

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE MENTOURI - CONSTANTINE**

**FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR  
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE**

N° d'ordre : .....  
Série : .....



**MEMOIRE**

Présenté pour obtenir le diplôme de Magister  
En Electrotechnique

**OPTION**

Modélisation et commande des machines électriques

Par

**Nacir Boutra**

**THEME**

**Etude d'une suspension de rotors  
par paliers magnétiques**

**Soutenu le : 30/ 06 / 2010**

**Devant le Jury composé de :**

<b>Président :</b>	<b>A. BOUZID</b>	<b>Prof. (Univ. Constantine)</b>
<b>Rapporteur :</b>	<b>R. MEHASNI</b>	<b>MC (Univ. Constantine)</b>
<b>Examineurs :</b>	<b>M.E.H. LATRECHE</b>	<b>Prof. (Univ. Constantine)</b>
	<b>A. KHAZZAR</b>	<b>Prof. (Univ. Constantine)</b>

## **Remerciement**

Je remercie tout d'abord « ALLAH » de m'avoir donné le courage ainsi que la force pour pouvoir achever ce modeste travail.

Je remercie Monsieur Rabia MEHASNI, maître de conférences à l'université de Constantine, pour avoir proposé, dirigé et encadré ce sujet de thèse. Je lui remercie pour son soutien ininterrompu, ses conseils, ses encouragements et sa grande disponibilité pendant toute la durée de réalisation de cette thèse.

Je remercie le Professeur Bouzid Aissa de m'avoir fait l'honneur d'accepte présider le jury de soutenance de ce travail.

Je remercie Monsieur Latreche M.Elhadi Professeur à l'université de Constantine d'avoir accepté examiner ce travail malgré la non disponibilité et ses occupations administratives.

Je remercie également Monsieur Khazzar Abdelmalk professeur à l'université de Constantine d'avoir accepté d'être membre de jury de soutenance de ce travail en souhaitant profiter de ses critiques constructives et orientation bénéfiques.

A la fin, je remercie tous ceux qui ont contribué à la finalisation, de près ou de loin, de ce travail.

# Dédicaces

*A ceux qui n'ont jamais cessé de m'encourager  
et de me soutenir, à ceux qui leur amour m'a  
donné la volonté d'aller toujours de l'avant,*

**A mes très chers parents, que Dieu les protège**

*A mes sœurs et mes frères*

**A mes amis**

**Je dédie ce travail**

**Nacir.**

## Remerciements

Introduction générale.....	7
----------------------------	---

---

---

### *CHAPITRE I*

---

---

I. Historique sur les paliers magnétiques.....	12
I.1. Introduction.....	13
I.2. Applications des suspensions magnétiques.....	15
I.3. Les différents types de palier magnétique.....	17
I.3.1. Les paliers magnétiques passifs.....	17
I.3.2. Les palmiers magnétiques actifs.....	19
I.3.3. Palier magnétique hybrides.....	20
I.4. Configurations des paliers actifs.....	21

---

---

### *CHAPITRE II*

---

---

II. Modélisation d'un palier magnétique radial (rotatif).....	23
II.1. Equations de bases du palier magnétique actif .....	24
II.2. Modèle mathématique du problème électromagnétique du palier.....	26
II.2.1. Modèle magnétostatique.....	27
II.2.2. Modèle magnétodynamique.....	27
II.3. Conditions de passage entre milieux .....	28
II.4. Conditions aux limites .....	28
II.5. Cas traité et équation du modèle.....	29
II.6. Calcul de la force magnétique .....	29

---

---

### *CHAPITRE III*

---

---

III. Modélisation numérique éléments finis du palier magnétique.....	30
III.1. La méthode des éléments finis (MEF).....	31

III.1.1. Principe de la Méthode des éléments finis.....	31
III.1.2. Discrétisation du domaine d'étude en éléments finis.....	31
III.1.3. Fonction d'interpolation et potentiel dans l'élément.....	32
III.1.4. Formulation intégrale et équation algébrique.....	34
III.1.4.1. Cas de l'électroaimant (excitation en courant) .....	34
III.1.4.2. Unicité de la solution.....	36
III.1.4.3. Prise en compte de l'aimant permanent.....	37
III.1.5. Assemblage des systèmes élémentaires et système matriciel global.....	40

---



---

## *CHAPITRE IV*

---



---

IV. Résolution numérique et résultats obtenus .....	41
IV.1. Code de calcul développé .....	42
IV.1.1. Maillage 3D et discrétisation éléments finis .....	42
IV.1.2. Le solveur 3D (code central) .....	46
IV.1.2.1. Types de conditions aux limites prises en compte.....	47
IV.1.2.2. Nature du système global et méthode de résolution.....	48
IV.1.3. Module d'exploitation des résultats .....	49
IV.2. Validation du code développé et résultats obtenus.....	50
IV.2.1. Palier magnétique actif à 2 pôles .....	52
IV.2.1.1. Géométries traitée et maillage 3D du domaine d'étude.....	52
IV.2.1.2. Résultats obtenu et vérification.....	53
IV.2.2. Palier magnétique passif (aimant permanent) à 2 pôles.....	66
IV.2.3. Palier magnétique hybride à 8 pôles.....	71
Conclusion générale.....	81
Références bibliographiques.....	84

---

---

# **Introduction générale**

---

---

## **Introduction Générale**

Les paliers magnétiques sont des dispositifs qui utilisent les forces magnétiques pour supporter des rotors sans contact mécanique. L'absence des frottements et l'exclusion de toute lubrification ont leur donné l'avantage d'être utilisés dans les compresseurs, les centrifugeuses, les turbines à très grandes vitesses et les machines-outils à haute précision.

Afin de maintenir le rotor en rotation à la position d'équilibre, le palier doit appliquer au rotor des paires de forces magnétiques de sens opposés. Sous l'effet de l'inertie et d'autres phénomènes liés à la fabrication des rotors, d'éventuels excentricités et vibrations apparaissent. Pour éliminer les effets indésirables de ces dernières, on procède à la correction de la position du rotor en corrigeant les forces appliquées par action directe sur les courants du palier. Les paliers permettant cette procédure de correction sont qualifiés de paliers magnétiques actifs PMA. Ils sont des électroaimants dont les courants d'excitation sont imposés par un circuit de contrôle qui intervient lors d'une détection d'éventuel déplacement du rotor.

Selon le principe de fonctionnement des paliers magnétiques prédéfini, les paires de forces peuvent être générés par un arrangement d'aimants permanents. A cause de l'impossibilité de correction des forces dans ce cas, ce type de paliers est dit paliers magnétiques passifs PMP. Si en comparaison avec les paliers actifs les PMP présentent des pertes Joule nulles, ils ont l'inconvénient d'exclure toute possibilité de contrôle. Afin de profiter des avantages de chacun, possibilité de contrôle pour les paliers actifs et pertes joule nulles pour les paliers passifs, les deux types peuvent être associés pour donner un autre type de paliers magnétiques qualifié de palier magnétique hybride PMH.

L'objectif des études des paliers magnétiques est généralement la recherche des conditions qui permettent un fonctionnement performant. Des telles études peuvent concerner leur optimisation (choix des matériaux et dimensionnement) ou la conception du circuit de contrôle. Dans les deux cas, le paramètre d'étude est essentiellement la capacité de charge qui est la force magnétique maximale produite et exercée par le palier sur le rotor.

En électromagnétisme, la qualité de la force magnétique dépend directement et fortement de la cartographie du champ magnétique dans le dispositif étudié. Dans le domaine des paliers, l'obtention d'une cartographie réelle du champ qui donne des valeurs valables de la force sur la base de laquelle on conçoit le circuit de contrôle nécessite la prise en compte de la réalité du phénomène magnétique. Une telle réalité concerne généralement la nature des matériaux (isotropie et problème de saturation), les effets de bords (extrémités), excentricité du rotor et le couplage des phénomènes en présences (ex : magnétique, thermique et mécanique). Si l'effet de la saturation des matériaux peut être estimé par des études 2D, les effets de bords (extrémités et têtes des bobines) et de l'excentricité exigent une étude 3D.

L'objectif prédéfini de notre travail est le calcul des paramètres de fonctionnement d'un palier circulaire (rotatif) tenant compte de la saturation du circuit magnétique et de l'excentricité du rotor. En ce qui concerne le problème de la saturation des matériaux, il s'agit tout simplement d'adapter et de mettre en œuvre les codes de calcul que nous avons déjà construit et testé (les méthodes de Newton Raphson et de la corde).

Pour le problème de l'excentricité du rotor, il s'agit d'une complication de la géométrie traitée suite au décalage du rotor ce qui exclut toute approximation axisymétrique qui permet de réduire l'étude au cas 2D. Pour prendre en charge le problème de l'excentricité et la prise en compte des particularités des phénomènes résultants, nous nous sommes trouvé obligé à réaliser une étude numérique 3D du problème magnétique du palier considéré. Vu les contraintes de réalisation de ce travail (durée limitée) d'une part, et la complexité des phénomènes présents dans le problème traité d'autre part, notre étude a été focalisée sur le problème magnétique duquel dépendent les autres phénomènes (ex : dynamique et thermique).

Dans telle étude, il s'agit de l'application de la méthode numérique des éléments finis 3D pour résoudre le problème électromagnétique dans un système de suspension de rotor par palier magnétique circulaire. Cette résolution concerne principalement la détermination de la cartographie du champ électromagnétique et le calcul des grandeurs électromagnétiques nécessaires dans une étude complète du problème considéré (optimisation, conception d'un système de contrôle).

