

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET**  
**DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITE MENTOURI - CONSTANTINE -**  
**FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR**  
**DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE**

N<sup>o</sup> d'Ordre :.....

Série :.....

**MÉMOIRE DE MAGISTER**

**Présenté par :**

**Mr Nadir Fergani**

**Option : Contrôle**

**Thème :**

***Réglage de PID Fractionnaire pour une  
Réponse Désirée en Boucle Fermée***

Soutenu le : 15 / 12 / 2009

Examiné par le jury :

Président	: A. Bennia	Professeur	Université Mentouri
Rapporteur	: A. Charef	Professeur	Université Mentouri
Examineur	: B. Boutamina	Maître de Conférences A	Université Mentouri
Examineur	: S. Ladaci	Maître de Conférences B	Université de Skikda

Année 2009

## *Dédicaces*

*Je dédie ce mémoire*

*A mes chers parents pour tout les sacrifices consentis, pour leur soutien durant toute mes années d'études.*

*A mes frères et sœurs.*

*A tout ma famille.*

*A tous mes amis.*

*A tous mes collègues et amis de l'option Contrôle des systèmes.*

*A tous les membres du laboratoire de Traitement du Signal.*

*Nadir Fergani.*

## ***Remerciement***

Je remercie Allah tout puissant qui m'a donné la force et la volonté pour pouvoir finir ce mémoire de magister.

Je tiens à remercier profondément mon encadreur : le Professeur Abdelfatah Charef pour la confiance qu'il m'a accordée, ses encouragements, et ses précieux conseils, et pour son effort dans ce travail.

J'exprime ma gratitude envers Dr Abdelhak Bennia Professeur à l'université de Mentouri de Constantine de m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury.

Je remercie le Dr Brahim Boutamina Maître de Conférences à l'université Mentouri de Constantine d'avoir accepté de juger ce travail en tant qu'examineur.

Je remercie aussi le Dr Samir Ladaci Maître de Conférences à l'université 20 août 1955 de Skikda, d'avoir accepté de juger ce travail en tant qu'examineur.

Je remercier, tous ceux qui m'ont enseigné durant toutes mes études et en particulier mes enseignants à l'université de Constantine et mes enseignants à l'université de Annaba.

Enfin, je tiens aussi à remercier tous ce qui m'a aidé de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b> .....	1
<b>Chapitre 1 : Opérateur d'ordre fractionnaire</b> .....	3
<b>I.1</b> Introduction au calcul fractionnaire .....	3
<b>I.2</b> Opérateurs d'ordre fractionnaire .....	3
<b>I.2.1</b> Définition de Riemann-Liouville .....	4
<b>I.2.2</b> Définition de Grundwald-Leitnikov (G-L) .....	4
<b>I.2.3</b> Définition de Caputo .....	5
<b>I.2.4</b> Quelques propriétés de la dérivation non entière .....	5
<b>I.3</b> Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire .....	6
<b>I.3.1</b> Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire .....	6
<b>I.3.2</b> Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire .....	6
<b>I.4</b> Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire .....	7
<b>I.4.1</b> Méthode Générale d'approximation des opérateurs intégrro-differentiels .....	7
<b>I.4.2</b> La méthode de Charef: Fonction de singularité .....	8
<b>I.4.2.1</b> Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire .....	8
<b>I.4.2.2</b> Approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire .....	10
<b>I.5</b> Implémentation analogiques des Opérateurs d'ordre fractionnaire.....	12
<b>I.5</b> Implémentation analogiques de l'intégrateur d'ordre fractionnaire.....	12
<b>I.5</b> Implémentation analogiques de dérivateur d'ordre fractionnaire.....	13
<b>I.6</b> Conclusion .....	14
<b>Chapitre II : Système d'ordre fractionnaire et correcteur <math>PI^\lambda D^\mu</math></b> .....	15
<b>II.1</b> Système linéaire d'ordre fractionnaire .....	15
<b>II.2</b> Approximation par une fonction rationnelle .....	15
<b>II.3</b> Réponse temporelles et fréquentielles .....	16
<b>II.3.1</b> La réponse impulsionnelle .....	17
<b>II.3.2</b> La réponse indicielle .....	18
<b>II.3.3</b> Les réponses fréquentielles .....	18
<b>II.3.4</b> La fonction de transfert idéal de bode .....	19
<b>II.4</b> Performances et Caractéristiques du Système Oscillatoire d'ordre Fractionnaire .....	22
<b>II.4.1</b> Spécifications fréquentielles .....	22
<b>II.4.2</b> Spécifications temporelles .....	22
<b>II.5</b> Correcteur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ .....	22

<b>II.5.1</b> Introduction .....	22
<b>II.5.2</b> Approximation du $PI^\lambda D^\mu$ par une fonction rationnelle .....	23
<b>II.5.3</b> Implémentation analogique du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ .....	25
<b>II.6</b> Conclusion .....	28
<b>Chapitre III : Réglage de <math>PI^\lambda D^\mu</math> fractionnaire</b> .....	29
<b>III.1</b> Introduction .....	29
<b>III.2</b> Formulation du problème .....	30
<b>III.3</b> Présentation de la méthode .....	31
<b>III.3.1</b> Principe de la méthode .....	31
<b>III.3.2</b> Calcule des valeurs des fonctions $G_d^{(i)}(\omega_u)$ .....	31
<b>III.3.3</b> Calcule des fonctions $C^{(i)}(\omega_u)$ et de $G_o^{(i)}(\omega_u)$ .....	32
<b>III.3.4</b> Calcule des valeurs des fonctions $G_p^{(i)}(\omega_u)$ .....	33
<b>III.3.5</b> Calcule des valeurs des variables $X_i$ .....	35
<b>III.3.6</b> Calcule des valeurs des paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ .....	35
<b>III.4</b> Algorithme de réglage des paramètres du correcteur .....	37
<b>III.4.1</b> Correcteur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ .....	37
<b>III.4.2</b> Correcteur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda$ .....	39
<b>III.5</b> Exemples illustratifs .....	40
<b>III.5.1</b> Exemple 1.....	40
<b>III.5.2</b> Exemple 2.....	43
<b>III.6</b> Conclusion .....	45
<b>Chapitre IV Application commande d'un moteur à courant continu</b> .....	46
<b>IV.1</b> Introduction .....	46
<b>IV.2</b> Modélisation du moteur à courant continu .....	46
<b>IV.3</b> Synthèse du correcteur .....	49
<b>IV.3.1</b> Cahier des Charges .....	49
<b>IV.3.2</b> Résultat .....	49
<b>IV.4</b> Etude de la robustesse du correcteur .....	51
<b>IV.4.1</b> Variation du gain $K$ .....	51
<b>IV.4.2</b> Variation constante $\tau_m$ .....	54
<b>IV.4.3</b> Variation de $K$ et $\tau_m$ .....	57
<b>IV.5</b> Conclusion.....	60
<b>Conclusion générale</b> .....	61
<b>Références</b> .....	63

# Table des figures

<b>Figure I.1</b>	Tracés de Bode amplitude et phase de $p^{-0.7}$ et son approximé .....	10
<b>Figure I.2</b>	Tracés de Bode amplitude et phase de $p^{0.35}$ et son approximé .....	12
<b>Figure I.3</b>	Réalisation analogique de l'intégrateur d'ordre fractionnaire .....	13
<b>Figure I.4</b>	Réalisation analogique de dérivateur d'ordre fractionnaire .....	14
<b>Figure II.1</b>	La réponse impulsionnelle du système pour $y=1\text{dB}$ , $w_n=1$ et $m=1.1, \dots, 1.9$ .....	17
<b>Figure II.2</b>	La réponse indicielle du système pour $y=1\text{dB}$ , $w_n=1$ et $m=1.1, 1.2, \dots, 1.9$ .....	18
<b>Figure II.3</b>	Tracés de Bode des eq. (II.2) et (II.6) pour plusieurs valeurs de $m$ .....	19
<b>Figure II.4</b>	Boucle de commande idéale de bode .....	20
<b>Figure II.5</b>	Tracés de Bode amplitude et phase de $L(p)$ pour $1 < m < 2$ .....	20
<b>Figure II.6</b>	Réponse indicielle du système de l'eq. (II.20) pour différente valeur de $K$ .....	21
<b>Figure II.7</b>	Correcteur PID et $PI^\lambda D^\mu$ .....	23
<b>Figure II.8</b>	Tracés de Bode amplitude de $PI^{1.7}D^{1.7}$ et son approximé .....	24
<b>Figure II.9</b>	Tracés de Bode phase de $PI^{1.7}D^{1.7}$ et son approximé .....	25
<b>Figure II.10</b>	Structure du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ .....	25
<b>Figure II.11</b>	Réalisation analogique de l'action P .....	25
<b>Figure II.12</b>	Réalisation analogique de l'action $I^\lambda$ .....	26
<b>Figure II.13</b>	Réalisation analogique de l'action $D^\mu$ .....	27
<b>Figure II.14</b>	Réalisation analogique du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ .....	27
<b>Figure III.1</b>	Système asservi classique à retour unitaire .....	30
<b>Figure III.2</b>	Réponse indicielle du système asservi projeté et du model de référence .....	41
<b>Figure III.3</b>	Tracés de Bode des FTBO du système asservi projeté et du model de référence ..	42
<b>Figure III.4</b>	Réponse indicielle du système asservi projeté et du model de référence .....	43
<b>Figure III.5</b>	Tracés de Bode des FTBO du système asservi projeté et du model de référence ..	44
<b>Figure IV.1</b>	Moteur à courant continu .....	46

<b>Figure IV.2</b>	Schéma d'un moteur à courant continu .....	47
<b>Figure IV.3</b>	Schéma fonctionnel du moteur à courant continu .....	48
<b>Figure IV.4</b>	Tracés de Bode de $C_{PID}G(p)$ , $C(p)G(p)$ et de $\frac{1}{(\frac{p}{500})^{1.5}}$ .....	50
<b>Figure IV.5</b>	Réponse temporelle du système boucle fermée et système désirer .....	50
<b>Figure IV.6</b>	Réponse indicielle du système en boucle fermée pour différent valeur de K .....	52
<b>Figure IV.7</b>	Réponse indicielle du système en boucle fermée pour différent valeur de K (PID classique) .....	52
<b>Figure IV.8</b>	Variation de marge de phase en fonction de gain K .....	53
<b>Figure IV.9</b>	Variation de dépassement en fonction de gain K .....	53
<b>Figure IV.10</b>	Réponse indicielle du système pour différent valeur de $\tau_m$ ( $PI^{0.6}D^{0.5}$ ).....	55
<b>Figure IV.11</b>	Réponse indicielle du système pour différent valeur de $\tau_m$ (PID classique).....	55
<b>Figure IV.12</b>	Variation de marge de phase en fonction de $\tau_m$ .....	56
<b>Figure IV.13</b>	Variation de dépassement en fonction de $\tau_m$ .....	56
<b>Figure IV.14</b>	Marge de phase en fonction de K et $\tau_m$ (correcteur $PI^\lambda D^\mu$ ) .....	58
<b>Figure IV.15</b>	Marge de phase en fonction de K et $\tau_m$ (correcteur PID classique) .....	58
<b>Figure IV.16</b>	Dépassement en fonction de K et $\tau_m$ (correcteur $PI^\lambda D^\mu$ ) .....	59
<b>Figure IV.17</b>	Dépassement en fonction de K et $\tau_m$ (correcteur PID classique) .....	59

## Liste des Tableaux

<b>Tab IV.1</b> Les différents caractéristiques pour $K$ variant .....	54
<b>Tab IV.2</b> Différents caractéristiques pour $\tau_m$ variant .....	57
<b>Tab IV.3</b> Les différentes caractéristiques (cas où $K$ et $\tau_m$ variées) .....	60

## Résumé :

Le correcteur PID est la technique la plus utilisée dans l'asservissement des processus industriels pour des décennies. La conception et le réglage de ce type de correcteur a été un sujet de recherche depuis le jour où Ziegler et Nichols ont présenté leur méthode en 1942. Récemment, un correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire qui est une généralisation du correcteur PID classique a été proposé. L'intérêt pour ce type de correcteur est justifié par une meilleure flexibilité dans la conception de la commande puisqu'il a deux paramètres en plus, les ordres fractionnaires des actions d'intégration et de dérivation. Ces paramètres peuvent être utilisés pour satisfaire des performances additionnelles dans la conception des systèmes asservis. Bien que plusieurs méthodes et techniques de réglage du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  ont été proposées, un travail de recherche continu et intensif est encore en cours pour le rehaussement de la qualité et l'amélioration des performances des systèmes asservis.

Dans ce mémoire, une méthode de réglage du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  en se basant sur une technique récente pour le réglage du correcteur PID classique a été proposée. Cette technique utilise la réponse impulsionnelle du processus à asservir supposé stable et elle ne nécessite aucune approximation du processus par un modèle. Les cinq paramètres du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire sont conçus tel que le système en boucle fermée soit équivalent à un modèle d'ordre fractionnaire désiré. Des exemples illustratifs ont été présentés pour tester cette approche de réglage. L'application de cette nouvelle méthode de commande à un moteur à courant continu a été faite. Les réponses fréquentielles et temporelles ont été obtenues et la robustesse en performances a été aussi analysée vis-à-vis des incertitudes sur le gain et le temps de relaxation du moteur à courant continu.

# Introduction Générale

## Introduction générale

Le correcteur PID est la technique la plus utilisée dans la commande des processus industriels pour des décennies. Les raisons majeures de sa large acceptation en industrie sont sa capacité de commander la majorité des processus, ces actions sont bien comprises et son implémentation est très simple. La conception et le réglage du correcteur PID a été un sujet de recherche depuis le jour où Ziegler et Nichols ont présenté leur méthode de réglage en 1942. Bien que toutes les techniques existantes pour le réglage des paramètres du correcteur PID, un travail de recherche continu et intensif est encore en cours pour le rehaussement de la qualité et l'amélioration des performances de la commande.

Le calcul fractionnaire est un sujet mathématique de plus de 300 ans, mais son application en physique et engineering a été uniquement reporté récemment. Dans la dernière décennie, en plus du développement théorique de la différentiation et intégration d'ordre fractionnaire, on trouve un nombre croissant d'applications du calcul fractionnaire dans différents domaines de la commande.

En automatique, ce n'est qu'au début des années 1990 que le régulateur CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) a été proposé par Oustaloup [1]. En profitant des propriétés avantageuses des systèmes d'ordre fractionnaire, ce régulateur permettait d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquences donnée. Depuis cette initiative, La commande d'ordre fractionnaire captiva l'intérêt de beaucoup de chercheurs. En 1999, Podlubny [2] a proposé le régulateur  $PI^\lambda D^\mu$ , une généralisation du correcteur PID classique, comprenant une intégration fractionnaire d'ordre  $\lambda$  et une dérivation fractionnaire d'ordre  $\mu$ , élargissant ainsi le champ d'application du calcul fractionnaire à la théorie de la commande ce qui a orienté plusieurs chercheurs à un nouveau axe de recherche qui est le réglage du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire [3-4-5-20-23].

Alors, l'objectif de ce travail est de proposer une méthode simple de réglage du correcteur d'ordre fractionnaire  $PI^\lambda D^\mu$ . Cette technique utilise la réponse impulsionnelle du processus à asservir supposé stable et elle ne nécessite aucune approximation du processus par un modèle. Les cinq paramètres du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire sont conçus tels que le système en boucle fermée soit équivalent à un système désiré. Le système désiré utilisé dans cette technique de réglage est défini par sa fonction de transfert irrationnelle suivante:

$$\frac{1}{1+(p/\omega_u)^m}, \text{ avec } 1 < m < 2$$

Ce type de système est très largement utilisé dans la commande d'ordre fractionnaire parce qu'il présente des caractéristiques de robustesse très importante tel que l'indépendance de son dépassement des variations du gain statique.

Ce mémoire est décomposé en quatre chapitres organisé de la façon suivante :

Le chapitre I est consacré aux notions de base des opérateurs d'ordre fractionnaire. On y présente les définitions mathématiques de la dérivée et l'intégrale d'ordre fractionnaire ainsi que leur transformée de Laplace. On a introduit aussi les opérateurs d'ordre fractionnaire et leur approximation par des fonctions rationnelles avec un grand intérêt à la méthode de Charef [6] qui nous avons utilisé dans notre travail.

Le chapitre II présente des notions de base sur les systèmes linéaires fondamentaux d'ordre fractionnaire en présentant leurs spécifications et caractéristiques lorsque l'ordre  $m$  est tel que  $1 < m < 2$ . Leur approximation par une fonction rationnelle en utilisant la méthode de Charef [7] a aussi été présentée. Enfin, l'approximation du correcteur d'ordre fractionnaire  $PI^\lambda D^\mu$  par une fonction rationnelle ainsi que sa réalisation à l'aide de circuits analogique en se basant sur la méthode de Charef [8] ont été données.

Le chapitre III présente les développements mathématiques de la nouvelle méthode de réglage du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  proposée. Des exemples d'illustration ont aussi été faits.

Le chapitre IV présente une application de la méthode de réglage du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  proposée pour la commande en position du moteur à courant continu. Puis, l'étude de robustesse du correcteur à été faite. Les résultats ont été comparés à ceux obtenus par un correcteur PID classique.

Enfin, une conclusion générale résume les principaux résultats obtenus dans ce travail ainsi qu'une perspective de travaux futurs.

# Chapitre I

Opérateur d'ordre fractionnaire

## Opérateurs d'ordre fractionnaire

### I.1 Introduction au calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire est le champ de l'analyse mathématique, l'investigation et l'application des intégrales et des dérivées d'ordre arbitraire. Le calcul fractionnaire peut être considéré comme un sujet ancien et encore nouveau. Ces dernières années l'intérêt considérable pour le calcul fractionnaire a été stimulé par les applications de ce calcul dans les différents domaines de la physique et de l'ingénierie [9].

Généralement on sait que les dérivées et les intégrales d'ordre entier ont des interprétations physiques et géométriques claires, qui simplifient de manière significative leur utilisation pour résoudre des problèmes appliqués dans divers domaines de la science. La différentiation et l'intégration d'ordre arbitraire (pas nécessairement un nombre entier) n'a aucune interprétation géométrique et physique acceptable sur ces opérations pendant plus de 300 ans. Comme l'intégration et la différentiation d'ordre fractionnaire sont des généralisations des notions de l'intégration et de la différentiation d'ordre entière, il serait idéal d'avoir de telles interprétations physiques et géométriques qui fournissent également un lien aux interprétations classiques de différentiation et d'intégration d'opérateur d'ordre entier [10].

L'objectif de ce chapitre est de présenter les bases théoriques des opérateurs d'ordre fractionnaire nécessaires pour le développement des chapitres qui suivent, tout en rappelant les définitions et les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire.

### I.2 Opérateurs d'ordre fractionnaire

Le calcul fractionnaire est une généralisation de l'intégration et de la différentiation à l'opérateur fondamental d'ordre non entier  ${}_{t_0}D_t^m$  où  $t_0$  et  $t$  sont des limites de l'opération. L'opérateur intégral-différentiel continu est défini par [11] :

$${}_{t_0}D_t^m = \begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} & \Re(m) > 0, \\ 1 & \Re(m) = 0, \\ \int_{t_0}^t (d\tau)^{-m} & \Re(m) < 0, \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Où  $m \in \mathbb{C}$  est l'ordre de l'opération ou  $\mathbb{C}$  anneau des nombres complexes.

Et  $\Re(\cdot)$  symbolise la partie réelle d'un nombre complexe.

Il existe plusieurs définitions mathématiques pour l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour un large panel de fonctions.

### I.2.1 Définition de Riemann-Liouville (R-L)

L'intégrale dit de Riemann-Liouville est définie ainsi [11]:

**Définition 1 :** Soient  $C$  et  $R$  les anneaux des nombres complexes et réels respectivement. Soient  $m \in C$  avec  $\Re(m) > 0$ ,  $t_0 \in R$  et  $f$  une fonction localement intégrable définie sur  $[t_0 + \infty [$ . L'intégrale d'ordre  $m$  de  $f$  de borne inférieure  $t_0$  est définie par la formule suivante :

$${}^{RL}I_{t_0}^m f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(m)} \cdot \int_{t_0}^t (t - \tau)^{m-1} f(\tau) d\tau \quad (I.2)$$

avec  $t \geq t_0$  et  $\Gamma(\cdot)$  est la fonction gamma d'Euler définie par :  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1} e^{-y} dy, x > 0$ .

**Définition 2 :** Soient  $m \in C$  avec  $\Re(m) > 0$ ,  $n$  un entier positif,  $t_0 \in R$  et  $f$  une fonction localement intégrable définie sur  $[t_0 + \infty [$ . La dérivée d'ordre  $m$  de  $f$  de borne inférieure  $t_0$  est définie par la formule suivante :

$${}^{RL}D_{t_0}^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-m)} \frac{d^n}{dt^n} \cdot \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-m-1} f(\tau) d\tau \quad (I.3)$$

Où le nombre entier  $n$  est tel que  $(n-1) < m < n$ .

Cette dérivée d'ordre fractionnaire peut aussi être définie à partir de l'équation (I.2) comme suit:

$${}^{RL}D_{t_0}^m f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \{ I^{(n-m)} f(t) \} \quad (I.4)$$

**Remarque :** Pour simplifier l'écriture, on notera dans la suite  $I^\lambda$  pour  $I_0^\lambda$ , et  $D^\mu$  pour  $D_0^\mu$ .

### I.2.2 Définition de Grundwald-Leitnikov (G-L)

La dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre  $m > 0$  de G-L est donnée par [11]:

$${}^{GL}D_{t_0}^m f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^m} \sum_{k=0}^{\left[ \frac{t-t_0}{h} \right]} (-1)^k \binom{m}{k} f(t - k.h) \quad (I.5)$$

Où  $[ \cdot ]$  dénote la partie entière d'un nombre réel,  $h$  est la période d'échantillonnage et les coefficients  $\binom{m}{k}$  sont donnés par :

$$\binom{m}{k} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(m-k+1)} \quad (I.6)$$

Avec :  $\Gamma(b+1) = b\Gamma(b)$  et  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

La définition de Gröndwald-Leitnikov de l'intégration d'ordre fractionnaire est formulée comme

$$\text{suit : } {}^{GL}_{t_0} I_t^m f(t) = {}^{GL}_{t_0} D_t^{-m} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^m \sum_{k=0}^{\left[ \frac{t-t_0}{h} \right]} (-1)^k \binom{-m}{k} f(t-k.h) \quad (I.7)$$

### I.2.3 Définition de Caputo

Caputo a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire définie par [11] :

$${}^C_{t_0} D_t^m f(t) = {}^\Delta I^{n-m} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-m)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{m-n+1}} d\tau \quad (I.8)$$

Avec  $n$  est un entier positif vérifiant l'inégalité  $(n-1) < m < n$ .

Cette définition peut être formulée également en fonction de la définition de Riemann-Liouville comme suit :

$${}_{RL} D^\mu f(t) = {}^C D^\mu f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\mu}}{\Gamma(k-\mu+1)} f^{(k)}(0^+) \quad (I.9)$$

Ce qui peut être décrit autrement par :

$${}^C D^\mu f(t) = {}_{RL} D^\mu \left( f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} \right) \quad (I.10)$$

### I.2.4 Quelques propriétés de la dérivation non entière

Les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire sont les suivantes [9]:

1. Si  $f(t)$  est une fonction analytique de  $t$ , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire  $D^m f(t)$  est une fonction analytique de  $t$  et  $m$ .
2. Pour  $m = n$ , où  $n$  est un entier, l'opération  $D^m f(t)$  donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier  $n$ .
3. Pour  $m = 0$  l'opération  $D^m f(t)$  est l'opérateur identité :  $D^0 f(t) = f(t)$ .
4. La différentiation et l'intégration d'ordres fractionnaire sont des opérations linéaires  
 $D^m a f(t) + D^m b g(t) = a D^m f(t) + b D^m g(t)$ .
5. La loi additive (propriété du semi-groupe)  
 $D^\alpha D^\beta f(t) = D^{\alpha+\beta} f(t)$  est valable sous certaines contraintes sur la fonction  $f(t)$ .

6. la dérivée non entière de  $f(t)$  nécessite la connaissance de  $f(t)$  sur l'intervalle  $[t_0, t]$  alors que dans le cas entier, seule la connaissance "locale" de autour de  $t$  est nécessaire. Cette propriété permette d'interpréter les systèmes non entiers comme des systèmes à mémoire longue, les systèmes entiers étant alors interprétables comme des systèmes à mémoire courte.

### I.3 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire

Les définitions temporelles des opérateurs différentiels non entiers souffrent d'un formalisme mathématique quelque peu compliqué, mais leur expression dans le domaine de Laplace relève d'une simplicité remarquable, en particulier dans le cas de l'étude de systèmes relaxés à  $t=0$ . Nous intéressent au cas où l'ordre  $m$  est réel.

#### I.3.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire

Nous commencerons par la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $m > 0$  définie par l'équation (I.2) qu'on peut écrire comme une

convolution des fonctions  $g(t) = \frac{1}{\Gamma(m)} t^{m-1}$  et  $f(t)$

$$I^m f(t) = D^{-m} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^t (t-\tau)^{m-1} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(m)} t^{m-1} * f(t) \quad (\text{I.11})$$

La transformée de Laplace de la fonction  $t^{m-1}$  est [15]:

$$G(p) = L\{t^{m-1}\} = \Gamma(m) p^{-m} \quad (\text{I.12})$$

Donc la transformée de Laplace de l'intégrale de Riemann-Liouville :

$$L\{I^m [f(t)]\} = p^{-m} F(p) \quad (\text{I.13})$$

De la même façon la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire défini par Gründwald-Leitnikov et Caputo est aussi donné par l'équation (I.13).

