

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MENTOURI CONSTANTINE
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR
DÉPARTEMENT D'ÉLECTRONIQUE

THÈSE

Présentée pour obtenir le diplôme de

Doctorat es sciences

**MODELISATION DES ANTENNES MICROBANDES PAR UNE
ANALYSE TRIDIMENSIONNELLE RIGOUREUSE EN
UTILISANT UNE METHODE INTEGRALE**

Option: Micro-ondes

Présentée et soutenue publiquement

Par

Djamel KHEDROUCHE

Devant le jury:

Président :	S. Lassouad	Professeur	Université de Constantine
Rapporteur :	A. Benghalia	Professeur	Université de Constantine
Examineurs :	D. Benatia	Professeur	Université de Batna
	A. Chaabi	Professeur	Université de Constantine
	F. Djefel	Maître de Conférences	Université de Batna

Juin 2009

Dédicaces

*A mes parents,
à ma femme,
à mon fils et ma fille,
à ma famille,
à mes amis.*

Djamel

Remerciements

Avant tout, j'adresse mes remerciements en premier lieu, à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé, le courage et la patience qu'il m'a donné durant toutes ces longues années de formation.

Je tiens à remercier Mr. BENGHALIA Abdelmadjid, Professeur à l'Université de Constantine, pour avoir accepté de diriger cette thèse, pour les conseils qu'il m'a prodigué et pour les efforts qu'il a consenti tout au long de la réalisation de ce travail, qu'il trouve ici toute ma gratitude et ma reconnaissance.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Mme LASSOUAD Saida, Professeur à l'Université de Constantine, d'avoir accepté de présider le jury de ma thèse.

Mes remerciements vont également à Mr. BENATIA Djamel, Professeur à l'Université de Batna, à Mr. CHAAIBI Abdelhafid, Professeur à l'Université de Constantine et à Mr. DJEFFEL Faysal, Maître de conférences à l'Université de Batna, qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de ma thèse et examiner ce travail

Que Mr. F. BOUTTOUT, Maître de Conférences à l'Université de M'sila et T. FORTAKI, Maître de conférences à l'université de Batna, trouvent ici l'expression de mes sincères remerciements pour les discussions enrichissantes que nous avons partagé tout au long de ce travail, leur esprit d'équipe, leur disponibilité et leur savoir m'on été d'un apport considérable.

Enfin je ne voudrais pas oublier de remercier toute personne qui m'a aidé de loin ou de près à réaliser ce travail.

Merci...

Djamel

Table des matières

<i>Dédicaces</i>	<i>i</i>
<i>Remerciements</i>	<i>ii</i>
<i>Table des matières</i>	<i>iii</i>
<i>Liste des Tableaux</i>	<i>v</i>
<i>Liste des Figures</i>	<i>vi</i>
<i>Résumé</i>	<i>xiii</i>
<i>Abstract</i>	<i>ix</i>
<i>Résumé en arabe</i>	<i>x</i>
Introduction Générale	1
1 Introduction	1
2 Organisation de la thèse.....	2
1 Méthode d'analyse des antennes microbandes cylindriques	4
1. 1 Introduction	5
1. 2 Antennes microbandes cylindriques.....	6
1. 3 Théorie du modèle de la ligne d transmission généralisé.....	7
1. 4 Méthde de la cavité.....	8
1. 5 L'approch full-wave	10
2 Formulation mathématique du problème	12
2. 1 Equation du champ électromagnétique dans un milieu diélectrique de forme cylindrique ..	13
2. 2 Matrice de transfert (ABCD) associée à une couche diélectrique cylindrique.	18
2. 3 Relations entre les champs tangentiels dans la région d'air	21
2. 4 Fonction de Green d'un patch rectangulaire noyé dans milieu stratifié cylindrique. ...	27
2. 5 Formulation de l'équation intégrale du champ électrique	33
2. 6 Résolution de l'équation intégrale par la méthode des moments/procédure de Galerkin.....	34
2. 7 Choix du système de fonctions de base.....	39
2. 7.1 Premier choix : sinus & cosinus sans condition du bord	40
2. 7.2 Deuxième choix : sinus & cosinus avec la condition du bord	43
2. 7.3 Troisième choix : polynômes de chebyshev avec la condition de bord	49
2. 8 Expressions finales des éléments de la matrice des moments	52
2. 8.1 Premier type de courant.....	55
2. 8.2 Troisième type de courant	60
3 Champs rayonnés lointains	66
3. 1 Calcul du champ rayonné lointain pour une structure microbande cylindrique par la la méthode de la phase stationnaire	67
3. 2 Calcul des coefficients a_v^e, a_v^h	78

4 Résultats et discussions82
4. 1 Introduction83
4. 2 Evaluation numérique des éléments de la matrice des moments.....	.83
4. 3 Convergence des résultats numériques.....	84
4. 4 Comparaison et discussion des résultats numériques.....	.86
4. 5 Effet de l'air gap sur les caractéristiques de l'antenne microbande cylindrique	103
 Conclusions et Perspectives	 111
 Annexe A . Relations de symétrie en (ν, k_z) .du tenseur spectral du Green et des courants	 114
A1 Introduction.....	114
A2 Etude de symétrie en (ν, k_z) du tenseur spectrale de Green.....	114
A2. 1. Etude de symétrie en (ν, k_z) de T.....	114
A2. 2. Etude de la symétrie en (ν, k_z) de M_0	118
A3 Etude de symétrie en (ν, k_z) des courants (fonctions de base).....	120
A3. 1. Premier type : sinus & cosinus sans la condition du bord	120
A3. 2. Deuxième type : sinus & cosinus avec la condition du bord	122
A3. 3. Troisième type : polynômes de chebyshev avec la condition de bord.....	124
 Bibliographie.	 126

Liste des Tableaux

3. 1 Fréquence de résonance avec différents types et nombre de

fonctions de base en fonction de l'épaisseur du substrat;

$a = 20$ cm, $L = 4$ cm, $b\phi_0 = 8.4$ cm, $\epsilon_{2r} = 2.3$14

Liste des Figures

1. 1	Géométrie d'une antenne microbande avec un patch de forme arbitraire.....	9
1. 2	Structure de base des antennes microbandes cylindriques alimentées par câble coaxial.....	10
1. 3	Circuits équivalents sur les théories MLT et MLTG : (a) modèle MLT et (b) modèle MLTG pour une antenne microbande planaire alimentée par câble coaxial.....	10
2. 1	Représentation d'une couche diélectrique annulaire cylindrique.....	16
2. 2	Géométrie d'un patch rectangulaire noyé dans un milieu stratifié cylindrique.....	18
4. 1	Chemin d'intégration dans le plan k_z	20
4. 2	Partie imaginaire de la fréquence de résonance normalisée en fonction de l'épaisseur du substrat, $a = 20$ cm, $L = 4$ cm, $b\phi_0 = 8.4$ cm, $\varepsilon_{2r} = 2.3$	20
4. 3	Bande passante en fonction de l'épaisseur du substrat pour la structure de la Figure 4.2.....	31
4. 4	Fréquence de résonance en fonction de l'épaisseur de la couche protectrice pour $\varepsilon_{3r} = 2.3, 4$ et 5.6 , $a = 20$ cm, $h = 0.4$ cm, $\varepsilon_{2r} = 2.3$, $L = 4$ cm, $b\phi_0 = 8.4$ cm.....	32
4. 5	Diagramme de résonance autour de la résonance en fonction de θ , mode HE0 ($ E_\theta $), dans le plan $\phi = 0^\circ$ pour $f = 1.2$ GHz. $\varepsilon_{2r} = 2.3$, $a = 10$ cm, $h = 2$ mm, $L = 4$ cm et $\phi_0 = 24^\circ$	33
4. 6	Diagramme de rayonnement autour de la résonance en fonction de θ , mode HE10 ($ E_\phi $), dans le plan $\phi = 0^\circ$ pour $f = 1.2$ GHz. $\varepsilon_{2r} = 2.3$, $a = 10$ cm, $h = 2$ mm, $L = 4$ cm et $\phi_0 = 24^\circ$	34
4. 7	Diagramme de rayonnement normalisé autour de la résonance pour le mode HE10 ($ E_\phi $), fonction de ϕ dans le plan $\theta = 90^\circ$, à la fréquence $f = 1.2$ GHz. $\varepsilon_{2r} = 2.3$, $a = 10$ cm, $h = 2$ mm, $L = 4$ cm, $\phi_0 = 24^\circ$	35
4. 8	Diagramme de rayonnement normalisé autour de la résonance pour le mode HE11 ($ E_\theta $), fonction de ϕ dans le plan $\theta = 90^\circ$, à la fréquence $f = 1.7$ GHz. $\varepsilon_{2r} = 2.3$, $a = 10$ cm, $h = 2$ mm, $L = 4$ cm, $\phi_0 = 24^\circ$	36
4. 9	Diagramme de rayonnement normalisé autour de la résonance pour le mode HE11 ($ E_\phi $), en fonction de θ dans le plan $\phi = 0^\circ$, à la fréquence $f = 1.7$ GHz. $\varepsilon_{2r} = 2.3$, $a = 10$ cm, $h = 2$ mm, $L = 4$ cm, $\phi_0 = 24^\circ$	37
4. 10	Diagramme de rayonnement pour le mode HE01 dans le plan x-y en fonction	

	du rayon du cylindre $\epsilon_{2r} = \epsilon_{3r} = 2.32$, $h = 0.795$ mm, $2L = 3$ cm, $2b\phi_0 = 4$ cm , $t = 0$	37
4. 11	Diagramme de rayonnement pour le mode HE01 dans le plan x-y en fonction du rayon du cylindre $\epsilon_{2r} = \epsilon_{3r} = 2.32$, $h = 0.795$ mm, $2L = 3$ cm, $2b\phi_0 = 4$ cm , $t = 3h$	38
4. 12	Diagramme de rayonnement pour le mode HE01 dans le plan x-y pour différentes épaisseurs de la couche protectrice. $\epsilon_{2r} = \epsilon_{3r} = 2.32$, $h = 0.795$ mm, $2L = 3$ cm, $2b\phi_0 = 4$ cm	39
4. 13	Diagramme de rayonnement pour le mode HE01 dans le plan x-y pour différents rayons du cylindre. $\epsilon_{2r} = \epsilon_{3r} = 2.32$, $h = 0.795$ mm, $2L = 3$ cm, $2b\phi_0 = 4$ cm	39
4. 14	Diagramme de rayonnement normalisé dans le plan horizontal $f(\phi, \theta = \pi/2)$, pour un patch mince et pour différents rayons du cylindre.....	40
4. 15	Diagramme de rayonnement normalisé dans le plan horizontal $f(\phi, \theta = \pi/2)$, pour un patch large et différents rayons du cylindre.....	40
4. 16	Géométrie d'une structure d'antenne microbande cylindrique avec un air gap.....	46
4. 17	Partie réelle de la fréquence de résonance complexe en fonction de l'épaisseur d'air gap; $a = 20$ cm, $\epsilon_{3r} = 2.3$, $h = 2.4$ mm, $\epsilon_{2r} = 1.0$ (air gap) , $2L = 8$ cm, $2c\phi_0 = 16.8$ cm	47
4. 18	Partie imaginaire de la fréquence de résonance complexe en fonction de l'épaisseur d'air gap pour le cas de la Figure 4.17.....	47
4. 19	Bande passante en fonction de l'épaisseur d'air gap pour le cas de la Figure 4.17.....	48
4. 20	Diagramme de rayonnement pour le mode HE01 dans le plan x-y (plan H) en fonction de l'épaisseur de l'air-gap. $a = 20$ cm, $\epsilon_2 = 2.3$, $h = 2.4$ mm, $\epsilon_1 = 1.0$ (air gap) , $2L = 8$ cm, $2c\phi_0 = 16.8$ cm	50
4. 21	Diagramme de rayonnement pour le mode HE01 dans le plan y-z (plan E) en fonction de l'épaisseur de l'air-gap. $a = 20$ cm, $\epsilon_2 = 2.3$, $h = 2.4$ mm, $\epsilon_1 = 1.0$ (air gap) , $2L = 8$ cm, $2c\phi_0 = 16.8$ cm	51

Résumé

Dans ce travail, la résonance et les caractéristiques de rayonnement d'une antenne microbande cylindrique multicouches sont analysées. Le problème est formulé dans le domaine spectral en utilisant l'équation intégrale du champ électrique et la fonction dyadique de Green dans le plan spectral. Une méthode efficace et compacte est développée pour obtenir la fonction de Green du champ électrique due à la distribution de courant d'un patch rectangulaire noyé dans un milieu stratifié cylindrique. Pour effectuer cette tâche, des représentations matricielles compactes ont été utilisées pour décrire le champ électrique et magnétique dans chaque couche en fonction des matrices ABCD. L'équation intégrale du courant inconnu du patch est résolue numériquement en appliquant la méthode des moments/procédé de Galerkin et en utilisant trois types de fonctions de base. Tenant compte des propriétés de symétrie des éléments de la matrice des moments, le temps de calcul est considérablement réduit. La convergence de la méthode est prouvée en donnant les fréquences de résonance d'une antenne microbande cylindrique monocouche en fonction de l'épaisseur du substrat. Les résultats obtenus sont en très bon accord avec ceux trouvés dans la littérature en utilisant seulement deux fonctions de base. Une fois la méthode est validée, d'autres résultats, pour une variété de structures d'antennes microbandes cylindriques, sont présentés prouvant la généralité de la méthode. Finalement, l'effet de l'air gap sur le diagramme de rayonnement de l'antenne microbande cylindrique est étudié en utilisant la méthode de la phase stationnaire.

Abstract

In this work, the resonance and radiation characteristics of multilayered cylindrical-rectangular microstrip antennas are analysed. The problem is formulated, in the spectral-domain, using an electric field integral equation and the spectral-domain Green's function. An efficient compact method is developed to obtain the Green's function of the electric field due to the current distribution of a patch located in an arbitrary layer of a cylindrical stratified medium. To accomplish this, efficient matrix representations are used to describe the electric and magnetic fields in each layer of the geometry in terms of *ABCD* matrices characteristic of its material properties. The integral equation for the unknown patch current is solved numerically by applying the Galerkin's moment method using three kinds of basis functions. Taking into account the symmetry properties of the elements of the moment method matrix, the CPU time is reduced significantly. The convergence of the method is proven by performing the resonant frequencies for a single layer cylindrical-rectangular microstrip patch versus the substrate thickness. The computed data are found to be in very good agreement with those found in the literature, using only two basis functions. Once the validity of the method is checked, further results for various antennas structures are presented proven the generality of the method. Finally, the effect of an air gap between the substrate layer and the ground conducting cylinder on far zone radiation field is investigated using the steepest-descent method.

ملخص

في هذا العمل، ذي ائلهو الإشعاع خصائص و للتجاوب تحلييلة بدراسة نقوم مدقق شريط اسطواني و متعدد الطبقات. لاستخلاص نموذج رياضي ملائم للهوائي، تم حساب المعادلة التكاملية للحقل الكهربائي في مجال الأطياف. تم استخلاص طريقة فعالة و متماسكة لأجل الحصول على دالة قرين للحقل الكهربائي الناتج عن توزيع الكهربائي التيار لعنصر مشع مستطيل الشكل متواجد في وسط متعدد الطبقات و اسطواني الشكل. ثم استعملنا طريقة العزوم و منهجية جالركين لحل المعادلة التكاملية باستعمال ثلاثة أنواع من دوال الأساس. استغللنا خاصية التناظر لعناصر مصفوفة العزوم لتقليص بشكل كبير زمن الحساب الرقمي. برهن على تقارب النموذج المقدم بتقديم تواترات التجاوب لهوائي ذي شريط مدقق اسطواني ذي طبقة واحدة بدلالة سمك الطبقة العازلة. تقارب واضح ثم الحصول عليه عند مقارنة نتائجنا بالنتائج المنشورة في المراجع. بعد التأكد من نجاعة الطريقة المقترحة ثم تقديم نتائج مختلفة لمجموعة متنوعة من الهوائيات ذوات الشريط المدقق و الاسطوانية الشكل. و أخيرا درسنا تأثير طبقة عازلة هوائية على دالة الإشعاع لهوائي ذي شريط مدقق اسطواني باستعمال طريقة الصفحة الساكنة.

Introduction Générale

1 INTRODUCTION

Nombreuses applications des antennes microbandes telles que ; les avions à grande vitesse, les vaisseaux spatiaux, les communications mobiles, la télédétection et les éléments rayonnants dans les applications biomédicales, nécessitent qu'elles soient adaptées aux surfaces courbées.

Grâce à leur popularité, les antennes microbandes cylindriques à patch rectangulaire est le type d'antenne non planaire la plus utilisée. Dans le passé, des méthodes empiriques et analytiques on été utilisées pour étudier les antennes microbandes cylindriques. Parmi ces méthodes, on cite la méthode de la ligne de transmission et la méthode de la cavité. A présent, ces antennes sont analysées intensivement par une variété de méthodes rigoureuses telles que ; la méthode des éléments finis, la méthode des sources auxiliaires, la méthode des moments, etc..

Durant les deux dernières décades, plusieurs travaux on été rapportés portant sur l'antenne microbande cylindrique monocouche et avec une couche protectrice. Dans ces travaux des résultats concernant la fréquence de résonance, l'impédance d'entrée et le diagramme de rayonnement pour des patches panoramique et rectangulaire ont été rapportés. Récemment, des travaux qui portent sur le diagramme de rayonnement et la directivité, d'une antenne microbande cylindrique à patch rectangulaire comportant quatre couches, on été publiés où le modèle du courant électrique surfacique était utilisé.

Les études su-mentionnées sont valables seulement pour la structure considérée d'antenne microbande cylindrique. Par conséquent, il est intéressant de développer une méthode full-wave applicable à des structures microbandes cylindriques contenant un nombre quelconque de couches avec une position arbitraire du patch rectangulaire.

Dans cette thèse, une solution efficace utilisant la méthode spectrale pour l'analyse d'une antenne microbande cylindrique multicouche, et avec une position arbitraire du patch

rectangulaire, est présentée. La méthode est basée sur les concepts de l'équation intégrale du champ électrique (EFIE) et la fonction dyadique spectrale de Green. Des représentations matricielles compactes, pour décrire le champ électrique et le champ magnétique dans chaque couche en fonction des matrices ABCD qui caractérisent les propriétés électromagnétiques de la couche considérée, ont été utilisées. L'équation intégrale du champ électrique est formulée en imposant les conditions aux limites appropriées à l'interface du patch. Le procédé de Galerkin de la méthode des moments est appliqué dans le domaine de Fourier pour résoudre l'équation intégrale numériquement. Les éléments de la matrice des moments sont représentés par une série infinie et une intégrale impropre. La symétrie des éléments de la matrice impédance, par rapport au nombre d'onde et au nombre azimutal, est utilisée pour augmenter l'efficacité numérique et réduire le temps de calcul. La fréquence de résonance complexe de la structure est calculée en annulant le déterminant de la matrice des moments.

Le champ rayonné en zone lointaine est calculé en utilisant la méthode de la phase stationnaire. La convergence de la méthode est vérifiée en utilisant trois types de fonctions de base. Des résultats numériques concernant la fréquence de résonance complexe, la bande passante et le diagramme de rayonnement sont présentés, pour différentes configurations d'antenne microbande cylindrique. Une confrontation de nos résultats à ceux disponibles dans la littérature nous permettra de valider la méthode proposée. Enfin, l'effet de la présence de l'air gap sur le diagramme de rayonnement de l'antenne microbande cylindrique est analysé. Cette analyse est justifiée par le fait qu'à notre connaissance cette étude n'a pas été rapportée dans la littérature ouverte.

2 ORGANISATION DE LA THESE

Cette thèse est organisée en quatre chapitres:

Dans le premier chapitre, nous présentons brièvement le concept des antennes microbandes, notamment de forme cylindrique. Ensuite, nous exposons sommairement les différentes méthodes d'analyse des antennes microbandes cylindriques. Le modèle de la ligne de transmission généralisé, le modèle de la cavité et enfin la méthode Full-wave sont ainsi brièvement expliqués

Dans le deuxième chapitre, nous présentons en détail la formulation mathématique du problème. Nous commençons par trouver la matrice de transfert ABCD associée à une couche diélectrique cylindrique. Ensuite, nous calculons la fonction spectrale dyadique de Green d'un patch rectangulaire noyé dans milieu stratifié cylindrique. Après la formulation de l'équation intégrale du champ électrique, nous utilisons la méthode des moments/procédé de Galrkin pour résoudre le système d'équations homogène résultant. Enfin, en utilisant un choix judicieux des fonctions de base et en profitant des propriétés de symétrie, nous écrivons dans une forme simplifiée les éléments de la matrice des moments.

Dans le troisième chapitre, nous détaillons les calculs pour l'obtention du champ électromagnétique lointain pour une structure microbande multicouches cylindrique. Pour ce faire, nous utilisons la méthode de la phase stationnaire pour arriver à des expressions de champs en fonction des coefficients a_v^e , a_v^h . Enfin, nous exprimons ces derniers coefficients en fonction de la fonction de Green et du courant surfacique sur le patch.

Dans le quatrième chapitre, nous commençons par expliquer comment on contourne le problème des singularités caractérisants les intégrandes des éléments de la matrice des moments. Ensuite, nous menons une étude de convergence des résultats numériques. Pour valider nos résultats, nous donnons une série de résultats qui concernent plusieurs configurations d'antenne microbande cylindrique, en les comparant avec des résultats de la littérature. Enfin, nous présentons une étude sur l'effet de l'air gap sur le diagramme de rayonnement de l'antenne microbande cylindrique.

Chapitre 1

Méthodes d'analyse des antennes microbandes cylindriques

1.1 INTRODUCTION

Le concept d'antenne microbande a été proposé pour la première fois dans les années 1950. Dès le début des années 1970 et grâce au développement de la technologie des circuits imprimés plusieurs applications d'antennes microbandes, montées sur des avions et missiles, ont été réalisées [1], [2]. La Figure 1.1 montre la géométrie de base d'une antenne microbande : un patch métallique imprimé sur un substrat diélectrique posé sur un plan de masse. En théorie le patch peut prendre n'importe quelle forme, mais dans des applications pratiques, les formes rectangulaire et circulaire sont les plus utilisées. Grâce à sa géométrie simple, l'antenne microbande offre beaucoup d'avantages attractifs, tels que volume et épaisseur réduits, poids léger, fabrication facile, intégrabilité avec des circuits intégrés micro-onde et à ondes millimétriques et conformabilité aux surfaces courbées. Parmi ces avantages, la conformabilité est l'avantage le plus important pour des applications futures des antennes microbandes.

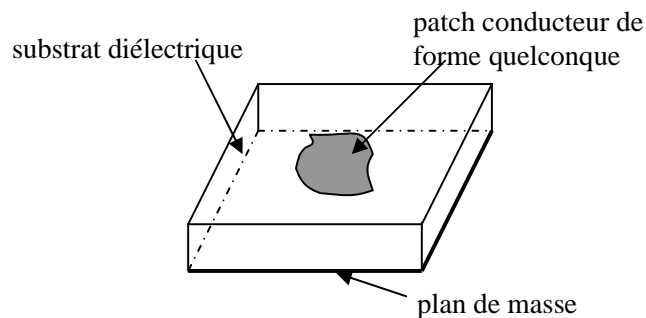


FIGURE 1.1 Géométrie d'une antenne microbande avec un patch de forme arbitraire

En effet, de nombreuses applications pratiques pour les antennes microbandes, telles que ; l'aviation, les vaisseaux spatiaux, les communications par satellites, la télédétection et les applications biomédicales, exigent qu'ils soient conformés aux surfaces non-planaires [3], [4].

Après plus de trois décades de recherche, beaucoup de travaux ont été rapportés sur les antennes microbandes planaires [5]-[10] et leur développement a atteint maintenant la maturité. Cependant, le progrès de recherche concernant les antennes non-planaires est toujours d'actualité. Durant la dernière décennie plusieurs travaux théoriques sur les

antennes microbandes conformées aux surfaces courbées, tels que les surfaces cylindriques, sphériques et coniques, ont été rapportés. Parmi celles-ci, les antennes microbandes cylindriques sont les plus populaires et par conséquent les plus étudiées.

1.2 ANTENNES MICROBANDES CYLINDRIQUES

Les structures de base des antennes microbandes cylindriques alimentées à travers une sonde coaxiale sont montrées dans la Figure 1.2, où différentes formes de patch sont montrées : rectangulaire, circulaire, annulaire, triangulaire et panoramique. L'alimentation par câble coaxial a l'avantage de ne pas avoir de pertes de rayonnement dues au courant du câble coaxial et elle représente aussi la géométrie la plus simple pour l'analyse théorique et la fabrication. Les formes rectangulaire et circulaire sont les configurations les plus utilisées pour des applications générales [1].

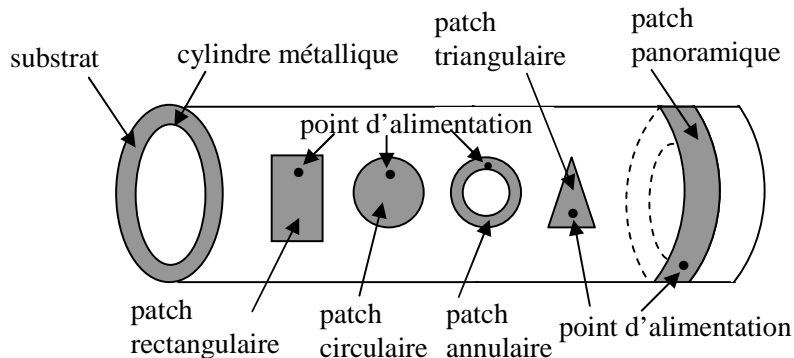


FIGURE 1.2 Structure de base des antennes microbandes cylindriques alimentées par câble coaxial

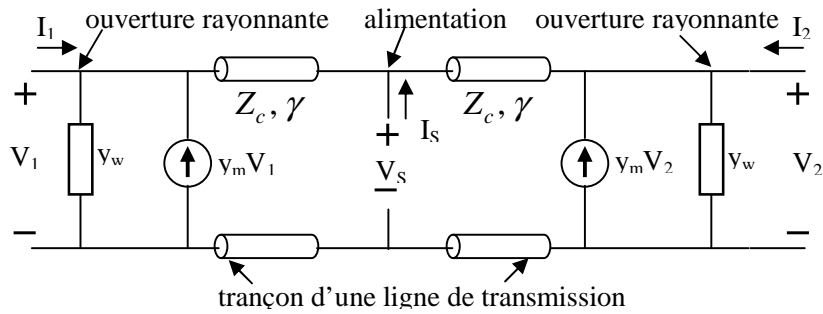
Plusieurs techniques théoriques, telles que l'approche full-wave, le modèle de la cavité et la méthode de la ligne de transmission généralisée, ont été rapportées pour l'analyse des antennes microbandes cylindriques [11]-[44]. Parmi ces méthodes, l'approche rigoureuse dite full-wave est numériquement inefficace et une prudence particulière dans l'implémentation numérique est toujours demandée. L'analyse par la méthode full-wave devient plus difficile pour des antennes microbandes cylindriques ayant un rayon de cylindre grand (i.e., cas de

petite courbure). Cependant, les solutions obtenues par le modèle full-wave sont plus exactes et sont applicables à des substrats épais. Quant à l'analyse par le modèle de la cavité et celui de la ligne de transmission, le développement théorique et l'implémentation numérique sont plus simples que ceux réalisés par l'approche full-wave. Cependant, ces deux approches simples sont limitées au cas du substrat mince [11]-[12].

1.3 THEORIE DU MODELE DE LA LIGNE DE TRANSMISSION GENERALISEE

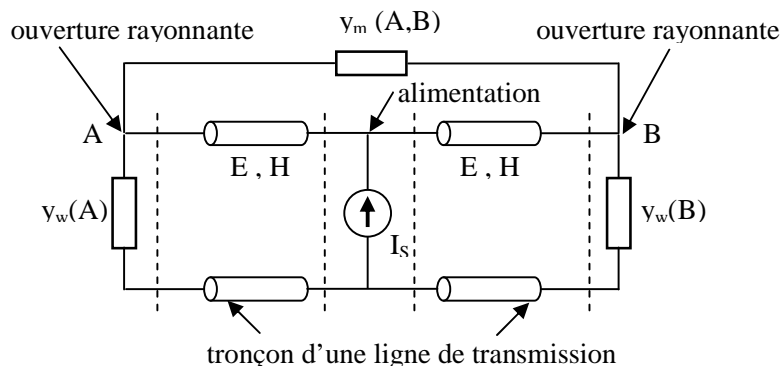
Le traitement théorique basé sur le modèle de la ligne de transmission (MLT) était le premier, et le plus simple, modèle utilisé pour l'analyse et la conception des antennes microbandes. Malgré que la méthode MLT soit relativement simple, l'exactitude de l'analyse par la méthode MLT peut être comparée à d'autres méthodes plus complexes [13]. La méthode MLT donne aussi des résultats assez exacts pour l'analyse du couplage mutuel entre des antennes microbandes rectangulaires. Cependant le modèle MLT dans sa version originale est seulement applicable pour des antennes microbandes planaires ayant une forme de patch rectangulaire ou carrée. Pour contourner ce problème, une méthode de la ligne de transmission généralisée (MLTG) est proposée [14], où les paramètres de la ligne sont les champs électromagnétiques sous le patch. Dans ce cas, dans la limite où la séparation des variables est possible pour l'équation d'onde exprimée dans ce système de coordonnées particulier, La méthode MLTG est applicable aux antennes microbandes de forme de patch quelconque. L'extension de la théorie MLTG aux antennes microbandes à substrat épais est aussi possible. Dans la méthode MLT, les paramètres de la ligne de transmission sont l'impédance caractéristique et la constante de propagation effective. Les circuits équivalents d'une antenne microbande planaire rectangulaire alimentée par une sonde coaxiale, basés sur les méthodes MLT et MLTG, sont montrés dans la Figure 1.3 pour la comparaison. Dans la théorie MLTG, le patch rectangulaire est modélisé par un tronçon d'une ligne de transmission ayant deux bords rayonnants. L'effet des autres ouvertures est considéré comme des pertes de la ligne de transmission. La ligne de transmission peut être à nouveau séparée en deux tronçons par la position d'alimentation, chaque tronçon de la ligne peut être remplacée par un réseau équivalent chargé par un mur d'admittance y_w , au niveau des bords rayonnants ; y_m désigne l'admittance mutuelle entre deux bords rayonnants. Lorsque les

expressions pour ces éléments de circuit sont calculées, l'impédance d'entrée vue au point d'alimentation peut être aisément calculée.



paramètres de la ligne de transmission (Z_c, γ) : Z_c = impédance caractéristique
 γ = constante de propagation effective

(a)



paramètres de la ligne de transmission (E, H) : E = champ électrique sous le patch
H = champ magnétique sous le patch

(b)

FIGURE 1.3 Circuits équivalents basés sur les théorie MLT et MLTG : (a) modèle MLT et (b) modèle MLTG pour une antenne microbande planaire rectangulaire alimentée par sonde coaxial

1.4 METHODE DE LA CAVITE

Le modèle de la cavité proposé par Lo et al. [15] offre la simplicité et la visibilité physique dans l'analyse des antennes microbandes. Ce modèle est valide lorsque l'épaisseur du

substrat est beaucoup plus petite que la longueur d'onde du travail et il est basé sur les observations suivantes :

1. La proximité entre le patch et le plan de masse suggère que pour une structure microbande cylindrique, le champ électrique possède seulement une composante en $\hat{\rho}$ et le champ magnétique deux composantes en $\hat{\phi}$ et \hat{z} dans la région entre le patch et le plan de masse.
2. Le champ dans la région su-citée est indépendant de la coordonnée ρ pour la fréquence considérée.
3. Le courant électrique sur le patch ne possède pas une composante normale au bord pour n'importe quel point du bord du patch, ce qui implique une composante du champ magnétique négligeable le long du bord.

Par conséquent, la région entre le patch et le cylindre métallique peut être considérée comme une cavité délimitée par des murs électrique par le haut et le bas et entourée par des murs magnétiques autour du périmètre de la cavité. En se basant sur l'approximation de la cavité, les fréquences de résonance pour le mode TM_{mn} pour l'antenne microbande rectangulaire et circulaire sont données comme suit : Pour le patch rectangulaire,

$$f_{mn} = \frac{c}{2\sqrt{\epsilon_1}} \left[\left(\frac{m}{2W} \right)^2 + \left(\frac{n}{2L} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (1.1)$$

Et pour le patch circulaire,

$$f_{mn} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\epsilon_1}} k_{mn}, \quad (1.2)$$

où c est la vitesse de la lumière et ϵ_1 est la permittivité relative du substrat ; $2L$ et $2W$ sont, respectivement, la longueur et la largeur du patch rectangulaire ; k_{mn} satisfait $J'_m(k_{mn}a) = 0$, où

$J_m(x)$ est la fonction de Bessel du premier type et d'ordre m , a est le rayon du patch circulaire, et le prime désigne la dérivée.

Les champs à l'intérieure de la cavité peuvent être alors exprimés en fonction de modes discrets satisfaisant individuellement les conditions aux limites appropriées. Une fois les champs à l'intérieure de la cavité sont connus, le champ rayonné peut être obtenu à partir de la distribution de courant effective magnétique sur le mur magnétique. Après l'obtention des champs de la cavité et le champ rayonné, le diagramme de rayonnement, la puissance rayonnée totale et l'impédance d'entrée peuvent être calculés.

1.5 L'APPROCHE FULL-WAVE

Dans ce paragraphe, on va donner une description brève de la méthode full-wave pour le cas d'alimentation coaxiale d'une antenne microbande cylindrique [1]. Pour commencer, on assume que le cylindre de masse et l'élément rayonnant son considérés comme des conducteur parfaits et l'épaisseur du patch est négligeable comparée à la longueur d'onde d'opération. Alors le patch peut être remplacé par une distribution de courant surfacique inconnue, qu'on doit solutionner, dans la région de l'élément rayonnant. En notant que le rayon du câble coaxial d'alimentation est généralement très inférieur à la longueur d'onde, le câble peut être modélisé par une source de courant linéique d'amplitude unité. Pour calculer la densité de courant surfacique, on utilise la condition au limite qui stipule que le champ électrique tangentiel, à la surface du patch, total doit être nul ; soit, sur le patch,

$$\hat{\rho} \times [\mathbf{E}^D(\phi, \mathbf{z}) + \mathbf{E}^P(\phi, \mathbf{z})] = 0, \quad (1.3)$$

où $\mathbf{E}^D(\phi, \mathbf{z})$ est le champ électrique du au courant de patch et $\mathbf{E}^P(\phi, \mathbf{z})$ est le champ électrique du au câble en l'absence du patch. Pour dériver $\mathbf{E}^D(\phi, \mathbf{z})$, la technique de formulation théorique menée dans [16] peut être appliquée et elle donne

$$\begin{bmatrix} E_\phi^D(\phi, z) \\ E_z^D(\phi, z) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{jq\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ik_z z} \tilde{\tilde{G}}(q, z) \begin{bmatrix} \tilde{J}_\phi(q, k_z) \\ \tilde{J}_z(q, k_z) \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

où $\tilde{\tilde{G}}(q, z)$ est la fonction dyadique de Green dans le domaine spectral pour le substrat cylindrique et $\tilde{J}(q, k_z)$ est la transformée de Fourier de la densité de courant sur le patch ; le tilde dénote une transformée de Fourier. Les indices ϕ et z dénote, respectivement, les composantes du champ dans les directions ϕ et z .

Pour $\mathbf{E}^P(\phi, \mathbf{z})$, il faut d'abord calculer l'expression du champ due à une source de courant ponctuelle noyée dans un milieu stratifié. Ensuite, en écrivant les conditions aux limites sur le plan de masse cylindrique et à l'interface substrat-air, et après quelques manipulations, sommant les contributions du champ dues aux sources ponctuelles de la source de courant linéique, une expression de $\mathbf{E}^P(\phi, \mathbf{z})$ peut être dérivée ayant la forme d'une équation intégrale [16]. Après, en substituant (1.4) et l'expression dérivée de $\mathbf{E}^P(\phi, \mathbf{z})$ dans (1.3) et en appliquant la méthode des moment pour résoudre l'équation intégrale résultante, une équation matricielle peut être obtenue :

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{Z}_{ln}^{\phi\phi})_{N \times N} & (\mathbf{Z}_{lm}^{\phi z})_{N \times M} \\ (\mathbf{Z}_{kn}^{z\phi})_{M \times N} & (\mathbf{Z}_{km}^{zz})_{M \times M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_{\phi n})_{N \times 1} \\ (\mathbf{I}_{zm})_{M \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{V}_{\phi n})_{N \times 1} \\ (\mathbf{V}_{zm})_{M \times 1} \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

En solvant (1.5), les courants de surface inconnus du patch sont obtenus, et l'impédance d'entrée, le diagramme de rayonnement et autres caractéristiques importantes de l'antenne peuvent être calculés.

Pour obtenir des solutions full-wave, une étude de convergence doit être menée. La convergence numérique dépend fortement des fonctions de base choisies pour décrire la densité de courant surfacique du patch. Les fonctions de base sinusoïdales satisfaisant la condition de bord (la composante normale de la densité de courant s'annule au bord du patch) constituent un bon choix de fonctions de base utilisée dans la méthode des moments.

Chapitre 2

Formulation mathématique du problème

2.1 EQUATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE DANS UN MILIEU DIELECTRIQUE DE FORME CYLINDRIQUE

Les équations d'onde vectorielles dans un milieu homogène, isotrope et sans sources sont :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} - k^2 \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

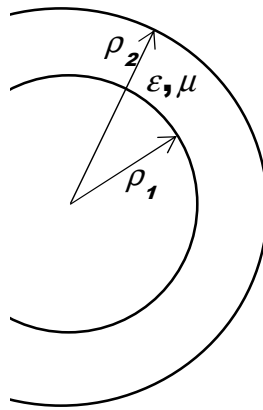


FIGURE 2.1 Représentation d'une couche diélectrique annulaire cylindrique

En coordonnées cylindriques, il est plus convenable d'extraire les composantes selon z des équations ci-dessus et on trouve [49] :

$$(\nabla^2 + k^2) E_z = 0 \quad (2.3)$$

$$(\nabla^2 + k^2) H_z = 0 \quad (2.4)$$

Les solutions générales de ces équations se calculent via la transformation bidimensionnelle en (ϕ, z) de Fourier et la technique de séparation des variables et on obtient [20], [29] :

$$E_z(\rho, \phi, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ik_z z} \left[a_\nu^e J_\nu(k_\rho \rho) + b_\nu^e Y_\nu(k_\rho \rho) \right] \quad (2.5)$$

$$H_z(\rho, \phi, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ik_z z} \left[a_\nu^h J_\nu(k_\rho \rho) + b_\nu^h Y_\nu(k_\rho \rho) \right] \quad (2.6)$$

Avec : $k_\rho^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$. a_ν^e , b_ν^e , a_ν^h et b_ν^h sont des coefficients inconnus, ils sont déterminés à partir des conditions aux limites et J_ν et Y_ν sont les fonctions de Bessel de premier et du deuxième espèce respectivement [50].

