin. La structure polycristalline de ces films minces est le fruit d'un procédé expérimental développé autour d'une technique dite « techniques LPCVD ». En effet, les films qui ont été obtenus par cette technique jouissent de quelques propriétés particulières qui leur confèrent un double avantage. En effet, d'une part cette structure est différente de celle du silicium monocristallin connue comme parfaitement ordonnée. D'autre part elle est aussi différente de celle d'amorphe connue comme parfaitement désordonnée. Donc cette structure est intermédiaire entre ces deux limites.

Elle est constituée d'une multitude de petits grains orientés de manière aléatoire et séparés par des régions désordonnées appelées joints de grains. Le joint de grain est assimilé à une région de haute diffusivité entre deux régions de faible diffusivité [25].

Le polysilicium fortement dopé est souvent utilisé dans la technologie des circuits intégrés, soit comme matériau de grille pour les composants MOS et CMOS ou comme source de dopants pour la sous-couche de silicium monocristallin où sera créé l'émetteur des transistors bipolaires.

Actuellement, les problèmes posés par les grilles de transistors CMOS à base de poly-silicium fortement dopé bore et les jonctions courtes définissant les limites des zones sources et drains des TMOS ou collecteurs-émetteurs des transistors bipolaires de type **P** résident dans la diffusion du bore en dehors des régions qui lui sont destinées. Il s'avère que la présence de deux dopants différents dans le polysilicium produit un changement significatif dans la redistribution de la concentration du dopant après traitement thermique. En effet, il a été remarqué que le bore subit un ralentissement en présence d'une impureté de type **N**.

Pour décrire les profils de dopage issus des implantations ioniques, plusieurs modèles mathématiques ont été utilisés. Nous donnerons, dans ce qui suit un succinct aperçu de ces modèles analytiques et nous détaillerons enfin, les éléments révélés avantageux des statistiques d'ordre supérieur pour la détermination des paramètres clés des implantations ioniques.

### **II.3- Probabilités et fonctions de répartition**

#### **II.3.1- Quelques Propriétés essentielles des probabilités**

Soient  $P(A+B+...)$  la probabilité pour qu'au moins un des événement  $A, B, ...$  se produise,  $P(A.B...)$  la probabilité pour que tous les événements  $A, B, ...$  se produisent à la fois, et  $P(A/B)$  la probabilité pour que l'événement  $A$  se produise sachant que l'événement  $B$  s'est déjà produit. Ceci nous permet d'écrire les deux plus importants axiomes qui gouvernent les probabilités, et qui s'expriment comme suit :

$$P(A + B + ...) \leq P(A) + P(B) + \dots \dots \dots (II-1)$$

$$P(A.B) = P(A/B) \cdot P(B) \dots \dots \dots (II-2)$$

Considérons un ensemble d'événements chacun caractérisé par un nombre  $\eta$ . Le nombre  $\eta$  est appelé variable aléatoire et il lui associé une fonction de répartition  $F(y)$ . Cette fonction est définie comme étant la probabilité attribuée à l'évènement qui s'est déjà produit et ayant une valeur  $\eta$  ne dépassant pas une valeur donnée  $y$ .

Ceci peut s'écrire :

$$F(y) = P(\eta \leq y) \dots \dots \dots (II-3)$$

Si  $g(\eta)$  est une fonction de  $\eta$ , l'espérance mathématique (ou valeur moyenne) de  $g(\eta)$  est décrite et définie par :

$$Eg(\eta) = \sum_i g_i(\eta_i) f_i \dots \dots \dots (II-4)$$

où  $f_i$  est la fréquence d'apparition du résultat  $y_i$ .

En fait, l'espérance mathématique de  $g(\eta)$  est la moyenne pondérée de  $g(\eta)$ , les poids étant les probabilités respectives des différentes valeurs possibles de  $\eta$ .

La définition de l'espérance mathématique implique :

$$\sum_i E g_i(\eta) = E \sum_i g_i(\eta_i) \dots\dots\dots (II-5)$$

que les variables aléatoires  $\eta_i$  soient indépendantes ou non. Cette équation est d'une grande importance pour les travaux de traitement de signal.

### ***II.3.2- Distributions***

On a souvent besoin d'engendrer des fonctions de distributions, c'est à dire d'engendrer des nombres aléatoires dont la distribution est caractérisée par une fonction  $f(x)$ . Cette technique est la manière la plus directe pour générer des variables aléatoires suivant une certaine distribution.

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux distributions (fonctions de répartition) des variables et des couples de variables aléatoires absolument continues. Dans chacune des deux parties composant le chapitre, nous rappelons les propriétés essentielles, les principales caractéristiques et les familles usuelles des distributions continues. Dans la théorie bi variée, les distributions marginales et conditionnelles sont données ainsi que les propriétés liées aux couples de variables lorsque les variables aléatoires marginales sont indépendantes.

#### ***II.3.2.1- Distribution d'une variable aléatoire continue***

On appelle fonction de distribution toute fonction  $F$  définie sur  $]-\infty, +\infty[$  et vérifiant les propriétés suivantes:

$F$  est non décroissante (croissante au sens large)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 \dots\dots\dots(\text{II-6})$$

**Remarque:**

Dans la définition précédente, la notion de distribution n'est pas liée à une variable aléatoire. On dit que  $X$  est une variable aléatoire absolument continue (v.a.c.) si sa fonction de répartition  $F$  est continue et dérivable à gauche et à droite de tout point  $x$  de  $\mathfrak{R}$ . La fonction dérivée  $f$  de  $F$  est dite fonction densité de probabilité de  $X$  et vérifie les relations:

$$\forall x \in \mathfrak{R}, f(x) = F'(x) \quad \text{et} \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \dots\dots\dots(\text{II-7})$$

Le support d'une v.a.c.  $X$  est un intervalle ou une réunion d'intervalles.

La fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right); \quad x \in \mathfrak{R} \dots\dots\dots(\text{II-8})$$

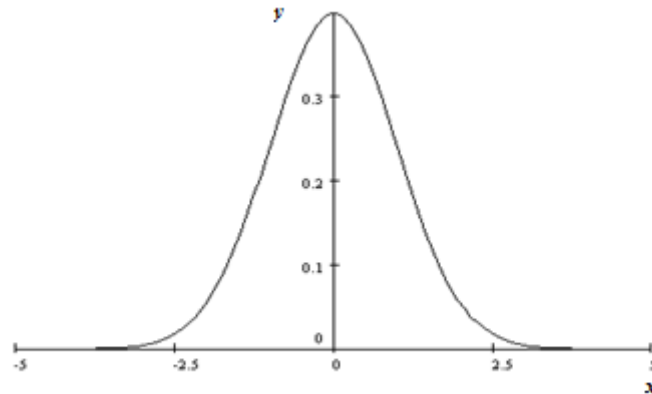
est la densité de probabilité de d'une v.a.c. C'est la loi normale standard centrée réduite.

La représentation graphique de  $f$  est donnée par la courbe en cloche ci-après. Dans toute la suite  $X$  désigne une v.a.c. et  $f$  représente sa fonction densité de probabilité. Pour tout nombre réel on a :

$$P(X \leq \alpha) = F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx \quad \text{et} \quad P(X > \alpha) = 1 - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx \dots\dots\dots(\text{II-9})$$

Pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\alpha \leq \beta$  on a :

$$P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \dots\dots\dots(\text{II-10})$$



**Figure II.1 :** Loi normale standard centrée réduite [26].

La fonction de répartition  $F$  d'une variable aléatoire est avant tout une distribution. C'est pourquoi dans toute la suite de ce chapitre on utilisera le terme "**distribution**" pour désigner la fonction de répartition d'une v.a.c. .

### **II.3.2.2- Espérance mathématique**

On considère une v.a.c.  $X$  de fonction densité  $f$ . On appelle espérance mathématique de  $X$  le nombre réel noté  $E(X)$  défini par l'intégrale :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \dots\dots\dots(\text{II-11})$$

si elle est convergente.

Pour l'espérance mathématique de la loi normale :



$$g(y) = f_x\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2 \dots\dots\dots(\text{II-12})$$

On a alors:  $E(X) = \mu$ . Plus généralement, dans toute la suite, le paramètre  $\mu$  désignera la moyenne, l'espérance mathématique d'une loi généralisée.

### **II.3.2.3- Variance écart type**

On appelle variance de  $X$  le nombre réel, noté  $V(X)$  et défini par l'intégrale:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx \dots\dots\dots(\text{II-13})$$

si elle est convergente.

La variance est toujours positive ou nulle (car étant l'intégrale d'une fonction positive). La racine carrée de la variance est appelée *écart type* de  $X$  et noté  $\sigma(X)$ .

On a donc :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \text{ ou } \sigma^2 = V(X) \dots\dots\dots(\text{II-14})$$

La Variance de la loi normale généralisée, c'est à dire loi normale centrée réduite est donnée par :

$$V(Y) = V(\sigma + \mu) = \sigma^2 V(X) = \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2; \text{ donc } E(X) = \mu \text{ et } V(X) = \sigma^2 \dots\dots\dots(\text{II-15})$$

Dans toute la suite le paramètre  $\sigma$  désigne l'écart type.

### **II.3.2.4- Skewness**

Le Skewness mesure le degré d'assymétrie de la distribution. Pour une variable aléatoire  $X$  centrée, il s'écrit :

$$S = \frac{E[X^3]}{E[X^2]^{3/2}}, \dots\dots\dots(\text{II-16})$$

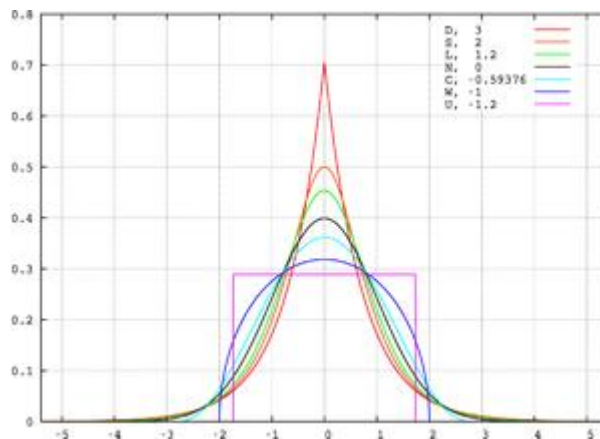
Si  $S$  est égal à 0, la distribution est symétrique. Si  $S$  est négatif, la distribution est asymétrique vers la gauche. Si  $S$  est positif, la distribution est asymétrique à droite.

### **II.3.2.5- Kurtosis**

Le Kurtosis mesure le degré « d'écrasement » de la distribution. Pour une variable aléatoire  $X$  centrée, il s'écrit :

$$K = \frac{E[X^4]}{E[X^2]^2} - 3, \dots\dots\dots(\text{II-17})$$

Lorsqu'il est positif, la distribution est « pointue ». Lorsqu'il est négatif elle est relativement « écrasée ».



**Figure II.2 :** Exemples de Kurtosis pour quelques distributions [26].

<i>Loi de Probabilité</i>	<i>Kurtosis</i>	<i>Symbole dans la figure</i>	<i>Couleur dans la figure</i>
<i>Loi de Laplace</i>	<i>3</i>	<i>D</i>	<i>Rouge</i>
<i>Loi sécante hyperbolique</i>	<i>2</i>	<i>S</i>	<i>Orange</i>
<i>Loi logistique</i>	<i>1.2</i>	<i>L</i>	<i>Verte</i>
<i>Loi normale</i>	<i>0</i>	<i>N</i>	<i>Noire</i>
<i>Loi du cosinus surélevé</i>	<i>-0.59</i>	<i>C</i>	<i>Cyan</i>
<i>Loi diu demi-cercle</i>	<i>-1</i>	<i>W</i>	<i>bleue</i>
<i>Loi uniforme continue</i>	<i>-1.2</i>	<i>U</i>	<i>Magenta</i>

### **II.3.2.6- Principales familles usuelles des distributions**

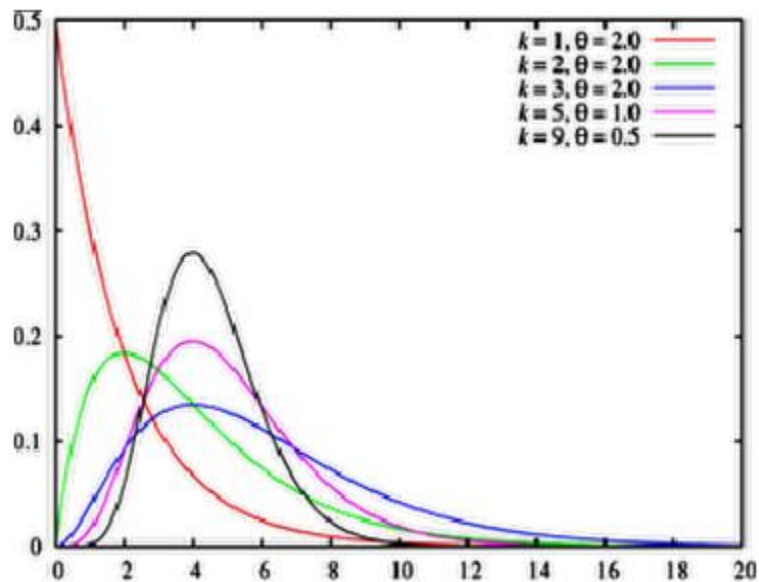
Nous donnons, dans ce qui suit quelques principales distributions continues à travers leurs distributions et leurs caractéristiques essentielles (moyenne et variance) [26].

