

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

**MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI DE CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE**

N° d'Ordre :.....

Série :.....

MEMOIRE DE MAGISTER

Présenté Par

Mr DAOUD IDIOU

Option : Traitement du Signal

THEME

*Implémentation Analogique de Dérivateur
et d'Intégrateur d'Ordre Fractionnaire Variable*

Soutenu le : 04 / 02 / 2008

Examiné Par le Jury :

Président :	Dr. M. Khamadja	Professeur	Université de Mentouri Constantine
Rapporteur :	Dr. A. Charef	Professeur	Université de Mentouri Constantine
Examineur :	Dr. A. Bennia	Professeur	Université de Mentouri Constantine
Examineur :	Dr. A. Djouambi	MC B	Université de Oum-El-Boughi

Année 2008 / 2009

DEDICACES

Je dédie ce mémoire

A mes chers parents pour tout les sacrifices consentis, pour leur soutien durant toute mes années d'études. Pour leur bonté et leur amour.

*A mes sœurs et a mes frères.
Mes nièces, mes neveux, mes beaux frères.*

A toute ma famille qui m'a aidé dans mes études.

A mes collègues de la promotion et mes amis.

A tous les membres du laboratoire de Traitement du Signal

Idiou Daoud

Remerciements

Je remercie Allah tout puissant qui m'a donné la force et la volonté pour pouvoir finir ce mémoire de magister

Je tiens à remercier profondément mon encadreur : le professeur **ABDELFATAH CHAREF** pour la confiance qu'il m'a accordée, ses encouragements, et ses précieux conseils.

J'exprime ma gratitude envers Mr. **MOHAMED KHAMADJA** professeur à l'université de Mentouri de Constantine de m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury

Je remercie Mr. **ABDELHAK BENNIA**, Professeur à l'université Mentouri de Constantine, d'avoir accepter faire patrie du jury

Je tiens à remercier Dr. **ABDELBAKI DJOUAMBI**, d'avoir accepter de juger ce travail en tant qu'examineur.

Je tiens à remercier, tous ceux qui m'ont enseigné durant toutes mes études et en particulier mes enseignants à l'université de Constantine

Enfin, je tiens aussi à remercier tous ce qui m'ont aidé de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

SOMMAIRE

Introduction Générale.....	1
Chapitre I :Opérateurs d'Ordre Fractionnaire	3
I.1. Introduction au calcul fractionnaire	3
I.2. Opérateurs d'ordre fractionnaire	3
I.2.1 Définition de Riemann-Liouville (R-L).....	4
I.2.2 Définition de Grunwald-Leitnikov (G-L).....	4
I.2.3 Définition de Caputo.....	5
I.3 Quelques propriétés de la dérivation non entière.....	5
I.4 La transformée de Laplace.....	5
I.4.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire	5
I.4.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire.....	6
I.4.2.1 Définition de Riemann-Liouville.....	6
I.4.2.2 Définition de Caputo	6
I.4.2.3 Définition de Grunwald-Leitnikov	6
I.5 Exemples de calcul de dérivée d'ordre fractionnaire	7
I.5.1 Dérivation d'ordre fractionnaire d'un cosinus (ou d'un sinus).....	7
I.5.2 Dérivation non entière d'une fonction sinusoïdale amortie.....	7
I.6 Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire	7
I.6.1 Méthode Générale d'approximation des opérateurs intégral-différentiels d'ordre fractionnaire.....	7
I.6.2 Méthode de Carlson	8
I.6.3 Méthode de Matsuda	8
I.6.4 La méthode d'Oustaloup.....	8
I.6.5 La méthode de Charef	9
 Chapitre II: Approximation Analogique Des Opérateurs d'Ordre Fractionnaire..	11
II.1 Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire.....	11
II.1.1 Exemple d'un intégrateur d'ordre fractionnaire.....	13
II.2 Approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre Fractionnaire	15
II.2.1 Exemple d'un dérivateur d'ordre fractionnaire	17

II.3 Implémentation par des circuits électriques analogiques.....	18
Chapitre III: Implémentation Analogique Variable	21
III.1 introduction	21
III.2 Implémentation numérique en structure de Farrow	21
III.3. Intégrateur d'ordre fractionnaire variable	22
III.3.1 Calcul des coefficients de l'interpolation polynomiale	25
III.3.2 Exemple illustratif	26
III.4 Dérivateur d'ordre fractionnaire variable.....	31
III.4.1 Calcul des coefficients de l'interpolation polynomiale.....	33
III.4.2 Exemple illustratif	34
Chapitre IV Applications Des Opérateurs d'Ordre Fractionnaire Variable	39
IV.1 Introduction	39
IV.2 Réponse temporelle d'un opérateur d'ordre fractionnaire	39
IV.3 Dérivation d'ordre fractionnaire de quelques fonctions usuelles	40
IV.3.1 La dérivée fractionnaire d'un échelon	40
IV.3.2 La dérivée fractionnaire d'un rampe	41
IV.3.3 La dérivée fractionnaire d'un cosinus	42
IV.3.4 La dérivée fractionnaire d'un sinus	43
IV.3.5 La dérivée fractionnaire d'un sinus amortie	44
IV.4 integration d'ordre fractionnaire de quelques fonctions usuelles	46
IV.4.1 L'integrale fractionnaire d'une impulsion	46
IV.4.2 L'integrale fractionnaire d'un échelon	47
IV.4.3 L'integrale fractionnaire d'une rampe	48
IV.4.4 L'integrale fractionnaire d'un cosinus	49
IV.4.5 L'integrale fractionnaire d'un sinus	50
Conclusion Générale	52
Références	54

Listes des figures

Figure II-1	Tracés de Bode de l'amplitude de l'intégrateur d'ordre Fractionnaire $s^{-0.55}$ et de la fonction rationnelle de son d'approximation.....	14
Figure II-2	Tracés de Bode de la phase de l'intégrateur d'ordre fractionnaire $s^{-0.55}$ et de la fonction rationnelle de son d'approximation	14
Figure II-3	Tracés de Bode de l'amplitude du dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{0.35}$ et la fonction rationnelle de son d'approximation	17
Figure II-4	Tracés de Bode de la phase du dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{0.35}$ et la fonction rationnelle de son d'approximation	18
Figure II.5	Réseau équivalent d'un intégrateur d'ordre fractionnaire	19
Figure II.6	Réseau équivalent d'un dérivateur d'ordre fractionnaire	20
Figure III. 1	Implémentation en structure de Farrow du filtre numérique RIF.....	22
Figure III.2	L'interpolation polynomiale au sens des moindres carrés de coefficient h_0 de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire.....	28
Figure III.3	L'interpolation polynomiale au sens des moindres carrés de coefficient h_5 de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire.....	28
Figure III.4	L'interpolation polynomiale au sens des moindres carrés de coefficient h_{10} de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire.....	29
Figure III.5	L'interpolation polynomiale au sens des moindres carrés de coefficient h_{15} de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire.....	29
Figure III.6	Module de la fonction d'approximation de l'opérateur Intégrateur d'ordre fractionnaire $s^{-0.3}$ à la sortie de la structure de Farrow	30
Figure III.7	Phase de la fonction d'approximation de l'opérateur Intégrateur d'ordre fractionnaire $s^{-0.3}$ à la sortie de la structure de Farrow	30
Figure III.8	L'interpolation polynomiale au sens des moindres carrés de coefficient g_0 de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire	36
Figure III.9	L'interpolation polynomiale au sens des moindres carrés de coefficient g_{15} de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire.	36

Figure III.10 L'interpolation polynomiale au sens des moindres carrés de coefficient g_{20} de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire.	37
Figure III.11 L'interpolation polynomiale au sens des moindres carrés de coefficient g_{25} de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire.	37
Figure III.12 Module de la fonction d'approximation de l'opérateur Dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{0.65}$ à la sortie de la structure de Farrow	38
Figure III.13 Phase de la fonction d'approximation de l'opérateur Dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{0.65}$ à la sortie de la structure de Farrow	38
Figure IV-1 Dérivation d'ordre fractionnaire d'un échelon pour des différents ordres.....	41
Figure IV-2 Dérivation d'ordre fractionnaire d'une rampe pour des différents ordres	42
Figure IV-3 Dérivation d'ordre fractionnaire d'un cosinus pour des différents ordres.....	43
Figure IV-4 Dérivation d'ordre fractionnaire d'un sinus pour des différents ordres.....	44
Figure IV-5 Dérivation d'ordre fractionnaire d'un sinus amorti pour des différents ordres.....	45
Figure IV-6 L'intégrale d'ordre fractionnaire d'impulsion pour des différents ordres.....	47
Figure IV-7 L'intégrale d'ordre fractionnaire d'un échelon pour des différents ordres.....	48
Figure IV-8 L'intégrale d'ordre fractionnaire d'une rampe pour des différents ordres.....	49
Figure IV-9 L'intégrale d'ordre fractionnaire d'un $\cos(200 \pi t)$ pour les différents ordres.....	50
Figure IV-9 L'intégrale d'ordre fractionnaire d'un $\sin(200 \pi t)$ pour les différents Ordres.....	51

Résumé :

Ce travail traite l'implémentation variable analogique du dérivateur s^m et de l'intégrateur s^{-m} (pour $0 < m < 1$) d'ordre fractionnaire. L'approche proposée est basée sur la méthode d'approximation de Charef de ces opérateurs par des fonctions rationnelles analogiques. La nouvelle implémentation est donnée sous la forme de la structure de Farrow pour obtenir un dérivateur et d'intégrateur d'ordre fractionnaire variable.

Introduction Générale

Introduction Générale

Le concept des opérateurs d'ordre fractionnaire a été défini aux 19 siècles par Riemann et Liouville. Leur but devait prolonger la dérivation ou intégration d'ordre fractionnaire en employant non seulement un ordre entier mais également des ordres non entiers. Beaucoup de systèmes physiques ont affiché un comportement dynamique d'ordre fractionnaire, tels que les systèmes viscoélastique, la polarisation électrode électrolyte, polarisation d'interfaces, le comportement cardiaque [1]. A cause de leur représentation par des fonctions de transfert irrationnelles, les opérateurs d'ordre fractionnaire ont été marginalement étudiés. Dans les dernières années un intérêt considérable a été porté au calcul fractionnaire par l'application de ces concepts dans différents domaines de la physique et de l'ingénierie [1-8], où on a pu trouver un progrès significatif de travaux théoriques qui peuvent servir comme fondation pour un nombre d'applications dans ces domaines. Donc, un grand effort a été fait pour essayer de mettre en pratique les résultats déjà établis, et un travail de recherche intensif est encore en cours dans plusieurs domaines d'ingénierie pour l'application de ces concepts d'ordre fractionnaire.

Toutes les implémentations analogiques existantes dans la littérature de l'intégrateur d'ordre fractionnaire $H_I(s) = \frac{1}{s^m}$ et du différentiateur d'ordre fractionnaire $G_D(s) = s^m$ sont des implémentations fixes, c'est-à-dire que les circuits analogiques représentant ces opérateurs sont des fonctions de l'ordre m. C'est-à-dire que lorsqu'on varie l'ordre m les implémentations analogiques ne sont plus valide, il faut donc changer toutes les implémentations analogiques. Alors, le problème est celui de l'implémentation analogique de ces opérateurs d'ordre fractionnaire par des implémentations d'ordre variable, c'est-à-dire que les circuits analogiques représentant ces opérateurs sont indépendants de l'ordre m. C'est-à-dire que lorsqu'on varie l'ordre m l'implémentation analogique reste toujours valide. Et comme on l'a déjà mentionné l'implémentation analogique d'ordre variable de ces opérateurs d'ordre fractionnaire n'existe pas par contre leur implémentation numérique d'ordre variable peut être obtenue par l'utilisation de la fameuse technique dite structure de Farrow [9].

Alors, l'objectif de ce travail est l'implémentation des opérateurs du dérivateur et de l'intégrateur d'ordre fractionnaire variable, pour l'approche proposée est basée sur la méthode d'approximation de Charef [10] de ces opérateurs par des fonctions rationnelles analogiques. L'implémentées de dérivateur et l'intégrateur d'ordre fractionnaire en utilisant la structure de Farrow [9] pour obtenir une implémentation de dérivateur et d'intégrateur d'ordre fractionnaire variable.

Des simulations sont obtenues pour démontrer l'efficacité et l'utilité de cette approche et les résultats obtenus sont aussi présentés et discutés.

Les travaux réalisés et les résultats obtenus faisant l'objet de ce mémoire sont présentés comme suit :

Le premier chapitre présente les définitions et les bases théoriques de ce travail de recherche. Le deuxième chapitre traite l'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire, on a présenté une méthode simple qui est la méthode de Charef qui consiste à approximer, pour une bande de fréquence donnée. Dans le troisième chapitre, nous étudions l'implémentation de ces opérateurs avec la nouvelle implémentation sous forme de structure de Farrow. Le quatrième chapitre est réservé à l'application de la méthode proposée sur les fonctions les plus usuelles : l'échelon, sinusoïdale, et fonction sinusoïdale amortie.

chapitre I

Opérateurs D'ordre Fractionnaire

Opérateurs D'ordre Fractionnaire

I.1. Introduction au calcul fractionnaire

Le calcul d'ordre fractionnaire (intégration et différentiation d'ordre arbitraire, pas nécessairement un nombre entier) est un vieux concept qui date de l'époque de Cauchy, Riemann Liouville et Leitnikov au 19ème siècle. Il a été utilisé en mécanique depuis les années 1930 et en électrochimie depuis les années 1960. Et plus tard plusieurs mathématiciens et physiciens ont étudié les opérateurs différentiels et les systèmes d'ordre fractionnaire [11-12].

Généralement les dérivées et les intégrales d'ordre entier ont des interprétations physiques et géométriques claires, qui simplifient de manière significative leur utilisation pour résoudre des problèmes appliqués dans de divers domaines de la science. La différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire n'ont aucune interprétation géométrique et physique acceptable pendant plus de 300 ans. Et comme ils sont une généralisation des notions de la différentiation et de l'intégration d'ordre entière, il serait alors idéal d'avoir de telles interprétations physiques et géométriques qui fournissent également le lien des interprétations classiques de différentiation et d'intégration d'opérateur d'ordre entier.

I.2. Opérateurs d'ordre fractionnaire [11-14]

Le calcul fractionnaire est une généralisation de l'intégration et de la différentiation à l'opérateur fondamental d'ordre non entier ${}_t D_t^m$ où t_0 et t sont des limites de l'opération. L'opérateur intégro-différentiel continu est défini comme :

$${}_t D_t^m = \begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} & m > 0, \\ 1 & m = 0, \\ \int_{t_0}^t (d\tau)^{-m} & m < 0, \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Où $m \in \mathbb{R}$ est l'ordre de l'opération.

Il existe plusieurs définitions mathématiques pour l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour un large panel de fonctions.

I.2.1 Définition de Riemann-Liouville (R-L)

Définition 1 : Soient $m \in \mathfrak{R}$ avec $m > 0$, $t_0 \in \mathfrak{R}$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, +\infty)$. L'intégrale d'ordre m de f de borne inférieure t_0 est définie par :

$${}^{RL}I_{t_0}^m f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(m)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{m-1} f(\tau) d\tau \quad (\text{I-2})$$

avec $t \geq t_0$ et $\Gamma(\cdot)$ est la fonction gamma d'Euler définie par : $\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1} e^{-y} dy, x > 0$.

Définition 2 : Soient $m \in \mathfrak{R}$ avec $m > 0$, n un entier positif, $t_0 \in \mathfrak{R}$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, +\infty)$. La dérivée d'ordre m de f de borne inférieure t_0 est définie par :

$${}^{RL}D_{t_0}^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-m)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-m-1} f(\tau) d\tau \quad (\text{I-3})$$

Où le nombre entier n est tel que $(n-1) < m < n$.

Cette dérivée d'ordre fractionnaire peut aussi être définie à partir de l'équation (I-2) comme suit :

$${}^{RL}D_{t_0}^m f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \{I^{(n-m)} f(t)\} \quad (\text{I-4})$$

I.2.2 Définition de Grundwald-Leitnikov (G-L)

La dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre $m > 0$ de G-L est donnée par :

$${}^{GL}D_{t_0}^m f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^m} \sum_{k=0}^{\left[\frac{t-t_0}{h} \right]} (-1)^k \binom{m}{k} f(t-k.h) \quad (\text{I-5})$$

Où $[\cdot]$ dénote la partie entière d'un nombre réel, h est la période d'échantillonnage et les coefficients $\binom{m}{k}$ sont donnés par :

$$\binom{m}{k} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(m-k+1)} \quad (\text{I-6})$$

La définition de Grundwald-Leitnikov de l'intégration d'ordre fractionnaire est formulée comme suit :

$${}^{GL}I_{t_0}^m f(t) = {}^{GL}D_{t_0}^{-m} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^m \sum_{k=0}^{\left[\frac{t-t_0}{h} \right]} (-1)^k \binom{-m}{k} f(t-k.h) \quad (\text{I-7})$$

I.2.3 Définition de Caputo

Caputo a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire définie par :

$${}^C D_t^m f(t) = {}^\Delta I^{n-m} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-m)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{m-n+1}} d\tau \quad (\text{I-8})$$

avec n est un entier positif vérifiant l'inégalité $(n-1) < m < n$.

I.3 Quelques propriétés de la dérivation non entière

Les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire sont les suivantes [12] :

1. Si $f(z)$ est une fonction analytique de z , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire

$D^m f(z)$ est une fonction analytique de z et m .

2. Pour $m = n$, où n est un entier, l'opération $D^m f(z)$ donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier n .