#### I.3.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire

Nous citons dans ce qui suit la transformée de Laplace des différentes définitions de la dérivée d'ordre arbitraire [11].

##### I.3.2.1 Dérivée de Riemann-Liouville

$$L\{D^m f(t)\} = p^m F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k [D^{m-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (\text{I.14})$$

Avec  $n-1 < m < n$  cette transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville est bien connue. Mais son applicabilité en pratique est limitée à cause de l'absence d'interprétation physique des valeurs limites des dérivées d'ordre fractionnaire pour  $t = 0$ .

### I.3.2.3 Dérivée de Gröndwald-Leitnikov

$$L\{D^m f(t)\} = p^m F(p) \quad (\text{I.15})$$

### I.3.2.2 Dérivée de Caputo

$$L\{D^m f(t)\} = p^m F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{m-k-1} f^{(k)}(0) \quad (\text{I.16})$$

L'avantage principal de la définition de Caputo par rapport à celle de Riemann-Liouville est qu'elle permet de considérer des conditions initiales conventionnelles faciles à interpréter telles que  $y(0) = y_0, y'(0) = y_1$  etc. De plus, la dérivée de Caputo d'une constante est bornée (égale à 0), alors que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas bornée à  $t = 0$ . La seule exception est quand on prend  $t = -\infty$  comme point de départ (limite inférieure) dans la définition de Riemann-Liouville. Cependant, quand on s'intéresse à des processus transitoires, on ne peut pas accepter de placer le point de départ à  $-\infty$ ; dans ce cas la définition de Caputo semble être la plus appropriée quand on la compare aux autres.

### Remarque

La résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire avec la transformée de Laplace se fait de la même manière qu'avec les équations différentielles d'ordre entier.

## I.4 Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire

### I.4.1 Méthode Générale d'approximation des opérateurs intégrò-différentiels d'ordre fractionnaire

En général, une approximation rationnelle de la fonction  $G(p) = p^{-m}, 0 < m < 1$  (Intégration d'ordre fractionnaire dans le domaine de Laplace) peut être obtenue en utilisant l'expansion des fractions continues des fonctions [12] :

$$p^{-m} = \begin{cases} G_h(p) = \frac{1}{(1 + T p)^m}; \\ G_l(p) = \left(1 + \frac{1}{p}\right)^m; \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

Où  $G_h(p)$  est l'approximation pour les hautes fréquences ( $\omega T \gg 1$ ), et  $G_l(p)$  l'approximation pour les basses fréquences ( $\omega T \ll 1$ ).

Plusieurs méthodes ont été proposées pour l'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire, parmi lesquelles la méthode de Carlson [12], Oustaloup [13], Mastuda [12] et Charef [6].

Dans ce qui suit nous allons présenter une méthode d'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire qui sera utilisé plus tard, cette méthode est développée par Charef en 1992 et nommé la méthode de la fonction singulière [6].

#### I.4.2 La méthode de Charef : Fonction de singularité

##### I.4.2.1 Approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire

La fonction de transfert de l'opérateur intégrale d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_I(p) = \frac{1}{p^m} \quad (\text{I.18})$$

Avec  $p = j\omega$  la fréquence complexe et  $m$  est un nombre positif tel que  $0 < m < 1$ .

Dans une bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_h]$ , cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modelé par un pôle à puissance fractionnaire (PPF) comme suit :

$$G(p) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{p}{\omega_c}\right)^m} \quad (\text{I.19})$$

Si on suppose que pour  $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$  on a  $\omega \gg \omega_c$ , on peut écrire :

$$G(p) = \frac{K_I}{\left(\frac{p}{\omega_c}\right)^m} = \frac{K_I \omega_c^m}{p^m} = \frac{1}{p^m} = G_I(p) \quad (\text{I.20})$$

Avec  $K_I = (1/\omega_c^m)$  et  $\omega_c$  est la fréquence de coupure du PPF qui est obtenue à partir de la basse fréquence  $\omega_b$  par la relation  $\omega_c = \sqrt{10^{(\varepsilon/10m)} - 1}$ . avec  $\varepsilon$  est l'erreur maximale permise entre la pente de la réponse fréquentielle de l'opérateur de l'équation (I.18) et le PPF de l'équation (I.19).

Dans le but de représenter le PPF de l'équation (I.19), et par conséquent l'intégrateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction rationnelle [6], [8]. La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de -20m dB/dec sur le tracé de Bode du PPF par un nombre de lignes en zig-zag produisant une alternance de pente -20 dB/dec et 0 dB/dec correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négative du plan  $p$  tel que  $p_0 < z_0 < p_1 < z_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$ . D'où l'approximation suivante :

$$G(p) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{p}{\omega_c}\right)^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{p}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{p}{p_i}\right)} \quad (\text{I.21})$$

Les  $p_i$  et les  $z_i$  sont les pôles et les zéros de l'approximation. En utilisant une méthode graphique [6], les pôles et les zéros de l'approximation s'avèrent sous une forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation commence par une erreur d'approximation  $y$  en dB et une bande de fréquence d'approximation  $\omega_{\max} = 100\omega_h$ . Le nombre de pôles d'approximation  $N$  est donné par:

$$N = \text{partie entier} \left[ \frac{\log\left(\frac{\omega_{\max}}{p_0}\right)}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (\text{I.22})$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$\begin{aligned} p_i &= (ab)^i p_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N \\ z_i &= (ab)^i z_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

Où  $a$  et  $b$  sont appelés les rapports de position, leurs expressions en fonction de  $y$  et  $m$  sont données par :

$$a = 10^{\left(\frac{y}{10(1-m)}\right)}, \quad b = 10^{\left(\frac{y}{10m}\right)} \quad (\text{I.24})$$

Et le premier pôle  $p_0$  et le premier zéro  $z_0$  sont donnés par:

$$p_0 = \omega_c \sqrt{b}, \quad z_0 = ap_0 \quad (\text{I.25})$$

Par conséquent, la fonction rationnelle d'approximation dans une bande de fréquence donnée sera :

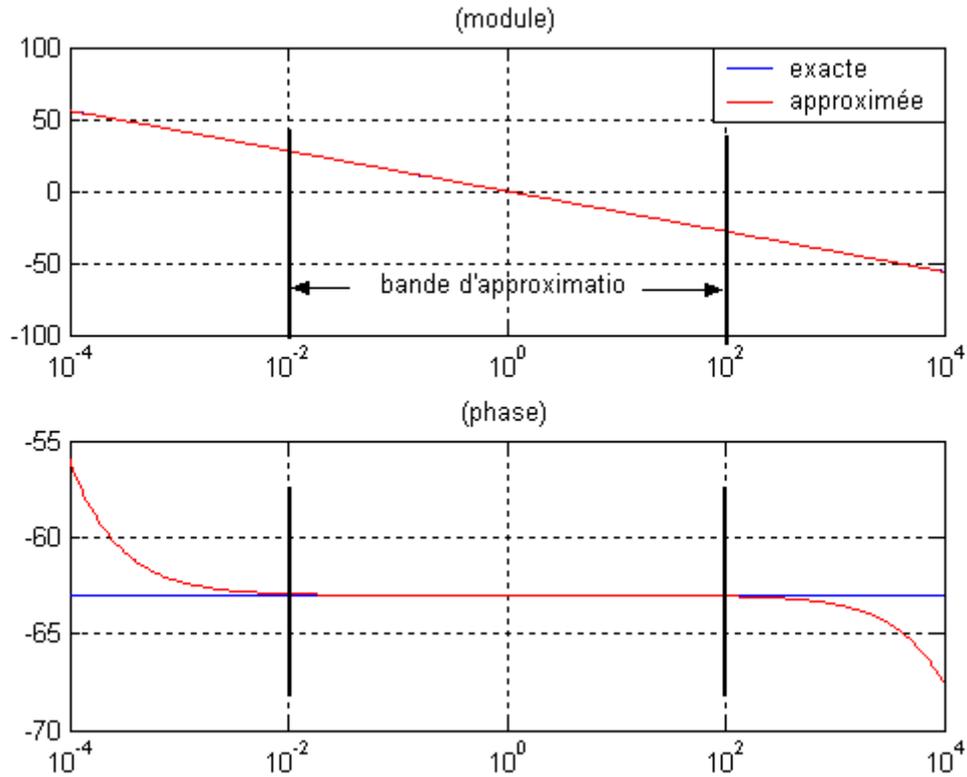
$$G_I(p) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{p}{\omega_c}\right)^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{p}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{p}{p_0(ab)^i}\right)} \quad (\text{I.26})$$

#### Exemple illustratif:

Considérons l'intégrateur d'ordre 0.7, on veut approximée sur la bande  $[10^{-2}, 10^2]$  et pour ( $y=1\text{dB}$ ,  $\varepsilon=10^{-5}$ ). l'approximation est donné par l'équation suivante :

$$G_I(p) = \frac{1}{p^{0.7}} \cong \widehat{G}_I(p) = 2.0845 \cdot 10^3 \frac{\prod_{i=0}^{18} \left(1 + \frac{p}{(4.6060 \cdot 10^{-5} (2.9936)^i)}\right)}{\prod_{i=0}^{19} \left(1 + \frac{p}{(2.1379 \cdot 10^{-5} (2.9936)^i)}\right)}$$

La figure (I.1) représente le tracé de Bode de la fonction de transfert de l'intégrateur d'ordre 0.7 et son approximée. Cette figure montre que les tracés de Bode de la fonction  $\frac{1}{p^{0.7}}$  et son approximé sont superposés sur la bande d'approximation, en remarquant que l'amplitude est une droite de pente  $-20 \times 0.7 = -14\text{db/dec}$  et la phase est une constante de  $-0.7 \times \frac{\pi}{2} = -63\text{ deg}$ .



**Figure I.1** : Tracé de Bode amplitude et phase de  $p^{-0.7}$  et son approximé.

#### I.4.2.2 Approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre Fractionnaire

La fonction de transfert de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_D(p) = p^m \quad (\text{I.27})$$

Avec  $p = j\omega$  : la fréquence complexe et  $m$  : est un nombre positive tel que  $0 < m < 1$ . Dans une bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_h]$  cet opérateur peut être modélé par un zéro à puissance fractionnaire (ZPF) comme suit [8]:

$$G(p) = K_D \left(1 + \frac{p}{\omega_c}\right)^m \quad (\text{I.28})$$

Si on suppose que pour  $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$  on a  $\omega \gg \omega_c$ , on peut écrire :

$$G(p) = K_D \left(\frac{p}{\omega_c}\right)^m = \frac{K_D}{\omega_c^m} p^m = p^m \quad (\text{I.29})$$

Avec :  $K_D = \omega_c^m$  et  $\omega_c$  est la fréquence de coupure de ZPF qui est obtenue à partir de la basse fréquence  $\omega_b$  par la relation  $\omega_c = 0.01\omega_b$ .

Dans le but de représenter le ZPF de l'équation (I.28), et par conséquent le dérivateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une rationnelle. La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de 20mdB/dec sur le tracé de Bode du ZPF par un nombre de ligne en Zig-Zag produisant une alternance de pente 20 dB/dec et 0 dB/dec correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négative du plan  $p$  tel que  $z_0 < p_0 < z_1 < p_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$  [6]. D'où l'approximation suivante :

$$G(p) = K_D \left(1 + \frac{p}{\omega_c}\right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N (1+p/z_i)}{\prod_{i=0}^N (1+p/p_i)} \quad (\text{I.30})$$

En utilisant une méthode graphique simple [6], les pôles et les zéros de l'approximation s'avèrent sous une forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation a commencé par une erreur d'approximation  $y$  en dB et une bande de fréquence d'approximation  $\omega_{\max} = 100\omega_h$ . Le nombre de pôles d'approximation  $N$  est donné par :

$$N = \text{partie entiere} \left[ \frac{\log\left(\frac{\omega_{\max}}{z_0}\right)}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (\text{I.31})$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$\begin{aligned} z_i &= (ab)^i z_0, \text{ pour } i = 0,1,2,\dots,N \\ p_i &= (ab)^i a z_0, \text{ pour } i = 0,1,2,\dots,N \end{aligned} \quad (\text{I.32})$$

Avec :  $z_0 = \omega_c \sqrt{b}$  et  $p_0 = a z_0$ .

Par conséquent, la fonction rationnelle d'approximation dans une bande de fréquence donnée sera :

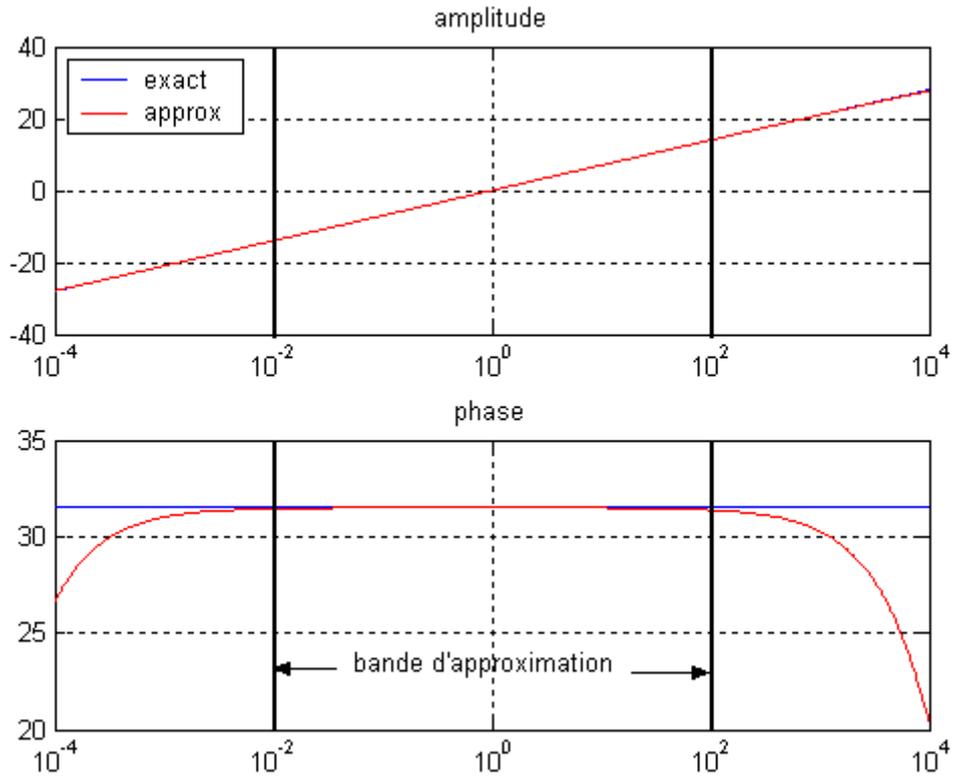
$$G_D(p) = K_D \left(1 + \frac{p}{\omega_c}\right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{p}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{p}{p_0(ab)^i}\right)} \quad (\text{I.33})$$

### Exemple :

Considérons le dérivateur d'ordre 0.35, en veux approximer sur la bande  $[10^{-2}, 10^2]$  et pour ( $y=1\text{dB}$ ,  $\varepsilon=10^{-5}$ ). l'approximation est donné par l'équation suivante :

$$G_D(p) = p^{0.35} \cong \hat{G}_I(p) = 0.0247 \frac{\prod_{i=0}^{19} \left(1 + \frac{p}{(3.564 \cdot 10^{-5} (2.7514)^i)}\right)}{\prod_{i=0}^{19} \left(1 + \frac{p}{(5.079 \cdot 10^{-5} (2.7514)^i)}\right)}$$

La figure (I.2) représente le tracé de Bode de la fonction de transfert de dérivateur d'ordre 0.35. Cette figure montre que les tracés de Bode de la fonction  $p^{0.35}$  et son approximé sont superposés sur la bande d'approximation, en remarquant que l'amplitude est une droite de pente  $20 \times 0.35 = 7 \text{ db/dec}$  et la phase est une constante de  $0.35 \times \frac{\pi}{2} = 31.5 \text{ deg}$ .



**Figure I.2 :** Tracé de Bode amplitude et phase de  $p^{0.35}$  et son approximé.

## I.5 Implémentation analogiques des Opérateur d'ordre fractionnaires

### I.5.1 Implémentation analogiques de l'intégrateur d'ordre fractionnaire

L'approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire est donnée par l'équation (I.26) de la forme :

$$G_I(p) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{p}{\omega_c}\right)^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{p}{z_0 (ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{p}{p_0 (ab)^i}\right)}$$

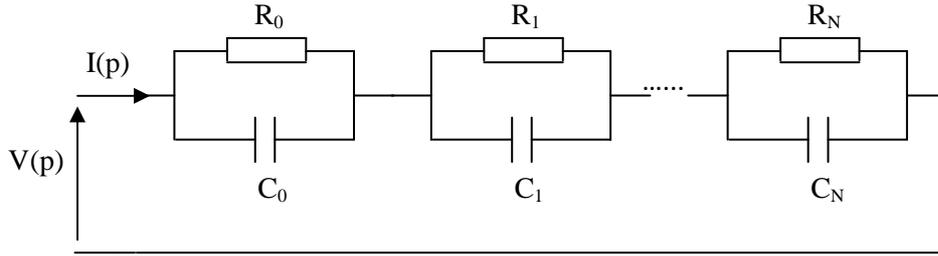
On doit décomposer la fonction rationnelle  $G_I(p)$  en somme de fractions élémentaires, on obtient la formule suivante :

$$G(p) = K_I \cdot \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{p}{(ab)^i ap_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{p}{(ab)^i p_0}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{p}{(ab)^i p_0}\right)} \quad (\text{I.34})$$

Où les coefficients  $h_i$  sont les résidus et qui sont déterminés par :

$$h_i = K_1 \cdot \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left( 1 - \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j a p_0} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left( 1 - \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j a p_0} \right)} = K_1 \cdot \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left( 1 - \frac{(ab)^{i-j}}{a} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left( 1 - (ab)^{i-j} \right)}, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (I.35)$$

Cet équation correspond à l'impédance d'un réseau RC du type Foster 1<sup>ère</sup> forme dont le schéma est représenté par la figure(I.3) [8]:



**Figure I.3 :** Réalisation analogique de l'intégrateur d'ordre fractionnaire

L'impédance de ce réseau est :

$$Z(p) = \sum_{i=0}^N \left( \frac{R_i}{1 + pR_i C_i} \right) \quad (I.36)$$

Alors :

$$\left. \begin{array}{l} R_i C_i = \frac{1}{p_i} \\ R_i = h_i \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_i = h_i \\ C_i = \frac{1}{p_i h_i} \end{array} \right. \text{ Pour } i=0,1,\dots,N \quad (I.37)$$

### I.5.2 Implémentation analogiques de dérivateur d'ordre fractionnaire

De l'équation (I.33), l'approximation de l'opérateur dérivée d'ordre fractionnaire dans une bande fréquentielle donnée par une fonction rationnelle a la forme :

$$G_D(p) = K_D \left( 1 + \frac{p}{\omega_c} \right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{p}{z_0(ab)^i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{p}{p_0(ab)^i} \right)}$$

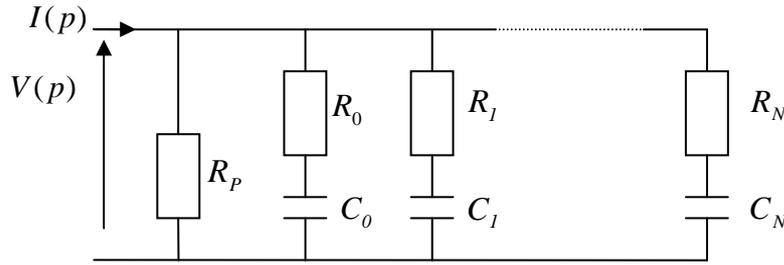
La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle approximant le dérivateur d'ordre fractionnaire  $G_D(p)$  donne :

$$G_D(p) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{g_i p}{\left( 1 + \frac{p}{p_i} \right)} \quad (I.38)$$

$$\text{Avec : } G_0 = K_D \quad (I.39)$$

$$\text{Et : } g_i = K_D \frac{\prod_{j=0}^N (1 - (ab)^{(i-j)} a)}{(- (ab)^i a z_0) \prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^{(i-j)})} \quad \text{Pour } i = 0, 1, \dots, N \quad (I.40)$$

Cette équation correspond à l'admittance d'un réseau du type Foster 2<sup>eme</sup> forme dont le schéma est représenté comme suit [8]:



**Figure I.4 :** Réalisation analogique de dérivateur d'ordre fractionnaire

L'admittance de ce réseau est de la forme :

$$Y(p) = \frac{1}{R_p} + \sum_{i=0}^N \frac{pC_i}{1 + pR_iC_i} \quad (I.41)$$

$$\text{Alors : } \left. \begin{array}{l} p_i = \frac{1}{R_i C_i} \\ g_i = C_i \\ G_0 = \frac{1}{R_p} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_i = g_i \\ R_i = \frac{1}{g_i p_i} \\ R_p = \frac{1}{G_0} \end{array} \right. \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (I.42)$$

## I.6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre quelque définition de base pour la dérivation d'ordre non entier, ainsi sa représentation dans le domaine de Laplace ,puis en à présenter une méthode d'approximation des operateurs d'ordre fractionnaire par des fonctions rationnelles dite la méthode de la fonction singulière qui nous avons utilisé dans les chapitres suivantes, deux exemples illustratives sont présenter, les résultats obtenus montrent qu'on obtient une bonne approximation dans une bande fréquentielle donné, finalement une méthode à été présenter pour la synthèse d'un opérateur d'ordre fractionnaire bornée en fréquence à l'aide d'un circuit analogique.

# Chapitre II

Systemes d'ordre fractionnaire et Correcteur

$PI^\lambda D^\mu$

## Systèmes d'ordre fractionnaire et Correcteur PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup>

### II.1 Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

Les systèmes linéaires d'ordre fractionnaire sont des systèmes dynamiques linéaires représentés par des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire dont les ordres de leurs dérivées sont des nombres réels. L'équation différentielle linéaire fondamentale d'ordre fractionnaire est définie par [14] :

$$(\tau_0)^m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + y(t) = e(t) \quad 0 < m < 2 \quad (\text{II.1})$$

Avec :  $e(t)$  : signal d'entrée.

$Y(t)$  : signal de sortie.

$\tau_0$  : Constante de temps.

Il y'a deux type des systèmes fondamentaux [7] :

-système d'ordre fractionnaire de relaxation pour  $0 < m < 1$ .

-système d'ordre fractionnaire d'oscillation pour  $1 < m < 2$ .

Nous nous intéressons dans notre étude au deuxième cas ( $1 < m < 2$ ), ce type de système à un comportement d'un système du deuxième ordre avec une paire de pôles complexes conjugués. Plus tard nous avons utilisé ce type des systèmes comme un modèle de référence dans la conception de correcteur. La fonction de transfert de ce type de système est donnée par la fonction irrationnelle suivante :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{1}{1+(\tau_0 p)^m} \quad 1 < m < 2 \quad (\text{II.2})$$

$\tau_0$  : temps caractéristique de relaxation.

### II.2 Approximation par une fonction rationnelle

Dans cette section, on va présenter une méthode d'approximation développée par Charef en 2006 [7]. La fonction de transfert de l'éq. (II.2) est approximée par l'équation suivante :

$$G(p) = \frac{1}{1+(\tau_0 p)^m} \approx \frac{(1+\tau_0 p)^{2-m}}{(\tau_0 p)^2 + 2\xi(\tau_0 p) + 1}, \text{ pour } 1 < m < 2 \quad (\text{II.3})$$

$$G(p) = G_N(p)G_D(p)$$

$$G_N(p) = (1 + \tau_0 p)^{2-m} \quad ; \text{ C'est un zéro à puissance fractionnaire (ZPF).}$$

$$G_D(p) = \frac{1}{(\tau_0 p)^2 + 2\xi(\tau_0 p) + 1} \quad ; \text{ C'est un système du second ordre régulier.}$$

On peut facilement montrer que :

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+(j\omega\tau_0)^m} \approx \frac{(1+j\omega\tau_0)^{2-m}}{(j\omega\tau_0)^2 + 2\xi(j\omega\tau_0) + 1}, \quad 1 < m < 2$$

$$\begin{aligned}
\text{Pour } \omega \ll 1/\tau_0 \quad & |G(j\omega)| = 1 \approx 1 \\
\text{Pour } \omega \gg 1/\tau_0 \quad & |G(j\omega)| = \frac{1}{(\omega\tau_0)^m} \approx \frac{(\omega\tau_0)^{2-m}}{(\omega\tau_0)^2} = \frac{1}{(\omega\tau_0)^m} \\
\text{Pour } \omega = 1/\tau_0 \quad & |G(j\omega)| = \left| \frac{1}{1+(j)^m} \right| \approx \frac{|(1+j)^{2-m}|}{|2j\xi|} \\
& |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1+\cos(\frac{m\pi}{2}))^2 + (\sin(\frac{m\pi}{2}))^2}} = \frac{(\sqrt{2})^{-m}}{\xi}
\end{aligned}$$

Le facteur d'amortissement est donnée par :

$$\xi = \sqrt{\frac{(1+\cos(\frac{m\pi}{2}))}{2^{m-1}}} \quad (\text{II.4})$$

Le facteur d'amortissement est en fonction de l'ordre fractionnaire m.

Pour représenter un système d'ordre fractionnaire oscillatoire de l'équation (II.3) par un modèle d'un système linéaire invariant dans le temps, on doit approximé la fonction  $G_N(p)$  (ZPF) par une fonction rationnelle dans la bande de fréquence  $[0, \omega_H]$ .