#### **II.3.2.6.1- La distribution Gamma**

La distribution gamma est définie par :

$$\Gamma(k) = \int_0^{+\infty} \exp(-x)x^{k-1}dx \quad , \text{ avec } f(x) = \frac{\theta^k}{\Gamma(k)}x^{k-1}(\exp(-\theta x)) \dots\dots\dots (\text{II-18})$$

où  $f(x)$  est la densité de probabilité associée à  $X$ , et caractérisée par les deux propriétés suivantes : *moyenne*  $E(X) = \frac{k}{\theta}$  et *variance*  $V(X) = \frac{k}{\theta^2}$  ..... (II-19)



**Figure II.3 :** Distribution Gamma [26].

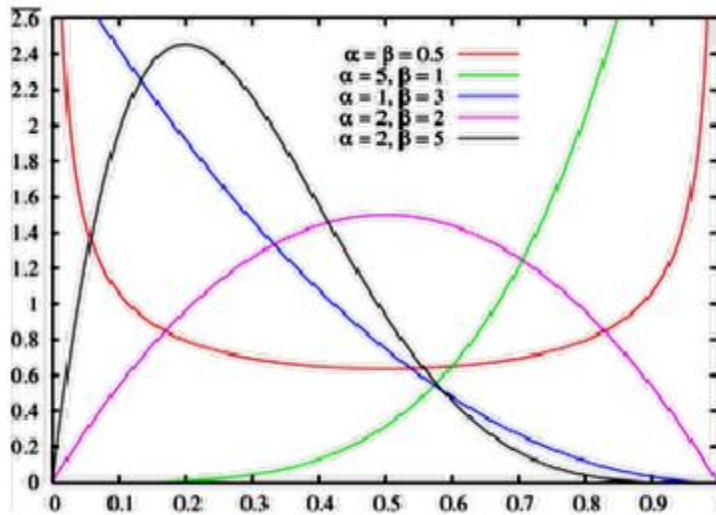
### II.3.2.6.2- La distribution Bêta

La distribution bêta est définie par :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt \quad , \text{ avec } f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \dots\dots\dots(\text{II-20})$$

où  $f(x)$  est la densité de probabilité associée à  $X$ , et caractérisée par les deux propriétés suivantes :

$$\text{moyenne } E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \text{ et } V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \dots\dots\dots(\text{II-21})$$



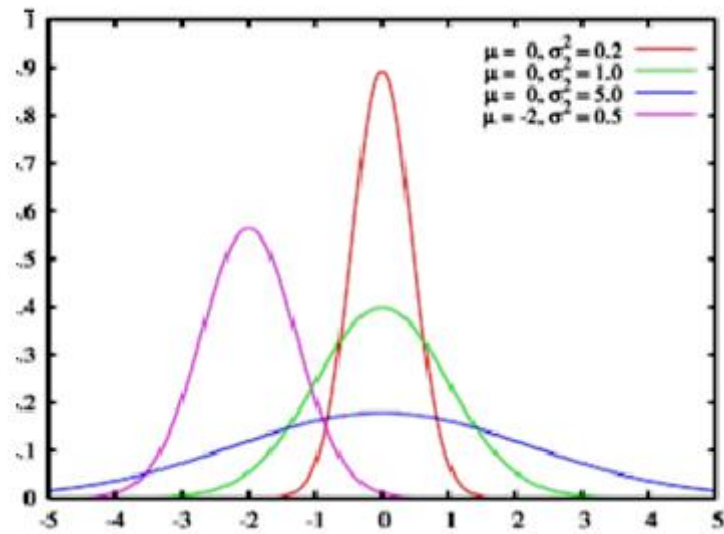
**Figure II.4 :** Distribution Bêta [26].

### II.3.2.6.3- La distribution normale ou Gauss-Laplace

La distribution normale est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right); \quad x \in \mathfrak{R} \dots\dots\dots(\text{II-22})$$

Avec :  $\text{moyenne } E(X) = \mu \text{ et } V(X) = \sigma^2 \dots\dots\dots(\text{II-23})$



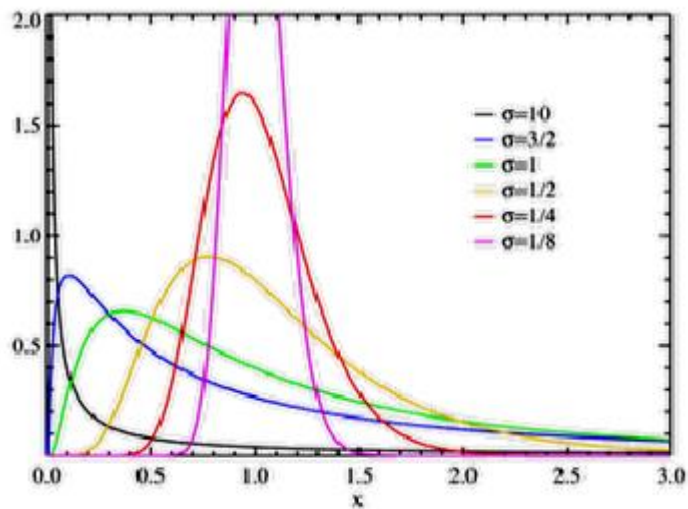
**Figure II.5 :** Distribution normale ou Gauss -Laplace [26].

#### II.3.2.6.4- La distribution Log-normale

La distribution log-normale est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right); \quad x > 0, \dots\dots\dots(\text{II-24})$$

Avec : *moyenne*  $E(X) = e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)}$  et  $V(X) = \left[e^{\sigma^2} - 1\right] e^{2\mu + \sigma^2} \dots\dots\dots\text{II-25}$



**Figure II.6 :** Distributions Log-normale [26].

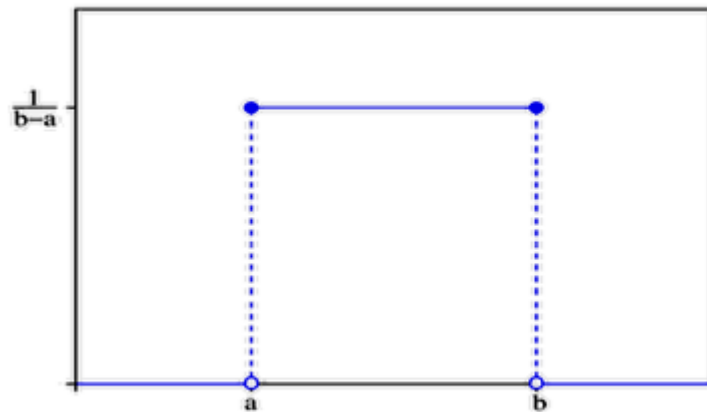
### II.3.2.6.5- La distribution uniforme

La distribution uniforme est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a, b] \text{ et } 0 \text{ si } x \notin [a, b], \dots\dots\dots(\text{II-26})$$

et caractérisée par les propriétés suivantes :

$$\text{moyenne } E(X) = \frac{a+b}{2} \text{ et } V(X) = \frac{(a-b)^2}{12} \dots\dots\dots(\text{II-27})$$



**Figure II.7 :** Distribution uniforme [26]

### II.3.2.6.6- La Distribution Logistique

La distribution logistique est définie par :

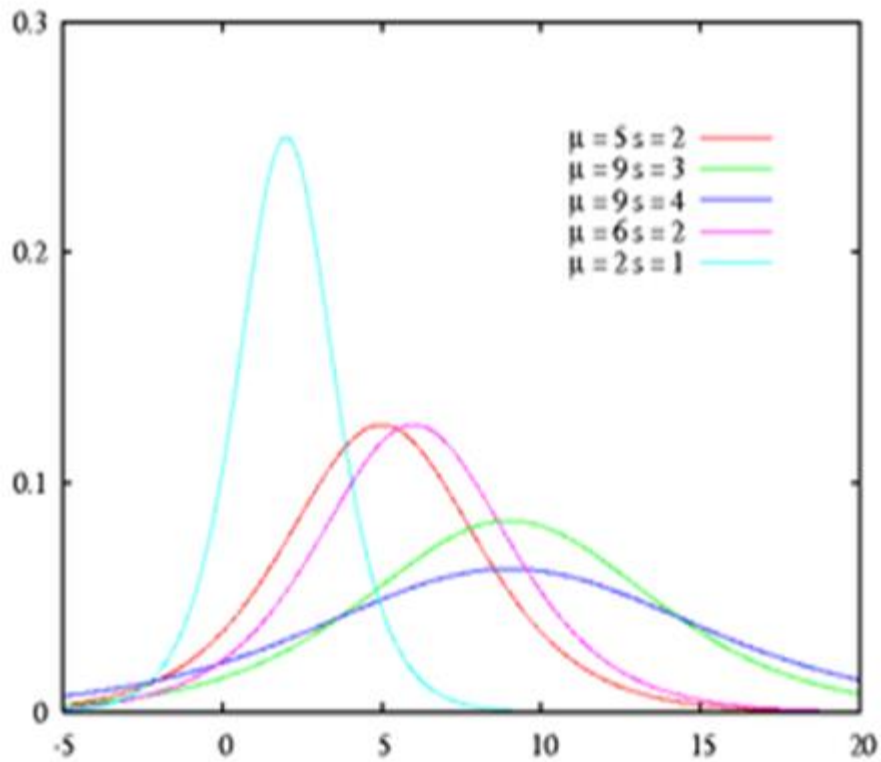
$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x-\mu}{s}}}{s \left(1 + e^{-\frac{x-\mu}{s}}\right)^2}, \quad \mu \text{ et } s > 0 \dots\dots\dots(\text{II-28})$$

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{x-\mu}{s}}} \dots \quad (\text{II-29})$$

et caractérisée par les deux propriétés suivantes :

$$E(X) = \mu \dots \dots \dots (\text{II-30})$$

$$V(x) = \frac{s^2 \pi^2}{3} \dots \dots \dots (\text{II-31})$$

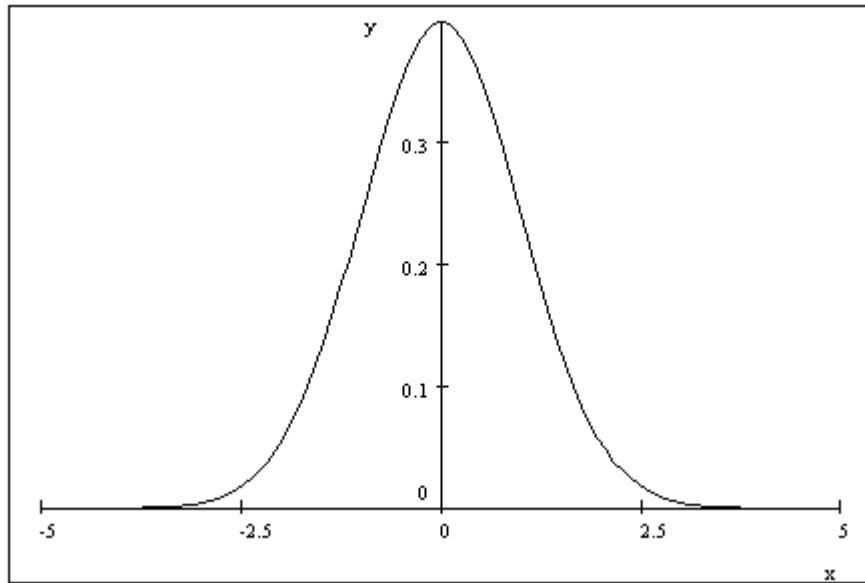


**Figure II.8 :** Distribution Logistique[26].

**II.3.2.6.7- La distribution normale centrée réduite**

La distribution normale réduite est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right); \quad x \in \mathfrak{R} \dots \dots \dots (\text{II-32})$$



**Figure II.9 :** Distributions normale centrée réduite [26].

On parle de loi normale lorsque l'on a affaire à une variable aléatoire continue dépendant d'un grand nombre de causes indépendantes dont les effets s'additionnent et dont aucune n'est prépondérante. Cette loi acquiert sa forme définitive avec Gauss (en 1809) et Laplace (en 1812). C'est pourquoi elle porte également les noms de loi de Gauss et loi de Laplace-Gauss.