3. Pour $m = 0$ l'opération $D^m f(z)$ est l'opérateur identité :

$$D^0 f(z) = f(z) \quad (\text{I-9})$$

4. La différentiation et l'intégration d'ordres fractionnaire sont des opérations linéaires :

$$D^m a f(z) + D^m b g(z) = a D^m f(z) + b D^m g(z) \quad (\text{I-10})$$

I.4 Transformée de Laplace [12,13]

I.4.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire

Nous commencerons par la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $m > 0$ définie par (I.2) qu'on peut écrire comme une

convolution des fonctions $g(t) = \frac{1}{\Gamma(m)} t^{m-1}$ et $f(t)$

$$I^m f(t) = D^{-m} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^t (t-\tau)^{m-1} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(m)} t^{m-1} * f(t) \quad (\text{I-11})$$

La transformée de Laplace de la fonction t^{m-1} est [15]:

$$G(s) = L\{t^{m-1}\} = \Gamma(m) s^{-m} \quad (\text{I-12})$$

donc la transformée de Laplace de l'intégrale de Riemann-Liouville

$$L\{I^m [f(t)]\} = s^{-m} F(s) \quad (\text{I-13})$$

De la même façon la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire défini par Gründwald-Leitnikov et Caputo est aussi donné par l'équation (I-13) :

I.4.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire

Nous citons dans ce qui suit la transformée de Laplace des différentes définitions de la dérivée.

I.4.2.1 Définition de Riemann-Liouville

$$L\{D^m f(t)\} = s^m F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{m-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (\text{I-14})$$

Avec $n-1 < m < n$ cette transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville est bien connue . Mais son applicabilité en pratique est limitée à cause de l'absence d'interprétation physique des valeurs limites des dérivées d'ordre fractionnaire pour $t = 0$.

I.4.2.2 Définition de Caputo

$$L\{D^m f(t)\} = s^m F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{m-k-1} f^{(k)}(0) \quad (\text{I-15})$$

L'avantage principal de la définition de Caputo par rapport à celle de Riemann-Liouville est qu'elle permet de considérer des conditions initiales conventionnelles faciles à interpréter telles que $y(0) = y_0, y'(0) = y_1$ etc. De plus, la dérivée de Caputo d'une constante est bornée (égale à 0), alors que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas bornée à $t = 0$. La seule exception est quand on prend $t = -\infty$ comme point de départ (limite inférieure) dans la définition de Riemann-Liouville. Cependant, quand on s'intéresse à des processus transitoires, on ne peut pas accepter de placer le point de départ à $-\infty$; dans ce cas la définition de Caputo semble être la plus appropriée quand on la compare aux autres.

I.4.2.3 Définition de Gründwald-Leitnikov

$$L\{D^m f(t)\} = s^m F(s) \quad (\text{I-16})$$

Remarque

La résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire avec la transformée de Laplace se fait de la même manière qu'avec les équations différentielles d'ordre entier.

I.5 Exemples de calcul de dérivée d'ordre fractionnaire**I.5.1 Dérivation d'ordre fractionnaire d'un cosinus (ou d'un sinus)**

En utilisant le fait qu'un cosinus (resp. un sinus) est égal à la partie réelle (resp. imaginaire) d'une exponentielle, et que l'opérateur dérivée non entière est linéaire [11], on peut déterminer facilement la dérivation fractionnaire d'ordre m d'un cosinus (resp. un sinus).

$$D^{(m)} [\cos(w_0.t - \varphi)] = w_0^m \cos(w_0.t - \varphi + m \frac{\pi}{2}) \quad (\text{I-17})$$

$$D^{(m)} [\sin(w_0.t - \varphi)] = w_0^m \sin(w_0.t - \varphi + m \frac{\pi}{2}) \quad (\text{I-18})$$

I.5.2 Dérivation non entière d'une fonction sinusoïdale amortie

En utilisant le fait qu'un sinus est égal à la partie imaginaire d'une exponentielle et que l'opérateur dérivé d'ordre fractionnaire est linéaire [11], on trouve la relation suivante :

$$D^{(m)} [\sin(w_0.t).exp(t/\tau)] = A^m \sin(w_0.t + m\psi).exp(t/\tau) \quad (\text{I-19})$$

Avec

$$A = \left| \frac{1}{\tau} + i.w_0 \right|, \text{ et } \psi = Arg\left(\frac{1}{\tau} + i.w_0\right) \quad (\text{I-20})$$

I.6 Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire

Dans ce qui suit nous allons présenter quelque méthodes d'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire, avec un intérêt particulier à la méthode de la fonction singulière [10] qui sera entièrement détaillée dans le chapitre II.

I.6.1 Méthode Générale d'approximation des opérateurs intégrro-différentiels d'ordre fractionnaire

En général [6], une approximation rationnelle de la fonction $H(s) = s^m$ peut être obtenue en utilisant l'expansion des fractions continues des fonctions :

$$s^m = \begin{cases} H_h(s) = (1+s)^m; & \text{si } \omega \gg 1 \\ H_l(s) = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{-m}; & \text{si } \omega \ll 1 \end{cases} \quad (\text{I-21})$$

Où $H_h(s)$ est l'approximation pour les hautes fréquences ($\omega \gg 1$), et $H_l(s)$ l'approximation pour les basses fréquences ($\omega \ll 1$).

I.6.2 Méthode de Carlson [6]

Cette méthode se base sur l'hypothèse suivante :

$$(H(s))^{1/m} = s \quad (\text{I-22})$$

La méthode de l'itérative de newton mènera à une séquence d'approximations de $H_i(s)$ commencer de la valeur initiale $H_0(s) = 1$, une fonction rationnelle approximée est obtenue sous la forme :

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{\left(\frac{1}{m} - 1\right)(H_{i-1}(s))^{1/m} + \left(\frac{1}{m} + 1\right)s}{\left(\frac{1}{m} + 1\right)(H_{i-1}(s))^{1/m} + \left(\frac{1}{m} - 1\right)s} \quad (\text{I-23})$$

I.6.3 Méthode de Matsuda

La méthode proposée dans [6] est basée sur l'approximation d'une fonction irrationnelle par une fonction rationnelle obtenue par la CFE et l'ajustement de la fonction originale dans un ensemble de points logarithmiquement espacés. En supposant que les points choisis sont $s_k, k = 0,1,2,\dots$, l'approximation prend la forme :

$$H(s) = a_0(s) + \frac{s - s_0}{a_1(s) + a_2(s) + a_3(s) + \dots}, \quad (\text{I-24})$$

$$\text{ou } a_i = v_i(s_i), \quad v_0(s) = H(s), \quad v_{i+1} = \frac{s - s_i}{v_i(s) - a_i} \quad (\text{I-25})$$

I.6.4 La méthode d'Oustaloup

La méthode [2];[6];[16] est basée sur l'approximation de la fonction de la forme:

$$H(s) = s^m, \quad m \in R^+ \quad (\text{I-26})$$

Par la fonction rationnelle suivante :

$$\widehat{H}(s) = C \prod_{k=-N}^N \frac{1 + s/\omega_k}{1 + s/\omega'_k} \quad (\text{I-27})$$

En utilisant les formules de synthèse suivantes :

$$\omega'_0 = \alpha^{-0.5} \omega_u \ ; \quad \omega_0 = \alpha^{0.5} \omega_u \quad (\text{I-28})$$

$$\frac{\omega'_{k+1}}{\omega'_k} = \frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \alpha\eta > 1 \ ; \ \frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \eta > 1 \ ; \ \frac{\omega_k}{\omega'_k} = \alpha > 0 \quad (\text{I-29})$$

$$N = \frac{\log(\omega_N/\omega_0)}{\log(\alpha\eta)} \ ; \ m = \frac{\log \alpha}{\log(\alpha\eta)} \quad (\text{I-30})$$

Avec ω_u la fréquence du gain unité tel que, $\omega_u = \sqrt{\omega_h \omega_b}$ ω_h et ω_b sont les fréquences transitoires hautes, et basse respectivement.

I.6.5 La méthode de Charef

Cette méthode proposée dans [10], est basée sur l'approximation d'une fonction de la forme :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^m} \quad (\text{I-31})$$

avec $0 < m < 1$, on peut réécrire la fonction de l'équation (I-31) comme suit:

$$\widehat{H}(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^m} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{I-32})$$

où $(N + 1)$ est le nombre total des singularités qui peut être déterminé par la bande de fréquences du système. L'équation (I-32) peut être tronquée à un nombre fini N , et l'approximation devient :

$$\widehat{H}(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^m} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{I-33})$$

Les pôles et les zéros de la fonction de singularités peuvent être obtenus comme suit :

$$p_0 = p_T \sqrt{b} \ , \ p_i = p_0 (a.b)^i \ , \ z_i = a.p_0 (a.b)^i \quad (\text{I-34})$$

Avec

$$a = 10^{\lfloor y/10(1-m) \rfloor}, b = 10^{\lfloor y/10.m \rfloor}, a.b = 10^{\lfloor y/10m(1-m) \rfloor}, N = \text{integer} \left[\frac{\log(\omega_{\max} / p_0)}{\log(a.b)} \right] + 1 \quad (\text{I-35})$$

Ou y est l'erreur d'approximation et ω_{\max} est la bande de fréquence d'approximation.

Chapitre II

Aproximation des Opérateur D'ordre fractionnaire

Approximation Analogique Des Opérateurs d'Ordre Fractionnaire

II.1 Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire

La fonction de transfert de l'opérateur intégrale d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$H_I(s) = \frac{1}{s^m} \quad (\text{II-1})$$

Avec $s = j\omega$ la fréquence complexe et m est un nombre positif tel que $0 < m < 1$.

Dans une bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$, cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modélé par un pôle à puissance fractionnaire (PPF) comme suit :

$$H(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \quad (\text{II-2})$$

Si on suppose que pour $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$ on a $\omega \gg \omega_c$, on peut écrire :

$$H(s) = \frac{K_I}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^m} = \frac{K_I \omega_c^m}{s^m} = \frac{1}{s^m} = H_I(s) \quad (\text{II-3})$$

Avec $K_I = (1/\omega_c^m)$ et ω_c est la fréquence de coupure du PPF qui est obtenue à partir de la basse fréquence ω_b par la relation $\omega_c = 0.01\omega_b$.

Dans le but de représenter le PPF de l'équation (II-2), et par conséquent l'intégrateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction rationnelle [10],[17]. La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de -20dB/dec sur le tracé de Bode du PPF par un nombre de lignes en zig-zag produisant une alternance de pente -20 dB/dec et 0 dB/dec correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négative du plan s tel que $p_0 < z_0 < p_1 < z_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$. D'où l'approximation suivante :

$$H(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{II-4})$$

Les p_i et les z_i sont les pôles et les zéros de l'approximation. En utilisant une méthode graphique [10], les pôles et les zéros de l'approximation s'avèrent sous une forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation commence par une erreur d'approximation y en dB et une bande de fréquence d'approximation $\omega_{\max} = 100\omega_h$. Le nombre de pôles d'approximation N est donné par [10] :

$$N = \text{partie entiere} \left[\frac{\log \left[\frac{\omega_{\max}}{p_0} \right]}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (\text{II-5})$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$p_i = (ab)^i p_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N$$

$$z_i = (ab)^i ap_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N-1$$

Où a et b sont appelés les rapports de position, leurs expressions en fonction de y et m sont données par :

$$a = 10^{\left(\frac{y}{10(1-m)}\right)}, \quad b = 10^{\left(\frac{y}{10m}\right)}$$

Et le premier pôle p_0 et le premier zéro z_0 sont donnés par [10] :

$$p_0 = \omega_c \sqrt{b}, \quad z_0 = ap_0$$

Afin de connaître la contribution de chaque pôle au processus de relaxation. On doit décomposer la fonction rationnelle en somme de fractions élémentaires :

$$H(s) = K_f \cdot \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i ap_0} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i p_0} \right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i p_0} \right)} \quad (\text{II-6})$$

Où les coefficients h_i sont les résidus et qui sont déterminés par :

$$h_i = K_f \cdot \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j ap_0} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 - \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j p_0} \right)} = K_f \cdot \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^{i-j}}{a} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 - (ab)^{i-j} \right)}, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{II-7})$$

II.1.1 Exemple d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

Pour le but d'illustration prenons un exemple numérique pour un intégrateur d'ordre fractionnaire représenté par :

$$H_I(s) = \frac{1}{s^{0.55}}$$

Pour obtenir la fonction rationnelle d'approximation de cet opérateur d'ordre fractionnaire, on suppose que la bande de fréquence $[\omega_b, \omega_h] = [0.001 \text{ rad/s}, 0.1 \text{ rad/s}]$; et pour une erreur $\gamma = 1 \text{ dB}$, $\omega_c = 0.01 \omega_b = 0.00001 \text{ rad/s}$ et $K_I = 562.3413$ par suite le modèle PPF de cet opérateur d'ordre fractionnaire est donné par :

$$H(s) = \frac{562.3413}{\left(1 + \frac{s}{1 \times 10^{-5}}\right)^{0.55}}$$

On choisit l'erreur d'approximation du PPF par une fonction rationnelle $\gamma = 1 \text{ dB}$ et la bande fréquentielle d'approximation $\omega_{\max} = 100 \omega_h = 10 \text{ rad/s}$, les paramètres a , b , p_0 , z_0 et N peuvent être facilement calculés et ils sont donnés comme suit :

$a = 1.6681$, $b = 1.5199$, $p_0 = 1.2328 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$, $z_0 = 2.0565 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ et $N = 15$.

Les pôles et les zéros de l'approximation sont donnés par les équations suivantes:

$$p_i = 1.2328 \times 10^{-5} (2.5354)^i, \text{ pour } i=0,1,\dots,15$$

$$z_i = 2.0565 \times 10^{-5} (2.5354)^i, \text{ pour } i=0,1,\dots,14$$

Les tracés de Bode de la fonction rationnelle d'approximation sont présentés dans la figure suivante.

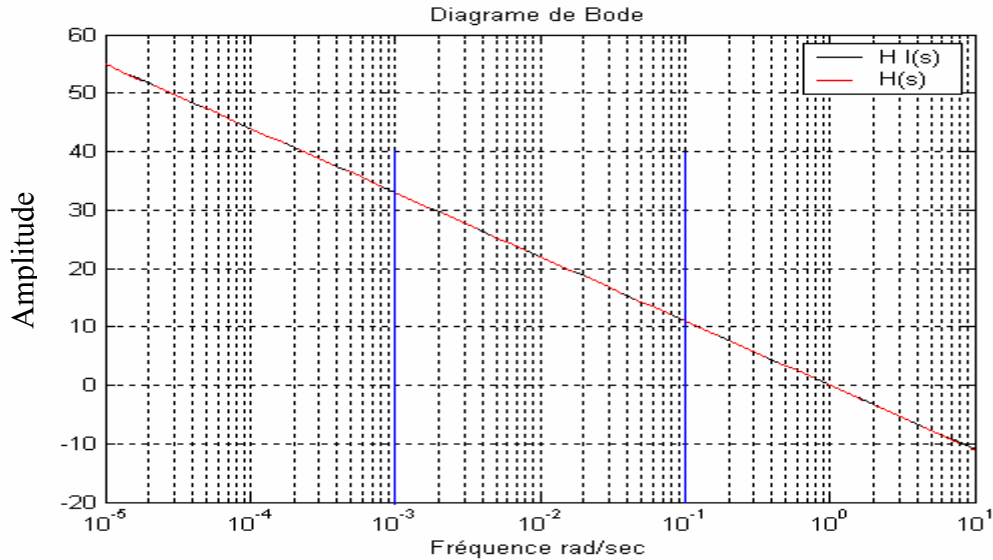


Figure (II-1) : Tracés de Bode de l'amplitude de l'intégrateur d'ordre Fractionnaire $s^{-0.55}$ et de la fonction rationnelle de son d'approximation

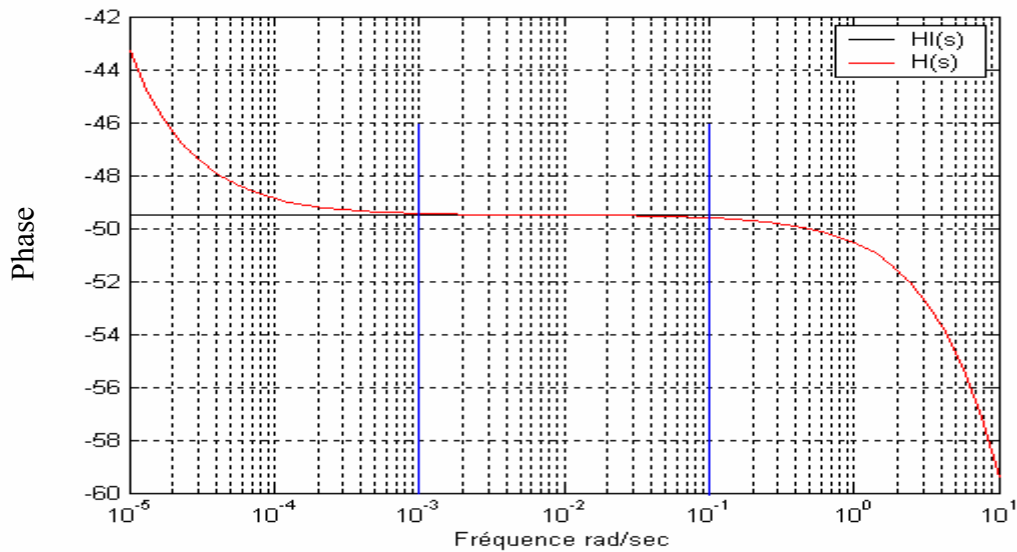


Figure (II-2) : Tracés de Bode de la phase de l'intégrateur d'ordre fractionnaire $s^{-0.55}$ et de la fonction rationnelle de son d'approximation

On peut observé facilement que le tracé de Bode de la fonction de transfert de l'opérateur d'ordre fractionnaire et leur approximation sont superpose dans la plage de fréquence $[0.001\text{rad/s}, 0.1\text{rad/sec}]$, la pente de la fonction d'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire à une pente de -11dB/dec (-20m), et la phase de -49.5° , $(-m.\pi / 2)$ ce qui implique la justesse de l'approximation.