L'approximation du  $G_N(p)$  par la méthode de Charef [6], [8] est :

$$(1 + \tau_0 p)^{2-m} = \frac{\prod_{i=0}^N (1+p/z_i)}{\prod_{i=0}^N (1+p/p_i)} \quad (\text{II.5})$$

Les paramètres a, b,  $z_0$ ,  $p_0$  et N peuvent être déterminé facilement par :

$$a = 10^{\lfloor \frac{y}{10(1-(2-m))} \rfloor}, \quad b = 10^{\lfloor y/10(2-m) \rfloor}, \quad z_0 = \frac{1}{\tau_0} 10^{\lfloor y/20(2-m) \rfloor}, \quad p_0 = az_0 \text{ et}$$

$$N = \text{entière} \left[ \frac{\log(\frac{\omega_{max}}{z_0})}{\log(ab)} \right] + 1$$

$$\text{Les } p_i \text{ et } z_i \text{ calculer par : } \begin{cases} z_i = (ab)^i z_0 & i = 0, 1, \dots, N \\ p_i = (ab)^i az_0 & i = 0, 1, \dots, N \\ \text{ou: } z_0 < p_0 < z_1 < \dots < z_N < p_N \end{cases}$$

En remplaçant l'approximation du ZPF dans l'équation (II.3) on obtient :

$$G(p) = \frac{1}{[(\tau_0 p)^2 + 2\xi(\tau_0 p) + 1]} \frac{\prod_{i=0}^N (1+p/z_i)}{\prod_{i=0}^N (1+p/p_i)} \quad (\text{II.6})$$

### II.3 Réponses temporelles et fréquentielles :

Par décomposition en éléments simples de (II.6) on obtient la forme suivante :

$$G(p) = \frac{Ap+B}{[(\tau_0 p)^2 + 2\xi(\tau_0 p) + 1]} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{(1+\frac{p}{p_i})} \quad (\text{II.7})$$

$$\text{Avec : } B = 1 - \sum_{i=0}^N K_i \quad (\text{II.8})$$

$$A = \frac{-1}{\omega_n^2} \sum_{i=0}^N K_i p_i \quad (\text{II.9})$$

$\omega_n$  : La pulsation de résonance ( $\omega_n = 1/\tau_0$ )

$k_i$  ( $i=0,1,\dots, N$ ) ; sont les résidus des pôles qui peuvent être calculés comme suit :

$$k_i = \frac{1}{[(a\sqrt{b}(ab)^i)^2 - 2\xi(a\sqrt{b}(ab)^i) + 1]} \frac{\prod_{j=0}^N (1 - a(ab)^{i-j})}{\prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^{i-j})} \quad (\text{II.10})$$

$$\text{La sortie : } Y(p) = G(p)E(p) = \frac{Ap+B}{[(\tau_0 p)^2 + 2\xi(\tau_0 p) + 1]} E(p) + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left(1 + \frac{p}{p_i}\right)} E(p) \quad (\text{II.11})$$

### II.3.1 La réponse impulsionnelle

En remplaçons  $E(p)=1$  dans l'équation (II.11) on obtient la sortie :

$$Y(p) = \frac{Ap+B}{[(\tau_0 p)^2 + 2\xi(\tau_0 p) + 1]} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left(1 + \frac{p}{p_i}\right)} \quad (\text{II.12})$$

$B$ ,  $A$  et  $k_i$  sont calculées par les relations (II.8), (II.9) et (II.10) respectivement.

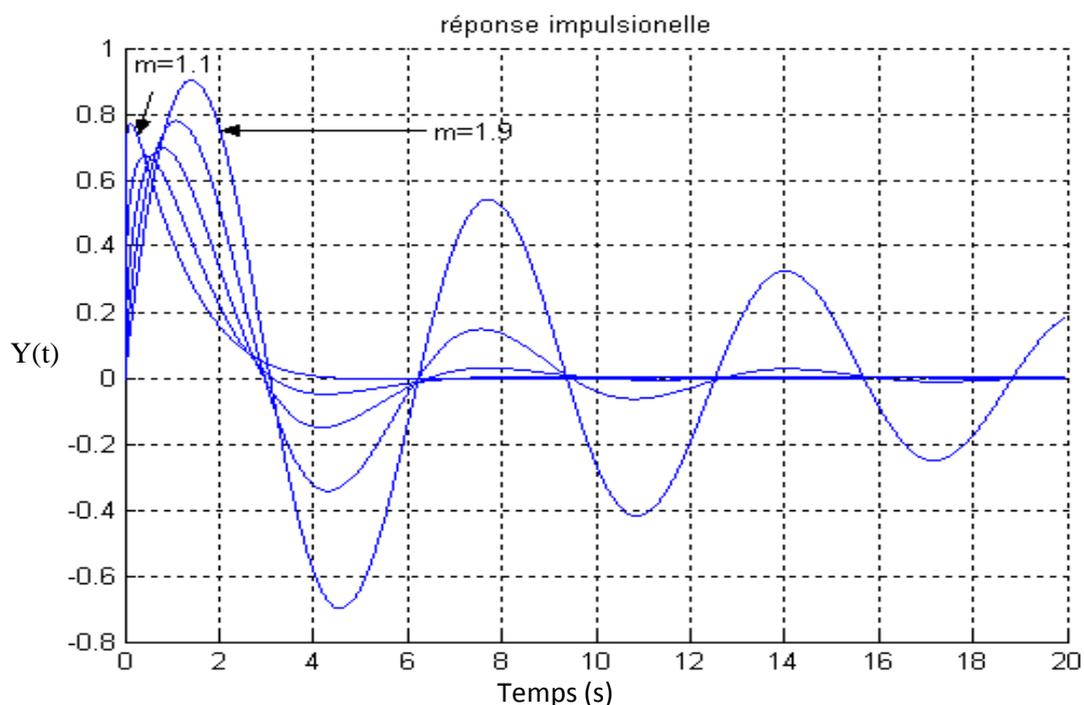
En utilisant la transformée de Laplace inverse, la réponse impulsionnelle de ce système est donnée par la relation suivante [7]:

$$y(t) = \frac{1}{\omega_n} \left( \frac{B^2 - 2AB\xi\omega_n + A^2\omega_n^2}{1 - \xi^2} \right)^{1/2} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi) + \sum_{i=0}^N k_i p_i e^{-p_i t} \quad (\text{II.13})$$

Où la phase  $\varphi$  est donnée par:

$$\varphi = \arctg \left( \frac{A - \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{B - A\xi\omega_n} \right) \quad (\text{II.14})$$

La figure suivante montre le comportement de la réponse impulsionnelle pour plusieurs valeurs de  $m$  ( $\gamma = 1 \text{ db}$  et  $\omega_n = 1$ ) :



**Figure II.1 :** La réponse impulsionnelle du système pour  $m=1.1, 1.3, \dots, 1.9$ .

### II.3.2 La réponse indicielle

En remplaçons  $(E(p)=1/p)$  dans l'équation (II.11), on obtient la formule :

$$Y(p) = \frac{Ap+B}{p[(\tau_0 p)^2+2\xi(\tau_0 p)+1]} + \frac{1}{p} \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left(1+\frac{p}{p_i}\right)} \quad (\text{II.15})$$

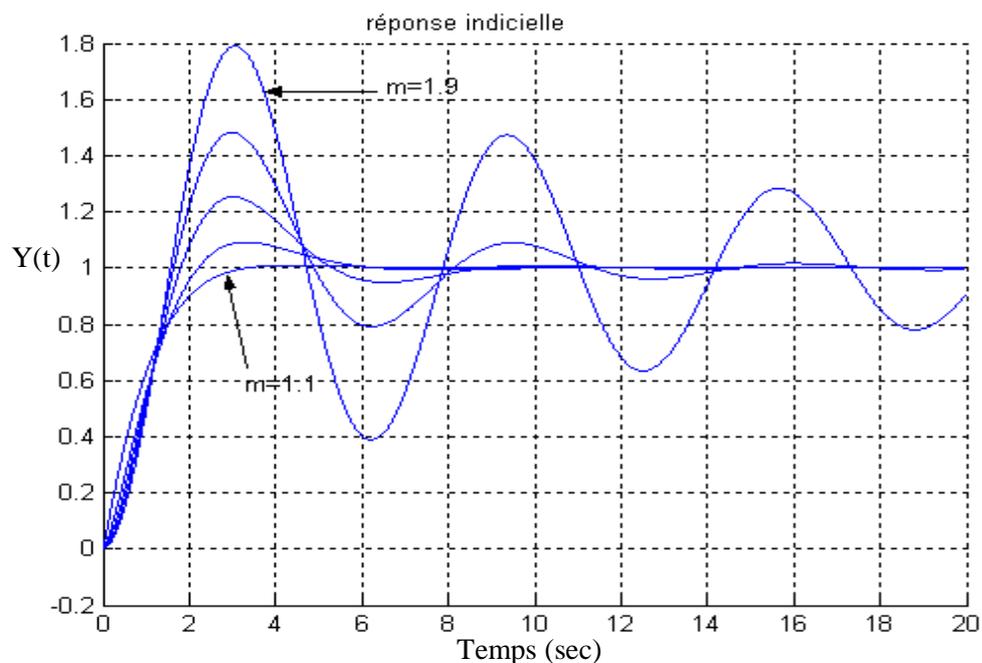
En utilisant la transformée de Laplace inverse, la réponse indicielle de ce système est donnée par la relation suivante [7]:

$$y(t) = 1 + \frac{1}{\omega_n} \left( \frac{B^2 - 2AB\xi\omega_n + A^2\omega_n^2}{1 - \xi^2} \right)^{1/2} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi_1) - \sum_{i=0}^N k_i p_i e^{-p_i t} \quad (\text{II.16})$$

où la phase  $\varphi_1$  est donnée par:

$$\varphi_1 = \arctg \left( \frac{A - \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{B - A\xi\omega_n} \right) - \arctg \left( \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right) \quad (\text{II.17})$$

La figure suivante montre le comportement de la réponse indicielle pour  $y = 1 \text{ db}$  et  $\omega_n = 1$



**Figure II.2 :** La réponse indicielle du système pour  $t = 1.1, 1.3, \dots, 1.9$ .

La figure (II.2) montre que lorsque  $m$  tend vers 1, le système se rapproche du système du premier ordre, et les oscillations diminuent. Inversement, lorsque  $m$  tend vers 2, le système se rapproche du système du second ordre, et les oscillations augmentent (se rapproche du système du second ordre régulier).

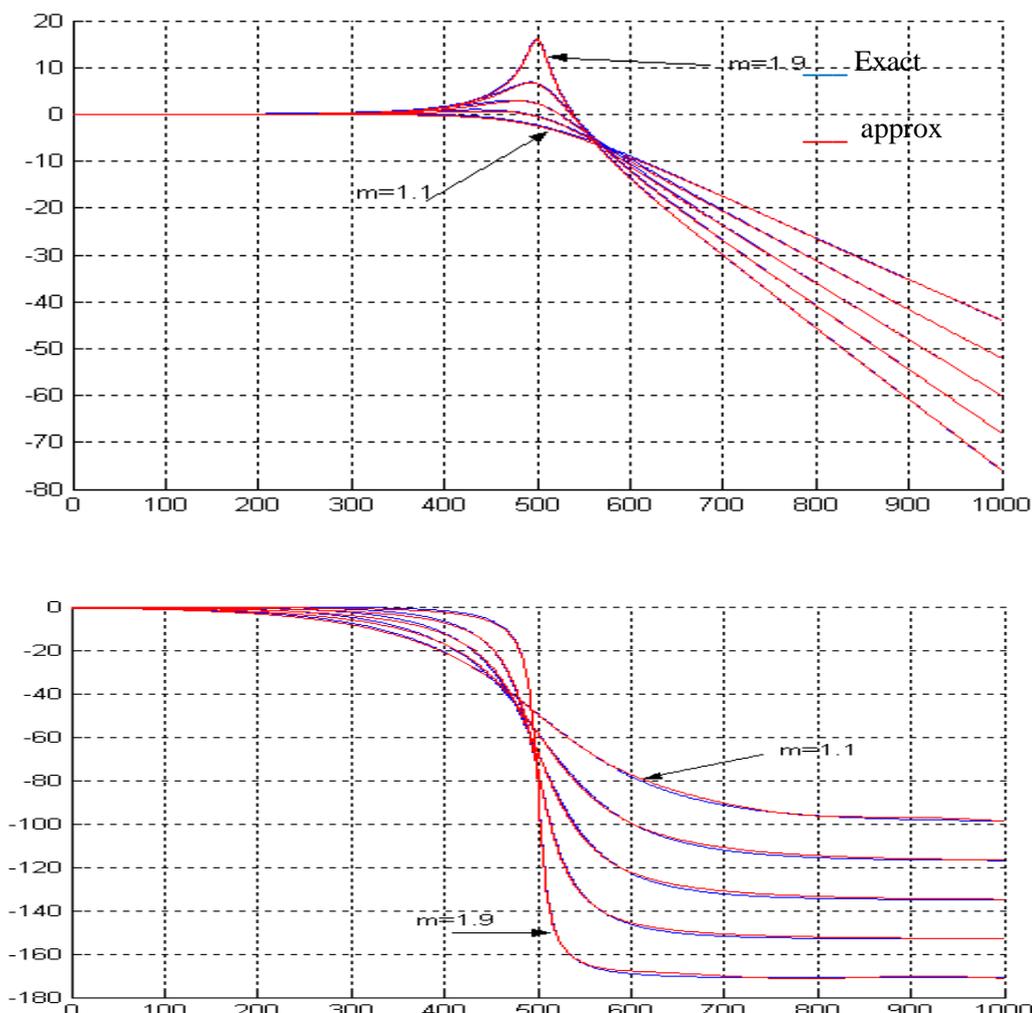
### II.3.3 Les réponses fréquentielles

L'expression pour l'analyse fréquentielle de  $G(p)$  est :

$$G(j\omega) = \frac{1}{(1+(\omega/\omega_n)^m \cos(m\pi/2)) + j(\omega/\omega_n)^m \sin(m\pi/2)} \quad (\text{II.18})$$

$$G(p) = \frac{1}{1+(\tau_0 p)^m} \approx \frac{(1+\tau_0 p)^{2-m}}{[(\tau_0 p)^2 + 2\xi(\tau_0 p) + 1]}$$

En fait variée  $m$  entre 1.1 et 1.9 et on obtient les tracés de bode suivants :



**Figure II.3 :** Tracé de Bode des fonctions des eq. (II.2) et (II.6) pour plusieurs valeurs de  $m$ .

De la figure (II.3) on remarque que les pentes sont entre  $-20\text{dB}$  et  $-40\text{dB}$  en variant l'ordre  $m$ . Les courbes montrent la bonne approximation de la fonction de transfert de l'eq. (II.2).

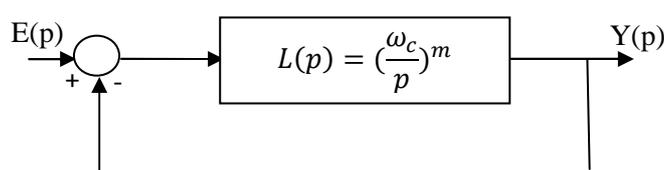
### II.3.4 La fonction de transfert idéal de bode :

Bode a proposé une forme idéale de la fonction de transfert de la boucle de commande dans son travail sur la conception de feedbacks amplificateurs (voire Fig II.4), cette fonction de transfert à la forme :

$$L(p) = \left(\frac{\omega_c}{p}\right)^m \quad m \in \mathbb{R}. \quad (\text{II.19})$$

Où  $\omega_c$  est la fréquence de coupure désirée et le paramètre  $m$  la pente de la caractéristique idéale du gain. En fait, la fonction de transfert  $L(p)$  est un intégrateur d'ordre fractionnaire pour  $m > 0$ . Les diagrammes de Bode de  $L(p)$  ( $1 < m < 2$ ) sont très simple figure (II.5). La courbe d'amplitude est une ligne droite de pente constante  $-20m$  dB / dec, et la courbe de phase est un trait horizontal à  $-m\pi/2$  rads. La courbe de Nyquist se réduit à une ligne droite passant par l'origine avec  $\arg L(j\omega) = -m\pi/2$  rad.

Maintenant considérons le système a retour unitaire représenté sur la figure (II.4) avec  $L(p)$  est la fonction de transfert idéal de Bode. Ce choix de  $L(p)$  donne un système en boucle fermé avec la propriété souhaitable d'être peu sensible à la variation du gain.



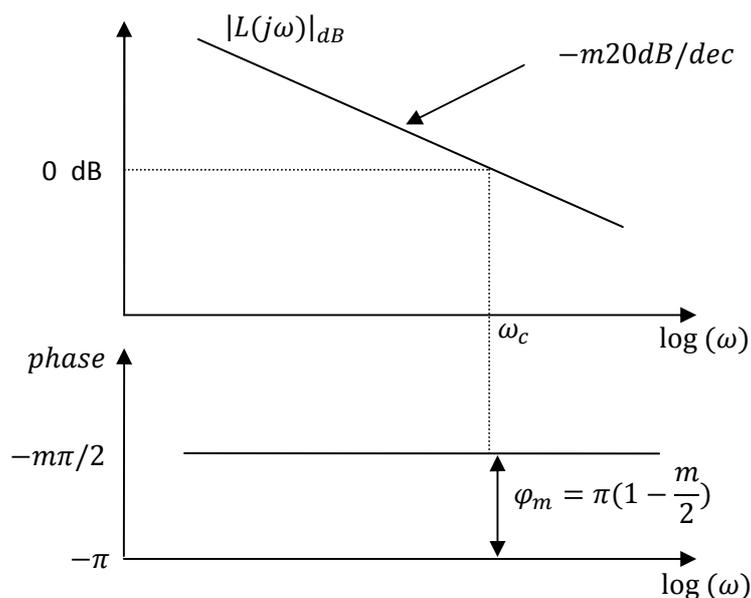
**Figure II.4 :** Boucle de commande idéale de Bode.

La fonction de transfert en boucle fermée :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{1}{1+(p/\omega_c)^m} = \frac{K}{K+p^m} \quad \text{avec: } K = \omega_c^m \quad (\text{II.20})$$

(Pour :  $1 < m < 2$  en à un système d'ordre fractionnaire oscillatoire).

Ce système à la propriété de robustesse, en termes d'invariance sous changement d'échelle de fréquence [15].



**Figure II.5 :** Tracé de Bode amplitude et phase de  $L(p)$  pour  $1 < m < 2$ .

Les caractéristiques générales de la fonction de transfert de Bode sont les suivantes [9] :

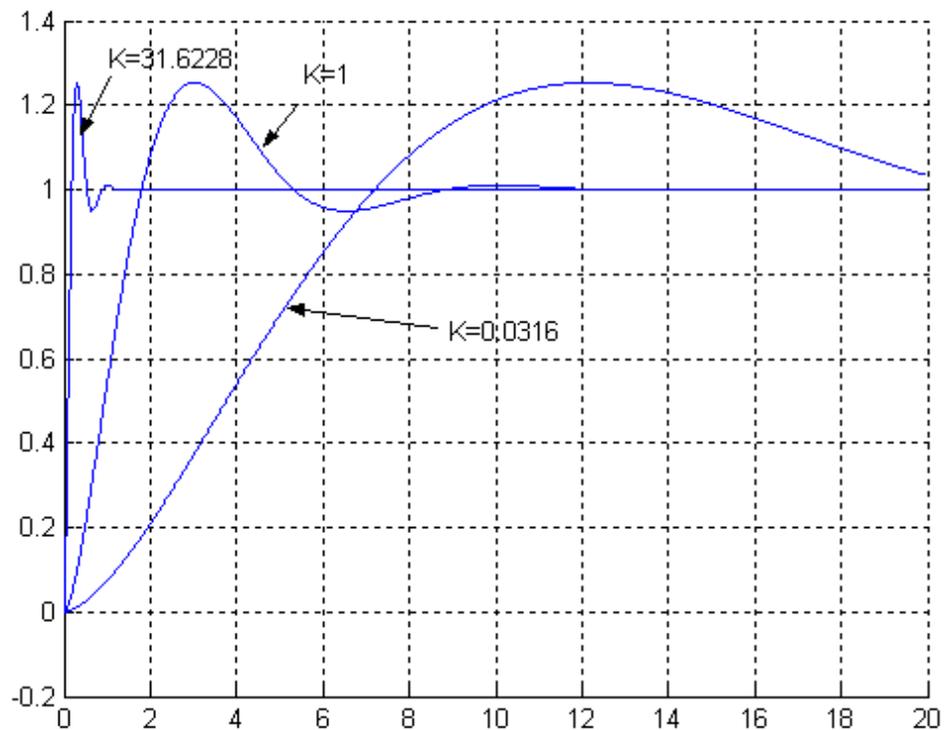
a) En boucle ouverte :

- Gain : une pente constante de  $-20\text{mdB/dec}$ .
- Fréquence de coupure : une fonction de  $K$ .
- Phase : ligne horizontale de  $-m \frac{\pi}{2}$ .
- Nyquist : ligne droite avec un argument  $-m \frac{\pi}{2}$ .

b) En boucle fermée avec retour unitaire :

- La marge du gain est infinie.
- La marge de phase est constante :  $\varphi_m = \pi(1 - \frac{m}{2})$ , elle dépend seulement de  $m$ .

La figure (II.6) représente la réponse indicielle du système de l'éq. (II.20) pour  $m=1.5$  et différentes valeurs de  $K$  ( $\tau_0 = [0.1, 1 \text{ et } 10]$  correspond à  $K = [31.6228, 1 \text{ et } 0.036]$ )  $K = (\frac{1}{\tau_0})^m$ .



**Figure II.6 :** Réponse indicielle du système de l'éq.(II.20) pour différentes valeurs de  $K$ .

La figure (II.6) montre qu'on obtient un dépassement de 25.28% indépendant du  $K$ , cette propriété est dite iso-amortissement ( $\xi = \text{constante} = 0.0526$ ).

## II.4 Performances et Caractéristiques du Système Oscillatoire d'ordre Fractionnaire

Le but fondamental pour la conception des systèmes asservis consiste à répondre aux conditions fixées par le comportement du système projeté. Dans cette partie nous avons cité brièvement les spécifications du système oscillatoire a partir des résultats obtenir par Assabaa dans [16], [17].

### II.4.1 Spécifications fréquentielles

$$1. \text{ Facteur de qualité : } \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos(\frac{m\pi}{2}))}} \quad (\text{II.21})$$

$$2. \text{ Facteur d'amortissement : } \quad \xi = \sqrt{\frac{(1+\cos(\frac{m\pi}{2}))}{2^{m-1}}} \quad (\text{II.22})$$

$\xi$  Dépond seulement de  $m$  se qui permet d'introduire la notion de mode oscillatoire robuste [17].

$$3. \text{ Pulsation de résonance : } \quad \omega_r = \omega_n (-\cos(m\pi/2))^{1/m} \quad (\text{II.23})$$

$$4. \text{ Facteur de résonance : } \quad M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{\sin(\frac{m\pi}{2})} \quad (\text{II.24})$$

$M_r$  Dépond seulement de  $m$  se qui permet d'introduire la notion de résonance robuste [17].

### II.4.2 Spécifications temporelles

$$1. \text{ Dépassement(\%): } \quad M_p = (m - 1.005)(m - 0.755) \quad (\text{II.25})$$

$$2. \text{ Le temps de dépassement : } \quad tp = \frac{1.118(m-0.252)^2}{(m-0.9)\omega_n} \quad (\text{II.26})$$

$$3. \text{ Temps de réponse } \quad ts(2\%) = \frac{4\sqrt{2^{m-1}}}{\omega_n \sqrt{1+\cos(\frac{m\pi}{2})}} = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad 1.138 < m < 2 \quad (\text{II.27})$$

$$4. \text{ 4. Le temps de monté : } \quad tr \approx \frac{0.135(m+1.158)^2}{(m-0.72)\omega_n} \quad (\text{II.28})$$

## II.5 Correcteur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$

### II.5.1 Introduction :

Afin d'améliorer les performances des systèmes asservis linéaires, Poudlubny [2] a proposé une généralisation du correcteur PID classique à la forme  $PI^\lambda D^\mu$  nommé le PID fractionnaire, où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des réel positifs tel que  $0 < \lambda < 1$  et  $0 < \mu < 1$ , Il a montré que les performances étaient considérablement améliorées par rapport à celles obtenues par un PID d'ordre entier. L'expression analytique du PID fractionnaire est donnée par l'équation suivante :

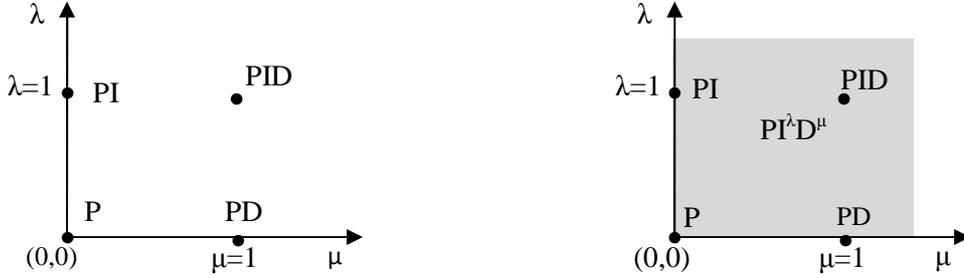
$$C(p) = K_c + \frac{T_i}{p^\lambda} + T_d p^\mu \quad (\text{II.29})$$

Où

$K_c$ : représente l'action proportionnelle.

$T_i / p^\lambda$ : représente l'action intégrale d'ordre fractionnaire.

$T_d p^\mu$ : représente l'action dérivation d'ordre fractionnaire.



**Figure II.7 :** Correcteur PID et  $PI^\lambda D^\mu$

Comme il est montré sur la figure (II.7), le  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire généralise le PID conventionnel et l'étend du point au plan. Cette extension donne plus de flexibilité dans la conception des commandes PID. Ce type de correcteur est généralement utilisé dans la conception d'une commande robuste.