Pour permettre la résolution du problème électromagnétique dans notre cas de problème, nous avons construit un code de calcul numérique éléments finis 3D. Ce code est constitué principalement d'un mailleur, d'un solveur et d'un module d'exploitation.

En ce qui concerne le mailleur, il s'agit d'un générateur automatique de géométries 3D de types circulaires contenant toutes les spécifications des paliers magnétiques et même des machines électriques tournantes. Le maillage 3D est basé sur l'extension par couches d'un maillage primaire 2D. De telle extension présente une grande souplesse pour prendre en compte toutes les particularités géométriques dans les trois directions.

Pour le module de résolution appelé solveur, il s'agit du calcul des systèmes algébriques élémentaires liés au type d'équation aux dérivées partielles EDP traité, l'assemblage de ces systèmes pour aboutir au système algébrique global, l'introduction des conditions aux limites et la résolution du système algébrique résultant. Ce module est capable de prendre en charge toutes les types d'excitation, en courant (sources de courant supposées parfaites), aimant permanent et hybride (courant + aimant permanent). Actuellement, sauf des conditions aux limites aux frontières de type Dirichlet homogène sont considérés.

Le module d'exploitation sert à calculer et visualiser les grandeurs électromagnétiques (induction magnétique, énergie, force,...). Pour cela, on fait appel aux données géométriques et solution fournies par le mailleur et le solveur. Pour le calcul de la force magnétique clé de toute étude du palier magnétique, nous avons appliqué la méthode de tenseur de Maxwell surfacique.

Notre mémoire s'organise autour de quatre chapitres. Dans le premier chapitre intitulé historique sur les paliers magnétiques, on présente le principe de fonctionnement des paliers magnétiques, leurs domaines d'existence et d'applications industrielles. Dans ce même chapitre, nous avons classé les paliers selon la possibilité de contrôle (actif, passif et hybride) et la nature du champ produit radial ou longitudinal (homopolaire). A la fin de ce chapitre, on présente quelques configurations structurelles du palier dans lesquelles on montre le sens d'action du palier (radiale et/ou homopolaire).

Le second chapitre fait l'objet d'une présentation des équations et modèles mathématiques gouvernant le fonctionnement des paliers magnétiques. En se limitant au phénomène magnétique du palier, et en commençant par l'équation de base du palier actif, on montre qu'une linéarisation de l'expression de la force magnétique appliquée par le palier autour d'un point de fonctionnement et pour des variations très petites des grandeurs, position et courant, peut conduire à une fonction linéaire simple (fonction du courant d'alimentation du palier et de la position du rotor à centrer) qui permet la réalisation d'un contrôle par action sur les courants du palier. Ensuite, on présente les différentes équations EDP qui gouvernent le problème magnétique suivant la nature d'excitation. Ces équations sont formulées à partir du système d'équations de Maxwell qui représente la première approche mathématique du problème physique électromagnétique. Dans une telle formulation, nous avons utilisé le terme du potentiel vecteur magnétique.

Du fait que la résolution de ces équations dans un domaine limité nécessite l'introduction des conditions aux limites, on présente les différents types de conditions aux limites possibles qu'en peut imposer.

A la fin de ce chapitre, nous présentons la méthode utilisée pour calculer la force magnétique générée et appliquée par le palier sur le rotor. Une telle méthode est celle de tenseur de Maxwell surfacique.

Le troisième chapitre fait l'objet d'une présentation détaillée de la méthode des éléments finis 3D appliquée. Nous présentons le principe de la méthode, le type d'élément choisi (tétraèdre) et la fonction d'approximation (interpolation) de l'inconnu. Ensuite, on présente la formulation intégrale de l'équation EDP qui permet d'aboutir aux systèmes d'équations algébriques élémentaires pour le cas 3D. Pour préserver le sens physique du problème traité, une formulation variationnelle a été choisie. Dans cette formulation, le principe d'unicité de la

solution a été considéré. Pour prendre en compte la contribution d'éventuel existence de l'aimant permanent, le terme source intervenant dans l'équation algébrique a été évalué tout seule par application de la méthode des résidus pondérés. A la fin de ce chapitre, on parle de la technique de l'assemblage permettant d'aboutir au système algébrique global et final.

Dans le quatrième chapitre qui représente notre contribution réelle à l'étude des paliers magnétiques, on présente les différents modules du code de calcul (mailleur, solveur et exploitation) développé, la manière d'introduire des conditions aux limites et la résolution du système global résultant. Pour le mailleur, quelques types de maillage montrant les performances du code développé sont présentés. Il s'agit des maillages des géométries des paliers circulaires actif, passif et hybride de différents nombres de pôles. On montre aussi la manière d'injection des courants (sens) dans les différentes bobines supposées de forme rectangulaire.

Pour la résolution, on montre la manière d'introduire des conditions aux limites dans le formalisme éléments finis 3D, la nature du système résultant et la méthode de résolution appliquée pour résoudre le système algébrique assez compliqué (méthode GMRES). Ensuite, on a procédé à la validation de notre code de calcul par comparaison de nos résultats avec ceux obtenus par d'autres auteurs.

A la fin de ce chapitre, on présente les résultats obtenus concernant les distributions du champ magnétique (induction) et la force magnétique dans différents types de paliers, actif, passif et hybride. Pour cela, plusieurs cas de nombre de pôles et arrangements ont été traités.

# ***CHAPITRE I***

---

---

## **HISTORIQUE SUR LES PALIERS *MAGNÉTIQUES***

---

---

## I. Historique sur les paliers magnétiques

### I.1. Introduction

La lévitation magnétique repose sur le fait qu'un corps aimantable soumis à un champ magnétique (statique ou non) subit une force volumique qui tend à le rapprocher des zones à fort champ magnétique. L'intensité de cette force est conditionnée, d'une part, par l'intensité du champ magnétique extérieur appliqué et d'autre part par le degré d'aimantation du corps. Plus l'aimantation au sein du corps est importante plus la force magnétique l'est aussi. Actuellement, les matériaux les plus aimantables sont les matériaux ferromagnétiques. La connaissance du cycle d'hystérésis du matériau utilisé est impérative afin d'éviter d'éventuels changements de comportement magnétique (désaimantation, inversion d'aimantation, etc.) qui risquent de nuire à la stabilité de la lévitation [01].

L'élément responsable à la lévitation est appelé palier magnétique qui peut être un aimant permanent, électroaimant classique ou électroaimant supraconducteur.

Pour le cas de centrage de rotor, le système est construit essentiellement par les éléments suivants (Fig. I.1) [02-04].

- Rotor à stabiliser constitué d'un matériau ferromagnétique.
- Enroulement (ou aimant permanent) produisant le champ magnétique.
- Stator pour fermeture du champ magnétique.
- Capteurs de position.
- Circuit de contrôle de position.

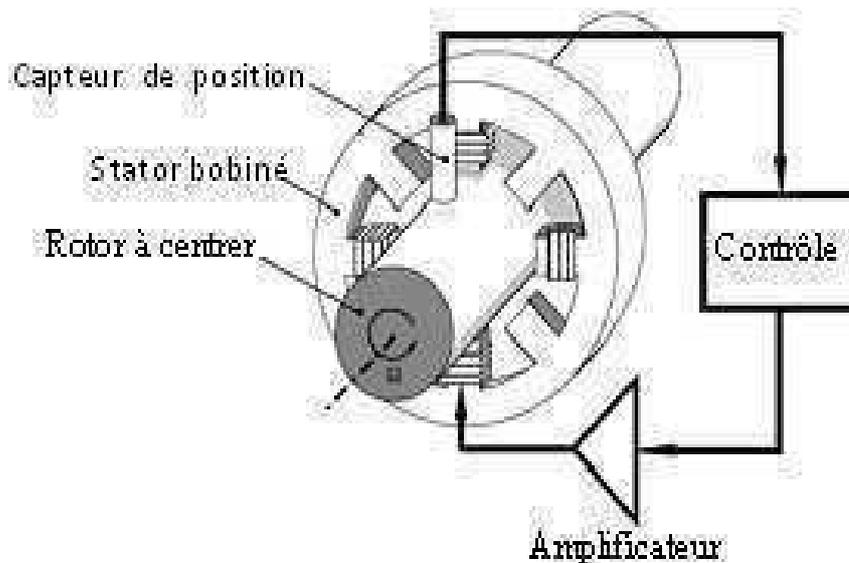


Fig. I. 1. Principe de fonctionnement d'un palier électromagnétique active, Centrage d'un rotor en rotation.

Comme toute technique de lévitation, la lévitation magnétique possède les avantages et les inconvénients suivants [02- 06].

Les avantages:

- s'emploie dans trois types d'environnements : air, vide et aqueux ;
- facilité de mise en œuvre ;
- coût de revient relativement bas ;
- Application industrielle éprouvée.
- Faible champ de fuite.

Les inconvénients:

- lévitation asservie;
- lévitation limitée à des objets aimantables;
- systèmes de nature non linéaire;
- La complexité liée à des problèmes de fiabilité.