On définit ainsi la transformée de Fourier bidimensionnelle en (ϕ, z) d'une fonction $\psi(\rho, \phi, z)$ ainsi que son inverse $\tilde{\psi}(\rho, \nu, k_z)$ par [20]-[21], [24], [51]-[52] :

$$\tilde{\psi}(\rho, \nu, k_z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-i\nu\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-ik_z z} \psi(\rho, \phi, z) = \tilde{\psi}_\nu(\rho, k_z) \quad (2.7)$$

$$\psi(\rho, \phi, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{ik_z z} \tilde{\psi}_\nu(\rho, k_z) \quad (2.8)$$

Par identification avec (5) et (6), il vient :

$$\tilde{E}_{\nu z}(\rho, k_z) = a_\nu^e J_\nu(k_\rho \rho) + b_\nu^e Y_\nu(k_\rho \rho) \quad (2.9)$$

$$\tilde{H}_{\nu z}(\rho, k_z) = a_\nu^h J_\nu(k_\rho \rho) + b_\nu^h Y_\nu(k_\rho \rho) \quad (2.10)$$

$\tilde{E}_{\nu z}$ et $\tilde{H}_{\nu z}$ représentent le ν ème harmonique des champs électrique et magnétique respectivement. Etant données les expressions de $\tilde{E}_{\nu z}$ et $\tilde{H}_{\nu z}$, on pourra trouver aisément les expressions de $\tilde{E}_{\nu\rho}$, $\tilde{E}_{\nu\phi}$, $\tilde{H}_{\nu\rho}$ et $\tilde{H}_{\nu\phi}$ via les équations ci-dessous [24], [49], [53] moyennant une formulation en $\exp(-i\omega t)$:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\nu s}(\rho, k_z) = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{\nu\rho}(\rho, k_z) \\ \tilde{E}_{\nu\phi}(\rho, k_z) \end{bmatrix} = \frac{1}{k_\rho^2} \left[ik_z \tilde{\nabla}_s \tilde{E}_{\nu z} - i\omega \mu \hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\nabla}_s \tilde{H}_{\nu z} \right] \quad (2.11)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\nu s}(\rho, k_z) = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{\nu\rho}(\rho, k_z) \\ \tilde{H}_{\nu\phi}(\rho, k_z) \end{bmatrix} = \frac{1}{k_\rho^2} \left[ik_z \tilde{\nabla}_s \tilde{H}_{\nu z} + i\omega \varepsilon \hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\nabla}_s \tilde{E}_{\nu z} \right] \quad (2.12)$$

où $\tilde{\nabla}_s$ représente le Laplacien transverse :

$$\tilde{\nabla}_s = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{i\nu}{\rho} \quad (2.13)$$

D'où il vient :

$$\tilde{\nabla}_s \tilde{E}_{\nu z} = \hat{\rho} \frac{\partial \tilde{E}_{\nu z}}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{i\nu}{\rho} \tilde{E}_{\nu z} \quad \text{et} \quad \tilde{\nabla}_s \tilde{H}_{\nu z} = \hat{\rho} \frac{\partial \tilde{H}_{\nu z}}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{i\nu}{\rho} \tilde{H}_{\nu z} \quad (2.14)$$

Calculons $\frac{\partial \tilde{E}_{\nu z}}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial \tilde{H}_{\nu z}}{\partial \rho}$ à partir des équations (9) et (10) :

$$\frac{\partial \tilde{E}_{\nu z}}{\partial \rho} = k_\rho \left[a_\nu^e J_\nu(k_\rho \rho) + b_\nu^e \dot{Y}_\nu(k_\rho \rho) \right] \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}_{\nu z}}{\partial \rho} = k_\rho \left[a_\nu^h J_\nu(k_\rho \rho) + b_\nu^h \dot{Y}_\nu(k_\rho \rho) \right] \quad (2.16)$$

Dans (15) et (16), J_ν et \dot{Y}_ν sont les dérivées de la fonction de Bessel de première espèce et du deuxième espèce par rapport à leurs arguments. Calculons également $\frac{i\nu}{\rho} \tilde{E}_{\nu z}$ et $\frac{i\nu}{\rho} \tilde{H}_{\nu z}$ à partir de (9) et (10) :

$$\frac{i\nu}{\rho} \tilde{E}_{\nu z} = k_\rho \left[a_\nu^e \frac{i\nu}{k_\rho \rho} J_\nu(k_\rho \rho) + b_\nu^e \frac{i\nu}{k_\rho \rho} Y_\nu(k_\rho \rho) \right] \quad (2.17)$$

$$\frac{i\nu}{\rho} \tilde{H}_{\nu z} = k_\rho \left[a_\nu^h \frac{i\nu}{k_\rho \rho} J_\nu(k_\rho \rho) + b_\nu^h \frac{i\nu}{k_\rho \rho} Y_\nu(k_\rho \rho) \right] \quad (2.18)$$

Substituant (15)-(18) dans (14), on trouve :

$$\tilde{\nabla}_s \tilde{E}_{\nu z} = k_\rho \bar{\mathbf{B}}_\nu(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{C}_\nu^e \quad (2.19)$$

$$\tilde{\nabla}_s \tilde{H}_{\nu z} = k_\rho \bar{\mathbf{B}}_\nu(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{C}_\nu^h \quad (2.20)$$

Avec :

$$\bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) = \begin{bmatrix} J_v(k_\rho \rho) & \dot{Y}_v(k_\rho \rho) \\ \frac{i\nu}{k_\rho \rho} J_v(k_\rho \rho) & \frac{i\nu}{k_\rho \rho} Y_v(k_\rho \rho) \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{C}_v^e = \begin{bmatrix} a_v^e \\ b_v^e \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_v^h = \begin{bmatrix} a_v^h \\ b_v^h \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Par conséquent, les équations (19)-(21) donnent :

$$ik_z \tilde{\nabla}_s \tilde{E}_{vz} = ik_z k_\rho \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{C}_v^e \quad (2.22)$$

$$ik_z \tilde{\nabla}_s \tilde{H}_{vz} = ik_z k_\rho \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{C}_v^h \quad (2.23)$$

Calculons de même $\hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\nabla}_s \tilde{H}_{vz}$ et $\hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\nabla}_s \tilde{E}_{vz}$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\nabla}_s \tilde{H}_{vz} &= \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}} \frac{\partial \tilde{H}_{vz}}{\partial \rho} + \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{i\nu}{\rho} \tilde{H}_{vz} = -\hat{\boldsymbol{\rho}} \frac{i\nu}{\rho} \tilde{H}_{vz} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\partial \tilde{H}_{vz}}{\partial \rho} \\ &= \hat{\boldsymbol{\rho}} k_\rho \left[a_v^h \frac{-i\nu}{k_\rho \rho} J_v(k_\rho \rho) + b_v^h \frac{-i\nu}{k_\rho \rho} Y_v(k_\rho \rho) \right] + \hat{\boldsymbol{\phi}} k_\rho \left[a_v^h J_v(k_\rho \rho) + b_v^h \dot{Y}_v(k_\rho \rho) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\nabla}_s \tilde{E}_{vz} &= \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}} \frac{\partial \tilde{E}_{vz}}{\partial \rho} + \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{i\nu}{\rho} \tilde{E}_{vz} = -\hat{\boldsymbol{\rho}} \frac{i\nu}{\rho} \tilde{E}_{vz} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\partial \tilde{E}_{vz}}{\partial \rho} \\ &= \hat{\boldsymbol{\rho}} k_\rho \left[a_v^e \frac{-i\nu}{k_\rho \rho} J_v(k_\rho \rho) + b_v^e \frac{-i\nu}{k_\rho \rho} Y_v(k_\rho \rho) \right] + \hat{\boldsymbol{\phi}} k_\rho \left[a_v^e J_v(k_\rho \rho) + b_v^e \dot{Y}_v(k_\rho \rho) \right] \end{aligned}$$

ou encore :

$$\hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\nabla}_s \tilde{H}_{vz} = k_\rho \bar{\mathbf{Q}} \cdot \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{C}_v^h \quad (2.24)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\nabla}_s \tilde{E}_{vz} = k_\rho \bar{\mathbf{Q}} \cdot \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{C}_v^e \quad (2.25)$$

où $\bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho)$, \mathbf{C}_v^e et \mathbf{C}_v^h sont définies par l'équation (21) et $\bar{\mathbf{Q}}$ donnée par :

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Substituant (22), (23), (24) et (25) dans (11) et (12), on trouve :

$$\tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho, k_z) = \frac{1}{k_\rho^2} \left[ik_z k_\rho \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{C}_v^e - i\omega\mu k_\rho \bar{\mathbf{Q}} \cdot \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{C}_v^h \right] \quad (2.27)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_{vs}(\rho, k_z) = \frac{1}{k_\rho^2} \left[ik_z k_\rho \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{C}_v^h + i\omega\varepsilon k_\rho \bar{\mathbf{Q}} \cdot \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{C}_v^e \right] \quad (2.28)$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho, k_z) \\ \tilde{\mathbf{H}}_{vs}(\rho, k_z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ik_z}{k_\rho} \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) & \frac{-i\omega\mu}{k_\rho} \bar{\mathbf{Q}} \cdot \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) \\ \frac{i\omega\varepsilon}{k_\rho} \bar{\mathbf{Q}} \cdot \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) & \frac{ik_z}{k_\rho} \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{C}_v^e \\ \mathbf{C}_v^h \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Les équations (9), (10), (27)-(28) nous permettent d'écrire :

$$\tilde{E}_{v\rho}(\rho, k_z) = \frac{i}{k_\rho} \left\{ k_z \left[a_v^e J_v(k_\rho \rho) + b_v^e \dot{Y}_v(k_\rho \rho) \right] - \omega\mu \left[a_v^h \frac{-iv}{k_\rho \rho} J_v(k_\rho \rho) + b_v^h \frac{-iv}{k_\rho \rho} Y_v(k_\rho \rho) \right] \right\} \quad (2.30)$$

$$\tilde{E}_{v\phi}(\rho, k_z) = \frac{i}{k_\rho} \left\{ k_z \left[a_v^e \frac{iv}{k_\rho \rho} J_v(k_\rho \rho) + b_v^e \frac{iv}{k_\rho \rho} Y_v(k_\rho \rho) \right] - \omega\mu \left[a_v^h \dot{J}_v(k_\rho \rho) + b_v^h \dot{Y}_v(k_\rho \rho) \right] \right\} \quad (2.31)$$

$$\tilde{E}_{vz}(\rho, k_z) = a_v^e J_v(k_\rho \rho) + b_v^e Y_v(k_\rho \rho) \quad (2.32)$$

$$\tilde{H}_{v\rho}(\rho, k_z) = \frac{i}{k_\rho} \left\{ k_z \left[a_v^h \dot{J}_v(k_\rho \rho) + b_v^h \dot{Y}_v(k_\rho \rho) \right] + \omega\varepsilon \left[a_v^e \frac{-iv}{k_\rho \rho} J_v(k_\rho \rho) + b_v^e \frac{-iv}{k_\rho \rho} Y_v(k_\rho \rho) \right] \right\} \quad (2.33)$$

$$\tilde{H}_{v\phi}(\rho, k_z) = \frac{i}{k_\rho} \left\{ k_z \left[a_v^h \frac{iv}{k_\rho \rho} J_v(k_\rho \rho) + b_v^h \frac{iv}{k_\rho \rho} Y_v(k_\rho \rho) \right] + \omega\varepsilon \left[a_v^e \dot{J}_v(k_\rho \rho) + b_v^e \dot{Y}_v(k_\rho \rho) \right] \right\} \quad (2.34)$$

$$\tilde{H}_{vz}(\rho, k_z) = a_v^h J_v(k_\rho \rho) + b_v^h Y_v(k_\rho \rho) \quad (2.35)$$

Par conséquent :

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_{v\phi}(\rho, k_z) \\ \tilde{E}_{vz}(\rho, k_z) \\ \tilde{H}_{v\phi}(\rho, k_z) \\ \tilde{H}_{vz}(\rho, k_z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-vk_z}{k_\rho^2 \rho} J_v(k_\rho \rho) & \frac{-vk_z}{k_\rho^2 \rho} Y_v(k_\rho \rho) & \frac{-i\omega\mu}{k_\rho} j_v(k_\rho \rho) & \frac{-i\omega\mu}{k_\rho} \dot{Y}_v(k_\rho \rho) \\ J_v(k_\rho \rho) & Y_v(k_\rho \rho) & 0 & 0 \\ \frac{i\omega\varepsilon}{k_\rho} j_v(k_\rho \rho) & \frac{i\omega\varepsilon}{k_\rho} \dot{Y}_v(k_\rho \rho) & \frac{-vk_z}{k_\rho^2 \rho} J_v(k_\rho \rho) & \frac{-vk_z}{k_\rho^2 \rho} Y_v(k_\rho \rho) \\ 0 & 0 & J_v(k_\rho \rho) & Y_v(k_\rho \rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_v^e \\ b_v^e \\ a_v^h \\ b_v^h \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Qui peut se mettre sous la forme implicite suivante :

$$\tilde{\mathbf{F}}_v(\rho, k_z) = \bar{\mathbf{Y}}(\rho, \varepsilon, \mu, \omega, \nu, k_z) \cdot \mathbf{A}_v \quad (2.37)$$

Avec :

$$\tilde{\mathbf{F}}_v(\rho, k_z) = [\tilde{E}_{v\phi}(\rho, k_z) \quad \tilde{E}_{vz}(\rho, k_z) \quad \tilde{H}_{v\phi}(\rho, k_z) \quad \tilde{H}_{vz}(\rho, k_z)]^T \quad (2.38)$$

$$\mathbf{A}_v = [a_v^e \quad b_v^e \quad a_v^h \quad b_v^h]^T \quad (2.39)$$

où T désigne l'opérateur transposé.

$$\bar{\mathbf{Y}}(\rho, \varepsilon, \mu, \omega, \nu, k_z) = \begin{bmatrix} \frac{-vk_z}{k_\rho^2 \rho} J_v(k_\rho \rho) & \frac{-vk_z}{k_\rho^2 \rho} Y_v(k_\rho \rho) & \frac{-i\omega\mu}{k_\rho} j_v(k_\rho \rho) & \frac{-i\omega\mu}{k_\rho} \dot{Y}_v(k_\rho \rho) \\ J_v(k_\rho \rho) & Y_v(k_\rho \rho) & 0 & 0 \\ \frac{i\omega\varepsilon}{k_\rho} j_v(k_\rho \rho) & \frac{i\omega\varepsilon}{k_\rho} \dot{Y}_v(k_\rho \rho) & \frac{-vk_z}{k_\rho^2 \rho} J_v(k_\rho \rho) & \frac{-vk_z}{k_\rho^2 \rho} Y_v(k_\rho \rho) \\ 0 & 0 & J_v(k_\rho \rho) & Y_v(k_\rho \rho) \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

2.2 MATRICE DE TRANSFERT (MATRICE ABCD) ASSOCIEE A UNE COUCHE DIELECTRIQUE CYLINDRIQUE

L'équation (37) est valable dans une couche diélectrique annulaire cylindrique. Ecrivons cette équation aux extrémités d'une couche limitée par deux interfaces diélectriques $\rho = \rho_1$ et $\rho = \rho_2$ (voir Figure 2.1) :

$$\tilde{\mathbf{F}}_v(\rho_1^+, k_z) = \bar{\mathbf{Y}}(\rho_1^+, k_z) \cdot \mathbf{A}_v$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_v(\rho_2^-, k_z) = \bar{\mathbf{Y}}(\rho_2^-, k_z) \cdot \mathbf{A}_v$$

D'où on trouve :

$$\tilde{\mathbf{F}}_v(\rho_2^-, k_z) = \bar{\mathbf{Y}}(\rho_2^-, k_z) \cdot [\bar{\mathbf{Y}}(\rho_1^+, k_z)]^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_v(\rho_1^+, k_z)$$

ou encore :

$$\tilde{\mathbf{F}}_v(\rho_2^-, k_z) = \bar{\mathbf{T}}(\rho_1, \rho_2, \varepsilon, \mu, \omega, \nu, k_z) \cdot \tilde{\mathbf{F}}_v(\rho_1^+, k_z) \quad (2.41)$$

Avec :

$$\bar{\mathbf{T}}(\rho_1, \rho_2, \varepsilon, \mu, \omega, \nu, k_z) = \bar{\mathbf{Y}}(\rho_2^-, k_z) \cdot [\bar{\mathbf{Y}}(\rho_1^+, k_z)]^{-1} \quad (2.42)$$

$\bar{\mathbf{T}}$ étant la matrice de transfert (ou matrice ABCD) liant les composantes tangentielles du champ électromagnétique spectral aux interfaces diélectriques limitant la couche diélectrique considérée. Pour calculer $\bar{\mathbf{T}}$, nous devons tout d'abord, inverser la matrice $\bar{\mathbf{Y}}$. Pour inverser $\bar{\mathbf{Y}}$, on calcule son déterminant, ses cofacteurs puis on détermine son inverse par simple division des cofacteurs par le déterminant.

Après des calculs intenses, on arrive à écrire $\bar{\mathbf{Y}}^{-1}$ comme suit

$$[\bar{\mathbf{Y}}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} k_\rho \rho \dot{Y}_v(k_\rho \rho) & i \frac{\pi}{2} \frac{k_\rho^2 \rho}{\omega \varepsilon} Y_v(k_\rho \rho) & i \frac{\pi}{2} \frac{\nu k_z}{\omega \varepsilon} Y_v(k_\rho \rho) \\ 0 & -\frac{\pi}{2} k_\rho \rho \dot{J}_v(k_\rho \rho) & -i \frac{\pi}{2} \frac{k_\rho^2 \rho}{\omega \varepsilon} J_v(k_\rho \rho) & -i \frac{\pi}{2} \frac{\nu k_z}{\omega \varepsilon} J_v(k_\rho \rho) \\ -i \frac{\pi}{2} \frac{k_\rho^2 \rho}{\omega \mu} Y_v(k_\rho \rho) & -i \frac{\pi}{2} \frac{\nu k_z}{\omega \mu} Y_v(k_\rho \rho) & 0 & \frac{\pi}{2} k_\rho \rho \dot{Y}_v(k_\rho \rho) \\ i \frac{\pi}{2} \frac{k_\rho^2 \rho}{\omega \mu} J_v(k_\rho \rho) & i \frac{\pi}{2} \frac{\nu k_z}{\omega \mu} J_v(k_\rho \rho) & 0 & -\frac{\pi}{2} k_\rho \rho \dot{J}_v(k_\rho \rho) \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Calculons à présent la matrice de transfert (matrice ABCD) associée à une couche diélectrique annulaire cylindrique.

D'après les équations (41) et (42), nous avons :

$$\tilde{\mathbf{F}}_n(\rho_2^-, k_z) = \bar{\mathbf{T}}(\rho_1, \rho_2, \varepsilon, \mu, \omega, \nu, k_z) \cdot \tilde{\mathbf{F}}_n(\rho_1^+, k_z)$$

Avec :

$$\bar{\mathbf{T}}(\rho_1, \rho_2, \varepsilon, \mu, \omega, \nu, k_z) = \bar{\mathbf{Y}}(\rho_2^-, \varepsilon, \mu, \omega, \nu, k_z) \cdot [\bar{\mathbf{Y}}(\rho_1^+, \varepsilon, \mu, \omega, \nu, k_z)]^{-1}$$

En calculant le produit matriciel $\bar{\mathbf{Y}}(\rho_2^-) \cdot [\bar{\mathbf{Y}}(\rho_1^+)]^{-1}$ on aura la matrice de transfert (matrice ABCD) associée à une couche diélectrique annulaire cylindrique par :

$$\bar{\mathbf{T}}(\rho_1, \rho_2, \varepsilon, \mu, \omega, \nu, k_z) = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} k_\rho \rho_1 a & \frac{\pi}{2} k_z \rho_1 b & -i \frac{\pi \nu k_z \rho_1}{2 \omega \varepsilon \rho_2} c & -i \frac{\pi}{2} \omega \mu \rho_1 d \\ 0 & \frac{\pi}{2} k_\rho \rho_1 e & i \frac{\pi k_\rho^2 \rho_1}{2 \omega \varepsilon} c & i \frac{\pi \nu k_z}{2 \omega \varepsilon} c \\ i \frac{\pi \nu k_z \rho_1}{2 \omega \mu \rho_2} c & i \frac{\pi}{2} \omega \varepsilon \rho_1 d & \frac{\pi}{2} k_\rho \rho_1 a & \frac{\pi}{2} k_z \rho_1 b \\ -i \frac{\pi k_\rho^2 \rho_1}{2 \omega \mu} c & -i \frac{\pi \nu k_z}{2 \omega \mu} c & 0 & \frac{\pi}{2} k_\rho \rho_1 e \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

avec les coefficients a, b, c, d, e donnés par :

$$a = \dot{Y}_\nu(k_\rho \rho_2) J_\nu(k_\rho \rho_1) - j_\nu(k_\rho \rho_2) Y_\nu(k_\rho \rho_1) \quad (2.45)$$

$$b = \left[\dot{Y}_\nu(k_\rho \rho_2) \frac{\nu J_\nu(k_\rho \rho_1)}{k_\rho \rho_1} - j_\nu(k_\rho \rho_2) \frac{\nu Y_\nu(k_\rho \rho_1)}{k_\rho \rho_1} \right] + \left[\frac{\nu J_\nu(k_\rho \rho_2)}{k_\rho \rho_2} \dot{Y}_\nu(k_\rho \rho_1) - \frac{\nu Y_\nu(k_\rho \rho_2)}{k_\rho \rho_2} j_\nu(k_\rho \rho_1) \right] \quad (2.46)$$

$$c = J_\nu(k_\rho \rho_2) Y_\nu(k_\rho \rho_1) - Y_\nu(k_\rho \rho_2) J_\nu(k_\rho \rho_1) \quad (2.47)$$

$$d = \left[\frac{k_z}{k} \right]^2 \left[\frac{\nu J_\nu(k_\rho \rho_2) \nu Y_\nu(k_\rho \rho_1)}{k_\rho \rho_2 k_\rho \rho_1} - \frac{\nu Y_\nu(k_\rho \rho_2) \nu J_\nu(k_\rho \rho_1)}{k_\rho \rho_2 k_\rho \rho_1} \right] + \left[\dot{J}_\nu(k_\rho \rho_2) \dot{Y}_\nu(k_\rho \rho_1) - \dot{Y}_\nu(k_\rho \rho_2) \dot{J}_\nu(k_\rho \rho_1) \right] \quad (2.48)$$

$$e = J_\nu(k_\rho \rho_2) \dot{Y}_\nu(k_\rho \rho_1) - Y_\nu(k_\rho \rho_2) \dot{J}_\nu(k_\rho \rho_1) \quad (2.49)$$

2.3 RELATION ENTRE LES CHAMPS TANGENTIELS DANS LA REGION D'AIR

Nous avons formulé la matrice de transfert entre les composantes tangentielles spectrales du champ électromagnétique sur les deux extrémités d'une couche diélectrique annulaire cylindrique. Nous allons, maintenant, dériver une relation qui lie le champ magnétique tangentiel spectral avec celui tangentiel électrique dans la région d'air.

Assumons que la région pour laquelle $\rho > \rho_2$ dans la figure 2.1 représente la région d'air. Nous devons imposer la condition de rayonnement de Sommerfeld qui consiste à avoir un champ électromagnétique fini à l'infini (zone lointaine). Pour cela, il faut imposer :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \tilde{E}_{\nu z}(\rho, k_z) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \tilde{H}_{\nu z}(\rho, k_z) = 0 \quad (2.50)$$

Les équations (32) et (35) donnent les expressions suivantes pour $\tilde{E}_{\nu z}$ et $\tilde{H}_{\nu z}$:

$$\tilde{E}_{\nu z}(\rho, k_z) = a_\nu^e J_\nu(k_\rho \rho) + b_\nu^e Y_\nu(k_\rho \rho) \quad (2.51)$$

$$\tilde{H}_{\nu z}(\rho, k_z) = a_\nu^h J_\nu(k_\rho \rho) + b_\nu^h Y_\nu(k_\rho \rho) \quad (2.52)$$

Nous avons, d'autre part, les développements suivants de $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$ et $H_\nu^{(2)}(z)$ pour les grands arguments z [48] :

$$J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - (2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{pour } z \gg 1 \quad (2.53)$$

$$Y_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - (2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{pour } z \gg 1 \quad (2.54)$$

$$H_\nu^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i\left(z - (2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right)} \quad \text{pour } z \gg 1 \quad (2.55)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i\left(z - (2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right)} \quad \text{pour } z \gg 1 \quad (2.56)$$

Avec $H_\nu^{(1)}(z)$ et $H_\nu^{(2)}(z)$ sont respectivement, la fonction de Hankel de premier espèce et du deuxième espèce d'ordre ν et d'argument z . Visiblement, la condition (2.50) est vérifiée pour k_ρ réel. Si par contre k_ρ est complexe ce qui est le cas (déformation du contour d'intégration dans le plan complexe de k_ρ lors du calcul des éléments de la matrice des moments), nous devons alors avoir pour $\tilde{E}_{\nu z}(\rho, k_z)$ et $\tilde{H}_{\nu z}(\rho, k_z)$ une onde évanescente à l'infini. Prenons par exemple a_ν^e et b_ν^e d'une part et a_ν^h et b_ν^h d'autre part avec des proportions à ce que $\tilde{E}_{\nu z}$ et $\tilde{H}_{\nu z}$ soient des ondes en $e^{ik_\rho \rho}$, en d'autre terme une variation en $H_\nu^{(1)}(k_\rho \rho)$. D'où :

$$\tilde{E}_{\nu z}(\rho, k_z) = a_\nu^e \left[J_\nu(k_\rho \rho) + \frac{b_\nu^e}{a_\nu^e} Y_\nu(k_\rho \rho) \right] = a_\nu^e H_\nu^{(1)}(k_\rho \rho) \quad (2.57)$$

$$\tilde{H}_{\nu z}(\rho, k_z) = a_\nu^h \left[J_\nu(k_\rho \rho) + \frac{b_\nu^h}{a_\nu^h} Y_\nu(k_\rho \rho) \right] = a_\nu^h H_\nu^{(1)}(k_\rho \rho) \quad (2.58)$$

Sachant que nous avons pris au départ la convention d'une variation des grandeurs électromagnétiques en $e^{-i\omega t}$, l'onde aura la forme en $e^{-i(\omega t - k_\rho \rho)} = e^{-i\omega t} e^{ik_\rho \rho}$. Nous devons alors imposer la condition suivante :

$$\Im(k_\rho) = \Im\left(\sqrt{k^2 - k_z^2}\right) > 0 \quad (2.59)$$

A partir de (2.57) et (2.58), on tire : $\frac{b_v^e}{a_v^e} = i$ et $\frac{b_v^h}{a_v^h} = i$

Ou encore :

$$b_v^e = ia_v^e \quad (2.60)$$

$$b_v^h = ia_v^h \quad (2.61)$$

Les équations (30)-(36) se réécrivent ainsi :

$$\tilde{E}_{v\rho}(\rho, k_z) = a_v^e \frac{ik_z}{k_\rho} \dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho) - a_v^h \frac{\omega\mu}{k_\rho} \frac{v}{k_\rho \rho} H_v^{(1)}(k_\rho \rho) \quad (2.62)$$

$$\tilde{E}_{v\phi}(\rho, k_z) = -a_v^e \frac{k_z}{k_\rho} \frac{v}{k_\rho \rho} H_v^{(1)}(k_\rho \rho) - a_v^h \frac{i\omega\mu}{k_\rho} \dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho) \quad (2.63)$$

$$\tilde{E}_{vz}(\rho, k_z) = a_v^e H_v^{(1)}(k_\rho \rho) \quad (2.64)$$

$$\tilde{H}_{v\rho}(\rho, k_z) = a_v^h \frac{ik_z}{k_\rho} \dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho) + a_v^e \frac{\omega\varepsilon}{k_\rho} \frac{v}{k_\rho \rho} H_v^{(1)}(k_\rho \rho) \quad (2.65)$$

$$\tilde{H}_{v\phi}(\rho, k_z) = -a_v^h \frac{k_z}{k_\rho} \frac{v}{k_\rho \rho} H_v^{(1)}(k_\rho \rho) + a_v^e \frac{i\omega\varepsilon}{k_\rho} \dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho) \quad (2.66)$$

$$\tilde{H}_{vz}(\rho, k_z) = a_v^h H_v^{(1)}(k_\rho \rho) \quad (2.67)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_{v\phi}(\rho, k_z) \\ \tilde{E}_{vz}(\rho, k_z) \\ \tilde{H}_{v\phi}(\rho, k_z) \\ \tilde{H}_{vz}(\rho, k_z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-vk_z}{k_\rho \rho} J_v(k_\rho \rho) & \frac{-vk_z}{k_\rho \rho} Y_v(k_\rho \rho) & \frac{-i\omega\mu}{k_\rho} j_v(k_\rho \rho) & \frac{-i\omega\mu}{k_\rho} \dot{Y}_v(k_\rho \rho) \\ J_v(k_\rho \rho) & Y_v(k_\rho \rho) & 0 & 0 \\ \frac{i\omega\varepsilon}{k_\rho} j_v(k_\rho \rho) & \frac{i\omega\varepsilon}{k_\rho} \dot{Y}_v(k_\rho \rho) & \frac{-vk_z}{k_\rho \rho} J_v(k_\rho \rho) & \frac{-vk_z}{k_\rho \rho} Y_v(k_\rho \rho) \\ 0 & 0 & J_v(k_\rho \rho) & Y_v(k_\rho \rho) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_v^e \\ ia_v^e \\ a_v^h \\ ia_v^h \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

ou encore :

$$\tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho, k_z) = a_v^e \bar{\mathbf{A}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{a} + a_v^h \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{a} \quad (2.69)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_{vs}(\rho, k_z) = -\frac{\varepsilon}{\mu} a_v^e \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{a} + a_v^h \bar{\mathbf{A}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{a} \quad (2.70)$$

Avec :

$$\bar{\mathbf{A}}_v(k_\rho \rho) = \begin{bmatrix} \frac{-\nu k_z}{k_\rho^2 \rho} J_\nu(k_\rho \rho) & \frac{-\nu k_z}{k_\rho^2 \rho} Y_\nu(k_\rho \rho) \\ J_\nu(k_\rho \rho) & Y_\nu(k_\rho \rho) \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) = \begin{bmatrix} \frac{-i\omega\mu}{k_\rho} j_\nu(k_\rho \rho) & \frac{-i\omega\mu}{k_\rho} \dot{Y}_\nu(k_\rho \rho) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Par conséquent :

$$\bar{\mathbf{A}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \frac{-\nu k_z}{k_\rho^2 \rho} H_\nu^{(1)}(k_\rho \rho) \\ H_\nu^{(1)}(k_\rho \rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\nu k_z}{k_\rho^2 \rho} \\ 1 \end{bmatrix} H_\nu^{(1)}(k_\rho \rho) \quad (2.74)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \frac{-i\omega\mu}{k_\rho} \dot{H}_\nu^{(1)}(k_\rho \rho) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-i\omega\mu}{k_\rho} \dot{H}_\nu^{(1)}(k_\rho \rho) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

\Rightarrow

$$\tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho, k_z) = \left[\bar{\mathbf{A}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{a} \quad \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{a} \right] \cdot \begin{bmatrix} a_v^e \\ a_v^h \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_{vs}(\rho, k_z) = \left[-\frac{\varepsilon}{\mu} \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{a} \quad \bar{\mathbf{A}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{a} \right] \cdot \begin{bmatrix} a_v^e \\ a_v^h \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

On aura par conséquent :

$$\tilde{\mathbf{H}}_{vs}(\rho, k_z) = \left[-\frac{\varepsilon}{\mu} \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{a} \quad \bar{\mathbf{A}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{a} \right] \cdot \left[\bar{\mathbf{A}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{a} \quad \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{a} \right]^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho, k_z) \quad (2.78)$$

Calculons $\left[\bar{\mathbf{A}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{a} \quad \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{a} \right]^{-1}$:

Le déterminant de $\left[\bar{\mathbf{A}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{a} \quad \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{a} \right]$

Tenant compte de (2.74) et (2.75), on écrit

$$\left[\bar{\mathbf{A}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{a} \quad \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{a} \right] = \begin{bmatrix} \frac{-\nu k_z}{k_\rho^2 \rho} H_v^{(1)}(k_\rho \rho) & \frac{-i\omega\mu}{k_\rho} \dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho) \\ H_v^{(1)}(k_\rho \rho) & 0 \end{bmatrix}$$

Il vient alors :

$$\det\left(\left[\bar{\mathbf{A}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{a} \quad \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{a} \right]\right) = \frac{i\omega\mu}{k_\rho} H_v^{(1)}(k_\rho \rho) \dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho) \quad (2.79)$$

Nous utilisons la propriété suivante :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ avec } d=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{bc} \begin{bmatrix} 0 & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & -\frac{a}{bc} \end{bmatrix}$$

$$\left[\bar{\mathbf{A}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{a} \quad \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{a} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{H_v^{(1)}(k_\rho \rho)} \\ \frac{ik_\rho}{\omega\mu} \frac{1}{\dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho)} & \frac{ivk_z}{\omega\mu k_\rho \rho} \frac{1}{\dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho)} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

Tenant compte de (2.74), (2.75) et (2.80), on écrit

$$\bar{\mathbf{M}}_0 = \left[-\frac{\varepsilon}{\mu} \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad \bar{\mathbf{A}}_v(k_\rho \rho) \cdot \boldsymbol{\alpha} \right] \cdot \left[\bar{\mathbf{A}}_v(k_\rho \rho) \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) \cdot \boldsymbol{\alpha} \right]^{-1}$$

soit

$$\bar{\mathbf{M}}_0 = \begin{bmatrix} \frac{-ivk_z}{\omega\mu k_\rho \rho} \frac{H_v^{(1)}(k_\rho \rho)}{\dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho)} & \frac{i\omega\varepsilon}{k_\rho} \frac{\dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho)}{H_v^{(1)}(k_\rho \rho)} - \frac{iv^2 k_z^2}{\omega\mu k_\rho^3 \rho^2} \frac{H_v^{(1)}(k_\rho \rho)}{\dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho)} \\ \frac{ik_\rho}{\omega\mu} \frac{H_v^{(1)}(k_\rho \rho)}{\dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho)} & \frac{ivk_z}{\omega\mu k_\rho \rho} \frac{H_v^{(1)}(k_\rho \rho)}{\dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho)} \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

Par conséquent, dans la zone d'air (espace libre) la plus externe, nous avons :

$$\tilde{\mathbf{H}}_{v_s}(\rho, k_z) = \bar{\mathbf{M}}_0 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{v_s}(\rho, k_z) \quad (2.82)$$

Avec $\bar{\mathbf{M}}_0$ donnée par l'équation (2.81) et qui peut également se réécrire :

$$\bar{\mathbf{M}}_0 = \begin{bmatrix} \frac{k_z}{i\omega\mu} \frac{\frac{v}{k_\rho \rho} H_v^{(1)}(k_\rho \rho)}{\dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho)} - \frac{i\omega\varepsilon \left[\frac{k_z}{k} \frac{v}{k_\rho \rho} H_v^{(1)}(k_\rho \rho) \right]^2 - [\dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho)]^2}{k_\rho \dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho) H_v^{(1)}(k_\rho \rho)} \\ \frac{ik_\rho}{\omega\mu} \frac{H_v^{(1)}(k_\rho \rho)}{\dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho)} & \frac{\frac{v}{k_\rho \rho} H_v^{(1)}(k_\rho \rho)}{ik_z \dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho)} \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

2.4 FONCTION DE GREEN D'UN PATCH RECTANGULAIRE NOYE DANS UN MILIEU STRATIFIE CYLINDRIQUE

La géométrie de la structure considérée est montrée dans la Figure 2.2. La structure est constituée de P cylindres concentriques et infiniment longs de rayons $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_M, \dots, \rho_P)$, respectivement. La couche la plus interne est un cylindre métallique considéré parfaitement conducteur. Le patch rectangulaire courbée est localisé en $\rho = \rho_M$ et possède une dimension droite de $2L$ et une dimension courbée de $2\rho_M\phi_0$, avec $2\phi_0$ l'angle délimitant le patch courbé. Chaque couche diélectrique j est caractérisée par un rayon interne ρ_{j-1} , un rayon externe ρ_j et une permittivité diélectrique $\epsilon_j = \epsilon_0\epsilon_{jr}$, ϵ_{jr} est la constante diélectrique relative de la couche et ϵ_0 la permittivité diélectrique de l'espace libre. La perméabilité est assumée partout égale à μ_0 .