### II.5.2 Approximation du $PI^\lambda D^\mu$ par une fonction rationnelle

Dans cette partie nous considérons le cas où  $1 < \lambda < 2$  et  $1 < \mu < 2$  l'équation (II.29) devient :

$$C(p) = K_c + \frac{T_i}{p} \left( \frac{1}{p^{m_i}} \right) + T_d p (p^{m_d})$$

$1/p^{m_i}$  : est l'opérateur de l'intégrale d'ordre  $m_i$  avec :  $0 < m_i < 1$

$p^{m_d}$  : est l'opérateur de la dériver d'ordre  $m_d$  avec :  $0 < m_d < 1$

Dans une bande de fréquences  $[\omega_b, \omega_h]$ , l'action intégrale et dérivée d'ordre fractionnaire est réalisée respectivement par un PPF et ZPF. On obtient l'approximation du  $PI^\lambda D^\mu$  par la méthode de Charef [8] :

$$C(p) = K_c + \frac{T_i}{p} \left( K_I \frac{\prod_{i=0}^{N_I-1} (1+p/z_{I_i})}{\prod_{i=0}^{N_I} (1+p/p_{I_i})} \right) + T_d p \left( K_D \frac{\prod_{i=0}^{N_D} (1+p/z_{D_i})}{\prod_{i=0}^{N_D} (1+p/p_{D_i})} \right) \quad (\text{II.30})$$

Les pôles  $p_{I_i}$ , les zéros  $z_{I_i}$  et les paramètres  $K_I$  et  $N_I$  de l'approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire peuvent être calculé à partir de la section (I.4.2.1).

Les pôles  $p_{D_i}$ , les zéros  $z_{D_i}$  et les paramètres  $K_D$  et  $N_D$  de l'approximation de dérivateur d'ordre fractionnaire peuvent être calculé à partir de la section (I.4.2.2).

**Exemple illustrative :**

Considérons le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  défini par sa fonction de transfert suivante :

$$C(p) = 2.4 + \left(\frac{0.18}{p^{1.7}}\right) + 6(p^{1.7}) \quad (\text{II.31})$$

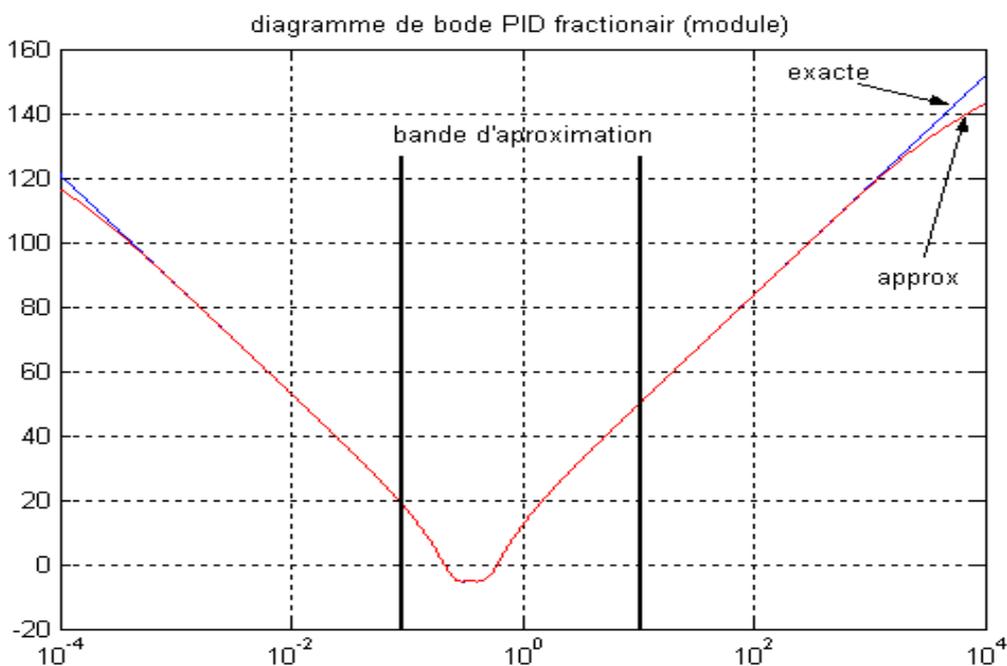
Donc : 
$$C(p) = 2.4 + \frac{0.18}{p} \left(\frac{1}{p^{0.7}}\right) + 6p(p^{0.7})$$

En obtient l'approximation rationnelle du  $PI^\lambda D^\mu$  par l'approximation des operateurs  $\frac{1}{p^{0.7}}$  et  $p^{0.7}$  sur la même bande fréquentielle  $(\omega_L, \omega_H)=[0.1, 10\text{rad/s}]$ , les paramètre d'approximation utilisé sont :  $\varepsilon=10^{-5}$ ,  $y=1\text{db}$  et  $\omega_{\max}=100\omega_L=10^3\text{rad/s}$ , les pôles et zéros de l'approximation peuvent calculer à partir de la section (I.4.2.1) et (I.4.2.2).

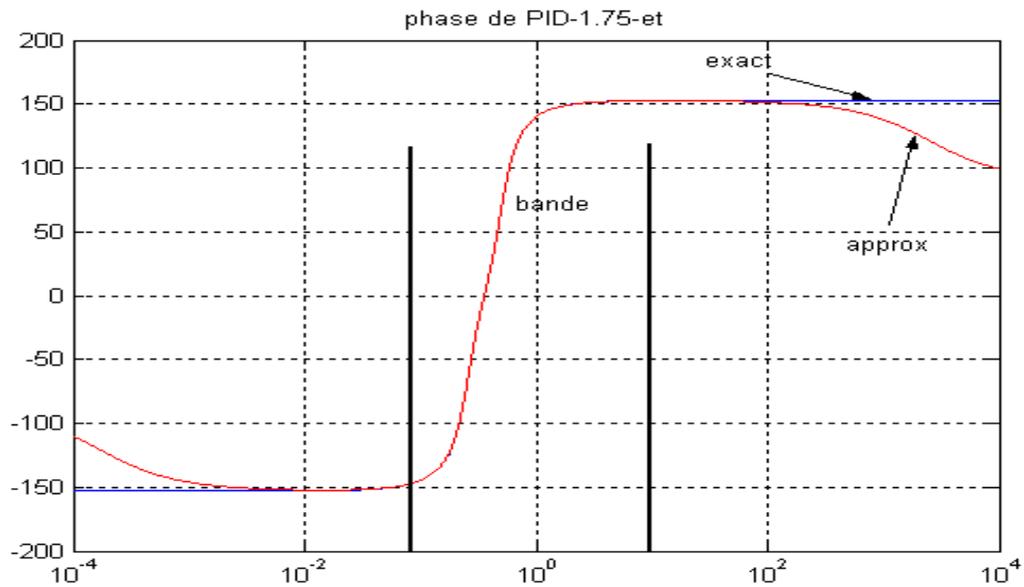
On obtient la fonction de transfert rationnelle suivante :

$$C(p) = 2.4 + \frac{0.18}{p} \times \left\{ 415.9188 \frac{\prod_{i=0}^{14} \left[ 1 + \left( \frac{p}{4.6060 \times 10^{-4} (2.9936)^i} \right) \right]}{\prod_{i=0}^{15} \left[ 1 + \left( \frac{p}{2.1379 \times 10^{-4} (2.9936)^i} \right) \right]} \right\} + 6p \times \left\{ 0.0024 \frac{\prod_{i=0}^{15} \left[ 1 + \left( \frac{p}{2.1379 \times 10^{-4} (2.9936)^i} \right) \right]}{\prod_{i=0}^{15} \left[ 1 + \left( \frac{p}{4.6060 \times 10^{-4} (2.9936)^i} \right) \right]} \right\}$$

Les figures (II.8) et (II.9) représentent le tracé de Bode amplitude et phase de la fonction de transfert du  $PI^{1.7}D^{1.7}$  et son approximation rationnelle, en remarque la bonne approximation sur la bande  $[0.1, 10\text{rad/s}]$ .



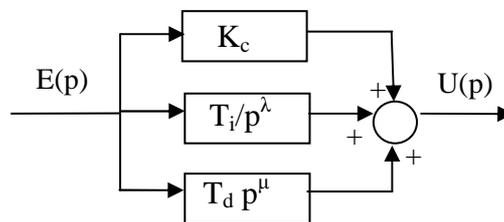
**Figure II.8 :** Tracé de Bode amplitude de  $PI^{1.7}D^{1.7}$  et son approximé.



**Figure II.9 :** Tracé de Bode phase de  $PI^{1.75}D^{1.75}$  et son approximé.

**II.5.3 Implémentation analogique du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  :**

La structure de  $PI^\lambda D^\mu$  est constituée d'une connections parallèle des trois actions, proportionnelle, intégrale et dériver, comme il est montrer par la figure suivante [8]:

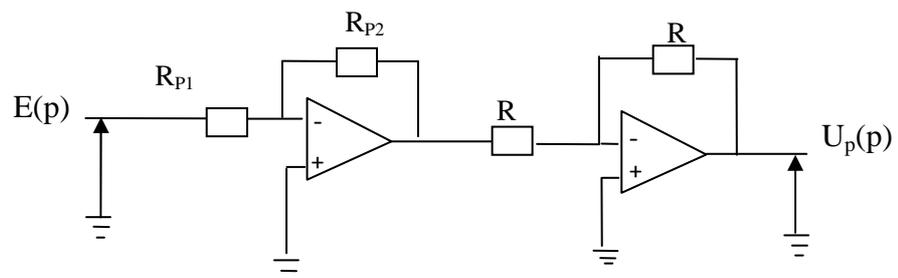


**Figure II.10 :** Structure du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$

Donc : 
$$C(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = \frac{U_p(p)}{E(p)} + \frac{U_I(p)}{E(p)} + \frac{U_D(p)}{E(p)} = k_c + \frac{T_i}{p^\lambda} + T_d p^\mu \tag{II.32}$$

Les 3 éléments du correcteur peuvent réaliser comme suite :

-l'action proportionnelle peut réaliser par un simple amplificateur comme représenter par la figure (II.11)



**Figure II.11 :** Réalisation analogique de l'action P.

Tell que :  $\frac{U_p(p)}{E(p)} = k_c = \frac{R_{p2}}{R_{p1}}$  ( $R_{p2}, R_{p1}$  sont des résistances). (II.33)

- l'action intégrale est donnée par le transfert suivant :

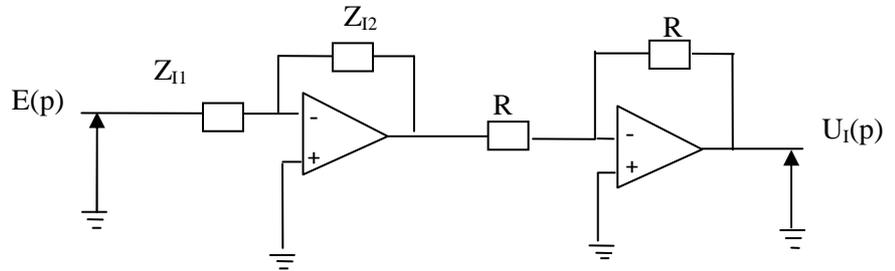
$$\frac{T_i}{p^\lambda} = \frac{T_i}{p} \left( K_I \frac{\prod_{i=0}^{N_I-1} (1+p/z_{I_i})}{\prod_{i=0}^{N_I} (1+p/p_{I_i})} \right) \quad (II.34)$$

Cette fonction rationnelle peut décomposer en élément simple, on obtient la fonction :

$$\frac{T_i}{p^\lambda} = \frac{T_i}{p} \left( \sum_{i=0}^{N_I} \frac{k_{I_i}}{(1+\frac{p}{p_{I_i}})} \right) \quad (II.35)$$

Ou les  $k_{I_i}$  peut calculer à partir de la section (I.4.2.1) formule (I.27).

L'intégrateur fractionnaire est implémenté sur un circuit analogique comme représenter sur la figure suivante:



**Figure II.12 :** Réalisation analogique de l'action  $I^\lambda$

Donc :  $\frac{U_I(p)}{E(p)} = \frac{T_i}{p^\lambda} = \frac{Z_{I2}}{Z_{I1}}$

tell que :  $Z_{I1} = \left(\frac{1}{T_i}\right) p = L_I p$  est l'impédance d'une bobine d'inductance  $L_I$ .

Et :  $Z_{I2} = \sum_{i=0}^{N_I} \frac{k_{I_i}}{(1+\frac{p}{p_{I_i}})} = \sum_{i=0}^{N_I} \frac{R_{I_i}}{(1+R_{I_i}C_{I_i}p)}$  est l'impédance du circuit de la fig (I.3).

Avec :  $R_{I_i} = k_{I_i}$  et :  $C_{I_i} = \frac{1}{k_{I_i}p}$

- l'action dériver est donnée par le transfert suivant :

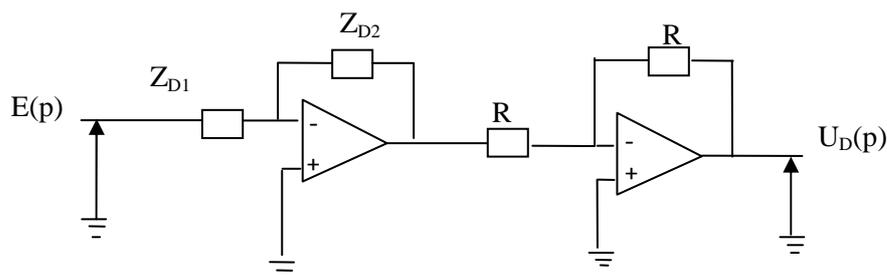
$$T_d p^\mu = T_d p \left( K_D \frac{\prod_{i=0}^{N_D} (1+p/z_{D_i})}{\prod_{i=0}^{N_D} (1+p/p_{D_i})} \right) \quad (II.36)$$

Cette fonction rationnelle peut décomposer en élément simple, on obtient la fonction :

$$T_d p^\mu = T_d p \left( G_D + \sum_{i=0}^{N_D} \frac{k_{D_i} p}{(1+\frac{p}{p_{D_i}})} \right) \quad (II.37)$$

Ou les  $k_{D_i}$  et  $G_D$  peut calculer à partir de la section (I.4.2.2) formule (37).

Le dérivateur fractionnaire est implémenté sur un circuit analogique comme représenter sur la figure suivante:



**Figure II.13** : Réalisation analogique de l'action  $D^\mu$ .

Donc : 
$$\frac{U_D(p)}{E(p)} = T_d p^\mu = \frac{Z_{D2}}{Z_{D1}}$$

tell que :  $Z_{D2} = T_d p = L_D p$  est l'impédance d'une bobine d'inductance

$$L_D = T_d. \quad (\text{II.38})$$

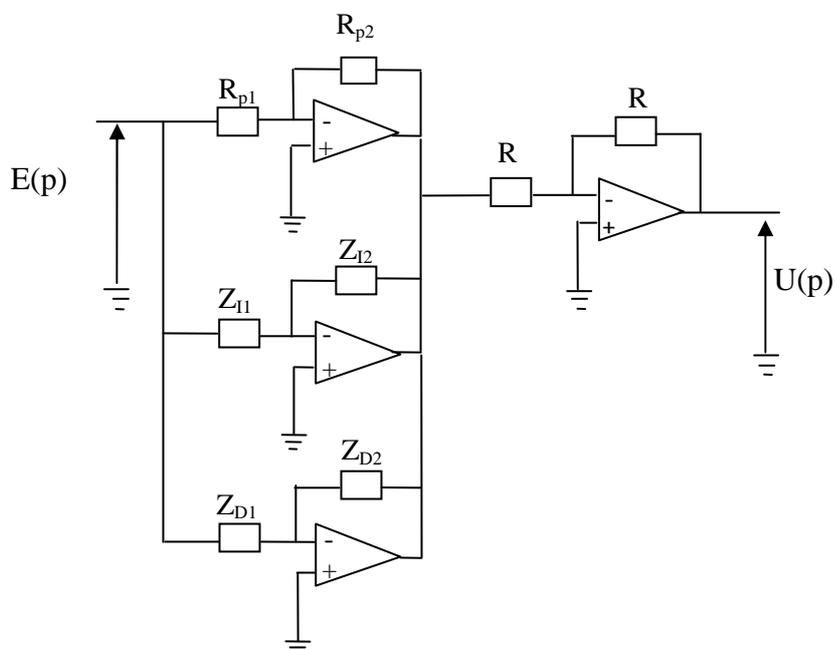
Et : 
$$\frac{1}{Z_{D1}} = Y_{D1}(p) = G_D + \sum_{i=0}^{N_D} \frac{k_{D_i} p}{(1 + \frac{p}{p_{D_i}})} = \frac{1}{R_D} + \sum_{i=0}^{N_D} \frac{C_{D_i} p}{(1 + R_{D_i} C_{D_i} p)} \quad (\text{II.39})$$

est l'admittance du circuit de la figure (I.4).

Avec : 
$$R_D = \frac{1}{G_D}, \quad C_{D_i} = k_{D_i} \quad (\text{II.40})$$

Et : 
$$R_{D_i} = \frac{1}{p_{D_i} k_{D_i}} \quad \text{pour } i=0, 1, \dots, N_D.$$

Alors après réalisation de l'action  $I^\lambda$  et  $D^\mu$  on peut facilement implémenter le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  comme représenter par la figure (II.14).



**Figure II.14** : Réalisation analogique du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$

## II.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques outils mathématiques de base utilisés pour la représentation et la simulation des systèmes d'ordre fractionnaire ainsi que les performances caractéristiques de système oscillatoire fondamental d'ordre fractionnaire puis introduit la notion de la boucle idéal de Bode qui possède une propriété très importante (iso-amortissement), grâce à ces propriétés plusieurs chercheur [18],[19],[20] sont utilisée la fonction idéale de bode comme un modèle de référence en boucle ouvert pour la synthèse d'un lois de commande robuste. Après avoir une définition du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  qui est une généralisation du PID classique, une méthode d'approximation et de réalisation à l'aide des circuits analogiques à été présenté [8], les résultats obtenus montrent l'efficacité de la méthode d'approximation utilisée [7] et [8].

# Chapitre III

Réglage de Correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre  
Fractionnaire

## Réglage du Correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre Fractionnaire

### III.1 Introduction

Le correcteur PID est la technique la plus utilisée dans la commande des processus industriels pour des décennies. Les raisons majeures de son large acceptation en industrie sont son capacité de commander la majorité des processus, ces actions sont bien comprises et son implémentation est très simple. La conception et le réglage des correcteurs PID a été un sujet de recherche depuis le jour où Ziegler et Nichols ont présenté leur méthode en 1942 [21]. Bien que toutes les techniques existantes pour le réglage des paramètres du correcteur PID, un travail de recherche continu et intensif est encore en cours pour le rehaussement de la qualité et l'amélioration des performances de la commande.

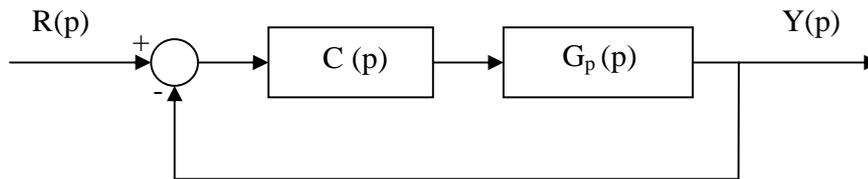
Récemment, Podlubny a proposé un correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire [2] qui est une généralisation du correcteur PID classique. L'intérêt pour ce type de correcteur est justifié par une meilleure flexibilité dans la conception de la commande puisqu'il a deux paramètres en plus qui sont les ordres fractionnaires des actions d'intégration et de dérivation. Ces paramètres peuvent être utilisés pour satisfaire des performances additionnelles dans la conception des systèmes asservis. Aujourd'hui, les chercheurs s'intéressent au développement des méthodes et techniques de réglage du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$ . Plusieurs méthodes ont été proposées tel que la technique basée sur la fonction transfert idéal de Bode proposée par Djouambi [20]. Cette technique consiste à fixer les ordres fractionnaires  $\lambda$  et  $\mu$  à partir du comportement fréquentielle de la commande en boucle ouverte puis l'estimation des autres paramètres par l'algorithme du moindre carré. Une méthode proposée par Monje [22] qui est basée sur la formulation du problème de commande et de robustesse en un problème d'optimisation en cinq inconnus qui sont les cinq paramètres du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire. Une amélioration de la méthode précédente a été proposée par Valerio [23] où une solution analytique du problème de commande et de robustesse du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  a été déterminée à partir de la réponse indicielle du processus en s'inspirant de la technique de Ziegler et Nichols pour le PID classique.

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode de réglage du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  en se basant sur la méthode proposée dans [24] pour le réglage du correcteur PID classique. Cette technique utilise la réponse impulsionnelle du processus à asservir supposé stable et elle ne nécessite aucune approximation du processus par un modèle. Les cinq paramètres du correcteur

$PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire sont conçus tel que le système en boucle fermée soit équivalent à un système désiré. Le système désiré utilisé dans ce chapitre est présenté ainsi que ses caractéristiques dans le chapitre précédent.

### III.2 Formulation du problème

Considérons le système de commande classique à retour unitaire montré sur la figure (III.1). Où,  $G_p(p)$  est la fonction de transfert du processus et  $C(p)$  est la fonction de transfert du correcteur.



**Figure III.1 :** Système asservi classique à retour unitaire.

Le processus est considéré comme un système stable dont la fonction de transfert  $G_p(s)$  est supposée inconnue.  $C(p)$  est la fonction de transfert du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire défini comme suit:

$$C(p) = K_c + \frac{T_I}{p^\lambda} + T_D p^\mu \quad (\text{III.1})$$

Où  $K_c$ ,  $T_I$ ,  $T_D$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  sont les paramètres du correcteur d'ordre fractionnaire. La fonction de transfert du système en boucle fermée de ce système est donnée par  $G_A(p)$  comme :

$$G_A(p) = \frac{Y(p)}{R(p)} = \frac{C(p)G_p(p)}{1 + C(p)G_p(p)} \quad (\text{III.2})$$

Le problème de conception de ce système asservi est donc de régler les cinq paramètres du correcteur d'ordre fractionnaire  $C(p)$  pour garantir que la fonction de transfert en boucle fermée se comporte comme un système de référence qui lui-même répond aux spécifications du cahier de charge du système asservi projeté. Le système de référence est lui aussi choisi comme un système d'ordre fractionnaire dont la fonction de transfert  $G_d(p)$  est donnée comme suit :

$$G_d(p) = \frac{1}{1 + \left(\frac{p}{\omega_u}\right)^m} \quad (\text{III.3})$$

où  $1 < m < 2$  et  $\omega_u$  est de la fréquence du gain unité. Les paramètres  $m$  et  $\omega_u$  sont choisis pour que ce système de référence répond aux spécifications du cahier de charge du système asservi projeté. Alors, l'objectif de cette conception se résume tout simplement au réglage des cinq paramètres du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire pour satisfaire la condition  $G_A(p) \cong G_d(p)$ .

### III.3 Présentation de la méthode

#### III.3.1 Principe de la méthode

La fonction de transfert  $G_A(p)$  du système en boucle fermée de l'équation (III.2) et la fonction de transfert  $G_d(p)$  du système de référence de l'équation (III.3) peuvent être développée en série de Taylor-Maclaurin au tour de la fréquence du gain unité  $\omega_u$  comme suit :

$$G_A(p) = G_A(\omega_u) + (p - \omega_u)G_A^{(1)}(\omega_u) + \frac{(p - \omega_u)^2}{2!}G_A^{(2)}(\omega_u) + \frac{(p - \omega_u)^3}{3!}G_A^{(3)}(\omega_u) + \dots \quad (III.4)$$

$$G_d(p) = G_d(\omega_u) + (p - \omega_u)G_d^{(1)}(\omega_u) + \frac{(p - \omega_u)^2}{2!}G_d^{(2)}(\omega_u) + \frac{(p - \omega_u)^3}{3!}G_d^{(3)}(\omega_u) + \dots \quad (III.5)$$

où  $G_A^{(i)}(p)$  et  $G_d^{(i)}(p)$  sont, respectivement, les  $i^{\text{ème}}$  dérivées des fonctions  $G_A(p)$  et  $G_d(p)$  par rapport à la variable  $p$ . Comme notre objectif est de satisfaire la condition  $G_A(p) \cong G_d(p)$ , alors par comparaison des équations (III.4) et (III.5) on aura :

$$\begin{cases} G_A(\omega_u) = G_d(\omega_u) \\ G_A^{(1)}(\omega_u) = G_d^{(1)}(\omega_u) \\ G_A^{(2)}(\omega_u) = G_d^{(2)}(\omega_u) \\ G_A^{(3)}(\omega_u) = G_d^{(3)}(\omega_u) \\ G_A^{(4)}(\omega_u) = G_d^{(4)}(\omega_u) \end{cases} \quad (III.6)$$

Alors, la conception du système asservi se résume au réglage des paramètres du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire pour satisfaire les cinq égalités de l'équation (III.6).