La première description des profils de dopage a été basée sur la distribution de probabilité Gaussienne centrée autour de la portée projetée  $R_p$  avec une déviation standard projetée (l'écart type)  $\delta R_p$ .

$$C(x) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\delta R_p}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-R_p}{\delta R_p}\right)^2\right) \dots\dots\dots(\text{II-32-bis})$$

où  $N_0$  est le nombre total d'ions implantés par unité de surface,  $R_p$  est la profondeur moyenne de pénétration (projected range), et  $\delta R_p$  est un facteur qui caractérise la déviation standard du profil (projected struggle). Pour le calcul et la détermination de ces deux paramètres, qui ne sont en fait que les deux premiers



moments de la distribution gaussienne, il suffit simplement de ce référer aux formules qui ont été rapportées dans la littérature et qui sont données par plusieurs auteurs [27, 28, 29, 30, 31].

Généralement, le profil Gaussien de l'équation (II-12) est insuffisant pour décrire parfaitement les profils réels.

En général, une distribution arbitraire  $f(x)$  peut être caractérisée par les termes de ses moments. La quantité  $E(\eta^r)$  est appelée le moment d'ordre  $r$  de  $\eta$ . définie à l'aide de l'espérance mathématique  $Eg(\eta) = g(E\eta)$ . De même la quantité définie par :

$$\mu_r = \{(\eta - \mu)^r\} \dots\dots\dots (II-33)$$

où  $\mu = E\eta$  est appelée le moment centre d'ordre  $r$  de  $\eta$ . Les deux premiers moments les plus importants sont :  $\mu_1$ , appelé moyenne de  $\eta$ , et  $\mu_2$  appelé variance de  $\eta$ .

La moyenne est une mesure de position d'une variable aléatoire tandis que la variance est une mesure de dispersion autour de cette moyenne.

Les notions qu'on vient d'évoquer ci-dessus vont toutes se retrouver dans la pratique quand on traite le problème de l'implantation ionique. Car ce processus physique, défini à travers la distribution  $N(x)$  donnant le nombre des ions implantés par unité de surface en fonction de la profondeur unidimensionnelle  $x$ , est très bien décrit par les quatre premiers moments caractéristiques de la distribution  $N(x)$ .

Le premier moment de cette distribution est la portée projetée souvent noté ( $R_p$ ), qui n'est autre que la profondeur moyenne des ions implantés. Les autres moments d'ordre élevés sont exprimés en fonction de  $R_p$  selon ta relation générale suivante :

$$\mu_i = \frac{1}{\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - R_p)^i N(x) dx \dots\dots\dots (II-34)$$

où  $\varphi$  est la dose donnée par :

$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} N(x) dx \dots\dots\dots(\text{II-35})$$

et  $N(x)$  est la concentration des ions implantés dans la cible.

L'écart type (ou l'écart quadratique) est défini par:

$$\delta = \sqrt{\mu_2} \dots\dots\dots(\text{II-36})$$

qui constitue le 2<sup>ème</sup> moment de la distribution  $N(x)$ .

De même pour le 3<sup>ème</sup> moment appelé Skewness (voir chapitre I), il indique le lifting (la forme abrupte ou étalée) du profil et est définie par l'expression suivante :

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\delta^3} \dots\dots\dots(\text{II-37})$$

Et le 4<sup>ème</sup> et dernier moment, appelé le Kurtosis, qui indique la fermeté piquée ou plate du sommet du profil et est défini par :

$$\beta = \frac{\mu_4}{\delta^4} \dots\dots\dots(\text{II-38})$$

Dans notre travail  $r$  est limité à quatre. Nous utilisons les quatre premiers moments uniquement.

Si le profil est légèrement asymétrique, le troisième moment est indispensable pour obtenir une bonne description des profils. Dans ce cas le profil est donné par le joint des deux profils demi-Gaussiens avec la portée  $R_m$  et les déviations  $\delta R_{p1}$ , et  $\delta R_{p2}$ .

$$x \leq R_m \quad C(x) = \frac{2N_0}{\sqrt{2\pi(\delta R_{p1} + \delta R_{p2})}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-R_p}{\delta R_{p1}}\right)^2\right) \dots\dots(\text{II-39-a})$$

$$x \geq R_m \quad C(x) = \frac{2N_0}{\sqrt{2\pi(\delta R_{p1} + \delta R_{p2})}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x+R_p}{\delta R_{p1}}\right)^2\right) \dots\dots (\text{II-39-b})$$

$R_m$ ,  $\delta R_{p1}$ , et  $\delta R_{p2}$  peuvent être calculés ou donnés par des tables :

$$R_p = R_m + 0.8(\delta R_{p2} - \delta R_{p1}) \dots\dots\dots(\text{II-39-c})$$

$$\delta R_p^2 = -0.64(\delta R_{p2} - \delta R_{p1})^2 + (\delta R_{p1}^2 - \delta R_{p2} + \delta R_{p2}^2) \dots\dots\dots(\text{II-39-d})$$

$$\gamma = \delta R_p^3(\delta R_{p2} - \delta R_{p1}) + (0.128\delta R_{p1}^2 + 0.362\delta R_{p1}\delta R_{p2} + 0.128\delta R_{p2}^2) \dots(\text{II-39-e})$$

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\delta R_p^3} \dots\dots\dots(\text{II-39-f})$$

$\mu_3$  est le moment d'ordre 3.

Ces dernières équations se résolvent itérativement et les valeurs approchées de  $\delta R_{p1}$ , et  $\delta R_{p2}$  sont obtenues par une interpolation. Pour la plupart des implantations dans le silicium et dans beaucoup d'autres semi-conducteurs [27, 28], on voit que si on utilise d'avantage des moments d'ordre supérieurs les résultats sont beaucoup plus meilleurs. Donc, il apparaît nécessaire de travailler avec des distributions ayant des statistiques d'ordre supérieur qui deviennent de plus en plus recherchées.

### **II.3.2.6.8- La distribution de Pearson IV**

D'autres modèles existent encore, tel que le modèle dit « Modèle de Pearson

IV » qui s'exprime par une distribution qui possède un seul maximum donné par :  $x = a + R_{PC}$  et diminue de façon monotone sur les deux côtés des profils jusqu'à zéro.

L'équation différentielle qui la définit est donnée comme suit :

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{x-a}{b_2x^2+b_1x+b_0} f(x) \dots\dots\dots(\text{II-40})$$

dont la solution  $f(x)$  d'ordre 4 est donnée par :

$$f(x) = K |b_2(x - R_p)^2 + b_1(x - R_p) + b_0|^{1/2b} \exp\left(\frac{b_1/b_2 + 2a}{\sqrt{4b_2b_0 + b_1^2}}\right) \arctg\left(\frac{2b_2(x - R_p) + b_1}{\sqrt{2b_2b_0 - b_1^2}}\right) \dots\dots\dots(\text{II-41})$$

où  $K$  est la constante de normalisation de la distribution obtenue par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \dots\dots\dots(\text{II-42})$$

et  $a$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ , et  $b_2$  sont données par :

$$a = \frac{\delta R_p \gamma (\beta + 3)}{A} \dots\dots\dots(\text{II-43-a})$$

$$b_0 = \frac{\delta R_p^2 (4\beta + 3\gamma^3)}{A} \dots\dots\dots(\text{II-43-b})$$

$$b_2 = \frac{2\beta - 3\gamma^3 - 6}{A} \dots\dots\dots(\text{II-43-c})$$

$$b_1 = a \dots\dots\dots(\text{II-43-d})$$

$$A = 16\beta - 12\gamma^2 - 18 \dots\dots\dots(\text{II-43-e})$$

Les paramètres  $R_p$ ,  $\delta R_p$ ,  $\beta$ , et  $\gamma$  cités dans les équations précédentes sont directement reliés aux quatre moments  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$ , et  $\mu_4$  de la distribution  $f(x)$ . Le

premier moment n'est autre que la portée projetée  $R_p$  :

$$\mu_i = R_p = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \dots\dots\dots(\text{II-44})$$

Les trois autres moments sont donnés par :

$$\mu_i = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-R_p)^i f(x)dx \quad i = 1, 2, 3, 4 \dots\dots\dots(\text{II-45})$$

La déviation standard  $\delta R_p$  (l'écart type ) est donnée par :

$$\delta R_p = \sqrt{\mu_2} \dots\dots\dots(\text{II-46})$$

L'inclinaison du profil ou l'asymétrie de la distribution est donnée par :

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\delta^3} \dots\dots\dots(\text{II-47})$$

L'aplatissement du sommet du profil est donne par :

$$\beta = \frac{\mu_4}{\delta^4} \dots\dots\dots(\text{II-48})$$

La relation entre  $\mu_3$  et  $\mu_4$  a été choisie pour satisfaire :

$$\beta \geq \beta_{\min} = \frac{48+39\gamma^2+6(4+\gamma^2)^{3/2}}{32-\gamma^2} \dots\dots\dots(\text{II-49})$$

et obtenir la distribution de Pearson IV.

Cette dernière distribution représente le cas le plus général. Pour obtenir le profil de concentration  $C(x)$ , la distribution de Pearson IV est remplacée par la dose :

$$C(x) = N_0 f(x) \dots\dots\dots(\text{II-50})$$

## **CHAPITRE III**

*Profils de dopage et leurs simulations*

### ***III.1- Rappels des principaux objectifs de notre travail :***

Dans ce chapitre, nous allons montrer que la théorie des statistiques d'ordre supérieur ne se limite pas aux applications du traitement de signal seulement, mais qu'elle est aussi appliquée dans des domaines divers. Parmi ces domaines, on trouve tout particulièrement le domaine de la microélectronique.

En effet, pour améliorer les propriétés des matériaux semiconducteurs, on fait souvent appel à des implantations ioniques avec des types de dopants différents, et avec des énergies d'implantations et de doses diverses. La distribution des dopants tout au long de la profondeur du matériau donne des profils de dopage qui peuvent être affectés par les traitements pouvant intervenir à des stades postérieurs comme aussi pouvant intervenir à des stades antérieurs.

Dans cette étude, nous avons utilisé les profils de dopage du bore dans un matériau de silicium polycristallin ayant subis dans une première étape un dopage à l'azote réalisée en phase gazeuse pendant la phase de dépôt LPCVD du silicium polycristallin, ensuite, dans une deuxième étape une implantation ionique aux ions bore à forte dose et à faible énergie. Très souvent dans la pratique, la détermination des profils de diffusion s'obtient généralement à partir d'une technique expérimentale dite SIMS (Spectrométrie de masse d'ions secondaires) qui est en fait, une technique précise et fiable, son seul inconvénient est qu'elle est destructive, c'est-à-dire que l'échantillon analysé est irrécupérable. D'où l'intérêt d'une prédiction faite par des techniques de calcul et de simulation.

Cette dernière technique, basée sur la théorie des collisions issue de la mécanique classique permet de reconstituer les profils. La technique de calcul, basée sur les statistiques d'ordre supérieur, permet, pour sa part, de déterminer les paramètres clés de chaque implantation ionique.

### ***III.2- Reconstitution des profils par la technique de simulation :***

La méthode de simulation que nous avons adoptée est basée sur le principe

physique de collision inter-atomique de façon générale, et sur les interaction ion-matière de façon particulier décrit par le modèle de Lindhard, Scharff et Schiff [32]. Cette méthode reflète directement la nature aléatoire du processus de diffusion et établi un algorithme de simulation flexible donnant des résultats très illustratives et comparables aux résultats expérimentaux [33]. Le logiciel que nous avons utilisé est basé sur cette méthode [34]. Il donne des informations sur la distribution des ions, des défauts créés par leur implantation, ainsi que les propriétés des ions réfléchis et éventuellement transmis. Il est aussi applicable, en principe, à toutes sortes de combinaison ion/cible, en particulier pour les structures en couches (interfaces, présence d'oxyde), ou les matériaux composés binaires.

### ***III.3- Théorie de collisions et interaction ion-matière :***

#### ***III.3.1- Cycle minimal requis d'un processus de calcul :***

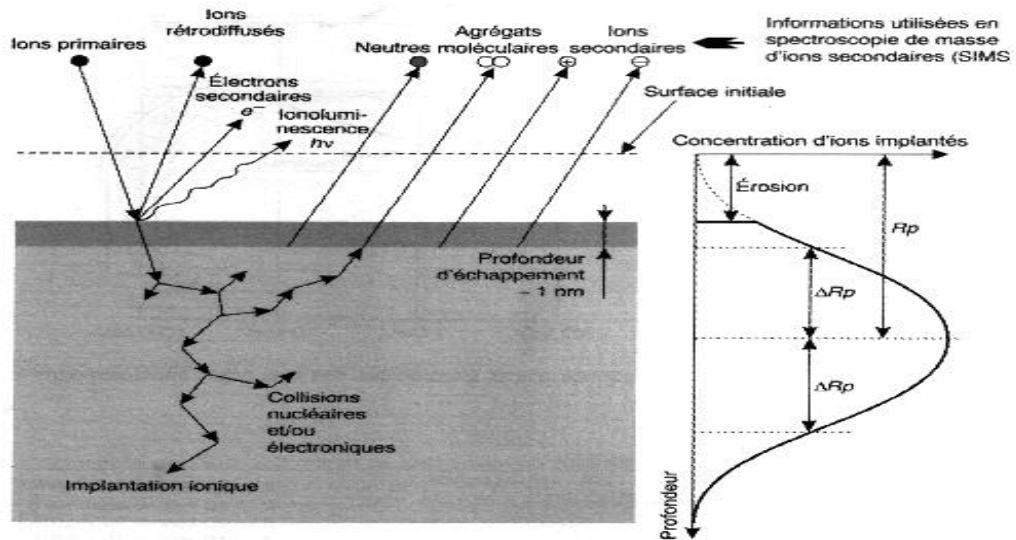
Cette technique consiste à déterminer les trajectoires aléatoires des particules incidentes à l'intérieur d'une cible donnée, en se basant sur les équations régissant les phénomènes physique dans un matériau soumis à une implantation ionique et les interactions ion/matière (voir figure III.1 présentée ci-dessous).

