

# THESE

*présentée à*

L'UNIVERSITE PAUL SABATIER DE TOULOUSE (SCIENCES)

*pour obtenir*

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3<sup>ème</sup> CYCLE - Spécialité : Mécanique

Option : Rhéologie et Ecoulements polyphasiques dispersés

*par*

**KERROUM Mohammed**



**ECOULEMENT PERISTALTIQUE DE FLUIDES NON NEWTONIENS  
ET APPLICATIONS AUX FLUIDES BIOLOGIQUES : CAS BIDIMENSIONNEL**



Soutenu le 7 juillet 1981 devant la Commission d'Examen :

MM R. THIBAUT  
C. THIRRIOT  
J. MAUSS

*Président*  
*Examineurs*

Dans le cas de l'occlusion complète du tube ( $\phi = 1$ ), le débit moyen  $\bar{Q}_0$  est égal à l'unité.

Les figures 2 et 3 montrent les profils de vitesses longitudinales en différentes sections et pour différents débits moyens.

On constate qu'au voisinage de l'axe, les vitesses pour le fluide dilatant sont plus importantes que celles du fluide newtonien, qui sont elles-mêmes plus grandes que celles du fluide pseudoplastique. Près de la paroi cet ordre est inversé.

#### 5) CARACTERISTIQUES DU POMPAGE PERISTALTIQUE

Si  $L$  est la longueur normalisée du conduit la différence de pression  $\Delta P_{0L}$  à ses extrémités s'obtient en intégrant le gradient de pression sur la longueur  $L$ , par rapport à  $x$  ou à  $\hat{x}$  puisque cette intégration se fait à  $t$  constant. Si, de plus, la longueur du tube est égale à un nombre entier de longueur d'onde, ou bien si elle est très supérieure à la longueur d'onde,  $\Delta P_{0L}$  est déterminé par l'accroissement de pression sur une longueur d'onde  $\Delta P_{01}$ . On a :

$$\Delta P_{01} = - \left( \frac{2n+1}{n} \right)^n \cdot \int_0^1 \operatorname{sgn} (\bar{Q}_0 + H - 1) \cdot \frac{|\bar{Q}_0 + H - 1|^n}{H^{2n+1}} d\hat{x}$$

Pour le fluide newtonien, cet accroissement de pression est une fonction linéaire du débit moyen  $\bar{Q}_0$ . On trouve :

$$\Delta P_{01} = \frac{3\phi^2}{2(1-\phi^2)^{5/2}} \left[ 3 - \frac{2 + \phi^2}{\phi^2} \cdot \bar{Q}_0 \right]$$

Dans le cas de l'occlusion complète du tube ( $\phi = 1$ ), le débit moyen  $\bar{Q}_0$  est égal à l'unité.

Les figures 2 et 3 montrent les profils de vitesses longitudinales en différentes sections et pour différents débits moyens.

On constate qu'au voisinage de l'axe, les vitesses pour le fluide dilatant sont plus importantes que celles du fluide newtonien, qui sont elles-mêmes plus grandes que celles du fluide pseudoplastique. Près de la paroi cet ordre est inversé.

#### 5) CARACTERISTIQUES DU POMPAGE PERISTALTIQUE

Si  $L$  est la longueur normalisée du conduit la différence de pression  $\Delta P_{0L}$  à ses extrémités s'obtient en intégrant le gradient de pression sur la longueur  $L$ , par rapport à  $x$  ou à  $\hat{x}$  puisque cette intégration se fait à  $t$  constant. Si, de plus, la longueur du tube est égale à un nombre entier de longueur d'onde, ou bien si elle est très supérieure à la longueur d'onde,  $\Delta P_{0L}$  est déterminé par l'accroissement de pression sur une longueur d'onde  $\Delta P_{01}$ . On a :

$$\Delta P_{01} = - \left( \frac{2n+1}{n} \right)^n \cdot \int_0^1 \operatorname{sgn} (\bar{Q}_0 + H - 1) \cdot \frac{|\bar{Q}_0 + H - 1|^n}{H^{2n+1}} dx$$

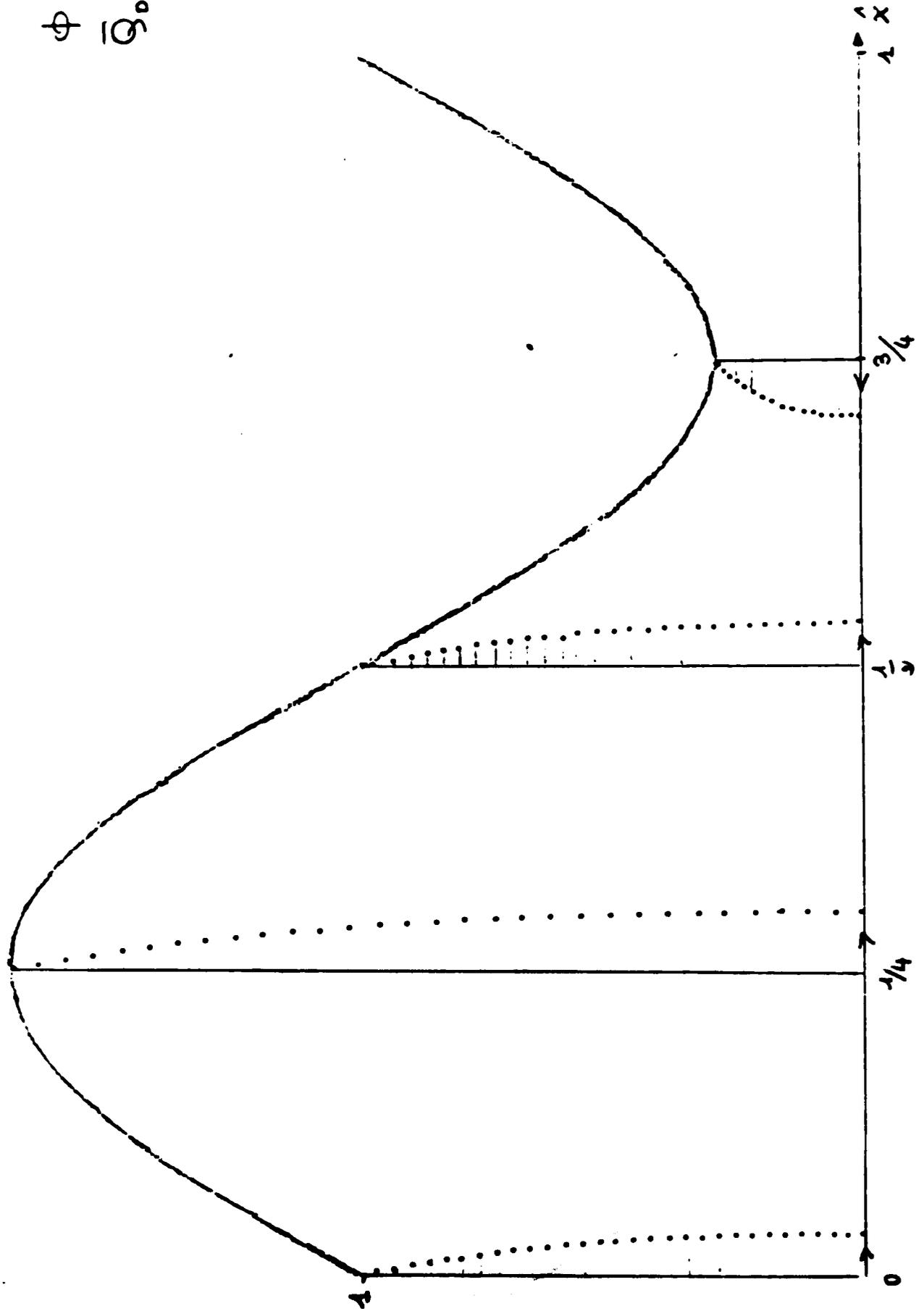
Pour le fluide newtonien, cet accroissement de pression est une fonction linéaire du débit moyen  $\bar{Q}_0$ . On trouve :

$$\Delta P_{01} = \frac{3\phi^2}{2(1-\phi^2)^{5/2}} \left[ 3 - \frac{2+\phi^2}{\phi^2} \cdot \bar{Q}_0 \right]$$

Figure 2. b Profil de vitesses longitudinales en différents sections sur une longueur d'onde pour un débit moyen non nul.

$$\phi = 0,7$$

$$\bar{Q}_0 = 0,5$$



fluides visco-élastiques  $K=1$   $n=0.6$

Le régime de pompage est défini par la double inégalité

$$\bar{Q}_0 > 0 \quad , \quad \Delta P_{01} > 0$$

Dans ce cadre le dispositif fonctionne comme une pompe puisque le débit moyen est positif malgré la présence d'une différence de pression qui s'y oppose.

$\bar{Q}_0$  et  $\Delta P_{01}$  ne sont naturellement pas indépendants ; les valeurs limites  $\bar{Q}_0 = 0$  et  $\Delta P_{01} = 0$  donnent respectivement les bornes supérieures  $\Delta P_{01 \max}$  et  $\bar{Q}_{0 \max}$  du régime de pompage. Ainsi pour le fluide newtonien :

$$\bar{Q}_{0 \max} = \frac{3 \phi^2}{2 + \phi^2} \quad \text{et} \quad \Delta P_{01 \max} = \frac{9 \phi^2}{2(1 - \phi^2)^{5/2}}$$

En dehors de ce régime de pompage, si l'accroissement de pression est négatif, le débit créé par ce gradient de pression s'ajoute à celui créé par les ondes péristaltiques, d'autre part si l'accroissement de pression excède la valeur  $\Delta P_{01 \max}$  l'action des ondes n'arrive pas à surmonter le débit rétrograde et le débit résultant est négatif.

On trouvera en annexe 2 les valeurs de  $\bar{Q}_{0 \max}$  pour les trois fluides considérés pour différentes valeurs du paramètre d'occlusion. A titre indicatif, ces valeurs sont représentées sur la figure 4 ; on constate que le domaine de pompage est plus étendu dans le cas du fluide dilatant.

La courbe  $\bar{Q}_0 - \Delta P_{01}$  représente, dans le régime de pompage, la caractéristique de la pompe que constitue le dispositif.

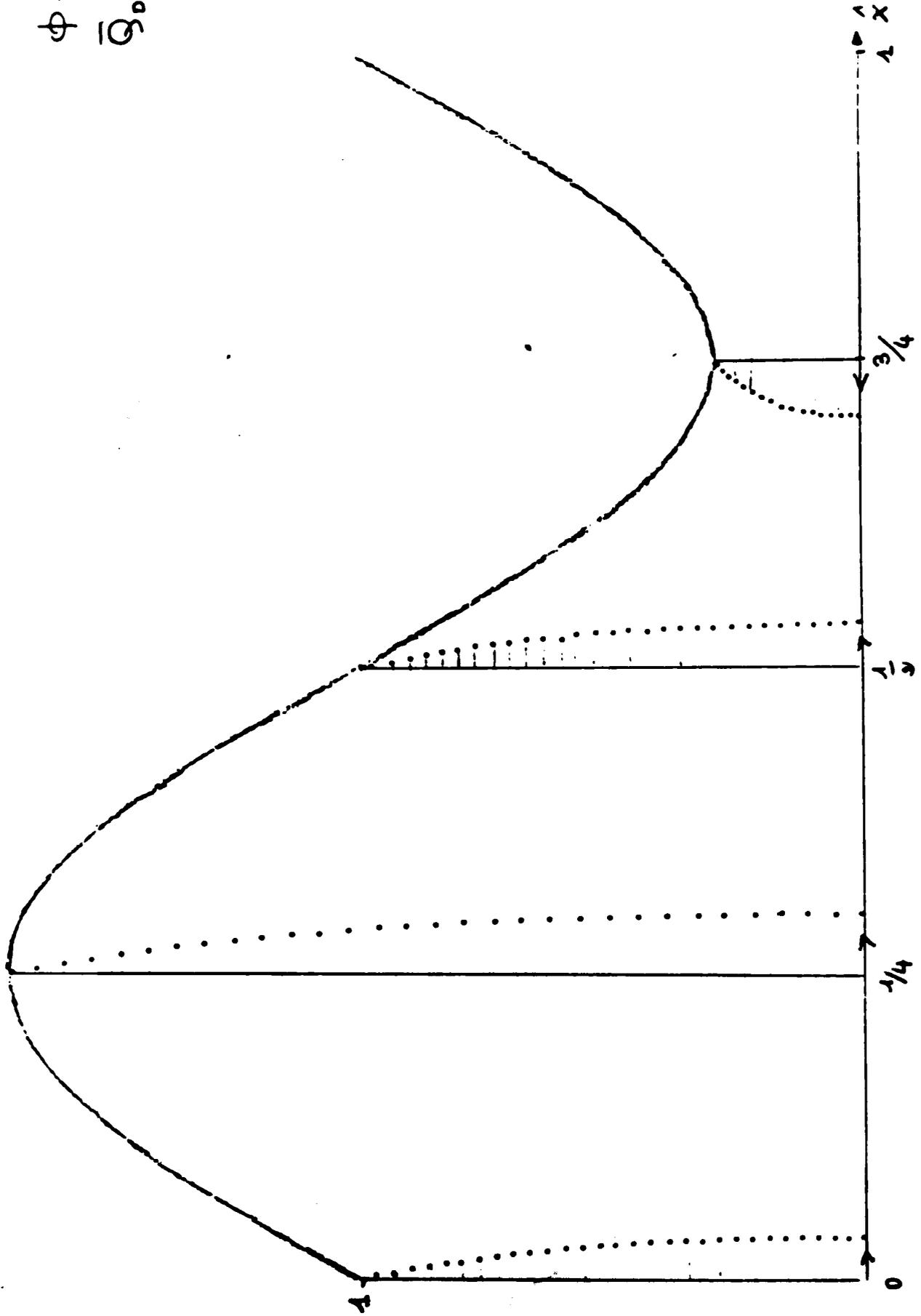
La figure 5 représente l'accroissement de pression en fonction du débit moyen.

On note que le débit moyen résulte de :

Figure 2. b Profils de vitesses longitudinales en différents sections sur une  
longueur d'onde pour un débit moyen non nul.

$$\phi = 0,7$$

$$\bar{Q}_0 = 0,5$$



fluide pseudo-plastique  $K=1$   $n=0,6$ .

Le régime de pompage est défini par la double inégalité

$$\bar{Q}_0 > 0 \quad , \quad \Delta P_{01} > 0$$

Dans ce cadre le dispositif fonctionne comme une pompe puisque le débit moyen est positif malgré la présence d'une différence de pression qui s'y oppose.

$\bar{Q}_0$  et  $\Delta P_{01}$  ne sont naturellement pas indépendants ; les valeurs limites

$\bar{Q}_0 = 0$  et  $\Delta P_{01} = 0$  donnent respectivement les bornes supérieures  $\Delta P_{01 \max}$

et  $\bar{Q}_{0 \max}$  du régime de pompage. Ainsi pour le fluide newtonien :

$$\bar{Q}_{0 \max} = \frac{3 \phi^2}{2 + \phi^2} \quad \text{et} \quad \Delta P_{01 \max} = \frac{9 \phi^2}{2(1 - \phi^2)^{5/2}}$$

En dehors de ce régime de pompage, si l'accroissement de pression est négatif, le débit créé par ce gradient de pression s'ajoute à celui créé par les ondes péristaltiques, d'autre part si l'accroissement de pression excède la valeur  $\Delta P_{01 \max}$  l'action des ondes n'arrive pas à surmonter le débit rétrograde et le débit résultant est négatif.

On trouvera en annexe 2 les valeurs de  $\bar{Q}_{0 \max}$  pour les trois fluides considérés pour différentes valeurs du paramètre d'occlusion. A titre indicatif, ces valeurs sont représentées sur la figure 4 ; on constate que le domaine de pompage est plus étendu dans le cas du fluide dilatant.

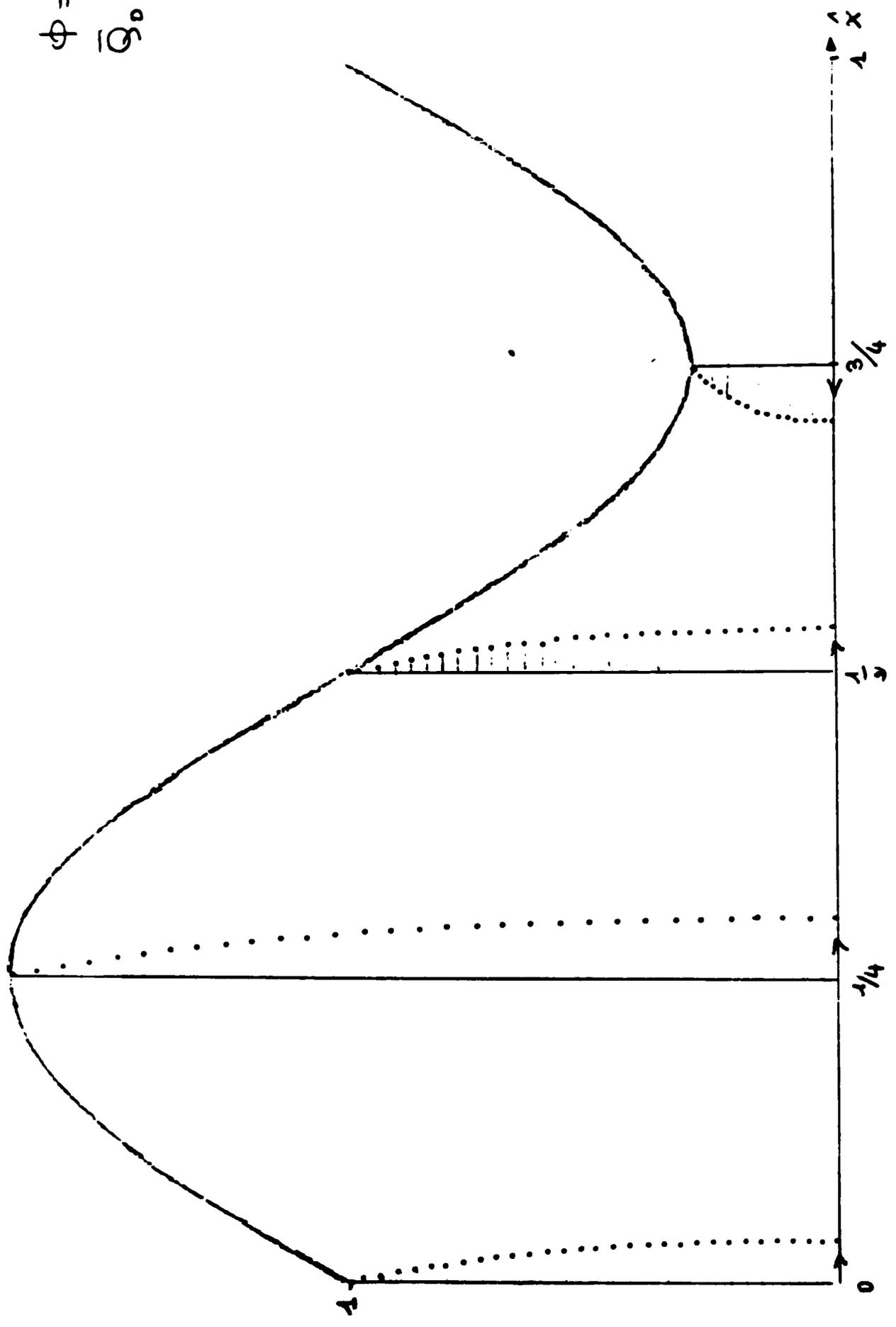
La courbe  $\bar{Q}_0 - \Delta P_{01}$  représente, dans le régime de pompage, la caractéristique de la pompe que constitue le dispositif.

La figure 5 représente l'accroissement de pression en fonction du débit moyen.

On note que le débit moyen résulte de :

Figure 2. b

Profils de vitesses longitudinales en différents sections sur une longueur d'onde pour un débit moyen non nul.



$$\phi = 0,7$$
$$\bar{Q}_0 = 0,5$$

fluide pseudo-plastique  $K=1$   $n=0,6$ .

Le régime de pompage est défini par la double inégalité

$$\bar{Q}_o > 0 \quad , \quad \Delta P_{o1} > 0$$

Dans ce cadre le dispositif fonctionne comme une pompe puisque le débit moyen est positif malgré la présence d'une différence de pression qui s'y oppose.

$\bar{Q}_o$  et  $\Delta P_{o1}$  ne sont naturellement pas indépendants ; les valeurs limites  $\bar{Q}_o = 0$  et  $\Delta P_{o1} = 0$  donnent respectivement les bornes supérieures  $\Delta P_{o1 \max}$  et  $\bar{Q}_{o \max}$  du régime de pompage. Ainsi pour le fluide newtonien :

$$\bar{Q}_{o \max} = \frac{3 \phi^2}{2 + \phi^2} \quad \text{et} \quad \Delta P_{o1 \max} = \frac{9 \phi^2}{2(1 - \phi^2)^{5/2}}$$

En dehors de ce régime de pompage, si l'accroissement de pression est négatif, le débit créé par ce gradient de pression s'ajoute à celui créé par les ondes péristaltiques, d'autre part si l'accroissement de pression excède la valeur  $\Delta P_{o1 \max}$  l'action des ondes n'arrive pas à surmonter le débit rétrograde et le débit résultant est négatif.

On trouvera en annexe 2 les valeurs de  $\bar{Q}_{o \max}$  pour les trois fluides considérés pour différentes valeurs du paramètre d'occlusion. A titre indicatif, ces valeurs sont représentées sur la figure 4 ; on constate que le domaine de pompage est plus étendu dans le cas du fluide dilatant.

La courbe  $\bar{Q}_o - \Delta P_{o1}$  représente, dans le régime de pompage, la caractéristique de la pompe que constitue le dispositif.

La figure 5 représente l'accroissement de pression en fonction du débit moyen.

On note que le débit moyen résulte de :

Figure 3: Comparison des profils de vitesses longitudinales pour les trois fluides en différentes sections et pour un débit moyen nul.

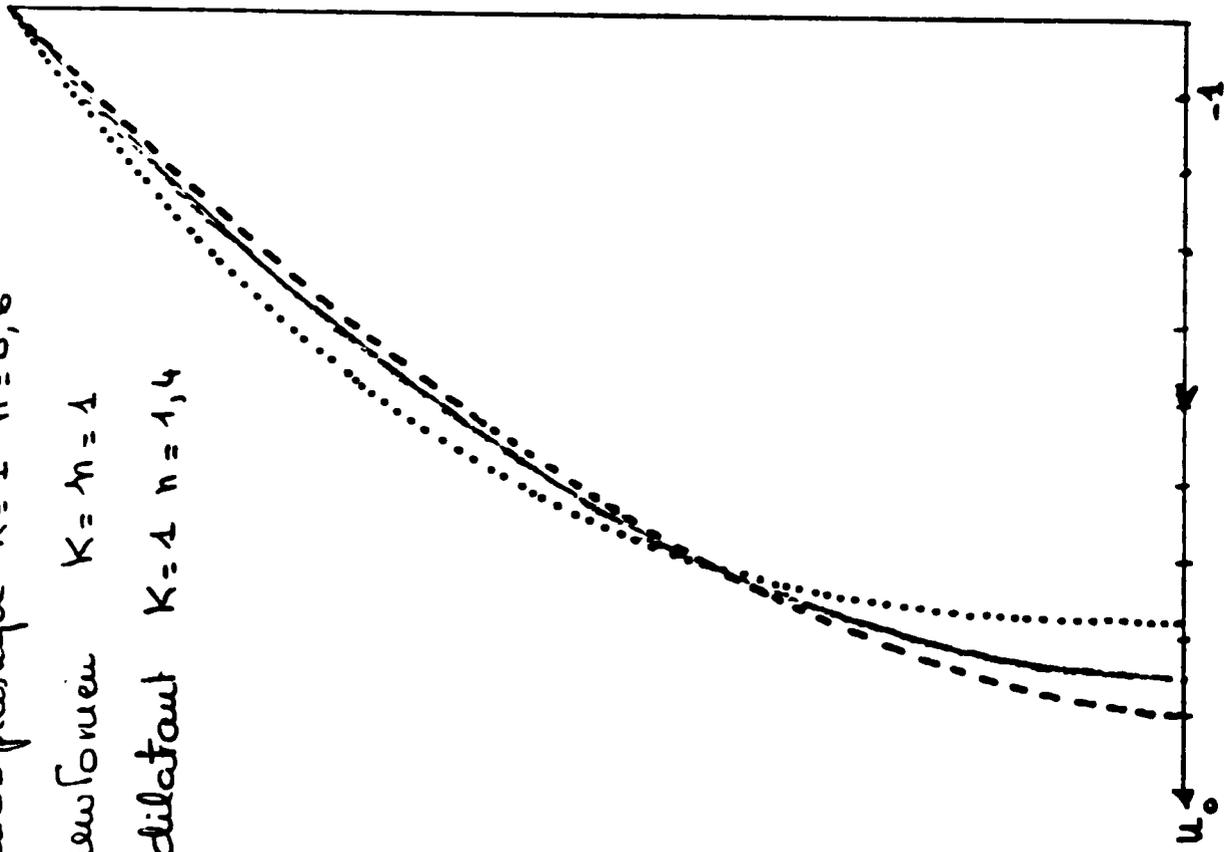
fluide pseudo-plastique  $K=1$   $n=0,6$

fluide newtonien  $K=1$   $n=1$

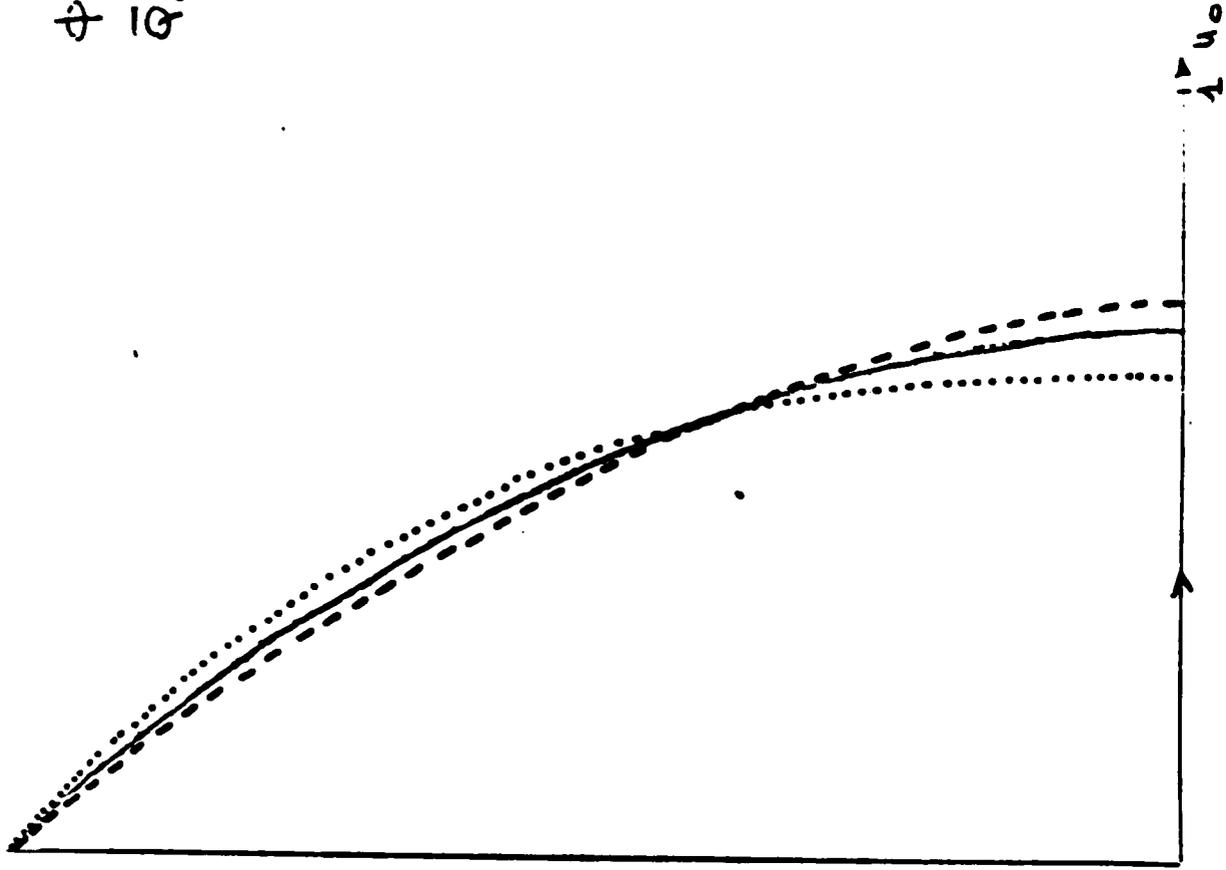
fluide dilatant  $K=1$   $n=1,4$

$$\Phi = 0,85$$

$$\bar{Q}_0 = 0$$



$\hat{x} = 0,75$



$\hat{x} = 0,85$

Figure 4: Domaine de pompage.

- ..... fluide pseudo-plastique  $K=1$   $n=0$ ,
- fluide newtonien  $K=n=1$
- fluide dilatant  $K=1$   $n=1,4$

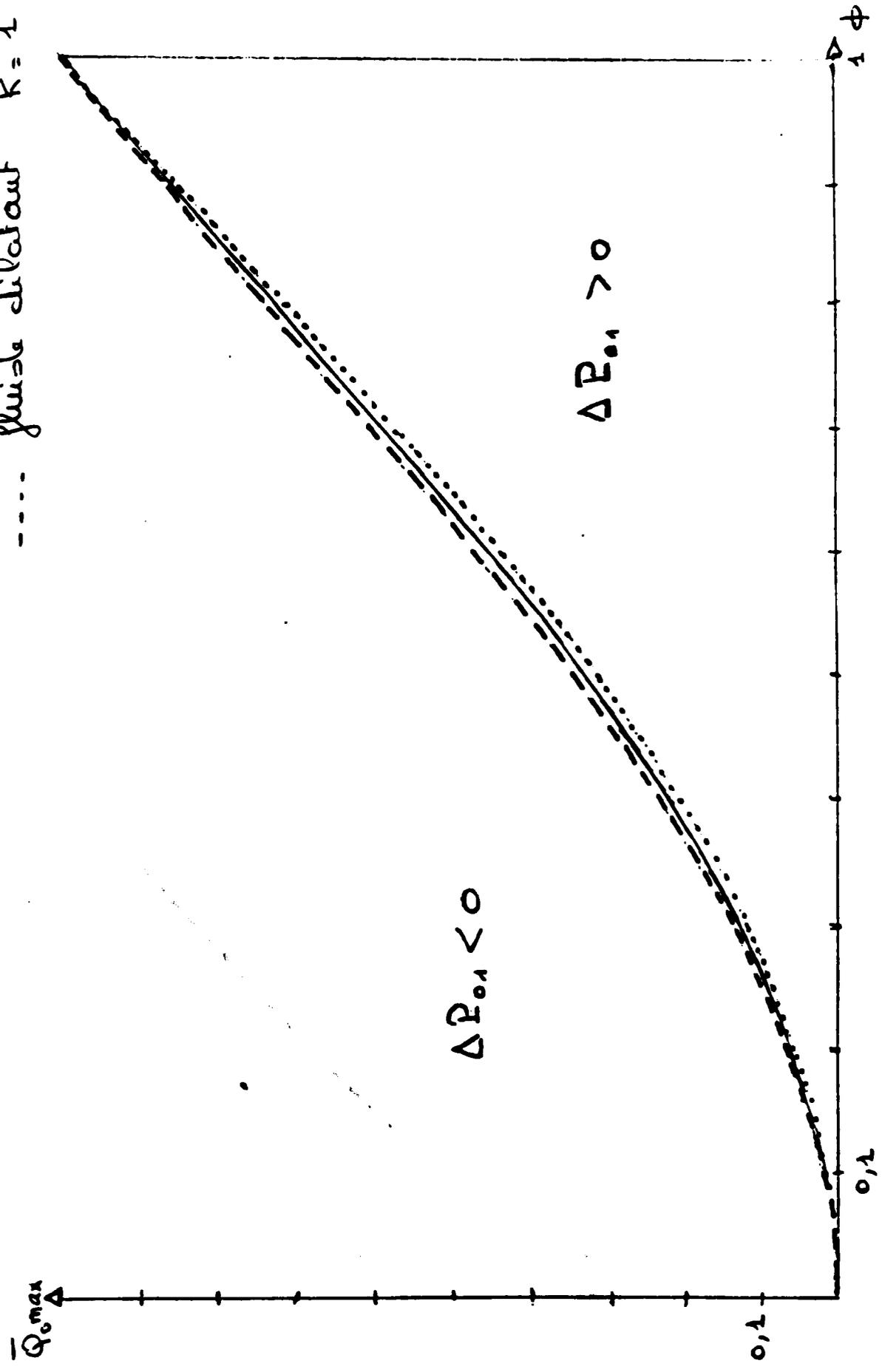
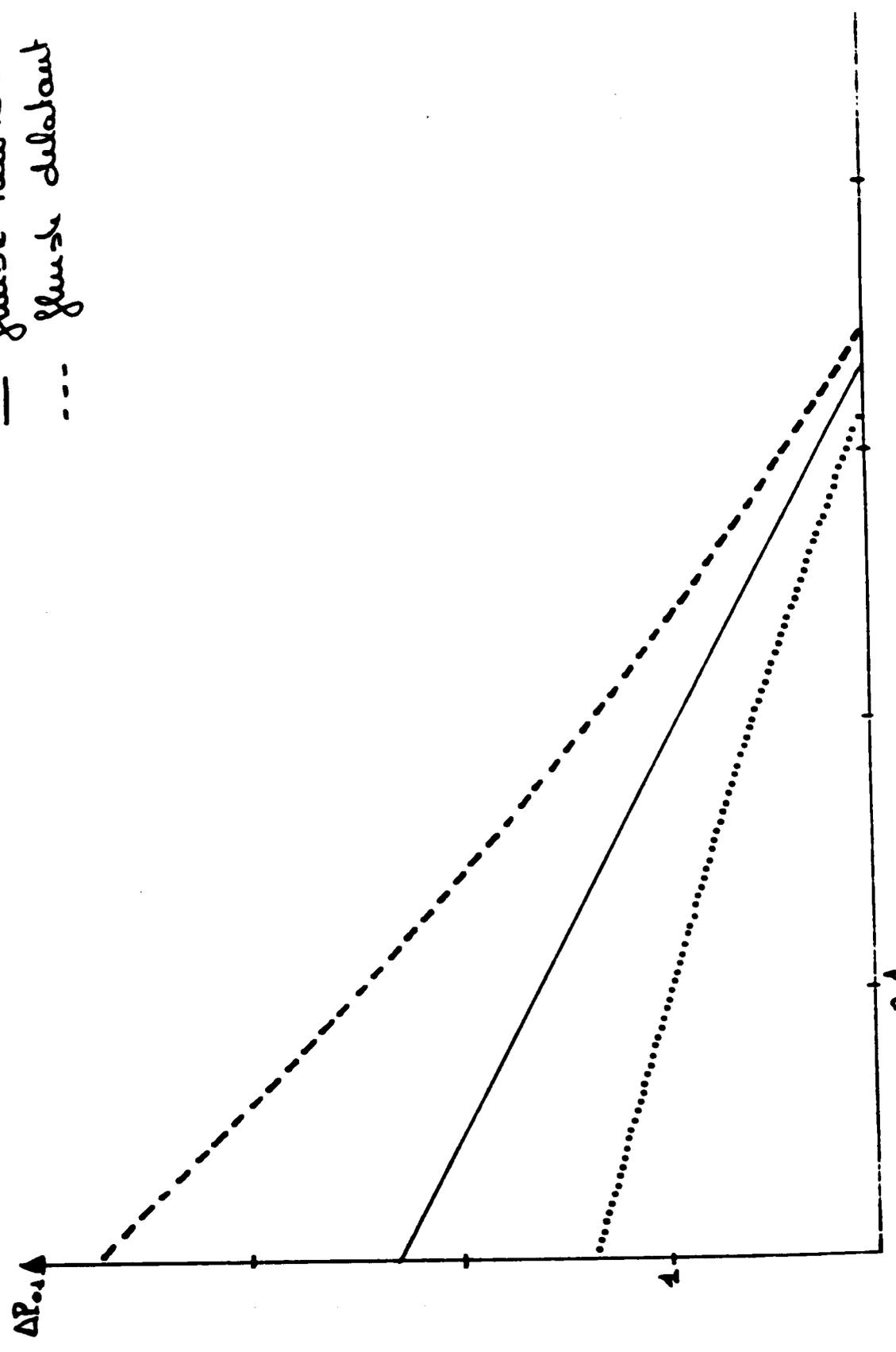


Figure 5 Caractéristiques Pression - débit pour les fluides considérés

$\phi = 0,1$

- ..... fluide pseudo-plastique  $K=1 \quad n=0,6$
- fluide newtonien  $K=n=1$
- fluide dilatant  $K=1 \quad n=1,4$



+  $\bar{Q}_0 \text{ max}$ , débit maximum que les ondes transporteraient en l'absence de l'accroissement de pression.