#### III.3.2 Calcul des valeurs des fonctions $G_d^{(i)}(\omega_u)$

La fonction de transfert  $G_d(p)$  du système de référence est donné dans l'équation (III.3) par :

$$G_d(p) = \frac{1}{1 + \left(\frac{p}{\omega_u}\right)^m}$$

Ces dérivées  $G_d^{(i)}(\omega_u)$ , pour  $0 \leq i \leq 4$ , par rapport à la variable  $p$  au point  $\omega_u$  sont données par :

$$\begin{aligned}
 G_d(\omega_u) &= \theta_0 = \frac{1}{2} \\
 G_d^{(1)}(\omega_u) &= \theta_1 = -\frac{m}{4\omega_u} \\
 G_d^{(2)}(\omega_u) &= \theta_2 = \frac{m}{4\omega_u^2} \\
 G_d^{(3)}(\omega_u) &= \theta_3 = \frac{m(m^2 - 4)}{8\omega_u^3} \\
 G_d^{(4)}(\omega_u) &= \theta_4 = -\frac{3m(m^2 - 2)}{4\omega_u^4}
 \end{aligned} \tag{III.7}$$

### III.3.3 Calcul des fonctions $C^{(i)}(\omega_u)$ et de $G_o^{(i)}(\omega_u)$

La fonction de transfert  $C(p)$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  est donné dans l'équation (III.1) par :

$$C(p) = K_c + \frac{T_I}{p^\lambda} + T_D p^\mu$$

Ces dérivées  $C^{(i)}(\omega_u)$ , pour  $0 \leq i \leq 4$ , par rapport à la variable  $p$  au point  $\omega_u$  sont données par :

$$\begin{aligned}
 C(\omega_u) &= X_0 = K_c + T_I \omega_u^{-\lambda} + T_D \omega_u^\mu \\
 C^{(1)}(\omega_u) &= X_1 = \frac{-\lambda T_I}{\omega_u} \omega_u^{-\lambda} + \frac{\mu T_D}{\omega_u} \omega_u^\mu \\
 C^{(2)}(\omega_u) &= X_2 = \frac{\lambda(\lambda+1)T_I}{\omega_u^2} \omega_u^{-\lambda} + \frac{\mu(\mu-1)T_D}{\omega_u^2} \omega_u^\mu \\
 C^{(3)}(\omega_u) &= X_3 = \frac{-\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)T_I}{\omega_u^3} \omega_u^{-\lambda} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)T_D}{\omega_u^3} \omega_u^\mu \\
 C^{(4)}(\omega_u) &= X_4 = \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)T_I}{\omega_u^4} \omega_u^{-\lambda} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)T_D}{\omega_u^4} \omega_u^\mu
 \end{aligned} \tag{III.8}$$

Les variables  $X_i$  ( $0 \leq i \leq 4$ ) sont fonction des paramètres  $K_c$ ,  $T_I$ ,  $T_D$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$ . Alors il suffit de calculer les cinq variables  $X_i$  ( $0 \leq i \leq 4$ ) pour obtenir les cinq paramètres du correcteur d'ordre fractionnaire.

La fonction de transfert en boucle ouverte du système asservi  $G_o(p)$  est obtenue à partir de la fonction de transfert en boucle fermée  $G_A(p)$ , donné dans l'équation (III.2), comme suit :

$$G_o(p) = C(p)G_p(p) = \frac{G_A(p)}{1-G_A(p)} \tag{III.9}$$

On dénote les dérivées  $G_p^{(i)}(\omega_u)$ , pour  $0 \leq i \leq 4$ , de la fonction  $G_p(p)$  par rapport à la variable  $p$  au point  $\omega_u$  par :

$$\begin{aligned} G_p(\omega_u) &= Y_0 \\ G_p^{(1)}(\omega_u) &= Y_1 \\ G_p^{(2)}(\omega_u) &= Y_2 \\ G_p^{(3)}(\omega_u) &= Y_3 \\ G_p^{(4)}(\omega_u) &= Y_4 \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

En utilisant les équations (III.6), (III.7) et (III.10), les dérivées  $G_o^{(i)}(\omega_u)$ , pour  $0 \leq i \leq 4$ , de la fonction  $G_o(p)$  par rapport à la variable  $p$  au point  $\omega_u$  sont données par :

$$\begin{aligned} G_o(\omega_u) &= X_0 Y_0 = \frac{\theta_0}{1-\theta_0} \\ G_o^{(1)}(\omega_u) &= X_1 Y_0 + X_0 Y_1 = \frac{\theta_1}{(1-\theta_0)^2} \\ G_o^{(2)}(\omega_u) &= X_2 Y_0 + 2X_1 Y_1 + X_0 Y_2 = \frac{\theta_2}{(1-\theta_0)^2} + \frac{2\theta_1^2}{(1-\theta_0)^3} \\ G_o^{(3)}(\omega_u) &= X_3 Y_0 + 3X_2 Y_1 + 3X_1 Y_2 + X_0 Y_3 = \frac{\theta_3}{(1-\theta_0)^2} + \frac{6\theta_1\theta_2}{(1-\theta_0)^3} + \frac{6\theta_1^3}{(1-\theta_0)^4} \\ G_o^{(4)}(\omega_u) &= X_4 Y_0 + 4X_3 Y_1 + 6X_2 Y_2 + 4X_1 Y_3 + X_0 Y_4 = \frac{\theta_4}{(1-\theta_0)^2} + \frac{6\theta_2^2 + 8\theta_1\theta_3}{(1-\theta_0)^3} + \frac{36\theta_1^2\theta_2}{(1-\theta_0)^4} + \frac{24\theta_1^4}{(1-\theta_0)^5} \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

### III.3.4 Calcul des valeurs des fonctions $G_p^{(i)}(\omega_u)$

On a mentionné que dans cette technique le réglage du correcteur PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> utilise la réponse impulsionnelle du processus à asservir supposé stable et elle ne nécessite aucune approximation du processus par un modèle. Alors on a besoin de calculer les valeurs des fonctions  $G_p^{(i)}(\omega_u)$ , pour  $0 \leq i \leq 4$ , en fonction de sa réponse impulsionnelle.

La fonction de transfert du processus  $G_p(p)$  peut être obtenue à partir de sa réponse impulsionnelle par :

$$G_p(p) = \int_0^{+\infty} g_p(t) e^{-pt} dt \quad (\text{III.12})$$

Le développement en série de Taylor-Maclaurin de la fonction exponentielle  $e^{-pt}$  au tour de la fréquence du gain unité  $\omega_u$  est donné par :

$$e^{-pt} = \left( e^{-\omega_u t} - (p - \omega_u)(t e^{-\omega_u t}) + \frac{(p - \omega_u)^2}{2!} t^2 e^{-\omega_u t} - \frac{(p - \omega_u)^3}{3!} t^3 e^{-\omega_u t} + \dots \right) \quad (\text{III.13})$$

Alors, la fonction de transfert du processus  $G_p(p)$  sera :

$$\begin{aligned} G_p(p) &= \int_0^{+\infty} g_p(t) \left( e^{-\omega_u t} - (p - \omega_u)(t e^{-\omega_u t}) + \frac{(p - \omega_u)^2}{2!} t^2 e^{-\omega_u t} - \frac{(p - \omega_u)^3}{3!} t^3 e^{-\omega_u t} + \dots \right) dt \\ G_p(p) &= \int_0^{+\infty} (g_p(t) e^{-\omega_u t}) dt + (p - \omega_u) \left\{ \int_0^{+\infty} (-t g_p(t) e^{-\omega_u t}) dt \right\} + \\ &\quad \frac{(p - \omega_u)^2}{2!} \left\{ \int_0^{+\infty} (t^2 g_p(t) e^{-\omega_u t}) dt \right\} + \frac{(p - \omega_u)^3}{3!} \left\{ \int_0^{+\infty} (-t^3 g_p(t) e^{-\omega_u t}) dt \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Le développement en série de Taylor-Maclaurin de la fonction  $G_p(p)$  elle-même au tour de la fréquence du gain unité  $\omega_u$  est donné par :

$$G_p(p) = G_p(\omega_u) + (p - \omega_u) G_p^{(1)}(\omega_u) + \frac{(p - \omega_u)^2}{2!} G_p^{(2)}(\omega_u) + \frac{(p - \omega_u)^3}{3!} G_p^{(3)}(\omega_u) + \dots \quad (\text{III.15})$$

Par identification des équations (III.14) et (III.15), on obtient donc :

$$\begin{aligned} Y_0 &= G_p(\omega_u) = \int_0^{+\infty} g_p(t) e^{-\omega_u t} dt \\ Y_1 &= G_p^{(1)}(\omega_u) = \int_0^{+\infty} -t g_p(t) e^{-\omega_u t} dt \\ Y_2 &= G_p^{(2)}(\omega_u) = \int_0^{+\infty} t^2 g_p(t) e^{-\omega_u t} dt \\ Y_3 &= G_p^{(3)}(\omega_u) = \int_0^{+\infty} -t^3 g_p(t) e^{-\omega_u t} dt \\ Y_4 &= G_p^{(4)}(\omega_u) = \int_0^{+\infty} t^4 g_p(t) e^{-\omega_u t} dt \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Comme on a considéré que le processus à asservir est stable alors on peut dire que lorsque  $t \rightarrow \infty$  on a  $g_p(t) \rightarrow 0$ . Le temps d'acquisition de la réponse impulsionnelle du processus  $T_{ac}$  est généralement choisi très supérieur au temps de réponse du processus. Donc l'équation (III.16) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
Y_0 &= G_p(\omega_u) = \sum_{k=0}^N g_p(kT) e^{-kT\omega_u} \\
Y_1 &= G_p^{(1)}(\omega_u) = - \sum_{k=0}^N (kT) g_p(kT) e^{-kT\omega_u} \\
Y_2 &= G_p^{(2)}(\omega_u) = \sum_{k=0}^N (kT)^2 g_p(kT) e^{-kT\omega_u} \\
Y_3 &= G_p^{(3)}(\omega_u) = - \sum_{k=0}^N (kT)^3 g_p(kT) e^{-kT\omega_u} \\
Y_4 &= G_p^{(4)}(\omega_u) = \sum_{k=0}^N (kT)^4 g_p(kT) e^{-kT\omega_u}
\end{aligned} \tag{III.17}$$

Où  $T$  est la période d'échantillonnage de la réponse impulsionnelle du processus et le nombre d'échantillons  $N = \text{partie entière } \{T_{ac}/T\}$ .

### III.3.5 Calcul des valeurs des variables $X_i$

Etant donné les valeurs des paramètres  $\theta_i$  de l'équations (III.7) et  $Y_i$  de l'équation (III.17), pour  $0 \leq i \leq 4$ , les valeurs des variables  $X_i$  peuvent être calculés successivement de l'équation (III.11) comme suit :

$$\begin{aligned}
X_0 &= \frac{\theta_0}{Y_0(1-\theta_0)} \\
X_1 &= \frac{\theta_1}{Y_0(1-\theta_0)^2} - \frac{X_0 Y_1}{Y_0} \\
X_2 &= \frac{\theta_2}{Y_0(1-\theta_0)^2} + \frac{2\theta_1^2}{Y_0(1-\theta_0)^3} - \frac{2X_1 Y_1 + X_0 Y_2}{Y_0} \\
X_3 &= \frac{\theta_3}{Y_0(1-\theta_0)^2} + \frac{6\theta_1 \theta_2}{Y_0(1-\theta_0)^3} + \frac{6\theta_1^3}{Y_0(1-\theta_0)^4} - \frac{3X_2 Y_1 + 3X_1 Y_2 + X_0 Y_3}{Y_0} \\
X_4 &= \frac{\theta_4}{Y_0(1-\theta_0)^2} + \frac{6\theta_2^2 + 8\theta_1 \theta_3}{Y_0(1-\theta_0)^3} + \frac{36\theta_1^2 \theta_2}{Y_0(1-\theta_0)^4} + \frac{24\theta_1^4}{Y_0(1-\theta_0)^5} - \frac{4X_3 Y_1 + 6X_2 Y_2 + 4X_1 Y_3 + X_0 Y_4}{Y_0}
\end{aligned} \tag{III.18}$$

### III.3.6 Calcul des valeurs des paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$

Une fois les variables  $X_i$ , pour  $0 \leq i \leq 4$ , sont calculés les paramètres  $K_c$ ,  $T_I$ ,  $T_D$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  peuvent être calculés. On dénote par  $Q_1$  et  $Q_2$  les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{-\lambda}{\omega_u} T_I \omega_u^{-\lambda} \\ Q_2 &= \frac{\mu}{\omega_u} T_D \omega_u^\mu \end{aligned} \quad (III.19)$$

En utilisant l'équation (III.8) on peut donc avoir :

$$\begin{aligned} X_0 &= K_c + T_I \omega_u^{-\lambda} + T_D \omega_u^\mu \\ X_1 &= Q_1 + Q_2 \\ X_2 &= -(\lambda + 1) \frac{Q_1}{\omega_u} + (\mu - 1) \frac{Q_2}{\omega_u} \\ X_3 &= (\lambda + 1)(\lambda + 2) \frac{Q_1}{\omega_u^2} + (\mu - 1)(\mu - 2) \frac{Q_2}{\omega_u^2} \\ X_4 &= -(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) \frac{Q_1}{\omega_u^3} + (\mu - 1)(\mu - 2)(\mu - 3) \frac{Q_2}{\omega_u^3} \end{aligned} \quad (III.20)$$

Par manipulation de l'équation (III.20), on peut écrire :

$$\begin{aligned} X_0 &= K_c + T_I \omega_u^{-\lambda} + T_D \omega_u^\mu \\ X_1 &= Q_1 + Q_2 \\ Z_1 &= X_1 + \omega_u X_2 = -\lambda Q_1 + \mu Q_2 \\ Z_2 &= X_1 + 3\omega_u X_2 + \omega_u^2 X_3 = \lambda^2 Q_1 + \mu^2 Q_2 \\ Z_3 &= X_1 + 7\omega_u X_2 + 6\omega_u^2 X_3 + \omega_u^3 X_4 = -\lambda^3 Q_1 + \mu^3 Q_2 \end{aligned} \quad (III.21)$$

Comme les variables  $Z_i$ , pour  $1 \leq i \leq 3$ , dépendent uniquement des variables  $X_i$ , pour  $0 \leq i \leq 4$ , et la fréquence du gain unité  $\omega_u$ , on peut encore écrire :

$$\begin{aligned} X_0 &= K_c + T_I \omega_u^{-\lambda} + T_D \omega_u^\mu \\ X_1 &= Q_1 + Q_2 \\ \lambda X_1 + Z_1 &= (\lambda + \mu) Q_2 \\ \lambda Z_1 + Z_2 &= \mu(\lambda + \mu) Q_2 \\ \lambda Z_2 + Z_3 &= \mu^2(\lambda + \mu) Q_2 \end{aligned} \quad (III.22)$$

Des trois dernières égalités de l'équation (III.23), on peut trouver que :

$$\mu = \frac{\lambda Z_1 + Z_2}{\lambda X_1 + Z_1} = \frac{\lambda Z_2 + Z_3}{\lambda Z_1 + Z_2} \quad (III.23)$$

Enfin on aboutit à une équation du second ordre dont la variable est le paramètre  $\lambda$  comme suit :

$$(Z_1^2 - X_1 Z_2) \lambda^2 + (Z_1 Z_2 - X_1 Z_3) \lambda + (Z_2^2 - Z_1 Z_3) = 0 \quad (III.24)$$

En résolvant cette équation on peut avoir une valeur du paramètre  $\lambda$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$ . Une fois ce premier paramètre  $\lambda$  calculé on peut alors tirer successivement tous les autres paramètres restants  $K_c$ ,  $T_I$ ,  $T_D$  et  $\mu$ . Donc le paramètre  $\mu$  est facilement calculé de l'équation (III.23) par :

$$\mu = \frac{\lambda Z_1 + Z_2}{\lambda X_1 + Z_1} \quad (III.25)$$

Des équations (III.19) et (III.22), les quantités  $Q_1$  et  $Q_2$  sont égaux aux :

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{\mu}{\omega_u} T_D \omega_u^\mu = \frac{\lambda X_1 + Z_1}{(\lambda + \mu)} \\ Q_1 &= \frac{-\lambda}{\omega_u} T_I \omega_u^{-\lambda} = X_1 - Q_2 = \frac{\mu X_1 - Z_1}{(\lambda + \mu)} \end{aligned} \quad (III.26)$$

Donc, les deux paramètres  $T_I$  et  $T_D$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} T_D &= \frac{(\lambda X_1 + Z_1) \omega_u^{(1-\mu)}}{[\mu(\lambda + \mu)]} \\ T_I &= -\frac{(\mu X_1 - Z_1) \omega_u^{(1+\lambda)}}{[\lambda(\lambda + \mu)]} \end{aligned} \quad (III.27)$$

Enfin, le paramètre  $K_c$  peut être obtenu de l'équation (III.22) comme suit :

$$K_c = X_0 - T_I \omega_u^{-\lambda} - T_D \omega_u^\mu \quad (III.28)$$

### III.4 Algorithme de réglage des paramètres du correcteur

#### III.4.1 Correcteur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ :

Pour le réglage des paramètres  $K_c$ ,  $T_I$ ,  $T_D$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur d'ordre fractionnaire  $C(p) = PI^\lambda D^\mu$  du système asservi de la figure (III.1) afin que sa fonction de transfert en boucle fermée se comporte comme un modèle de référence qui répond aux spécifications du cahier de charge du système asservi projeté :

#### Données :

- La fréquence du gain unité  $\omega_u$  du modèle de référence de l'équation (III.3)
- L'ordre fractionnaire de dérivation  $m$  du modèle de référence de l'équation (III.3)
- Les valeurs de la réponse impulsionnelle du processus  $g_p(kT)$ , pour  $0 \leq k \leq N$
- Le nombre d'échantillons  $N = \text{partie entière} \{T_{ac}/T\}$ , avec  $T_{ac}$  = temps d'acquisition et  $T$  = période d'échantillonnage de la réponse impulsionnelle du processus

**Sortie :** Valeurs des cinq paramètres  $K_c$ ,  $T_I$ ,  $T_D$ ,  $\lambda$  et  $\mu$

**Etape 1 :** Calculer les variables  $\theta_i$ , pour  $0 \leq i \leq 4$ , de l'équation (III.7)

$$\begin{aligned}\theta_0 &= \frac{1}{2} \\ \theta_1 &= -\frac{m}{4\omega_u} \\ \theta_2 &= \frac{m}{4\omega_u^2} \\ \theta_3 &= \frac{m(m^2 - 4)}{8\omega_u^3} \\ \theta_4 &= -\frac{3m(m^2 - 2)}{4\omega_u^4}\end{aligned}$$

**Étape 2 :** Calculer les variables  $Y_i$ , pour  $0 \leq i \leq 4$ , de l'équation (III.17)

$$\begin{aligned}Y_0 &= \sum_{k=0}^N g_p(kT) e^{-kT\omega_u} \\ Y_1 &= -\sum_{k=0}^N (kT) g_p(kT) e^{-kT\omega_u} \\ Y_2 &= \sum_{k=0}^N (kT)^2 g_p(kT) e^{-kT\omega_u} \\ Y_3 &= -\sum_{k=0}^N (kT)^3 g_p(kT) e^{-kT\omega_u} \\ Y_4 &= \sum_{k=0}^N (kT)^4 g_p(kT) e^{-kT\omega_u}\end{aligned}$$

**Étape 3 :** Calculer les variables  $X_i$ , pour  $0 \leq i \leq 4$ , de l'équation (III.18)

$$\begin{aligned}X_0 &= \frac{\theta_0}{Y_0(1-\theta_0)} \\ X_1 &= \frac{\theta_1}{Y_0(1-\theta_0)^2} - \frac{X_0 Y_1}{Y_0} \\ X_2 &= \frac{\theta_2}{Y_0(1-\theta_0)^2} + \frac{2\theta_1^2}{Y_0(1-\theta_0)^3} - \frac{2X_1 Y_1 + X_0 Y_2}{Y_0} \\ X_3 &= \frac{\theta_3}{Y_0(1-\theta_0)^2} + \frac{6\theta_1\theta_2}{Y_0(1-\theta_0)^3} + \frac{6\theta_1^3}{Y_0(1-\theta_0)^4} - \frac{3X_2 Y_1 + 3X_1 Y_2 + X_0 Y_3}{Y_0} \\ X_4 &= \frac{\theta_4}{Y_0(1-\theta_0)^2} + \frac{6\theta_2^2 + 8\theta_1\theta_3}{Y_0(1-\theta_0)^3} + \frac{36\theta_1^2\theta_2}{Y_0(1-\theta_0)^4} + \frac{24\theta_1^4}{Y_0(1-\theta_0)^5} - \frac{4X_3 Y_1 + 6X_2 Y_2 + 4X_1 Y_3 + X_0 Y_4}{Y_0}\end{aligned}$$

**Étape 4 :** Calculer les variables  $Z_i$ , pour  $1 \leq i \leq 3$ , de l'équation (III.21)

$$Z_1 = X_1 + \omega_u X_2$$

$$Z_2 = X_1 + 3\omega_u X_2 + \omega_u^2 X_3$$

$$Z_3 = X_1 + 7\omega_u X_2 + 6\omega_u^2 X_3 + \omega_u^3 X_4$$

**Etape 5 :** Résoudre l'équation (III.24) du second ordre du paramètre  $\lambda$  suivante :

$$(Z_1^2 - X_1 Z_2) \lambda^2 + (Z_1 Z_2 - X_1 Z_3) \lambda + (Z_2^2 - X_1 Z_3) = 0$$

- Choisir la solution convenable ( $\lambda > 0$ )

**Etape 6 :** Calculer les paramètres  $\mu$ ,  $T_D$ ,  $T_I$  et  $K_c$  des équations (III.25), (III.27) et (III.28)

$$\mu = \frac{\lambda Z_1 + Z_2}{\lambda X_1 + Z_1}$$

$$T_D = \frac{(\lambda X_1 + Z_1) \omega_u^{(1-\mu)}}{[\mu(\lambda + \mu)]}, \quad T_I = -\frac{(\mu X_1 - Z_1) \omega_u^{(1+\lambda)}}{[\lambda(\lambda + \mu)]}$$

$$K_c = X_0 - T_I \omega_u^{-\lambda} - T_D \omega_u^\mu$$

### III.4.2 Correcteur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda$ :

Pour le réglage des paramètres  $K_c$ ,  $T_I$  et  $\lambda$  du correcteur d'ordre fractionnaire  $C(p) = PI^\lambda$  du système asservi de la figure (III.1) afin que sa fonction de transfert en boucle fermée se comporte comme un modèle de référence qui répond aux spécifications du cahier de charge du système asservi projeté :

#### **Données :**

- La fréquence du gain unité  $\omega_u$  du modèle de référence de l'équation (III.3)
- L'ordre fractionnaire de dérivation  $m$  du modèle de référence de l'équation (III.3)
- Les valeurs de la réponse impulsionnelle du processus  $g_p(kT)$ , pour  $0 \leq k \leq N$
- Le nombre d'échantillons  $N = \text{partie entière} \{T_{ac}/T\}$ , avec  $T_{ac}$  = temps d'acquisition et  $T$  = période d'échantillonnage de la réponse impulsionnelle du processus

**Sortie :** Valeurs des cinq paramètres  $K_c$ ,  $T_I$ , et  $\lambda$

**Etape 1 :** Calculer les variables  $\theta_i$ , pour  $0 \leq i \leq 2$ , de l'équation (III.7)

$$\theta_0 = \frac{1}{2}$$

$$\theta_1 = -\frac{m}{4\omega_u}$$

$$\theta_2 = \frac{m}{4\omega_u^2}$$

**Etape 2 :** Calculer les variables  $Y_i$ , pour  $0 \leq i \leq 2$ , de l'équation (III.17)

$$Y_0 = \sum_{k=0}^N g_p(kT) e^{-kT\omega_u}$$

$$Y_1 = -\sum_{k=0}^N (kT) g_p(kT) e^{-kT\omega_u}$$

$$Y_2 = \sum_{k=0}^N (kT)^2 g_p(kT) e^{-kT\omega_u}$$

**Etape 3 :** Calculer les variables  $X_i$ , pour  $0 \leq i \leq 2$ , de l'équation (III.18)

$$X_0 = \frac{\theta_0}{Y_0(1-\theta_0)}$$

$$X_1 = \frac{\theta_1}{Y_0(1-\theta_0)^2} - \frac{X_0 Y_1}{Y_0}$$

$$X_2 = \frac{\theta_2}{Y_0(1-\theta_0)^2} + \frac{2\theta_1^2}{Y_0(1-\theta_0)^3} - \frac{2X_1 Y_1 + X_0 Y_2}{Y_0}$$

**Etape 4 :** Calculer les paramètres  $\lambda$ ,  $T_1$  et  $K_c$  comme suit :

$$\lambda = -\frac{\omega_u X_2}{X_1} - 1$$

$$T_1 = -\frac{\omega_u^{(1+\lambda)} X_1}{\lambda}$$

$$K_c = X_0 - T_1 \omega_u^{-\lambda}$$

### III.5 Exemples illustratifs :

Après avoir présenté la nouvelle technique pour le réglage du  $PI^\lambda D^\mu$ , nous allons valider cette méthode pour quelques exemples. Pour l'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire on a utilisé l'approximation de Charef [8] et concernant le model de référence on a utilisé le système fondamental d'ordre fractionnaire obtenu par Charef [7].

**III.5.1 Exemple 1**

Comme premier exemple on considère la conception du système asservi à retour unitaire dont la fonction de transfert du processus est donnée comme suit [4] :

$$G_p(p) = \frac{0.55}{62p+1}$$

Le correcteur  $C(p)$  utilisé dans ce cas est un correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire. Le système asservi projeté (boucle fermée) doit garantir les spécifications suivantes :

- Fréquence du gain unité  $\omega_u = 1$  rad/s
- Marge de phase  $\varphi_m = 80^\circ$

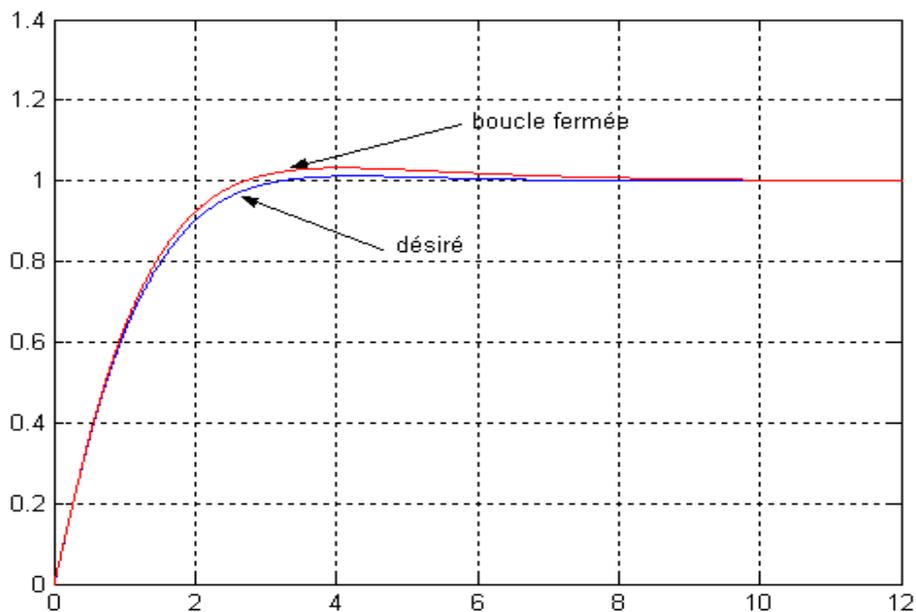
Le modèle de référence qui répond à ces spécifications est donné par :

$$G_d(p) = \frac{1}{1+p^{1.11}}$$

Le correcteur  $PI^\lambda$  d'ordre fractionnaire obtenu est donné par :

$$C(p) = 50.1701 + \frac{64.0849}{p^{0.2308}}$$

Figure (III.2) représente la réponse indicielle du système asservi projeté en boucle fermée et du model de référence  $G_d(p)$ .