L'implantation ionique est un procédé qui consiste à modifier la composition superficielle des matériaux, l'énergie de faisceau ionique est généralement compris entre 10 et 400 keV pour introduire pratiquement n'importe quel élément dans n'importe quel cible, la dose d'implantation est défini par la fluence et correspond au nombre total d'ions implanté par unité de surface :

$$\Phi = \frac{It}{qA} \dots\dots\dots(III-1)$$

où  $I$ , étant le courant planteur,  $t$  le temps d'implantation,  $q$  la charge de l'électron et  $A$  est la surface d'implantation.





**Figure III.1** : L'ensemble de phénomènes en surface et en profondeur[35]..

Les ions possédants une énergie supérieur à quelque centaine d'électron-Volt (500 eV à 300 keV) peuvent traverser la surface en provoquant une succession de collision avec les atomes cibles, sous l'effet de ces collisions, les ions ont une trajectoire en zigzag, mais à chaque choc les atomes heurtés peuvent eux-mêmes devenir des projectiles et entrer en collision avec d'autres atomes, provoquant la formation de divers défauts cristallins (lacunes et interstitiels). Par ailleurs, si le faisceau ionique est suffisamment intense, des atomes superficiels seront éjectés, c'est le phénomène de pulvérisation, la figure III.1 montre l'ensemble des phénomènes en surface et en profondeur. Le taux de pulvérisation,  $P$  peut être exprimé par :

$$P = \frac{k}{E_L} F_p(M_i, M_m, \theta) S(E_0) \dots \dots \dots (III-2)$$

Avec,  $E_0$  : énergie de liaison des atomes de la cible et  $F_p$  une fonction de pulvérisation dépendant de la masse  $M_i$  des ions incidents, de la masse  $M_m$  des atomes du matériau cible et de  $\theta$  l'angle entre les particules incidentes et la normale à la surface.  $S(E_0)$ , représente le parcours d'arrêt du matériau pour les ions incidents d'énergie  $E_0$ .

Les ions qui ne sont pas rétrodiffusés pénètrent dans le matériau ou ils subissent

des interactions avec la matière, ils perdent leur énergie selon deux processus décrits par la théorie LSS, des collisions élastiques directes avec les atomes du matériau qui donnent lieu à des changements rapides de quantité de mouvement ainsi que des transports importants d'énergie cinétique, et des interactions inélastiques avec les électrons de la cible donnant lieu à des ionisation et/ou excitations.

Les collisions nucléaires et électroniques sont calculés de façon indépendantes et la sommation des pouvoirs d'arrêt est faite ensuite sur un nombre  $N$  de trajectoires, elle est particulièrement utile dans le cas d'implantation à travers plusieurs couches de matériaux (exemple :  $Si_3N_4/SiO_2/Si$ ), cas assez courant en VLSI [34].

L'approche numérique consiste à discrétiser la cible en tranches élémentaires d'épaisseur  $\Delta x$ , et à effectuer ensuite une sommation le long du chemin parcouru. L'évaluation des collisions nucléaires se fait en utilisant le modèle de Lindhard [35], le choc élastique des noyaux est écranté par une fonction d'écran, et le potentiel inter atomique est :

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \Phi_0(r/a) \dots\dots\dots(III-3)$$

Avec  $Z_1, Z_2$  les numéros atomiques de l'ion et de la cible,  $\Phi_0(r/a)$  est la fonction écran générée par les électrons entourant la charge nucléaire, elle est paramétrée suivant la distance  $r$  entre l'ion et le noyau, et suivant le rayon d'écran de Thomas-Fermi :

$$a = \frac{0.8853 \cdot a_0}{(Z_1^{2/3} + Z_2^{2/3})^{3/2}} \dots\dots\dots(III-4)$$

$a_0$ , est le rayon de Bohr et vaut  $0.529 \text{ \AA} (\hbar^2/m \cdot e^2)$ .

Le pouvoir d'arrêt électronique est considéré comme étant proportionnel à la vitesse ionique, la relation entre la perte d'énergie électronique et le paramètre d'impact  $P$  est issue des travaux de Oen et Robinson [36]. Ces derniers ont établi un modèle qui s'inscrit dans la théorie LSS, c'est-à-dire qu'ils considèrent le choc

inélastique ions électrons comme étant dérivé du cas d'un proton qui pénètre dans un gaz électronique.

Le potentiel interatomique utilisé est celui de Hartree-Fock-Slater pour tenir compte de la périodicité électronique liée à la structure en couches, et la formule obtenue est la suivante :

$$\Delta E_e = \frac{0.045 \cdot K \cdot \sqrt{E}}{\pi \cdot a^2} e^{-0.3P/a} \dots \dots \dots (III-5)$$

Avec,  $S_e = K \cdot E^{1/2}$  et  $K$  une constante tabulée théoriquement et  $E$ , l'énergie de l'ion incidente.

Ce formalisme n'implique aucune restriction sur  $Z_1$  et  $Z_2$  (contrairement par exemple au modèle de Firsov), et il est supérieur aux autres dans le domaine des hautes énergies, ou l'approximation de la proportionnalité entre  $S_e$  et la vitesse devient moins évidente [37].

La dispersion angulaire,  $\theta$ , est obtenue en utilisant l' expression suivante:

$$\sin(\theta/2) = \frac{1}{1 + (2\varepsilon B)^2} \dots \dots \dots (III-6)$$

avec:

$$B = P/a ; \varepsilon = \frac{a E_r}{Z_1 Z_2 e^2} ; a = \frac{0.8853}{(Z_1^{1/2} + Z_2^{1/2})^{2/3}} a_0 ; \text{ and } a_0 = 0.529 \text{ \AA} \dots \dots \dots (III-7)$$

où,  $P$  est le parameter d'impact;  $a$  est le pas de scintillement de Firsov;  $a_0$ , est le rayon de Bohr et vaut  $0.529 \text{ \AA}$  ( $\hbar^2/m \cdot e^2$ );  $Z_1$ , et  $Z_2$  sont les nombres atomiques de l'ion incident et de la cible respectivement;  $e$  la charge electronique; et  $E_r$ , est l'énergie relative donnée par:

$$E_r = \frac{M_2}{M_1 + M_2} E \dots \dots \dots (III-8)$$

où,  $E$  est l'énergie cinétique,  $M_1$ , la masse de l'ion incident,  $M_2$ , la masse de la cible.

La perte d'énergie nucléaire ou l'énergie transférée  $E_T$  à la cible dans une collision simple est donnée par:

$$E_T = \frac{4M_1M_2}{(M_1+M_2)^2} E \sin^2(\theta/2) \dots\dots\dots(III-9)$$

Ce formalisme permet de calculer la dispersion angulaire  $\theta$  dans le système de masse centré SMC (in the center of mass system CMS en anglais). L'angle de dispersion  $\psi$ , exprimée dans le système de laboratoire SL (laboratory system LS) est donnée par:

$$g \psi = \left( \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \frac{M_1}{M_2}} \right) \dots\dots\dots(III-10)$$

Et par symétrie azimuthale, l'angle  $\phi$  est donnée par la relation:  $\phi = 2\pi R_1$  , où  $R_1$  est un nombre aléatoire uniformément distributé entre 0 et 1.

En réalité, les systèmes de centre de masse et le système de laboratoire sont utilisés principalement comme un concept fondamental permettant de développer une procédure de calcul adéquat. Dans nos déterminations, les ions incidents sont suivis par référence à axe fixe, la normale à la cible. L'angle  $\alpha$  selon cet axe de référence est calculé après chaque collision. Le cosinus de cet angle  $\alpha$ , après la  $i^{ème}$  collision, est donné par [38]:

$$\cos \alpha_{i+1} = \cos \alpha_i \cos \psi_{i+1} + \sin \alpha_i \sin \psi_{i+1} \cos \phi_{i+1} \dots\dots\dots(III-11)$$

Un autre nombre aléatoire,  $R_2$  est nécessaire avec lequel est faite la détermination du paramètre d'impact :

$$P = \left[ -\ln \left( \frac{R_2}{\pi N L} \right) \right]^2 \dots\dots\dots(III-12)$$

où  $N$ , est la densité atomique de la cible, et  $L$  le libre parcours moyen.

Cette présente description ne concerne pas celle déjà détaillée ci-dessus car l'ensemble des paramètres requis sont effectivement disponibles dans la mécanique classique et publiés dans les références [38,39,40].

D'un autre côté, le troisième point d'une grande importance pour le calcul de la dispersion angulaire  $\theta$ , est déterminé par :

$$\theta(P, E_r, V(r)) = \pi - 2P \int_{r_0}^{\infty} r^{-2} \left( 1 - \frac{P_2}{r^2} - \frac{V(r)}{E_r} \right)^{-1/2} dr \dots\dots\dots(III-13)$$

où,  $V(r)$ , est un potentiel dit de Coulomb, et  $r_0$ , est la plus courte des distances.

Cette distance ,  $r_0$ , est déterminée de l'équation suivante:

$$1 - \frac{P_2}{r_0^2} - \frac{V(r_0)}{E_r} = 0 \dots\dots\dots(III-14)$$

et,

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \varphi(R) \dots\dots\dots(III-15)$$

où  $\varphi(R)$ , est la fonction de scintillage.

Dans nos calculs, nous avons utilisé la fonction de scintillage dite de Molière suivante [38, 41]:

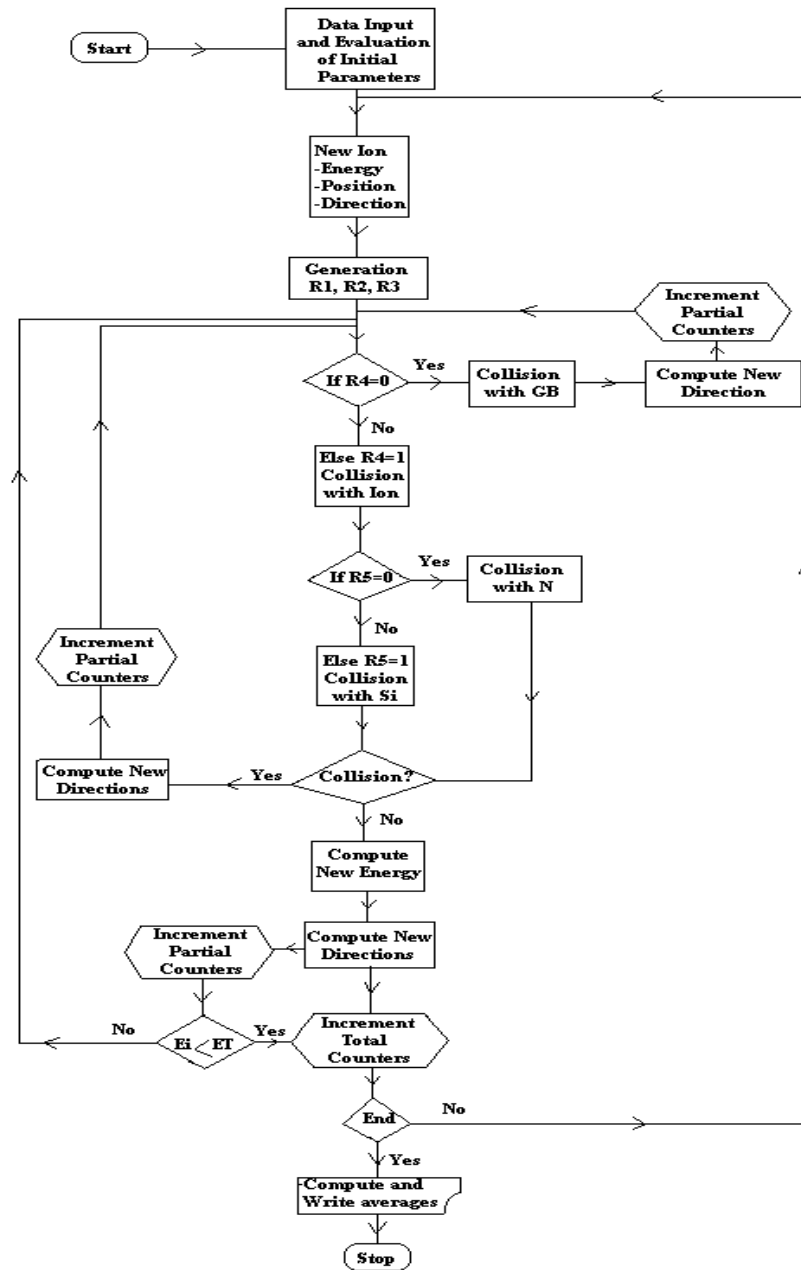
$$\varphi(r/a) = 0.35e^{-0.3r/a} + 0.55e^{-1.2r/a} + 0.1e^{-6r/a} \dots\dots\dots(III-16)$$

D'autres fonctions de scintillage autre que celle exprimée par la relation(III-16) sont aussi parfois utilisées et en particulier, celle donnée par Ziegler, Biersack and Littmark [42] :

$$\varphi(r/a) = 0.1818e^{-3.2r/a} + 0.5099e^{-0.9423r/a} + 0.2802e^{-0.4028r/a} + 0.02817e^{-0.2016r/a} \dots\dots\dots(III-17)$$

**III.3.2- Algorithme et mode de calcul :**

Les algorithmes que nous avons utilisé sont implantés dans le programme de calcul décrit par l'organigramme schématisé par la figure III.-2 présentée ci-dessous.