+ la quantité de fluide, qui sous l'action de l'accroissement de pression s'écoule en sens inverse des ondes, par unité de temps. Ce débit rétrograde est une fonction croissante de l'accroissement de pression. Dans le cas du fluide newtonien, ce débit est donné par l'expression :

$$- \frac{2(1 - \phi^2)^{5/2}}{3(2 + \phi^2)} \cdot \Delta P_{01}$$

Les caractéristiques pour différentes valeurs du paramètre d'occlusion sont représentées sur la figure 6. Dans le cas de l'occlusion complète ( $\phi=1$ ), la caractéristique est la droite  $\bar{Q}_0 = 1$  et tout le fluide est transporté par les ondes. Le tube fonctionne alors comme une pompe volumétrique occlusive capable de créer n'importe quelle charge indépendamment de son débit moyen.

## 6. ETUDE DES TRAJECTOIRES

Les trajectoires des particules fluides peuvent être déterminées en intégrant numériquement le système d'équations :

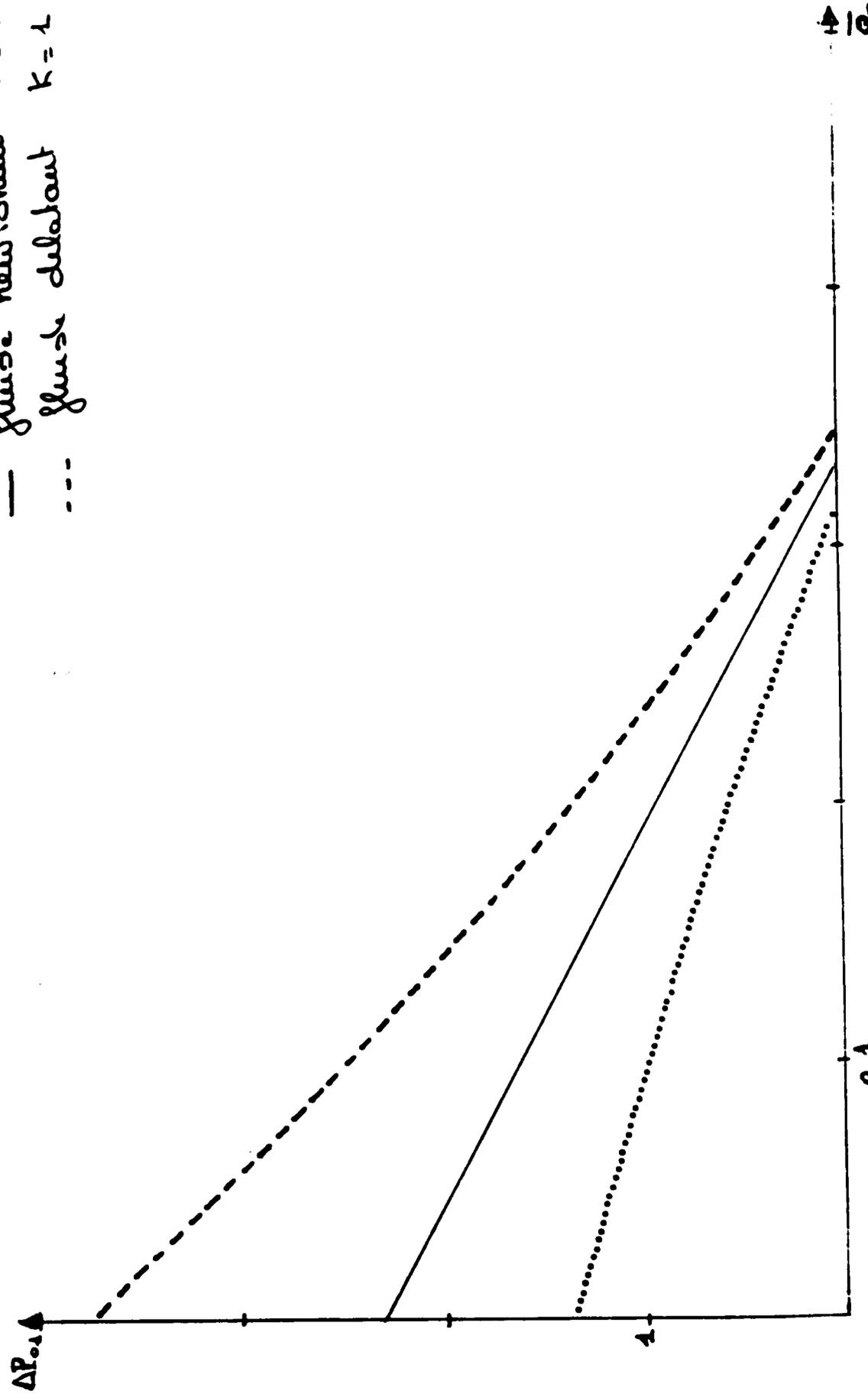
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = u_0(x,y,t) = \frac{2n+1}{n+1} \frac{\bar{Q}_0^{n+1} H^{-1}}{H} \left[ 1 - \left(\frac{y}{H}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \\ \frac{dy}{dt} = v_0(x,y,t) = \frac{2n+1}{n+1} \frac{\partial H}{\partial x} \left\{ \left[ \frac{\bar{Q}_0^{-1}}{H} \right] \left(\frac{y}{H}\right) - \left[ \frac{\bar{Q}_0^{-1}}{H} + \frac{n+1}{2n+1} \right] \left(\frac{y}{H}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right\} \end{array} \right.$$

Le mouvement des particules est périodique ; la période de mouvement d'une particule est le temps que met celle-ci pour occuper à nouveau la même position par rapport à l'onde.

Figure 5 Caractéristiques Pression - débit pour les fluides considérés

$\phi = 0,1$

- .... fluide pseudo-plastique  $K=1 \quad n=0,6$
- fluide newtonien  $K=n=1$
- fluide dilatant  $K=1 \quad n=1,4$



+  $\bar{Q}_o \text{ max}$  , débit maximum que les ondes transporteraient en l'absence de l'accroissement de pression.

+ la quantité de fluide, qui sous l'action de l'accroissement de pression s'écoule en sens inverse des ondes, par unité de temps. Ce débit rétrograde est une fonction croissante de l'accroissement de pression. Dans le cas du fluide newtonien, ce débit est donné par l'expression :

$$- \frac{2(1 - \phi^2)^{5/2}}{3(2 + \phi^2)} \cdot \Delta P_{o1}$$

Les caractéristiques pour différentes valeurs du paramètre d'occlusion sont représentées sur la figure 6. Dans le cas de l'occlusion complète ( $\phi=1$ ), la caractéristique est la droite  $\bar{Q}_o = 1$  et tout le fluide est transporté par les ondes. Le tube fonctionne alors comme une pompe volumétrique occlusive capable de créer n'importe quelle charge indépendamment de son débit moyen.

## 6. ETUDE DES TRAJECTOIRES

Les trajectoires des particules fluides peuvent être déterminées en intégrant numériquement le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u_o(x,y,t) = \frac{2n+1}{n+1} \frac{\bar{Q}_o^{+H-1}}{H} \left[ 1 - \left(\frac{y}{H}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \\ \frac{dy}{dt} = v_o(x,y,t) = \frac{2n+1}{n+1} \frac{\partial H}{\partial x} \left\{ \left[ \frac{\bar{Q}_o^{-1}}{H} \right] \left(\frac{y}{H}\right) - \left[ \frac{\bar{Q}_o^{-1}}{H} + \frac{n+1}{2n+1} \right] \left(\frac{y}{H}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right\} \end{cases}$$

Le mouvement des particules est périodique ; la période de mouvement d'une particule est le temps que met celle-ci pour occuper à nouveau la même position par rapport à l'onde.

+  $\bar{Q}_0 \text{ max}$  , débit maximum que les ondes transporteraient en l'absence de l'accroissement de pression.

+ la quantité de fluide, qui sous l'action de l'accroissement de pression s'écoule en sens inverse des ondes, par unité de temps. Ce débit rétrograde est une fonction croissante de l'accroissement de pression. Dans le cas du fluide newtonien, ce débit est donné par l'expression :

$$- \frac{2(1 - \phi^2)^{5/2}}{3(2 + \phi^2)} \cdot \Delta P_{01}$$

Les caractéristiques pour différentes valeurs du paramètre d'occlusion sont représentées sur la figure 6. Dans le cas de l'occlusion complète ( $\phi=1$ ), la caractéristique est la droite  $\bar{Q}_0 = 1$  et tout le fluide est transporté par les ondes. Le tube fonctionne alors comme une pompe volumétrique occlusive capable de créer n'importe quelle charge indépendamment de son débit moyen.

## 6. ETUDE DES TRAJECTOIRES

Les trajectoires des particules fluides peuvent être déterminées en intégrant numériquement le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u_0(x,y,t) = \frac{2n+1}{n+1} \frac{\bar{Q}_0^{+H-1}}{H} \left[ 1 - \left(\frac{y}{H}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \\ \frac{dy}{dt} = v_0(x,y,t) = \frac{2n+1}{n+1} \frac{\partial H}{\partial x} \left\{ \left[ \frac{\bar{Q}_0^{-1}}{H} \right] \left(\frac{y}{H}\right) - \left[ \frac{\bar{Q}_0^{-1}}{H} + \frac{n+1}{2n+1} \right] \left(\frac{y}{H}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right\} \end{cases}$$

Le mouvement des particules est périodique ; la période de mouvement d'une particule est le temps que met celle-ci pour occuper à nouveau la même position par rapport à l'onde.

Une étude numérique de quelques cas montre que pour les faibles débits moyens les particules situées près de l'axe se déplacent dans le sens de propagation des ondes, contrairement à celles situées près de la paroi.

Par contre quand les débits moyens sont élevés, toutes les particules se déplacent dans le sens de propagation des ondes, néanmoins le déplacement de celles près de l'axe est plus important.

Quelques trajectoires typiques sont représentées sur la figure 7 pour un débit moyen nul et sur la figure 8 pour un débit moyen élevé.

## 7) ETUDE DU REFLUX

Le reflux se manifeste par l'existence d'un débit rétrograde au-delà de l'axe, bien que le débit moyen total de l'écoulement soit positif. L'écoulement étant stationnaire dans le repère lié à l'onde, les trajectoires et les lignes de courant y coïncident.

Soit  $Q_k$ , le débit instantané entre l'axe du conduit et la ligne de courant  $\hat{\psi}_k$  ;

$$Q_k(x,t) = \int_0^{y(\hat{\psi}_k, x, t)} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} dy = \hat{\psi}_k + y(\hat{\psi}_k, x, t)$$

$y(\hat{\psi}_k, x, t)$  étant l'ordonnée d'un point de la ligne de courant  $\hat{\psi}_k$ .

Le débit moyen correspondant est :

$$\bar{Q}_k = \int_0^1 Q_k(x,t) dt = \hat{\psi}_k + \int_0^1 y(\hat{\psi}_k, x, t) dt$$

Si pour une ligne de courant particulière  $\hat{\psi}_k$ ,  $\bar{Q}_k$  excède la valeur du débit moyen  $\bar{Q}_0$  de l'écoulement, alors il y a reflux dans une zone située entre

$$\phi = 0,7$$

$$\bar{q}_0 = 0$$

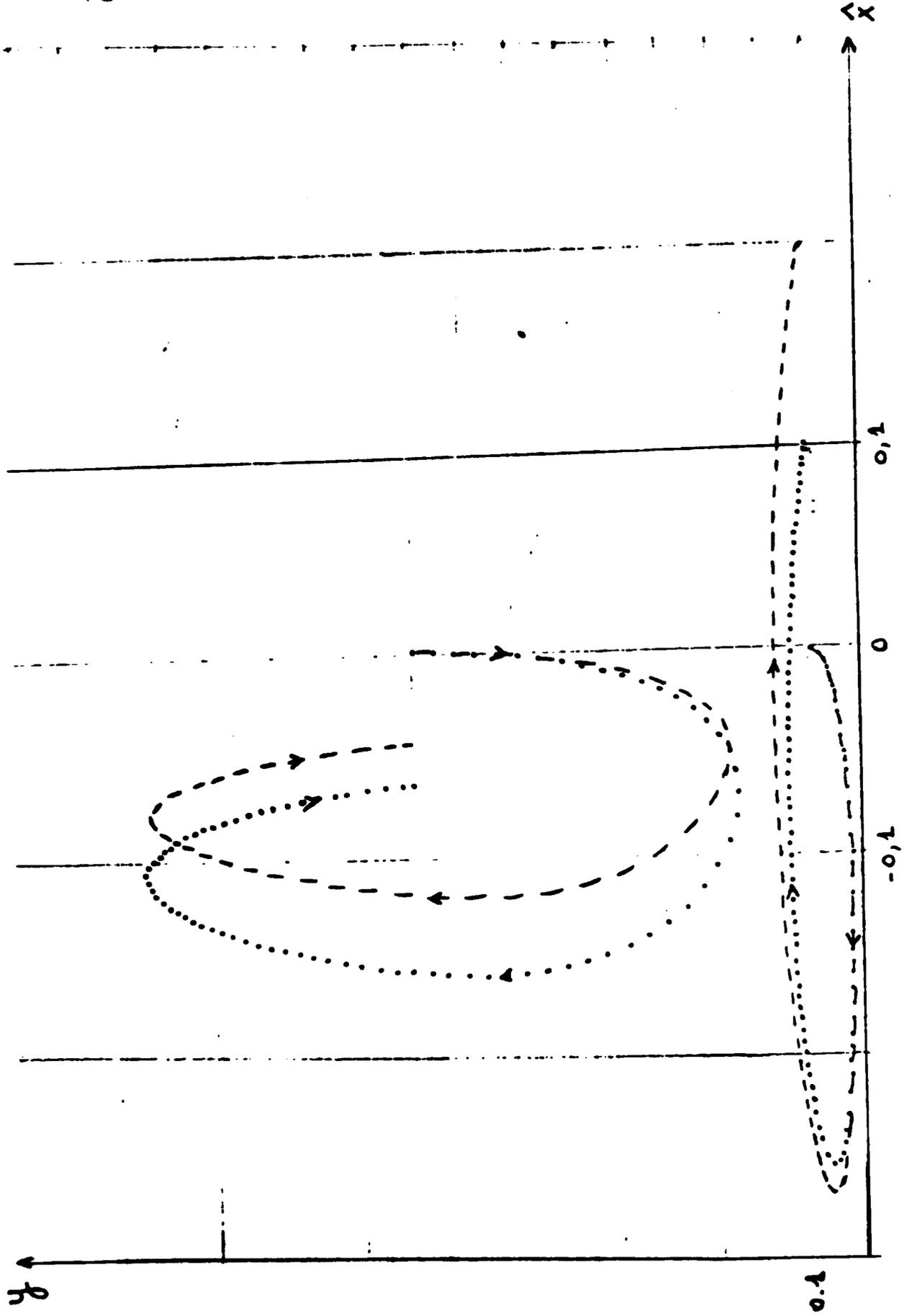
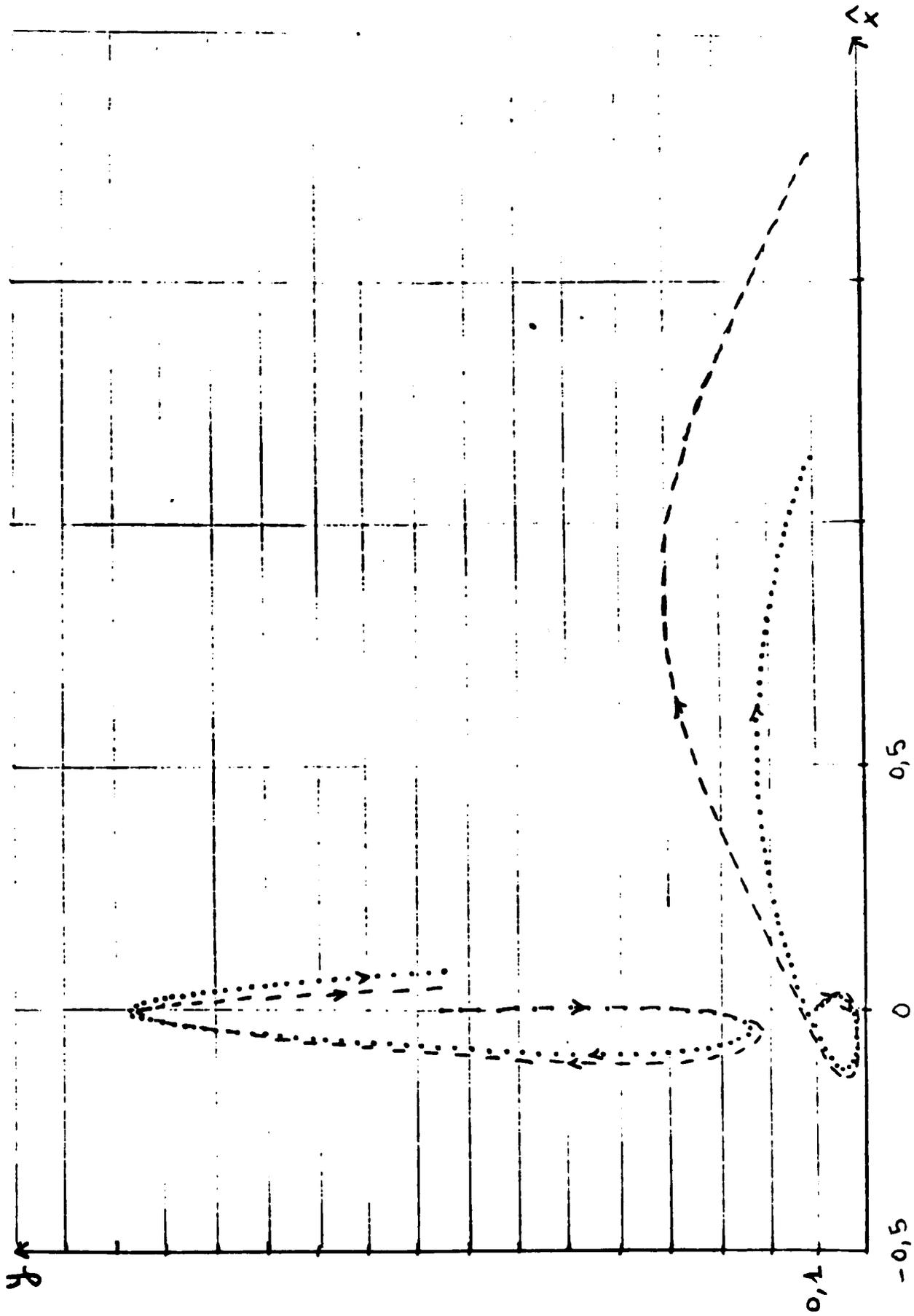


Figure 7: Exemples de trajectoires de particules

(...) fluide pseudoplastique  $K=1$   $n=0,6$

(- - -) fluide dilatant  $K=1$   $n=1,4$   
Figure 8: Exemples de trajectoires d'une particule



$$\phi = 0,7$$

$$\bar{Q}_0 = 0,3$$

fluide pseudoplastique  $K=1$   $n=0,6$   
 fluide dilatant  $K=1$   $n=1,4$

$$\phi = 0,7$$

$$\bar{Q}_0 = 0$$

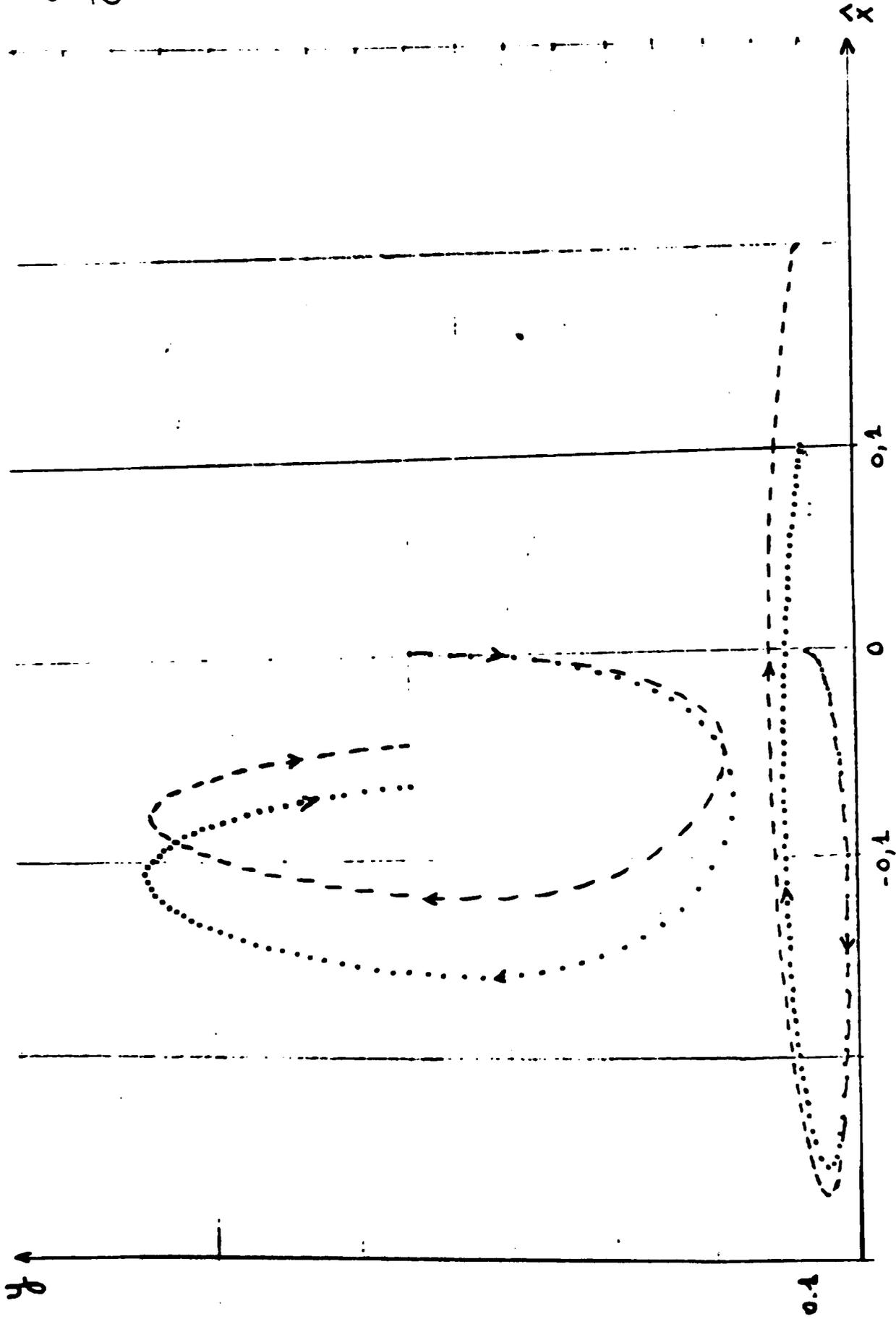
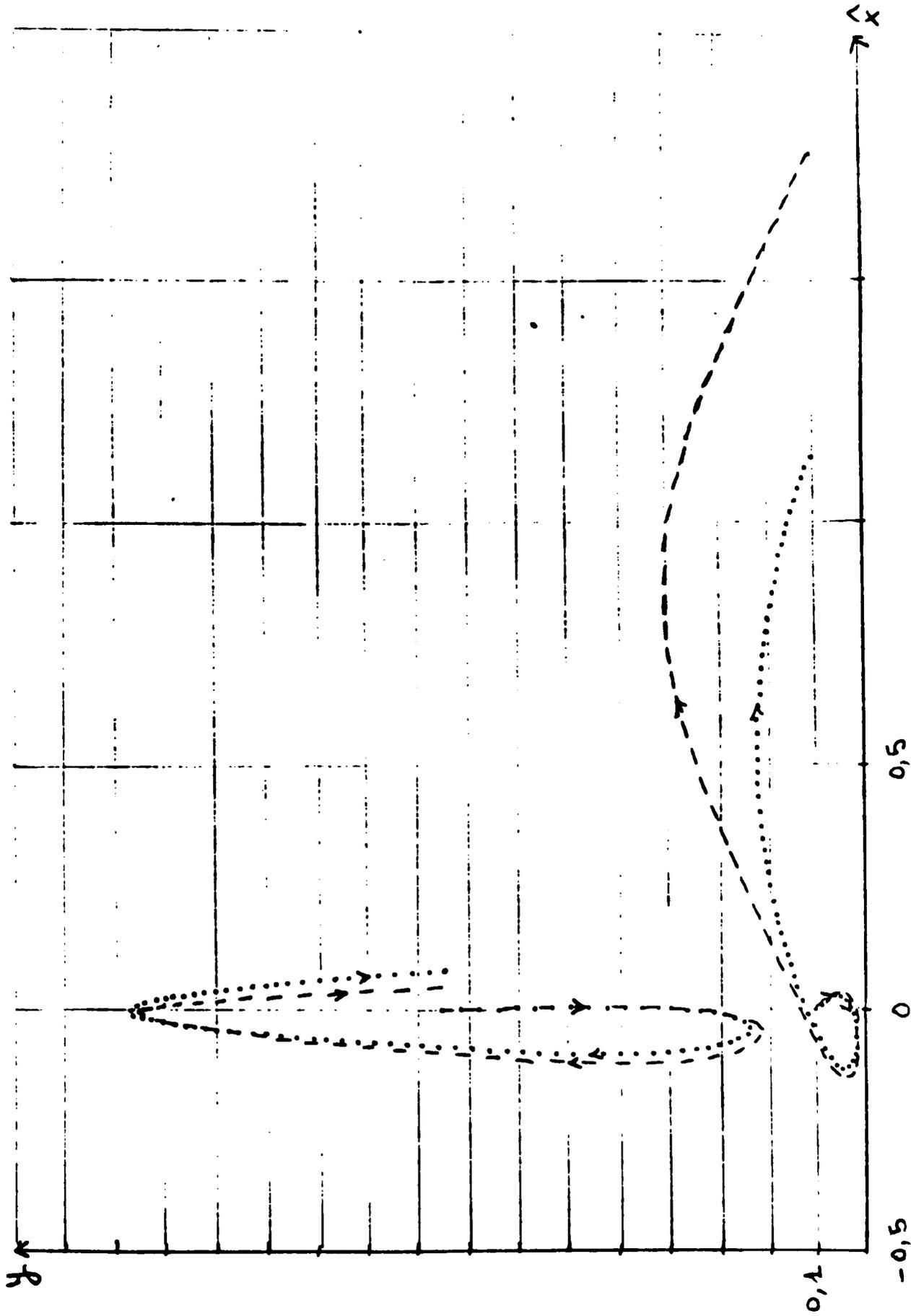


Figure 7: Exemples de trajectoires en particules

- (....) fluide pseudo-plastique  $K=1$   $n=0,6$
- (---) fluide dilatant  $K=1$   $n=1,4$

Figure 8: Exemples de trajectoires d'une particule



$$\phi = 0,7$$
$$\bar{q}_0 = 0,3$$

fluide pseudoplastique  $K=1$   $n=0,6$

fluide stiboplastique  $K=1$   $n=1,1$

cette ligne de courant et la paroi.

L'étude des trajectoires ayant montré que seules les particules au-delà de l'axe avaient un déplacement négatif ; on se propose de calculer le débit  $\bar{Q}_k$  pour une ligne de courant  $\hat{\psi}_k$  au voisinage de la paroi.

Pour cela on effectue un développement limité de la fonction de courant en fonction du petit paramètre :

$$\alpha = \hat{\psi} - \hat{\psi}_{\text{paroi}}$$

or 
$$\hat{\psi}_{\text{paroi}} = \hat{\psi}(\hat{x}, H) = \bar{Q}_0 - 1$$

donc 
$$\alpha = \hat{\psi} + 1 - \bar{Q}_0$$

Nous supposons donc que l'équation de la ligne de courant au voisinage de la paroi s'écrit :

$$y(\hat{x}, \phi, \bar{Q}_0, \alpha) = y(\hat{x}, \phi, \bar{Q}_0, 0) + \frac{\partial y(\hat{x}, \phi, \bar{Q}_0, 0)}{\partial \alpha} \cdot \alpha + \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial^2 y(\hat{x}, \phi, \bar{Q}_0, 0)}{\partial \alpha^2} + \dots$$

en posant 
$$a_i(\hat{x}, \phi, \bar{Q}_0) = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i y(\hat{x}, \phi, \bar{Q}_0, 0)}{\partial \alpha^i}$$

on obtient :

$$\psi = \bar{Q}_0 + H - 1 + (a_1 + 1)\alpha + a_2 \alpha^2 + \dots$$

en identifiant avec l'expression de la fonction de courant donnée précédemment, il vient :

$$a_1 = -1 \quad \text{et} \quad a_2(\hat{x}, \phi, \bar{Q}_0) = -\frac{2n+1}{2n} \left( \frac{\bar{Q}_0 + H - 1}{H^2} \right)$$

et l'équation de la ligne de courant au voisinage de la paroi est :

$$y(\hat{x}, \phi, \bar{Q}_0, \alpha) = H(\hat{x}) - \alpha - \left( \frac{2n+1}{2n} \right) \left( \frac{\bar{Q}_0 + H - 1}{H^2} \right) \alpha^2 + \dots$$

et le débit  $\bar{Q}_k$  est donné par :

$$\bar{Q}_k = \bar{Q}_0 - \frac{2n+1}{2n} \left[ \frac{\bar{Q}_0 - \phi^2}{(1 - \phi^2)^{3/2}} \right] \alpha^2 + \dots$$

Ce qui montre que le débit  $\bar{Q}_k$  excède le débit moyen  $\bar{Q}_0$  de l'écoulement et que donc il y a reflux, si :

$$\bar{Q}_0 < \phi^2$$

Cette valeur critique du débit moyen est indépendante du fluide considéré.

#### 8) PIEGEAGE DES PARTICULES FLUIDES

Dans le cas de l'occlusion complète du tube, le débit dans le repère lié à l'onde est nul et la valeur de la fonction de courant à la paroi est nulle. Tout le fluide se déplace à la même vitesse que l'onde, comme s'il était "piégé" par celle-ci.

Dans le repère mobile, les lignes de courant sont fermées et forment des zones de recirculation du fluide.

Ce phénomène observable dans le repère mobile se manifeste sous certaines conditions, même quand le dispositif n'est pas occlusif. Les poches de recirculation, centrées sur l'axe, sont délimitées par une ligne de courant particulière qui coupe l'axe du conduit en des points qui apparaissent dans le repère mobile comme des points d'arrêt.

A chaque fois qu'il existe un point d'arrêt sur l'axe, la ligne de courant se scinde et on obtient une ligne de courant nulle au-dessus de l'axe.

Les points d'arrêt sur l'axe, quand ils existent, sont obtenus en égalant à 1 la vitesse dans le repère fixe et ceci pour  $y = 0$  ; il vient :

$$H = \frac{2n+1}{n} (1 - \bar{Q}_0) \quad ;$$

comme  $1 - \phi \leq H \leq 1 + \phi$  ,

l'équation précédente admet des solutions si :

$$\frac{1 + n(1 - \phi)}{2n + 1} \leq \bar{Q}_0 \leq \frac{1 + n(1 + \phi)}{2n + 1}$$

On dispose ainsi d'un critère d'existence du piégeage. La borne supérieure, comme on peut le voir sur la figure 9, est en dehors du domaine de pompage ; par suite, seule la borne inférieure sera retenue.

