



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

*Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*

UNIVERSITE CONSTANTINE 1  
FACULTÉ DES SCIENCES DE LA TECHNOLOGIE  
DÉPARTEMENT D'ÉLECTRONIQUE

**THESE**

Présentée pour obtenir le diplôme de

**DOCTORAT EN SCIENCES**

Spécialité : ELECTRONIQUE

Option : TRAITEMENT DU SIGNAL

Par :

**NEZZARI Hassene**

**THEME**

**CONTRIBUTION A L'ANALYSE DES SYSTEMES D'ORDRE  
FRACTIONNAIRE**

Soutenue le 19/12/2013

Devant le Jury :

Président	A. Bennis	<i>Professeur, Université Constantine 1</i>
Rapporteur	A. Charef	<i>Professeur, Université Constantine 1</i>
Examineurs	F. Soltani	<i>Professeur, Université Constantine 1</i>
	H. Tebbikh	<i>Professeur, Université de Guelma</i>
	S. Ladaci	<i>Maître de Conférence "A", Université de Skikda</i>

# *Dédicaces*

*A mes parents,*

*A ma petite famille,*

*A mes frères et sœurs,*

*A tous mes amis,*

# *Remerciements*

Avant tout, mes remerciements à mon dieu **ALLAH** le tout puissant qui m'a aidé à faire ce travail et qui m'a donné le courage, la patience et la santé durant toutes ces longues années d'étude afin que je puisse arriver à ce niveau.

Ce travail de recherche a été effectué au Laboratoire de traitement du signal de l'Université de Constantine, sous la direction scientifique de Monsieur le professeur **Abdelfatah CHAREF**, que je tiens à remercier très vivement de son enthousiasme envers mon travail, de sa disponibilité et de son soutien scientifique et humain. Je le remercie également, pour la confiance qu'il m'a accordée, ses encouragements et ses précieux conseils.

Je suis très honoré que Monsieur **Abdelhak BENNIA**, Professeur à l'université de Constantine, ait accepté de présider le jury de cette thèse. Je remercie également Messieurs **Faouzi SOLTANI**, Professeur à l'université de Constantine, **Hicham TEBBIKH**, Professeur à l'université de Guelma et **Samir LADACI**, Maître de Conférence à l'université de Skikda, d'avoir accepté de participer à ce jury.

Je remercie aussi toute l'équipe du laboratoire de traitement du signal, équipe système, pour leurs aides, serviabilités et leurs encouragements.

Mes remerciements s'adressent également à tous mes collègues de l'Unité de Recherche en Technologie Industrielle de Annaba, pour leurs soutiens et particulièrement le directeur de l'Unité Monsieur **H. MERADI**, pour son aide et sa flexibilité qui ma donné la possibilité d'avoir un compromis entre les travaux de recherche au niveau de l'unité et mes travaux de thèse, ainsi que Monsieur **H. MERABTI** le directeur de division Mécatronique, sans oublier le chef d'équipe capteur Monsieur **R. SAIDI** pour ses conseils et son encouragement.

Mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur **M. CHIHA**, Maître de Conférence à l'université de Skikda et Monsieur **L. LOUZE**, Maître de Conférence à l'université de Constantine 1, pour l'aide à l'amélioration de ce manuscrit, tous mes amis et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Enfin je ne pourrais pas terminer ces remerciements sans une pensée à l'ensemble de mes enseignants de toutes les phases scolaire qui sont à l'origine de tout mon savoir et précisément Monsieur **Abdelhadi GHORAB** qui m'appriis à lire et à écrire.

Un grand merci à mes parents, à ma chère épouse pour son sacrifice et patience et mes enfants pour leur amour.

# *Table des matières*

<b>Remerciements</b> .....	i
<b>Liste des figures</b> .....	vi
<b>Liste des tableaux</b> .....	x
<b>Introduction Générale</b> .....	1
1.1 Introduction .....	1
1.2 Objectif de la thèse .....	3
1.3 Présentation de la thèse .....	4
<b>Chapitre 1 : Introduction au calcul d'ordre fractionnaire</b> .....	6
1.1 Introduction .....	6
1.2 Opérateurs d'ordre fractionnaire .....	6
1.2.1 Définitions .....	7
1.2.1.1 Définition de Grünwald-Leitnikov .....	7
1.2.1.2 Définition de Riemann-Liouville .....	7
1.2.1.3 Définition de Caputo .....	8
1.2.2 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire .....	8
1.2.3 Interprétations géométrique et physique .....	9
1.2.4 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire .....	9
1.2.4.1 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire .....	9
1.2.1.2 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire .....	10
1.3 Fonctions spécifiques pour le calcul fractionnaire .....	10
1.3.1 La fonction Gamma .....	10
1.3.2 La fonction de Mittag-Leffler .....	11
1.3.3 La fonction d'Agarwal .....	13
1.3.4 La fonction d'Erdelyi .....	13
1.3.5 La fonction de Robotnov–Hartley .....	13
1.3.6 La fonction de Miller–Ross .....	14
1.3.7 La fonction R généralisée .....	14

1.4	Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire .....	16
1.4.1	Approximation analogique .....	16
1.4.1.1	Méthode de Charef .....	16
1.4.2	Approximation numérique .....	18
1.5	Réalisation analogique des opérateurs d'ordre fractionnaire .....	18
1.6	Conclusion .....	21
<b>Chapitre 2 : Système linéaires d'ordre fractionnaire .....</b>		<b>22</b>
2.1	Introduction .....	22
2.2	Représentation des systèmes d'ordre fractionnaire .....	22
2.2.1	Équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire .....	22
2.2.2	Fonction de transfert .....	23
2.2.3	Représentation d'état des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire .....	23
2.2.3.1	Définition .....	23
2.2.3.2	Relation entre représentation d'état et fonction de transfert .....	24
2.3	Propriétés des systèmes d'ordre fractionnaire .....	24
2.3.1	Systèmes fractionnaires versus systèmes d'ordre entier .....	24
2.3.2	Stabilité d'un système d'ordre fractionnaire .....	25
2.3.3	Observabilité et Contrôlabilité d'un système d'ordre fractionnaire .....	26
2.4	Résolution des systèmes d'ordre fractionnaire .....	27
2.4.1	Equation différentielle d'ordre fractionnaire à un seul terme .....	28
2.4.2	Equation différentielle d'ordre fractionnaire à deux termes .....	28
2.4.3	Equation différentielle d'ordre fractionnaire à trois termes .....	29
2.4.4	Equation différentielle fractionnaire générale .....	29
2.5	Les systèmes linéaires d'ordre fractionnaire fondamental .....	31
2.5.1	Système d'ordre fractionnaire de relaxation .....	31
2.5.1.1	Définition .....	31
2.5.1.2	Approximation par une fonction rationnelle .....	31
2.5.1.3	Les réponses temporelles .....	35
2.5.1.4	Implémentation par des circuits électriques analogiques .....	37
2.5.2	Système d'ordre fractionnaire oscillatoire .....	37
2.5.2.1	Premier type du système d'ordre fractionnaire oscillatoire .....	37
2.5.2.1.1	Définition .....	37

2.5.2.1.2	Approximation par une fonction rationnelle .....	38
2.5.2.1.3	Les réponses temporelles .....	41
2.5.2.1.4	Implémentation par des circuits électriques analogiques .....	43
2.5.2.2	Deuxième type du système d'ordre fractionnaire oscillatoire.....	46
2.5.2.2.1	Premier cas pour $0 < m < 0.5$ .....	46
2.5.2.2.2	Deuxième cas pour $0.5 < m < 1$ .....	51
2.5.3	Stabilité des systèmes de relaxation et oscillatoire d'ordre fractionnaire.....	57
2.6	Conclusion .....	57
<b>Chapitre 3 : Approximation et réalisation analogique des fonctions sinus et cosinus</b>		
	<b>amorties d'ordre fractionnaire .....</b>	<b>58</b>
3.1	Introduction .....	58
3.2	Préliminaire .....	58
3.3	Les fonctions sinus et cosinus d'ordre fractionnaire .....	60
3.3.1	Définition de la fonction sinus d'ordre fractionnaire .....	60
3.3.2	Approximation de la fonction sinus d'ordre fractionnaire .....	61
3.3.3	Définition de la fonction cosinus d'ordre fractionnaire .....	61
3.3.4	Approximation de la fonction cosinus d'ordre fractionnaire .....	61
3.4	Définition des fonctions sinus et cosinus amorties d'ordre fractionnaire .....	62
3.5	Approximation des fonctions sinus et cosinus amorties d'ordre fractionnaire .....	63
3.5.1	Approximation par une fonction rationnelle .....	63
3.5.2	Approximation de la fonction sinus amortie d'ordre fractionnaire .....	64
3.5.2.1	Réponses temporelles de la fonction sinus amortie d'ordre fractionnaire .....	66
3.5.2.2	Exemples illustratifs.....	67
3.5.3	Approximation de la fonction cosinus amortie d'ordre fractionnaire.....	76
3.5.3.1	Réponses temporelles de la fonction cosinus amortie d'ordre fractionnaire ....	77
3.5.3.2	Exemples illustratifs.....	78
3.5.4	Remarques .....	88
3.5.5	Approximation par la méthode du ZPF .....	89
3.5.5.1	Les réponses temporelles .....	91
3.5.5.2	Exemple illustratif.....	93
3.6	Implémentation des fonctions sinus et cosinus amorties d'ordre fractionnaire par des circuits analogiques .....	96

3.6.1	Implémentation de la fonction sinus amortie d'ordre fractionnaire .....	96
3.6.2	Implémentation de la fonction cosinus amortie d'ordre fractionnaire.....	99
3.6.3	Implémentation de l'approximation par ZPF.....	101
3.7	Stabilité des fonctions sinus et cosinus amorties d'ordre fractionnaire .....	103
3.8	Conclusion .....	105
<b>Chapitre 4 : Extraction des performances caractéristiques d'un système d'ordre fractionnaire généralisé .....</b>		
	<b>fractionnaire généralisé .....</b>	<b>107</b>
4.1	Introduction .....	107
4.2	Performances caractéristiques d'un système de deuxième ordre .....	108
4.2.1	Spécifications fréquentielles .....	108
4.2.2	Spécifications temporelles .....	110
4.3	Performances caractéristiques d'un système d'ordre fractionnaire oscillatoire .....	112
4.3.1	Introduction .....	112
4.3.2	Spécifications fréquentielles du système d'ordre fractionnaire oscillatoire .....	112
4.3.3	Spécifications temporelles du système d'ordre fractionnaire oscillatoire .....	114
4.4	Performances caractéristiques d'un système d'ordre fractionnaire généralisé .....	115
4.4.1	Spécifications fréquentielles .....	116
4.4.1.1	Comportement asymptotique de $G(j\omega)$ .....	116
4.4.1.2	Facteur de qualité $Q$ .....	117
4.4.1.3	Fréquence et facteur de résonance .....	117
4.4.2	Spécifications temporelles du système d'ordre fractionnaire généralisé .....	122
4.4.2.1	Temps du dépassement $T_p$ .....	122
4.4.2.2	Le dépassement en %.....	122
4.4.2.3	Le temps de réponse $T_s$ .....	126
4.4.2.4	Le temps de montée $T_r$ .....	127
4.5	Conclusion .....	129
<b>Conclusion Générale .....</b>		<b>130</b>
1	Conclusion .....	130
2	Perspectives et suggestions .....	131
<b>Références .....</b>		<b>133</b>

# *Liste des figures*

1.1	Tracé de la fonction Gamma d'Euler .....	11
1.2	Tracé de la Fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres $E_{1,1}(t)$ et $E_{\sqrt{2},3/2}(t)$ .....	12
1.3	Réalisation analogique d'un intégrateur d'ordre fractionnaire.....	19
1.4	Réalisation analogique d'un dérivateur d'ordre fractionnaire.....	20
2.1	Zones de stabilité des systèmes linéaires d'ordre commensurable en fonction d'ordre de dérivation $\alpha$ .....	26
2.2	Distribution de la fonction des temps de relaxation .....	32
2.3	Diagramme de Bode (Module) de la fonction $G(s)$ et son approximation par une fonction rationnelle.....	34
2.4	Diagramme de Bode (Phase) de la fonction $G(s)$ et son approximation par une fonction rationnelle .....	34
2.5	La réponse impulsionnelle pour $m$ de 0.05 à 0.45 avec un pas de 0.05 .....	36
2.6	La réponse indicielle pour $m$ de 0.1 à 0.45 avec un pas de 0.05 .....	36
2.7	Implémentation du système de relaxation par un circuit RC analogique.....	37
2.8	Tracé de Bode (Module) de la fonction irrationnelle et de son approximation par une fonction rationnelle pour $m$ varie de 0.55 à 0.95 avec un pas de 0.05 .....	40
2.9	Tracé de Bode (Phase) de la fonction irrationnelle et de son approximation par une fonction rationnelle pour $m$ varie de 0.55 à 0.95 avec un pas de 0.05 .....	40
2.10	La réponse impulsionnelle pour $m$ variant de 0.55 à 0.95 avec un pas de 0.05 .....	42
2.11	La réponse indicielle pour $m$ variant de 0.55 à 0.95 avec un pas de 0.05 .....	43
2.12	Implémentation du système fractionnaire oscillatoire par un circuit analogique.....	44
2.13	Circuit RLC parallèle .....	44
2.14	Réalisation du circuit analogique RC du ZPF $(1 + s\tau_0)^{2-2m}$ .....	45
2.15	Module de $G_2(s)$ pour $0 < m < 0.5$ , avec un pas de 0.05 .....	49
2.16	La phase de $G_2(s)$ pour $0 < m < 0.5$ , avec un pas de 0.05 .....	50
2.17	Réponse impulsionnelle du système fractionnaire oscillatoire du deuxième type pour $0 < m < 0.5$ .....	50
2.18	Réponse indicielle du système fractionnaire oscillatoire du deuxième type pour $0 < m < 0.5$ .....	51

<b>2.19</b>	Module de $G_2(s)$ pour $0.5 < m < 1$ , avec un pas de 0.05 .....	55
<b>2.20</b>	La phase de $G_2(s)$ pour $0.5 < m < 1$ , avec un pas de 0.05 .....	55
<b>2.21</b>	Réponse impulsionnelle du système fractionnaire oscillatoire du deuxième type pour $0.5 < m < 1$ .....	56
<b>2.22</b>	Réponse indicielle du système fractionnaire oscillatoire du deuxième type pour $0.5 < m < 1$ .....	56
<b>3.1</b>	Diagramme de Bode (Module) de la fonction de transfert $G_{SA}(s)$ , son approximation par l'approche proposée et celle utilisant la méthode d'Oustaloup, pour $\xi=0.87$ et $m=0.46$ .....	69
<b>3.2</b>	Diagramme de Bode (Phase) de la fonction de transfert $G_{SA}(s)$ , son approximation par l'approche proposée et celle utilisant la méthode d'Oustaloup, pour $\xi=0.87$ et $m=0.46$ .....	69
<b>3.3</b>	La réponse impulsionnelle du système sinus amorti d'ordre fractionnaire proposée et celle utilisant la fonction de la réponse impulsionelle généralisé, pour $\xi=0.87$ et $m=0.46$ .....	71
<b>3.4</b>	La réponse indicielle du système sinus amorti d'ordre fractionnaire proposée et celle utilisant la fonction de Mittag-Leffler, pour $\xi=0.87$ et $m=0.46$ .....	71
<b>3.5</b>	Diagramme de Bode (Module) de la fonction de transfert $G_{SA}(s)$ , son approximation par l'approche proposée et celle utilisant la méthode d'Oustaloup, pour $\xi=0.35$ et $m=0.9$ .....	73
<b>3.6</b>	Diagramme de Bode (Phase) de la fonction de transfert $G_{SA}(s)$ , son approximation par l'approche proposée et celle utilisant la méthode d'Oustaloup, pour $\xi=0.35$ et $m=0.9$ .....	74
<b>3.7</b>	La réponse impulsionnelle du système sinus amorti d'ordre fractionnaire proposée et celle utilisant la fonction de la réponse impulsionelle généralisé, pour $\xi=0.35$ et $m=0.9$ .....	75
<b>3.8</b>	La réponse indicielle du système sinus amorti d'ordre fractionnaire proposée et celle utilisant la fonction de Mittag-Leffler, pour $\xi=0.35$ et $m=0.9$ .....	75
<b>3.9</b>	Diagramme de Bode (Module) de la fonction de transfert $G_{CA}(s)$ , son approximation par l'approche proposée et celle utilisant la méthode d'Oustaloup, pour $\xi=0.87$ et $m=0.46$ .....	80

<b>3.10</b>	Diagramme de Bode (Phase) de la fonction de transfert $G_{CA}(s)$ , son approximation par l'approche proposée et celle utilisant la méthode d'Oustaloup, pour $\xi=0.87$ et $m=0.46$ .....	81
<b>3.11</b>	La réponse impulsionnelle du système cosinus amorti d'ordre fractionnaire à partir de la méthode d'approximation par une fonction rationnelle proposée et celle utilisant la fonction de la réponse impulsionnelle généralisé, pour $\xi=0.87$ et $m=0.46$ .....	82
<b>3.12</b>	La réponse indicielle du système cosinus amorti d'ordre fractionnaire à partir de la méthode d'approximation par une fonction rationnelle proposée et celle utilisant la fonction de Mittag-Leffler, pour $\xi=0.87$ et $m=0.46$ .....	83
<b>3.13</b>	Diagramme de Bode (Module) de la fonction de transfert $G_{CA}(s)$ , son approximation par l'approche proposée et celle utilisant la méthode d'Oustaloup, pour $\xi=0.35$ et $m=0.9$ .....	85
<b>3.14</b>	Diagramme de Bode (Phase) de la fonction de transfert $G_{CA}(s)$ , son approximation par l'approche proposée et celle utilisant la méthode d'Oustaloup, pour $\xi=0.35$ et $m=0.9$ .....	85
<b>3.15</b>	La réponse impulsionnelle du système cosinus amortie d'ordre fractionnaire à partir de la méthode d'approximation par une fonction rationnelle proposée et celle utilisant la fonction de la réponse impulsionnelle généralisé, pour $\xi=0.35$ et $m=0.9$ .....	87
<b>3.16</b>	La réponse indicielle du système cosinus amortie d'ordre fractionnaire à partir de la méthode d'approximation par une fonction rationnelle proposée et celle utilisant la fonction de Mittag-Leffler, pour $\xi=0.35$ et $m=0.9$ .....	87
<b>3.17</b>	Diagramme de Bode (Module) de la fonction de transfert $G(s) = \frac{1}{[s^{1.7} + 0.9s^{0.85} + 1]}$ , la méthode proposée et la méthode d'Oustaloup .....	94
<b>3.18</b>	Diagramme de Bode (Phase) de la fonction de transfert $G(s) = \frac{1}{[s^{1.7} + 0.9s^{0.85} + 1]}$ , la méthode proposée et la méthode d'Oustaloup .....	94
<b>3.19</b>	La réponse impulsionnelle du système $\frac{d^{1.7}x(t)}{dt^{1.7}} + (0.9)\frac{d^{0.85}x(t)}{dt^{0.85}} + x(t) = e(t)$ a partir de la méthode proposée et celui utilisant La fonction Mittag-Leffler .....	95
<b>3.20</b>	La réponse indicielle du système $\frac{d^{1.7}x(t)}{dt^{1.7}} + (0.9)\frac{d^{0.85}x(t)}{dt^{0.85}} + x(t) = e(t)$ a partir de la méthode proposée et celui utilisant La fonction Mittag-Leffler .....	95
<b>3.21</b>	Circuit analogique implémentant l'impédance $Z_1$ .....	97
<b>3.22</b>	Circuit analogique implémentant l'impédance $Z_2$ .....	97

<b>3.23</b>	Circuit analogique implémentant le système sinus amorti d'ordre fractionnaire.....	98
<b>3.24</b>	Réalisation d'un circuit analogique représentant le système cosinus amorti d'ordre fractionnaire.....	100
<b>3.25</b>	Réalisation d'un circuit analogique du système d'ordre fractionnaire généralisé.....	101
<b>3.26</b>	Circuit RLC parallèle .....	102
<b>3.27</b>	Réalisation d'un circuit analogique RC du ZPF.....	102
<b>3.28</b>	Région de stabilité dans le plan $[m, \xi]$ .....	105
<b>4.1</b>	Réponse fréquentielle du système du second ordre (Module).....	108
<b>4.2</b>	Réponse indicielle du système de second ordre .....	110
<b>4.3</b>	Facteur de qualité $Q$ en fonction de $m$ pour quelque valeur de $\xi$ .....	118
<b>4.4</b>	Facteur de qualité $Q$ en fonction de $\xi$ pour différentes valeurs de $m$ ( $0 < m < 1$ ) et $m=1$ .....	118
<b>4.5</b>	Pulsation de résonance $\omega_r$ en fonction de $m$ pour quelques valeurs de $\xi$ .....	120
<b>4.6</b>	Pulsation de résonance $\omega_r$ en fonction de $\xi$ pour des valeurs de $m$ ( $0 < m < 1$ ) et $m=1$ .....	120
<b>4.7</b>	Facteur de résonance $M_r$ en fonction de $m$ pour $\xi$ fixe.....	121
<b>4.8</b>	Facteur de résonance $M_r$ en fonction de $\xi$ pour des valeurs de $m$ ( $0 < m < 1$ ) et $m=1$ .....	121
<b>4.9</b>	Variation de $T_p$ en fonction de $m$ ( $\xi$ paramètre) .....	123
<b>4.10</b>	Variation de $T_p$ en fonction de $\xi$ pour $0 < m < 1$ et $m = 1$ .....	123
<b>4.11</b>	La variation du dépassement en fonction de $m$ , pour $\xi$ fixe.....	124
<b>4.12</b>	La variation du dépassement en fonction de $\xi$ , pour $m$ fixe, en incluant le cas particulier $m=1$ du second ordre.....	124
<b>4.13</b>	La variation du temps de réponse en fonction de $m$ , pour $\xi$ fixe.....	126
<b>4.14</b>	La variation du temps de réponse en fonction de $\xi$ , pour $m$ fixe, en incluant le cas particulier $m=1$ du second ordre.....	127
<b>4.15</b>	La variation du temps de montée en fonction de $m$ , pour $\xi$ fixe.....	128
<b>4.16</b>	La variation du temps de montée en fonction de $\xi$ , pour $m$ fixe, en incluant le cas particulier $m=1$ du second ordre.....	128

# *Liste des tableaux*

1.1	Transformation de Laplace de la fonction Mittag-Leffler.....	13
4.1	Caractéristiques fréquentielles d'un système du second ordre.....	109
4.2	Caractéristiques temporelles d'un système du second ordre.....	111
4.4	Intervalle d'existence du dépassement dans un système d'ordre fractionnaire généralisé .....	125

# *Introduction Générale*

---

## Introduction générale

### 1. Introduction

Cette thèse s'intéresse à l'approximation et l'analyse des systèmes d'ordre fractionnaire qui sont décrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaire. L'élément principal dans ces équations différentielles est l'opérateur d'ordre fractionnaire. Alors, la solution de ces équations passe certainement par des méthodes numériques qui ne sont que des approximations d'opérateurs d'ordre fractionnaire. L'approximation directe, sans passer par les opérateurs d'ordre fractionnaire, des systèmes d'ordre fractionnaire est un outil d'étude et d'analyse du comportement de ces systèmes très convoité. Ainsi, l'objectif principal de ce travail est de contribuer à l'analyse des systèmes d'ordre fractionnaire en introduisant des approximations qui facilitent cette tâche.

### Historique

Le concept de l'opérateur de la dérivée  $D = d/dx$  est bien connu à tous ceux qui ont étudié le calcul élémentaire. Pour une fonction  $f(x)$ , sa  $n^{\text{ième}}$  dérivée est:  $D^n f(x) = d^n f(x)/dx^n$ , avec  $n$  un entier positif. La notion de la dérivée et de l'intégrale à l'ordre non entier peut être considérée aussi bien ancienne que nouvelle. Ce sujet remonte à Leibniz dans ces correspondances avec L'Hôpital (1695) et Wallis (1697) [1]. La plupart des auteurs dans ce domaine citeront cette date particulière comme date de naissance du calcul d'ordre fractionnaire. Le 30 septembre 1695, le marquis de L'Hospital, dans une lettre adressée à Leibnitz (l'inventeur de la notation de dérivée  $d^n y/dx^n$ ) posa la question, « Qu'en est-il si  $n = 1/2$  ? » Question à laquelle Leibnitz répondit : « le résultat de  $d^{1/2}x$  sera égal à  $x = \sqrt{dx} : x$  (qui dans la notation moderne représente  $d^{1/2}x/x^{1/2} = 2\sqrt{x/\pi}$ ), un paradoxe auquel des conséquences utiles seront un jour tirées ». Avec ces mots le calcul d'ordre fractionnaire est né. Depuis cette date, le calcul fractionnaire a attiré l'attention de célèbres mathématiciens tels qu'Euler (1730), Lagrange (1772), Laplace (1812), Lacroix (1819), Fourier (1822), Abel (1823), Liouville (1832), Riemann (1847), Holmgren (1868), Letnikov (1868-1872), Laurent (1884), Nekrassov (1888), Krug (1890), Hadamard (1892) et Heaviside (1892) [2]. Donc, ce sont eux qui ont révélé et développé le formalisme de la dérivée non entière au monde. Au vingtième siècle, la théorie avait été étendue pour inclure des opérateurs  $D^m$ , où

$m$  pourrait être rationnel ou irrationnel, positif ou négatif, réel ou complexe. Ainsi le terme calcul fractionnaire est devenu légèrement mal approprié; une meilleure description pourrait être différentiation et intégration d'ordre arbitraire. Cependant, nous adhérons à la tradition et nous nous référons à cette théorie en tant que calcul fractionnaire. Des contributions notables ont été apportées à la théorie et à l'application du calcul fractionnaire dont nous pouvons donner une liste non exhaustive comprenant: M. Al-Bassam, H. T. Davis, A. Erdélyi, G. H. Hardy, H. Kober, J. E. Littlewood, E. R. Love, T. Osler, M. Riesz, S. Samko, I. Sneddon, H. Weyl et A. Zygmund [3]. C'est seulement à partir des années soixante-dix que le calcul d'ordre fractionnaire a fait l'objet d'une conférence spécialisée. Pour la première conférence le mérite est dû à B. Ross qui a organisé une conférence sur le calcul d'ordre fractionnaire et ses applications à l'université de New Haven en juin 1974 [4]. Pour le premier ouvrage, le mérite est attribué à K.B. Oldham et J. Spanier qui ont édités un livre consacré au calcul d'ordre fractionnaire en 1974 après une collaboration commune débutée en 1968 [1]. Un ouvrage considéré comme une encyclopédie du calcul d'ordre fractionnaire par S. Samko, A. Kilbas et O. Marichev est paru en 1987 en russe puis traduit en anglais en 1993 [5]. De nos jours, les séries de livres, de journaux et de textes consacrés au calcul d'ordre fractionnaire et ses applications se comptent par dizaines de titres chaque année [6-13].

### **Applications**

Dans les dernières années un intérêt particulier a eu lieu pour ce sujet, mais l'application de ces idées n'a pas été totalement exposée, principalement à cause de leur non familiarité. Les études montrent que les opérateurs intégral-différentiels peuvent être appliqués avantageusement dans des secteurs variés. Dans les mathématiques, le sujet est en contact avec un segment très large d'analyse classique. Les applications hors les mathématiques incluent des domaines autrement indépendants comme : la théorie de transmission, analyse chimique des solutions aqueuses, transfert de la chaleur, la rhéologie des sols (du grec rheo, couler et logos, étude est l'étude de la déformation et de l'écoulement de la matière sous l'effet d'une contrainte appliquée), la croissance des cannelures inter granulaires sur la surface des métaux, la mécanique quantique, diffusion des polluants atmosphériques...etc. Les dérivés d'ordre non entier fournissent aussi un excellent outil pour la description de la mémoire et les propriétés héréditaires de divers matériaux et processus. C'est l'avantage principal des dérivés d'ordre fractionnaire par rapport aux modèles classiques d'ordre entier, dans lesquels ces effets sont négligés. Les avantages des dérivés d'ordre fractionnaire deviennent importants

dans la modélisation des propriétés mécaniques et électriques des matériaux, dans la description des propriétés rhéologiques des roches et dans autres domaines. Les intégrales et les dérivés d'ordre fractionnaire apparaissent aussi dans la théorie de commande des systèmes dynamiques, quand le système commandé ou/et le contrôleur est décrit par une équation différentielle d'ordre fractionnaire. La modélisation et la simulation mathématiques des systèmes et des processus, basé sur la description de leurs propriétés en termes des dérivés d'ordre fractionnaire, mène aux équations différentielles d'ordre fractionnaire la nécessité de résoudre ces équations [14-17].

Actuellement, les applications et/ou les activités liées au calcul d'ordre fractionnaire sont apparues au moins dans les domaines suivants [6-17]:

- Commande fractionnaire des systèmes
- Traitement du signal et d'image.
- Outils et techniques analytiques et numériques
- Explorations fondamentales des relations constitutives mécaniques, électriques et thermiques et d'autres propriétés de divers matériaux tels que la viscoélasticité, les polymères élastiques, gels, les tissus animaux et leurs applications scientifiques et dans l'ingénierie
- Compréhension fondamentale de phénomènes des ondes et de diffusion, de leurs mesures et épreuves, y compris des applications à la physique des plasmas (telle que la diffusion dans Tokamak).
- Les biotechnologies et les applications biomédicales.
- Diagnostique et détection des défauts dans les machines par la modélisation thermique, l'analyse vibratoire et l'analyse des courants.

Pratiquement, aucun secteur d'analyse classique n'a été épargné par le calcul d'ordre fractionnaire. Ces applications et activités sont citées à titre d'exemples et leur liste est loin d'être exhaustive.

## **2. Objectif de la thèse**

L'objectif principal de ce travail est la contribution au développement de méthodes d'implémentations et d'analyse des systèmes fondamentaux d'ordre fractionnaire dont les fonctions de transfert contiennent des pôles complexes conjugués à parties réelles non nulles. En premier lieu, l'étude de la stabilité de ce type de systèmes fractionnaires sera faite en termes de leurs paramètres. Des techniques d'approximations, dans une bande fréquentielle

donnée, des fonctions de transfert irrationnelles de ces systèmes fondamentaux d'ordre fractionnaire en se basant sur des fonctions rationnelles seront présentées. A partir des fonctions rationnelles obtenues, leurs réponses impulsionnelles et indicielles seront tirées analytiquement, leurs implémentations par des circuits analogiques seront aussi faites et leurs performances caractéristiques fréquentielles et temporelles seront étudiées.

### **3. Présentation de la thèse**

Cette thèse comporte les chapitres suivants :

#### **CHAPITRE 1 : Introduction au calcul d'ordre fractionnaire**

Ce chapitre est une introduction aux notions fondamentales de la théorie des opérateurs d'ordre fractionnaire, ainsi que les différents outils mathématiques nécessaires au calcul d'ordre fractionnaire. En premier lieu, on présente les définitions des opérateurs d'ordre fractionnaire, leurs propriétés, ainsi que leurs transformés de Laplace. Puis, des fonctions spécifiques liées au calcul fractionnaire sont présentées. La technique de l'approximation par la méthode de la fonction de singularité est exposée et la réalisation analogique des opérateurs d'ordre fractionnaire utilisant cette approximation est considérée à la fin du chapitre.

#### **CHAPITRE 2 : Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire**

On présente dans ce chapitre les définitions de bases des systèmes d'ordre fractionnaire concernant leur représentation par des équations différentielles d'ordre fractionnaire, la résolution de ces équations différentielles d'ordre fractionnaire ainsi que leurs propriétés. On s'intéresse plus particulièrement aux systèmes fondamentaux d'ordre fractionnaire, leurs approximations par des fonctions rationnelles, leur implémentation par des circuits analogiques ainsi qu'à leurs réponses et caractéristiques fréquentielles et temporelles.

#### **CHAPITRE 3 : Approximation et réalisation analogique des fonctions sinus et cosinus amorties d'ordre fractionnaire**

Le but de ce chapitre est l'introduction de certaines fonctions fondamentales qui jouent un rôle similaire à celles des fonctions utilisées dans la résolution des équations différentielles classiques. Donc, ce chapitre est organisé en deux parties, la première partie est une présentation des fonctions sinus et cosinus d'ordre fractionnaire. La deuxième partie est consacrée à l'introduction des fonctions sinus et cosinus amorties d'ordre fractionnaire, leur approximation, l'analyse de la stabilité, les réponses temporelles et fréquentielles et finalement la réalisation de ces fonctions par des circuits analogiques.

## **CHAPITRE 4 : Extraction des performances caractéristiques d'un système d'ordre fractionnaire généralisé**

Dans ce chapitre, on va étudier le système d'ordre fractionnaire qui généralise un système du second ordre entier comme un système de référence pour l'extraction et l'analyse des caractéristiques de performances. Le chapitre est organisé comme suit : une présentation des résultats de l'analyse des caractéristiques de performances d'un système d'ordre fractionnaire oscillatoire à partir de deux méthodes d'approximation. L'utilisation du système d'ordre fractionnaire généralisé comme un système de référence, pour l'extraction des caractéristiques de performances. Exploitant les résultats de l'approximation de la fonction de transfert irrationnelle du système d'ordre fractionnaire par une fonction rationnelle et les réponses temporelles dérivées de cette approximation comme un outil pour l'analyse. Les spécifications temporelles et fréquentielles sont discutées à travers les deux paramètres  $\xi$  et  $m$  en incluant le cas particulier d'un système du second ordre classique ( $m=1$ ).

Chapitre **1**

*Introduction au Calcul  
d'Ordre Fractionnaire*

---

## 1.1 Introduction

Le calcul d'ordre fractionnaire est considéré comme une ancienne thématique qui a marqué son début au XVII<sup>ème</sup> siècle. Cent ans plus tard le calcul fractionnaire a attiré l'attention de célèbres mathématiciens tels que P. S. Laplace (1812), J. B. J. Fourier (1822), N. H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-1867), A. K. Grünwald (1867-1872) et A.V. Letnikov (1868-1872) [2]. Il est resté un sujet non populaire parmi la communauté d'ingénierie, mais son intérêt n'est reconnu que dans la deuxième moitié du XX<sup>ème</sup> siècle suite au développement des outils informatiques qui ont permis d'envisager des applications dans le domaine des sciences de l'ingénieur.

L'idée des dérivées et d'intégrales d'ordre fractionnaire semble un peu étrange et difficile à expliquer, cela est due au fait que l'opérateur d'ordre fractionnaire n'a pas une interprétation géométrique précise, contrairement aux opérateurs d'ordre entier. Pour cette raison, cet outil mathématique est souvent considéré comme irréal. Cependant plusieurs phénomènes physiques ont une description fractionnaire, donc le calcul d'ordre fractionnaire est nécessaire pour les expliquer.

Dans ce chapitre on va présenter les différents outils mathématiques nécessaires au calcul d'ordre fractionnaire. Premièrement, les définitions des opérateurs d'ordre fractionnaire, leurs propriétés, ainsi que leurs transformés de Laplace seront présentées. Puis, des fonctions spécifiques liées au calcul fractionnaire seront présentées. Enfin, les approximations des opérateurs d'ordre fractionnaire les plus utilisées dans la littérature seront exposées.

## 1.2 Opérateurs d'ordre fractionnaire

Le calcul d'ordre fractionnaire est une généralisation des opérateurs de l'intégration et de la différentiation à des ordres non entiers. L'opérateur intégro-différentiel continu est défini comme :

$${}_c D_t^m = \begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} & \Re(m) > 0 \\ 1 & \Re(m) = 0 \\ \int_c^t (d\tau)^{-m} & \Re(m) < 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $m$  est l'ordre de l'opération, généralement  $m \in \mathbb{C}$ ,  $c$  et  $t$  sont des limites de l'opération.

### 1.2.1 Définitions

Il existe plusieurs définitions mathématiques pour l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire. Les définitions les plus utilisées sont ceux de Grünwald-Leitnikov, de Riemann-Liouville et de Caputo [1-6].

#### 1.2.1.1 Définition de Grünwald-Leitnikov

La dérivée d'ordre fractionnaire  $m > 0$  d'une fonction  $f(t)$  est définie par la relation suivante [1-6] :

$${}_{GL}D^m f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-m} \sum_{j=0}^K (-1)^j \binom{m}{j} f(t - jh) \quad (1.2)$$

où  $h$  est la période d'échantillonnage et les coefficients

$$\binom{m}{j} = \omega_j^{(m)} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(m-j+1)} \quad (1.3)$$

avec  $\binom{m}{0} = \omega_0^{(m)} = 1$ , sont les coefficients du binôme suivant:

$$(1-z)^m = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{m}{j} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \omega_j^{(m)} z^j \quad (1.4)$$

L'intégrale d'ordre fractionnaire  $m > 0$  d'une fonction  $f(t)$  est définie aussi par [1-6] :

$${}_{GL}I^m f(t) = {}_{GL}D^{-m} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^m \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{-m}{j} f(t - jh) \quad (1.5)$$

où  $h$  est la période d'échantillonnage et les termes  $\binom{-m}{j} = \omega_j^{(-m)}$ , avec  $\omega_0^{(-m)} = \binom{-m}{0} = 1$ ,

sont les coefficients du binôme suivant:

$$(1-z)^{-m} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{-m}{j} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \omega_j^{(-m)} z^j \quad (1.6)$$

#### 1.2.1.2 Définition de Riemann-Liouville

L'intégrale d'ordre fractionnaire  $m > 0$  d'une fonction  $f(t)$  localement intégrable définie sur  $[t_0, +\infty[$  est donnée comme suit [1-6] :

$${}_{RL}I_{t_0}^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{m-1} f(\tau) d\tau \quad (1.7)$$

avec  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$  est la fonction gamma d'Euler.

La dérivée d'ordre fractionnaire  $m > 0$  d'une fonction  $f(t)$  localement intégrable définie sur  $[t_0, +\infty]$  est donnée comme suit [1-6] :

$${}_{RL}D_{t_0}^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-m)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-m-1} f(\tau) d\tau \quad (1.8)$$

où le nombre entier  $n$  est tel que  $(n-1) < m < n$ .

### 1.2.1.3 Définition de Caputo

Caputo a proposé une nouvelle définition de la dérivée d'ordre fractionnaire qui porte d'ailleurs son nom et qui incorpore les conditions initiales de la fonction à traiter en termes de ses dérivées d'ordre entier. La dérivée d'ordre fractionnaire  $m > 0$  d'une fonction  $f(t)$  définie sur  $[t_0, +\infty]$  est donnée comme suit [6] :

$${}_CD_{t_0}^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-m)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-m-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (1.9)$$

où  $n$  est un nombre entier avec  $(n-1) < m < n$  et  $f^{(n)}(t)$  est la  $n^{\text{ième}}$  dérivée de la fonction  $f(t)$ .

L'avantage principal de la définition de la dérivée d'ordre fractionnaire de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire prennent la même forme que les conditions initiales des équations différentielles linéaire d'ordre entier. La définition de la dérivée d'ordre fractionnaire de Caputo peut être formulée de la définition de Riemann-Liouville comme suit [18]:

$${}_{RL}D^m f(t) = {}_CD^m f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-m}}{\Gamma(k-m+1)} f^{(k)}(0^+) \quad (1.10)$$

**N.B:** pour simplifier l'écriture, on notera dans le reste du chapitre  $I^m$  pour  $I_0^m$  et  $D^m$  pour  $D_0^m$ .

### 1.2.2 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire

Les propriétés principales des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont les suivantes [1-6]:

1. Si  $f(t)$  est une fonction analytique en  $t$ , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire  $D^m f(t)$  est une fonction analytique en  $t$  et en  $m$ .
2. Pour  $m = n$ , ou  $n$  est un entier, l'opération  $D^m f(t)$  donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier  $n$ .
3. Pour  $m = 0$  l'opération  $D^m f(t)$  est l'opérateur identité:  $D^0 f(t) = f(t)$ .

4. La différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaires:

$$D^m (a f(t) + b g(t)) = a D^m f(t) + b D^m g(t)$$

5. La loi additive (propriété du semi groupe)

$$D^\alpha D^\beta f(t) = D^\beta D^\alpha f(t) = D^{\alpha+\beta} f(t)$$

est valable sous certaines contraintes sur la fonction  $f(t)$ . Une permutation entre la dérivée d'ordre fractionnaire et la dérivée d'ordre entière

$$\frac{d^n}{dt^n} \left( {}_a D_t^m f(t) \right) = {}_a D_t^m \left( \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_a D_t^{m+n} f(t)$$

est valable sous la condition :  $f^{(k)}(t)|_{t=a} = 0$ , pour  $k=0, 1, 2, \dots, (n-1)$ .

6. La règle de Leibniz pour la différentiation d'ordre fractionnaire est donnée par :

$${}_a D_t^m (\phi(t)f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} \phi^{(k)}(t) {}_a D_t^{m-k} f(t)$$

si  $\Phi(t)$  et  $f(t)$  et toutes leurs dérivées sont continues dans l'intervalle  $[a, t]$ .

### 1.2.3 Interprétations géométrique et physique

La dérivation au sens classique ou d'ordre entier a un sens physique et géométrique, tous deux très clairs, ce qui à priori permet de simplifier son introduction dans la résolution des problèmes appliqués dans les domaines scientifiques. Malheureusement, ce n'est pas le cas pour la différentiation d'ordre fractionnaire. Le manque ou l'absence de telles interprétations a été fortement abordé lors de la première conférence internationale sur le calcul fractionnaire qui a eu lieu au New Haven (USA) en 1974 où la question a été classée parmi les problèmes ouverts [4]. Récemment, beaucoup d'efforts ont été dédiés à cette question et différentes approches ont été adoptées. Parmi celles-ci nous citerons le travail de Podlubny qui se base sur l'intégrale de Riemann-Liouville et qui contient aussi une introduction à la matière [19].

### 1.2.4 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire

#### 1.2.4.1 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire  $m, (n-1) < m < n$ , selon la définition de Grünwald-Leitnikov est donnée par [6]:

$$L\{D^m f(t)\} = s^m F(s) \quad (1.11)$$

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire  $m, (n-1) < m < n$ , selon la définition de Riemann-Liouville est donnée par [6] :

$$L\{D^m f(t)\} = s^m F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{m-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (1.12)$$

L'applicabilité de cette transformée en pratique est limitée à cause de l'absence d'interprétation physique des valeurs initiales  $[D^{m-k-1} f(t)]_{t=0}$ , pour  $k = 0, 1, \dots, (n-1)$ .

Selon la définition de Caputo, la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire  $m, (n-1) < m < n$ , est donnée par [6] :

$$L\{D^m f(t)\} = s^m F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{m-k-1} f^k(0) \quad (1.13)$$

Cette transformée est très utilisée en pratique à cause des valeurs initiales conventionnelles  $f^k(0)$ , pour  $k=0, 1, \dots, (n-1)$ . Alors, pour l'étude et l'analyse des systèmes, la définition de Caputo semble être la plus appropriée que les deux autres. Donc, dans le reste de cette thèse on ne considère que la définition de Caputo de la dérivée d'ordre fractionnaire.

#### 1.2.4.2 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire

La transformée de Laplace de l'intégration d'ordre fractionnaire  $m, (n-1) < m < n$ , pour toutes les définitions est donnée par [6]:

$$L\{I^m f(t)\} = s^{-m} F(s) \quad (1.14)$$

### 1.3 Fonctions spécifiques pour le calcul fractionnaire

Dans cette section, nous présentons quelques fonctions qui sont très utilisées dans le calcul d'ordre fractionnaire et plus particulièrement dans la solution des équations différentielles d'ordre fractionnaire. La première fonction particulière est la fonction Gamma qui généralise l'expression factorielle utilisée dans la différentiation multiple et les intégrations répétées dans le calcul d'ordre entier. La seconde est la fonction de Mittag-Leffler qui est une fonction de base dans le calcul fractionnaire et qui joue un rôle similaire à celui de la fonction exponentielle dans le calcul d'ordre entier. On présente aussi plusieurs modifications de la fonction de Mittag-Leffler qui sont développées depuis 1903 pour l'étude du calcul fractionnaire.

#### 1.3.1 La fonction Gamma

La fonction de Gamma d'Euler  $\Gamma(z)$  est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.15)$$

avec  $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(0_+) = +\infty$ , la fonction Gamma  $\Gamma(z)$  est une fonction monotone et strictement décroissante pour  $0 < z \leq 1$ . Une propriété importante de cette fonction est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (1.16)$$

Sachant que  $\Gamma(1) = 1$  et en utilisant la relation (1.15), pour  $z = n$  un entier positif, on a :

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! \quad (1.17)$$

Figure 1.1, montre le tracé de la fonction Gamma  $\Gamma(z)$  de l'équation (1.15) autour de la valeur  $z = 0$ .

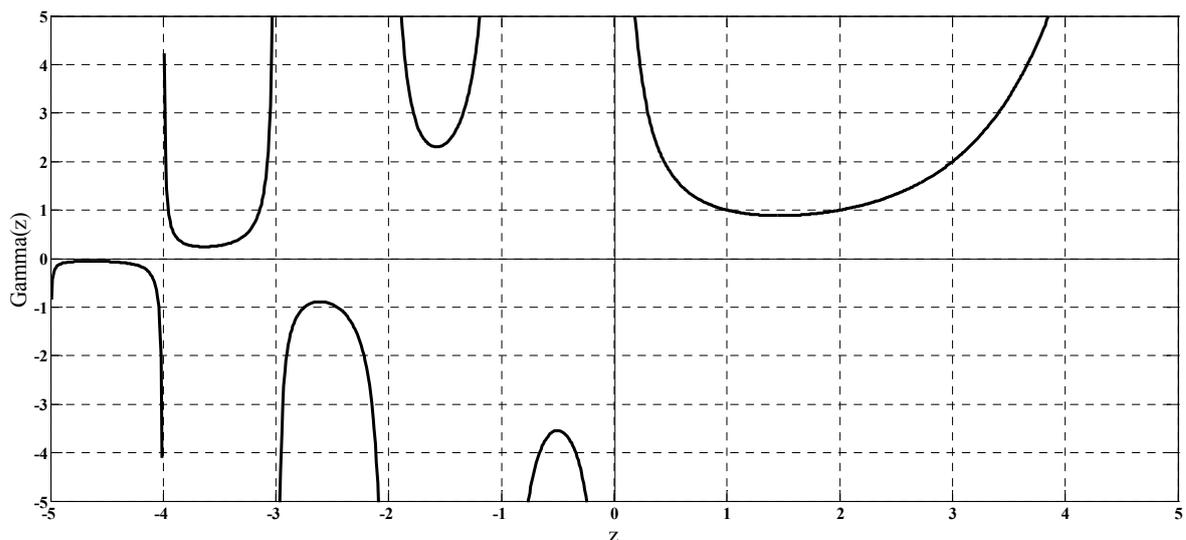
### 1.3.2 La fonction de Mittag-Leffler

La fonction exponentielle joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles classiques. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre, dite fonction de Mittag-Leffler, a été introduite par G.M. Mittag-Leffler au début du vingtième siècle et elle est définie par la fonction suivante [6] :

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (1.18)$$

On peut facilement voir que pour  $\alpha = 1$ , on a :

$$E_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t \quad (1.19)$$



**Figure 1.1 :** Tracé de la fonction Gamma d'Euler

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette fonction a été introduite par Agarwal et Erdelyi dans les années 1953 et 1954 et elle est définie comme suivant [6] :

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (1.20)$$

On note aussi que pour  $\beta = 1$ , on retrouve la fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre de l'équation (1.17).

$$E_{\alpha,1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(t) \quad (1.21)$$

A partir de la relation (1.21) on peut facilement voir que :

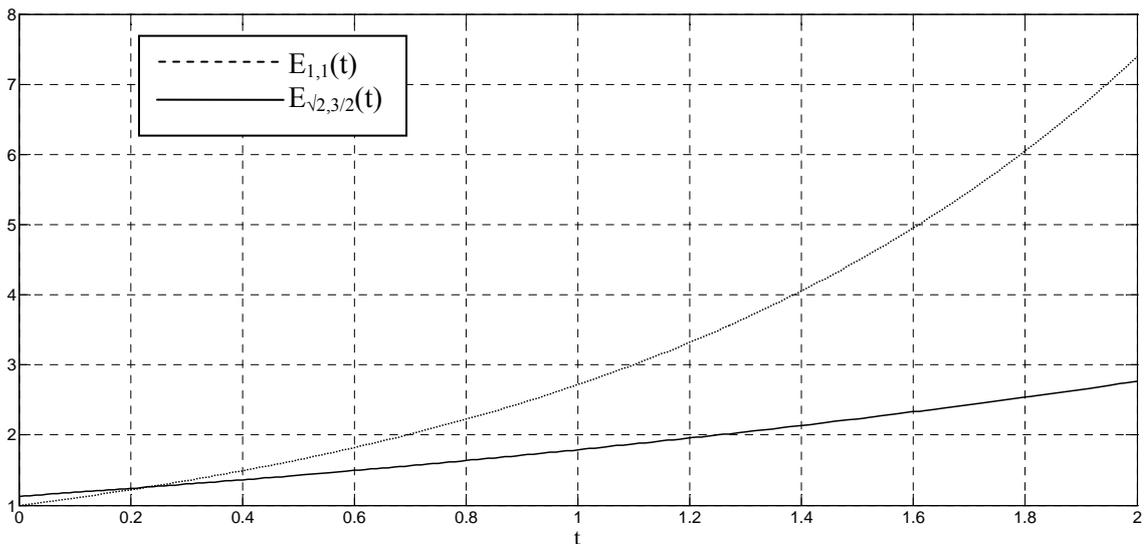
$$E_{1,1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t \quad (1.22)$$

Figure 1.2, montre le tracé de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ . La transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres de l'équation (1.20) est donnée par [6] :

$$t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(at^{\alpha}) \Leftrightarrow \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^{\alpha} - a)^{k+1}} \quad (1.23)$$

où

$$E_{\alpha,\beta}^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{dt^{(k)}} E_{\alpha,\beta} \quad (1.24)$$



**Figure 1.2 :** Tracé de la Fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres  $E_{1,1}(t)$  et  $E_{\sqrt{2},3/2}(t)$ .

Le tableau 1.1, résume la transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler ainsi que de sa dérivée et de son intégrale [6].

Fonction	Transformée de Laplace
$E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha})$	$\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + \lambda}$
$\frac{d}{dt} E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha})$	$\frac{\lambda}{s^{\alpha} + \lambda} = -\left( s \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + \lambda} - 1 \right)$
$\int E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha})$	$\frac{s^{\alpha-2}}{s^{\alpha} + 1} = \frac{1}{s} \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + 1}$

**Tableau 1.1:** Transformation de Laplace de la fonction Mittag-Leffler.

### 1.3.3 La fonction d'Agarwal

La fonction de Mittag-Leffler est généralisée par Agarwal en 1953 [20]. Cette fonction est particulièrement utile dans la théorie des systèmes d'ordre fractionnaire grâce à son transformé de Laplace donné par Agarwal. La fonction est définie comme suit :

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\left(n+\frac{\beta-1}{\alpha}\right)}}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \quad (1.25)$$

$$L\{E_{\alpha,\beta}(t^{\alpha})\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} - 1} \quad (1.26)$$

### 1.3.4 La fonction d'Erdelyi

Erdelyi a étudié la généralisation de la fonction de Mittag-Leffler comme suit [21]:

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (1.27)$$

où les puissances de  $t$  sont des nombres entiers.

### 1.3.5 La fonction de Robotnov–Hartley

Pour obtenir la solution directe des équations différentielles linéaires fondamentales d'ordre fractionnaire, la fonction suivante a été présentée par Robotnov [22] et Hartley [23].

$$F_m(-a, t) = t^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n t^{nm}}{\Gamma(nm + m)}, \quad m > 0 \quad (1.28)$$

C'est la fonction généralisée représentant la réponse impulsionnelle de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire fondamentale, elle est utilisée dans l'analyse des systèmes de commande pour obtenir les réponses du système. La transformée de Laplace de cette fonction est donnée par :

$$L\{F_m(-a, t)\} = \frac{1}{s^m + a} \quad (1.29)$$

### 1.3.6 La fonction de Miller–Ross

En 1993, Miller et Ross [2] ont présenté une fonction de base pour une solution du problème de valeur initiale d'ordre fractionnaire. Elle est définie comme l'intégrale d'ordre  $m$  de la fonction exponentielle suivant cette équation :

$$E_t(m, a) = \frac{d^{-m}}{dt^{-m}} e^{at} = t^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(m+k+1)} \quad (1.30)$$

### 1.3.7 La fonction R généralisée

Comme pour le cas des fonctions exponentielles, trigonométriques et hyperboliques dans le calcul d'ordre entier, les définitions de telles fonctions généralisées de Mittag-Leffler sont importantes dans le calcul fractionnaire. La fonction R généralisée est définie comme suit [24]:

$$R_{q,m}[a, c, t] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)^n (t-c)^{(n+1)q-1-m}}{\Gamma\{(n+1)q-m\}} \equiv R_{q,m}[a, t-c] \quad (1.31)$$

La transformation de Laplace de la fonction R généralisée est donnée par les deux relations suivantes:

$$R_{q,m}(a, 0, t) \leftrightarrow \frac{s^m}{s^q - a} \quad (1.32)$$

$$R_{q,m}(a, c, t) \leftrightarrow \frac{e^{-cs} s^m}{s^q - a} \quad (1.33)$$

Les équations suivantes représentent la relation de la fonction R aux fonctions élémentaires :

$$R_{1,0}(a, 0, t) = e^{at} \quad (1.34)$$

$$aR_{2,0}(-a^2, 0, t) = a \left\{ t - \frac{a^2 t^3}{3!} + \frac{a^4 t^5}{5!} - \dots \right\} = \sin(at) \quad (1.35)$$

$$R_{2,1}(-a^2, 0, t) = \left\{ 1 - \frac{a^2 t^2}{2!} + \frac{a^4 t^4}{4!} - \dots \right\} = \cos(at) \quad (1.36)$$

$${}_aR_{2,0}(a^2, 0, t) = \sinh(at) \quad (1.37)$$

$$R_{2,1}(a^2, 0, t) = \cosh(at) \quad (1.38)$$

La relation entre la fonction R et les autres fonctions généralisée est donnée comme suit :

la fonction de Mittag-Leffler :

$$L\{E_q[-at^q]\} = \frac{1}{s} \left[ \frac{s^q}{s^q + a} \right] = \frac{s^{q-1}}{s^q + a}, \quad q > 0$$

$$E_q(-at^q) \leftrightarrow \frac{s^{q-1}}{s^q + a} \leftrightarrow R_{q,q-1}(-a, 0, t) \quad (1.39)$$

la fonction d'Agarwal :

$$E_{q,p}(t^q) \leftrightarrow \frac{s^{q-p}}{s^q + 1} \leftrightarrow R_{q,q-p}(1, 0, t) \quad (1.40)$$

la fonction d'Erdelyi :

$$t^{1-m} E_{q,m}(t^q) = R_{q,q-m}(1, 0, t) = t^{1-m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{nq}}{\Gamma(nq + 1)} \quad (1.41)$$

la fonction de Robotnov–Hartley :

$$F_q(-a, t) \leftrightarrow \frac{1}{s^q + a} \leftrightarrow R_{q,0}(-a, 0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n t^{(n+1)q-1}}{\Gamma((n+1)q)}$$

$$L\{F_q[a, t]\} = \frac{1}{s^q + a}, \quad q > 0 \quad (1.42)$$

$$L\{E_q[-at^q]\} = \frac{1}{s} [s^q - L\{F_q[-a, t]\}]$$

$${}_0d_t^{q-1} F_q[a, t] = E_q[at^q]$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^q + a)}\right\} = \frac{1}{a} [1 - E_q(-at^q)] = {}_0d_t^{-q} E_q[at^q]$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s^q}{s^q + a}\right\} = {}_0d_t^q F_q[-a, t] = {}_0d_t^1 E_q[-at^q] = L^{-1}\left\{1 - \frac{a}{s^q + a}\right\} = \delta(t) - aF_q[-a, t] \quad (1.43)$$

la fonction de Miller–Ross :

$$E_t(m, a) \leftrightarrow \frac{s^{-m}}{s - a} \leftrightarrow R_{1,-v}(a, 0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)^n t^{n+m}}{\Gamma(n + m + 1)} \quad (1.44)$$

## 1.4 Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire

La représentation fréquentielle de l'intégrateur ou du dérivateur d'ordre fractionnaire est donnée respectivement par les deux fonctions irrationnelles suivantes :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^m}, \quad \text{pour } 0 < m < 1 \quad (1.45)$$

$$G_D(s) = s^m, \quad \text{pour } 0 < m < 1 \quad (1.46)$$

A cause de leur représentation par des fonctions irrationnelles, ces opérateurs d'ordre fractionnaire ne peuvent pas être implémentés avec précision. Cependant, des implémentations analogiques et/ou numériques limitées dans une bande fréquentielle peuvent être réalisées en utilisant des techniques d'approximation.