**Figure III.2:** Organigramme du programme de calcul utilisé ( $E_i$  est l'énergie incidente energy et  $E_T$  est l'énergie de la cible, fixée égale à 5 eV) [43].

**III.3.3- Calcul des moments selon la théorie des statistiques d'ordre supérieur (limitée au 4<sup>ème</sup> ordre) :**

Une fois les profils reproduits nous pouvons utiliser la théorie des statistiques

d'ordre supérieur (limitée au 4<sup>ème</sup> ordre) pour calculer les quatre moments définissant les paramètres clés de ces profils en sachant que : Le cumulatif d'ordre un est la moyenne; le cumulatif d'ordre deux est la variance (moment d'ordre deux après soustraction du carré de la moyenne). Le cumulatif d'ordre trois (*skewness* en anglais, dissymétrie en français) est nul lorsque la variable aléatoire est centrée et sa densité de probabilité est symétrique. Nous nous intéresserons surtout au cumulatif d'ordre quatre appelé « *kurtosis* » à partir du mot grec signifiant « *épaule* ».

L'expression générale du cumulatif (cf. éq. I-7 du ch-I de notre mémoire) est donnée par :

$$cum(x) = \frac{1}{j^k} \left[ \frac{d^k P_x(u)}{du^k} \right]_{u=0} \dots\dots\dots(III-18)$$

Les moments d'ordre supérieur sont définis comme étant les espérances mathématiques de produits multiples. Si on note par  $x(n)$  un signal aléatoire stationnaire réel et discret, alors, les moments d'ordre 2, 3 et 4 sont définis par les équations I-8, I-9, I-10 citées précédemment dans le chapitre I.

Analytiquement, si nous considérons que la concentration des ions implantés en fonction de la profondeur est donnée par une distribution Gaussienne exprimée par la relation :

$$n(x) = n_o \exp \left[ \frac{-(x - R_p)^2}{2\Delta R_p^2} \right] \dots\dots\dots(III-19)$$

où,  $n_o$  est le maximum de la concentration des ions implantés,  $R_p$  est donnée par:

$$R_p = \frac{1}{\phi} \int x \cdot n(x) \cdot dx \dots\dots\dots(III-20)$$

et  $\Delta R_p$ , est la déviation standard.

La relation entre  $n_o$  et  $\Delta R_p$  est donnée par:

$$n_o = \frac{\phi}{\sqrt{2\pi}\Delta R_p} \cong \frac{0.4\phi}{\Delta R_p} \dots\dots\dots(III-21)$$

où,  $\phi$  est la dose totale d'implantation.

En plus du premier moment  $R_p$ , les autres moments d'ordre supérieur, tels qu'ils sont décrits dans la Réf. [29], peuvent être calculés à partir des relation générales suivantes:

$$m_k = \frac{1}{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} (x - R_p)^k n(x) dx \dots\dots\dots(III-22)$$

Donc, le second, le troisième, et le quatrième moments sont exprimés par les formules suivantes:

$$\Delta R_p = \sqrt{\frac{m_2}{\phi}} ; \text{ Skewness } \gamma = \frac{m_3}{\Delta R_p^3} ; \text{ Kurtosis } \beta = \frac{m_4}{\Delta R_p^4} \dots\dots\dots(III-23)$$

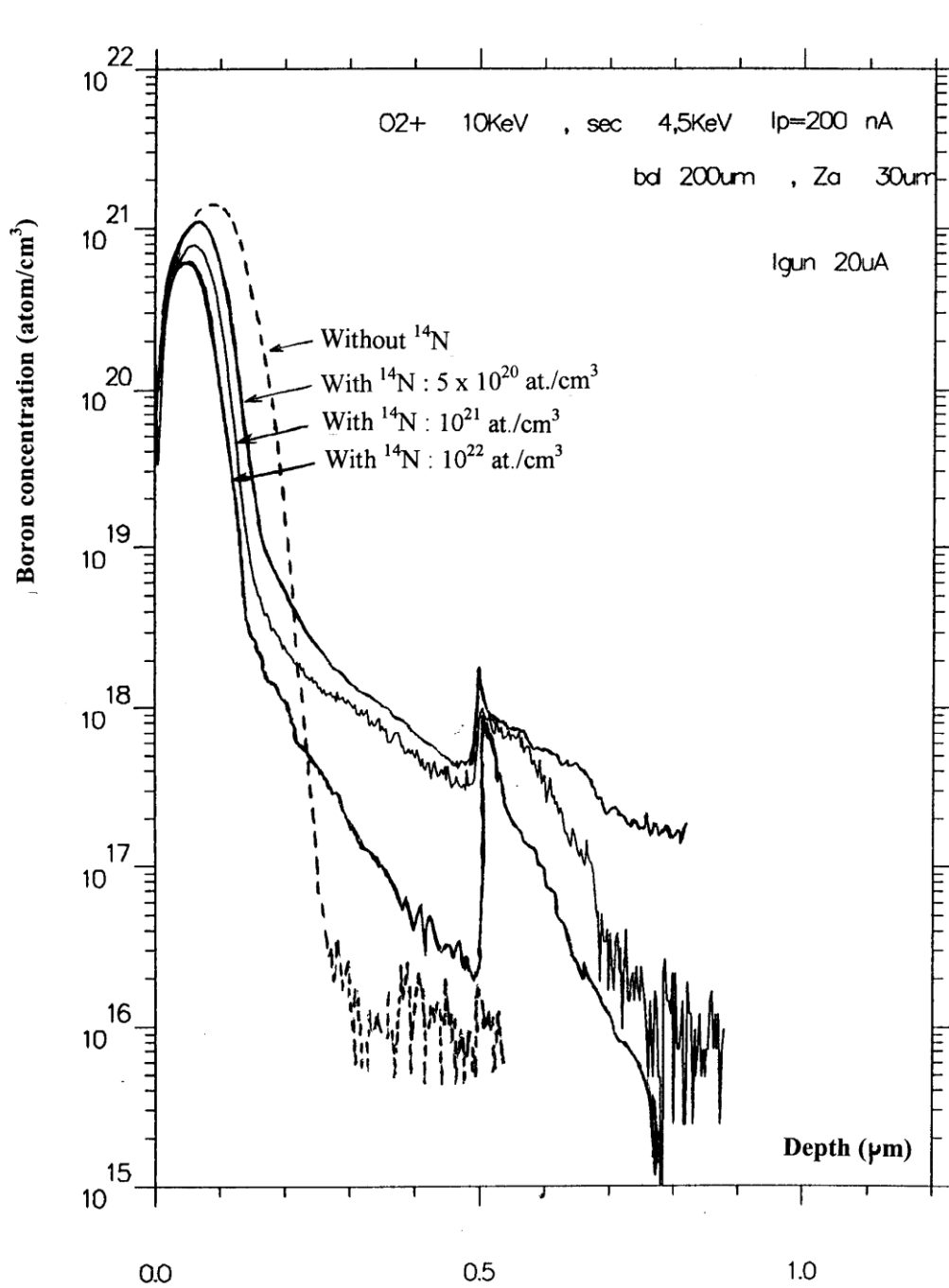
Notons qu'il existe aussi une expression universelle reliant les deux paramètres, et qui est rapportée dans la Réf. [37] par:

$$\beta \cong 2.91 + 1.56\gamma^2 + 0.59\gamma^4 \dots\dots\dots(III-24)$$

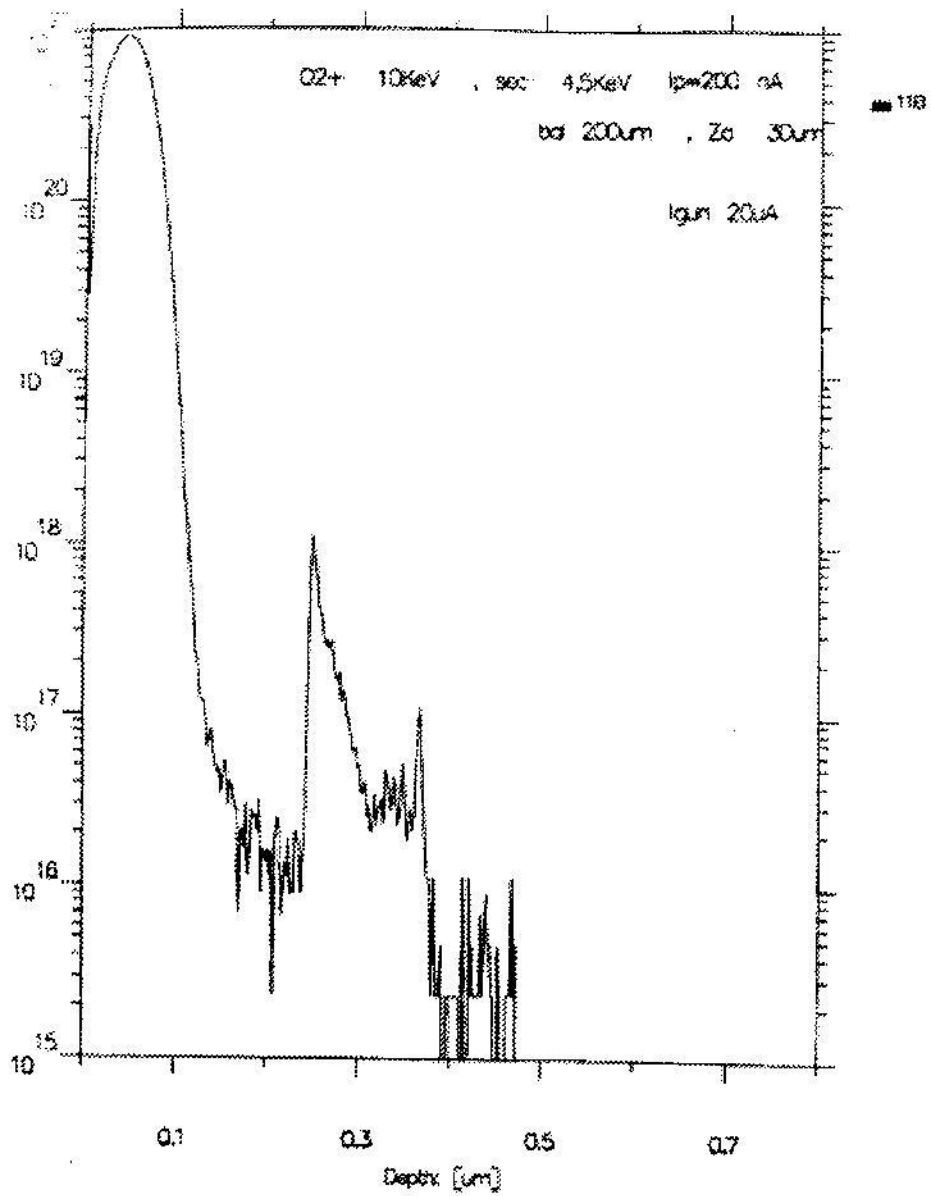
**III.4-Profils expérimentaux :**

Les profils SIMS expérimentaux ont été obtenus à l'aide d'une microsonde Cameca IMS 4f/6f (voir les trois figures Fig. III-3, Fig. III-4, et Fig. III-5 illustrées ci-dessous). cet instrument est très précis et permet de réaliser des mesures de très haute qualité.