La condition d'existence du piégeage étant supposée vérifiée, les points d'arrêt sont donnés par :

$$\sin 2\pi \hat{x} = \frac{2n+1}{n} \left( \frac{1 - \bar{Q}_0}{\phi} \right) - \frac{1}{\phi}$$

et la ligne de courant délimitant la zone de piégeage est obtenue en posant :

$$\hat{\psi}_0 = 0$$

son équation est donc :

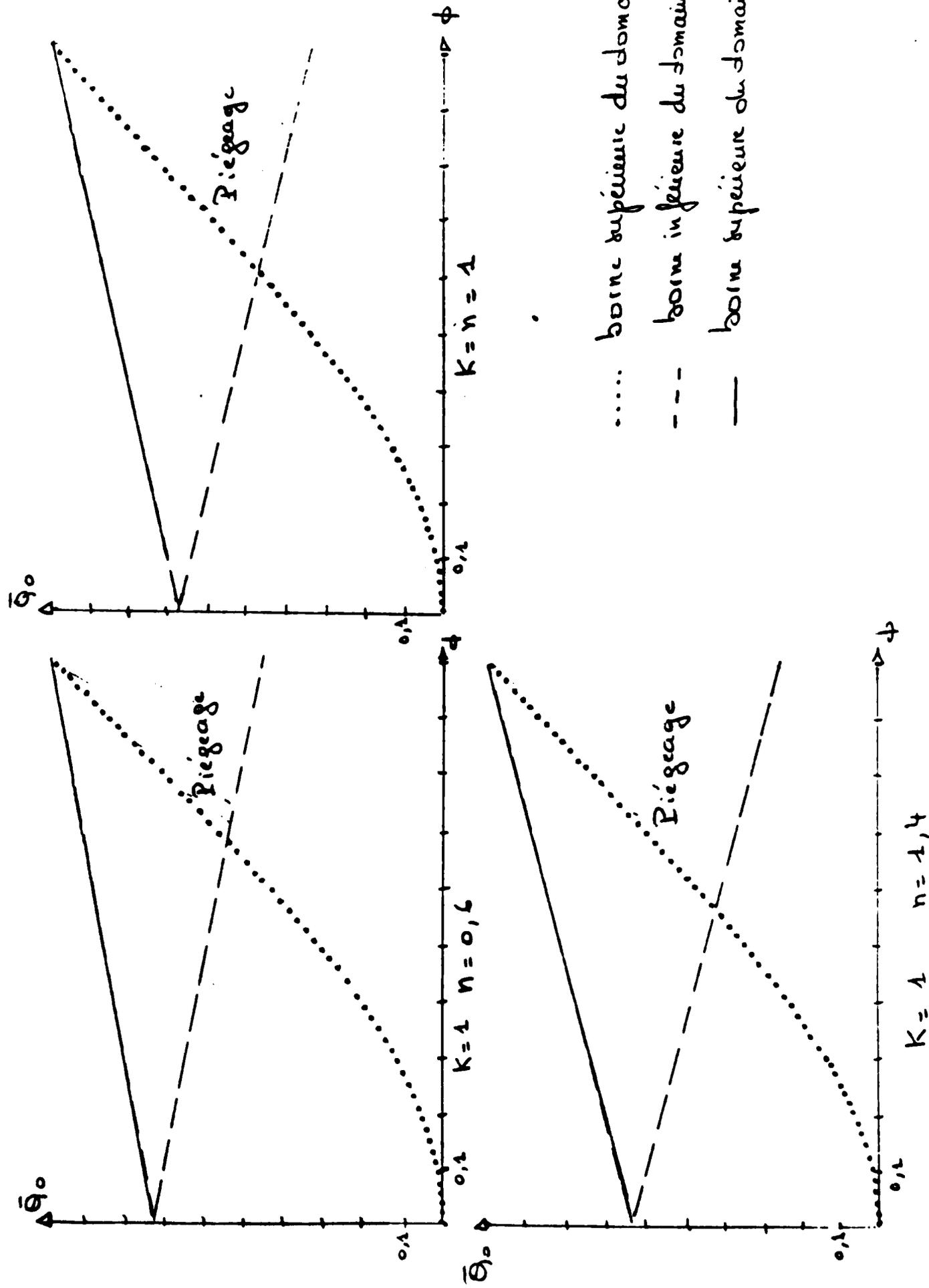
$$y = H \left[ \frac{2n+1}{n} - \frac{n+1}{n} \frac{H}{\bar{Q}_0 + H - 1} \right]^{\frac{n}{n+1}}$$

Dans le cas de l'occlusion complète, le débit moyen est égal à 1 et cette ligne de courant se confond avec la paroi du conduit. Le piégeage a lieu dans tout le domaine de l'écoulement.

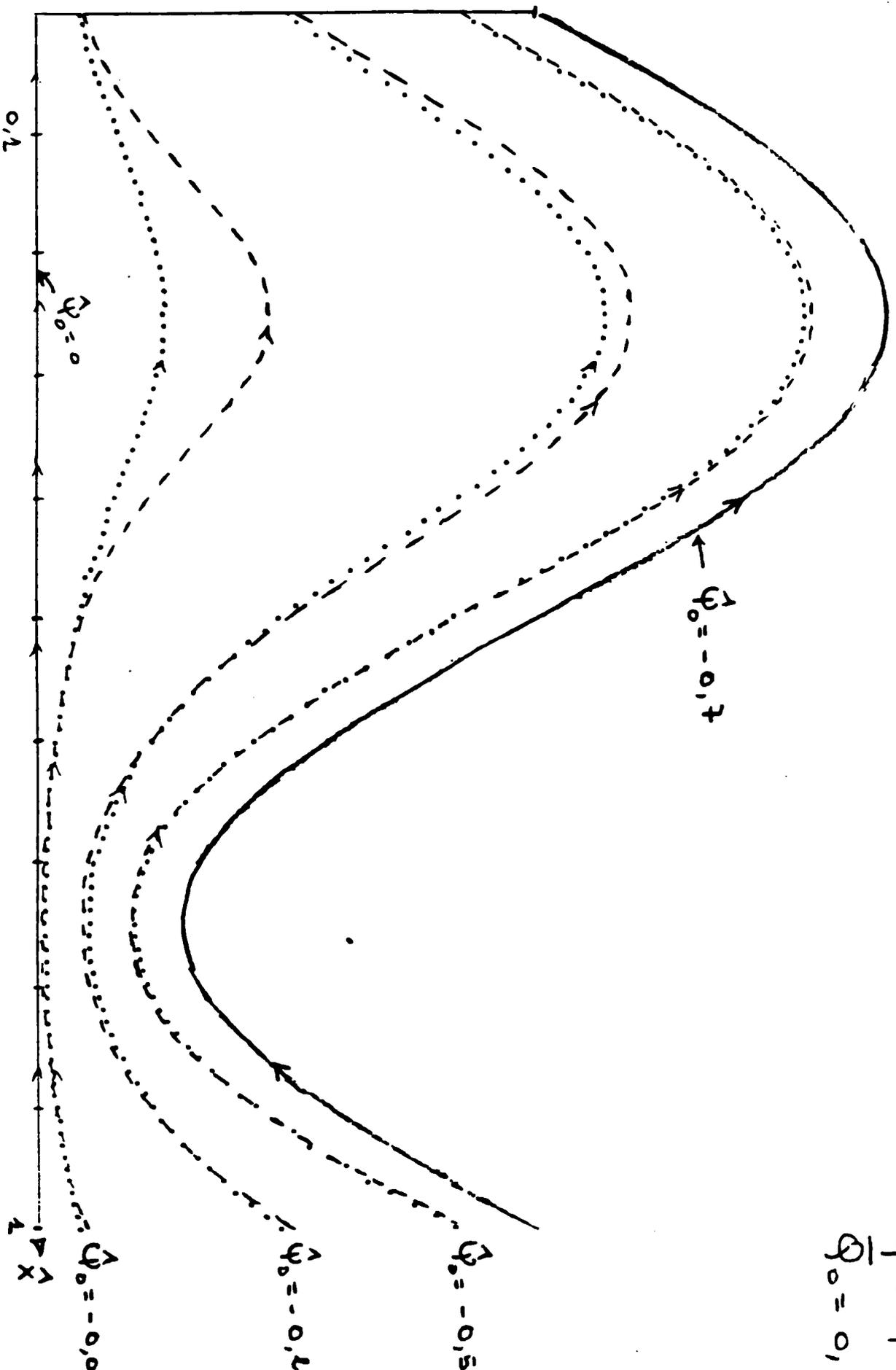
Les configurations des lignes de courant dans le repère mobile sont représentées en l'absence de piégeage sur la figure 10 et dans le cas de l'existence du piégeage sur la figure 11.

Enfin un résumé graphique des différents régimes est représenté pour chaque fluide sur les figures 12, 13 et 14.

Figure 9: Domaine de piégeage (hachure) pour les trois fluides étudiés



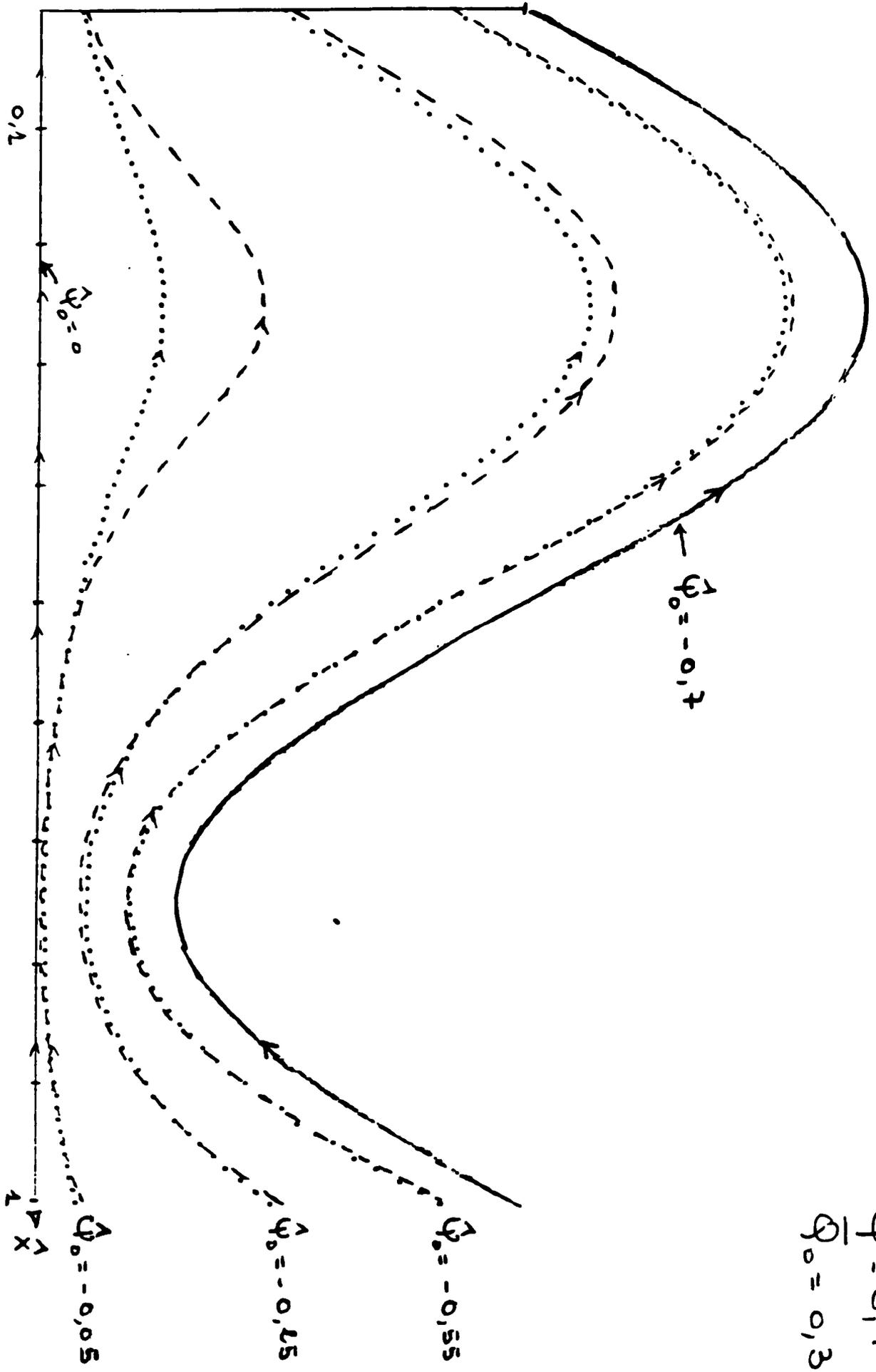
$$\frac{\phi}{\phi_0} = 0,7$$



..... fluide pseudo-plastique  $K=1$   $n=0,6$   
 --- fluide de la part  $K=1$   $n=1,4$

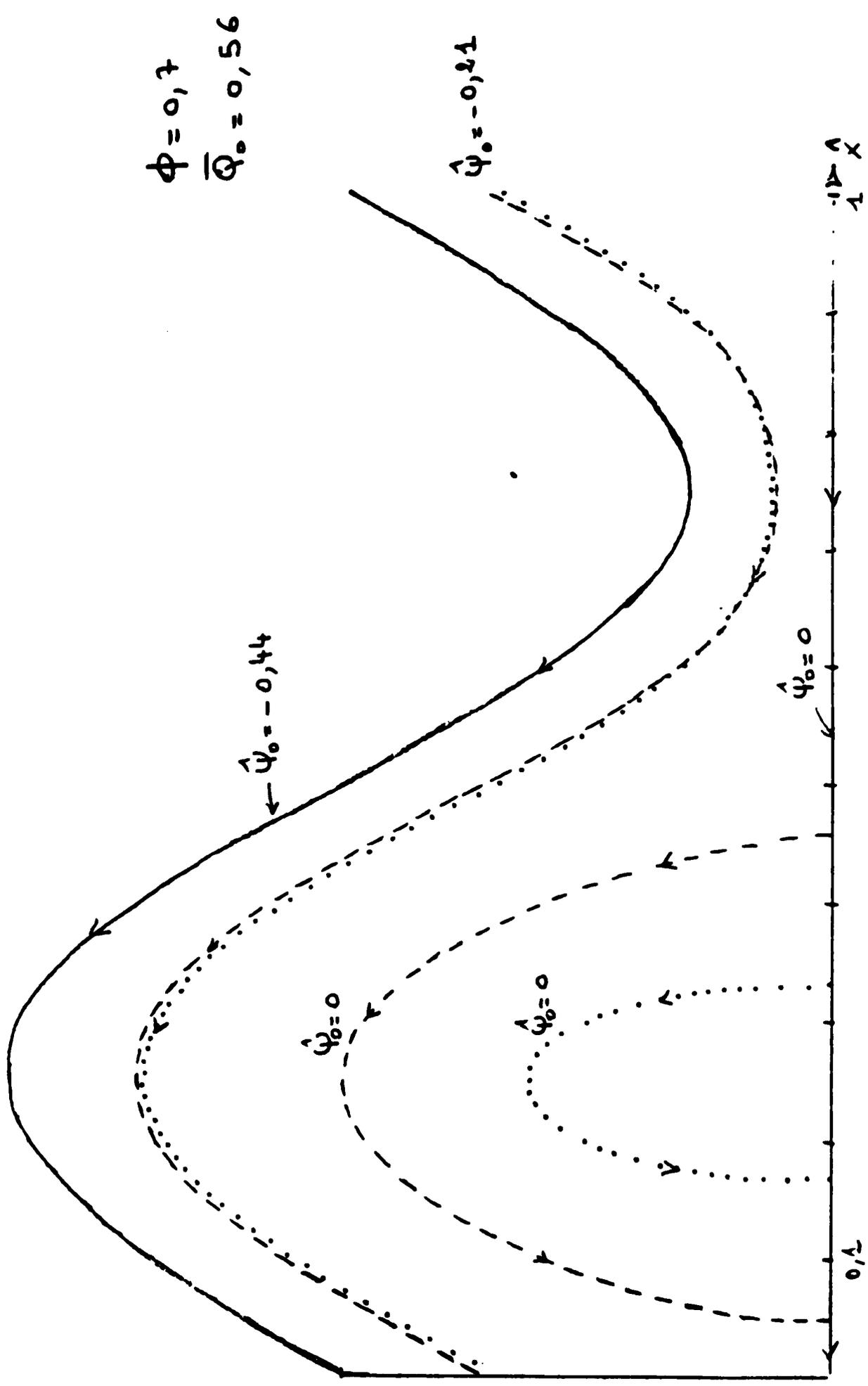


$\phi = 0,7$   
 $\bar{\phi}_0 = 0,3$



..... fluide pseudo-plastique  $K=1$   $n=0,6$   
--- fluide dilatable  $K=1$   $n=1,4$

Figure 11: Lignes de courant dans le régime de l'onde - Cas du piégeage.



fluxe pseudo-plasma  $K=1$   $n=0,6$   
 $\hat{\psi}_0 = 0$

Resumé Graphique des différents régimes.

Figure 12. fluide pseudo-plastique

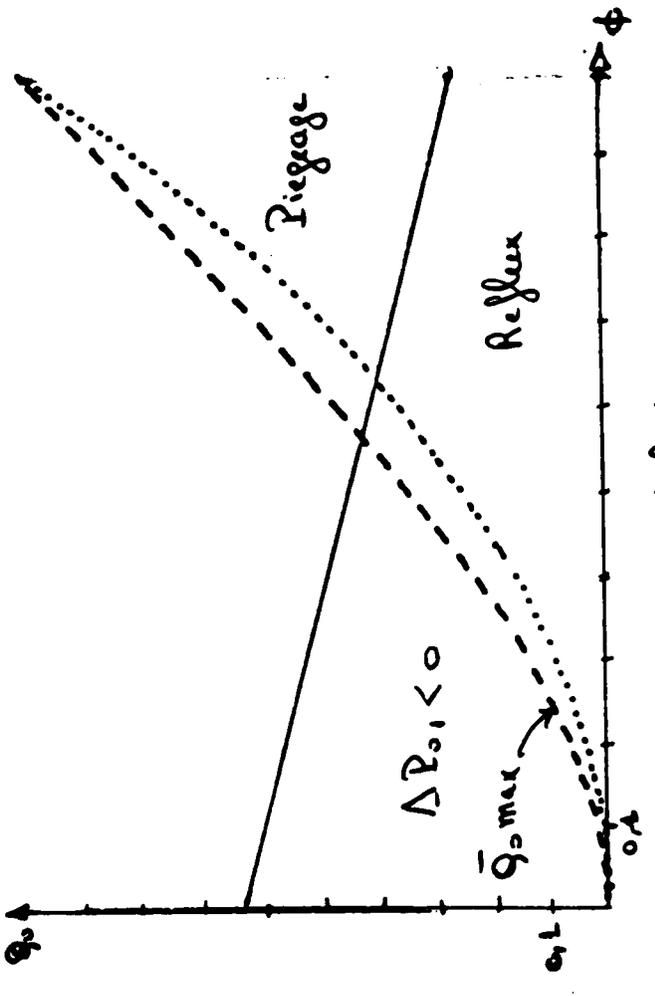
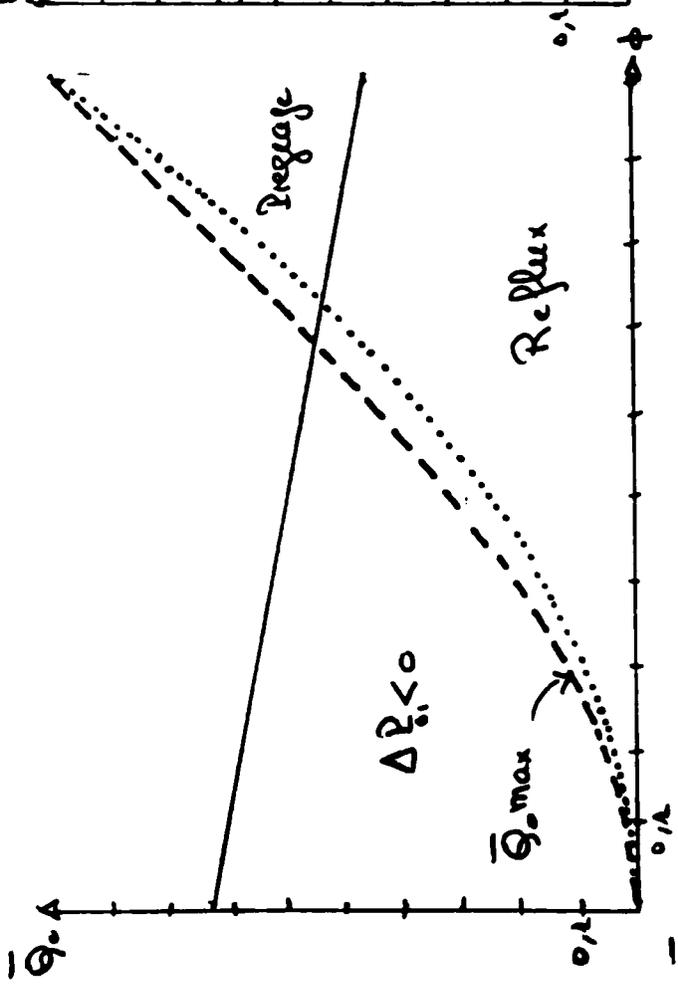
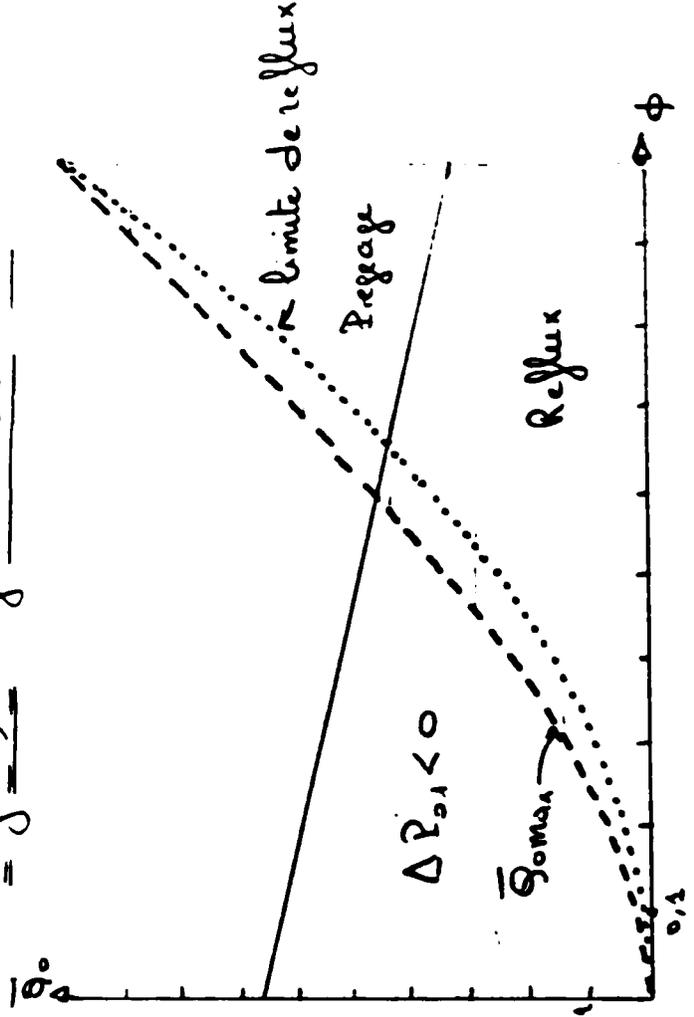


Figure 13. fluide newtonien



- limite du domaine de pompage
- ..... limite de reflux
- limite de pirage.

9) CISAILLEMENT A LA PAROI

C'est la composante tangentielle de la force qui s'exerce sur le fluide à la paroi.

En se plaçant dans le repère lié à l'onde, la paroi paraît rigide et en chacun de ses points le vecteur unitaire tangent est donné par :

$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dH^*}{dx^*}\right)^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{dH^*}{dx^*} \end{bmatrix}$$

et le vecteur unitaire normal extérieur :

$$\vec{\eta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dH^*}{dx^*}\right)^2}} \begin{bmatrix} -\frac{dH^*}{dx^*} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Le cisaillement à la paroi est donc :

$$T^* = [\sigma^*(y^* = H^*) \cdot \vec{\eta}] \cdot \vec{\tau}$$

$\sigma^*$  étant le tenseur des contraintes.

On trouve :

$$T^* = \frac{1}{1 + \left(\frac{dH^*}{dx^*}\right)^2} \left[ \frac{dH^*}{dx^*} (p_{22}^* - p_{11}^*) + \left(1 - \left(\frac{dH^*}{dx^*}\right)^2\right) p_{12}^* \right]_{y^* = H^*}$$

il s'introduit la quantité adimensionnelle correspondante T, telle que :

$$T^* = \frac{\eta_0 c}{H_0} T$$

En première approximation :

$$T_0 = \tau_0 (y = H) = H \cdot \frac{\partial P_0}{\partial x} (\hat{x})$$

ou encore :

Resumé graphique des différents régimes.

Figure 12 fluide pseudo-plastique

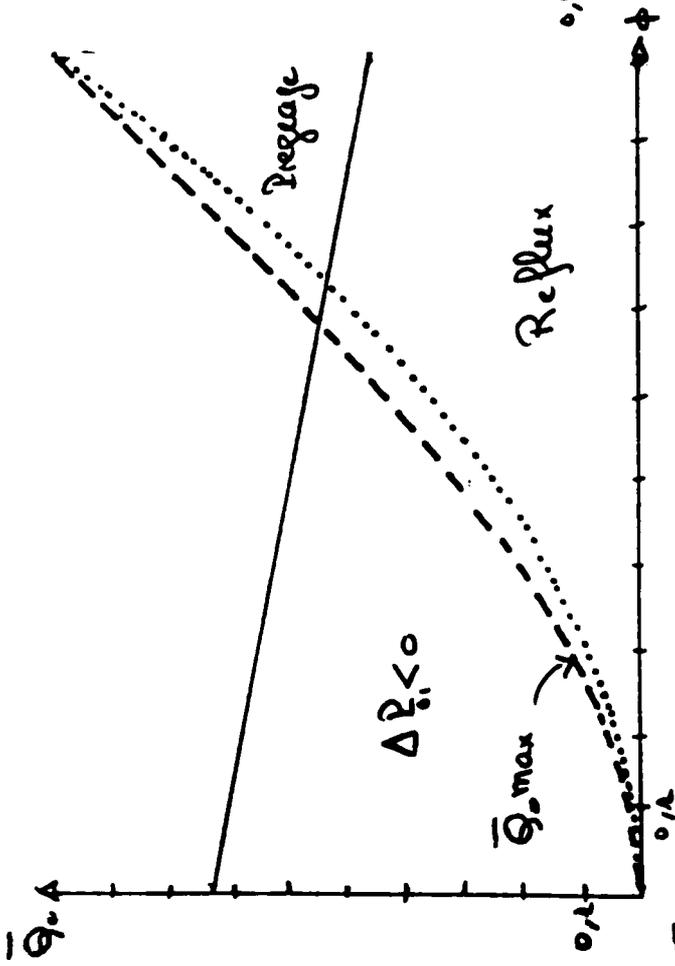


Figure 13 fluide newtonien

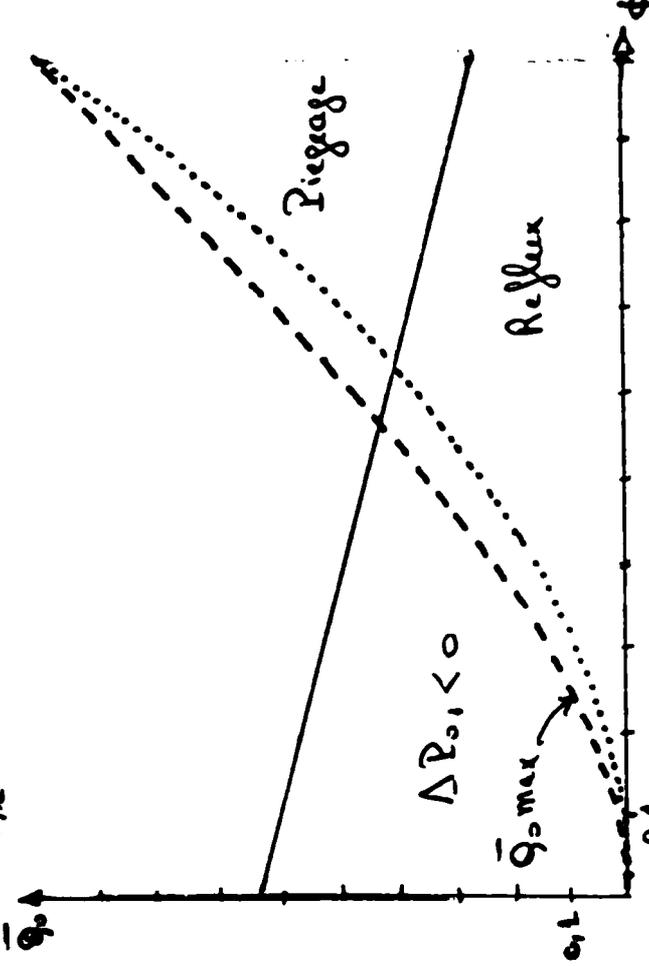
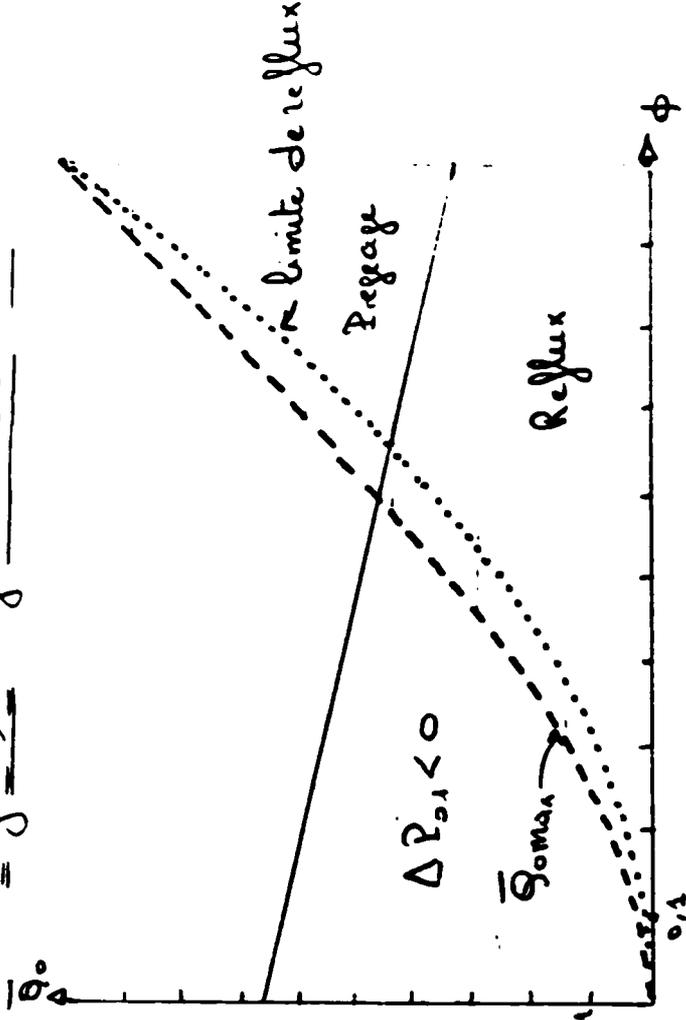


Figure 14: fluide dilatant

- limite du domaine de pompage
- ..... limite de reflux
- limite de pirage.

### 9) CISAILLEMENT A LA PAROI

C'est la composante tangentielle de la force qui s'exerce sur le fluide à la paroi.

En se plaçant dans le repère lié à l'onde, la paroi paraît rigide et en chacun de ses points le vecteur unitaire tangent est donné par :

$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dH^*}{dx^*}\right)^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{dH^*}{dx^*} \end{bmatrix}$$

et le vecteur unitaire normal extérieur :

$$\vec{\eta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dH^*}{dx^*}\right)^2}} \begin{bmatrix} -\frac{dH^*}{dx^*} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Le cisaillement à la paroi est donc :

$$T^* = \left[ \sigma^*(y^* = H^*) \cdot \vec{\eta} \right] \cdot \vec{\tau}$$

$\sigma^*$  étant le tenseur des contraintes.

On trouve :

$$T^* = \frac{1}{1 + \left(\frac{dH^*}{dx^*}\right)^2} \left[ \frac{dH^*}{dx^*} (p_{22}^* - p_{11}^*) + \left(1 - \left(\frac{dH^*}{dx^*}\right)^2\right) p_{12}^* \right]_{y^* = H^*}$$

il s'introduit la quantité adimensionnelle correspondante T, telle que :

$$T^* = \frac{\eta_0 c}{H_0} T$$

En première approximation :

$$T_0 = \tau_0 (y = H) = H \cdot \frac{\partial P_0}{\partial x} (\hat{x})$$

ou encore :

$$T_o = - \left( \frac{2n+1}{n} \right)^n K \cdot \text{sgn} (\bar{Q}_o + H - 1) \left| \frac{\bar{Q}_o + H - 1}{H^2} \right|^n$$

Comme le gradient de pression, le cisaillement à la paroi change de signe sur une longueur d'onde. Il s'annule dans les sections telles que :

$$H(\hat{x}) = 1 - \bar{Q}_o$$

et atteint sa valeur maximum au point de contraction maximum et donc :

$$T_{o \max} = K \cdot \left( \frac{2n+1}{n} \right)^n \cdot \left[ \frac{\phi - \bar{Q}_o}{(1-\phi)^2} \right]^n$$

Cette valeur maximum est due au fait que dans les zones contractées, les gradients de vitesse sont élevés.

$T_{o \max}$  est une fonction décroissante, du débit moyen, par contre elle croit avec le paramètre d'occlusion.

La figure 15 représente le cisaillement à la paroi pour les trois fluides considérés pour un débit moyen nul ; le cas d'un débit moyen élevé est représenté sur la figure 16.

#### 10) RENDEMENT DU POMPAGE

L'énergie nécessaire au pompage du fluide provient du travail de la paroi contre la force que le fluide exerce sur celle-ci.

Dans le repère lié à l'onde, la composante transversale de la force par unité de surface s'exerçant sur le fluide en  $y^* = H^*(\hat{x}^*)$  est donnée par :

$$F^* = [\sigma^* (y^* = H^*) \cdot \vec{n}] \cdot \vec{e}_y$$

soit :

$$F^* = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{dH^*}{d\hat{x}^*} \right)^2}} \left[ -P^* + P_{22}^* - \left( \frac{dH^*}{d\hat{x}^*} \right) P_{12}^* \right]_{y^* = H^*}$$

Figure 15: Variation du cisaillement à la paroi sur une longueur d'onde pour un débit moyen nul.