### 1.4.1 Approximation analogique

Il existe dans la littérature plusieurs techniques d'approximation analogiques des opérateurs d'ordre fractionnaire. D'après I. Petras et al [8], on peut trouver une étude intéressante de la majorité des méthodes existantes pour l'approximation analogiques des opérateurs d'ordre fractionnaire. Dans la section suivante on va exposer la méthode d'approximation de Charef [25].

#### 1.4.1.1 Méthode de Charef

Cette méthode a été développée pour l'approximation de l'intégrateur et du dérivateur d'ordre fractionnaire par une fonction rationnelle dans une bande de fréquence bien choisie. L'approximation de l'intégrateur est basée sur la technique du pôle à puissance fractionnaire (PPF) et celle du dérivateur utilisant la technique du zéro à puissance fractionnaire (ZPF) [25, 26].

Le PPF est donné par la fonction suivante :

$$G(s) = \frac{K_I}{(1 + (s/\omega_c))^m} \quad (1.47)$$

L'approximation du PPF par une fonction rationnelle est donnée par [26]:

$$G(s) = \frac{K_I}{(1 + (s/\omega_c))^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (1 + (s/z_i))}{\prod_{i=0}^N (1 + (s/p_i))} \quad (1.48)$$

Les pôles et les zéros de cette approximation sont obtenus comme suit :

$$p_i = (ab)^i p_0 \quad (\text{pour } i = 0, 1, \dots, N) \quad \text{et} \quad z_i = (ab)^i a p_0 \quad (\text{pour } i = 0, 1, \dots, N-1) \quad (1.49)$$

Pour une erreur d'approximation  $y$  en dB et une fréquence maximale  $\omega_{\max}$  donnée, les paramètres d'approximation  $a$ ,  $b$ ,  $p_0$  et  $N$  sont calculés par :

$$a = 10^{\lfloor y/10(1-m) \rfloor}, \quad b = 10^{\lfloor y/10m \rfloor}, \quad p_0 = \omega_c 10^{\lfloor y/20m \rfloor} \quad \text{et} \quad N = \left( \text{Integer} \left[ \frac{\log(\omega_{\max}/p_0)}{\log(ab)} \right] + 1 \right) \quad (1.50)$$

On suppose que dans la bande de fréquence  $[\omega_L, \omega_H]$  on a  $\omega \gg \omega_c$ , donc on peut écrire:

$$G(s) = \frac{K_I}{(s/\omega_c)^m} = \frac{K_I \omega_c^m}{s^m} = \frac{1}{s^m} = G_I(s) \quad (1.51)$$

avec  $K_I = (1/\omega_c^m)$  et  $\omega_c$  la fréquence de coupure du PPF à  $-3m$  dB est donnée par  $\omega_c = \omega_L \sqrt{10^{(\varepsilon/10m)} - 1}$ , où  $\varepsilon$  est l'erreur maximale entre les pentes de l'intégrateur et le PPF dans la bande  $[\omega_L, \omega_H]$ . Alors, dans la bande de fréquence  $[\omega_L, \omega_H]$ , l'approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire est donnée par :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (1 + (s/(ab)^i a p_0))}{\prod_{i=0}^N (1 + (s/(ab)^i p_0))} \quad (1.52)$$

Le ZPF est donné par la fonction suivante :

$$G(s) = K_D \left( 1 + \frac{s}{\omega_c} \right)^m \quad (1.53)$$

L'approximation du ZPF par une fonction rationnelle est donnée par [25]:

$$G(s) = K_D \left( 1 + \frac{s}{\omega_c} \right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N (1 + (s/z_i))}{\prod_{i=0}^N (1 + (s/p_i))} \quad (1.54)$$

Les zéros et les pôles de cette approximation sont obtenus comme suit :

$$z_i = (ab)^i z_0 \quad (\text{pour } i = 0, 1, \dots, N) \quad \text{et} \quad p_i = (ab)^i a z_0 \quad (\text{pour } i = 0, 1, \dots, N) \quad (1.55)$$

Pour une erreur d'approximation  $y$  en dB et une fréquence maximale  $\omega_{\max}$  donnée, les paramètres d'approximation  $a$ ,  $b$ ,  $z_0$  et  $N$  sont calculés par :

$$a = 10^{\lfloor y/10(1-m) \rfloor}, \quad b = 10^{\lfloor y/10m \rfloor}, \quad z_0 = \omega_c 10^{\lfloor y/20m \rfloor} \quad \text{et} \quad N = \left( \text{Integer} \left[ \frac{\log(\omega_{\max}/z_0)}{\log(ab)} \right] + 1 \right) \quad (1.56)$$

On suppose que dans la bande de fréquence  $[\omega_L, \omega_H]$  on a  $\omega \gg \omega_c$ , donc on peut écrire:

$$G(s) = K_D \left( \frac{s}{\omega_c} \right)^m = \frac{K_D}{(\omega_c)^m} \left( \frac{1}{s^m} \right) = \frac{1}{s^m} = G_D(s) \quad (1.57)$$

avec  $K_D = (\omega_c)^m$  et  $\omega_c$  la fréquence de coupure du ZPF à 3m dB est donnée par  $\omega_c = \omega_L \sqrt{10^{(\varepsilon/10m)} - 1}$ , où  $\varepsilon$  est l'erreur maximale entre les pentes du dérivateur et le ZPF dans la bande  $[\omega_L, \omega_H]$ . Alors, dans la bande de fréquence  $[\omega_L, \omega_H]$ , l'approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire est donnée par :

$$G_D(s) = s^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{z_0 (ab)^i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{az_0 (ab)^i} \right)} \quad (1.58)$$

### 1.4.2 Approximation numérique

Dans les références [27-40], on peut trouver la majorité des implémentations des opérateurs d'ordre fractionnaire en utilisant des filtres numériques RII et RIF. En général, Il existe dans la littérature deux techniques d'implémentation numérique des opérateurs fractionnaire, la technique indirecte et directe. Pour la technique indirecte on doit passer par deux étapes ; la première étape est une approximation analogique des opérateurs fractionnaires, ensuite une des transformations analogique-numérique, tel-que la transformation d'Euler, la transformation bilinéaire ou la transformation d'Al-Alaoui, est utilisée pour la discrétisation et l'obtention de l'approximation numérique de l'opérateur d'ordre fractionnaire. Pour la technique directe, une des transformations analogique-numérique énumérée au dessus est utilisée pour la discrétisation de l'opérateur d'ordre fractionnaire conduisant à une fonction discrète irrationnelle qui est développée en série de puissance pour l'obtention de l'approximation numérique de l'opérateur d'ordre fractionnaire.

### 1.5 Réalisation analogique des opérateurs d'ordre fractionnaire

En utilisant les fonctions rationnelles approximant les opérateurs d'ordre fractionnaire, on peut obtenir des circuits analogiques qui peuvent servir comme des modèles d'intégrateurs et dérivateurs analogique d'ordre fractionnaire [8,25]. La fonction rationnelle de l'équation (1.52) de l'approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire dans une bande fréquentielle donnée peut être décomposée en éléments simples de la façon suivante :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (1 + (s/(ab))^i a p_0)}{\prod_{i=0}^N (1 + (s/(ab))^i p_0)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{1 + \frac{s}{p_i}} \quad (1.59)$$

ou les résidus  $h_i$ , pour  $i=0, 1, \dots, N$ , sont donnés par :

$$h_i = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left( 1 - \frac{p_0 (ab)^i}{a p_0 (ab)^j} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left( 1 - \frac{p_0 (ab)^i}{p_0 (ab)^j} \right)} = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left( 1 - \frac{(ab)^{(i-j)}}{a} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^{(i-j)})} \quad (1.60)$$

L'équation (1.59) corresponde à l'impédance d'un réseau RC du type Foster première forme dont le schéma est représenté par la figure 1.3.

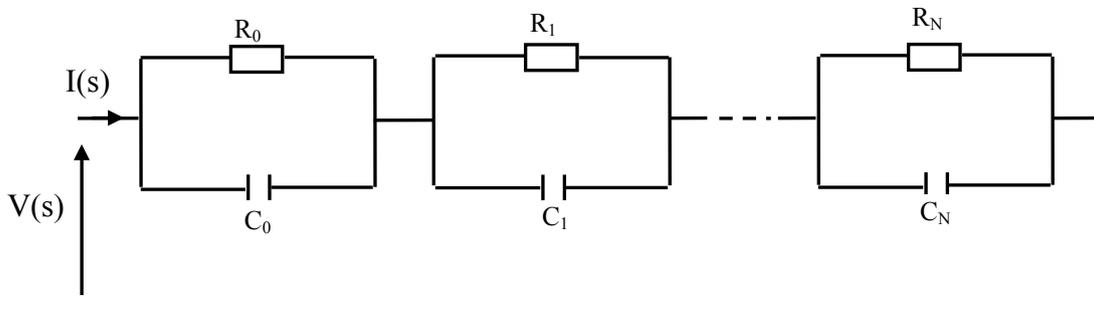
L'impédance de ce réseau est :

$$Z_I(s) = \sum_{i=0}^N \frac{R_i}{1 + sR_i C_i} \quad (1.61)$$

alors, pour  $i=0, 1, \dots, N$ , on a:

$$\begin{cases} h_i = R_i \\ p_i = \frac{1}{R_i C_i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_i = h_i \\ C_i = \frac{1}{p_i h_i} \end{cases} \quad (1.62)$$

De la même façon, La fonction rationnelle de l'équation (1.58) de l'approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire dans une bande fréquentielle donnée peut être décomposée en éléments simples de la façon suivante :



**Figure 1.3 :** Réalisation analogique d'un intégrateur d'ordre fractionnaire.

$$G_D(s) = s^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{az_0(ab)^i}\right)} = \left[ G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{k_i s}{1 + \frac{s}{p_i}} \right] \quad (1.63)$$

ou  $G_0 = K_D$  et les résidus  $h_i$ , pour  $i=0, 1, \dots, N$ , sont donnés par :

$$k_i = -\frac{K_D}{p_0(ab)^i} \frac{\prod_{j=0}^N (1 - a(ab)^{(i-j)})}{\prod_{j=0, i \neq j}^N (1 - (ab)^{(i-j)})} \quad (1.64)$$

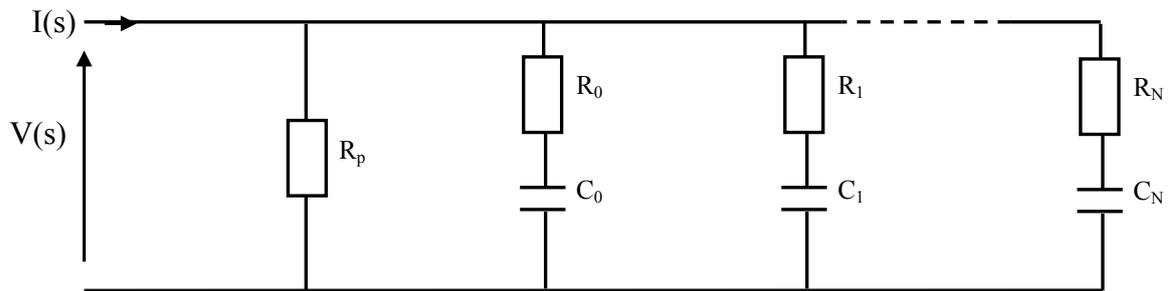
L'équation (1.63) correspond à l'admittance d'un réseau du type Foster seconde forme dont le schéma est représenté par la figure 1.4.

On peut écrire l'admittance  $Y_D(s)$  du circuit précédent par :

$$Y_D(s) = \frac{1}{R_p} + \sum_{i=0}^N \left( \frac{sC_i}{1 + sR_i C_i} \right) \quad (1.65)$$

alors,  $G_0 = 1/R_p$  et pour  $i=0, 1, \dots, N$ , on a:

$$\begin{cases} k_i = C_i \\ p_i = \frac{1}{R_i C_i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_i = k_i \\ R_i = \frac{1}{k_i p_i} \end{cases} \quad (1.66)$$



**Figure 1.4** : Réalisation analogique d'un dérivateur d'ordre fractionnaire.

## 1.6 Conclusion

Ce chapitre est une introduction aux notions fondamentales de la théorie du calcul d'ordre fractionnaire. Commenant par les différentes définitions des opérateurs d'ordre fractionnaire, leurs propriétés et la présentation de la transformée de Laplace de ces opérateurs. Après, nous avons présenté les fonctions spécifiques pour le calcul d'ordre fractionnaire. Ensuite, les méthodes d'approximation de ces opérateurs sont exposées, avec un intérêt particulier à la méthode de Charef par la fonction singulière qui était entièrement détaillée, car elle a été actuellement la plus utilisée pour la simulation, l'approximation et la réalisation des systèmes non entiers : l'approximation du système (PPF et ZPF) d'ordre fractionnaire par un modèle rationnel de dimension finie. Finalement, la réalisation analogique de ces opérateurs par des circuits électriques est présentée, en utilisant leurs approximations par des fonctions rationnelles.

Chapitre **2**

*Systemes Linéaires  
d'Ordre Fractionnaire*

---

## 2.1 Introduction

Tout système modélisé par une équation différentielle utilisant la dérivation d'ordre fractionnaire est appelé système d'ordre fractionnaire. Actuellement, beaucoup de travaux traitent des systèmes ou des phénomènes physiques qui nécessitent l'utilisation de cette théorie du calcul fractionnaire. Des chercheurs essayent de développer de nouveaux outils mathématiques et informatiques qui permettent de manipuler et de simuler les systèmes d'ordre fractionnaire, d'autres tentent de déterminer leurs caractéristiques dynamiques et statiques.

Dans ce chapitre, on va présenter les définitions de bases des systèmes d'ordre fractionnaire, ainsi que leur représentation et leurs propriétés. On s'intéresse plus particulièrement aux systèmes fondamentaux d'ordre fractionnaire, leurs approximations par des fonctions rationnelles, leur implémentation par des circuits analogiques ainsi qu'à leurs réponses et caractéristiques fréquentielles et temporelles.

## 2.2 Représentation des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

### 2.2.1 Équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire

Un système linéaire d'ordre fractionnaire peut être représenté par une équation différentielle d'ordre fractionnaire de la forme [41]:

$$\sum_{i=0}^N a_i D^{\alpha_i} y(t) = \sum_{j=0}^M b_j D^{\beta_j} u(t) \quad (2.1)$$

- $D^\gamma \equiv {}_0D_t^\gamma$  désigne la dérivée d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville ou de Caputo [9]
- $u(t)$  et  $y(t)$  sont, respectivement, l'entrée et la sortie du système
- les ordres des dérivées  $\alpha_i$  (pour  $1 \leq i \leq N$ ) et  $\beta_j$  (pour  $1 \leq j \leq M$ ) sont des nombres réels tel que  $\alpha_N > \alpha_{N-1} > \dots > \alpha_0$  et  $\beta_M > \beta_{M-1} > \dots > \beta_0$  et  $\alpha_N \geq \beta_M$
- les coefficients  $a_i$  (pour  $i = 0, 1, \dots, N$ ) et  $b_j$  (pour  $j = 0, 1, \dots, M$ ) sont des nombres réels

Quand les ordres des dérivées  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) et  $\beta_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) sont multiples du même nombre réel  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ), tel que  $\alpha_i = i.\alpha$  ( $1 \leq i \leq N$ ) et  $\beta_j = j.\alpha$  ( $0 \leq j \leq M$ ) et  $M \leq N$ , le système linéaire d'ordre fractionnaire est dit système linéaire d'ordre fractionnaire

commensurable. Alors, l'équation différentielle d'ordre fractionnaire de l'équation (2.1) devienne :

$$\sum_{i=0}^N a_i D^{i,\alpha} y(t) = \sum_{j=0}^M b_j D^{j,\alpha} u(t) \quad (2.2)$$

## 2.2.2 Fonction de transfert

La fonction de transfert du système linéaire d'ordre fractionnaire de l'équation (2.1) est donnée par la fonction suivante [41]:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_M s^{\beta_M} + \dots + b_1 s^{\beta_1} + b_0 s^{\beta_0}}{a_N s^{\alpha_N} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (2.3)$$

Dans le cas d'un système linéaire d'ordre fractionnaire commensurable, la fonction de transfert de l'équation (2.3) devienne [41]:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^M b_j (s^\alpha)^j}{\sum_{i=0}^N a_i (s^\alpha)^i} \quad (2.4)$$

## 2.2.3 Représentation d'état des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

### 2.2.3.1 Définition

Un système linéaire d'ordre fractionnaire monovariante, peut être représenté par une équation d'état d'ordre fractionnaire de la forme [41]:

$$d^{[\alpha]} x(t) = A x(t) + B u(t) \quad (2.5.a)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t) \quad (2.5.b)$$

où:

- $d^{[\alpha]} x(t) = [d^{\alpha_1} x_1(t) \quad d^{\alpha_2} x_2(t) \quad \dots \quad d^{\alpha_n} x_n(t)]^T$
- les  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) sont les ordres de dérivation tel que  $0 < \alpha_i < 1$
- $u$  est l'entrée du système
- $x$  est le vecteur d'état d'ordre fractionnaire de dimension  $(n \times 1)$
- $y$  est la sortie du système
- les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des matrices réelles constantes de dimension appropriée.

La notation précédente met en évidence que la dérivation d'ordre fractionnaire  $d^{[\alpha]}$  est appliquée seulement à l'élément  $x_i$  de l'état  $x$  dans (2.5.a), où (2.5.a) est définie comme une

équation d'état d'ordre fractionnaire et (2.5.b) est une équation d'observation identique à celle du cas entier.

**Remarque :**

Comme pour les représentations d'état d'ordre entier, les représentations d'état d'ordre fractionnaire ne sont pas uniques, en d'autres termes plusieurs représentations d'états correspondent à la même fonction de transfert d'ordre fractionnaire.

Dans le cas d'un système linéaire d'ordre fractionnaire commensurable, la représentation d'état de l'équation (2.5) devienne:

$$\begin{cases} d^\alpha x(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases} \quad (2.6)$$

où  $d^\alpha x = \left\{ d^\alpha [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n] \right\}^T$ .

**2.2.3.2 Relation entre la représentation d'état et la fonction de transfert**

La fonction de transfert  $G(s)$  de la représentation d'état de l'équation (2.5) est obtenue en utilisant la transformée de Laplace avec les conditions initiales nulles.  $G(s)$  est donnée comme suit [6] :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C [s^{[\alpha]} I_n - A]^{-1} B + D \quad (2.7)$$

où  $s^{[\alpha]} I_n = \text{diag} [s^{\alpha_1} \quad s^{\alpha_2} \quad \dots \quad s^{\alpha_n}]$

Dans le cas d'un système linéaire d'ordre fractionnaire commensurable, l'équation (2.7) devienne:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C [s^\alpha I_n - A]^{-1} B + D \quad (2.8)$$

**2.3 Propriétés des systèmes d'ordre fractionnaire**

**2.3.1 Systèmes fractionnaires versus systèmes d'ordre entier**

Soient les deux systèmes suivants pour  $0 < \mu < 1$  et le terme  $x(0)$  pris comme condition initiale [42]:

$$x'(t) = \mu t^{\mu-1} \quad \Rightarrow \quad x(t) = t^\mu + x(0) \quad (2.9)$$

$$D^\alpha x(t) = \mu t^{\mu-1}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{\mu \Gamma(\alpha) t^{\mu+\alpha-1}}{\Gamma(\mu + \alpha)} + x(0) \quad (2.10)$$

On remarque en effet, que le système d'ordre entier (2.9) est instable quel que soit  $\mu \in ]0, 1[$ . Le système d'ordre fractionnaire (2.10) est stable quel que soit  $0 < \mu < (1 - \alpha)$ . Ceci montre que les systèmes fractionnaires possèdent des caractéristiques différentes de celles des systèmes d'ordre entier [42].

### 2.3.2 Stabilité d'un système d'ordre fractionnaire

Dans la théorie de la stabilité des systèmes linéaires invariants dans le temps, un système est stable si les racines de son polynôme caractéristique ont partie réelle strictement négatives, donc situées dans la moitié gauche du plan complexe. Par ailleurs, dans le cas des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire commensurable, la définition de la stabilité diffère de celle des systèmes d'ordre entier. En effet, les systèmes fractionnaires peuvent avoir des racines dans la moitié droite du plan complexe et être stables. D'autre part, il a été montré, par plusieurs auteurs et en utilisant différentes méthodes, que pour le cas des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire commensurable, une méthode d'analyse complexe basée sur le principe d'argument des racines de l'équation caractéristique peut être utilisée pour étudier la stabilité dans le sens entrée bornée-sortie bornée (BIBO) [43-45]. L'état de la stabilité peut alors être énoncé comme suit :

#### Théorème 1:

Un système linéaire d'ordre fractionnaire commensurable décrit par l'équation différentielle de l'équation (2.2) dont la fonction de transfert est donnée par l'équation (2.4) est stable si et seulement si  $|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}$  (pour  $1 \leq i \leq N$ ) [43]. Les  $\lambda_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) sont les racines du dénominateur de la fonction de transfert  $P(s^\alpha) = \sum_{i=0}^n a_i (s^\alpha)^i$  qui est un polynôme en  $s^\alpha$ .

#### Théorème 2:

Un système linéaire d'ordre fractionnaire commensurable représenté par l'équation d'état de l'équation (2.6) est stable si la condition  $|\arg(\text{eig}(\mathbf{A}))| > \alpha \frac{\pi}{2}$  est satisfaite pour  $0 < \alpha < 2$  ; où le terme  $[\text{eig}(\mathbf{A})]$  représente les valeurs propres de la matrice A [41].

Figure 2.1, illustre les zones de stabilité des systèmes linéaire d'ordre fractionnaire commensurable en fonction de l'ordre de dérivation  $\alpha$ .

## 2.3.3 Observabilité et contrôlabilité d'un système d'ordre fractionnaire

### 2.3.3.1 Observabilité

Dans le cas entier, la notion d'observabilité est liée à la reconstitution de l'état initial tout en connaissant la représentation d'état ainsi que les vecteurs d'entrée et de sortie pendant un intervalle de temps donné consécutif à l'instant initial [46]. Soit un système linéaire d'ordre fractionnaire commensurable décrit par l'équation d'état (2.6) :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.11)$$

#### 2.3.3.1.1 Définition

L'état  $x_0 = x(t_0)$  est observable si, pour  $u(t)$  donné, il existe un instant  $t_f \geq t_0$  tel que la connaissance de  $y(t)$  sur l'intervalle  $]-\infty, t_f]$  et de  $x(t)$  sur l'intervalle  $]-\infty, t_0[$  soit suffisante pour déterminer  $x_0$  [47] .

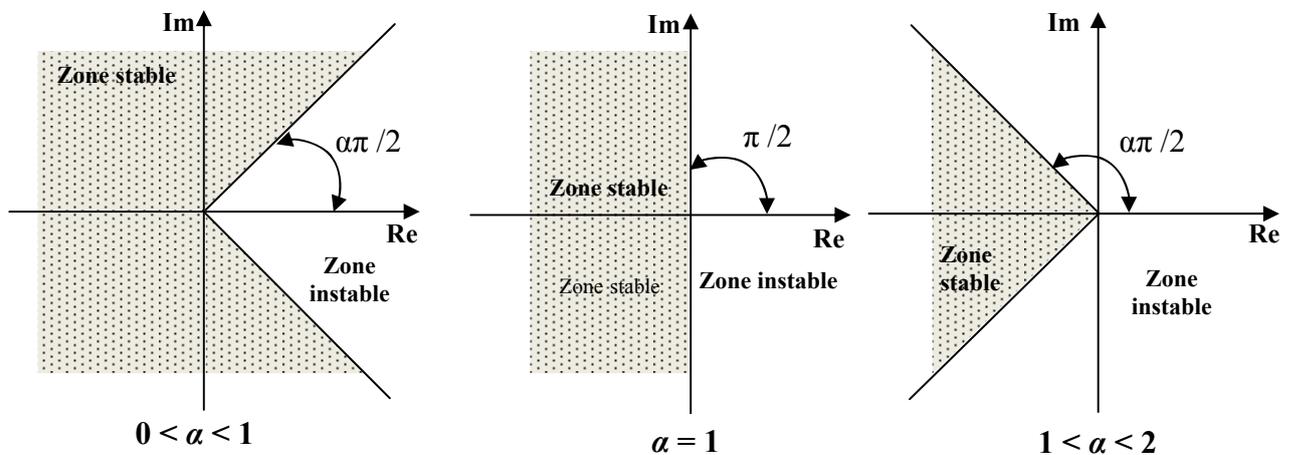
#### 2.3.3.1.2 Critère d'Observabilité

Le résultat suivant peut être démontré comme son similaire dans le cas d'ordre entier [48,49].

**Théorème :** Le système d'ordre fractionnaire (2.11) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité  $M_{ob}(n \times n)$ :

$$M_{ob} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

est une matrice de rang  $n$ .



**Figure 2.1** Zones de stabilité des systèmes linéaires d'ordre commensurable en fonction d'ordre de dérivation  $\alpha$ .

### 2.3.3.2 Contrôlabilité

Dans le cas entier, la notion de contrôlabilité est liée à la transition d'un système d'un état à un autre, spécifiée à l'avance, dans un intervalle de temps fini [46]. Considérons le système linéaire d'ordre fractionnaire commensurable décrit par l'équation d'état de l'équation (2.11).

#### 2.3.3.2.1 Définition

Si l'on peut amener le système de l'état  $x_0 = x(t_0)$  où il se trouve à l'instant  $t_0$ , à l'état  $x_f = x(t_f)$  à l'instant  $t_f \geq t_0$  en agissant uniquement sur l'entrée  $u(t)$  (ou commande), supposée sans contrainte,  $x(t)$  étant connu sur l'intervalle  $]-\infty, t_0[$ , l'état  $x_0$  est dit contrôlable à l'instant  $t_0$  [47].

#### 2.3.3.2.2 Critère de contrôlabilité

Le résultat suivant peut être démontré comme leurs similaires dans le cas d'ordre entier [48,49].

#### Théorème

Le système d'ordre fractionnaire (2.11) est contrôlable si et seulement si la matrice de contrôlabilité

$$M_{cont} = [B \ AB \ \dots \ A^{N-1}B] \quad (2.13)$$

$M_{cont}(n \times n)$ , est une matrice de rang  $n$ .

## 2.4 Résolution des systèmes d'ordre fractionnaire

Les équations différentielles d'ordre fractionnaire apparaissent de plus en plus fréquemment dans différentes approches de recherches et d'applications en technologie. Leur solution est plus complexe que celle des équations d'ordre entier. L'introduction d'une méthode efficace et simple à appliquer pour résoudre ces équations est nécessaire. Dans la littérature il existe plusieurs méthodes pour la résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire [6,50-51]. Les méthodes les plus simples et les plus répandues sont celles qui utilisent la technique de la transformée de Laplace. Alors, dans la section suivante, nous allons exposer une méthode de résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants qui utilise la transformée de Laplace et la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres [6].

### 2.4.1 Equation différentielle d'ordre fractionnaire à un seul terme

Considérons le système décrit par l'équation différentielle d'ordre fractionnaire linéaire à coefficients constants suivante : (avec  $\alpha$  réel et positif)

$$a_0 D_t^\alpha y(t) = f(t) \quad (2.14)$$

La transformée de Laplace de l'équation (2.14) avec des conditions initiales nulles donne :

$$as^\alpha Y(s) = F(s) \quad (2.15)$$

$$Y(s) = \frac{1}{as^\alpha} F(s) \quad (2.16)$$

Soit  $g_1(t)$  une fonction définie par :

$$g_1(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{as^\alpha} \right\} = \frac{1}{a} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (2.17)$$

où la fonction  $g_1(t)$  est appelée la fonction fractionnaire de Green à un seul terme [6].

Alors, la solution  $y(t)$  est obtenue de l'équation (2.16) par la convolution suivante :

$$y(t) = \int_0^t g_1(t-\tau) f(\tau) d\tau = \frac{1}{a\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.18)$$

En utilisant la définition de l'équation (1.7), la solution  $y(t)$  est donné par :

$$y(t) = \frac{1}{a} {}_0 D_t^{-\alpha} f(t) \quad (2.19)$$

### 2.4.2 Equation différentielle d'ordre fractionnaire à deux termes

On considère l'équation différentielle d'ordre fractionnaire linéaire à coefficients constants suivante :

$$a_0 D_t^\alpha y(t) + by(t) = f(t) \quad (2.20)$$

La transformée de Laplace de l'équation (2.20) avec des conditions initiales nulles donne :

$$as^\alpha Y(s) + bY(s) = F(s) \quad (2.21)$$

$$Y(s) = \frac{1}{a} \frac{1}{s^\alpha + \frac{b}{a}} F(s) \quad (2.22)$$

Soit  $g_2(t)$  une fonction définie par :

$$g_2(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{a} \frac{1}{s^\alpha + \frac{b}{a}} \right\} = \frac{1}{a} t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left( -\frac{b}{a} t^\alpha \right) \quad (2.23)$$

où la fonction  $g_2(t)$  est appelée la fonction fractionnaire de Green à deux termes [6] et  $E_{\alpha,\alpha}(\cdot)$  est la fonction de Mittag-Leffler de l'équation (1.20). Alors, la solution  $y(t)$  est obtenue de l'équation (2.22) par la convolution suivante :

$$y(t) = \int_0^t g_2(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (2.24)$$

### 2.4.3 Equation différentielle d'ordre fractionnaire à trois termes

On considère l'équation différentielle d'ordre fractionnaire linéaire à coefficients constants suivante :

$$a {}_0D_t^\beta y(t) + b {}_0D_t^\alpha y(t) + cy(t) = f(t) \quad (2.25)$$

La transformée de Laplace de l'équation (2.25) avec des conditions initiales nulles donne :

$$Y(s) = \frac{1}{as^\beta + bs^\alpha + c} F(s) \quad (2.26)$$

Soit la fonction  $G_3(s) = \frac{1}{as^\beta + bs^\alpha + c}$  ; alors on peut écrire [6] :

$$G_3(s) = \frac{1}{c} \frac{cs^{-\alpha}}{as^{\beta-\alpha} + b} \frac{1}{1 + \frac{cs^{-\alpha}}{as^{\beta-\alpha} + b}} = \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{c}{a}\right)^{k+1} \frac{s^{-\alpha k - \alpha}}{\left(s^{\beta-\alpha} + \frac{b}{a}\right)^{k+1}} \quad (2.27)$$

La transformée de Laplace inverse  $g_3(t)$  de la fonction  $G_3(s)$  est donnée par [6] :

$$g_3(t) = \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{c}{a}\right)^k t^{\beta(k+1)-1} E_{\beta-\alpha, \beta+\alpha k}^{(k)} \left(-\frac{b}{a} t^{\beta-\alpha}\right) \quad (2.28)$$

où  $E_{\beta-\alpha, \beta+\alpha k}^{(k)}(\cdot)$  est la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres de l'équation (1.23).

Alors, la solution  $y(t)$  est obtenue de l'équation (2.26) par la convolution suivante :

$$y(t) = \int_0^t g_3(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (2.29)$$

### 2.4.4 Equation différentielle d'ordre fractionnaire générale

Les résultats des étapes précédentes peuvent être généralisés. En effet, considérons l'équation différentielle d'ordre fractionnaire linéaire à coefficients constants à n-termes suivante :

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_1 D^{\alpha_1} y(t) + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = f(t) \quad (2.30)$$

dont la fonction de transfert est donnée par :

$$G_n(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (2.31)$$

avec  $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_1 > \alpha_0$ . On peut alors écrire  $G_n(s)$  sous la forme [6] :

$$G_n(s) = \frac{1}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}}} \frac{1}{1 + \frac{\sum_{k=0}^{n-2} a_k s^{\alpha_k}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}}}} \quad (2.32)$$

$$G_n(s) = \frac{a_n^{-1} s^{-\alpha_{n-1}}}{s^{\alpha_n - \alpha_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n}} \frac{1}{1 + \frac{a_n^{-1} s^{-\alpha_{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} a_k s^{\alpha_k}}{s^{\alpha_n - \alpha_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n}}}$$

$$G_n(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m a_n^{-1} s^{-\alpha_{n-1}}}{\left(s^{\alpha_n - \alpha_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{m+1}} \left( \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{a_k}{a_n}\right) s^{\alpha_k - \alpha_{n-1}} \right)^m$$

$$G_n(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m a_n^{-1} s^{-\alpha_{n-1}}}{\left(s^{\alpha_n - \alpha_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{m+1}} \sum_{\substack{k_0 + k_1 + \dots + k_{n-2} = m \\ k_0 \geq 0; \dots; k_{n-2} \geq 0}} (m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2}) \prod_{i=0}^{n-2} \left(\frac{a_i}{a_n}\right)^{k_i} s^{(\alpha_i - \alpha_{n-1})k_i}$$

$$G_n(s) = \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{\substack{k_0 + k_1 + \dots + k_{n-2} = m \\ k_0 \geq 0; \dots; k_{n-2} \geq 0}} (m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2}) \prod_{i=0}^{n-2} \left(\frac{a_i}{a_n}\right)^{k_i} \frac{s^{\alpha_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} (\alpha_i - \alpha_{n-1}) k_i}}{\left(s^{\alpha_n - \alpha_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{m+1}} \quad (2.33)$$

où  $(m; k_0; k_1; \dots; k_{n-2})$  sont des coefficients [5]. L'application de la transformée de Laplace terme par terme de l'équation (2.33) donne :

$$g_n(t) = \frac{1}{a_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\substack{k_0 + k_1 + \dots + k_{n-2} = m \\ k_0 \geq 0; \dots; k_{n-2} \geq 0}} (m; k_0, k_1, \dots, k_{n-2}) \prod_{i=0}^{n-2} \left(\frac{a_i}{a_n}\right)^{k_i} t^{(\alpha_n - \alpha_{n-1})m + \alpha_n + \sum_{j=0}^{n-2} (\alpha_{n-1} - \alpha_j) k_j - 1} \\ \times E_{\alpha_n - \alpha_{n-1}, \alpha_n + \sum_{j=0}^{n-2} (\alpha_{n-1} - \alpha_j) k_j} \left( -\frac{a_{n-1}}{a_n} t^{\alpha_n - \alpha_{n-1}} \right) \quad (2.34)$$

Finalement, la solution  $y(t)$  est obtenue de l'équation (2.31) par la convolution suivante :

$$y(t) = \int_0^t g_n(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (2.35)$$

## 2.5 Les systèmes linéaires d'ordre fractionnaire fondamentaux

L'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire fondamental, définie dans [23], est représentée par l'équation suivante :

$$(\tau_0)^m \frac{d^{2m} x(t)}{dt^{2m}} + x(t) = e(t) \quad \text{pour } 0 < m < 1 \quad (2.36)$$

La fonction de transfert de ce type de système d'ordre fractionnaire est donnée par la fonction irrationnelle suivante :

$$G(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{1}{[1 + (s\tau_0)^{2m}]} \quad \text{pour } 0 < m < 1 \quad (2.37)$$

où  $\tau_0$  est un nombre réel positif. Pour représenter l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire fondamental de l'équation (2.36) par un modèle linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'introduire une approximation de sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction rationnelle. Alors, dans cette section, on va présenter une méthode d'approximation par une fonction rationnelle, dans une bande de fréquence donnée, de la fonction de transfert irrationnelle de l'équation (2.37) [52]. Selon l'ordre  $m$ , on distingue deux types de systèmes linéaires d'ordre fractionnaire fondamentaux. Le premier est le système d'ordre fractionnaire de relaxation pour  $0 < m < 0.5$ , et le second est le système d'ordre fractionnaire oscillatoire pour  $0.5 < m < 1$ .

### 2.5.1 Système d'ordre fractionnaire de relaxation

#### 2.5.1.1 Définition

Dans ce contexte, le système d'ordre fractionnaire de relaxation est défini comme étant un système représenté par l'équation différentielle fondamentale d'ordre fractionnaire de l'équation (2.36), pour  $0 < m < 0.5$ .

#### 2.5.1.2 Approximation par une fonction rationnelle

Dans leur étude sur les diélectriques, K. S. Cole et R. H. Cole [53] ont constaté que les fonctions de transfert de dispersion/relaxation d'un grand nombre de matériaux peuvent être modélisées par l'équation suivante :

$$G(s) = \frac{1}{[1 + (s\tau_0)^{2m}]} \quad (2.38)$$

où  $m$  un nombre réel tel que  $0 < m < 0.5$  et  $\tau_0$  est un nombre réel positif. Il est bien connu dans la littérature qu'une fonction de transfert  $G(s)$  est liée à sa fonction de distribution des temps de relaxation  $H(\tau)$  par la relation suivante [54] :

$$G(s) = \int_0^{\infty} \frac{H(\tau)}{1+s\tau} d\tau \quad (2.39)$$

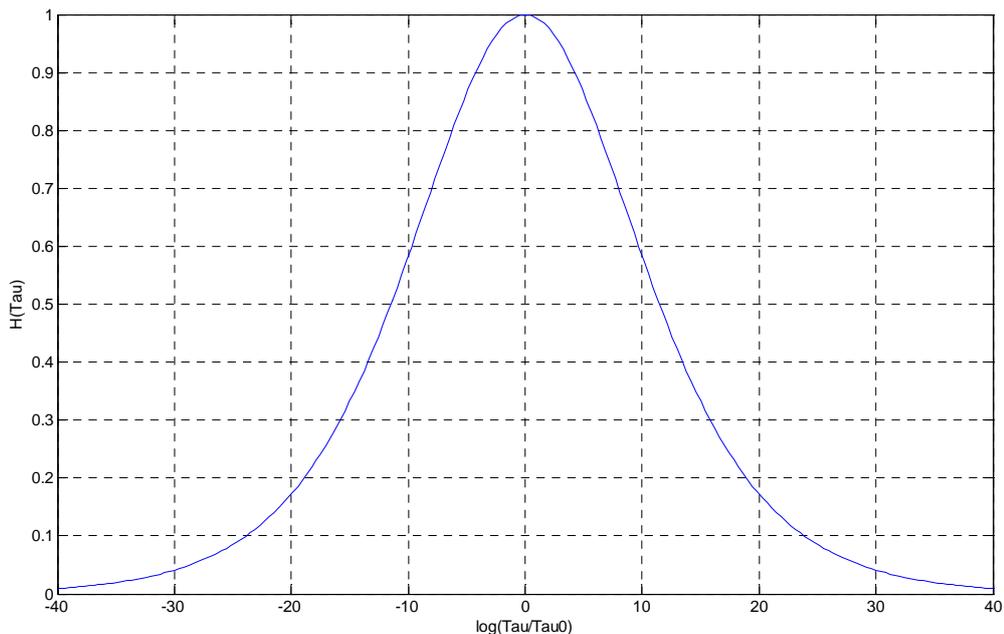
Utilisant la relation de l'équation (2.39), K. S. Cole et R. H. Cole ont démontré que la fonction de distribution des temps de relaxation  $H(\tau)$  pour leur modèle de l'équation (2.38) est donnée par [53] :

$$H(\tau) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin(1-2m)\pi}{\left\{ \cosh \left[ 2m \log \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right) \right] \right\} - \cos(1-2m)\pi} \right], \text{ pour } 0 < m < 0.5 \quad (2.40)$$

où :

$$G(s) = \frac{1}{1+(s\tau_0)^{2m}} = \int_0^{\infty} \frac{H(\tau)}{1+s\tau} d\tau, \text{ pour } 0 < m < 0.5 \quad (2.41)$$

Figure 2.2, montre le tracé de cette fonction de distribution des temps de relaxation  $H(\tau)$  pour  $m=0.1$  et  $\tau_0 = 10$ .



**Figure 2.2 :** Distribution de la fonction des temps de relaxation

L'approximation de la fonction de transfert irrationnelle de l'équation (2.38) par une fonction rationnelle commence par l'échantillonnage de la fonction de distribution des temps de relaxation  $H(\tau)$  de l'équation (2.40) dans une bande fréquentielle d'intérêt pratique  $[0, \omega_H]$  en points équidistants sur une échelle logarithmique  $\tau_i$  ( $i=1,2,\dots,2N-1$ ) comme suit :

$$H(\tau) \cong H_s(\tau) = \sum_{i=1}^{2N-1} H(\tau_i) \delta(\tau - \tau_i) \quad (2.42)$$

où  $\tau_i = \tau_0 \lambda^{N-i}$  (pour  $i=1,2,\dots,2N-1$ ) et  $\lambda$ , un nombre réel supérieur à l'unité, définie comme le rapport d'un pôle au pôle précédent  $\lambda = p_{i+1}/p_i = \tau_i/\tau_{i+1}$ , avec  $p_i = 1/\tau_i$  (pour  $i=1,2,\dots,2N-1$ ). Substituant l'équation (2.42) dans l'équation (2.41), on obtient:

$$G(s) \cong \int_0^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^{2N-1} H(\tau_i) \delta(\tau - \tau_i)}{1 + s\tau} d\tau = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{H(\tau_i)}{1 + s\tau_i} \quad (2.43)$$

donc, on peut écrire:

$$G(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^{2m}} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{H(\tau_i)}{1 + s\tau_i} = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.44)$$

où  $p_i$  et  $k_i$ , les pôles et les résidus de l'approximation, sont donnés par (pour  $i=1,2,\dots,2N$ ) :

$$p_i = \frac{1}{\tau_i} = (\lambda)^{(i-N)} \frac{1}{\tau_0} \quad (2.45)$$

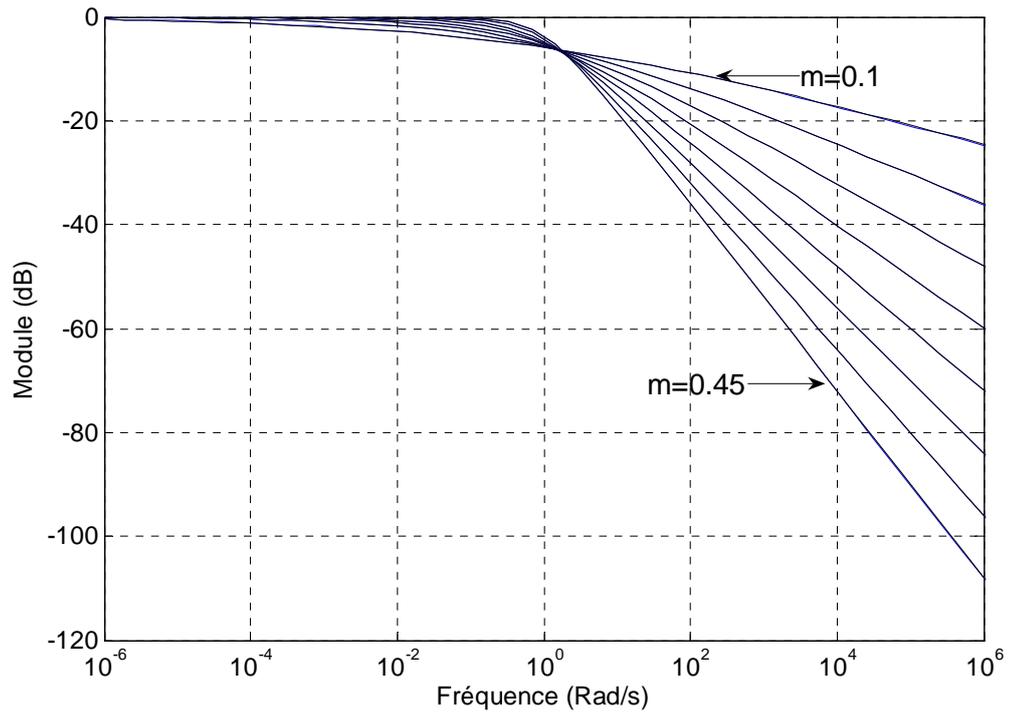
$$k_i = H(\tau_i) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin[(1-2m)\pi]}{\cosh[m \log(\frac{\tau_i}{\tau_0})] - \cos[(1-2m)\pi]} \right] \quad (2.46)$$

Pour une fréquence d'approximation  $\omega_{\max}$  qui peut être choisie comme  $100\omega_H$ , avec  $[0, \omega_H]$  est une bande de fréquence d'intérêt pratique, le nombre  $N$  est déterminé comme suit :

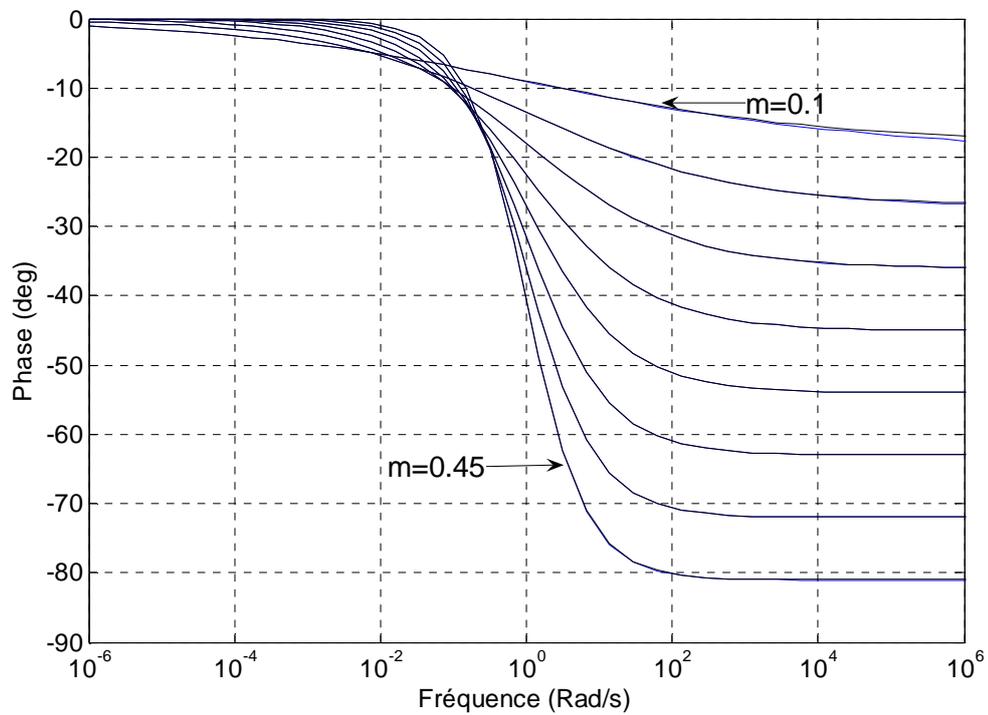
$$N = \text{Integer} \left( \frac{\log(\tau_0 \omega_{\max})}{\log(\lambda)} \right) + 1 \quad (2.47)$$

Les figures 2.3 et 2.4 représentent le diagramme de Bode du système de relaxation d'ordre fractionnaire, pour  $m$  de 0.05 à 0.45 avec un pas de 0.05.

$$G(s) = \frac{1}{[1 + s^{2m}]} \quad (2.48)$$



**Figure 2.3 :** Diagramme de Bode (Module) de la fonction  $G(s)$  et son approximation par une fonction rationnelle



**Figure 2.4 :** Diagramme de Bode (Phase) de la fonction  $G(s)$  et son approximation par une fonction rationnelle

### 2.5.1.3 Les réponses temporelles

De l'équation (2.44), on a :

$$G(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^{2m}} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.49)$$

Donc

$$X(s) = \frac{E(s)}{1 + (s\tau_0)^{2m}} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} E(s) \quad (2.50)$$

Pour  $e(t) = \delta(t)$  une impulsion unité,  $E(s) = 1$ , alors :

$$X(s) = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.51)$$

Utilisant la transformé de Laplace inverse, la réponse impulsionnelle de ce système peut être obtenue comme suit :

$$x(t) = \sum_{i=1}^{2N-1} k_i p_i \exp(-p_i t) \quad (2.52)$$

Figure 2.5 montre le comportement de la réponse impulsionnelle pour plusieurs valeurs de  $m$  du système d'ordre fractionnaire de l'équation (2.38).

Pour  $e(t) = u(t)$  un échelon unité,  $E(s) = 1/s$ , alors :

$$X(s) = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \frac{1}{s} = \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + p_i} \right) \quad (2.53)$$

Utilisant la transformé de Laplace inverse, la réponse indicielle de ce système peut être obtenue comme suit :

$$x(t) = \sum_{i=1}^{2N-1} k_i (1 - \exp(-p_i t)) \quad (2.54)$$

La figure 2.6 montre le comportement de la réponse indicielle pour plusieurs valeurs de  $m$  du système d'ordre fractionnaire de l'équation (2.38).

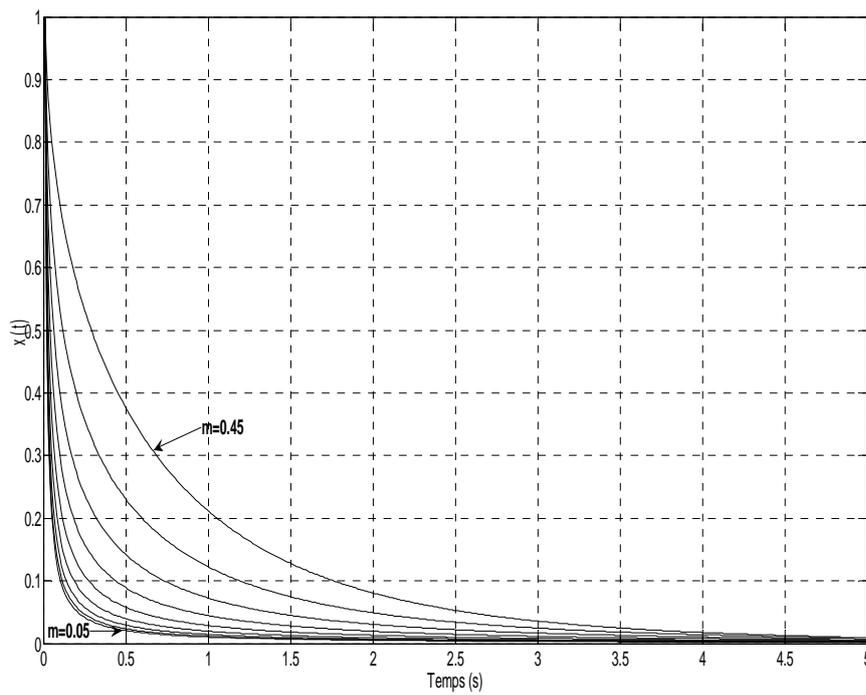


Figure 2.5 : La réponse impulsionnelle pour  $m$  de 0.05 à 0.45 avec un pas de 0.05.

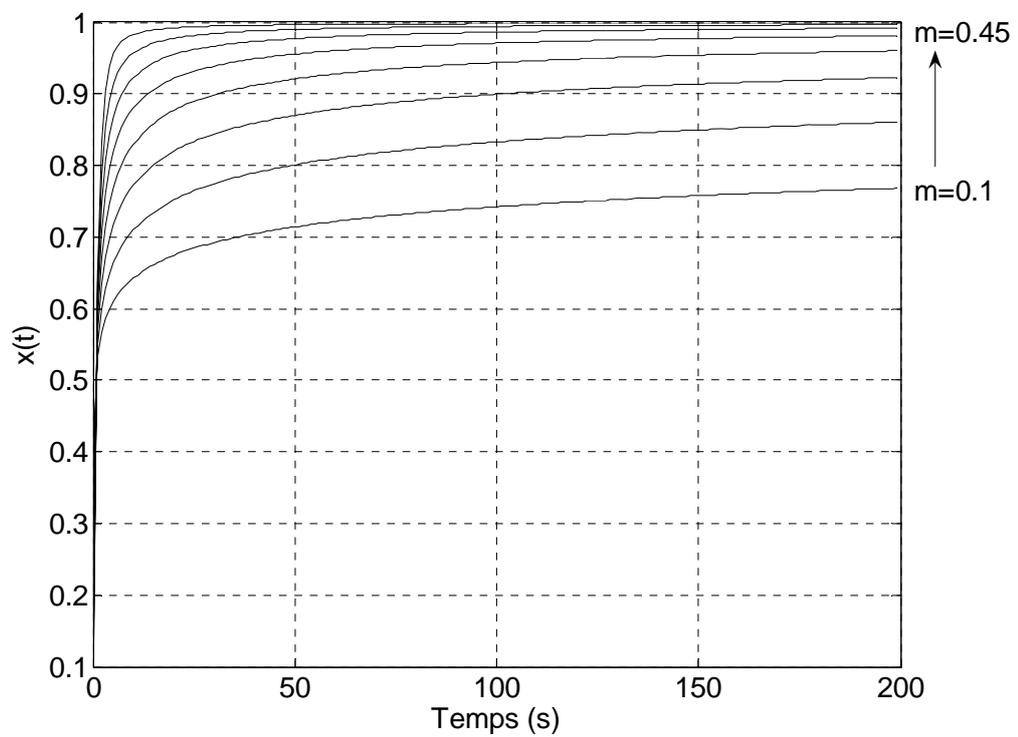


Figure 2.6 : La réponse indicielle pour  $m$  de 0.1 à 0.45 avec un pas de 0.05.