A partir de l'équation (2.36), les composantes $\tilde{E}_{v\phi}$, \tilde{E}_{vz} , $\tilde{H}_{v\phi}$, and \tilde{H}_{vz} du champ électromagnétique peuvent être écrites pour la couche j comme:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}}_{vS}(\rho, k_z) \\ \tilde{\mathbf{H}}_{vS}(\rho, k_z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}}^{EE} & \bar{\mathbf{Y}}^{EH} \\ \bar{\mathbf{Y}}^{HE} & \bar{\mathbf{Y}}^{HH} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{vj}^e \\ \mathbf{C}_{vj}^h \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{Y}}(\epsilon_j, \omega, \rho, \nu) \cdot \mathbf{C}_{vj} \quad (2.84)$$

où

$$\tilde{\mathbf{E}}_{vS} = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{v\phi} \\ \tilde{E}_{vz} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{H}}_{vS} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{v\phi} \\ \tilde{H}_{vz} \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

$$\bar{\mathbf{Y}}^{EE} = \bar{\mathbf{Y}}^{HH} = \begin{bmatrix} \frac{-\nu k_z}{k_{j\rho}^2} J_\nu(k_{j\rho}\rho) & \frac{-\nu k_z}{k_{j\rho}^2} Y_\nu(k_{j\rho}\rho) \\ J_\nu(k_{j\rho}\rho) & Y_\nu(k_{j\rho}\rho) \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

$$\bar{\mathbf{Y}}^{HE} = -\frac{\epsilon_j}{\mu_0} \bar{\mathbf{Y}}^{EH} = \begin{bmatrix} \frac{i\omega\epsilon_j}{k_{j\rho}} J_\nu(k_{j\rho}\rho) & \frac{i\omega\epsilon_j}{k_{j\rho}} \dot{Y}_\nu(k_{j\rho}\rho) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

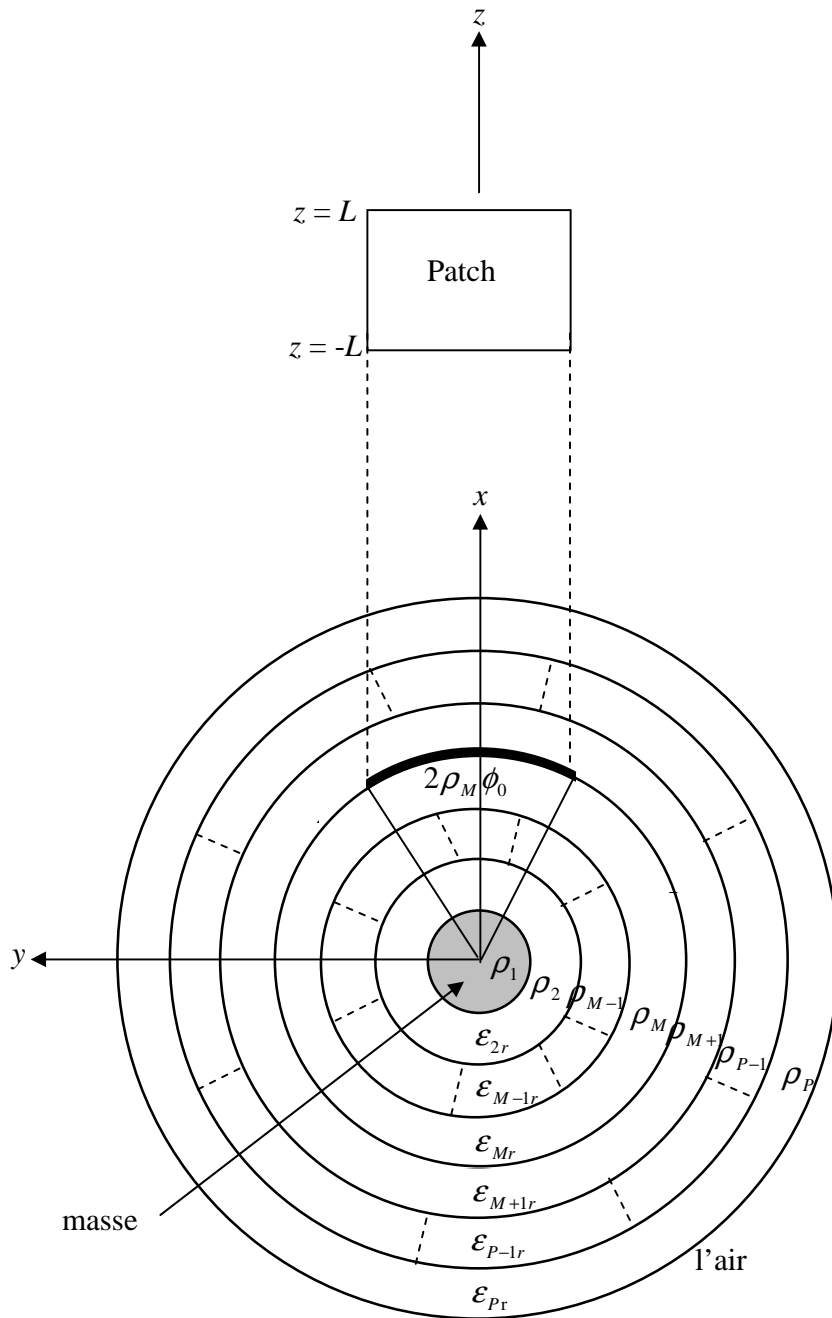


FIGURE 2.2 Géométrie d'un patch rectangulaire noyé dans un milieu stratifié cylindrique.

k_z est la constante de propagation, $k_{j\rho}^2 = k_j^2 - k_z^2$, $k_j^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_j$, a_{vj}^e , b_{vj}^e , a_{vj}^h and b_{vj}^h sont les coefficients inconnus associés à la couche j .

En utilisant la matrice de transfert donnée par (2.45), l'expression qui relie les champs tangentiels spectraux entre l'extrémité supérieure de la couche $j-1$ et l'extrémité inférieure de la couche j est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}}_{vS}(\rho_j^-) \\ \tilde{\mathbf{H}}_{vS}(\rho_j^-) \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{T}}(\rho_{j-1}, \rho_j, \varepsilon_j, \omega, \nu) \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}}_{vS}(\rho_{j-1}^+) \\ \tilde{\mathbf{H}}_{vS}(\rho_{j-1}^+) \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

avec la matrice de transfert, associée à la couche j , $\bar{\mathbf{T}}$ donnée par :

$$\bar{\mathbf{T}}(\rho_{j-1}, \rho_j, \varepsilon_j, \omega, \nu) = \bar{\mathbf{T}}_j = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}}^{EE} & \bar{\mathbf{T}}^{EH} \\ -\frac{\varepsilon_j}{\mu_0} \bar{\mathbf{T}}^{EH} & \bar{\mathbf{T}}^{EE} \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

où

$$\bar{\mathbf{T}}^{EE} = \frac{\pi}{2} \rho_{j-1} \begin{bmatrix} k_{j\rho} a & k_z b \\ 0 & k_{j\rho} e \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

$$\bar{\mathbf{T}}^{EH} = i \frac{\pi}{2} \begin{bmatrix} -\frac{\nu k_z \rho_{j-1}}{\omega \varepsilon_j} c & -\omega \mu_0 \rho_{j-1} d \\ \frac{k_{j\rho}^2 \rho_{j-1}}{\omega \varepsilon_j} c & \frac{\nu k_z}{\omega \varepsilon_j} c \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

où a , b , c , d et e sont donnés par les relations (2.45)-(2.49).

En accord avec la condition de rayonnement de Sommerfeld, le champ électromagnétique s'annule pour $\rho \rightarrow \infty$. On aura alors:

$$\tilde{\mathbf{H}}_{vS}(\rho) = \bar{\mathbf{M}}_0(\rho, \varepsilon_0, \omega, \nu) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{vS}(\rho) \quad \forall \rho > \rho_P \quad (2.92)$$

avec $\bar{\mathbf{M}}_0$ donnée par:

$$\bar{\mathbf{M}}_0(\rho, \varepsilon_0, \omega, \nu) = \begin{bmatrix} -\frac{ivk_z}{\omega\mu_0 k_0 \rho} \frac{H_v^{(1)}(k_0 \rho)}{\dot{H}_v^{(1)}(k_0 \rho)} & \frac{i\omega\varepsilon_0}{k_0 \rho} \frac{\dot{H}_v^{(1)}(k_0 \rho)}{H_v^{(1)}(k_0 \rho)} - \frac{iv^2 k_z^2}{\omega\mu_0 k_0^3 \rho^2} \frac{H_v^{(1)}(k_0 \rho)}{\dot{H}_v^{(1)}(k_0 \rho)} \\ \frac{ik_0 \rho}{\omega\mu_0} \frac{H_v^{(1)}(k_0 \rho)}{\dot{H}_v^{(1)}(k_0 \rho)} & \frac{ivk_z}{\omega\mu_0 k_0 \rho} \frac{H_v^{(1)}(k_0 \rho)}{\dot{H}_v^{(1)}(k_0 \rho)} \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

où $\dot{H}_v^{(1)}(x)$ est la dérivée de la fonction de Hankel de premier espèce par rapport à l'argument x . Les équations de continuité pour les composantes tangentielles du champ sont :

$$\tilde{\mathbf{E}}_{vS}(\rho_j^+) = \tilde{\mathbf{E}}_{vS}(\rho_j^-), \quad j=1, 2, \dots, P \quad (2.94)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_{vS}(\rho_j^-) - \tilde{\mathbf{H}}_{vS}(\rho_j^+) = \delta_{jM} \bar{\mathbf{Q}} \cdot \tilde{\mathbf{J}}_v(k_z), \quad j=1, 2, \dots, P \quad (2.95)$$

Le courant $\tilde{\mathbf{J}}_v(k_z)$ dans (2.95) représente la discontinuité du champ magnétique tangentiel en $\rho = \rho_M$. δ_{jM} est le symbole de Kronecker et est égale à l'unité pour $j=M$, et zéro ailleurs. En utilisant les équations (2.88), (2.94) et (2.95) et en cascasant les matrices par simple multiplication on aura :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}}_{vS}(\rho_M^-) \\ \tilde{\mathbf{H}}_{vS}(\rho_M^-) \end{bmatrix} = \bar{\Gamma}_< \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}}_{vS}(\rho_1^+) \\ \tilde{\mathbf{H}}_{vS}(\rho_1^+) \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}}_{vS}(\rho_P^-) \\ \tilde{\mathbf{H}}_{vS}(\rho_P^-) \end{bmatrix} = \bar{\Gamma}_> \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}}_{vS}(\rho_M^+) \\ \tilde{\mathbf{H}}_{vS}(\rho_M^+) \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

avec

$$\bar{\Gamma}_< = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{<}^{EE} & \bar{\Gamma}_{<}^{EH} \\ \bar{\Gamma}_{<}^{HE} & \bar{\Gamma}_{<}^{HH} \end{bmatrix} = \prod_{j=M}^2 \bar{\mathbf{T}}(\rho_{j-1}, \rho_j, \varepsilon_j, \omega, \nu) \quad (2.98)$$

$$\bar{\Gamma}_{>} = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{>}^{EE} & \bar{\Gamma}_{>}^{EH} \\ \bar{\Gamma}_{>}^{HE} & \bar{\Gamma}_{>}^{HH} \end{bmatrix} = \prod_{j=P}^{M+1} \bar{\mathbf{T}}(\rho_{j-1}, \rho_j, \varepsilon_j, \omega, \nu) \quad (2.99)$$

Utilisons les équations (2.95), (2.98) et (2.99) pour écrire les expressions suivantes :

$$\tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho_p, k_z) = \bar{\Gamma}_{>}^{EE} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho_M, k_z) + \bar{\Gamma}_{>}^{EH} \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{vs}(\rho_M^+, k_z) \quad (2.100)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_{vs}(\rho_p, k_z) = \bar{\Gamma}_{>}^{HE} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho_M, k_z) + \bar{\Gamma}_{>}^{HH} \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{vs}(\rho_M^+, k_z) \quad (2.101)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho_M, k_z) = \bar{\Gamma}_{<}^{EE} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho_1, k_z) + \bar{\Gamma}_{<}^{EH} \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{vs}(\rho_1, k_z) \quad (2.102)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_{vs}(\rho_M^-, k_z) = \bar{\Gamma}_{<}^{HE} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho_1, k_z) + \bar{\Gamma}_{<}^{HH} \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{vs}(\rho_1, k_z) \quad (2.103)$$

$$\tilde{\mathbf{J}}_v(k_z) = \bar{\mathbf{Q}} \cdot \left[\tilde{\mathbf{H}}_{vs}(\rho_M^+, k_z) - \tilde{\mathbf{H}}_{vs}(\rho_M^-, k_z) \right] \quad (2.104)$$

Nous avons les équations supplémentaires suivantes :

$$\tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho_1, k_z) = \mathbf{0} \quad (2.105)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_{vs}(\rho_p, k_z) = \bar{\mathbf{M}}_0(\rho_p) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho_p, k_z) \quad (2.106)$$

Substituant (2.105) dans (2.102) et (2.103), (2.106) dans (2.100) et (2.101), on trouve :

$$\tilde{\mathbf{H}}_{vs}(\rho_1, k_z) = \left[\bar{\Gamma}_{<}^{EH} \right]^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho_M, k_z) \quad (2.107)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_{vs}(\rho_M^-, k_z) = \bar{\Gamma}_{<}^{HH} \cdot \left[\bar{\Gamma}_{<}^{EH} \right]^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho_M, k_z) \quad (2.108)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\nu_s}(\rho_M^+, k_z) = [\bar{\mathbf{M}}_0(\rho_p) \cdot \bar{\Gamma}_>^{EH} - \bar{\Gamma}_>^{HH}]^{-1} \cdot [\bar{\Gamma}_>^{HE} - \bar{\mathbf{M}}_0(\rho_p) \cdot \bar{\Gamma}_>^{EE}] \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{\nu_s}(\rho_M, k_z) \quad (2.109)$$

Substituant (2.108) et (2.109) dans (2.104), on trouve :

$$\tilde{\mathbf{J}}_{\nu}(k_z) = \bar{\mathbf{Q}} \cdot \left\{ [\bar{\mathbf{M}}_0(\rho_p) \cdot \bar{\Gamma}_>^{EH} - \bar{\Gamma}_>^{HH}]^{-1} \cdot [\bar{\Gamma}_>^{HE} - \bar{\mathbf{M}}_0(\rho_p) \cdot \bar{\Gamma}_>^{EE}] - \bar{\Gamma}_<^{HH} \cdot [\bar{\Gamma}_<^{EH}]^{-1} \right\} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{\nu_s}(\rho_M, k_z)$$

Le tenseur admittance est donné alors par :

$$\bar{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{Q}} \cdot \left\{ [\bar{\mathbf{M}}_0(\rho_p) \cdot \bar{\Gamma}_>^{EH} - \bar{\Gamma}_>^{HH}]^{-1} \cdot [\bar{\Gamma}_>^{HE} - \bar{\mathbf{M}}_0(\rho_p) \cdot \bar{\Gamma}_>^{EE}] - \bar{\Gamma}_<^{HH} \cdot [\bar{\Gamma}_<^{EH}]^{-1} \right\}$$

Le tenseur de Green est calculé en cherchant $\bar{\mathbf{Y}}^{-1}$, on aura alors :

$$\bar{\mathbf{G}}(k_z) = \bar{\Gamma}_<^{EH} \cdot [\bar{\Gamma}_>^{HH} - \bar{\mathbf{M}}_0(\rho_p) \cdot \bar{\Gamma}_>^{EH}]^{-1} \cdot [\bar{\Gamma}_>^{HH} - \bar{\mathbf{M}}_0(\rho_p) \cdot \bar{\Gamma}_>^{EH}] \cdot \bar{\mathbf{Q}} \quad (2.110)$$

La matrice 4x4 $\bar{\Gamma}$ est donné par

$$\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_> \cdot \bar{\Gamma}_< = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}^{EE} & \bar{\Gamma}^{EH} \\ \bar{\Gamma}^{HE} & \bar{\Gamma}^{HH} \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

On obtient donc une relation entre le champ électrique tangentiel en $\rho = \rho_M$ et le courant électrique surfacique sur le patch.

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\nu_s}(\rho_M) = \bar{\mathbf{G}}(\rho, \boldsymbol{\varepsilon}, \omega, \nu) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{\nu}(k_z) \quad (2.112)$$

où $\boldsymbol{\rho} = [\rho_1 \ \rho_2 \ \dots \ \rho_p]^T$, $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \dots \ \varepsilon_p]^T$ et $\bar{\mathbf{G}}(\rho, \boldsymbol{\varepsilon}, \omega, \nu)$ est la fonction dyadique spectrale de Green du milieu multicouches cylindrique de la Figure 2.2.

L'équation (2.110) est une expression compacte sous forme de simples multiplications de matrices, ce qui convient très bien à l'implémentation numérique. Notons aussi que l'équation (2.110) est générale et prend en compte n'importe quel nombre de couches au-dessus et/ou au-dessous du patch en incluant les matrices $\bar{\mathbf{T}}$ correspondantes dans $\bar{\Gamma}_>$ et/ou $\bar{\Gamma}_<$, respectivement. Comme premier exemple, la fonction de Green d'une structure microbande cylindrique monocouches dérivée à partir de (2.110) est donnée par

$$\bar{\mathbf{G}}_v(k_z) = \bar{\mathbf{T}}_1^{EH} \cdot [\bar{\mathbf{T}}_1^{EE} - \bar{\mathbf{M}}_0 \cdot \bar{\mathbf{T}}_1^{EH}]^{-1} \cdot \bar{\mathbf{Q}} \quad (2.113)$$

Comme deuxième exemple, on écrit la fonction de Green, toujours à partir de (2.110), pour une structure cylindrique à couche protectrice comme :

$$\bar{\mathbf{G}}_v(k_z) = \bar{\mathbf{T}}_2^{EH} \cdot \left[[\bar{\mathbf{T}}_3 \cdot \bar{\mathbf{T}}_2]^{HH} - \bar{\mathbf{M}}_0 \cdot [\bar{\mathbf{T}}_3 \cdot \bar{\mathbf{T}}_2]^{EH} \right]^{-1} \cdot [\bar{\mathbf{T}}_3^{HH} - \bar{\mathbf{M}}_0 \cdot \bar{\mathbf{T}}_3^{EH}] \cdot \bar{\mathbf{Q}} \quad (2.114)$$

Les expressions dans (2.113) et (2.114) sont très compactes et simple à manier, ce qui n'est pas le cas pour les mêmes structures rapportées dans [20] et [24], respectivement. Les résultats numériques concernant ces deux structures seront présentés dans le Chapitre 4.

2.5 FORMULATION DE L'EQUATION INTEGRALE DU CHAMP ELECTRIQUE

L'équation (2.112) lie le champ électrique tangentiel et le courant électrique surfacique sur l'interface $\rho = \rho_M$ et sont exprimés dans le domaine spectral de Fourier, (ν, k_z) homologues de (ϕ, z) du domaine spatial. Par conséquent en retournant aux équations (2.7) et (2.8), on peut écrire :

$$\mathbf{E}_s(\phi, z) = \begin{bmatrix} E_\phi(\phi, z) \\ E_z(\phi, z) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ik_z z} \bar{\mathbf{G}}_v(k_z) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_v(k_z) = \mathbf{0} \quad \text{sur le patch} \quad (2.115)$$

$$\mathbf{J}_s(\phi, z) = \begin{bmatrix} J_\phi(\phi, z) \\ J_z(\phi, z) \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ik_z z} \tilde{\mathbf{J}}_\nu(k_z) = \mathbf{0} \quad \text{extérieur du patch} \quad (2.116)$$

$\tilde{\mathbf{J}}_\nu(k_z)$ est calculé via la TF bidimensionnelle en (ϕ, z) comme suit :

$$\tilde{\mathbf{J}}_\nu(k_z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi e^{-i\nu\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{-ik_z z} \mathbf{J}_s(\phi, z) \quad (2.117)$$

Les équations (2.115) et (2.116) sont les équations intégrales vectorielles duales du champ et du courant électrique respectivement. On constate bien que le champ et les courant électrique sont orthogonaux, c.a.d. le produit scalaire $\langle \mathbf{E}_s, \mathbf{J}_s \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dz \mathbf{E}_s^+ \cdot \mathbf{J}_s = 0$ car dans la région où $\mathbf{E}_s \neq \mathbf{0}$, \mathbf{J}_s l'est et vice versa.

L'étape suivante consiste à résoudre (2.115) et (2.116) par la méthode de Galerkin.

2.6 RESOLUTION DE L'EQUATION INTEGRALE PAR LA METHODE DES MOMENTS/PROCEDURE DE GALERKIN

Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons à la résolution de l'équation intégrale du champ électrique (2.115) par la méthode de Galerkin. On développe l'inconnue $\mathbf{J}_s(\phi, z)$ en série de fonctions de base selon ϕ et z formant un système complet sur la surface du patch conducteur [20], [24], [52], [54] :

$$\mathbf{J}_s(\phi, z) = \sum_{n=1}^N a_n \mathbf{J}_{\phi n}(\phi, z) + \sum_{m=1}^M b_m \mathbf{J}_{zm}(\phi, z) \quad (2.118)$$

Les sommations infinies sont tronquées à des rangs finis N et M dans l'équation (2.118) pour des fins de simulations numériques. Dans l'équation (2.118), les expressions de $\mathbf{J}_{\phi n}$ et \mathbf{J}_{zm} sont :

$$\mathbf{J}_{\phi n}(\phi, z) = \begin{cases} \begin{bmatrix} J_{\phi n}(\phi, z) \\ 0 \end{bmatrix} & \text{sur le patch} \\ \mathbf{0} & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.119)$$

$$\mathbf{J}_{zm}(\phi, z) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ J_{zm}(\phi, z) \end{bmatrix} & \text{sur le patch} \\ \mathbf{0} & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.120)$$

Les fonctions de base choisies dans cette étude sont à variables ϕ et z séparables et prennent les formes suivantes :

$$J_{\phi n}(\phi, z) = \Phi_{n_1}(\phi, \phi_0) Z_{n_2}(z, L) \quad (2.121)$$

$$J_{zm}(\phi, z) = Z_{m_1}(\phi, \phi_0) \Phi_{m_2}(z, L) \quad (2.122)$$

Les transformées bidimensionnelles de Fourier de (2.121) et (2.122) sont respectivement :

$$\tilde{\mathbf{J}}_{\phi n}(\nu, k_z) = \begin{bmatrix} \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

$$\tilde{\mathbf{J}}_{zm}(\nu, k_z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

Compte tenu des équations (2.121) et (2.122), $\tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z)$ et $\tilde{J}_{zm}(\nu, k_z)$ s'écrivent :

$$(2.125)$$

$$\tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) = \tilde{\Phi}_{n_1}(\nu, \phi_0) \tilde{Z}_{n_2}(k_z, L)$$

$$\tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) = \tilde{Z}_{m_1}(\nu, \phi_0) \tilde{\Phi}_{m_2}(k_z, L) \quad (2.126)$$

$\tilde{\Phi}_{n_1}(\nu, \phi_0)$ et $\tilde{Z}_{n_2}(k_z, L)$ étant, bien entendu, les transformées unidimensionnelles en ϕ et en z de Fourier de $\Phi_{n_1}(\phi, \phi_0)$ et $Z_{n_2}(z, L)$ respectivement. $\tilde{Z}_{m_1}(\nu, \phi_0)$ et $\tilde{\Phi}_{m_2}(k_z, L)$ étant celles de $Z_{m_1}(\phi, \phi_0)$ et $\Phi_{m_2}(z, L)$, respectivement.

$$\tilde{\Phi}_{n_1}(\nu, \phi_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-i\nu\phi} \Phi_{n_1}(\phi, \phi_0) \quad \text{et} \quad \tilde{Z}_{n_2}(k_z, L) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-i\nu\phi} Z_{n_2}(\phi, \phi_0) \quad (2.127)$$

$$\tilde{Z}_{m_1}(\nu, \phi_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i\nu z} Z_{m_1}(z, L) \quad \text{et} \quad \tilde{\Phi}_{m_2}(k_z, L) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{-ik_z z} \Phi_{m_2}(z, L) \quad (2.128)$$

Appliquons l'équation (2.117) pour la distribution de courants donnée par (2.118) tout en tenant compte de (2.119) et (2.120), on trouve :

$$\tilde{\mathbf{J}}_{\nu}(k_z) = \sum_{n=1}^N a_n \tilde{\mathbf{J}}_{\phi n}(\nu, k_z) + \sum_{m=1}^M b_m \tilde{\mathbf{J}}_{zm}(\nu, k_z) \quad (2.129)$$

Substituant (2.129) dans (2.115), on trouve :

$$\mathbf{E}_s(\phi, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ik_z z} \bar{\mathbf{G}}_{\nu}(k_z) \cdot \left[\sum_{n=1}^N a_n \tilde{\mathbf{J}}_{\phi n}(\nu, k_z) + \sum_{m=1}^M b_m \tilde{\mathbf{J}}_{zm}(\nu, k_z) \right]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s(\phi, z) = & \sum_{n=1}^N a_n \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ik_z z} \bar{\mathbf{G}}_{\nu}(k_z) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{\phi n}(\nu, k_z) \right\} + \\ & + \sum_{m=1}^M b_m \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ik_z z} \bar{\mathbf{G}}_{\nu}(k_z) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{\phi m}(\nu, k_z) \right\} \end{aligned} \quad (2.130)$$

Multiplions (2.130) à gauche par $\mathbf{J}_{\phi p}^T(\phi, z)$ et intégrons sur ϕ de $-\pi$ à π et de $-\infty$ à ∞ sur z , nous trouvons :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dz \mathbf{J}_{\phi p}^T(\phi, z) \cdot \mathbf{E}_s(\phi, z) = & \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dz \mathbf{J}_{\phi p}^T(\phi, z) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^N a_n \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ik_z z} \bar{\mathbf{G}}_{\nu}(k_z) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{\phi n}(\nu, k_z) \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^M b_m \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ik_z z} \bar{\mathbf{G}}_{\nu}(k_z) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{\phi m}(\nu, k_z) \right] \right\} \end{aligned}$$

Le membre gauche de cette équation est identiquement nul par le fait que \mathbf{E}_s et \mathbf{J}_s sont orthogonaux. Le membre droit se réécrit ainsi :

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{n=1}^N a_n \left\{ \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-i(-\nu)\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i(-k_z)z} \mathbf{J}_{\phi p}(\phi, z) \right]^T \cdot \bar{\mathbf{G}}_{\nu}(k_z) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{\phi n}(\nu, k_z) \right\} + \\ & + \sum_{m=1}^M b_m \left\{ \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-i(-\nu)\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i(-k_z)z} \mathbf{J}_{\phi p}(\phi, z) \right]^T \cdot \bar{\mathbf{G}}_{\nu}(k_z) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{\phi m}(\nu, k_z) \right\} \end{aligned}$$

Sachant que :

$$\tilde{\mathbf{J}}_{\phi p}(\nu, k_z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-i\nu\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-ik_z z} \mathbf{J}_{\phi p}(\phi, z) \quad (2.131)$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N \left\{ \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \tilde{\mathbf{J}}_{\phi p}^T(-\nu, -k_z) \cdot \bar{\mathbf{G}}_{\nu}(k_z) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{\phi n}(\nu, k_z) \right\} a_n + \\
& + \sum_{m=1}^M \left\{ \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \tilde{\mathbf{J}}_{\phi p}^T(-\nu, -k_z) \cdot \bar{\mathbf{G}}_{\nu}(k_z) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{zm}(\nu, k_z) \right\} b_m = 0
\end{aligned} \tag{2.132}$$

En testant encore une fois l'équation (130) par $\mathbf{J}_{zq}^T(\phi, z)$ tout en effectuant un calcul algébrique similaire à celui fait pour $\mathbf{J}_{\phi p}^T(\phi, z)$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N \left\{ \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \tilde{\mathbf{J}}_{zq}^T(-\nu, -k_z) \cdot \bar{\mathbf{G}}_{\nu}(k_z) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{\phi n}(\nu, k_z) \right\} a_n + \\
& + \sum_{m=1}^M \left\{ \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \tilde{\mathbf{J}}_{zq}^T(-\nu, -k_z) \cdot \bar{\mathbf{G}}_{\nu}(k_z) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{zm}(\nu, k_z) \right\} b_m = 0
\end{aligned} \tag{2.133}$$

Les deux équations (2.132) et (2.133) donnent le système linéaire homogène suivant :

$$\begin{bmatrix} \left[\bar{\mathbf{B}}_{pn}^{\phi\phi} \right]_{N \times N} & \left[\bar{\mathbf{B}}_{pn}^{\phi z} \right]_{N \times M} \\ \left[\bar{\mathbf{B}}_{qn}^{z\phi} \right]_{M \times N} & \left[\bar{\mathbf{B}}_{qm}^{zz} \right]_{M \times M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [a_n]_{N \times 1} \\ [b_m]_{M \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N \times 1} \\ \mathbf{0}_{M \times 1} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \bar{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \tag{2.134}$$

Notons les éléments du tenseur spectral de Green $\bar{\mathbf{G}}_{\nu}(k_z)$ comme suit :

$$\bar{\mathbf{G}}_{\nu}(k_z) = \begin{bmatrix} G_{\nu}^{\phi\phi}(k_z) & G_{\nu}^{\phi z}(k_z) \\ G_{\nu}^{z\phi}(k_z) & G_{\nu}^{zz}(k_z) \end{bmatrix} \tag{2.135}$$

Le théorème de réciprocité donne :

$$G_v^{z\phi}(k_z) = G_v^{\phi z}(k_z) \quad (2.136)$$

Tenant compte de (2.132), (2.133), (2.135) et (2.136), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} B_{pn}^{\phi\phi} &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \tilde{\mathbf{J}}_{\phi p}^T(-\nu, -k_z) \cdot \bar{\mathbf{G}}_v(k_z) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{\phi n}(\nu, k_z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(-\nu, -k_z) G_v^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) \\ &= \left[\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \tilde{\mathbf{J}}_{\phi p}^T(-\nu, -k_z) \cdot \bar{\mathbf{G}}_v(k_z) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{\phi n}(\nu, k_z) \right]^T = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \left[\tilde{\mathbf{J}}_{\phi p}^T(-\nu, -k_z) \cdot \bar{\mathbf{G}}_v(k_z) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{\phi n}(\nu, k_z) \right]^T \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \tilde{\mathbf{J}}_{\phi n}^T(\nu, k_z) \cdot [\bar{\mathbf{G}}_v(k_z)]^T \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{\phi p}(-\nu, -k_z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \tilde{\mathbf{J}}_{\phi n}^T(-\nu, -k_z) \cdot [\bar{\mathbf{G}}_{-\nu}(-k_z)]^T \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{\phi p}(\nu, k_z) \end{aligned}$$

or : $[\bar{\mathbf{G}}_v(k_z)]^T = \bar{\mathbf{G}}_v(k_z)$ et $\bar{\mathbf{G}}_{-\nu}(-k_z) = \bar{\mathbf{G}}_v(k_z)$ (voir Annexe A). Par conséquent, on écrit :

$$B_{pn}^{\phi\phi} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(-\nu, -k_z) G_v^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) = B_{np}^{\phi\phi}$$

En faisant le même raisonnement que pour $B_{pn}^{\phi\phi}$, on peut finalement écrire :

$$B_{pn}^{\phi\phi} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(-\nu, -k_z) G_v^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) = B_{np}^{\phi\phi} \quad (2.137)$$

$$B_{pm}^{\phi z} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(-\nu, -k_z) G_v^{\phi z}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \quad (2.138)$$

$$B_{qn}^{z\phi} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \tilde{J}_{zq}(-\nu, -k_z) G_v^{z\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) = B_{nq}^{\phi z} \quad (2.139)$$

$$B_{qm}^{zz} = \sum_{V=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \tilde{J}_{zq}(-V, -k_z) G_V^{zz}(k_z) \tilde{J}_{zm}(V, k_z) = B_{mq}^{zz} \quad (2.140)$$

avec $n, p = 1, 2, 3, \dots, N$ et $m, q = 1, 2, 3, \dots, M$.

2.7 CHOIX DU SYSTEME DE FONCTIONS DE BASE

Nous avons vu en paragraphe 6 que pour résoudre l'équation intégrale du champ électrique il faut développer l'inconnue $\mathbf{J}_s(\phi, z)$ en une série de fonctions de base connues. Ces dernières sont dictées, dans la plupart des cas, par des considérations physiques. Nous étudierons en détail trois types de fonctions de base utilisées pour représenter les courants électriques surfaciques.

2.7.1. Premier choix : sinus et cosinus sans la condition de bord [24]

Le système de fonctions de base issue du modèle de la cavité est basé sur l'approximation que la structure est considérée comme une cavité opérant en mode TM par rapport à la direction $\hat{\mathbf{p}}$, lorsque l'épaisseur de la couche diélectrique du substrat est maintenu faible devant la longueur d'onde du travail. Ce système est caractérisé par la distribution de courant suivante :

$$\Phi_n(\phi, \phi_0) = -i^{n+1} \frac{\sqrt{2\pi}}{\phi_0} \sin\left(\frac{n\pi}{2\phi_0}(\phi + \phi_0)\right) \quad |\phi| \leq \phi_0 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.141)$$

$$Z_m(z, L) = i^m \frac{\sqrt{2\pi}}{L} \cos\left(\frac{m\pi}{2L}(z + L)\right) \quad |z| \leq L \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.142)$$

Les distributions spatiales correspondantes seront déterminées par les équations (2.125) et (2.126) et l'on obtient :

$$J_{\phi_n}(\phi, z) = -\frac{2\pi}{L\phi_0} i^{n_1+n_2+1} \sin\left(\frac{n_1\pi}{2\phi_0}(\phi+\phi_0)\right) \cos\left(\frac{n_2\pi}{2L}(z+L)\right) \quad \begin{cases} |\phi| \leq \phi_0 & n_1 = 1, 2, 3, \dots \\ |z| \leq L & n_2 = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.143)$$

$$J_{z_n}(\phi, z) = -\frac{2\pi}{L\phi_0} i^{m_1+m_2+1} \cos\left(\frac{m_1\pi}{2\phi_0}(\phi+\phi_0)\right) \sin\left(\frac{m_2\pi}{2L}(z+L)\right) \quad \begin{cases} |\phi| \leq \phi_0 & m_1 = 0, 1, 2, \dots \\ |z| \leq L & m_2 = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.144)$$

Le calcul des transformées de Fourier bidimensionnelles de (2.143) et (2.144) se ramène au calcul de transformées unidimensionnelles de Fourier pour (2.141) et (2.142) comme c'est montré par les équations (2.125)-(2.126). Considérons les deux intégrales suivantes :

$$\tilde{Z}_n(\nu, \phi_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-i\nu\phi} Z_n(\phi, \phi_0) \quad \text{et} \quad \tilde{\Phi}_n(\nu, \phi_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-i\nu\phi} \Phi_n(\phi, \phi_0) \quad (2.145)$$

Considérons, en outre, leurs duales :

$$\tilde{I}_n^+(\nu, \phi_0) = \tilde{Z}_n(\nu, \phi_0) + \tilde{\Phi}_n(\nu, \phi_0) \quad \text{et} \quad \tilde{I}_n^-(\nu, \phi_0) = \tilde{Z}_n(\nu, \phi_0) - \tilde{\Phi}_n(\nu, \phi_0) \quad (2.146)$$

Tenant compte de (2.141) et (2.142), on peut trouver :

$$\tilde{I}_n^+(\nu, \phi_0) = \frac{i^n}{\phi_0} \int_{-\phi_0}^{\phi_0} d\phi e^{-i\nu\phi} e^{-i\left(\frac{n\pi}{2\phi_0}(\phi+\phi_0)\right)} \quad (2.147)$$

$$\tilde{I}_n^-(\nu, \phi_0) = \frac{i^n}{\phi_0} \int_{-\phi_0}^{\phi_0} d\phi e^{-i\nu\phi} e^{i\left(\frac{n\pi}{2\phi_0}(\phi+\phi_0)\right)} \quad (2.148)$$

d'où :

$$\tilde{I}_n^+(\nu, \phi_0) = \frac{i^n}{\phi_0} (-i)^n \int_{-\phi_0}^{\phi_0} d\phi e^{-i\left(\nu + \frac{n\pi}{2\phi_0}\right)\phi} = \frac{1}{\phi_0} \left[\frac{e^{-i\left(\nu + \frac{n\pi}{2\phi_0}\right)\phi}}{-i\left(\nu + \frac{n\pi}{2\phi_0}\right)} \right]_{-\phi_0}^{\phi_0} = \frac{e^{i\left(\nu\phi_0 + \frac{n\pi}{2}\right)} - e^{-i\left(\nu\phi_0 + \frac{n\pi}{2}\right)}}{i\left(\nu\phi_0 + \frac{n\pi}{2}\right)}$$

$$\tilde{I}_n^-(\nu, \phi_0) = \frac{i^n}{\phi_0} i^n \int_{-\phi_0}^{\phi_0} d\phi e^{-i\left(\nu - \frac{n\pi}{2\phi_0}\right)\phi} = \frac{(-1)^n}{\phi_0} \left[\frac{e^{-i\left(\nu - \frac{n\pi}{2\phi_0}\right)\phi}}{-i\left(\nu - \frac{n\pi}{2\phi_0}\right)} \right]_{-\phi_0}^{\phi_0} = (-1)^n \frac{e^{i\left(\nu\phi_0 - \frac{n\pi}{2}\right)} - e^{-i\left(\nu\phi_0 - \frac{n\pi}{2}\right)}}{i\left(\nu\phi_0 - \frac{n\pi}{2}\right)}$$

d'où, on écrit :

$$\tilde{I}_n^+(\nu, \phi_0) = 2 \operatorname{sinc}\left(\nu\phi_0 + \frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \tilde{I}_n^-(\nu, \phi_0) = 2(-1)^n \operatorname{sinc}\left(\nu\phi_0 - \frac{n\pi}{2}\right) \quad (2.149)$$

De (2.146), on trouve :

$$\tilde{Z}_n(\nu, \phi_0) = \frac{1}{2} [\tilde{I}_n^+(\nu, \phi_0) + \tilde{I}_n^-(\nu, \phi_0)] = \operatorname{sinc}\left(\nu\phi_0 + \frac{n\pi}{2}\right) + (-1)^n \operatorname{sinc}\left(\nu\phi_0 - \frac{n\pi}{2}\right) \quad (2.150)$$

$$\tilde{\Phi}_n(\nu, \phi_0) = \frac{1}{2} [\tilde{I}_n^+(\nu, \phi_0) - \tilde{I}_n^-(\nu, \phi_0)] = \text{sinc}\left(\nu\phi_0 + \frac{n\pi}{2}\right) - (-1)^n \text{sinc}\left(\nu\phi_0 - \frac{n\pi}{2}\right) \quad (2.151)$$

A partir du résultat de (2.150) et (2.151), on peut écrire :

$$\tilde{\Phi}_{n_1}(\nu, \phi_0) = \text{sinc}\left(\nu\phi_0 + \frac{n_1\pi}{2}\right) - (-1)^{n_1} \text{sinc}\left(\nu\phi_0 - \frac{n_1\pi}{2}\right) \quad n_1 = 1, 2, 3, \dots \quad (2.152)$$

$$\tilde{Z}_{n_2}(k_z, L) = \text{sinc}\left(k_z L + \frac{n_2\pi}{2}\right) + (-1)^{n_2} \text{sinc}\left(k_z L - \frac{n_2\pi}{2}\right) \quad n_2 = 0, 1, 2, \dots \quad (2.153)$$

$$\tilde{Z}_{m_1}(\nu, \phi_0) = \text{sinc}\left(\nu\phi_0 + \frac{m_1\pi}{2}\right) + (-1)^{m_1} \text{sinc}\left(\nu\phi_0 - \frac{m_1\pi}{2}\right) \quad m_1 = 0, 1, 2, \dots \quad (2.154)$$

$$\tilde{\Phi}_{m_2}(k_z, L) = \text{sinc}\left(k_z L + \frac{m_2\pi}{2}\right) - (-1)^{m_2} \text{sinc}\left(k_z L - \frac{m_2\pi}{2}\right) \quad m_2 = 1, 2, 3, \dots \quad (2.155)$$

Tenant compte de (2.125) et (2.126) ainsi que les équations (2.152)-(2.155), on écrit :

$$\tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) = \left[\text{sinc}\left(\nu\phi_0 + \frac{n_1\pi}{2}\right) - (-1)^{n_1} \text{sinc}\left(\nu\phi_0 - \frac{n_1\pi}{2}\right) \right] \cdot \left[\text{sinc}\left(k_z L + \frac{n_2\pi}{2}\right) + (-1)^{n_2} \text{sinc}\left(k_z L - \frac{n_2\pi}{2}\right) \right] \\ n_1 = 1, 2, 3, \dots \quad n_2 = 0, 1, 2, \dots \quad \text{et le nombre de couples } (n_1, n_2) \text{ égal à } N. \quad (2.156)$$

$$\tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) = \left[\text{sinc}\left(\nu\phi_0 + \frac{m_1\pi}{2}\right) + (-1)^{m_1} \text{sinc}\left(\nu\phi_0 - \frac{m_1\pi}{2}\right) \right] \cdot \left[\text{sinc}\left(k_z L + \frac{m_2\pi}{2}\right) - (-1)^{m_2} \text{sinc}\left(k_z L - \frac{m_2\pi}{2}\right) \right] \quad (2.157)$$

$m_1 = 0, 1, 2, \dots$ $m_2 = 1, 2, 3, \dots$ et le nombre de couples (m_1, m_2) égal à M .