- ..... fluide pseudo-plastique  $K=1$   $n=0,6$   $\phi = 0,4$
- fluide newtonien  $K=n=1$   $\bar{Q}_0 = 0$
- fluide dilatant  $K=1$   $n=1,4$

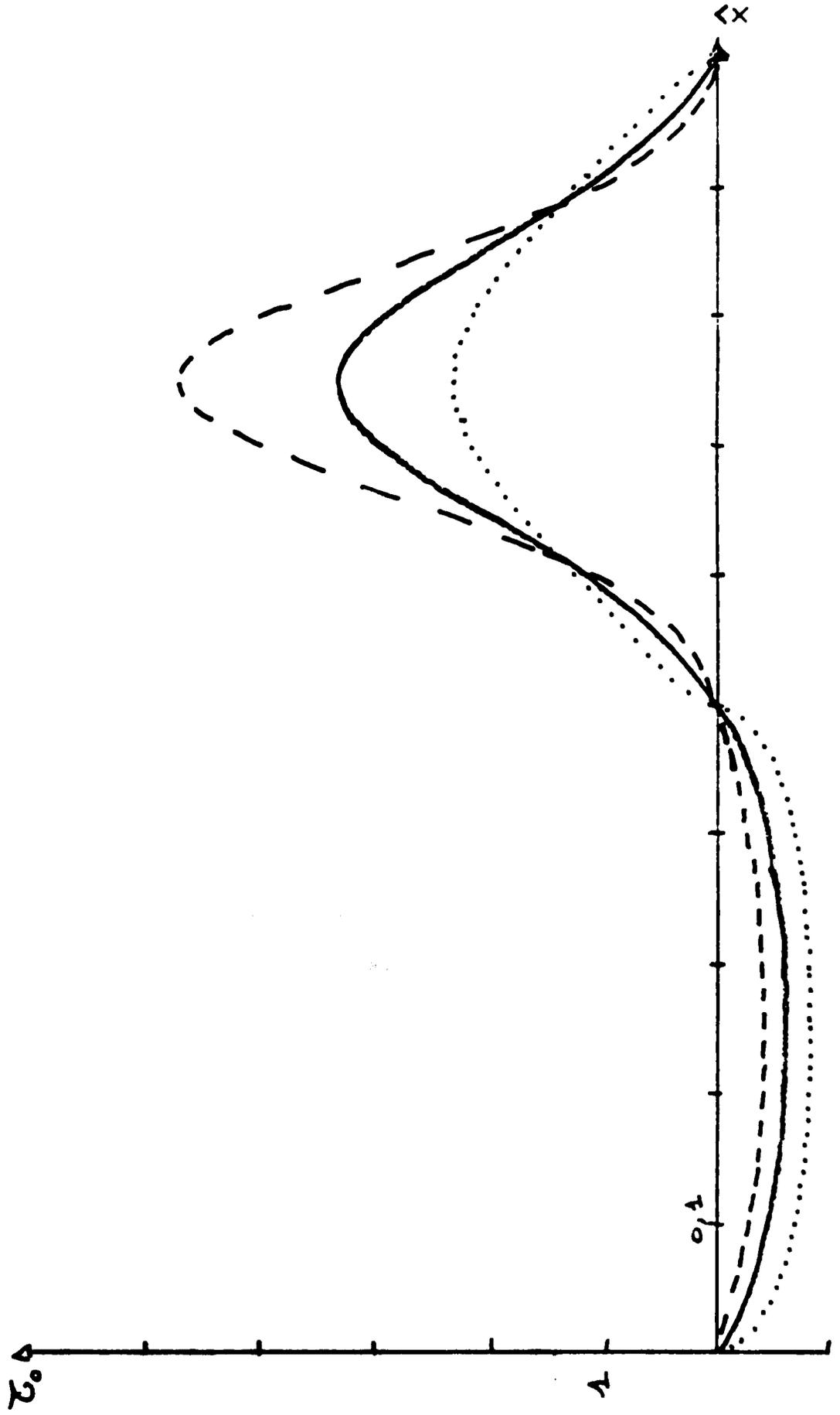
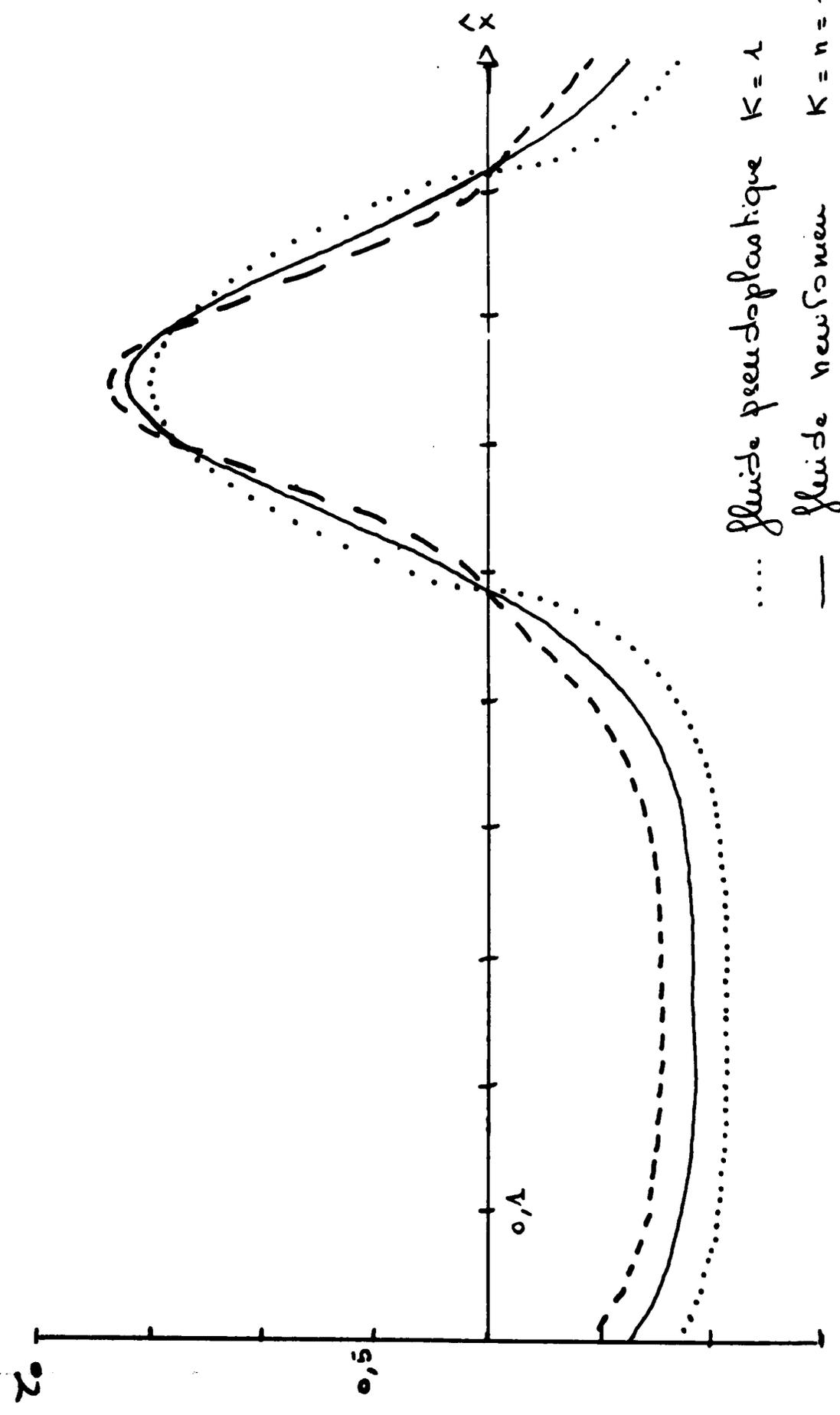


Figure 16 Variation du cisaillement à la paroi sur une longueur d'onde pour un débit moyen élevé

$\phi = 0,4$   
 $\bar{G}_0 = 0,1$



.... fluide pseudoplastique  $K=1$   $n=0,6$   
 — fluide newtonien  $K=n=1$   
 - - - fluide dilatable  $K=1$   $n=1,4$

Figure 17-a: Travail moyen de la paucie par longueur d'onde et par période  
en fonction du débit moyen normalisé par rapport au débit moyen  
maximum, pour  $\phi = 0,5$

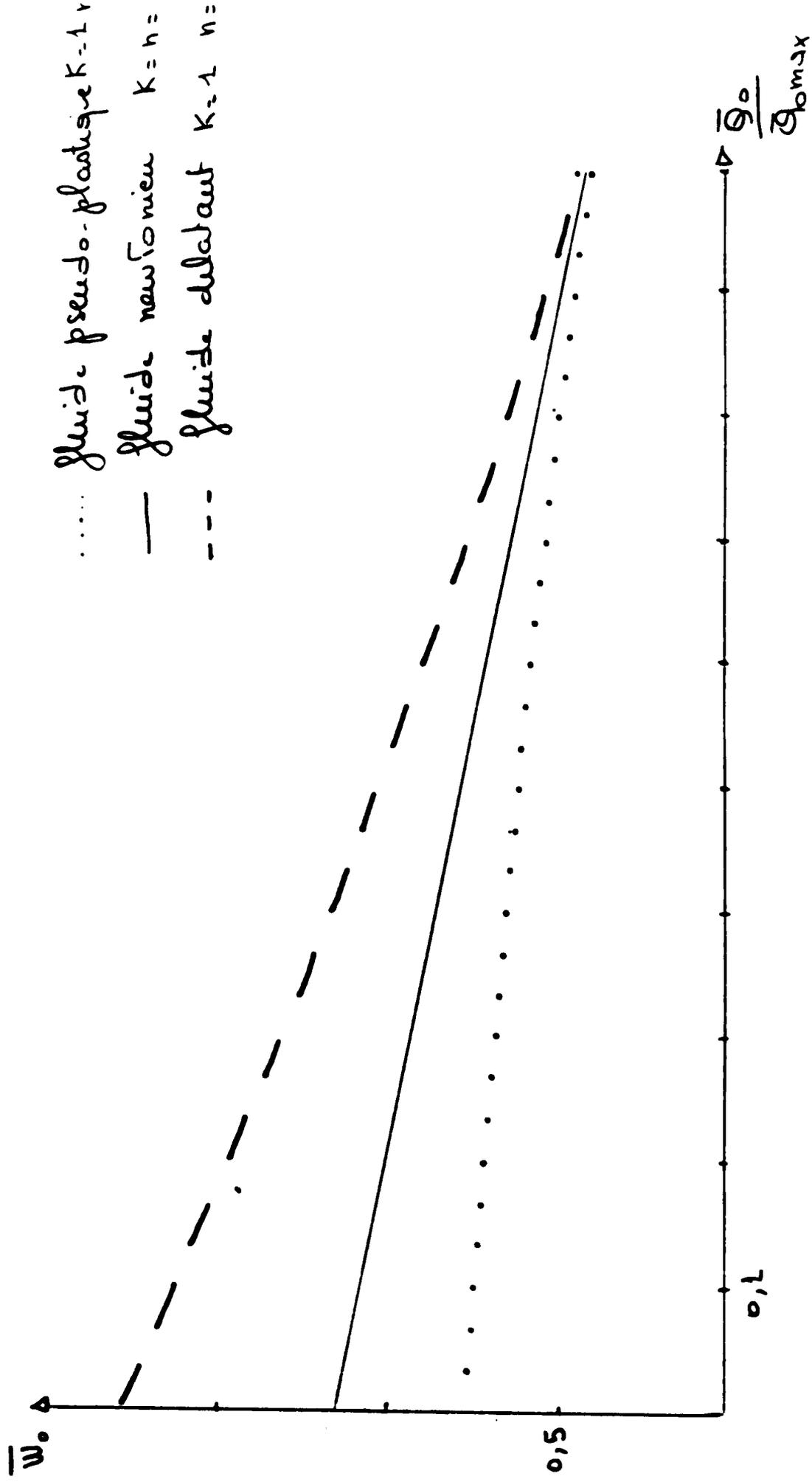
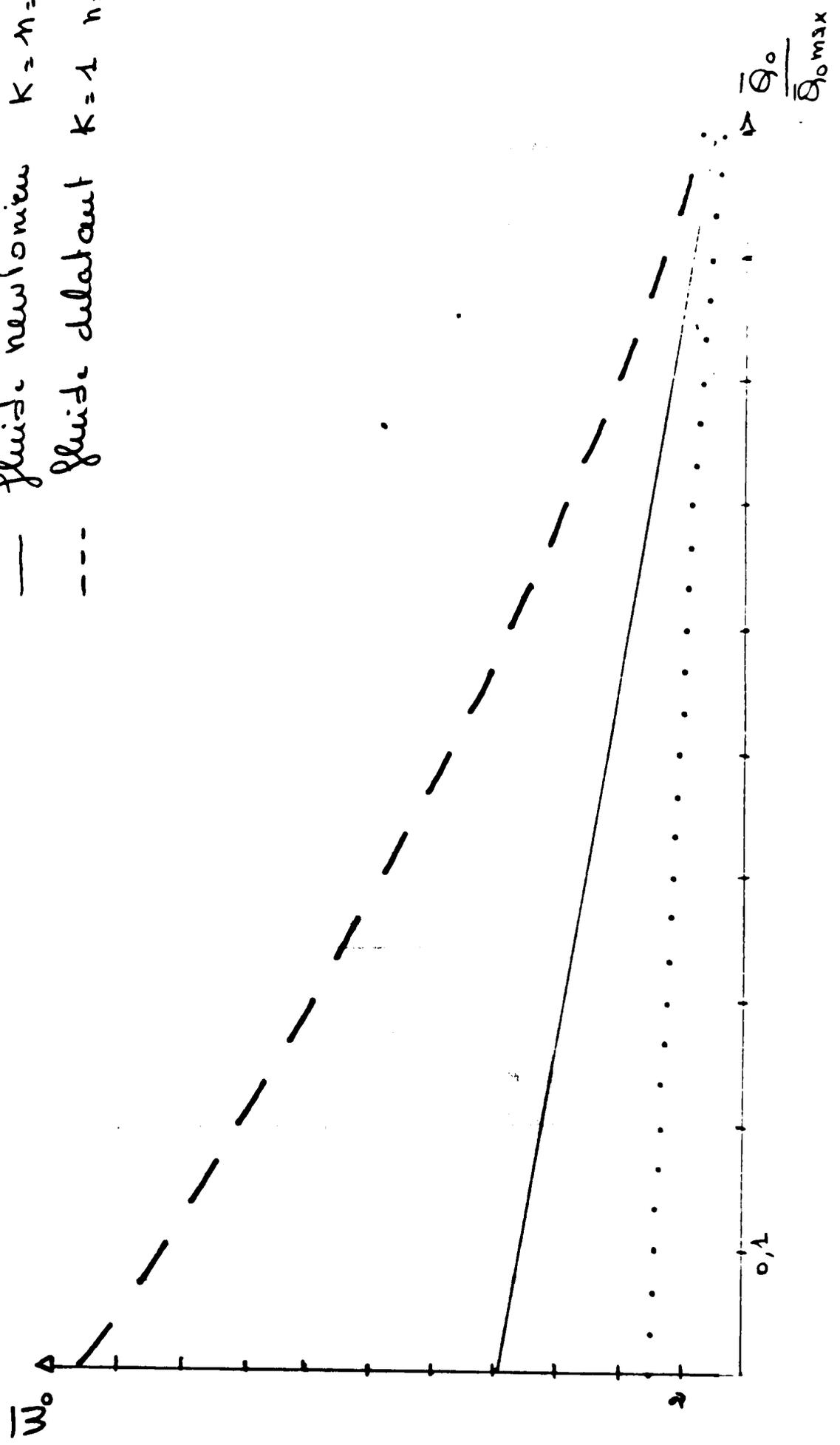


Figure 17-b: Travail moyen de la paroi par longueur d'onde et par période  
en fonction du débit moyen normalisé par rapport au débit  
moyen maximum, pour  $\phi = 0,7$ .

- ..... fluide pseudo-plastique  $K=1$   $n=0,1$
- fluide newtonien  $K=n=1$
- fluide dilatant  $K=1$   $n=1,4$



avec 
$$\mathcal{P}_i = - \int_0^1 \int_0^H \left\{ \epsilon p_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon p_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + p_{12} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \epsilon^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} dy dx$$

et la contribution de cette puissance à l'ordre 0 en  $\epsilon$  est obtenue :

$$\mathcal{P}_{i0} = - \int_0^1 \int_0^H y \cdot \frac{\partial P_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial y} dy dx$$

soit, tous calculs faits :

$$\mathcal{P}_{i0} = Q_0(1,t) \cdot \Delta P_{01} - \int_0^1 P_0 \frac{\partial H}{\partial x} dx$$

l'énergie moyenne correspondante est :

$$\bar{W}_{i0} = \int_0^1 \mathcal{P}_{i0} dt = \bar{Q}_0 \Delta P_{01} - \int_0^1 \int_0^1 P_0 \cdot \frac{\partial H}{\partial x} dx dt$$

l'énergie utile emmagasinée dans le fluide par longueur d'onde et par période est donc :

$$\bar{W}_0 \text{ utile} = \bar{Q}_0 \Delta P_{01}$$

et le rendement :

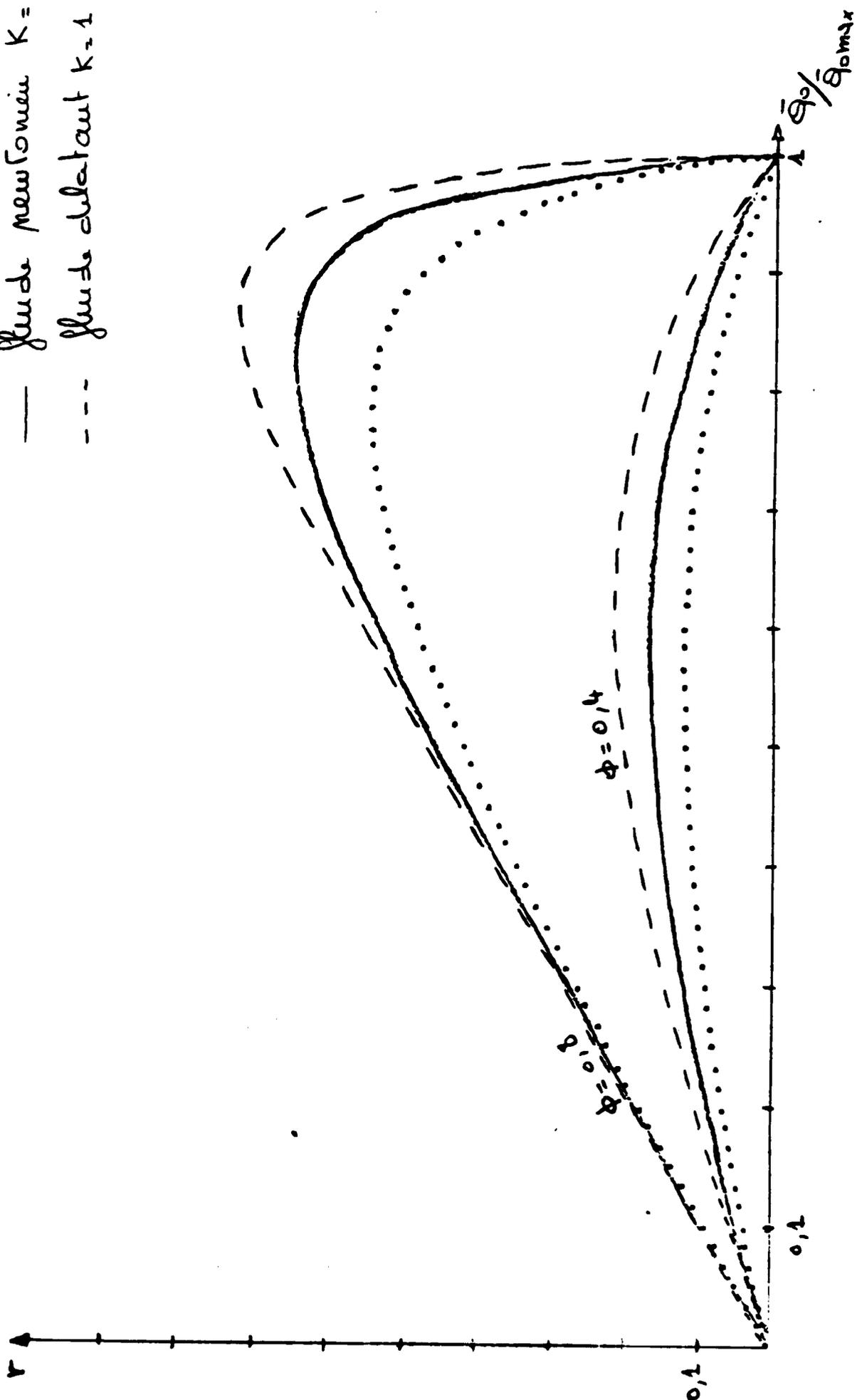
$$r = \frac{\bar{Q}_0 \cdot \Delta P_{01}}{- \int_0^1 \int_0^1 P_0 \cdot \frac{\partial H}{\partial x} dx dt}$$

Pour le fluide newtonien, ce rendement est calculable analytiquement et s'exprime en fonction du débit moyen  $\bar{Q}_0$  et du débit moyen maximum  $\bar{Q}_{0 \text{ max}}$  ; on trouve :

$$r = \frac{\bar{Q}_0 / \bar{Q}_{0 \text{ max}} \left[ 1 - \bar{Q}_0 / \bar{Q}_{0 \text{ max}} \right]}{(1+2\phi^2)(2+\phi^2) / 9\phi^2 - \bar{Q}_0 / \bar{Q}_{0 \text{ max}}}$$

Figure 18: Rendement du pompage en fonction du débit moyen normalisé par rapport au débit moyen maximum

- ..... fluide pseudo-plastique  $K \cdot 1 \cdot n = 1$
- fluide newtonien  $K = n = 1$
- fluide dilatant  $K \cdot 1 \cdot n = 1$



Lorsqu'on tend vers l'occlusion complète ( $\phi=1$ ), le débit moyen est égal au débit moyen maximum et le rendement tend vers 1. Ceci est normal puisque les forces de frottements ont été négligées.

Les résultats sont représentés sur la figure 18, pour différentes valeurs du paramètre d'occlusion  $\phi$  et pour les trois fluides étudiés.

On constate que le rendement augmente avec le paramètre d'occlusion et qu'il est plus élevé dans le cas du fluide dilatant.

### 11) CONCLUSION

Rappelons tout d'abord les principaux résultats de ce chapitre.

+ Le cisaillement maximum dans l'écoulement est atteint à la paroi et dans les sections de contraction maximum. Il est d'autant plus élevé que la contraction du tube et l'indice du fluide sont grands et que le débit moyen de l'écoulement est faible.

+ Dans des mêmes conditions d'écoulement, les ondes péristaltiques transportent un plus grand débit dans le cas du fluide dilatant. Néanmoins ce transport requiert une plus grande énergie que dans le cas où le fluide est pseudo-plastique.

Enfin, le rendement du pompage péristaltique, plus important dans le cas du fluide dilatant, croît avec l'occlusion du tube et n'atteint des valeurs élevées que dans une zone restreinte des débits moyens.

A l'ordre 1 en  $\epsilon$ , il n'y a pas de gradient transversal de pression, qui n'apparaît qu'à l'ordre 2.

Le gradient longitudinal est donné par :

$$\frac{\partial P_1}{\partial x}(x,t) = - \frac{n K \bar{Q}_1}{H^{n+2}} \left( \frac{2n+1}{n} \right)^n \left| - \left( \frac{\bar{Q}_0 + H^{-1}}{H} \right) \right|^{n-1} - (2n+1)Re$$

$$\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial x} \left[ \frac{B}{4n+3} + \frac{C}{3n+2} + \frac{D}{2n+1} \right]$$

où  $\bar{Q}_1$  est le débit moyen à l'ordre 1 en  $\epsilon$

$$B = B(x,t) = \frac{-n}{3n+2} \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^2 \left[ \left(\frac{Q_o^{-1}}{H}\right)^2 + \left(\frac{3n+2}{2n+1}\right) \left(\frac{\bar{Q}_o^{-1}}{H}\right) + \frac{n+1}{2n+1} \right]$$

$$C = C(x,t) = \frac{n(2n+1)}{(n+1)^2} \left[ 2 \left(\frac{\bar{Q}_o^{-1}}{H}\right)^2 + 2 \left(\frac{\bar{Q}_o^{-1}}{H}\right) + \frac{n+1}{2n+1} \right]$$

$$\text{et } D = D(x,t) = - \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^2 \left[ \left(\frac{\bar{Q}_o^{-1}}{H}\right)^2 + \frac{n}{2n+1} \left(\frac{\bar{Q}_o^{-1}}{H}\right) \right]$$

En faisant  $Re = 0$  dans cette expression, on constate que contrairement au cas newtonien la relation gradient de pression-débit moyen de l'écoulement à l'ordre 0 est modifiée. L'ordre 1 de cette étude caractérise donc les effets de courbure et d'inertie ; ces effets sont couplés, comme le montre le groupement  $Re.\varepsilon$  au niveau des équations du mouvement (CH 1 § 3).

**CHAPITRE III**

**ÉCOULEMENT PERISTALTIQUE D'UN FLUIDE  
DE TYPE MAXWELL GÉNÉRALISÉ,  
INCOMPRESSIBLE**

## 1) PRESENTATION DU FLUIDE

### 1.1. Loi de comportement

Le modèle de MAXWELL permet de tenir compte des propriétés élastiques du fluide, en faisant apparaître le phénomène de relaxation des contraintes. La contribution de ces effets élastiques est représentée dans l'équation constitutive du fluide par un terme contenant une dérivée temporelle du tenseur des contraintes visqueuses :

$$\mathbb{P}^* + \gamma \frac{d_o \mathbb{P}^*}{dt^*} = 2 \eta_o \mathbb{d}^*$$

où  $\gamma$  est le temps de relaxation du fluide et  $\frac{d_o}{dt^*}$  est une dérivée objective.

$\mathbb{d}^*$  étant le tenseur des taux de rotations

$$\frac{d_o \mathbb{P}^*}{dt^*} = \frac{d_J \mathbb{P}^*}{dt^*} + a (\mathbb{P}^* \cdot \mathbb{d}^* + \mathbb{d}^* \cdot \mathbb{P}^*)$$

avec

$$\frac{d_J \mathbb{P}^*}{dt^*} = \frac{d \mathbb{P}^*}{dt^*} - \mathbb{d}^* \cdot \mathbb{P}^* + \mathbb{P}^* \cdot \mathbb{d}^* \quad \text{dérivée de JAUMANN et } a \text{ une constante.}$$

Le nombre  $a$ , introduit par la dérivée objective, est en fait un paramètre rhéologique, car, c'est lui qui indique si le fluide considéré a un comportement pseudo-plastique ou dilatant. En effet lorsque  $|a| < 1$ , la viscosité apparente du fluide décroît lorsque le taux de déformation croît et le fluide a un comportement pseudo-plastique.

### 1.2. Adimensionnalisation

Compte tenu de l'adimensionnalisation choisie, il s'introduit le nombre :

$$W_e = \frac{\gamma_c}{H_o}$$

nombre de WEISSENBERG de l'écoulement qui caractérise l'élasticité du fluide proprement dite.

Les équations constitutives du fluide considéré s'écrivent :

$$p_{11} + W_e \left[ \epsilon \frac{dp_{11}}{dt} + 2\epsilon a p_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + (a-1)p_{12} \frac{\partial u}{\partial y} + \epsilon^2 (a+1)p_{12} \frac{\partial v}{\partial x} \right] = 2\epsilon \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$p_{22} + W_e \left[ \epsilon \frac{dp_{22}}{dt} + 2\epsilon a p_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + (a+1)p_{12} \frac{\partial u}{\partial y} + \epsilon^2 (a-1)p_{12} \frac{\partial v}{\partial x} \right] = 2\epsilon \frac{\partial v}{\partial y}$$

et

$$p_{12} + W_e \left[ \epsilon \frac{dp_{12}}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \left[ \left( \frac{p_{11} - p_{22}}{2} \right) + a \left( \frac{p_{11} + p_{22}}{2} \right) \right] + \epsilon^2 \frac{\partial v}{\partial x} \left[ - \left( \frac{p_{11} - p_{22}}{2} \right) + a \left( \frac{p_{11} + p_{22}}{2} \right) \right] \right] = \frac{\partial u}{\partial y} + \epsilon^2 \frac{\partial v}{\partial x}$$

## 2) RESOLUTION A L'ORDRE 0 EN $\epsilon$ :

### 2.1. Choix des paramètres du modèle :

En première approximation, les contraintes visqueuses normales s'écrivent :

$$(p_{11})_0 = (1-a)W_e (p_{12})_0 \cdot \frac{\partial u_0}{\partial y}$$

et

$$(p_{22})_0 = -(1+a)W_e (p_{12})_0 \cdot \frac{\partial u_0}{\partial y}$$

la contrainte de cisaillement étant donnée par :

$$(p_{12})_0 = \tau_0 = \frac{1}{1+W_e^2(1-a^2)\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial y}$$

Notons que  $(p_{11})_0$  et  $(p_{22})_0$  ne sont pas nulles et dépendent naturellement de  $W_e$ . Ainsi, lorsque le paramètre rhéologique  $a$  est égal à  $\pm 1$ , la viscosité est newtonienne, cependant contrairement au cas newtonien pour lequel les contraintes normales sont nulles :

$$\text{si } a = -1 \quad (p_{11})_0 = 2 We \left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2 \quad \text{et} \quad (p_{22})_0 = 0$$

$$\text{et si } a = +1 \quad (p_{11})_0 = 0 \quad \text{et} \quad (p_{22})_0 = -2We \left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2$$

Dans le but de conserver un modèle qui puisse décrire de manière assez réaliste le comportement des fluides biologiques, nous choisissons le paramètre  $a$  tel qu'il soit :

+ inférieur en module à l'unité puisque dans ce cas comme les fluides biologiques le fluide considéré a un comportement pseudo-plastique.

+ strictement négatif et proche de la valeur -1 sans l'atteindre pour que  $|(p_{11})_0|$  soit très grand devant  $|(p_{22})_0|$ . En effet, il a été prouvé expérimentalement que dans la quasi-totalité des écoulements, la contrainte normale dans le sens de l'écoulement est plus importante en module par rapport à la contrainte normale transversale [ 36 ] .

## 2.2. Résolution :

Le taux de déformation est solution de l'équation du second degré :

$$(1 - a^2) We^2 \tau_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right) + \tau_0 = 0$$

où le taux de cisaillement  $\tau_0$  s'exprime à l'aide des équations du mouvement en fonction du gradient longitudinal de pression, soit :

$$\tau_0 = y \cdot \frac{\partial P}{\partial x}(x,t)$$

La recherche de solutions réelles impose :

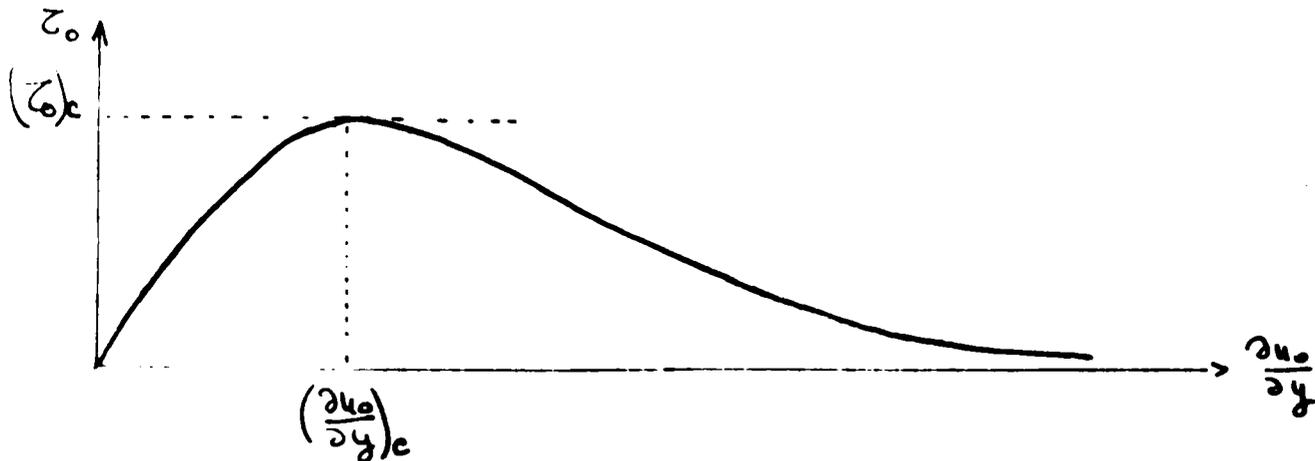
$$1 - 4(1 - a^2) We^2 \tau_0^2 > 0$$

D'où la valeur critique de la contrainte de cisaillement :

$$|\tau_{oc}| = \frac{1}{2We \sqrt{1 - a^2}}$$

Les taux de déformations sont aussi restreints en module par la valeur critique :

$$\left| \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} \right)_c \right| = \frac{1}{We \sqrt{1-a^2}}$$



Nous verrons plus loin que cette restriction se traduit par une limitation des débits.

L'expression du taux de déformation solution est :

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{1 - \sqrt{1 - c^2 y^2}}{We \sqrt{1-a^2} c y}$$

où  $c = c(x,t) = 2 We \sqrt{1-a^2} \cdot \frac{\partial P_0}{\partial x}(x,t)$

La vitesse longitudinale étant nulle à la paroi, on trouve :

$$u_0(x,y,t) = \frac{1}{We \sqrt{1-a^2} c} \left[ \sqrt{1-c^2 H^2} - \sqrt{1-c^2 y^2} + \text{Log} \frac{1 + \sqrt{1-c^2 y^2}}{1 + \sqrt{1-c^2 H^2}} \right]$$

d'autre part, l'axe étant une ligne de courant nulle, la fonction de courant de l'écoulement s'écrit :

$$\psi_0(x,y,t) = \frac{1}{We \sqrt{1-a^2} c} \left[ y \log \frac{1 + \sqrt{1-c^2 y^2}}{1 + \sqrt{1-c^2 H^2}} + \frac{1}{2c} \text{Arcsin } cy - \frac{y}{2} \sqrt{1-c^2 y^2} + y (\sqrt{1-c^2 H^2} - 1) \right]$$

Enfin, la composante transversale de la vitesse a pour expression :

$$\begin{aligned}
v_o(x,y,t) = & \frac{1}{We \sqrt{1-a^2}} \left[ \frac{\partial H}{\partial x} \left( \frac{C H y}{1 + \sqrt{1 - c^2 H^2}} \right) \right. \\
& + \frac{\partial c}{\partial x} \left( \frac{y^3}{\sqrt{1 - c^2 y^2} (1 + \sqrt{1 - c^2 y^2})} - \frac{y H^2}{\sqrt{1 - c^2 H^2} (1 + \sqrt{1 - c^2 H^2})} \right. \\
& + \frac{y}{c^2} \log \frac{1 + \sqrt{1 - c^2 y^2}}{1 + \sqrt{1 - c^2 H^2}} + \frac{1}{c^3} \text{Arcsin } cy \\
& \left. \left. - \frac{y}{c^2 \sqrt{1 - c^2 y^2}} + \frac{y}{c^2 \sqrt{1 - c^2 H^2}} - \frac{y}{c^2} \right) \right]
\end{aligned}$$

On retrouve les résultats pour le fluide newtonien en faisant tendre le nombre de Weissenberg  $We$  vers zéro dans les précédentes expressions.