II.2 Approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire

La fonction de transfert de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_D(s) = s^m \quad (\text{II-8})$$

Avec $s = j\omega$: la fréquence complexe et m : est un nombre positive tel que $0 < m < 1$. Dans une bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$ cet opérateur peut être modelé par un zéro à puissance fractionnaire (ZPF) comme suit [17] :

$$G(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c} \right)^m \quad (\text{II-9})$$

Si on suppose que pour $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$ on a $\omega \gg \omega_c$, on peut écrire :

$$G(s) = K_D \left(\frac{s}{\omega_c} \right)^m = \frac{K_D}{\omega_c^m} s^m = s^m \quad (\text{II-10})$$

Avec $K_D = \omega_c^m$ et ω_c est la fréquence de coupure de ZPF qui est obtenue à partir de la basse fréquence ω_b par la relation $\omega_c = 0.01\omega_b$.

Dans le but de représenter le zéro d'ordre fractionnaire de l'équation (II-9), et par conséquent le dérivateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une rationnelle. La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de 20mdB/dec sur le tracé de Bode du ZPF par un nombre de ligne en Zig-Zag produisant une alternance de pente 20 dB/dec et 0 dB/dec correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négative du plan s tel que $z_0 < p_0 < z_1 < p_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$ [17]. D'où l'approximation suivante :

$$G(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c} \right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i} \right)} \quad (\text{II-11})$$

En utilisant une méthode graphique simple [10], les pôles et les zéros de l'approximation s'avèrent sous une forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation a commencé par une erreur d'approximation y en dB et une bande de fréquence d'approximation $\omega_{\max} = 100\omega_h$. Le nombre de pôles d'approximation N est donné par [17]:

$$N = \text{partie entiere} \left[\frac{\log \left[\frac{\omega_{\max}}{p_0} \right]}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (\text{II-12})$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$z_i = (ab)^i z_0, \text{ pour } i = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$p_i = (ab)^i az_0, \text{ pour } i = 0, 1, 2, \dots, N$$

Avec : $z_0 = \omega_c \sqrt{b}$ et $p_0 = az_0$.

Par conséquent, la fonction rationnelle d'approximation dans une bande de fréquence donnée sera :

$$G_D(s) = s^m = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c} \right)^m \approx K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i z_0} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i az_0} \right)} \quad (\text{II-13})$$

Pour des raisons concernant la réalisation, on va développer $\frac{G(s)}{s}$ en fonctions élémentaires, alors :

$$\frac{G_D(s)}{s} = \frac{1}{s} K_D \prod_{i=0}^N \frac{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i z_0} \right)}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i az_0} \right)} \quad (\text{II-14})$$

Calculant les résidus des pôles, on obtient :

$$G_D(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i} \right)} \quad (\text{II-15})$$

Avec $G_0 = K_D$, et

$$g_i = K_D \frac{\prod_{j=0}^N (1 - (ab)^{(i-j)} a)}{(- (ab)^i az_0) \prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^{(i-j)})} \text{ Pour } i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{II-16})$$

II.2.1 Exemple d'un dérivateur d'ordre fractionnaire

Soit l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire suivant :

$$G_D(s) = s^{0.35}$$

De la même façon que l'exemple de PPF, le modèle ZPF du dérivateur d'ordre fractionnaire est donné par :

$$G(s) = 1 \left(1 + \frac{s}{1} \right)^{0.35}$$

Avec : $K_D=1$, $[\omega_b, \omega_h] = [100, 10000 \text{ rad/s}]$, $\omega_c = 0.01 \omega_b = 1$

On choisit l'erreur du ZPF par une fonction rationnelle $y = 1\text{dB}$ et la bande fréquentielle d'approximation $\omega_{\max} = 100\omega_h = 10^6 \text{ rad/s}$, les paramètres a, b, p_0, z_0

et N peuvent être facilement calculés et ils sont donnés comme suit :

$a=1.4251$, $b=1.9307$, $p_0 = 1.9802 \text{ rad/s}$, $z_0 = 1.3895 \text{ rad/s}$ et $N=14$

Les pôles et les zéros de l'approximation sont donnés par les équations suivantes :

$$p_i = 1.9802(2.7514)^i, \text{ pour } i=0,1,\dots,14$$

$$z_i = 1.3895(2.7514)^i, \text{ pour } i=0,1,\dots,14$$

Les tracés de Bode de la fonction rationnelle d'approximation sont présentés dans la figure suivante

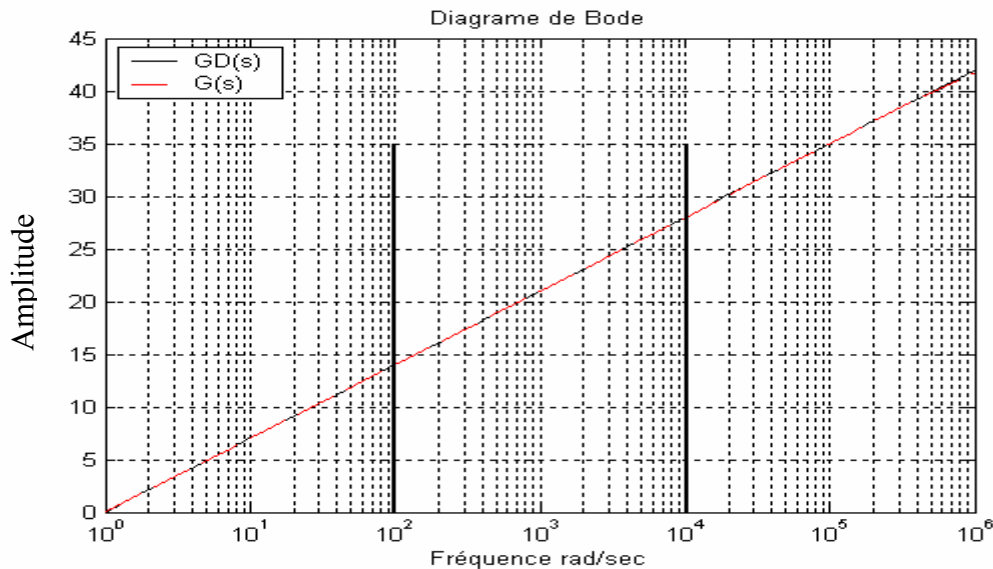


Figure (II-3) : Tracés de Bode de l'amplitude du dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{0.35}$ et la fonction rationnelle de son d'approximation

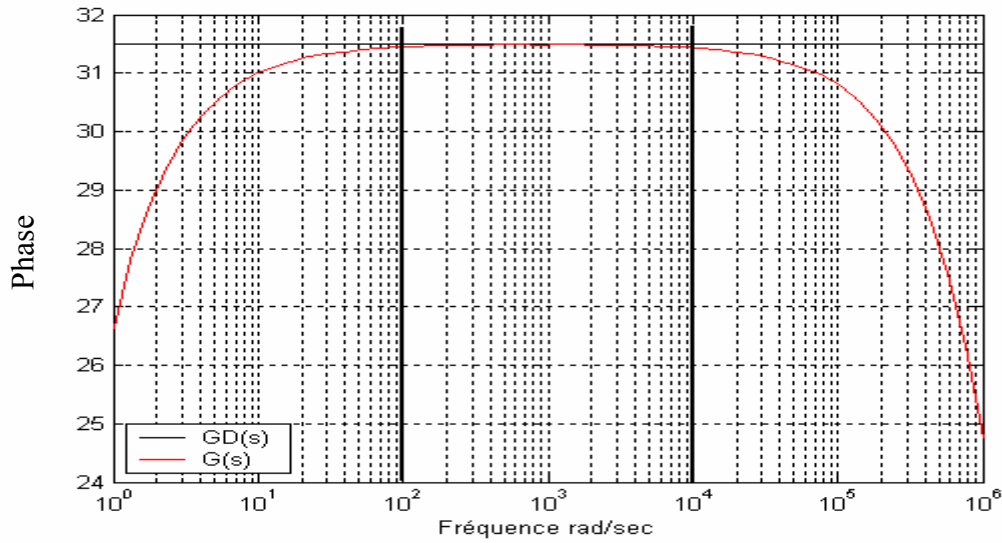


Figure (II-4) : Tracés de Bode de la phase du dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{0.35}$ et la fonction rationnelle de son d'approximation

On voit bien que dans la plage de fréquence [100,10000rad/s], la pente de la fonction d'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire à une pente de 7dB/dec (20m), et la phase de 31.5° ($m.\pi/2$), ce qui implique la justesse de l'approximation.

II.3 Implémentation par des circuits électriques analogiques

L'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire dans une bande fréquentielle donnée par une fonction rationnelle a la forme :

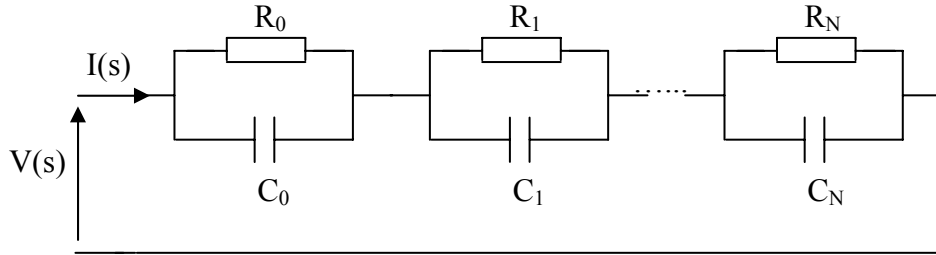
$$H(s) = \frac{1}{s^m} = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \approx K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \tag{II-17}$$

La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle approximant l'intégrateur d'ordre fractionnaire $H_I(s)$ donne :

$$H(s) = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \tag{II-18}$$

Avec les h_i sont les résidus des pôles donnés par l'équation (II-7),

Cet équation correspond à l'impédance d'un réseau RC du type Foster 1^{ère} forme dont le schéma est représenté comme suit :



L'impédance de ce réseau est :

$$Z(s) = \sum_{i=0}^N \left(\frac{R_i}{1 + sR_i C_i} \right) \quad (\text{II-19})$$

Alors

$$\left. \begin{array}{l} R_i C_i = \frac{1}{p_i} \\ R_i = h_i \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_i = h_i \\ C_i = \frac{1}{p_i h_i} \end{array} \right. \text{ Pour } i=0,1,\dots,N \quad (\text{II-20})$$

De la même façon, l'approximation de l'opérateur dérivée d'ordre fractionnaire dans une bande fréquentielle donnée par une fonction rationnelle a la forme :

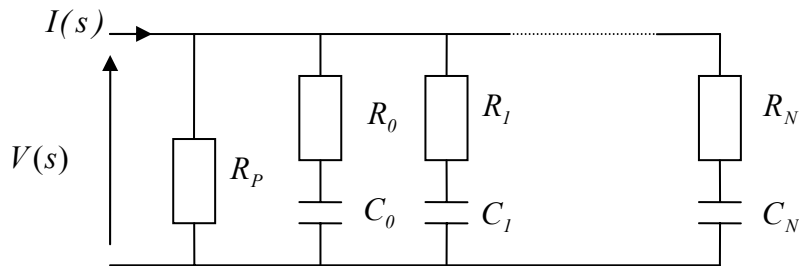
$$G(s) = K_D s^m = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c} \right)^m = K_D \cdot \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i} \right)} \quad (\text{II-21})$$

La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle approximant le dérivateur d'ordre fractionnaire $G_D(s)$ donne :

$$G(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i} \right)} \quad (\text{II-22})$$

Avec les g_i sont les résidus des pôles donnés par l'équation (II-16)

Cette équation correspond à l'admittance d'un réseau du type Foster 2^{ème} forme dont le schéma est représenté comme suit :



L'admittance de ce réseau est de la forme :

$$Y(s) = \frac{1}{R_p} + \sum_{i=0}^N \frac{sC_i}{1 + sR_i C_i} \quad (\text{II-23})$$

Alors

$$\left. \begin{array}{l} p_i = \frac{1}{R_i C_i} \\ g_i = C_i \\ G_0 = \frac{1}{R_p} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_i = g_i \\ R_i = \frac{1}{g_i p_i} \\ R_p = \frac{1}{G_0} \end{array} \right. \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (\text{II-24})$$

chapitre III

Implémentation Analogique

Implémentation Analogique Variable

III.1 Introduction

Toutes les implémentations analogiques existantes dans la littérature de l'intégrateur d'ordre fractionnaire $H_I(s) = \frac{1}{s^m}$ et du différentiateur d'ordre fractionnaire $G_D(s) = s^m$ sont des implémentations fixes, c'est-à-dire que les circuits analogiques représentant ces opérateurs sont des fonctions de l'ordre m . C'est-à-dire que lorsqu'on varie l'ordre m les implémentations analogiques ne sont plus valide, il faut donc changer toutes les implémentations analogiques.

Alors, le problème qui nous intéresse est celui de l'implémentation analogique de ces opérateurs d'ordre fractionnaire par des implémentations d'ordre variable, c'est-à-dire que les circuits analogiques représentant ces opérateurs sont indépendants de l'ordre m . C'est-à-dire que lorsqu'on varie l'ordre m l'implémentation analogique reste toujours valide. Et comme on l'a déjà mentionné l'implémentation analogique d'ordre variable de ces opérateurs d'ordre fractionnaire n'existe pas par contre leur implémentation numérique d'ordre variable peut être obtenue par l'utilisation de la fameuse technique dite structure de Farrow [9].

III.2 Implémentation numérique en structure de Farrow

Soit $H(z)$ la fonction de transfert d'un filtre numérique RIF qui est donné par :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \sum_{k=0}^L h_p(k) z^{-k} \quad (\text{III.1})$$

où $h_p(k)$, $0 \leq k \leq L$, sont les coefficients de la réponse impulsionnelle de $H(z)$ et qui sont tous fonction d'un certain paramètre p .

Farrow a proposé d'exprimer chaque coefficient $h_p(k)$ du filtre RIF sous la forme d'un polynôme en p d'ordre M comme suit [9]:

$$h_p(k) = \sum_{j=0}^M a_{kj} p^j \quad (\text{III.2})$$

où tous coefficients a_{kj} du polynôme sont indépendants du paramètre p . La fonction de transfert $H(z)$ peut donc être réécrite comme suit :

$$H(z) = \sum_{k=0}^L \left\{ \sum_{j=0}^M a_{kj} p^j \right\} z^{-k} = \sum_{j=0}^M \left\{ \sum_{k=0}^L a_{kj} z^{-k} \right\} p^j = \sum_{j=0}^M G_j(z) \cdot p^j \quad (\text{III.3})$$

où

$$G_j(z) = \sum_{k=0}^L a_{kj} z^{-k} \quad , \quad 0 \leq j \leq M \quad (\text{III.4})$$

sont les fonctions de transfert de filtres numériques RIF à coefficients constants et indépendants du paramètre p . A partir de l'équation (III.3), la fonction $H(z)$ est mise sous la forme suivante :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = G_0(z) + p[G_1(z) + p[G_2(z) + \dots + p[G_{M-1}(z) + pG_M(z)]] \dots] \quad (\text{III.5})$$

La fonction de transfert $H(z)$ du filtre numérique peut maintenant être implémenter par une structure dite structure de Farrow de la figure (III.1) comme suit :

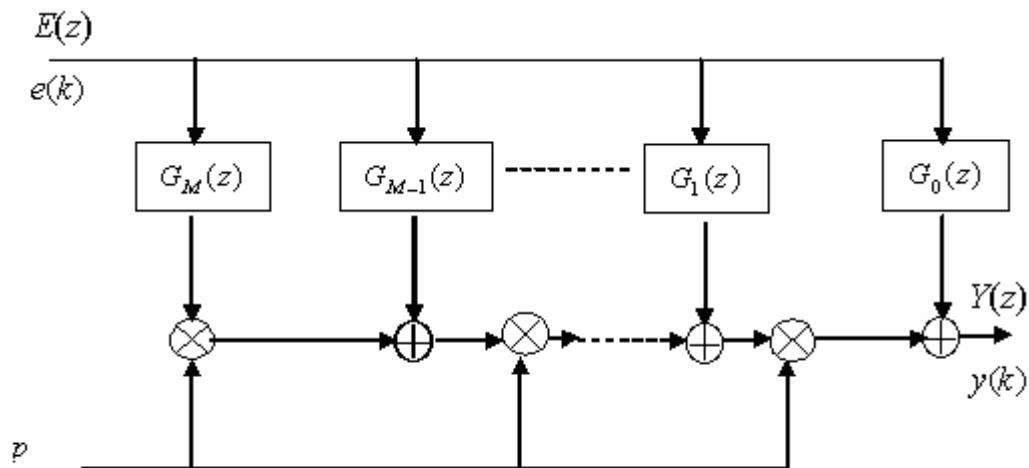


Figure (III.1) : Implémentation en structure de Farrow du filtre numérique RIF

Avec cette structure on peut dire que le filtre $H(z)$ a une implémentation variable en paramètre p , c'est-à-dire que avec la même implémentation on peut avoir $H(z)$ pour différente valeur du paramètre p . Alors, en s'inspirant de cette structure de Farrow dans le domaine numérique nous allons dérivés une structure similaire pour les opérateurs d'ordre fractionnaire dans le domaine analogique.

III.3 Intégrateur d'ordre fractionnaire variable

De l'équation (II.6), l'approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire est donnée sous la forme suivante :

$$H(s) = \frac{1}{s^m} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i(m)}{\left(1 + \frac{s}{p_i(m)}\right)} \quad (\text{III.6})$$

où les pôles $p_i(m)$ et les résidus $h_i(m)$, pour $0 \leq i \leq N$, sont des fonctions de l'ordre fractionnaire m ($0 < m < 1$). En s'inspirant de la structure de Farrow dans le domaine numérique, on fait une interpolation polynomiale en m pour tous les coefficients $h_i(m)$ comme suit :

$$h_i(m) = \sum_{k=0}^M a_{ik} m^k \quad (\text{III.7})$$

où a_{ik} les coefficients du polynôme en m de $h_i(m)$ sont indépendants du paramètre m . La fonction de transfert $H(s)$ peut donc être réécrite comme suit :

$$H(s) = \sum_{i=0}^N \frac{\sum_{k=0}^M a_{ik} m^k}{\left(1 + \frac{s}{p_i(m)}\right)} = \sum_{k=0}^M m^k \sum_{i=0}^N \frac{a_{ik}}{\left(1 + \frac{s}{p_i(m)}\right)} \quad (\text{III.8})$$

alors,

$$H(s) = \sum_{k=0}^M m^k G_k(s) \quad (\text{III.9})$$

avec

$$G_k(s) = \sum_{i=0}^N \frac{a_{ik}}{\left(1 + \frac{s}{p_i(m)}\right)}, \quad \text{pour } 0 \leq k \leq M \quad (\text{III.10})$$

Comme on peut le remarquer que les fonctions $G_k(s)$, pour $0 \leq k \leq M$, sont toutes dépendantes de l'ordre fractionnaire m parce que les pôles $p_i(m)$ dépendent de m . Par conséquent la forme de $H(s)$ de l'équation (III.9) ne peut pas être implémenter sous la forme de la structure de Farrow. Alors pour que toutes les fonctions $G_k(s)$ soient indépendantes de l'ordre m il faut que tous les pôles $p_i(m)$ soient fixes, c'est-à-dire lorsqu'on fait varier l'ordre m on garde toujours les mêmes pôles de l'approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire.