En résumé

Pour le premier choix de fonctions de base qui consiste en des sinus et cosinus sans la condition de bord, nous avons :

$$J_{\phi n}(\phi, z) = -\frac{2\pi}{L\phi_0} i^{n_1+n_2+1} \sin\left(\frac{n_1\pi}{2\phi_0}(\phi+\phi_0)\right) \cos\left(\frac{n_2\pi}{2L}(z+L)\right) \quad \begin{cases} |\phi| \leq \phi_0 & n_1 = 1, 2, 3, \dots \\ |z| \leq L & n_2 = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.158)$$

$$J_{zm}(\phi, z) = -\frac{2\pi}{L\phi_0} i^{m_1+m_2+1} \cos\left(\frac{m_1\pi}{2\phi_0}(\phi+\phi_0)\right) \sin\left(\frac{m_2\pi}{2L}(z+L)\right) \quad \begin{cases} |\phi| \leq \phi_0 & m_1 = 0, 1, 2, \dots \\ |z| \leq L & m_2 = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.159)$$

Les transformées bidimensionnelles de Fourier de ces courants sont :

$$\tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) = \left[\operatorname{sinc}\left(\nu\phi_0 + \frac{n_1\pi}{2}\right) - (-1)^{n_1} \operatorname{sinc}\left(\nu\phi_0 - \frac{n_1\pi}{2}\right) \right] \cdot \left[\operatorname{sinc}\left(k_z L + \frac{n_2\pi}{2}\right) + (-1)^{n_2} \operatorname{sinc}\left(k_z L - \frac{n_2\pi}{2}\right) \right] \\ n_1 = 1, 2, 3, \dots \quad n_2 = 0, 1, 2, \dots \quad \text{et le nombre de couples } (n_1, n_2) \text{ égal à } N. \quad (2.160)$$

$$\tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) = \left[\operatorname{sinc}\left(\nu\phi_0 + \frac{m_1\pi}{2}\right) + (-1)^{m_1} \operatorname{sinc}\left(\nu\phi_0 - \frac{m_1\pi}{2}\right) \right] \cdot \left[\operatorname{sinc}\left(k_z L + \frac{m_2\pi}{2}\right) - (-1)^{m_2} \operatorname{sinc}\left(k_z L - \frac{m_2\pi}{2}\right) \right] \\ m_1 = 0, 1, 2, \dots \quad m_2 = 1, 2, 3, \dots \quad \text{et le nombre de couples } (m_1, m_2) \text{ égal à } M. \quad (2.161)$$

2.7.2 Deuxième choix : sinus et cosinus avec la condition de bord [20], [21], [24]

C'est le même système de fonction de base choisi précédemment mais modifié par l'ajout de termes en racines carrées aux dénominateurs pour vérifier la condition physique suivante : "Sur un conducteur électrique parfait, la composante tangentielle au contour est infinie alors que la normale à ce même contour est nulle." Pour notre structure, nous avons donc :

$$J_{\phi_n}(\phi, z)\Big|_{|\phi|=\phi_0} = J_{z_m}(\phi, z)\Big|_{|z|=L} = 0 \quad \text{et} \quad J_{\phi_n}(\phi, z)\Big|_{|z|=L} = J_{z_m}(\phi, z)\Big|_{|\phi|=\phi_0} = \infty \quad (2.162)$$

Pour ce type de fonctions de base, on propose la distribution suivante qui vérifie bien sûr la condition de bord (2.162) :

$$\Phi_n(\phi, \phi_0) = -i^{n+1} \frac{\sqrt{2\pi}}{\phi_0} \sin\left(\frac{n\pi}{2\phi_0}(\phi + \phi_0)\right) \quad |\phi| \leq \phi_0 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.163)$$

$$Z_m(z, L) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} i^m \frac{1}{L} \frac{\cos\left(\frac{m\pi}{2L}(z+L)\right)}{\sqrt{1-(z/L)^2}} \quad |z| \leq L \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.164)$$

Les distributions spatiales correspondantes seront déterminées par les équations (2.125) et (2.126) et l'on obtient :

$$J_{\phi_n}(\phi, z) = -\frac{4}{L\phi_0} i^{n_1+n_2+1} \sin\left(\frac{n_1\pi}{2\phi_0}(\phi + \phi_0)\right) \frac{\cos\left(\frac{n_2\pi}{2L}(z+L)\right)}{\sqrt{1-(z/L)^2}} \quad \begin{cases} |\phi| \leq \phi_0 & n_1 = 1, 2, 3, \dots \\ |z| \leq L & n_2 = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.165)$$

$$J_{zm}(\phi, z) = -\frac{4}{L\phi_0} i^{m_1+m_2+1} \frac{\cos\left(\frac{m_1\pi}{2\phi_0}(\phi+\phi_0)\right)}{\sqrt{1-(\phi/\phi_0)^2}} \sin\left(\frac{m_2\pi}{2L}(z+L)\right) \quad \begin{cases} |\phi| \leq \phi_0 & m_1 = 0, 1, 2, \dots \\ |z| \leq L & m_2 = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.166)$$

Les transformées de Fourier unidimensionnelles de $\Phi_n(\phi, \phi_0)$ et $Z_m(z, L)$ s'écrivent respectivement :

$$\tilde{\Phi}_n(\nu, \phi_0) = -\frac{i^{n+1}}{\phi_0} \int_{-\phi_0}^{\phi_0} d\phi e^{-i\nu\phi} \sin\left(\frac{n\pi}{2\phi_0}(\phi+\phi_0)\right) \quad (2.167)$$

$$\tilde{Z}_m(k_z, L) = \frac{2}{\pi} \frac{i^m}{L} \int_{-L}^L dz e^{-ik_z z} \frac{\cos\left(\frac{m\pi}{2L}(z+L)\right)}{\sqrt{1-(z/L)^2}} \quad (2.168)$$

Calculons $\tilde{\Phi}_n(\nu, \phi_0)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_n(\nu, \phi_0) &= -\frac{i^{n+1}}{\phi_0} \int_{-\phi_0}^{\phi_0} d\phi e^{-i\nu\phi} \sin\left(\frac{n\pi}{2\phi_0}(\phi+\phi_0)\right) = -\frac{i^{n+1}}{\phi_0} \int_{-\phi_0}^{\phi_0} d\phi e^{-i\nu\phi} \frac{e^{i\left(\frac{n\pi}{2\phi_0}(\phi+\phi_0)\right)} - e^{-i\left(\frac{n\pi}{2\phi_0}(\phi+\phi_0)\right)}}{2i} \\ &= -\frac{i^n}{2\phi_0} \left\{ i^n \int_{-\phi_0}^{\phi_0} d\phi e^{-i\left(\nu - \frac{n\pi}{2\phi_0}\right)\phi} - (-i)^n \int_{-\phi_0}^{\phi_0} d\phi e^{-i\left(\nu + \frac{n\pi}{2\phi_0}\right)\phi} \right\} = \frac{1}{2\phi_0} \left\{ \int_{-\phi_0}^{\phi_0} d\phi e^{-i\left(\nu + \frac{n\pi}{2\phi_0}\right)\phi} - (-1)^n \int_{-\phi_0}^{\phi_0} d\phi e^{-i\left(\nu - \frac{n\pi}{2\phi_0}\right)\phi} \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\phi_0} \left\{ \left[\frac{e^{-i\left(\nu + \frac{n\pi}{2\phi_0}\right)\phi}}{-i\left(\nu + \frac{n\pi}{2\phi_0}\right)} \right]_{-\phi_0}^{\phi_0} - (-1)^n \left[\frac{e^{-i\left(\nu - \frac{n\pi}{2\phi_0}\right)\phi}}{-i\left(\nu - \frac{n\pi}{2\phi_0}\right)} \right]_{-\phi_0}^{\phi_0} \right\} = \frac{e^{i\left(\nu\phi_0 + \frac{n\pi}{2}\right)} - e^{-i\left(\nu\phi_0 + \frac{n\pi}{2}\right)}}{2i\left(\nu\phi_0 + \frac{n\pi}{2}\right)} - (-1)^n \frac{e^{i\left(\nu\phi_0 - \frac{n\pi}{2}\right)} - e^{-i\left(\nu\phi_0 - \frac{n\pi}{2}\right)}}{2i\left(\nu\phi_0 - \frac{n\pi}{2}\right)}$$

d'où on écrit :

$$\tilde{\Phi}_n(\nu, \phi_0) = \text{sinc}\left(\nu\phi_0 + \frac{n\pi}{2}\right) - (-1)^n \text{sinc}\left(\nu\phi_0 - \frac{n\pi}{2}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.169)$$

Calculons également $\tilde{Z}_m(k_z, L)$:

$$\tilde{Z}_m(k_z, L) = \frac{2}{\pi} \frac{i^m}{L} \int_{-L}^L dz e^{-ik_z z} \frac{\cos\left(\frac{m\pi}{2L}(z+L)\right)}{\sqrt{1-(z/L)^2}} \quad (2.170)$$

On fait le changement de variable suivant :

$$z = -L \cos \theta \quad (2.171)$$

Alors, on aura :

$\sqrt{1-(z/L)^2} = \sin \theta \quad dz = L d\theta \sin \theta$ et les bornes d'intégration sur θ seront de 0 à π . Par conséquent, l'équation (2.170) se réécrit ainsi :

$$\tilde{Z}_m(k_z, L) = \frac{2}{\pi} \frac{i^m}{L} \int_0^\pi L d\theta \sin \theta e^{ik_z L \cos \theta} \frac{\cos\left(\frac{m\pi}{2}(1-\cos \theta)\right)}{\sin \theta} \quad \text{ou encore :}$$

$$\tilde{Z}_m(k_z, L) = 2 \frac{i^m}{\pi} \int_0^\pi d\theta e^{ik_z L \cos \theta} \cos\left(\frac{m\pi}{2}(1-\cos \theta)\right) \quad (2.172)$$

Nous avons d'autre part :

$$\cos\left(\frac{m\pi}{2}(1-\cos \theta)\right) = \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2} \cos \theta\right) + \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2} \cos \theta\right) \quad (2.173)$$

et

$$\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} [i^m + (-i)^m] = \frac{i^m}{2} [1 + (-1)^m]$$

$$\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) = \frac{1}{2i} [i^m - (-i)^m] = -i \frac{i^m}{2} [1 - (-1)^m]$$

Par conséquent, l'équation (2.173) se réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{m\pi}{2}(1-\cos \theta)\right) &= \frac{i^m}{2} [1 + (-1)^m] \cos\left(\frac{m\pi}{2} \cos \theta\right) - i \frac{i^m}{2} [1 - (-1)^m] \sin\left(\frac{m\pi}{2} \cos \theta\right) \\ &= \frac{i^m}{2} \left\{ \cos\left(\frac{m\pi}{2} \cos \theta\right) + (-1)^m \cos\left(\frac{m\pi}{2} \cos \theta\right) - i \sin\left(\frac{m\pi}{2} \cos \theta\right) + i (-1)^m \sin\left(\frac{m\pi}{2} \cos \theta\right) \right\} \end{aligned}$$

$$\cos\left(\frac{m\pi}{2}(1-\cos\theta)\right) = \frac{(-i)^m}{2} \left[e^{\frac{i m \pi}{2} \cos\theta} + (-1)^m e^{-\frac{i m \pi}{2} \cos\theta} \right] \quad (2.174)$$

Substituons alors (2.174) dans (2.172), on trouve :

$$\tilde{Z}_m(k_z, L) = 2 \frac{i^m}{\pi} \int_0^\pi d\theta e^{ik_z L \cos\theta} \frac{(-i)^m}{2} \left[e^{\frac{i m \pi}{2} \cos\theta} + (-1)^m e^{-\frac{i m \pi}{2} \cos\theta} \right]$$

ou encore :

$$\tilde{Z}_m(k_z, L) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta e^{i\left(k_z L + \frac{m\pi}{2}\right) \cos\theta} + \frac{(-1)^m}{\pi} \int_0^\pi d\theta e^{i\left(k_z L - \frac{m\pi}{2}\right) \cos\theta} \quad (2.175)$$

D'autre part, nous avons d'après [50] l'intégrale suivante :

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin\theta - n\theta) d\theta = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^\pi e^{iz \cos\theta} \cos(n\theta) d\theta \quad (2.176)$$

Appliquons cette dernière équation sur (2.176), on trouve :

$$\tilde{Z}_m(k_z, L) = J_0\left(k_z L + \frac{m\pi}{2}\right) + (-1)^m J_0\left(k_z L - \frac{m\pi}{2}\right) \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.177)$$

A partir du résultat de (2.169) et (2.177), on peut écrire :

$$\tilde{\Phi}_{n_1}(\nu, \phi_0) = \text{sinc}\left(\nu\phi_0 + \frac{n_1\pi}{2}\right) - (-1)^{n_1} \text{sinc}\left(\nu\phi_0 - \frac{n_1\pi}{2}\right) \quad n_1 = 1, 2, 3, \dots \quad (2.178)$$

$$\tilde{Z}_{n_2}(k_z, L) = J_0\left(k_z L + \frac{n_2\pi}{2}\right) + (-1)^{n_2} J_0\left(k_z L - \frac{n_2\pi}{2}\right) \quad n_2 = 0, 1, 2, \dots \quad (2.179)$$

$$\tilde{Z}_{m_1}(\nu, \phi_0) = J_0\left(\nu\phi_0 + \frac{m_1\pi}{2}\right) + (-1)^{m_1} J_0\left(\nu\phi_0 - \frac{m_1\pi}{2}\right) \quad m_1 = 0, 1, 2, \dots \quad (2.180)$$

$$\tilde{\Phi}_{m_2}(k_z, L) = \text{sinc}\left(k_z L + \frac{m_2\pi}{2}\right) - (-1)^{m_2} \text{sinc}\left(k_z L - \frac{m_2\pi}{2}\right) \quad m_2 = 1, 2, 3, \dots \quad (2.181)$$

Tenant compte de (2.125) et (2.126) ainsi que les équations (2.178)-(2.181), on écrit :

$$\tilde{J}_{\phi_n}(\nu, k_z) = \left[\text{sinc}\left(\nu\phi_0 + \frac{n_1\pi}{2}\right) - (-1)^{n_1} \text{sinc}\left(\nu\phi_0 - \frac{n_1\pi}{2}\right) \right] \cdot \left[J_0\left(k_z L + \frac{n_2\pi}{2}\right) + (-1)^{n_2} J_0\left(k_z L - \frac{n_2\pi}{2}\right) \right]$$

$$n_1 = 1, 2, 3, \dots \quad n_2 = 0, 1, 2, \dots \quad \text{et le nombre de couples } (n_1, n_2) \text{ égal à } N. \quad (2.182)$$

$$\tilde{J}_{z_m}(\nu, k_z) = \left[J_0\left(\nu\phi_0 + \frac{m_1\pi}{2}\right) + (-1)^{m_1} J_0\left(\nu\phi_0 - \frac{m_1\pi}{2}\right) \right] \cdot \left[\text{sinc}\left(k_z L + \frac{m_2\pi}{2}\right) - (-1)^{m_2} \text{sinc}\left(k_z L - \frac{m_2\pi}{2}\right) \right]$$

$$m_1 = 0, 1, 2, \dots \quad m_2 = 1, 2, 3, \dots \quad \text{et le nombre de couples } (m_1, m_2) \text{ égal à } M. \quad (2.183)$$

En résumé

Pour le deuxième type de fonctions de base qui consistent en des sinus et cosinus avec la condition de bord, nous avons :

$$J_{\phi_n}(\phi, z) = -\frac{4}{L\phi_0} i^{n_1+n_2+1} \sin\left(\frac{n_1\pi}{2\phi_0}(\phi+\phi_0)\right) \frac{\cos\left(\frac{n_2\pi}{2L}(z+L)\right)}{\sqrt{1-(z/L)^2}} \quad \begin{cases} |\phi| \leq \phi_0 & n_1 = 1, 2, 3, \dots \\ |z| \leq L & n_2 = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.184)$$

$$J_{z_m}(\phi, z) = -\frac{4}{L\phi_0} i^{m_1+m_2+1} \frac{\cos\left(\frac{m_1\pi}{2\phi_0}(\phi+\phi_0)\right)}{\sqrt{1-(\phi/\phi_0)^2}} \sin\left(\frac{m_2\pi}{2L}(z+L)\right) \quad \begin{cases} |\phi| \leq \phi_0 & m_1 = 0, 1, 2, \dots \\ |z| \leq L & m_2 = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.185)$$

Les transformées bidimensionnelles de Fourier de ces courants sont :

$$\tilde{J}_{\phi_n}(v, k_z) = \left[\operatorname{sinc}\left(v\phi_0 + \frac{n_1\pi}{2}\right) - (-1)^{n_1} \operatorname{sinc}\left(v\phi_0 - \frac{n_1\pi}{2}\right) \right] \cdot \left[J_0\left(k_z L + \frac{n_2\pi}{2}\right) + (-1)^{n_2} J_0\left(k_z L - \frac{n_2\pi}{2}\right) \right] \\ n_1 = 1, 2, 3, \dots \quad n_2 = 0, 1, 2, \dots \quad \text{et le nombre de couples } (n_1, n_2) \text{ égal à } N. \quad (2.186)$$

$$\tilde{J}_{z_m}(v, k_z) = \left[J_0\left(v\phi_0 + \frac{m_1\pi}{2}\right) + (-1)^{m_1} J_0\left(v\phi_0 - \frac{m_1\pi}{2}\right) \right] \cdot \left[\operatorname{sinc}\left(k_z L + \frac{m_2\pi}{2}\right) - (-1)^{m_2} \operatorname{sinc}\left(k_z L - \frac{m_2\pi}{2}\right) \right] \\ m_1 = 0, 1, 2, \dots \quad m_2 = 1, 2, 3, \dots \quad \text{et le nombre de couples } (m_1, m_2) \text{ égal à } M. \quad (2.187)$$

2.7.3. Troisième choix : polynômes de Chebyshev avec la condition de bord [47]

Ce type de fonctions de base est caractérisé par la distribution suivante :

$$\Phi_n(\phi, \phi_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i^n}{\phi_0} \sqrt{1 - (\phi/\phi_0)^2} U_n(\phi/\phi_0) \quad |\phi| \leq \phi_0 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.188)$$

$$Z_m(z, L) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i^m}{L} \frac{T_m(z/L)}{\sqrt{1 - (z/L)^2}} \quad |z| \leq L \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.189)$$

Les distributions spatiales correspondantes s'écrivent ainsi :

$$J_{\phi n}(\phi, z) = \Phi_{n_1}(\phi, \phi_0) Z_{n_2}(z, L) = \frac{2}{\pi} \frac{i^{n_1+n_2}}{\phi_0 L} \sqrt{\frac{1 - (\phi/\phi_0)^2}{1 - (z/L)^2}} U_{n_1}(\phi/\phi_0) T_{n_2}(z/L) \quad (2.190)$$

$$J_{zm}(\phi, z) = Z_{m_1}(\phi, \phi_0) \Phi_{m_2}(z, L) = \frac{2}{\pi} \frac{i^{m_1+m_2}}{\phi_0 L} \sqrt{\frac{1 - (z/L)^2}{1 - (\phi/\phi_0)^2}} T_{m_1}(\phi/\phi_0) U_{m_2}(z/L) \quad (2.191)$$

T_n et U_n sont les polynômes de Chebyshev de premier et du deuxième espèce et d'ordre n .

Les transformées de Fourier unidimensionnelles de $\Phi_n(\phi, \phi_0)$ et $Z_m(z, L)$ s'écrivent respectivement comme suit :

$$\tilde{\Phi}_n(\nu, \phi_0) = \frac{1}{\pi} \frac{i^n}{\phi_0} \int_{-\phi_0}^{\phi_0} d\phi e^{-i\nu\phi} \sqrt{1 - (\phi/\phi_0)^2} U_n(\phi/\phi_0) \quad (2.192)$$

$$\tilde{Z}_m(k_z, L) = \frac{1}{\pi} \frac{i^m}{L} \int_{-L}^L dz e^{-ik_z z} \frac{T_m(z/L)}{\sqrt{1 - (z/L)^2}} \quad (2.193)$$

Les deux intégrales suivantes [47] seront utilisées pour calculer $\tilde{\Phi}_n(\nu, \phi_0)$ et $\tilde{Z}_m(k_z, L)$:

$$\int_{-w}^w e^{i\zeta x} \frac{T_n(x/w)}{\sqrt{1-(x/w)^2}} dx = \pi w i^n J_n(w\zeta) \quad (2.194)$$

$$\int_{-w}^w \sqrt{1-(x/w)^2} U_n(x/w) e^{i\zeta x} dx = \pi i^n \frac{n+1}{\zeta} J_{n+1}(w\zeta) \quad (2.195)$$

En appliquant (2.194) et (2.195) sur (2.192) et (2.193), on trouve :

$$\tilde{\Phi}_n(\nu, \phi_0) = \frac{1}{\pi} \frac{i^n}{\phi_0} \left[\pi i^n \frac{n+1}{-\nu} J_{n+1}(-\nu\phi_0) \right] = (-1)^n \frac{n+1}{-\nu\phi_0} (-1)^{n+1} J_{n+1}(\nu\phi_0) = \frac{n+1}{\nu\phi_0} J_{n+1}(\nu\phi_0)$$

$$\tilde{Z}_m(k_z, L) = \frac{1}{\pi} \frac{i^m}{L} \left[\pi i^m L J_m(-k_z L) \right] = (-1)^m J_m(-k_z L) = (-1)^m (-1)^m J_m(k_z L) = J_m(k_z L)$$

d'où on écrit :

$$\tilde{\Phi}_n(\nu, \phi_0) = \frac{n+1}{\nu\phi_0} J_{n+1}(\nu\phi_0) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.196)$$

$$\tilde{Z}_m(k_z, L) = J_m(k_z L) \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.197)$$

A partir de ces résultats, on peut écrire :

$$\tilde{\Phi}_{n_1}(\nu, \phi_0) = \frac{n_1 + 1}{\nu \phi_0} J_{n_1 + 1}(\nu \phi_0) \quad n_1 = 0, 1, 2, \dots \quad (2.198)$$

$$\tilde{Z}_{n_2}(k_z, L) = J_{n_2}(k_z L) \quad n_2 = 0, 1, 2, \dots \quad (2.199)$$

$$\tilde{Z}_{m_1}(\nu, \phi_0) = J_{m_1}(\nu \phi_0) \quad m_1 = 0, 1, 2, \dots \quad (2.200)$$

$$\tilde{\Phi}_{m_2}(k_z, L) = \frac{m_2 + 1}{k_z L} J_{m_2 + 1}(k_z L) \quad m_2 = 0, 1, 2, \dots \quad (2.201)$$

Compte tenu de (2.125) et (2.126) ainsi que les résultats des équations (2.198)-(2.201), on écrit :

$$\tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) = \left[\frac{n_1 + 1}{\nu \phi_0} J_{n_1 + 1}(\nu \phi_0) \right] J_{n_2}(k_z L)$$

$n_1 = 0, 1, 2, \dots \quad n_2 = 0, 1, 2, \dots \quad \text{et le nombre de couples } (n_1, n_2) \text{ égal à } N. \quad (2.202)$

$$\tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) = J_{m_1}(\nu \phi_0) \left[\frac{m_2 + 1}{k_z L} J_{m_2 + 1}(k_z L) \right]$$

$m_1 = 0, 1, 2, \dots \quad m_2 = 0, 1, 2, \dots \quad \text{et le nombre de couples } (m_1, m_2) \text{ égal à } M. \quad (2.203)$

En résumé

Pour le troisième type de fonctions de base qui consistent en des polynômes de Chebyshev avec la condition de bord, nous avons :

$$J_{\phi n}(\phi, z) = \frac{2}{\pi} \frac{i^{n_1+n_2}}{\phi_0 L} \sqrt{\frac{1-(\phi/\phi_0)^2}{1-(z/L)^2}} U_{n_1}(\phi/\phi_0) T_{n_2}(z/L) \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots \quad (2.204)$$

$$J_{zm}(\phi, z) = \frac{2}{\pi} \frac{i^{m_1+m_2}}{\phi_0 L} \sqrt{\frac{1-(z/L)^2}{1-(\phi/\phi_0)^2}} T_{m_1}(\phi/\phi_0) U_{m_2}(z/L) \quad m_1, m_2 = 0, 1, 2, \dots \quad (2.205)$$

Le support de $J_{\phi n}(\phi, z)$ et $J_{zm}(\phi, z)$ étant la surface rectangulaire cylindrique du patch $|\phi| \leq \phi_0$ et $|z| \leq L$. Aussi le nombre de couples (n_1, n_2) est égal à N , celui des couples (m_1, m_2) égal à M .

Les transformées bidimensionnelles de Fourier de ces courants sont :

$$\tilde{J}_{\phi n}(v, k_z) = \left[\frac{n_1+1}{v\phi_0} J_{n_1+1}(v\phi_0) \right] J_{n_2}(k_z L) \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots \quad (2.206)$$

$$\tilde{J}_{zm}(v, k_z) = J_{m_1}(v\phi_0) \left[\frac{m_2+1}{k_z L} J_{m_2+1}(k_z L) \right] \quad m_1, m_2 = 0, 1, 2, \dots \quad (2.207)$$

2.8 EXPRESSIONS FINALES DES ELEMENTS DE LA MATRICE DES MOMENTS

Nous avons montré en Annexe A que le tenseur de Green et les courants présentent des symétries en (ν, k_z) . Nous avons montré également que les éléments de la matrice des moments s'expriment par une série et une intégration, les deux infinies. Il est avantageux pour l'implémentation numérique de profiter de ces propriétés de symétrie que présentent les intégrandes afin de réduire considérablement l'effort de computation. En effet,

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z F_{\nu}(k_z) \quad \text{devient} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z F_{\nu}(k_z) \quad (2.208)$$

où $F_{\nu}(k_z)$ pourrait être l'intégrande dans les équations (2.137)-(2.140). Réécrivons

$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z F_{\nu}(k_z)$ sous une forme alternative afin d'exploiter les relations de symétrie de

$F_{\nu}(k_z)$:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z F_{\nu}(k_z) &= \sum_{\nu=-\infty}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z F_{\nu}(k_z) + \int_{-\infty}^{\infty} dk_z F_0(k_z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z F_{\nu}(k_z) \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{-1} \int_{-\infty}^0 dk_z F_{\nu}(k_z) + \sum_{\nu=-\infty}^{-1} \int_0^{\infty} dk_z F_{\nu}(k_z) + \int_{-\infty}^0 dk_z F_0(k_z) + \int_0^{\infty} dk_z F_0(k_z) + \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{-\infty}^0 dk_z F_{\nu}(k_z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dk_z F_{\nu}(k_z) \end{aligned}$$

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z F_{\nu}(k_z) = \sum_{i=1}^6 \tau_i \quad (2.209)$$

Avec

$$\tau_1 = \sum_{\nu=-\infty}^{-1} \int_{-\infty}^0 dk_z F_\nu(k_z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dk_z F_{-\nu}(-k_z) \text{ après changements de variables } \nu = -\nu \text{ et } k_z = -k_z \text{ (2.210)}$$

$$\tau_2 = \sum_{\nu=-\infty}^{-1} \int_0^{\infty} dk_z F_\nu(k_z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dk_z F_{-\nu}(k_z) \text{ après changement de variable } \nu = -\nu \quad (2.211)$$

$$\tau_3 = \int_{-\infty}^0 dk_z F_0(k_z) = \int_0^{\infty} dk_z F_0(-k_z) \text{ après changement de variable } k_z = -k_z \quad (2.212)$$

$$\tau_4 = \int_0^{\infty} dk_z F_0(k_z) \quad (2.213)$$

$$\tau_5 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{-\infty}^0 dk_z F_\nu(k_z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dk_z F_\nu(-k_z) \text{ après changement de variable } k_z = -k_z \quad (2.214)$$

$$\tau_6 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dk_z F_\nu(k_z) \quad (2.215)$$

Substituons ces nouvelles expressions de τ_i dans (2.209) :

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z F_\nu(k_z) = \\ & = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dk_z F_{-\nu}(-k_z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dk_z F_{-\nu}(k_z) + \int_0^{\infty} dk_z F_0(-k_z) + \int_0^{\infty} dk_z F_0(k_z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dk_z F_\nu(-k_z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dk_z F_\nu(k_z) \\ & = \int_0^{\infty} dk_z [F_0(k_z) + F_0(-k_z)] + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dk_z [F_\nu(k_z) + F_{-\nu}(-k_z)] + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dk_z [F_{-\nu}(k_z) + F_\nu(-k_z)] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dk_z [F_0(k_z) + F_0(-k_z)] + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dk_z [F_{\nu}(k_z) + F_{-\nu}(-k_z)] +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dk_z [F_0(k_z) + F_0(-k_z)] + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dk_z [F_{-\nu}(k_z) + F_{\nu}(-k_z)]$$

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z F_{\nu}(k_z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z [F_{\nu}(k_z) + F_{-\nu}(-k_z)] + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z [F_{-\nu}(k_z) + F_{\nu}(-k_z)]$$

ou encore :

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z F_{\nu}(k_z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z [F_{\nu}(k_z) + F_{-\nu}(k_z) + F_{-\nu}(-k_z) + F_{\nu}(-k_z)] \quad (2.216)$$

Utilisons l'équation (2.216) pour déterminer les expressions des éléments des blocs constituant la matrice des moments et ce pour chaque type de courants. Nous constatons que les relations de symétrie présentées par le premier type de fonctions de base dans les équations (A27)-(A32) et celles du deuxième type de fonctions de base données par les équations (A38)-(A43) sont identiques. Nous allons donc faire nos calculs sur un seul type de courants, soit le premier par exemple :

2.8.1 Premier type de courants

Bloc $\bar{\mathbf{B}}_{pn}^{\phi\phi}$

Pour ce bloc, nous avons :

$$F_{\nu}(k_z) = \tilde{J}_{\phi p}(-\nu, -k_z) G_{\nu}^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z)$$

$$F_{-\nu}(k_z) = \tilde{J}_{\phi p}(\nu, -k_z) G_{-\nu}^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(-\nu, k_z)$$

$$F_{\nu}(-k_z) = \tilde{J}_{\phi p}(-\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi\phi}(-k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, -k_z)$$

$$F_{-\nu}(-k_z) = \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{-\nu}^{\phi\phi}(-k_z) \tilde{J}_{\phi n}(-\nu, -k_z)$$

Tenant compte de (A17), (A27)- (A32) on écrit :

$$F_{\nu}(k_z) = -(-1)^{p_1+p_2} \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z)$$

$$F_{-\nu}(k_z) = [(-1)^{p_2} \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z)] G_{\nu}^{\phi\phi}(k_z) [-(-1)^{n_1} \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z)] = -(-1)^{n_1+p_2} \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z)$$

$$F_{\nu}(-k_z) = [-(-1)^{p_1} \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z)] G_{\nu}^{\phi\phi}(k_z) [(-1)^{n_2} \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z)] = -(-1)^{p_1+n_2} \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z)$$

$$F_{-\nu}(-k_z) = \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi\phi}(k_z) [-(-1)^{n_1+n_2} \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z)] = -(-1)^{n_1+n_2} \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z)$$

En substituant ces 04 dernières équations dans (2.216), on trouve :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z F_{\nu}(k_z) = \\
& - \left[(-1)^{p_1+p_2} + (-1)^{n_1+p_2} + (-1)^{n_1+n_2} + (-1)^{p_1+n_2} \right] \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) \\
& = - \left\{ (-1)^{p_2} \left[(-1)^{p_1} + (-1)^{n_1} \right] + (-1)^{n_2} \left[(-1)^{n_1} + (-1)^{p_1} \right] \right\} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) \\
& = - \left[(-1)^{p_2} + (-1)^{n_2} \right] \left[(-1)^{p_1} + (-1)^{n_1} \right] \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) \\
& = - \frac{1}{(-1)^{n_2}} \left[(-1)^{n_2} (-1)^{p_2} + (-1)^{n_2} (-1)^{n_2} \right] \frac{1}{(-1)^{n_1}} \left[(-1)^{n_1} (-1)^{p_1} + (-1)^{n_1} (-1)^{n_1} \right] \times \\
& \quad \times \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) \\
& = (-1)^{n_1+n_2+1} \left[(-1)^{n_2+p_2} + 1 \right] \left[(-1)^{n_1+p_1} + 1 \right] \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z)
\end{aligned}$$

\Rightarrow Pour le bloc $\bar{\mathbf{B}}_{pn}^{\phi\phi}$, on a :

$$\bar{\mathbf{B}}_{pn}^{\phi\phi} = (-1)^{n_1+n_2+1} \left[1 + (-1)^{n_1+p_1} \right] \left[1 + (-1)^{n_2+p_2} \right] \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) = \bar{\mathbf{B}}_{np}^{\phi\phi} \quad (2.217)$$

Bloc $\bar{\mathbf{B}}_{pm}^{\phi_z}$

Pour ce bloc, nous avons :

$$F_V(k_z) = \tilde{\mathbf{J}}_{\phi_p}(-\nu, -k_z) G_V^{\phi_z}(k_z) \tilde{\mathbf{J}}_{z_m}(\nu, k_z)$$

$$F_{-V}(k_z) = \tilde{\mathbf{J}}_{\phi_p}(\nu, -k_z) G_{-V}^{\phi_z}(k_z) \tilde{\mathbf{J}}_{z_m}(-\nu, k_z)$$

$$F_V(-k_z) = \tilde{\mathbf{J}}_{\phi_p}(-\nu, k_z) G_V^{\phi_z}(-k_z) \tilde{\mathbf{J}}_{z_m}(\nu, -k_z)$$

$$F_{-V}(-k_z) = \tilde{\mathbf{J}}_{\phi_p}(\nu, k_z) G_{-V}^{\phi_z}(-k_z) \tilde{\mathbf{J}}_{z_m}(-\nu, -k_z)$$

Tenant compte de (A14), (A27)-(A32), on écrit :

$$F_V(k_z) = -(-1)^{p_1+p_2} \tilde{\mathbf{J}}_{\phi_p}(\nu, k_z) G_V^{\phi_z}(k_z) \tilde{\mathbf{J}}_{z_m}(\nu, k_z)$$

$$F_{-V}(k_z) = [(-1)^{p_2} \tilde{\mathbf{J}}_{\phi_p}(\nu, k_z)] [-G_V^{\phi_z}(k_z)] [(-1)^{m_1} \tilde{\mathbf{J}}_{z_m}(\nu, k_z)] = -(-1)^{m_1+p_2} \tilde{\mathbf{J}}_{\phi_p}(\nu, k_z) G_V^{\phi_z}(k_z) \tilde{\mathbf{J}}_{z_m}(\nu, k_z)$$

$$F_V(-k_z) = [(-1)^{p_1} \tilde{\mathbf{J}}_{\phi_p}(\nu, k_z)] [-G_V^{\phi_z}(k_z)] [(-1)^{m_2} \tilde{\mathbf{J}}_{z_m}(\nu, k_z)] = -(-1)^{p_1+m_2} \tilde{\mathbf{J}}_{\phi_p}(\nu, k_z) G_V^{\phi_z}(k_z) \tilde{\mathbf{J}}_{z_m}(\nu, k_z)$$

$$F_{-V}(-k_z) = \tilde{\mathbf{J}}_{\phi_p}(\nu, k_z) G_{-V}^{\phi_z}(k_z) [(-1)^{m_1+m_2} \tilde{\mathbf{J}}_{z_m}(\nu, k_z)] = -(-1)^{m_1+m_2} \tilde{\mathbf{J}}_{\phi_p}(\nu, k_z) G_V^{\phi_z}(k_z) \tilde{\mathbf{J}}_{z_m}(\nu, k_z)$$

En substituant ces 04 dernières équations dans (2.216), on trouve :

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z F_{\nu}(k_z) &= \\
& - \left[(-1)^{p_1+p_2} + (-1)^{m_1+p_2} + (-1)^{m_1+m_2} + (-1)^{p_1+m_2} \right] \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi z}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \\
&= - \left[(-1)^{m_1+p_2} + (-1)^{p_1+p_2} + (-1)^{p_1+m_2} + (-1)^{m_1+m_2} \right] \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi z}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \\
&= - \left\{ (-1)^{p_2} \left[(-1)^{m_1} + (-1)^{p_1} \right] + (-1)^{m_2} \left[(-1)^{p_1} + (-1)^{m_1} \right] \right\} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi z}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \\
&= - \left[(-1)^{m_1} + (-1)^{p_1} \right] \left[(-1)^{m_2} + (-1)^{p_2} \right] \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi z}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \\
&= - \frac{1}{(-1)^{m_1}} \left[(-1)^{m_1} (-1)^{m_1} + (-1)^{m_1} (-1)^{p_1} \right] \frac{1}{(-1)^{m_2}} \left[(-1)^{m_2} (-1)^{m_2} + (-1)^{m_2} (-1)^{p_2} \right] \times \\
& \quad \times \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi z}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \\
&= (-1)^{m_1+m_2+1} \left[1 + (-1)^{m_1+p_1} \right] \left[1 + (-1)^{m_2+p_2} \right] \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi z}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z)
\end{aligned}$$

⇒ Pour le bloc $\bar{\mathbf{B}}_{pm}^{\phi z}$, on a :

$$\bar{\mathbf{B}}_{pm}^{\phi z} = (-1)^{m_1+m_2+1} \left[1 + (-1)^{m_1+p_1} \right] \left[1 + (-1)^{m_2+p_2} \right] \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi z}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) = \bar{\mathbf{B}}_{mp}^{z\phi} \quad (2.218)$$

Bloc $\bar{\mathbf{B}}_{qm}^{zz}$

Pour ce bloc, nous avons :

$$F_{\nu}(k_z) = \tilde{\mathbf{J}}_{zq}(-\nu, -k_z) G_{\nu}^{zz}(k_z) \tilde{\mathbf{J}}_{zm}(\nu, k_z)$$

$$F_{-\nu}(k_z) = \tilde{\mathbf{J}}_{zq}(\nu, -k_z) G_{-\nu}^{zz}(k_z) \tilde{\mathbf{J}}_{zm}(-\nu, k_z)$$

$$F_{\nu}(-k_z) = \tilde{\mathbf{J}}_{zq}(-\nu, k_z) G_{\nu}^{zz}(-k_z) \tilde{\mathbf{J}}_{zm}(\nu, -k_z)$$

$$F_{-\nu}(-k_z) = \tilde{\mathbf{J}}_{zq}(\nu, k_z) G_{-\nu}^{zz}(-k_z) \tilde{\mathbf{J}}_{zm}(-\nu, -k_z)$$