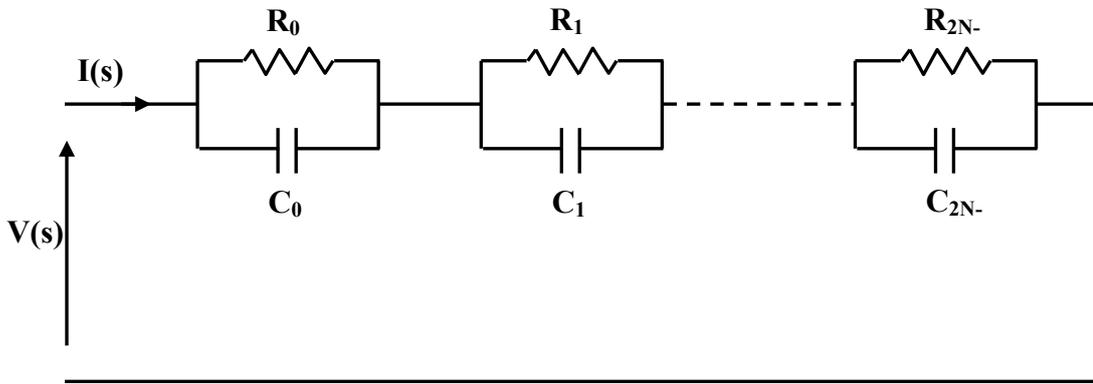
### 2.5.1.4 Implémentation par des circuits électriques analogiques

De l'équation (2.44), la fonction de transfert du système est donnée par :

$$G(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^{2m}} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.55)$$

On peut remarquer que l'équation (2.55) est une impédance  $Z(s)$  de  $(2N-1)$  cellules RC parallèle connectées en série comme il est montré dans la figure 2.7.

Cette impédance  $Z(s)$  du circuit de la figure 2.7 est donnée comme :



**Figure 2.7 :** Implémentation du système de relaxation par un circuit RC analogique

$$Z(s) = \sum_{i=1}^{2N-1} \left( \frac{R_i}{1 + sR_i C_i} \right) \quad (2.56)$$

A partir des équations (2.55) et (2.56), pour  $i=1,2,\dots,2N-1$ , on peut écrire :

$$R_i = k_i \quad \text{et} \quad R_i C_i = 1/p_i \quad (2.57)$$

Donc, les valeurs des résistances et des capacités, pour  $i=1,\dots,2N-1$ , du circuit analogique modélisant le système d'ordre fractionnaire de relaxation dans une bande de fréquence donnée sont données par :

$$R_i = k_i \quad \text{et} \quad C_i = 1/p_i k_i \quad (2.58)$$

## 2.5.2 Système d'ordre fractionnaire oscillatoire

### 2.5.2.1 Premier type du système d'ordre fractionnaire oscillatoire

#### 2.5.2.1.1 Définition

Dans ce contexte le système d'ordre fractionnaire oscillatoire est défini comme étant un système représenté par l'équation différentielle fondamentale d'ordre fractionnaire de l'équation (2.36), pour  $0.5 < m < 1$ , comme suit :

$$(\tau_0)^m \frac{d^{2m}x(t)}{dt^{2m}} + x(t) = e(t) \quad (2.59)$$

Sa fonction de transfert est donnée par :

$$G(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{1}{[1 + (s\tau_0)^{2m}]} \quad (2.60)$$

### 2.5.2.1.2 Approximation par une fonction rationnelle

La fonction de transfert du système d'ordre fractionnaire oscillatoire de l'équation précédente est modélisée par la fonction suivante :

$$G(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^{2m}} \approx \frac{(1 + s\tau_0)^{2-2m}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} = G_N(s)G_D(s) \quad (2.61)$$

où

$$G_N(s) = (1 + \tau_0 s)^{(2-2m)} \quad (2.62)$$

est appelée zéro à puissance fractionnaire (ZPF), avec  $0 < (2-2m) < 1$ , et

$$G_D(s) = \frac{1}{(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1} \quad (2.63)$$

est un système de deuxième ordre régulier. On peut montrer que :

pour  $\omega \ll 1/\tau_0$

$$|G(j\omega)| = 1 \approx 1$$

pour  $\omega \gg 1/\tau_0$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{(\omega\tau_0)^{2m}} \approx \frac{(\omega\tau_0)^{2-2m}}{(\omega\tau_0)^2} = \frac{1}{(\omega\tau_0)^{2m}}$$

pour  $\omega = 1/\tau_0$ ,

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + (j)^{2m}} \right| \approx \frac{|(1 + j)^{(2-2m)}|}{|2j\xi|}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{[1 + \cos m\pi]^2 + (\sin m\pi)^2}} \cong \frac{(\sqrt{2})^{2-2m}}{2\xi} \quad (2.64)$$

Pour garantir l'égalité de l'équation (2.64), le facteur d'amortissement  $\xi$  du système de deuxième ordre régulier doit être donné par :

$$\xi = \sqrt{\frac{[1 + \cos(m\pi)]}{2^{2m-1}}} \quad (2.65)$$

Pour représenter le système d'ordre fractionnaire oscillatoire de l'équation (2.60) par un modèle linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer, dans une bande fréquentielle d'intérêt pratique  $[0, \omega_H]$ , le ZPF de l'équation (2.62) par une fonction rationnelle.

La méthode d'approximation du ZPF consiste à approximer sa pente 20m dB/dec dans le diagramme de Bode par un nombre de lignes en zig-zag avec des pentes en alternance de 20 dB/dec et 0 dB/dec correspondant aux pôles et zéros distribués alternativement sur l'axe réel négatif du plant  $s$  des fréquences tels que :  $z_0 < p_0 < z_1 < \dots < z_N < p_N$ . Donc on peut écrire :

$$G_N(s) = (1 + \tau_0 s)^{(2-2m)} \cong \prod_{i=0}^N \frac{\left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.66)$$

Alors, l'équation (2.61) peut être reformulée comme suit :

$$G(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^{2m}} \approx \frac{\prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \frac{1}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} \quad (2.67)$$

En se basant sur une méthode graphique, les pôles et les zéros de l'approximation du ZPF sont générés sous une forme de progression géométrique [25]. Cette méthode d'approximation commence par une erreur d'approximation  $y$  en dB et une bande de fréquence d'approximation  $\omega_{\max}$ . Seuls l'erreur  $y$  et la bande de fréquence  $\omega_{\max}$  qui peut être égale à  $100 \omega_H$  sont données, les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $z_0$ ,  $p_0$  et  $N$  de l'approximation peuvent être déterminés comme suit :

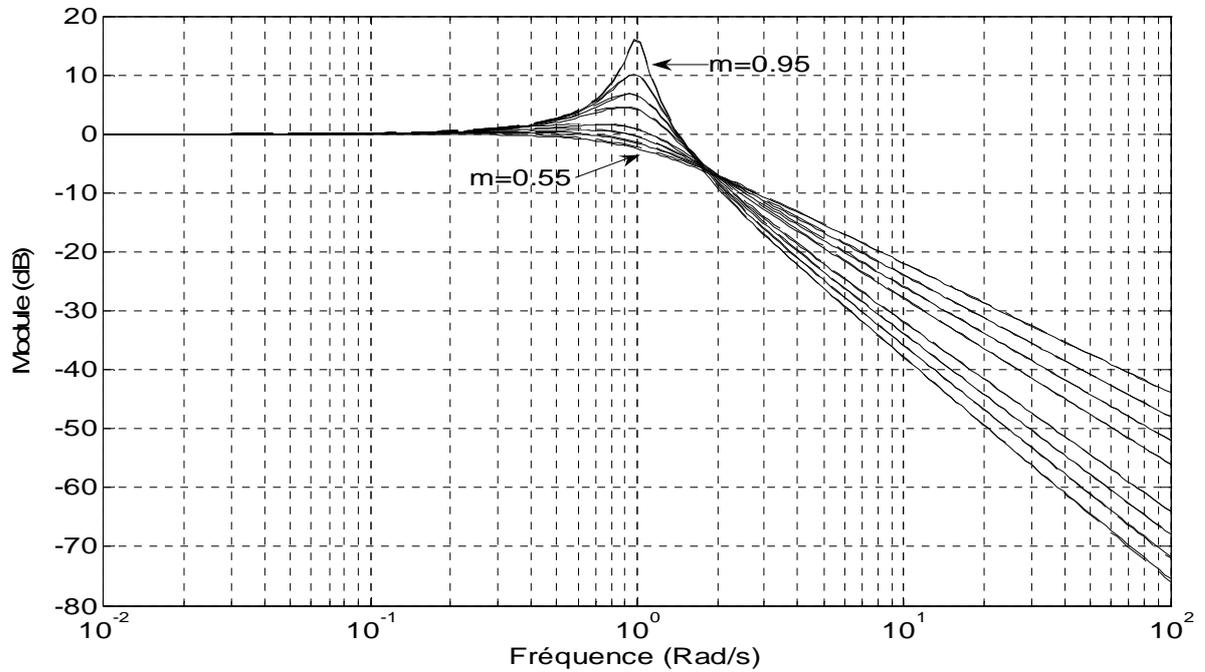
$$a = 10^{\left[\frac{y}{10[1-2(1-m)]}\right]}, \quad b = 10^{[y/20(1-m)]}, \quad z_0 = \frac{1}{\tau_0} 10^{[y/40(1-m)]}, \quad p_0 = az_0$$

$$N = \text{Integer} \left( \frac{\log\left(\frac{\omega_{\max}}{z_0}\right)}{\log(ab)} \right) + 1 \quad (2.68)$$

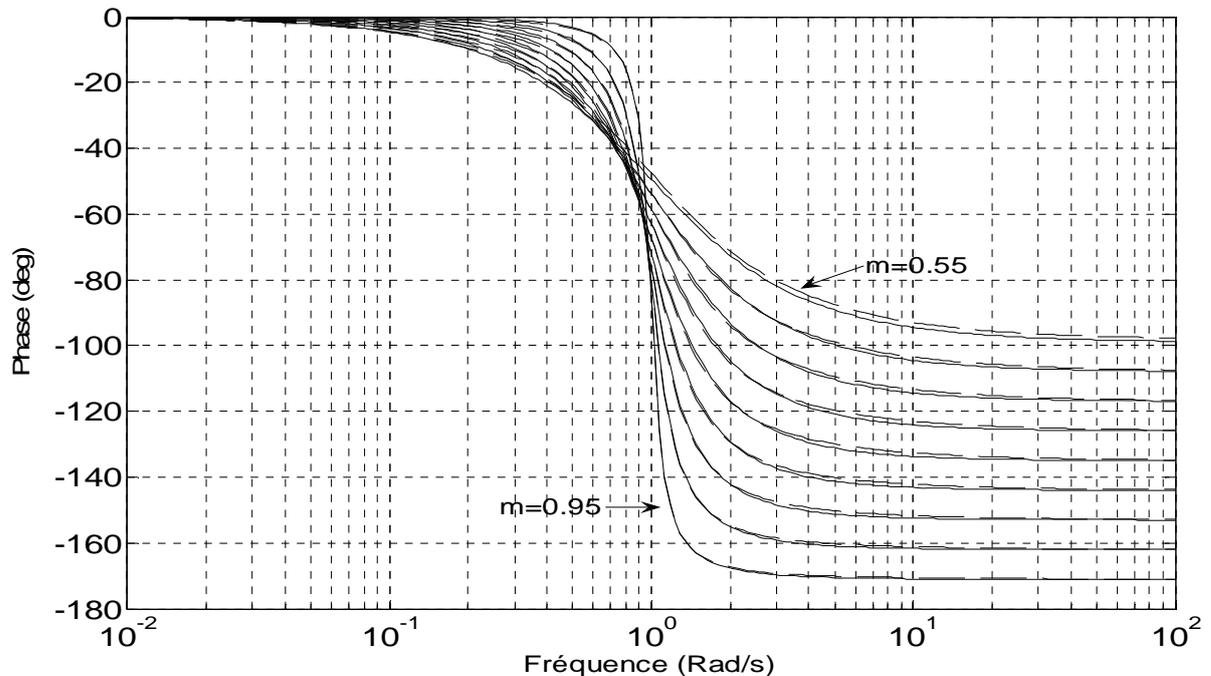
Les pôles  $p_i$  et les zéros  $z_i$  de l'approximation rationnelle de l'équation (2.66) peuvent être générés par les relations suivantes :  $z_i = (ab)^i z_0$  et  $p_i = (ab)^i az_0$  pour  $i=0,1,\dots,N$ . Donc, l'équation (2.67) est donnée comme suit :

$$G(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^{2m}} = \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_0(ab)^i}\right)} \frac{1}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} \quad (2.69)$$

Figures 2.8 et 2.9 représentent le comportement fréquentielle module et phase du tracé de Bode du système d'ordre fractionnaire oscillatoire pour différentes valeurs de  $m$  pour  $0.5 < m < 1$ .



**Figure 2.8 :** Tracé de Bode (Module) de la fonction irrationnelle et de son approximation par une fonction rationnelle pour  $m$  varie de 0.55 à 0.95 avec un pas de 0.05.



**Figure 2.9 :** Tracé de Bode (Phase) de la fonction irrationnelle et de son approximation par une fonction rationnelle pour  $m$  variant de 0.55 à 0.95 avec un pas de 0.05.

### 2.5.2.1.3 Les réponses temporelles

La décomposition de la fonction rationnelle de l'équation (2.69), permet de représenter la fonction de transfert du système d'ordre fractionnaire oscillatoire par une combinaison de fonctions élémentaires simples, comme suit :

$$G(s) = \frac{As + B}{(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{1 + \frac{s}{p_0(ab)^i}} \quad (2.70)$$

où,  $k_i$  ( $i=0, 1, \dots, N$ ) sont les résidus des pôles qui peuvent être calculés comme suit :

$$k_i = \frac{1}{(\tau_0 p_0(ab)^i)^2 - 2\xi(\tau_0 p_0(ab)^i) + 1} \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - a(ab)^{i-j})}{\prod_{j=0}^N (1 - (ab)^{i-j})} \quad (2.71)$$

Les constantes A et B sont données par :

pour  $s = 0$ , on a :

$$G(0) = B + \sum_{i=0}^N k_i = 1 \Rightarrow B = 1 - \sum_{i=0}^N k_i \quad (2.72)$$

et pour A, on a :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = 0 = \frac{A}{\tau_0^2} + \sum_{i=0}^N k_i p_0(ab)^i \Rightarrow A = -\tau_0^2 \sum_{i=0}^N k_i p_0(ab)^i \quad (2.73)$$

Donc, on aura :

$$G(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{1}{[1 + (\tau_0 s)^{2m}]} = \frac{As + B}{(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{1 + \frac{s}{p_0(ab)^i}} \quad (2.74)$$

$$X(s) = \frac{E(s)}{[1 + (\tau_0 s)^{2m}]} = \frac{As + B}{(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1} E(s) + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{1 + \frac{s}{p_0(ab)^i}} E(s) \quad (2.75)$$

Pour  $e(t) = \delta(t)$  une impulsion unité, on a  $E(s) = 1$ . La réponse impulsionnelle de ce système est obtenue comme suit :

$$x(t) = C \exp\left(-\frac{\xi}{\tau_0} t\right) \sin\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\tau_0} t + \Phi\right) + \sum_{i=0}^N k_i p_0(ab)^i \exp(-p_0(ab)^i t) \quad (2.76)$$

où les constantes C et  $\Phi$  son données par [25] :

$$C = \frac{B}{\tau_0} \sqrt{\frac{A^2 - 2AB\xi\tau_0 + (B\tau_0)^2}{(B\tau_0)^2(1-\xi^2)}} \quad \text{et} \quad \Phi = \arctg\left(\frac{A\sqrt{1-\xi^2}}{B\tau_0 - A\xi}\right) \quad (2.77)$$

Figure 2.10 montre la réponse impulsionnelle de ce système pour différentes valeurs de  $m$ .

Pour  $e(t) = u(t)$  un échelon unité, on a  $E(s) = 1/s$ , l'équation (2.70) devienne :

$$X(s) = \frac{1}{[1 + (\tau_0 s)^{2m}]s} = \frac{As + B}{(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1} \frac{1}{s} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{1 + \frac{s}{p_0(ab)^i}} \frac{1}{s} \quad (2.78)$$

La réponse indicielle de ce système est obtenue aussi comme suit :

$$x(t) = 1 + C_1 \exp\left(-\frac{\xi}{\tau_0} t\right) \sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau_0} t + \Phi_1\right) - \sum_{i=0}^N k_i \exp(-p_0(ab)^i t) \quad (2.79)$$

où les constantes  $C_1$  et  $\Phi_1$  son données par [25] :

$$C_1 = B \sqrt{\frac{A^2 - 2AB\xi\tau_0 + (B\tau_0)^2}{(B\tau_0)^2(1-\xi^2)}} \quad \text{et} \quad \Phi_1 = \arctg\left(\frac{A\sqrt{1-\xi^2}}{B\tau_0 - A\xi}\right) - \arctg\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi}\right) \quad (2.80)$$

Figure 2.11 montre le comportement de la réponse indicielle pour plusieurs valeurs de  $m$ .

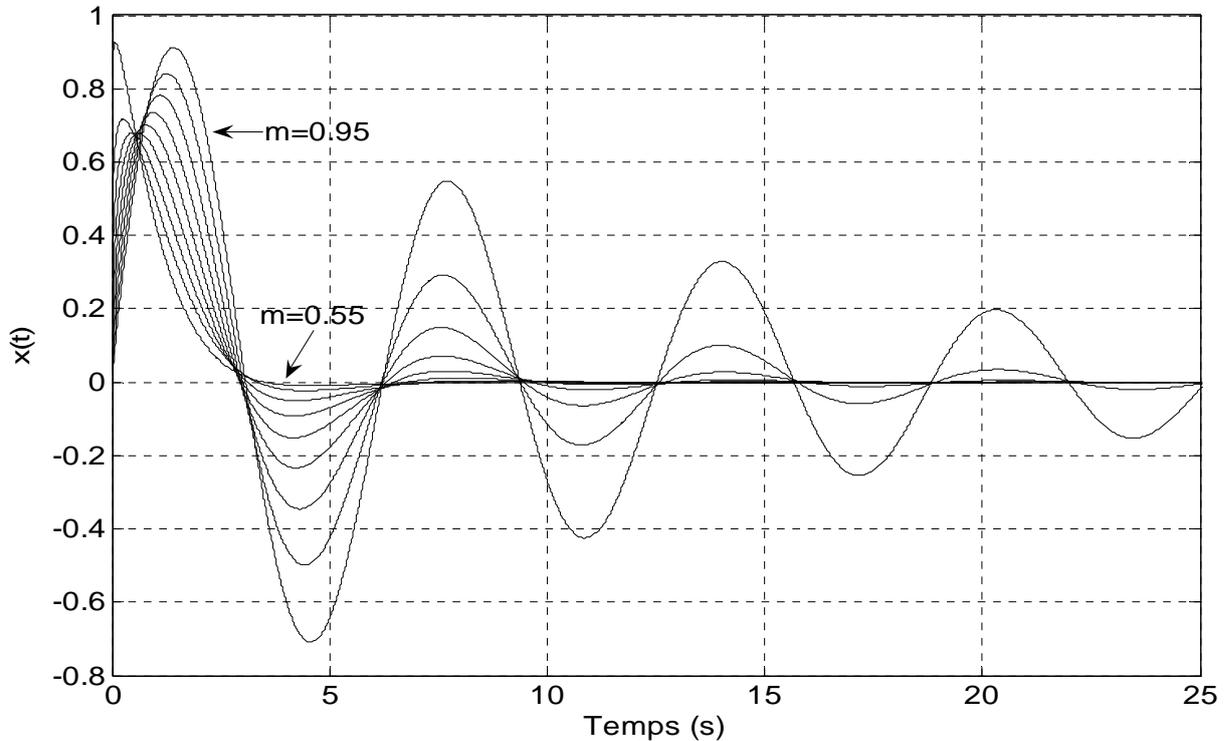
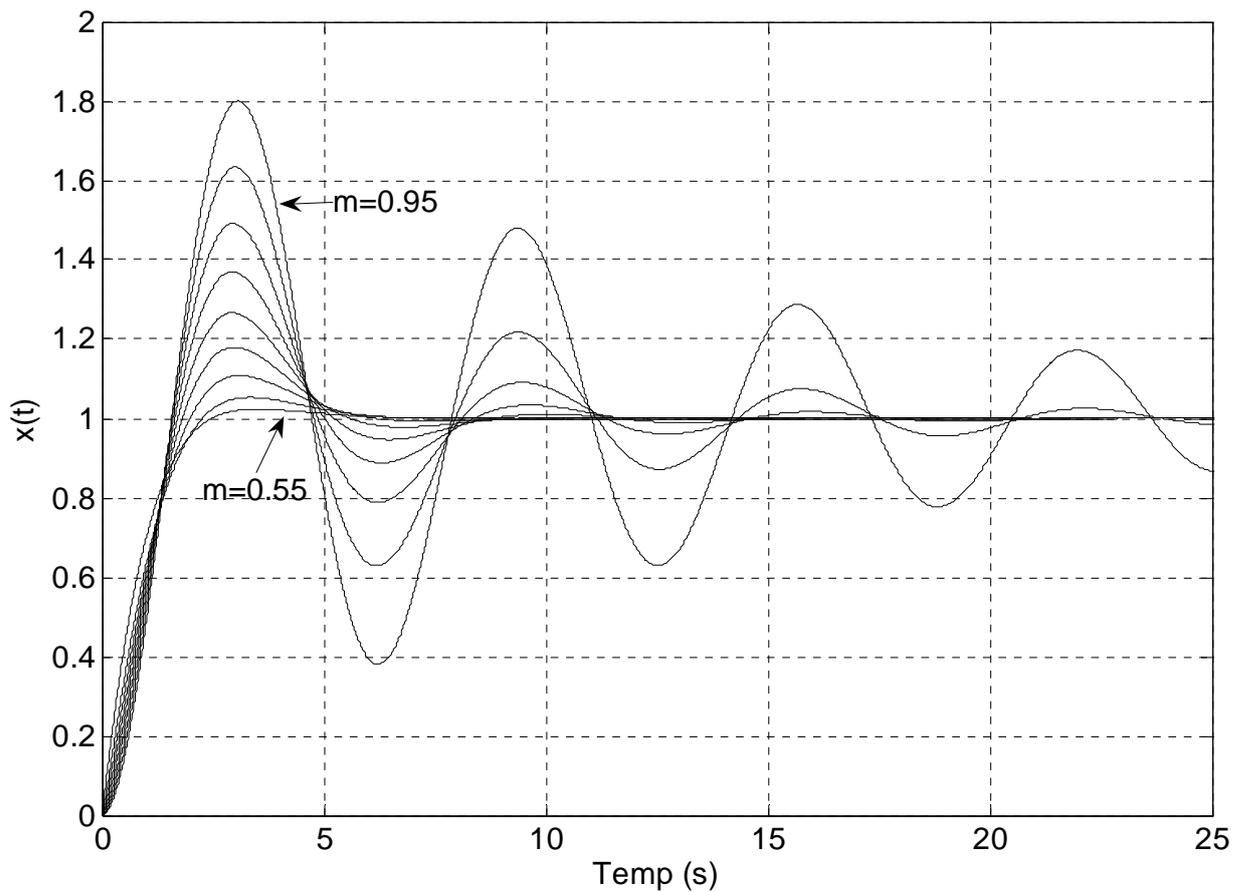


Figure 2.10 : La réponse impulsionnelle pour  $m$  variant de 0.55 à 0.95 avec un pas de 0.05.



**Figure 2.11** : La réponse indicielle pour  $m$  variant de 0.55 à 0.95 avec un pas de 0.05.

#### 2.5.2.1.4 Implémentation par des circuits électriques analogiques

De l'équation (2.61) la fonction de transfert du système d'ordre fractionnaire oscillatoire est donnée par :

$$G(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^{2m}} \approx \frac{(1 + s\tau_0)^{2-2m}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} = G_N(s) G_D(s) \quad (2.81)$$

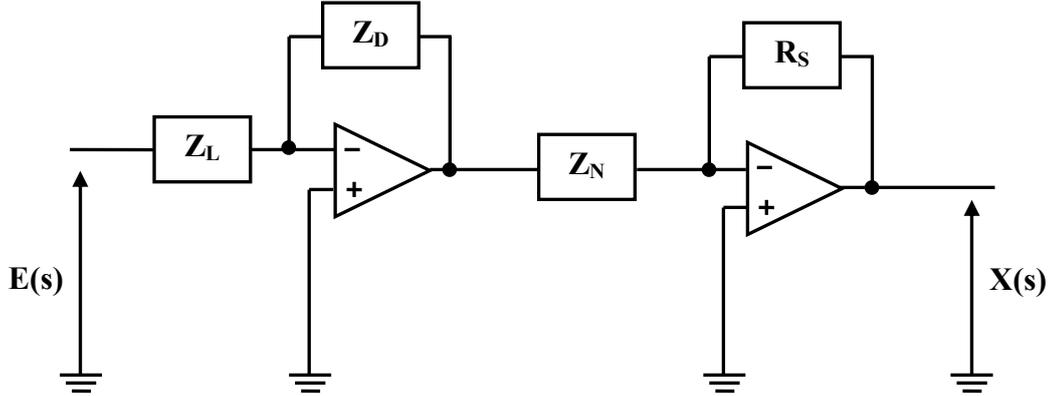
avec  $G_N(s) = (1 + s\tau_0)^{2-2m}$  et  $G_D(s) = \frac{1}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1}$ .

La fonction de transfert  $G(s)$  peut être réalisée par un circuit analogique de la figure 2.12 comme suit :

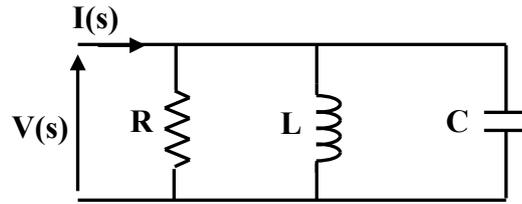
$$G(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^{2m}} \approx \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{Z_D R_S}{Z_L Z_N} \quad (2.82)$$

où  $R_s$  est une simple résistance de  $1\Omega$ ,  $Z_L = Ls$  est une impédance d'une inductance  $L$  et  $Z_D$  est l'impédances du circuit RLC parallèle de la figure 2.13 :

$$Z_D = \frac{Ls}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1} \quad (2.83)$$



**Figure 2.12 :** Implémentation du système fractionnaire oscillatoire par un circuit analogique.



**Figure 2.13 :** Circuit RLC parallèle

et  $Y_N(s) = \frac{1}{Z_N(s)} = G_N(s) = (1 + s\tau_0)^{2-2m}$  est l'admittance d'un circuit analogique qui sera

obtenue de la manière suivante :

de l'équations (2.66) et (2.69), on a :

$$G_N(s) = (1 + s\tau_0)^{2-2m} \cong \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} = \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_0(ab)^i}\right)} \quad (2.84)$$

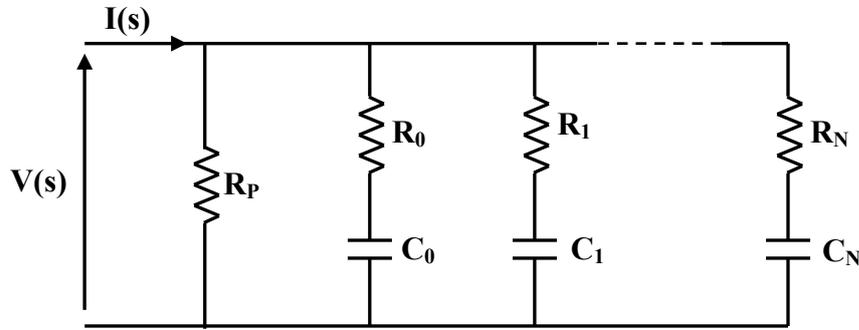
par décomposition en éléments simples, on aura :

$$G_N(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{h_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_0(ab)^i}\right)} \quad (2.85)$$

avec  $G_0 = 1$  et pour  $i=0,1,\dots,N$

$$h_i = -\frac{1}{p_0 (ab)^i} \frac{\prod_{j=0}^N (1 - a(ab)^{(i-j)})}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^N (1 - (ab)^{(i-j)})} \quad (2.86)$$

On peut remarquer facilement que l'équation (2.85) est similaire à l'admittance  $Y_N(s)$  d'une résistance et  $(N+1)$  cellules RC connectées en parallèle comme il est montré dans la figure 2.14:



**Figure 2.14 :** Réalisation du circuit analogique RC du ZPF  $(1 + s\tau_0)^{2-2m}$

L'admittance  $Y_N(s)$  du circuit de la figure 2.14 est donnée par :

$$Y_N(s) = \frac{1}{R_p} + \sum_{i=0}^N \left( \frac{sC_i}{1 + sR_i C_i} \right) \quad (2.87)$$

donc de l'équation (2.85) et (2.87) et pour  $i=0,1,\dots,N$  on a :

$$G_0 = \frac{1}{R_p}, \quad C_i = h_i, \quad \text{et} \quad R_i C_i = \frac{1}{(ab)^i p_0} \quad (2.88)$$

les valeurs des résistances et des capacités du circuit analogique réalisant le zéro à puissance fractionnaire dans une bande de fréquence donnée, pour  $i=0,1,\dots,N$  :

$$R_p = \frac{1}{G_0}, \quad C_i = h_i, \quad \text{et} \quad R_i = \frac{1}{(ab)^i p_0 h_i} \quad (2.89)$$

La fonction de transfert du circuit de la figure 2.12, donnée par l'équation (2.82) sera :

$$G(s) = \frac{1}{[1 + (\tau_0 s)^m]} = \frac{Z_D R_S}{Z_L Z_N} = \frac{\frac{Ls}{LCs^2 + \frac{Ls}{R} + 1}}{Ls} (1 + \tau_0 s)^{(2-2m)}$$

$$G(s) = \frac{1}{[1 + (\tau_0 s)^{2m}]} = R_s \frac{(1 + \tau_0 s)^{(2-2m)}}{LCs^2 + \frac{Ls}{R} + 1} = \frac{(1 + \tau_0 s)^{(2-2m)}}{(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1}$$

où  $\tau_0^2 = LC$ , et  $\frac{L}{R} = 2\xi\tau_0$

Alors :

$$L = 2R\xi\tau_0 \quad \text{et} \quad C = \frac{\tau_0}{2R\xi} \quad (2.90)$$

### 2.5.2.2 Deuxième type du système d'ordre fractionnaire oscillatoire

Il existe un deuxième type du système d'ordre fractionnaire oscillatoire, qui est défini par la fonction de transfert d'ordre fractionnaire suivante [55]:

$$G_2(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{(\tau_0 s)^m}{[(\tau_0 s)^{2m} + 1]} \quad 0 < m < 1 \quad (2.91)$$

L'équation différentielle d'ordre fractionnaire qui représente ce système est donnée par :

$$(\tau_0)^{2m} \frac{d^{2m}x(t)}{dt^{2m}} + x(t) = (\tau_0)^m \frac{d^m e(t)}{dt^m} \quad 0 < m < 1 \quad (2.92)$$

La fonction de transfert de l'équation (2.91), peut être reconstruite sous forme de produit de deux sous fonctions irrationnelles, comme suit :

$$G_2(s) = G_m(s) \times G(s) = [(\tau_0 s)^m] \times \frac{1}{[(\tau_0 s)^{2m} + 1]} \quad (2.93)$$

Où  $G_m(s)$  est un dérivateur d'ordre fractionnaire et  $G(s)$  représente le système d'ordre fractionnaire donné par (2.37).

L'approximation de la fonction de transfert irrationnelle  $G_2(s)$ , est calculée selon deux cas de l'ordre  $m$ . Le premier cas représente le système pour  $0 < m < 0.5$ , et le second cas représente le système pour  $0.5 < m < 1$ .

#### 2.5.2.2.1 Premier cas pour $0 < m < 0.5$

De l'équation (2.91), la fonction de transfert du système oscillatoire est définie par :

$$G_2(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{(\tau_0 s)^m}{[(\tau_0 s)^{2m} + 1]} \quad 0 < m < 0.5 \quad (2.94)$$

Donc, l'équation différentielle qui représente ce système est donnée par :

$$(\tau_0)^{2m} \frac{d^{2m}x(t)}{dt^{2m}} + x(t) = (\tau_0)^m \frac{d^m e(t)}{dt^m} \quad 0 < m < 0.5 \quad (2.95)$$

Utilisant la méthode d'approximation du ZPF [25], décrite dans la section (§.1.4), l'approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire  $G_m(s)$  dans une bande de fréquence donnée  $[\omega_L, \omega_H]$  autour de la fréquence  $\omega_0 = (1/\tau_0)$ , est obtenue par :

$$G_m(s) = (\tau_0 s)^m = K_D \tau_0^m \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m \cong K_D \tau_0^m \frac{\prod_{i=0}^{N_1} \left(1 + \left(\frac{s}{z_i}\right)\right)}{\prod_{i=0}^{N_1} \left(1 + \left(\frac{s}{p_i}\right)\right)} \quad (2.96)$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$z_i = (ab)^i z_0 \quad (\text{pour } i = 0, 1, \dots, N_1) \quad \text{et} \quad p_i = (ab)^i p_0 \quad (\text{pour } i = 0, 1, \dots, N_1) \quad (2.97)$$

avec:  $z_0 = \omega_c \sqrt{b}$  et  $p_0 = az_0$ .

Pour une erreur d'approximation  $y$  en dB et une fréquence maximale  $\omega_{\max}$  donnée, les paramètres d'approximation  $a$ ,  $b$  et  $N_1$  sont calculés par :

$$a = 10^{[y/10(1-m)]}, \quad b = 10^{[y/10m]} \quad \text{et} \quad N_1 = \left( \text{Integer} \left[ \frac{\log(\omega_{\max}/z_0)}{\log(ab)} \right] + 1 \right) \quad (2.98)$$

Alors, par décomposition de la fonction rationnelle de (2.96), on obtient :

$$G_m(s) = (\tau_0 s)^m \cong \tau_0^m \left( K_D + \sum_{i=0}^{N_1} \frac{k_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \right) \quad (2.99)$$

pour  $i=0, 1, \dots, N_1$  :

$$k_i = -\frac{K_D}{p_0 (ab)^i} \frac{\prod_{j=0}^{N_1} (1 - a(ab)^{(i-j)})}{\prod_{j=0, j \neq i}^{N_1} (1 - (ab)^{(i-j)})} \quad (2.100)$$

Utilisant l'approximation de la fonction  $G(s)$  donnée par (2.44) :

$$G(s) = \frac{1}{1 + (s\tau_0)^{2m}} \cong \sum_{i=1}^{2N_2-1} \frac{\bar{k}_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.101)$$

Par conséquent, l'approximation de la fonction  $G_2(s)$  de (2.93) est comme suit :

$$G_2(s) = G_m(s) \times G(s) \cong \tau_0^m \left( K_D + \sum_{i=0}^{N_1} \frac{k_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \right) \left( \sum_{j=1}^{2N_2-1} \frac{\bar{k}_j}{\left(1 + \frac{s}{p_j}\right)} \right) \quad (2.102)$$

$$G_2(s) \cong \left( \sum_{j=1}^{2N_2-1} \frac{(\tau_0^m K_D)(\bar{p}_j \bar{k}_j)}{(s + \bar{p}_j)} \right) + \left( \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=1}^{2N_2-1} \frac{(\tau_0^m)(p_i k_i)(\bar{p}_j \bar{k}_j)s}{(s + p_i)(s + \bar{p}_j)} \right) \quad (2.103)$$

Par la décomposition de la fonction (2.103), on obtient :

$$G_2(s) \cong \left( \sum_{j=1}^{2N_2-1} \frac{(\tau_0^m K_D)(\bar{p}_j \bar{k}_j)}{(s + \bar{p}_j)} \right) + \left( \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=1}^{2N_2-1} \frac{A_{ij}}{(s + p_i)} + \frac{B_{ij}}{(s + \bar{p}_j)} \right) \quad (2.104)$$

où les résidus  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$  (pour  $0 \leq i \leq N_1$  et  $1 \leq j \leq 2N_2-1$ ) sont donnés par :

$$A_{ij} = \frac{(\tau_0^m)(p_i^2 k_i)(\bar{p}_j \bar{k}_j)}{p_i - \bar{p}_j}, \quad B_{ij} = \frac{(\tau_0^m)(p_i k_i)(\bar{p}_j \bar{k}_j)}{\bar{p}_j - p_i} \quad (2.105)$$

Donc, on peut écrire :

$$G_2(s) \cong \left( \sum_{j=1}^{2N_2-1} \frac{(\tau_0^m K_D)(\bar{p}_j \bar{k}_j)}{(s + \bar{p}_j)} \right) + \left( \sum_{j=1}^{2N_2-1} \frac{\sum_{i=0}^{N_1} B_{ij}}{(s + \bar{p}_j)} \right) + \left( \sum_{i=0}^{N_1} \frac{\sum_{j=1}^{2N_2-1} A_{ij}}{(s + p_i)} \right) \quad (2.106)$$

$$G_2(s) = \frac{X(s)}{E(s)} \cong \left( \sum_{i=0}^{N_1} \frac{\bar{A}_i}{(s + p_i)} \right) + \left( \sum_{j=1}^{2N_2-1} \frac{\bar{B}_j}{(s + \bar{p}_j)} \right) \quad (2.107)$$

où les résidus  $\bar{A}_i$  ( $0 \leq i \leq N_1$ ), et  $\bar{B}_j$  ( $1 \leq j \leq 2N_2-1$ ), sont donnés par:

$$\bar{A}_i = \sum_{j=1}^{2N_2-1} A_{ij}, \quad \bar{B}_j = [(\tau_0^m K_D)(\bar{p}_j \bar{k}_j)] + \sum_{i=0}^{N_1} B_{ij} \quad (2.108)$$

à partir de l'équation (2.107), la réponse impulsionnelle est donnée par:

$$x(t) = \left( \sum_{i=0}^{N_1} \bar{A}_i \exp(-p_i t) \right) + \left( \sum_{j=1}^{2N_2-1} \bar{B}_j \exp(-\bar{p}_j t) \right) \quad (2.109)$$

A partir de (2.107) et pour  $E(s)=1/s$ , on a :

$$X(s) = \left( \sum_{i=0}^{N_1} \left( \frac{\bar{A}_i}{p_i} \right) \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{(s + p_i)} \right) \right) + \left( \sum_{j=1}^{2N_2-1} \left( \frac{\bar{B}_j}{p_j} \right) \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{(s + \bar{p}_j)} \right) \right) \quad (2.110)$$

Donc, la réponse indicielle est donnée par :

$$x(t) = \left( \sum_{i=0}^{N_1} \left( \frac{\bar{A}_i}{p_i} \right) [1 - \exp(-p_i t)] \right) + \left( \sum_{j=1}^{2N_2-1} \left( \frac{\bar{B}_j}{p_j} \right) [1 - \exp(-\bar{p}_j t)] \right) \quad (2.111)$$

Les figures 2.15 et 2.16 représentent le diagramme de Bode (Module et Phase) de la fonction  $G_2(s)$ , pour  $0 < m < 0.5$ .

Les figures 2.17 et 2.18 représentent les réponses impulsionnelle et indicielle du système pour  $0 < m < 0.5$ .

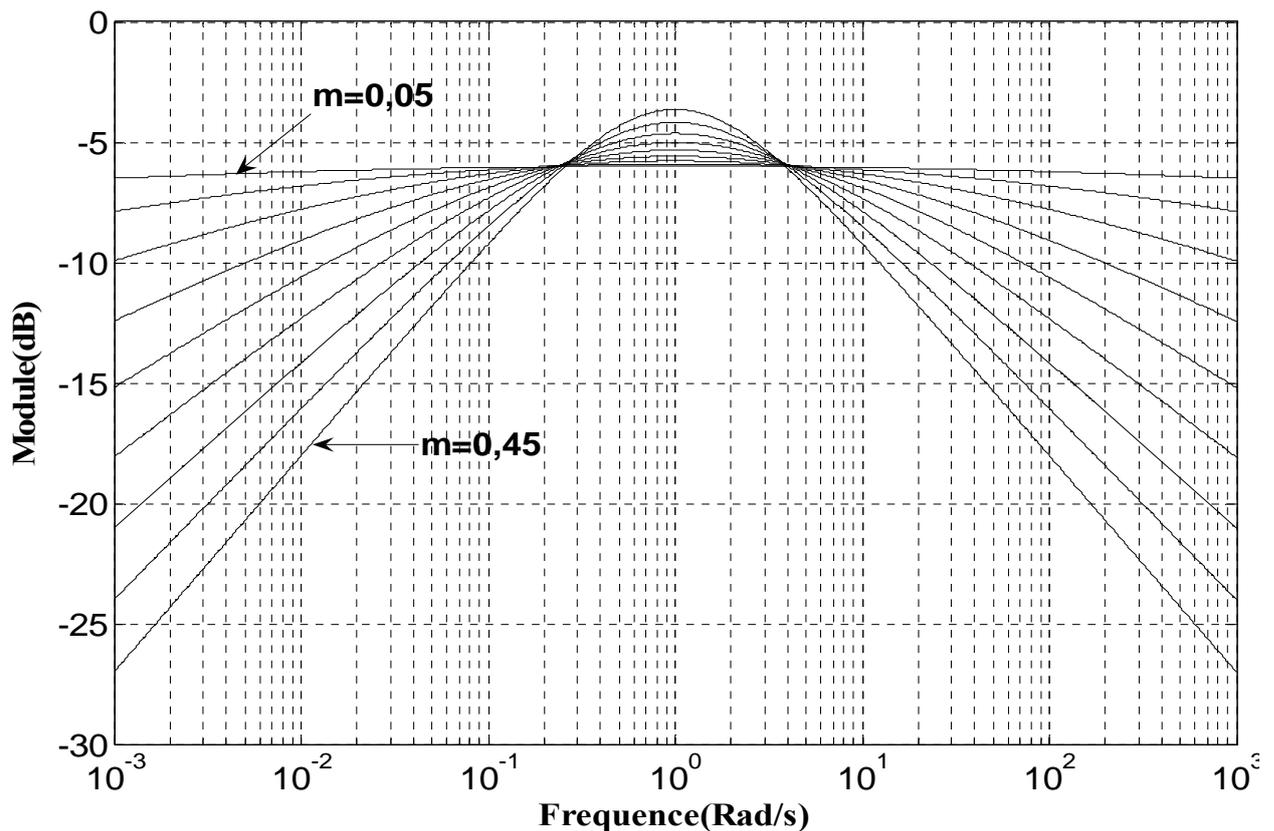


Figure 2.15 : Module de  $G_2(s)$  pour  $0 < m < 0.5$ , avec un pas de 0.05.

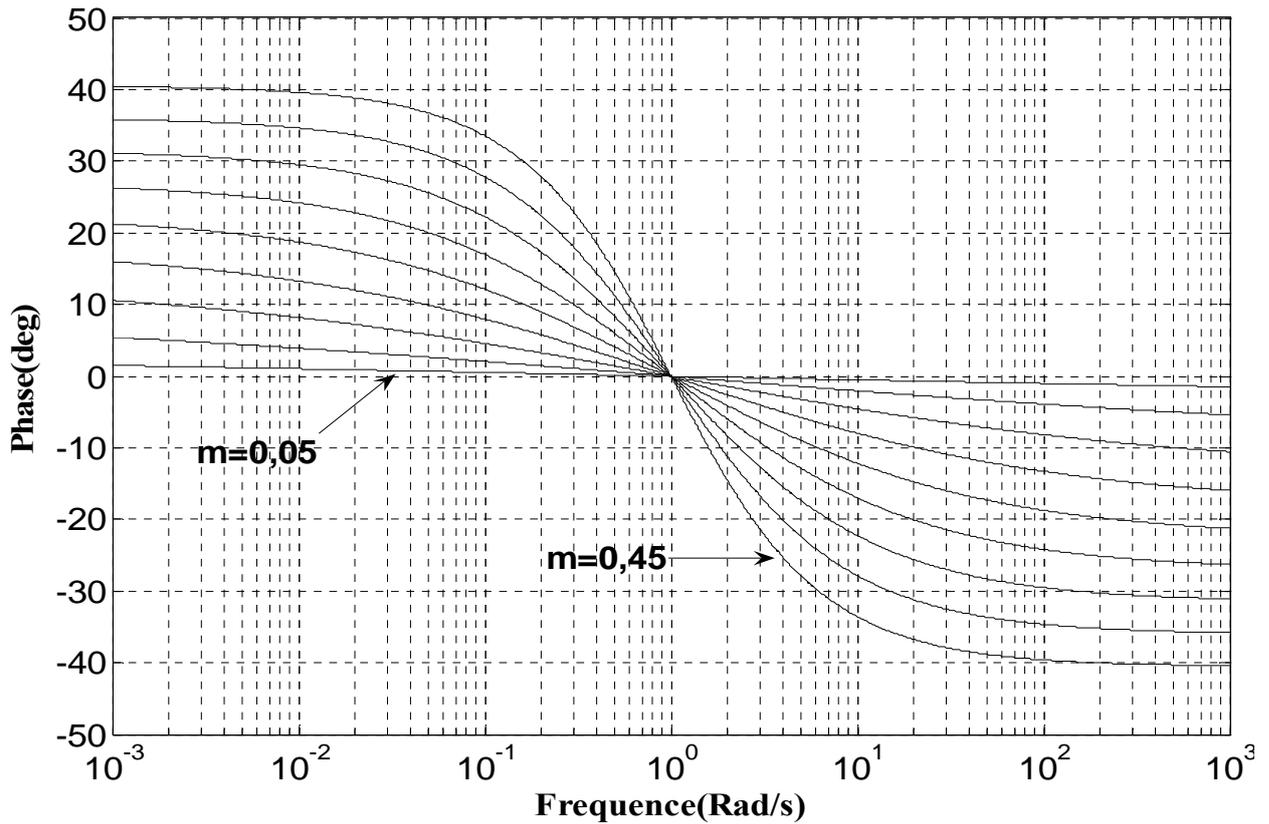


Figure 2.16 : La phase de  $G_2(s)$  pour  $0 < m < 0.5$ , avec un pas de 0.05.

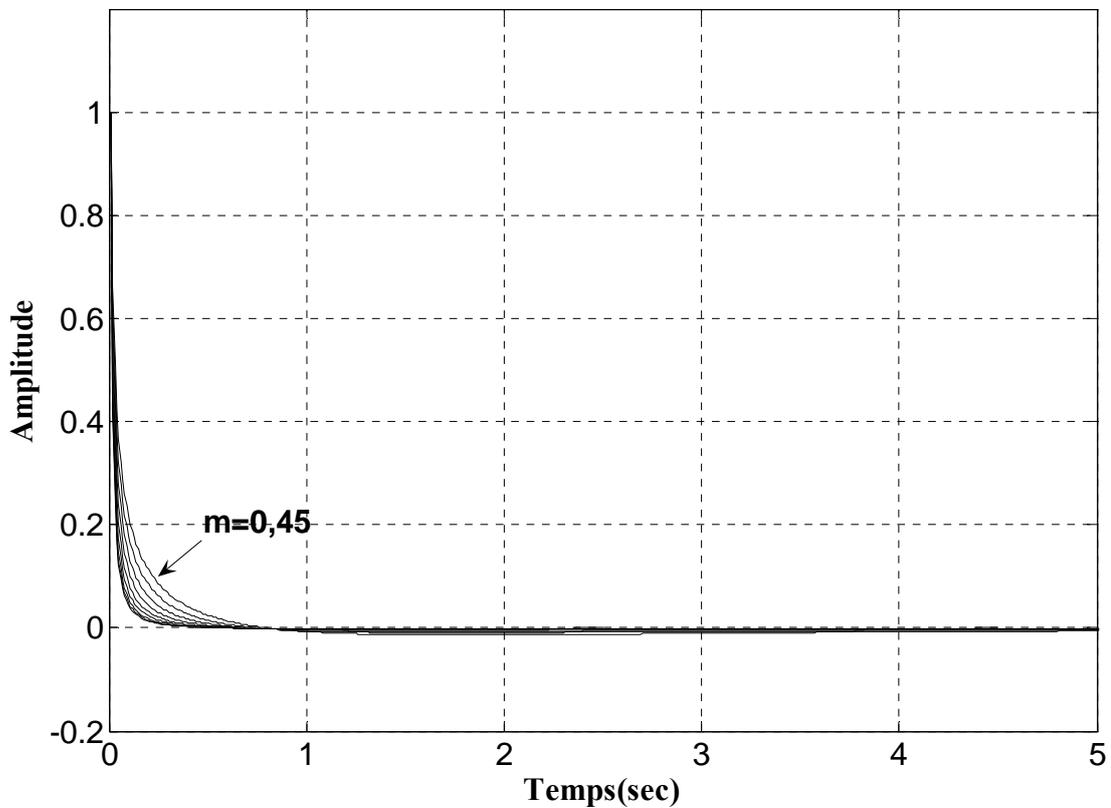
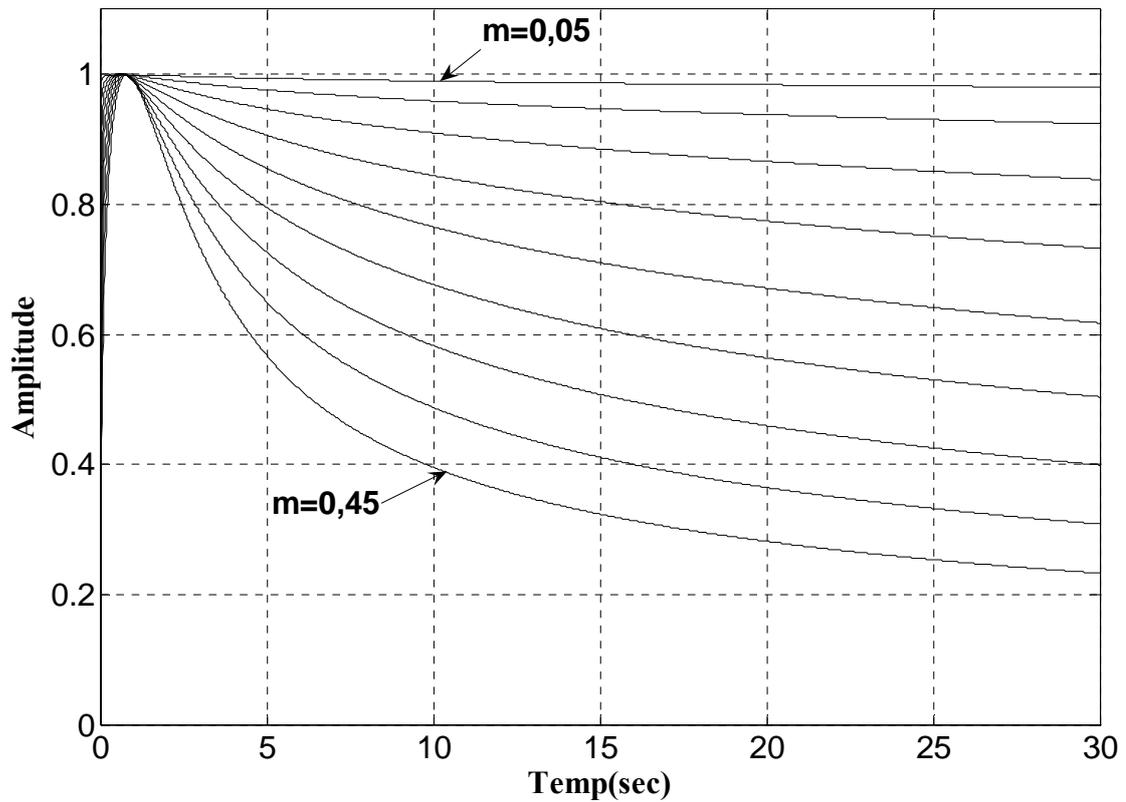


Figure 2.17 : Réponse impulsionnelle du système fractionnaire oscillatoire du deuxième type pour  $0 < m < 0.5$ .



**Figure 2.18 :** Réponse indicielle du système fractionnaire oscillatoire du deuxième type pour  $0 < m < 0.5$ .

#### 2.5.2.2.2 Deuxième cas pour $0.5 < m < 1$

De l'équation (2.91), la fonction de transfert du système oscillatoire du deuxième type est définie par [45]:

$$G_2(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{(\tau_0 s)^m}{[(\tau_0 s)^{2m} + 1]} \quad 0.5 < m < 1 \quad (2.112)$$

Donc, l'équation différentielle qui représente ce système est donnée par :

$$(\tau_0)^{2m} \frac{d^{2m} x(t)}{dt^{2m}} + x(t) = (\tau_0)^m \frac{d^m e(t)}{dt^m} \quad 0.5 < m < 1 \quad (2.113)$$

De l'équation (2.93), en remplaçant  $G(s)$  par son approximation (2.61), on peut écrire la fonction  $G_2(s)$  sous la forme suivante :

$$G_2(s) = \frac{(\tau_0 s)^m}{1 + (\tau_0 s)^{2m}} \approx \frac{(\tau_0 s)^m \left( (1 + (\tau_0 s))^{(2-2m)} \right)}{(\tau_0 s)^2 + 2 \xi (\tau_0 s) + 1}, \quad 0.5 < m < 1 \quad (2.114)$$

Remplaçant le dérivateur d'ordre fractionnaire  $(\tau_0 s)^m$  par le ZPF  $K_D \tau_0^m \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m$  dans (2.114),

où  $\tau_c = \frac{1}{\omega_c}$ ,  $\tau_0 = \frac{1}{\omega_0}$ ,  $\omega_c \ll \omega_0$ , alors, on peut mettre  $G_2(s)$  sous forme d'un système de second ordre avec un zéro entier et deux zéros à puissance fractionnaire (ZPF) :

$$G_2(s) = \tau_0^m K_D \left[ \frac{(1 + (\tau_0 s))}{(\tau_0 s)^2 + 2 \xi (\tau_0 s) + 1} \right] \frac{(1 + (\tau_c s))^m}{(1 + (\tau_0 s))^{(2m-1)}} \quad (2.115)$$

Dans ce qui suit, on va utiliser une technique de normalisation de pôles des deux zéros à puissance fractionnaire, pour normaliser le dénominateur de la fonction  $G_2(s)$ . Donc, pour une erreur  $y_1$  en dB choisie, les pôles de l'approximation pour un certain ordre  $m$  du dérivateur sont donnés par :

$$p_i(m) = (ab)^i p_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N_1 \quad (2.116)$$

les paramètres  $a_1$  et  $b_1$  en fonction de  $y_1$  et  $m$  sont donnés par :

$$a_1 = 10^{\left(\frac{y_1}{10(1-m)}\right)}, \quad b_1 = 10^{\left(\frac{y_1}{10m}\right)}$$

Pour le deuxième ZPF,  $m_2 = 2m - 1$  ( $0 < m_2 < 1$ ) et pour une erreur  $y_2$  en dB choisie, les pôles de l'approximation sont aussi donnés par :

$$p_i(m_2) = (a_2 b_2)^i p_0, \quad i = 0, 1, \dots, N_2 \quad (2.117)$$

où  $a_2$  et  $b_2$  sont données par :

$$a_2 = 10^{\left(\frac{y_2}{10(1-m_2)}\right)}, \quad b_2 = 10^{\left(\frac{y_2}{10m_2}\right)}$$

et  $p_0$  est le premier pôle d'approximation défini comme :  $p_0 = a_1 \omega_c \sqrt{b_1}$ .