### 3) RELATION GRADIENT DE PRESSION-DEBIT DE L'ECOULEMENT

En écrivant l'expression de la fonction de courant, donnée ci-dessus, à la paroi ; le débit instantané  $Q_o(x,t)$  s'exprime en fonction du gradient longitudinal de pression :

$$Q_o(x,t) = \frac{H}{We \sqrt{1-a^2} c} \left[ \frac{\sqrt{1 - c^2 H^2}}{2} - 1 + \frac{1}{2 C H} \text{Arcsin } C H \right]$$

L'inversion de cette relation n'étant pas explicitement possible, on procédera numériquement dans le chapitre suivant. Toutefois, pour  $We$  petit, on peut obtenir une bonne approximation.

Si l'on pose :

$$X = C H \quad \text{et} \quad Y = \frac{We \sqrt{1-a^2}}{H^2} Q_o(x,t)$$

la relation s'écrit :

$$Y = \frac{1}{X} \left[ \frac{\sqrt{1 - X^2}}{2} - 1 + \frac{1}{2X} \text{Arcsin } X \right]$$

La condition  $|X| < 1$  nous permet, en effectuant un développement en séries entières jusqu'à l'ordre 5 en X, d'obtenir :

$$X + \frac{3}{20} X^3 + \frac{3}{56} X^5 = -6 Y$$

D'autre part, en remarquant que le premier terme est équivalent, aux termes d'ordre 7 en X près, au rapport :

$$\frac{X - \frac{29}{140} X^3}{1 - \frac{5}{14} X^2},$$

on se ramène à une équation d'ordre 3 en X, que l'on résoud, en retenant la solution qui donne, pour le gradient de pression, le résultat newtonien lorsqu'on fait tendre We vers zéro. On trouve :

$$\frac{\partial P_0}{\partial X}(x,t) = \frac{1}{2 We \sqrt{1 - a^2} H} \left[ A \cos \left( \varphi - \frac{2\pi}{3} \right) - B \right]$$

avec

$$B = \frac{100}{29} \frac{We \sqrt{1 - a^2}}{H^2} Q_0(x,t)$$

$$A = 2 \sqrt{\frac{140}{87} + B^2}$$

et

$$\varphi = \frac{1}{3} \operatorname{Arccos} \left[ \frac{-\frac{29}{140} B^3 + \frac{37}{100} B}{\sqrt{\frac{140}{783} + \frac{B^2}{3} + \frac{29}{140} B^4 + \left(\frac{29}{140}\right)^2 B^6}} \right]$$

#### 4) STATIONNARITE DANS LE REPERE MOBILE

L'écoulement étant supposé stationnaire dans le repère lié à l'onde, le débit instantané  $Q_0(x,t)$ , dans le repère fixe, est relié à la donnée du problème  $\bar{Q}_0$ , débit moyen de l'écoulement par :

$$Q_0(x,t) = \bar{Q}_0 + H(x-t) - 1$$

D'autre part, en tenant compte de la relation débit instantané-gradient de pression, donnée ci-dessus, la condition :

$$|C H| < 1 ,$$

pour laquelle les solutions présentées sont valables, s'écrit (figure 19) :

$$\left| \frac{Q_o(x,t)}{H^2} \right| < \frac{1}{We \cdot \sqrt{1-a^2}} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

soit, en terme de débit moyen :

$$\max \left[ - \frac{(4-\pi)}{4 We \cdot \sqrt{1-a^2}} H^2 - H + 1 \right] < \bar{Q}_o < \min \left[ \frac{(4-\pi)}{4 We \cdot \sqrt{1-a^2}} H^2 - H + 1 \right]$$

La figure 20 représente ce domaine dans le cas d'ondes sinusoïdales, pour différents paramètres d'occlusion et pour différentes valeurs du produit  $We \cdot \sqrt{1-a^2}$ .

On constate que cette marge de débits moyens est d'autant plus étendue que la quantité  $We \cdot \sqrt{1-a^2}$  et le paramètre d'occlusion sont faibles. Pour une même valeur de  $We \cdot \sqrt{1-a^2}$ , il n'existe plus de débit moyen, pour lequel on ait des solutions au-delà d'une certaine valeur du paramètre d'occlusion. Cette valeur limite de l'occlusion est plus grande pour  $We \cdot \sqrt{1-a^2}$  petit.

##### 5) CAS D'ONDES SINUSOIDALES

Afin de définir complètement la forme de la paroi, on adopte un train d'ondes sinusoïdales dont l'équation dans le repère fixe est donnée par :

$$H(x-t) = 1 + \phi \sin 2\pi(x-t).$$

Les différentes solutions sont représentées sous forme graphique, pour un fluide pseudo-plastique

$$We = 0,52 \quad \text{et} \quad a = -0,9$$

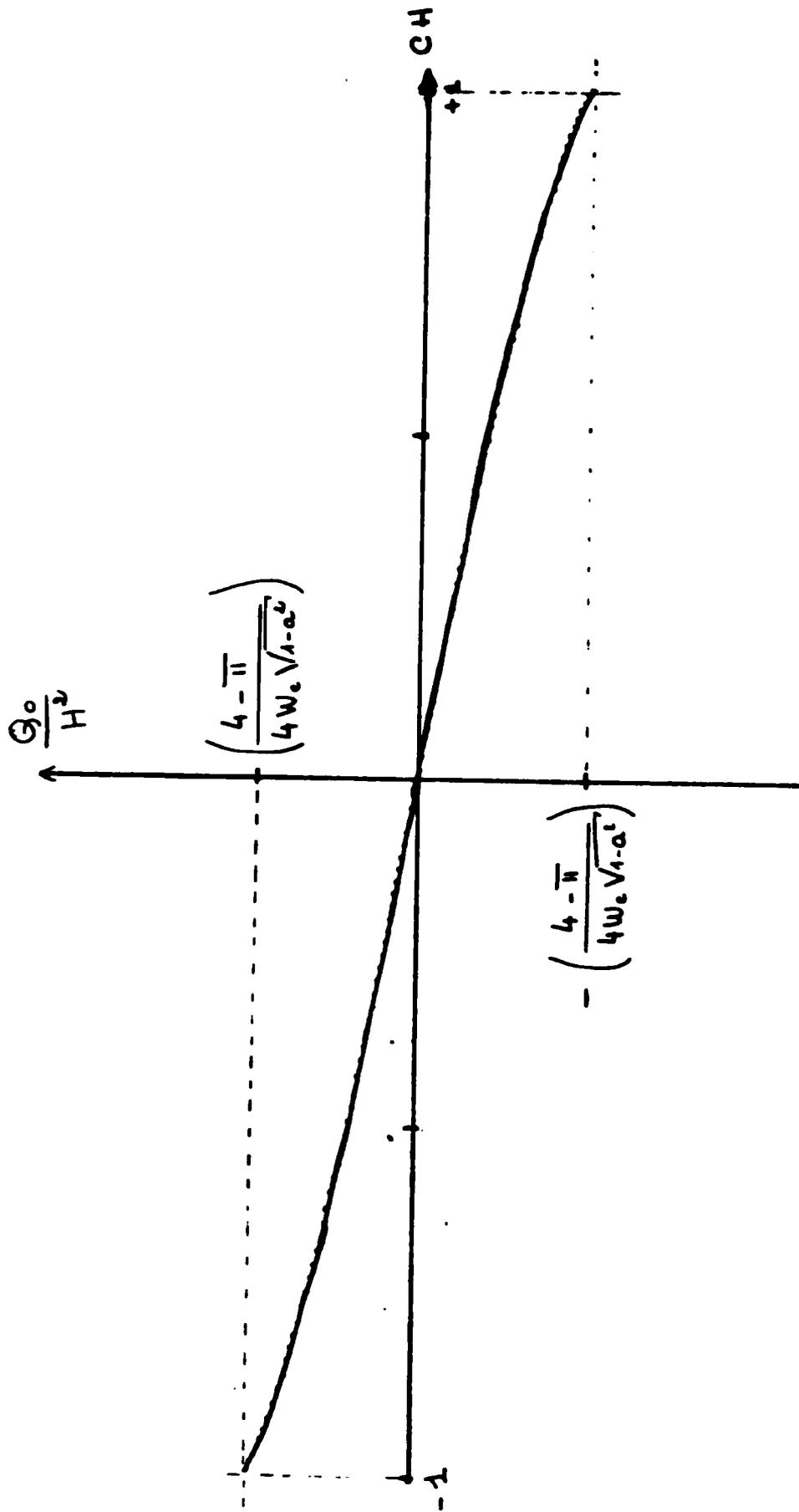


Figure 19 : Variation de  $\left(\frac{g_0}{H^2}\right)$  en fonction de  $CH$ .

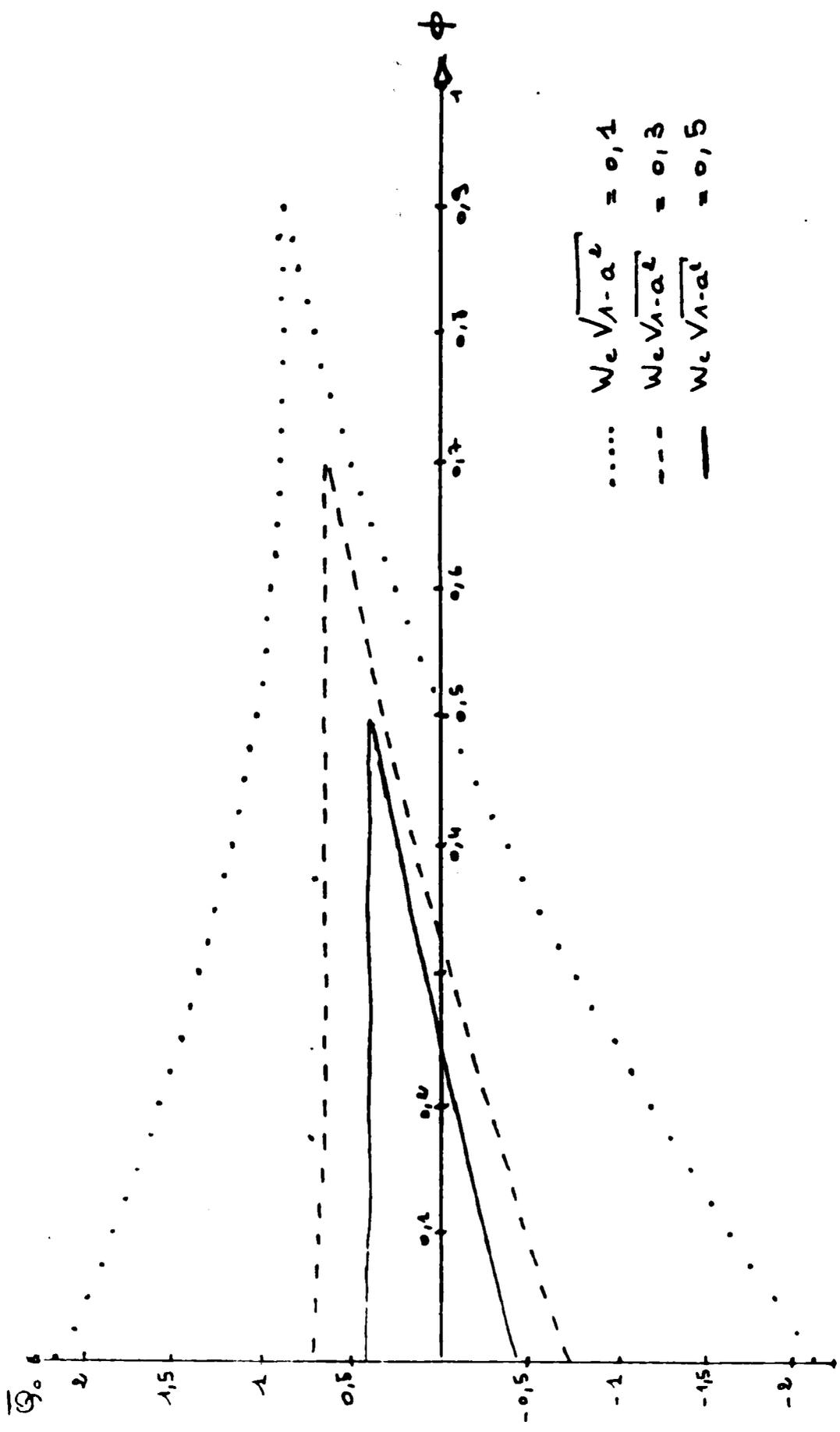


Figure 20: Domaine du débit admissible pour différentes valeurs de  $W_c \sqrt{1-a^2}$ .

$W_c = 0,52$   
 $a = -0,9$

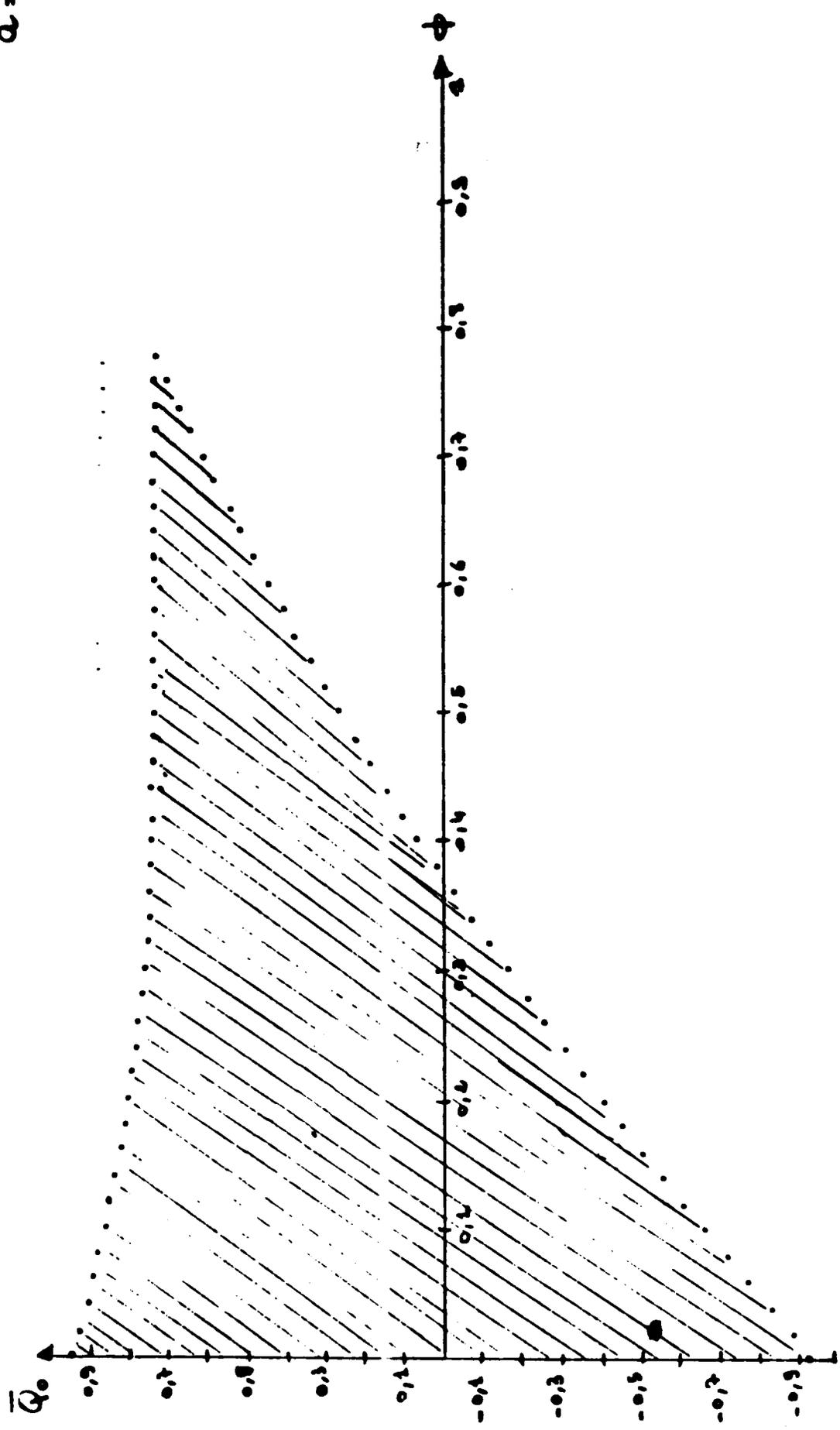


Figure 21: Domaine des débits moyens pour lesquels les solutions proposées  
sont valables.

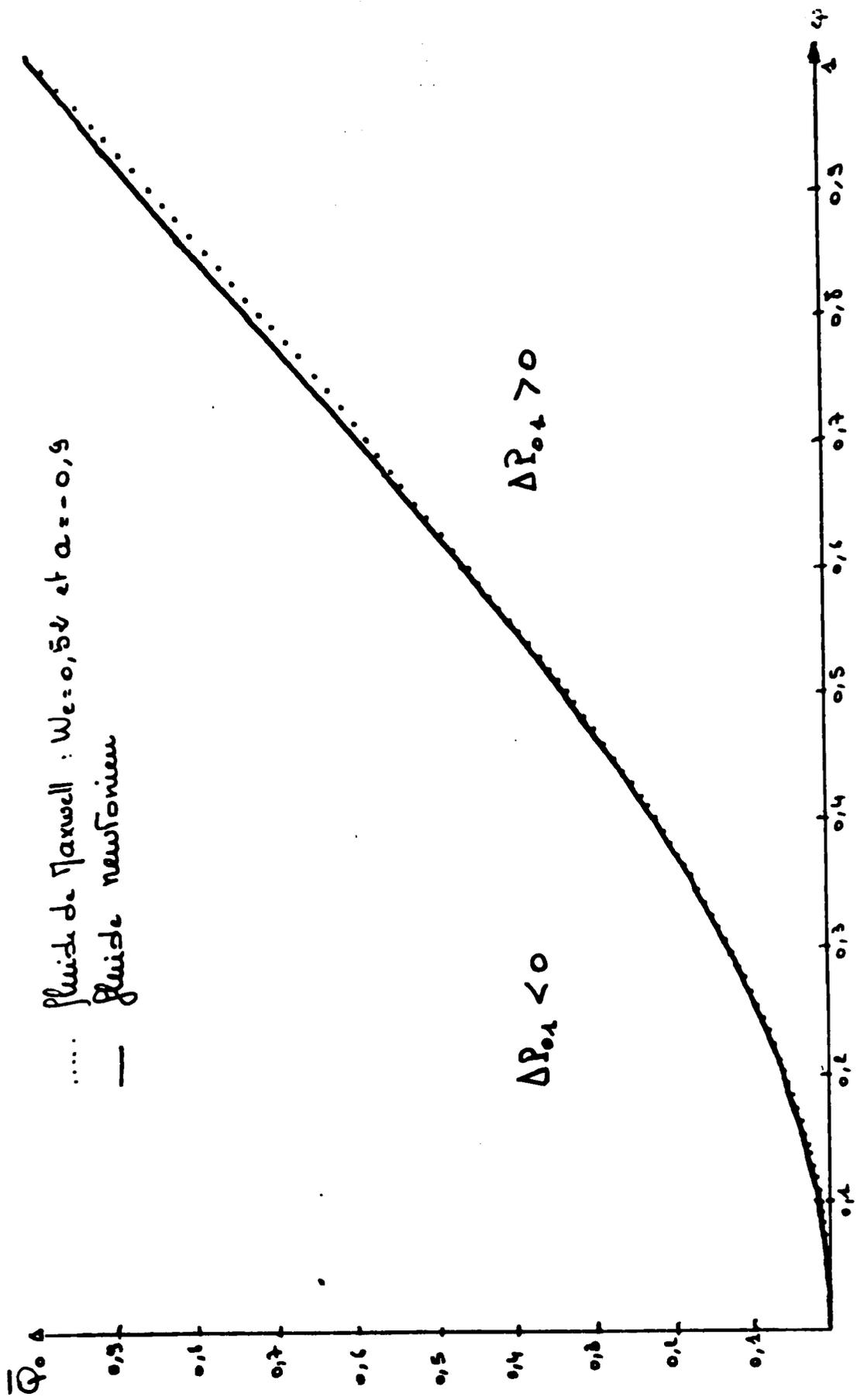


Figure 44: Domaine de pompage.

\* Bornes supérieures du domaine de pompage pour différentes occlusions  
 (valeur de  $\bar{Q}_0$  telle que  $\Delta P_{0,1} = 0$ ).

Paramètre d'occlusion $\phi$	Fluide newtonien $We = 0$	Fluide de Maxwell $We = 0,5$ $a = -0,9$
0,1	0,0149253	0,01488916
0,2	0,0585235	0,0588194
0,3	0,1291866	0,1284865
0,4	0,222222	0,2203932
0,5	0,333333	0,3292181
0,6	0,4576271	0,4499314
0,7	0,5903614	0,5779606
0,8	0,7272727	0,7091906
0,9	0,8647686	0,8432098

$$W_e = 0,52$$

$$a = -0,9$$

- bornes du domaine de pompage
- ..... bornes du domaine de débits admissibles.

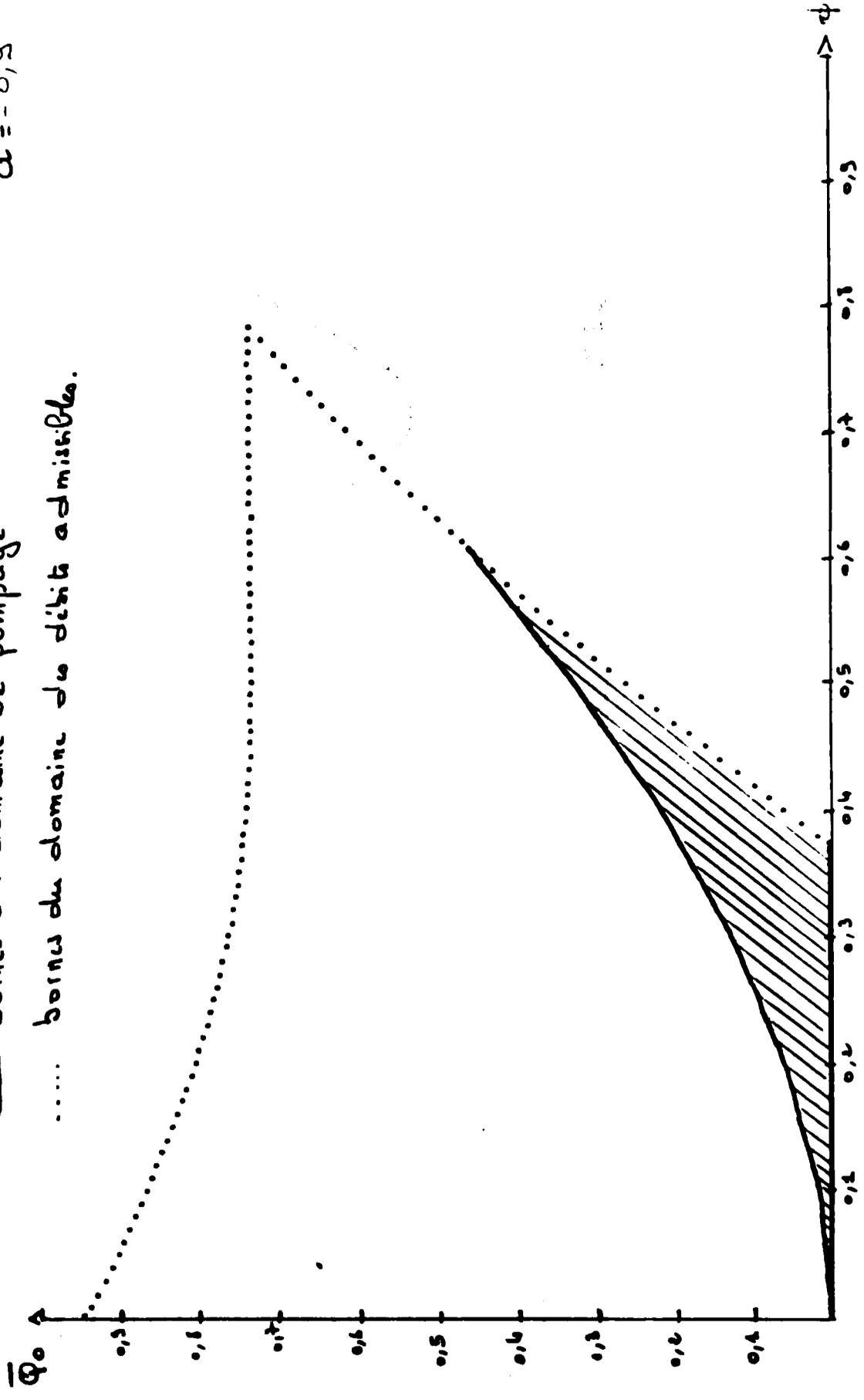


Figure 23 : Bornes du domaine de pompage dans le domaine des débits moyens à contrôler.

— fluide de Maxwell  $We = 0,58$  et  $a = 0,5$   
 — fluide newtonien.

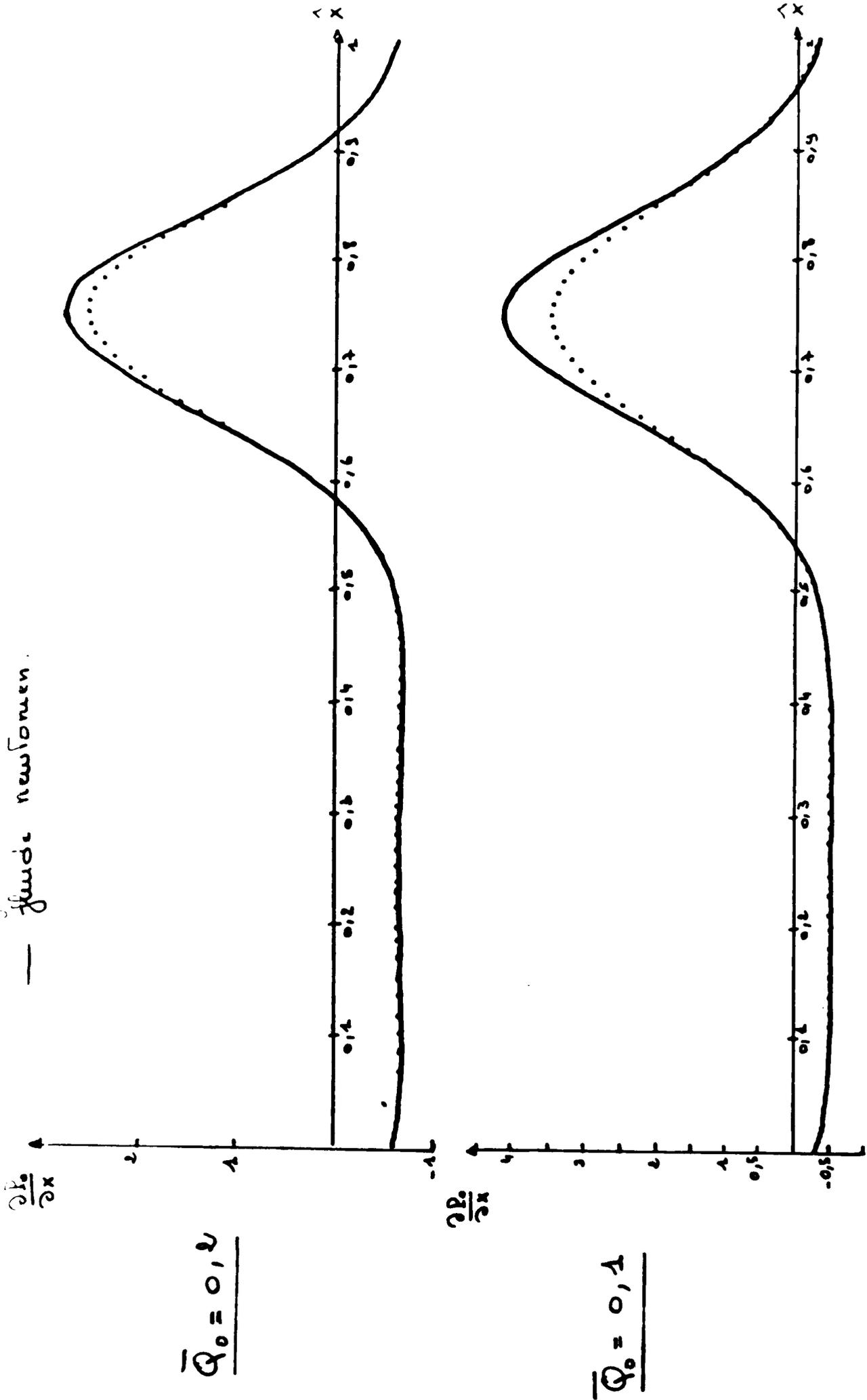


Figure 24: Variation du gradient de pression sur une longueur d'onde, pour différentes valeurs du débit moyen et pour un paramètre d'occlusion  $\phi = 0,4$

..... fluide de Maxwell  $We = 0,52$  et  $a = -0,9$   
 — fluide newtonien.