Dans la section (II.1), la méthode de calcul des pôles de l'approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire par une fonction rationnelle est exposée. Donc, pour une erreur y en dB choisie, les pôles de l'approximation pour un certain ordre m sont donnés par :

$$p_i(m) = (ab)^i p_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{III.11})$$

où les paramètres a et b sont fonction de y et m et sont donnés par :

$$a = 10^{\left(\frac{y}{10(1-m)}\right)}, \quad b = 10^{\left(\frac{y}{10m}\right)}$$

et p_0 est le premier pôle d'approximation défini préalablement. Pour un second intégrateur d'ordre fractionnaire m_1 ($0 < m_1 < 1$) et pour une erreur y_1 en dB choisie,

les pôles de l'approximation sont aussi donnés par :

$$p_i(m_1) = (a_1 b_1)^i p_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{III.12})$$

où a_1 et b_1 sont données par :

$$a_1 = 10^{\left(\frac{y_1}{10(1-m_1)}\right)}, \quad b_1 = 10^{\left(\frac{y_1}{10m_1}\right)}$$

Pour garantir l'égalité des pôles des équations (III.11) et (III.12) des deux approximations quelque soit les ordres $m \neq m_1$ on doit avoir $p_i(m_1) = p_i(m)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N$), c'est-à-dire :

$$p_i(m_1) = p_i(m) \Rightarrow (ab)^i p_0 = (a_1 b_1)^i p_0 \Rightarrow ab = a_1 b_1$$

cela conduit à :

$$10^{\left[\frac{y}{10(1-m)}\right]} x 10^{\left[\frac{y}{10m}\right]} = 10^{\left[\frac{y_1}{10(1-m_1)}\right]} x 10^{\left[\frac{y_1}{10m_1}\right]}$$

donc les erreurs d'approximation y et y_1 et les ordres m et m_1 sont liés par la relation suivante :

$$y_1 = y \frac{m_1(1-m_1)}{m(1-m)} \quad (\text{III.13})$$

Une fois les pôles d'approximation fixés, ils deviennent indépendants de l'ordre m , donc les fonctions $G_k(s)$ de l'équation (III.10) deviennent toutes indépendantes de l'ordre fractionnaire m . Par conséquent l'équation (III.9) peut être implémenter sous la forme de la structure de Farrow. Alors on a réalisé un intégrateur d'ordre fractionnaire à ordre variable.

III.3.1 Calcul des coefficients de l'interpolation polynomiale

L'interpolation polynomiale en m pour tous les coefficients $h_i(m)$ de l'équation (III.6) est donnée par l'équation (III.7) comme suit :

$$h_i(m) = \sum_{k=0}^M a_{ik} m^k \quad , \quad \text{pour } 0 \leq i \leq N$$

où a_{ik} sont les $(M+1)$ coefficients du polynôme en m de $h_i(m)$. Pour déterminer ces coefficients on doit résoudre le système d'équations linéaires à $(M+1)$ inconnus obtenu en choisissant (N_1+1) points différents de l'ordre m . On cherche donc l'unique polynôme de degré M passant par les points $\{m_j, h_i(m_j)\}$. Les points m_j ($j= 0, 1, \dots, N_1$) étant tous distincts. Donc pour $i=0, 1, \dots, N$, on aura :

$$h_i(m_j) = \sum_{k=0}^M a_{ik} m_j^k \quad \text{(III.14)}$$

Alors pour $j= 0, 1, \dots, N_1$ et $i= 0, 1, \dots, N$, on peut écrire :

pour $j=0$

$$\begin{aligned} h_0(m_0) &= a_{00} + a_{01}.m_0^1 + \dots + a_{0M}.m_0^M \\ h_1(m_0) &= a_{10} + a_{11}.m_0^1 + \dots + a_{1M}.m_0^M \\ &\vdots \\ h_N(m_0) &= a_{N0} + a_{N1}.m_0^1 + \dots + a_{NM}.m_0^M \end{aligned}$$

pour $j=1$

$$\begin{aligned} h_0(m_1) &= a_{00} + a_{01}.m_1^1 + \dots + a_{0M}.m_1^M \\ h_1(m_1) &= a_{10} + a_{11}.m_1^1 + \dots + a_{1M}.m_1^M \\ &\vdots \\ h_N(m_1) &= a_{N0} + a_{N1}.m_1^1 + \dots + a_{NM}.m_1^M \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

pour $j= N_1$

$$\begin{aligned} h_0(m_{N_1}) &= a_{00} + a_{01}.m_{N_1}^1 + \dots + a_{0M}.m_{N_1}^M \\ h_1(m_{N_1}) &= a_{10} + a_{11}.m_{N_1}^1 + \dots + a_{1M}.m_{N_1}^M \\ &\vdots \\ h_N(m_{N_1}) &= a_{N0} + a_{N1}.m_{N_1}^1 + \dots + a_{N_1M}.m_{N_1}^M \end{aligned}$$

Soit sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} h_0(m_0) & h_1(m_0) & \dots & h_N(m_0) \\ h_0(m_1) & h_1(m_1) & \dots & h_N(m_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_0(m_{N_1}) & h_1(m_{N_1}) & \dots & h_N(m_{N_1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & m_0 & m_0^2 & \dots & m_0^M \\ 1 & m_1 & m_1^2 & \dots & m_1^M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & m_{N_1} & m_{N_1}^2 & \dots & m_{N_1}^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} & a_{10} & \dots & a_{N0} \\ a_{01} & a_{11} & \dots & a_{N1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{0M} & a_{1M} & \dots & a_{NM} \end{bmatrix} \quad (\text{III.15})$$

On peut écrire le système d'équations sous la forme :

$$H = U A \quad (\text{III.16})$$

Comme la matrice U n'est pas en général une matrice carrée, alors on a :

$$A = (U^T U)^{-1} U^T H \quad (\text{III.17})$$

La matrice U est une matrice de Vandermonde alors la matrice carrée $(U^T U)$ est inversible tant que les points m_j ($j=0, 1, \dots, N_1$) sont distincts. Vu la complexité du calcul de matrice A de l'équation (III.17), la méthode utilisée pour résoudre ce problème d'interpolation est la technique d'ajustement de la courbe dans le but d'obtenir un polynôme de degré M qui approxime chaque résidu $h_i(m)$ ($i=0, 1, \dots, N$), dans le sens des moindres carrés. Pour ce but, on a utilisé la routine de Matlab dénommée 'polyfit'.

III.3.2 Exemple illustratif

Comme exemple on considère la conception d'un intégrateur d'ordre fractionnaire variable dans la bande fréquentielle $[\omega_b, \omega_h] = [1000 \text{ rad/s}, 100000 \text{ rad/s}]$. L'approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire est donnée sous la forme suivante :

$$H(s) = \frac{1}{s^m} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i(m)}{\left(1 + \frac{s}{p_i(m)}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{\sum_{k=0}^M a_{ik} m^k}{\left(1 + \frac{s}{p_i(m)}\right)} = \sum_{k=0}^M m^k \sum_{i=0}^N \frac{a_{ik}}{\left(1 + \frac{s}{p_i(m)}\right)}$$

Pour réaliser l'intégrateur d'ordre fractionnaire variable, il faut en premier lieu fixer les pôles $p_i(m)$ de l'approximation puis calculer les coefficients a_{ik} . Pour fixer les pôles, on choisit l'ordre $m = 0.95$. Donc, pour une erreur $y=0.1$ dB, $\omega_c=0.01\omega_b=10$ rad/s et $\omega_{max}=100\omega_h=1000000$ rad/s, les paramètres p_0 , a , b et N de l'approximation sont donnés par :

$$a = 10^{\left(\frac{y}{10^{(1-m)}}\right)} = 1.5849, \quad b = 10^{\left(\frac{y}{10^m}\right)} = 1.0245, \quad p_0 = \omega_c \sqrt{b} = 10.1219 \text{ et } N=29$$

Alors les pôles p_i de l'approximation sont donnés par :

$$p_i = 10.1219 (1.6237)^i, \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, N$$

Et de l'équation (II.7) les coefficients $h_i(0.95)$ (pour $i=0, 1, \dots, N$) sont donnés par :

$$h_i(0.95) = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(1.6237)^{(i-j)}}{1.5849}\right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (1.6237)^{(i-j)})}$$

$$\text{Avec } K_I = \left(1 / \omega_c^m\right) = \left(1 / 10^{0.95}\right) = 0.1122.$$

Pour la conception d'un autre intégrateur d'ordre fractionnaire d'ordre donné m_1 ($0 < m_1 < 1$) tel que $m_1 \neq 0.95$ avec les mêmes pôles approximation p_i (pour $i=0, 1, \dots, N$) quel que soit la valeur de l'ordre m_1 , l'erreur d'approximation y_1 de l'équation (III.13) doit être égale à $y_1 = 2.1052 m_1(1 - m_1)$. Les paramètres a_1 , b_1 et N_1 de l'approximation sont donnés par :

$$a_1 = 10^{\left(\frac{y_1}{10^{(1-m_1)}}\right)}, \quad b_1 = 10^{\left(\frac{y_1}{10^{m_1}}\right)} \quad \text{et } N_1 = N = 29$$

Avec $(ab) = (a_1 b_1)$ et les coefficients $h_i(m_1)$ (pour $i=0, 1, \dots, N$) sont calculés par :

$$h_i(m_1) = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^{(i-j)}}{a_1}\right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^{(i-j)})}$$

Avec $K_I = \left(1 / \omega_c^m\right)$. Donc on aura :

$$h_i(m_1) = \left(\frac{1}{10^{m_1}}\right) \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(1.6237)^{(i-j)}}{a_1}\right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (1.6237)^{(i-j)})}$$

Le degré M du polynôme d'interpolation est choisi tel que l'erreur d'interpolation est inférieure à une valeur donnée pour une bonne approximation. Figures (III.2) - (III.5)

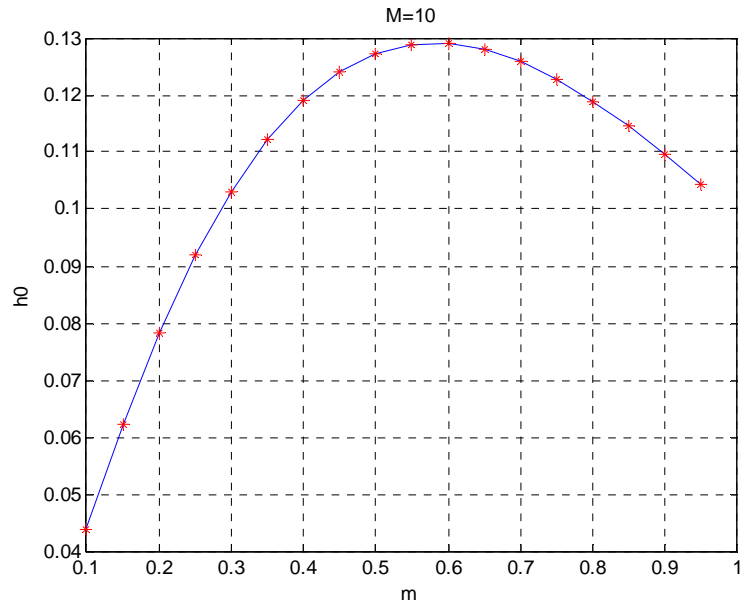


Figure (III.2) L'interpolation polynomiale au sens des moindres carrés de coefficient h_0 de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire.

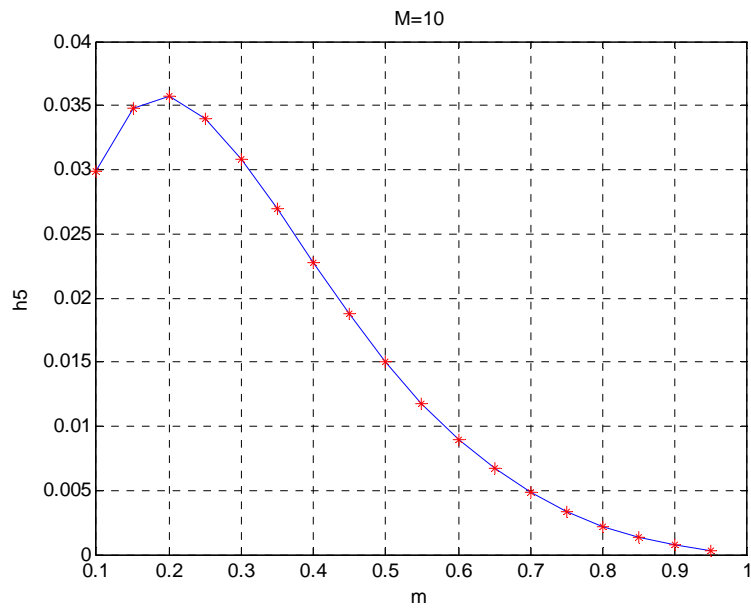


Figure (III.3) L'interpolation polynomiale au sens des moindres carrés de coefficient h_5 de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire.

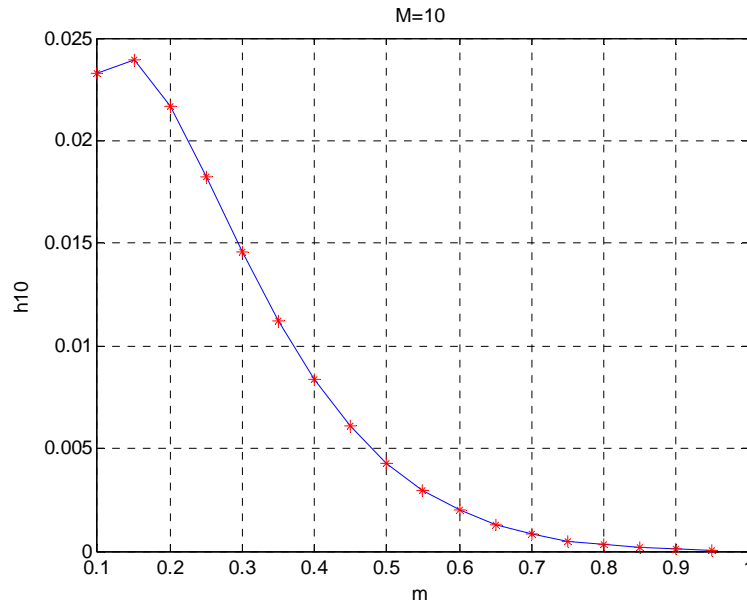


Figure (III.4) L'interpolation polynomiale au sens des moindres carrés de coefficient h_{10} de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire.

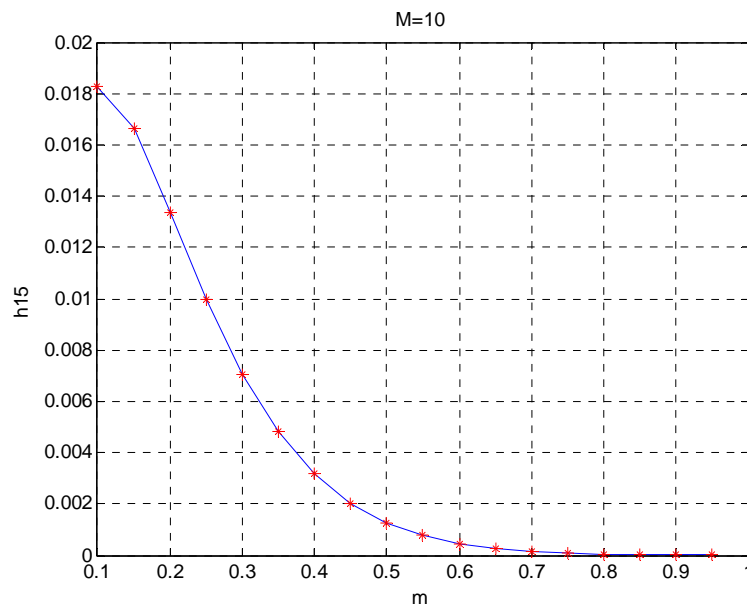


Figure (III.5) L'interpolation polynomiale au sens des moindres carrés de coefficient h_{15} de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire.