Pour garantir l'égalité des pôles des équations (2.116) et (2.117) des deux approximations quelque soit les ordres  $m \neq m_2$  on doit avoir  $p_i(m_2) = p_i(m)$  ( $i=0, 1, 2, \dots, N_1 + N_2 + 1$ ), c'est-à-dire :

$$p_i(m_2) = p_i(m) \Rightarrow (a_1 b_1)^i p_0 = (a_2 b_2)^i p_0 \Rightarrow a_1 b_1 = a_2 b_2 = ab \quad (2.118)$$

cela conduit à :

$$10^{\left[\frac{y_2}{10(1-m_2)}\right]} \times 10^{\left[\frac{y_2}{10m_2}\right]} = 10^{\left[\frac{y_1}{10(1-m)}\right]} \times 10^{\left[\frac{y_1}{10m}\right]}$$

donc les erreurs d'approximation  $y_1$  et  $y_2$  et les ordres  $m$  et  $m_1$  sont liés par la relation suivante :

$$y_2 = y_1 \frac{m_2(1-m_2)}{m(1-m)} \quad (2.119)$$

L'approximation de la fonction  $G_2(s)$  est donnée par :

$$G_2(s) \approx \tau_0^m K_D \left[ \frac{(1+(\tau_0 s))}{(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1} \right] \frac{\prod_{i1=0}^{N_1} \left(1 + \frac{s}{z_{i1}}\right) \prod_{i2=0}^{N_2} \left(1 + \frac{s}{z_{i2+N_1+1}}\right)}{\prod_{i=0}^{N_1+N_2+1} \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.120)$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les progressions géométriques suivantes :

$$\begin{cases} p_i = p_0 (ab)^i, & 0 \leq i \leq N_1 + N_2 + 1 \\ z_{i1} = (ab)^{i1} \frac{p_0}{a_1}, & 0 \leq i1 \leq N_1 \\ z_{i2+N_1+1} = (ab)^{i2+N_1+1} \frac{p_0}{a_2}, & 0 \leq i2 \leq N_2 \end{cases} \quad (2.121)$$

$N_1$  est obtenu en utilisant  $y_1$  et  $\omega_{\max 1} = \omega_0$ ,  $\omega_{\max 2} = 100\omega_H$  pour calculer  $N_2$ .

Par la décomposition en éléments simples de l'équation (2.120), il est possible de représenté la fonction de transfert  $G_2(s)$  par une combinaison des fonctions élémentaires simples, comme suit :

$$G_2(s) = \frac{(\tau_0 s)^m}{1+(\tau_0 s)^{2m}} = \frac{(As+B)}{(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1} + \sum_{i=0}^{N_1+N_2+1} \frac{k_i}{1 + \frac{s}{p_i}} \quad (2.122)$$

Où, les  $k_i$  ( $i=0, 1, \dots, N_1+N_2+1$ ) sont les résidus des pôles qui sont calculés par :

$$k_i = \tau_0^m K_D \left[ \frac{(1 - (\tau_0 p_0 (ab)^i))}{(\tau_0 p_0 (ab)^i)^2 - 2\xi(\tau_0 p_0 (ab)^i) + 1} \right] \frac{\prod_{i1=0}^{N_1} (1 - a_1 (ab)^{(i-i1)}) \prod_{i2=0}^{N_2} (1 - a_2 (ab)^{(i-i2+N_1+1)})}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{N_1+N_2+1} (1 - (ab)^{(i-j)})} \quad (2.123)$$

Les constants A et B sont données par:

$$\begin{aligned} s=0 \Rightarrow G_2(0) &= \tau_0^m K_D = B + \sum_{i=0}^{N_1+N_2+1} K_i \Rightarrow B = \tau_0^m K_D - \sum_{i=0}^{N_1+N_2+1} K_i \\ \lim_{s \rightarrow \infty} s G_2(s) &= \tau_0^m K_D \frac{1}{(\tau_0)} \frac{\prod_{i1=0}^{N_1} \left(\frac{1}{z_{i1}}\right) \prod_{i2=0}^{N_2} \left(\frac{1}{z_{i2+N_1+1}}\right)}{\prod_{i=0}^{N_1+N_2+1} \left(\frac{1}{p_i}\right)} = \frac{A}{\tau_0^2} + \sum_{i=0}^{N_1+N_2+1} K_i p_i \Rightarrow \end{aligned} \quad (2.124)$$

$$A = \tau_0^{m+1} K_D \left[ \frac{\prod_{i=0}^{N_1+N_2+1} p_i}{\prod_{i1=0}^{N_1} z_{i1} \prod_{i2=0}^{N_2} z_{i2+N_1+1}} \right] - \tau_0^2 \sum_{i=0}^{N_1+N_2+1} K_i p_i$$

De l'équation (2.122), la réponse impulsionnelle est donnée par:

$$x(t) = C \exp\left(-\frac{\xi}{\tau_0} t\right) \sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau_0} t + \phi\right) + \sum_{i=0}^{N_1+N_2+1} k_i p_0(ab)^i \exp(-p_0(ab)^i t) \quad (2.125)$$

où les constants C et  $\phi$ , sont donnés par :

$$C = \frac{B}{\tau_0} \sqrt{\frac{A^2 - 2AB\xi\tau_0 + (B\tau_0)^2}{(B\tau_0)^2(1-\xi^2)}} \quad \text{et} \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{A\sqrt{1-\xi^2}}{B\tau_0 - A\xi}\right) \quad (2.126)$$

La réponse indicielle est donnée par:

$$x(t) = \tau_0^m K_D + \tau_0 C \exp\left(-\frac{\xi}{\tau_0} t\right) \sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau_0} t + \phi_1\right) - \sum_{i=0}^{N_1+N_2+1} k_i \exp(-p_0(ab)^i t) \quad (2.127)$$

où  $\phi_1$  est donnée par :

$$\phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{A\sqrt{1-\xi^2}}{B\tau_0 - A\xi}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi}\right) \quad (2.128)$$

Les figures 2.19 et 2.20 représentent le diagramme de Bode (Module et Phase) de la fonction  $G_2(s)$ , pour  $0.5 < m < 1$ .

Les figures 2.21 et 2.22 représentent les réponses impulsionnelle et indicielle du système pour  $0.5 < m < 1$ .

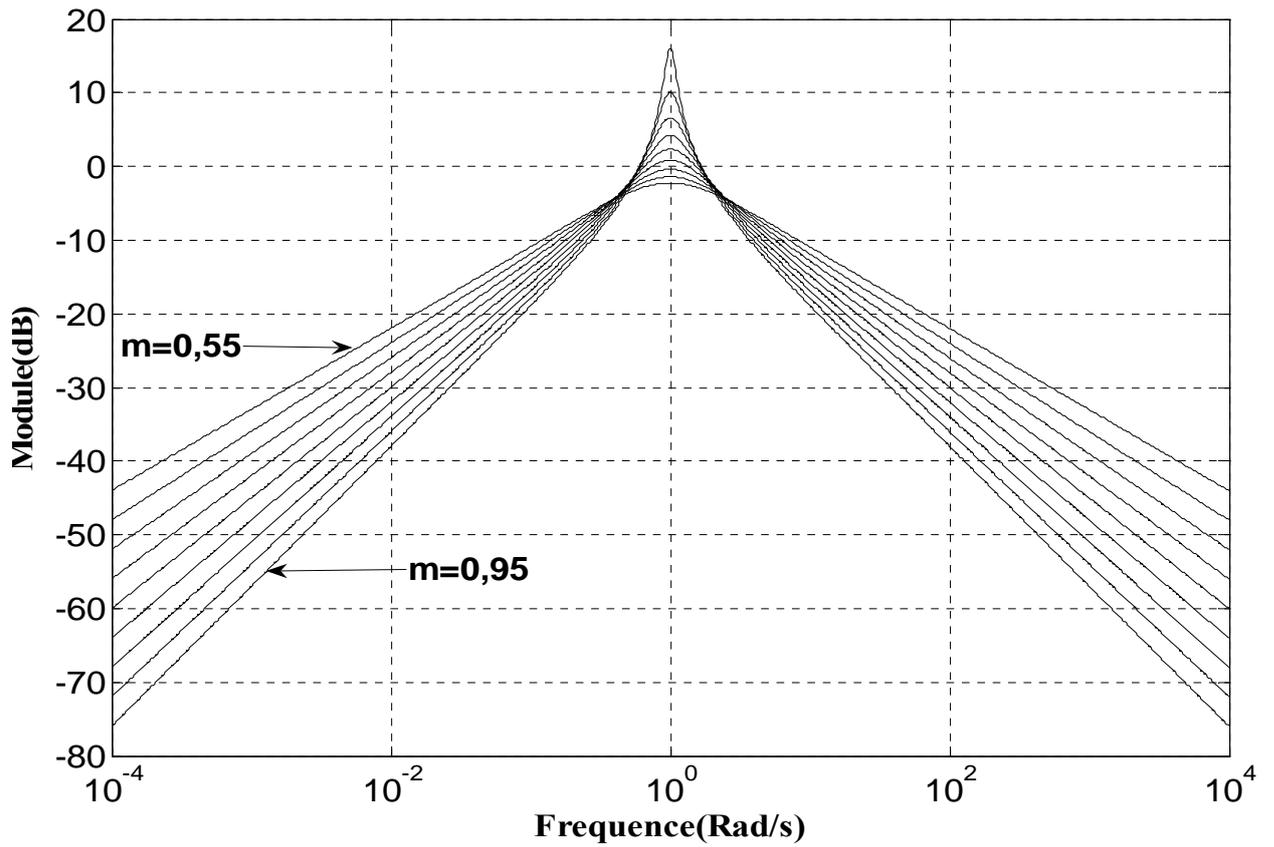


Figure 2.19 : Module de  $G_2(s)$  pour  $0.5 < m < 1$ , avec un pas de 0.05.

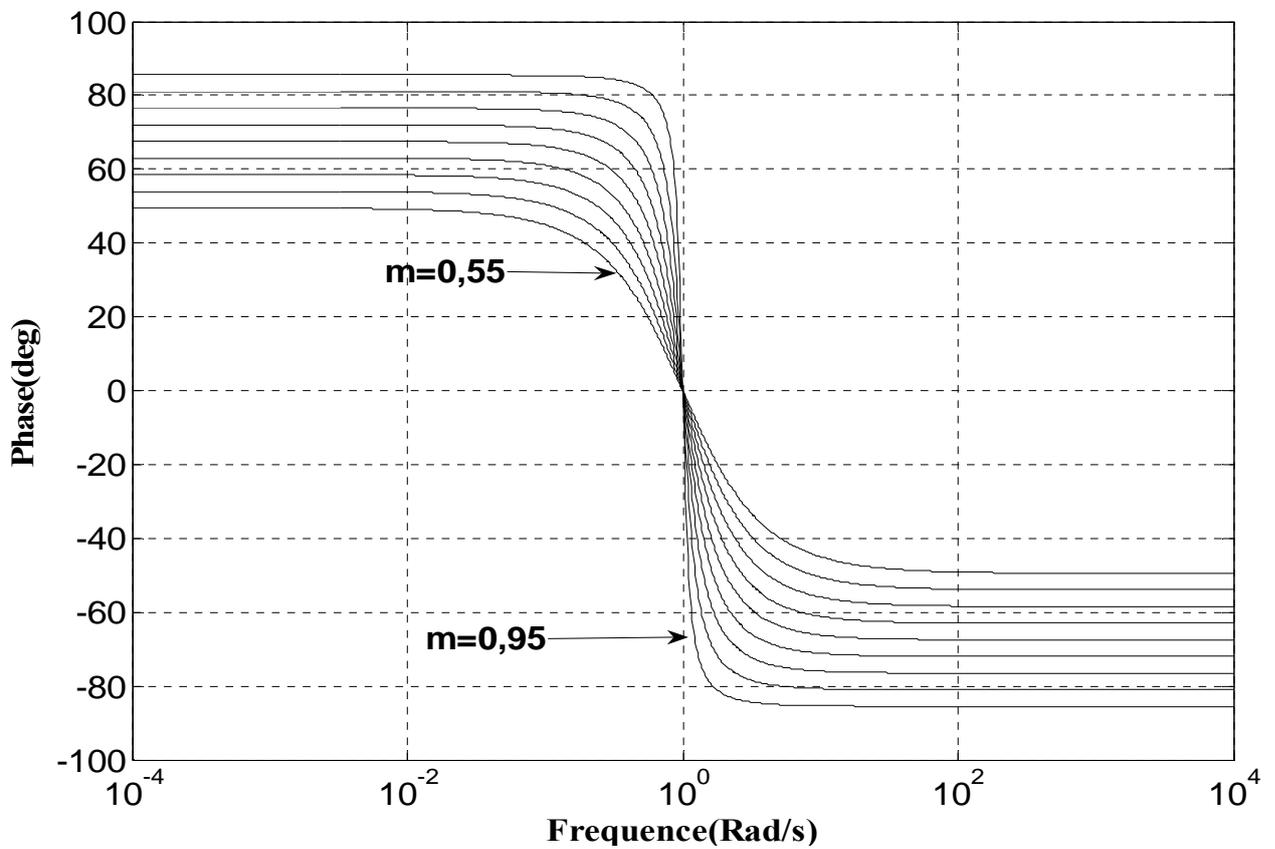


Figure 2.20 : La phase de  $G_2(s)$  pour  $0.5 < m < 1$ , avec un pas de 0.05.

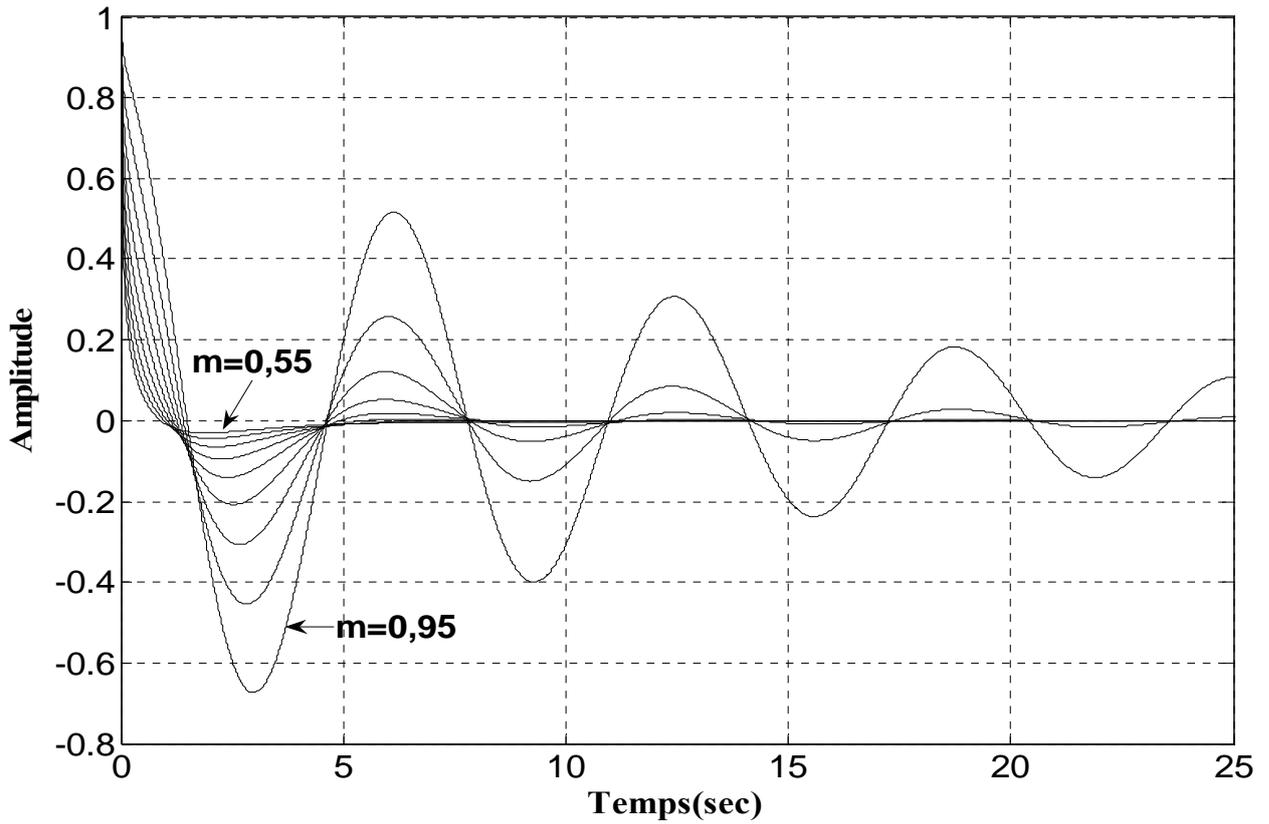


Figure 2.21 : Réponse impulsionnelle du système fractionnaire oscillatoire du deuxième type pour  $0.5 < m < 1$ .

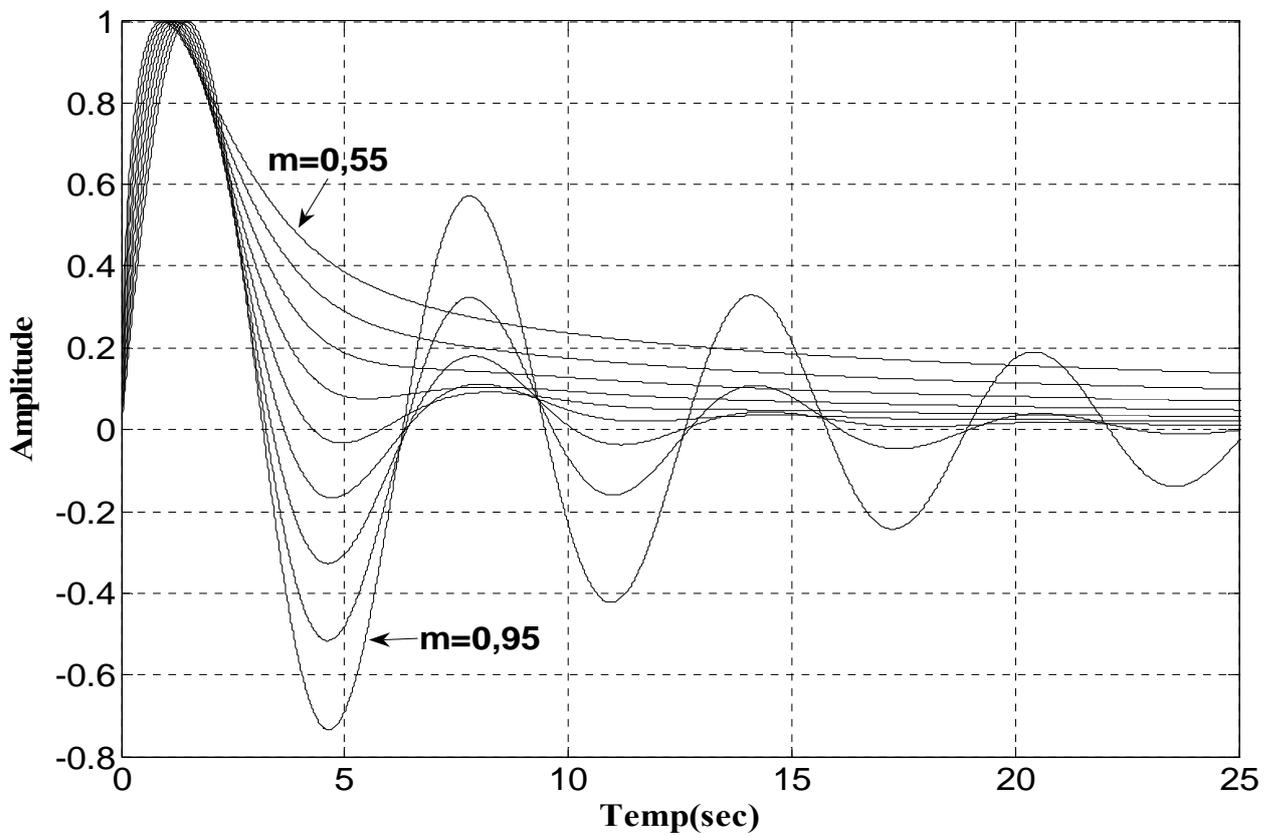


Figure 2.22 : Réponse indicielle du système fractionnaire oscillatoire du deuxième type pour  $0.5 < m < 1$ .

### 2.5.3 Stabilité des systèmes de relaxation et oscillatoire d'ordre fractionnaire

Les fonctions de transfert des systèmes de relaxation et oscillatoire d'ordre fractionnaire ont le même dénominateur  $D(s)$ , avec un ordre  $0 < m < 1$  qui est donné par :

$$D(s) = [(\tau_0 s)^{2m} + 1] = [((\tau_0 s)^m + j)((\tau_0 s)^m - j)] \quad (2.129)$$

L'analyse de la stabilité de ces systèmes est examinée par le critère de la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire de la section (§.2.3.2), qui doit satisfaire la condition suivante [43] :

$$\lambda = \frac{-1}{\tau_0^{2m}} = \frac{1}{|\tau_0^{2m}|} e^{j(\pi - 2m\varphi)} \quad (2.130)$$

$$|\arg(\lambda_i)| > m \frac{\pi}{2} \quad (2.131)$$

$$\lambda = \frac{-1}{\tau_0^{2m}} = \frac{1}{|\tau_0^{2m}|} e^{j(\pi - 2m\varphi)} \quad (2.132)$$

où,  $\varphi$  est l'argument de  $\tau_0$ .

Donc, si  $\tau_0$  est un réel positif, le système est stable quelque soit :  $m \in ]0, 1[$ .

$$|\arg(\lambda_i)| = \pi > m\pi \quad (2.133)$$

Si non, la condition de la stabilité est donnée par :

$$|\varphi| < \frac{\pi}{2} \left( \frac{1-m}{m} \right) \quad (2.134)$$

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les définitions de base des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire, ainsi que leurs représentations et propriétés. La stabilité de ces systèmes, est aussi discutée, montrant la différence de cette notion par rapport au système d'ordre entier. La résolution des systèmes d'ordre fractionnaire, décrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaire de un à N termes, est présentée en utilisant les fonctions de type Mittag-Leffler.

Nous avons aussi, présenté deux types de système d'ordre fractionnaire fondamental et leur approximation par des fonctions rationnelles, les réponses temporelles de ces deux types de systèmes sont dérivés à partir de ces approximations, ainsi que leur implémentation par des circuits analogiques, ainsi que les deux cas d'un système oscillatoire d'ordre fractionnaire du type 2, selon l'ordre  $m$ . Ces approximations seront développées par la suite pour un système d'ordre fractionnaire généralisé.

---

Chapitre **3**

---

*Approximation et Réalisation  
Analogique des Fonctions  
Sinus et Cosinus Amorties  
d'Ordre Fractionnaire*

---

### 3.1 Introduction

A cause de leur représentation par des fonctions de transfert irrationnelles, les systèmes linéaires d'ordre fractionnaire ont été étudiés marginalement dans la théorie et même dans la pratique. Seulement dans les dernières années on a pu remarquer un progrès significatif dans des travaux théoriques qui peuvent servir comme une fondation à la théorie des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire. Avec le nombre de plus en plus important de leurs applications, il est donc important d'établir une théorie claire pour les systèmes linéaires d'ordre fractionnaire pour qu'elle puisse être accessible à la communauté de l'ingénierie.

Les systèmes linéaires d'ordre fractionnaire peuvent être décrits par des équations linéaires d'ordre fractionnaire qui sont des généralisations des équations linéaires classiques avec des dérivés d'ordre entier. Ces types d'équations ont été le sujet de plusieurs études, à cause de leur aspect fréquent dans de divers domaines de la technologie [1,7,14-15].

En plus de quelques fonctions fondamentales des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire existantes dans la littérature ; le but de ce chapitre est l'introduction d'autres fonctions fondamentales qui jouent un rôle similaire à celles des fonctions utilisées dans la résolution des systèmes linéaires classiques. Donc, ce chapitre est organisé en deux parties, la première partie est consacrée à la présentation des fonctions sinus et cosinus d'ordre fractionnaire déjà existantes dans la littérature. La deuxième partie est dédiée à l'introduction des fonctions sinus et cosinus amorties d'ordre fractionnaire, à leur approximation, à l'analyse de leur stabilité, à leurs réponses temporelles et fréquentielles et finalement à leur réalisation par des circuits analogiques.

### 3.2 Préliminaire

Il existe plusieurs équations différentielles fondamentales décrivant les systèmes linéaires invariants dans le temps, parmi celles-ci on peut citer les équations suivantes :

$$(\tau_0)^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + x(t) = \tau_0 e(t) \quad (3.1)$$

$$(\tau_0)^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + x(t) = (\tau_0)^2 \frac{de(t)}{dt} \quad (3.2)$$

$$(\tau_0)^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\xi\tau_0 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \left(\sqrt{1-\xi^2}\right)e(t) \quad (3.3)$$

$$(\tau_0)^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\xi\tau_0 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \tau_0 \frac{de(t)}{dt} + \xi e(t) \quad (3.4)$$

où  $\xi$  est un nombre réel tel que  $0 < \xi < 1$  et  $\tau_0$  est un nombre réel positif.

Les fonctions de transfert des systèmes précédents sont données, respectivement, par les fonctions suivantes :

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{\tau_0}{[(\tau_0 s)^2 + 1]} \quad (3.5)$$

$$G_2(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{(\tau_0^2 s)}{[(\tau_0 s)^2 + 1]} \quad (3.6)$$

$$G_3(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{[(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1]} \quad (3.7)$$

$$G_4(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{[(\tau_0 s) + \xi]}{[(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1]} \quad (3.8)$$

Les réponses impulsionnelles des systèmes (3.1-3.4) sont données respectivement par :

$$x_1(t) = \sin(\omega_0 t) \quad (3.9)$$

$$x_2(t) = \cos(\omega_0 t) \quad (3.10)$$

$$x_3(t) = \omega_0 \exp(-\xi\omega_0 t) \sin\left(\omega_0 \left(\sqrt{1-\xi^2}\right)t\right) \quad (3.11)$$

$$x_4(t) = \omega_0 \exp(-\xi\omega_0 t) \cos\left(\omega_0 \left(\sqrt{1-\xi^2}\right)t\right) \quad (3.12)$$

avec  $\omega_0 = (1/\tau_0)$ . Donc, les réponses impulsionnelles  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  et  $x_4(t)$ , des systèmes des équations (3.1-3.4) sont, respectivement, le sinus, le cosinus, le sinus amorti et le cosinus amorti. Ces fonctions sont utilisées dans l'analyse et la commande des systèmes.

De la même façon que les systèmes d'ordre entier, on définit les équations différentielles fondamentales d'ordre fractionnaire décrivant des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire comme suit :

$$(\tau_0)^{2m} \frac{d^{2m} x(t)}{dt^{2m}} + x(t) = \tau_0^m e(t) \quad (3.13)$$

$$(\tau_0)^{2m} \frac{d^{2m} x(t)}{dt^{2m}} + x(t) = (\tau_0)^{2m} \frac{d^m e(t)}{dt^m} \quad (3.14)$$

$$(\tau_0)^{2m} \frac{d^{2m}x(t)}{dt^{2m}} + 2\xi\tau_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + x(t) = \left(\sqrt{1-\xi^2}\right)e(t) \quad (3.15)$$

$$(\tau_0)^{2m} \frac{d^{2m}x(t)}{dt^{2m}} + 2\xi\tau_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + x(t) = \tau_0 \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \xi e(t) \quad (3.16)$$

où  $0 < m < 1$ ,  $0 < \xi < 1$  et  $\tau_0$  est un nombre réel positif. Les fonctions de transfert des systèmes précédents sont données, respectivement, par les fonctions suivantes :

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{\tau_0}{[(\tau_0 s)^{2m} + 1]} \quad (3.17)$$

$$G_2(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{(\tau_0^2 s)^m}{[(\tau_0 s)^{2m} + 1]} \quad (3.18)$$

$$G_3(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{[(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1]} \quad (3.19)$$

$$G_4(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{[(\tau_0 s)^m + \xi]}{[(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1]} \quad (3.20)$$

On note que pour  $m=1$  les équations différentielles fondamentales d'ordre fractionnaire des équations (3.13-3.16) ainsi que leurs fonctions de transfert correspondantes des équations (3.17-3.20) deviennent les équations différentielles linéaires fondamentales des équations (3.1-3.4) ainsi que leurs fonctions de transfert correspondantes des équations (3.5-3.8). Alors, les réponses impulsionnelles des systèmes (3.13-3.16) obtenues par les transformées de Laplace inverse des fonctions des équations (3.17-3.20) sont définies, respectivement, comme le sinus d'ordre fractionnaire [52], le cosinus d'ordre fractionnaire [55], le sinus amorti d'ordre fractionnaire et le cosinus amorti d'ordre fractionnaire [56]. Les fonctions de transfert des équations (3.17-3.20) sont des fonctions irrationnelles, donc très difficile à manipuler. Alors, pour qu'on puisse les utiliser dans la solution et l'analyse des systèmes d'ordre fractionnaire on doit les approximer par des fonctions rationnelles pour que toute la théorie des systèmes linéaires peut être appliquée.

### 3.3 Les fonctions sinus et cosinus d'ordre fractionnaire

#### 3.3.1 Définition de la fonction sinus d'ordre fractionnaire

La fonction sinus d'ordre fractionnaire est définie comme la réponse impulsionnelle du système d'ordre fractionnaire de l'équation (3.13):

$$(\tau_0)^{2m} \frac{d^{2m}x(t)}{dt^{2m}} + x(t) = \tau_0^m e(t) \quad , \quad \text{pour } 0.5 < m < 1 \quad (3.21)$$

ou la transformée de Laplace inverse de sa fonction de transfert de l'équation (3.17) :

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{\tau_0^m}{[(\tau_0 s)^{2m} + 1]} \quad , \quad \text{pour } 0.5 < m < 1 \quad (3.22)$$

### 3.3.2 Approximation de la fonction sinus d'ordre fractionnaire

De la section (§.2.5), l'approximation de la fonction  $G_1(s)$ , pour  $0.5 < m < 1$ , par une fonction rationnelle est donnée par [52] :

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{\tau_0^m}{1 + (s\tau_0)^{2m}} \approx \frac{(1 + s\tau_0)^{2-m}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} \\ &\approx \frac{\prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \frac{\tau_0^m}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} \end{aligned} \quad (3.23)$$

La transformée de Laplace inverse de cette fonction est donnée par [52]:

$$x(t) = \tau_0^m C \exp\left(-\frac{\xi}{\tau_0} t\right) \sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau_0} t + \Phi\right) + \sum_{i=0}^N \tau_0^m k_i p_0 (ab)^i \exp(-p_0 (ab)^i t) \quad (3.24)$$

Alors,  $x(t)$  est l'approximation de la fonction sinus d'ordre fractionnaire.

### 3.3.3 Définition de la fonction cosinus d'ordre fractionnaire

La fonction cosinus d'ordre fractionnaire est définie comme la réponse impulsionnelle du système d'ordre fractionnaire de l'équation (3.14):

$$(\tau_0)^{2m} \frac{d^{2m}x(t)}{dt^{2m}} + x(t) = (\tau_0)^{2m} \frac{d^m e(t)}{dt^m} \quad , \quad \text{pour } 0.5 < m < 1 \quad (3.25)$$

ou la transformée de Laplace inverse de sa fonction de transfert de l'équation (3.18) :

$$G_2(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{\tau_0^m (\tau_0 s)^m}{[(\tau_0 s)^{2m} + 1]} \quad , \quad \text{pour } 0.5 < m < 1 \quad (3.26)$$

### 3.3.4 Approximation de la fonction cosinus d'ordre fractionnaire

La fonction de transfert  $G_2(s)$  de l'équation (3.26) peut être réécrite sous forme de produit de deux fonctions irrationnelles comme suit [55] :

$$G_2(s) = G_D(s) \times G_1(s) = [(\tau_0 s)^m] \times \frac{\tau_0^m}{[(\tau_0 s)^{2m} + 1]} \quad (3.27)$$

où  $G_D(s)$  est un dérivateur d'ordre fractionnaire et  $G_1(s)$  est la fonction de transfert du système fractionnaire de l'équation (3.21) dont la réponse impulsionnelle est la fonction sinus d'ordre fractionnaire. Utilisant l'approximation de  $G_1(s)$  de l'équation (3.23), pour  $0.5 < m < 1$ , la fonction  $G_2(s)$  peut être approximée comme suit :

$$G_2(s) = \frac{\tau_0^m (\tau_0 s)^m}{1 + (\tau_0 s)^{2m}} \approx \frac{\tau_0^m (\tau_0 s)^m (1 + s\tau_0)^{2-m}}{(s\tau_0)^2 + 2\xi(s\tau_0) + 1} \quad (3.28)$$

Donc, l'approximation de la fonction  $G_2(s)$ , pour  $0.5 < m < 1$ , par une fonction rationnelle est donnée par [55] :

$$G_2(s) \approx \tau_0^{2m} K_D \left[ \frac{(1 + (\tau_0 s))}{(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1} \right] \frac{\prod_{i=1}^{N_1} \left(1 + \frac{s}{z_{i1}}\right) \prod_{i=2}^{N_2} \left(1 + \frac{s}{z_{i2+N_1+1}}\right)}{\prod_{i=0}^{N_1+N_2+1} \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (3.29)$$

La transformée de Laplace inverse de cette fonction est donnée par [55]:

$$x(t) = \tau_0^m \bar{C} \exp\left(-\frac{\xi}{\tau_0} t\right) \cos\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau_0} t + \bar{\Phi}\right) + \tau_0^m \sum_{i=0}^{N_1+N_2+1} \bar{k}_i p_0 (ab)^i \exp(-p_0 (ab)^i t) \quad (3.30)$$

Alors,  $x(t)$  est l'approximation de la fonction cosinus d'ordre fractionnaire.

### 3.4 Définition des fonctions sinus et cosinus amorties d'ordre fractionnaire

Les systèmes d'ordre fractionnaire oscillatoires généralisés sont définis dans ce contexte par les deux équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire fondamentales suivantes [56]:

$$(\tau_0)^{2m} \frac{d^{2m} x(t)}{dt^{2m}} + 2\xi(\tau_0)^m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + x(t) = \left(\sqrt{1-\xi^2}\right) e(t) \quad (3.31)$$

$$(\tau_0)^{2m} \frac{d^{2m} x(t)}{dt^{2m}} + 2\xi(\tau_0)^m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + x(t) = (\tau_0)^m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \xi e(t) \quad (3.32)$$

Les fonctions de transfert notées  $G_{SA}(s)$  et  $G_{CA}(s)$  de ces deux systèmes sont définies respectivement, comme le sinus amorti d'ordre fractionnaire et le cosinus amorti d'ordre fractionnaire [56] et ils sont données par les deux fonctions irrationnelles suivantes :

$$G_{SA}(s) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{[(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1]} \quad (3.33)$$

$$G_{CA}(s) = \frac{(\tau_0 s)^m + \xi}{[(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1]} \quad (3.34)$$

où  $0 < m < 1$ ,  $0 < \xi < 1$  et  $\tau_0$  est un nombre réel positif. Les deux paramètres  $\xi$  et  $\tau_0$  sont reliés à la paire de racines complexes conjuguées en  $s^m$  du dénominateur des fonctions de transfert des équations (3.33) et (3.34). Pour avoir les réponses des deux systèmes linéaires fondamentaux d'ordre fractionnaire des équations (3.31) et (3.32) aux différentes entrées typiques ainsi que leurs réalisations par des circuits analogiques, une approximation de leurs fonctions de transferts par des fonctions rationnelles est obligatoire. Alors, le reste du chapitre sera consacré à l'approximation, l'analyse et la réalisation de ce type de systèmes.

### 3.5 Approximation des fonctions sinus et cosinus amorties d'ordre fractionnaire

#### 3.5.1 Approximation par une fonction rationnelle

Soit la fonction  $F(s)$  donnée par :

$$F(s) = \frac{1}{[1 + (\tau s)^m]} \quad (3.35)$$

où  $0 < m < 1$  et  $\tau$  un nombre réel ou complexe. Dans une bande de fréquence donnée  $[0, \omega_H]$ , la fonction irrationnelle  $F(s)$  peut être approximée par une fonction rationnelle comme suit [52]:

$$F(s) = \frac{1}{[1 + (\tau s)^m]} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (3.36)$$

où les pôles  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2N-1$ ) de l'approximation sont donnés par:

$$p_i = \frac{(\lambda)^{(i-N)}}{\tau} \quad (3.37)$$

les résidus  $k_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2N-1$ ) de l'approximation, tel que  $\left[ \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \right] = 1$ , sont donnés par:

$$k_i = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin[(1-m)\pi]}{\cosh[m \log(\lambda^{(N-i)})] - \cos[(1-m)\pi]} \right] \quad (3.38)$$

avec  $\lambda = \frac{p_{i+1}}{p_i}$ , le rapport d'un pôle au pôle précédent, un nombre réel positif, tel que  $\lambda > 1$

et  $N = \text{partie entière} \left[ \frac{\log[\tau\omega_{\max}]}{\log(\lambda)} \right] + 1$  est le nombre de pôles de l'approximation, avec la fréquence  $\omega_{\max}$  est choisie comme un grand multiple de  $\omega_H$  afin d'avoir une bonne approximation dans la bande de fréquence d'intérêt  $[0, \omega_H]$ . On note que quand le paramètre  $\lambda$  tend vers 1, le nombre de pôles  $N$  tend vers l'infini, alors l'approximation de l'équation (3.36) devienne parfaite; donc on peut écrire:

$$F(s) = \frac{1}{[1 + (\tau s)^m]} = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \left\{ \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{\left(1 + \frac{\tau s}{(\lambda)^{(i-N)}}\right)} \right\} \quad (3.39)$$

### 3.5.2 Approximation de la fonction sinus amortie d'ordre fractionnaire

L'équation (3.38) peut être réécrite sous la forme suivante:

$$G_{SA}(s) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{[1 + (\tau_1 s)^m][1 + (\tau_2 s)^m]} \quad (3.40)$$

où,  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont tels que :

$$\tau_1^m = \tau_0^m (\xi + j\sqrt{1-\xi^2}) \quad \text{et} \quad \tau_2^m = \tau_0^m (\xi - j\sqrt{1-\xi^2}) \quad (3.41)$$

Le nombre complexe  $(\xi + j\sqrt{1-\xi^2})$  est écrit comme :

$$(\xi + j\sqrt{1-\xi^2}) = \exp(j\varphi) \quad (3.42)$$

avec,

$$\varphi = \arctg\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \quad (3.43)$$

donc,  $\tau_1$  et  $\tau_2$  deviennent:

$$\tau_1 = \tau_0 \exp\left(j\frac{\varphi}{m}\right) \quad \text{et} \quad \tau_2 = \tau_0 \exp\left(-j\frac{\varphi}{m}\right) \quad (3.44)$$

Par décomposition de l'équation (3.40), on obtient :

$$G_{SA}(s) = \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-\xi^2} - j\frac{1}{2}\xi\right)}{[1 + (\tau_1 s)^m]} + \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-\xi^2} + j\frac{1}{2}\xi\right)}{[1 + (\tau_2 s)^m]} \quad (3.45)$$

Maintenant, on peut utiliser la méthode d'approximation par une fonction rationnelle décrite précédemment pour l'approximation de chacune des deux sous fonctions irrationnelles qui constituent la fonction  $G_{SA}(s)$  de l'équation (3.45). Donc, l'approximation des deux fonctions irrationnelles est donnée par [57]:

$$\frac{1}{[1 + (\tau_1 s)^m]} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{1 + s\tau_{1i}} \quad (3.46)$$

$$\frac{1}{[1 + (\tau_2 s)^m]} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{1 + s\tau_{2i}} \quad (3.47)$$

où, les  $\tau_{1i}$  and  $\tau_{2i}$ , pour  $i = 1, 2, \dots, 2N-1$ , sont donnés respectivement par:

$$\tau_{1i} = \tau_1 (\lambda)^{N-i} \quad \text{and} \quad \tau_{2i} = \tau_2 (\lambda)^{N-i} \quad (3.48)$$

pour  $\lambda > 1$  et  $N$  est donné comme dans l'équation (3.39). On a aussi, pour  $i = 1, 2, \dots, 2N-1$ :

$$\frac{\tau_{1i}}{\tau_1} = \frac{\tau_{2i}}{\tau_2} = (\lambda)^{N-i} \quad (3.49)$$

Par conséquent, de l'équation (3.38) les résidus  $k_i$ , pour  $i = 1, 2, \dots, 2N-1$ , sont tels que :

$$k_i = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin[(1-m)\pi]}{\cosh[m \log((\lambda)^{N-i})] - \cos[(1-m)\pi]} \right] \quad (3.50)$$

Soient  $p_{1i}$  et  $p_{2i}$ , pour  $i = 1, 2, \dots, 2N-1$ , les pôles des deux approximations donnés par:

$$p_{1i} = \frac{1}{\tau_{1i}} = \frac{1}{\tau_1 (\lambda)^{N-i}} = p_1 (\lambda^{i-N}) \quad (3.51)$$

$$p_{2i} = \frac{1}{\tau_{2i}} = \frac{1}{\tau_2 (\lambda)^{N-i}} = p_2 (\lambda^{i-N}) \quad (3.52)$$

avec

$$p_1 = \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_0} \exp\left(-j \frac{\varphi}{m}\right) \quad (3.53)$$

$$p_2 = \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{\tau_0} \exp\left(j \frac{\varphi}{m}\right) \quad (3.54)$$

On remarque que, pour  $i = 1, 2, \dots, 2N-1$ , les  $p_{2i}$  sont les complexes conjugués des  $p_{1i}$ . Donc, les équations (3.46) et (3.47) seront:

$$\frac{1}{[1 + (\tau_1 s)^m]} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{1 + \frac{s}{p_{1i}}} \quad (3.55)$$

$$\frac{1}{[1 + (\tau_2 s)^m]} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{1 + \frac{s}{p_{2i}}} \quad (3.56)$$

Alors, l'approximation de  $G_{SA}(s)$  par une fonction rationnelle est donnée par:

$$G_{SA}(s) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{[(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1]} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \left[ \frac{\left( \frac{1}{2} \sqrt{1-\xi^2} - j \frac{1}{2} \xi \right)}{1 + \frac{s}{p_{1i}}} + \frac{\left( \frac{1}{2} \sqrt{1-\xi^2} + j \frac{1}{2} \xi \right)}{1 + \frac{s}{p_{2i}}} \right] \quad (3.57)$$

$$G_{SA}(s) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{[(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1]} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \frac{\sqrt{1-\xi^2} + a_i s}{1 + 2\alpha \frac{s}{\omega_i} + \frac{s^2}{\omega_i^2}} \quad (3.58)$$

où les coefficients  $\alpha$ ,  $a_i$ , et  $\omega_i$ , pour  $i = 1, 2, \dots, 2N-1$ , sont donnés par:

$$\alpha = \cos\left(\frac{\varphi}{m}\right) \quad (3.59)$$

$$a_i = \tau_0 \lambda^{(N-i)} \left( \alpha \sqrt{1-\xi^2} - \xi \sqrt{1-\alpha^2} \right) \quad (3.60)$$

$$\omega_i = \frac{1}{\tau_0 \lambda^{(N-i)}} \quad (3.61)$$

### 3.5.2.1 Réponses temporelles de la fonction sinus amortie d'ordre fractionnaire

De l'équation (3.58), on a :

$$G_{SA}(s) = \frac{X_{SA}(s)}{E(s)} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{[(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1]} = \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \frac{\sqrt{1-\xi^2} + a_i s}{1 + 2\alpha \frac{s}{\omega_i} + \frac{s^2}{\omega_i^2}} \quad (3.62)$$

donc,

$$X_{SA}(s) = \frac{\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)E(s)}{[(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1]} = \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \frac{\sqrt{1-\xi^2} + a_i s}{1 + 2\alpha \frac{s}{\omega_i} + \frac{s^2}{\omega_i^2}} E(s) \quad (3.63)$$

pour  $e(t) = \delta(t)$  l'impulsion unité,  $E(s) = 1$ , on obtient :

$$X_{SA}(s) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{[(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1]} = \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \frac{\sqrt{1-\xi^2} + a_i s}{1 + 2\alpha \frac{s}{\omega_i} + \frac{s^2}{\omega_i^2}} \quad (3.64)$$

Alors, la réponse impulsionnelle de ce système est donnée par [58]:

$$x_{SA}(t) = \sum_{i=1}^{2N-1} \omega_i k_i \exp(-\alpha \omega_i t) \sin\left(\omega_i \left(\sqrt{1-\alpha^2}\right)t + \left(\frac{m-1}{m}\right)\varphi\right) \quad (3.65)$$

Maintenant, pour  $e(t) = u(t)$  l'échelon unité,  $E(s) = 1/s$ , l'équation (3.63) devient :

$$X_{SA}(s) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{[(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1]} \frac{1}{s} = \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \frac{\sqrt{1-\xi^2} + a_i s}{1 + 2\alpha \frac{s}{\omega_i} + \frac{s^2}{\omega_i^2}} \frac{1}{s} \quad (3.66)$$

La réponse indicielle de ce système est alors donnée par [58]:

$$x_{SA}(t) = \sqrt{1-\xi^2} - \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \exp(-\alpha \omega_i t) \sin\left(\omega_i \left(\sqrt{1-\alpha^2}\right)t + \varphi\right) \quad (3.67)$$

### 3.5.2.2 Exemples illustratifs

Dans cette section, on va appliquer la méthode d'approximation proposée, pour dériver la fonction de transfert rationnelle et les réponses impulsionnelle et indicielle du système linéaire d'ordre fractionnaire décrit par l'équation différentielle d'ordre fractionnaire donné par l'équation (3.31). Donc, on va présenter deux exemples numériques pour montrer l'utilité et l'exactitude de la méthode d'approximation proposée. Les deux exemples sont choisis pour présenter le comportement fréquentielle et temporelle du système lié aux paramètres  $\xi$  et  $m$ .

Alors, pour le premier exemple les paramètres  $\xi$  et  $m$  sont choisis tels que :  $\frac{\sqrt{2}}{2} < \xi < 1$  et

$0 < m < \frac{1}{2}$ , pour le second exemple les paramètres  $\xi$  et  $m$  sont choisis tels que :  $0 < \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$  et

$\frac{1}{2} < m < 1$ .

#### Exemple1:

Soit le système représenté par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire de l'équation (3.31), avec  $\xi = 0.87$ ,  $m = 0.46$  et  $\tau_0 = 1$ , tel que:

$$\frac{d^{0.92}x(t)}{dt^{0.92}} + (1.74) \frac{d^{0.46}x(t)}{dt^{0.46}} + x(t) = (0.493)e(t)$$

Sa fonction de transfert est donnée par :

$$G_{SA}(s) = \frac{X_{SA}(s)}{E(s)} = \frac{0.493}{[s^{0.92} + 1.74s^{0.46} + 1]}$$

Pour une bande de fréquence  $[0, \omega_H] = [0, 1000\text{rad/s}]$  et un rapport  $\lambda=1.2$ , le nombre  $N$ , les paramètres  $\varphi$  et  $\alpha$  peuvent être facilement calculés comme :

$$\omega_{\max} = 10^8 \omega_H = 10^{11} \text{ rad/s}, N = \text{Integer} \left[ \frac{\log[10^{11}]}{\log(1.2)} \right] + 1 = 139$$

$$\varphi = \arctg \left( \frac{\sqrt{1 - (0.87)^2}}{0.87} \right) = 0.516 \text{ rad et } \alpha = \cos \left( \frac{0.516}{0.46} \right) = 0.434$$

Alors, les fréquences  $\omega_i$ , les paramètres  $a_i$  et les résidus  $k_i$  de l'approximation sont aussi donnés, pour  $i = 1, 2, \dots, 277$ , par :

$$\begin{aligned} \omega_i &= (1.2)^{(i-139)} \\ k_i &= \frac{0.158}{\cosh\{0.084(139-i)\} + 0.125} \\ a_i &= -1.154(1.2)^{(139-i)} \end{aligned}$$

Donc, l'approximation de la fonction de transfert sinus amortie d'ordre fractionnaire est donnée par:

$$\begin{aligned} G_{SA}(s) &= \frac{0.493}{[s^{0.92} + 1.74s^{0.46} + 1]} \\ &\cong \sum_{i=1}^{277} \left[ \frac{0.158}{\cosh\{0.084(139-i)\} + 0.125} \right] \left[ \frac{0.493 - [1.154(1.2)^{(139-i)}] s}{1 + 0.868[(1.2)^{(139-i)}] s + [(1.44)^{(139-i)}] s^2} \right] \end{aligned}$$

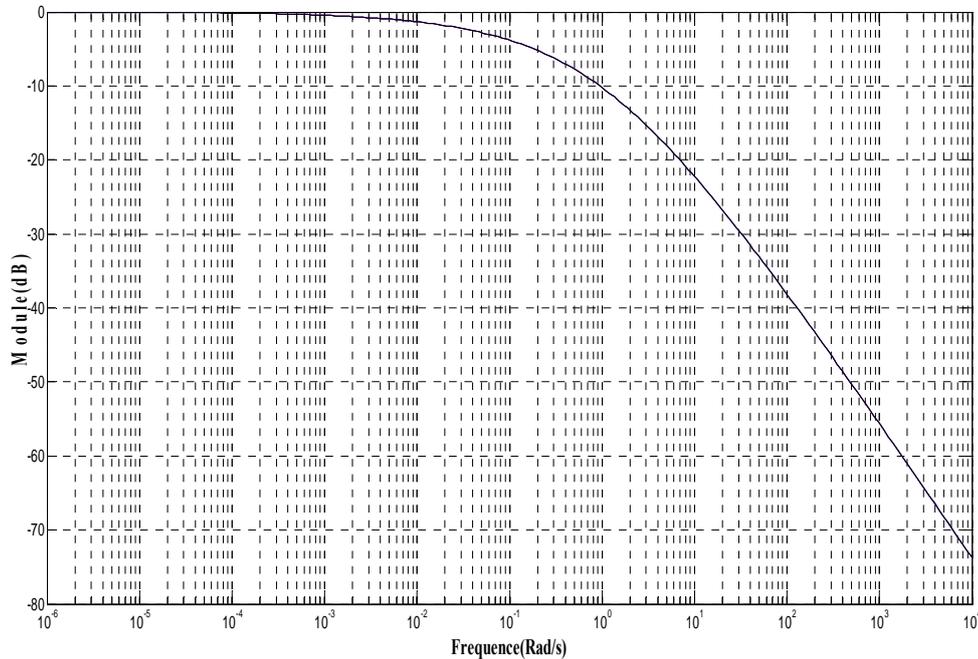
Pour vérifier la validité de l'approche proposée, on a utilisé la méthode d'Oustaloup [18], pour obtenir l'approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire  $s^{0.46}$  par une fonction rationnelle comme suit:

$$s^{0.46} = \frac{N(s)}{D(s)} = (2.5119)10^{-5} \prod_{i=-131}^{131} \left( \frac{1 + \frac{s}{9.9368 \cdot 10^9 (1.2037)^i}}{1 + \frac{s}{9.1247 \cdot 10^9 (1.2037)^i}} \right)$$

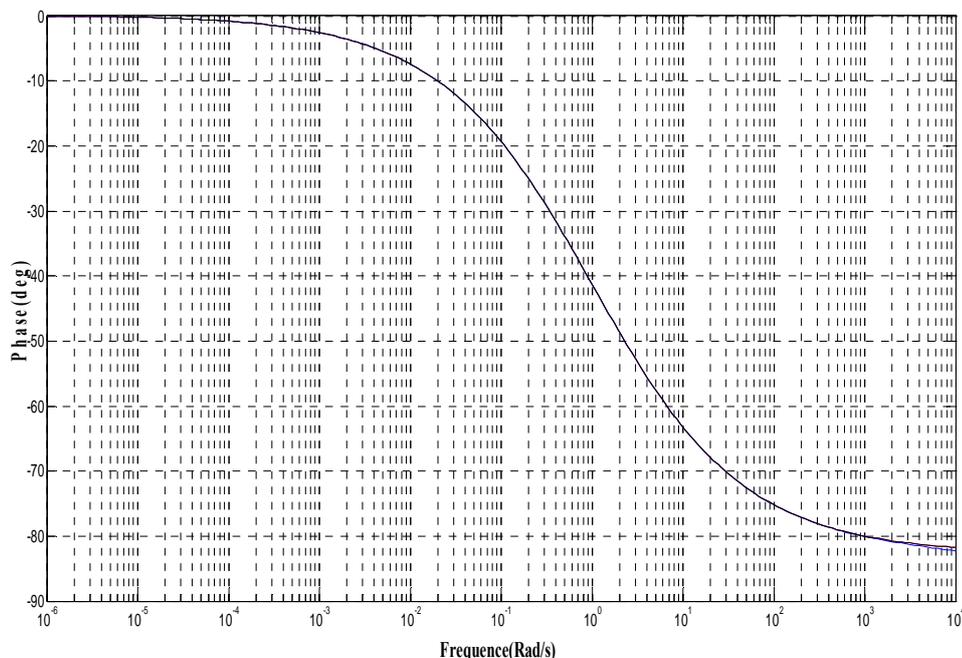
Puis, on a dérivé la fonction de transfert rationnelle du système sinus amorti d'ordre fractionnaire, avec le même ordre que la méthode d'approximation rationnelle proposée, dans la bande de fréquence  $[0, \omega_H] = [0, 1000 \text{ rad/s}]$ , par:

$$G_{SA}(s) = \frac{0.493}{[s^{0.92} + 1.74s^{0.46} + 1]} = \frac{0.493}{[(s^{0.46})^2 + 1.74s^{0.46} + 1]} = \frac{0.493}{\left[ \frac{N(s)}{D(s)} \right]^2 + 1.74 \left[ \frac{N(s)}{D(s)} \right] + 1}$$

Les figures 3.1 et 3.2 montrent le diagramme de Bode (Module et Phase) du système sinus amorti d'ordre fractionnaire et son approximation rationnelle proposée, avec l'approximation rationnelle par la méthode d'Oustaloup.



**Figure 3.1 :** Diagramme de Bode (Module) de la fonction de transfert  $G_{SA}(s)$ , son approximation par l'approche proposée et celle d'Oustaloup, pour  $\xi = 0.87$  et  $m = 0.46$ .



**Figure 3.2 :** Diagramme de Bode (Phase) de la fonction de transfert  $G_{SA}(s)$ , son approximation par l'approche proposée et celle d'Oustaloup, pour  $\xi = 0.87$  et  $m = 0.46$ .