Les paliers magnétiques sont utilisés dans des domaines où les systèmes mécaniques atteignent leurs limites. On trouve ;

#### a) **Domaine des hautes vitesses**

La vitesse de rotation d'un roulement à billes est limitée sous peine de problèmes mécaniques et d'échauffements. L'absence de contact dans un palier magnétique permet d'atteindre des vitesses bien supérieures. La limite est définie par la rupture mécanique du rotor du fait de la force centrifuge engendrée par la rotation. Une suspension mécanique pose un problème d'équilibrage à haute vitesse. Mécaniquement, il est impossible de faire coïncider exactement l'axe de rotation d'un palier avec l'axe d'inertie de la partie tournante. Il en résulte un balourd qui, même s'il est très faible, peut entraîner des vibrations importantes. L'utilisation de paliers magnétiques permet de s'affranchir de tels problèmes d'équilibrage car l'axe d'inertie peut s'aligner sur l'axe de rotation [03], [07-10].

#### b) **Domaine des atmosphères spécifiques ou du vide**

Dans ce cas, il n'est absolument pas possible d'utiliser un gaz ou un lubrifiant pour permettre le fonctionnement d'un palier. Les roulements à billes lubrifiés ou les paliers hydrodynamiques sont donc prohibés [07].

#### c) **Domaine dans lequel les frottements doivent être minimisés**

Les frottements sont totalement inexistantes sur une suspension entièrement magnétique car il n'y a aucun contact entre la partie fixe et la partie mobile [11].

#### d) **Domaine dans lequel l'usure doit être minimisée**

Comme il n'y a aucun contact entre la partie fixe et la partie mobile, la durée de vie du palier est illimitée (sauf accident). Cet avantage peut être appréciable dans un dispositif tel qu'un satellite où les paliers d'un système tournant ne peuvent être remplacés régulièrement.

L'absence d'usure est aussi intéressante en atmosphère spécifique car elle n'engendre aucune poussière [03], [07].

e) **Domaine dans lequel une grande précision est requise**

Un palier magnétique actif, contrôlé par un asservissement permet de positionner la partie mobile avec beaucoup de précision. Celle-ci dépend essentiellement de la qualité des capteurs utilisés et n'est donc pas sujette aux modifications des contraintes extérieures [03].

f) **Domaine dans lequel la variation de température est importante**

Une suspension magnétique, fabriquée avec des matériaux appropriés, est capable de fonctionner à des températures extrêmes. Elle peut ainsi être soumise à des températures basses, proches du zéro absolu ou bien être utilisée à des températures élevées en sortie de turbine [07].

## I.2. Applications des suspensions magnétiques

Les suspensions magnétiques sont utilisées dans des domaines très différents. Elles peuvent supporter des pièces d'à peine quelques grammes telles que des disques de compteur électrique jusqu'à des machines de plusieurs tonnes telles que certains compresseurs. Les parties sustentées peuvent être immobiles (télescopes) ou soumises à des vitesses élevées (centrifugeuses, turbines...).

Les principales applications sont les suivantes :

a) **Le spatial** : Une partie des recherches effectuées dans le domaine des paliers magnétiques a été menée par des entreprises telles que l'Aérospatiale en France ou la NASA aux Etats-Unis. La principale application des suspensions magnétiques dans le spatial concerne la mise en œuvre des volants d'inertie permettant de stabiliser un satellite ou bien d'emmagasiner de l'énergie. Les paliers magnétiques sont aussi utilisés dans certains dispositifs de prise de vue [07], [11].

b) **L'usinage** : Un avantage principal est la haute précision qui peut être atteint et la vitesse de rotation élevée avec une capacité relativement élevée de charge. Ceci est utile pour le fraisage lourd vitesse des hautes fonctions de l'aluminium [03].

La haute vitesse est une exigence essentielle dans le meulage de précision de petites pièces. Les suspensions magnétiques permettent d'équiper des broches d'usinage et de faire tourner des outils de coupe (rectification et fraisage) à des vitesses de rotation difficilement accessibles avec des broches à roulements plus conventionnelles (Fig. I.2). De telles broches tournent à des vitesses allant de 15.000 à 150.000 tr/mn pour des puissances respectives de 50 kW à quelques centaines de Watt [12]. En dehors de leurs performances dans le domaine des vitesses élevées les paliers magnétiques apportent une grande précision en rotation lors de l'usinage.



Fig. I. 2. Fraise sur palier magnétique

c) **Les turbocompresseurs** : Ce sont souvent des machines de grande puissance : il existe des gammes de 2 MW à 20.000 tr/mn jusqu'à 25 MW à 7.000 tr/mn (source S2M). Ils sont utilisés dans l'industrie du gaz, en production, transport et stockage ainsi qu'en pétrochimie. Les paliers magnétiques actifs apportent une solution aux problèmes de vibration, d'alignement, de joint et de maintenance [03].

d) **Les turboexpanders** : Ce sont des machines rapides permettant la détente des gaz. Ils sont utilisés dans des opérations de traitement, de refroidissement, de séparation ou de liquéfaction. Ces machines sont généralement puissantes et rapides : de 10.000 à 50.000 tr/mn et quelques centaines de KW ou plusieurs MW [03], [04], [12].

e) **Les pompes turbomoléculaires** : Elles permettent d'obtenir un vide très poussé grâce à une turbine tournant à grande vitesse (Fig. I.3). Le vide obtenu peut atteindre 10<sup>-10</sup> mbar. Les paliers magnétiques sont employés dans les pompes turbomoléculaires car ils permettent d'atteindre des vitesses élevées (100.000 tr/mn) sans polluer l'atmosphère environnante avec un lubrifiant. La suspension peut être active ou partiellement passive : les deux solutions existent industriellement [04].

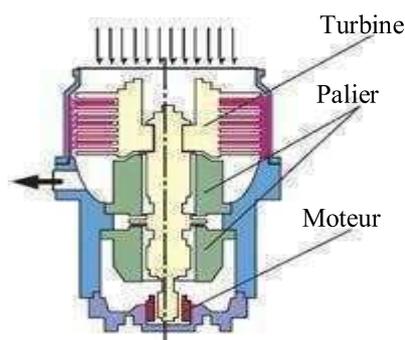


Fig. I. 3. Pompe turbomoléculaire sur suspension magnétique (d'après Alcatel DTV).

f) **Les centrifugeuses** : Elles permettent grâce à leur vitesse de rotation extrêmement élevée de séparer des substances de densités différentes. Elles rendent possible l'enrichissement de l'uranium à un taux que peu d'autres méthodes peuvent atteindre. Là encore, l'intérêt du palier magnétique vient du fait qu'il permet d'atteindre des vitesses importantes tout en étant

compatible avec le milieu environnant. Ce sont essentiellement des paliers passifs qui sont utilisés pour cette application [07].

g) **Les "choppers" de particules** : Ils sont utilisés dans les laboratoires de physique pour filtrer des particules d'énergies différentes. Ils sont constitués d'un disque muni de fentes tournant à grande vitesse selon la largeur des fentes, l'épaisseur du disque et la vitesse de rotation, le "chopper" ne laisse passer que des particules ayant une énergie donnée. Les particules trop lentes ou trop rapides sont déviées par les bords des fentes ou les autres disques.

### I.3. Les différents types de palier magnétique

De point de vue contrôlabilité, on peut distinguer les types de paliers suivants :

#### I.3.1. Les paliers magnétiques passifs

Les paliers magnétiques passifs sont les plus simples à réaliser. Ils sont autonomes. Leur fonctionnement ne nécessite aucun apport d'énergie venant de l'extérieur (à l'inverse des paliers magnétiques actifs), ni un refroidissement (à l'inverse des paliers supraconducteurs). Néanmoins ils ne peuvent être utilisés seuls pour des raisons de stabilité (voir les exemples ci-après) [13]. Les paliers magnétiques passifs doivent donc être associés à un système mécanique (roulement, palier hydrodynamique, butée à aiguille...) ou à un autre type de palier magnétique. Les paliers magnétiques passifs sont de deux types : les paliers à aimants permanents et les paliers à réluctance variable [14-18].

#### a) Les paliers à aimants permanents

Un type de palier à aimant permanent est montré sur la figure suivante :

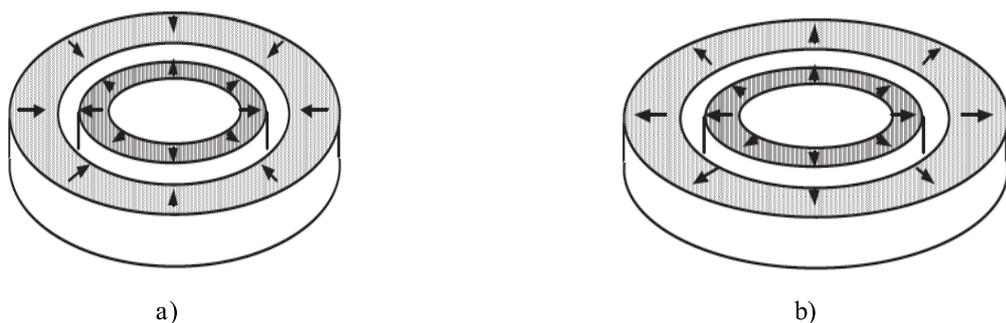


Fig. I.4 : a) Centreur à aimant permanent b) Butée à aimant permanent.

Il est constitué au minimum de deux bagues d'aimants permanents en interaction, l'une des bagues étant fixe tandis que l'autre est solidaire du rotor. En fonction des directions d'aimantation des deux bagues, il est possible d'obtenir, avec la même géométrie, soit un centreur, soit une butée.