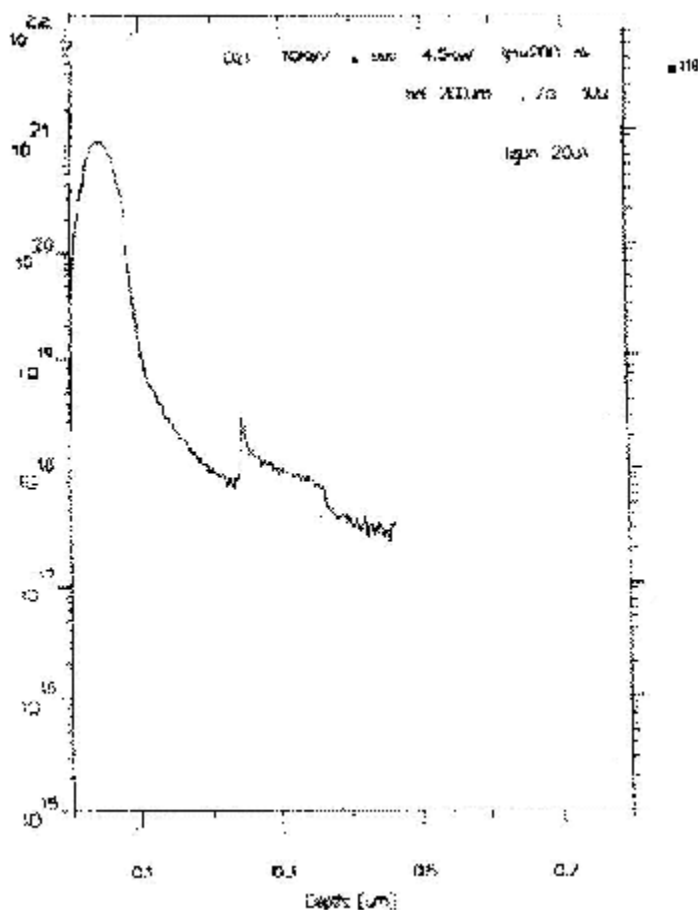




**Figure III.3:** Profils SIMS des film Si-LPCVD déposé à  $T_d = 460$  °C : une première fois non dopé à l'azote, puis dopés avec différentes concentrations ( $N_1 = 0$ ,  $N_2 = 5 \times 10^{20}$  atom/cm $^3$ ,  $N_3 = 1 \times 10^{21}$  atom/cm $^3$ , et  $N_4 = 1 \times 10^{21}$  atom/cm $^3$ ) sur lequel on a effectué une implantation au bore avec une dose de  $1 \times 10^{16}$  at/cm $^2$  [43]..



**Figure III.4:** Profils SIMS d'un film Si-LPCVD déposé à  $T_d = 460$  °C une première fois dopé in-situ à l'azote avec une dose de  $1 \times 10^{21}$  at/cm<sup>2</sup> et implanté au bore avec une dose de  $1 \times 10^{16}$  at/cm<sup>2</sup> [43].



**Figure III.5:** Profils SIMS d'un film Si-LPCVD déposé à  $T_d = 480$  °C une première fois dopé in-situ à l'azote avec une dose de  $1 \times 10^{21}$  at/cm<sup>2</sup> et implanté au bore avec une dose de  $1 \times 10^{16}$  at/cm<sup>2</sup> [43].

### III.5- Résultats et discussions :

#### III.5.1- Comparaison entre les valeurs calculées et expérimentaux des quatres moments des profils étudiés :

On présente quelques résultats obtenus au moyen des calculs de notre programme décrit au paragraphe III.3.2 ci-dessus. On a considéré trois cas d'échantillons, le premier échantillon étant une cible de Silicium implantée par des ions bore, qui nous servira de référence par rapport aux deux autres échantillons sur lesquels, on a fait pendant la phase de dépôt LPCVD du Silicium polycristallin un dopage in situ à l'azote, ensuite implantés au bore. Afin de faire une comparaison et

étudier l'influence d'une nitruration sur la profondeur de pénétration de particules incidentes.

On définit  $A_1$  et  $Z_1$ , comme la masse et le numéro atomique de l'atome constituant la cible (Silicium),  $A_2$  et  $Z_2$  la masse et le numéro atomique de l'atome constituant le faisceau incident et  $A_3$  et  $Z_3$ , comme la masse et le numéro atomique de l'atome dopant la cible (Azote).

En pénétrant dans la cible, l'ion va être dévié de sa direction initiale et perd une partie de son énergie, on répète cette séquence un grand nombre de fois afin d'avoir la trajectoire ionique voulue.

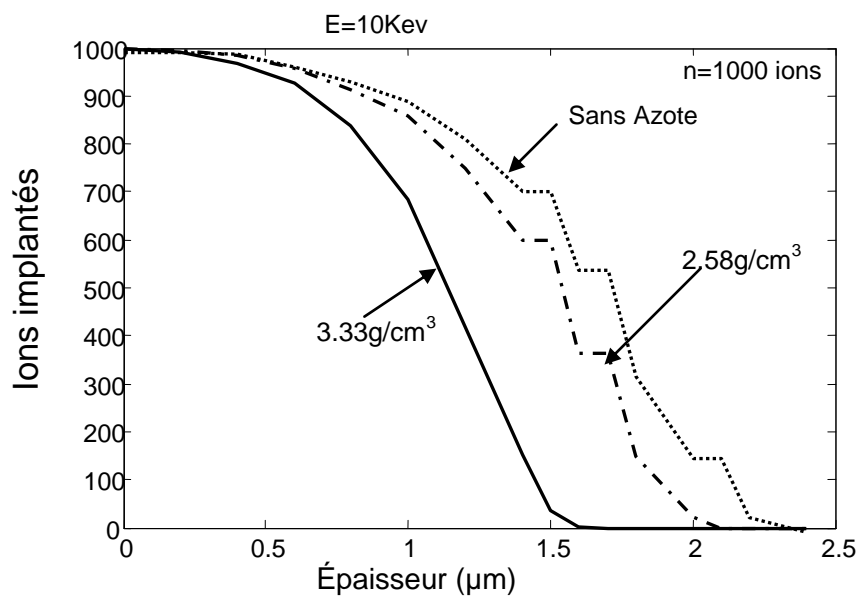
Une trajectoire est terminée quand l'ion perd la plus grande partie de son énergie cinétique (la valeur de la limite inférieure est évaluée à 15 eV) ; En connaissant l'histoire de toutes les particules, nous pouvons alors reconstituer le profil de dopage de chaque implantation.

La présence de l'azote dans notre programme de simulation est définie à partir de la variation de la densité de la cible, les valeurs de cette densité ont été choisies de telle façon qu'elles correspondent avec la concentration totale de l'azote introduite dans l'échantillon.

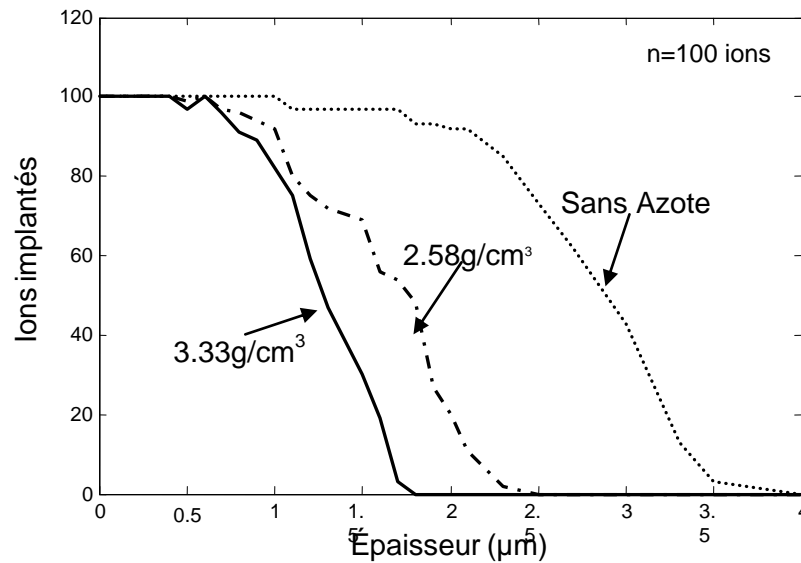
Les valeurs indiquées sur les courbes correspondent en fait aux diverses concentrations de l'azote.

Sur les figures III.6 et III.7, nous présentons quelques résultats obtenus qui montrent dans leur ensemble que la méthode de Monte Carlo est bien adaptée à la simulation des trajectoires ioniques en permettant de reconstituer le profil de dopage associé, tout en donnant accès à des paramètres décisifs sur le contrôle du processus d'implantation d'ions dans un matériau micro électronique.

A partir de ces courbes, on suppose que la diffusion de l'azote dans la structure polycristalline, précisément au niveau des joints de grains satisfait les liaisons pendantes et guérit par conséquent les défauts de structure, en particulier le joint de grain est le lieu privilégié de phénomènes complexes : ségrégation, précipitation, discontinuité dans les directions d'aimantation,... c'est un des principaux défauts des semi-conducteurs polycristallins [44].



**Figure III.6:** Comparaison des profils simulés de 1000 ions Bore implantés avec une énergie  $E=10\text{Kev}$ , dans les cas d'un échantillon non dopé Azote et deux échantillons dopé in-situ Azote pour deux valeurs de densité :  $2.58\text{ g/cm}^3$  et  $3.33\text{ g/cm}^3$ .



**Figure III.7:** Comparaison des profils simulés de 100 ions Bore implantés avec une énergie  $E=10\text{Kev}$ , dans le cas d'un échantillon non dopé Azote et deux échantillons dopé in- situ Azote pour deux valeurs de densité :  $2.58\text{ g/cm}^3$  et  $3.33\text{ g/cm}^3$ .

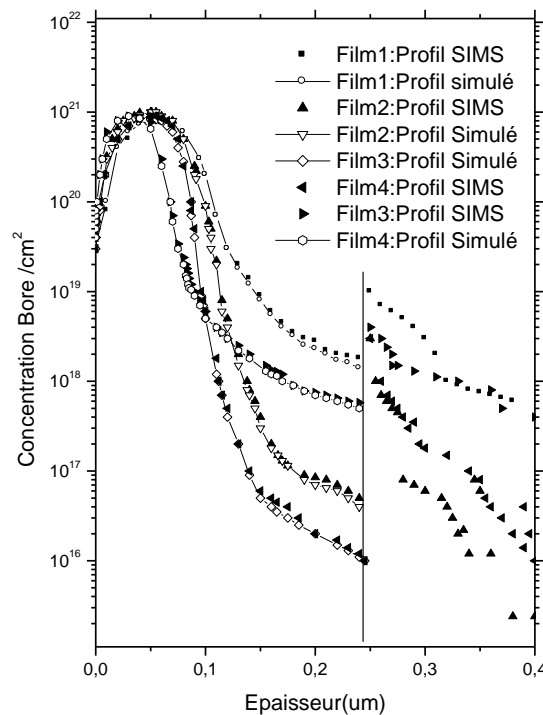
Les ions Bore pénétrants dans la cible rencontrent une structure plus dense et entrent en collision non seulement avec les atomes de Silicium, mais aussi avec les atomes d'azote, ce qui augmente le freinage de leurs trajectoires et limite ainsi leur zone de diffusion.

Pour consolider notre étude, nous nous sommes intéressés à étudier l'influence de quelques paramètres qui contrôlent l'implantation ionique, l'énergie et la dose d'implantation. Sur le tableau-1- pour trois valeurs d'énergie, on a relevé l'épaisseur maximale de pénétration de 100 ions Bore dans les trois cas d'échantillons étudiés, on voit clairement que pour l'échantillon non nitruré, les ions atteignent des profondeurs bien plus importantes que pour les autres échantillons nitrurés et ceci pour les trois valeurs d'énergies d'implantation.

#### A- Cas des profils des films déposés à $T_d = 460^\circ\text{C}$

Notons bien que l'objectif de notre travail, est la reproduction des profils de dopage par un moyen de simulation numérique ne nécessitant que très peu de coût,

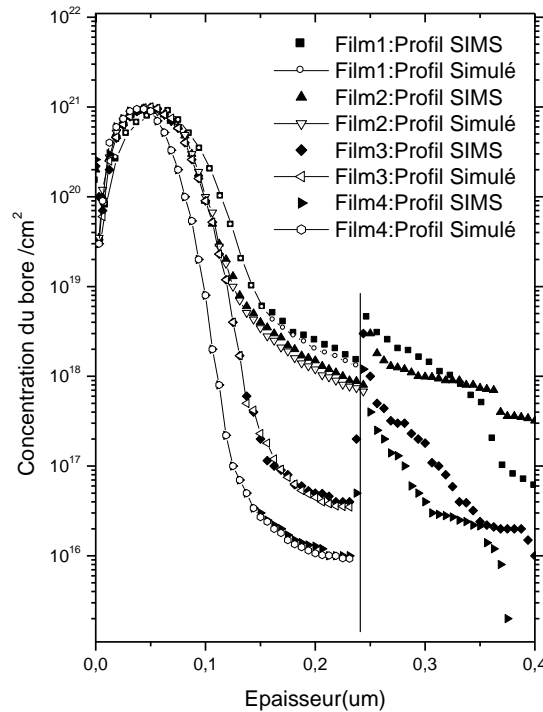
dont l'intérêt est purement économique, préservant ainsi la détérioration des échantillons, les résultats obtenus par simulation, sont supposés aux résultats expérimentaux, sur la figure III-8, sont représentés les profils simulés dans le cas des profils déposés à  $T_d=460^\circ\text{C}$ , dans le programme, cette température est traduite par un taux de présence en densité de joint de grains, un accord très satisfaisant est observable pour des quatre profils.