La figure 3.3 montre la réponse impulsionnelle du système sinus amorti d'ordre fractionnaire obtenue à partir de l'approximation proposée par :

$$x(t) = \sum_{i=1}^{277} (1.2)^{(i-139)} \left( \frac{0.158}{\cosh\{0.084(139-i)\} + 0.125} \right) \times \exp(-0.434(1.2)^{(i-139)} t) \sin(0.9t((1.2)^{(i-139)}) - 0.6053)$$

et celle obtenue à partir de la fonction de la réponse impulsionnelle généralisée donnée sous la forme polynomiale suivants Hartley et al [11] :

$$\begin{aligned} x(t) &= (-0.5j)F_{0.46}[(-0.87 + 0.493j), t] + (0.5j)F_{0.46}[(-0.87 - 0.493j), t] \\ &= (-0.5j)t^{-0.54} \sum_{n=0}^{100} \frac{(-0.87 + 0.493j)^n t^{0.46n}}{\Gamma(0.46n + 0.46)} + (0.5j)t^{-0.54} \sum_{n=0}^{100} \frac{(-0.87 - 0.493j)^n t^{0.46n}}{\Gamma(0.46n + 0.46)} \end{aligned}$$

où,  $F_m[-a, t]$  est la fonction de Robotnov–Hartley donnée par (1.28).

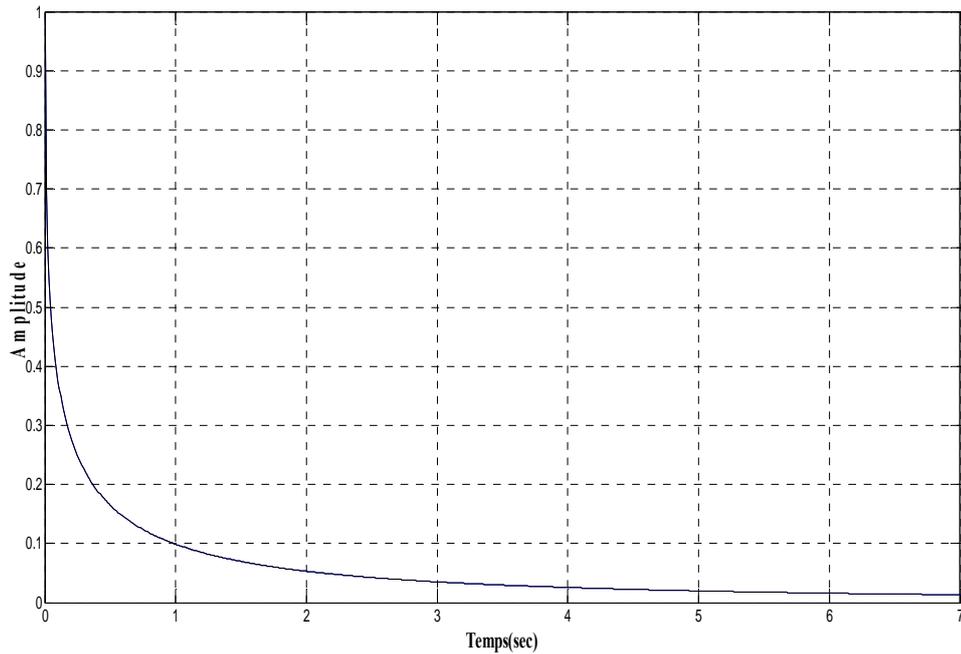
La réponse indicielle du système obtenue à partir de l'approximation par une fonction rationnelle, représentée dans la figure 3.4, est donnée par :

$$x(t) = 0.493 - \sum_{i=1}^{277} \left( \frac{0.158}{\cosh\{0.084(139-i)\} + 0.125} \right) \times \exp(-0.434(1.2)^{(i-139)} t) \sin(0.9((1.2)^{(i-139)})t + 0.516)$$

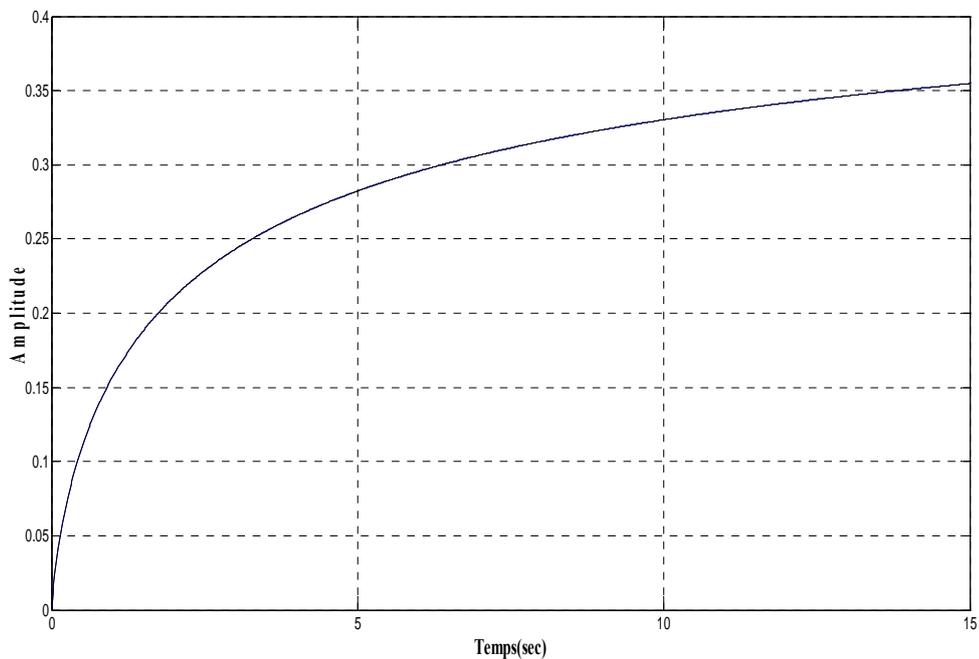
et celle obtenue à partir de la fonction Mittag-Leffler donnée sous la forme polynomiale suivants Hartley et al [11] :

$$\begin{aligned} x(t) &= (0.247 - 0.435j) \left\{ 1 - E_{0.46} \left[ (-0.87 + 0.493j)t^{0.46} \right] \right\} + (0.247 + 0.435j) \left\{ 1 - E_{0.46} \left[ (-0.87 - 0.493j)t^{0.46} \right] \right\} \\ &= (0.247 - 0.435j) \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{100} \frac{(-0.87 + 0.493j)^n t^{0.46n}}{\Gamma(0.46n + 1)} \right\} + (0.247 + 0.435j) \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{100} \frac{(-0.87 - 0.493j)^n t^{0.46n}}{\Gamma(0.46n + 1)} \right\} \end{aligned}$$

où,  $E_m[-at^m]$  est la fonction de Mittag-Leffler donnée par (1.18).



**Figure 3.3 :** La réponse impulsionnelle du système sinus amorti d'ordre fractionnaire proposée et celle utilisant la fonction de la réponse impulsionelle généralisé, pour  $\xi = 0.87$  et  $m = 0.46$ .



**Figure 3.4 :** La réponse indicielle du système sinus amorti d'ordre fractionnaire proposée et celle utilisant la fonction de Mittag\_Leffler, pour  $\xi = 0.87$  et  $m = 0.46$ .

**Exemple 2:**

Le second exemple est donné pour un système sinus amorti d'ordre fractionnaire représenté par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire de l'équation (3.31) avec  $\xi = 0.35$ ,  $m = 0.9$  et  $\tau_0 = 1$ , alors on a:

$$\frac{d^{1.8}x(t)}{dt^{1.8}} + (0.7)\frac{d^{0.9}x(t)}{dt^{0.9}} + x(t) = (0.937)e(t)$$

Sa fonction de transfert est donnée par :

$$G_{SA}(s) = \frac{X_{SA}(s)}{E(s)} = \frac{0.937}{[s^{1.8} + 0.7s^{0.9} + 1]}$$

Pour une bande de fréquence  $[0, \omega_H] = [0, 1000\text{rad/s}]$  et un rapport  $\lambda=1.15$ , le nombre  $N$ , les paramètres  $\varphi$  et  $\alpha$  peuvent être facilement calculés comme :

$$\omega_{\max} = 10^6 \omega_H = 10^9 \text{ rad/s}, N = \text{Integer} \left[ \frac{\log[10^9]}{\log(1.5)} \right] + 1 = 149$$

$$\varphi = \arctg \left( \frac{\sqrt{1 - (0.35)^2}}{0.35} \right) = 1.213 \text{ rad et } \alpha = \cos \left( \frac{1.213}{0.9} \right) = 0.221$$

Autant, les fréquences  $\omega_i$ , les paramètres  $a_i$  et les résidus  $k_i$  de l'approximation sont aussi donnés, pour  $i= 1, 2, \dots, 297$ , par :

$$\omega_i = (1.15)^{(i-149)}$$

$$k_i = \frac{0.0492}{\cosh\{0.126(149 - i)\} + 0.951}$$

$$a_i = -0.134(1.5)^{(149-i)}$$

Donc, l'approximation de la fonction de transfert sinus amortie d'ordre fractionnaire est donnée par:

$$G_{SA}(s) = \frac{0.937}{[s^{1.8} + 0.7s^{0.9} + 1]} \cong \sum_{i=1}^{297} \left[ \frac{0.049}{\cosh\{0.126(149 - i)\} + 0.951} \right] \left[ \frac{0.937 - [0.134(1.5)^{(149-i)}] s}{1 + 1.8[(1.15)^{(149-i)}] s + [(1.323)^{(149-i)}] s^2} \right]$$

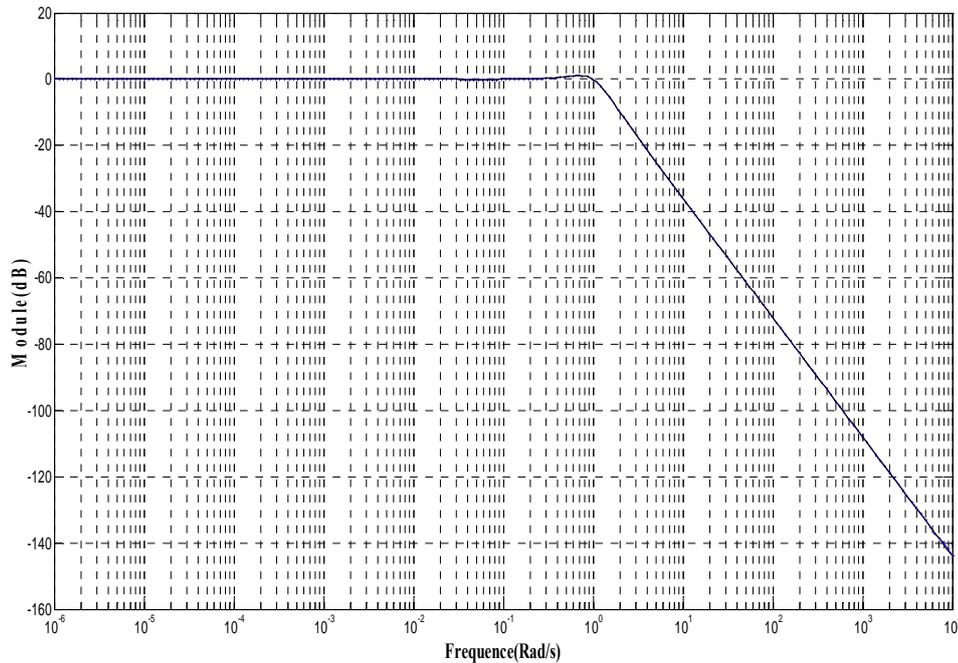
Cette fonction rationnelle d'approximation proposée a été comparée à la fonction obtenue par la méthode d'Oustaloup [18] du système sinus amorti d'ordre fractionnaire. Avec le même ordre que la méthode d'approximation rationnelle proposée, dans la bande de fréquence  $[0, \omega_H] = [0, 1000 \text{ rad/s}]$ , la fonction d'approximation est donnée comme suit :

$$G(s) = \frac{0.937}{[s^{1.8} + 0.7s^{0.9} + 1]} = \frac{0.937}{[(s^{0.9})^2 + 0.7s^{0.9} + 1]} = \frac{0.937}{\left[\frac{N(s)}{D(s)}\right]^2 + 0.7\left[\frac{N(s)}{D(s)}\right] + 1}$$

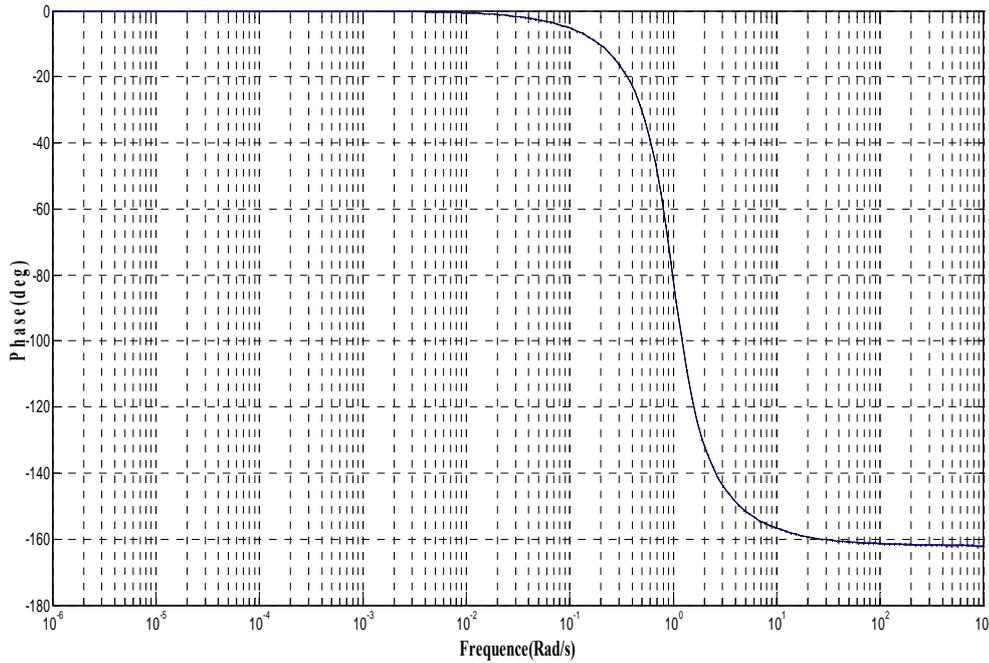
Avec l'approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire  $s^{0.90}$  par une fonction rationnelle est donnée par :

$$s^{0.9} = \frac{N(s)}{D(s)} = (1.26)10^{-10} \prod_{i=-150}^{150} \left( \frac{1 + \frac{s}{2.5287 \cdot 10^9 (1.1659)^i}}{1 + \frac{s}{2.322 \cdot 10^9 (1.1659)^i}} \right)$$

Les figures 3.5 et 3.6 montres le diagramme de Bode (Module et Phase) du système sinus amorti d'ordre fractionnaire et son approximation rationnelle proposée, avec l'approximation rationnelle par la méthode d'Oustaloup.



**Figure 3.5 :** Diagramme de Bode (Module) de la fonction de transfert  $G_{SA}(s)$ , son approximation par l'approche proposée et celle de la méthode d'Oustaloup, pour  $\xi = 0.35$  et  $m = 0.9$ .



**Figure 3.6 :** Diagramme de Bode (Phase) de la fonction de transfert  $G_{SA}(s)$ , son approximation par l'approche proposée et celle de la méthode d'Oustaloup, pour  $\xi = 0.35$  et  $m = 0.9$ .

La figure 3.7 montre la réponse impulsionnelle du système sinus amorti d'ordre fractionnaire obtenue à partir de l'approximation proposée par :

$$x(t) = \sum_{i=1}^{297} \left( \frac{0.049(1.15)^{(i-149)}}{\cosh\{0.126(149-i)\} + 0.951} \right) \times \left( \exp(-0.221(1.15)^{(i-149)} t) \sin(0.975((1.15)^{(i-149)} t - 0.135)) \right)$$

et celle obtenue à partir de la fonction de la réponse impulsionnelle généralisée donnée dans [11], comme :

$$\begin{aligned} x(t) &= (-0.5j)F_{0,9}[(-0.35 + 0.937j), t] + (0.5j)F_{0,9}[(-0.35 - 0.937j), t] \\ &= (-0.5j)t^{-0.1} \sum_{n=0}^{100} \frac{(-0.35 - 0.937j)^n t^{0.9n}}{\Gamma(0.9n + 0.9)} + (0.5j)t^{-0.1} \sum_{n=0}^{100} \frac{(-0.35 - 0.937j)^n t^{0.9n}}{\Gamma(0.9n + 0.9)} \end{aligned}$$

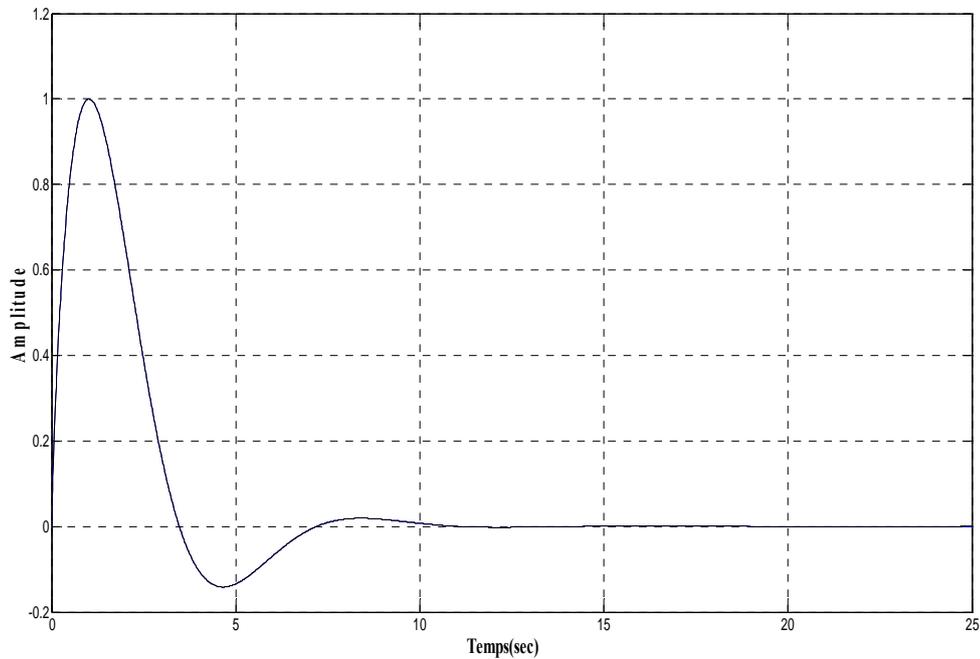
La réponse indicielle du système obtenue à partir de l'approximation par une fonction rationnelle comme :

$$x(t) = 0.937 - \sum_{i=1}^{297} \left( \frac{0.049}{\cosh\{0.126(149-i)\} + 0.951} \right) \times \exp(-0.221(1.15)^{(i-149)} t) \sin(0.975((1.15)^{(i-149)} t + 1.213))$$

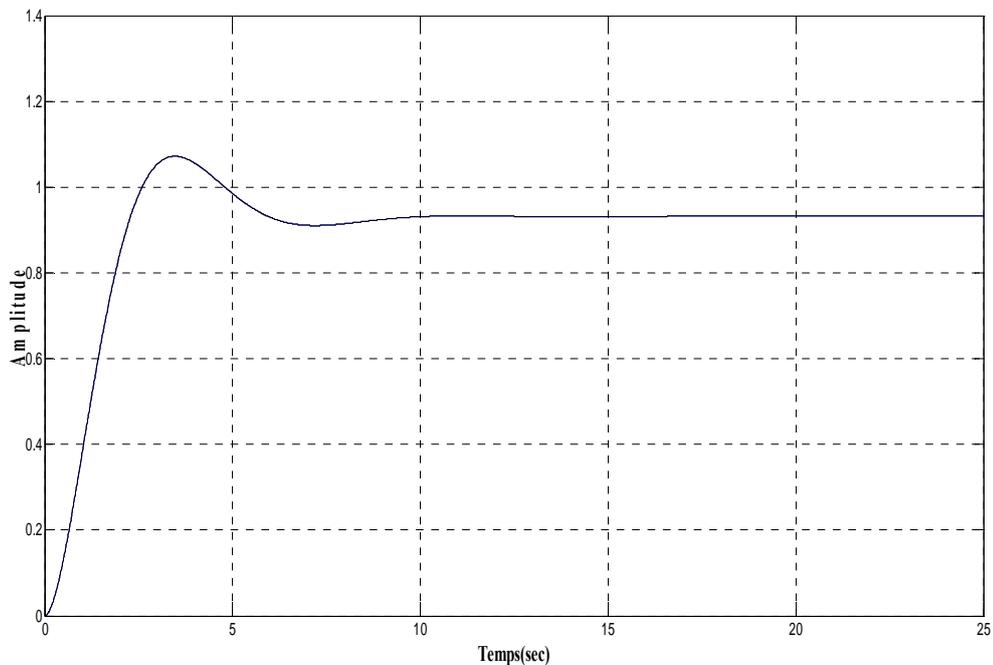
est représentée dans la figure (3.8) ainsi que celle obtenue à partir de la fonction Mittag-Leffler donnée sous la forme polynomiale suivants Hartley et al [11] :

$$x(t) = (0.469 - 0.175j) \left\{ 1 - E_{0.9} \left[ (-0.35 + 0.937j)t^{0.46} \right] \right\} + (0.469 + 0.175j) \left\{ 1 - E_{0.9} \left[ (-0.35 - 0.937j)t^{0.46} \right] \right\}$$

$$= (0.469 - 0.175j) \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{100} \frac{(-0.35 + 0.937j)^n t^{0.9n}}{\Gamma(0.9n + 1)} \right\} + (0.469 + 0.175j) \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{100} \frac{(-0.35 - 0.937j)^n t^{0.9n}}{\Gamma(0.9n + 1)} \right\}$$



**Figure 3.7 :** La réponse impulsionnelle du système sinus amorti d'ordre fractionnaire proposée et celle utilisant la fonction de la réponse impulsionelle généralisé, pour  $\xi = 0.35$  et  $m = 0.9$ .



**Figure 3.8 :** La réponse indicielle du système sinus amorti d'ordre fractionnaire proposée et celle utilisant la fonction de Mittag\_Leffler, pour  $\xi = 0.35$  et  $m = 0.9$ .

### 3.5.3 Approximation de la fonction cosinus amortie d'ordre fractionnaire

La différence majeure entre la fonction de transfert qui représente le système sinus amortie d'ordre fractionnaire et celle qui représente le système cosinus amorti d'ordre fractionnaire, est que cette dernière possède un zéro à puissance fractionnaire. Donc, on peut suivre les mêmes étapes de la méthode utilisée dans le cas de la fonction sinus, pour une approximation de cette fonction par une fonction rationnelle. Commençons par la reformulation de l'équation (3.34) sous la forme suivante:

$$G_{CA}(s) = \frac{(\tau_0 s)^m + \xi}{[1 + (\tau_1 s)^m][1 + (\tau_2 s)^m]} \quad (3.68)$$

On remarque que les fonctions  $G_{SA}(s)$  et  $G_{CA}(s)$  ont le même dénominateur, donc  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont les mêmes que celles de l'équation (3.41):

$$\tau_1^m = \tau_0^m \left( \xi + j\sqrt{1-\xi^2} \right) \quad \text{et} \quad \tau_2^m = \tau_0^m \left( \xi - j\sqrt{1-\xi^2} \right) \quad (3.69)$$

Par décomposition de l'équation (3.68), on obtient :

$$G_{SA}(s) = \frac{\left( \frac{1}{2}\xi + j\frac{1}{2}\sqrt{1-\xi^2} \right)}{[1 + (\tau_1 s)^m]} + \frac{\left( \frac{1}{2}\xi - j\frac{1}{2}\sqrt{1-\xi^2} \right)}{[1 + (\tau_2 s)^m]} \quad (3.70)$$

L'approximation de chacune des deux sous fonctions irrationnelles constituant la fonction  $G_{CA}(s)$  de l'équation (3.70), est donnée par [50]:

$$\frac{1}{[1 + (\tau_1 s)^m]} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{1 + \frac{s}{p_{1i}}} \quad (3.71)$$

$$\frac{1}{[1 + (\tau_2 s)^m]} \cong \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{1 + \frac{s}{p_{2i}}} \quad (3.72)$$

Où,  $p_{1i}$  et  $p_{2i}$ , pour  $i = 1, 2, \dots, 2N-1$ , sont les pôles des deux approximations. Qui sont donnés comme suit:

$$p_{1i} = \frac{1}{\tau_{1i}} = \frac{1}{\tau_1 (\lambda)^{N-i}} = (\lambda)^{(i-N)} p_1 \quad (3.73)$$

$$p_{2i} = \frac{1}{\tau_{2i}} = \frac{1}{\tau_2(\lambda)^{N-i}} = (\lambda)^{(i-N)} p_2 \quad (3.74)$$

Tel que:

$$p_1 = \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_0} \exp\left(-j \frac{\varphi}{m}\right) \quad (3.75)$$

$$p_2 = \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{\tau_0} \exp\left(j \frac{\varphi}{m}\right) \quad (3.76)$$

Tous les paramètres de l'approximation sont calculés par la même méthode utilisée pour la fonction sinus. Alors, l'approximation de  $G_{CA}(s)$  par une fonction rationnelle est donnée par:

$$G_{CA}(s) = \frac{(\tau_0 s)^m + \xi}{[(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1]} = \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \left[ \frac{\left(\frac{1}{2}\xi + j\frac{1}{2}\sqrt{1-\xi^2}\right)}{1 + \frac{s}{p_{1i}}} + \frac{\left(\frac{1}{2}\xi - j\frac{1}{2}\sqrt{1-\xi^2}\right)}{1 + \frac{s}{p_{2i}}} \right] \quad (3.77)$$

$$G_{CA}(s) = \frac{(\tau_0 s)^m + \xi}{[(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1]} = \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \frac{\xi + a_i s}{1 + 2\alpha \frac{s}{\omega_i} + \frac{s^2}{\omega_i^2}} \quad (3.78)$$

les coefficients  $\alpha$ ,  $a_i$ , et  $\omega_i$ , pour  $i = 1, 2, \dots, 2N-1$ , sont:

$$\alpha = \cos\left(\frac{\varphi}{m}\right) \quad (3.79)$$

$$a_i = \tau_0 \lambda^{(N-i)} \left( \xi \alpha + \sqrt{1-\xi^2} \sqrt{1-\alpha^2} \right) \quad (3.80)$$

$$\omega_i = \frac{1}{\tau_0 \lambda^{(N-i)}} \quad (3.81)$$

### 3.5.3.1 Réponses temporelles de la fonction cosinus amortie d'ordre fractionnaire

De l'équation (3.78), on a :

$$G_{CA}(s) = \frac{X_{CA}(s)}{E(s)} = \frac{(\tau_0 s)^m + \xi}{[(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1]} = \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \frac{\xi + a_i s}{1 + 2\alpha \frac{s}{\omega_i} + \frac{s^2}{\omega_i^2}} \quad (3.82)$$

Donc,

$$X_{CA}(s) = \frac{[(\tau_0 s)^m + \xi]E(s)}{[(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1]} = \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \frac{\xi + a_i s}{1 + 2\alpha \frac{s}{\omega_i} + \frac{s^2}{\omega_i^2}} E(s) \quad (3.83)$$

pour  $e(t) = \delta(t)$  une impulsion unité  $E(s) = 1$ , on obtient :

$$X_{CA}(s) = \frac{(\tau_0 s)^m + \xi}{[(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1]} = \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \frac{\xi + a_i s}{1 + 2\alpha \frac{s}{\omega_i} + \frac{s^2}{\omega_i^2}} \quad (3.84)$$

Alors, la réponse impulsionnelle de ce système est donnée par [58]:

$$x_{CA}(t) = \sum_{i=1}^{2N-1} \omega_i k_i \exp(-\alpha \omega_i t) \cos\left(\omega_i \left(\sqrt{1-\alpha^2}\right)t + \left(\frac{m-1}{m}\right)\varphi\right) \quad (3.85)$$

Maintenant, pour une entrée échelon unité,  $E(s) = 1/s$ , l'équation (3.83) devient :

$$X_{CA}(s) = \frac{(\tau_0 s)^m + \xi}{[(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1]} \frac{1}{s} = \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \frac{\xi + a_i s}{1 + 2\alpha \frac{s}{\omega_i} + \frac{s^2}{\omega_i^2}} \frac{1}{s} \quad (3.86)$$

La réponse indicielle de ce système est obtenue par [58]:

$$x_{CA}(t) = \xi - \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \exp(-\alpha \omega_i t) \cos\left(\omega_i \left(\sqrt{1-\alpha^2}\right)t + \varphi\right) \quad (3.87)$$

### 3.5.3.2 Exemples illustratifs

Comme dans le cas de la fonction sinus amortie d'ordre fractionnaire, on va appliquer la méthode d'approximation proposée, pour dériver la fonction de transfert rationnelle et les réponses impulsionnelle et indicielle du système linéaire d'ordre fractionnaire décrit par l'équation différentielle d'ordre fractionnaire donné par l'équation (3.32). Donc, on va présenter deux exemples numériques pour différents paramètres  $\xi$  et  $m$ . Alors, pour le premier

exemple les paramètres  $\xi$  et  $m$  sont choisis tels que :  $\frac{\sqrt{2}}{2} < \xi < 1$  et  $0 < m < \frac{1}{2}$ , le second

exemple  $\xi$  et  $m$  sont choisis tels que :  $0 < \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\frac{1}{2} < m < 1$ .

#### Exemple1:

Soit le système représenté par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire de l'équation (3.32), avec  $\xi = 0.87$ ,  $m = 0.46$  et  $\tau_0 = 1$ , tel que:

$$\frac{d^{0.92}x(t)}{dt^{0.92}} + (1.74)\frac{d^{0.46}x(t)}{dt^{0.46}} + x(t) = \frac{d^{0.46}e(t)}{dt^{0.46}} + (0.87)e(t)$$

Sa fonction de transfert est donnée par :

$$G_{CA}(s) = \frac{X_{CA}(s)}{E(s)} = \frac{s^{0.46} + 0.87}{[s^{0.92} + 1.74s^{0.46} + 1]}$$

Pour une bande de fréquence  $[0, \omega_H] = [0, 1000\text{rad/s}]$  et un rapport  $\lambda=1.2$ , le nombre  $N$ , les paramètres  $\varphi$  et  $\alpha$  peuvent être facilement calculés comme :

$$\omega_{\max} = 10^8 \omega_H = 10^{11} \text{ rad/s}, N = \text{Integer} \left[ \frac{\log[10^{11}]}{\log(1.2)} \right] + 1 = 139$$

$$\varphi = \arctg \left( \frac{\sqrt{1 - (0.87)^2}}{0.87} \right) = 0.516 \text{ rad et } \alpha = \cos \left( \frac{0.516}{0.46} \right) = 0.434$$

Autant, les fréquences  $\omega_i$ , les paramètres  $a_i$  et les résidus  $k_i$  de l'approximation sont aussi donnés, pour  $i= 1, 2, \dots, 277$ , par :

$$\omega_i = (1.2)^{(i-139)}$$

$$k_i = \frac{0.158}{\cosh\{0.084(139 - i)\} + 0.125}$$

$$a_i = 0.823(1.2)^{(139-i)}$$

Donc, l'approximation de la fonction de transfert cosinus amortie d'ordre fractionnaire est donnée par:

$$G_{CA}(s) = \frac{0.87 + s^{0.46}}{[s^{0.92} + 1.74s^{0.46} + 1]} \\ \cong \sum_{i=1}^{277} \left[ \frac{0.158}{\cosh\{0.084(139 - i)\} + 0.125} \right] \left[ \frac{0.87 + [0.823(1.2)^{(139-i)}] s}{1 + 0.868[(1.2)^{(139-i)}] s + [(1.44)^{(139-i)}] s^2} \right]$$

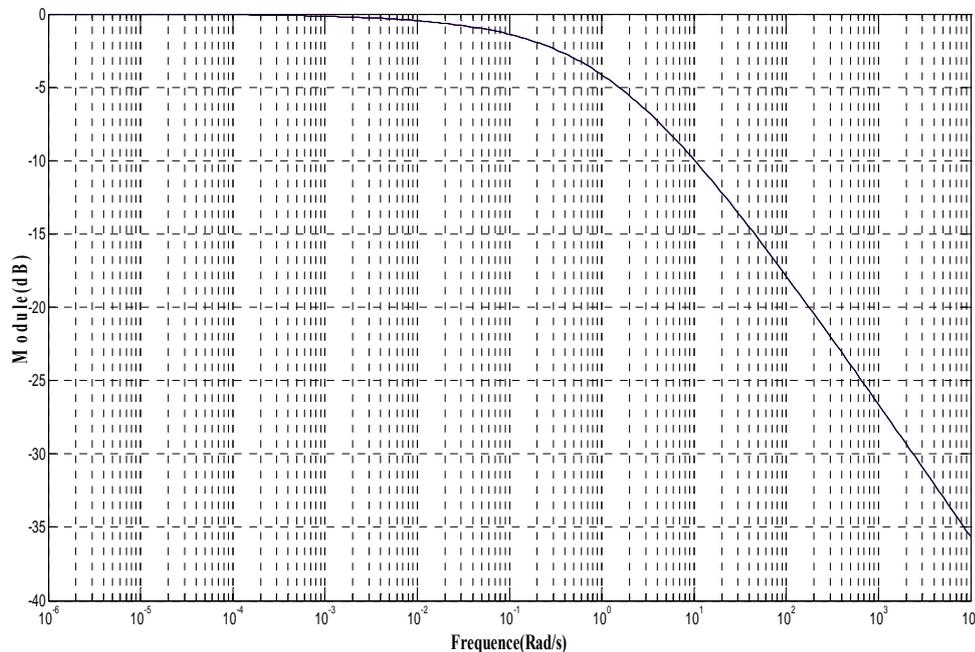
Pour vérifier la validité de l'approche proposée, on a utilisé la méthode d'Oustaloup [28], pour obtenir l'approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire  $s^{0.46}$  par une fonction rationnelle comme suit:

$$s^{0.46} = \frac{N(s)}{D(s)} = (2.5119)10^{-5} \prod_{i=-131}^{131} \left( \frac{1 + \frac{s}{9.9368 \cdot 10^9 (1.2037)^i}}{1 + \frac{s}{9.1247 \cdot 10^9 (1.2037)^i}} \right)$$

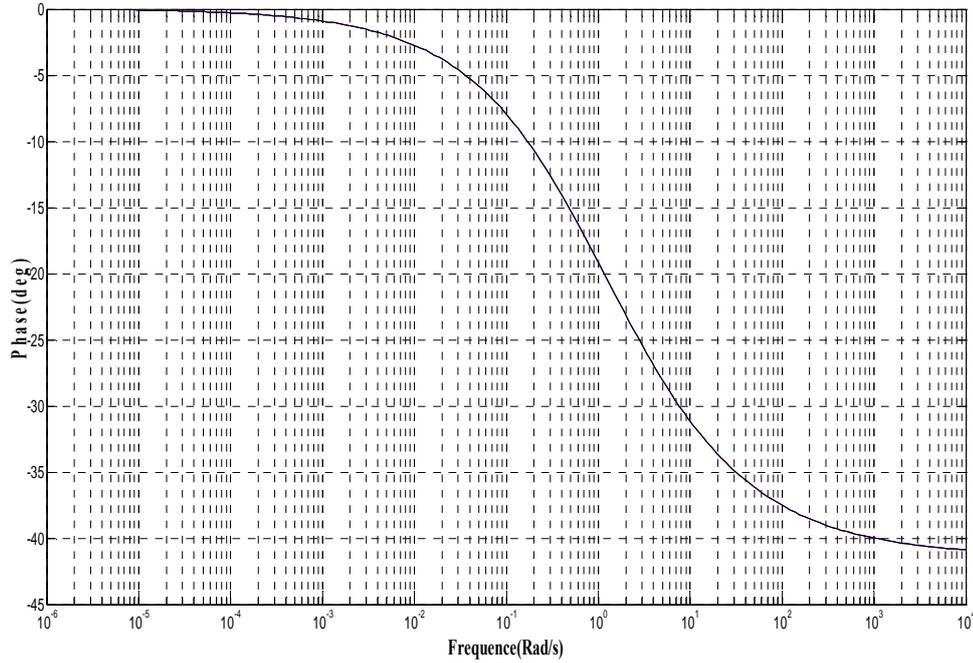
Puis, on a dérivé la fonction de transfert rationnelle du système cosinus amorti d'ordre fractionnaire, avec le même ordre que la méthode d'approximation rationnelle proposée, dans la bande de fréquence  $[0, \omega_H] = [0, 1000 \text{ rad/s}]$ , par:

$$G_{CA}(s) = \frac{0.87 + s^{0.46}}{[s^{0.92} + 1.74s^{0.46} + 1]} = \frac{0.87 + s^{0.46}}{[(s^{0.46})^2 + 1.74s^{0.46} + 1]} = \frac{0.87 + \left[ \frac{N(s)}{D(s)} \right]}{\left[ \frac{N(s)}{D(s)} \right]^2 + 1.74 \left[ \frac{N(s)}{D(s)} \right] + 1}$$

Les figures 3.9 et 3.10 montres le diagramme de Bode (Module et Phase) du système cosinus amorti d'ordre fractionnaire et son approximation rationnelle proposée, avec l'approximation rationnelle par la méthode d'Oustaloup.



**Figure 3.9 :** Diagramme de Bode (Module) de la fonction de transfert  $G_{CA}(s)$ , son approximation par l'approche proposée et celle utilisant la méthode d'Oustaloup, pour  $\xi=0.87$  et  $m=0.46$ .



**Figure 3.10 :** Diagramme de Bode (Phase) de la fonction de transfert  $G_{CA}(s)$ , son approximation par l'approche proposée et celle utilisant la méthode d'Oustaloup, pour  $\xi=0.87$  et  $m=0.46$ .

La figure 3.11 montre la réponse impulsionnelle du système cosinus amortie d'ordre fractionnaire obtenue à partir de l'approximation proposée par :

$$x_{CA}(t) = \sum_{i=1}^{277} (1.2)^{(i-139)} \left( \frac{0.158}{\cosh\{0.084(139-i)\} + 0.125} \right) \times \exp(-0.434(1.2)^{(i-139)} t) \cos(0.9((1.2)^{(i-139)} t - 0.6053))$$

et celle obtenue à partir de la fonction de la réponse impulsionnelle généralisée donnée sous la forme polynomiale suivants Hartley et al [23] :

$$x_{CA}(t) = (0.5)F_{0.46}[(-0.87 - 0.493j), t] + (0.5)F_{0.46}[(-0.87 + 0.493j), t]$$

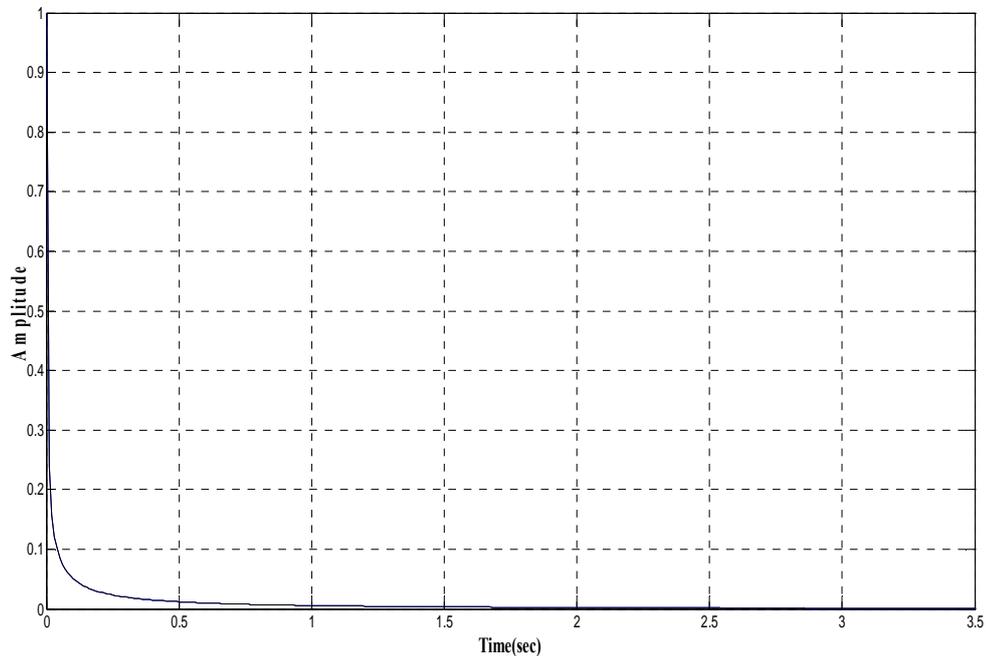
$$= (0.5) t^{-0.54} \sum_{n=0}^{100} \frac{(-0.87 - 0.493j)^n t^{0.46n}}{\Gamma(0.46n + 0.46)} + (0.5) t^{-0.54} \sum_{n=0}^{100} \frac{(-0.87 + 0.493j)^n t^{0.46n}}{\Gamma(0.46n + 0.46)}$$

La réponse indicielle du système obtenue à partir de l'approximation par une fonction rationnelle, représentée dans la figure 3.12, est donnée par :

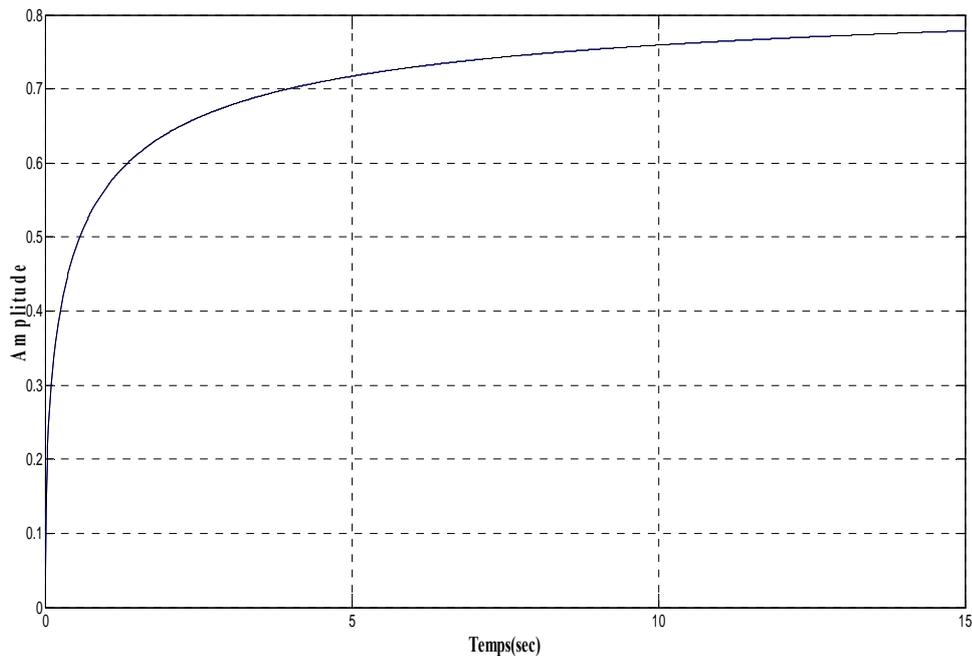
$$x_{CA}(t) = 0.87 - \sum_{i=1}^{277} \left( \frac{0.158}{\cosh\{0.084(139-i)\} + 0.125} \right) \\ \times \exp\left(-0.434(1.2)^{(i-139)} t\right) \sin\left(0.9\left(1.2\right)^{(i-139)} t + 0.516\right)$$

et celle obtenue à partir de la fonction Mittag-Leffler donnée sous la forme polynomiale suivants Hartley et al [23] :

$$x(t) = (0.435 - 0.247j) \left\{ 1 - E_{0.46} \left[ (-0.87 + 0.493j)t^{0.46} \right] \right\} + (0.435 + 0.247j) \left\{ 1 - E_{0.46} \left[ (-0.87 - 0.493j)t^{0.46} \right] \right\} \\ = (0.435 - 0.247j) \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{100} \frac{(-0.87 + 0.493j)^n t^{0.46n}}{\Gamma(0.46n + 1)} \right\} + (0.435 + 0.247j) \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{100} \frac{(-0.87 - 0.493j)^n t^{0.46n}}{\Gamma(0.46n + 1)} \right\}$$



**Figure 3.11 :** La réponse impulsionnelle du système cosinus amorti d'ordre fractionnaire à partir de la méthode d'approximation par une fonction rationnelle proposée et celle utilisant la fonction de la réponse impulsionnelle généralisé, pour  $\xi=0.87$  et  $m=0.46$ .



**Figure 3.12 :** La réponse indicielle du système cosinus amorti d'ordre fractionnaire à partir de la méthode d'approximation par une fonction rationnelle proposée et celle utilisant la fonction de Mittag-Leffler, pour  $\xi=0.87$  et  $m=0.46$ .

### Exemple2:

Le second exemple est proposé pour un système cosinus amorti d'ordre fractionnaire représenté par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire (3.32), avec  $\xi = 0.35$ ,  $m = 0.9$  et  $\tau_0 = 1$ , alors on a:

$$\frac{d^{1.8}x(t)}{dt^{1.8}} + (0.7)\frac{d^{0.9}x(t)}{dt^{0.9}} + x(t) = \frac{d^{0.9}e(t)}{dt^{0.9}} + (0.35)e(t)$$

Sa fonction de transfert est donnée par :

$$G_{CA}(s) = \frac{X_{CA}(s)}{E(s)} = \frac{0.35 + s^{0.9}}{[s^{1.8} + 0.7s^{0.9} + 1]}$$

Pour une bande de fréquence  $[0, \omega_H] = [0, 1000\text{rad/s}]$  et un rapport  $\lambda=1.15$ , le nombre  $N$ , les paramètres  $\varphi$  et  $\alpha$  peuvent être facilement calculés comme :

$$\omega_{\max} = 10^6 \omega_H = 10^9 \text{ rad/s}, N = \text{Integer} \left[ \frac{\log[10^9]}{\log(1.15)} \right] + 1 = 149$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{\sqrt{1-(0.35)^2}}{0.35}\right) = 1.213 \text{ rad et } \alpha = \cos\left(\frac{1.213}{0.9}\right) = 0.221$$

Autant, les fréquences  $\omega_i$ , les paramètres  $a_i$  et les résidus  $k_i$  de l'approximation sont aussi donnés, pour  $i= 1, 2, \dots, 297$ , par :

$$\omega_i = (1.15)^{(i-149)}$$

$$k_i = \frac{0.0492}{\cosh\{0.126(149-i)\} + 0.951}$$

$$a_i = 0.99(1.5)^{(149-i)}$$

Donc, l'approximation de la fonction de transfert cosinus amortie d'ordre fractionnaire est donnée par:

$$G_{CA}(s) = \frac{0.35 + s^{0.9}}{[s^{1.8} + 0.7s^{0.9} + 1]} \\ \cong \sum_{i=1}^{297} \left[ \frac{0.049}{\cosh\{0.126(149-i)\} + 0.951} \right] \left[ \frac{0.937 + [0.99(1.15)^{(149-i)}] s}{1 + 1.8[(1.15)^{(149-i)}] s + [(1.323)^{(149-i)}] s^2} \right]$$

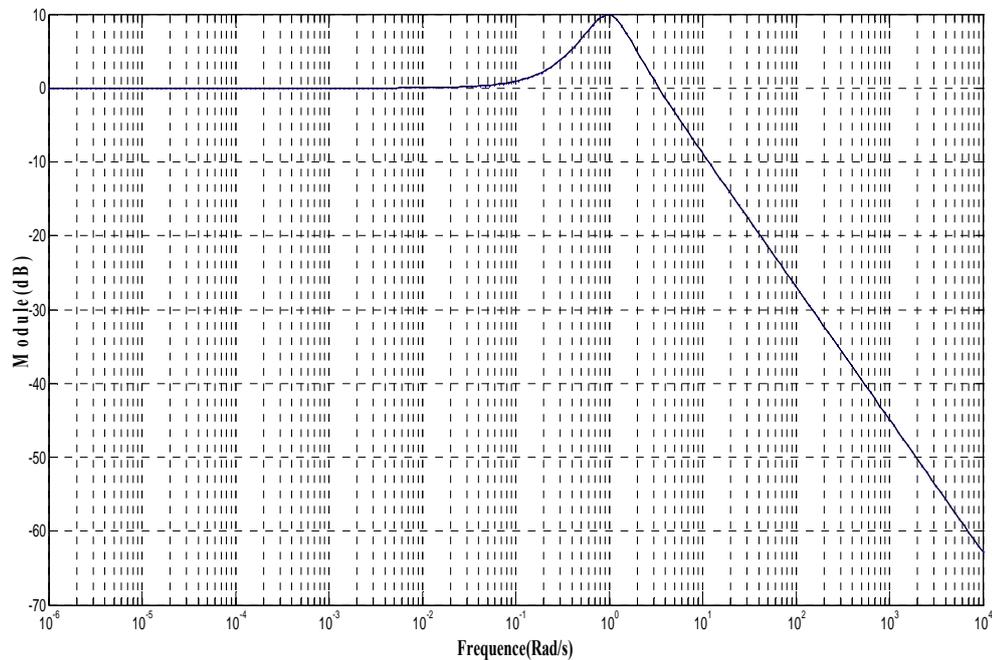
Cette fonction rationnelle d'approximation proposée a été comparée à la fonction obtenue par la méthode d'Oustaloup [28] du système sinus amorti d'ordre fractionnaire. Avec le même ordre que la méthode d'approximation rationnelle proposée, dans la bande de fréquence  $[0, \omega_H] = [0, 1000 \text{ rad/s}]$ , la fonction d'approximation est donnée comme suit :

$$G_{CA}(s) = \frac{0.35 + s^{0.9}}{[s^{1.8} + 0.7s^{0.9} + 1]} = \frac{0.35 + s^{0.9}}{[(s^{0.9})^2 + 0.7s^{0.9} + 1]} = \frac{0.35 + \left[\frac{N(s)}{D(s)}\right]}{\left[\frac{N(s)}{D(s)}\right]^2 + 0.7\left[\frac{N(s)}{D(s)}\right] + 1}$$

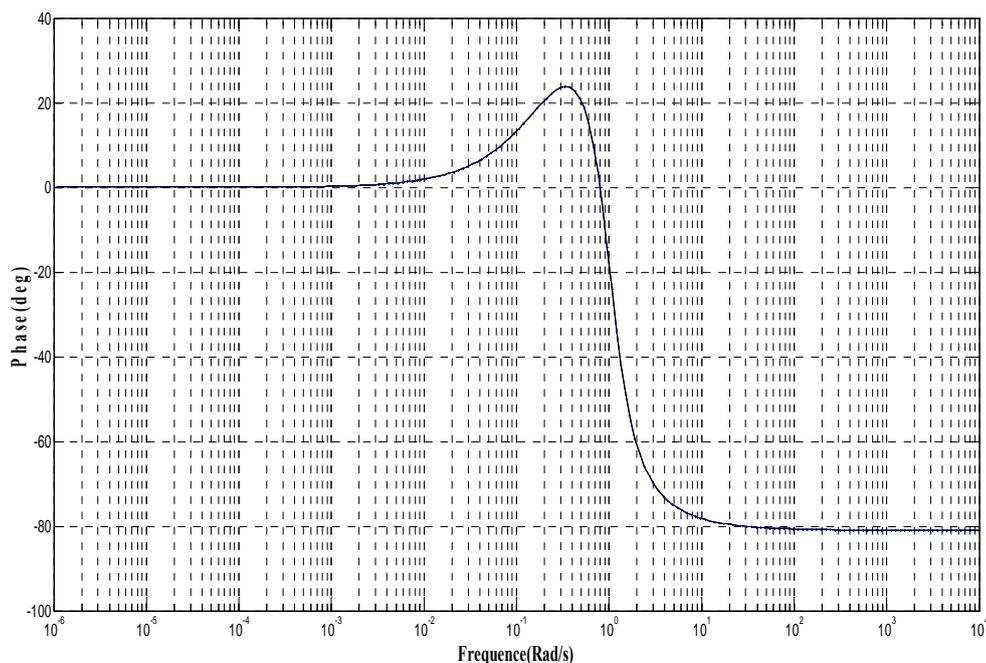
Avec l'approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire  $s^{0.90}$  par une fonction rationnelle est donnée par :

$$s^{0.9} = \frac{N(s)}{D(s)} = (1.26)10^{-10} \prod_{i=-150}^{150} \left( \frac{1 + \frac{s}{2.5287 \cdot 10^9 (1.1659)^i}}{1 + \frac{s}{2.322 \cdot 10^9 (1.1659)^i}} \right)$$

Les figures 3.13 et 3.14 montent le diagramme de Bode (Module et Phase) du système cosinus amortie d'ordre fractionnaire et son approximation rationnelle proposée, avec l'approximation rationnelle par la méthode d'Oustaloup.



**Figure 3.13 :** Diagramme de Bode (Module) de la fonction de transfert  $G_{CA}(s)$ , son approximation par l'approche proposée et celle utilisant la méthode d'Oustaloup, pour  $\xi=0.35$  et  $m=0.9$ .



**Figure 3.14 :** Diagramme de Bode (Phase) de la fonction de transfert  $G_{CA}(s)$ , son approximation par l'approche proposée et celle utilisant la méthode d'Oustaloup, pour  $\xi=0.35$  et  $m=0.9$ .