Dans le cas de la Fig. I.4.a, si la bague intérieure se décale radialement, la bague extérieure la repousse vers le centre, il s'agit donc d'un centreur. Dans le cas de la Fig. I.4.b, si la bague intérieure se décale axialement, la bague extérieure la rappelle dans son plan de symétrie. Il s'agit donc d'une butée.

Nous pouvons néanmoins mettre en évidence des problèmes d'instabilité liés à ces paliers. Si dans le cas de la butée, la bague intérieure s'éloigne radialement, elle est violemment attirée par la bague extérieure. La butée est donc instable radialement. Inversement, dans le cas du centreur, si la bague intérieure est déplacée axialement, elle sera éjectée par la bague extérieure. Le centreur est donc instable axialement. De même, lorsque la bague intérieure du centreur est décalée angulairement, la bague extérieure exerce des forces qui tendent à créer une rotation plus importante. Le centreur est donc aussi instable angulairement (Fig. I.5) [07].

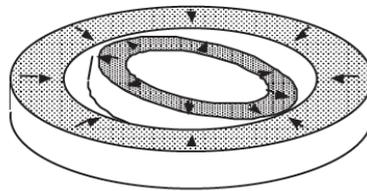


Fig. I.5. Instabilité angulaire d'un centreur.

#### b) Les paliers à réluctance variable

Là aussi, nous avons à faire à des systèmes passifs. Ils n'ont par conséquent besoin d'aucune source d'énergie extérieure pour fonctionner. Bien qu'ils puissent comporter des aimants, ces paliers ne fonctionnent pas sur un principe d'interaction directe entre aimants. Ils sont composés de deux circuits magnétiques séparés. L'un des circuits est lié au rotor tandis que l'autre est fixé au stator (voir Fig. I.6).

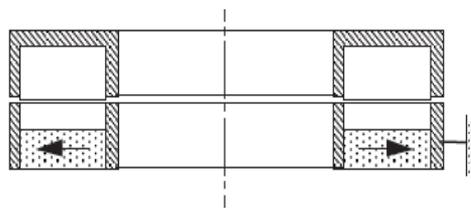


Fig. I.6. Centreur à réluctance variable

Les circuits magnétiques sont composés de "dents" en vis-à-vis. La moitié de ces dents est placée sur la partie statique du palier tandis que l'autre l'est sur la partie mobile. Une différence de potentiel magnétique est créée entre ces dents soit par un aimant soit éventuellement par une bobine. Mais dans ce cas nous ne pouvons plus parler de palier passif. Cette différence de potentiel magnétique crée un flux qui circule entre les dents. Ce flux engendre une pression qui tend à rapprocher les dents. Lorsque nous les décalons latéralement l'une par rapport à l'autre, nous observons dans le même temps, une augmentation de l'énergie

magnétique globale stockée dans le système. Les dents cherchent alors à se réaligner afin de minimiser cette énergie.

Sur une butée à réluctance variable, les dents doivent être disposées de façon à s'opposer à un déplacement axial du centreur (Fig. I.7). Cette butée assure donc la stabilité axiale mais est instable latéralement. Le principal avantage de ces suspensions provient du fait qu'elles ne nécessitent pas forcément d'aimant sur leur partie en mouvement.

Cela permet d'éliminer bien des problèmes mécaniques lors de la mise en rotation. Malheureusement, elles génèrent des instabilités beaucoup plus importantes qu'un palier à aimant [19], ce qui les rend difficiles à contrôler. Un centreur générera une instabilité le long de son axe de rotation tandis qu'une butée sera instable dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation [07].

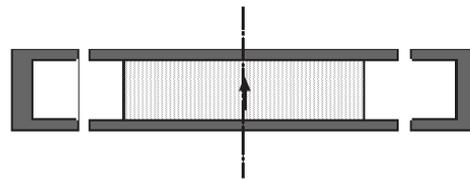


Fig. I.7. Butée à réluctance variable

### I.3.2. Les paliers magnétiques actifs

Les paliers actifs (AMB) ont reçu une attention considérable pour la recherche dans les dernières décennies [20-25], ils sont des électroaimants dont le courant est asservi pour maintenir la partie mobile du circuit magnétique dans une position fixée. Ils ont besoin d'un apport d'énergie pour fonctionner. Pour alimenter chacun des actionneurs constituant un palier actif, il faut une alimentation de puissance, une commande et un capteur de position. L'exemple le plus simple est celui de la butée active (voir Fig. I.8) [07].

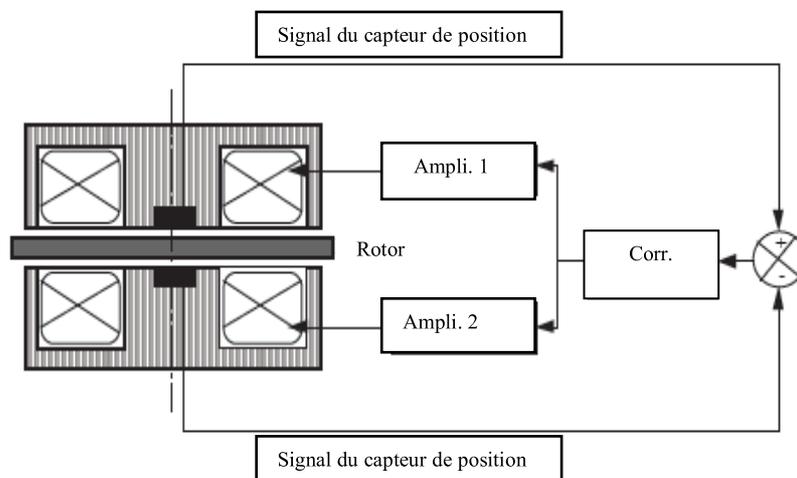


Fig. I.8. Principe d'une butée active.

Nous remarquons la nécessité de mettre en œuvre deux électroaimants pour constituer une butée. Cela s'explique par le fait qu'un électroaimant ne peut exercer que des forces d'attraction.

Pour asservir un axe, soit 2 directions, il faut donc 2 actionneurs. Grâce aux asservissements, la position peut être réglée avec une grande précision. Les limitations sont dues aux capteurs, aux saturations (des matériaux ou de la puissance) et à la dynamique de l'asservissement.

Pour pouvoir obtenir une suspension complète, il faut associer deux centreurs et une butée. Chaque centreur est constitué de quatre actionneurs et asservit deux axes de liberté (voir Fig. I.9) [07].

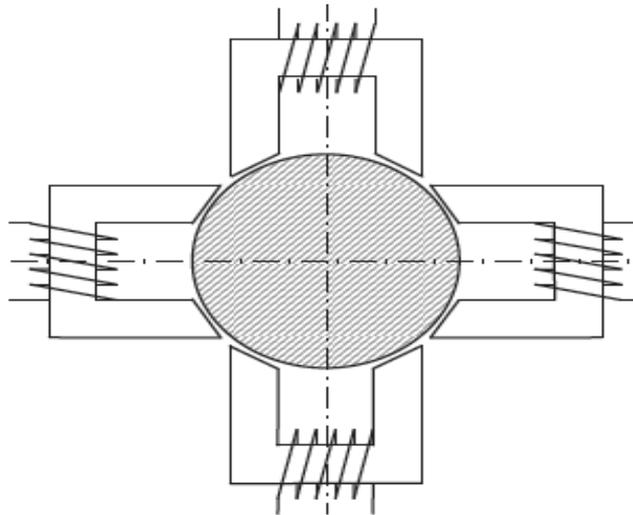


Fig. I.9. Centreur actif

Les paliers actifs sont a priori applicables à tout type de système mécanique à condition d'être correctement dimensionnés. Par contre, si leur structure est simple dans le principe (pas d'instabilité puisque correctement asservis), leur mise en œuvre est assez lourde.

Une suspension complète nécessite le contrôle de cinq degrés de liberté, donc de dix directions. Cela peut entraîner la mise en œuvre de dix actionneurs, dix capteurs, dix amplificateurs de puissance et cinq commandes reliées entre elles pour tenir compte des couplages mécaniques.

### I.3.3. Palier magnétique hybrides

Comme on a vu précédemment (section 2.3.1), les paliers magnétiques passifs présentent des pertes négligeables à cause de l'absence de toute source de courant mais aucune possibilité de contrôle.

Les paliers magnétiques actifs au contraire, présentent une haute culpabilité de control mais des pertes d'énergie très importants à cause de l'existence des courants de polarité. Afin d'exploiter les mérites de chaque type de paliers, on combine les deux types ce qui donne un nouveau type qualifié d'hybride [03], [08], [26-29].

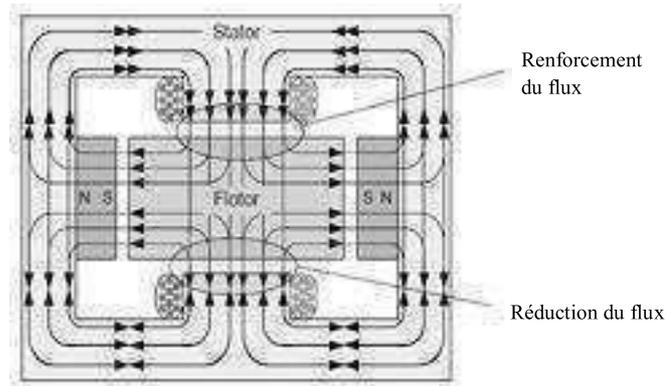


Fig. I. 10. Paliers magnétiques hybrides [03].