**Figure III.2 :** Réponse indicielle du système asservi projeté et du model de référence

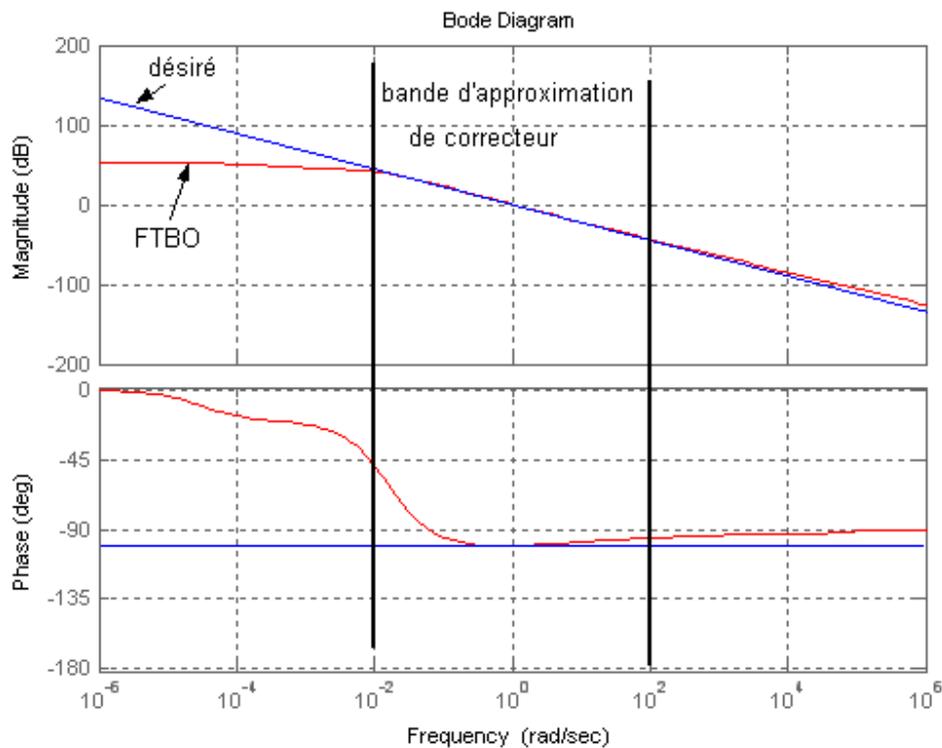
La fonction de transfert en boucle ouverte du système asservi projeté  $G_o(p)$  est donnée par :

$$G_o(p) = C(p)G_p(p) = \left( 50.1701 + \frac{64.0849}{p^{0.2308}} \right) \left( \frac{0.55}{62p+1} \right)$$

La fonction de transfert en boucle ouverte  $G_{do}(p)$  du model de référence  $G_d(p)$  est donné par la fonction de transfert idéale de Bode comme suit :

$$G_{do}(p) = \frac{1}{p^{1.11}}$$

Figure (III.3) représente Les tracés de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte du système asservi projeté et du model de référence.



**Figure III.3 :** Tracés de Bode des FTBO du système asservi projeté et du model de référence

A partir de la figure (III.2), on peut voir que la réponse indicielle du système asservi projeté (en boucle fermée) suit celle du model de référence. A partir de la figure (III.3), le système asservi projeté (en boucle fermée) a une fréquence du gain unité  $\omega_u = 0.997$  rad/s et une marge de phase  $\phi_m = 79^\circ$ . Et on remarque aussi que dans la plage de fréquence  $[0.1\omega_u, 10\omega_u]$ , la fonction de transfert du système asservi projeté se comporte comme celle du model de référence.

### III.5.2 Exemple 2

Comme second exemple on considère la conception du système asservi à retour unitaire dont la fonction de transfert du processus est donnée comme suit [25] :

$$G_p(p) = \frac{0.25}{p(p+1)}$$

Le correcteur  $C(p)$  utilisé dans ce cas est un correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire. Le système asservi projeté (boucle fermée) doit garantir les spécifications suivantes :

- Fréquence du gain unité  $\omega_u = 1$  rad/s
- Marge de phase  $\varphi_m = 48.5^\circ$

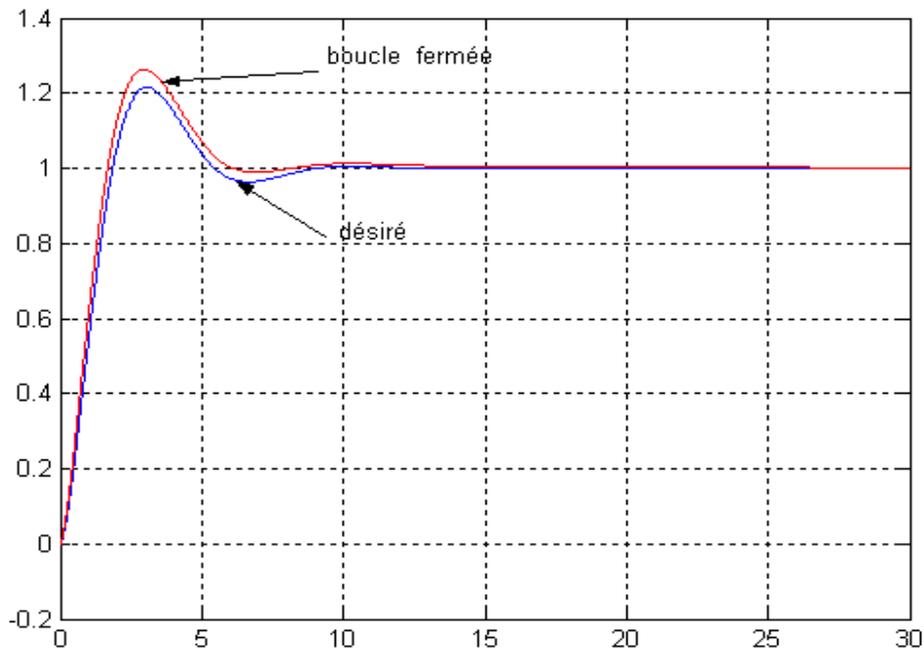
Le modèle de référence qui répond à ces spécifications est donné par :

$$G_d(p) = \frac{1}{1+p^{1.46}}$$

Le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire obtenu est donné par :

$$C(p) = 0.0059 + \frac{3.9970}{p^{0.4613}} + 3.9971 p^{0.5391}$$

Figure (III.4) représente la réponse indicielle du système asservi projeté en boucle fermée et du model de référence  $G_d(p)$ .



**Figure III.4 :** Réponse indicielle du système asservi projeté et du model de référence

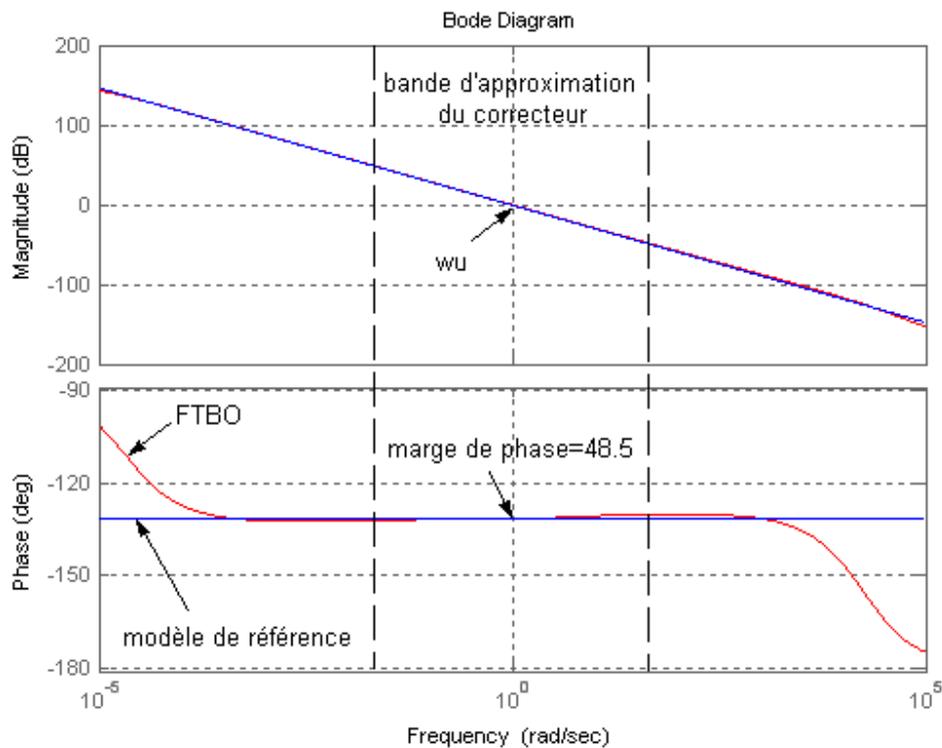
La fonction de transfert en boucle ouverte du système asservi projeté  $G_o(p)$  est donnée par :

$$G_o(p) = C(p)G_p(p) = \left( 0.0059 + \frac{3.9970}{p^{0.4613}} + 3.9971p^{0.5391} \right) \left( \frac{0.25}{p(p+1)} \right)$$

La fonction de transfert en boucle ouverte  $G_{do}(p)$  du model de référence  $G_d(p)$  est donné par la fonction de transfert idéale de Bode comme suit :

$$G_{do}(p) = \frac{1}{p^{1.46}}$$

Figure (III.5) représente Les tracés de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte du système asservi projeté et du model de référence.



**Figure III.5 :** Tracés de Bode des FTBO du système asservi projeté et du modèle de référence

A partir de la figure (III.4), on peut voir que la réponse indicielle du système asservi projeté (en boucle fermée) suit celle du model de référence. A partir de la figure (III.5), le système asservi projeté (en boucle fermée) a une fréquence du gain unité  $\omega_u = 1.01$  rad/s et une marge de phase  $\phi_m = 48.46$ . Et on remarque aussi que la fonction de transfert du système asservi projeté se comporte comme celle du model de référence pour une très large bande fréquentielle.

**III.6 Conclusion :**

Une technique de réglage du correcteur d'ordre fractionnaire  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  a été présentée. La technique a été exposée en détail. Cette technique utilise la réponse impulsionnelle du processus à asservir supposé stable et elle ne nécessite aucune approximation du processus par un modèle. Les cinq paramètres ont été calculés analytiquement à partir de la réponse du processus ainsi que les paramètres du modèle de référence. Des exemples ont été faits pour la validation de la méthode de réglage proposée. Les résultats obtenus ont été excellents.

# Chapitre IV

Commande du moteur à courant continu

## Commande du moteur à courant continu

### IV.1 Introduction

Comme application on a choisi la commande d'un moteur à courant continu. L'objectif de ce chapitre est d'utiliser le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire dans la commande en position du moteur à courant continu. Une étude de la robustesse du système asservi en boucle fermée vis-à-vis des paramètres du moteur a été faite. Les résultats de la robustesse obtenus ont été aussi comparés à ceux du système asservi en boucle fermée lorsque le moteur à courant continu est commandé par un correcteur PID classique.

### IV.2 Modélisation du moteur à courant continu:

Un moteur à courant continu est un convertisseur d'énergie qui transforme de l'énergie électrique en énergie mécanique. C'est un grand classique des concours car il permet d'actionner une partie opérative en commandant la vitesse ou position de sortie. Ces moteurs sont utilisés dans de très larges domaines d'application et peuvent développer des puissances de Quelques watts à plusieurs dizaines de mégawatts. Ils sont constitués d'un bobinage ou aimant permanent fixe (excitation) créant un champ magnétique fixe ainsi que d'un circuit induit placé sur le rotor et alimenté électriquement par des balais glissants sur un collecteur. Ce système permet ce créer un couple magnétique sur le rotor. Les moteurs à courant continu interviennent souvent comme organe d'action dans le domaine des asservissements. On trouve principalement deux types de commande [28]:

- Commande à flux constant par la tension d'induit variable (le cas étudié).
- Commande à courant d'induit constant par le flux d'induit variable.

Dans ce contexte, on considère un moteur à courant continu à excitation indépendante comme celui schématisé sur la figure (IV.1).

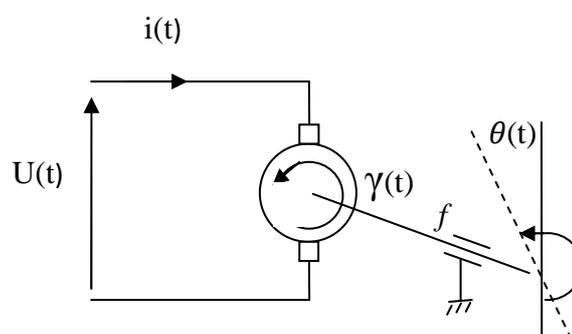
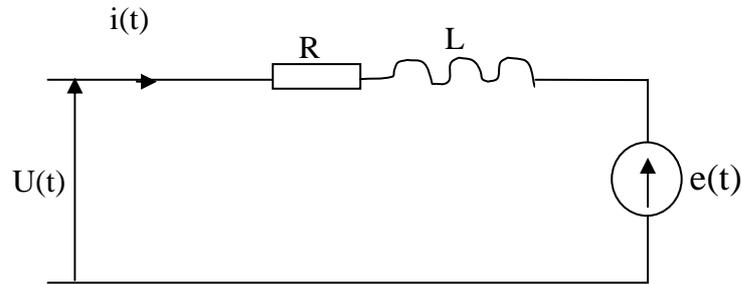


Figure IV.1 : Moteur à courant continu.

L'induit est modélisé de la manière suivante (en régime permanent, pas d'effet de la part de l'inductance) [27].



**Figure IV.2 :** Schéma d'un moteur à courant continu

L'équation électrique, liant la tension  $u(t)$  aux bornes de l'induit (rotor) et le courant d'induit  $i(t)$  s'écrit :

$$R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) = u(t) \quad (\text{IV.1})$$

Où  $R$  est la résistance de l'induit du moteur,  $L$  son inductance et  $e(t)$  la force électromotrice, qui est proportionnelle à la vitesse de rotation du rotor :

$$e(t) = K_e \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{IV.2})$$

L'équation mécanique tenant compte des couples agissant sur le rotor s'écrit :

$$\gamma(t) - f \frac{d\theta(t)}{dt} = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \quad (\text{IV.3})$$

Où  $\gamma(t)$  est le couple moteur,  $f$  le coefficient de frottement visqueux et  $J$  le moment d'inertie du rotor. Par construction, le couple  $\gamma(t)$  est proportionnel au courant d'induit  $i(t)$  :

$$\gamma(t) = K_m i(t) \quad (\text{IV.4})$$

En règle générale les coefficients  $K_e$  et  $K_m$  sont si proches qu'il est raisonnable de les considérer égaux, négligeant alors les pertes durant la conversion électromécanique de puissance. On pose  $K_{em} = K_e = K_m$ .

L'équation (IV.3) et (IV.4) donnent :

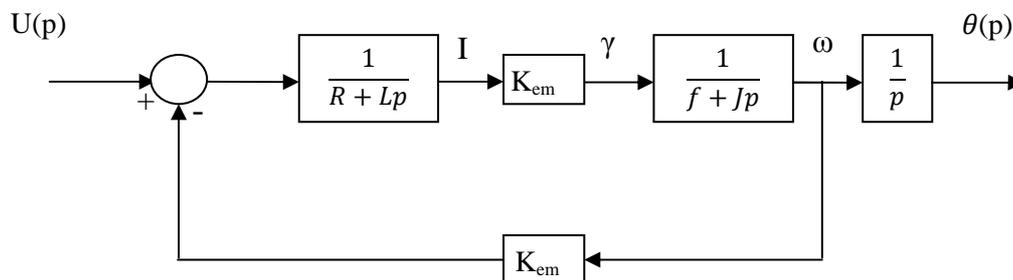
$$K_{em} i(t) = f \frac{d\theta(t)}{dt} + J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \quad (\text{IV.5})$$

Pour calculer la fonction de transfert, on utilise la transformée de Laplace, les conditions initiales sont supposées nulles.

$$(\text{IV.5}) \Rightarrow K_{em} I(p) = (Jp^2 + fp)\theta(p) \Rightarrow \theta(p) = \frac{K_{em}}{p(Jp+f)} I(p) \quad (\text{IV.6})$$

$$(\text{IV.1}) \Rightarrow U(p) = (R + Lp)I(p) + K_{em}p\theta(p) \Rightarrow I(p) = \frac{1}{(R+Lp)} (U(p) - K_{em}p\theta(p)) \quad (\text{IV.7})$$

A partir des relations (IV.6) et (IV.7) on peut déduire le schéma fonctionnel suivant pour le moteur à courant continu commandé par l'induit :



**Figure IV.3** : Schéma fonctionnel du moteur à courant continu

On notera la présence d'une boucle de contre-réaction intrinsèque au fonctionnement de cette machine due à la force électromotrice.

A partir de la figure (IV.3) on obtient la fonction de transfert du moteur à courant continu :

$$G(p) = \frac{\theta(p)}{U(p)} = \frac{\frac{K_{em}}{Rf + K_{em}^2}}{p \left[ 1 + \frac{RJ + Lf}{Rf + K_{em}^2} p + \frac{LJ}{Rf + K_{em}^2} p^2 \right]}$$

En général, pour un moteur à courant continu, on suppose que la self-inductance est négligeable et  $Rf \ll K_{em}^2$ , alors la fonction de transfert se réduit à [28]:

$$G(p) = \frac{\theta(p)}{U(p)} = \frac{K}{p[1 + \tau_m p]} \quad (IV.8)$$

$$\text{Avec :} \quad K = \frac{1}{K_{em}} \quad \text{et} \quad \tau_m = \frac{RJ}{K_{em}^2} \quad (IV.9)$$

$\tau_m$  : est la constante de temps électromécanique du moteur.

### Remarque

-Pour une application pratique le concepteur doit faire l'acquisition du signal de la réponse impulsionnelle puis appliquer directement la méthode décrite dans la section (III.4.1), donc on n'a pas besoin du modèle du moteur, mais puisque on fait seulement une simulation on a utilisé le modèle pour récupérer la réponse impulsionnelle et pour la simulation du système en boucle fermée.

-En pratique l'implémentation de la commande du moteur à courant continu nécessite l'utilisation d'un convertisseur continu-continu (hacheur) [27], dans cette application en vas pas prendre en compte la présence de ce dernier, notre objectif est l'étude de la commande d'ordre fractionnaire

sur un système dynamique et la validation de la méthode de réglage proposée.

### IV.3 Synthèse du correcteur

#### IV.3.1 Cahier des Charges

Considérons la fonction de transfert nominale d'un moteur à courant continu donné par [18]:

$$G(p) = \frac{16.89}{p \left[1 + \frac{p}{50}\right]} \quad (\text{IV.10})$$

Le système asservi projeté doit garantir les spécifications suivantes :

- la pulsation du gain unité en boucle ouvert  $\omega_u = 500 \text{ rad/sec}$
- marge de phase  $\varphi_m = 45$

Le modèle d'ordre fractionnaire de référence qui répond à ces spécifications est donné par :

$$G(p) = \frac{1}{1 + \left(\frac{p}{500}\right)^{1.5}} \quad (\text{IV.11})$$

Pour une étude comparative on va utiliser un correcteur de type PID classique proposé par Oustaloup [18], le correcteur PID est et définie par la fonction de transfert suivante :

$$C_{PID}(p) = 728.7 \frac{\left(1 + \frac{p}{4.0824}\right) \left(1 + \frac{p}{204.12}\right)}{\left(1 + \frac{p}{0.6804}\right) \left(1 + \frac{p}{1224.72}\right)} \quad (\text{IV.12})$$

#### IV.3.2 Résultat

Par l'application de la méthode proposée on obtient le  $PI^\lambda D^\mu$  suivant :

$$C(p) = 28.8342 + \frac{885.3888}{p^{0.6297}} + 11.1895 p^{0.5176} \quad (\text{IV.13})$$

Pour utiliser ce correcteur on doit approximer sa fonction de transfert par la méthode décrite dans la section (II.5.2) dans la bande fréquentielle  $[10^{-2}\omega_u \quad 10^2\omega_u] = [5 \quad 5000]$  rad/s, la fonction rationnelle résultante est donnée par :

$$\hat{C}(p) = 28.8342 + 8547.5 \frac{\prod_{i=0}^{21} \left(1 + \frac{p}{0.0214(2.5119)^i}\right)}{\prod_{i=0}^{22} \left(1 + \frac{p}{0.0135(2.5119)^i}\right)} + 1.0608 \frac{\prod_{i=0}^{21} \left(1 + \frac{p}{0.0132(2.5148)^i}\right)}{\prod_{i=0}^{21} \left(1 + \frac{p}{0.0212(2.5148)^i}\right)} \quad (\text{IV.14})$$

Les spécifications obtenues sont :

- $\varphi_m = 44.9^\circ$  et  $\omega_u = 500$  rad/sec par le correcteur fractionnaire (approximé  $\hat{C}(p)$ ).
- $\varphi_m = 50.9^\circ$  et  $\omega_u = 500$  rad/sec par le correcteur PID classique.

On remarque que les spécifications obtenues par le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  sont plus précise que celle obtenues par le PID classique. La figure (IV.4) représente le diagramme de Bode du système en boucle ouvert pour les deux correcteur ( $C(p)$  et  $C_{PID}(p)$ ) et la fonction idéale de Bode (désiré).

La figure (IV.5) représente la réponse temporelle du système en boucle fermée (avec le correcteur  $C(p)$ ) pour une consigne  $\theta_{ref}$  variable ( $10^\circ$ ,  $4^\circ$  et  $15^\circ$ ).

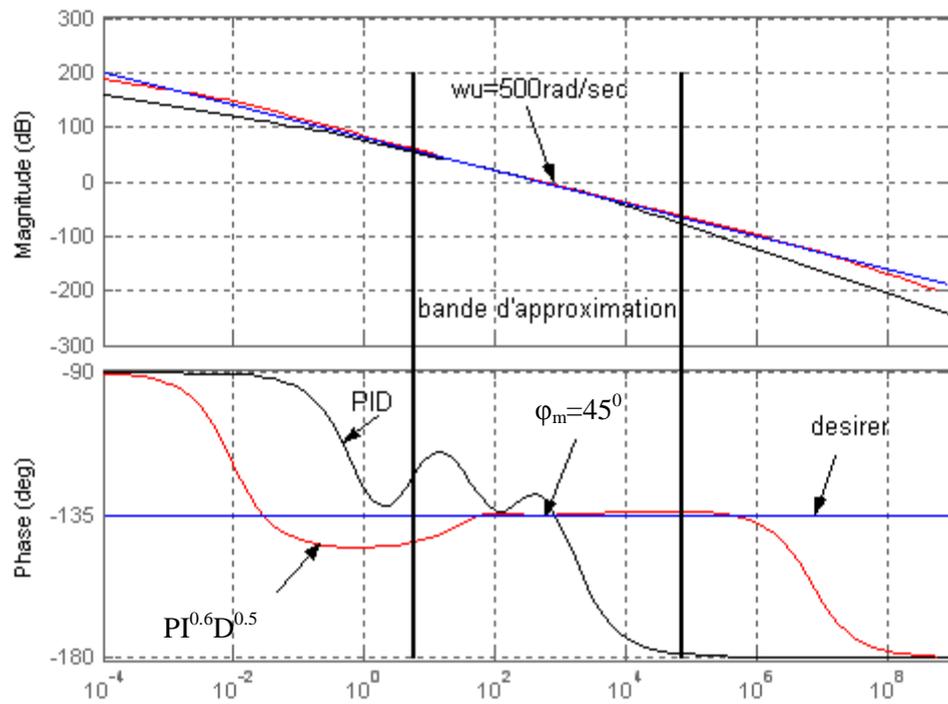


Figure IV.4 : Tracé de Bode de  $C_{PID}(p)G(p)$ ,  $C(p)G(p)$  et de  $\frac{1}{(\frac{p}{500})^{1.5}}$ .