Les tracés de Bode (Module et phase) de la fonction de transfert de l'intégrateur d'ordre fractionnaire $H(s) = s^{-0.3}$ et de l'implémentation de l'intégrateur variable par une structure de Farrow pour $m = 0.3$ sont présentés dans les figures (III.6) et (III.7) suivantes:

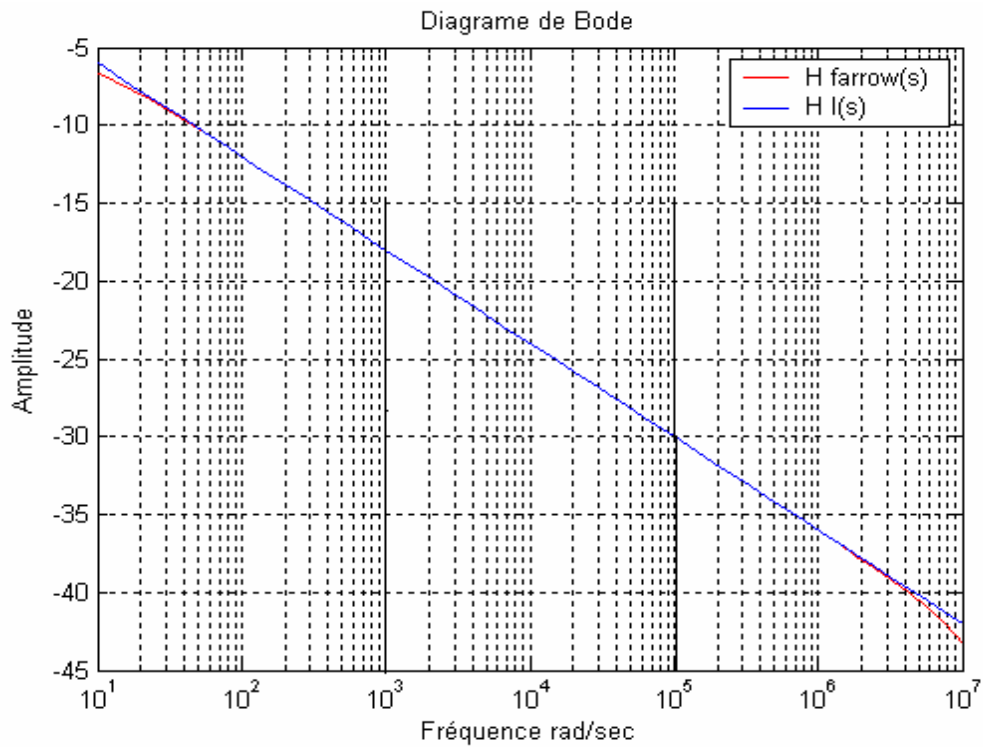


Figure (III.6) : Module de la fonction d'approximation de l'opérateur Intégrateur d'ordre fractionnaire $s^{-0.3}$ à la sortie de la structure de Farrow

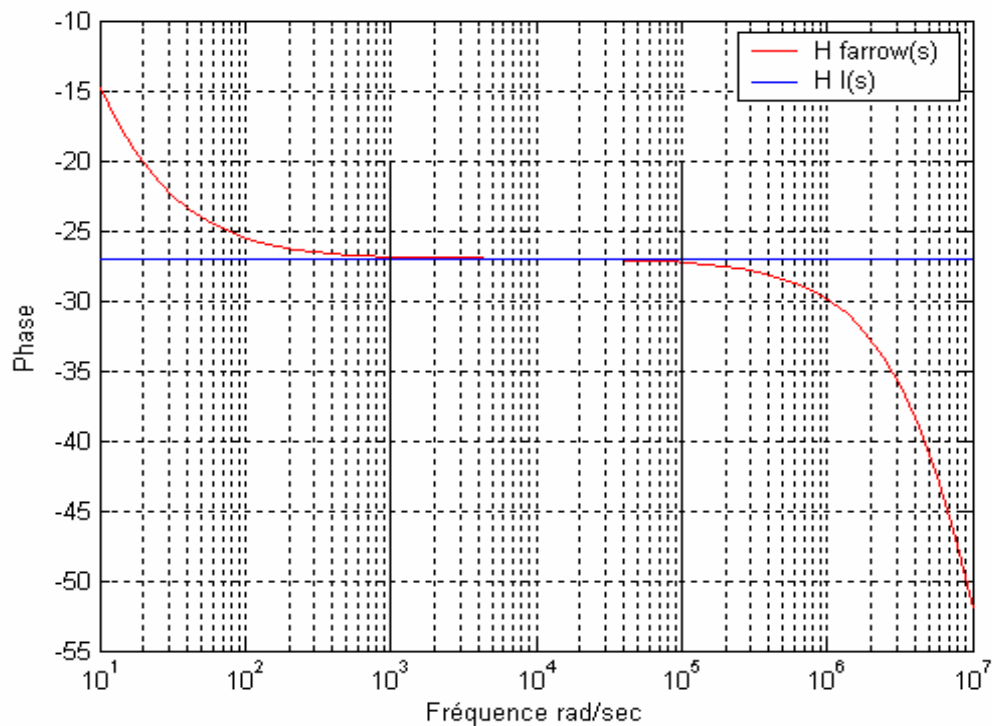


Figure (III.7) : Phase de la fonction d'approximation de l'opérateur Intégrateur d'ordre fractionnaire $s^{-0.3}$ à la sortie de la structure de Farrow

On peut facilement observer que le tracé de Bode de la fonction de transfert de l'opérateur d'ordre fractionnaire et sa décomposition en structure de Farrow sont superposées dans la plage de fréquence [1000, 100000 rad/sec], la fonction d'approximation et l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire ont des pentes de -6 dB/dec ($-20m$), et des phases de -27° ($-m\pi/2$) ce qui implique la justesse de l'approximation.

III.4 Dérivateur d'ordre fractionnaire variable

a partir de la fonction de décomposition de la fonction rationnelle en somme de fractions élémentaires [équation (II.15)] :

$$G(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{g_i(m)s}{\left(1 + \frac{s}{p_i(m)}\right)} \quad (\text{III.18})$$

où les pôles $p_i(m)$ et les résidus $g_i(m)$, pour $0 \leq i \leq N$, sont des fonction de l'ordre fractionnaire m ($0 < m < 1$). En s'inspirant de la structure de Farrow dans le domaine numérique, on fait une interpolation polynomiale en m pour tous les coefficients $g_i(m)$ comme suit :

:

$$g_i(m) = \sum_{k=0}^M a_{ik} m^k \quad (\text{III.19})$$

où les coefficients a_{ik} sont les coefficients de la fonction polynomiale $g_i(m)$ sont indépendants du paramètre m . la fonction de transfert peut être réécrite comme suit :

$$G(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^M \frac{a_{ik} m^k s}{1 + \frac{s}{p_i(m)}} \quad (\text{III.20})$$

$$\text{alors} \quad G(s) = G_0 + \sum_{k=0}^M m^k \sum_{i=0}^N \frac{a_{ik} s}{1 + \frac{s}{p_i(m)}} = G_0 + \sum_{k=0}^M m^k F_k(s) \quad (\text{III.21})$$

Sachant que les fonctions de transfert résultantes $F_k(s)$ sont des polynômes d'ordre N

$$F_k(s) = \sum_{i=0}^N \frac{a_{ik} s}{1 + \frac{s}{p_i(m)}} \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, \dots, M \quad (\text{III.22})$$

Comme on peut le remarquer que les fonctions $F_k(s)$, pour $0 \leq k \leq M$, sont toutes dépendantes de l'ordre fractionnaire m parce que les pôles $p_i(m)$ dépendent de m . Par conséquent le forme de $G(s)$ de l'équation (III.21) ne peut pas être implémenter sous la forme de la structure de Farrow. Alors pour que toutes les fonctions $F_k(s)$ soient indépendantes de l'ordre m il faut que tous les pôles $p_i(m)$ soient fixes, c'est-à-dire lorsqu'on fait varier l'ordre m on garde toujours les mêmes pôles de l'approximation de dérivateur d'ordre fractionnaire.

Dans la section (II.2), la méthode de calcul des pôles de l'approximation de dérivateur d'ordre fractionnaire par une fonction rationnelle est exposée. Donc, pour une erreur y en dB choisie, les pôles de l'approximation pour un certain ordre m sont donnés par :

$$p_i(m) = (ab)^i p_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{III.23})$$

où les paramètres a et b sont fonction de y et m et sont donnés par :

$$a = 10^{\left(\frac{y}{10(1-m)}\right)}, \quad b = 10^{\left(\frac{y}{10m}\right)}$$

et p_0 est le premier pôle d'approximation défini préalablement. Pour un second dérivateur d'ordre fractionnaire m_1 ($0 < m_1 < 1$) et pour une erreur y_1 en dB choisie, les pôles de l'approximation sont aussi donnés par :

$$p_i(m_1) = (a_1 b_1)^i p_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{III.24})$$

où a_1 et b_1 sont données par :

$$a_1 = 10^{\left(\frac{y_1}{10(1-m_1)}\right)}, \quad b_1 = 10^{\left(\frac{y_1}{10m_1}\right)}$$

Pour garantir l'égalité des pôles des équations (III.23) et (III.24) des deux approximations quelque soit les ordres $m \neq m_1$ on doit avoir $p_i(m_1) = p_i(m)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N$), c'est-à-dire :

$$p_i(m_1) = p_i(m) \Rightarrow (ab)^i p_0 = (a_1 b_1)^i p_0 \Rightarrow ab = a_1 b_1$$

cela conduit à :

$$10^{\left[\frac{y}{10(1-m)}\right]} \times 10^{\left[\frac{y}{10m}\right]} = 10^{\left[\frac{y_1}{10(1-m_1)}\right]} \times 10^{\left[\frac{y_1}{10m_1}\right]}$$

donc les erreurs d'approximation y et y_1 et les ordres m et m_1 sont liés par la relation suivante :

$$y_1 = y \frac{m_1(1-m_1)}{m(1-m)} \quad (\text{III.25})$$

Une fois les pôles d'approximation fixés, ils deviennent indépendants de l'ordre m , donc les fonctions $F_k(s)$ de l'équation (III.22) deviennent toutes indépendantes de l'ordre fractionnaire m . Par conséquent l'équation (III.21) peut être implémenter sous la forme de la structure de Farrow. Alors on a réalisé un dérivateur d'ordre fractionnaire à ordre variable.

III.4.1 Calcul des coefficients de l'interpolation polynomiale

L'interpolation polynomiale en m pour tous les coefficients $g_i(m)$ de l'équation (III.18) est donnée par l'équation (III.19) comme suit :

$$g_i(m) = \sum_{k=0}^M a_{ik} m^k, \quad \text{pour } 0 \leq i \leq N$$

où a_{ik} sont les $(M+1)$ coefficients du polynôme en m de $g_i(m)$. Pour déterminer ces coefficients on doit résoudre le système d'équations linéaires à $(M+1)$ inconnus obtenu en choisissant (N_1+1) points différents de l'ordre m . On cherche donc l'unique polynôme de degré M passant par les points $\{m_j, g_i(m_j)\}$. Les points m_j ($j=0,1,\dots, N_1$) étant tous distincts. Donc pour $i=0,1,\dots,N$, on aura :

$$g_i(m) = \sum_{k=0}^M a_{ik} m^k \quad (\text{III.26})$$

Alors pour $j=0,1,\dots, N_1$ et $i=0,1,\dots,N$, on peut écrire :

pour $j=0$

$$\begin{aligned} g_1(m_0) &= a_{10} + a_{11}.m_0^1 + \dots + a_{1M}.m_0^M \\ &\vdots \\ g_N(m_0) &= a_{N0} + a_{N1}.m_0^1 + \dots + a_{NM}.m_0^M \end{aligned}$$

Pour $j=1$

$$\begin{aligned} g_0(m_1) &= a_{00} + a_{01}.m_1^1 + \dots + a_{0M}.m_1^M \\ g_1(m_1) &= a_{10} + a_{11}.m_1^1 + \dots + a_{1M}.m_1^M \\ &\vdots \\ g_N(m_1) &= a_{N0} + a_{N1}.m_1^1 + \dots + a_{NM}.m_1^M \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

Pour $j = N_1$

$$g_0(m_{N_1}) = a_{00} + a_{01} \cdot m_{N_1}^1 + \dots + a_{0M} \cdot m_{N_1}^M$$

$$g_1(m_{N_1}) = a_{10} + a_{11} \cdot m_{N_1}^1 + \dots + a_{1M} \cdot m_{N_1}^M$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$g_N(m_{N_1}) = a_{N0} + a_{N1} \cdot m_{N_1}^1 + \dots + a_{NM} \cdot m_{N_1}^M$$

Soit en notation matricielle:

$$\begin{bmatrix} g_0(m_0) & g_1(m_0) & \dots & g_N(m_0) \\ g_0(m_1) & g_1(m_1) & \dots & g_N(m_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_0(m_{N_1}) & g_1(m_{N_1}) & \dots & g_N(m_{N_1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & m_0 & m_0^2 & \dots & m_0^M \\ 1 & m_1 & m_1^2 & \dots & m_1^M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & m_{N_1} & m_{N_1}^2 & \dots & m_{N_1}^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} & a_{10} & \dots & a_{N0} \\ a_{01} & a_{11} & \dots & a_{N1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{0M} & a_{1M} & \dots & a_{NM} \end{bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

On peut écrire le système d'équations sous la forme :

$$G = U A \quad (\text{III.28})$$

Comme la matrice U n'est pas en général une matrice carrée, alors on a :

$$A = (U^T U)^{-1} U^T G \quad (\text{III.29})$$

La matrice U est une matrice de Vandermonde alors la matrice carrée $(U^T U)$ est inversible tant que les points m_j ($j = 0, 1, \dots, N_1$) sont distincts. Vu la complexité du calcul de matrice A de l'équation (III.29), la méthode utilisée pour résoudre ce problème d'interpolation est la technique d'ajustement de la courbe dans le but d'obtenir un polynôme de degré M qui approxime chaque résidu $g_i(m)$ ($i = 0, 1, \dots, N$), dans le sens des moindres carrés. Pour ce but, on a utilisé la routine de Matlab dénommée 'polyfit'.

III.4.2 Exemple illustratif

Comme exemple on considère la conception d'un intégrateur d'ordre fractionnaire variable dans la bande fréquentielle $[\omega_b, \omega_h] = [0.0001 \text{ rad/s}, 0.01 \text{ rad/s}]$.

L'approximation de dérivateur d'ordre fractionnaire est donnée sous la forme suivante :

$$G(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{g_i(m)s}{\left(1 + \frac{s}{p_i(m)}\right)} = G_0 + \sum_{k=0}^M m^k \sum_{i=0}^N \frac{a_{ik}s}{1 + \frac{s}{p_i(m)}}$$

Pour réaliser une dérivateur d'ordre fractionnaire variable, il faut en premier lieu fixer les pôles $p_i(m)$ de l'approximation puis calculer les coefficients a_{ik} . Pour fixer les pôles,

on choisit l'ordre $m = 0.1$. Donc, pour une erreur $y=0.2$ dB, $\omega_c=0.01$ $\omega_b=10^{-6}$ rad/s et $\omega_{max}=100$ $\omega_h=1$ rad/s, les paramètres p_0 , a , b et N de l'approximation sont donnés par :

$$a = 10^{\left(\frac{y}{10(1-m)}\right)} = 1.0525 \quad b = 10^{\left(\frac{y}{10m}\right)} = 1.5849 \quad p_0 = \omega_c \sqrt{b} = 1.325 * 10^{-6} \text{ et } N=28$$

Alors les pôles p_i de l'approximation sont donnés par :

$$p_i = 1.325 * 10^{-6} (1.6260)^i, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N$$

Et de l'équation (II.15) les coefficients $g_i(0.1)$ (pour $i=0, 1, \dots, N$) sont donnés par :

$$g_i(0.1) = \frac{-K_D}{1.325 * 10^{-6} (1.626)^i} \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(1.6260)^{(i-j)}}{1.0525}\right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (1.6260)^{(i-j)})}$$

$$\text{Avec } K_D = (\omega_c^m) = (10^{-6})^{0.1} = 0.2512.$$

Pour la conception d'un autre dérivateur d'ordre fractionnaire d'ordre donné m_1 ($0 < m_1 < 1$) tel que $m_1 \neq 0.1$ avec les mêmes pôles approximation p_i (pour $i=0, 1, \dots, N$) quel que soit la valeur de l'ordre m_1 , l'erreur d'approximation y_1 de l'équation (III.25) doit être égale à $y_1 = 2.2222 m_1(1 - m_1)$. Les paramètres a_1 , b_1 et N_1 de l'approximation sont donnés par :

$$a_1 = 10^{\left(\frac{y_1}{10(1-m_1)}\right)}, \quad b_1 = 10^{\left(\frac{y_1}{10m_1}\right)} \quad \text{et } N_1 = N=28$$

Avec $(ab) = (a_1 b_1)$ et les coefficients $g_i(m_1)$ (pour $i=0, 1, \dots, N$) sont calculés par :

$$g_i(m_1) = \frac{-K_D}{p_a (ab)^i} \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^{(i-j)}}{a_1}\right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^{(i-j)})}$$

Avec $K_D = (\omega_c^{m_1})$. Donc on aura :

$$g_i(m_1) = \frac{-(10^{-6})^{m_1}}{1.325 * 10^{-6} (1.626)^i} \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(1.6260)^{(i-j)}}{a_1}\right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (1.6260)^{(i-j)})}$$

Le degré M du polynôme d'interpolation est choisi tel que l'erreur d'interpolation est inférieure à une valeur donnée pour une bonne approximation. Figures (III.8) - (III.11)

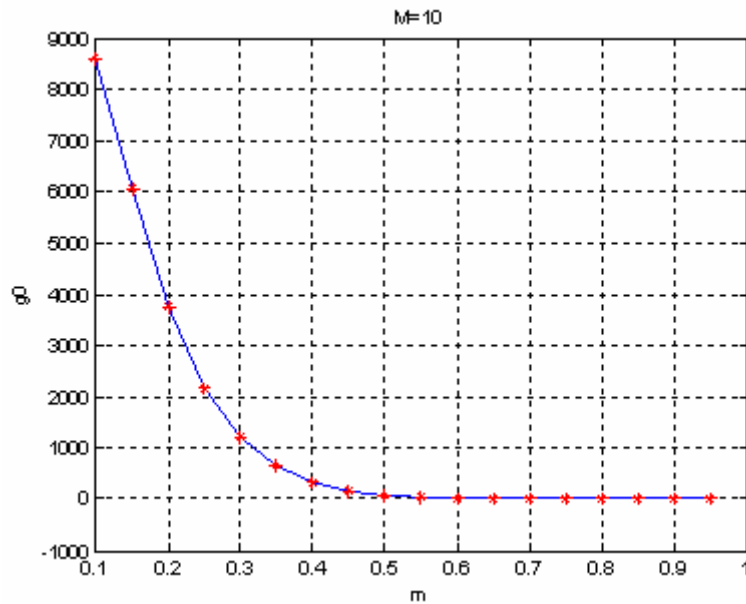


Figure (III.8) L'interpolation polynomiale au sens des moindres carrés de coefficient g_0 de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire.