#### I.4. Configurations des paliers actifs

Pour les paliers magnétiques radiaux, il existe généralement deux structures dont la distinction est faite par la connaissance des polarités magnétiques vues par le rotor. Si la totalité du flux magnétique est confiné à un plan perpendiculaire à l'axe de rotation du rotor, comme indiqué dans la (Fig. I.11), puis les polarités magnétiques des pôles sont alternées autour du rotor, on dit que le palier a une configuration hétéro polaire [07].

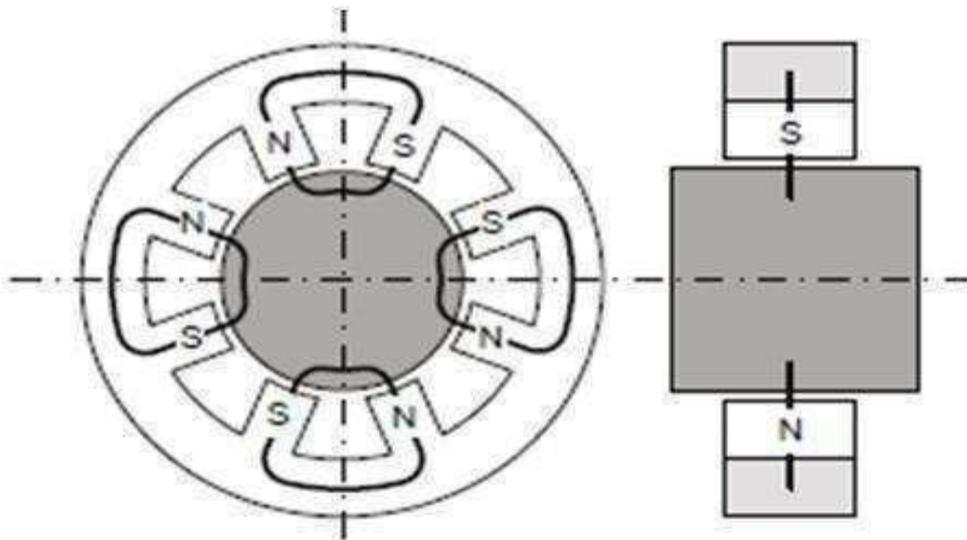


Fig. I.11. Configuration hétéro polaire: polarités des pôles du stator varient suivant la séquence : N-S-S-N-S-S-N.

Si au moins une partie du flux magnétique peut passer axialement le long du rotor et / ou du stator, comme indiqué dans la (Fig. I. 12), il est alors possible pour l'ensemble des pôles dans un plan donné d'avoir la même polarité: alternance de polarité se produit dans le sens axial. Une telle configuration est appelée homopolaire.

Les configurations homopolaires sont les plus couramment utilisées en liaison avec des aimants permanents (PM) [03], [04], [06].

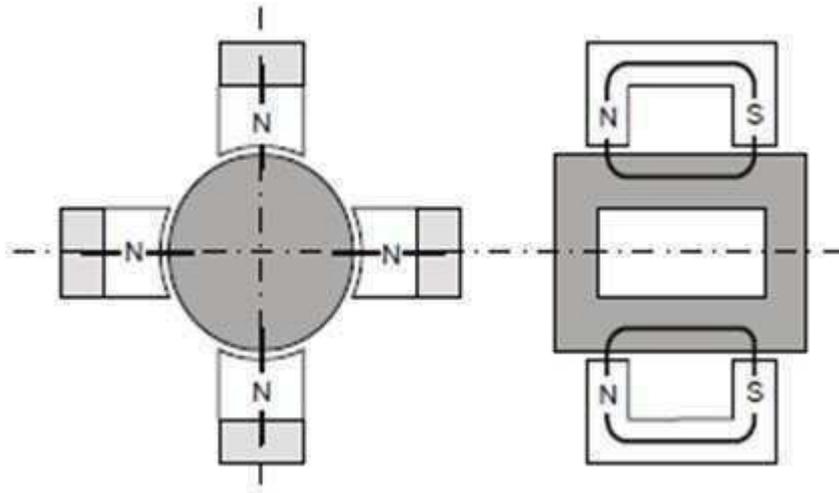


Fig. I.12. Configuration homopolaire: pôles du stator ont les mêmes polarités (N dans le plan à gauche et S dans le plan à droite).

## *CHAPITRE II*

---

---

# **MODÉLISATION D'UN PALIER MAGNÉTIQUE RADIAL (ROTATIF)**

---

---

## II. Modélisation d'un palier magnétique radial (rotatif)

### II.1. Equations de bases du palier magnétique actif

Dans un dispositif à paliers magnétiques (Fig. II.1), les actionneurs (inducteur ou aimants) exercent des forces magnétiques attractives de sens opposées sur le rotor en le maintenant dans une position stable alors que cette dernière est pratiquement affectée par les effets de l'inertie de rotor et les variations brusques de la vitesse de rotation [03], [05], [30-36].

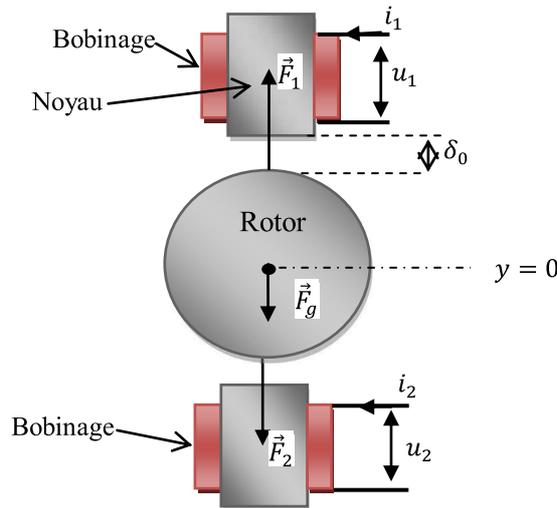


Fig. II.1. Schéma simplifié d'un centrage d'un rotor par paliers magnétiques actifs

La force magnétique appliquée par un électroaimant 1 sur le rotor pour  $y = 0$  est donnée par [03] :

$$F_y = \frac{1}{4} \mu_0 N^2 S \left( \frac{i_1}{\delta_0} \right)^2 \quad (\text{II.01})$$

$N$  est le nombre de spires du bobinage,  $S$  est la section du noyau,  $\alpha$  est l'angle de l'épanouissement du pôle,  $\delta_0$  est l'entrefer.

Afin d'assurer cette stabilité, un circuit de contrôle à feedback doit être utilisé. La force résultante appliquée par un pair de pôles d'électroaimants est fonction non linéaire du courant  $i$ , de la position du rotor " $y$ " et de l'aimantation du noyau de fer.

Un mode différentiel de fonctionnement du palier est utilisé pour linéariser la fonction de la force où un même courant de polarisation  $I_0$  est injecté dans les électroaimants. Le contrôle de la position du rotor " $y$ " est réalisé par action sur un courant additionnel de contrôle  $i_y$ .

Pour le cas de la figure ci-dessus on a,

$$i_1 = I_0 + i_y \quad (\text{II.02})$$

$$i_2 = I_0 - i_y \quad (\text{II.03})$$

En négligeant la non linéarité des noyaux des inducteurs, la résultante de la force appliquée par le pair d'inducteurs est donnée par [03], [37] :

$$F_y = F_1 - F_2 = \frac{1}{4} \mu_0 N^2 S \left( \left( \frac{I_0 + i_y}{\delta_0 - y} \right)^2 - \left( \frac{I_0 - i_y}{\delta_0 + y} \right)^2 \right) \cos \alpha \quad (\text{II.04})$$

L'équation (II.4) peut être linéarisée autour d'un point de fonctionnement ( $i_y = 0$ ,  $y = 0$ ) ce qui donne le résultat suivant [37] :

$$F_y = k_i i_y + k_y y \quad (\text{II.05})$$

$k_i$  et  $k_y$  sont respectivement le gain de courant et la raideur de position. Ils sont calculés par [37- 40],

$$k_i = \left( \frac{\partial F_y}{\partial i_y} \right)_{i_y=0, y=0} = \frac{4kI_0}{\delta_0^2} \cos \alpha \quad (\text{II.06})$$

$$k_y = \left( \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)_{i_y=0, y=0} = \frac{4kI_0^2}{\delta_0^3} \cos \alpha \quad (\text{II.07})$$

La prise en compte seulement de la force magnétique appliquée par l'électroaimant conduit au modèle linéarisé des paliers magnétiques actifs suivant l'axe des "y" est le suivant [05], [41]:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{k_i}{m} i_y + \frac{k_y}{m} y \quad (\text{II.08})$$

Où  $m$  est la masse du rotor.

En cas d'une alimentation en tension, on associe l'équation de la source [37],

$$u_1 = RI_0 + Ri_y + L_0 \frac{di_y}{dt} - k_e \frac{dy}{dt} \quad (\text{II.09})$$

$$u_2 = RI_0 - Ri_y - L_0 \frac{di_y}{dt} + k_e \frac{dy}{dt} \quad (\text{II.10})$$

Tel que  $k_e = \frac{I_0}{2\delta_0^2} \mu_0 N^2 S$  et  $L_0 = \mu_0 S \cdot N^2 \frac{1}{2\delta_0}$ .