La figure 3.15 montre la réponse impulsionnelle du système cosinus amortie d'ordre fractionnaire obtenue à partir de l'approximation proposée par :

$$x(t) = \sum_{i=1}^{297} \left( \frac{0.049(1.15)^{(i-149)}}{\cosh\{0.126(149-i)\} + 0.951} \right) \\ \times \left( \exp(-0.221(1.15)^{(i-149)}t) \cos(0.975((1.15)^{(i-149)}t - 0.135)) \right)$$

et celle obtenue à partir de la fonction de la réponse impulsionnelle généralisée donnée par [23], comme :

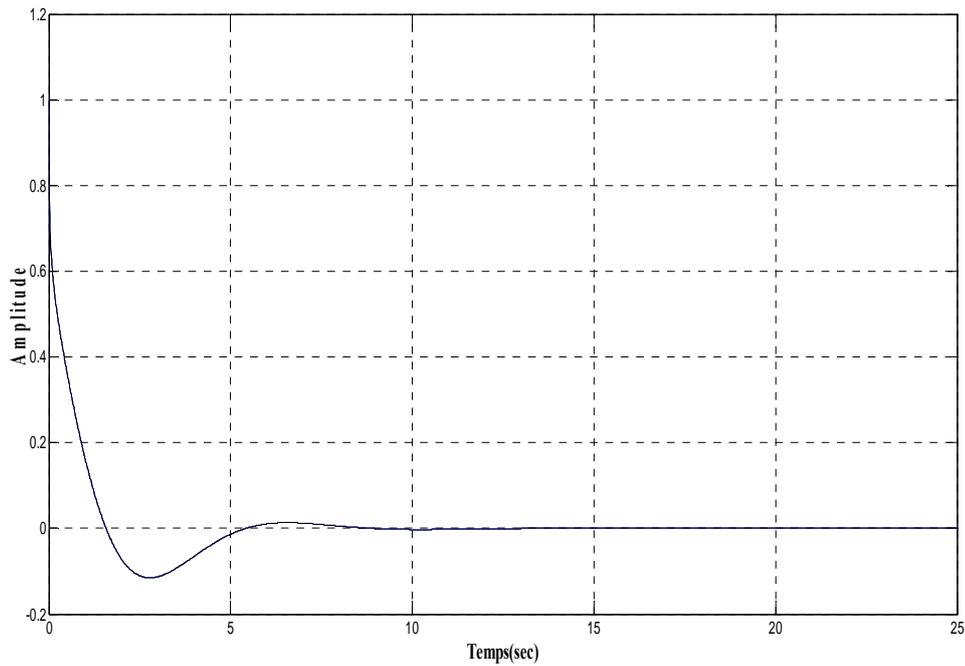
$$x(t) = (0.5)F_{0,9}[(-0.35 + 0.937j), t] + (0.5)F_{0,9}[(-0.35 - 0.937j), t] \\ = (0.5)t^{-0.1} \sum_{n=0}^{100} \frac{(-0.35 - 0.937j)^n t^{0.9n}}{\Gamma(0.9n + 0.9)} + (0.5)t^{-0.1} \sum_{n=0}^{100} \frac{(-0.35 + 0.937j)^n t^{0.9n}}{\Gamma(0.9n + 0.9)}$$

La réponse indicielle du système obtenue à partir de l'approximation par une fonction rationnelle comme:

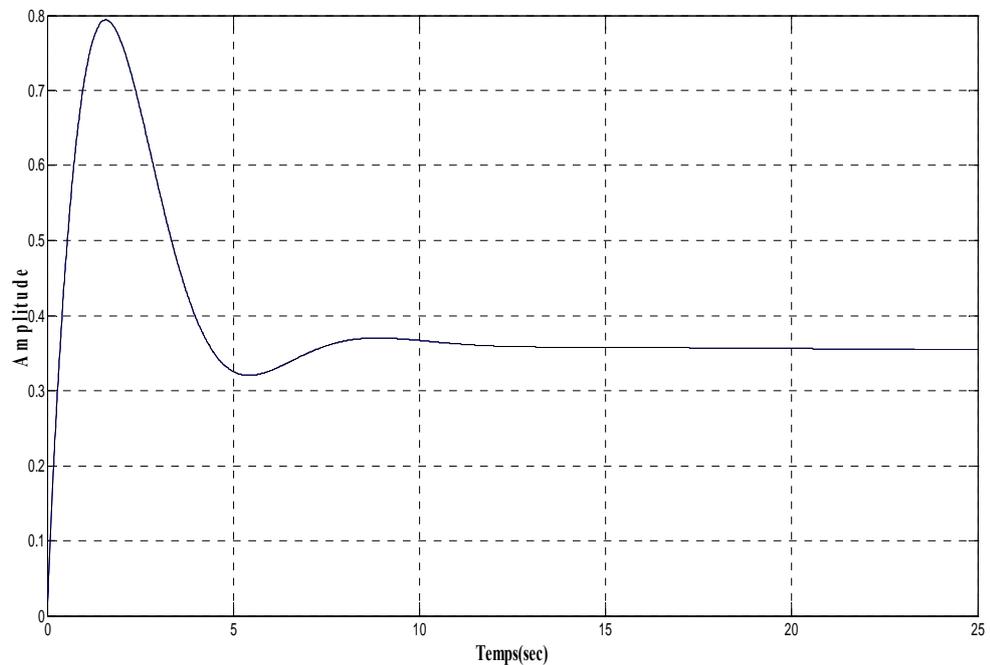
$$x(t) = 0.35 - \sum_{i=1}^{297} \left( \frac{0.049}{\cosh\{0.126(149-i)\} + 0.951} \right) \\ \times \exp(-0.221(1.15)^{(i-149)}t) \sin(0.975((1.15)^{(i-149)}t + 1.213))$$

est représentée dans la figure 3.16 ainsi que celle obtenue à partir de la fonction Mittag-Leffler donnée sous la forme polynomiale comme [23] :

$$x(t) = (0.175 + 0.469j) \left\{ 1 - E_{0,9}[(-0.35 + 0.937j)t^{0.46}] \right\} + (0.175 - 0.469j) \left\{ 1 - E_{0,9}[(-0.35 - 0.937j)t^{0.46}] \right\} \\ = (0.175 + 0.469j) \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{100} \frac{(-0.35 + 0.937j)^n t^{0.9n}}{\Gamma(0.9n + 1)} \right\} + (0.175 - 0.469j) \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{100} \frac{(-0.350.937j)^n t^{0.9n}}{\Gamma(0.9n + 1)} \right\}$$



**Figure 3.15 :** La réponse impulsionnelle du système cosinus amorti d'ordre fractionnaire à partir de la méthode d'approximation par une fonction rationnelle proposée et celle utilisant la fonction de la réponse impulsionelle généralisé, pour  $\xi=0.35$  et  $m=0.9$ .



**Figure 3.16 :** La réponse indicielle du système cosinus amorti d'ordre fractionnaire à partir de la méthode d'approximation par une fonction rationnelle proposée et celle utilisant la fonction de Mittag\_Leffler, pour  $\xi=0.35$  et  $m=0.9$ .

### 3.5.4 Remarques

Dans cette section, on a pu tirer quelques remarques concernant l'analogie entre les systèmes d'ordre entier et les types de systèmes d'ordre fractionnaire. Considérons les deux systèmes d'ordre fractionnaire définis respectivement par les deux équations différentielles d'ordre fractionnaire des équations (3.31) et (3.32). Leurs fonctions de transfert sont données par les équations (3.33) et (3.34), respectivement. Les réponses impulsionnelles de ces deux systèmes sont, respectivement, données par les équations (3.65) et (3.85) comme suit:

$$x_{SA}(t) = \sum_{i=1}^{2N-1} \omega_i k_i \exp(-\alpha \omega_i t) \sin\left(\omega_i \left(\sqrt{1-\alpha^2}\right)t + \left(\frac{m-1}{m}\right)\varphi\right) \quad (3.88)$$

$$x_{CA}(t) = \sum_{i=1}^{2N-1} \omega_i k_i \exp(-\alpha \omega_i t) \cos\left(\omega_i \left(\sqrt{1-\alpha^2}\right)t + \left(\frac{m-1}{m}\right)\varphi\right) \quad (3.89)$$

A partir des deux équations précédentes, on peut remarquer que chacun des deux systèmes d'ordre fractionnaire étudiés consiste en une combinaison pondérée de systèmes élémentaires du second ordre régulier que chacun contribue pour construire le système d'ordre fractionnaire.

De la section §.3.5.1, pour une parfaite approximation, les équations (3.88) et (3.89) deviennent :

$$x_{SA}(t) = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \left\{ \sum_{i=1}^{2N-1} \omega_i k_i \exp(-\alpha \omega_i t) \sin\left(\omega_i \left(\sqrt{1-\alpha^2}\right)t + \left(\frac{m-1}{m}\right)\varphi\right) \right\} \quad (3.90)$$

$$x_{CA}(t) = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \left\{ \sum_{i=1}^{2N-1} \omega_i k_i \exp(-\alpha \omega_i t) \cos\left(\omega_i \left(\sqrt{1-\alpha^2}\right)t + \left(\frac{m-1}{m}\right)\varphi\right) \right\} \quad (3.91)$$

Dans ce cas, quand  $m$  tend vers 1, le paramètre  $\alpha$  de l'équation (3.59) devient  $\alpha = \zeta$  et le paramètre  $\omega_i$  l'équation (3.61) devient  $\omega_i = (1/\tau_0) = \omega_0$ , alors les deux équations (3.90) et (3.91) deviennent :

$$x_{SA}(t) = \sum_{i=1}^{2N-1} \omega_0 k_i \exp(-\xi \omega_0 t) \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t\right) = \left[ \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \right] \omega_0 \exp(-\xi \omega_0 t) \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t\right) \quad (3.92)$$

$$x_{CA}(t) = \sum_{i=1}^{2N-1} \omega_0 k_i \exp(-\xi \omega_0 t) \cos\left(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t\right) = \left[ \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \right] \omega_0 \exp(-\xi \omega_0 t) \cos\left(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t\right) \quad (3.93)$$

Et comme on a  $\left[ \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \right] = 1$ , on aura donc :

$$x_{SA}(t) = \omega_0 \exp(-\xi\omega_0 t) \sin(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t) \quad (3.94)$$

$$x_{CA}(t) = \omega_0 \exp(-\xi\omega_0 t) \cos(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t) \quad (3.95)$$

On note aussi que pour  $m=1$ , les deux systèmes d'ordre fractionnaire définis, respectivement, par les équations (3.31) et (3.32) deviennent deux systèmes réguliers du second ordre comme :

$$(\tau_0)^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\xi\tau_0 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = (\sqrt{1-\xi^2}) e(t) \quad (3.96)$$

$$(\tau_0)^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\xi\tau_0 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \tau_0 \frac{de(t)}{dt} + \xi e(t) \quad (3.97)$$

et leurs réponses impulsionnelles respectives sont données par :

$$x_S(t) = \omega_0 \exp(-\xi\omega_0 t) \sin(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t) \quad (3.98)$$

$$x_C(t) = \omega_0 \exp(-\xi\omega_0 t) \cos(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t) \quad (3.99)$$

Ces réponses impulsionnelles sont exactement les réponses impulsionnelles  $x_{SA}(t)$  et  $x_{CA}(t)$  des équations (3.94) et (3.95). Alors, on peut conclure que les deux systèmes réguliers de second ordre des équations (3.96) et (3.97) sont des cas particuliers des deux systèmes d'ordre fractionnaire des équations (3.31) et (3.32) pour  $m=1$ .

### 3.5.4 Approximation par la méthode du ZPF

Une autre méthode est appliquée pour l'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire du type (3.31) et (3.32). Le principe de cette méthode est basé sur la technique d'approximation par les ZPF mentionnée dans (§.2.5.2.2) [52]. Cette approximation sera exploitée ultérieurement, pour l'analyse et l'extraction des caractéristiques de ce type de systèmes. Le système d'ordre fractionnaire est défini dans ce contexte par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire suivante [59] :

$$(\tau_0)^{2m} \frac{d^{2m} x(t)}{dt^{2m}} + 2\xi(\tau_0)^m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + x(t) = e(t) \quad (3.100)$$

Pour  $1 < 2m < 2$ ,  $0 < \xi < 1$  et  $\tau_0 > 0$ . Sa fonction de transfert est donnée par la fonction irrationnelle suivante :

$$G(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{1}{[(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1]} \quad (3.101)$$

Cette fonction de transfert sera modulée par la fonction suivante :

$$G(s) = \frac{1}{(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1} \cong \frac{(1 + \tau_0 s)^{(2-2m)}}{(\tau_0 s)^2 + 2\gamma(\tau_0 s) + 1} = G_N(s)G_D(s) \quad (3.102)$$

où

$$G_N(s) = (1 + \tau_0 s)^{(2-2m)} \quad (3.103)$$

est le zéro à puissance fractionnaire (ZPF), avec  $0 < (2-2m) < 1$ .

$$G_D(s) = \frac{1}{(\tau_0 s)^2 + 2\gamma(\tau_0 s) + 1} \quad (3.104)$$

est un système de deuxième ordre régulier. En appliquant la méthode d'approximation (2.5.2.2), on peut montrer que :

$$\text{Pour } \omega \ll 1/\tau_0 \quad |G(j\omega)| = 1 \cong 1$$

$$\text{Pour } \omega \gg 1/\tau_0 \quad |G(j\omega)| = \frac{1}{(\tau_0 \omega)^{2m}} \cong \frac{(\tau_0 \omega)^{(2-2m)}}{(\tau_0 \omega)^2} = \frac{1}{(\tau_0 \omega)^{2m}}$$

$$\text{Pour } \omega = 1/\tau_0 \quad |G(j\omega)| = \frac{1}{|(j)^{2m} + 2\xi(j)^m + 1|} \cong \frac{|(1+j)^{(2-2m)}|}{|2\gamma j|}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \cos(\pi m) + 2\xi \cos\left(\frac{\pi m}{2}\right)\right)^2 + \left(\sin(\pi m) + 2\xi \sin\left(\frac{\pi m}{2}\right)\right)^2}} \cong \frac{\sqrt{2}^{2-2m}}{2\gamma} \quad (3.105)$$

Pour satisfaire l'égalité de l'équation précédente, le facteur d'amortissement  $\gamma$  du système de deuxième ordre régulier doit être donné par :

$$\gamma = \sqrt{\frac{\left(1 + 2\xi^2 + 4\xi \cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) + \cos(\pi m)\right)}{2^{2m-1}}} \quad (3.106)$$

L'approximation du ZPF donnée en équation (3.103) par une fonction rationnelle est donnée sous la forme suivante [59]:

$$G_N(s) = (1 + \tau_0 s)^{(2-2m)} = \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (3.107)$$

Donc, l'équation (3.102) devient :

$$G(s) = \frac{1}{(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1} \cong \frac{1}{(\tau_0 s)^2 + 2\gamma(\tau_0 s) + 1} \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (3.108)$$

Les pôles et les zéros de l'approximation ont une forme géométrique progressive avec une erreur d'approximation prescrite  $y$  en dB et une bande de fréquence d'approximation  $\omega_{\max}$ . L'erreur  $y$  et la bande de fréquence  $\omega_{\max}$  qui est un multiple de  $\omega_H$  sont donnés, les autres paramètres de l'approximation sont déterminés comme suit :

$$a = 10^{\left\lceil \frac{y}{10[1-(2-2m)]} \right\rceil}, \quad b = 10^{\left\lceil \frac{y}{10(2-2m)} \right\rceil}, \quad z_0 = \frac{1}{\tau_0} 10^{\left\lceil \frac{y}{20(2-2m)} \right\rceil}, \quad p_0 = az_0 \quad \text{et } N = \text{Integer} \left\lceil \frac{\log \left( \frac{\omega_{\max}}{z_0} \right)}{\log(ab)} \right\rceil$$

Les zéros  $z_i$  et les pôles  $p_i$  de la fonction rationnelle de l'équation (3.108) sont tirés de la manière suivante :

$z_i = z_0(ab)^i$  et  $p_i = p_0(ab)^i$  pour  $i=0, 1, \dots, N$ . Donc, l'équation (3.108) devient :

$$G(s) = \frac{1}{(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1} \cong \frac{1}{(\tau_0 s)^2 + 2\gamma(\tau_0 s) + 1} \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_0(ab)^i}\right)} \quad (3.109)$$

### 3.5.4.1 Les réponses temporelles

Par décomposition en éléments simples de l'équation (3.109), la fonction de transfert  $G(s)$  est représentée par une combinaison des fonctions élémentaires régulières, comme suit :

$$G(s) = \frac{1}{(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1} \cong \frac{As + B}{(\tau_0 s)^2 + 2\gamma(\tau_0 s) + 1} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_0(ab)^i}\right)} \quad (3.110)$$

Où les  $k_i$  ( $i=0, 1, \dots, N$ ) sont les résidus des pôles qui sont calculés par :

$$k_i = \left[ \frac{1}{(\tau_0 p_0(ab)^i)^2 - 2\gamma(\tau_0 p_0(ab)^i) + 1} \right] \frac{\prod_{j=0}^N [1 - a(ab)^{(i-j)}]}{\prod_{j=0, j \neq i}^N [1 - (ab)^{(i-j)}]} \quad (3.111)$$

Les constantes A et B sont données par :

$$G(0) = B + \sum_{i=0}^N k_i = 1, \quad \text{donc } B = G(0) - \sum_{i=0}^N k_i = 1 - \sum_{i=0}^N k_i$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = 0 = \frac{A}{\tau_0^2} + \sum_{i=0}^N k_i p_i, \text{ donc } A = -\tau_0^2 \sum_{i=0}^N k_i p_i$$

Donc, on a :

$$G(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{As + B}{(\tau_0 s)^2 + 2\gamma(\tau_0 s) + 1} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (3.112)$$

Alors, on a :

$$X(s) = \frac{As + B}{(\tau_0 s)^2 + 2\gamma(\tau_0 s) + 1} E(s) + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} E(s) \quad (3.113)$$

Pour  $e(t) = \delta(t)$  une impulsion unité  $E(s) = 1$ , alors la réponse impulsionnelle de ce système est donnée par :

$$x(t) = C \exp\left(-\frac{\gamma}{\tau_0} t\right) \sin\left(\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\tau_0} t + \phi\right) + \sum_{i=0}^N k_i p_i (ab)^i \exp(-p_i (ab)^i t) \quad (3.114)$$

Où les constantes  $C$  et  $\Phi$ , sont obtenus par [58] :

$$C = \frac{B}{\tau_0} \sqrt{\frac{A^2 - 2AB\gamma\tau_0 + (B\tau_0)^2}{(B\tau_0)^2(1-\gamma^2)}} \quad \text{et} \quad \phi = \arctg\left(\frac{A\sqrt{1-\gamma^2}}{B\tau_0 - A\gamma}\right) \quad (3.115)$$

Maintenant, pour une entrée échelon unité,  $E(s) = 1/s$ , l'équation (3.113) devient :

$$X(s) = \frac{As + B}{(\tau_0 s)^2 + 2\gamma(\tau_0 s) + 1} \frac{1}{s} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \frac{1}{s} \quad (3.116)$$

La réponse indicielle de ce système est obtenue par :

$$x(t) = 1 + \tau_0 C \exp\left(-\frac{\gamma}{\tau_0} t\right) \sin\left(\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\tau_0} t + \phi_1\right) - \sum_{i=0}^N k_i p_i \exp(-p_i t) \quad (3.117)$$

Où  $\Phi_1$  est donnée par [58] :

$$\phi_1 = \arctg\left(\frac{A\sqrt{1-\gamma^2}}{B\tau_0 - A\gamma}\right) - \arctg\left(\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{-\gamma}\right) \quad (3.118)$$

On remarque que le système dérivé à partir de cette méthode d'approximation, représente un système de second ordre, qui assure l'amortissement du système, avec un facteur d'amortissement  $\gamma$ , et une somme de systèmes élémentaires du premier ordre.

### 3.5.4.2 Exemple illustratif

Dans cette section, on va présenter un exemple numérique pour montrer l'utilité de la méthode d'approximation proposée. Soit le system d'ordre fractionnaire oscillatoire généralisé représenté par (3.100), avec  $\xi=0.45$ ,  $m=0.85$  et  $\tau_0=1$  tel que :

$$\frac{d^{1.7}x(t)}{dt^{1.7}} + 0.9 \frac{d^{0.85}x(t)}{dt^{0.85}} + x(t) = e(t)$$

Sa fonction de transfert est donnée par:

$$G(s) = \frac{1}{(s)^{1.7} + 0.9(s)^{0.85} + 1} \cong \frac{(1+s)^{(0.3)}}{(s)^2 + 1.5167(s) + 1}$$

Pour une bande de fréquence  $[0, w_H]=[0, 1000\text{rad/s}]$ , l'approximation du ZPF par une fonction rationnelle est donnée par :

$$(1 + \tau_0 s)^{(0.3)} = \frac{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{z_0(ab)^i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{p_0(ab)^i} \right)}$$

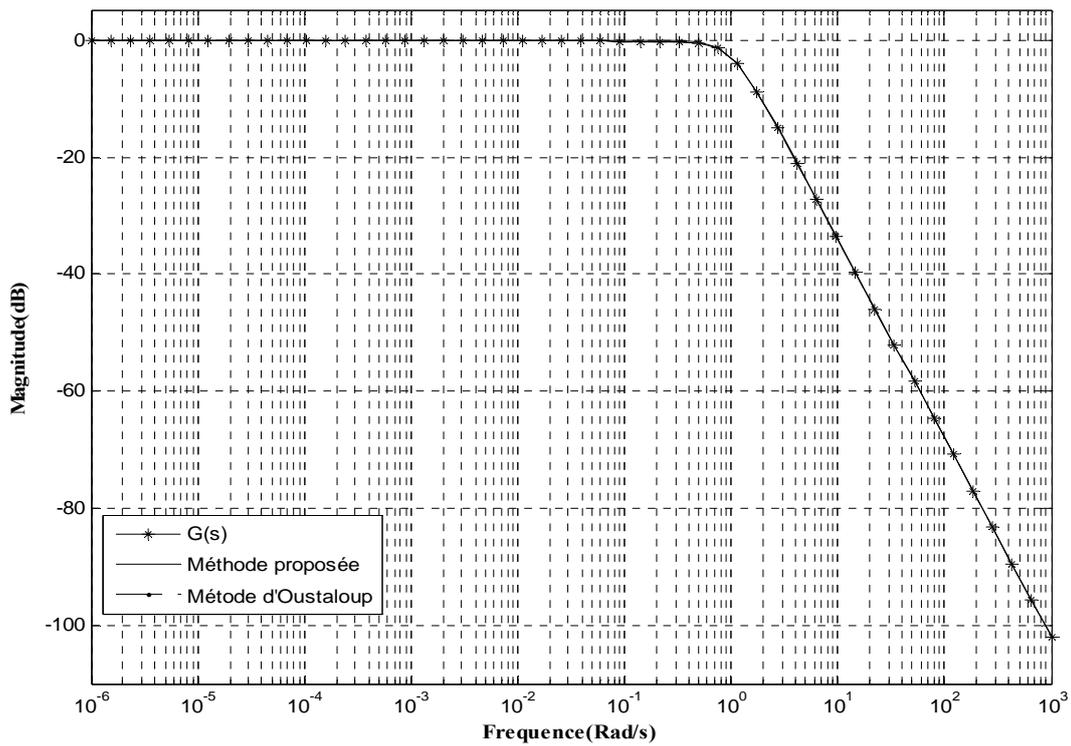
Pour une erreur d'approximation  $y=1$  dB et une bande de fréquence d'approximation  $w_{\max}=100w_H=100000$  rad/s, les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $z_0$ ,  $p_0$  et  $N$  sont calculés comme suit :

$a=1.3895$ ,  $b=2.1544$ ,  $z_0=1.4678\text{rad/s}$ ,  $p_0=2.0395$  rad/s et  $N=11$ .

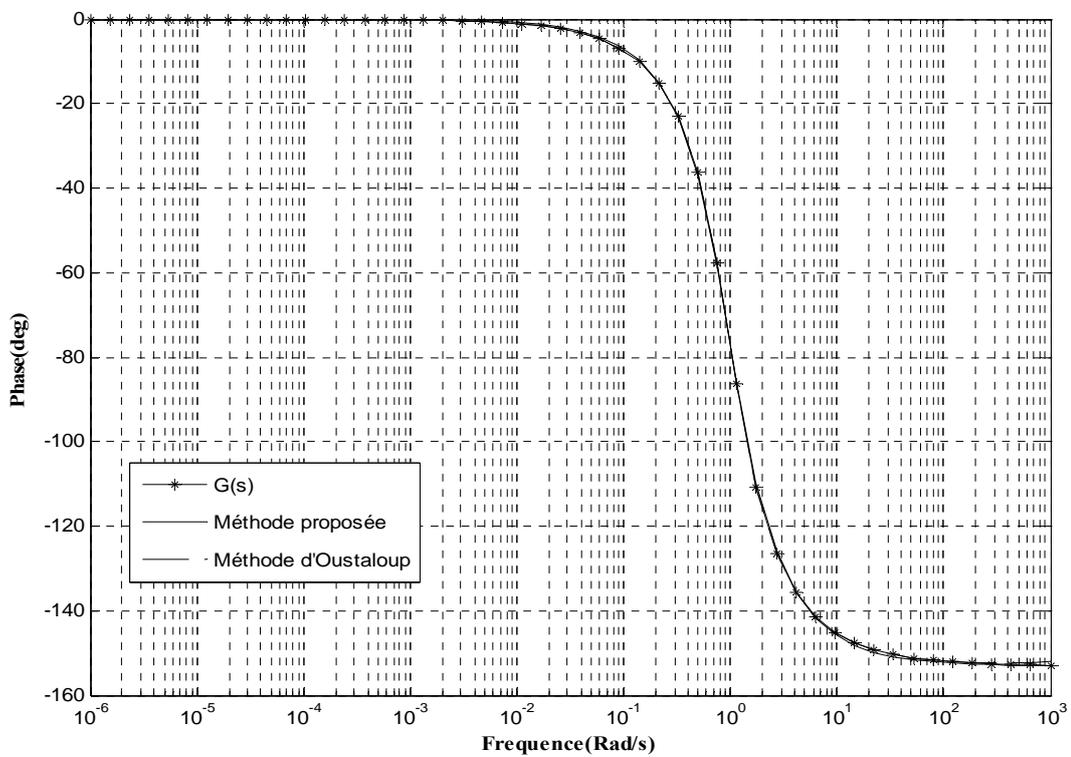
Donc:

$$G(s) = \frac{1}{(s)^{1.7} + 0.9(s)^{0.85} + 1} \cong \frac{1}{(s)^2 + 1.5167(s) + 1} \frac{\prod_{i=0}^{11} \left( 1 + \frac{s}{1.4678(2.9936)^i} \right)}{\prod_{i=0}^{11} \left( 1 + \frac{s}{2.0395(2.9936)^i} \right)}$$

Les figures 3.17 et 3.18 montrent le diagramme de Bode (module et phase) du système d'ordre fractionnaire oscillatoire généralisé, son approximation rationnelle et une comparaison avec la méthode d'Oustaloup [28]

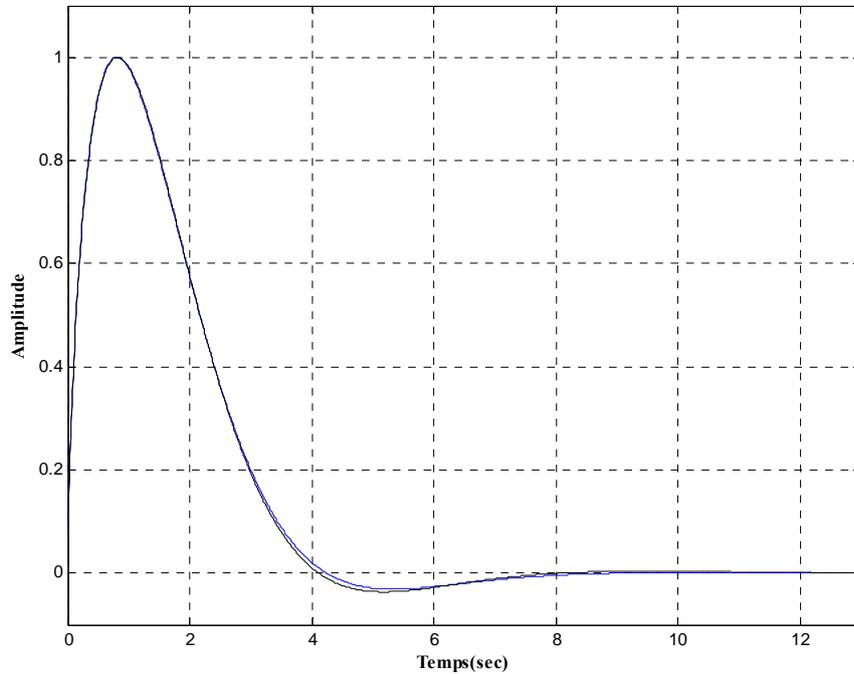


**Figure 3.17 :** Diagramme de Bode (Module) de la fonction de transfert  $G(s) = \frac{1}{[s^{1.7} + 0.9s^{0.85} + 1]}$ , la méthode proposée et la méthode d'Oustaloup.

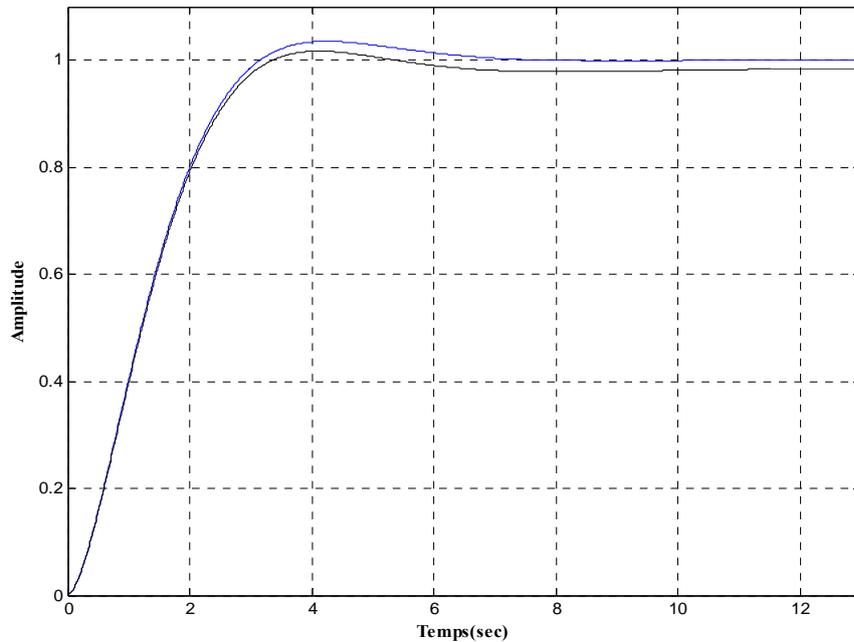


**Figure 3.18 :** Diagramme de Bode (Phase) de la fonction de transfert  $G(s) = \frac{1}{[s^{1.7} + 0.9s^{0.85} + 1]}$ , la méthode proposée et la méthode d'Oustaloup.

Les figures 3.19 et 3.20 montrent les réponses impulsionnelle et indicielle de ce système obtenues a partir de la méthode proposée, et par la fonction de la réponse impulsionnelle généralisée utilisant la fonction Mittag-Leffler [23].



**Figure 3.19:** La réponse impulsionnelle du système  $\frac{d^{1.7}x(t)}{dt^{1.7}} + (0.9)\frac{d^{0.85}x(t)}{dt^{0.85}} + x(t) = e(t)$  a partir de la méthode proposée et celui utilisant La fonction Mittag-Leffler.



**Figure 3.20:** La réponse indicielle du système  $\frac{d^{1.7}x(t)}{dt^{1.7}} + (0.9)\frac{d^{0.85}x(t)}{dt^{0.85}} + x(t) = e(t)$  a partir de la méthode proposée et celui utilisant La fonction Mittag-Leffler.

### 3.6 Implémentation des fonctions sinus et cosinus amorties d'ordre fractionnaire par des circuits analogiques

A cause de leur représentation par des fonctions de transfert irrationnelles, l'implémentation des systèmes d'ordre fractionnaire par des circuits analogiques est impossible. La méthode la plus pratique pour implémenter ce type de systèmes est l'exploitation des fonctions de transfert rationnelles obtenues à partir des approximations de ces systèmes. Dans ce qui suit, on va établir des implémentations pour les fonctions sinus et cosinus amorties d'ordre fractionnaire, par des circuits analogiques, basant sur leurs approximations définies auparavant.

#### 3.6.1 Implémentation de la fonction sinus amortie d'ordre fractionnaire

De l'équation (3.58), la fonction rationnelle d'approximation du système sinus amorti d'ordre fractionnaire est donnée comme suit :

$$G_{SA}(s) = \frac{X_{SA}(s)}{E(s)} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{[(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1]} = \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \frac{\sqrt{1-\xi^2} + a_i s}{1 + 2\alpha \frac{s}{\omega_i} + \frac{s^2}{\omega_i^2}} \quad (3.119)$$

A partir de l'équation (3.60), on peut montrer que les paramètres  $a_i$  (pour  $i = 1, \dots, 2N-1$ ) sont négatifs, alors pour implémenter la fonction  $G_{SA}(s)$  on doit la mettre sous la forme suivante :

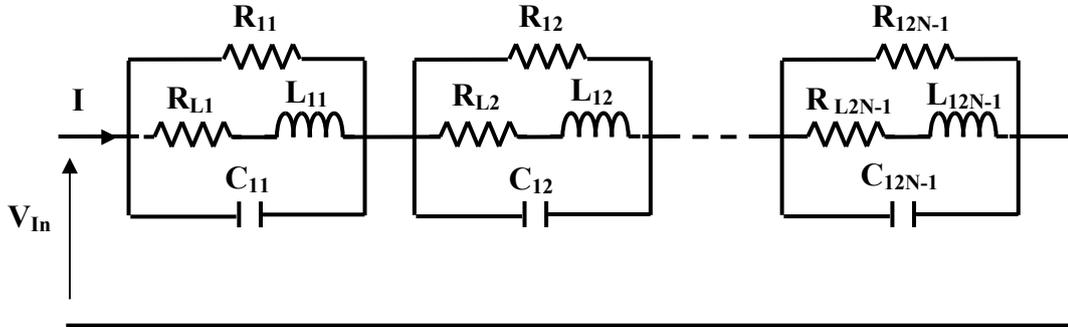
$$G_{SA}(s) = \frac{X_{SA}(s)}{E(s)} = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i \sqrt{1-\xi^2} + k_i a_i s}{1 + 2\alpha \frac{s}{\omega_i} + \frac{s^2}{\omega_i^2}} = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{\gamma_i + \delta_i s}{1 + 2\alpha \frac{s}{\omega_i} + \frac{s^2}{\omega_i^2}} - \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{\mu_i s}{1 + 2\alpha \frac{s}{\omega_i} + \frac{s^2}{\omega_i^2}} \quad (3.120)$$

avec  $\gamma_i = k_i \sqrt{1-\xi^2}$  et  $(\delta_i - \mu_i) = k_i a_i$  (pour  $i = 1, \dots, 2N-1$ ) sont des nombres positifs. Donc, on peut écrire :

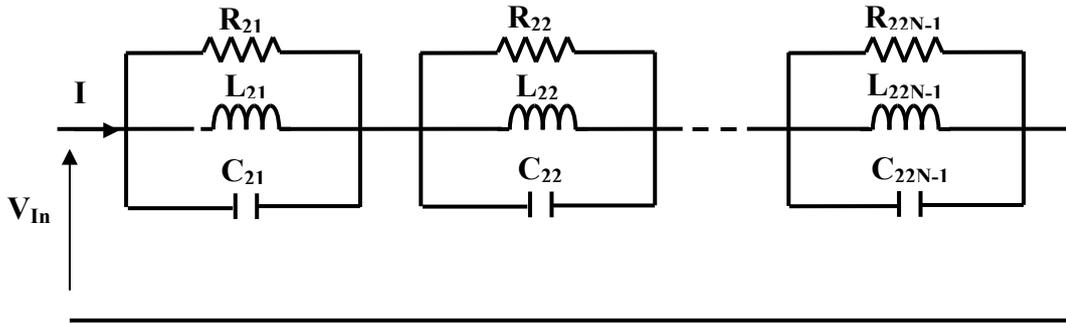
$$G_{SA}(s) = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{\gamma_i + \delta_i s}{1 + 2\alpha \frac{s}{\omega_i} + \frac{s^2}{\omega_i^2}} - \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{\mu_i s}{1 + 2\alpha \frac{s}{\omega_i} + \frac{s^2}{\omega_i^2}} = Z_1(s) - Z_2(s) \quad (3.121)$$

$$\text{avec } Z_1(s) = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{\gamma_i + \delta_i s}{1 + 2\alpha \frac{s}{\omega_i} + \frac{s^2}{\omega_i^2}} \text{ et } Z_2(s) = \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{\mu_i s}{1 + 2\alpha \frac{s}{\omega_i} + \frac{s^2}{\omega_i^2}} .$$

Les fonctions  $Z_1(s)$  et  $Z_2(s)$  peuvent être les impédances de deux circuits RLC parallèle d'un réseau de  $(2N-1)$  cellules connectées en série représentées, respectivement, sur les figures 3.21 et 3.22 comme suit :



**Figure 3.21** : Circuit analogique implémentant l'impédance  $Z_1(s)$ .



**Figure 3.22** : Circuit analogique implémentant l'impédance  $Z_2(s)$ .

Alors, les impédances  $Z_1(s)$  et  $Z_2(s)$  de ces deux circuits sont données, respectivement, par :

$$Z_1(s) = \sum_{i=1}^{2N-1} \left( \frac{R_{Li}}{R_{Li} + R_{Li}} \right) \left[ \frac{R_{Li} + L_{Li}s}{1 + \left( \frac{L_{Li} + C_{Li}R_{Li}R_{Li}}{R_{Li} + R_{Li}} \right) s + \left( \frac{R_{Li}C_{Li}L_{Li}}{R_{Li} + R_{Li}} \right) s^2} \right] \quad (3.122)$$

$$Z_2(s) = \sum_{i=1}^{2N-1} \left[ \frac{L_{2i}s}{1 + \frac{L_{2i}}{R_{2i}}s + C_{2i}L_{2i}s^2} \right] \quad (3.123)$$

Comme tous les éléments des impédances  $Z_1(s)$  et  $Z_2(s)$  ont le même dénominateur, on aura donc :

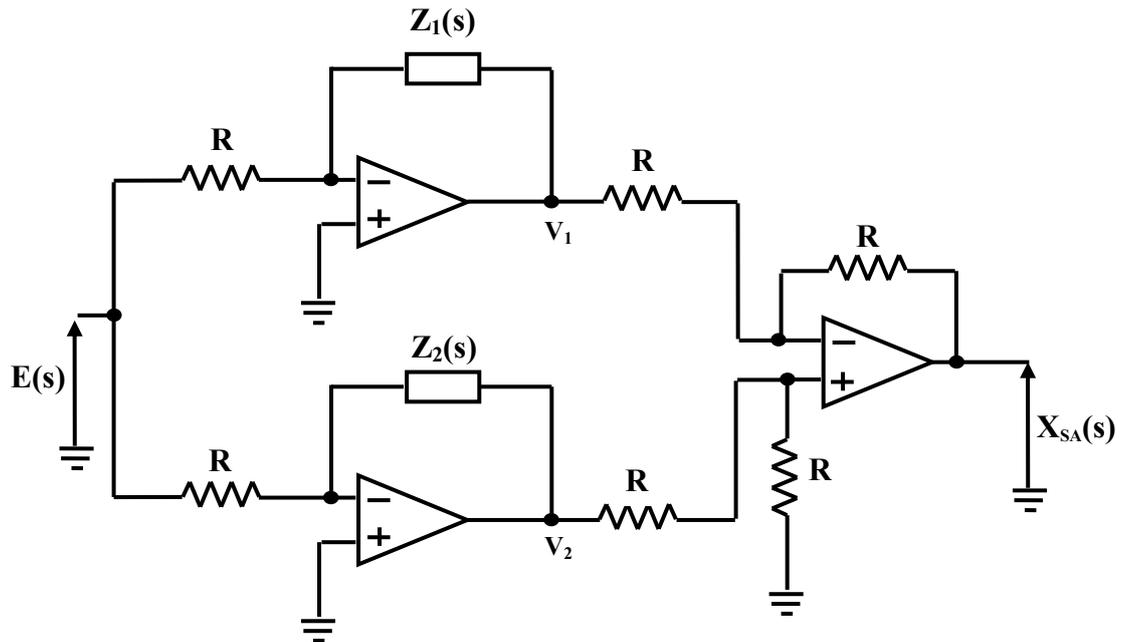
$$L_{2i} = L_{1i}, C_{2i} = \frac{R_{1i}}{R_{1i} + R_{Li}} C_{1i} \text{ et } R_{2i} = \frac{L_{1i}(R_{1i} + R_{Li})}{L_{1i} + C_{1i}R_{1i}R_{Li}} \quad (3.124)$$

et

$$Z_1(s) = \sum_{i=1}^{2N-1} \left( \frac{R_{1i}}{R_{1i} + R_{Li}} \right) \left[ \frac{R_{Li} + L_{1i}s}{1 + \frac{L_{2i}}{R_{2i}}s + C_{2i}L_{2i}s^2} \right] \quad (3.125)$$

$$Z_2(s) = \sum_{i=1}^{2N-1} \left[ \frac{L_{2i}s}{1 + \frac{L_{2i}}{R_{2i}}s + C_{2i}L_{2i}s^2} \right] \quad (3.126)$$

L'implémentation de la fonction de transfert  $G_{SA}(s) = Z_1(s) - Z_2(s)$  peut être réalisée par un circuit analogique représenté par la figure 3.23 comme suit :



**Figure 3.23 :** Circuit analogique implémentant le système sinus amorti d'ordre fractionnaire

où  $R$  est une résistance de  $1\Omega$ .

La tension de sortie  $X_{SA}(s)$  de ce circuit est donnée par :

$$X_{SA}(s) = \frac{R}{R} [V_2(s) - V_1(s)] = [V_2(s) - V_1(s)] \quad (3.127)$$

où, les tensions  $V_1(s)$  et  $V_2(s)$  sont données par :

$$V_1(s) = -\frac{Z_1}{R}E(s) = -Z_1E(s) \quad \text{et} \quad V_2(s) = -\frac{Z_2}{R}E(s) = -Z_2E(s) \quad (3.128)$$

Alors, la tension  $X_{SA}(s)$  devienne :

$$X_{SA}(s) = (Z_1 - Z_2)E(s) \quad (3.129)$$

par conséquent, la fonction de transfert du circuit de la figure 3.23 est donnée par :

$$G_{SA}(s) = \frac{X_{SA}(s)}{E(s)} = (Z_1 - Z_2) \quad (3.130)$$

A partir des équations (3.125) et (3.126), on peut écrire  $G_{SA}(s)$  sous la forme :

$$G_{SA}(s) = \sum_{i=1}^{2N-1} \left\{ \left( \frac{R_{li}}{R_{li} + R_{Li}} \right) \left[ \frac{R_{Li} + L_{li}s}{1 + \frac{L_{2i}}{R_{2i}}s + C_{2i}L_{2i}s^2} \right] - \left[ \frac{L_{2i}s}{1 + \frac{L_{2i}}{R_{2i}}s + C_{2i}L_{2i}s^2} \right] \right\} \quad (3.131)$$

$$G_{SA}(s) = \sum_{i=1}^{2N-1} \left( \frac{R_{Li}}{R_{li} + R_{Li}} \right) \left[ \frac{R_{li} - L_{li}s}{1 + \frac{L_{2i}}{R_{2i}}s + C_{2i}L_{2i}s^2} \right] \quad (3.132)$$

Alors, à partir des équations (3.119) et (3.132) et pour  $i = 1, \dots, 2N-1$ , on peut écrire :

$$\sqrt{1-\xi^2}k_i = \frac{R_{li}R_{Li}}{R_{li} + R_{Li}}, \quad \frac{a_i}{\sqrt{1-\xi^2}} = -\frac{L_{li}}{R_{li}}, \quad \frac{2\alpha}{\omega_i} = \frac{L_{li} + C_{li}R_{li}R_{Li}}{R_{li} + R_{Li}} \quad \text{et} \quad \omega_i^2 = \frac{R_{li} + R_{Li}}{R_{li}C_{li}L_{li}} \quad (3.133)$$

Donc, pour  $i = 1, \dots, 2N-1$ , les valeurs des résistances, des inductances et des capacités du circuit analogique réalisant la fonction sinus amortie d'ordre fractionnaire, dans une bande de fréquence d'intérêt pratique, sont données par:

$$R_{Li} = k_i \frac{\left( \sqrt{1-\xi^2} - 2\alpha\omega_i a_i \right) + \sqrt{\left( \sqrt{1-\xi^2} - 4\alpha\omega_i a_i \right) \sqrt{1-\xi^2} - 4\omega_i^2 a_i^2 (1-\alpha^2)}}{2} \quad (3.134)$$

$$R_{li} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}k_i R_{Li}}{R_{Li} - k_i \sqrt{1-\xi^2}}, \quad L_{li} = \frac{-a_i k_i R_{Li}}{R_{Li} - k_i \sqrt{1-\xi^2}} \quad \text{et} \quad C_{li} = \frac{R_{Li} - k_i \sqrt{1-\xi^2}}{-a_i k_i^2 \omega_i^2 \sqrt{1-\xi^2}} \quad (3.135)$$

$$R_{2i} = \frac{L_{li}(R_{li} + R_{Li})}{L_{li} + C_{li}R_{li}R_{Li}}, \quad L_{2i} = L_{li} \quad \text{et} \quad C_{2i} = \frac{R_{li}}{R_{li} + R_{Li}} C_{li} \quad (3.136)$$

### 3.6.2 Implémentation de la fonction cosinus amortie d'ordre fractionnaire

Pour la fonction de transfert rationnelle du système cosinus amorti d'ordre fractionnaire donnée par l'équation (3.78), on peut utiliser un circuit analogique simple que celui utiliser

pour le système sinus, ce circuit ne contient que des composants passifs. Donc, les amplificateurs opérationnels sont négligés, puisque tous les paramètres  $a_i$  ont un signe positif. Ce circuit est représenté par la figure 3.24.

$$G_{CA}(s) = \frac{X_{CA}(s)}{E(s)} = \frac{(\tau_0 s)^m + \xi}{[(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1]} = \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \frac{\xi + a_i s}{1 + 2\alpha \frac{s}{\omega_i} + \frac{s^2}{\omega_i^2}} = Z(s) \quad (3.137)$$

Où,  $Z(s)$  est l'impédance du circuit RLC parallèle d'un réseau de  $(2N-1)$  cellules connectées en série, comme elle est représentée sur la figure 3.24.  $Z(s)$  est donnée par l'équation suivante :

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \sum_{i=1}^{2N-1} \left( \frac{R_i}{R_i + R_{Li}} \right) \left[ \frac{R_{Li} + L_i s}{1 + \left( \frac{L_i + C_i R_i R_{Li}}{R_i + R_{Li}} \right) s + \left( \frac{R_i C_i L_i}{R_i + R_{Li}} \right) s^2} \right] \quad (3.138)$$

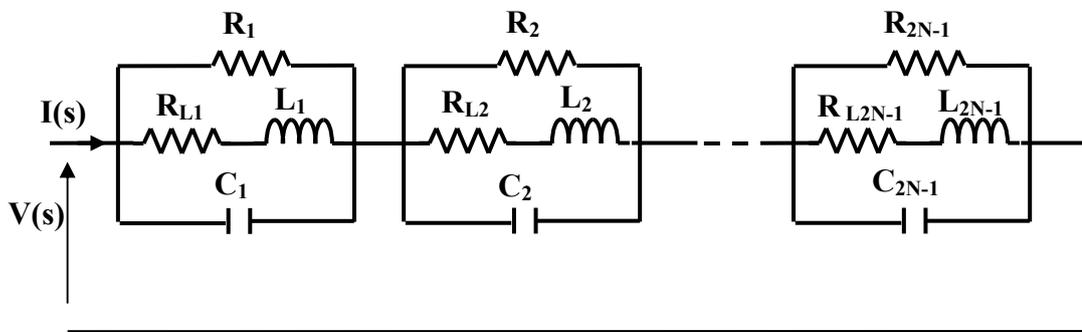
Donc, à partir des équations (3.137) et (3.138), et pour  $i = 1, \dots, 2N-1$ , on a :

$$\xi k_i = \frac{R_i R_{Li}}{R_i + R_{Li}}, \quad \frac{a_i}{\zeta} = \frac{L_i}{R_i}, \quad \frac{2\alpha}{\omega_i} = \frac{L_i + C_i R_i R_{Li}}{R_i + R_{Li}} \quad \text{et} \quad \omega_i^2 = \frac{R_i + R_{Li}}{R_i C_i L_i} \quad (3.139)$$

Alors, pour  $i = 1, \dots, 2N-1$ , les valeurs des résistances, inductances et capacités du circuit analogique modulant la fonction cosinus amortie d'ordre fractionnaire, dans une bande de fréquence d'intérêt pratique, sont données par :

$$R_{Li} = \frac{a_i^2 \omega_i^2 k_i \xi}{(1 - \alpha^2)} \quad (3.140)$$

$$R_i = \frac{\xi k_i R_{Li}}{R_{Li} - k_i \xi}, \quad L_i = \frac{a_i R_{Li}}{\xi} \quad \text{et} \quad C_i = \frac{1}{a_i k_i \omega_i^2} \quad (3.141)$$



**Figure 3.24 :** Réalisation d'un circuit analogique représentant le système cosinus amorti d'ordre fractionnaire.

### 3.6.3 Implémentation de l'approximation par ZPF

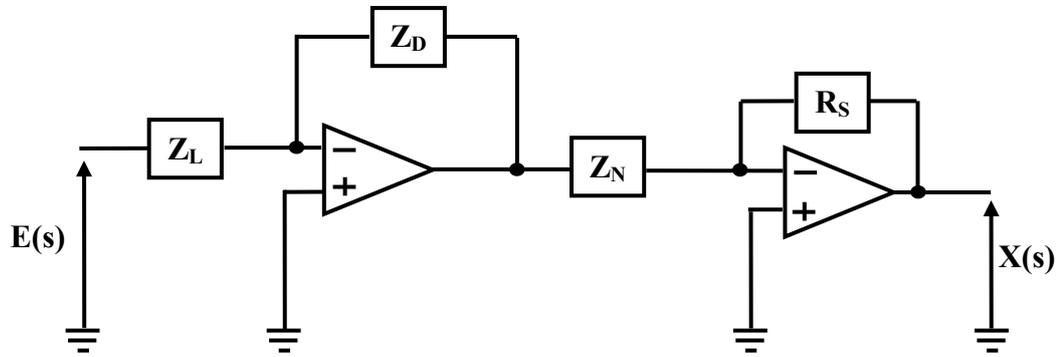
Le système d'ordre fractionnaire oscillatoire généralisé ne peut pas être réalisé directement par un circuit analogique à cause de sa fonction de transfert irrationnelle. Par contre, sa fonction rationnelle obtenue à partir de l'approximation (3.109), peut être réalisée par un circuit analogique comme celui représenté sur la figure 3.25. De l'équation (3.102) la fonction de transfert du système d'ordre fractionnaire oscillatoire généralisé est donnée par :

$$G(s) = \frac{1}{(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1} \cong \frac{(1 + \tau_0 s)^{(2-2m)}}{(\tau_0 s)^2 + 2\gamma(\tau_0 s) + 1} = G_N(s)G_D(s)$$

$$G_N(s) = (1 + \tau_0 s)^{(2-2m)}, \quad G_D(s) = \frac{1}{(\tau_0 s)^2 + 2\gamma(\tau_0 s) + 1}$$

La fonction de transfert  $G(s)$  peut être réalisée par un circuit analogique comme suit :

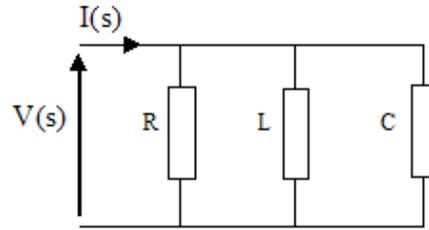
$$G(s) = \frac{1}{(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1} \cong \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{Z_D R_S}{Z_L Z_N} \quad (3.142)$$



**Figure 3.25 :** Réalisation d'un circuit analogique du système d'ordre fractionnaire oscillatoire généralisé.

Où  $R_S$  est une simple résistance de  $1\Omega$ ,  $Z_L=L_S$  est une impédance d'une simple inductance  $L$ ,  $Z_D$  des impédances du circuit RLC parallèle de la figure 3.26 qui est donné par :

$$Z_D = \frac{Ls}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1} \quad (3.143)$$



**Figure 3.26 :** Circuit RLC parallèle.

$Y_N = 1/Z_N = G_N(s) = (1 + \tau_0 s)^{(2-2m)}$  est l'admittance d'un circuit analogique représentant le ZPF :

$$G_N(s) = (1 + \tau_0 s)^{(2-m)} \cong \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} = \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_0(ab)^i}\right)} \quad (3.144)$$

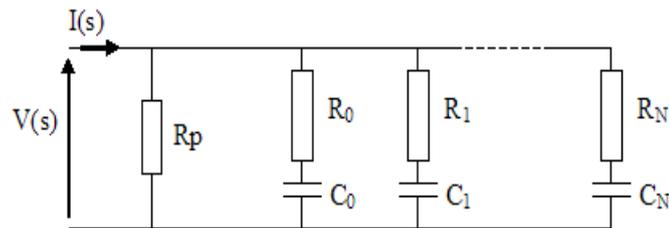
Cette fonction rationnelle peut se décomposer comme suit :

$$G_N(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{h_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_0(ab)^i}\right)} \quad (3.145)$$

avec  $G_0=1$  et  $i=0, 1, \dots, N$ .

$$h_i = -\frac{1}{p_0(ab)^i} \frac{\prod_{j=0}^N [1 - a(ab)^{(i-j)}]}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^N [1 - (ab)^{(i-j)}]} \quad (3.146)$$

Donc la fonction  $G_N(s)$  donnée par l'équation (3.145) est analogue à une admittance  $Y_N(s)$  composée d'une résistance et un réseau de  $(N+1)$  de cellules RC connectées en parallèle comme il montre la figure 3.27 :



**Figure 3.27 :** Réalisation d'un circuit analogique RC du ZPF.

On peut écrire l'admittance  $Y_N(s)$  du circuit précédant par :

$$Y_N(s) = \frac{1}{R_p} + \sum_{i=0}^N \left( \frac{sC_i}{1 + sR_iC_i} \right) \quad (3.147)$$

Les valeurs des composants du circuit analogique modulant le ZPF dans une bande de fréquence donnée, sont donnés pour  $i=0, 1, \dots, N$ , par :

$$G_0 = 1/R_p, \quad C_i = h_i \quad \text{et} \quad R_iC_i = \frac{1}{(ab)^i p_0} \quad (3.148)$$

Donc, La fonction de transfert donnée par l'équation (3.142) représentant le circuit de la figure 3.25 devient :

$$G(s) = \frac{1}{[(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1]} = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{Z_D R_S}{Z_L Z_N} = R_S \frac{\frac{Ls}{LCs^2 + \frac{Ls}{R} + 1}}{Ls} (1 + \tau_0 s)^{(2-2m)}$$

$$G(s) = \frac{1}{[(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1]} = \frac{X(s)}{E(s)} = R_S \frac{(1 + \tau_0 s)^{(2-2m)}}{LCs^2 + \frac{Ls}{R} + 1} = \frac{(1 + \tau_0 s)^{(2-2m)}}{(\tau_0 s)^2 + 2\gamma(\tau_0 s) + 1}$$

$$\text{Où, } \tau_0^2 = LC \quad \text{et} \quad \frac{L}{R} = 2\gamma\tau_0$$

Donc :

$$L = 2R\gamma\tau_0 \quad \text{et} \quad C = \frac{\tau_0}{2R\gamma}$$

### 3.7 Stabilité des fonctions sinus et cosinus amorties d'ordre fractionnaire

Les fonctions  $G_3(s)$  et  $G_4(s)$  du sinus et cosinus amorties d'ordre fractionnaires des équations (3.19) et (3.20) ont le même dénominateur  $D(s)$  donné par :

$$D(s) = [(\tau_0 s)^2 + 2\xi(\tau_0 s) + 1] = [1 + (\tau_1 s)^m][1 + (\tau_2 s)^m] = 0 \quad (3.149)$$

où,  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont deux complexes conjugués donnés par l'équation (3.46). Donc, on peut écrire:

$$[1 + (\tau_1 s)^m] = 0 \Rightarrow (\tau_1 s)^m = -1 \quad (3.150)$$

$$s^m = -\frac{1}{\tau_1^m} = -\frac{1}{\tau_0^m \left( \xi + j\sqrt{1 - \xi^2} \right)} = -\frac{\left( \xi - j\sqrt{1 - \xi^2} \right)}{\tau_0^m} = -\frac{1}{\tau_0^m} \exp(-j\varphi) \quad (3.151)$$

$$s^m = \frac{1}{\tau_0^m} \exp(j\pi) \exp(-j\varphi) = \frac{1}{\tau_0^m} \exp[j(\pi - \varphi)] \quad (3.152)$$

La stabilité des systèmes décrits par ces fonctions sera examinée par le critère de la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire de la section (§.2.3.2). La condition suffisante de stabilité est donc donnée comme suit [43] :

$$(\pi - \varphi) > \frac{\pi}{2} m \quad (3.153)$$

conduisant à :

$$\varphi < \frac{\pi}{2} (2 - m) \quad (3.154)$$

donc:

$$\arctg\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) < \frac{\pi}{2} (2 - m) \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) < \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2} (2 - m)\right] \quad (3.155)$$

En arrangeant l'équation ci-dessus, nous aurons :

$$\frac{(1-\xi^2)}{\xi^2} < \left\{\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2} (2 - m)\right]\right\}^2 \Rightarrow (1-\xi^2) < \xi^2 \left\{\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2} (2 - m)\right]\right\}^2 \Rightarrow 1 < \left(1 + \left\{\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2} (2 - m)\right]\right\}^2\right) \xi^2 \quad (3.156)$$

qui conduit, pour  $0 < m < 1$ , l'équation suivante :

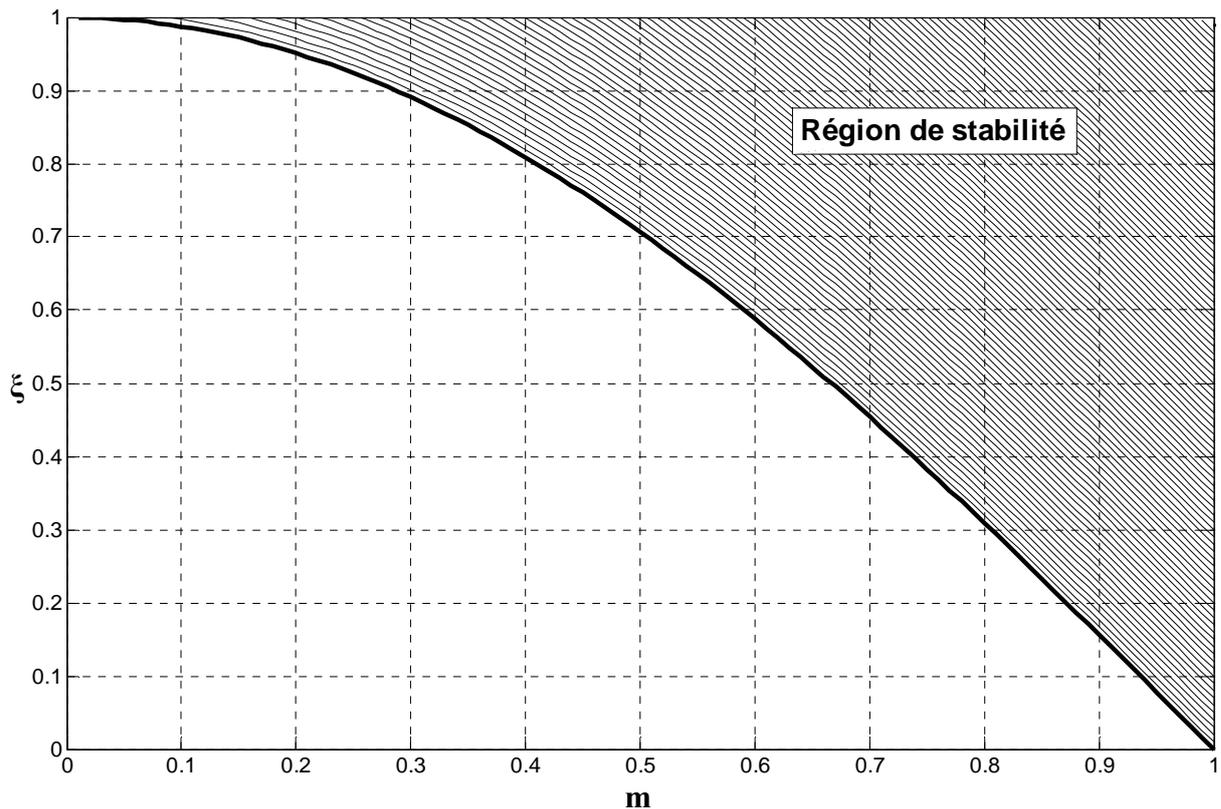
$$\xi > \frac{1}{\sqrt{1 + \left\{\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2} (2 - m)\right]\right\}^2}} = -\cos\left[\frac{\pi}{2} (2 - m)\right] \quad (3.157)$$

et à l'équation suivante pour  $0 < \xi < 1$ :

$$m > \left[2 - \frac{2}{\pi} a \cos(-\xi)\right] \quad (3.158)$$

Les deux équations précédentes, représentent la condition suffisante pour la stabilité des systèmes sinus et cosinus amortis d'ordre fractionnaire en fonction des paramètres  $m$  et  $\xi$ .