**Figure III-8:** Superposition des profils Simulés aux profils expérimentaux des quatre échantillons déposés à  $460^\circ\text{C}$  [43].

### B- Cas des profils des films déposés à $T_d = 480^\circ\text{C}$

De même, que la figure précédente, les profils simulés dans le cas des films déposés à  $T_d=480^\circ\text{C}$ , sont comparés aux profils expérimentaux, on a introduit dans ce cas là un taux de densité de joint de grains plus élevé que ceux des cas précédents, dans le programme d'après les constantats présentés dans la figure III-9 ci-dessous, toujours est il qu'un très bon accord est observable sur l'allure des quatre profils obtenus.



**Figure III-9:** Superposition des profils Simulés aux profils expérimentaux des quatre échantillons déposés à 480°C [43].

### C- Les paramètres caractéristiques des profils

A partir de l'ensemble des profils simulés qu'on vient de présenté, on a pus déterminer les paramètres caractéristiques appelés : les quatre moments de la fonction de distribution des ions introduits dans le matériau, un tableau récapitulatif de tous les résultats sera donné dans ce qui suit, comparés à des résultats publiés dans la littérature.

Les valeurs des quatre moments données dans le tableau III-1, vérifient et confirment les observations constatés sur les films. En effet, pour le parcours moyen, la déviation standard, lorsque la concentration d'azote varie, ces valeurs varient aussi et tendent à diminuer inversement proportionnels, pour le troisième moment et le quatrième moment les valeurs obtenus sont très proches de celles données par la littérature, elle varient autour du zéro et 3, valeurs très connues en théorie données dans la littérature, ce qui confirme la validation de notre méthode de simulation basé sur la méthode de Monté Carlo, pour décrire les profils d'implantation ionique.



Films	Dose(cm <sup>-2</sup> )	Energie(KeV)		Rp(nm)	Rp(nm)	Skewness $\gamma$	Kurtosis $\beta$
B-LPCVD-Si	5 x 10 <sup>15</sup>	10		68	80	- 0.02	2.5
LPCVD-NiDoS	5 x 10 <sup>15</sup>	10	N <sub>1</sub>	67	81	- 0.05	4.0
			N <sub>2</sub>	57	71	- 0.03	3.0
			N <sub>3</sub>	44	71	+ 0.02	3.5
			N <sub>4</sub>	41	51	+ 0.04	3.0
LPCVD-NiDoS	1 x 10 <sup>16</sup>	10	N <sub>1</sub>	66	75	- 0.04	3.0
			N <sub>2</sub>	53	65.5	- 0.03	3.0
			N <sub>3</sub>	38	55	-0.05	3.0
			N <sub>4</sub>	33	48	+ 0.01	3.0
B-Si(100)	8 x 10 <sup>15</sup>	15		15.4	12.1	-0.06	3.0
	2 x 10 <sup>15</sup>	15		14.9	12.0	-0.06	3.0
	2 x 10 <sup>15</sup>	65		53	69	-0.06	3.0
	1 x 10 <sup>15</sup>	65		49	60	-0.06	3.0

**Tableau III-1 :** Les valeurs des quatre moments de nos résultats comparés à ceux publiés dans la littérature [43].

### III.5.2- Conclusion :

Nous avons aussi essayé d'étudier l'influence d'un autre paramètre de contrôle de l'implantation ionique, qui est la dose d'ions implanté, précisons seulement que le calcul d'une seule itération à partir de notre outil informatique dure en moyenne cinq heures pour une dose de 1000 particules et parfois plus, ce qui nous a limité pour le récent travail. Les résultats obtenus sont reportés sur le tableau III.2-, qui restent à vérifier avec des valeurs usuelles habituellement prises aux environs de 10<sup>15</sup> ions /cm<sup>2</sup>.

Energie incidente	10 KeV	25 KeV	50 KeV
Sans azote	3.6411 $\mu\text{m}$	15.6827 $\mu\text{m}$	68.1565 $\mu\text{m}$
Avec l'azote c=7.9*10 <sup>20</sup> at/ cm <sup>3</sup>	2.0523 $\mu\text{m}$	10.5851 $\mu\text{m}$	37.3484 $\mu\text{m}$
Avec l'azote c=3.1*10 <sup>21</sup> at/ cm <sup>3</sup>	1.5901 $\mu\text{m}$	7.9332 $\mu\text{m}$	28.9366 $\mu\text{m}$

**Tableau III-2:** Influence de l'énergie d'implantation ionique

Néanmoins, on constate que pour la valeur de 1000 particules, les épaisseurs atteintes sont inférieures à celles de 100 particules, cela peut être expliquer par le fait,

que plus le faisceau incident est dense plus les collisions nucléaires et les interactions électroniques augmentent toujours est-il que les épaisseurs des échantillons nitrurés sont inférieures à celles de l'échantillon non nitrurés.

<b>Ions Bore</b>	<b>100 ions</b>	<b>1000 ions</b>
Sans azote	e=3.507 $\mu$ m	e=2.195 $\mu$ m
Avec l'azote c=7.9*10 <sup>20</sup> at/ cm <sup>3</sup>	e=1.793 $\mu$ m	e=1.597 $\mu$ m
Avec l'azote c=3.1*10 <sup>21</sup> at/ cm <sup>3</sup>	e=1.575 $\mu$ m	e=1.198 $\mu$ m

**Tableau III.3:** Influence de la dose implantée.

### **III.5.3- Discussion :**

La diffusion du bore dans le silicium est considérée comme un problème majeur pour la fabrication des jonctions ultraminesces. En effet, le transistor MOS utilisé dans la réalisation de circuits de traitement d'informations de très grandes performances et de très grande diffusion est un élément décisif dans l'évolution technologique de l'électronique, le moteur de cette évolution est la diminution des dimensions du transistor, cette diminution géométrique entraîne une vitesse et une puissance de traitement plus grandes pour un coût au sens général plus faible. Cette miniaturisation impose la diminution de l'extension en profondeur de deux jonctions source et drain jusqu'à quelque dizaines de nanomètre. Ces jonctions sont fabriquées par implantation ionique de dopant suivi d'un recuit thermique d'activation.

Dans ces conditions, le dopant bore élément de notre étude diffuse de façon accélérée, de quelques centaines de fois plus vite qu'à l'équilibre thermodynamique, alors que des défauts cristallins de plusieurs type se forment et évoluent au cours du recuit.

## *Conclusion générale*

L'objectif recherché dans le cadre de notre travail a été de trouver un moyen théorique basé sur des méthodes de calculs numériques pour reproduire, le plus fidèlement possible, les profils de concentration de dopant dans les films minces de polysilicium. Par profil de dopage, on entend exprimer la distribution de concentration d'un type donné de dopants, tout au long de la profondeur du matériau. L'importance des profondeurs contrôlées est bien nécessaire pour la réalisation des jonctions courtes spécifiques aux composants très rapides et offrant une capacité d'intégration très élevée. Il faut rappeler aussi que, grâce à la maîtrise de telles contraintes, l'implantation ionique dans les semi-conducteurs, et en particulier dans les matériaux à couches ultra-minces, a pris une place de choix dans la technologie des circuits intégrés VLSI/ULSI.

Dans cette étude, nous avons utilisé les profils de dopage du bore dans un matériau de silicium polycristallin ayant subi dans une première étape un dopage à l'azote réalisée en phase gazeuse pendant la phase de dépôt LPCVD du silicium polycristallin. Ensuite, dans une deuxième étape, on a réalisé une implantation ionique aux bore à forte dose et à faible énergie. Très souvent dans la pratique, la détermination des profils de diffusion s'obtient généralement à partir d'une technique expérimentale dite : technique SIMS (Spectrométrie de masse d'ions secondaires) qui est en fait, une technique précise et fiable car, elle fait appel à l'utilisation d'une microsonde ionique de type CAMECA IMS-4f/6f de très haute résolution.. Son seul inconvénient est qu'elle soit destructive, c'est-à-dire que l'échantillon analysé est irrécupérable. D'où l'intérêt d'une prédiction faite par des procédés de calcul et de simulation.

Cette dernière technique, basée sur la théorie des collisions issue de la mécanique classique permet de reconstituer les profils. La technique de calcul, basée

sur les statistiques d'ordre supérieur, permet, pour sa part, de déterminer les paramètres clés de chaque implantation ionique.

Pour cela, nous avons introduit les statistiques d'ordre supérieur pour bien calculer les moments jusqu'au quatrième ordre des divers profils issus d'implantations ioniques sous des conditions qui sont spécifiques à nos dépôts. De ce fait, nous pouvions montrer que la théorie des statistiques d'ordre supérieur joue un rôle essentiel dans de nombreux domaines dont la microélectronique, objet d'application dans notre présente thèse.

A partir des résultats obtenus, il est possible de reconstituer les profils de dopage et de codopage en fixant juste à l'entrée une valeur de la dose et une énergie.

Cet ensemble de résultats obtenus sur les films de silicium polycristallin a pu mettre en évidence l'effet de ralentissement du bore. Cet effet est directement lié à la présence de l'azote dans le film. Pour expliquer ce phénomène, nous avons proposé le modèle de cible à variation de densité  $\rho$  que nous avons introduit dans notre programme.

En effet, l'azote crée un surplus de désordre dans la cible, induisant des collisions d'ordre élevée avec les atomes incidents. L'effet de freinage du bore apparaît nettement à partir d'une concentration limite de  $1 \times 10^{21}$  at./cm<sup>3</sup>.

Les résultats obtenus montrent dans leur ensemble que la méthode de Monte-Carlo est bien adaptée à ce type de calcul. Elle permet d'être le moyen le plus efficace, simple et moins coûteux, elle est aussi applicable à des structures et matériaux nouveaux tels que les couches minces submicroniques de silicium polycristallin fortement dopées. La concentration du bore est très élevée dans ces films, elle est de l'ordre de  $1 \times 10^{21}$  at./cm<sup>3</sup>.

## *Bibliographie*

- [1] A. Masson, “Utilisation de tests basés sur des statistiques d’ordre supérieur dans l’étude de séries temporelles : application aux plasmas spatiaux”, thèse de Doctorat de l’Université Paris 6, soutenue le 28 Septembre 2001.
- [2] S. Bendat, et G. Piersol, “Random data : analysis and measurement procedures”, Wiley;New York, 1971.
- [3] J. L. Lacoume, P.O. Amblard et P. Comomn, “Statistiques d’ordre supérieur pour le traitement du signal”, Ed. Masson, 1997.
- [4] H. Maalem, “Les statistiques d’ordre supérieur théorie et application au traitement de la parole”, Thèse de Magister, Université de Constantine, 1999.
- [5] J. M. Mendel, “Tutorial on higher order statistics”, IEEE signal processing and syst. Theory, Vol. 79, n° 3, pp-277-303, March 1991.
- [6] J. J. Bussgang, “Cross correlation functions of amplitude-distributed gaussian signals”, *technical report 216*, MIT Research laboratory of electronics, Cambridge, 1952.
- [7] J. A. Cadzow, “Blind deconvolution via cumulant extrema”, *IEEE sig. proc. magazine*, 1996.
- [8] P. Comon, “Independent Component Analysis, a new concept”, *Signal Processing, Special issue on Higher-Order Statistics*, vol. 36, no 3, April 1994pp 287-314.
- [9] M. G. Kendall et A. Stuart. “*The Advenced Theory of Statistics*”, *Volume 1- Distribution Theory, Second Edition. Charles Griffin and Company Ltd, London 1963.*
- [10] D.R. Brillinger. “*Time Series, Data Analysis and Theory, Expanded*” Edition. Holden-day Inc., San Francisco, 1981.
- [11] Z. Ding and Y. Li, “Blind equalization and identification”, Marcel Dekker ed. , 2000.
- [12] D. Donoho, “On minimum entropy deconvolution”, *Applied time series analysis II*, Academic Press, 1981, pp. 565-609.
- [13] A.W. LOHMAN, B. WIRNITZER, “Triple correlation” , Proc. IEEE, vol. 72, pp. 889-890, July 1984.
- [14] G. Giannakis and J. M. Mendel, “Identification of non-minimum phase systems using higher-order statistics”, *IEEE trans. ASSP*, vol. 37, 1989, pp. 360-377.