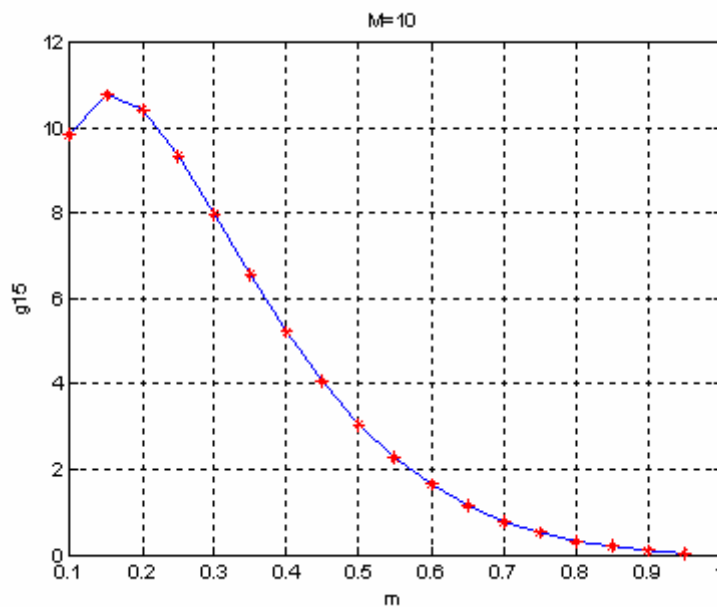


Figure (III.9) L'interpolation polynomiale au sens des moindres carrés de coefficient g_{15} de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire.

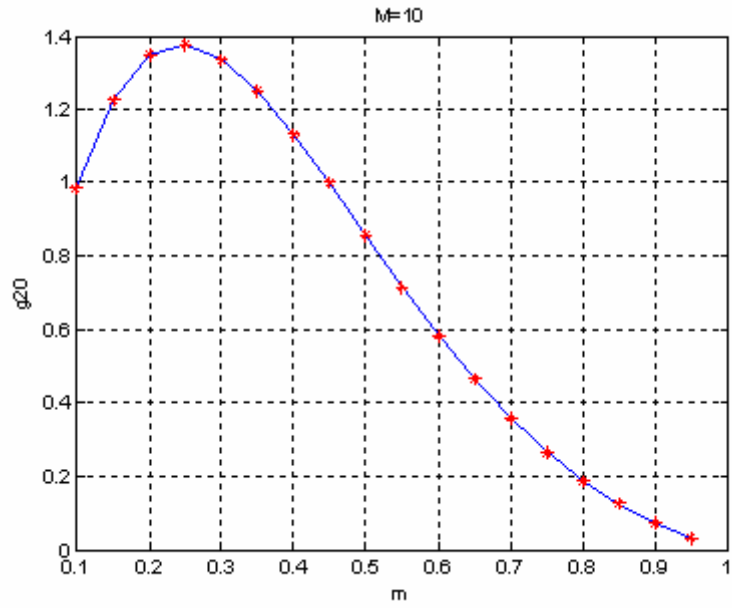


Figure (III.10) L'interpolation polynomiale au sens des moindres carrés de coefficient g_{20} de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire.

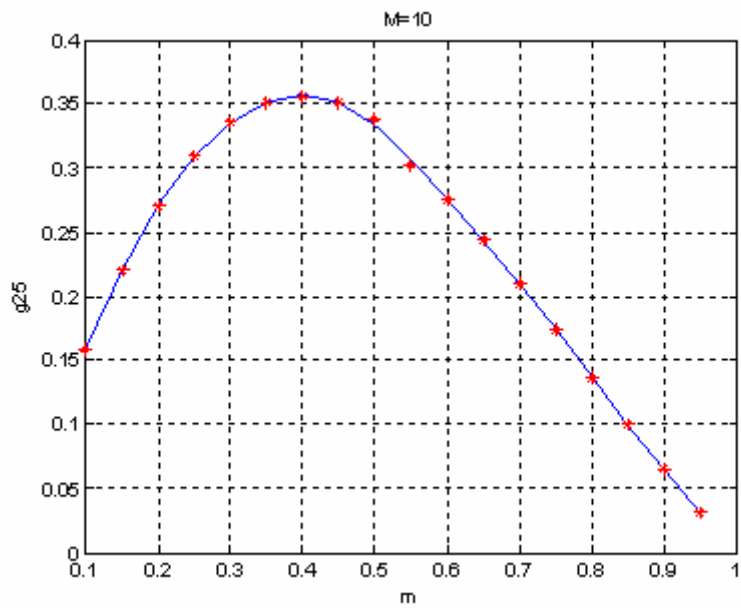


Figure (III.11) L'interpolation polynomiale au sens des moindres carrés de coefficient g_{25} de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire

Les tracés de Bode de la fonction de transfert de l'opérateur dérivateur fractionnaire $s^{0.65}$ et de son implémentation à la sortie de la structure de Farrow sont présentés dans les figures suivantes:

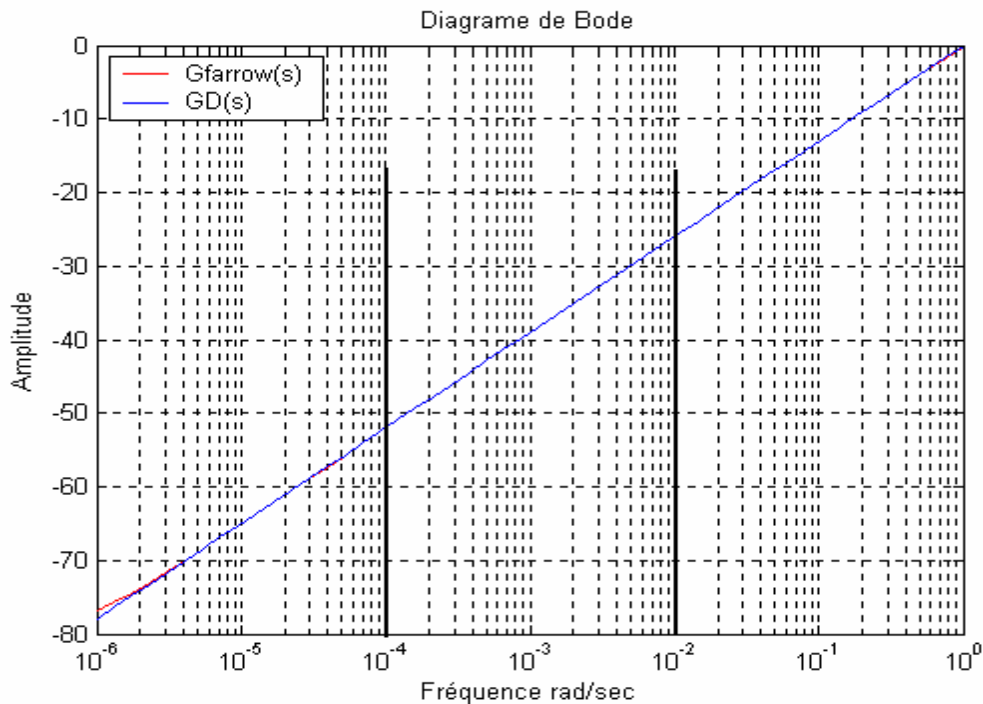


Figure (III.12) Module de la fonction d'approximation de l'opérateur Dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{0.65}$ à la sortie de la structure de Farrow

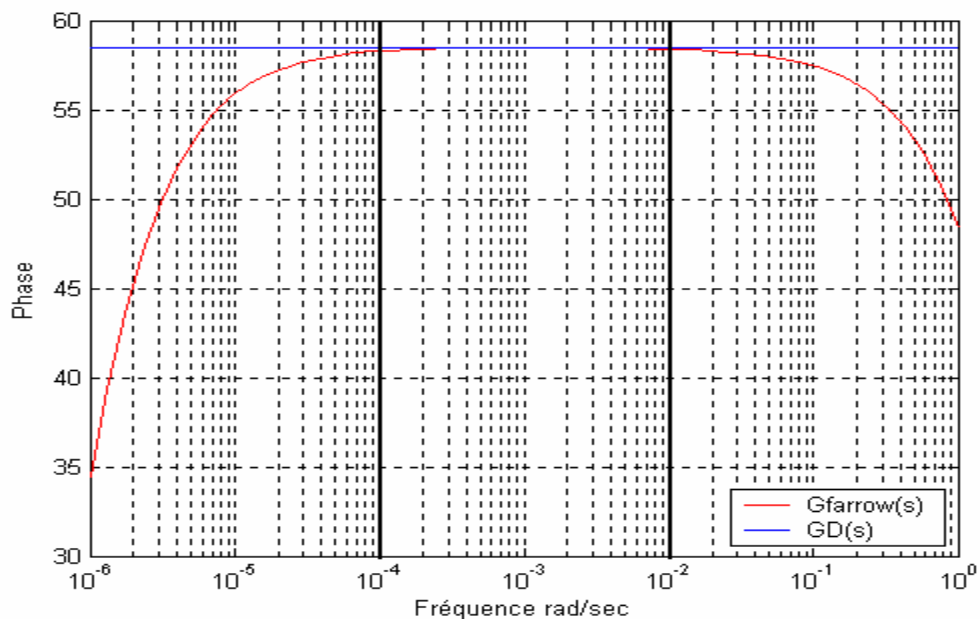


Figure (III.13) Phase de la fonction d'approximation de l'opérateur Dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{0.65}$ à la sortie de la structure de Farrow

On peut observé facilement que le tracé de Bode de la fonction de transfert de l'opérateur d'ordre fractionnaire et sa décomposition en structure de Farrow sont superposées dans la plage de fréquence $[0.0001, 0.01 \text{ rad/sec}]$, la fonction d'approximation en structure de Farrow et l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire à des pente de 13dB/dec ($20m$), et la phase de -58.5° , ($m\pi/2$) ce qui implique la justesse de l'approximation.

Chapitre IV

Application Des Opérateur
D'ordre
Fractionnaire Variable

Applications Des Opérateurs d'Ordre Fractionnaire Variable

IV.1 Introduction

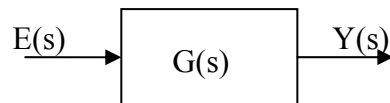
Au cours du précédent chapitre, l'intérêt de l'implémentation analogique en structure de Farrow a été démontré pour la réalisation d'un dérivateur (intégrateur) d'ordre fractionnaire variable borné en fréquences. L'objectif de ce chapitre est d'utiliser les propriétés analysées précédemment pour calculer la réponse temporelle d'opérateur d'ordre fractionnaire. Donc nous présentons dans la suite l'algorithme de calcul de la sortie des opérateurs d'ordre fractionnaire variable.

IV.2 Réponse temporelle d'un opérateur d'ordre fractionnaire

Plusieurs algorithmes ont été développés pour calculer la sortie du model rationnel de l'opérateur d'ordre fractionnaire, ils sont basés généralement sur la fonction de transfert ou sur la représentation d'espace d'état [16],[18].

Dans notre cas, on a commencé par la fonction de transfert fractionnaire, la fonction rationnel analogique est obtenu on remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire par une approximation entière dans une bande de fréquence bien définie, comme on a montré dans le deuxième chapitre. La réalisation (implémentation) d'un dérivateur (intégrateur) d'ordre fractionnaire variable borné en fréquences est faite en utilisant la structure de farrow (troisième chapitre) .

Donc on à :



Avec $E(s)$ l'entrée de l'opérateur d'ordre fractionnaire, $Y(s)$ sa sortie, et $H(s)$ sa fonction de transfert . On a

$$Y(s) = G_{farrow}(s)E(s) \quad (\text{IV-1})$$

Donc

$$y(t) = L^{-1}(G_{farrow}(s)E(s)) \quad (\text{IV-2})$$

IV.3 Dérivation d'ordre fractionnaire de quelques fonctions usuelles

IV.3.1 La dérivée fractionnaire d'un échelon

La fonction Echelon unité suivante :

$$e(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

Dans ce cas $E(s) = \frac{1}{s}$, donc la sortie $y(t)$ est donnée par :

$$y(t) = L^{-1}(G_{\text{farrow}}(s)E(s)) \quad (\text{IV-3})$$

Avec $G_{\text{farrow}}(s)$ est donnée par l'équation (III.26) comme :

$$G_{\text{farrow}}(s) = G_0 + \sum_{k=0}^M m^k F_k(s) \quad (\text{IV-4})$$

pour $k = 0, 1, 2, \dots, M$

$$F_k(s) = \sum_{i=0}^N \frac{a_{ik}s}{1 + \frac{s}{p_i}} \quad (\text{IV-5})$$

Donc la sortie est donnée par:

$$y(t) = L^{-1}\left(G_0 \frac{1}{s} + \sum_{k=0}^M m^k \sum_{i=0}^N \frac{a_{ik}s}{1 + \frac{s}{p_i}} \frac{1}{s}\right) \quad (\text{IV-6})$$

$$y(t) = G_0 + \sum_{k=0}^M m^k \sum_{i=0}^N a_{ik} p_i \exp(-p_i t) \quad (\text{IV-7})$$

La figure obtenue de dérivation d'ordre fractionnaire d'un échelon est la suivant :

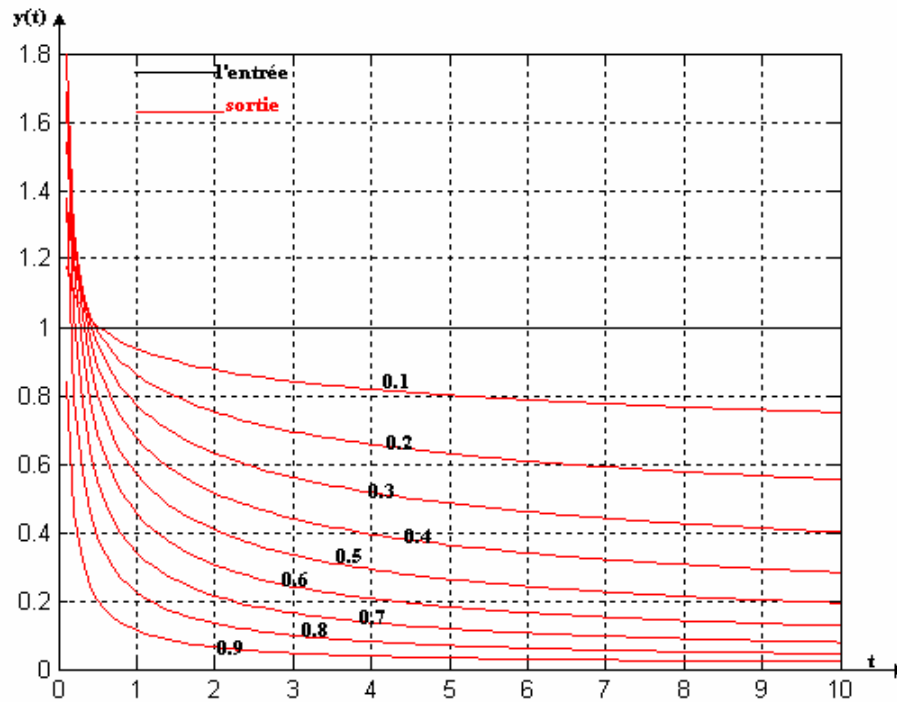


Figure (IV-1) Dérivation d'ordre fractionnaire d'un échelon pour des différents ordres.

IV.3.2 La dérivée fractionnaire d'un rampe

On a
$$e(t) = \begin{cases} t & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

$E(s) = \frac{1}{s^2}$, donc la sortie $y(t)$ est donnée par :

$$y(t) = L^{-1} \left(G_0 \frac{1}{s^2} + \sum_{k=0}^M m^k \sum_{i=0}^N \frac{a_{ik} s}{1 + \frac{s}{p_i}} \frac{1}{s^2} \right) \tag{IV-8}$$

$$y(t) = G_0 t + \sum_{k=0}^M m^k \sum_{i=0}^N [a_{ik} - a_{ik} \exp(-p_i t)] \tag{IV-9}$$

La figure de dérivation d'ordre fractionnaire d'une rampe est représentée par :

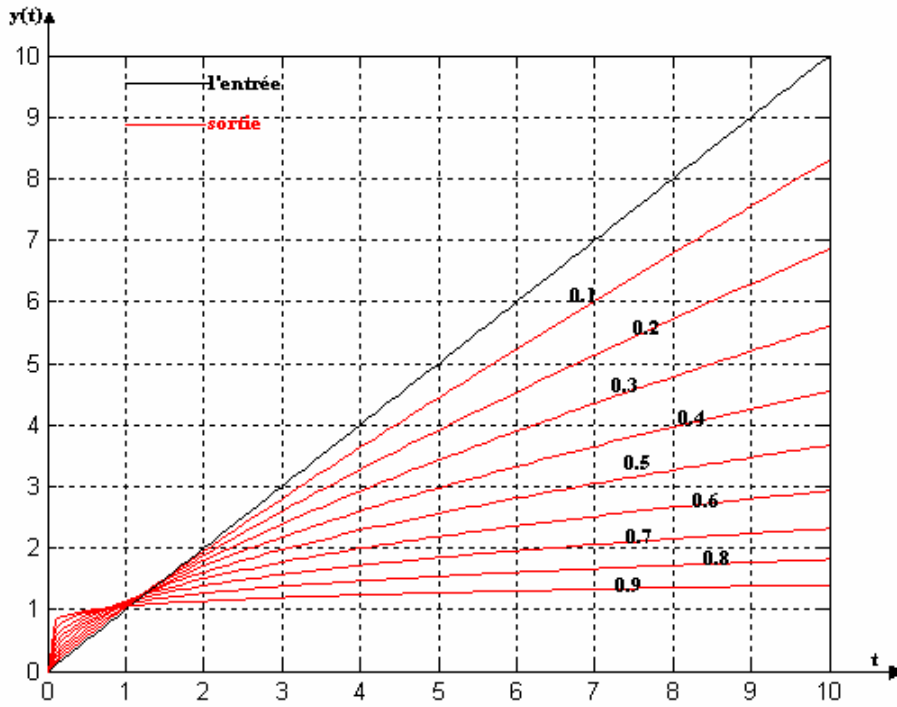


Figure (IV-2) Dérivation d'ordre fractionnaire d'une rampe pour des différents ordres.