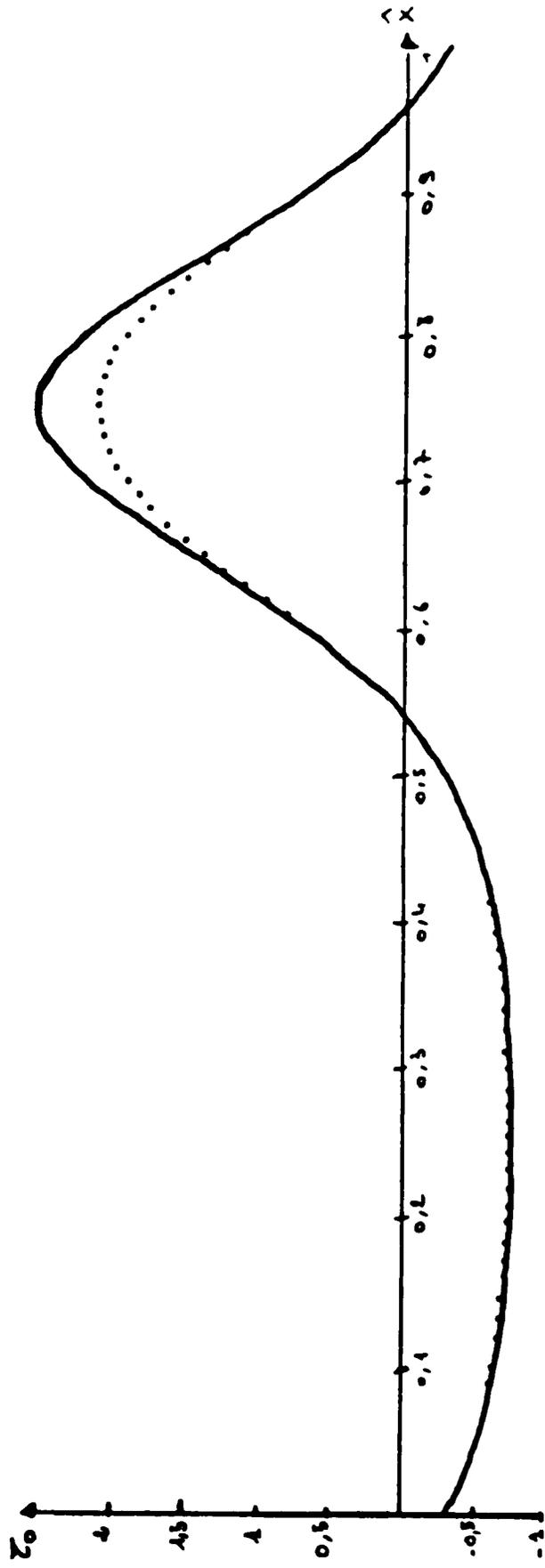
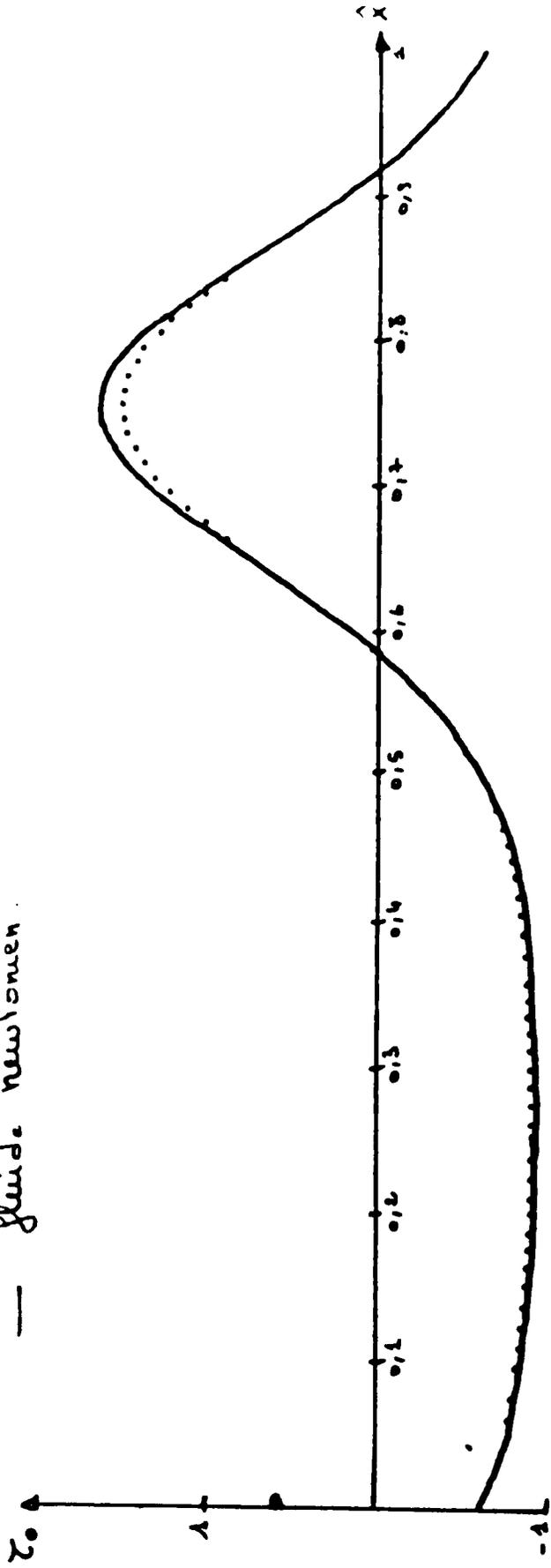


Figure 25: Variation du cisaillement à la pausi sur une longueur d'onde

pour différents débits moyens et pour un paramètre d'occurrence de 0,4

$$Re = 0,22$$

$$\alpha = 0,9$$

$$\phi = 0,6$$

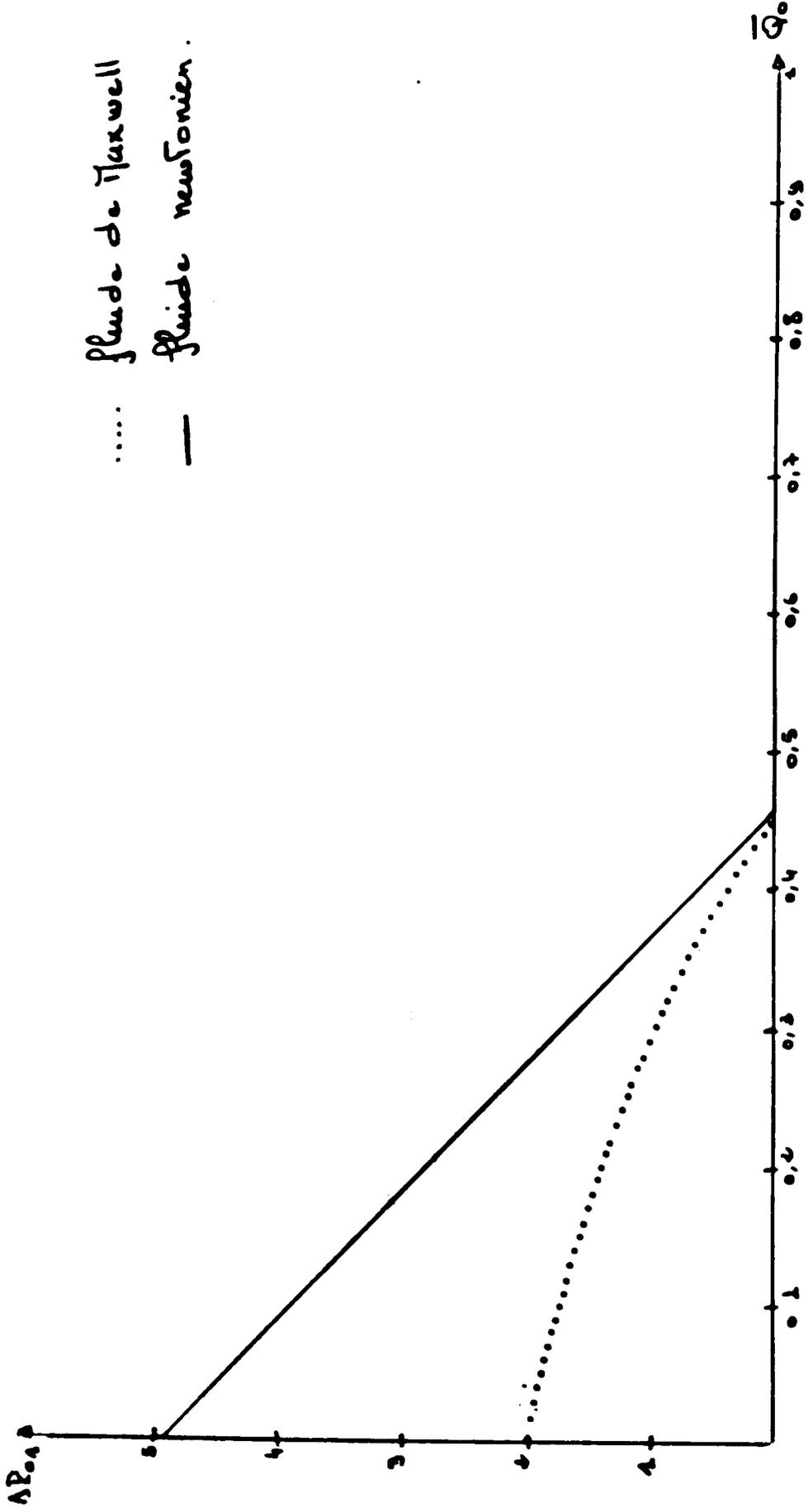


Figure 26: Caractéristique; débit moyen - différence de pression sur une longueur d'onde, de l'écoulement.

$$We = 0,52$$
$$a = -0,9$$

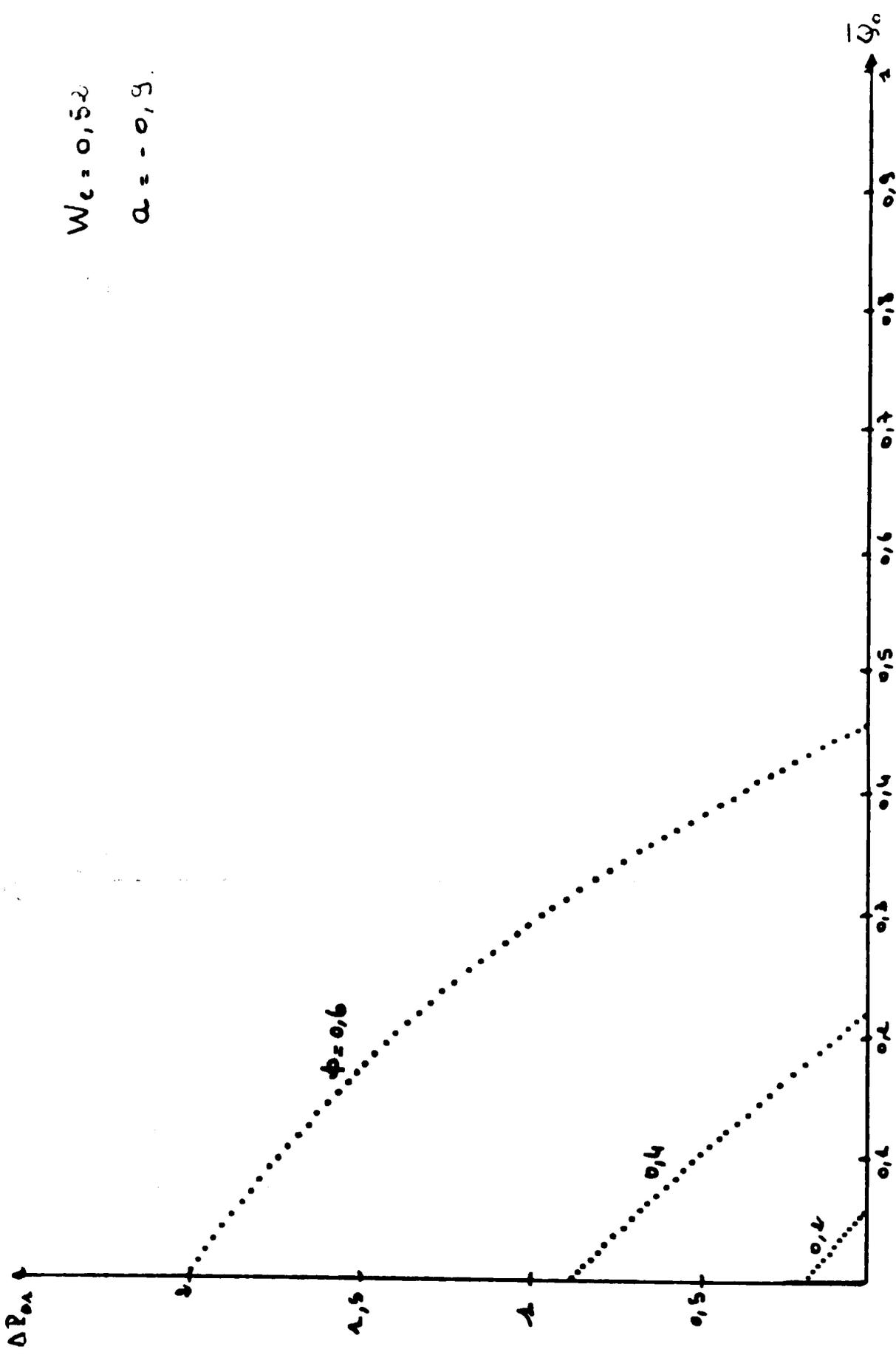


Figure 27: Caractéristiques de l'écoulement pour différents paramètres d'occlusion.

$W_2 = 0,50$   
 $\alpha = -0,9$   
 $\phi = 0,35$

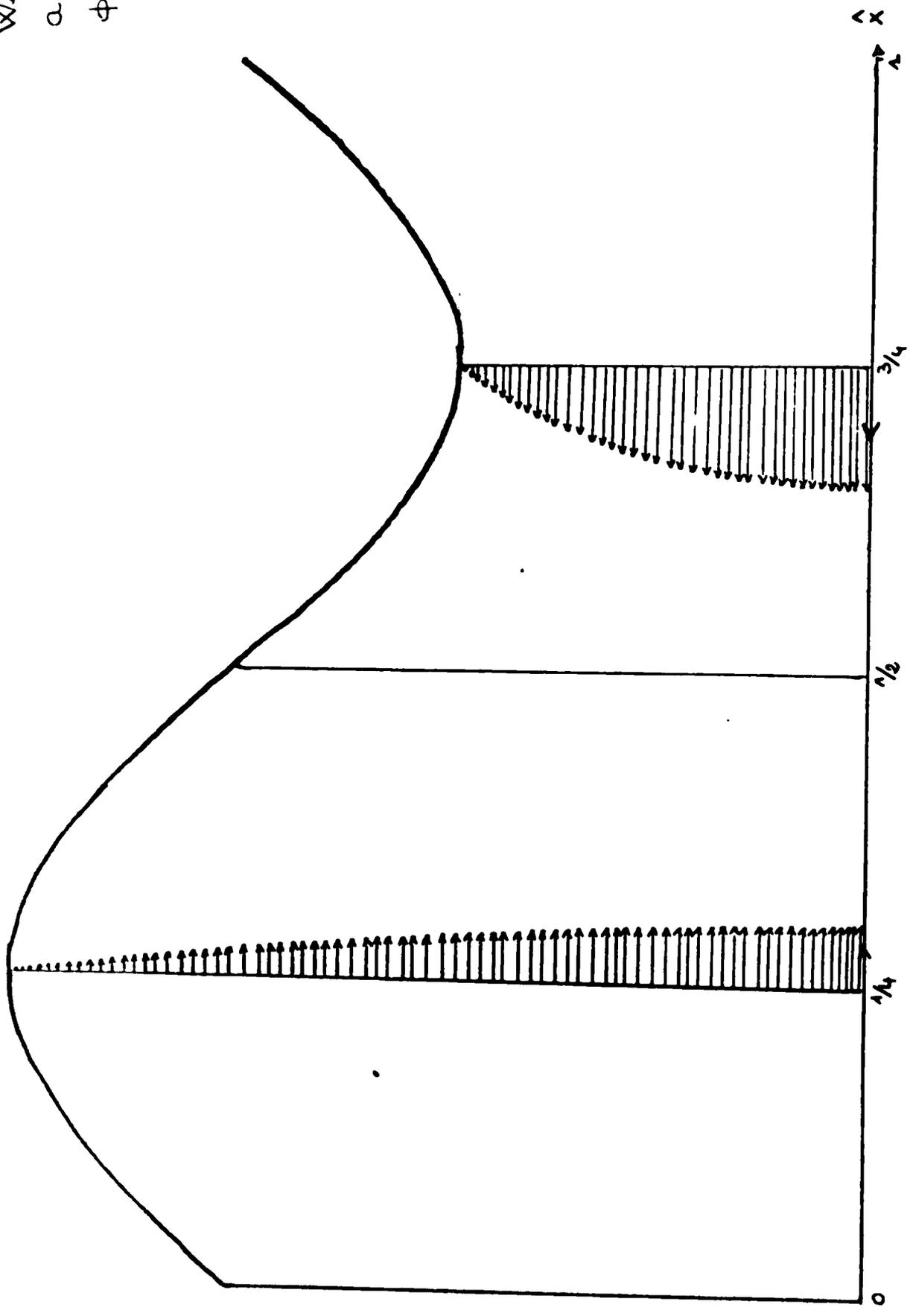


Figure 28: Profil de vitesses longitudinales en différentes sections pour un débit moyen nul.

$$We = 0,52$$

$$a = -0,9$$

$$\phi = 0,5$$

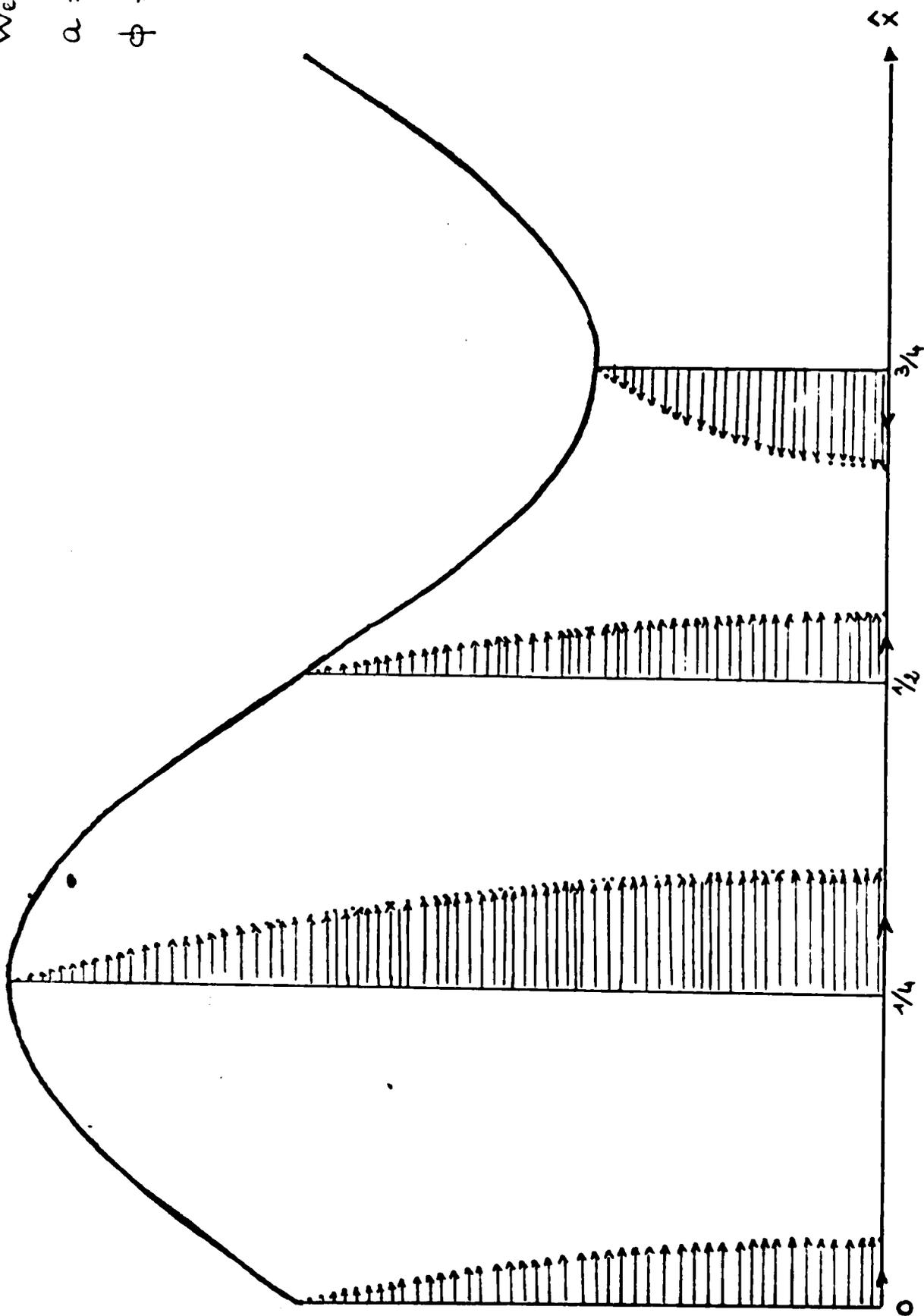


Figure 29: Profils de vitesses longitudinales en différentes sections, pour un débit moyen  $\bar{Q}_0$  égal à 0,29

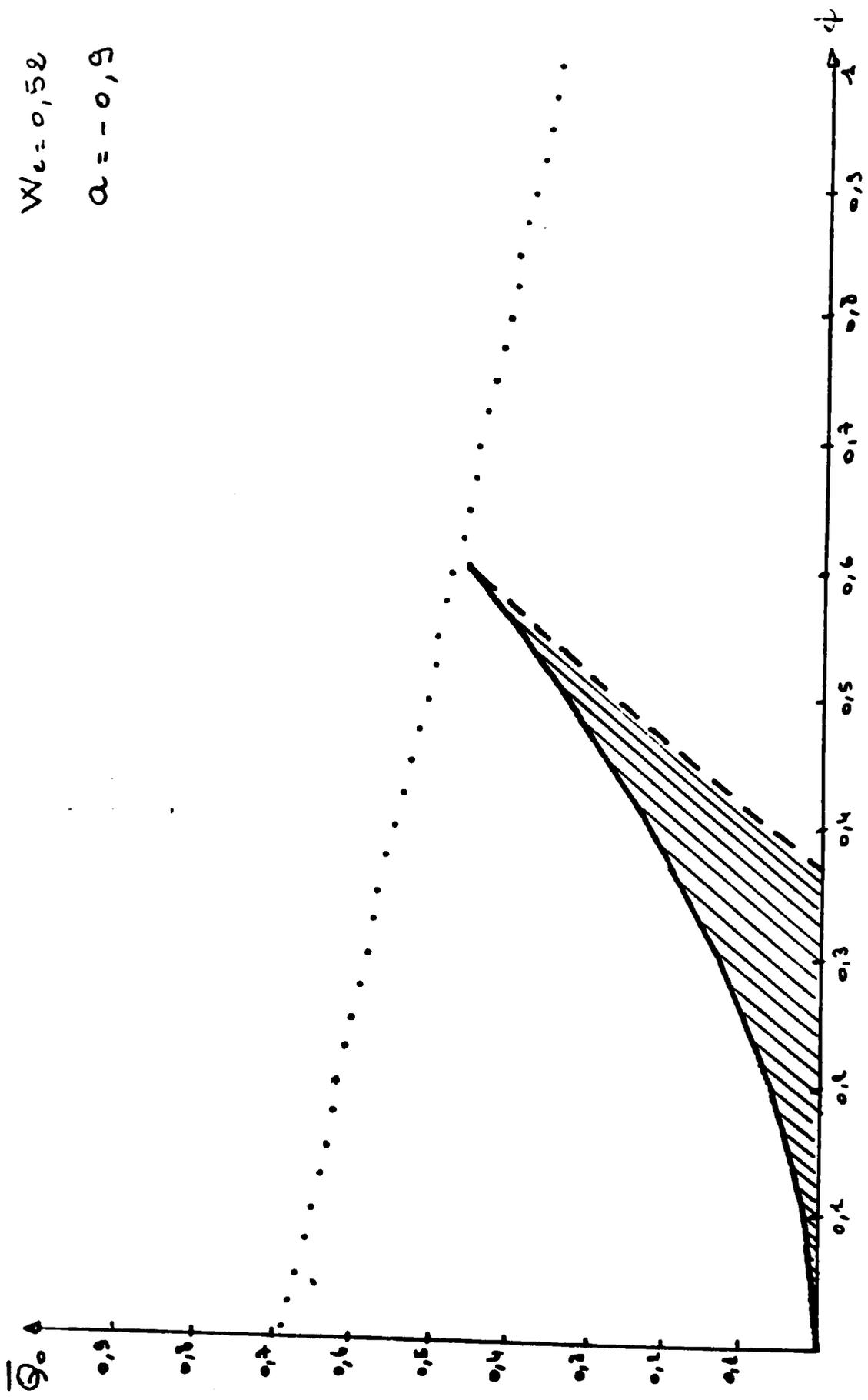


Figure 30 : Borne inférieure du domaine de piégeage (.....).

$$We = 0,52$$

$$\alpha = -0,9$$

$$\phi = 0,4$$

$$\bar{Q}_0 = 0,2$$

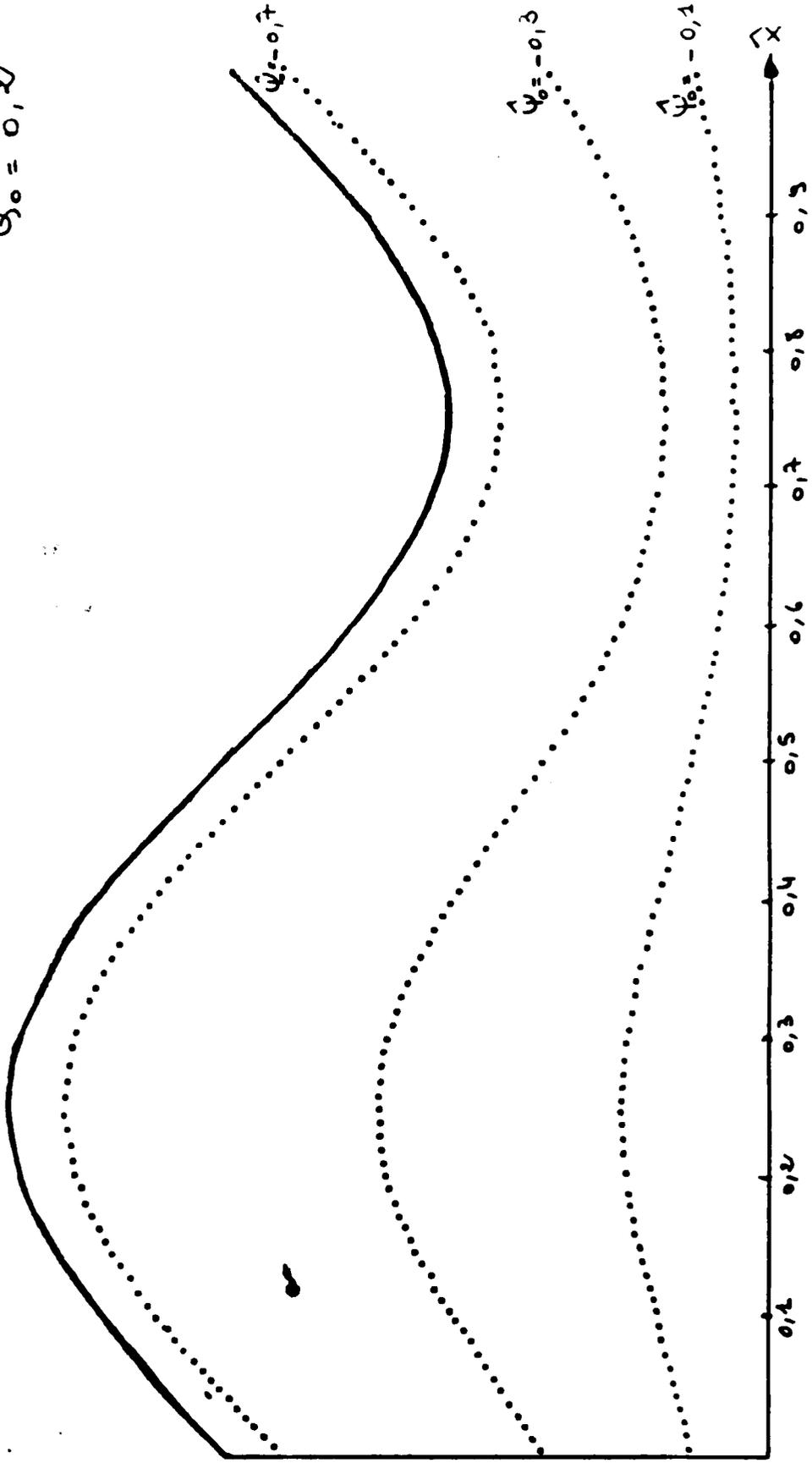


Figure 31 : Lignes de courant dans le repère lié à l'onde.

valeurs de  $We \cdot \sqrt{1 - a^2}$ . On constate que :

- Lors du transport d'un même débit moyen, la différence de pression sur une longueur d'onde, s'opposant à l'action des ondes, est une fonction décroissante de  $We$ .

- Pour un même accroissement de pression par longueur d'onde, le débit moyen transporté par les ondes décroît lorsque  $We$  croît.

- Le domaine de pompage est d'autant plus étendu que  $We$  est faible.

Enfin, rappelons que plus le fluide est élastique ( $We$  grand) et plus la marge des débits moyens, pour lesquels les solutions proposées sont valables, est restreinte.

La complexité des calculs n'ayant pas permis d'effectuer une résolution analytique complète, il est nécessaire d'introduire une méthode de résolution numérique. Ce sera l'objet du chapitre suivant.

## **CHAPITRE IV**

# **METHODE DE RESOLUTION NUMERIQUE ET APPLICATION AU FLUIDE BIOLOGIQUE**

L'étude faite au chapitre précédent montre que la résolution analytique ne peut être menée à terme, ou tout au moins la révèle compliquée lorsque la loi de comportement du fluide n'est pas assez simple. Aussi est-il nécessaire d'introduire une méthode de résolution numérique.

La méthode que nous proposons permet d'obtenir des solutions, en première approximation, non seulement lorsque la loi de comportement est donnée analytiquement, mais aussi dans le cas où on dispose de la variation du cisaillement en fonction du taux de déformation sous forme d'un relevé graphique expérimental.

Cette méthode présente aussi l'avantage de ne pas être restreinte par la forme des ondes péristaltiques, ni par la forme de l'hypothèse que l'on fait pour pouvoir résoudre complètement.

Cette méthode testée dans le cas du fluide newtonien, sera appliquée à un modèle de fluide biologique.

## 1) PRINCIPE DE LA METHODE

On suppose qu'en première approximation, pour le fluide considéré, les taux de déformations s'expriment en fonction des taux de cisaillement par :

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = g(\tau_0)$$

où la fonction  $g$  est soit donnée analytiquement, soit représentée graphiquement par une série de "datas" relevés expérimentalement.

D'autre part, la pression étant uniforme dans chaque section et en tout instant, la variation du taux de cisaillement à travers la section

$x_i$  à l'instant  $t_i$  est donnée par :

$$d\tau_o = \frac{\partial P_o}{\partial x}(x_i, t_i) dy = \left(\frac{\partial P_o}{\partial x}\right)_i dy$$

### 1.1. Vitesse longitudinale et fonction de courant

La vitesse longitudinale étant nulle à la paroi, sa valeur à l'instant  $t_i$  au point  $(x_i, y_i)$  du domaine de l'écoulement est :

$$u_o(x_i, y_i, t_i) = \int_{H(x_i, t_i)}^{y_i} \frac{\partial u_o}{\partial y}(x_i, y, t_i) dy$$

en effectuant le changement de variable  $y = \tau_o$ , il vient :

$$u_o(x_i, y_i, t_i) = - \frac{1}{\left(\frac{\partial P_o}{\partial x}\right)_i} \int_{(\tau_o)_i}^{(\tau_{op})_i} g(\tau_o) d\tau_o$$

où  $(\tau_{op})_i$  est le cisaillement à la paroi pour la section  $x_i$  à l'instant  $t_i$ .

D'autre part, l'axe étant une ligne de courant nulle, la valeur de la fonction de courant en  $(x_i, y_i)$  à l'instant  $t_i$  est :

$$\psi_o(x_i, y_i, t_i) = \int_0^{y_i} u_o(x_i, y, t_i) dy$$

en tenant compte de l'expression de la vitesse longitudinale donnée ci-dessus, on obtient après transformations :

$$\psi_o(x_i, y_i, t_i) = - \frac{1}{\left(\frac{\partial P_o}{\partial x}\right)_i^2} \int_0^{(\tau_o)_i} \tau_o g(\tau_o) d\tau_o - \frac{y_i}{\left(\frac{\partial P_o}{\partial x}\right)_i} \int_{(\tau_o)_i}^{(\tau_{op})_i} g(\tau_o) d\tau_o$$

Cette expression, écrite à la paroi ( $y_i = H(x_i, t_i)$ ), donne la valeur du débit instantané  $Q_o(x_i, t_i)$  dans le repère fixe, soit :

$$Q_o(x_i, t_i) = - \frac{1}{\left(\frac{\partial P_o}{\partial x}\right)_i^2} \int_0^{(\tau_{op})_i} \tau_o g(\tau_o) d\tau_o$$

Pour le fluide newtonien

$$g(\tau_o) = \tau_o$$

et on retrouve le résultat analytique.

### 1.2. Hypothèse et résolution

Sachant que le débit  $Q_o(x_i, t_i)$  est relié au débit instantané  $\hat{Q}_o(t_i)$  dans le repère mobile par :

$$Q_o(x_i, t_i) = \hat{Q}_o(t_i) + H(x_i, t_i) ,$$

la relation précédente peut s'écrire sous la forme :

$$\left[ \frac{\hat{Q}(t_i) + H(x_i, t_i)}{H^2(x_i, t_i)} \right] (\tau_{op})_i^2 = - \int_0^{(\tau_{op})_i} \tau_o g(\tau_o) d\tau_o$$

Afin de déterminer la valeur du cisaillement à la paroi, en toute section et à chaque instant et expliciter ainsi complètement les solutions, on peut se donner :

- soit la variation temporelle du débit  $\hat{Q}_o(t)$  dans le repère lié à l'onde.
- soit la variation dans le temps de la différence de pression aux extrémités du tube. On devra, dans ce cas, disposer en plus de la variation de cette différence de pression en fonction du débit  $\hat{Q}_o(t)$  dans le repère mobile.
- soit le débit moyen  $\bar{Q}_o$  de l'écoulement, il faudra alors supposer l'écoulement stationnaire dans le repère mobile. Dans ce cas :

$$\hat{Q}_o = \bar{Q}_o - 1$$

Cette hypothèse étant évidemment plus restrictive que les précédentes.

Dans tous les cas, pour tout instant  $t_i$ , la valeur de  $\hat{Q}_0(t_i)$  est connue et le cisaillement à la paroi  $(\tau_{op})_i$  en chaque section  $x_i$  est solution de l'équation ci-dessus et est calculé par une méthode de point fixe, une fois que l'on s'est donné la forme de la paroi. Dès lors, les solutions sont déterminées à chaque instant et en tout point du domaine de l'écoulement.

Notons qu'à aucun moment, il n'a été fait d'hypothèse sur la forme des ondes péristaltiques. On pourra donc appliquer cette méthode à n'importe quelle forme d'ondes pourvu qu'elles répondent aux critères énoncés au CH. I, § 1.

## 2) APPLICATION AU MODELE BIOLOGIQUE

### 2.1. Modèle

De nombreux modèles phénoménologiques ont été proposés pour décrire le comportement pseudo-plastique des fluides biologiques. Ce sont, en général, des modèles basés sur l'expérience et non issus d'une théorie microscopique. Ils sont construits pour modéliser une viscosité variable avec le taux de cisaillement, sous une forme analytique le plus simple possible. Il semble qu'il n'existe pas de loi unique pour décrire le comportement du sang et le choix de la loi est motivé par le phénomène que l'on veut étudier.

Le modèle phénoménologique que l'on traite dans cette étude est celui proposé par MAUSS et PRADERE [37] ; la viscosité apparente  $\eta^*$  est donnée par :

$$\eta^* = \frac{\eta_0 + \eta_\infty \lambda_1 |k^*|}{1 + \lambda_1 |k^*|} \quad \eta_0 > \eta_\infty$$

où  $k^*$  est le taux de déformation

$\eta_0$  et  $\eta_\infty$  deux viscosités

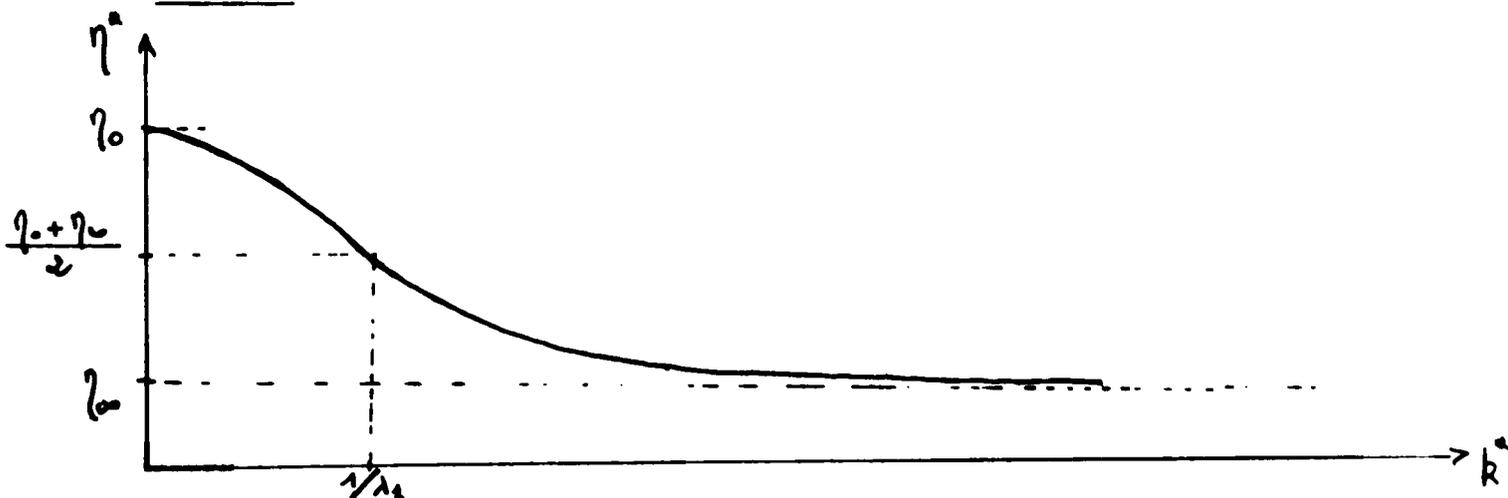
$\lambda_1$  un temps caractéristique

Ce modèle a été étudié par OUAZZANI [42] et ZEGGWAGH [66]. Ils analysent la viscosité sanguine à l'aide d'un viscosimètre à cylindres coaxiaux et proposent des valeurs des trois paramètres du modèle avec une signification précise. Ainsi (voir figure):

\*  $\eta_0$  : "viscosité naturelle" est liée à la nature physique du sang. Elle est approchée pour de faibles taux de déformations et est de l'ordre de 50 cp.