- [15] D. Godard, "Self recovering equalization and carrier tracking in two-dimensional data communication systems", *IEEE trans. on Communications*, vol. COM-28 no. 11, nov. 1980, pp. 1867-1875.
- [16] S. Haykin, ed., "Unsupervised adaptive filtering, vol. 2: Blind deconvolution", Wiley, 2000.
- [17] J. Le Roux and C. Huet, "On a condition of higher order spectra factorization", *IEEE trans. on Signal Processing*, vol. 47, n° 7, July 1999, pp. 1903-1909.
- [18] J. Le Roux and S. Icart, "System frequency response phase estimation based on skewness or kurtosis maximization", *ICASSP 2000 in Istanbul, Turkey, 2000*, June 5-9.
- [19] A. W. Lohmann, G. Weigelt and B. Wirnitzer, "Speckle masking in astronomy: triple correlation theory and application", *Applied physics*, vol. 22, pp 4028-4037.
- [20] M. Rosenblatt. Cumulants and cumulant spectra. *Elsevier Science Publisher B.V.*, 3 no. 2, 369-382, 1983.
- [21] J. Mendel, "Tutorial on higher-order statistics (spectra) in signal processing and system theory: theoretical results and some applications", *Proceedings of the IEEE*, vol. 79, no. 3, March 1991, pp. 278-305
- [22] D. Rossille, "Reconstruction de signaux à partir du bispectre, application à l'astronomie : effet de l'échantillonnage et de la stationnarité sur les spectres d'ordre supérieur", Thèse de Doctorat, Université de Nice, Juin 1995.
- [23] O. Shalvi and E. Weinstein, "New criteria for blind deconvolution of non-minimum phase systems (channels) ", *IEEE trans. information theory*, vol. 36, March 1990, pp. 312-321.
- [24] O. Shalvi and E. Weinstein, "Super exponential methods for blind deconvolution", *Proc. SPIE 1991, Adaptive signal processing*, vol. 1565, Jan. 1991, pp. 143-151.
- [25] S. Merabet, "Etude et simulation par la méthode de Monté-Carlo, utilisant le code TRIM des profils d'implantation ionique de films Si-LPCVD ayant subis un fort codopage bore-azote", Thèse de Magister, Université de Constantine, Mai 1999.
- [26] J. le Roux, "Note de cours" voir le site internet ayant le lien suivant :  
<http://users.polytech.unice.fr/~leroux/egalisation/egalisation.html>
- [27] H. Ryssel, K. Muller, K. Habberger, R. Hankelmann, et F. Jahel, *J. Appl. Phys.*, Vol. 22, (1980), p.35.
- [28] H. Ryssel, K. Habberger, K. Hoffmann, G. Prinke, R. Dumeke et Q. Sacks, *IEEE*,

Trans. Electron. Devices, Vol. ED 27, (1980), p.1484.

[29] S. M. Sze, "VLSI technology" 2<sup>nd</sup> Edition, McGraw-Hill inc., (1988), Chapitre 8.

[30] W. L. Engel, "Process and device modeling" North-Holland Editions, (1986), Chapitre 2.

[31] H. Ryssel, Elsevier Science Publisher B. V Editions, W. L. Engel, North-Holland Editions (1986), p.31.

[32] J. Lindhard, M. Scharff, H. E. Schiott, "Range concept and Heavy Ion Ranges, Materials Physics Medd", 1963, Vol. 33, n° 14, pp.54 -73.

[33] A. Hennad, O. Eichwald, M. Yousfi et O. Lamrous, "Prise en compte de l'anisotropie des collisions ion-atome sur le transport des ions par simulation de Monté Carlo", J. Phys. III France, Vol. 7 (1997) pp.1877-1892.

[34] J. F. Ziegler, J. P. Biersack, U. Littmark, "The stopping and range of ions in solids", New York : Pergamen Press, (1985), p. 321.

[35] W. Fichtner, "Process Simulation in VLSI Technologie", New York, Mc Grow-Hill, (1988), pp. 422 – 465.

[36] O. S. Oen., M. T. Robinson., "Computer studies of the reflection of light ions from solids, Nuclear instruments and Methods", (1976), Vol. 132, pp.647-653.

[37] L. Ottaviani, "Réalisation de jonctions pn dans le carbure de Silicium 6H par implantation ionique d'aluminium", Thèse de Doctorat INSA-CEGELY, n° 99 ISAL 0010, Lyon. France, (1999), p.34

[38] J. P. Biersack and L. G. Haggmark, "A Monte Carlo Computer Program for the Transport of Energetic Ions in Amorphous Targets", Nucl. Instruments and Methods, Vol. 174, (1980), p. 257.

- [39] J. Alberts, "Semiconductor Measurement technology Report", Bureau of Standards, US Department of Commerce, (1987), p. 1.
- [40] H. Goldstein, "Classical Mechanics", Addison-Wesley, Reading, Mass. (1950).
- [41] W. K. Hofker, Philips Research reports supplement, n° 8 (1975).
- [42] M. B. Lazar, Thèse de Doctorat INSA-CEGELY, n° 02 ISAL 0016, Lyon. France, (2002)
- [43] S. Merabet, M. Boukezzata, P. Temple-Boyer, and E. Scheid, "*A Monté Carlo simulation study of high-dose and low-energy boron implantation into LPCVD-NiDoS polycrystalline thin films*", Journal of Materials Science, Vol. 11, N°.3, (2009), p.71-80.
- [44] F. Poitou, "Détermination de l'énergie au joint de grains par calculs ab initio et application à un modèle Monté Carlo de croissance cristalline" IEEE, Trans. Electron. Devices, Vol. ED 217, (2000), p.5422.



**Nom : BOUFRIOUA**

**Prénom : YUCEF**

**Titre du mémoire :** « *Les statistiques d'ordre supérieur : théorie et application à la prédiction des profils de dopage d'implantation ionique dans les matériaux microélectroniques* ».

## **Résumé :**

L'objectif recherché dans le cadre de notre travail a été de trouver un moyen théorique basé sur des méthodes de calculs numériques pour reproduire, le plus fidèlement possible, les profils de concentration de dopant dans les films minces de polysilicium. Par profil de dopage, on entend exprimer la distribution de concentration d'un type donné de dopants, tout au long de la profondeur du matériau. L'importance des profondeurs contrôlées est bien nécessaire pour la réalisation des jonctions courtes spécifiques aux composants très rapides et offrant une capacité d'intégration très élevée. Il faut rappeler aussi que, grâce à la maîtrise de telles contraintes, l'implantation ionique dans les semi-conducteurs, et en particulier dans les matériaux à couches ultra-minces, a pris une place de choix dans la technologie des circuits intégrés VLSI/ULSI.

Dans cette étude, nous avons utilisé les profils de dopage du bore dans un matériau de silicium polycristallin ayant subi, dans une première étape, un dopage à l'azote réalisé en phase gazeuse pendant la phase de dépôt LPCVD du silicium polycristallin. Ensuite, dans une deuxième étape, on a réalisé une implantation ionique au bore à forte dose et à faible énergie. Très souvent dans la pratique, la détermination des profils de diffusion s'obtient généralement à partir d'une technique expérimentale dite : technique SIMS (Spectrométrie de masse d'ions secondaires –exemple, de type CAMECA IMS-4f/6f), qui est en fait une technique précise et fiable, car elle fait appel à l'utilisation d'une microsonde ionique de très haute résolution. Son seul inconvénient est qu'elle soit destructive, c'est-à-dire que l'échantillon analysé est irrécupérable, d'où l'intérêt d'une prédiction faite par des procédés de calculs et de simulation.

L'étape de simulation, basée sur la théorie des collisions issues de la mécanique classique permet de reconstituer les profils. La technique de calcul, basée sur les statistiques d'ordre supérieur, permet pour sa part de déterminer les paramètres clés de chaque implantation ionique.

Pour cela, nous avons introduit les statistiques d'ordre supérieur pour bien calculer les moments jusqu'au quatrième ordre.

Les résultats obtenus, permettent, d'emblé, de dire qu'il est possible de reconstituer les profils de dopage des diverses implantations ioniques même lorsqu'elles sont faites sous des conditions expérimentales variées. Il est aussi possible de reconstituer les profils de codopage des implantations là où il y a généralement un dopage de plus (dopage in-situ par exemple).

En fin de compte, l'analyse attentive de cet ensemble de résultats obtenus sur les films de silicium polycristallin a permis la mise en évidence d'un effet très intéressant sur le plan fonctionnel du matériau. C'est l'effet de ralentissement du bore qui se trouve directement lié à la présence de l'azote dans le film. Pour expliquer ce phénomène, nous avons proposé le modèle de cible à variation de densité  $\rho$  que nous avons introduit dans notre programme.

**Last Name: BOUFRIOUA**

**First Name: YUCEF**

**Thesis title:** “Higher Order Statistics: theory and application for forecasting ion-implantation doping profiles into microelectronics materials”.

**Abstract:**

The aim of this work is to find the theoretical average based on an accurate numerical method in order to rebuilt, as nearly as possible, the doping profiles into polysilicon thin films. Doping profiles means the de concentration distribution  $C(x)$  of a given dopant as function of the material depth  $x$ . Controlled depth-concentration is seen very important when we realize deep junctions needed for high performance microelectronic components which will be integrated in very small sizes. We remember that the parameter of decreasing sizes under nanometer scale was became the most important feature in VLSI/ULSI technology.

In this study, we have used boron profiles in polysilicon material, which first we have introduced nitrogen doped atoms carried out into LPCVD equipments. Then, a second step is made by ion implantation of boron at high concentration and low energy. This technique is often called SIMS procedure (secondary Ion mass Spectrometry, using an equipment CAMECA IMS-4f/6f) type. The only inconvenient is its destroying character, which means that the sample used is irrecoverable. So, we can see the interest of simulation process in this kind of works.

The simulation step is based on high order statistics limited to the fourth rank for determining the key parameters of an ion implantation procedure.

The results obtained, permit to say that it is now possible to rebuild the doping profiles of any experimental ion implantation even under various technical conditions. It is also possible to do that in the example of on in-situ doping case.

At the end, the attentive analysis of the obtained results show an effect of slowing down diffusion mechanism when we use at the same time an in-situ nitrogen doping atom and a boron ion implantation ones. This is exactly what we have done when we have used a varied density  $\rho$  of the target that we have implanted in our computing program.

**الاسم : يوسف**

**اللقب : بوفريوة**

**موضوع الرسالة: " الإحصائيات ذات الدرجة العليا - نظري و تطبيق لنسخ مسارات كثافة التطعيم الأيوني في المواد الالكترونية الدقيقة".**

**الخلاصة :**

الهدف المرجو من بحثنا في هذه الأطروحة هو إيجاد وسيلة نظرية تعتمد على طرق حسابات عديدة من اجل نسخ مسارات كثافة التطعيم (أو الإشابة) لأفلام البوليسيليسيوم بأكثر أمانة ممكنة. إن المقصود بمسارات التطعيم هو التعبير عن توزيع الكثافة لنمط معين من عناصر التطعيم و ذلك على مدى عمق المادة. إن أهمية الأعماق المراقبة جد ضرورية لتشكيل التوصيلات الدقيقة المتعلقة بالمكونات الفائقة السرعة التي تتميز بقدرة دمج عالية جدا. يجب التذكير كذلك أنه بفضل التحكم في هذه القيود، لقيت عملية الغرس الأيوني مكانة مميزة في تكنولوجيا الدارات الموحدة .

في هذه الدراسة، استعملنا مسارات تطعيم البور في مادة السيليسيوم متعدد التبلور ، مطعم في مرحلة أولى بالأزوث في الحالة الغازية أثناء وضع للسيليسيوم المتعدد التبلور، ثم في مرحلة ثانية أجرينا تطعيما أيونيا باستعمال البور بجرعة قوية و طاقة قليلة. في أغلب الأحيان، تطبيقيا، يتم تعيين مسارات الانتشار بواسطة تقنية تجريبية تسمى: تقنية ، كمثل نذكر الصنف : ، و هي تعتبر تقنية دقيقة و موثوقة. عيبها الوحيد كونها مدمرة أي أن النموذج المختبر لا يمكن استرداده ، و من هنا نتضح أهمية التنبؤ بالعمليات الحسابية و المحاكات.

إن مرحلة المحاكات التي تعتمد على نظرية التصادم النابعة من الميكانيكا الكلاسيكية تمكن من تشكيل المسارات. كما أن تقنية الحساب المبنية على أساس الإحصائيات ذات الدرجة العليا تمكن من جبتها تحديد العوامل المفاتيح لكل عملية غرس أيوني.

من أجل ذلك قمنا باستعمال الإحصائيات ذات الدرجة العليا لحساب العزوم جيدا حتى الدرجة الرابعة.

إن النتائج المتحصل عليها تمكننا من القول أنه يمكن تشكيل مسارات التطعيم لمختلف عمليات الزرع الأيوني بمختلف شروطها التجريبية.

في نهاية المطاف، إن التحليل الدقيق لمجموع النتائج المتحصل عليها على الأفلام الدقيقة للسيليسيوم المتعدد التبلور مكنت من تبيان مفعول جد مهم على المستوى الوظيفي للمادة. إنه المفعول المعطل للبور الذي له علاقة مباشرة مع تواجد الأزوث في الفيلم. لتفسير هذه الظاهرة، عرضنا نموذج الهدف ذو اختلاف الكثافة الذي أدخلناه في البرنامج الذي عملنا به.