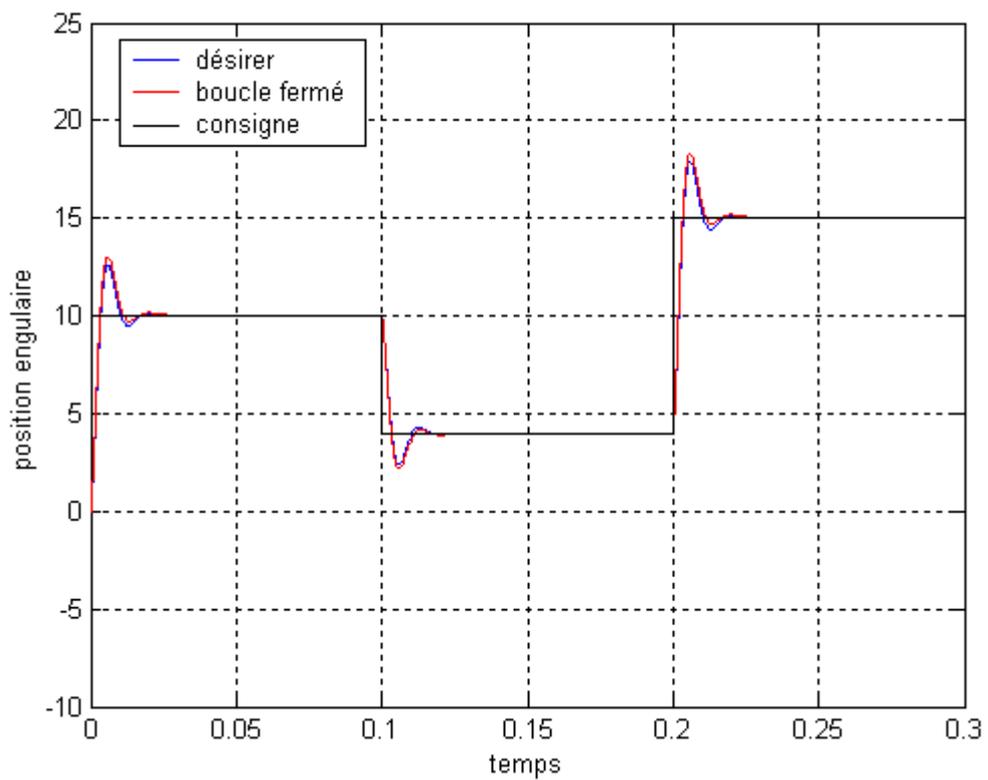


Figure IV.5 : Réponse temporelle du système boucle fermée et système désiré.

Le système en boucle ouverte avec le correcteur  $C(p)$  a les caractéristiques suivantes (dans la bande fréquentielle [5 5000] rad/s): le module est une droite de pente -30 db/dec, la marge de phase  $\varphi_m=45$  deg, donc le système en boucle fermée est stable, on remarque que la phase est constante autour de  $\omega_u$ .

A partir de la figure (IV.5), on peut voir que la réponse temporelle du système asservi projeté suit celle du modèle de référence.

#### IV.4 Etude de la robustesse du correcteur

Le modèle du moteur décrit dans l'équation (IV.8) est en fonction des deux paramètres  $K$  et  $\tau_m$  qui sont eux même dépendent des composants internes du moteur. Les valeurs de ces composants peuvent varier à cause des effets extérieurs tels que le changement de température, de pression, d'hystérésis..., qui peut influencer sur le système en boucle fermée. Dans cette section on va étudier l'influence de perturbations structurées sur les spécifications du système asservi projeté. Les résultats sont comparés avec ceux obtenus par le PID classique.

##### IV.4.1 Variation du gain $K$

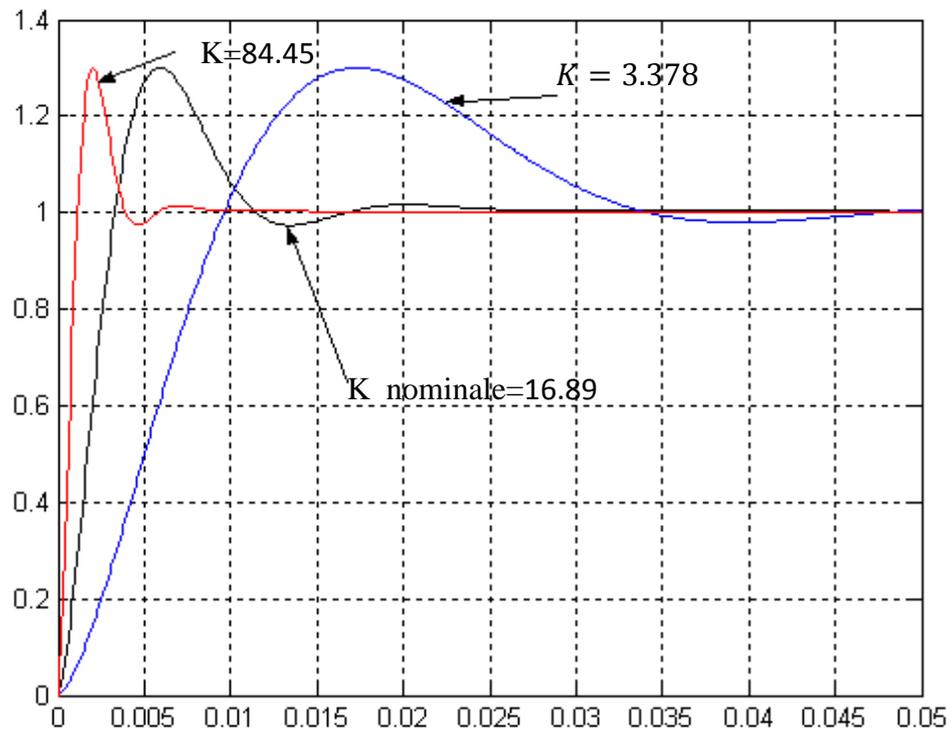
Dans cette partie on a supposé que la constante  $\tau_m$  est fixe à sa valeur nominale  $\tau_m = 0.02$ . Pour étudier l'influence de la variation du gain  $K$  sur le système asservie on fait varier le paramètre  $K$  dans l'intervalle  $[K_{nom}/5 \ 5K_{nom}] = [3.3780 \ 84.45]$  (avec  $K_{nom}=16.89$ ), on obtient chaque fois la marge de phase et le dépassement correspondant on utilisant les deux correcteurs  $C(p)$  fractionnaire et  $C_{PID}(p)$  classique. Les figures (IV.6) et (IV.7) représentent la réponse indicielle du système en boucle fermée pour les trois valeurs du gain suivante  $[K_{nom}/5, K_{nom}$  et  $5 K_{nom}]$  pour les deux correcteurs. Les figures (IV.8) et (IV.9) montrent les variations de la marge de phase et du dépassement en fonction du paramètre  $K$ .

Pour quantifier les variations des performances données sur les figures (IV.6) à (IV.9), on calcule les erreurs relatives commises dans le cas de la de variation du gain  $K$  pour un temps de relaxation fixe en utilisant les formules suivantes :

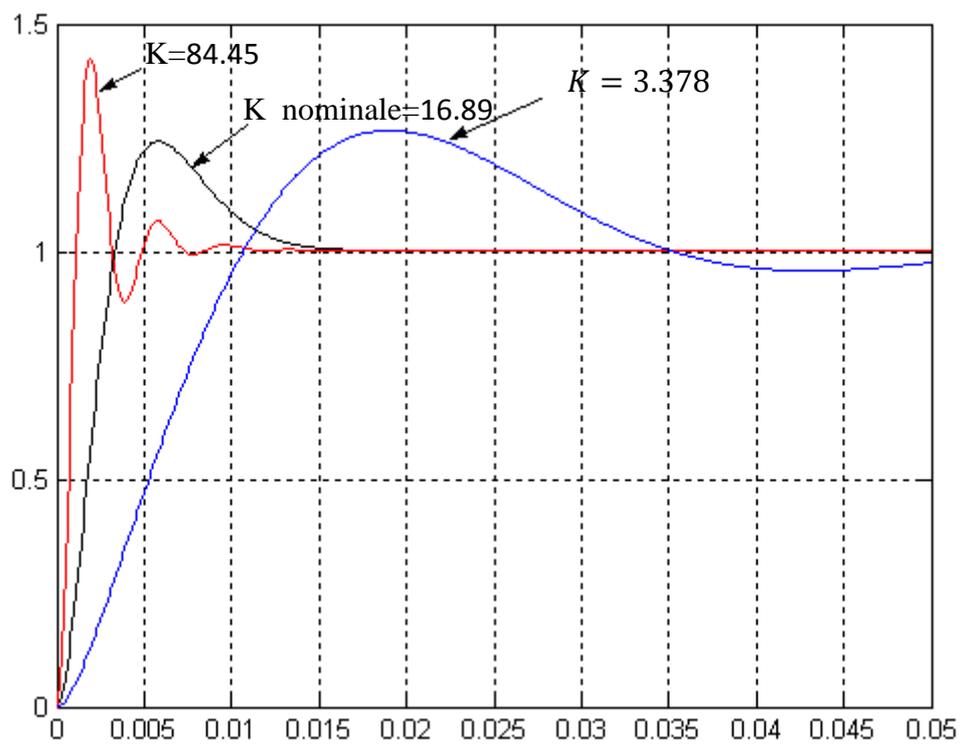
$$Erreur(MP)\% = \frac{|MP_{max} - MP_{nom}|}{MP_{nom}} \quad (IV.14)$$

$$Erreur(D)\% = \frac{|D_{max} - D_{nom}|}{D_{nom}} \quad (IV.15)$$

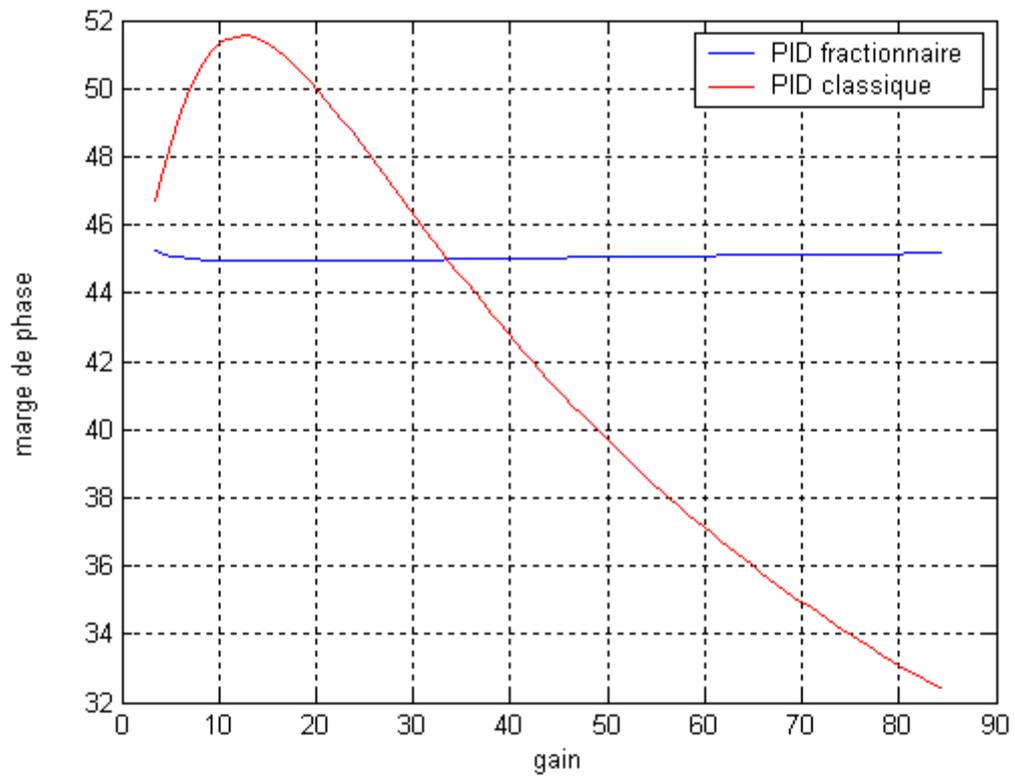
$MP_{max}$  et  $D_{max}$  sont respectivement les valeurs de la marge de phase et du dépassement dont les erreurs sont maximales par rapport à leurs valeurs nominales respectives  $MP_{nom}$  et  $D_{nom}$ .



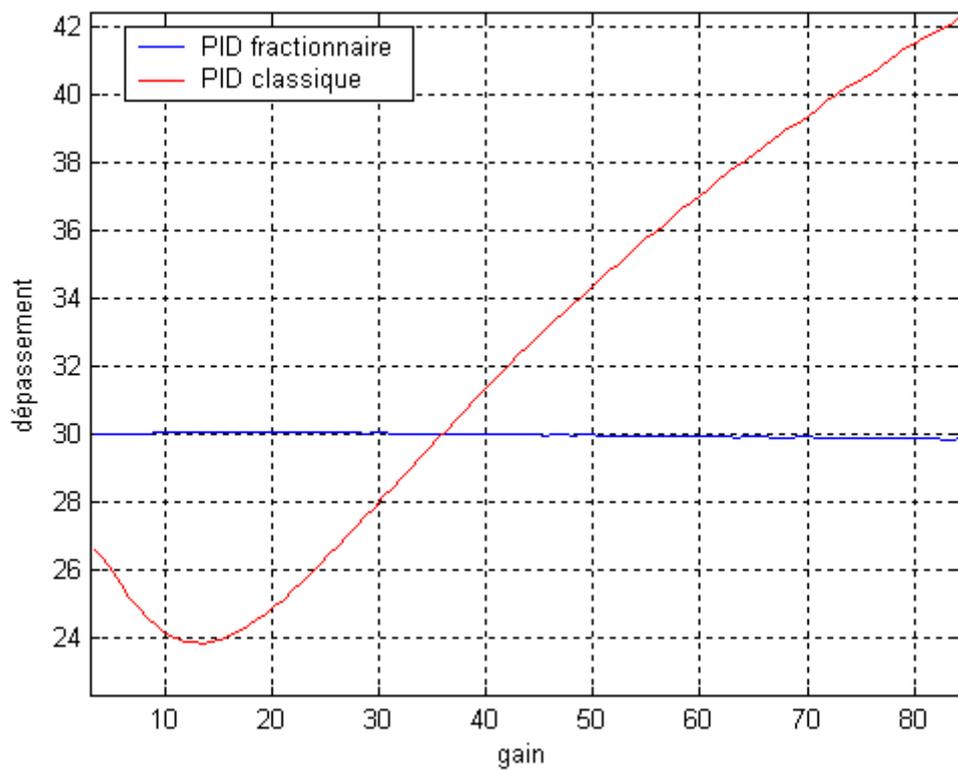
**Figure IV.6 :** Réponse indicielle du système en boucle fermée pour différentes valeurs de  $K$  ( $PI^{0.6}D^{0.5}$ ).



**Figure IV.7** Réponse indicielle du système en boucle fermée pour différentes valeurs de  $K$  (PID classique).



**Figure IV.8 :** Variation de la marge de phase en fonction de gain K.



**Figure IV.9 :** Variation de dépassement en fonction de gain K.

Les résultats de l'étude sont représenté sur le tableau suivant :

**Tab IV.1** Les différents caractéristiques pour K variant.

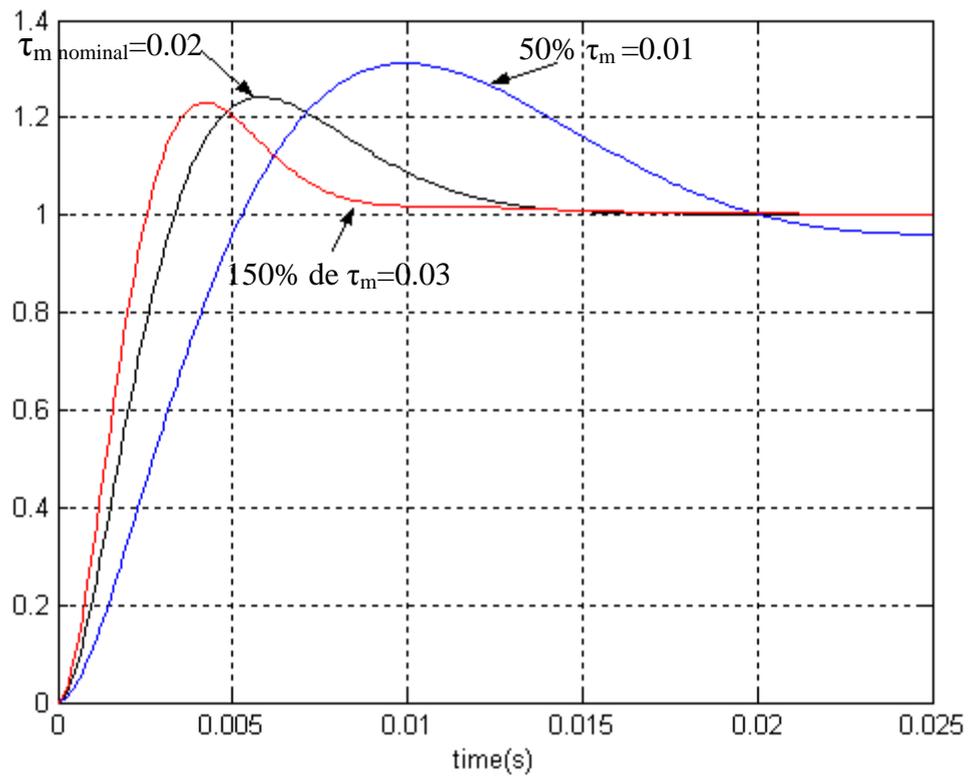
	Correcteur utilisé		
	Caractéristique	$PI^{\lambda}D^{\mu}$	PID
Marge de phase	Intervalle de Variation	[44.92 45.22] deg	[32.36 51.54]deg
	Variation maximal $MP_{max}$	45.2212 deg	32.362 deg
	Erreur relative	0.67%	36.54 %
Dépassement	Intervalle de Variation	[29.83 30.06] %	[23.8567 42.3207] %
	Variation maximale $D_{max}$	29.8363%	42.3207%
	Erreur relative	0.76 %	75 %

Les résultats obtenus montrent que l'asservissement par le correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  doit garantir les spécifications désirés avec la présence d'une propriété de robustesse très importante ou les deux caractéristiques étudiées (MP et D) sont presque insensible de la variation du gain K. Alors la commande  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  satisfait la propriété d'iso-amortissement, cette dernière n'est pas satisfaite par la commande PID classique.

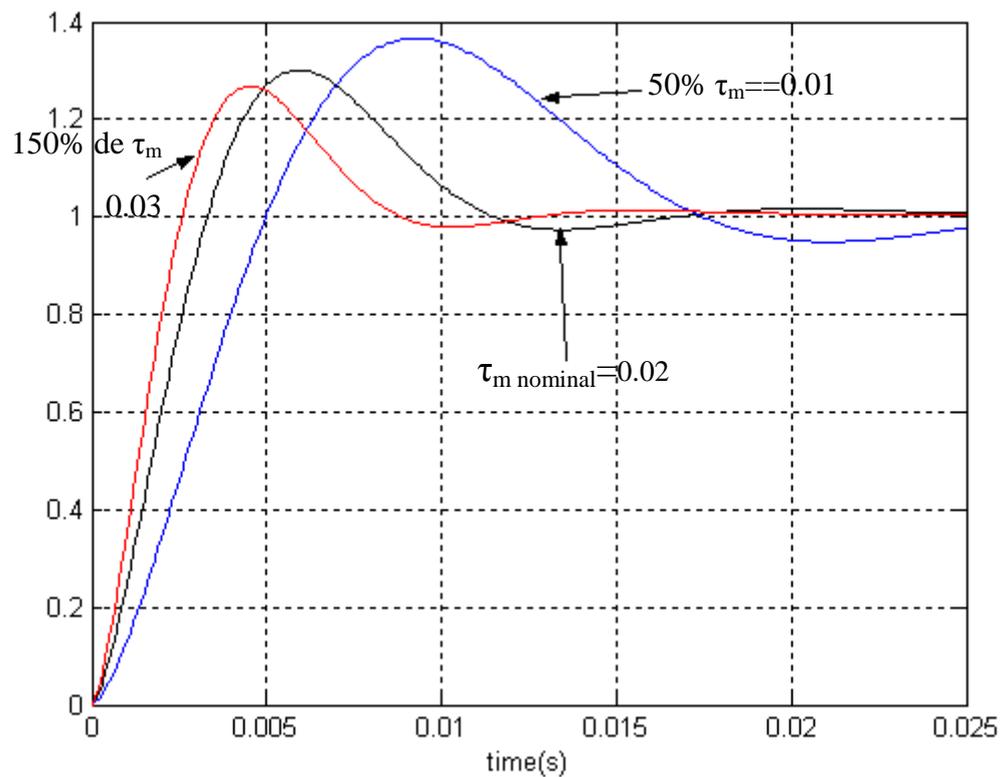
D'après ces résultats on peut dire que l'objectif de la méthode de réglage est atteint puisque'elle basée sur un système désiré robuste en degré de stabilité vis-à-vis les variations de gain comme nous avons vu dans la section (II.3.4).

#### IV.4.2 Variation de constante $\tau_m$

Maintenant on considère que le gain est fixe à sa valeur nominal  $K=16.84$ . Pour étudier l'influence de la variation de la constante du temps  $\tau_m$  on fait varier le paramètre  $\tau_m$  autour de sa valeur nominale de  $\pm 50\%$  (sur l'intervalle  $[0.5 \tau_m \ 1.5 \tau_m]$ ) en utilisant la même étude qui nous avons fait pour le paramètre K. La figure (IV.10) et (IV.11) représentent les réponses indicielle du système en boucle fermé obtenu par les deux correcteurs  $C(p)$  fractionnaire et  $C_{PID}(p)$  classique pour les valeurs de  $\tau_m$  suivantes  $[0.5 \tau_m, \tau_m$  et  $1.5 \tau_m]$ . Les figures (IV.12) et (IV.13) montrent les variations de la marge de phase et du dépassement en fonction du paramètre  $\tau_m$ .



**Figure IV.10 :** Réponse indicielle du système en boucle fermée pour différent valeur de  $\tau_m$  ( $PI^{0.6}D^{0.5}$ ).



**Figure IV.11 :** Réponse indicielle du système en boucle fermée pour différent valeur de  $\tau_m$  (PID classique).

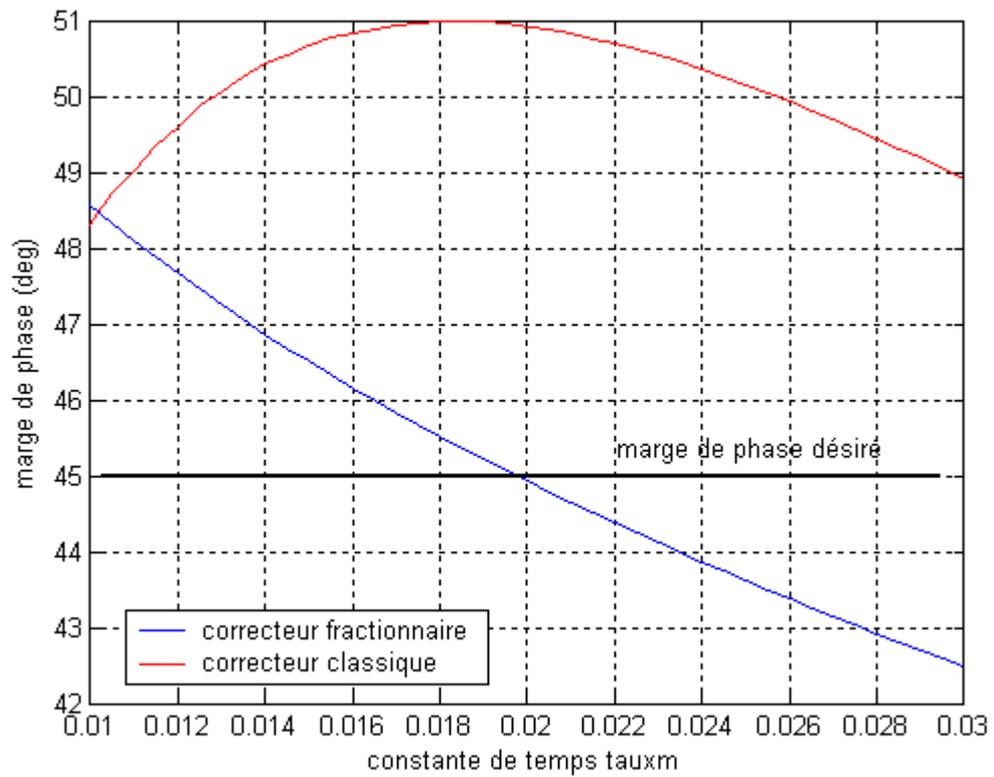


Figure IV.12 : Variation de marge de phase en fonction de  $\tau_m$ .

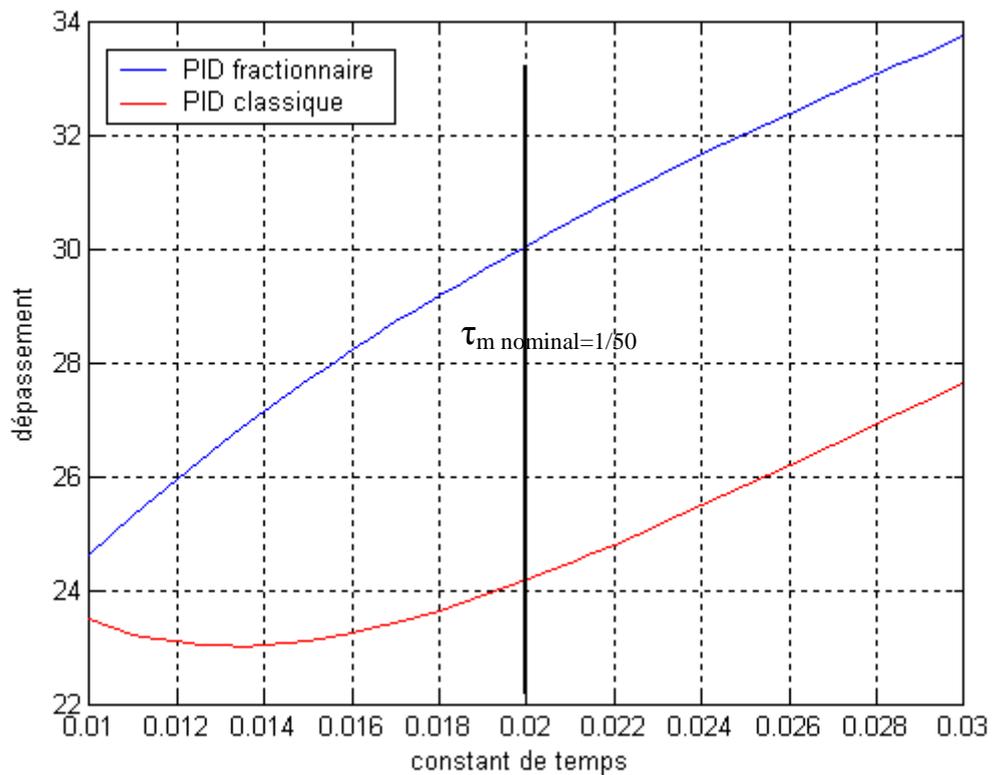


Figure IV.13 : Variation de dépassement en fonction de  $\tau_m$ .