\* la "viscosité limite"  $\eta_\infty$  est la valeur limite atteinte pour de forts taux de déformations. Elle est de l'ordre de 3 cp.

\* Enfin, le temps caractéristique  $\lambda_1$  caractérise la façon dont s'effectue le passage de la viscosité entre les valeurs  $\eta_0$  et  $\eta_\infty$ . Plus  $\lambda_1$  est grand et plus la viscosité minimum est atteinte rapidement.  $\lambda_1$  est dit temps de fluidité.



Variation de la viscosité apparente en fonction du taux

de déformation

## 2.2. Etude

Il s'introduit deux nombres lors de l'adimensionnalisation

$$\mu = \frac{\eta_{\infty}}{\eta_0} \quad \text{et} \quad F = \frac{\lambda_1 c}{H_0}$$

ils caractérisent la fluidification sanguine.

Les contraintes de cisaillement sont données par :

$$\tau_0 = \frac{1 + \mu F \left| \frac{\partial u_0}{\partial y} \right|}{1 + F \left| \frac{\partial u_0}{\partial y} \right|} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial y}$$

et les taux de déformations :

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{-(1 - F |\tau_0|) + \sqrt{(1 - F |\tau_0|)^2 + 4 \mu F |\tau_0|}}{2 \mu \cdot F \cdot \text{sgn}(\tau_0)}$$

L'écoulement péristaltique de ce fluide est alors étudié. Une série de programmes, réalisés en BASIC et directement exploitables sur mini-ordinateurs TEKTRONIX, permet d'obtenir les tracés graphiques des différentes solutions.

Les solutions sont données pour les valeurs des paramètres du modèle :

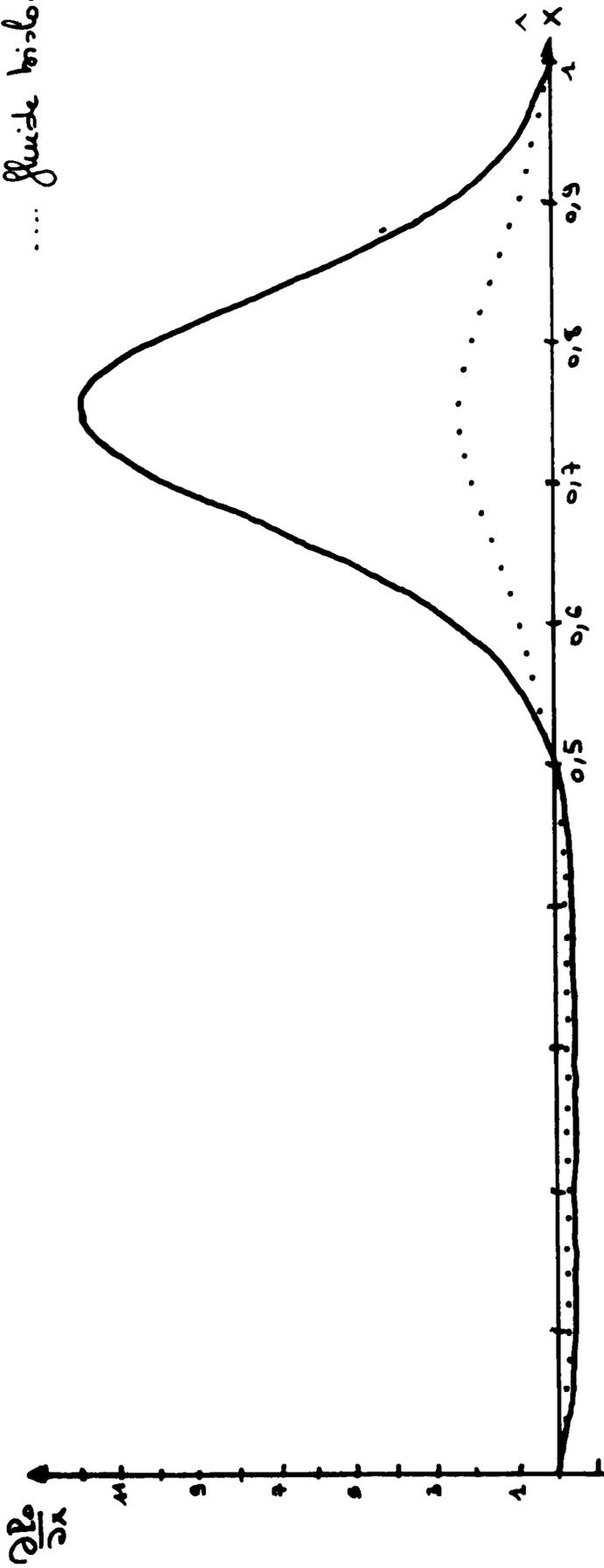
$$\mu = 1/10 \quad \text{et} \quad F = 2$$

### résultats graphiques :

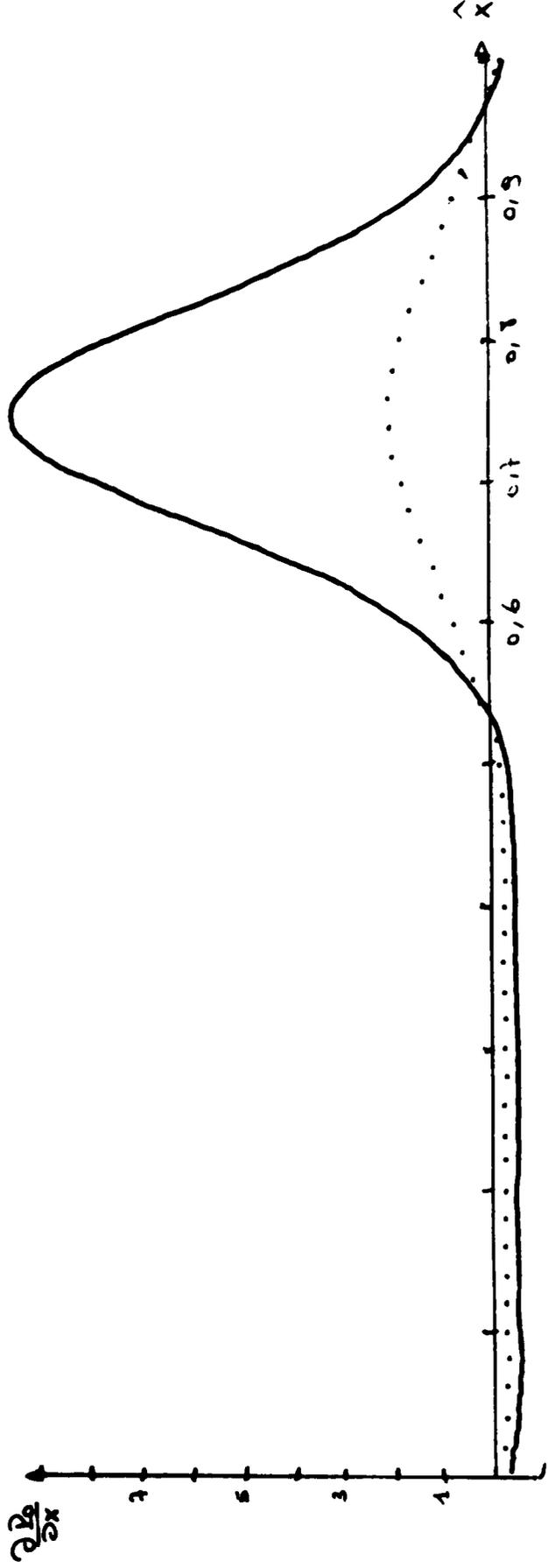
- Figure 33 : gradient de pression sur une longueur d'onde pour un débit moyen nul.
- Figure 34 : variation du cisaillement à la paroi sur une longueur d'onde.
- Figures 35 et 36 : profils de vitesses longitudinales en différentes sections sur une longueur d'onde pour différents débits.

— fluide newtonien

.... fluide biologique  $\mu=0,1$   
 $F=2$



$$\bar{\theta}_0 = 0$$

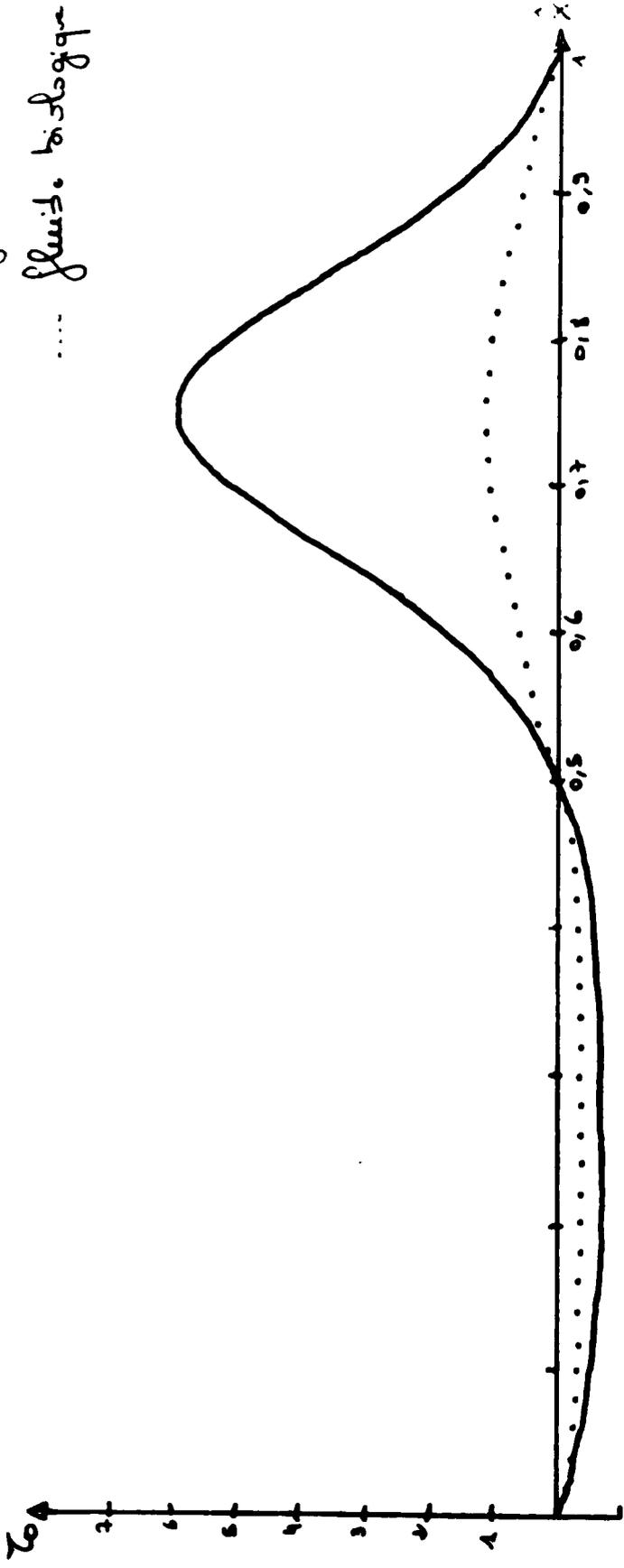


$$\bar{\theta}_0 = 0,1$$

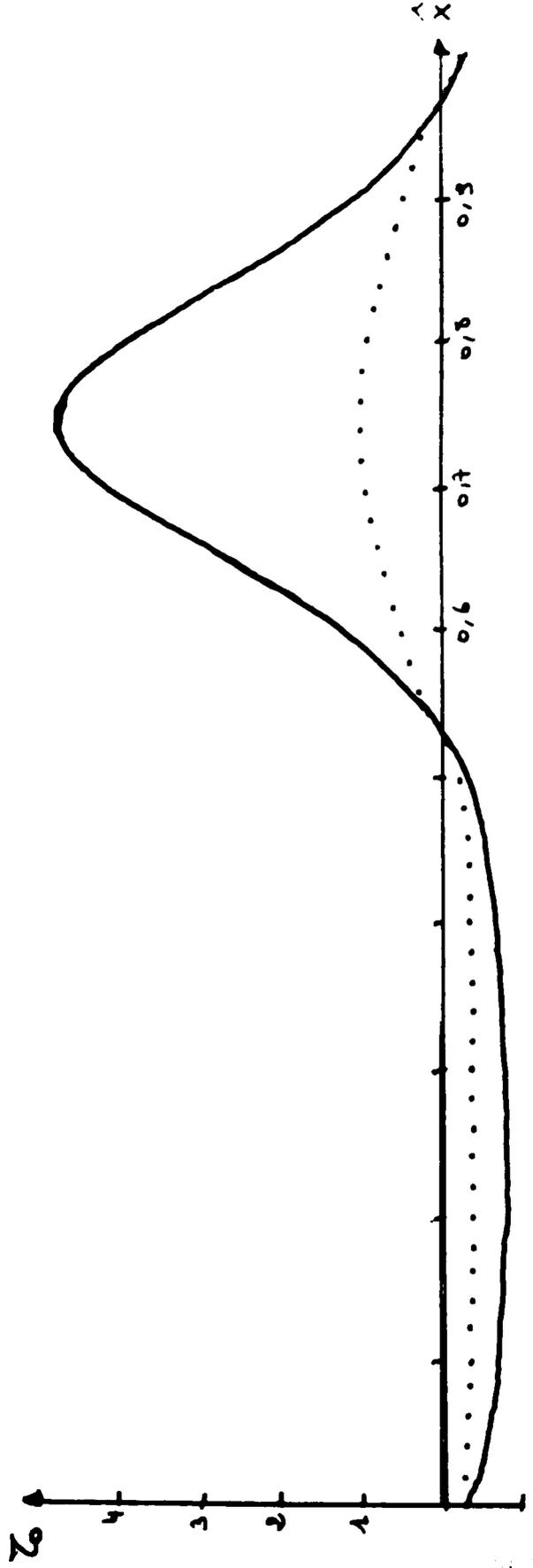
Figure 33: Variation du gradient de pression sur une longueur d'onde ( $\phi=0,5$ )

— fluide newtonien

... fluide biologique  $\mu = 0,1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$



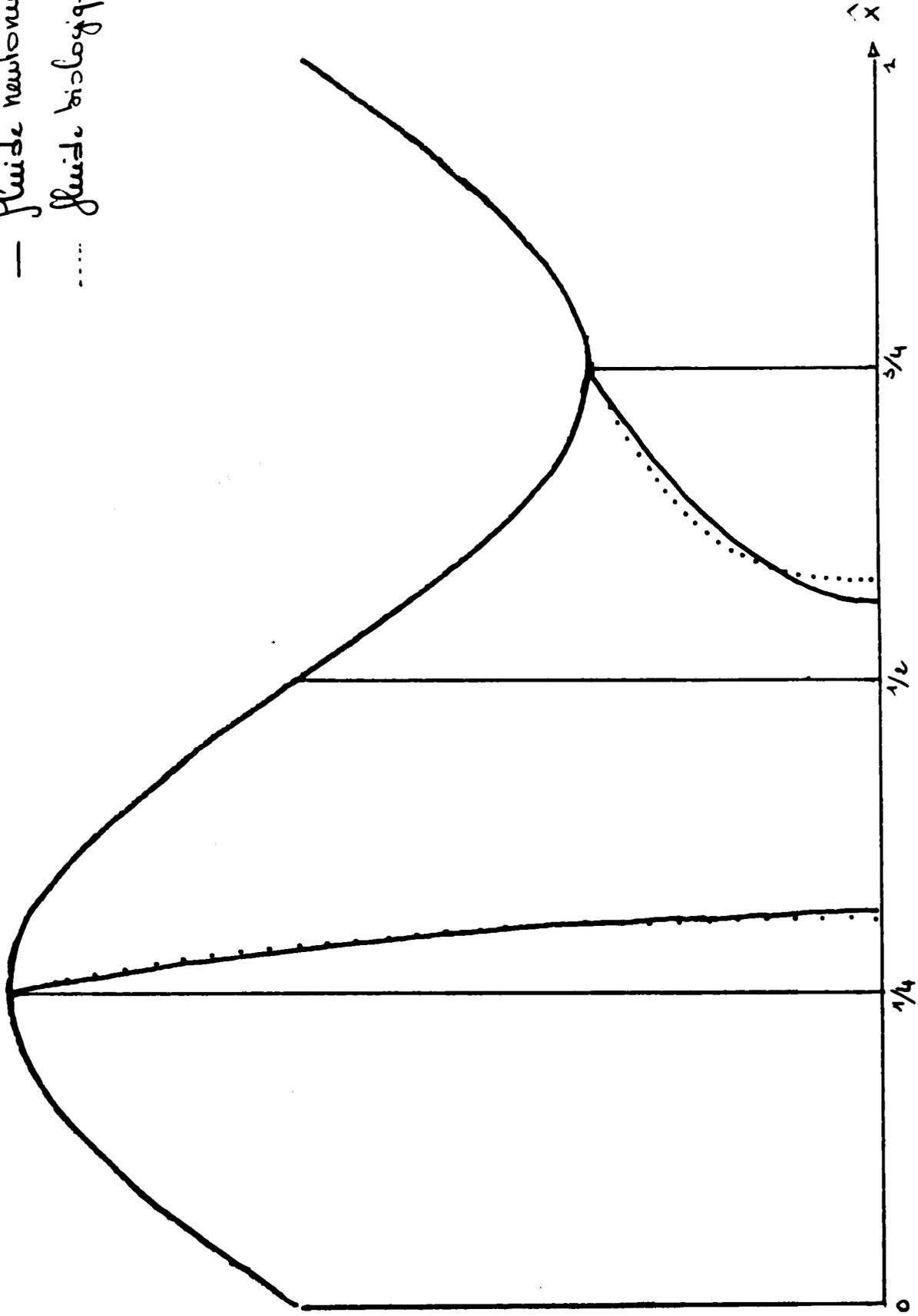
$$\bar{\tau}_0 = 0$$



$$\bar{\tau}_0 = 0,1$$

Figure 34 : Variation du cisaillement à la paroi sur une longueur d'onde pour  $\varphi = 0,5$

- fluide newtonien
- ..... fluide biologique  $H=0,1$

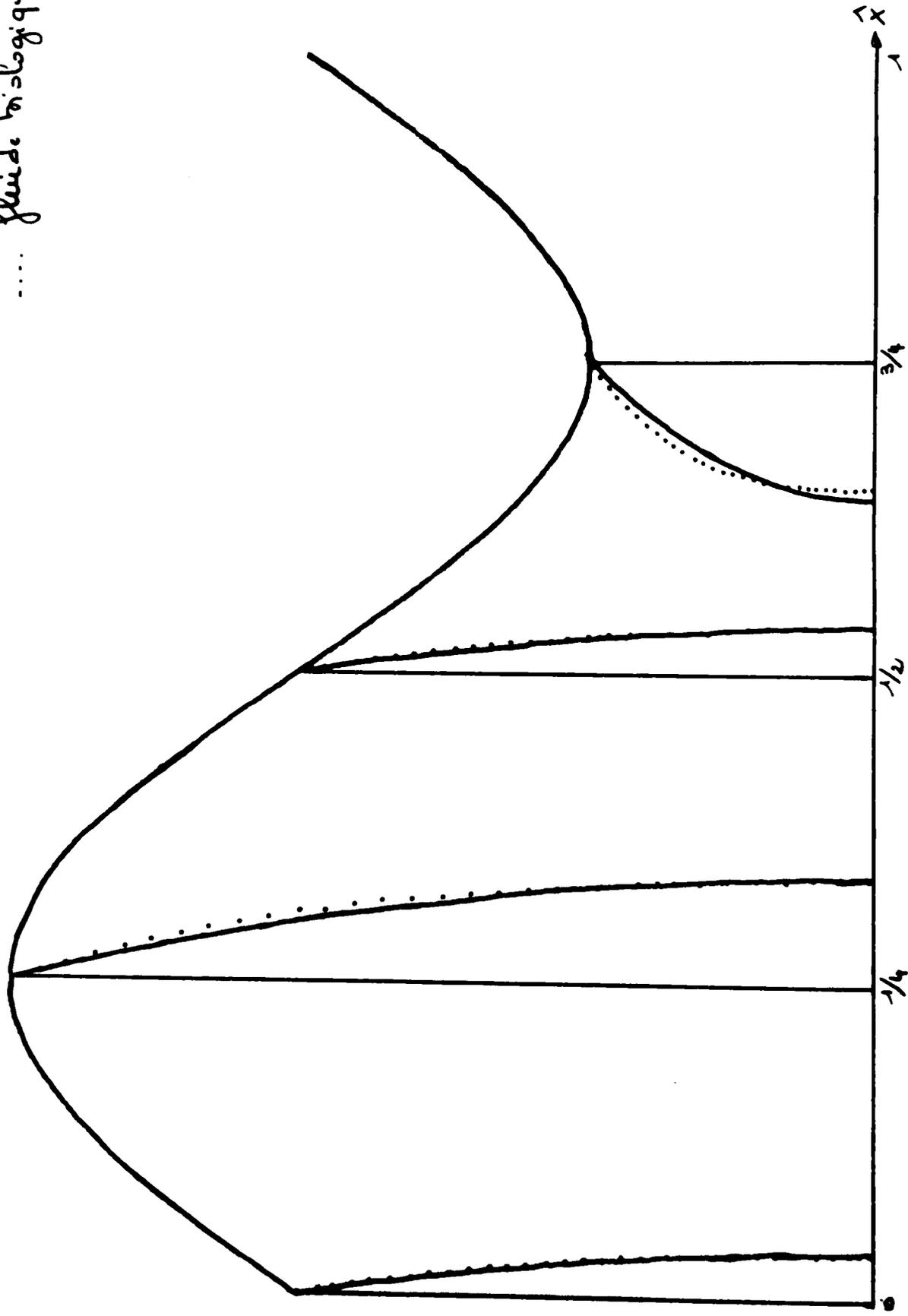


$$\phi = 0,5$$

$$\bar{\theta}_0 = 0$$

Figure 35: Profils de vitesses longitudinales sur une longueur d'onde en différentes sections

- fluide newtonien
- .... fluide visqueux  $\mu=0,1 F$



$$\frac{\Phi}{Q_0} = 0,5$$

$$\frac{Q_0}{Q_0} = 0,2$$

Figure 36 : Profil de vitesses longitudinales en différentes sections sur une longueur d'onde

- Figure 37 : caractéristique pression-débit de l'écoulement pour un paramètre d'occlusion de 0,4.
- Figures 38 et 39 : Lignes de courant dans le repère mobile en l'absence de piégeage et dans le cas du piégeage.

### 3) CONCLUSION

Une étude comparative faite pour différentes valeurs des paramètres du modèle, montre que les maximum des gradients de pression et des cisaillements à la paroi sont des fonctions croissantes de la fluidification  $\mu$  ; par contre ils décroissent lorsque le temps de fluidité  $F$  croit (figures 40 et 41).

- fluide newtonien
- .... fluide biologique  $H=0,1$   $F=2$

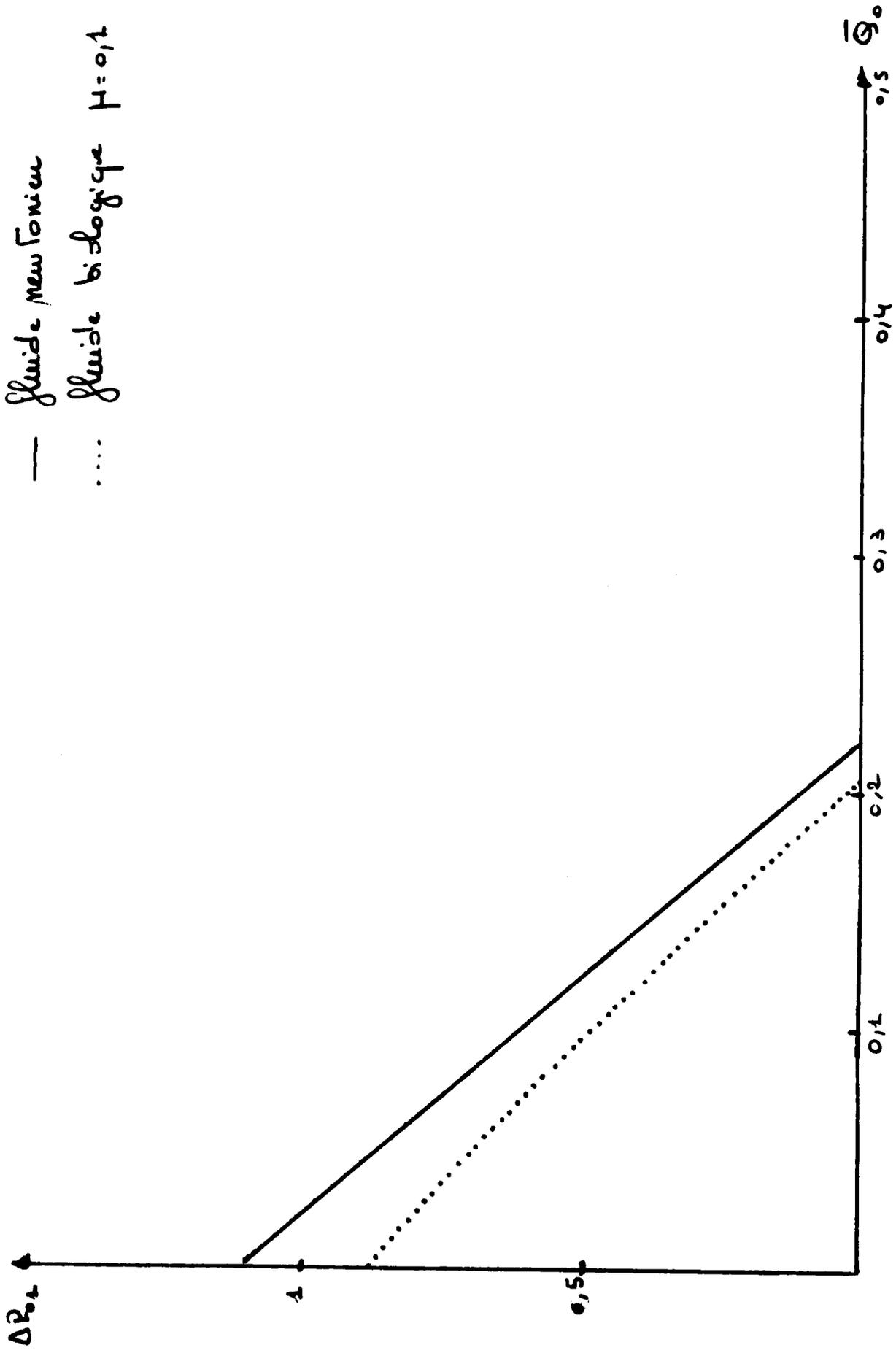


Figure 37: Caractéristique débit moyen - différence de pression sur une longueur d'onde  
pour un paramètre d'occlusion  $\phi = 0,14$ .