Tenant compte de (A14), (A27)-(A32), on écrit :

$$F_{\nu}(k_z) = -(-1)^{q_1+q_2} \tilde{\mathbf{J}}_{zq}(\nu, k_z) G_{\nu}^{zz}(k_z) \tilde{\mathbf{J}}_{zm}(\nu, k_z)$$

$$F_{-\nu}(k_z) = \left[-(-1)^{q_2} \tilde{\mathbf{J}}_{zq}(\nu, k_z) \right] G_{\nu}^{zz}(k_z) \left[(-1)^{m_1} \tilde{\mathbf{J}}_{zm}(\nu, k_z) \right] = -(-1)^{m_1+q_2} \tilde{\mathbf{J}}_{zq}(\nu, k_z) G_{\nu}^{zz}(k_z) \tilde{\mathbf{J}}_{zm}(\nu, k_z)$$

$$F_{\nu}(-k_z) = \left[(-1)^{q_1} \tilde{\mathbf{J}}_{zq}(\nu, k_z) \right] G_{\nu}^{zz}(k_z) \left[-(-1)^{m_2} \tilde{\mathbf{J}}_{zm}(\nu, -k_z) \right] = -(-1)^{q_1+m_2} \tilde{\mathbf{J}}_{zq}(\nu, k_z) G_{\nu}^{zz}(k_z) \tilde{\mathbf{J}}_{zm}(\nu, -k_z)$$

$$F_{-\nu}(-k_z) = \tilde{\mathbf{J}}_{zq}(\nu, k_z) G_{-\nu}^{zz}(k_z) \left[-(-1)^{m_1+m_2} \tilde{\mathbf{J}}_{zm}(\nu, k_z) \right] = -(-1)^{m_1+m_2} \tilde{\mathbf{J}}_{zq}(\nu, k_z) G_{-\nu}^{zz}(k_z) \tilde{\mathbf{J}}_{zm}(\nu, k_z)$$

En substituant ces 04 dernières équations dans (2.216), on trouve :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z F_{\nu}(k_z) = \\
& - \left[(-1)^{q_1+q_2} + (-1)^{m_1+q_2} + (-1)^{m_1+m_2} + (-1)^{q_1+m_2} \right] \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{zq}(\nu, k_z) G_{\nu}^{zz}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \\
& = - \left[(-1)^{m_1+q_2} + (-1)^{q_1+q_2} + (-1)^{q_1+m_2} + (-1)^{m_1+m_2} \right] \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{zq}(\nu, k_z) G_{\nu}^{zz}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \\
& = - \left\{ (-1)^{q_2} \left[(-1)^{m_1} + (-1)^{q_1} \right] + (-1)^{m_2} \left[(-1)^{q_1} + (-1)^{m_1} \right] \right\} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{zq}(\nu, k_z) G_{\nu}^{zz}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \\
& = - \left[(-1)^{m_1} + (-1)^{q_1} \right] \left[(-1)^{m_2} + (-1)^{q_2} \right] \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{zq}(\nu, k_z) G_{\nu}^{zz}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \\
& = - \frac{1}{(-1)^{m_1}} \left[(-1)^{m_1} (-1)^{m_1} + (-1)^{m_1} (-1)^{q_1} \right] \frac{1}{(-1)^{m_2}} \left[(-1)^{m_2} (-1)^{m_2} + (-1)^{m_2} (-1)^{q_2} \right] \times \\
& \quad \times \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{zq}(\nu, k_z) G_{\nu}^{zz}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \\
& = (-1)^{m_1+m_2+1} \left[1 + (-1)^{m_1+q_1} \right] \left[1 + (-1)^{m_2+q_2} \right] \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{zq}(\nu, k_z) G_{\nu}^{zz}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z)
\end{aligned}$$

⇒ Pour le bloc $\bar{\mathbf{B}}_{qm}^{zz}$, on a :

$$\bar{\mathbf{B}}_{qm}^{zz} = (-1)^{m_1+m_2+1} \left[1 + (-1)^{m_1+q_1} \right] \left[1 + (-1)^{m_2+q_2} \right] \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{0\nu}} \int dk_z \tilde{J}_{zq}(\nu, k_z) G_{\nu}^{zz}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) = \bar{\mathbf{B}}_{mq}^{zz} \quad (2.219)$$

2.8.2 Troisième type de courants

Bloc $\bar{\mathbf{B}}_{pn}^{\phi\phi}$

Pour ce bloc, nous avons :

$$F_{\nu}(k_z) = \tilde{J}_{\phi p}(-\nu, -k_z) G_{\nu}^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z)$$

$$F_{-\nu}(k_z) = \tilde{J}_{\phi p}(\nu, -k_z) G_{-\nu}^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(-\nu, k_z)$$

$$F_{\nu}(-k_z) = \tilde{J}_{\phi p}(-\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi\phi}(-k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, -k_z)$$

$$F_{-\nu}(-k_z) = \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{-\nu}^{\phi\phi}(-k_z) \tilde{J}_{\phi n}(-\nu, -k_z)$$

Tenant compte de (A48)-(A53) on écrit :

$$F_{\nu}(k_z) = (-1)^{p_1+p_2} \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z)$$

$$F_{-v}(k_z) = \left[(-1)^{p_2} \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) \right] G_v^{\phi\phi}(k_z) \left[(-1)^{n_1} \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) \right] = (-1)^{n_1+p_2} \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_v^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z)$$

$$F_v(-k_z) = \left[(-1)^{p_1} \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) \right] G_v^{\phi\phi}(k_z) \left[(-1)^{n_2} \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) \right] = (-1)^{p_1+n_2} \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_v^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z)$$

$$F_{-v}(-k_z) = \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_v^{\phi\phi}(k_z) \left[(-1)^{n_1+n_2} \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) \right] = (-1)^{n_1+n_2} \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_v^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z)$$

En substituant ces 04 dernières équations dans (2.216), on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z F_v(k_z) &= \\ & \left[(-1)^{p_1+p_2} + (-1)^{n_1+p_2} + (-1)^{n_1+n_2} + (-1)^{p_1+n_2} \right] \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0v}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_v^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) \\ &= \left[(-1)^{n_1+p_2} + (-1)^{p_1+p_2} + (-1)^{n_1+n_2} + (-1)^{p_1+n_2} \right] \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0v}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_v^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) \\ &= \left\{ (-1)^{p_2} \left[(-1)^{n_1} + (-1)^{p_1} \right] + (-1)^{n_2} \left[(-1)^{n_1} + (-1)^{p_1} \right] \right\} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0v}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_v^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) \\ &= \left[(-1)^{n_1} + (-1)^{p_1} \right] \left[(-1)^{n_2} + (-1)^{p_2} \right] \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0v}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_v^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(-1)^{n_1}} \left[(-1)^{n_1} (-1)^{n_1} + (-1)^{n_1} (-1)^{p_1} \right] \frac{1}{(-1)^{n_2}} \left[(-1)^{n_2} (-1)^{n_2} + (-1)^{n_2} (-1)^{p_2} \right] \times \\
&\quad \times \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) \\
&= (-1)^{n_1+n_2} \left[1 + (-1)^{n_1+p_1} \right] \left[1 + (-1)^{n_2+p_2} \right] \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z)
\end{aligned}$$

\Rightarrow Pour le bloc $\bar{\mathbf{B}}_{pn}^{\phi\phi}$, on a :

$$\bar{\mathbf{B}}_{pn}^{\phi\phi} = (-1)^{n_1+n_2} \left[1 + (-1)^{n_1+p_1} \right] \left[1 + (-1)^{n_2+p_2} \right] \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi\phi}(k_z) \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) = \bar{\mathbf{B}}_{np}^{\phi\phi} \quad (2.220)$$

Bloc $\bar{\mathbf{B}}_{pm}^{\phi z}$

Pour ce bloc, nous avons :

$$F_{\nu}(k_z) = \tilde{J}_{\phi p}(-\nu, -k_z) G_{\nu}^{\phi z}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z)$$

$$F_{-\nu}(k_z) = \tilde{J}_{\phi p}(\nu, -k_z) G_{-\nu}^{\phi z}(k_z) \tilde{J}_{zm}(-\nu, k_z)$$

$$F_{\nu}(-k_z) = \tilde{J}_{\phi p}(-\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi z}(-k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, -k_z)$$

$$F_{-\nu}(-k_z) = \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{-\nu}^{\phi z}(-k_z) \tilde{J}_{zm}(-\nu, -k_z)$$

Tenant compte de (A48)-(A53), on écrit :

$$F_V(k_z) = (-1)^{p_1+p_2} \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_V^{\phi z}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z)$$

$$F_{-V}(k_z) = [(-1)^{p_2} \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z)] [-G_V^{\phi z}(k_z)] [(-1)^{m_1} \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z)] = -(-1)^{m_1+p_2} \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_V^{\phi z}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z)$$

$$F_V(-k_z) = [(-1)^{p_1} \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z)] [-G_V^{\phi z}(k_z)] [(-1)^{m_2} \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z)] = -(-1)^{p_1+m_2} \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_V^{\phi z}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z)$$

$$F_{-V}(-k_z) = \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_V^{\phi z}(k_z) [(-1)^{m_1+m_2} \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z)] = (-1)^{m_1+m_2} \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_V^{\phi z}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z)$$

En substituant ces 04 dernières équations dans (2.216), on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{V=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z F_V(k_z) &= \\ & \left[(-1)^{p_1+p_2} - (-1)^{m_1+p_2} + (-1)^{m_1+m_2} - (-1)^{p_1+m_2} \right] \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_V^{\phi z}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \\ &= \left\{ (-1)^{p_2} \left[(-1)^{p_1} - (-1)^{m_1} \right] + (-1)^{m_2} \left[(-1)^{m_1} - (-1)^{p_1} \right] \right\} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_V^{\phi z}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \\ &= \left[(-1)^{p_1} - (-1)^{m_1} \right] \left[(-1)^{p_2} - (-1)^{m_2} \right] \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_V^{\phi z}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(-1)^{p_1}} \left[(-1)^{p_1} (-1)^{p_1} - (-1)^{p_1} (-1)^{m_1} \right] \frac{1}{(-1)^{p_2}} \left[(-1)^{p_2} (-1)^{p_2} - (-1)^{p_2} (-1)^{m_2} \right] \times \\
&\quad \times \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi z}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \\
&= (-1)^{p_1+p_2} \left[1 - (-1)^{m_1+p_1} \right] \left[1 - (-1)^{m_2+p_2} \right] \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi z}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z)
\end{aligned}$$

⇒ Pour le bloc $\bar{\mathbf{B}}_{pm}^{\phi z}$, on a :

$$\bar{\mathbf{B}}_{pm}^{\phi z} = (-1)^{p_1+p_2} \left[1 - (-1)^{m_1+p_1} \right] \left[1 - (-1)^{m_2+p_2} \right] \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{\phi p}(\nu, k_z) G_{\nu}^{\phi z}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) = \bar{\mathbf{B}}_{mp}^{z\phi} \quad (2.221)$$

Bloc $\bar{\mathbf{B}}_{qm}^{zz}$

Pour ce bloc, nous avons :

$$F_{\nu}(k_z) = \tilde{J}_{zq}(-\nu, -k_z) G_{\nu}^{zz}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z)$$

$$F_{-\nu}(k_z) = \tilde{J}_{zq}(\nu, -k_z) G_{-\nu}^{zz}(k_z) \tilde{J}_{zm}(-\nu, k_z)$$

$$F_{\nu}(-k_z) = \tilde{J}_{zq}(-\nu, k_z) G_{\nu}^{zz}(-k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, -k_z)$$

$$F_{-\nu}(-k_z) = \tilde{J}_{zq}(\nu, k_z) G_{-\nu}^{zz}(-k_z) \tilde{J}_{zm}(-\nu, -k_z)$$

Tenant compte de (A48)-(A53), on écrit :

$$F_{\nu}(k_z) = (-1)^{q_1+q_2} \tilde{J}_{zq}(\nu, k_z) G_{\nu}^{zz}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z)$$

$$F_{-\nu}(k_z) = \left[(-1)^{q_2} \tilde{J}_{zq}(\nu, k_z) \right] G_{\nu}^{zz}(k_z) \left[(-1)^{m_1} \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \right] = (-1)^{m_1+q_2} \tilde{J}_{zq}(\nu, k_z) G_{\nu}^{zz}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z)$$

$$F_{\nu}(-k_z) = \left[(-1)^{q_1} \tilde{J}_{zq}(\nu, k_z) \right] G_{\nu}^{zz}(k_z) \left[(-1)^{m_2} \tilde{J}_{zm}(\nu, -k_z) \right] = (-1)^{q_1+m_2} \tilde{J}_{zq}(\nu, k_z) G_{\nu}^{zz}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, -k_z)$$

$$F_{-\nu}(-k_z) = \tilde{J}_{zq}(\nu, k_z) G_{\nu}^{zz}(k_z) \left[(-1)^{m_1+m_2} \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \right] = (-1)^{m_1+m_2} \tilde{J}_{zq}(\nu, k_z) G_{\nu}^{zz}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z)$$

En substituant ces 04 dernières équations dans (2.216), on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z F_{\nu}(k_z) &= \\ & \left[(-1)^{q_1+q_2} + (-1)^{m_1+q_2} + (-1)^{m_1+m_2} + (-1)^{q_1+m_2} \right] \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{zq}(\nu, k_z) G_{\nu}^{zz}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \\ &= \left[(-1)^{m_1+q_2} + (-1)^{q_1+q_2} + (-1)^{m_1+m_2} + (-1)^{q_1+m_2} \right] \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{zq}(\nu, k_z) G_{\nu}^{zz}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \\ &= \left\{ (-1)^{q_2} \left[(-1)^{m_1} + (-1)^{q_1} \right] + (-1)^{m_2} \left[(-1)^{m_1} + (-1)^{q_1} \right] \right\} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+\delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{zq}(\nu, k_z) G_{\nu}^{zz}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[(-1)^{m_1} + (-1)^{q_1} \right] \left[(-1)^{m_2} + (-1)^{q_2} \right] \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{zq}(\nu, k_z) G_{\nu}^{zz}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \\
&= \frac{1}{(-1)^{m_1}} \left[(-1)^{m_1} (-1)^{m_1} + (-1)^{m_1} (-1)^{q_1} \right] \frac{1}{(-1)^{m_2}} \left[(-1)^{m_2} (-1)^{m_2} + (-1)^{m_2} (-1)^{q_2} \right] \times \\
&\quad \times \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{zq}(\nu, k_z) G_{\nu}^{zz}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \\
&= (-1)^{m_1+m_2} \left[1 + (-1)^{m_1+q_1} \right] \left[1 + (-1)^{m_2+q_2} \right] \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{zq}(\nu, k_z) G_{\nu}^{zz}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z)
\end{aligned}$$

⇒ Pour le bloc $\bar{\mathbf{B}}_{qm}^{zz}$, on a :

$$\bar{\mathbf{B}}_{qm}^{zz} = (-1)^{m_1+m_2} \left[1 + (-1)^{m_1+q_1} \right] \left[1 + (-1)^{m_2+q_2} \right] \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{0\nu}} \int_0^{\infty} dk_z \tilde{J}_{zq}(\nu, k_z) G_{\nu}^{zz}(k_z) \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) = \bar{\mathbf{B}}_{mq}^{zz} \quad (2.222)$$

Chapitre 3

Champs rayonnés lointains

3.1 Calcul du champ rayonné lointain pour une structure microbande cylindrique par la méthode de la phase stationnaire

A partir des équations (2.62)-(2.64), les composantes spectrales du champ électrique dans la région d'air (espace libre) sont données par :

$$\tilde{E}_{v\rho}(\rho, k_z) = a_v^e \frac{ik_z}{k_\rho} \dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho) - a_v^h \frac{\omega\mu}{k_\rho} \frac{v}{k_\rho \rho} H_v^{(1)}(k_\rho \rho) \quad (3.1)$$

$$\tilde{E}_{v\phi}(\rho, k_z) = -a_v^e \frac{k_z}{k_\rho} \frac{v}{k_\rho \rho} H_v^{(1)}(k_\rho \rho) - a_v^h \frac{i\omega\mu}{k_\rho} \dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho) \quad (3.2)$$

$$\tilde{E}_{vz}(\rho, k_z) = a_v^e H_v^{(1)}(k_\rho \rho) \quad (3.3)$$

Pour les arguments larges, les formes asymptotiques de $H_v^{(1)}(x)$ et $\dot{H}_v^{(1)}(x)$ sont données par [48] :

$$H_v^{(1)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{i\pi x}} i^{-v} e^{ix} \quad (3.4)$$

$$\dot{H}_v^{(1)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{i\pi x}} e^{ix} \left(i^{1-v} - \frac{i^{-v}}{2x} \right) \quad (3.5)$$

En utilisant (3.4) et (3.5), $H_v^{(1)}(k_\rho \rho)$ et $\dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho)$ pour les larges valeurs de $k_\rho \rho$ sont données alors par :

$$H_v^{(1)}(k_\rho \rho) \xrightarrow{k_\rho \rho \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{i\pi k_\rho \rho}} i^{-v} e^{ik_\rho \rho} \quad (3.6)$$

$$\dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho) \xrightarrow{k_\rho \rho \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{i\pi k_\rho \rho}} e^{ik_\rho \rho} \left(i^{1-v} - \frac{i^{-v}}{2k_\rho \rho} \right) \quad (3.7)$$

Les composantes du champ électrique dans le domaine spatial et dans la région d'air sont obtenues à partir des transformées de Fourier inverses des équations (3.1)-(3.3) :

$$E_{v\rho}(\rho, \phi, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{iv\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ik_z z} \frac{ik_z}{k_\rho} a_v^e \dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho) - \frac{1}{2\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} v e^{iv\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ik_z z} \frac{\omega\mu_0}{k_\rho^2} a_v^h H_v^{(1)}(k_\rho \rho) \quad (3.8)$$

$$E_{v\phi}(\rho, \phi, z) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} v e^{iv\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ik_z z} \frac{k_z}{k_\rho^2} a_v^e H_v^{(1)}(k_\rho \rho) - \frac{1}{2\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{iv\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ik_z z} \frac{i\omega\mu_0}{k_\rho} a_v^h \dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho) \quad (3.9)$$

$$E_{vz}(\rho, \phi, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{iv\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ik_z z} a_v^e H_v^{(1)}(k_\rho \rho) \quad (3.10)$$

Portons les équations (3.6) et (3.7) dans (3.8)-(3.10), on aura alors :

$$E_{v\rho}(\rho, \phi, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} i e^{iv\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ik_z z} \frac{k_z}{k_\rho} a_v^e \sqrt{\frac{2}{i\pi k_\rho \rho}} e^{ik_\rho \rho} \left(i^{1-v} - \frac{i^{-v}}{2k_\rho \rho} \right) - \frac{1}{2\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} v e^{iv\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ik_z z} \frac{\omega\mu_0}{k_\rho^2} a_v^h \sqrt{\frac{2}{i\pi k_\rho \rho}} i^{-v} e^{ik_\rho \rho} \quad (3.11)$$

$$E_{v\phi}(\rho, \phi, z) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} v e^{iv\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ik_z z} \frac{k_z}{k_\rho^2} a_v^e \sqrt{\frac{2}{i\pi k_\rho \rho}} i^{-v} e^{ik_\rho \rho} - \frac{1}{2\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} i e^{iv\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ik_z z} \frac{\omega\mu_0}{k_\rho} a_v^h \sqrt{\frac{2}{i\pi k_\rho \rho}} e^{ik_\rho \rho} \left(i^{1-v} - \frac{i^{-v}}{2k_\rho \rho} \right) \quad (3.12)$$

$$E_{vz}(\rho, \phi, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{iv\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ik_z z} a_v^e \sqrt{\frac{2}{i\pi k_\rho \rho}} i^{-v} e^{ik_\rho \rho} \quad (3.13)$$

Utilisons maintenant la méthode de la phase stationnaire pour calculer les intégrales rencontrées dans les équations (3.11)-(3.13) pour $k_\rho \rho \rightarrow \infty$.

Résumons la méthode comme suit [49]:

Soit à calculer l'intégrale

$$I = \int_C dt e^{\lambda h(t)} f(t) \quad (3.14)$$

où C est un contour quelconque spécifiant le chemin d'intégration.

L'intégrale (3.14) est donnée asymptotiquement par :

$$I \approx e^{\lambda h(t_0)} f(t_0) \sqrt{\frac{-2\pi}{\lambda h''(t_0)}}, \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (3.15)$$

où t_0 est le point à phase stationnaire et $h''(t_0) = \frac{d^2 h(t_0)}{dt^2}$.

Pour notre cas les intégrales rencontrées sont du type

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dk_z f(k_z) e^{\lambda rh(k_z)} \quad (3.16)$$

où $h(k_z) = k_\rho \frac{\rho}{r} + k_z \frac{z}{r} = k_\rho \sin \theta + k_z \cos \theta$ avec $\rho = r \sin \theta$, $z = r \cos \theta$, $\lambda \equiv ir$ et $t_0 \equiv k_{zs}$.

k_{zs} est le point à phase stationnaire considéré comme étant la solution de l'équation suivante:

$$\frac{d}{dk_z} [k_\rho \sin \theta + k_z \cos \theta] = 0 \quad (3.17)$$

Sachant que $k_\rho^2 = k_0^2 - k_z^2$, la solution de (3.17) donne les points à phase stationnaire suivants :

$$(3.18)$$

$$k_{zs} = k_0 \cos \theta \quad \text{et} \quad k_{\rho s} = k_0 \sin \theta$$

on aussi

$$h(k_{zs}) = k_0 \quad (3.19)$$

et

$$h''(k_{zs}) = -\frac{1}{k_0 \sin^2 \theta} \quad (3.20)$$

Dans ces conditions l'intégrale (3.16) est approchée par :

$$I \approx f(k_{zs}) \sqrt{\frac{2\pi k_0}{ir}} \sin \theta e^{ik_0 r}, \quad k_{\rho} \rho \rightarrow \infty \quad (3.21)$$

Utilisons maintenant (3.21) pour calculer $E_{v\rho}(\rho, \theta, \phi)$, $E_{v\phi}(\rho, \theta, \phi)$ et $E_{vz}(\rho, \theta, \phi)$.

On peut écrire (3.8) sous la forme :

$$E_{v\rho}(\rho, \phi, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} i e^{iv\phi} \cdot I_1 - \frac{1}{2\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} i^{-v} v e^{iv\phi} \cdot I_2 \quad (3.22)$$

avec

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ir(k_{\rho} \sin \theta + k_z \cos \theta)} a_v^e \frac{k_z}{k_{\rho}} \sqrt{\frac{2}{i\pi k_{\rho} \rho}} \left(i^{1-v} - \frac{i^{-v}}{2k_{\rho} \rho} \right), \quad (3.23)$$

et

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ir(k_{\rho} \sin \theta + k_z \cos \theta)} a_v^h \frac{\omega \mu_0}{k_{\rho}^2 \rho} \sqrt{\frac{2}{i\pi k_{\rho} \rho}} \quad (3.24)$$

Calculons I_1

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ir(k_{\rho} \sin \theta + k_z \cos \theta)} f(k_z) \quad (3.25)$$

avec

$$f(k_z) = a_v^e \frac{k_z}{k_\rho} \sqrt{\frac{2}{i\pi k_\rho \rho}} \left(i^{1-\nu} - \frac{i^{-\nu}}{2k_\rho \rho} \right) \quad (3.26)$$

$f(k_{zs})$ est alors donnée par :

$$f(k_{zs}) = a_v^e \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \sqrt{\frac{2}{i\pi r k_0}} \left(i^{1-\nu} - \frac{i^{-\nu}}{2k_0 r \sin^2 \theta} \right) \quad (3.27)$$

I_1 est approchée donc par :

$$I_1 \approx -\frac{2i \cos \theta}{r \sin \theta} \left(i^{1-\nu} - \frac{i^{-\nu}}{2rk_0 \sin^2 \theta} \right) e^{ik_0 r} a_v^e \quad (3.28)$$

Calculons I_2

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ir(k_\rho \sin \theta + k_z \cos \theta)} f(k_z) \quad (3.29)$$

avec cette fois-ci

$$f(k_z) = a_v^h \frac{\omega \mu_0}{k_\rho^2} \sqrt{\frac{2}{i\pi k_\rho \rho}} \quad (3.30)$$

$f(k_{zs})$ est alors donnée par :

$$f(k_{zs}) = a_v^h \frac{\omega \mu_0}{k_0^2 r \sin^4 \theta} \sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 r}} \quad (3.31)$$

et I_2 est approchée alors par :

$$I_2 \approx -\frac{2i}{r^2} \frac{\omega\mu_0}{k_0^2 \sin^3 \theta} e^{ik_0 r} a_v^h \quad (3.32)$$

On réécrit alors (3.22) comme suit :

$$E_{v\rho}(\rho, \phi, z) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} i e^{iv\phi} \cdot \frac{2i \cos \theta}{r \sin \theta} \left(i^{1-v} - \frac{i^{-v}}{2rk_0 \sin^2 \theta} \right) e^{ik_0 r} a_v^e + \frac{1}{2\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} i^{-v} v e^{iv\phi} \cdot \frac{2i}{r^2} \frac{\omega\mu_0}{k_0^2 \sin^3 \theta} e^{ik_0 r} a_v^h$$

ou encore en négligeant les termes en $\frac{1}{r^2}$:

$$E_{v\rho}(\rho, \phi, z) = i \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{e^{ik_0 r}}{\pi r} \sum_{v=-\infty}^{\infty} (-i)^v e^{iv\phi} \cdot a_v^e \quad (3.33)$$

Calculons maintenant $E_{v\phi}(\rho, \theta, \phi)$

$$E_{v\phi}(\rho, \phi, z) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} v i^{-v} e^{iv\phi} \cdot I_1 - \frac{1}{2\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} i e^{iv\phi} \cdot I_2 \quad (3.34)$$

avec

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ir(k_\rho \sin \theta + k_z \cos \theta)} a_v^e \frac{k_z}{k_\rho^2 \rho} \sqrt{\frac{2}{i\pi k_\rho \rho}}, \quad (3.35)$$

et

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ir(k_\rho \sin \theta + k_z \cos \theta)} a_v^h \frac{\omega\mu_0}{k_\rho} \sqrt{\frac{2}{i\pi k_\rho \rho}} \left(i^{1-v} - \frac{i^{-v}}{2k_\rho \rho} \right) \quad (3.36)$$

Calculons I_1

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ir(k_\rho \sin \theta + k_z \cos \theta)} f(k_z) \quad (3.37)$$

avec

$$f(k_z) = a_v^e \frac{k_z}{k_\rho^2 \rho} \sqrt{\frac{2}{i\pi k_\rho \rho}} \quad (3.38)$$

$f(k_{zs})$ est alors donnée par :

$$f(k_{zs}) = a_v^e \frac{\cos \theta}{k_0^2 r \sin^3 \theta} \sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 r}} \quad (3.39)$$

I_1 est approchée donc par :

$$I_1 \approx -\frac{2i}{r^2} \frac{\cos \theta}{k_0^2 \sin^2 \theta} e^{ik_0 r} a_v^e \quad (3.40)$$

Calculons I_2

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ir(k_\rho \sin \theta + k_z \cos \theta)} f(k_z) \quad (3.41)$$

avec cette fois-ci

$$f(k_z) = a_v^h \frac{\omega \mu_0}{k_\rho} \sqrt{\frac{2}{i\pi k_\rho \rho}} \left(i^{1-\nu} - \frac{i^{-\nu}}{2k_\rho \rho} \right) \quad (3.42)$$

$f(k_{zs})$ est alors donnée par :

$$f(k_{zs}) = a_v^h \frac{\omega\mu_0}{k_0 \sin^2 \theta} \sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 r}} \left(i^{1-\nu} - \frac{i^{-\nu}}{2k_0 r \sin^2 \theta} \right) \quad (3.43)$$

et I_2 est approchée alors par :

$$I_2 \approx -\frac{2i}{r} \frac{\omega\mu_0}{k_0 \sin \theta} \left(i^{1-\nu} - \frac{i^{-\nu}}{2k_0 r \sin^2 \theta} \right) e^{ik_0 r} a_v^h \quad (3.44)$$

On écrit alors $E_{v\phi}(\rho, \theta, \phi)$ comme suit :

$$E_{v\phi}(\rho, \phi, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nu i^{-\nu} e^{i\nu\phi} \cdot \frac{2i}{r^2} \frac{\cos \theta}{k_0^2 \sin^2 \theta} e^{ik_0 r} a_v^e + \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} i e^{i\nu\phi} \cdot \frac{2i}{r} \frac{\omega\mu_0}{k_0 \sin \theta} \left(i^{1-\nu} - \frac{i^{-\nu}}{2k_0 r \sin^2 \theta} \right) e^{ik_0 r} a_v^h$$

ou encore en négligeant les termes en $\frac{1}{r^2}$:

$$E_{v\phi}(\rho, \phi, z) = -i \frac{\eta_0}{\sin \theta} \frac{e^{ik_0 r}}{\pi r} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-i)^\nu e^{i\nu\phi} \cdot a_v^h \quad (3.45)$$

Calculons enfin $E_{vz}(\rho, \theta, \phi)$

$$E_{v\phi}(\rho, \phi, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu\phi} \cdot I \quad (3.46)$$

avec

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ir(k_\rho \sin \theta + k_z \cos \theta)} a_v^e \sqrt{\frac{2}{i\pi k_\rho \rho}}, \quad (3.47)$$

Calculons I

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dk_z e^{ir(k_\rho \sin \theta + k_z \cos \theta)} f(k_z) \quad (3.48)$$

avec

$$f(k_z) = a_v^e \sqrt{\frac{2}{i\pi k_\rho \rho}} \quad (3.49)$$

$f(k_{z_s})$ est alors donnée par :

$$f(k_{z_s}) = \frac{a_v^e}{\sin \theta} \sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 r}} \quad (3.50)$$

I est approchée donc par :

$$I \approx -\frac{2i}{r} e^{ik_0 r} a_v^e \quad (3.51)$$

On écrit alors $E_{v_z}(\rho, \theta, \phi)$ comme suit :

$$E_{v_z}(\rho, \phi, z) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{iv\phi} \cdot \frac{2i}{r} e^{ik_0 r} a_v^e \quad (3.52)$$

soit

$$E_{v_z}(\rho, \phi, z) = -i \frac{e^{ik_0 r}}{\pi r} \sum_{v=-\infty}^{\infty} (-i)^v e^{iv\phi} \cdot a_v^e \quad (3.53)$$

Résumons maintenant les résultats comme suit :

$$E_{\nu\rho}(\rho, \phi, z) = i \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{e^{ik_0 r}}{\pi r} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-i)^\nu e^{i\nu\phi} \cdot a_\nu^e \quad (3.54)$$

$$E_{\nu\phi}(\rho, \phi, z) = -i \frac{\eta_0}{\sin \theta} \frac{e^{ik_0 r}}{\pi r} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-i)^\nu e^{i\nu\phi} \cdot a_\nu^h \quad (3.55)$$

$$E_{\nu z}(\rho, \phi, z) = -i \frac{e^{ik_0 r}}{\pi r} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-i)^\nu e^{i\nu\phi} \cdot a_\nu^e \quad (3.56)$$

Effectuons maintenant la transformation en coordonnées sphériques suivante :

$$\begin{bmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_\rho \\ E_\phi \\ E_z \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Alors on a :

$$E_r(r, \theta, \phi) = E_\rho(\rho, \phi, z) \sin \theta + E_z(\rho, \phi, z) \cos \theta \quad (3.58)$$

$$E_\theta(r, \theta, \phi) = E_\rho(\rho, \phi, z) \cos \theta - E_z(\rho, \phi, z) \sin \theta \quad (3.59)$$

$$E_\phi(r, \theta, \phi) = E_\phi(\rho, \phi, z) \quad (3.60)$$

Pour $E_r(r, \theta, \phi)$ on a :

$$E_r(r, \theta, \phi) = i \frac{e^{ik_0 r}}{\pi r} [\cos \theta - \cos \theta] \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-i)^\nu e^{i\nu\phi} \cdot a_\nu^e$$

D'où :

$$E_r(r, \theta, \phi) = 0 \quad (3.61)$$

Pour $E_\theta(r, \theta, \phi)$ on a :

$$E_\theta(r, \theta, \phi) = \frac{i}{\sin \theta} \frac{e^{ik_0 r}}{\pi r} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-i)^\nu e^{i\nu\phi} \cdot a_\nu^e \quad (3.62)$$

Et pour $E_\phi(r, \theta, \phi)$ on a :

$$E_\phi(\rho, \phi, z) = -i \frac{\eta_0}{\sin \theta} \frac{e^{ik_0 r}}{\pi r} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-i)^\nu e^{i\nu\phi} \cdot a_\nu^h \quad (3.63)$$

Donc au final le champ rayonné lointain, pour une structure d'antenne microbande multicouche cylindrique, est donné dans les coordonnées sphériques par les expressions suivantes :

$$E_r(r, \theta, \phi) = 0 \quad (3.64)$$

$$E_\theta(r, \theta, \phi) = \frac{i}{\sin \theta} \frac{e^{ik_0 r}}{\pi r} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-i)^\nu e^{i\nu\phi} \cdot a_\nu^e(k_0 \cos \theta) \quad (3.65)$$

$$E_\phi(\rho, \phi, z) = -i \frac{\eta_0}{\sin \theta} \frac{e^{ik_0 r}}{\pi r} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-i)^\nu e^{i\nu\phi} \cdot a_{k_0}^h(k_0 \cos \theta) \quad (3.66)$$

Sous forme matricielle on a :

$$\begin{bmatrix} E_\theta(r, \theta, \phi) \\ E_\phi(r, \theta, \phi) \end{bmatrix} = \frac{i}{\sin \theta} \frac{e^{ik_0 r}}{\pi r} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-i)^\nu e^{i\nu\phi} \cdot \begin{bmatrix} a_\nu^e(k_0 \cos \theta) \\ -\eta_0 a_\nu^h(k_0 \cos \theta) \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

ou en posant :

$$\mathbf{E}(r, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} E_\theta(r, \theta, \phi) \\ E_\phi(r, \theta, \phi) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_v(k_0 \cos \theta) = \begin{bmatrix} a_v^e(k_0 \cos \theta) \\ a_v^h(k_0 \cos \theta) \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

$$\mathbf{E}(r, \theta, \phi) = \frac{i}{\sin \theta} \frac{e^{ik_0 r}}{\pi r} \sum_{v=-\infty}^{\infty} (-i)^v e^{iv\phi} \text{diag}(1, -\eta_0) \cdot \mathbf{a}_v(k_0 \cos \theta) \quad (3.69)$$

3.2 Calcul des coefficients a_v^e, a_v^h

Pour la région d'air on a les équations suivantes (l'indice p désigne la couche la plus externe et M la couche contenant le patch)

$$\tilde{\mathbf{H}}_{vs}(\rho, k_z) = \bar{\mathbf{M}}_0 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho, k_z) \quad (3.70)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho, k_z) = \left[\bar{\mathbf{A}}_v(k_\rho \rho) \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) \cdot \boldsymbol{\alpha} \right] \cdot \begin{bmatrix} a_v^e \\ a_v^h \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

avec

$$\bar{\mathbf{A}}_v(k_\rho \rho) = \begin{bmatrix} \frac{-vk_z}{k_\rho^2 \rho} J_v(k_\rho \rho) & \frac{-vk_z}{k_\rho^2 \rho} Y_v(k_\rho \rho) \\ J_v(k_\rho \rho) & Y_v(k_\rho \rho) \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho \rho) = \begin{bmatrix} \frac{-i\omega\mu}{k_\rho} j_v(k_\rho \rho) & \frac{-i\omega\mu}{k_\rho} \dot{Y}_v(k_\rho \rho) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

par conséquent :

$$\bar{\mathbf{A}}_v(k_\rho, \rho) \cdot \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \frac{-vk_z}{k_\rho^2 \rho} H_v^{(1)}(k_\rho \rho) \\ H_v^{(1)}(k_\rho \rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-vk_z}{k_\rho^2 \rho} \\ 1 \end{bmatrix} H_v^{(1)}(k_\rho \rho) \quad (3.75)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho, \rho) \cdot \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \frac{-i\omega\mu}{k_\rho} \dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-i\omega\mu}{k_\rho} \dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Ecrivons :

$$\bar{\mathbf{C}}_v(\rho, k_z) = [\bar{\mathbf{A}}_v(k_\rho, \rho) \cdot \mathbf{a} \quad \bar{\mathbf{B}}_v(k_\rho, \rho) \cdot \mathbf{a}] = \begin{bmatrix} \frac{-vk_z}{k_\rho^2 \rho} H_v^{(1)}(k_\rho \rho) & \frac{-j\omega\mu}{k_\rho} \dot{H}_v^{(1)}(k_\rho \rho) \\ H_v^{(1)}(k_\rho \rho) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Ecrivons maintenant les équations issues des conditions aux limites suivantes :

$$\tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho_p, k_z) = \bar{\Gamma}_{>}^{EE} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho_M, k_z) + \bar{\Gamma}_{>}^{EH} \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{vs}(\rho_M^+, k_z) \quad (3.78)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_{vs}(\rho_p, k_z) = \bar{\Gamma}_{>}^{HE} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho_M, k_z) + \bar{\Gamma}_{>}^{HH} \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{vs}(\rho_M^+, k_z) \quad (3.79)$$

Les équations (3.70) et (3.71) sont valables dans toute la région d'air (espace libre) et en particulier pour $\rho = \rho_p \Rightarrow$

$$\tilde{\mathbf{H}}_{vs}(\rho_p, k_z) = \bar{\mathbf{M}}_0(\rho_p) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho_p, k_z) \quad (3.80)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho_p, k_z) = \bar{\mathbf{C}}_v(\rho_p, k_z) \cdot \mathbf{a}_v(k_z) \quad (3.81)$$

$$\mathbf{a}_v(k_z) = \begin{bmatrix} a_v^e(k_z) \\ a_v^h(k_z) \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

A partir de (3.79) on peut écrire :

$$\tilde{\mathbf{H}}_{vs}(\rho_M^+, k_z) = \bar{\Gamma}_{>}^{HH^{-1}} \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{vs}(\rho_P, k_z) - \bar{\Gamma}_{>}^{HH^{-1}} \cdot \bar{\Gamma}_{>}^{HE} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho_M, k_z) \quad (3.83)$$

Portant l'équation (3.83) dans (3.78), on aura alors :

$$\tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho_P, k_z) = \left[\bar{\Gamma}_{>}^{EE} - \bar{\Gamma}_{>}^{EH} \cdot \bar{\Gamma}_{>}^{HH^{-1}} \cdot \bar{\Gamma}_{>}^{HE} \right] \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho_M, k_z) + \left[\bar{\Gamma}_{>}^{EH} \cdot \bar{\Gamma}_{>}^{HH^{-1}} \right] \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{vs}(\rho_P, k_z) \quad (3.84)$$

Ecrivons aussi (3.70) pour $\rho = \rho_P$ et portons le résultat dans l'équation (3.84) :

$$\tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho_P, k_z) = \left[\bar{\Gamma}_{>}^{EE} - \bar{\Gamma}_{>}^{EH} \cdot \bar{\Gamma}_{>}^{HH^{-1}} \cdot \bar{\Gamma}_{>}^{HE} \right] \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho_M, k_z) + \left[\bar{\Gamma}_{>}^{EH} \cdot \bar{\Gamma}_{>}^{HH^{-1}} \right] \cdot \bar{\mathbf{M}}_0(\rho_P) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho_P, k_z)$$

Soit

$$\left[\bar{\mathbf{I}} - \bar{\Gamma}_{>}^{EH} \cdot \bar{\Gamma}_{>}^{HH^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{M}}_0(\rho_P) \right] \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho_P, k_z) = \left[\bar{\Gamma}_{>}^{EE} - \bar{\Gamma}_{>}^{EH} \cdot \bar{\Gamma}_{>}^{HH^{-1}} \cdot \bar{\Gamma}_{>}^{HE} \right] \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho_M, k_z) \quad (3.85)$$

avec

$$\bar{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

L'expression de $\tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho_M, k_z)$ en fonction de la fonction dyadique spectrale de Green st donnée par :

$$\tilde{\mathbf{E}}_{vs}(\rho_M, k_z) = \bar{\mathbf{G}}_v(k_z) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_v(k_z) \quad (3.87)$$

Portons la relation (3.87) dans l'équation (3.85), on aura :

$$\left[\bar{\mathbf{I}} - \bar{\Gamma}_{>}^{EH} \cdot \bar{\Gamma}_{>}^{HH^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{M}}_0(\rho_p) \right] \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{v_s}(\rho_p, k_z) = \left[\bar{\Gamma}_{>}^{EE} - \bar{\Gamma}_{>}^{EH} \cdot \bar{\Gamma}_{>}^{HH^{-1}} \cdot \bar{\Gamma}_{>}^{HE} \right] \cdot \bar{\mathbf{G}}_v(k_z) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_v(k_z) \quad (3.88)$$

soit en utilisant (3.81) :

$$\left[\bar{\mathbf{I}} - \bar{\Gamma}_{>}^{EH} \cdot \bar{\Gamma}_{>}^{HH^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{M}}_0(\rho_p) \right] \cdot \bar{\mathbf{C}}_v(\rho_p, k_z) \cdot \mathbf{a}_v(k_z) = \left[\bar{\Gamma}_{>}^{EE} - \bar{\Gamma}_{>}^{EH} \cdot \bar{\Gamma}_{>}^{HH^{-1}} \cdot \bar{\Gamma}_{>}^{HE} \right] \cdot \bar{\mathbf{G}}_v(k_z) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_v(k_z) \quad (3.89)$$

D'où l'on peut tirer l'expression de $\mathbf{a}_v(k_z)$ comme suit :

$$\mathbf{a}_v(k_z) = \bar{\mathbf{C}}_v^{-1}(\rho_p, k_z) \cdot \left[\bar{\mathbf{I}} - \bar{\Gamma}_{>}^{EH} \cdot \bar{\Gamma}_{>}^{HH^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{M}}_0(\rho_p) \right]^{-1} \cdot \left[\bar{\Gamma}_{>}^{EE} - \bar{\Gamma}_{>}^{EH} \cdot \bar{\Gamma}_{>}^{HH^{-1}} \cdot \bar{\Gamma}_{>}^{HE} \right] \cdot \bar{\mathbf{G}}_v(k_z) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_v(k_z)$$

Ou encore :

$$\mathbf{a}_v(k_z) = \left\{ \left[\bar{\mathbf{I}} - \bar{\Gamma}_{>}^{EH} \cdot \bar{\Gamma}_{>}^{HH^{-1}} \cdot \bar{\mathbf{M}}_0(\rho_p) \right] \cdot \bar{\mathbf{C}}_v(\rho_p, k_z) \right\}^{-1} \cdot \left[\bar{\Gamma}_{>}^{EE} - \bar{\Gamma}_{>}^{EH} \cdot \bar{\Gamma}_{>}^{HH^{-1}} \cdot \bar{\Gamma}_{>}^{HE} \right] \cdot \bar{\mathbf{G}}_v(k_z) \cdot \tilde{\mathbf{J}}_v(k_z) \quad (3.90)$$

Chapitre 4

Résultats et discussion

4.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, des résultats numériques typiques, pour la fréquence de résonance, la bande passante et le champ rayonné lointain, de quelques exemples d'antennes microbande cylindriques sont présentés et analysés. Nous avons vérifié que notre développement théorique et le logiciel écrit pour implémenter la méthode sont corrects en comparant les résultats obtenus par notre logiciel avec ceux disponibles dans la littérature. Tout d'abord, une étude de convergence concernant la fréquence de résonance pour différents type et nombre de fonctions de base est menée.