L'allure de la région de la stabilité est représentée par la figure 3.28, dans le plan  $[m, \xi]$ .



**Figure 3.28 :** Région de stabilité dans le plan  $[m, \xi]$ .

### 3.8 Conclusion

La première partie de ce chapitre a été consacrée à la présentation de deux systèmes fondamentaux d'ordre fractionnaire ainsi que l'approximation de leurs fonctions de transfert irrationnelles respectives par des fonctions rationnelles. Dans la seconde partie, nous avons introduit deux autres systèmes fondamentaux d'ordre fractionnaire qui généralisent les deux premiers. Une méthode simple et efficace a été développée pour l'approximation de leurs fonctions de transfert irrationnelles respectives par des fonctions rationnelles, dans une bande fréquentielle limitée. L'utilité de l'approximation par des fonctions rationnelles est le développement des solutions des équations différentielles représentant les systèmes fondamentaux d'ordre fractionnaire.

Les fonctions de transfert rationnelles obtenues sont des combinaisons linéaires pondérées de fonctions fondamentales du second ordre régulier. On a aussi montré l'analogie entre les systèmes d'ordre entier et ceux d'ordre fractionnaire et que les deux systèmes réguliers de second ordre des équations (3.96) et (3.97) sont des cas particuliers des deux systèmes d'ordre fractionnaire des équations (3.31) et (3.32) pour  $m=1$ . Les réponses impulsionnelles et indicielles de ces systèmes ont été dérivées analytiquement à partir des fonctions rationnelles obtenues. L'implémentation par des circuits analogiques a été aussi obtenue. Des exemples

illustratifs ont été présentés pour montrer l'exactitude, l'utilité et l'efficacité de la méthode d'approximation. Dans ces exemples, nous avons utilisé la méthode d'Oustaloup pour la comparaison des résultats d'approximations des réponses fréquentielles et celle de Mittag-Leffler pour les réponses temporelles.

Après avoir prouvé l'efficacité de l'approximation pour l'obtention des réponses fréquentielles et temporelles, donc l'objectif du chapitre suivant sera consacré à l'extraction des caractéristiques et spécifications fréquentielles et temporelles de ces systèmes fondamentaux d'ordre fractionnaire pour une éventuelle utilisation dans la commande des systèmes.

---

Chapitre **4**

---

*Extraction des Performances  
Caractéristiques d'un Système  
d'Ordre Fractionnaire  
Généralisé*

---

## 4.1 Introduction

La théorie des systèmes asservis est une discipline technique destinée à analyser et à concevoir des systèmes de commande pratique et autres dispositifs technologiques. L'analyse des systèmes asservis a pour objectifs principaux la détermination des caractéristiques tels que le degré ou l'étendue de la stabilité du système, son comportement en régime permanent et en régime transitoire. La conception des systèmes asservis a pour but fondamental la réponse aux conditions fixées pour le comportement du système projeté. Ces conditions sont des contraintes que l'on impose aux fonctions mathématiques décrivant ses caractéristiques qui sont, en général, de deux types, à savoir, les spécifications fréquentielles et temporelles. En d'autres termes, les mesures de performance représentent un outil d'aide pour répondre à la question : à quel point le système accomplit-il la tâche pour laquelle il a été conçu ?

Les performances fréquentielles d'un système asservi peuvent être spécifiées dans les termes du facteur de qualité, la pulsation de résonance, le facteur de résonance et la bande passante. Les caractéristiques temporelles de performance d'un système asservi s'exprime à l'aide du comportement transitoire de la réponse indicielle dans les termes du dépassement, du temps de montée, temps de réponse et temps de retard.

Sachant que les performances caractéristiques fréquentielles et temporelles d'un système classique du second ordre sont en fonctions de son coefficient d'amortissement et de sa pulsation naturelle. Dans ce chapitre, le système d'ordre fractionnaire de l'équation (3.100) sera considéré comme système de référence parce que quand  $m = 1$  il devient un système classique du second ordre. Comme le système d'ordre fractionnaire de l'équation (3.100) possède, en plus du coefficient d'amortissement et de la pulsation naturelle, l'ordre fractionnaire  $m$  comme troisième paramètre qui va jouer un rôle très important dans la caractérisation des performances assurant une diversité de choix des caractéristiques qui n'existent pas dans le cas des systèmes d'ordre entier. Alors, ce chapitre sera consacré à l'extraction des performances caractéristiques fréquentielles et temporelles du système fondamental d'ordre fractionnaire en fonction de son coefficient d'amortissement, de sa pulsation naturelle et de son ordre fractionnaire  $m$ .

## 4.2 Performances caractéristiques d'un système du second ordre

### 4.2.1 Spécifications fréquentielles

Soit le système du second ordre dont la fonction de transfert est donnée sous la forme suivante [60] :

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\xi\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} \quad (4.1)$$

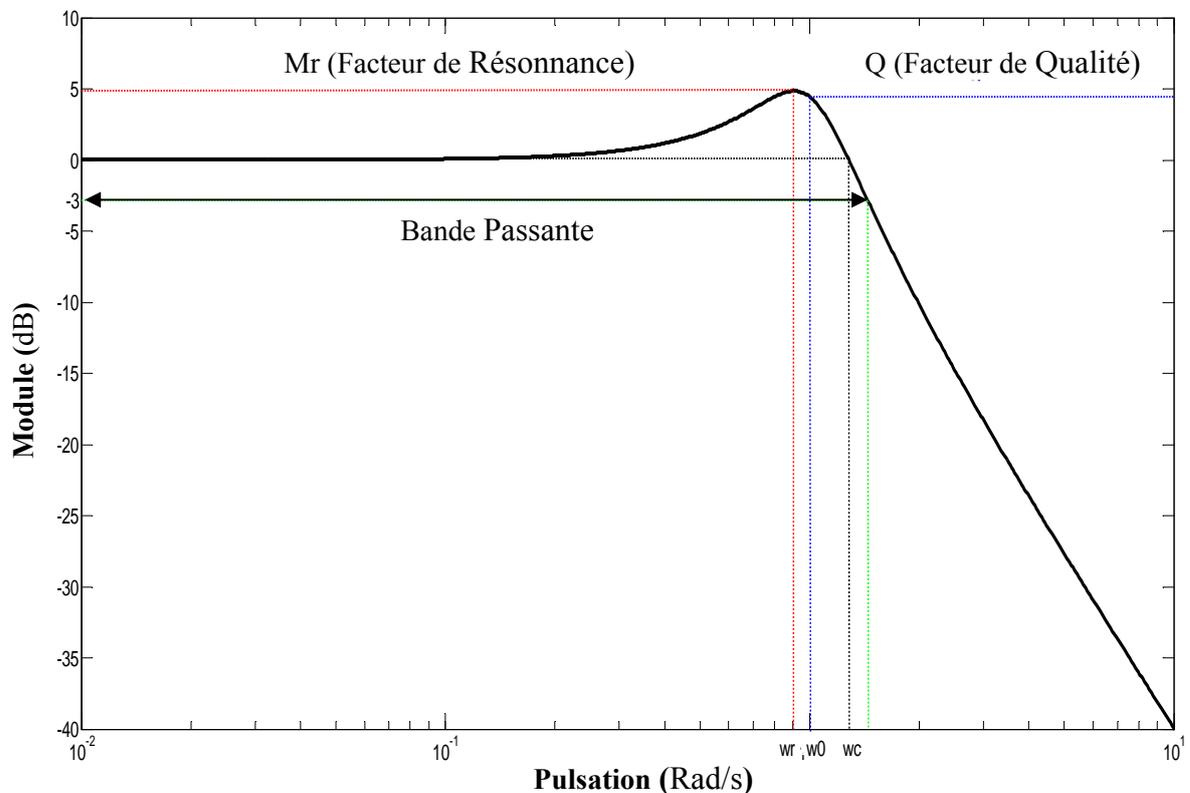
où le facteur d'amortissement  $\xi$  et la pulsation naturelle  $\omega_0$  du système sont tel que  $\xi \geq 0$  et  $\omega_0 > 0$ . Figure (4.1) montre la réponse fréquentielle du système second ordre de l'équation (4.1).

Les caractéristiques fréquentielles les plus utilisées sont obtenues de la figure (4.1) comme suit:

- **Facteur de qualité Q**

Le facteur de qualité Q est défini par:

$$Q = |G(j\omega_0)| = \frac{1}{2\xi} \quad (4.2)$$



**Figure 4.1** : Réponse fréquentielle du système du second ordre (Module).

- **Pulsation de résonance  $\omega_r$**

La pulsation de résonance  $\omega_r$  est définie comme la pulsation au gain maximum de la réponse fréquentielle du système. Elle est obtenue comme la solution de l'équation suivante:

$$\frac{d|G(j\omega)|}{d\omega} = 0 \quad (4.3)$$

- **Le facteur de résonance  $M_r$**

C'est la valeur maximale du gain obtenue à la pulsation de résonance  $\omega_r$  comme suit :

$$M_r = |G(j\omega_r)|_{dB} \quad (4.4)$$

Il existe aussi d'autres caractéristiques fréquentielles telles que la pulsation de coupure  $\omega_c$  qui correspond au gain unité ; la bande passante est la pulsation qui correspond à la pulsation pour laquelle l'amplitude en dB devient -3dB.

Le tableau 4.1 résume toutes les caractéristiques fréquentielles de ce type de système.

**Tableau 4.1** : Caractéristiques fréquentielles d'un système du second ordre.

Facteur d'amortissement	$0 < \xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} < \xi < 1$	$\xi \geq 1$
Facteur de qualité Q	$\frac{1}{2\xi}$	0	0
Pulsation de résonance $\omega_r$	$\omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$	N.D	N.D
Facteur de résonance $M_r$	$\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$	0	0
Pulsation de coupure $\omega_c$	$\omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{4\xi^2(\xi^2 - 1) + 1}}$		
Bande passante BP	$\omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{4\xi^2(\xi^2 - 1) + 2}}$		
Pente en haute fréquence	- 40 dB/déc		
Phase en basse fréquence	0 (deg)		
Phase en haute fréquence	-180 (deg)		

### 4.2.2 Spécifications temporelles

Figure (4.2) montre la réponse indicielle du système du second ordre de l'équation (4.1). Les spécifications temporelles d'un système du second ordre sont tirées généralement à partir de sa réponse indicielle. Pour le cas où  $\xi < 1$ , la réponse indicielle est donnée par [60]:

$$x(t) = K \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \exp(-\xi\omega_0 t) \sin \left( \omega_0 \left( \sqrt{1-\xi^2} \right) t + \text{atan} \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right) \right] \quad (4.5)$$

Les spécifications les plus utilisées sont celles mentionnées sur la figure 4.2.

- **Le dépassement  $M_p(\%)$**

Le dépassement est la valeur du premier pic de la réponse temporelle pour une entrée échelon unité et  $x_\infty$  est la valeur finale de la réponse. Le pourcentage du dépassement maximum  $M_p(\%)$  est défini comme suit :

$$M_p(\%) = \frac{x_{\max} - x_\infty}{x_\infty} \times 100 \% = \exp \left( -\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \times 100 \% \quad (4.6)$$

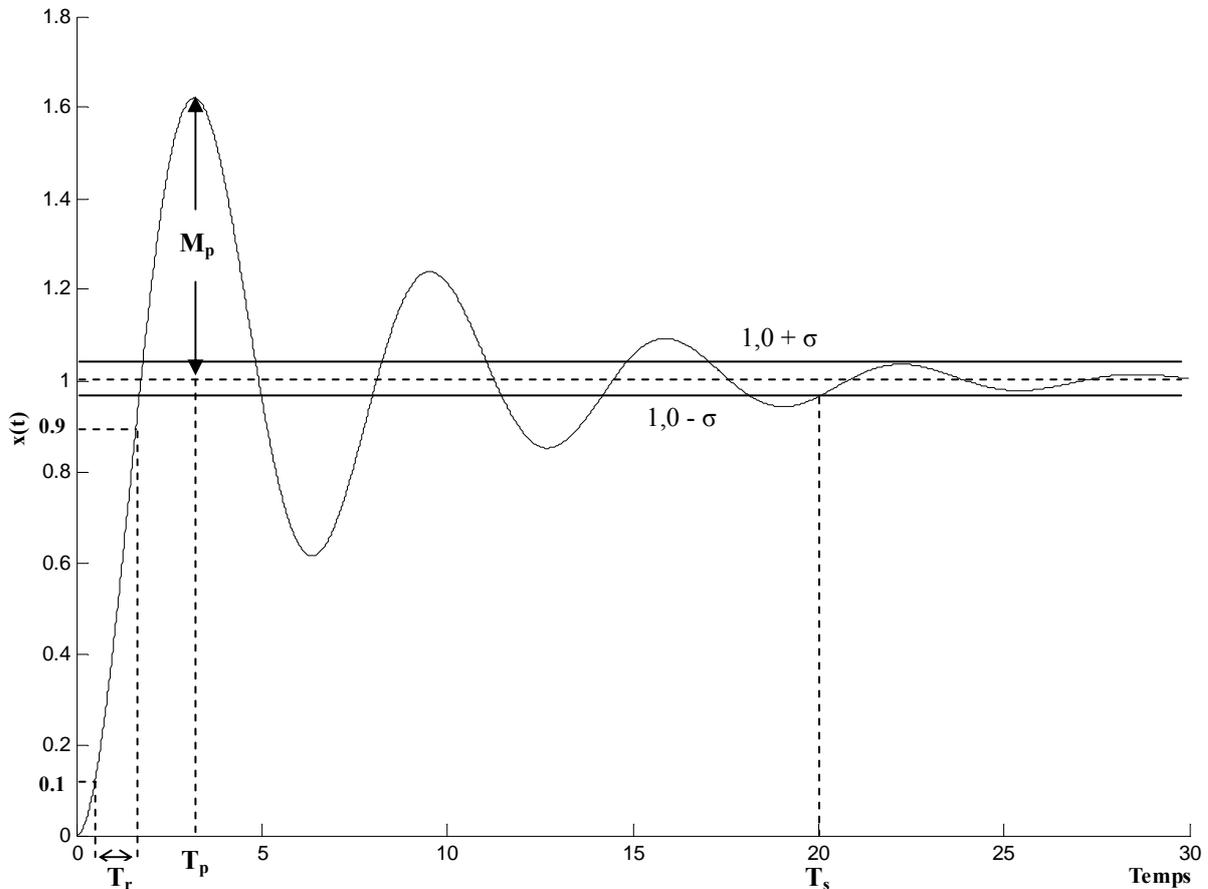


Figure 4.2 : Réponse indicielle du système de second ordre.

- **Le temps de dépassement  $T_p$**

C'est le temps du premier maximum de la réponse indicielle qui est la solution de l'équation  $\frac{dx(t)}{dt} = 0$ . Il est défini par:

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (4.7)$$

- **Temps de réponse  $T_s$**

C'est le temps requis pour que la réponse indicielle atteigne un certain pourcentage  $\sigma$  (2%, 5% ou 10%) de la valeur finale. Il est donné, pour  $\xi < 1$ , par :

$$T_s = -\frac{1}{\xi \omega_0} \log \left( \frac{\sigma \sqrt{1 - \xi^2}}{100} \right) \quad (4.8)$$

- **Le temps de monté  $T_r$**

Il est défini comme étant le temps mis pour passer de 10% à 90% de la valeur finale pour une excitation en échelon ( $T_r = t_{90\%} - t_{10\%}$ ). Il est difficile de trouver une expression analytique exacte pour le temps de monté. Souvent, on définit le temps de monté par des simulations [60]. Les spécifications temporelles d'un système de second ordre sont résumées dans le tableau 4.2.

**Tableau 4.2 :** Caractéristiques temporelles d'un système du second ordre.

Facteur d'amortissement	$\xi < 1$	$\xi \geq 1$
Le dépassement $M_p$	$\exp \left( -\frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right) \times 100 \%$	0
Le temps de dépassement $T_p$	$\frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$	N.D
Temps de réponse à ( $\sigma\%$ ) $T_s$	$-\frac{1}{\xi \omega_0} \log \left( \frac{\sigma \sqrt{1 - \xi^2}}{100} \right)$	$\frac{-\log(\sigma/100)}{\omega_0 (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})}$
Le temps de monté $T_r$	Obtenu par simulation	

### 4.3 Performances caractéristiques d'un système d'ordre fractionnaire oscillatoire

#### 4.3.1 Introduction

Soit un système d'ordre fractionnaire dont la fonction de transfert est donnée par :

$$G(s) = \frac{(\omega_c)^{2m}}{s^{2m} + (\omega_c)^{2m}}, \quad (0 < m < 1) \quad (4.9)$$

Ce système peut montrer des comportements qui s'étendent de la relaxation à l'oscillation, y compris les comportements correspondant à un système du premier et du second ordre en tant que cas particuliers ( $m=1$  et  $m=2$ ). Il a été proposé dans le domaine de l'asservissement pour la première fois par Manabe [61]. Puis, il a aussi été considéré comme un système de référence [41,62]. Toute la théorie de la commande robuste d'ordre non entier (CRONE) d'Oustaloup est basée sur ce type de système [28,63].

#### 4.3.2 Spécifications fréquentielles du système d'ordre fractionnaire oscillatoire

Le système d'ordre fractionnaire oscillatoire dont la fonction de transfert est donnée par l'équation (4.9) peut s'écrire comme :

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^{2m} + 1}, \quad (0.5 < m < 1) \quad (4.10)$$

où,

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + \left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2m}} = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2m} \cos(m\pi)\right) + j\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2m} \sin(m\pi)} \quad (4.11)$$

Le module en dB  $|G(j\omega)|_{dB}$  et la phase  $\arg[G(j\omega)]$  de  $G(s)$  sont donnés par :

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{4m} + 2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2m} \cos(m\pi) + 1}} \quad (4.12)$$

$$\arg[G(j\omega)] = -\arctan \left[ \frac{\sin(m\pi)}{\cos(m\pi) + \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^{2m}} \right] \quad (4.13)$$

Lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$ , le comportement asymptotique de ce système obtenu à partir des expressions (4.13) et (4.14) est donné par :

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} \approx -40m \log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right), \quad \arg[G(j\omega)] \approx -m\pi \quad (4.14)$$

Lorsque  $\omega \rightarrow 0$ , le comportement asymptotique de ce système obtenu à partir des expressions (4.13) et (4.14) est aussi donné par :

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 0, \quad \arg[G(j\omega)] \approx 0 \quad (4.15)$$

Par conséquent, aux hautes fréquences les asymptotes du module et de la phase sont donnés respectivement par :  $-40m$  dB/dec et  $-m\pi$  rad et aux basses fréquences les asymptotes du module et de la phase sont donnés respectivement par :  $0$  dB/dec et  $0$  rad.

- **Le facteur d'amortissement**

Le système d'ordre fractionnaire oscillatoire de l'équation (4.10) est un système qui représente un régime sous amorti, avec un facteur d'amortissement  $\xi$ , défini selon [62] par :

$$\xi = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{2m}\right) \quad (4.16)$$

et selon [52],  $\xi$  est défini à partir de l'équation (2.65) par :

$$\xi = \sqrt{\frac{[1 + \cos(2m\pi)]}{2^{(2m-1)}}} \quad (4.17)$$

- **Facteur de qualité Q**

A partir de l'équation (4.12), le facteur de qualité est défini par :

$$Q = |G(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos(m\pi))}} = \frac{1}{(2)^m \xi} \quad (4.18)$$

- **Pulsation et facteur de résonance ( $\omega_r$ ,  $M_r$ )**

Pour calculer la pulsation de résonance, il faut d'abord calculer  $\frac{d|G(j\omega)|}{d\omega} = 0$  Donc, à partir

de l'équation (4.12),  $\omega_r$  est donnée par :

$$\omega_r = \omega_c [-\cos(m\pi)]^{\frac{1}{2m}} \quad (4.19)$$

Remplaçant  $\omega_r$  dans (4.12), le facteur de résonance  $M_r$  est donné par :

$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{\sin(m\pi)} \quad (4.20)$$

### 4.3.3 Spécifications temporelles du système d'ordre fractionnaire oscillatoire

Les spécifications temporelles sont définies à partir de la réponse indicielle du système oscillatoire d'ordre fractionnaire. En utilisant l'approximation par la fonction de Mittag-Leffler, la réponse indicielle est obtenue dans [62], par :

$$x(t) = L^{-1} \left\{ \frac{\omega_c^m}{s(s^m + \omega_c^m)} \right\} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[-(\omega_c t)^m]^n}{\Gamma(1 + mn)} = 1 - E_m[-(\omega_c t)^m] \quad (4.21)$$

où,  $E_m$  est la fonction de Mittag-Leffler définie dans [23].

La réponse indicielle est aussi obtenue à partir de la méthode d'approximation dans [52] par :

$$x(t) = 1 + \left( \frac{B^2 - 2AB\xi\omega_c + A^2\omega_c^2}{1 - \xi^2} \right)^{1/2} \exp(-\omega_c \xi t) \sin(\omega_c \sqrt{1 - \xi^2} t + \Phi_1) - \sum_{i=0}^N k_i \exp(-p_i t) \quad (4.22)$$

où,  $A$ ,  $B$ ,  $\Phi_1$  et  $p_i$  sont donnés dans la section (§ 2.5.2).

Il est difficile de trouver les caractéristiques du système par un calcul simple. Pour cela, une méthode heuristique est utilisée dans [62] et [52] pour trouver ces caractéristiques sous forme de polynômes en termes de  $m$  et  $\omega_c$ .

- **Le dépassement  $M_p$**

Le dépassement est donné par [62] et [52] respectivement comme suit :

$$M_p \approx 0.8(2m - 1)(2m - 0.75) \quad (4.23)$$

$$M_p \approx (2m - 1.005)(2m - 0.755) \quad (4.24)$$

- **Le temps de dépassement  $T_p$**

Le temps de dépassement dans [62] (pour une erreur inférieur à 1%) est donné par l'expression suivante

$$T_p = \frac{1.106(2m - 0.255)^2}{(2m - 0.921)\omega_c} \quad (4.25)$$

et il est donné dans [52] par :

$$T_p = \frac{1.118(2m - 0.252)^2}{(2m - 0.9)\omega_c} \quad (4.26)$$

- **Temps de réponse  $T_s$**

Le temps de réponse à 2% de la valeur finale dans [62] est donné par :

$$T_s(2\%) \approx \frac{4}{\cos(\pi - \frac{\pi}{2m})\omega_c} = \frac{4}{\xi\omega_c}, \quad 0.695 < m < 1 \quad (4.27)$$

et dans [52] il est donné par l'expression suivante:

$$T_s(2\%) = \frac{4\sqrt{2^{m-1}}}{\omega_c \sqrt{1 + \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)}} = \frac{4}{\xi \omega_c}, \quad 0.569 < m < 1 \quad (4.28)$$

- **Le temps de monté  $T_r$**

Dans [62], le temps de monté est donné par :

$$T_r \approx \frac{0.131(2m + 1.157)^2}{(2m - 0.724)\omega_c}, \quad 0.5 < m < 1 \quad (4.29)$$

et celui interpolé par [52] est donné par :

$$T_r \approx \frac{0.135(2m + 1.158)^2}{(2m - 0.72)\omega_c}, \quad 0.5 < m < 1 \quad (4.30)$$

#### 4.4 Performances caractéristiques d'un système d'ordre fractionnaire généralisé

Sachant que l'ajustement ou bien le compromis entre certaines mesures de performance dans un système classique du second ordre de l'équation (4.1) est assuré par le facteur d'amortissement  $\xi$  et la pulsation naturelle  $\omega_0$ . On note aussi que les paramètres caractérisant les mesures de performance du système d'ordre fractionnaire oscillatoire de l'équation (4.9) sont en fonction des paramètres  $m$  et  $\omega_c$ . Dans ce contexte, le système d'ordre fractionnaire généralisé est représenté par la fonction de transfert suivante [56-57,59] :

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{2m} + 2\xi\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^m + 1} \quad (4.31)$$

où  $0 < m < 1$ ,  $0 < \xi < 1$  et  $\omega_0 > 0$ . On note que pour  $m = 1$  ( $\xi \neq 0$ ) la fonction de transfert de l'équation (4.31) devienne la fonction de transfert du système de second ordre classique de l'équation (4.1) et que pour  $\xi = 0$  ( $m \neq 1$ ) la fonction de transfert de l'équation (4.31) devienne la fonction de transfert du système d'ordre fractionnaire oscillatoire de l'équation (4.9). Alors, cette fonction généralise le système du second ordre de l'équation (4.1) par le paramètre  $m$  et le système d'ordre fractionnaire oscillatoire de l'équation (4.9) par le paramètre  $\xi$  qui est indépendant de  $m$ . La variation de ces deux paramètres assure une diversité de choix concernant les caractéristiques de performance qui n'existent pas dans le cas d'un système du second ordre classique ni dans le cas d'un système d'ordre fractionnaire oscillatoire. L'étude du système de l'équation (4.31) a été abordée dans quelques travaux

récents [64-65]. Mais, dans ces travaux, on ne trouve pas une étude globale qui rassemble tous les paramètres nécessaires pour la caractérisation de ce type de systèmes. Vu à la complexité du système d'ordre fractionnaire généralisé, il a été difficile de définir ses paramètres de performance analytiquement. Donc on a essayé d'extraire ces paramètres à l'aide des approximations et des simulations, particulièrement dans le domaine temporel [66].

#### 4.4.1 Spécifications fréquentielles

De la section (§ 3.5), l'approximation de la fonction de transfert du système d'ordre fractionnaire généralisé de l'équation (4.31) par une fonction rationnelle est donnée par :

$$G(s) = \frac{X(s)}{E(s)} \approx \sum_{i=1}^{2N-1} k_i \frac{1 + a \left( \frac{s}{\omega_i} \right)}{1 + 2\alpha \left( \frac{s}{\omega_i} \right) + \left( \frac{s}{\omega_i} \right)^2} \quad (4.32)$$

où les coefficients  $\alpha$ ,  $a$ , et  $\omega_i$ , pour  $i = 1, 2, \dots, 2N-1$ , sont donnés par:

$$\alpha = \cos\left(\frac{\varphi}{m}\right) \text{ avec } \varphi = \arccos(\xi) \quad (4.33)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left( \alpha \sqrt{1-\xi^2} - \xi \sqrt{1-\alpha^2} \right) \quad (4.34)$$

$$\omega_i = \frac{\omega_0}{\lambda^{(N-i)}} \quad (4.35)$$

##### 4.4.1.1 Comportement asymptotique de $G(j\omega)$

A partir de l'équation (4.31),  $G(j\omega)$  est donnée par :

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left( j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2m} + 2\xi \left( j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^m + 1} \quad (4.36)$$

On peut écrire  $G(j\omega)$  sous la forme suivante :

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left( \cos(m\pi) \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2m} + 2\xi \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^m + 1 \right) + j \left( \sin(m\pi) \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2m} + 2\xi \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^m \right)} \quad (4.37)$$

Le module en décibels  $|G(j\omega)|_{dB}$  est donné par:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{\left( \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{4m} + 4\xi\beta \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{3m} + (4\xi^2 + 4\beta^2 - 2) \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2m} + 4\xi\beta \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^m + 1 \right)}} \quad (4.38)$$

où  $\beta = \cos(\pi m/2)$

A partir de l'équation (4.31), la phase  $\arg[G(j\omega)]$  est donnée par :

$$\arg[G(j\omega)] = -\arctg \left\{ \frac{\sin(\pi m) + 2\xi \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^m \sin\left(\frac{\pi m}{2}\right)}{\cos(\pi m) + 2\xi \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^m \cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^{2m}} \right\} \quad (4.39)$$

Les comportements asymptotiques de  $|G(j\omega)|_{dB}$  et de  $\arg[G(j\omega)]$  obtenus de l'expressions (4.38) pour le module et de l'expression (4.39) pour la phase, lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$ , sont donnés comme suit :

$$|G(j\omega)|_{dB} \approx -40 m \log_{10} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) \quad \arg[G(j\omega)] \approx -m\pi \quad (4.40)$$

Les comportements asymptotiques de  $|G(j\omega)|_{dB}$  et de  $\arg[G(j\omega)]$  obtenus aussi de l'expressions (4.38) pour le module et de l'expression (4.39) pour la phase, lorsque  $\omega \rightarrow 0$ , sont les droites horizontales de 0 dB et 0 rad, respectivement.

#### 4.4.1.2 Facteur de qualité Q

Le facteur de qualité Q est le module de  $G(j\omega)$  à la fréquence  $\omega_0$ . Donc on peut définir ce dernier pour le système d'ordre fractionnaire généralisé à partir de (4.38), comme suit:

$$Q = |G(j\omega_0)| = \frac{1}{2 \left( \xi + \cos \frac{m\pi}{2} \right)} = \frac{1}{2(\xi + \beta)} \quad (4.41)$$

Les figures (4.3) et (4.4) représentent la variation du facteur de qualité du système d'ordre fractionnaire généralisé, en fonction de la puissance fractionnaire m et le coefficient d'amortissement  $\xi$  obtenue à partir de (4.41). La variation du facteur de qualité Q du système du second ordre classique (m=1) est aussi représentée sur la figure (4.4). De ces figures, on peut remarquer que la variation du facteur de qualité est proportionnelle à l'ordre fractionnaire m et inversement proportionnelle au facteur d'amortissement  $\xi$ .

#### 4.4.1.3 Fréquence et facteur de résonance

La pulsation de résonance  $\omega_r$  est la pulsation au gain maximum de la réponse fréquentielle. Pour le système d'ordre fractionnaire généralisé. La détermination de ce paramètre par une expression analytique est un peut difficile. Mathématiquement, la fréquence de résonance est celle qui annule la première dérivée du gain  $|G(j\omega)|$ . De l'équation (4.38), la dérivée de  $|G(j\omega)|$  par rapport à  $\omega$  est donnée par:

$$\frac{d|G(j\omega)|}{d\omega} = 0 \Rightarrow \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{3m} + 3\xi\beta \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2m} + (2\xi^2 + 2\beta^2 - 1) \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^m + \xi\beta = 0 \quad (4.42)$$

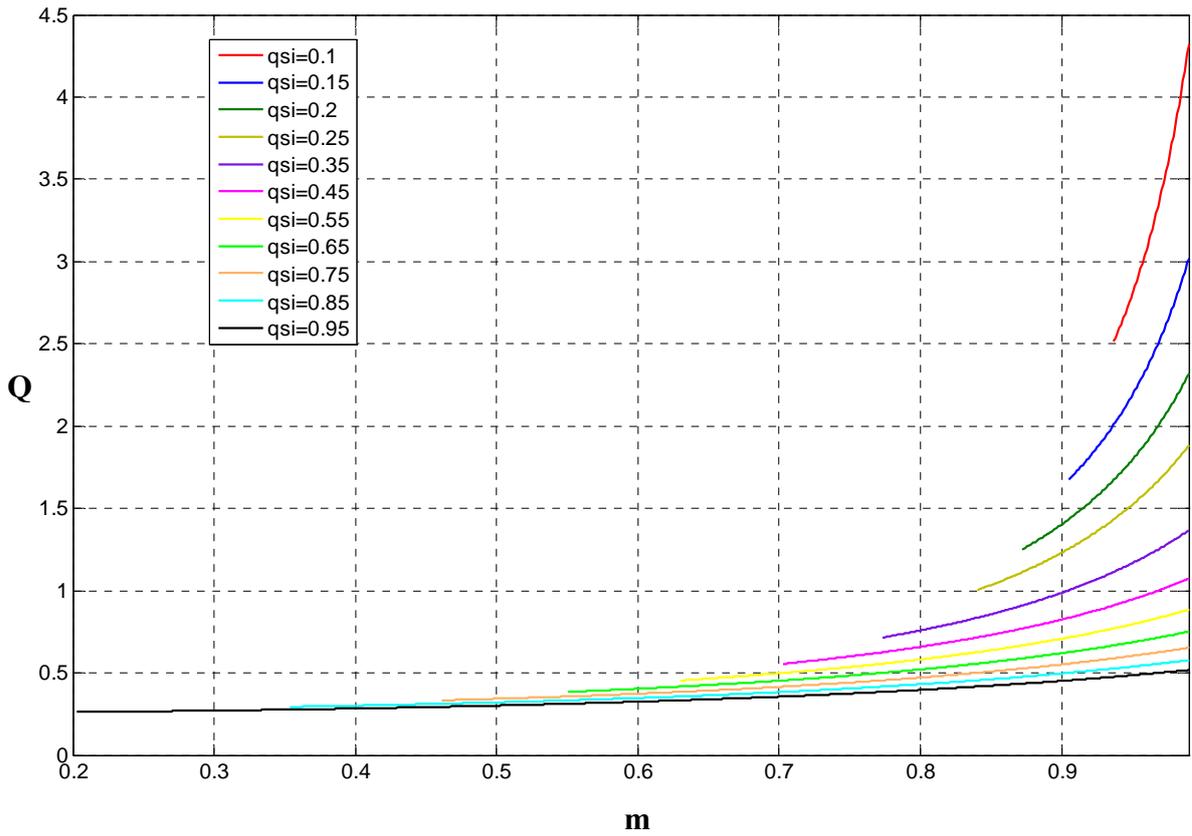


Figure 4.3 : Facteur de qualité Q en fonction de m pour quelques valeurs de  $\xi$ .

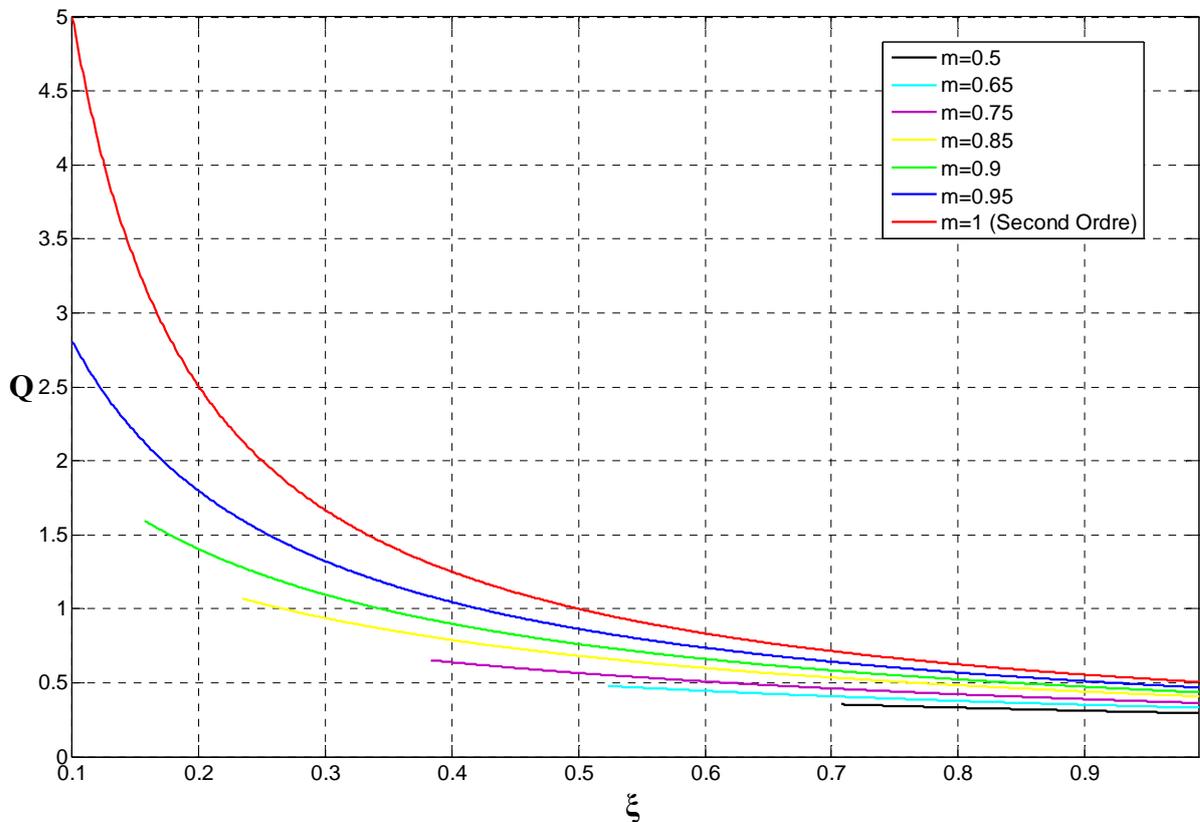


Figure 4.4 : Facteur de qualité Q en fonction de  $\xi$  pour différentes valeurs de m ( $0 < m < 1$ ) et m=1.

Pour  $x = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^m$ , on obtient le polynôme  $P(x)$  du troisième degré à coefficients réels suivants:

$$P(x) = x^3 + 3\xi\beta x^2 + (2\xi^2 + 2\beta^2 - 1)x + \xi\beta \quad (4.43)$$

La solution réelle de ce polynôme est donnée par [67]:

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}} - \xi\beta \quad (4.44)$$

avec  $q$  et  $p$  sont donnés par :

$$q = -(3\xi^2\beta^2 - 2\xi^2 - 2\beta^2 + 1) \quad \text{et} \quad p = -2\xi\beta(\xi^2 - 1)(\beta^2 - 1) \quad (4.45)$$

Donc, la pulsation de résonance  $\omega_r$  est donnée par :

$$\omega_r = \omega_0 (x_1)^{\frac{1}{m}} \quad (4.46)$$

On remarque que l'expression de  $x_1$  donnée par (4.44) est très compliquée pour l'analyse de la pulsation de résonance  $\omega_r$  en fonction de  $m$  et  $\xi$ . De ce fait, on doit chercher une approximation de  $x_1$  pour mettre  $\omega_r$  sous une forme plus simple en termes de  $m$  et  $\xi$ . Alors, l'approximation de  $x_1$  est donnée par :

$$x_1 = \sqrt{1 - 2(\xi + \beta)^2} \quad (4.47)$$

Donc, on peut écrire l'expression de la pulsation de résonance sous la forme suivante :

$$\omega_r = \omega_0 \left(1 - 2(\xi + \beta)^2\right)^{\frac{1}{2m}} \quad (4.48)$$

De l'équation (4.48), la valeur minimale de  $\xi$  pour que le système ne présente pas de résonance est donnée par :

$$\xi > \frac{1}{\sqrt{2}} - \beta \quad (4.49)$$

Figure (4.5) représente la variation de la pulsation de résonance  $\omega_r$  en fonction de  $m$  pour  $\xi$  fixe. Figure (4.6) représente aussi la variation de la pulsation de résonance  $\omega_r$  en fonction de  $\xi$  pour  $m$  fixe et pour  $m = 1$ .

Le facteur de résonance  $M_r$  est la valeur du gain maximum. Il est obtenu à la fréquence  $\omega_r$  par :

$$M_r = \text{Max}(|G(j\omega)|) = |G(j\omega_r)| \quad (4.50)$$

Figure (4.7) représente la variation du facteur de résonance  $M_r$  en fonction de  $m$  pour  $\xi$  fixe. Figure (4.8) représente aussi la variation du facteur de résonance  $M_r$  en fonction de  $\xi$  pour  $m$  fixe et pour  $m = 1$ . On peut remarquer aussi que la variation du facteur de résonance

augmente pour les petites valeurs de  $\xi$  ou les grandes valeurs de  $m$  et se diminue pour les grandes valeurs de  $\xi$  ou les petites valeurs de  $m$ .

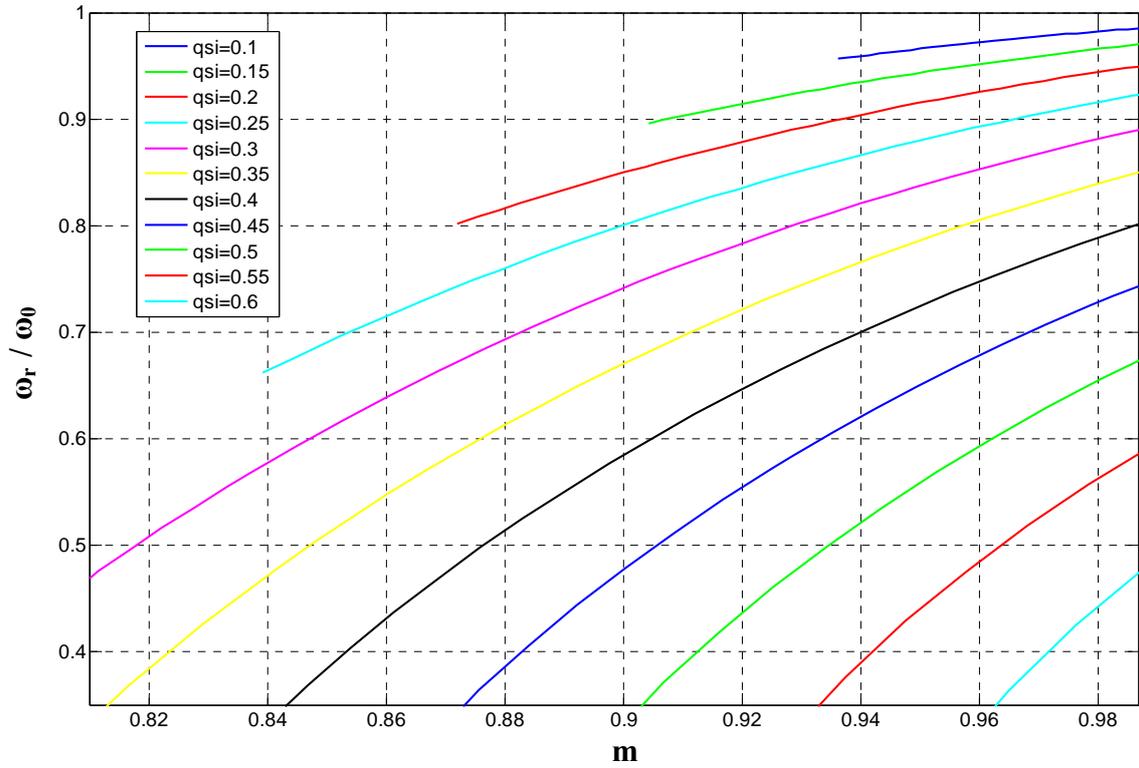


Figure 4.5 : Pulsation de résonance  $\omega_r$  en fonction de  $m$  pour quelques valeurs de  $\xi$ .

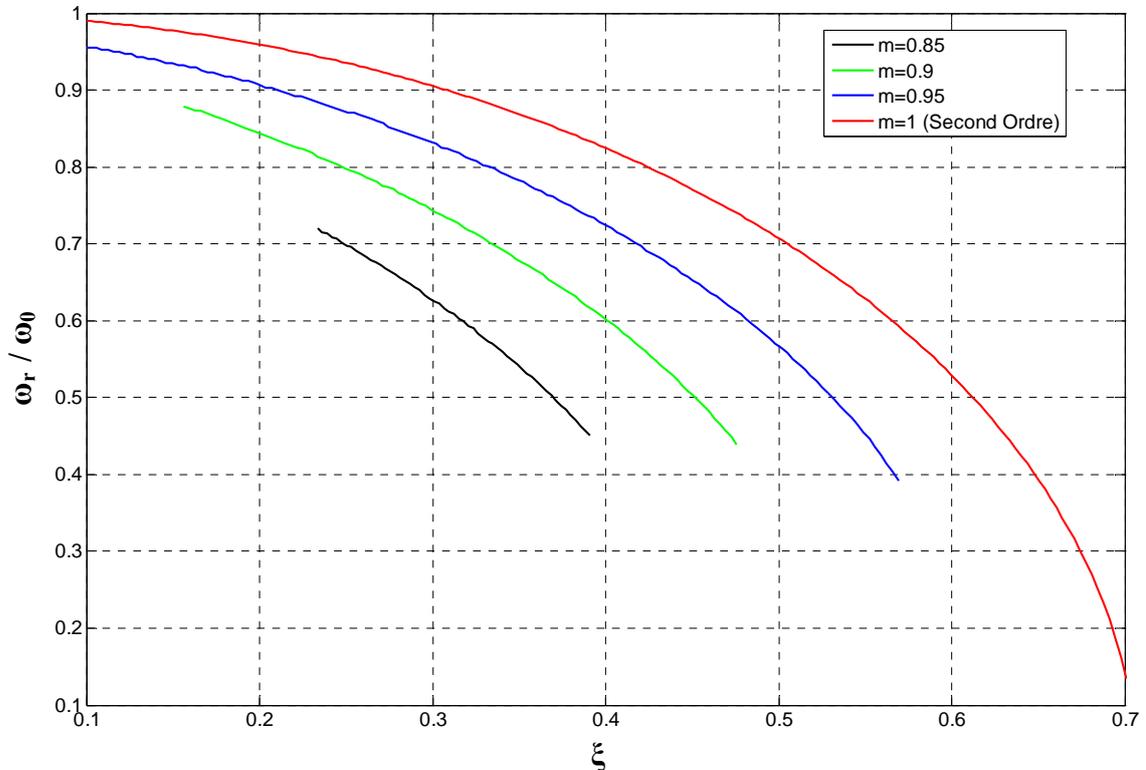


Figure 4.6 : Pulsation de résonance  $\omega_r$  en fonction de  $\xi$  pour des valeurs de  $m$  ( $0 < m < 1$ ) et  $m=1$ .

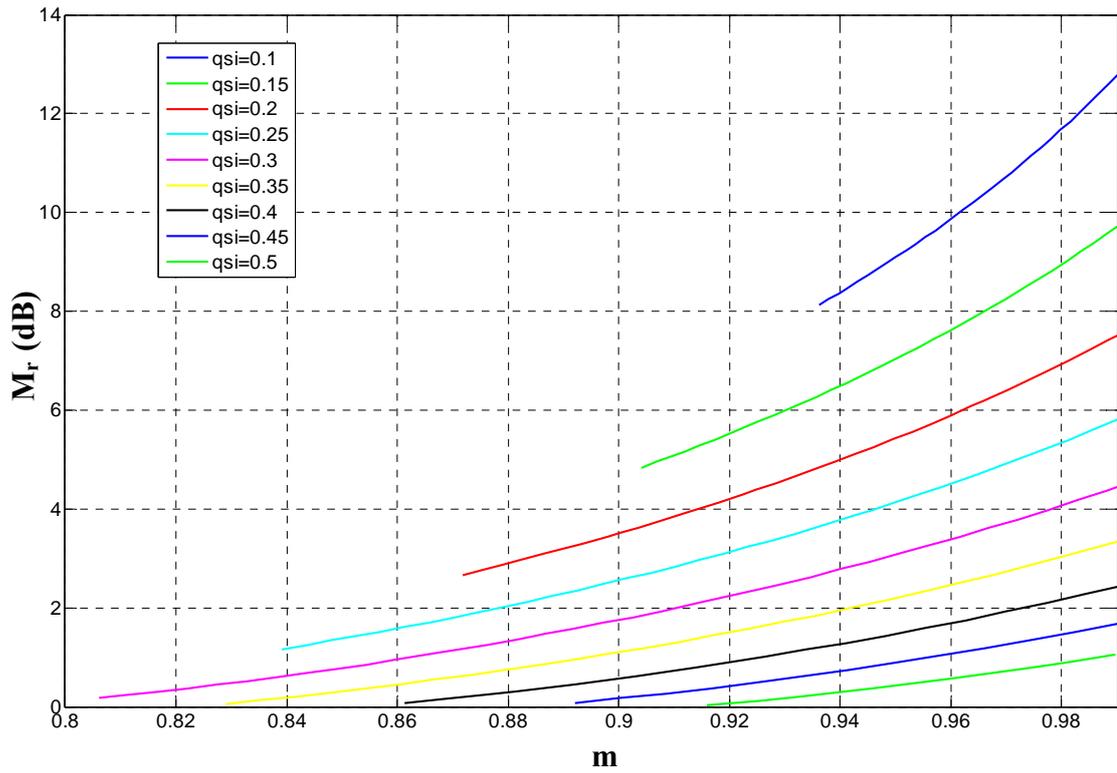


Figure 4.7 : Facteur de résonance  $M_r$  en fonction de  $m$  pour  $\xi$  fixe.

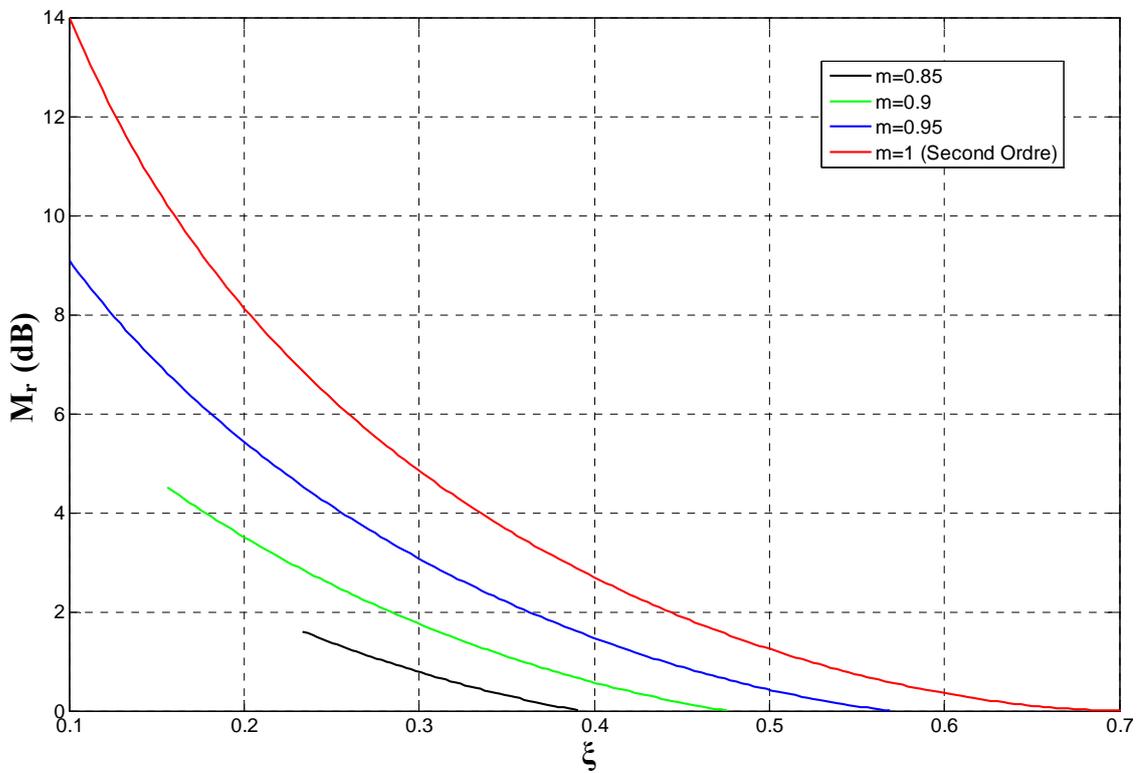


Figure 4.8 : Facteur de résonance  $M_r$  en fonction de  $\xi$  pour des valeurs de  $m$  ( $0 < m < 1$ ) et  $m=1$ .