Les résultats de L'étude des différentes caractéristiques est résumé sur le tableau suivant :

**Tab IV.2** Différents caractéristiques pour  $\tau_m$  variant.

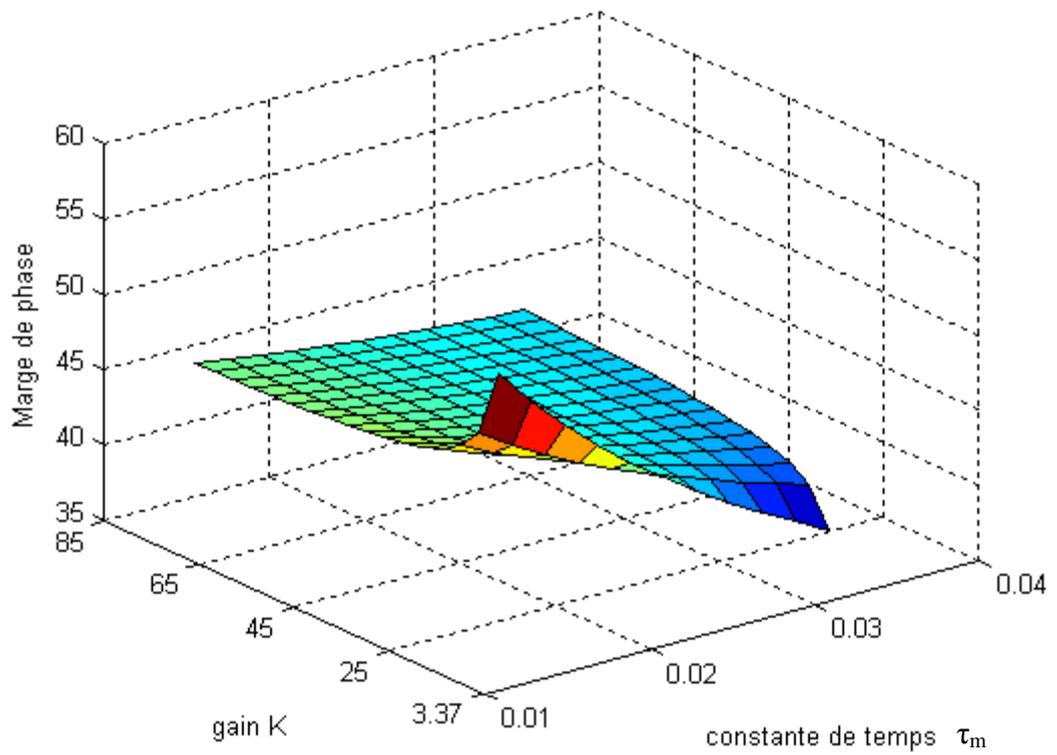
	Correcteur utilisé		
	Caractéristique	PI <sup>λ</sup> D <sup>μ</sup>	PID
Marge de phase	Intervalle de Variation	[42.48 48.58] deg	[48.31 50.99] deg
	Variation maximal MP <sub>max</sub>	48.5782 deg	48.3126 deg
	Erreur relative	8.12%	5.11%
Dépassement	Intervalle de Variation	[24.6 33.73] %	[23.01 27.64]%
	Variation maximale D <sub>max</sub>	24.5975 %	27.6410 %
	Erreur relative	18.17%	14.30 %

D'après les résultats qui nous avons vu sur le tableau (IV.2) on peut dire que le système Contrôler par le PID classique est moins dépendant de paramètre  $\tau_m$  que celle commandée par le PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> mais de point de vue précision le PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> est très bonne tel que les valeurs des spécifications nominal sont très proche des valeurs désiré du cahier des charge et l'intervalle de variations est autour des valeurs désiré pour les deux spécifications étudiés.

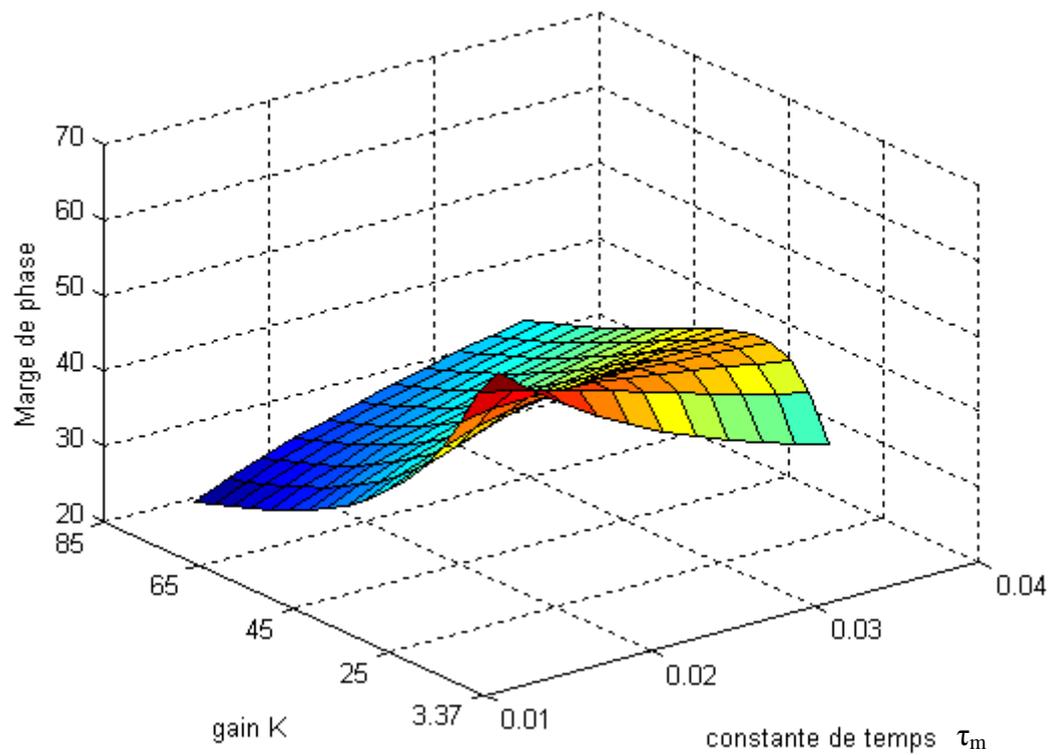
#### IV.4.3 Variation de K et $\tau_m$

En pratique généralement les deux paramètres varient en même temps, pour cela on fait un balayage bidimensionnel des deux paramètres sur leur intervalle de variation en calculant pour chaque couple (K,  $\tau_m$ ) la marge de phase et le dépassement correspondant, on obtient deux matrices qui représentent les variations de la marge de phase et du dépassement en fonction des deux paramètres du moteur.

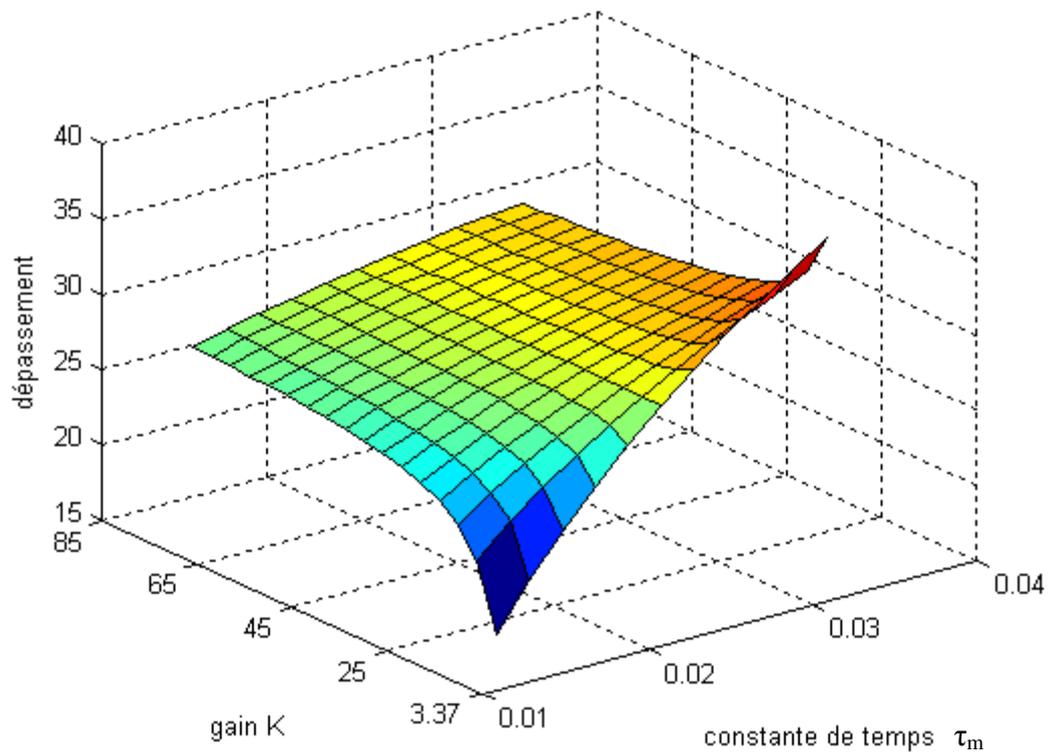
Les quatre figures (IV.14) à (IV.17) représentent respectivement l'évolution de la marge de phase et du dépassement et en fonction des deux paramètres K et  $\tau_m$  pour les deux correcteur utilisé. Ces figures montrent que la commande par le PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> rendre le système en boucle fermé moins dépend des paramètres du moteur (les courbes (IV.14) et (IV.16) est un peu plats que (IV.15) et (IV.17)).



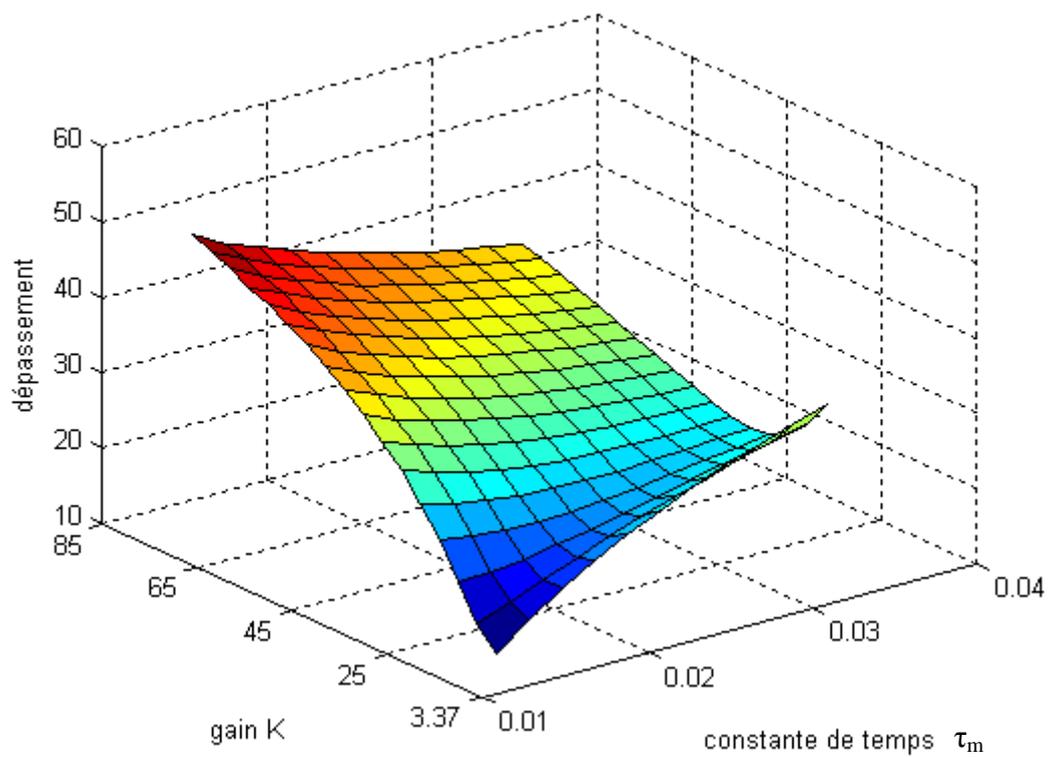
**Figure IV.14 :** Marge de phase en fonction de K et  $\tau_m$  (correcteur  $PI^\lambda D^\mu$ ).



**Figure IV.15 :** Marge de phase en fonction de K et  $\tau_m$  (correcteur PID classique).



**Figure IV.16 :** Dépassement en fonction de  $K$  et  $\tau_m$  (correcteur  $PI^\lambda D^\mu$ ).



**Figure IV.17 :** Dépassement en fonction de  $K$  et  $\tau_m$  (correcteur PID classique).

Les résultats de l'analyse complète des deux spécifications étudiées sont présentés sur le tableau suivant :

**Tab IV.3** Les différentes caractéristiques (cas où  $K$  et  $\tau_m$  variées)

		Correcteur utilisé	
		$PI^{\lambda}D^{\mu}$	PID
Marge de phase	Intervalle de Variation	[38.83 55.06] deg	[24.9876 60.386] deg
	Variation maximal $MP_{max}$	55.0602 deg	24.9876 deg
	Erreur relative	22.57%	50.93 %
Dépassement	Intervalle de Variation	[17.69 38.18] %	[13.35 50.55]%
	Variation maximale $D_{max}$	17.69%	50.55 %
	Erreur relative	41.15%	109.06 %

Les résultats présentés sur le tableau IV.3 montrent que le  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  est plus robuste qu'un PID classique.

#### IV.5 Conclusion

Dans ce chapitre on a appliqué la commande de type  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  dans la commande en position du moteur à courant continu, le réglage de  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  est fait par la méthode proposée dans le chapitre précédent. Une étude de la robustesse du système asservi en boucle fermée vis-à-vis des paramètres du moteur a été faite. Les résultats obtenus ont été comparés à ceux obtenus en utilisant un correcteur PID classique. Les résultats obtenus par la commande  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  ont été excellents et on peut dire que le correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  est plus performant et plus robuste qu'un PID classique.

# Conclusion Générale

## Conclusion Générale

Aujourd'hui, plusieurs chercheurs s'intéressent au développement des méthodes et techniques de réglage du correcteur d'ordre fractionnaire  $PI^\lambda D^\mu$ . L'intérêt pour ce type de correcteur est justifié par une meilleure flexibilité dans la conception de la commande puisqu'il a deux paramètres en plus qui sont les ordres fractionnaires des actions d'intégration et de dérivation, ces paramètres peuvent satisfaire des performances additionnelles dans la conception de la commande.

Dans ce mémoire une nouvelle méthode simple et efficace pour le réglage du correcteur d'ordre fractionnaire  $PI^\lambda D^\mu$  afin de satisfaire des spécifications en boucle fermée donnée a été présentée. La technique proposée est l'extension d'une méthode récente de réglage du correcteur PID classique qu'on a appliqué au réglage du correcteur d'ordre fractionnaire  $PI^\lambda D^\mu$ .

Cette technique utilise la réponse impulsionnelle du processus à asservir supposé stable et elle ne nécessite aucune approximation du processus par un model. Les cinq paramètres du correcteur d'ordre fractionnaire  $PI^\lambda D^\mu$  ont été conçus tel que le système en boucle fermée soit équivalent à un système désiré qui est considéré lui-même d'ordre fractionnaire dont les paramètres sont choisis pour qu'il répond aux spécifications du cahier de charge du système asservi projeté. Les paramètres du correcteur d'ordre fractionnaire  $PI^\lambda D^\mu$  ont été dérivés analytiquement en fonction de la réponse impulsionnelle du système à asservir et des paramètres du système désiré. Des exemples illustratifs ont été utilisés pour tester la méthode de réglage du correcteur d'ordre fractionnaire  $PI^\lambda D^\mu$  proposée.

Pour mieux valider cette technique, elle est utilisée pour la commande en position d'un moteur à courant continu et les résultats obtenus ont été comparés à ceux obtenus en utilisant un correcteur PID classique. L'analyse de la robustesse vis-à-vis des variations structurées des paramètres du moteur a été faite. Les résultats de la robustesse obtenus ont été comparés à ceux obtenus en utilisant un correcteur PID classique pour justifier l'utilisation du correcteur d'ordre fractionnaire  $PI^\lambda D^\mu$ .

En général la réponse indicielle d'un processus est plus facile à avoir que sa réponse impulsionnelle, alors comme perspective on suggère l'adaptation de la technique proposée pour l'utilisation de la réponse indicielle du processus à asservir au lieu de sa réponse impulsionnelle comme il a été fait dans ce travail.

En appliquant cette technique à des processus plus compliqués que ceux utilisés dans ce mémoire on a abouti à des résultats inattendus. Alors comme seconde perspective on suggère

l'introduction et le réglage d'un nouveau correcteur d'ordre fractionnaire qui est l'extension du correcteur d'ordre fractionnaire  $PI^\lambda D^\mu$ . Ce correcteur d'ordre fractionnaire plus généralisé que le  $PI^\lambda D^\mu$  a la forme suivante  $P(I^{\lambda_1} I^{\lambda_2} \dots I^{\lambda_N})(D^{\mu_1} D^{\mu_2} \dots D^{\mu_M})$ .

**Références**

- [1] A. Oustaloup, La dérivation non entière, Hermès, Paris, 1995.
- [2] I. Podlubny, 1999, Fractional Order Systems and  $PI^\lambda D^\mu$  Controllers, IEEE Transactions on Automatic Control, 44(1), pp 208–214.
- [3] R. Caponetto, and L. Fortuna. L, A new tuning strategy for a non integer order PID Controller, Proc of the 1<sup>st</sup> IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, FDA'04 Bordeaux, France, July 19-21, 2004.
- [4] C. A. Monje, Design Methods of Fractional Order Controllers for Industrial Applications, PHD thesis, Universidad de Extremadura, 2006.
- [5] K. Bettou.K ,A. Charef, A New design method for fractional  $PI^\lambda D^\mu$  controller, IJ-STA,vol.2,N<sup>o</sup>1,July 2008,pp 414-429.
- [6] A. Charef, H. Sun, Y.Y. Tsao, B. Onaral, Fractal System as Represented by Singularity Function, IEEE Trans. on Automatic Control, vol.37, N<sup>o</sup>9, September 1992.
- [7] A. Charef, Modeling and Analog Realization of the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation, Nonlinear Dynamics, Vol. 46, N<sup>o</sup> 1&2, 2006, pp 195–210.
- [8] A. Charef, Analogue realisation of fractional order integrator, differentiator and fractional  $PI^\lambda D^\mu$  controller, IEE Proc. Control Theory Appl., Vol. 153, No. 6, 2006, pp 714-720.
- [9] B.M. Vinagre, V. Feliú, proc: 41st IEEE conference on decision and control, Las Vegas, December 9, 2002.
- [10] I. Podlubny, Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Fractional Differentiation, Fractional calculus and applied analysis, 5, N<sup>o</sup> 4, 2002.
- [11] I.poudlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, USA, 1999.
- [12] I. Petras, I. Podlubny, P. O'Leary, L. Dorcak, and B. M. Vinagre, Analogue Realization of Fractional Order Controllers," Fakulta Berg , TU Kosice, 2002.
- [13] A. Oustaloup, Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire : théorie et pratique, Editions Masson, Paris, 1983.
- [14] T. T. Hartley and C. F. Lorenzo, a solution of the fundamental linear fractional differential Equation, NASA TP-1998-208693, December 1998.
- [15] A. Filipe, un nouveau concept pour la commande robuste, Proc ESAIM, vol.x, pp : 29-48,2000, disponible sur <http://www.emath.fr/Maths/proc>
- [16] M. Assabaa, A. Charef, Modeling and analysis of multiple fractional order systems, CGE'05,16 avril 2007, EMP, Bordj-El-Bahri,Alger.

- [17] M. Assabaa, modélisation et analyse des équations différentielles d'ordre fractionnaire, Mémoire de magister, université de Mentouri, Constantine, 2006.
- [18] A. Oustaloup, La robustesse, Hermès, Paris, 1995.
- [19] R. S. Barbosa et al, Tuning and Application of Integer and Fractional Order PID Controllers, Springer Science+Business Media B.V. 2009.
- [20] A. Djouambi, A. Charef and T. Bouktir, Fractional Order Robust Control and  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  Controllers, WSEAS Transactions on Circuits and Systems, Issue 8, Volume 4, pp 850-857, 2005.
- [21] J. G. Ziegler and N.B.Nichols (1942), Optimum Settings for Automatic Controllers, Transactions of the A.S.M.E. Vol. 64, N° 8, pp 759-768
- [22] C. A. Monje et al, Proposals for fractional  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  tuning, Proc. of the 1st IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its applications, FDA'04, Bordeaux, France, July 19-21, 2004.
- [23] D. Valério and José Sà da Costa, Tuning of fractional PID controllers with Ziegler-Nichols type rules, Signal Processing, 86, 2006, pp 2771-2784.
- [24] M. Ramasamy and S. Sundaramoorthy, PID controller tuning for desired closed-loop responses for SISO systems using impulse response, Computers and Chemical Engineering, 32, (2008), pp 1773–1788.
- [25] A. Djouambi, Contribution à la Commande CRONE, Thèse de Doctorat, Université Mentouri, Constantine, 2008
- [26] C. A. Monje, M. Vinagre et al, Tuning and auto-tuning of fractional order controllers For Industry application, control engineering practice, 16, 2008, pp 798-812.
- [27] P. Bidan, commande diffusive d'une machine électrique une introduction, Proc ESAIM, vol.5, pp :55-68. 1998, disponible sur <http://www.emath.fr/Maths/proc/vol.5/index.htm>.
- [28] E. Tissir, cours d'asservissement linéaires continu, Université Sidi Mohammed Ben Abdellah, disponible sur : <http://www.scribd.com/doc/20894657/Cours-Genie-Autom-ISAI>.

**Abstract:**

The PID controllers have remained, by far, the most commonly and practically used in all industrial feedback control applications for decades. The design and the tuning of this type of controller has been a field of research since Ziegler and Nichols have presented their PID tuning method in 1942. More recently, a fractional  $PI^\lambda D^\mu$  controller, a generalization of the classical PID controller, has been proposed. The interest for this type of controller is justified by a better flexibility in the control design since it has two more tuning parameters, the fractional orders of the integration and differentiation actions. These parameters could be used to satisfy additional feedback control design performances. Even though some tuning methods and techniques of the fractional order  $PI^\lambda D^\mu$  have been proposed, an intensive and continuous research work is undergoing for the enhancement and amelioration of performance quality of the feedback control.

In this thesis, a tuning method of the fractional order  $PI^\lambda D^\mu$  controller based on a recent regular PID tuning technique has been proposed. This technique uses the impulse response of a supposed stable plant and it does not necessitate any plant's model. The five parameters of the fractional order  $PI^\lambda D^\mu$  controller are tuned such that the closed loop feedback control transfer function is equivalent to a desired fractional order model. Illustrative examples have been given to test this tuning approach. The technique has been applied to the control of a DC motor. The frequency and temporal responses have been obtained and the robustness with respect to the motor gain and relaxation time has been also studied.

## ملخص :

المصحح PID هو التقنية الأكثر استعمالا في ضبط الأنظمة الصناعية لعشرات السنين، إعداد وضبط هذا النوع من المصححات كان موضوع بحث منذ عهد Zigler و Nichols حيث عرضوا طريقتهم سنة 1942. حديثا اقترح المصحح  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  ذو الأساس الجزئي الذي هو تعميما للمصحح PID المؤلف. الفائدة من استعمال هذا المصحح تتبين بأفضلية ومرونة أكثر في إعداد التحكم لأن له معاملين زائدين هما الأسس الجزئية لسلوك المكاملة والاشتقاق، هذان المعاملان يمكن استعمالهما لتحقيق ميزات إضافية في إعداد الأنظمة المضبوطة. اقترحت العديد من الطرق لضبط المصحح  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  لكن هناك بحث متواصل في هذا المجال لتحسين النوعية وتطوير ميزات الأنظمة المضبوطة.

في هذه المذكرة اقترحت طريقة لضبط المصحح  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  تعتمد على تقنية حديثة لضبط المصحح PID المؤلف، هذه التقنية تستخدم استجابة الومضة للنظام المفترض أنه مستقر ولا تحتاج إلى أي تقريب نموذجي للنظام. المعاملات الخمسة للمصحح  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  ذو الأساس الجزئي صممت بحيث يصبح النظام في الحلقة المغلقة مكافئا لنموذج مرغوب فيه ذو أساس جزئي، ثم عرضت بعض الأمثلة التوضيحية لاختبار طريقة الضبط. أخيرا طبقت هذه الطريقة الجديدة للتحكم في المحرك ذي التيار المستمر، تحصلنا على استجابة التردد والاستجابة الزمنية ثم قمنا بدراسة تحليلية للمنانة في الميزات بالنسبة للريب في المكسب وزمن استرخاء المحرك ذي التيار المستمر.