4.2 EVALUATION NUMERIQUE DES ELEMENTS DE LA MATRICE DES MOMENTS

Il faut prendre une précaution particulière lors de l'évaluation numérique des éléments de la matrice impédance (2.137)-(2.140). En effet, les intégrandes des équations (2.137)-(2.140) présentent des singularités lorsque la fonction tensorielle de Green s'annule. Durant l'évaluation numérique de l'intégrale infinie, ces singularités ou pôles doivent être évités. La méthode classique pour détourner ces singularités est de déformer le chemin d'intégration vers le chemin C_1 (Figure 4.1), qui contourne les pôles par des demi-cercles. Cette méthode donne des résultats satisfaisants pour des patchs à épaisseur de substrat faible, où un seul pôle est à localiser. Cependant, quand la fréquence de résonance augmente le substrat devient épais et plusieurs pôles peuvent exister. Dans ce cas, en plus du problème de la localisation de tous les pôles, l'élaboration analytique des intégrales autour des demi-cercles peut se compliquer si deux ou plusieurs pôles sont très proches[2].

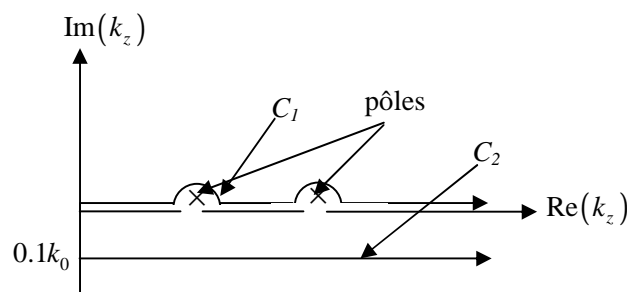


FIGURE 4.1 Chemin d'intégration dans le plan k_z

Ces problèmes peuvent être entièrement évités en déformant le contour C_1 vers C_2 . Il est nécessaire d'évaluer l'intégrale dans le plan complexe pour inclure l'effet des ondes de surface qui sont juste au-dessous de l'axe réel (pour une formulation en $e^{-i\omega t}$), l'intégrale est, ainsi, calculée le long d'un chemin au-dessous de l'axe réel (Figure 4.1). Cette méthode a pour avantage d'inclure l'effet des ondes de surface dans les calculs sans qu'une détermination des pôles ou une localisation de ceux-ci ne soit nécessaire. La longueur du chemin d'intégration est décidée selon le critère de convergence des résultats numériques. Une longueur d'environ $35k_0$ a été trouvée suffisante pour une convergence numérique acceptable.

4.3 CONVERGENCE DES RESULTATS NUMERIQUES

Pour calculer les éléments de la matrice des moments, la sommation sur ν à l'infini est tronquée à une valeur assurant la convergence numérique. On a trouvé que trente termes sont suffisants pour obtenir des résultats convergents. Les programmes, pour calculer la fréquence de résonance et le champ rayonné, sont développés sur MATLAB[®] et exécutés sur un PC équipé d'un processeur Intel[®] 3.0 GHz Pentium4 et une RAM de 512 MB. Le calcul d'une fréquence de résonance, pour une structure microbande cylindrique monocouche, prend en moyenne 400 secondes. Pour le diagramme de rayonnement normalisé, le temps d'exécution correspondant est en moyenne de 28 secondes.

Dans une géométrie cylindrique de symétrie circulaire, l'onde peut être écrit sous forme d'harmoniques cylindriques avec différentes dépendance en $e^{i\nu\phi}$. En principe, seulement deux parmi les six composantes du champ électromagnétique sont nécessaire pour caractériser l'onde. En outre, du à la préférence de l'axe z du milieu, le champ électromagnétique peut être décomposé en ondes TM et TE par rapport à l'axe z . Par conséquent, les composantes E_z et H_z du champ peuvent être utilisées pour caractériser les ondes TM et TE respectivement. A la différence des interfaces planaires, les deux ondes TM et TE sont nécessaires (en général) pour écrire les conditions aux limites à l'interface entre deux couches cylindriques. Les seules exceptions sont les ondes TM et TE correspondant à la symétrie axiale ($\nu=0$) et l'invariance selon z ($\partial/\partial z=0$) où les conditions aux limites peuvent être satisfaites indépendamment l'une par rapport à l'autre. Par conséquent, pour

des ondes à symétrie non axiale, les deux ondes TM et TE doivent coexister dans un milieu multicouches cylindrique circulaire. Une telle onde est appelée *onde hybride* ou mode hybride.

Dans le Tableau 1 nous présentons les fréquences de résonances d'une antenne microbande cylindrique monocouche pour le mode hybride HE01. Les résultats sont obtenus pour différents types et nombre de fonctions de base et en fonction de l'épaisseur normalisé du substrat h/L . La permittivité relative du substrat est de 2.3 et le rayon du cylindre (masse) est de 20 cm. Le patch avait les dimensions $2L \times 2b\phi_0 = 8 \text{ cm} \times 16.8 \text{ cm}$. On note qu'une excellente convergence est atteinte en utilisant seulement deux fonctions de base ($N = 1, M = 1$), notamment pour le premier et le deuxième type de fonctions de base, ce qui n'est pas le cas dans [24] et [20] où quatre ($N = 2, M = 2$) et six ($N = 3, M = 3$) fonctions de base, respectivement, étaient nécessaires pour obtenir la convergence. Ce qui nous permet de réduire considérablement le temps de calcul. En outre, à partir du Tableau 1 on montre que nos fréquences de résonances, pour différentes épaisseurs du substrat, sont en excellent accord avec celles de Wong *et al.* [24] et Ali *et al.* [20]. La déviation est au plus de 0.25% et 0.94%, respectivement. En se basant sur ces résultats, on peut statuer que deux fonctions de base sinusoïdales sont suffisantes pour obtenir une très bonne convergence. Par conséquent, dans tout le reste de l'étude on utilisera deux fonctions de base.

Tableau 3.1 Fréquence de résonance avec différents types et nombre de fonctions de base en fonction de l'épaisseur du substrat; $a = 20 \text{ cm}$, $L = 4 \text{ cm}$, $b\phi_0 = 8.4 \text{ cm}$, $\epsilon_{2r} = 2.3$.

Type de fonctions de base	Nombre de fonctions de base	Fréquence de résonance (GHz)					
		$h/L = 0.04$	$h/L = 0.06$	$h/L = 0.08$	$h/L = 0.10$	$h/L = 0.12$	$h/L = 0.14$
1st type	$N = 1, M = 1$	1.207	1.196	1.186	1.176	1.166	1.156
	$N = 3, M = 2$	1.207	1.196	1.186	1.176	1.166	1.156
	$N = 3, M = 3$	1.205	1.194	1.183	1.173	1.163	1.153
2nd type	$N = 1, M = 1$	1.221	1.215	1.208	1.201	1.193	1.185
	$N = 3, M = 2$	1.221	1.215	1.208	1.197	1.189	1.185
	$N = 3, M = 3$	1.205	1.194	1.184	1.173	1.163	1.154
3rd type	$N = 1, M = 1$	1.233	1.231	1.227	1.221	1.214	1.207
	$N = 3, M = 2$	1.233	1.231	1.227	1.221	1.214	1.207
	$N = 3, M = 3$	1.225	1.220	1.213	1.206	1.199	1.192
Résultats de la littérature		1.211 ^a	1.204 ^a	1.194 ^a	1.185 ^a	1.177 ^a	1.165 ^a
		1.205 ^b	1.194 ^b	1.183 ^b	1.175 ^b	1.165 ^b	1.155 ^b

^aWong *et al.* [24].

^bAli *et al.* [20].

4.4 COMPARAISON ET DISCUSSION DES RESULTATS NUMERIQUES

Dans cette section et dans le but de prouver le caractère général de la méthode proposée, la fréquence de résonance complexe, la bande passante et le diagramme de rayonnement pour une variété d'antennes microbandes cylindriques sont analysés.

La Figure 4.2 représente la partie imaginaire de la fréquence de résonance complexe normalisée, en fonction de l'épaisseur du substrat h/L , d'une antenne microbande cylindrique monocouche ayant $a = 20$ cm, $L = 4$ cm, $b\phi_0 = 8.4$ cm et $\epsilon_{2r} = 2.3$. Les fréquences sont normalisées par rapport à la fréquence de résonance issue du modèle de la cavité donnée par

$$f_{mn} = \frac{c}{2\sqrt{\epsilon_{r1}}} \left[\left(\frac{m}{2W} \right)^2 + \left(\frac{n}{2L} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (4.1)$$

Le mode étudié est le mode hybride HE01, ce choix est justifié par le fait que le mode hybride HE01 tend vers le mode TE01 pour des antennes à substrats minces. Le mode TE01 est montré qu'il a une plus grande efficacité de rayonnement [20]. La Figure 4.2 montre un bon accord avec les résultats de Ali *et al.* [20], en utilisant seulement deux fonctions de base ($N = 1$, $M = 1$).

La Figure 4.3 montre, pour la structure de la Figure 4.2, la bande passante où on compare nos résultats avec ceux de Ali *et al.* [24] et Wong *et al.* [24]. Une bonne concordance est constatée aussi entre nos résultats et ceux de Ali et al [20]. On remarque aussi que la bande passante augmente avec l'épaisseur du substrat de l'antenne.

La fréquence de résonance pour une antenne microbande cylindrique avec une couche protectrice est montrée dans la Figure 4.4. En effet, pour plusieurs applications d'antenne microbande cylindrique utilisée dans des systèmes aéroportés une couche protectrice diélectrique est généralement ajoutée sur le patch pour fournir une protection contre d'éventuels dommages environnementaux tels que la pluie, la neige ou le verglas. Malheureusement, cette couche cause un grand effet sur les caractéristiques de l'antenne, ce qui a été mentionné dans plusieurs travaux [2], [6], [55], [56]. Cependant, ces travaux

concernent le cas des structures microbandes planaires et les investigations concernant l'effet de la couche protectrice pour les structures microbandes qui se conforment aux surfaces courbées sont peut rapportées.

Les fréquences de la Figure 4.4 sont normalisées par rapport à la fréquence de résonance issue du modèle de la cavité donnée par l'expression (4.1) et sont données en fonction de l'épaisseur de la couche protectrice t/h . Les caractéristiques de la structure sont ; $\epsilon_{3r} = 2.3, 4.0$ et 5.6 ; $a = 20$ cm, $h = 0.4$ cm, $\epsilon_{2r} = 2.3$, $L = 4$ cm, $b\phi_0 = 8.4$ cm. Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux de Wong *et al.* [24] et ils confirment le comportement de diminution de la fréquence de résonance avec l'augmentation de la permittivité relative de la couche protectrice.

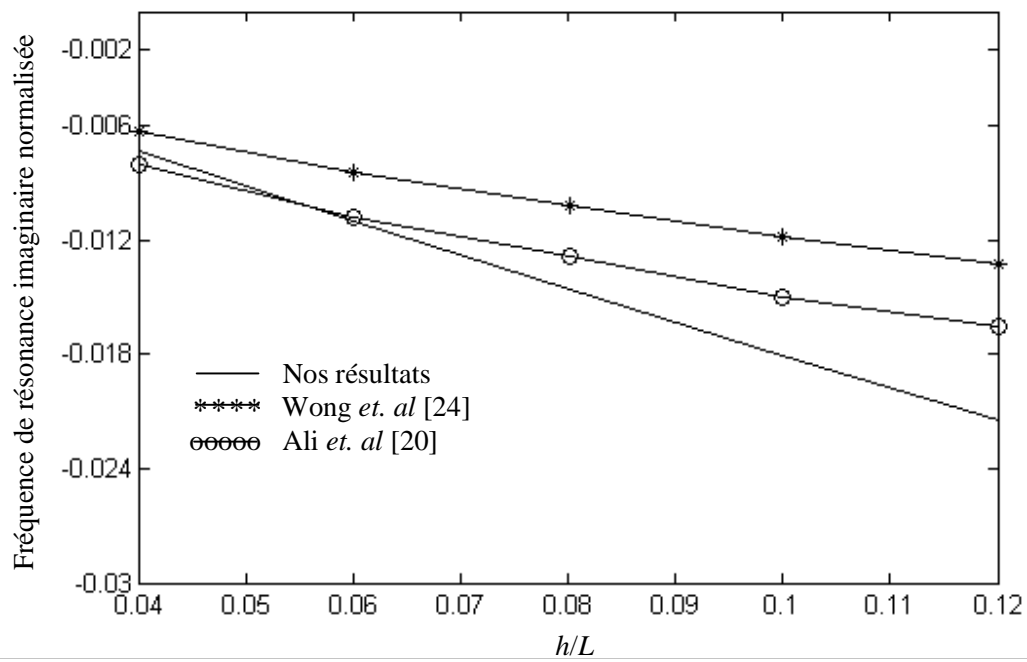


FIGURE 4.2 Partie imaginaire de la fréquence de résonance normalisée en fonction de l'épaisseur du substrat; $a = 20$ cm, $L = 4$ cm, $b\phi_0 = 8.4$ cm, $\epsilon_{2r} = 2.3$.

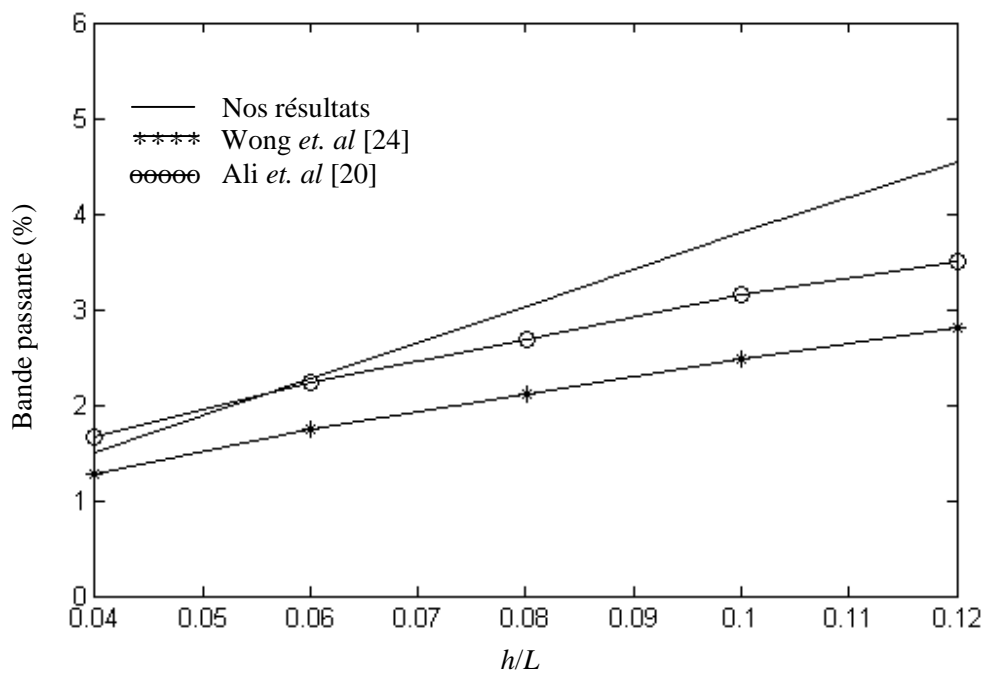


FIGURE 4.3 Bande passante en fonction de l'épaisseur du substrat pour la structure de la Figure 4.2.

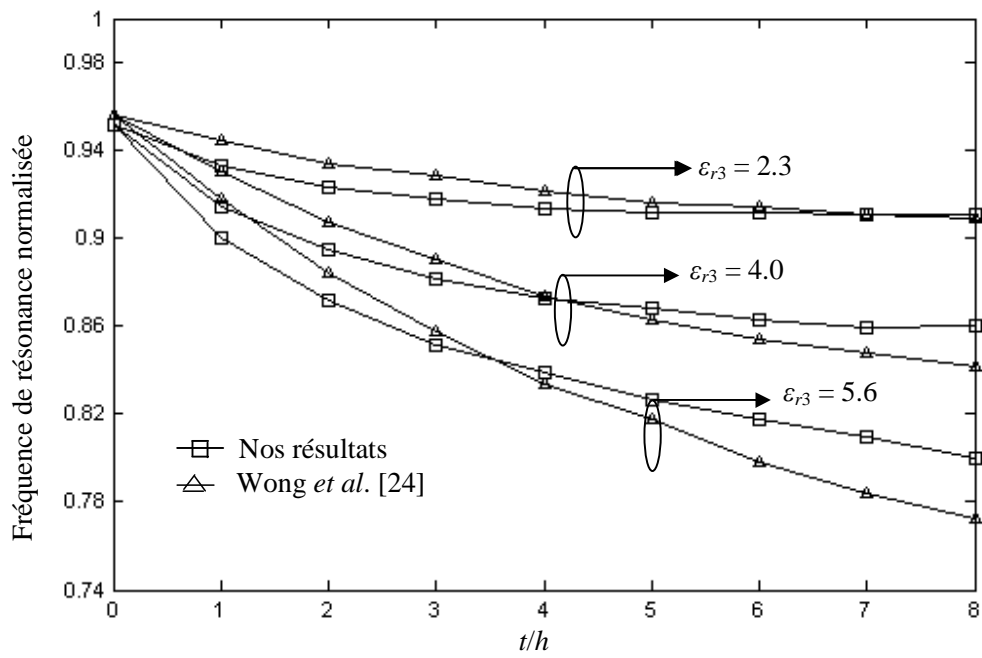


FIGURE 4.4 Fréquence de résonance en fonction de l'épaisseur de la couche protectrice pour $\epsilon_{3r} = 2.3, 4.0$ et 5.6 ; $a = 20$ cm, $h = 0.4$ cm, $\epsilon_{2r} = 2.3$, $L = 4$ cm, $b\phi_0 = 8.4$ cm

Les Figure 4.5 et 4.6 montrent le diagramme de rayonnement autour de la résonance, dans le plan $\phi = 0^\circ$ pour une antenne microbande cylindrique monocouche, pour les deux modes hybrides HE10 et HE01. Le substrat est de permittivité relative $\epsilon_{r,2} = 2.3$ et d'épaisseur $h = 2$ mm. Le rayon du cylindre de masse est $a = 10$ cm et l'angle $2\phi_0 = 48^\circ$. Pour le mode HE01, nous traçons $|E_\theta|$ (Figure 4.5) à la fréquence $f = 1.2$ GHz qui représente la fréquence de résonance du mode. Pour le mode HE10, nous traçons $|E_\phi|$ (Figure 4.6) à la fréquence de résonance du mode $f = 1.2$ GHz. Notons que la fréquence de résonance est la même pour les deux modes, c'est une conséquence du choix des dimensions physiques du patch, où on a choisis $2L = 2\phi_0 a$.

La Figure 4.7 présente le diagramme de rayonnement dans le plan $\theta = 90^\circ$ pour le mode HE10 ($|E_\phi|$) tracé en fonction de ϕ . On constate que le maximum de rayonnement dans le plan horizontal correspond à l'axe du patch ox .

Dans les Figures 4.8 et 4.9, on trace le diagramme de rayonnement, pour la structure de la Figure 4.5, du mode hybride HE11 autour de sa résonance $f = 1.7$ GHz. Le diagramme est tracé dans les deux plans orthogonaux $\theta = 90^\circ$ (Figure 4.8) et $\phi = 0^\circ$ (Figure 4.9). On remarque que pour les deux plans, le diagramme se scinde en deux lobe principaux dans les directions $\phi = 45^\circ, 315^\circ$ (pour le plan $\theta = 90^\circ$) et $\theta = 48^\circ, 133^\circ$ (pour le plan $\phi = 0^\circ$). A partir des Figures 4.5-4.9, on constate qu'un excellent accord est établi entre nos résultats et ceux de Habashy *et al.* [21].

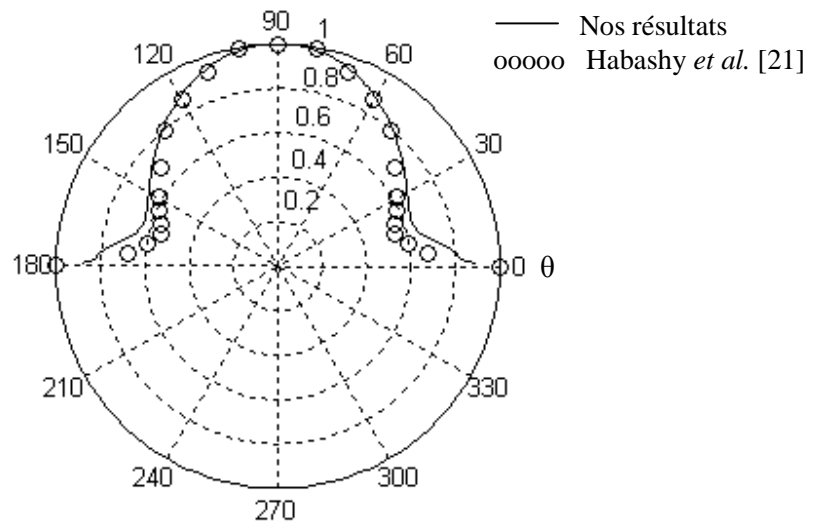


FIGURE 4.5 Diagramme de rayonnement autour de la résonance en fonction de θ , mode HE01 ($|E_\theta|$), dans le plan $\phi = 0^\circ$ pour $f = 1.2$ GHz. $\epsilon_{2r} = 2.3$, $a = 10$ cm, $h = 2$ mm, $L = 4$ cm et $\phi_0 = 24^\circ$.

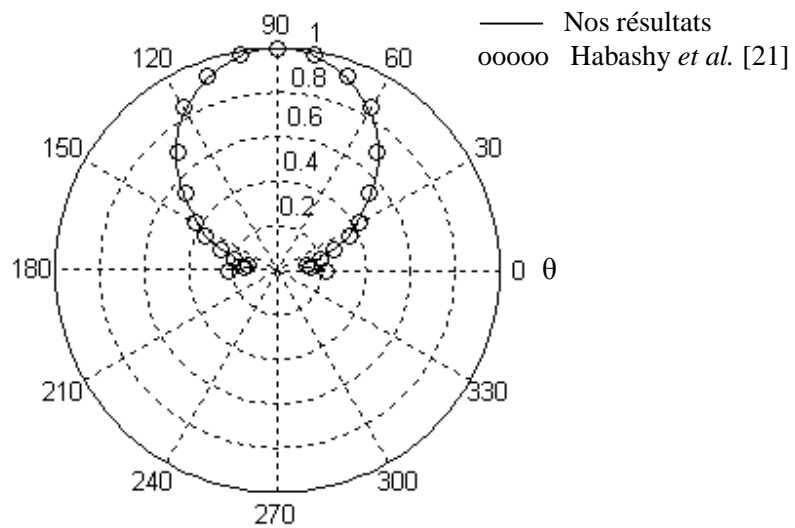


FIGURE 4.6 Diagramme de rayonnement autour de la résonance en fonction de θ , mode HE10 ($|E_\phi|$), dans le plan $\phi = 0^\circ$ pour $f = 1.2$ GHz. $\epsilon_{2r} = 2.3$, $a = 10$ cm, $h = 2$ mm, $L = 4$ cm et $\phi_0 = 24^\circ$.

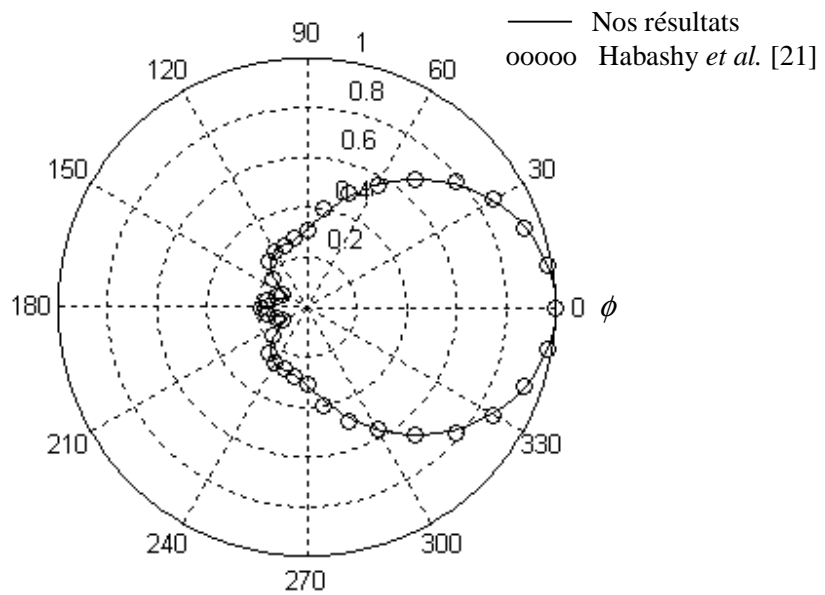


FIGURE 4.7 Diagramme de rayonnement normalisé autour de la résonance pour le mode HE10 ($|E_\phi|$), en fonction de ϕ dans le plan $\theta = 90^\circ$, à la fréquence $f = 1.2$ GHz. $\epsilon_{2r} = 2.3$, $a = 10$ cm, $h = 2$ mm, $L = 4$ cm, $\phi_0 = 24^\circ$.

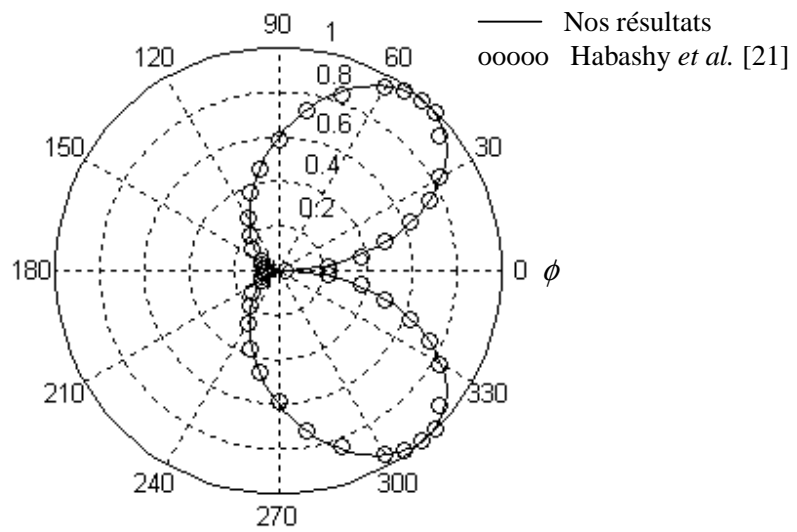


FIGURE 4.8 Diagramme de rayonnement normalisé autour de la résonance pour le mode HE11 ($|E_\phi|$), en fonction de ϕ dans le plan $\theta = 90^\circ$, à la fréquence $f = 1.7$ GHz. $\epsilon_{2r} = 2.3$, $a = 10$ cm, $h = 2$ mm, $L = 4$ cm, $\phi_0 = 24^\circ$.

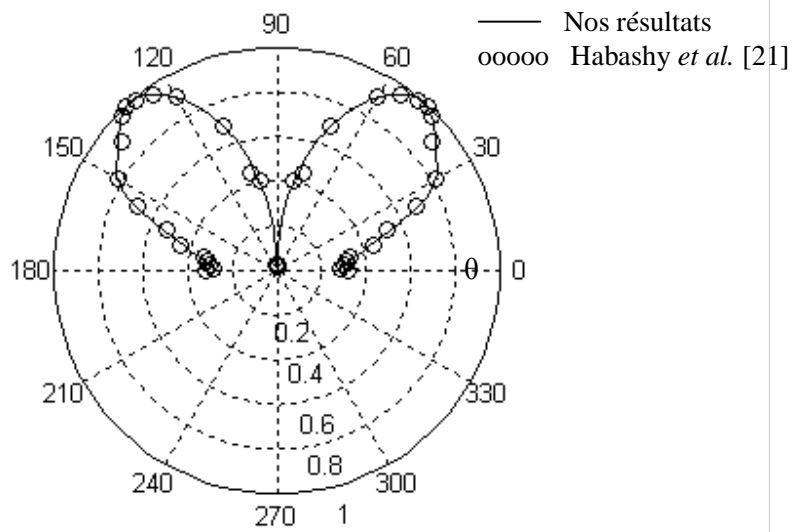


FIGURE 4.9 Diagramme de rayonnement normalisé autour de la résonance pour le mode HE11 ($|E_\phi|$), en fonction de θ dans le plan $\phi = 0^\circ$, à la fréquence $f = 1.7$ GHz. $\epsilon_{2r} = 2.3$, $a = 10$ cm, $h = 2$ mm, $L = 4$ cm, $\phi_0 = 24^\circ$.

Les Figures 4.10 et 4.11 représentent les diagrammes de rayonnement, pour la structure de la Figure 4.4, dans le plan x-y (plan H) pour différents rayons du cylindre. Pour le but de comparaison, on a effectué une translation d'axes pour se conformer à la notation de Wong [1], de telle façon que le maximum de rayonnement dans le plan horizontal soit dans la direction $\phi = 90^\circ$. Deux cas avec $t = 0$ (Figure 4.10) et $t = 3h$ (Figure 4.11) sont présentés avec $\epsilon_{2r} = \epsilon_{3r} = 2.32$, $h = 0.795$ mm, $2L = 3$ cm and $2b\phi_0 = 4$ cm. Excellent accord est constaté entre nos résultats et ceux de Wong [1] et le diagramme mesuré de Dahele *et al.* [30]. Les résultats montrent que lorsque l'antenne microbande est excitée au mode HE₀₁, le diagramme plan H se rétrécit avec la diminution du rayon du cylindre. Par contre ce diagramme reste relativement insensible aux variations de l'épaisseur de la couche protectrice.

Les diagrammes de rayonnement dans le plan y-z (plan E), pour différentes épaisseurs de la couche protectrice (Figure 4.12) et différents rayon du cylindre (Figure 4.13), sont présentés. Une autre fois on obtient une très bonne concordance avec les diagrammes de Wong [1]. Dans ce cas, la couche protectrice a pour effet de diminuer l'ouverture à 3-dB avec l'augmentation de l'épaisseur de la couche et du rayon du cylindre.

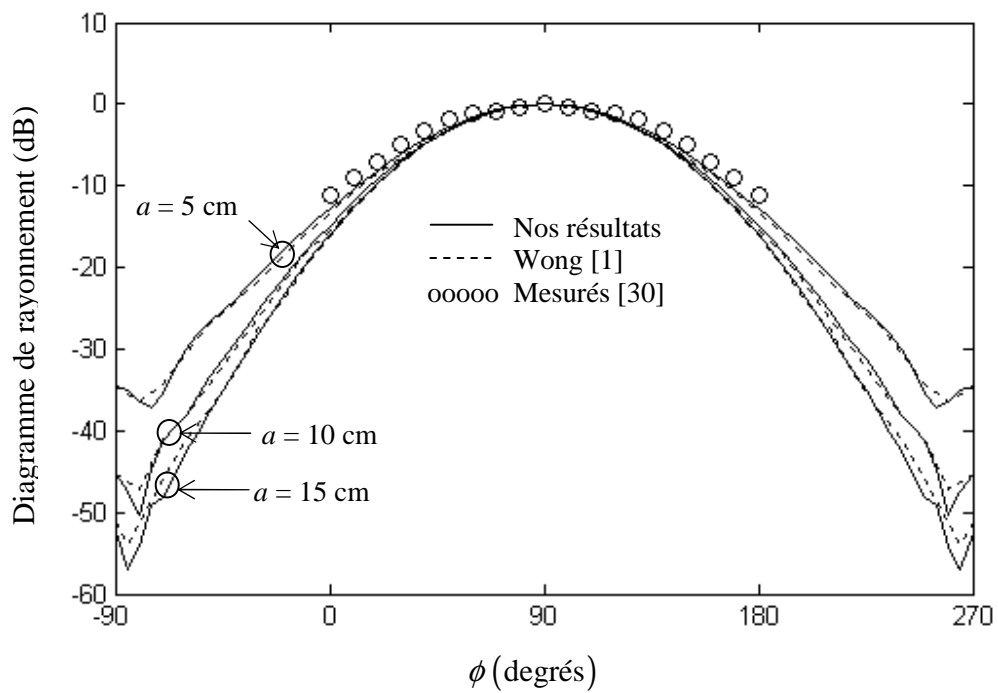


FIGURE 4.10 Diagramme de rayonnement pour le mode HE01 dans le plan x-y en fonction du rayon du cylindre $\epsilon_{2r} = \epsilon_{3r} = 2.32$, $h = 0.795$ mm, $2L = 3$ cm, $2b\phi_0 = 4$ cm, $t = 0$.

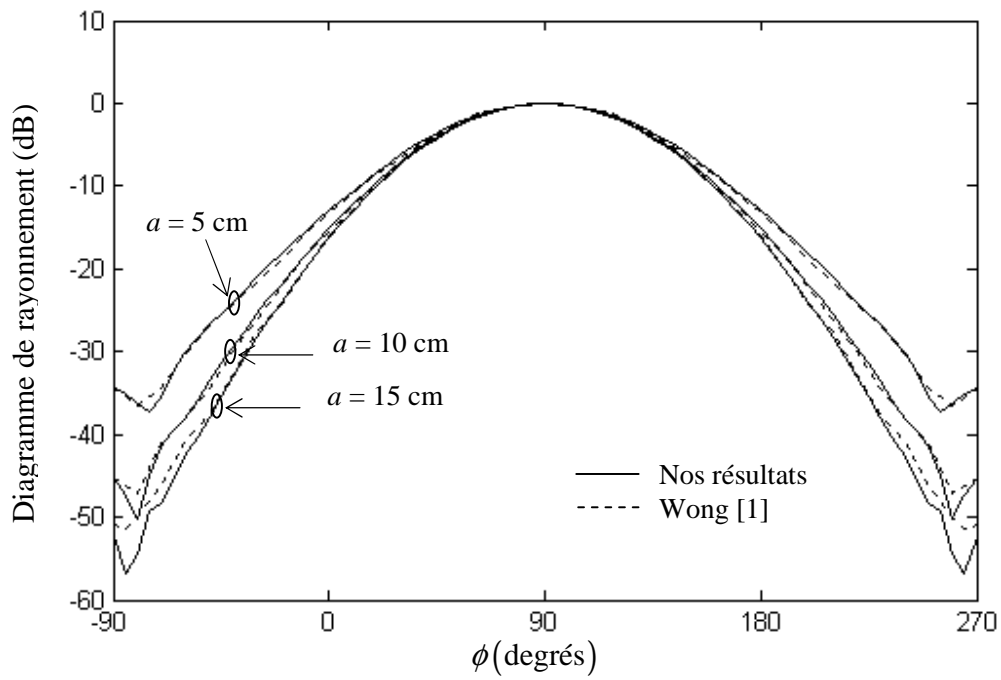


FIGURE 4.11 Diagramme de rayonnement pour le mode HE01 dans le plan x-y en fonction du rayon du cylindre $\varepsilon_{2r} = \varepsilon_{3r} = 2.32$, $h = 0.795$ mm, $2L = 3$ cm, $2b\phi_0 = 4$ cm, $t = 3h$.