#### 4.4.2 Spécifications temporelles du système d'ordre fractionnaire généralisé

Les spécifications temporelles du système d'ordre fractionnaire généralisé sont tirées indirectement à partir de sa réponse indicielle utilisant les approximations par des fonctions rationnelles de sa fonction de transfert. La réponse indicielle obtenue à partir de l'équation (4.32), pour  $0 < m < 1$ , est donnée par :

$$x(t) = 1 - \sum_{i=1}^{2N-1} \frac{k_i}{\sqrt{1-\xi^2}} \exp(-\alpha\omega_i t) \sin(\omega_i \sqrt{1-\alpha^2} t + \varphi) \quad (4.51)$$

##### 4.4.2.1 Temps de dépassement $T_p$

Le temps de dépassement est le temps du premier maximum de la réponse indicielle. Il est difficile de définir une expression exacte pour le temps de dépassement. Donc le calcul de ce paramètre est effectué à travers les résultats de simulation de l'équation (4.51).

La variation de  $T_p$  en fonction de  $m$  avec  $\xi$  comme paramètre obtenue à partir de l'équation (4.51) est représenté dans la figure (4.9). La variation de  $T_p$  en fonction de  $\xi$  avec  $m$  comme paramètre et pour  $m = 1$  obtenue à partir de l'équation (4.51) est aussi représenté dans la figure (4.10).

##### 4.4.2.2 Le dépassement en %

Le dépassement (PO) est la différence maximum en pourcentage existant entre la valeur maximale  $M_p$  et la valeur finale  $x_\infty$  de la réponse indicielle d'un système. Il est donné par l'expression suivante:

$$PO = \frac{M_p - x_\infty}{x_\infty} \times 100\% \quad (4.52)$$

La réponse indicielle du système d'ordre fractionnaire généralisé donnée par l'équation (4.51) est utilisée pour calculer le dépassement en %.

Le dépassement PO du système d'ordre fractionnaire généralisé est représenté par les figures (4.11) et (4.12), en fonction de  $m$  et  $\xi$  respectivement, Le dépassement d'un système du second ordre régulier ( $m=1$ ) est aussi représenté en fonction de  $\xi$  dans la figure 4.12.

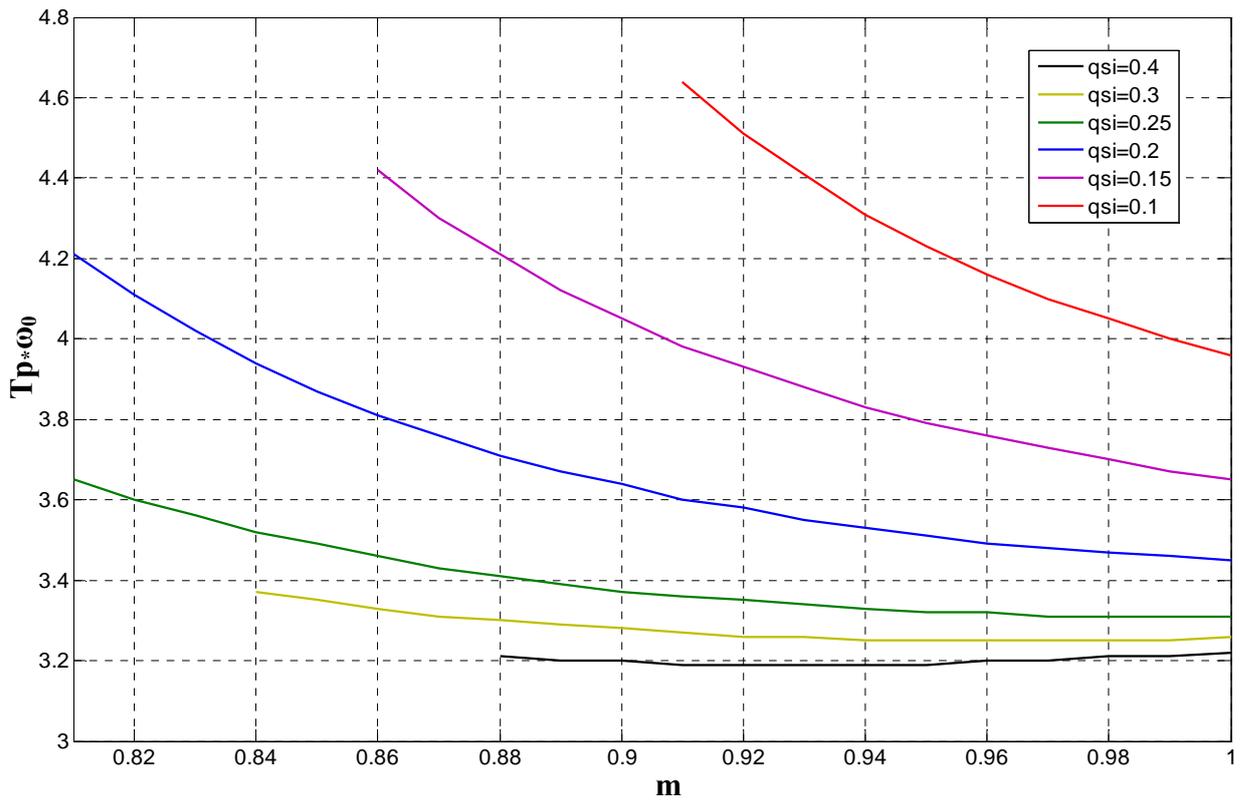


Figure 4.9 : Variation de  $T_p$  en fonction de  $m$  ( $\xi$  paramètre).

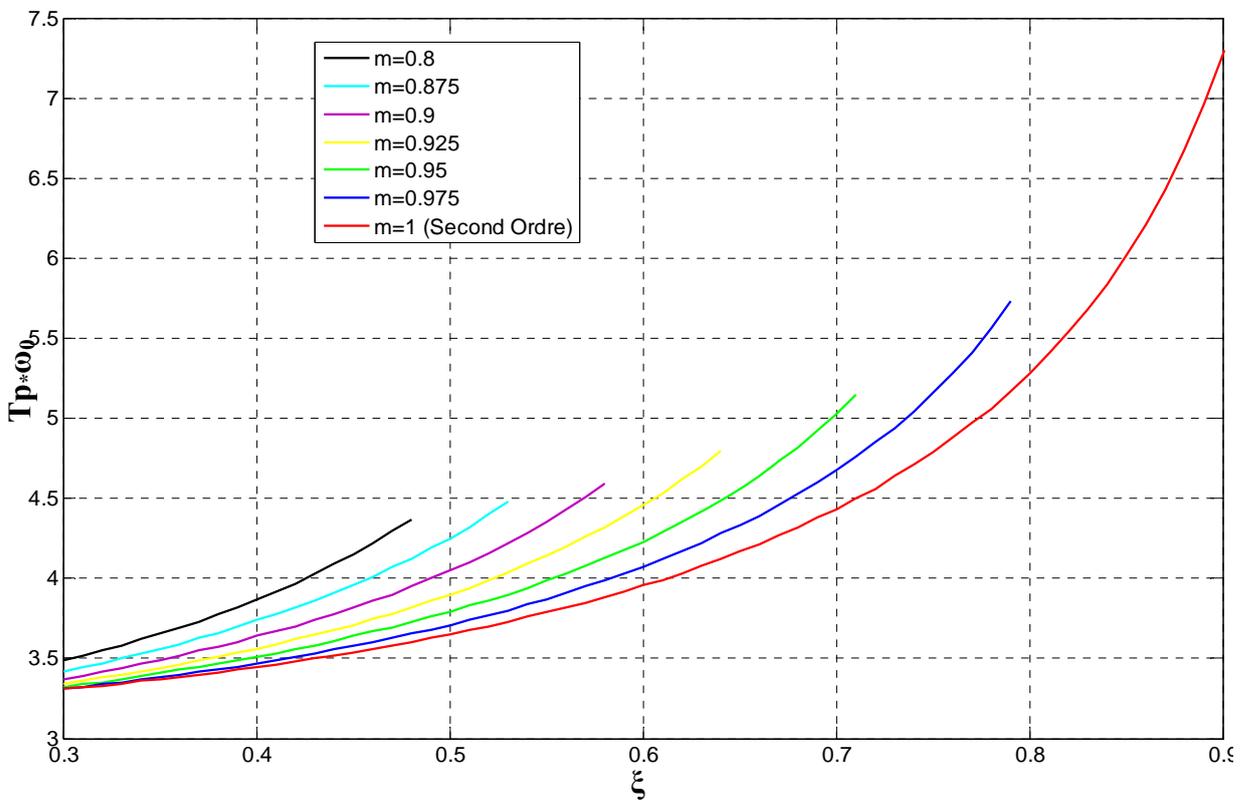


Figure 4.10 : Variation de  $T_p$  en fonction de  $\xi$  pour  $0 < m < 1$  et  $m=1$ .

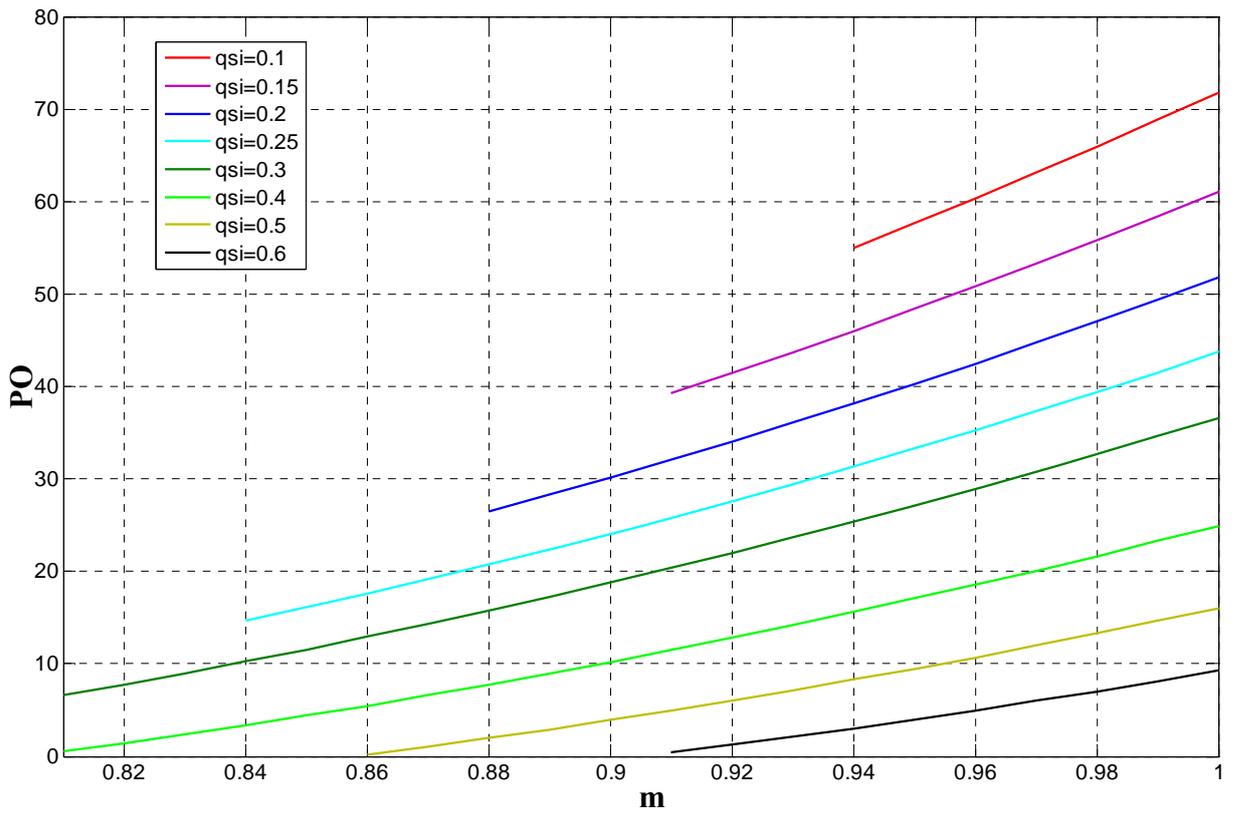


Figure 4.11 : La variation du dépassement en fonction de  $m$ , pour  $\xi$  fixe.

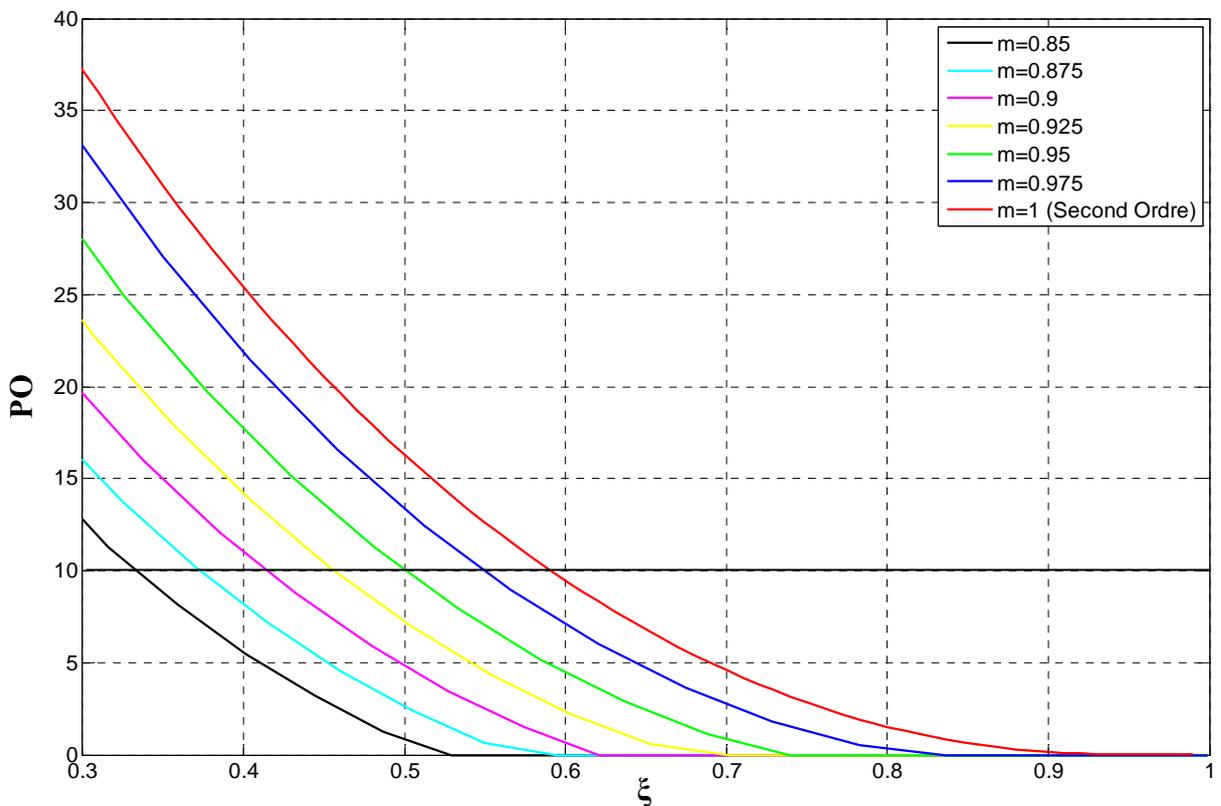


Figure 4.12 : La variation du dépassement en fonction de  $\xi$ , pour  $m$  fixe, en incluant le cas particulier  $m=1$  du second ordre.

On note que la variation du dépassement est dépende aussi de la valeur de la puissance fractionnaire, en plus du facteur d'amortissement  $\xi$ . On remarque qu'un système d'ordre fractionnaire  $m$  inférieur à 0.8, ne présente aucun dépassement.

Le tableau 4.3, représente l'intervalle de l'existence du dépassement en fonction de  $\xi$ , pour certaines valeurs de  $m$ .

A partir des figures 4.11, 4.12 et le tableau 4.3, on remarque que le système d'ordre fractionnaire représente un comportement oscillatoire jusqu'à une valeur précise de  $\xi$ , après cette valeur le système prend un comportement d'un système de relaxation, où le dépassement devient nul.

On note que pour un dépassement fixe (par exemple 10%), une infinité de systèmes d'ordre fractionnaire généralisés peuvent avoir ce dépassement pour un couple donné ( $\xi$ ,  $m$ ) ; alors le paramètre  $m$  peut être utilisé pour accomplir d'autres caractéristiques que le système régulier du second ordre ( $m = 1$ ) ne peut pas faire.

**Tableau 4.3 :** Intervalle d'existence du dépassement dans un système d'ordre fractionnaire généralisé.

<b>m</b>	<b>P.O% et <math>T_p</math> (déterminé)</b>	<b>P.O%=0 et <math>T_p</math> (non défini)</b>
$m=1$ , (Second Order)	$0 < \xi < 1$	$\xi > 1$
0.95	$\xi_s < \xi \leq 0.704$	$\xi > 0.704$
0.9	$\xi_s < \xi \leq 0.586$	$\xi > 0.586$
0.85	$\xi_s < \xi \leq 0.478$	$\xi > 0.478$
0.8	$\xi_s < \xi \leq 0.392$	$\xi > 0.392$
$< 0.8$	-	$\xi > \xi_s$

#### 4.4.2.3 Le temps de réponse $T_s$

Le temps de réponse est défini autant que, le temps nécessaire pour que la réponse indicielle atteigne sa valeur finale, avec un certain pourcentage  $\sigma$  (2% ou 5%). Dans notre cas le pourcentage  $\sigma = 2\%$ , est choisi pour déterminer le temps de réponse  $T_s$ .

La figure 4.13, représente la variation simulée du temps de réponse à 2%, obtenue à partir de l'approximation de la réponse indicielle donnée par l'équation (4.51), en fonction de  $m$ , pour un facteur d'amortissement  $\xi$  fixe.

La figure 4.14, représente la variation simulée du temps de réponse à 2%, obtenue à partir de l'approximation de la réponse indicielle donnée par l'équation (4.51), en fonction de  $\xi$ , pour un ordre fractionnaire  $m$  fixe.

A partir de la figure 4.14, on remarque que, la variation du temps de réponse en fonction de  $\xi$ , pour différentes valeurs de  $m$ , est similaire à celle du second ordre régulier. Elle est décroissante jusqu'à une valeur de  $\xi$  bien définie, puis elle devient croissante. Durant toutes les simulations, on a remarqué que la relation entre le temps de réponse  $T_s$  et l'ordre fractionnaire  $m$  est inversement proportionnelle.

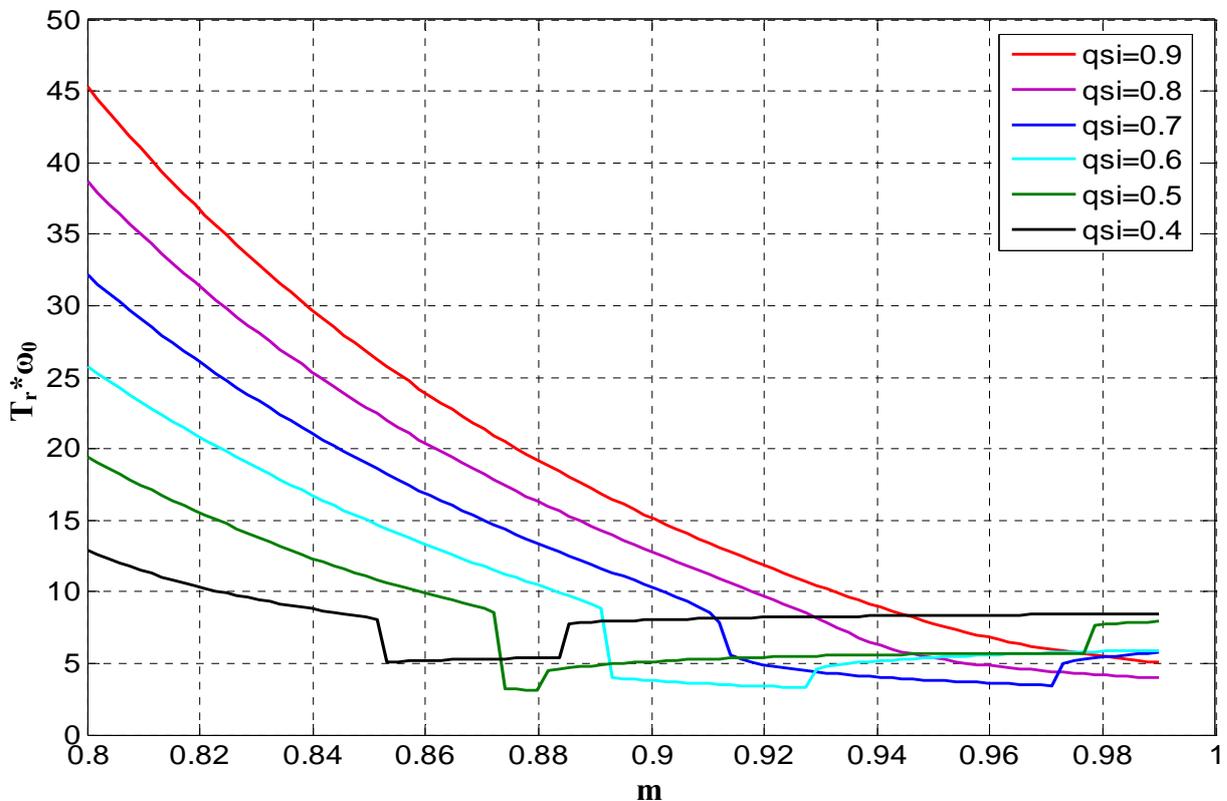
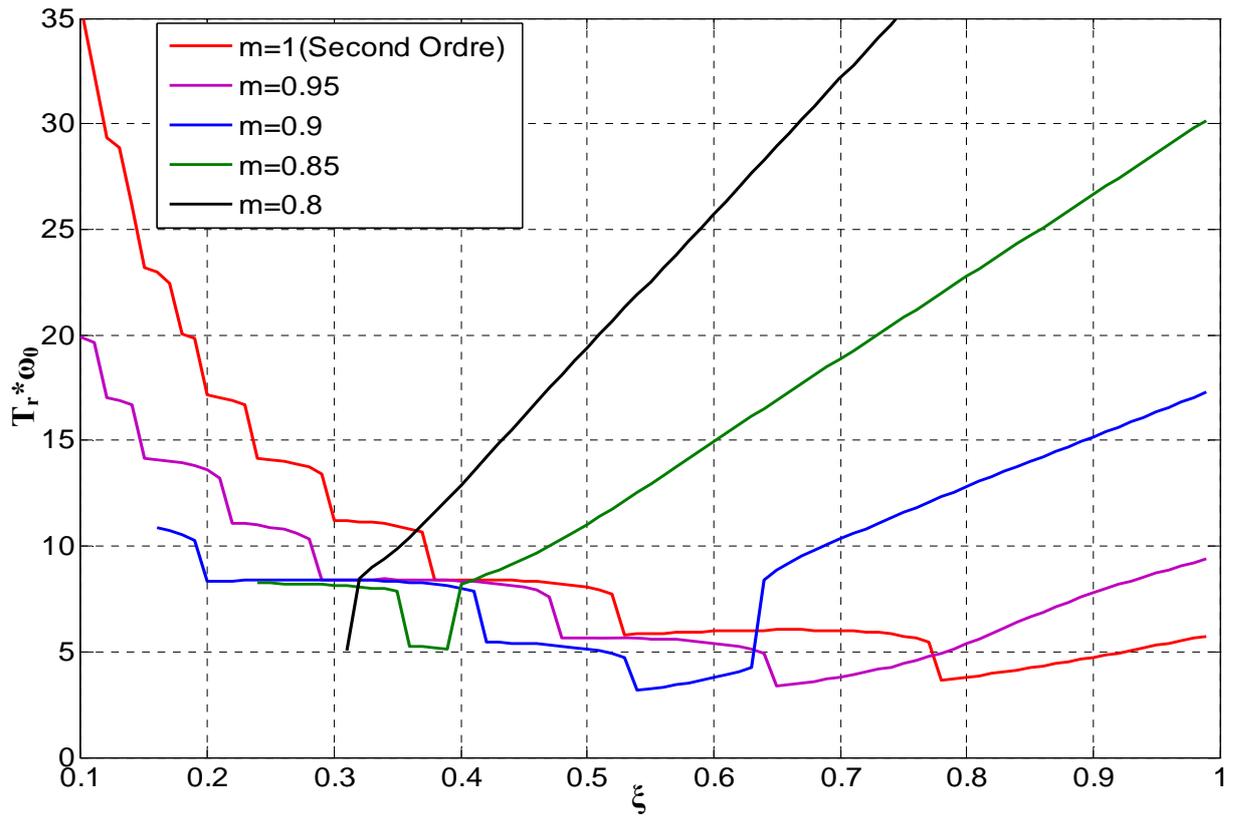


Figure 4.13 : La variation du temps de réponse en fonction de  $m$ , pour  $\xi$  fixe.



**Figure 4.14 :** La variation du temps de réponse en fonction de  $\xi$ , pour  $m$  fixe, en incluant le cas particulier  $m=1$  du second ordre.

#### 4.4.2.4 Le temps de monté $T_r$

On a utilisé l'expression de la réponse indicielle donnée par (4.51) pour calculé le temps de monté, qui est défini comme étant le temps mis pour passer de 10% à 90% de la valeur finale pour une excitation en échelon donné par :

$$T_r = t_{90\%} - t_{10\%} \quad (4.53)$$

La figure 4.15 représente la variation du temps de monté en fonction de  $m$  avec  $\xi$  varie de 0.4 à 0.9, ainsi que la figure 4.16 représente la variation du temps de monté en fonction de  $\xi$  avec  $m$  varie de 0.6 à 1, où cette dernière valeur de  $m$  représente le system de second ordre. On remarque que le passage de la réponse indicielle de 10% à 90% de sa valeur finale est devient plus en plus rapide dans le sens décroissant de la valeur de  $\xi$

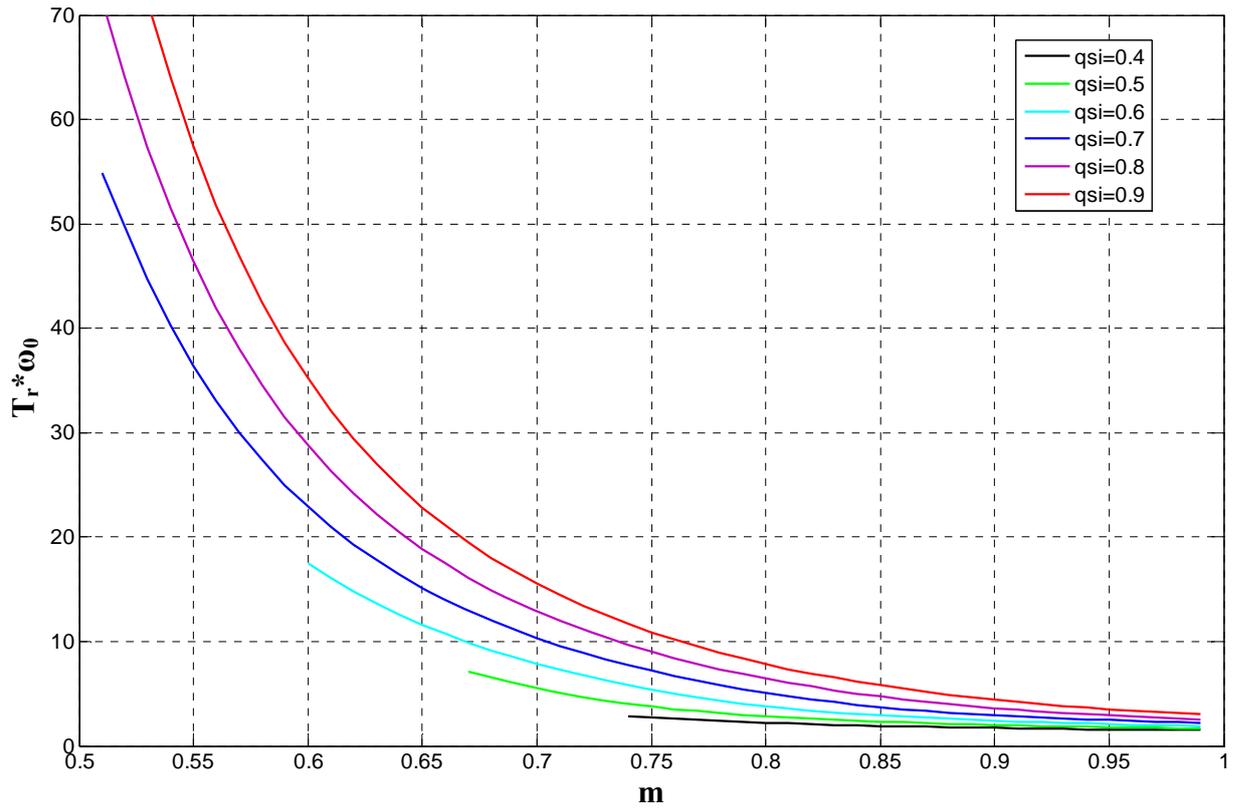


Figure 4.15 : La variation du temps de monté en fonction de m, pour  $\xi$  fixe.

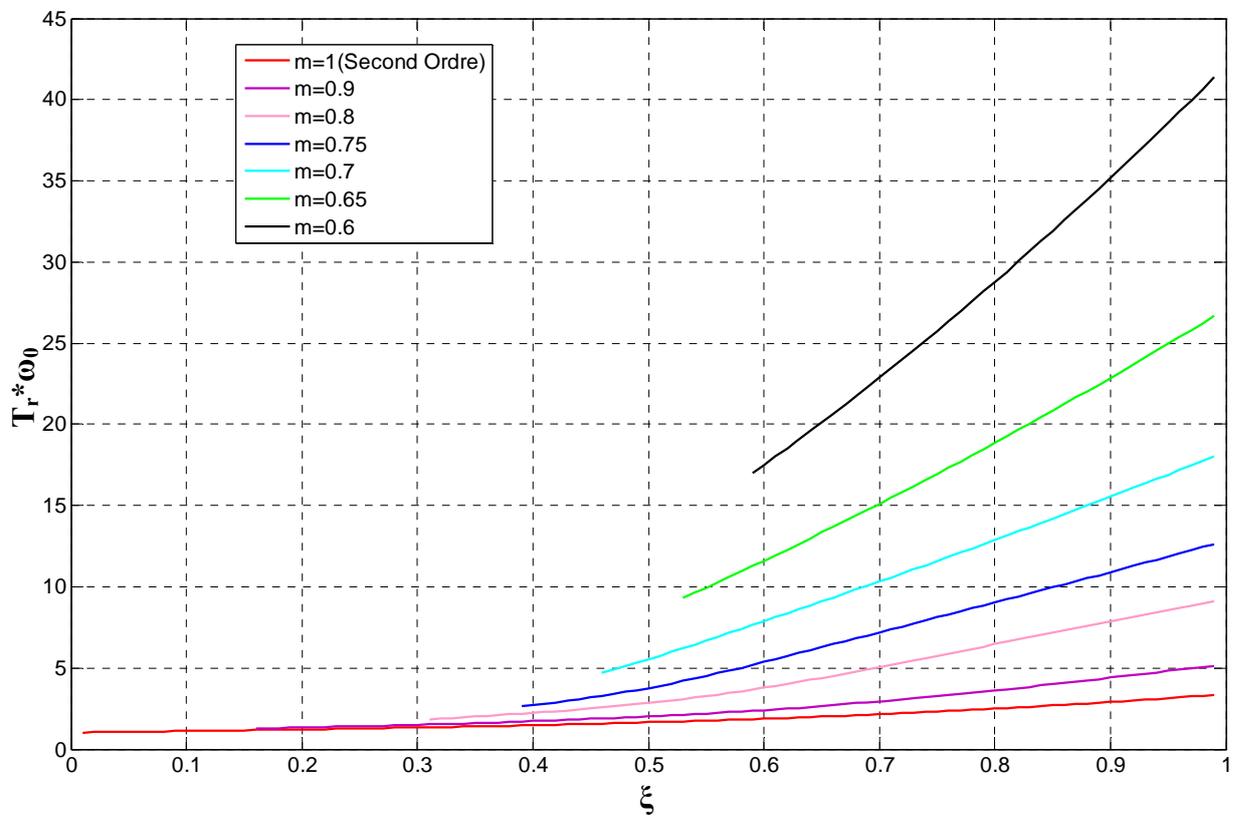


Figure 4.16 : La variation du temps de monté en fonction de  $\xi$ , pour m fixe, en incluant le cas particulier m=1 du second ordre.

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a considéré les caractéristiques de performance d'un système d'ordre fractionnaire généralisé qui a un comportement entre un système du second ordre régulier et un système d'ordre fractionnaire oscillatoire. Ces caractéristiques sont regroupées en spécifications fréquentielles et temporelles. Les spécifications fréquentielles ont été obtenues en utilisant la fonction de transfert irrationnelle du système lui-même et son approximation par une fonction rationnelle. Pour les spécifications temporelles, on a utilisé uniquement sa réponse indicielle obtenue à partir de son approximation par une fonction rationnelle. Le système d'ordre fractionnaire généralisé possède, en plus du coefficient d'amortissement et de la pulsation naturelle, l'ordre fractionnaire  $m$  comme troisième paramètre. On a trouvé que l'ordre fractionnaire  $m$  joue un rôle très important dans la caractérisation des performances assurant une diversité de choix des caractéristiques qui n'existent pas dans le cas des systèmes d'ordre entier ni dans le cas des systèmes d'ordre fractionnaire oscillatoire. Ces résultats permettent de considérer le système d'ordre fractionnaire généralisé comme un système de référence pour l'asservissement et la modélisation des processus.

## *Conclusion Générale*

---

## 1. Conclusion

Le sujet des operateurs et des systèmes d'ordre fractionnaire a acquis une importance considérable durant les dernières décennies; cela est dû surtout aux nombreuses applications dans divers domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie. Alors, leurs simulations et implémentations efficaces et correctes sont devenues un axe de recherche très important.

Dans cette thèse, le thème abordé porte essentiellement sur les systèmes fondamentaux d'ordre fractionnaire représentés par les équations différentielles d'ordre fractionnaire suivantes :

$$(\tau_0)^{2m} \frac{d^{2m}x(t)}{dt^{2m}} + 2\xi(\tau_0)^m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + x(t) = \left(\sqrt{1-\xi^2}\right)e(t)$$

$$(\tau_0)^{2m} \frac{d^{2m}x(t)}{dt^{2m}} + 2\xi(\tau_0)^m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + x(t) = (\tau_0)^m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \xi e(t)$$

dont les fonctions de transfert sont données, respectivement, par les fonctions irrationnelles suivantes :

$$G_S(s) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{[(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1]}$$

$$G_C(s) = \frac{(\tau_0 s)^m + \xi}{[(\tau_0 s)^{2m} + 2\xi(\tau_0 s)^m + 1]}$$

pour  $0 < m < 1$ ,  $0 < \xi < 1$  et  $\tau_0$  est un nombre réel positif. On note que pour  $m=1$  ces équations différentielles d'ordre fractionnaire deviennent des équations différentielles linéaires classiques et leurs réponses impulsionnelles sont le sinus amorti et le cosinus amorti. Alors, pour  $0 < m < 1$ , les réponses impulsionnelles de ces systèmes d'ordre fractionnaire sont définies, respectivement, comme le sinus amorti d'ordre fractionnaire et le cosinus amorti d'ordre fractionnaire.

Comme ces types de systèmes d'ordre fractionnaire n'ont pas de solutions analytiques exactes, les techniques d'approximation sont très utilisées pour faciliter leurs étude et analyse. Alors, l'objectif principal est de contribuer au développement de méthodes d'implémentations et d'analyse des systèmes fondamentaux d'ordre fractionnaire.

En premier lieu, l'étude de la stabilité de ces systèmes fractionnaires a été faite en termes des paramètres  $m$ ,  $\xi$  et  $\tau_0$ . Puis, des techniques d'approximations dans une bande fréquentielle donnée, des fonctions de transfert irrationnelles  $G_{SA}(s)$  et  $G_{CA}(s)$  de ces systèmes fondamentaux d'ordre fractionnaire ont été élaborées, en se basant sur des fonctions

rationnelles. Ensuite, à partir des fonctions rationnelles obtenues, les réponses impulsionnelles et indicielles de ce type de systèmes ont été tirées analytiquement. Les résultats d'approximation obtenus ont été comparés aux fonctions de transfert irrationnelles dans le domaine fréquentiel. Leurs réponses impulsionnelles et indicielles ont été aussi comparées à celles obtenues par la méthode dite de Mittag-Leffler, sous forme polynomiale, très utilisée dans la littérature. Les résultats obtenus par la méthode proposée ont été très satisfaisants dans les deux domaines fréquentiel et temporel. Enfin, la réalisation de ces deux systèmes d'ordre fractionnaire fondamentaux par deux circuits analogiques a été faite en se basant sur les fonctions de transfert rationnelles d'approximation.

La seconde partie de ce travail a été consacrée à l'étude des performances caractéristiques fréquentielles et temporelles du système d'ordre fractionnaire dont la fonction de transfert est donnée par la fonction  $G_{SA}(s)$ . Cet étude a été considérée parce que quand  $m=1$  ce système d'ordre fractionnaire devient le système classique du second ordre qui est considéré comme système de référence pour les systèmes asservis. Le système d'ordre fractionnaire considéré possède, en plus du coefficient d'amortissement et de la pulsation naturelle, l'ordre fractionnaire  $m$  comme troisième paramètre qui joue un rôle très important dans la caractérisation des performances assurant une diversité de choix de ces caractéristiques. Les résultats obtenus des performances caractéristiques fréquentielles et temporelles de ce type de système fractionnaire ont été très intéressants et n'ont pas d'équivalents pour le système classique du second ordre.

## 2. Perspectives et suggestions

Beaucoup de travail de recherche reste à faire dans le domaine de la théorie des systèmes d'ordre fractionnaire. Alors les perspectives et les suggestions des travaux de recherche que l'on peut envisager sont cités au dessous comme:

- Extension des résultats obtenus pour un facteur d'amortissement  $\xi$  négatif tout en respectant la stabilité du système fractionnaire.
- Extension des résultats obtenus pour un ordre fractionnaire complexe.
- Extension du concept de filtre analogique de Butterworth aux systèmes d'ordre fractionnaire pour l'obtention de filtre analogique de Butterworth d'ordre fractionnaire comme suit :

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left[ \left( \frac{s}{\omega_c} \right)^\alpha \right]^{2N}}, \quad \text{avec } 0 < \alpha < 1$$

## *Références*

---

- [1] K.B. Oldham, J. Spanier, "The fractional calculus: Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order," Academic Press, New York, 1974.
- [2] K.S. Miller, B. Ross, "An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations," Wiley, New York, USA, 1993.
- [3] J.T. Machado, V. Kiryakova, F. Mainardi, "Recent history of fractional calculus," *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, Vol. 16, pp: 1140-1153, 2011.
- [4] B. Ross, "Fractional Calculus and its Applications," Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 1975.
- [5] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, "Fractional Integrals and Derivatives: Theory and application", Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.
- [6] I. Podlubny, "Fractional Differential Equations," Academic Press, San Diego, 1999.
- [7] R. Hilfer, "Applications of calculus in physics," World Scientific, Singapore, 2000.
- [8] I. Petras, I. Podlubny, P. O'Leary, L. Dorcak and B. M. Vinagre, "Analogue Realization of Fractional Order Controllers," *Fakulta Berg, TU Kosice*, 2002.
- [9] S. Das, "Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls," Springer, New York, 2008.
- [10] R. Caponetto, G. Dongola, L. Fortuna and I. Petráš, "Fractional Order Systems: Modeling and Control Applications," World Scientific, New Jersey, 2010.
- [11] M.D. Ortigueira, "Fractional Calculus for Scientists and Engineers," *Lecture notes in electrical engineering Volume 84*, Springer, 2011
- [12] H. Sheng, Y.Q. Chen, T.S. Qiu, "Fractional Processes and Fractional-Order Signal Processing: Techniques and Applications," *Signals and communication technology Springer-Verlag London*, 2012.
- [13] S. Das, I. Pan, "Fractional Order Signal Processing: Introductory Concepts and Applications," *Springer Briefs in applied sciences and technology*, Springer, 2012.
- [14] R. L. Magin, "Fractional calculus in bioengineering," *Begell House, Redding, CT, USA*, 2006.
- [15] J. Sabatier, O.P. Agrawalet and J.A. Tenreiro Machadoal, "Advances in Fractional Calculus: Theoretical Development and Applications in Physics and Engineering," Springer, the Netherlands, 2007.
- [16] M. Dalir, M. Bashour, "Applications of Fractional Calculus," *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 4, No. 21, pp: 1021 – 1032, 2010.

- [17] T. Kaczorek, "Selected Problems of Fractional Systems Theory," Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Springer, 2011.
- [18] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujillo, "Theory and Applications of Fractional Differential Equations," Vol. 204, of North-Holland Mathematics Studies. Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [19] I. Podlubny, "Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation," *Fractional Calculus & Applied Analysis*, Vol. 5, pp: 367–386, 2002.
- [20] R.P. Agarwal, "A propos d'une note de M. Pierre Humbert," *C. R. Académie des Sciences*, Vol. 236, pp: 2031–2032, 1953.
- [21] A. Erdélyi, "Higher Transcendental Functions," Vol. 1, 2 and 3, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [22] Y.N. Robotnov, "Elements of Hereditary Solid Mechanics," (in English), MIR Publishers, Moscow, 1980.
- [23] T.T. Hartley, C.F. Lorenzo, "A Solution to the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation," NASA/TP-1998-208963, December 1998.
- [24] C.F. Lorenzo, T.T. Hartley, "Generalized Functions For the Fractional Calculus," NASA/TP-1999-209424, October 1999.
- [25] A. Charef, "Analogue realization of fractional order integrator, differentiator and fractional  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  controller," *IEE Proc. Control Theory Appl*, Vol. 153, No. 6, pp: 714-720, 2006.
- [26] A. Charef, H.H. Sun, Y.Y. Tsao, and B. Onaral, "Fractal system as represented by singularity function," *IEEE Trans. Auto. Cont*, Vol. 37, No. 9, Sept 1992.
- [27] A. Oustaloup, "Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire," Masson, Paris, 1983.
- [28] A. Oustaloup, "La commande CRONE," Hermès, Paris, 1991.
- [29] C.C. Tseng, S.C. Pei, S.C. Hsia, "Computation of fractional derivatives using Fourier transform and digital FIR differentiator," *Signal Processing*, Vol. 80, No. 1, pp: 151-159, 2000.
- [30] C.C. Tseng, "Design of fractional order digital FIR differentiators," *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 8, No. 3, pp: 77-79, Mar. 2001.
- [31] Y.Q. Chen and K.L. Moore, "Discrete schemes for fractional-order differentiators and integrators," *IEEE Trans. Circuits and Systems-I*, Vol. 49, No. 3, pp: 363-367, 2002.

- [32] Y.Q. Chen and B.M. Vinagre, "A new IIR-type digital fractional order differentiator," *Signal Processing*, Vol. 83, No. 11, , pp: 2359-2365 Nov. 2003.
- [33] Y.Q. Chen, B.M. Vinagre and I. Podlubny, "Continued fraction expansion approaches to discretizing fractional order derivatives," an expository review, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 38, No. 1-2, pp: 155–170, 2004.
- [34] Y. Ferdi, "Computation of Fractional Order Derivative and Integral via Power Series Expansion and Signal Modelling," *Nonlinear Dynamics*, Vol. 46, No. 1-2, pp: 1-15, 2006.
- [35] R.S. Barbosa, J.A.T. Machado and M.F. Silva, "Time domain design of fractional differintegrators using least-squares," *Signal Processing*, Vol. 86, No. 10, pp: 2567-2581, 2006.
- [36] C.C. Tseng, "Design of FIR and IIR fractional order Simpson digital integrators," *Signal Processing*, Vol. 87, No. 5, pp: 1045–1057, May. 2007.
- [37] K. Hamdaoui and A. Charef, "A New Discretization Method for Fractional Order Differentiators via Bilinear Transformation," *Proc. 15th Int. Conference on Digital Signal Processing*, Cardiff, UK, July. 1-4, pp: 280-283, 2007.
- [38] C. Hwang, J.F. Leu and S.Y. Tsay, "A note on time-domain simulation of feedback fractional-order systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.47, No. 4, pp: 625–631, 2002.
- [39] I. Podlubny, "Matrix approach to discrete fractional calculus," *Fractional Calculus and Applied Analysis*, Vol. 3, No. 4, pp: 359–386, 2000.
- [40] I. Podlubny, A. Chechkin, T. Skovranek, Y. Q. Chen and B.M. Vinagre, "Matrix approach to discrete fractional calculus II: Partial fractional differential equations," *Journal of Computational Physics*, Vol. 228, No. 8, pp: 3137–3153, 2009.
- [41] A. Monje, Y-Q. Chen, B-M. Vinagre, D. Xue, V. Feliu. "Fractional-order Systems and Controls Fundamentals and Applications," London: Springer, 2010.
- [42] I. N'Doye, "Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires," Thèse de doctorat de l'Université Henri Poincaré, Nancy 1, France, 23 février, 2011.
- [43] D. Matignon, "Stability result on fractional differential equations with applications to control processing," in *Proc. IMACS-SMC Proceedings*, Lille, France, pp: 963-968, 1996.

- [44] D. Matignon, "Stability properties for generalized fractional differential systems," in Proc. of Fractional Differential Systems: Models, Methods and Applications, pp: 145–158, 1998.
- [45] I. Petras and L. Dorcak, "The Frequency Method for Stability Investigation of Fractional Control Systems," Journal of SACTA, Vol. 1, No. 1-2, pp: 75–85, 1999.
- [46] E.D. Sontag, "Mathematical control theory, Deterministic finite dimensional systems," Volume 6 of texts in applied mathematics, Springer Verlag, 1990.
- [47] D. Matignon, B. D'Andrea-Novell, "Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems," in Computational engineering in systems applications, IMACS, IEEE-SMC, Lille, France, Julie 1996.
- [48] D. Valério, "Fractional Robust System Control," PhD thesis, Universidade Técnica de Lisboa, Portugal, 2005.
- [49] S. Ladaci, "Contribution à la Commande Adaptative d'Ordre Fractionnaire," Thèse de doctorat de l'Université Mentouri, Constantine, Algérie, 2007.
- [50] R. Gorenflo, F. Mainardi, "Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order," Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Springer Verlag, pp: 223 – 276, Wien and New York 1997.
- [51] K.B. Oldham and J. Spanier, "The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order," Dover Books on Mathematics, 2006.
- [52] A. Charef, "Modeling and Analog Realization of the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation," Nonlinear Dynamics, Vol. 46, pp: 195-210, 2006.
- [53] K.S. Cole and R.H. Cole, "Dispersion and absorption in dielectrics, alternating current characteristics," Journal of Chemical Physics Vol. 9, pp: 341-351, 1941.
- [54] J. R. MacDonald, "Impedance spectroscopy," NY, John Wiley, 1987.
- [55] D. Boucherma, A. Charef, "Approximation d'une fonction fondamentale d'ordre fractionnaire," 2<sup>ème</sup> Conférence Nationale sur les Systèmes d'ordre Fractionnaire et leurs Applications, SOFA'11 Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 24 - 26 Octobre 2011.
- [56] **H. Nezzari**, A. Charef, "Analysis and Realization of Analog Fractional Order Damped Sine and Cosine Functions," Symposium on Fractional Signals and Systems, FSS 2011, Coimbra, Portugal, November, 4-5, pp: 89-98, 2011.

- [57] A. Charef, **H. Nezzari**, “On the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation,” *Nonlinear Dynamics*, Vol. 65, No 3, pp: 335-348, 2011.
- [58] Kuo, C. Benjamin, “Automatic control systems,” Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey, 1981.
- [59] **H. Nezzari**, A. Charef et M. Assabaa, “Systèmes d’Ordre Fractionnaire Oscillatoire Généralisé,” deuxième conférence internationale en systèmes et traitement de l’information, ICSIP’11, Guelma, Algérie, 15-17 Mai 2011.
- [60] R.C. Dorf and R.H. Bishop, “Modern Control Systems,” Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1995.
- [61] S. Manabe, “The non-integer integral and its application to control systems,” *Japanese Institute of Electrical Engineers Journal*, Vol. 6, No. 3-4, pp: 83–87, 1961.
- [62] R.S. Barbosa, T. Machado, and I.M. Ferreira. “Tuning of PID Controllers Based on Bode’s Ideal Transfer Function” *Nonlinear Dynamics*, Vol. 38, pp: 305–321, 2004.
- [63] A. Oustaloup, B. Mathieu, “La Commande CRONE: du Scalaire au Multivariable,” Paris: Hermès, 1999.
- [64] M. Tabatabaei, M. Haeri, “Characteristic ratio assignment in fractional order systems,” *ISA Transactions*, Vol. 49, pp: 470-478, 2010.
- [65] R. Malti, X. Moreau, F. Khemane, A. Oustaloup, “Stability and resonance conditions of elementary fractional transfer functions,” *Automatica*, Vol. 47, pp: 2462–2467, 2011.
- [66] **H. Nezzari**, A. Charef, D. Boucherma, “Performance Characteristics Analysis of the Reference Fractional Order System,” *International Conference on Automatic and mechatronics, CIAM 2011*, Oran, Algeria, Nov 22-24 ,2011.
- [67] K. Ballou, “Cardano’s solution to the cubic: A mathematical soap opera,” *The Montana Mathematics Enthusiast*, Vol. 2, No. 1, pp: 65-71, 2005.

## **Résumé**

Les systèmes d'ordre fractionnaire ont reçu un intérêt considérable dans de nombreux domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie. Ces systèmes sont généralement décrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Dans le domaine fréquentiel, ils sont représentés par des fonctions de transfert irrationnelles. A cause de ces fonctions irrationnelles, les systèmes d'ordre fractionnaire ont été marginalement étudiés. Comme ils n'ont pas de solutions analytiques exactes, les techniques numériques et d'approximation sont largement utilisées pour leur résolution, analyse et implémentation.

Dans cette thèse des techniques de résolution, d'implémentation analogiques et d'analyse des systèmes d'ordre fractionnaire fondamentaux en se basant sur des approximations par des fonctions rationnelles de leur fonctions de transfert irrationnelles sont présentées. L'extraction et l'analyse des caractéristiques fréquentielles et temporelles de ces systèmes a aussi été faite. Des exemples illustratifs ont été présentés pour démontrer l'efficacité et l'exactitude des méthodes proposées. Les résultats des simulations obtenus ont été satisfaisants. Ils ont été discutés et comparés avec des méthodes de résolution récente dans la littérature. Les comparaisons des caractéristiques obtenues avec ceux des systèmes du second ordre classique ont aussi été faites.

### **Mots Clés :**

Equation différentielle d'ordre fractionnaire, Fonction irrationnelle, Fonction rationnelle  
Implémentation analogique, Stabilité, Systèmes d'ordre fractionnaire

## **Abstract**

Fractional order systems have received a considerable interest in numerous domains of applied sciences and engineering. These systems are generally described by fractional order differential equations. In the frequency domain, they are represented by irrational transfer functions. Because of these irrational functions, fractional order systems have been marginally studied. Since they do not have exact analytical solutions, digital and approximation techniques are widely used for their resolution, analysis and implementation.

In this thesis resolution, analog implementation and analysis techniques of fundamental fractional order systems based on rational function approximations of their irrational transfer functions are presented. Derivation and analysis of the frequency and temporal characteristics have also been done. To show the efficiency and exactitude of the proposed methods, illustrative examples have been presented. The obtained simulation results were satisfactory. They have been compared to some of the recent resolution methods in the literature. Comparisons of the obtained characteristics with those of a regular second system have been also done.

### **Key Words:**

Analog implementation, Fractional order differential equation, Fractional order system, Irrational function, Rational function, Stability

## ملخص

لقد عرفت الأنظمة ذات الأس الجزئي اهتمامات معتبرة في شتى ميادين العلوم التطبيقية والهندسية. تمثل هذه الأنظمة عموما بمعادلات تفاضلية ذات درجة جزئية. في مجال الترددات يمكن تمثيل هذه الأنظمة بدوال تحويل غير منتظمة. بسبب طبيعة هذه الدوال كانت الدراسات هامشية لهذه الأنظمة. ومع انعدام عبارات تحليلية دقيقة تمثل حولا لهذه المعادلات, استعملت التقنيات الرقمية والتقريبية لإيجاد حلول لهذا النوع من المعادلات وبشكل موسع. كما يمكن أيضا تحليل وإنجاز هذه الأنظمة بمساعدة هذه التقنيات. في هذه الأطروحة, قمنا بعرض الإنجازات التماثلية والطرق التحليلية للأنظمة ذات الدرجة الجزئية الأساسية, وذلك بالاعتماد على التقريبات بدوال منتظمة للدوال التحويلية الغير منتظمة لهذه الأنظمة. كما قمنا أيضا باستخراج وتحليل الخصائص الزمنية والترددية لهذه الأنظمة. و لقد قدمنا أمثلة توضيحية للتدليل على فعالية ودقة الطرق المقترحة, وكانت نتائج المحاكاة المتحصل عليها مرضية. وقد تم مناقشة ومقارنة هذه النتائج مع طرق الحلول الموجودة في الأدبيات. كما تم أيضا مقارنة الخصائص المتحصل عليها مع تلك المتعلقة بالأنظمة ذات الدرجة الثانية الكلاسيكية.

### كلمات المفاتيح:

إنجاز تماثلي, ثبات, دالة غير منتظمة, دالة منتظمة, معادلات تفاضلية ذات الدرجة الجزئية, نظام نوأس جزئي