IV.3.3 La dérivée fractionnaire d'un cosinus

On a montré que la dérivation d'ordre fractionnaire d'un cosinus de pulsation ω_0 avec un déphasage φ (chapitre I), est équivalente à la relation suivante [11]:

$$D^{(m)} [\cos(\omega_0 t - \varphi)] = \omega_0^m \cos(\omega_0 t - \varphi + m \frac{\pi}{2}) \tag{IV-10}$$

$e(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t) & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$, alors $E(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$, donc la sortie $y(t)$ est donnée par :

$$y(t) = L^{-1} (G_0 \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} + \sum_{k=0}^M m^k \sum_{i=0}^N \frac{a_{ik} s}{1 + \frac{s}{p_i}} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}) \tag{IV-11}$$

$$y(t) = G_0 \cos(\omega_0 t) + \sum_{k=0}^M m^k \sum_{i=0}^N C_{ik} \exp(-p_i t) + D_{ik} \cos(\omega_0 t + \Phi_{ik}) \tag{IV-12}$$

avec $C_{ik} = \frac{a_{ik} p_i^3}{p_i^2 + \omega_0^2}$, $D_{ik} = \frac{a_{ik} p_i \omega_0^2}{\sqrt{p_i^2 + \omega_0^2}}$ et $\Phi_{ik} = \tan^{-1}(\frac{p_i}{\omega_0})$

la figure suivante représente la sortie avec $e(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t) & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$:

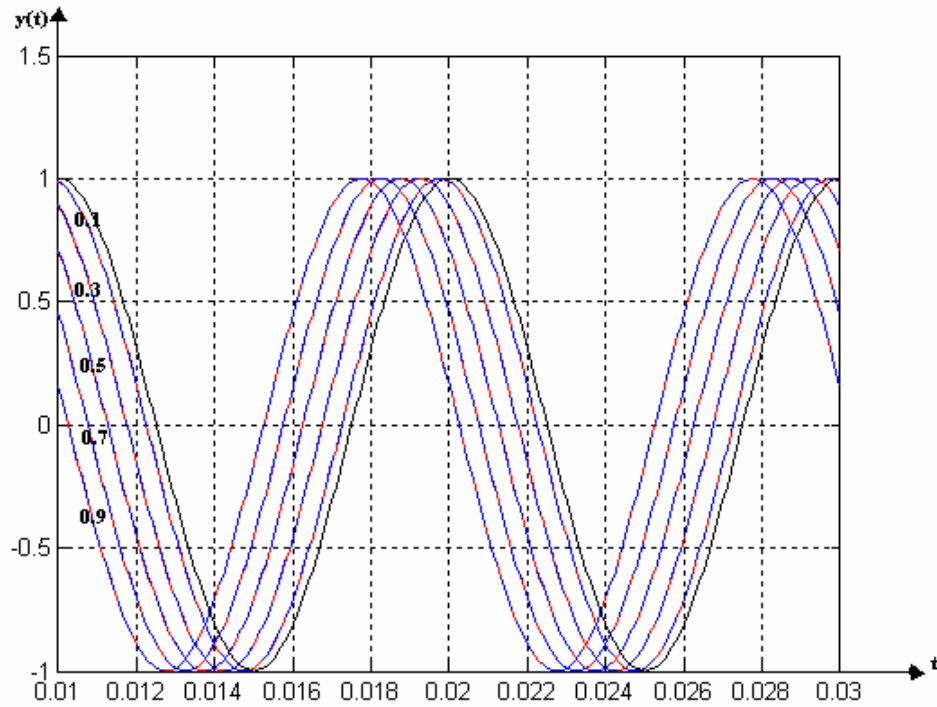


Figure (IV-3) Dérivation d'ordre fractionnaire d'un cosinus pour des différents ordres

IV.3.4 La dérivée fractionnaire d'un sinus

la dérivation d'ordre fractionnaire d'un sinus de pulsation ω_0 avec un déphasage φ (chapitre I), est équivalente à la relation suivante[11]:

$$D^{(m)} [\sin(\omega_0.t - \varphi)] = \omega_0^m \sin(\omega_0.t - \varphi + m \frac{\pi}{2}) \tag{IV-13}$$

$$e(t) = \begin{cases} \sin(\omega_0 t) & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

Donc $E(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$

la sortie est donnée par :

$$y(t) = L^{-1} (G_0 \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} + \sum_{k=0}^M m^k \sum_{i=0}^N \frac{a_{ik} s}{1 + \frac{s}{p_i}} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}) \tag{IV-14}$$

$$y(t) = G_0 \sin(\omega_0 t) + \sum_{k=0}^M m^k \sum_{i=0}^N C_{ik} \exp(-p_i t) + D_{ik} \sin(\omega_0 t + \Phi_{ik}) \tag{IV-15}$$

avec $C_{ik} = \frac{-a_{ik} p_i^2 \omega_0}{p_i^2 + \omega_0^2}$, $D_{ik} = \frac{a_{ik} p_i \omega_0^2}{\sqrt{p_i^2 + \omega_0^2}}$ et $\Phi_{ik} = \tan^{-1}\left(\frac{p_i}{\omega_0}\right)$

On pose que : $e(t) = \begin{cases} \sin(200\pi t) & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$

La figure suivante représente la sortie

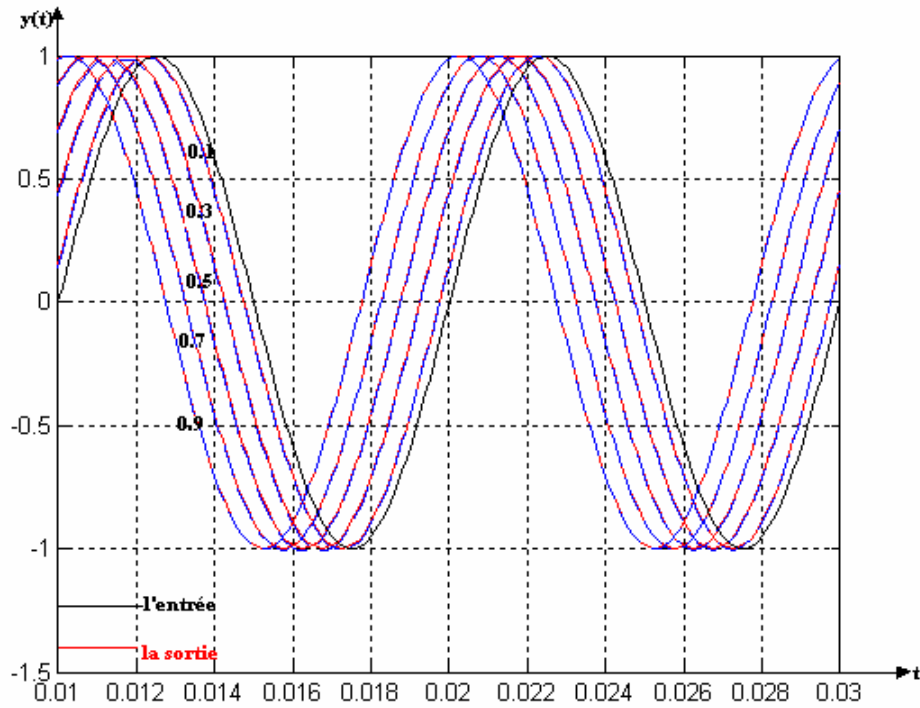


Figure (IV-4) Dérivation d'ordre fractionnaire d'un sinus pour des différents ordres

IV.3.5 La dérivée fractionnaire d'une fonction sinusoidale amortie

La dérivation d'ordre fractionnaire d'une fonction sinusoidale amortie produit de fonctions exponentielle et sinusoidale du type $\exp(-at)\sin(\omega_0 t)$, est équivalente à la relation suivante [11] :

$$D^{(m)} [\exp(-at)\sin(\omega_0 t)] = A^m \exp(at)\sin(\omega_0 t + m\psi) \tag{IV-16}$$

Avec

$$A = |a + i\omega_0| \text{ et } \psi = \text{Arg}(a + i\omega_0) \tag{IV-17}$$

Donc pour $e(t) = \begin{cases} \exp(-at) \sin(\omega_0 t), & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$, $E(s) = \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$, alors :

$$y(t) = L^{-1} \left(G_0 \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2} + \sum_{k=0}^M m^k \sum_{i=0}^N \frac{a_{ik} s}{1 + \frac{s}{p_i}} \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \right) \quad (IV-18)$$

$$y(t) = G_0 \exp(-at) \sin(\omega_0 t) + \sum_{k=0}^M m^k \sum_{i=0}^N C_{ik} \exp(-p_i t) + D_{ik} \exp(-at) \sin(\omega_0 t + \Phi_{ik}) \quad (IV-19)$$

Avec $C_{ik} = \frac{a_{ik} p_i^2 \omega_0}{2ap_i - p_i^2 - \omega_0^2 - a^2}$, $D_{ik} = \frac{a_{ik} p_i \sqrt{a^2 + \omega_0^2}}{p_i^2 + \omega_0^2 + a^2 - 2ap_i}$ et

$$\Phi_{ik} = \tan^{-1} \left(\frac{p_i \omega_0^2}{p_i a - a^2 - \omega_0^2} \right)$$

On prend comme exemple $e(t) = \begin{cases} \exp(-50t) \sin(200\pi t) & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$, la sortie est

donnée par la figure suivante :

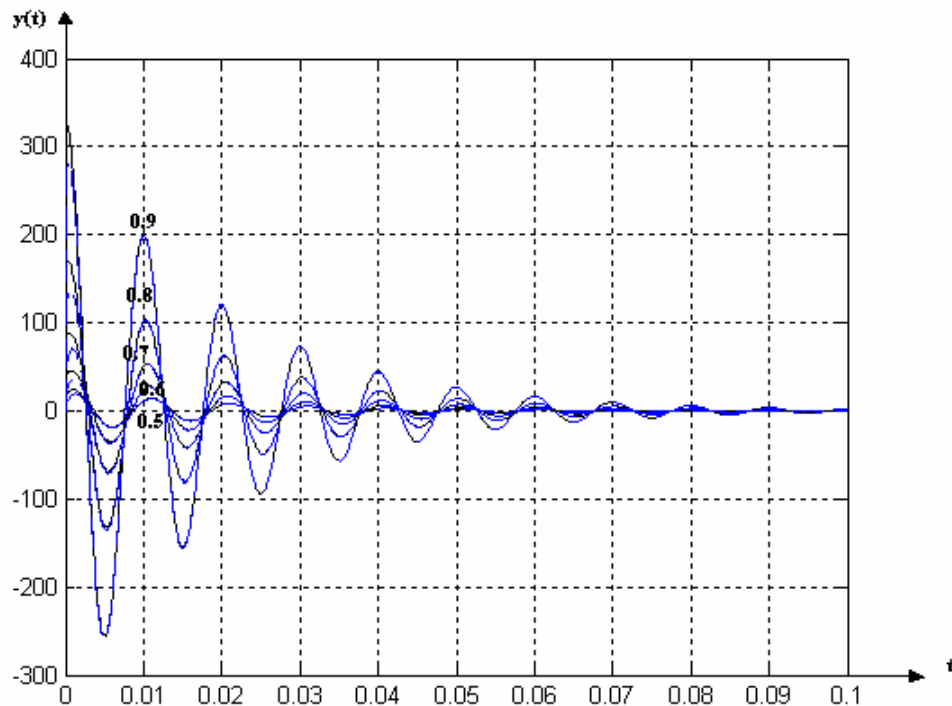


Figure (IV-5) Dérivation d'ordre fractionnaire d'un sinus amorti pour des différents ordres

IV.4 integration d'ordre fractionnaire de quelques fonctions usuelles

Dans ce même contexte, nous avons développé des programmes qui consistent à calculer la integration d'ordre fractionnaire de quelques fonctions usuelles : l'échelon, la fonction sinusoïdale (cosinus, sinus), fonction sinusoïdale amorti.

IV.4.1 L'intégrale fractionnaire d'une impulsion

la fonction impulsion est donnée par :
$$e(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t = 0 \\ 0 & \text{pour } t \neq 0 \end{cases}$$

On sait que la transformée en L d'une impulsion est donnée par : $E(s) = 1$

Donc la sortie est :

$$y(t) = L^{-1}(H_{farrow}(s)E(s))$$

Avec $H_{farrow}(s)$ et la fonction de transfert à la sortie de cette nouvelle structure, et qui est définies comme suit:

$$H_{farrow}(s) = \sum_{k=0}^M m^k G_k(s) \quad (\text{IV-20})$$

$$\text{Avec } G_k(s) = \sum_{i=0}^N \frac{a_{ik}}{1 + \frac{s}{p_i}} \text{ pour } k = 0, 1, 2, \dots, M \quad (\text{IV-21})$$

Donc la sortie est donnée par:

$$y(t) = L^{-1} \left(\sum_{k=0}^M m^k \sum_{i=0}^N \frac{a_{ik}}{1 + \frac{s}{p_i}} \right) \quad (\text{IV-22})$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^M m^k \sum_{i=0}^N a_{ik} p_i \exp(-p_i t) \quad (\text{IV-23})$$

Les résultats de l'intégrale d'ordre fractionnaire d'impulsion est donné par :

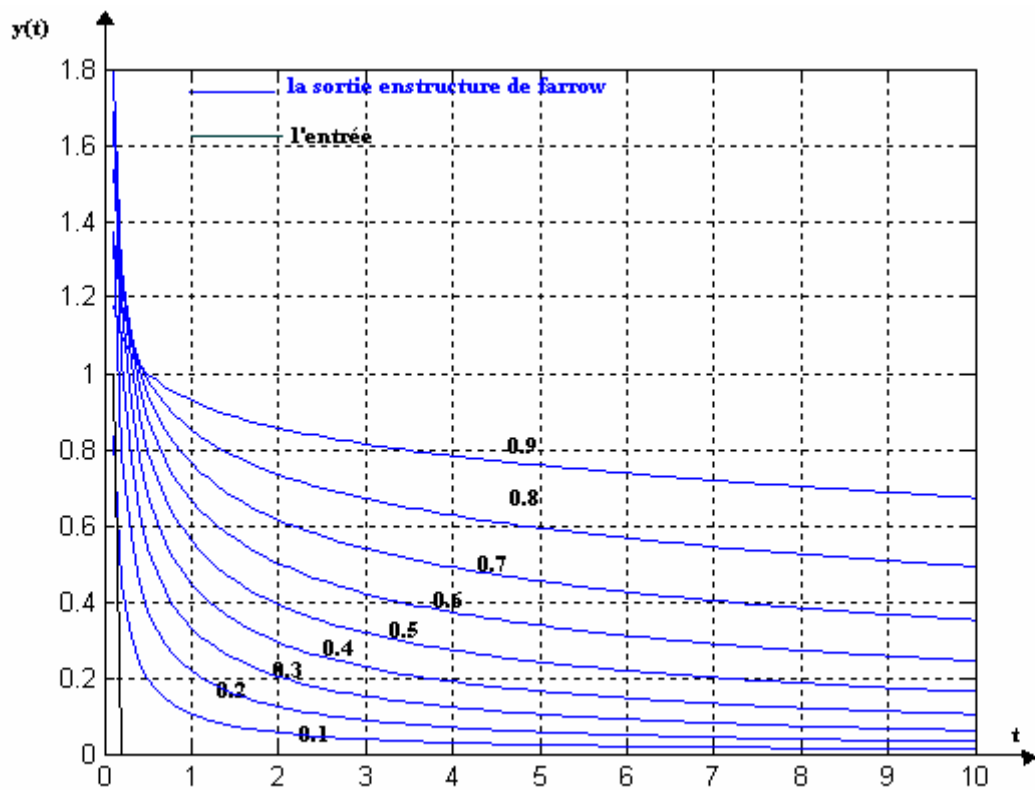


Figure (IV-6) L'intégrale d'ordre fractionnaire d'impulsion pour des différents ordres

IV.4.2 L'intégrale fractionnaire d'un échelon

La fonction Echelon unité suivante :

$$e(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

La transformée d'un échelon est : $E(s) = \frac{1}{s}$

Donc la sortie est donnée par :

$$y(t) = L^{-1} \left(\sum_{k=0}^M m^k \sum_{i=0}^N \frac{a_{ik}}{1 + \frac{s}{p_i}} \frac{1}{s} \right) \tag{IV-24}$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^M m^k \sum_{i=0}^N (-a_{ik} \exp(-p_i t) + a_{ik}) \tag{IV-25}$$

Les résultats de l'intégrale d'ordre fractionnaire de l'échelon unité est donné par :