Selon notre recherche bibliographique, malgré la forte dépendance entre la géométrie et le fonctionnement des paliers, on a distingué deux thèmes essentiels pour l'étude des paliers magnétiques. Le premier concerne l'optimisation des paliers (géométrie, orientation de l'aimantation) et pour le second, il s'agit de la conception des circuits de control. Dans les deux thèmes précités, on a vu que la procédure de calcul des paramètres objet de l'étude repose sur la connaissance de la cartographie du champ magnétique. Dans plusieurs travaux [42], les auteurs se basent sur un calcul analytique du circuit magnétique dans lequel il néglige la saturation des matériaux et le flux de fuite.

Pour prendre en compte ces deux derniers facteurs et afin d'avoir une cartographie réelle du champ magnétique qui permet d'aboutir à des résultats meilleurs, il est très avantageux d'effectuer une étude numérique tridimensionnelle.

Dans une telle étude, on procède à la résolution des équations aux dérivées partielles qui gouvernent le problème magnétique. Ces équations modèles sont construites à partir du système d'équation de Maxwell qui représente la première mathématique approche du problème physique magnétique.

## II.2. Modèle mathématique du problème électromagnétique du palier

Tout phénomène électromagnétique est régit par le système d'équations de Maxwell donnée par [43], [44] :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{II.11})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.12})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{II.13})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{II.14})$$

Ici,  $\vec{H}$  est le champ magnétique,  $\vec{B}$  est l'induction magnétique,  $\vec{E}$  est le champ électrique,  $\vec{D}$  est l'induction électrique,  $\rho$  est la densité volumique de charge électrique et  $\vec{j}$  représente la densité de courant total.

A ces équations, s'ajoutent les lois constitutives des milieux,

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_r = \mu_0 \mu_r \vec{H} + \vec{B}_r \quad (\text{II.15})$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \quad (\text{II.16})$$

Tel que  $\vec{B}_r$  est l'induction rémanente,  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide,  $\mu_r$  est la perméabilité magnétique relative du milieu,  $\varepsilon_0$  est la permittivité diélectrique du vide et  $\varepsilon_r$  est la permittivité diélectrique relative du milieu.

La résolution de l'ensemble du système d'équation précédent (II.11-II.14) est difficile. Pour cela, on cherche à formuler une équation à un seul inconnu dont la résolution nous permet ensuite de calculer toutes les grandeurs électromagnétiques par une simple intégration ou dérivation spatiale ou temporelle de l'inconnu.

Pour formuler une telle équation, on choisit dans la majorité de cas pour les problèmes électromagnétiques en présence d'excitation en courant le terme de potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  tel que,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (\text{II.17})$$

### II. 2. 1. Modèle magnétostatique

En cas d'une alimentation en courant continu (source de courant continu parfait) et présence d'aimant permanent, l'adaptation et la combinaison des équations précédentes donnent le modèle magnétostatique suivant :

$$\vec{\nabla} \wedge \left( \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \right) = \vec{j} + \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_r \quad (\text{II.18})$$

L'inconnue ici est le potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  qu'en 3D, il possède trois composantes  $A_x$ ,  $A_y$  et  $A_z$ .

### II. 2. 2. Modèle magnétodynamique

Lorsqu'il s'agit des sources de courant dépendantes du temps, la combinaison des équations (II.11-II.14) pour une formulation en terme de potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  conduit au modèle magnétodynamique général suivant [45]

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \left( \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \vec{\nabla} V = \vec{j} \\ \vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{\nabla} V) + \vec{\nabla} \cdot \left( \varepsilon \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \rho = 0 \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

Pour simplifier la résolution de ce problème, on découple les deux équations par introduction des conditions de Jauge. On cite principalement,

La Jauge de Coulomb [46],

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (\text{II.20})$$

Et la condition de Jauge [45]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \mu \sigma V \quad (\text{II.21})$$

L'introduction de la Jauge (II.21), permet de découpler les deux équations du système (II.19) ce qui donne,

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \left( \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = \vec{j} \\ \vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{\nabla} \cdot V) + \varepsilon \mu \sigma \frac{\partial V}{\partial t} = -\rho \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

Alors, l'introduction de la Jauge (II.20) donne, pour un problème purement magnétique, l'équation suivante :

$$\vec{\nabla} \wedge \left( \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.23})$$

### II. 3. Conditions de passage entre les milieux

Les grandeurs électromagnétiques pourraient être discontinues à l'interface entre deux milieux de propriétés physiques différentes (Fig. II. 1). On trouve pour les composantes tangentielles et normales les équations de passage suivantes [43], [44].

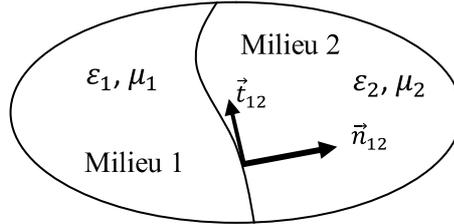


Fig. II. 2. Interface entre deux milieux

$$\vec{H}_{t2} - \vec{H}_{t1} = \vec{J}_s \times \vec{n}_{12} \quad (\text{II.24})$$

$$\vec{E}_{t2} - \vec{E}_{t1} = \vec{0} \quad (\text{II.25})$$

$$(\vec{B}_{n2} - \vec{B}_{n1}) \cdot \vec{n}_{12} = 0 \quad (\text{II.26})$$

$$(\vec{D}_{n2} - \vec{D}_{n1}) \cdot \vec{n}_{12} = \rho_s \quad (\text{II.27})$$

Où  $\vec{n}_{12}$  est la normale à la limite de séparation,  $\vec{t}_{12}$  est le vecteur unitaire tangentiel,  $\vec{J}_s$  est la densité surfacique de courant, et  $\rho_s$  est la densité surfacique de charge libre à l'interface.

Les relations (II.25) et (II.26) induisent les conséquences suivantes :  $\vec{B}_n$  et  $\vec{E}_t$  sont continus à l'interface par contre (II.24) et (II.26) explique la discontinuité de  $\vec{H}_n$  et  $\vec{D}_t$

### II. 4. Conditions aux limites

Aux frontières d'un domaine d'étude, l'inconnu  $\vec{U}$  par exemple peut vérifier une des conditions suivantes [46], [47]:

- Condition de Dirichlet :  $U = k$

Si  $k=0$ , il s'agit d'une condition de Dirichlet homogène. Si  $k \neq 0$ , c'est une condition de Dirichlet non homogène.

- Condition de Neumann :  $\frac{\partial U}{\partial n} = k$

Si  $k=0$ , il s'agit d'une condition de Newman homogène. Si  $k \neq 0$ , c'est une condition de Newman non homogène.

- Condition de Cauchy :  $\frac{\partial U}{\partial n} + aU = q$ , a et q sont des constants.

## II. 5. Cas traité et équation du modèle

Dans notre étude, on s'intéresse au calcul du problème électromagnétique dans un palier circulaire hybride (électroaimant + aimant permanent) qui permet ensuite d'évaluer tous les paramètres du contrôle (gain de courant et la raideur de position).

Dans la plus part des travaux [26], [42], [47], le régime statique est considéré. Pour cela, notre équation à résoudre est celle de Poisson de la magnétostatique donnée par

$$\vec{\nabla} \wedge \left( \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \right) = \vec{j} + \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_r \quad (\text{II.28})$$

## II.6. Calcul de la force magnétique

Le rotor de forme cylindrique plongé dans le champ magnétique produit par les inducteurs du palier évolue de manière à maximiser le flux qui le traverse. Un déplacement lié à cette évolution implique l'existence des forces extérieures du rotor. L'intérêt de notre modélisation du palier est la connaissance de l'intensité et de la direction des forces appliquées. Plusieurs méthodes découlent des recherches passées sont actuellement proposées [48], [49], le tenseur de Maxwell, les courants équivalents, les charges équivalentes et la dérivée de l'énergie.

En comparaison avec les autres méthodes, la méthode de tenseur de Maxwell possède les avantages suivants [41]:

- Un seul calcul de champ soit nécessaire, que le problème soit linéaire ou non linéaire.
- Un seul intégral de surface est nécessaire.
- Toute surface S qui englobe l'objet et qui ne traverse aucun autre corps donne les résultats identiques.

Selon le principe de tenseur de Maxwell, la force magnétique appliquée sur un corps de volume V soumis à un champ magnétique  $\vec{H}$  est donnée par la relation générale suivante [41]:

$$\vec{F} = \mu_0 \int_S \left( \vec{H}(\vec{H} \cdot \vec{n}) - \frac{1}{2} H^2 \vec{n} \right) ds \quad (\text{II.29})$$

Dans le cas 3D, le champ magnétique possède trois composantes. Le développement de (II.28) et la projection sur les trois axes conduit aux composantes de la force suivantes :

$$F_x = \mu_0 \int_S \left( H_x(\vec{H} \cdot \vec{n}) - \frac{1}{2} H^2 n_x \right) ds \quad (\text{II.30})$$

$$F_y = \mu_0 \int_S \left( H_y(\vec{H} \cdot \vec{n}) - \frac{1}{2} H^2 n_y \right) ds \quad (\text{II.31})$$

$$F_z = \mu_0 \int_S \left( H_z(\vec{H} \cdot \vec{n}) - \frac{1}{2} H^2 n_z \right) ds \quad (\text{II.32})$$

Ici s est la surface totale du corps,  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal à la surface avec :

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}.$$

## ***CHAPITRE III***

---

# **MODÉLISATION NUMÉRIQUE ÉLÉMENTS FINIS DU PALIER MAGNÉTIQUE**

---

### III. Modélisation numérique éléments finis du palier magnétique

Pour résoudre les problèmes électromagnétiques, on utilise souvent les méthodes analytiques (séparation de variables, développement en séries, intégrale de frontières, etc.) à cause de leur simplicité de mettre en œuvre et l'exactitude de la solution qu'elles fournissent.