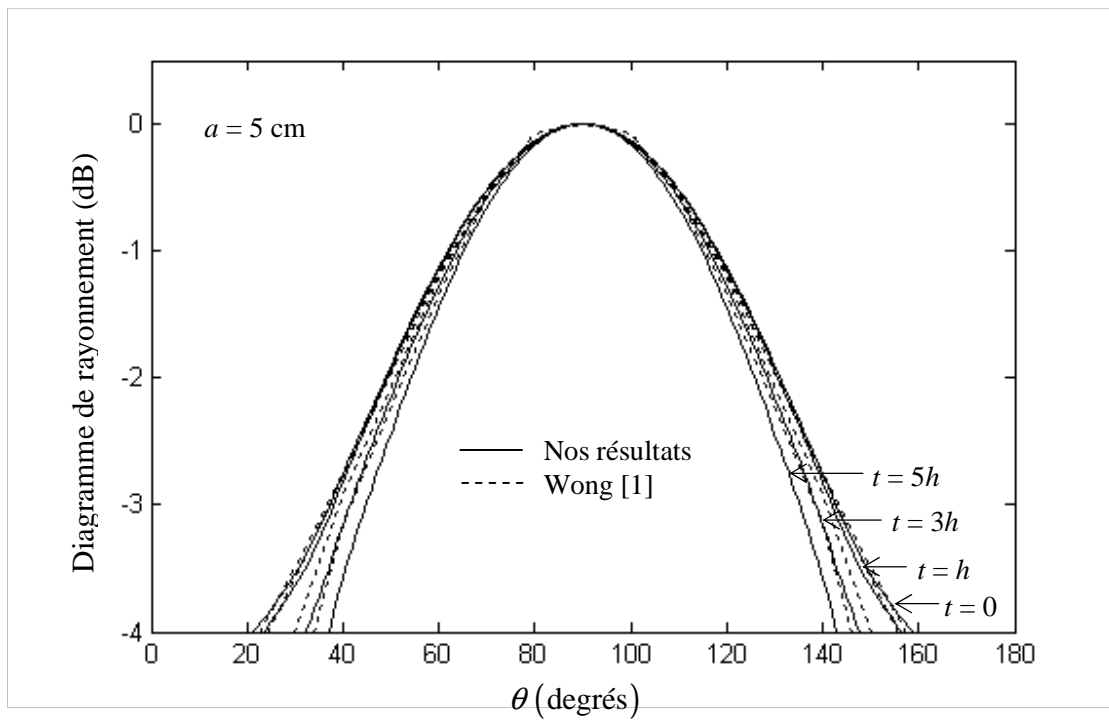


FIGURE 4.12 Diagramme de rayonnement pour le mode HE01 dans le plan x-y pour différentes épaisseurs de la couche protectrice. $\epsilon_{2r} = \epsilon_{3r} = 2.32$, $h = 0.795$ mm, $2L = 3$ cm, $2b\phi_0 = 4$ cm.

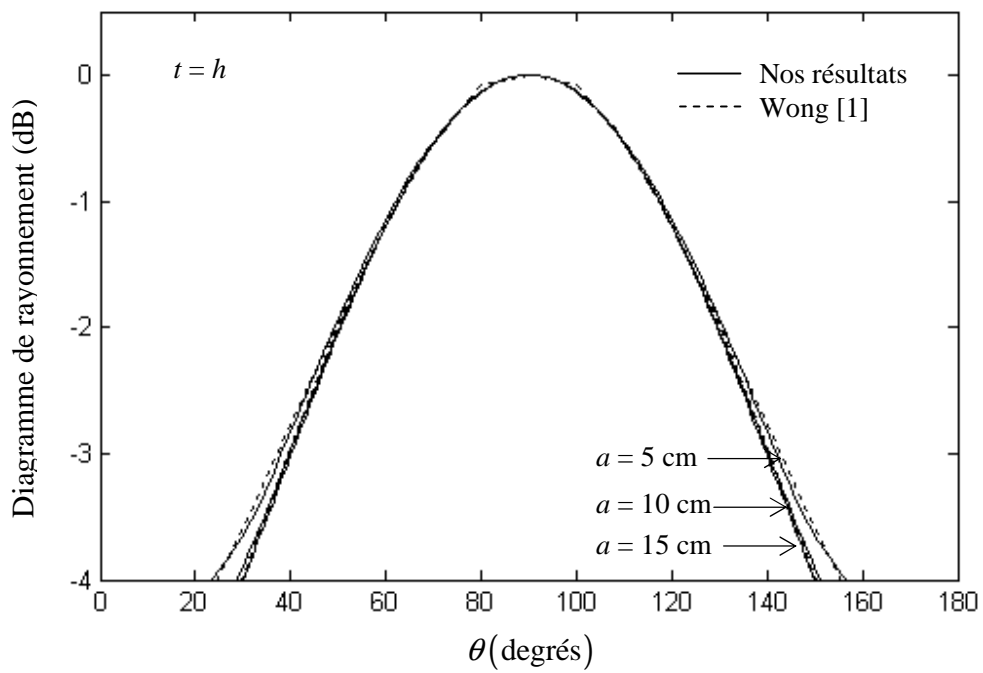


FIGURE 4.13 Diagramme de rayonnement pour le mode HE01 dans le plan x-y pour différents rayons du cylindre. $\epsilon_{2r} = \epsilon_{3r} = 2.32$, $h = 0.795$ mm, $2L = 3$ cm, $2b\phi_0 = 4$ cm.

Les diagrammes de rayonnement dans le plan horizontal pour un patch mince ($2b\phi_0 = 0.1\lambda_0$) et pour $a = 0.5\lambda_0$ et $a = \lambda_0$ sont tracés dans la Figure 4.14. λ_0 caractérise la longueur d'onde. Les diagrammes équivalents pour un patch large ($2b\phi_0 = \lambda_0$) sont montrés dans la Figure 4.15. La structure est une antenne microbande cylindrique monocouche ayant un patch de longueur $\lambda_0/2$ selon z . Cette fois nos résultats sont comparés à ceux de Ashkenazy *et al.* [19]. Les résultats montrent que les variations des diagrammes sont minimales sauf pour le rayonnement près et au-delà de la direction $\phi = 90^\circ$.

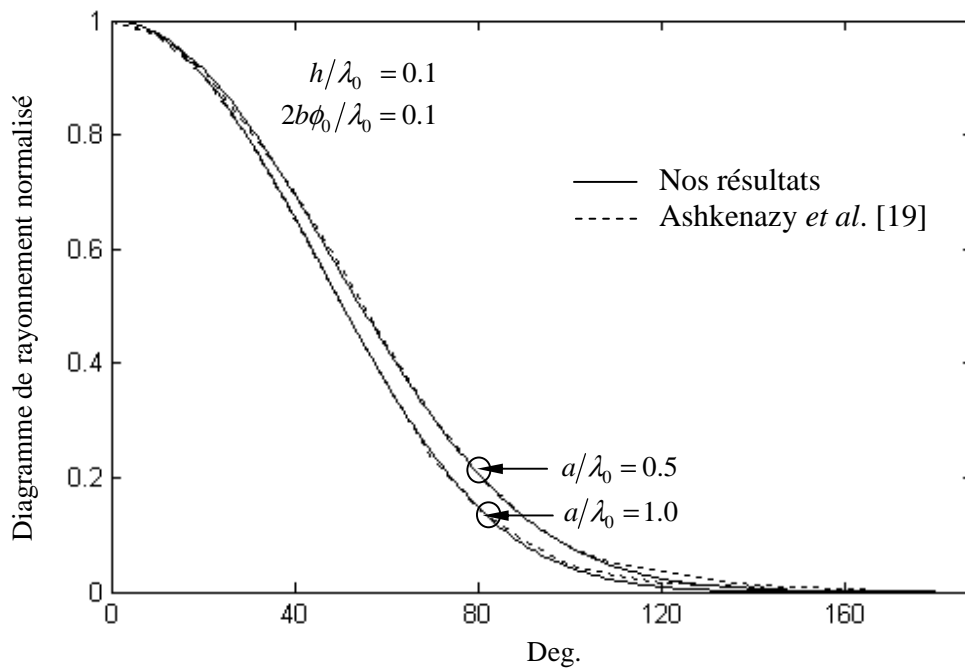


FIGURE 4.14 Diagramme de rayonnement normalisé dans le plan horizontal $f(\phi, \theta = \pi/2)$, pour un patch mince et pour différents rayons du cylindre.

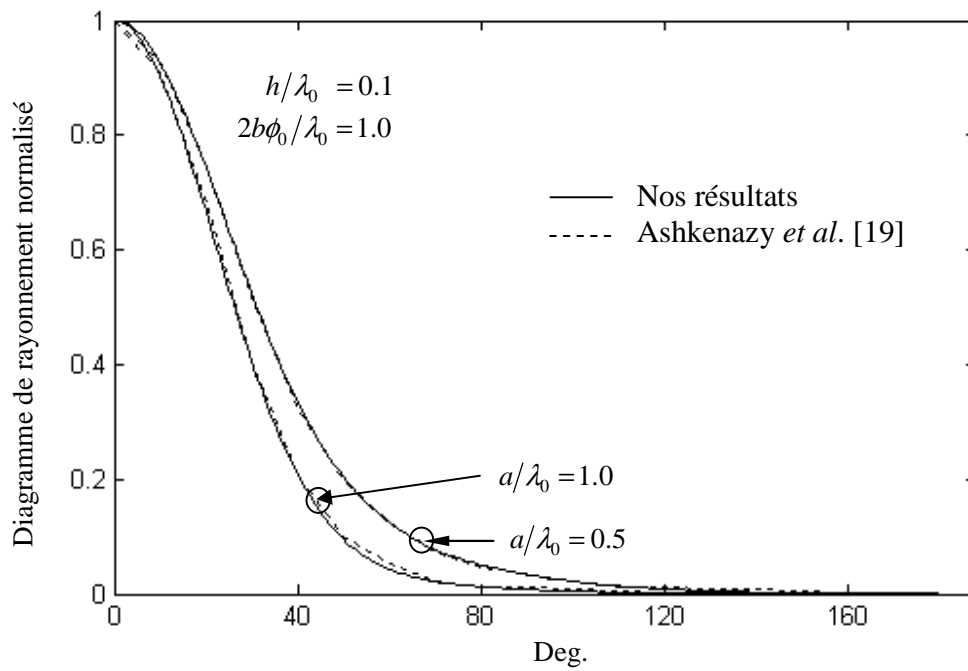


FIGURE 4.15 Diagramme de rayonnement normalisé dans le plan horizontal $f(\phi, \theta = \pi/2)$, pour un patch large et différents rayons du cylindre.

4.5 EFFET DE L'AIR GAP SUR LES CARACTERISTIQUES DE L'ANTENNE MICROBANDE CYLINDRIQUE

La valeur de la fréquence de résonance d'une antenne microbande dépend des paramètres structurels de l'antenne et il est évident que si on veut changer la fréquence de résonance il faut prévoir une nouvelle antenne. Pour réaliser une antenne où on peut changer la fréquence de résonance sans changer les paramètres structurels de l'antenne, un écart ajustable, appelé air gap, est inséré entre le plan de masse et le substrat. Dans cette section on analysera l'effet d'un tel air gap sur les caractéristiques de l'antenne microbande cylindrique à patch rectangulaire.

La géométrie de l'antenne microbande cylindrique avec un air gap est montrée dans la Figure 4.16. Le substrat (région 2) est séparé du cylindre parfaitement conducteur de rayon a par un air gap (région 1) d'épaisseur $S = b - a$. La région la plus externe (région 3) représente l'air. Le patch rectangulaire courbé est localisé en $\rho = c$ et possède une dimension droite de $2L$ et une dimension courbée $2c\phi_0$ où $2\phi_0$ est l'angle d'envergure du patch rectangulaire. La permittivité relative du substrat est ϵ_2 et son épaisseur $h = c - b$. Le substrat est choisi avec les paramètres $\epsilon_2 = 2.3$ et $h = 2.4$ mm. Les dimensions du patch sont $2L \times 2\phi_0 c = 8$ cm x 16.8 cm et le rayon du cylindre est $a = 20$ cm. La région entre le cylindre et le substrat est évidemment l'air avec la permittivité relative $\epsilon_1 = 1.0$.

La Figure 4.17 montre la partie réelle de la fréquence de résonance complexe où nos résultats sont en bon accord avec les résultats de Wong *et al.* [57]. On remarque qu'initialement la fréquence de résonance augmente avec l'augmentation de S . Ce comportement est différent du cas d'antenne sans air gap, ceci est dû à la permittivité effective de la région sous le patch qui devenait moindre à cause de la présence de l'air. Cependant, lorsque l'épaisseur de l'air gap devient grande suffisamment (environ 5 mm pour le cas étudié), la fréquence de résonance tend à avoir un comportement similaire au cas d'antenne sans air gap mais la diminution cette fois-ci est lente avec l'augmentation de S . On peut expliquer ce comportement par le fait que dans ce cas la permittivité effective varie doucement et la région sous le patch commence à dominer l'effet, ce qui réduit la fréquence de résonance.

La partie imaginaire de la fréquence de résonance complexe en fonction de l'épaisseur de l'air gap est montrée dans la Figure 4.18. On peut constater que les pertes par rayonnement augmentent avec l'épaisseur de l'air gap. La bande passante de la structure est aussi calculée et montrée dans la Figure 4.19. On montre que la bande passante augmente considérablement à cause de l'existence de l'air gap. Cette amélioration dans la bande passante est très appréciable dans beaucoup d'applications qui nécessitent une large bande passante.

L'effet de l'air gap sur le rayonnement d'antenne microbande cylindrique est illustré dans les Figures 4.20 et 4.21. Le diagramme de rayonnement normalisé pour le mode HE₀₁, en fonction de l'espacement S , dans le plan x-y est montré dans la Figure 4.20. Le diagramme correspondant au plan y-z est tracé dans la Figure 4.21. Il est montré à partir de la Figure 4.20 que le diagramme de rayonnement du plan H reste insensible aux variations de l'épaisseur de l'air gap. Cependant, Le diagramme de rayonnement du plan E dans la Figure 4.21 montre une importante diminution de l'ouverture à 3 dB avec l'augmentation de l'épaisseur de l'air gap. Ainsi, on peut augmenter la directivité d'une antenne microbande cylindrique à patch rectangulaire en introduisant un air gap entre le plan de masse et le substrat.

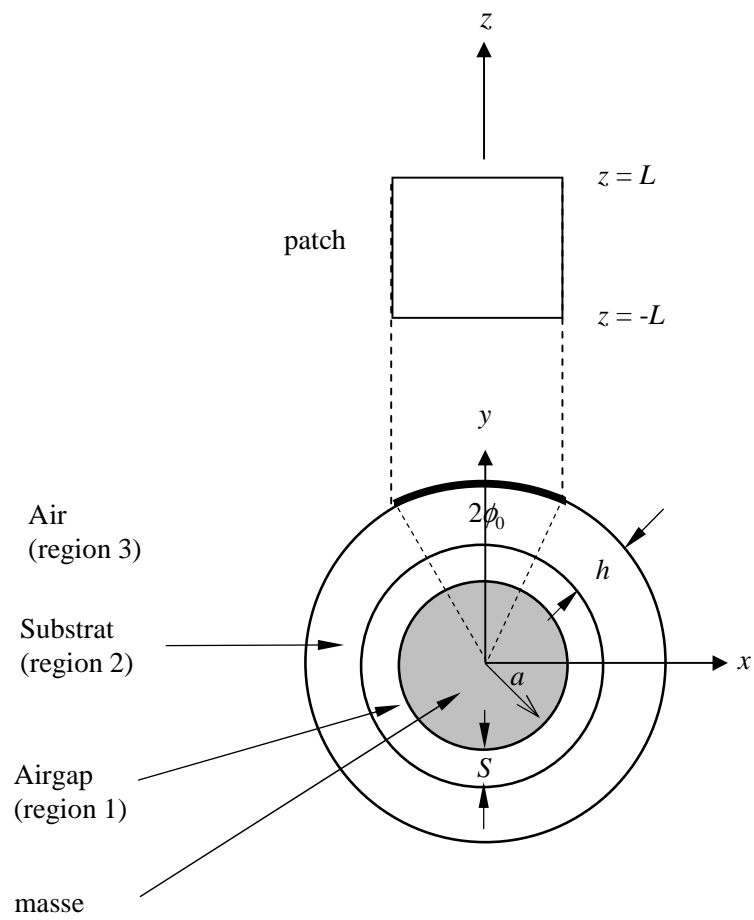


FIGURE 4.16 Géométrie d'une structure d'antenne microbande cylindrique avec un air gap.

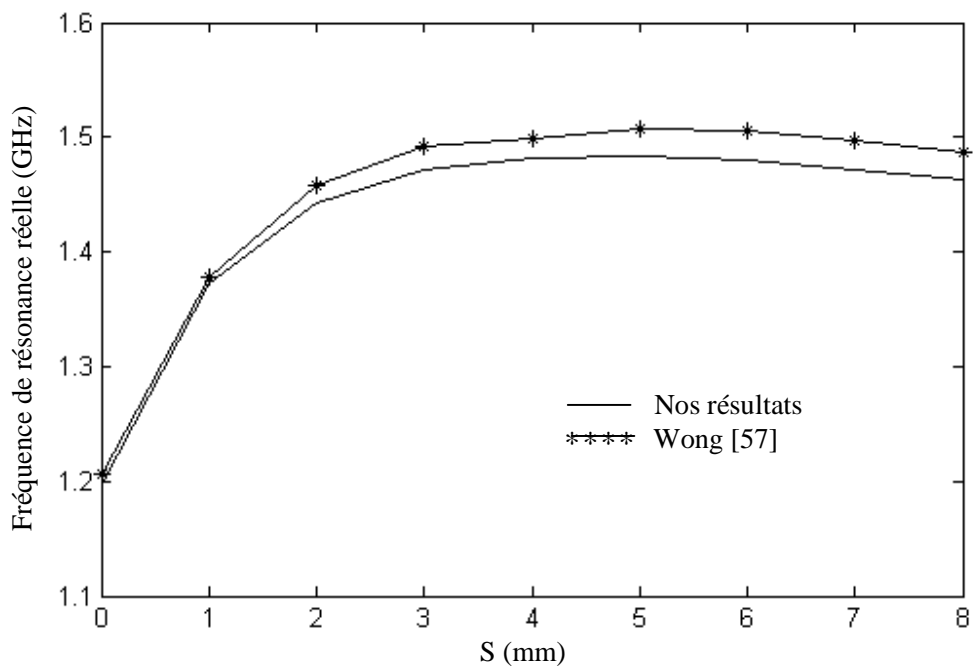


FIGURE 4.17 Partie réelle de la fréquence de résonance complexe en fonction de l'épaisseur d'air gap; $a = 20$ cm, $\epsilon_{3r} = 2.3$, $h = 2.4$ mm, $\epsilon_{2r} = 1.0$ (air gap), $2L = 8$ cm, $2c\phi_0 = 16.8$ cm

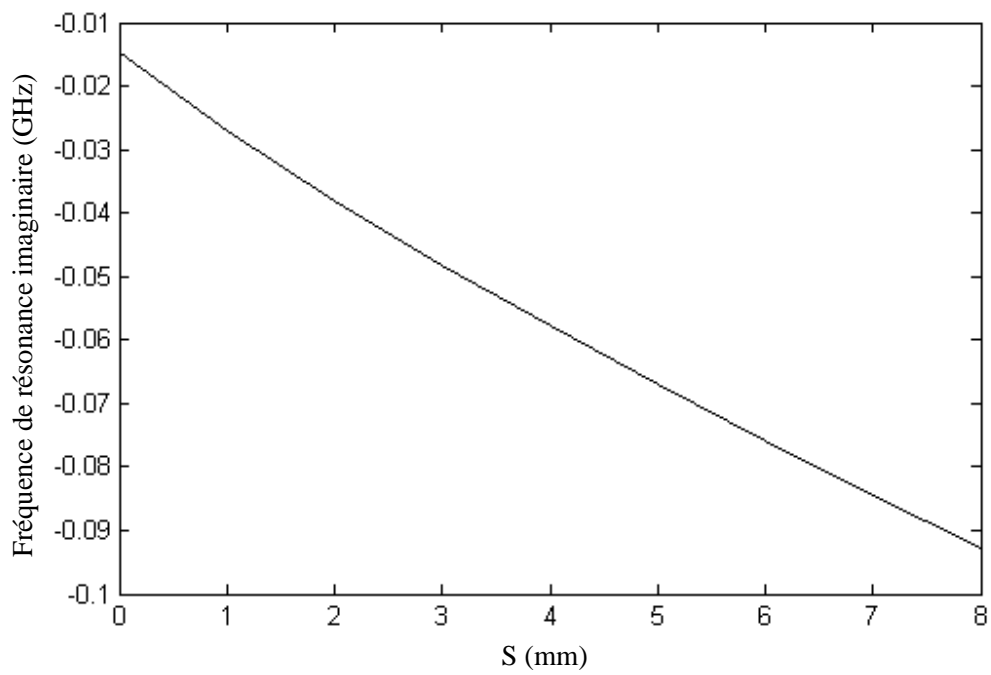


FIGURE 4.18 Partie imaginaire de la fréquence de résonance complexe en fonction de l'épaisseur d'air gap pour le cas de la Figure 4.17.

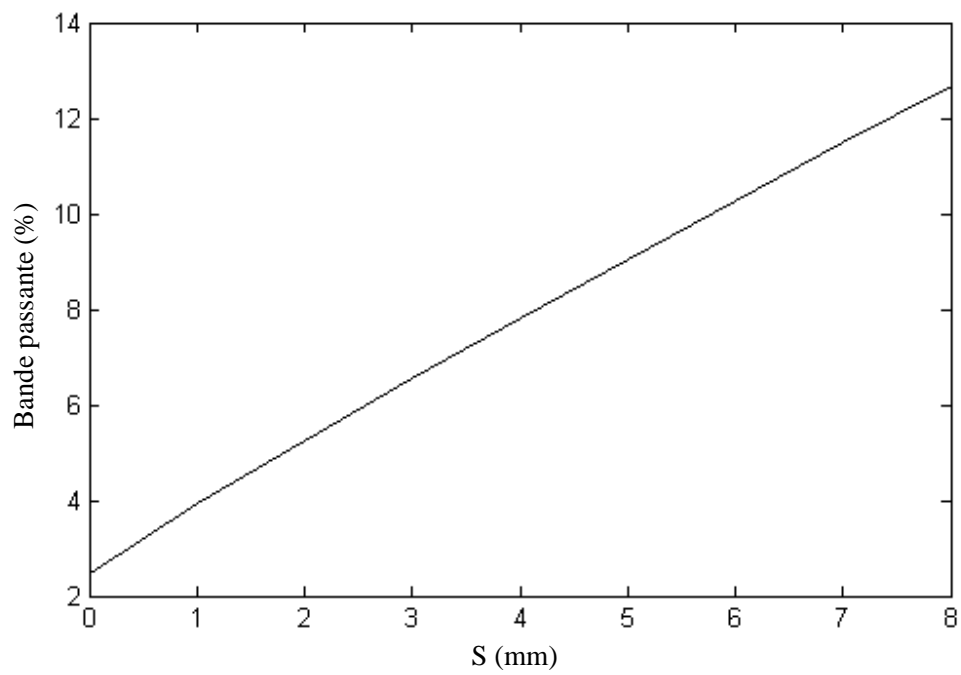


FIGURE 4.19 Bande passante en fonction de l'épaisseur d'air gap pour le cas de la Figure 4.17.

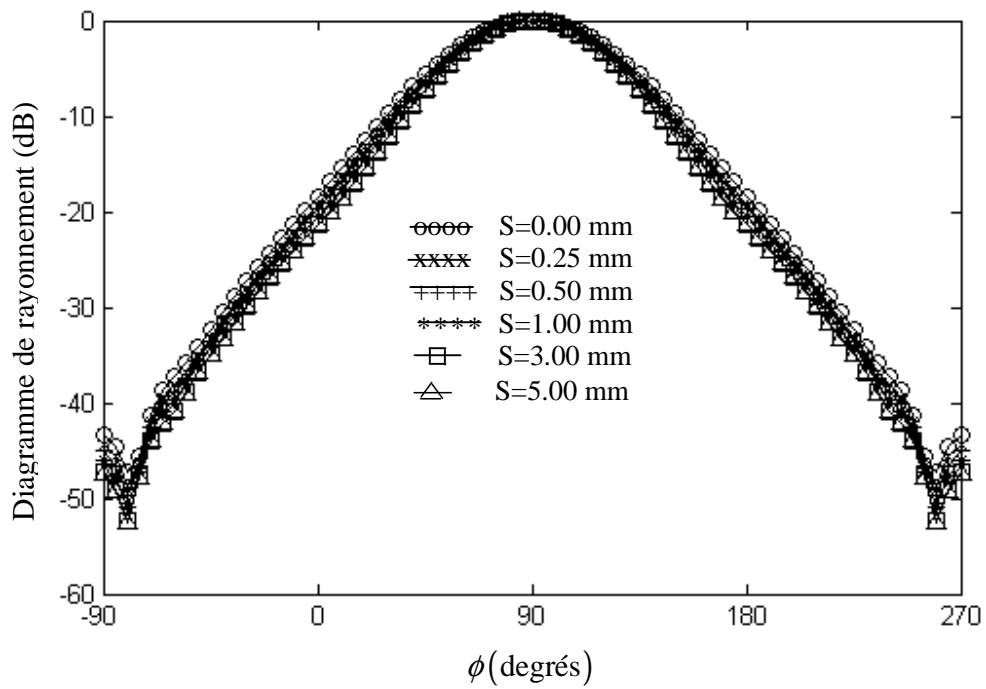


FIGURE 4.20 Diagramme de rayonnement pour le mode HE01 dans le plan x-y (plan H) en fonction de l'épaisseur de l'air-gap. $a = 20$ cm, $\epsilon_2 = 2.3$, $h = 2.4$ mm, $\epsilon_1 = 1.0$ (air gap), $2L = 8$ cm, $2c\phi_0 = 16.8$ cm .

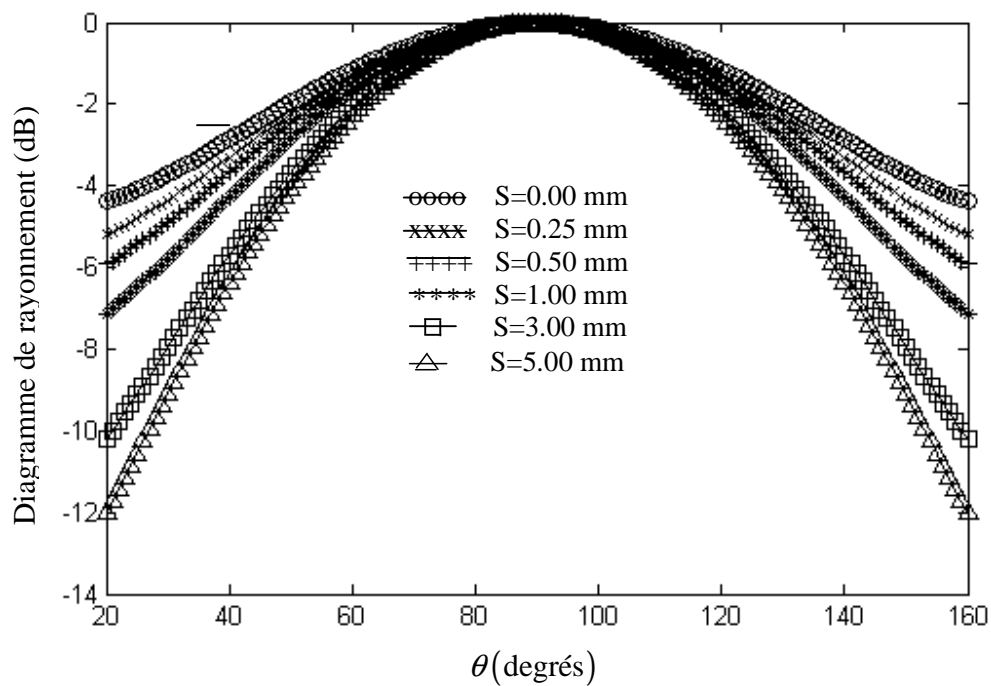


FIGURE 4.21 Diagramme de rayonnement pour le mode HE01 dans le plan y-z (plan E) en fonction de l'épaisseur de l'air-gap. $a = 20$ cm, $\epsilon_2 = 2.3$, $h = 2.4$ mm, $\epsilon_1 = 1.0$ (air gap), $2L = 8$ cm, $2c\phi_0 = 16.8$ cm .

Conclusions et Perspectives

L'objet de ce travail était d'étudier et analyser les antennes microbandes cylindriques à patch rectangulaire. A cause de la bande passante étroite qui caractérise les antennes microbandes, il est très important de déterminer avec exactitude la fréquence de résonance pour un bon fonctionnement de la structure considérée. Pour cela, une méthode générale et compacte est développée pour étudier une antenne microbande à patch rectangulaire noyé dans un milieu stratifié cylindrique. L'équation intégrale dans le domaine spectrale avec la méthode des moments, procédé de Galerkin, et la méthode de la phase stationnaire sont utilisées pour déterminer la fréquence de résonance complexe, la bande passante et le diagramme de rayonnement pour différentes structures de l'antenne.

Pour calculer la fonction spectral de Green, une représentation matricielle efficace est utilisée pour décrire les champs électrique et magnétique pour chaque couche diélectrique du milieu cylindrique en termes des matrices ABCD. Ces derniers incluent les paramètres intrinsèques de chaque couche. L'équation intégrale du champ électrique (EFIE) est formulée en imposant les conditions aux limites appropriées, à l'intérieur et à l'extérieur du patch, pour l'interface qui contient le patch. La méthode des moments/procédé de Galerkin nous a permis par la suite de discrétiser l'EFIE pour arriver à un système d'équations homogène. Trois types de fonctions de bases sont utilisés pour écrire le courant surfacique, inconnu, sur le patch sous forme de série de fonctions. L'évaluation des éléments de la matrice impédance, du système homogène résultant, est effectuée à travers le calcul numériques des intégrales impropres en déformant le chemin d'intégration dans le plan complexe k_z . L'intégrale est ainsi calculée le long d'un chemin au-dessous de l'axe réel pour éviter les singularités.

Les résultats numériques ont montré qu'une bonne et rapide convergence est atteinte en utilisant seulement deux fonctions de base sinusoïdales sans condition de bord ($N = 1$, $M = 1$), ce qui réduit considérablement l'effort de computation. Ce résultat est très important dans la mesure où le choix du type et du nombre des fonctions de base est un point angulaire dans la méthode des moments. Pour prouver l'exactitude et le caractère général de la méthode, un

ensemble de résultats, qui concernent la fréquence de résonance complexe, la bande passante et le diagramme de rayonnement d'une variété de structures microbandes cylindriques, est performé. Dans tous les cas, un très bon accord est obtenu entre nos résultats et ceux de la littérature.

Les résultats numériques que nous avons développés ont montré que la fréquence de résonance complexe, la bande passante et le diagramme de rayonnement dépendent de la géométrie de la structure microbande cylindrique étudiée (nombre et épaisseur des couches diélectriques) et des paramètres intrinsèques de ces couches (permittivité diélectrique).

Enfin, des résultats numériques concernant le diagramme de rayonnement d'une antenne microbande cylindrique à patch rectangulaire et à air gap ont été donnés. Cette étude est motivée par le fait qu'on n'a pas trouvé dans la littérature une analyse concernant l'étude de l'effet de la présence de l'air gap sur le diagramme de rayonnement d'une antenne microbande cylindrique. Il est montré, à partir des résultats obtenus, que le diagramme de rayonnement plan H reste insensible aux variations de l'épaisseur de l'air gap. Cependant, le diagramme de rayonnement plan E montre une importante diminution de l'ouverture à 3 dB avec l'augmentation de l'épaisseur de l'air gap. Ainsi, on peut augmenter la directivité d'une antenne microbande cylindrique à patch rectangulaire en introduisant un air gap entre le plan de masse et le substrat.

Il est à noter que des valeurs larges du rayon du cylindre, du mode spectral ν et/ou de la fréquence de résonance mènent à des instabilités numériques dans les fonctions de Hankel du premier type. Généralement on remédie à ça en réduisant les valeurs des premiers paramètres et/ou en changeant les trois fréquences initiales dans la procédure de Muller pour l'annulation du déterminant de la matrice impédance. En particulier, on peut prendre des fréquences initiales complexes à partie imaginaire faible.

En conclusion, on peut statuer que la méthode rigoureuse proposée convient très bien pour trouver les solutions numériques des structures microbandes cylindriques avec un nombre quelconques de couches et une position arbitraire du patch rectangulaire.

ANNEXE A : RELATIONS DE SYMETRIE EN (ν, k_z) DU TENSEUR SPECTRAL DE GREEN ET DES COURANTS

A1. INTRODUCTION

Nous avons trouvé que la matrice des moments, dans le système linéaire homogène de l'équation (2.134), se calcule par une série infinie sur le nombre d'onde discret ν et par une intégration sur le nombre d'onde continue k_z infinie aussi voir équations (2.137)-(2.140). L'étude de la symétrie du terme général à intégrer puis à sommer réduit l'effort de computation lors de l'implémentation numérique. A partir des expressions des éléments de la matrice associée à la méthode des moments, nous pouvons dire que cette étude de symétrie doit être faite sur le tenseur spectral de Green et sur les courants $\tilde{J}_{\phi n}$ et \tilde{J}_{zm} . Pour le tenseur, nous étudierons tout d'abord les matrices $\bar{\mathbf{T}}$ et $\bar{\mathbf{M}}_0$ puis $\bar{\mathbf{G}}$. Pour les courants, nous étudierons les trois types proposés.

A 2. Etude de symétrie en (ν, k_z) du tenseur spectral de Green

L'expression du tenseur de Green donnée par l'équation (2.110) fait apparaître deux autres matrices $\bar{\mathbf{\Gamma}}$ et $\bar{\mathbf{M}}_0$. Mais $\bar{\mathbf{\Gamma}}$ est écrit explicitement en fonction de $\bar{\mathbf{T}}$. Etudions donc tout d'abord la symétrie de $\bar{\mathbf{T}}$ et $\bar{\mathbf{M}}_0$.

A 2.1. Etude de symétrie en (ν, k_z) de $\bar{\mathbf{T}}$

La matrice $\bar{\mathbf{T}}(\rho_1, \rho_2, \varepsilon, \mu, \omega, \nu, k_z)$ que nous notons $\bar{\mathbf{T}}(\nu, k_z)$ lie les composantes tangentielles spectrales du champ électromagnétique aux extrémités d'une couche diélectrique limitée par les interfaces $\rho = \rho_1$ et $\rho = \rho_2$. Elle est définie par les équations (2.44)-(2.49).

Nous constatons, à partir des équations (2.44)-(2.49), que les paramètres (a, b, c, d, e) sont pairs en k_z car la variable k_z apparaît toujours sous la forme de k_z^2 dans les expressions correspondantes (noter aussi que $k_\rho = (k^2 - k_z^2)^{\frac{1}{2}}$). Nous avons également les propriétés suivantes établies dans la théorie des fonctions de Bessel :

$$\text{Si } \mathfrak{S}_\nu(z) = J_\nu(z) \text{ ou } Y_\nu(z) \quad \text{alors :} \quad \mathfrak{S}_{-\nu}(z) = (-1)^\nu \mathfrak{S}_\nu(z) \quad (\text{A1})$$

$$\dot{\mathfrak{S}}_{-\nu}(z) = (-1)^\nu \dot{\mathfrak{S}}_\nu(z) \quad (\text{A2})$$

$$\text{Si } \mathfrak{S}_\nu(z) = \frac{\nu}{z} J_\nu(z) \text{ ou } \frac{\nu}{z} Y_\nu(z) \quad \text{alors :} \quad \mathfrak{S}_{-\nu}(z) = (-1)^{\nu+1} \mathfrak{S}_\nu(z) \quad (\text{A3})$$

Compte tenu de ses propriétés et des équations (2.45)-(2.49), nous pouvons montrer aisément que les paramètres (a, c, d, e) sont pairs en ν . Le paramètre b est, par contre, impair en ν .