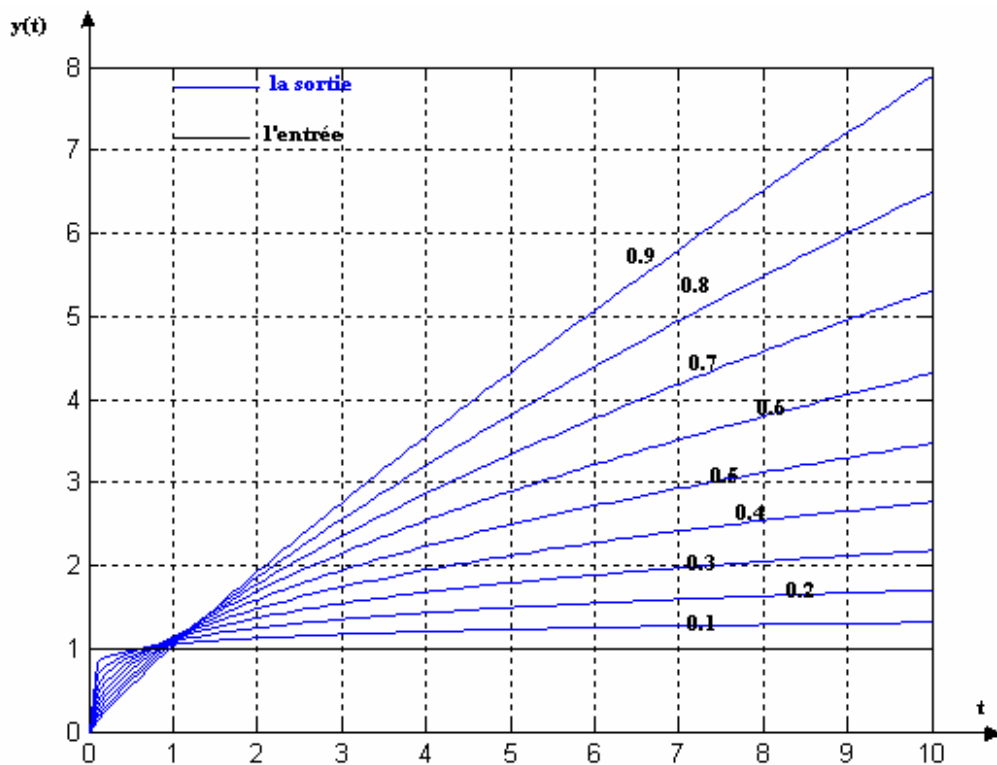


Figure (IV-7) L'intégrale d'ordre fractionnaire d'un échelon pour des différents ordres

IV.4.3 L'intégrale fractionnaire d'une rampe

On à
$$e(t) = \begin{cases} t & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

Donc
$$E(s) = \frac{1}{s^2}$$

la sortie est donnée par :

$$y(t) = L^{-1} \left(\sum_{k=0}^M m^k \sum_{i=0}^N \frac{a_{ik}}{1 + \frac{s}{p_i}} \frac{1}{s^2} \right) \tag{IV-26}$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^M m^k \sum_{i=0}^N \left(\frac{a_{ik}}{p_i} \exp(-p_i t) + a_{ik} t + \frac{-a_{ik}}{p_i} \right) \tag{IV-27}$$

Les résultats obtenu de l'intégrale d'ordre fractionnaire d'une rampe est donné par :

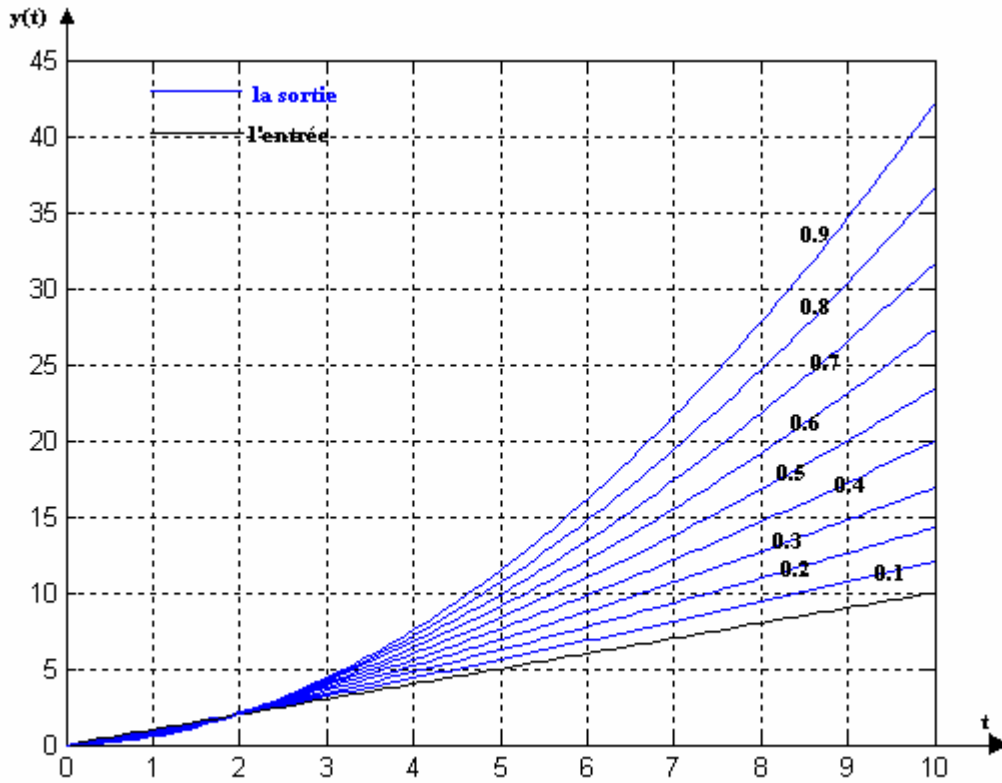


Figure (IV-8) L'intégrale d'ordre fractionnaire d'une rampe pour des différents ordres

IV.4.4 L'intégrale fractionnaire d'un cosinus

Soit :
$$e(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t) & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

Donc
$$E(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

la sortie est donnée par :

$$y(t) = L^{-1} \left(\sum_{k=0}^M m^k \sum_{i=0}^N \frac{a_{ik}}{1 + \frac{s}{p_i}} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \right) \tag{IV-28}$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^M m^k \sum_{i=0}^N C_{ik} \exp(-p_i t) + D_{ik} \sin(\omega_0 t + \Phi_{ik}) \tag{IV-29}$$

avec
$$C_{ik} = \frac{-a_{ik} p_i^2}{p_i^2 + \omega_0^2}, D_{ik} = \frac{a_{ik} p_i}{\sqrt{p_i^2 + \omega_0^2}} \text{ et } \Phi_{ik} = \tan^{-1} \left(\frac{p_i}{\omega_0} \right)$$

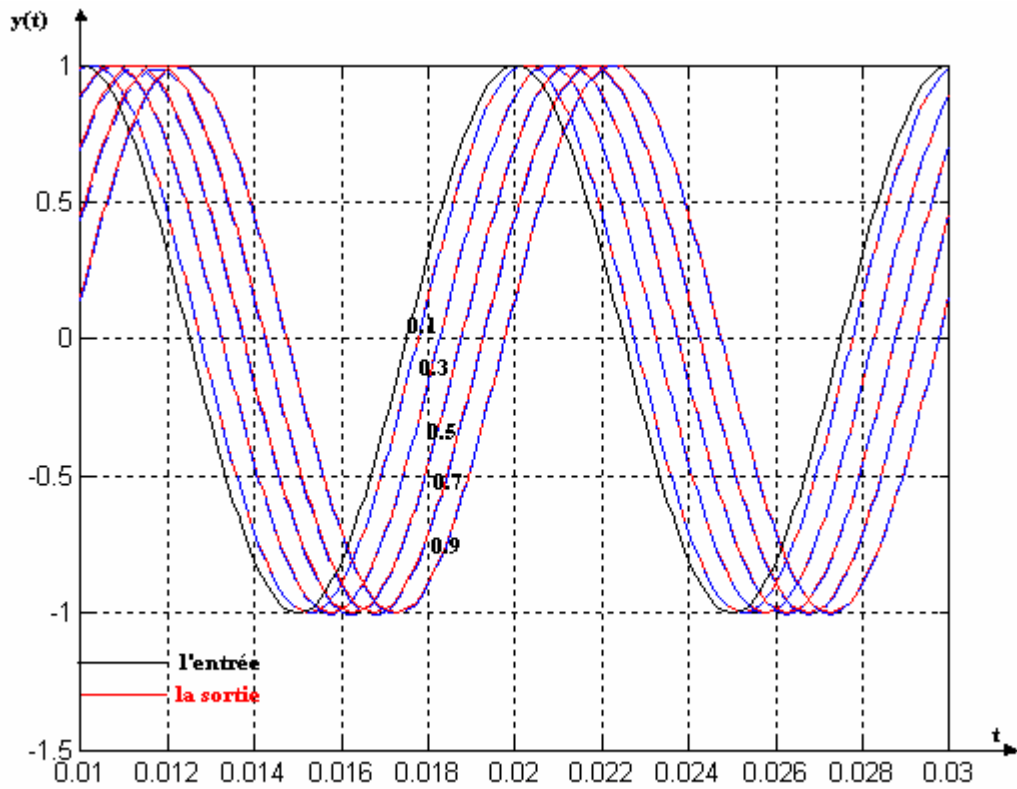


Figure (IV-9) L'intégrale d'ordre fractionnaire d'un $\cos(200 \pi t)$ pour les différents ordres

IV.4.5 L'intégrale fractionnaire d'un sinus

Soit :
$$e(t) = \begin{cases} \sin(\omega_0 t) & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

Donc
$$E(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

la sortie est donnée par :

$$y(t) = L^{-1} \left(\sum_{k=0}^M m^k \sum_{i=0}^N \frac{a_{ik}}{1 + \frac{s}{p_i}} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right) \tag{IV-30}$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^M m^k \sum_{i=0}^N C_{ik} \exp(-p_i t) - D_{ik} \cos(\omega_0 t + \Phi_{ik}) \tag{IV-31}$$

avec
$$C_{ik} = \frac{a_{ik} p_i \omega_0}{p_i^2 + \omega_0^2}, \quad D_{ik} = \frac{a_{ik} p_i}{\sqrt{p_i^2 + \omega_0^2}} \text{ et } \Phi_{ik} = \tan^{-1} \left(\frac{p_i}{\omega_0} \right)$$

Les résultats obtenu de l'intégrale d'ordre fractionnaire d'un cosinus est donné par :

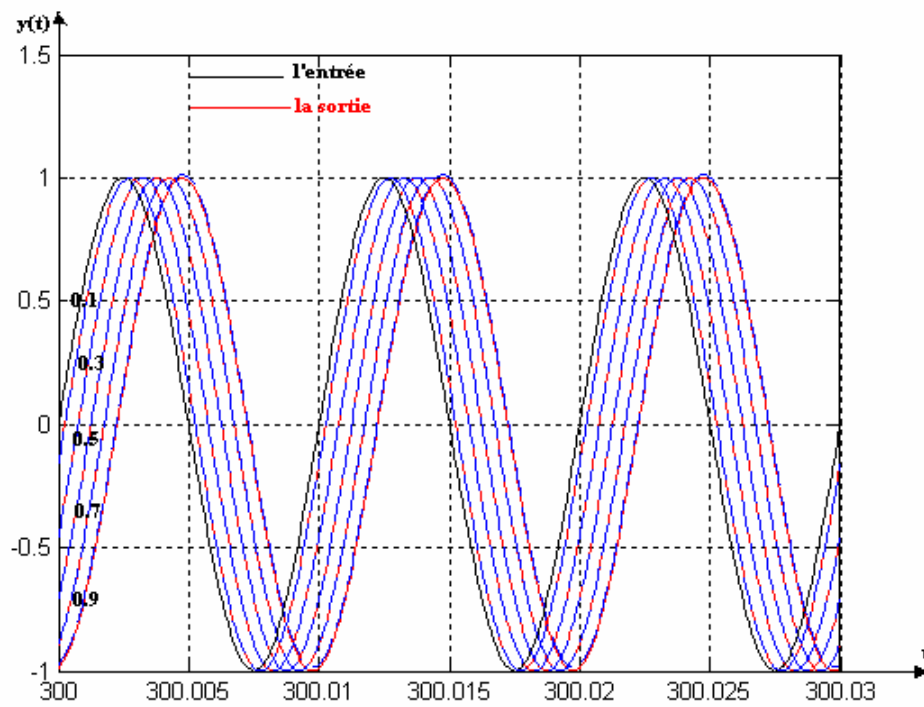


Figure (IV-9) L'intégrale d'ordre fractionnaire d'un $\sin(200\pi t)$ pour les différents ordres

Conclusion Générale

Conclusion Générale

Toutes les implémentations analogiques existantes dans la littérature de l'intégrateur d'ordre fractionnaire $H_I(s) = \frac{1}{s^m}$ et du différentiateur d'ordre fractionnaire $G_D(s) = s^m$ sont des implémentations fixes. Alors, le problème est celui de l'implémentation analogique de ces opérateurs d'ordre fractionnaire par des implémentations d'ordre variable. L'implémentation analogique d'ordre variable de ces opérateurs d'ordre fractionnaire n'existe pas par contre leur implémentation numérique d'ordre variable peut être obtenue par l'utilisation de la fameuse technique dite structure de Farrow.

Dans ce mémoire, nous avons présenté une nouvelle méthode de simulation et d'implémentation d'opérateurs d'ordre fractionnaire variable en utilisant une structure dite structure de Farrow en se basant sur la fonction rationnelle d'approximation de la méthode de Charef.

Le chapitre I traite principalement les différentes notions d'opérateur d'ordre fractionnaire, nous avons commencé par deux définitions les plus récentes, qui sont la définition de Grunwald-Letnikov et la définition de Riemann-Liouville et on a introduit quelques propriétés de la dérivation non entière. Enfin nous avons présenté quelques approches de l'opérateur d'ordre fractionnaire dans le cas continu. Le chapitre II traite l'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire par une fonction rationnelle dans le cas analogique. La méthode utilisée dans cette approximation est celle de Charef. L'intégrateur d'ordre fractionnaire s^{-m} ($0 < m < 1$) est représenté par un pôle à puissance fractionnaire (PPF) dans une bande de fréquence bien déterminée ensuite le PPF est approximé par une fonction rationnelle. Le dérivateur d'ordre fractionnaire s^m ($0 < m < 1$) est représenté par un zéro à puissance fractionnaire (ZPF). Des exemples numériques ont été présentés. Dans le chapitre III nous avons exposé la nouvelle technique d'implémentation des opérateurs d'ordre fractionnaire sous la forme de la structure de Farrow qui conduit à l'implémentation des opérateurs d'ordre fractionnaire variable. Le chapitre IV est réservé à l'application de la méthode décrite dans le chapitre III aux fonctions usuelles tel que l'échelon, la rampe, la fonction sinusoïdale, et la fonction sinusoïdale amortie.

A partir de ces résultats obtenus on peut conclure que les travaux ayant abouti à l'approximation des systèmes d'ordre variable sont effectivement vérifiés et prouvent que cette méthode est non seulement rigoureuse mais elle sera aussi fructueuse par son application dans différents domaines de la science et de la technologie.

Alors comme perspective, on suggère l'application de cette technique dans le domaine du traitement du signal, de l'identification et la commande des systèmes d'ordre fractionnaire.

Références

- [1] H. H. Sun, A. Charef, Y. Tsao, B. Onaral, "Analysis of polarization dynamics by singularity decomposition method," *Annals of Biomedical Engineering*, vol. 20, 1992
- [2] A. Oustaloup, *Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire : théorie et pratique*, Editions Masson, Paris, 1983
- [3] P. J. Torvik, and R. L. Bagley, "On the Appearance of the Fractional Derivative in the Behavior of Real Materials," *Trans. Of the ASME*, vol. 51, 1984
- [4] I. Podlubny, "Fractional-order Systems and fractional-Order Controllers," UEF-03-94 Slovak Academy of Science, Kosice, 1994
- [5] I. Podlubny, "Fractional Order Systems and $PI^\lambda D^\mu$ Controllers," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, N°1, 1999
- [6] I. Petras, I. Podlubny, O'Leary, P., Dorcak, L., and Vinagre, B. M., "Analogue Realization of Fractional Order Controllers," *Fakulta Berg, TU Kosice*, 2002
- [7] T. Poinot, J.-C. Trigeassou, 'A method for modelling and simulation of Fractional systems,' *Signal processing* N° 83, 2003
- [8] R. Caponetto, L. Fortuna, and D. Porto, "A New Tuning Strategy for a Non Integer Order Controller," *Proceedings of the 1st IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications FDA'04*, Bordeaux, France, July 2004
- [9] C. W. Farrow, 'A continuously variable digital delay element', *Proc. of the IEEE Int. Symp. on Circuit and Systems (ISCAS '88)*, vol. 3, pp 2641-2645, 1988
- [10] A. Charef, H.H. Sun, Y.Y. Tsao, and B. Onaral, 'Fractal system as represented by by singularity function', *IEEE Trans. Auto. Control*, 37, pp 1465-1470, sept 1992
- [11] K. B. Oldham and J. Spanier, *Fractional Calculus*, Academic Press, New York, 1974
- [12] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999
- [13] K. S. Miller and B. Ross. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. Wiley, New York, USA, 1993.
- [14] S. G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Gordon and Breach, 1987.
- [15] A. Erdélyi (ed.). *Tables of Integral Transforms*, vol. 1, McGraw-Hill, 1954.
- [16] A. Oustaloup. *La dérivation non entière*. Hermès. Paris, 1995
- [17] A. Charef, 'Analogue realisation of fractional order integrator, differentiator and fractional $PI^\lambda D^\mu$ controllers', *IEE proceedings on Control Theory and Applications*, Vol 153, Issue 6, pp 714-720, 2006
- [18] M. Aoun, R. Malti, F. Levron and A. Oustaloup, 'Numerical simulations of fractional systems', *Proceedings of ASME Desi. Eng. Tech.*, , Chicago, USA, Sept 2-6, 2003

Abstract:

This work deals with the variable analog implementation of the fractional-order differentiator s^m and integrator s^{-m} (for $0 < m < 1$). The proposed approach is based on Charef's approximation method of these operators by analog rational functions. The new derived implementation is given using the Farrow structure to obtain a fractional order differentiator and an fractional order integrator of a variable order.

ملخص :

هذا الموضوع يعالج الإنشاء التماثلي (Analogique) للمكامل s^{-m} و المشتق s^m ذو الدرجة الناطقة المتغيرة من أجل ($0 < m < 1$). في هذه المذكرة إعتمدنا على طريقة شارف (méthode de Charef) التي تقرب هذه المعاملات بواسطة دالة ناطقة داخل مجال محدد من التواترات. ثم قمنا بتمثيل إنشاء جديد بواسطة هيكل Farrow للحصول على مكامل و مشتق ذو الدرجة الناطقة متغيرة. و قمنا بمناقشة و تحليل بعض الأمثلة التي توضح مدى فعالية و استعمال هذه الطريقة التقريبية،