$$\frac{\phi = 0,7}{\bar{Q}_0 = 0,5}$$

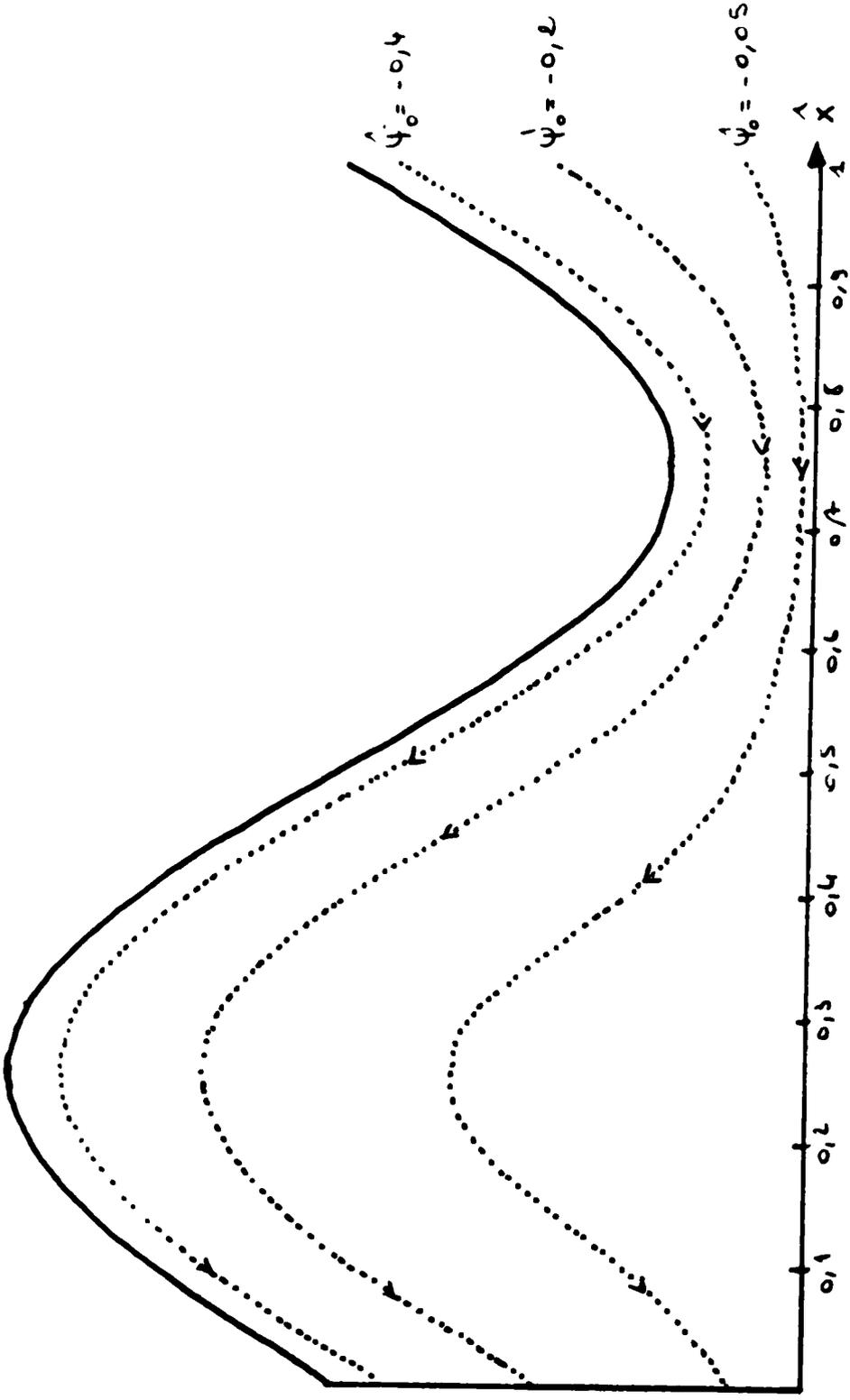


Figure 38 : lignes de courant dans le repère mobile en l'absence  
de piègeage

$$\phi = 0,8$$

$$\bar{g}_0 = 0,5$$

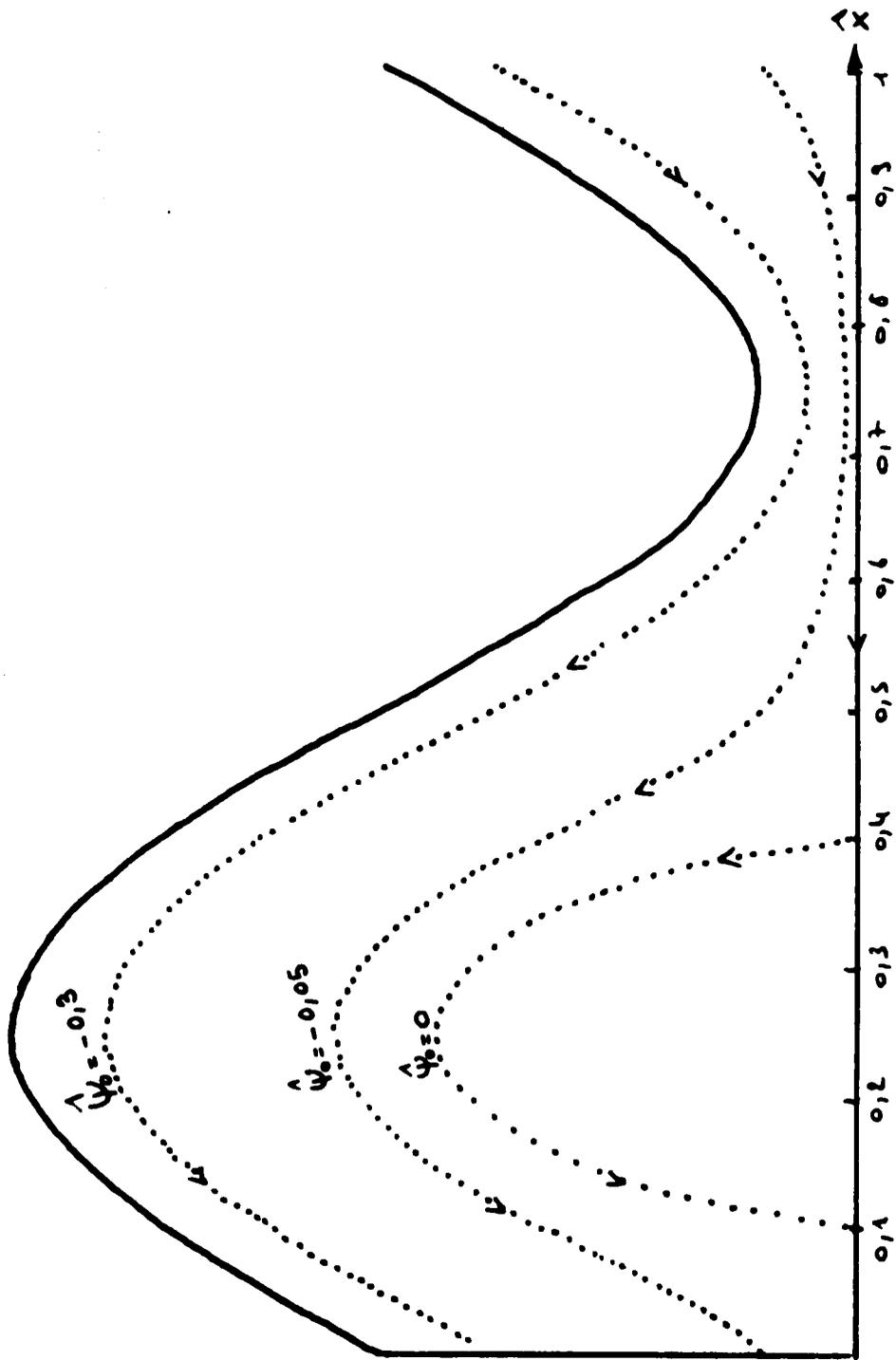


Figure 39: lignes de courant dans le repère mobile, dans le cas  
du piégeage

— fluide newtonien  
 ... fluide biologique

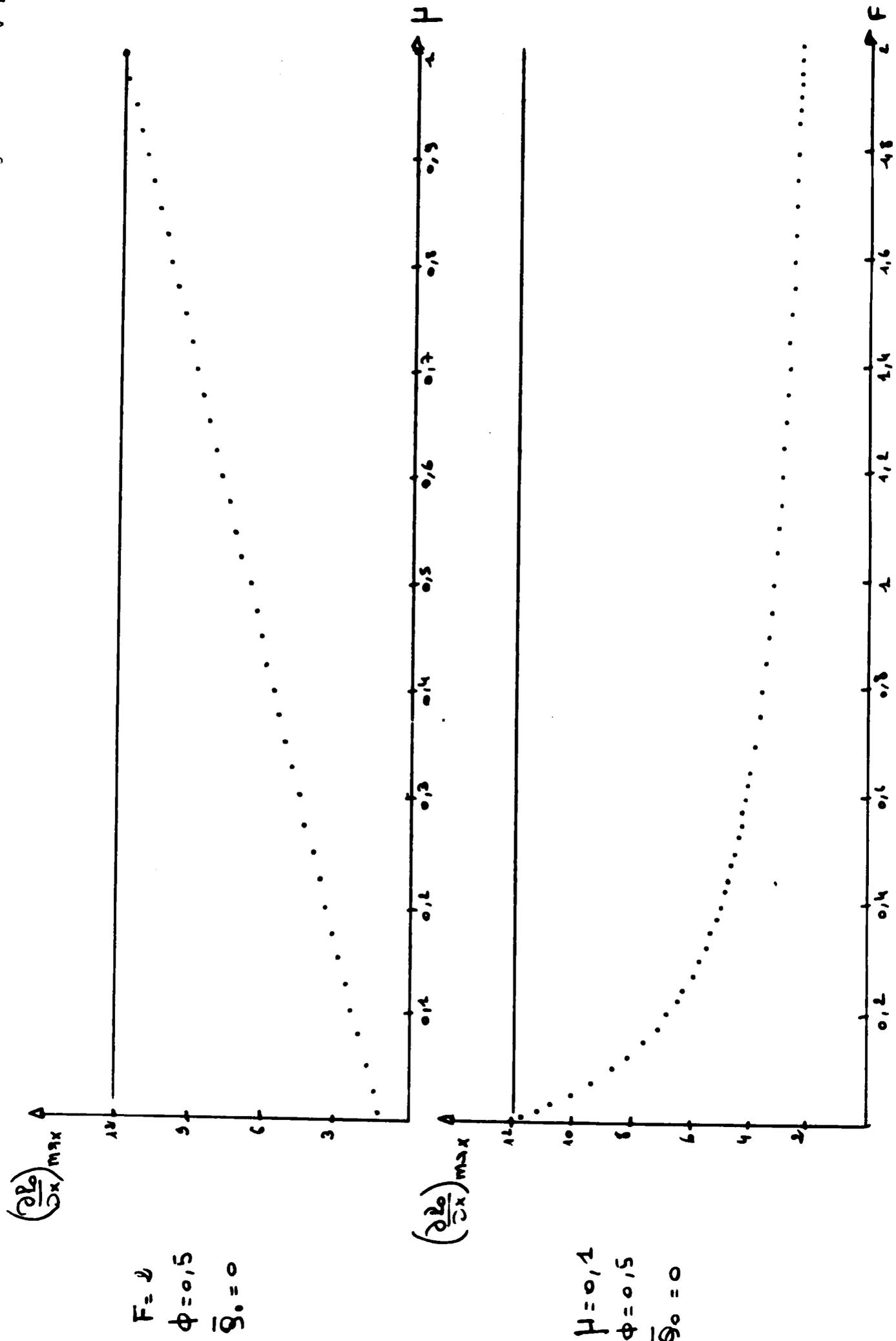
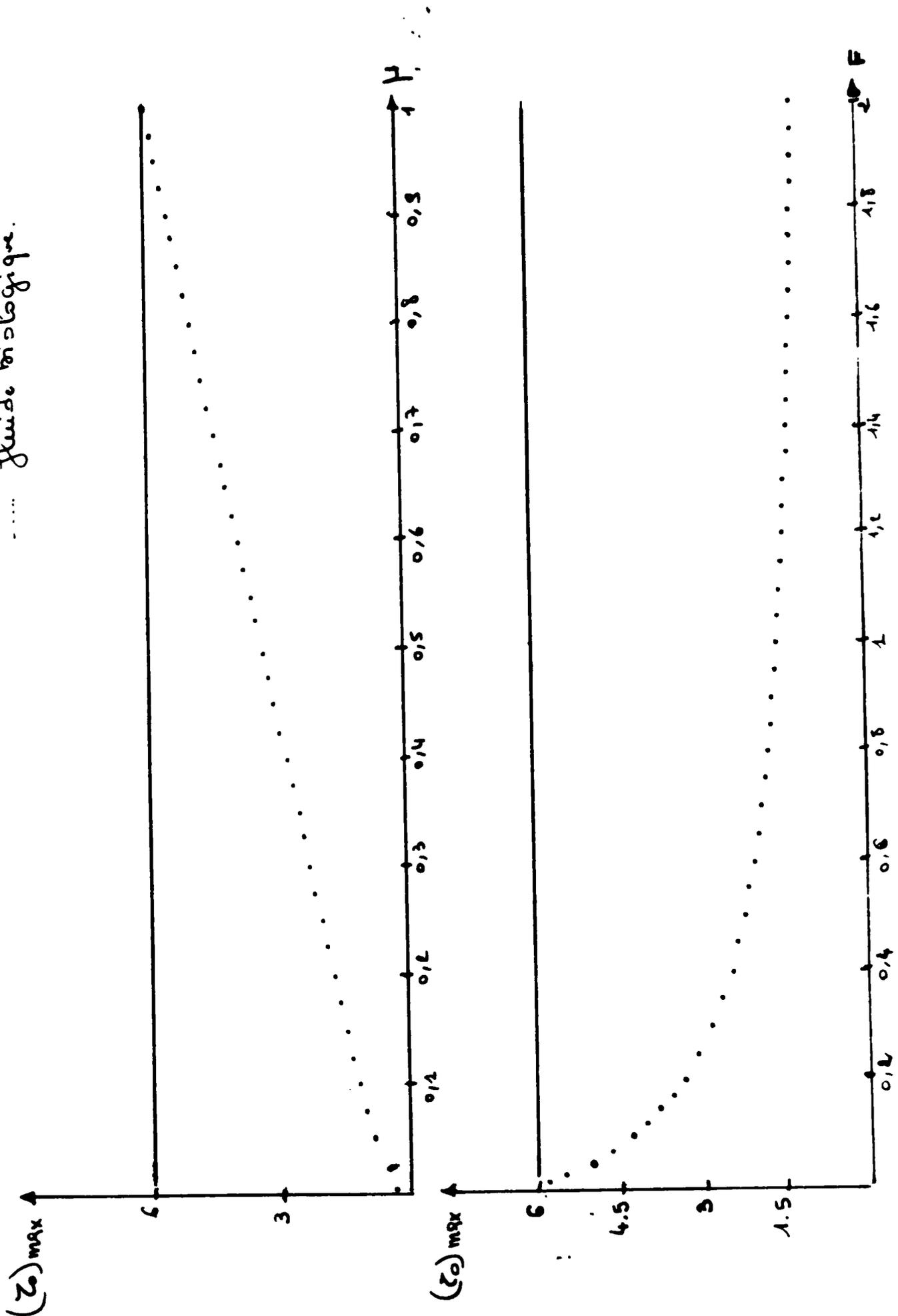


Figure 40: Influence des paramètres du modèle sur le gradient de pression maximum.

— fluide newtonien  
 ..... fluide biologique.



$\mu = 0,2$   
 $\phi = 0,5$   
 $\bar{\sigma}_0 = 0$

$\mu = 0,1$   
 $\phi = 0,5$   
 $\bar{\sigma}_0 = 0$

Figure 4.1: Influence des paramètres du modèle sur le cisaillement à la paasi maximum

## C O N C L U S I O N

Il ressort de cette étude que dans une pompe péristaltique, le débit croît avec l'occlusion du tube, mais plus celle-ci est grande et plus les cisaillements dans l'écoulement sont élevés.

Les pompes à galets utilisées pour le pompage du sang en chirurgie (circulation extra-corporelle) possèdent un inconvénient lors de leur utilisation ; elles hémolysent le sang ; c'est-à-dire qu'elles provoquent une rupture des globules rouges qui libèrent leur hémoglobine.

De nombreuses études faites sur l'hémolyse, citons notamment les travaux de BLACKSHEAR en 1966, ont montré que :

+ la présence de la paroi est un facteur important d'hémolyse (collisions entre les hématies et la paroi).

+ le taux d'hémolyse augmente avec le taux de cisaillement dans l'écoulement.

Il semble donc que les pompes occlusives, bien que pratiques en usage médical, hémolysent plus le sang (les hématies sont broyées dans les zones contractées du tube) et qu'une pompe réglée avec un léger jeu soit plus adaptée pour minimiser le phénomène à hémolyse ; mais dans ce cas le fonctionnement n'est plus volumétrique et le débit dépend de la charge.

Annexe 1: Tableau résumant les différentes hypothèses utilisées dans quelques études théoriques, classées par ordre chronologique.

Année	Auteurs	Géométrie	Forme des ondes	Nombre de Reynolds	Nombre d'onde	Paramètre d'occlusion	Autres hypothèses	Méthode de résolution
1957	BURNS-PARKES	plane et axisymétrique	train d'ondes sinusoïdales	0	arbitraire	$\epsilon \phi \ll 1$	$\Delta P_\lambda = 0$	analytique
1958	SHAPIRO	plane	"	$Re \cdot \epsilon \ll 1$	$\ll 1$	arbitraire		analytique
	BARTON - RAYNOR	plane et axisymétrique	"	0	$\ll 1$	arbitraire		analytique
	FUNG - YIH	axisymétrique	"	0	$O(1)$	"	$\Delta P_\lambda = 0$	analytique
							$\Delta P_\lambda = 0$	analytique
	HANIN	plane	"	$Re \cdot \epsilon$ arbitraire	$\ll 1$	$\ll 1$	$\Delta P_\lambda = 0$	analytique

## **ANNEXES**

Annexe 1: Tableau résumant les différentes hypothèses utilisées dans quelques études théoriques, classées par ordre chronologique.

Année	Auteurs	Géométrie	Forme des ondes	Nombre de Reynolds	Nombre d'onde	Paramètre d'occlusion	Autres hypothèses	Méthode de résolution
1967	BURNS-PARKES	plane et axisymétrique	train d'ondes sinusoïdales	0	arbitraire	$\epsilon \phi \ll 1$	$\Delta R_\lambda = 0$	analytique
1968	SHAPIRO	plane	"	$Re \cdot \epsilon \ll 1$	$\ll 1$	arbitraire		analytique
	BARTON - RAYNOR	plane et axisymétrique	"	0	$\ll 1$	arbitraire		analytique
	FUNG - YIH	axisymétrique	"	0	$O(1)$	"	$\Delta R_\lambda = 0$	analytique
	HANIN	plane	"	arbitraire	arbitraire	$\ll 1$	$\Delta R_\lambda = 0$	analytique
				$Re \cdot \epsilon$ arbitraire	$\ll 1$	$\ll 1$	$\Delta R_\lambda = 0$	analytique

369	SHAPIRO-JAFFAIN - WEINBERG	axisymétrique	"	$Re E \ll 1$	$\ll 1$	arbitraire	arbitraire	analytique
	YIN - FUNG	axisymétrique	"	arbitraire	arbitraire	$\ll 1$	$\Delta P_\lambda = 0$	analytique
370	CHOW	axisymétrique	"	modéré	modéré	$\ll 1$	$\bar{Q} = 0$	analytique
	LI	axisymétrique	"	$Re E$ arbitraire	arbitraire	$\ll 1$	$\bar{Q} = 0$	analytique
	ZIEN - OSTRACH	plane	"	$Re = O(1)$	$\ll 1$	arbitraire	$\bar{Q} = 0$ et $\phi \rightarrow 0$	analytique
371	JAFFRIN - SHAPIRO	plane et axisymétrique	"	$Re E \ll 1$	$\ll 1$	arbitraire		analytique
372	TONG - VAUTER	axisymétrique	train d'ondes sinusoïdale et onde sinusoïdale solitaire.	0	arbitraire	arbitraire		numérique (méthode des éléments finis)
374	MITRA-PRASAD	plane	train d'ondes	arbitraire	arbitraire	$\ll 1$	$\phi \rightarrow 0$	analytique

sinusoïdale

75	PANTON	axisymétrique	quelconque	$\ll 1$	$\ll 1$	arbitraire	analytique
76	LIRON	plane et axisymétrique	ondes de contraction et ondes de dilatation	$Re \cdot E \ll 1$	$\ll 1$	arbitraire	numérique (méthode des éléments finis)
78	SHEN - SHIH	tridimensionnelle	quelconque	$Re/E = O(1)$	$\ll 1$	$\phi = O(1)$ $\phi \ll 1$	analytique
79	WILSON - PANTON	bidimensionnelle	onde de torsion latérale et onde de contraction	$Re$ modéré	$\ll 1$	"	analytique
80	SHEN - SHIH - WU	axisymétrique	train d'ondes sinusoïdale	arbitraire	$E \ll 1$	$\phi = O(1)$	analytique

Valeurs de  $\bar{Q}_0 \text{ max}$ , borne supérieure du domaine de pompage (valeur du débit moyen correspondant à un accroissement

de pression nul).

Valeurs de $\phi$	fluide pseudoplastique K = 1 n = 0,6	fluide newtonien K = n = 1	fluide dilatat K = 1 n = 1,4
0,1	0,0137095	0,0149253	0,0157392
0,2	0,0542098	0,0588235	0,0618542
0,3	0,1198916	0,1291866	0,135228
0,4	0,2079825	0,222222	0,2312453
0,5	0,3153187	0,333333	0,3444823
0,6	0,4379186	0,4576271	0,4694188
0,7	0,5718922	0,5903614	0,6010183
0,8	0,7128886	0,7272727	0,7351164
0,9	0,8570569	0,8647686	0,8686899
1	1	1	1

## **BIBLIOGRAPHIE**

- [1] BARTON C., RAYNOR S.  
"Peristaltic flow in tubes."  
Bull. Math. Biophys. vol. 30, pp. 663-680 (1968)
- [2] BESTMANN A.R.  
"Long wavelength peristaltic pumping in a heated tube at low Reynolds number."  
Coll. Sci. Technol. Port Harcourt N.G.A.  
Developpements in mechanics, Midwestern mechanics conference 16/1979, Manhattan K.S. (U.S.A.) Kansas State University
- [3] BOYARSKY S., LABAY P.C.  
"Ureteral dimensions and specifications for bioengineering modeling."  
Urodynamics ed. par J. Boyarsky, C.W. Gottschalk, E.A. Tanagho et P.D. Zimsking. Academic Press pp. 163-167, (1971)
- [4] BURNS J.C., PARKES T.  
"Peristaltic motion."  
J. Fluid. Mechanics, vol. 39, pp. 731-743, (1967)
- [5] BUTHAUD H.  
"The influences of unsymmetry wall slope and wall motion on peristaltic pumping at small Reynolds number."  
M.S. Thesis, Dept. of Mechanics, Johns Hopkins University Baltimore U.S.A. (1971)
- [6] CHOW T.S.  
"Peristaltic transport in a circular cylindrical pipe."  
J. Applied Mechanics, pp. 901-905 (1970)
- [7] DEVANATHAN R., PARVATHAMMA S.  
"Long wavelength peristaltic transport of non-newtonian fluids."  
India J. Pure Application Math., vol. 11, n°4, pp. 507-517 (1980)

- [8] ECKSTEIN E.C.  
"Experimental and theoretical pressure studies of peristaltic pumping."  
M.S. Thesis, Dept of Mechanical engineering, M.I.T.  
Cambridge U.S.A. (1970)
- [9] EVANS C.L.  
"Principles of human physiology."  
12th édition, London, J & A Churchill Limited p. 915
- [10] FUMERO R.  
"Optimisation of blood pumping systems."  
J. Biomechanics, vol. 13, pp. 855-863 (1980)
- [11] FUNG Y.C.  
"Peristaltic pumping : a bioengineering model in urodynamics."  
Urodynamics ed. par J. Boyarsky, C.W. Gottschalk,  
E.A. Tanagho et P.D. Zimsking. Academic Press pp. 179-199 (1971)
- [12] FUNG Y.C., YIH C.S.  
"Peristaltic transport."  
J. Applied Mechanics, vol. 35, pp. 669-675 (1968)
- [13] FUNG Y.C., YIN F.  
"Peristaltic waves in circular cylindrical tubes."  
J. Applied Mechanics, vol. 37, p. 568 (1969)
- [14] FUNG Y.C., YIN F.  
"Comparison of theory and experiment in peristaltic transport."  
J. Fluid. Mechanics, vol. 4, pp. 93-112 (1971)
- [15] HANIN M.  
"The flow through a channel due to transversely oscillating walls."  
Israel J. Technology, vol. 6, pp. 67-71 (1968)

- [16] HOUSSAY B.A., LEWIS J.T., ORIAS O.  
"Human Physiology."  
New-York, McGraw-Hill p. 347
- [17] JAFFRIN M.Y.  
"Inertia and streamline curvature effects on peristaltic pumping."  
J. Intern. Eng. Science, vol. 11, pp. 681-699 (1973)
- [18] JAFFRIN M.Y.  
"Etude du transport péristaltique et de quelques applications physiologiques."  
Thèse présentée à l'Université Pierre et Marie Curie en février 1976, Paris
- [19] JAFFRIN M.Y., MEGINNISS J.R.  
"The hydrodynamics of roller pumps and their implication to hemolysis."  
Fluid Mechanics Laboratory, report 71-1, M.I.T. Cambridge (février 1971)
- [20] JAFFRIN M.Y., SHAPIRO A.H.  
"Peristaltic pumping."  
Annual review of fluid mechanics, vol. 3, annual reviews, Inc. Palo Alto (1971)
- [21] JAFFRIN M.Y., WEINBERG S., SHAPIRO A.H.  
"A simple model of ureteral peristaltis."  
Proc. of the 23rd A.C.E.M.B., p. 135 Washington D.C. (1970)
- [22] KAIMAL M.R.  
"Peristaltic pumping of a newtonian fluid with particles suspended in it at low Reynolds number under long wavelength approximation."  
J. Applied Mechanics, vol. 45, p. 32 (1978)

- [23] KHALID-NACIRI J.  
"Ecoulement péristaltique de fluides non newtoniens.  
Applications aux fluides biologiques. Cas axisymétrique."  
Thèse de 3ème cycle présentée à l'Université Paul Sabatier  
Toulouse (Juillet 1981) (à paraître) n° 2499
- [24] LARDNER T.J., SHACK W.J.  
"Cilia transport."  
Bull. of Math. Biol. vol. 34, pp. 325-335 (1972)
- [25] LATHAM T.W.  
"Fluid motions in a peristaltic pump."  
S.M. Thesis, M.I.T. (1966)
- [26] LATHAM T.W., SHAPIRO A.H.  
"On peristaltic pumping."  
Proc. 19th annual conference on engineering in medicine  
and biology, p. 147 (1966)
- [27] LEW H.S., FUNG Y.C., LOWENSTEIN C.B.  
"Peristaltic carrying and mixing of chyme in the small  
intestine."  
J. Biomechanics, vol. 4, pp. 297-315 (1971)
- [28] LI C.H.  
"Particle trajectories in peristaltic motion."  
Report FTAS/TR 71-58  
Case Western Reserve University Cleveland-Ohio
- [29] LI C.H.  
"Peristaltic transport in circular cylindrical tubes."  
J. Biomechanics, vol. 3, pp. 513-523 (1970)
- [30] LIRON N.  
"On peristaltic flow and its efficiency."  
Bull. of Math. Biology, vol. 38, pp. 573-596 (1976)

- [31] LYKLOUDIS P.  
"The ureter as a peristaltic pump."  
Urodynamics ed. par J. Boyarsky, C.W. Gottschalk,  
E.A. Tanagho et P.D. Zimsking, Academic Press, pp.135-  
142 (1971)
- [32] LYKLOUDIS P., ROSS R.  
"The fluid mechanics of the ureter from a lubrication  
theory point of view."  
J. Fluid. Mechanics, vol. 43, p. 661 (1970)
- [33] MAHREHOLTZ O.H., MANK M.G., ZIMMERMANN R.U.  
"The influence of wave form on peristaltic transport."  
Biorheology, vol. 15, pp. 501-510 (1978)
- [34] MANK M.G.  
"Berechnung der peristaltischen flüssigkeits förderung  
mit der methode der finiten elemente."  
Dissertation, T.U. Hannover (1976)
- [35] MANTON M.J.  
"Long wavelength peristaltic pumping at low Reynolds  
number"  
J. Fluid. Mechanics, vol. 68, part 3, pp. 467-476 (1975)
- [36] MAUSS J.  
Cours de D.E.A. Université Paul Sabatier, Toulouse (1979)
- [37] MAUSS J., PRADERE J.  
"Sur le comportement viscoélastique du sang."  
Communication personnelle. Journal français de Biophysique  
et de médecine nucléaire (1981). A paraître.
- [38] MEGINNISS J.R.  
"An analytic investigation of flow and hemolysis in peris-  
taltic-type blood pumps."  
S.M. Thesis. M.I.T. Cambridge-Massachussets (1970)

- [23] KHALID-NACIRI J.  
"Ecoulement péristaltique de fluides non newtoniens.  
Applications aux fluides biologiques. Cas axisymétrique."  
Thèse de 3ème cycle présentée à l'Université Paul Sabatier  
Toulouse (Juillet 1981) (à paraître) n° 2499
- [24] LARDNER T.J., SHACK W.J.  
"Cilia transport."  
Bull. of Math. Biol. vol. 34, pp. 325-335 (1972)
- [25] LATHAM T.W.  
"Fluid motions in a peristaltic pump."  
S.M. Thesis, M.I.T. (1966)
- [26] LATHAM T.W., SHAPIRO A.H.  
"On peristaltic pumping."  
Proc. 19th annual conference on engineering in medicine  
and biology, p. 147 (1966)
- [27] LEW H.S., FUNG Y.C., LOWENSTEIN C.B.  
"Peristaltic carrying and mixing of chyme in the small  
intestine."  
J. Biomechanics, vol. 4, pp. 297-315 (1971)
- [28] LI C.H.  
"Particle trajectories in peristaltic motion."  
Report FTAS/TR 71-58  
Case Western Reserve University Cleveland-Ohio
- [29] LI C.H.  
"Peristaltic transport in circular cylindrical tubes."  
J. Biomechanics, vol. 3, pp. 513-523 (1970)
- [30] LIRON N.  
"On peristaltic flow and its efficiency."  
Bull. of Math. Biology, vol. 38, pp. 573-596 (1976)

- [31] LYKLOUDIS P.  
"The ureter as a peristaltic pump."  
Urodynamics ed. par J. Boyarsky, C.W. Gottschalk,  
E.A. Tanagho et P.D. Zimsking, Academic Press, pp.135-  
142 (1971)
- [32] LYKLOUDIS P., ROSS R.  
"The fluid mechanics of the ureter from a lubrication  
theory point of view."  
J. Fluid. Mechanics, vol. 43, p. 661 (1970)
- [33] MAHREHOLTZ O.H., MANK M.G., ZIMMERMANN R.U.  
"The influence of wave form on peristaltic transport."  
Biorheology, vol. 15, pp. 501-510 (1978)
- [34] MANK M.G.  
"Berechnung der peristaltischen flüssigkeits förderung  
mit der methode der finiten elemente."  
Dissertation, T.U. Hannover (1976)
- [35] MANTON M.J.  
"Long wavelength peristaltic pumping at low Reynolds  
number"  
J. Fluid. Mechanics, vol. 68, part 3, pp. 467-476 (1975)
- [36] MAUSS J.  
Cours de D.E.A. Université Paul Sabatier, Toulouse (1979)
- [37] MAUSS J., PRADERE J.  
"Sur le comportement viscoélastique du sang."  
Communication personnelle. Journal français de Biophysique  
et de médecine nucléaire (1981). A paraître.
- [38] MEGINNISS J.R.  
"An analytic investigation of flow and hemolysis in peris-  
taltic-type blood pumps."  
S.M. Thesis. M.I.T. Cambridge-Massachussets (1970)

- [39] MITTRA T.K., PRASAD S.N.  
"On the influence of wall properties and Poiseuille flow in peristaltic."  
J. Biomechanics, vol. 6, pp. 681-693 (1973)
- [40] MITTRA T.K., PRASAD S.N.  
"Interaction of peristaltic motion with Poiseuille flow."  
Bull. of math. biology, vol. 36, pp. 127-141 (1974)
- [41] NEGRIN M.P., SHACK W.J., LARDNER T.J.  
"A note on peristaltic pumping."  
J. Applied mechanics, vol. 41, n°2, pp. 520-521 (1974)
- [42] OUAZZANI M.T.  
"Etude rhéologique de fluides biologiques. Cas du sang : 2ème partie."  
Thèse de 3ème cycle présentée à l'Université Paul Sabatier Toulouse en 1980, n° d'ordre 2361.
- [43] PAVLOV K.B., VISHNYAKOV V.I.  
"Ecoulement péristaltique d'un fluide non-newtonien à loi puissance dans un canal plan."  
Inzhener Fiz. Zh. Belorus SSR, SSSR, vol. 26, pp. 245-251 (1974)
- [44] PAVLOV K.B., VISHNYAKOV V.I., ROMANOV A.S.  
"Peristaltic flow of a non-newtonien viscoplastic liquid in a slot channel."  
J. Eng. Phys. vol. 31, pp. 1078-1082 (1976)
- [45] POLISHCHUK G.I.  
"Ecoulement de liquide dû au mouvement ondulatoire des parois d'une conduite."  
Akust. Zhdanova SUN, vol. 26, n°3, pp. 440-445 (1980)

- [31] LYKLOUDIS P.  
"The ureter as a peristaltic pump."  
Urodynamics ed. par J. Boyarsky, C.W. Gottschalk,  
E.A. Tanagho et P.D. Zimsking, Academic Press, pp.135-  
142 (1971)
- [32] LYKLOUDIS P., ROSS R.  
"The fluid mechanics of the ureter from a lubrication  
theory point of view."  
J. Fluid. Mechanics, vol. 43, p. 661 (1970)
- [33] MAHREHOLTZ O.H., MANK M.G., ZIMMERMANN R.U.  
"The influence of wave form on peristaltic transport."  
Biorheology, vol. 15, pp. 501-510 (1978)
- [34] MANK M.G.  
"Berechnung der peristaltischen flüssigkeits förderung  
mit der methode der finiten elemente."  
Dissertation, T.U. Hannover (1976)
- [35] MANTON M.J.  
"Long wavelength peristaltic pumping at low Reynolds  
number"  
J. Fluid. Mechanics, vol. 68, part 3, pp. 467-476 (1975)
- [36] MAUSS J.  
Cours de D.E.A. Université Paul Sabatier, Toulouse (1979)
- [37] MAUSS J., PRADERE J.  
"Sur le comportement viscoélastique du sang."  
Communication personnelle. Journal français de Biophysique  
et de médecine nucléaire (1981). A paraître.
- [38] MEGINNISS J.R.  
"An analytic investigation of flow and hemolysis in peris-  
taltic-type blood pumps."  
S.M. Thesis. M.I.T. Cambridge-Massachussets (1970)

- [39] MITTRA T.K., PRASAD S.N.  
"On the influence of wall properties and Poiseuille flow in peristaltic."  
J. Biomechanics, vol. 6, pp. 681-693 (1973)
- [40] MITTRA T.K., PRASAD S.N.  
"Interaction of peristaltic motion with Poiseuille flow."  
Bull. of math. biology, vol. 36, pp. 127-141 (1974)
- [41] NEGRIN M.P., SHACK W.J., LARDNER T.J.  
"A note on peristaltic pumping."  
J. Applied mechanics, vol. 41, n°2, pp. 520-521 (1974)
- [42] OUAZZANI M.T.  
"Etude rhéologique de fluides biologiques. Cas du sang : 2ème partie."  
Thèse de 3ème cycle présentée à l'Université Paul Sabatier Toulouse en 1980, n° d'ordre 2361.
- [43] PAVLOV K.B., VISHNYAKOV V.I.  
"Ecoulement péristaltique d'un fluide non-newtonien à loi puissance dans un canal plan."  
Inzhener Fiz. Zh. Belorus SSR, SSSR, vol. 26, pp. 245-251 (1974)
- [44] PAVLOV K.B., VISHNYAKOV V.I., ROMANOV A.S.  
"Peristaltic flow of a non-newtonien viscoplastic liquid in a slot channel."  
J. Eng. Phys. vol. 31, pp. 1078-1082 (1976)
- [45] POLISHCHUK G.I.  
"Ecoulement de liquide dû au mouvement ondulatoire des parois d'une conduite."  
Akust. Zhdanova SUN, vol. 26, n°3, pp. 440-445 (1980)

- [46] RATH H.J.  
"Ein Beitrag zur Berechnung einer peristaltischen Strömung in elastischen Leitungen."  
Acta Mechanica, vol. 31, p. 1-12 (1978)
- [47] SHAPIRO A.H.  
"Pumping and retrograde diffusion in peristaltic waves."  
Proc. Workshop Ureteral Reflux Children, Nat. Acad. Science  
Washington D.C. (1967)
- [48] SHAPIRO A.H., JAFFRIN M.Y., WEINBERG J.L.  
"Peristaltic pumping with long wavelength at low Reynolds numbers."  
J. Fluid. Mechanics, vol. 37, pp. 799-825 (1969)
- [49] SHAPIRO A.H., JAFFRIN M.Y., WEINBERG J.L.  
"Reflux and trapping phenomena in peristaltic pumping."  
Proc. of 22rd annual conference on engineering in medicine  
and biology (1969)
- [50] SHEN M.C.  
"Asymptotic theory for peristaltic transport in a tube of arbitrary cross-section."  
Physics of fluids, vol. 19, n°2, pp. 213-218 (1976)
- [51] SHEN M.C., SHIH S.M.  
"Comments on Asymptotic theory for peristaltic transport in a tube of arbitrary cross-section."  
Physics of fluids, vol. 21, n°9, pp. 1663-1664 (1978)
- [52] SHEN M.C., SHIH S.M., WU A.M.  
"Asymptotic method for peristaltic transport."  
Bull. of math. Biology, vol. 42, pp. 305-326 (1980)

- [53] SHUKLA J.B., PARIHAR R.S., RAO B.R.P., GUPTA S.P.  
"Effects of peripheral layer viscosity on peristaltic transport of a biofluid."  
J. Fluid. Mechanics, vol. 97, n°2, pp. 225-237 (1980)
- [54] SIMHAN K.H.  
"Über ein theoretisches modell zur erfassung der peristaltischen transport organges"  
in Lutzeyer W., Melchior H., Ureterdynamik, pp. 60-63,  
Geoerg Thieme Verlag, Stuttgart (1971)
- [55] TIN KAN HUNG, BROW T.D.  
"Solid-particle motion in two-dimensional peristaltic flows."  
J. Fluid. Mechanics, vol. 73, n°1, pp. 77-96 (1976)
- [56] TIN KAN HUNG, BROWN T.D.  
"Computational and experimental investigations of two-dimensional peristaltic flows"  
J. Fluid. Mech. vol. 83, n°2, pp. 249-272 (1977)
- [57] TONG P., VAWTER D.L.  
"An analysis of peristaltic pumping."  
J. Applied. Mechnics, vol. 39 pp. 857-862 (1972)
- [58] UTKIN A.V., STAROBIN I.M., ZAIJO V.M.  
"Simulation numérique du mouvement péristaltique dans un tube à paroi déformée selon une loi harmonique."  
Mech. compos. Mater. 15, pp. 301-307 (1979)
- [59] VAWTER D.L.  
"A finite element approach to peristaltic pumping."  
S.M. Thesis, dept. of Aeronautics and Astronautics,  
Massachussets Institute of Technology (1970)

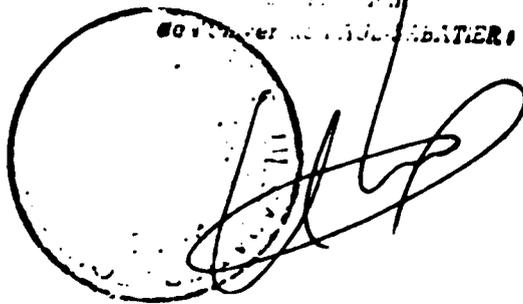
- [60] WEINBERG S.L.  
"A theoretical and experimental treatment of peristaltic pumping and its relation to ureteral function."  
Ph. D. Thesis M.I.T. Cambridge-Massachussets (1970)
- [61] WEINBERG S.L., ECKSTEIN E.C., SHAPIRO A.H.  
"An experimental study of peristaltic pumping."  
J. Fluid. Mechanics, vol. 49, pp. 267-479 (1971)
- [62] WEINBERG S.L., JAFFRIN M.Y., SHAPIRO A.H.  
"Hydrodynamical model of ureteral function."  
in Urodynamics ed. par J. Boyarsky, C.W. Gottschalk  
E.A. Tanagho et P.D. Zimsking, Academic Press. pp. 217-  
232 (1971)
- [63] WILSON D.E.  
"An investigation of peristaltic pumping with wind energy applications."  
Ph.D. dissertation, University of Texas-Austin (1976)
- [64] WILSON D.E.  
"Peristaltic pumping by a lateral bending wave."  
Proc. A.S.M.E. Bioengineering symposium Atlanta-Georgia  
(1977)
- [65] WILSON D.E., PANTON R.L.  
"Peristaltic transport due to finite amplitude bending and contraction waves."  
J. Fluid. Mechanics, vol. 90, n°1, pp. 145-159 (1979)
- [66] ZEGGWAGH G.  
"Etude rhéologique de fluides biologiques. Cas du sang :  
1ère partie."  
Thèse de 3ème cycle présentée à l'Université Paul Sabatier  
Toulouse (1980), n° d'ordre 2362

[67] ZIEN T.F., OSTRACH S.

"A long-wave approximation to peristaltic motion."

J. Biomechanics, vol. 3, pp. 63-75 (1970)

Autorisation de franchise accordée  
TOURNAI le 20 Mars 1901



J.-C. MARTIN