En cas d'existence des déformations géométriques, de la non linéarité, de la non homogénéité et de l'anisotropie des milieux en présence ou complexité des conditions aux limites, la résolution analytique n'est plus possible et une résolution numérique est impérative.

Parmi les méthodes numériques existantes, on cite les différences finies, les éléments finis et les volumes finis.

Grace a ses capacités de prendre en charge les handicaps précitées (ex : déformations géométriques) et l'expérience qu'on a eu de point de vu mise en œuvre (cas 2D), on a préféré utiliser la méthode des éléments finis dans notre cas.

Vu les complications que présentent les dispositifs à paliers magnétiques circulaires (effet d'extrémités, coexistence des magnétisations hétéro polaire et homopolaire), une étude tridimensionnelle est exigée.

#### III.1. La méthode des éléments finis (MEF)

##### III.1.1. Principe de la Méthode des éléments finis

La méthode consiste à transformer une équation aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques linéaires [50]. Pour cela on procède au départ à mailler le domaine d'étude en sous domaines appelés éléments finis. Les éléments peuvent être des triangles ou des quadrilatéraux pour le cas 2D et des tétraèdres ou d'hexaèdres pour le cas 3D [51].

Selon le cas (2D ou 3D) chaque élément a un nombre définis de nœuds. En 3D, l'élément tétraédrique du premier ordre contient 4 nœuds, et l'élément du second ordre possède 10 nœuds [52].

Dans un élément finis, l'inconnu du problème est calculé en fonction des valeurs des nœuds (valeurs nodales). Les fonctions d'interpolation qui permettent ce calcul sont généralement des polynômes assurant la continuité de l'inconnu sur les interfaces des éléments.

Pour mettre en œuvre la méthode des éléments finis en 3D, on suit les étapes suivantes.

##### III.1.2. Discrétisation du domaine d'étude en éléments finis

Le domaine d'étude est subdivisé en un nombre déterminé de sous domaines dits éléments finis de formes prédéfinies. Dans notre cas des éléments tétraédriques sont utilisés (voir Fig. III.1).

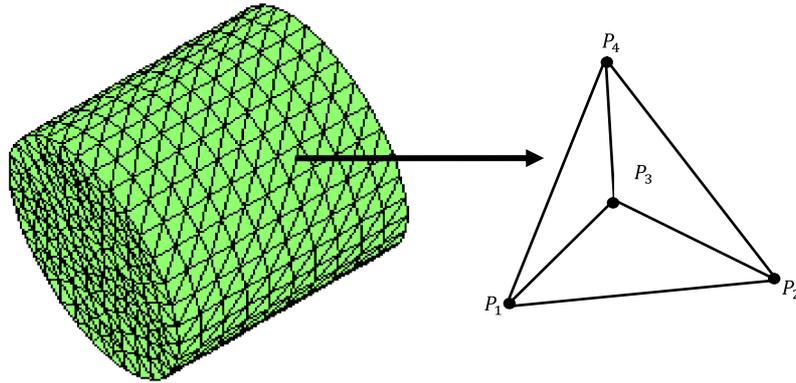


Fig. III.1. Maillage d'un domaine cylindrique en éléments finis tétraédriques.

La subdivision tétraédrique du premier ordre a l'avantage de s'adapter à toute configuration géométrique et permet de traiter des expressions simples [45].

### III.1.3. Fonction d'interpolation et potentiel dans l'élément

Chaque tétraèdre est repéré par ses quatre sommets (Fig. III.1). Le potentiel vecteur magnétique dans un tétraèdre est approché par un polynôme du premier degré. En cartésien, le polynôme est de la forme [53], [54] :

$$N_i = a_i + b_i x + c_i y + d_i z \quad (\text{III.1})$$

$a_i, b_i, c_i$  et  $d_i$  sont des constants à déterminer.

En fonction des valeurs nodales, le potentiel dans un élément est donné par [48] :

$$A_i^e(x, y, z) = \sum_{j=1}^4 N_j^e A_{ij}^e = \{N^e\}^T \{A_i^e\} = \{A_i^e\}^T \{N^e\} \quad i = x, y, z; \quad (\text{III.2})$$

Les fonctions de formes (fonctions d'interpolations) pour l'élément tétraédrique de sommets  $P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$  se déduisent des coordonnées locales  $L_1, L_2, L_3$  et  $L_4$  appelées coordonnées de volumes [52], [54]. Les coordonnées de volumes  $L_i$  sont définis par:

$$\begin{cases} L_1 = \frac{V_1}{V} \\ L_2 = \frac{V_2}{V} \\ L_3 = \frac{V_3}{V} \\ L_4 = \frac{V_4}{V} \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Ici  $V$  est le volume total de l'élément,  $V_1, V_2, V_3$  et  $V_4$  sont les volumes formés par le centre de l'élément avec chaque trois nœuds de celui-ci.

Le volume de l'élément donné par [53],

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (\text{III.4})$$

Pour chaque élément, on a

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = V \quad (\text{III.5})$$

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1 \quad (\text{III.6})$$

Les fonctions  $L_i$  ont les particularités suivantes [51], [53] :

$$L_i = \begin{cases} 1 & \text{si } p = i \\ 0 & \text{si } p = j, k, l \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

Le passage des coordonnées locales aux coordonnées globales est :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

De (III.8) on aura [32],

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Avec :

$$a_i = - \begin{vmatrix} x_j & x_j & x_j \\ y_k & y_k & y_k \\ z_l & z_l & z_l \end{vmatrix}, \quad b_i = - \begin{vmatrix} 1 & x_j & x_j \\ 1 & y_k & y_k \\ 1 & z_l & z_l \end{vmatrix}$$

$$c_i = - \begin{vmatrix} x_j & 1 & x_j \\ y_k & 1 & y_k \\ z_l & 1 & z_l \end{vmatrix}, \quad d_i = - \begin{vmatrix} x_j & x_j & 1 \\ y_k & y_k & 1 \\ z_l & z_l & 1 \end{vmatrix}$$

Pour évaluer les termes  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  et  $d_i$  on permute d'une manière circulaire les indices 1, 2, 3 et 4 dans le sens trigonométrique [53].

Les propriétés de  $L_i$ , montrées dans (III.6) et (III.7) montrent que  $L_i$  peut être utilisé comme fonction de forme dans un tétraèdre qu'on peut noter  $N_i$  [52] :

$$N_i = L_i = a_i + b_i x + c_i y + d_i z \quad (\text{III.10})$$

Pour un élément tétraédrique de deuxième ordre (Fig. III.2), les fonctions d'interpolation sont des polynômes du deuxième degré [45], [53] :

$$N_i = (2L_i - 1)L_i, \quad i = \text{les nœuds des sommets} \quad (\text{III.11})$$

$$N_k = 4L_iL_j, \quad k = \text{les nœuds aux milieux des arêtes} \quad (\text{III.12})$$

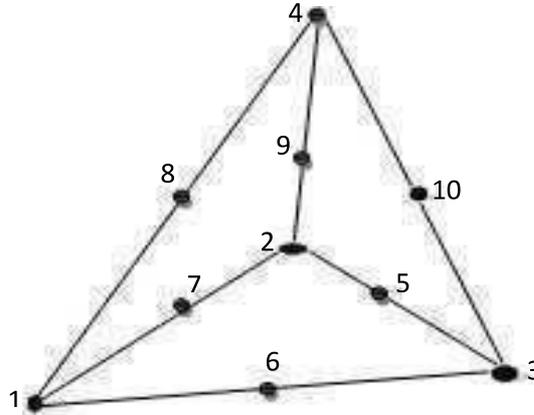


Fig. III.2. Tétraèdre du deuxième ordre.

### III. 1.4. Formulation intégrale et équation algébrique

#### III. 1. 4. 1. Cas de l'électroaimant (excitation en courant)

Pour mettre sous forme intégrale l'équation du modèle, on peut utiliser l'approche variationnelle qui nécessite la connaissance de la fonctionnelle énergétique liée au problème considéré ou l'approche résidus pondérés [54]. Pour préserver l'aspect physique du problème on choisit l'approche variationnelle.

Pour le cas de l'équation de poisson de la magnétostatique, et en absence de l'aimantation rémanente, la fonctionnelle énergétique est donnée par [52] :

$$F(A) = \frac{1}{2} \iiint_v \frac{1}{\mu_r} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) dV - \mu_0 \iiint_v \vec{j} \cdot \vec{A} dV \quad (\text{III.13})$$

L'équation se réécrit sous la forme :

$$F = \frac{1}{2} \iiint_v \frac{1}{\mu_r} \left[ \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)^2 - \mu_0 \iiint_v (A_x J_x + A_y J_y + A_z J_z) dV \right] \quad (\text{III.14})$$

Le problème discret issu du problème variationnel continu consiste à déterminer la combinaison des vecteurs  $A_{xi}$ ,  $A_{yi}$  et  $A_{zi}$ , qui minimise la fonctionnelle énergétique [45]. Ici l'indice  $i$  représente la numérotation des nœuds.