Nous écrivons donc :

$$\bar{\mathbf{T}}(-\nu, -k_z) = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} k_\rho \rho_1 a(-\nu, -k_z) & \frac{\pi}{2} (-k_z) \rho_1 b(-\nu, -k_z) & -i \frac{\pi(-\nu)(-k_z)}{2} \frac{\rho_1}{\omega \epsilon} \frac{\rho_1}{\rho_2} c(-\nu, -k_z) & -i \frac{\pi}{2} \alpha \mu \rho_1 d(-\nu, -k_z) \\ 0 & \frac{\pi}{2} k_\rho \rho_1 e(-\nu, -k_z) & i \frac{\pi k_\rho^2 \rho_1}{2 \omega \epsilon} c(-\nu, -k_z) & i \frac{\pi(-\nu)(-k_z)}{2} \frac{\rho_1}{\omega \epsilon} c(-\nu, -k_z) \\ i \frac{\pi(-\nu)(-k_z)}{2} \frac{\rho_1}{\alpha \mu} \frac{\rho_1}{\rho_2} c(-\nu, -k_z) & i \frac{\pi}{2} \omega \epsilon \rho_1 d(-\nu, -k_z) & \frac{\pi}{2} k_\rho \rho_1 a(-\nu, -k_z) & \frac{\pi}{2} (-k_z) \rho_1 b(-\nu, -k_z) \\ -i \frac{\pi k_\rho^2 \rho_1}{2 \alpha \mu} c(-\nu, -k_z) & -i \frac{\pi(-\nu)(-k_z)}{2} \frac{\rho_1}{\alpha \mu} c(-\nu, -k_z) & 0 & \frac{\pi}{2} k_\rho \rho_1 e(-\nu, -k_z) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} k_\rho \rho_1 a(-v, k_z) & -\frac{\pi}{2} k_z \rho_1 b(-v, k_z) & -i \frac{\pi v k_z \rho_1}{2 \omega \varepsilon \rho_2} c(-v, k_z) & -i \frac{\pi}{2} \omega \mu \rho_1 d(-v, k_z) \\ 0 & \frac{\pi}{2} k_\rho \rho_1 e(-v, k_z) & i \frac{\pi k_\rho^2 \rho_1}{2 \omega \varepsilon} c(-v, k_z) & i \frac{\pi v k_z}{2 \omega \varepsilon} c(-v, k_z) \\ i \frac{\pi v k_z \rho_1}{2 \omega \mu \rho_2} c(-v, k_z) & i \frac{\pi}{2} \omega \varepsilon \rho_1 d(-v, k_z) & \frac{\pi}{2} k_\rho \rho_1 a(-v, k_z) & -\frac{\pi}{2} k_z \rho_1 b(-v, k_z) \\ -i \frac{\pi k_\rho^2 \rho_1}{2 \omega \mu} c(-v, k_z) & -i \frac{\pi v k_z}{2 \omega \mu} c(-v, k_z) & 0 & \frac{\pi}{2} k_\rho \rho_1 e(-v, k_z) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} k_\rho \rho_1 a(v, k_z) & -\frac{\pi}{2} k_z \rho_1 (-b(v, k_z)) & -i \frac{\pi v k_z \rho_1}{2 \omega \varepsilon \rho_2} c(v, k_z) & -i \frac{\pi}{2} \omega \mu \rho_1 d(v, k_z) \\ 0 & \frac{\pi}{2} k_\rho \rho_1 e(v, k_z) & i \frac{\pi k_\rho^2 \rho_1}{2 \omega \varepsilon} c(v, k_z) & i \frac{\pi v k_z}{2 \omega \varepsilon} c(v, k_z) \\ i \frac{\pi v k_z \rho_1}{2 \omega \mu \rho_2} c(v, k_z) & i \frac{\pi}{2} \omega \varepsilon \rho_1 d(v, k_z) & \frac{\pi}{2} k_\rho \rho_1 a(v, k_z) & -\frac{\pi}{2} k_z \rho_1 (-b(v, k_z)) \\ -i \frac{\pi k_\rho^2 \rho_1}{2 \omega \mu} c(v, k_z) & -i \frac{\pi v k_z}{2 \omega \mu} c(v, k_z) & 0 & \frac{\pi}{2} k_\rho \rho_1 e(v, k_z) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} k_\rho \rho_1 a(v, k_z) & \frac{\pi}{2} k_z \rho_1 b(v, k_z) & -i \frac{\pi v k_z \rho_1}{2 \omega \varepsilon \rho_2} c(v, k_z) & -i \frac{\pi}{2} \omega \mu \rho_1 d(v, k_z) \\ 0 & \frac{\pi}{2} k_\rho \rho_1 e(v, k_z) & i \frac{\pi k_\rho^2 \rho_1}{2 \omega \varepsilon} c(v, k_z) & i \frac{\pi v k_z}{2 \omega \varepsilon} c(v, k_z) \\ i \frac{\pi v k_z \rho_1}{2 \omega \mu \rho_2} c(v, k_z) & i \frac{\pi}{2} \omega \varepsilon \rho_1 d(v, k_z) & \frac{\pi}{2} k_\rho \rho_1 a(v, k_z) & \frac{\pi}{2} k_z \rho_1 b(v, k_z) \\ -i \frac{\pi k_\rho^2 \rho_1}{2 \omega \mu} c(v, k_z) & -i \frac{\pi v k_z}{2 \omega \mu} c(v, k_z) & 0 & \frac{\pi}{2} k_\rho \rho_1 e(v, k_z) \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{T}}(v, k_z)
\end{aligned}$$

d'où, on écrit :

$$\bar{\mathbf{T}}(-v, -k_z) = \bar{\mathbf{T}}(v, k_z) \quad (\text{A4})$$

Qui peut aussi s'écrire comme suit :

$$\bar{\mathbf{T}}(-\nu, k_z) = \bar{\mathbf{T}}(\nu, -k_z) \quad (\text{A5})$$

Cherchons une expressions de $\bar{\mathbf{T}}(\nu, -k_z)$ en fonction de $\bar{\mathbf{T}}(\nu, k_z)$. A partir de l'équation définissant la matrice $\bar{\mathbf{T}}$, nous pouvons écrire :

$$\bar{\mathbf{T}}(\nu, k_z) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}}^{EE}(\nu, k_z) & \bar{\mathbf{T}}^{EH}(\nu, k_z) \\ \bar{\mathbf{T}}^{HE}(\nu, k_z) & \bar{\mathbf{T}}^{HH}(\nu, k_z) \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}}^{EE} & \bar{\mathbf{T}}^{EH} \\ \bar{\mathbf{T}}^{HE} & \bar{\mathbf{T}}^{HH} \end{bmatrix} \quad (\text{A6})$$

avec :

$$\bar{\mathbf{T}}^{EE} = \frac{\pi}{2} \rho_1 \begin{bmatrix} k_\rho a & k_z b \\ 0 & k_\rho e \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{T}}^{EH} = i \frac{\pi}{2} \begin{bmatrix} -\frac{\nu k_z \rho_1}{\omega \varepsilon} c & -\omega \mu \rho_1 d \\ \frac{k_\rho^2 \rho_1}{\omega \varepsilon} c & \frac{\nu k_z}{\omega \varepsilon} c \end{bmatrix} \quad (\text{A7})$$

$$\bar{\mathbf{T}}^{HE} = -\frac{\varepsilon}{\mu} \bar{\mathbf{T}}^{EH} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{T}}^{HH} = \bar{\mathbf{T}}^{EE} \quad (\text{A8})$$

Pour calculer $\bar{\mathbf{T}}(\nu, -k_z)$, nous calculons tout d'abord les blocs $\bar{\mathbf{T}}^{EE}(\nu, -k_z)$ et $\bar{\mathbf{T}}^{EH}(\nu, -k_z)$ la constituant. En effet, de (A7) nous pouvons écrire :

$$\bar{\mathbf{T}}^{EE}(\nu, -k_z) = \frac{\pi}{2} \rho_1 \begin{bmatrix} k_\rho a & -k_z b \\ 0 & k_\rho e \end{bmatrix} = -\frac{\pi}{2} \rho_1 \begin{bmatrix} -k_\rho a & k_z b \\ 0 & -k_\rho e \end{bmatrix} \quad (\text{A9})$$

$$\bar{\mathbf{T}}^{EH}(\nu, -k_z) = i \frac{\pi}{2} \begin{bmatrix} -\frac{\nu k_z \rho_1}{\omega \varepsilon} c & -\omega \mu \rho_1 d \\ \frac{k_\rho^2 \rho_1}{\omega \varepsilon} c & -\frac{\nu k_z}{\omega \varepsilon} c \end{bmatrix} \quad (\text{A10})$$

Dans les expressions de $\bar{\mathbf{T}}^{EE}(\nu, -k_z)$ et $\bar{\mathbf{T}}^{EH}(\nu, -k_z)$ données par les équations (A9) et (A10), nous constatons l'apparition d'un signe $-$ sur les diagonales de ces matrices. Ces matrices peuvent s'écrire en terme de celles d'origine en (ν, k_z) et sans le signe $-$ si on tient compte de la propriété suivante :

$$\text{Si } \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \text{ et } \bar{\mathbf{C}}' = \begin{bmatrix} -c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & -c_{22} \end{bmatrix} \text{ alors } \bar{\mathbf{C}}' = -\bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{D}} \text{ avec } \bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A11})$$

Il est aisé de vérifier que :

$$\bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{I}} \quad \text{ou} \quad \bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{D}}^{-1} \quad (\text{A12})$$

Par conséquent, les équations (A 9) et (A10) se réécrivent comme suit :

$$\bar{\mathbf{T}}^{EE}(\nu, -k_z) = \bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{T}}^{EE}(\nu, k_z) \cdot \bar{\mathbf{D}} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{T}}^{EH}(\nu, -k_z) = -\bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{T}}^{EH}(\nu, k_z) \cdot \bar{\mathbf{D}} \quad (\text{A13})$$

A 2.2 Etude de la symétrie en (ν, k_z) de $\bar{\mathbf{M}}_0$

La matrice $\bar{\mathbf{M}}_0$ est donnée par l'équation suivante :

$$\bar{\mathbf{M}}_0(\rho, \varepsilon_0, \omega, \nu) = \begin{bmatrix} -\frac{i\nu k_z}{\omega\mu_0 k_{0\rho}\rho} \frac{H_v^{(1)}(k_{0\rho}\rho)}{\dot{H}_v^{(1)}(k_{0\rho}\rho)} & \frac{i\omega\varepsilon_0}{k_{0\rho}} \frac{\dot{H}_v^{(1)}(k_{0\rho}\rho)}{H_v^{(1)}(k_{0\rho}\rho)} & -\frac{i\nu^2 k_z^2}{\omega\mu_0 k_{0\rho}^3 \rho^2} \frac{H_v^{(1)}(k_{0\rho}\rho)}{\dot{H}_v^{(1)}(k_{0\rho}\rho)} \\ \frac{ik_{0\rho}}{\omega\mu_0} \frac{H_v^{(1)}(k_{0\rho}\rho)}{\dot{H}_v^{(1)}(k_{0\rho}\rho)} & \frac{i\nu k_z}{\omega\mu_0 k_{0\rho}\rho} \frac{H_v^{(1)}(k_{0\rho}\rho)}{\dot{H}_v^{(1)}(k_{0\rho}\rho)} \end{bmatrix} \quad (\text{A14})$$

Sachant que $k_{0\rho} = (k_0^2 - k_z^2)^{\frac{1}{2}}$ est une fonction paire en k_z et tenant compte des propriétés (A1)-(A3), nous pouvons exprimer $\bar{\mathbf{M}}_0(-\nu, -k_z)$ en terme de $\bar{\mathbf{M}}_0(\nu, k_z)$. En effet, nous avons pour $\bar{\mathbf{M}}_0(-\nu, -k_z)$ l'équation suivante :

$$\bar{\mathbf{M}}_0(-\nu, -k_z) = \begin{bmatrix} \frac{i(-\nu)(-k_z) H_{-\nu}^{(1)}(k_{0\rho}\rho)}{\omega\mu_0 k_{0\rho}\rho \dot{H}_{-\nu}^{(1)}(k_{0\rho}\rho)} & \frac{i\omega\epsilon_0 \dot{H}_{-\nu}^{(1)}(k_{0\rho}\rho)}{k_{0\rho} H_{-\nu}^{(1)}(k_{0\rho}\rho)} - \frac{i(-\nu)^2 (-k_z)^2 H_{-\nu}^{(1)}(k_{0\rho}\rho)}{\omega\mu_0 k_{0\rho}^3 \rho^2 \dot{H}_{-\nu}^{(1)}(k_{0\rho}\rho)} \\ \frac{ik_{0\rho} H_{-\nu}^{(1)}(k_{0\rho}\rho)}{\omega\mu_0 \dot{H}_{-\nu}^{(1)}(k_{0\rho}\rho)} & \frac{i\nu(-k_z) H_{-\nu}^{(1)}(k_{0\rho}\rho)}{\omega\mu_0 k_{0\rho}\rho \dot{H}_{-\nu}^{(1)}(k_{0\rho}\rho)} \end{bmatrix}$$

Soit en utilisant (A1)-(A3)

$$\bar{\mathbf{M}}_0(-\nu, -k_z) = \bar{\mathbf{M}}_0(\nu, k_z)$$

D'où, on écrit :

$$\bar{\mathbf{M}}_0(-\nu, -k_z) = \bar{\mathbf{M}}_0(\nu, k_z) \quad \text{ou} \quad \bar{\mathbf{M}}_0(-\nu, k_z) = \bar{\mathbf{M}}_0(\nu, -k_z) \quad (\text{A15})$$

Exprimons également $\bar{\mathbf{M}}_0(\nu, -k_z)$ en fonction de $\bar{\mathbf{M}}_0(\nu, k_z)$. A partir de l'équation (A14) définissant $\bar{\mathbf{M}}_0$, nous pouvons aisément prouver que :

$$\bar{\mathbf{M}}_0(\nu, -k_z) = -\bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{M}}_0(\nu, k_z) \cdot \bar{\mathbf{D}} \quad (\text{A16})$$

Nous arrivons en fin de compte à l'étude de symétrie en (ν, k_z) de $\bar{\mathbf{G}}_\nu(k_z)$. Sachant que :

$$\bar{\mathbf{G}}(k_z) = \bar{\Gamma}_{<}^{EH} \cdot [\bar{\Gamma}^{HH} - \bar{\mathbf{M}}_0(\rho_P) \cdot \bar{\Gamma}^{EH}]^{-1} \cdot [\bar{\Gamma}_{>}^{HH} - \bar{\mathbf{M}}_0(\rho_P) \cdot \bar{\Gamma}_{>}^{EH}] \cdot \bar{\mathbf{Q}}$$

il serait aisé de montrer que :

$$\bar{\mathbf{G}}_{-\nu}(-k_z) = \bar{\mathbf{G}}_\nu(k_z) \quad \text{ou} \quad \bar{\mathbf{G}}_{-\nu}(k_z) = \bar{\mathbf{G}}_\nu(-k_z) \quad (\text{A17})$$

car les matrices $\bar{\mathbf{T}}$ et $\bar{\mathbf{M}}_0$ vérifient bien cette propriété. En utilisant les propriétés établies précédemment, nous pouvons exprimer $\bar{\mathbf{G}}_\nu(-k_z)$ en fonction de $\bar{\mathbf{G}}_\nu(k_z)$ comme suit :

$$\bar{\mathbf{G}}_\nu(-k_z) = \bar{\mathbf{G}}_{-\nu}(k_z) = \bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{G}}_\nu(k_z) \cdot \bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} G_\nu^{\phi\phi}(k_z) & -G_\nu^{\phi z}(k_z) \\ -G_\nu^{z\phi}(k_z) & G_\nu^{zz}(k_z) \end{bmatrix} \quad (\text{A18})$$

A 3. Etude de symétrie en (ν, k_z) des courants (fonctions de base)

A 3.1. Premier type : sinus et cosinus sans la condition de bord

Nous avons d'après (2.121) et (2.122) :

$$\tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) = \tilde{\Phi}_{n_1}(\nu, \phi_0) \tilde{Z}_{n_2}(k_z, L) \quad \text{et} \quad \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) = \tilde{Z}_{m_1}(\nu, \phi_0) \tilde{\Phi}_{m_2}(k_z, L) \quad (\text{A19})$$

Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$\tilde{J}_{\phi n}(-\nu, -k_z) = \tilde{\Phi}_{n_1}(-\nu, \phi_0) \tilde{Z}_{n_2}(-k_z, L) \quad \text{et} \quad \tilde{J}_{zm}(-\nu, -k_z) = \tilde{Z}_{m_1}(-\nu, \phi_0) \tilde{\Phi}_{m_2}(-k_z, L) \quad (\text{A20})$$

$$\tilde{J}_{\phi n}(-\nu, k_z) = \tilde{\Phi}_{n_1}(-\nu, \phi_0) \tilde{Z}_{n_2}(k_z, L) \quad \text{et} \quad \tilde{J}_{zm}(-\nu, k_z) = \tilde{Z}_{m_1}(-\nu, \phi_0) \tilde{\Phi}_{m_2}(k_z, L) \quad (\text{A21})$$

$$\tilde{J}_{\phi n}(\nu, -k_z) = \tilde{\Phi}_{n_1}(\nu, \phi_0) \tilde{Z}_{n_2}(-k_z, L) \quad \text{et} \quad \tilde{J}_{zm}(\nu, -k_z) = \tilde{Z}_{m_1}(\nu, \phi_0) \tilde{\Phi}_{m_2}(-k_z, L) \quad (\text{A22})$$

Pour le premier type de fonctions de base $\tilde{\Phi}_n$ et \tilde{Z}_m sont données par les équations (2.141)-(2.142). A partir de ces équations, nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{n_1}(-\nu, \phi_0) &= \text{sinc}\left(-\nu\phi_0 + \frac{n_1\pi}{2}\right) - (-1)^{n_1} \text{sinc}\left(-\nu\phi_0 - \frac{n_1\pi}{2}\right) = \text{sinc}\left(\nu\phi_0 - \frac{n_1\pi}{2}\right) - (-1)^{n_1} \text{sinc}\left(\nu\phi_0 + \frac{n_1\pi}{2}\right) \\ &= -(-1)^{n_1} \left[\text{sinc}\left(\nu\phi_0 + \frac{n_1\pi}{2}\right) - (-1)^{n_1} \text{sinc}\left(\nu\phi_0 - \frac{n_1\pi}{2}\right) \right] = -(-1)^{n_1} \tilde{\Phi}_{n_1}(\nu, \phi_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_{n_2}(-k_z, L) &= \text{sinc}\left(-k_z L + \frac{n_2\pi}{2}\right) + (-1)^{n_2} \text{sinc}\left(-k_z L - \frac{n_2\pi}{2}\right) = \text{sinc}\left(k_z L - \frac{n_2\pi}{2}\right) + (-1)^{n_2} \text{sinc}\left(k_z L + \frac{n_2\pi}{2}\right) \\ &= (-1)^{n_2} \left[\text{sinc}\left(k_z L + \frac{n_2\pi}{2}\right) + (-1)^{n_2} \text{sinc}\left(k_z L - \frac{n_2\pi}{2}\right) \right] = (-1)^{n_2} \tilde{Z}_{n_2}(k_z, L)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_{m_1}(-\nu, \phi_0) &= \text{sinc}\left(-\nu\phi_0 + \frac{m_1\pi}{2}\right) + (-1)^{m_1} \text{sinc}\left(-\nu\phi_0 - \frac{m_1\pi}{2}\right) = \text{sinc}\left(\nu\phi_0 - \frac{m_1\pi}{2}\right) + (-1)^{m_1} \text{sinc}\left(\nu\phi_0 + \frac{m_1\pi}{2}\right) \\ &= (-1)^{m_1} \left[\text{sinc}\left(\nu\phi_0 + \frac{m_1\pi}{2}\right) + (-1)^{m_1} \text{sinc}\left(\nu\phi_0 - \frac{m_1\pi}{2}\right) \right] = (-1)^{m_1} \tilde{Z}_{m_1}(\nu, \phi_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{m_2}(-k_z, L) &= \text{sinc}\left(-k_z L + \frac{m_2\pi}{2}\right) - (-1)^{m_2} \text{sinc}\left(-k_z L - \frac{m_2\pi}{2}\right) \\ &= \text{sinc}\left(k_z L - \frac{m_2\pi}{2}\right) - (-1)^{m_2} \text{sinc}\left(k_z L + \frac{m_2\pi}{2}\right) = \\ &= -(-1)^{m_2} \left[\text{sinc}\left(k_z L + \frac{m_2\pi}{2}\right) - (-1)^{m_2} \text{sinc}\left(k_z L - \frac{m_2\pi}{2}\right) \right] = -(-1)^{m_2} \tilde{\Phi}_{m_2}(k_z, L)\end{aligned}$$

D'où on trouve :

$$\tilde{\Phi}_{n_1}(-\nu, \phi_0) = -(-1)^{n_1} \tilde{\Phi}_{n_1}(\nu, \phi_0) \quad n_1 = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A23})$$

$$\tilde{Z}_{n_2}(-k_z, L) = (-1)^{n_2} \tilde{Z}_{n_2}(k_z, L) \quad n_2 = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A24})$$

$$\tilde{Z}_{m_1}(-\nu, \phi_0) = (-1)^{m_1} \tilde{Z}_{m_1}(\nu, \phi_0) \quad m_1 = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A25})$$

$$\tilde{\Phi}_{m_2}(-k_z, L) = -(-1)^{m_2} \tilde{\Phi}_{m_2}(k_z, L) \quad m_2 = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A26})$$

Substituant ces 04 dernières équations dans (A19), on trouve :

$$\tilde{J}_{\phi_n}(-\nu, -k_z) = -(-1)^{n_1+n_2} \tilde{\Phi}_{n_1}(\nu, \phi_0) \tilde{Z}_{n_2}(k_z, L) = -(-1)^{n_1+n_2} \tilde{J}_{\phi_n}(\nu, k_z)$$

$$\tilde{J}_{z_m}(-\nu, -k_z) = -(-1)^{m_1+m_2} \tilde{Z}_{m_1}(\nu, \phi_0) \tilde{\Phi}_{m_2}(k_z, L) = -(-1)^{m_1+m_2} \tilde{J}_{z_m}(\nu, k_z)$$

ou encore :

$$\tilde{J}_{\phi_n}(-\nu, -k_z) = -(-1)^{n_1+n_2} \tilde{J}_{\phi_n}(\nu, k_z) \quad (\text{A27})$$

$$\tilde{J}_{z_m}(-\nu, -k_z) = -(-1)^{m_1+m_2} \tilde{J}_{z_m}(\nu, k_z) \quad (\text{A28})$$

Tenant compte de (A21)-(A26), nous pouvons également trouver :

$$\tilde{J}_{\phi_n}(-\nu, k_z) = -(-1)^{n_1} \tilde{J}_{\phi_n}(\nu, k_z) \quad (\text{A29})$$

$$\tilde{J}_{z_m}(-\nu, k_z) = (-1)^{m_1} \tilde{J}_{z_m}(\nu, k_z) \quad (\text{A30})$$

$$\tilde{J}_{\phi_n}(\nu, -k_z) = (-1)^{n_2} \tilde{J}_{\phi_n}(\nu, k_z) \quad (\text{A31})$$

$$\tilde{J}_{z_m}(\nu, -k_z) = -(-1)^{m_2} \tilde{J}_{z_m}(\nu, k_z) \quad (\text{A32})$$

A 3.2 Deuxième type : sinus et cosinus avec la condition de bord

Pour ce type de fonctions de base, la distribution est donnée par les équations (2.163)-(2.164). A partir de ces équations, nous constatons que la fonction $\tilde{\Phi}_n$ est identique à celle du premier type de courant ce qui nous permet d'écrire :

$$\tilde{\Phi}_{n_1}(-\nu, \phi_0) = -(-1)^{n_1} \tilde{\Phi}_{n_1}(\nu, \phi_0) \quad \text{et} \quad \tilde{\Phi}_{m_2}(-k_z, L) = -(-1)^{m_2} \tilde{\Phi}_{m_2}(k_z, L) \quad (\text{A33})$$

Pour $\tilde{Z}_{n_2}(-k_z, L)$ et $\tilde{Z}_{m_1}(-\nu, \phi_0)$, on a :

$$\tilde{Z}_{n_2}(-k_z, L) = J_0\left(-k_z L + \frac{n_2 \pi}{2}\right) + (-1)^{n_2} J_0\left(-k_z L - \frac{n_2 \pi}{2}\right) = J_0\left(k_z L - \frac{n_2 \pi}{2}\right) + (-1)^{n_2} J_0\left(k_z L + \frac{n_2 \pi}{2}\right)$$

car la fonction $J_0(x)$ est paire. De cette dernière équation, on déduit :

$$\tilde{Z}_{n_2}(-k_z, L) = (-1)^{n_2} \left[J_0\left(k_z L + \frac{n_2 \pi}{2}\right) + (-1)^{n_2} J_0\left(k_z L - \frac{n_2 \pi}{2}\right) \right] = (-1)^{n_2} \tilde{Z}_{n_2}(k_z, L)$$

Par analogie, nous pourrions déduire l'expression de $\tilde{Z}_{m_1}(-\nu, \phi_0)$ en fonction de $\tilde{Z}_{m_1}(\nu, \phi_0)$.

Nous obtenons alors :

$$\tilde{\Phi}_{n_1}(-\nu, \phi_0) = -(-1)^{n_1} \tilde{\Phi}_{n_1}(\nu, \phi_0) \quad n_1 = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A34})$$

$$\tilde{Z}_{n_2}(-k_z, L) = (-1)^{n_2} \tilde{Z}_{n_2}(k_z, L) \quad n_2 = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A35})$$

$$\tilde{Z}_{m_1}(-\nu, \phi_0) = (-1)^{m_1} \tilde{Z}_{m_1}(\nu, \phi_0) \quad m_1 = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A36})$$

$$\tilde{\Phi}_{m_2}(-k_z, L) = -(-1)^{m_2} \tilde{\Phi}_{m_2}(k_z, L) \quad m_2 = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A37})$$

Le produit de (A34) et (A35) donne $\tilde{J}_{\phi n}(-\nu, -k_z)$ et celui de (A36) avec (A37) donne

$\tilde{J}_{zn}(-\nu, -k_z)$, d'où on écrit :

$$\tilde{J}_{\phi n}(-\nu, -k_z) = -(-1)^{n_1+n_2} \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) \quad (\text{A38})$$

$$\tilde{J}_{zm}(-\nu, -k_z) = -(-1)^{m_1+m_2} \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \quad (\text{A39})$$

Nous pouvons déduire également que :

$$\tilde{J}_{\phi n}(-\nu, k_z) = -(-1)^{n_1} \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) \quad (\text{A40})$$

$$\tilde{J}_{zm}(-\nu, k_z) = (-1)^{m_1} \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \quad (\text{A41})$$

$$\tilde{J}_{\phi n}(\nu, -k_z) = (-1)^{n_2} \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) \quad (\text{A42})$$

$$\tilde{J}_{zm}(\nu, -k_z) = -(-1)^{m_2} \tilde{J}_{zm}(\nu, k_z) \quad (\text{A43})$$

A 3.3 Troisième type : Polynôme de Chebyshev avec la condition de bord

Pour étudier la symétrie de $\tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z)$ et $\tilde{J}_{zm}(\nu, k_z)$ en (ν, k_z) de ce type de courants, nous utilisons les équations (2.190)-(2.191) :

$$\tilde{\Phi}_{n_1}(-\nu, \phi_0) = \frac{n_1+1}{-\nu\phi_0} J_{n_1+1}(-\nu\phi_0) = \frac{n_1+1}{-\nu\phi_0} (-1)^{n_1+1} J_{n_1+1}(\nu\phi_0) = (-1)^{n_1} \frac{n_1+1}{\nu\phi_0} J_{n_1+1}(\nu\phi_0) = (-1)^{n_1} \tilde{\Phi}_{n_1}(\nu, \phi_0)$$

$$\tilde{Z}_{n_2}(-k_z, L) = J_{n_2}(-k_z L) = (-1)^{n_2} J_{n_2}(k_z L) = (-1)^{n_2} \tilde{Z}_{n_2}(k_z, L)$$

$$\tilde{Z}_{m_1}(-\nu, \phi_0) = J_{m_1}(-\nu\phi_0) = (-1)^{m_1} J_{m_1}(\nu\phi_0) = (-1)^{m_1} \tilde{Z}_{m_1}(\nu, \phi_0)$$

$$\tilde{\Phi}_{m_2}(-k_z, L) = \frac{m_2+1}{-k_z L} J_{m_2+1}(-k_z L) = \frac{m_2+1}{-k_z L} (-1)^{m_2+1} J_{m_2+1}(k_z L)$$

$$= (-1)^{m_2} \frac{m_2 + 1}{k_z L} J_{m_2+1}(k_z L) = (-1)^{m_2} \tilde{\Phi}_{m_2}(-k_z, L)$$

d'où :

$$\tilde{\Phi}_{n_1}(-\nu, \phi_0) = (-1)^{n_1} \tilde{\Phi}_{n_1}(\nu, \phi_0) \quad n_1 = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A44})$$

$$\tilde{Z}_{n_2}(-k_z, L) = (-1)^{n_2} \tilde{Z}_{n_2}(k_z, L) \quad n_2 = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A45})$$

$$\tilde{Z}_{m_1}(-\nu, \phi_0) = (-1)^{m_1} \tilde{Z}_{m_1}(\nu, \phi_0) \quad m_1 = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A46})$$

$$\tilde{\Phi}_{m_2}(-k_z, L) = (-1)^{m_2} \tilde{\Phi}_{m_2}(-k_z, L) \quad m_2 = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A47})$$

Nous pourrions donc constituer les expressions de $\tilde{J}_{\phi n}(-\nu, -k_z)$, $\tilde{J}_{z n}(-\nu, -k_z)$, $\tilde{J}_{\phi n}(-\nu, k_z)$, $\tilde{J}_{z n}(-\nu, k_z)$, $\tilde{J}_{\phi n}(\nu, -k_z)$ et $\tilde{J}_{z n}(\nu, -k_z)$ comme suit :

$$\tilde{J}_{\phi n}(-\nu, -k_z) = (-1)^{n_1+n_2} \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) \quad (\text{A48})$$

$$\tilde{J}_{z n}(-\nu, -k_z) = (-1)^{m_1+m_2} \tilde{J}_{z n}(\nu, k_z) \quad (\text{A49})$$

$$\tilde{J}_{\phi n}(-\nu, k_z) = (-1)^{n_1} \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) \quad (\text{A50})$$

$$\tilde{J}_{z n}(-\nu, k_z) = (-1)^{m_1} \tilde{J}_{z n}(\nu, k_z) \quad (\text{A51})$$

$$\tilde{J}_{\phi n}(\nu, -k_z) = (-1)^{n_2} \tilde{J}_{\phi n}(\nu, k_z) \quad (\text{A52})$$

$$\tilde{J}_{z n}(\nu, -k_z) = (-1)^{m_2} \tilde{J}_{z n}(\nu, k_z) \quad (\text{A53})$$

Bibliographie

- [1] K. L. Wong, “Design of nonplanar microstrip antennas and Transmission lines,” New York: Wiley; 1999.
- [2] D. Khedrouche, “Etude d’une structure piégée d’une antenne microbande rectangulaire,” *Thèse de Magister, Département d’Electronique, Université de Constantine*, 1999.
- [3] H. Mang, X. Xiaowen, “Full-wave analysis and wide-band design of probe-fed multilayered cylindrical-rectangular microstrip antennas,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 2004; 52: 1749–1757.
- [4] A. Svezhentsev and GAE. “Vandenbosch Efficient spatial domain moment method solution of cylindrical rectangular microstrip antennas,” *IEE Proc.-Microw. Antennas Propag* 2006; 153: 376-384.
- [5] F. Bouttout, F. Benabdalaziz, A. Benghalia, D. Khedrouche and T. Fortaki, “Uniaxially anisotropic substrates effects on the resonance of rectangular microstrip patch antenna.” *Electrn. Lett.* Vol. 35, pp. 255-256, 1999.
- [6] F. Bouttout, F. Benabdalaziz, T. Fortaki and D. Khedrouche, “Resonant frequency and bandwidth of superstrate-loaded rectangular patch on a uniaxial anisotropic substrate,” *Communications in Numerical Methods in Engineering. Electr. John Wiely and Sons, Commun. Meth. Engng* 2000, 16 : 459-473, june 2000 USA.
- [7] T. Fortaki, D. Khedrouche, F. Bouttout, A. Benghalia, “Numerical analysis of rectangular microstrip patch over ground plane with rectangular aperture,” *John Wiley & Sons, Commun. Numer. Meth. Engng.* 2004; 20:489–500.
- [8] T. Fortaki, D. Khedrouche, F. Bouttout, A. Benghalia, “Hankel transform analysis of a tunable circular microstrip patch,” *John Wiley & Sons, Commun. Numer. Meth. Engng.* 2005; 21:219–231.
- [9] T. Fortaki, D. Khedrouche, F. Bouttout, A. Benghalia, “A numerically efficient full-wave analysis of a tunable rectangular microstrip patch,” *International Journal of Electronics*, Volume 91, Number 1, January 2004, pp. 57-70(14).

- [10] T. Fortaki, D. Khedrouche, F. Bouttout, and A. Benghalia, "A new approach to TM and TE modal equations of open stratified planar structures," *Far East Journal of Applied Mathematics* Volume 18, Issue 3 (March 2005). Page: 323 – 330.
- [11] K. L. Wong and S. T. Fang, "Cavity-model solutions of cylindrical triangular microstrip patch antennas," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 15, pp. 377-380, Aug. 20, 1997.
- [12] K. L. Wong, Y. H. Liu, and C. Y. Huang, "Generalized transmission line model for cylindrical-rectangular microstrip antenna," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 7, pp. 729-732, Nov. 1994.
- [13] H. Pues and A. Van de Capelle, "Accurate transmission-line model for the rectangular microstrip antenna," *ZEE Proc.*, pt. H, vol. 131, pp. 334-340, Dec. 1984.
- [14] A. K. Bhattacharyya and R. Garg, "Generalised transmission line model for microstrip patches," *ZEE Proc.*, pt. H., vol. 132, pp. 93-98, Apr. 1985.
- [15] Y. T. Lo, D. Soloman, and W. F. Richards, "Theory and experiment on microstrip antennas," *IEEE Trans. Antennas Propugut.*, vol. 27, pp. 137-145, Mar. 1979.
- [16] S. Y. Ke and K. L. Wong, "Input impedance of a probe-fed superstrate-loaded cylindrical-rectangular microstrip antenna," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 7, pp. 232-236, Apr. 5, 1994.
- [17] FR. Cooray and JS. Kot, "Analysis of radiation from a cylindrical-rectangular microstrip patch antenna loaded with a superstrate and an air gap, using the electric surface current model," *Progress In Electromagnetics Research, PIER* 2007; 67: 135–152.
- [18] A. Svezhentsev, "Excitation of cylindrical microstrip antenna with two symmetrically located radiating elements," *Springer Radiophysics and Quantum Electronics* 2005; 48: 466-478.
- [19] J. Ashkenazy, S. Shtrikman and D. Treves, "Electric surface current model for the analysis of microstrip antennas on cylindrical bodies," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 1985; 33: 295–300.
- [20] S. M. Ali, T. M. Habashy, JF. Kiang and JA. Kong, "Resonance in cylindrical-rectangular and wraparound microstrip structures," *IEEE Transactions Microwave Theory and Techniques* 1989; 37: 1773-1783.
- [21] T. M. Habashy, S. M. Ali and J. A. Kong, "Input impedance and radiation pattern of cylindrical-rectangular and wraparound microstrip antennas," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 1990; 38: 722-731.

- [22] F. C. Silva, S. B. A. Fonseca, A. J. M. Soares, and A. J. Giarola, "Analysis of microstrip antennas on circular-cylindrical substrates with a dielectric overlay," *IEEE Trans. Antennas Propagut.*, vol. 39, pp. 1398-1404, Sept. 1991.
- [23] F. Harrington, "Field Computation by Moment Method," Macmillan, New York, 1968.
- [24] K. L. Wong, Y. T. Cheng, and J. S. Row, "Resonance in a superstrate-loaded cylindrical-rectangular microstrip structure," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 41, pp. 814-819, May 1993.
- [25] K. L. Wong, Y. T. Cheng and JS. Row, "Analysis of a cylindrical-rectangular microstrip structure with an airgap," *IEEE Transactions Microwave Theory and Techniques* 1994; 42: 1032-1037.
- [26] K. L. Wong, Y. T. Cheng, and J. S. Row, "Resonance and radiation of a superstrate loaded cylindrical-rectangular microstrip patch antenna with an airgap," *Proc. Natl. Sci. Count. ROC(A)*, vol. 17, pp. 365-371, Sept. 1993.
- [27] K. L. Wong and Y. C. Chen, "Resonant frequency of a slot-coupled cylindrical rectangular microstrip structure," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 7, pp. 566-570, Aug. 20, 1994.
- [28] K. L. Wong, R. B. Tsai, and J. S. Row, "Resonance in a cylindrical wraparound microstrip structure with superstrate," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 42, pp. 1097-1100, June 1994.
- [29] W. C. Chew, "The singularities of a Fourier-type integral in a multicylindrical layer problem", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-31, n^o4, pp. 653-655, July 1983.
- [30] J. S. Dahele, R. J. Mitchell, K. M. Luk, and K. F. Lee, "Effect of curvature on characteristics of rectangular patch antenna," *Electron. Lett.*, vol. 23, pp. 748-749, July 2, 1987.
- [31] S. C. Pan and K. L. Wong, "Characteristics of a cylindrical triangular microstrip antenna," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 15, pp. 49-52, May 1997.
- [32] K. M. Luk, K. F. Lee, and J. S. Dahele, "Analysis of the cylindrical-rectangular patch antenna," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 37, pp. 143-147, Feb. 1989.
- [33] K. M. Luk and K. F. Lee, "Characteristics of the cylindrical-circular patch antenna," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 38, pp. 1119-1 123, July 1990.
- [34] H. D. Chen and K. L. Wong, "Input impedance and radiation pattern of a probe-fed cylindrical annular-ring microstrip antenna," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 8, pp. 152-156, Feb. 20, 1995.

- [35] A. K. Bhattacharyya and R. Garg, "Input impedance of annular-ring microstrip antenna using circuit theory approach," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 33, pp. 369-374, Apr. 1985.
- [36] K. L. Wong, C. Y. Huang, and Y. H. Liu, "Generalized transmission line model for cylindrical-circular microstrip antenna," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 8, pp. 63-68, Feb. 5, 1995.
- [37] C. Y. Huang and W. S. Chen, "Input impedance of a probe-fed cylindrical annular-ring microstrip antenna," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 16, pp. 41-44, Sept. 1997.
- [38] W. Y. Tam, A. K. Y. Lai, and K. M. Luk, "Full-wave analysis of aperture-coupled cylindrical rectangular microstrip antenna," *Electron. Lett.*, vol. 30, pp. 1461-1462, Sept. 1, 1994.
- [39] K. L. Wong and J. S. Chen, "Cavity-model analysis of a slot-coupled cylindrical rectangular microstrip antenna," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 9, pp. 124-127, June 20, 1995.
- [40] C. Y. Huang and K. L. Wong, "Analysis of a slot-coupled cylindrical-rectangular microstrip antenna," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 8, pp. 251-253, Apr. 5, 1995.
- [41] K. L. Wong, C. Y. Huang, and Y. H. Liu, "Analysis of a microstripline-fed cylindrical rectangular microstrip antenna using generalized transmission line model," *Proc. Natl. Sci. Count. ROC(A)*, vol. 19, pp. 452-456, Sept. 1995.
- [42] C. Yang and T. Z. Ruan, "Radiation characteristics of wraparound microstrip antenna on cylindrical body," *Electron. Lett.*, vol. 29, pp. 512-514, Mar. 18, 1993.
- [43] K. L. Wong and S. Y. Ke, "Cylindrical-rectangular microstrip antenna for circular polarization," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 41, pp. 246-249, Feb. 1993.
- [44] S. T. Fang, S. C. Pan, and K. L. Wong, "Crosspolarisation characteristics of cylindrical triangular microstrip antennas," *Electron. Lett.*, vol. 34, pp. 6-7, Jan. 8, 1998.
- [45] C. Y. Huang and K. L. Wong, "Input impedance and mutual coupling of probe-fed cylindrical-circular microstrip patch antennas," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 11, pp. 260-263, Apr. 5, 1996.
- [46] F. Bouttout, F. Lethimonnier, and D. Le Bihan "Full-wave analysis of single cylindrical striplines and microstriplines with multilayer dielectrics," *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2006; 68: 809–835.
- [47] A. W. Mathis and A.F. Peterson. "Efficient electromagnetic analysis of a doubly infinite array of rectangular apertures," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 1998; 46: 46-54.
- [48] R. F. Harrington. "Time harmonic electromagnetic fields," New York: Mc-Graw-Hill; 1961.

- [49] W. C. Chew “Waves and Fields in Inhomogeneous Media,” New York: Van Norstrand Reinhold;1990.
- [50] M. Abramowitz and I. Stegun, Eds., *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover, 1972.
- [51] B. Davies, *Integral Transforms and their Applications*. 3rd Edition, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [52] N. Herscovici, Z. Sipus, and P.-S. Kildal, “The cylindrical omnidirectional patch antenna”. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 49, n°12, pp. 1746-1753, Dec. 2001.
- [53] N. G. Alexopoulos and A. Nakatani, “Cylindrical substrate microstrip line characterization”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-35, n°9, pp. 843-849, Sep. 1987.
- [54] W. Y. Tam, A. K. Y. and K. M. Luk, “Mutual coupling between cylindrical rectangular microstrip antennas”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-43, n°8, pp. 897-899, Aug. 1995.
- [55] K. M. Luk, W. Y. Tam and C. L. Yip, “Analysis of circular microstrip antennas with superstrate,” *Proc. Inst. Elec. Eng.*, pt. H, vol. 136, pp. 261-262, 1989.
- [56] J. S. Row. and K. L. Wong, “Resonance in a superstrate-loaded rectangular microstrip structure”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques.*, vol. 41, pp. 1349-1354, Aug. 1993.
- [57] K. L. Wong, Y. T. Cheng and J. S. Row. “Analysis of a Cylindrical-Rectangular Microstrip Structure with an Airgap”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques.*, vol. 42, pp. 1032-1037, June 1994.