Les conditions d'optimisation (minimisation) suivante :

$$\begin{cases} \left\{ \frac{\partial F}{\partial A_{xi}} \right\} = \{0\} \\ \left\{ \frac{\partial F}{\partial A_{yi}} \right\} = \{0\} \\ \left\{ \frac{\partial F}{\partial A_{zi}} \right\} = \{0\} \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

doivent être écrites pour tous les nœuds du domaine, mais seulement pour les composantes libres de toute conditions aux limites [45], [52].

Les composantes du potentiel  $\vec{A}$  dans chaque élément tétraédrique sont données par :

$$A_x^e = \sum_{j=1}^{n_e} N_j^e A_{xj}^e = \{N^e\}^T \{A_x^e\} = \{A_x^e\}^T \{N^e\} \quad (\text{III.16})$$

$$A_y^e = \sum_{j=1}^{n_e} N_j^e A_{yj}^e = \{N^e\}^T \{A_y^e\} = \{A_y^e\}^T \{N^e\} \quad (\text{III.17})$$

$$A_z^e = \sum_{j=1}^{n_e} N_j^e A_{zj}^e = \{N^e\}^T \{A_z^e\} = \{A_z^e\}^T \{N^e\} \quad (\text{III.18})$$

La minimisation de la fonctionnelle énergétique pour les éléments a donné les résultats suivants [24], [31]

$$\left\{ \frac{\partial F^e}{\partial A_x^e} \right\} = [K_{xx}^e] \{A_x^e\} + [K_{xy}^e] \{A_y^e\} + [K_{xz}^e] \{A_z^e\} - \{b_x^e\} \quad (\text{III.19})$$

$$\left\{ \frac{\partial F^e}{\partial A_y^e} \right\} = [K_{yx}^e] \{A_x^e\} + [K_{yy}^e] \{A_y^e\} + [K_{yz}^e] \{A_z^e\} - \{b_y^e\} \quad (\text{III.20})$$

$$\left\{ \frac{\partial F^e}{\partial A_z^e} \right\} = [K_{zx}^e] \{A_x^e\} + [K_{zy}^e] \{A_y^e\} + [K_{zz}^e] \{A_z^e\} - \{b_z^e\} \quad (\text{III.21})$$

Les termes des matrices élémentaires sont donnés par [53] :

$$[K_{xx}^e] = \iiint_{v^e} \frac{1}{\mu_r} \left( \frac{\partial \{N^e\}}{\partial y} \frac{\partial \{N^e\}^T}{\partial y} + \frac{\partial \{N^e\}}{\partial z} \frac{\partial \{N^e\}^T}{\partial z} \right) dV \quad (\text{III.22})$$

$$[K_{yy}^e] = \iiint_{v^e} \frac{1}{\mu_r} \left( \frac{\partial \{N^e\}}{\partial z} \frac{\partial \{N^e\}^T}{\partial z} + \frac{\partial \{N^e\}}{\partial x} \frac{\partial \{N^e\}^T}{\partial x} \right) dV \quad (\text{III.23})$$

$$[K_{zz}^e] = \iiint_{v^e} \frac{1}{\mu_r} \left( \frac{\partial \{N^e\}}{\partial x} \frac{\partial \{N^e\}^T}{\partial x} + \frac{\partial \{N^e\}}{\partial y} \frac{\partial \{N^e\}^T}{\partial y} \right) dV \quad (\text{III.24})$$

Les matrices d'interconnexions des axes sont donnés par

$$[K_{pq}^e] = - \iiint_{v^e} \frac{1}{\mu_r} \left( \frac{\partial \{N^e\}}{\partial q} \frac{\partial \{N^e\}^T}{\partial p} \right) dV, \quad p, q = x, y, z; p \neq q \quad (\text{III.25})$$

Les termes des vecteurs sources élémentaires sont donnés par :

$$\{b_p^e\} = \iiint_{v^e} J_p \{N^e\} dV, \quad p = x, y, z. \quad (\text{III.26})$$

$$\{b_p^e\} = \frac{1}{4} J_p v^e \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad p = x, y, z. \quad (\text{III.27})$$

La minimisation de la fonctionnelle globale conduit au système suivant :

$$\begin{cases} \left\{ \frac{\partial F}{\partial A_x} \right\} = \sum_{e=1}^M ([K_{xx}^e] \{A_x^e\} + [K_{xy}^e] \{A_y^e\} + [K_{xz}^e] \{A_z^e\} - \{b_x^e\}) = \{0\} \\ \left\{ \frac{\partial F}{\partial A_y} \right\} = \sum_{e=1}^M ([K_{yx}^e] \{A_x^e\} + [K_{yy}^e] \{A_y^e\} + [K_{yz}^e] \{A_z^e\} - \{b_y^e\}) = \{0\} \\ \left\{ \frac{\partial F}{\partial A_z} \right\} = \sum_{e=1}^M ([K_{zx}^e] \{A_x^e\} + [K_{zy}^e] \{A_y^e\} + [K_{zz}^e] \{A_z^e\} - \{b_z^e\}) = \{0\} \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

M est le nombre total d'éléments du maillage.

Chacune des matrices élémentaires  $[K_{xx}^e]$ ,  $[K_{xy}^e]$ ,  $[K_{xz}^e]$ ,  $[K_{yx}^e]$ ,  $[K_{yy}^e]$ ,  $[K_{yz}^e]$ ,  $[K_{zx}^e]$ ,  $[K_{zy}^e]$  et  $[K_{zz}^e]$  est de taille  $4 \times 4$ .

Pour un élément type, on écrit pour toutes les composantes de l'inconnu,

$$\begin{cases} [K_{xx}^e] \{A_x\} + [K_{xy}^e] \{A_y\} + [K_{xz}^e] \{A_z\} = \{b_x\} \\ [K_{yx}^e] \{A_x\} + [K_{yy}^e] \{A_y\} + [K_{yz}^e] \{A_z\} = \{b_y\} \\ [K_{zx}^e] \{A_x\} + [K_{zy}^e] \{A_y\} + [K_{zz}^e] \{A_z\} = \{b_z\} \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

Ce qui conduit après la minimisation le système élémentaire suivant :

$$\begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \quad (\text{III.30})$$

#### III.1.4.2 Unicité de la solution

L'extension pure et simple de la fonctionnelle au problème tridimensionnelle n'est pas satisfaisante. Une fonction  $A$  qui minimise (III.13) est bien solution de l'équation de Poisson de la magnéto-statique, cependant toute fonction  $A_0$  qui, pour un champ scalaire quelconque  $\varphi$ , s'écrit  $\vec{A}_0 = \vec{A} + \vec{\nabla}\varphi$  est également solution [45], [52].

Cette indétermination du potentiel magnétique nous oblige à imposer une condition supplémentaire, appelée condition de Jauge.

On trouve plusieurs conditions de jauge dans la littérature dont celle de Lorentz celle de Coulomb (II.19). Les conditions de jauge n'ont aucune justification physique et nous

choisissons d'utiliser, parmi toutes les relations qui permettent de lever l'indétermination du potentiel magnétique, la plus simple à traiter dans le modèle numérique.

Pour bien satisfaire à la condition de jauge plusieurs approches sont ajoutées au fonctionnelle [24], parmi celle-ci celle qui nous donne [55] :

$$F(A) = \frac{1}{2} \iiint_V \frac{1}{\mu_r} [(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \gamma(\nabla \cdot A)^2] dV - \iiint_V \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{A} dV \quad (\text{III.31})$$

Où  $\gamma$  est un nombre arbitraire, choisi généralement égale à 1.

Après développement de (III.31), les matrices élémentaires s'écrivent sous la forme suivante :

$$[K_{xx}^e] = \iiint_{V^e} \frac{1}{\mu_r} \left( \gamma \frac{\partial \{N^e\}}{\partial x} \frac{\partial \{N^e\}^T}{\partial x} + \frac{\partial \{N^e\}}{\partial y} \frac{\partial \{N^e\}^T}{\partial y} + \frac{\partial \{N^e\}}{\partial z} \frac{\partial \{N^e\}^T}{\partial z} \right) dV \quad (\text{III.32})$$

$$[K_{yy}^e] = \iiint_{V^e} \frac{1}{\mu_r} \left( \frac{\partial \{N^e\}}{\partial x} \frac{\partial \{N^e\}^T}{\partial x} + \gamma \frac{\partial \{N^e\}}{\partial y} \frac{\partial \{N^e\}^T}{\partial y} + \frac{\partial \{N^e\}}{\partial z} \frac{\partial \{N^e\}^T}{\partial z} \right) dV \quad (\text{III.33})$$

$$[K_{zz}^e] = \iiint_{V^e} \frac{1}{\mu_r} \left( \frac{\partial \{N^e\}}{\partial x} \frac{\partial \{N^e\}^T}{\partial x} + \frac{\partial \{N^e\}}{\partial y} \frac{\partial \{N^e\}^T}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \{N^e\}}{\partial z} \frac{\partial \{N^e\}^T}{\partial z} \right) dV \quad (\text{III.34})$$

Pour calculer les autres matrices, on utilise l'expression générale suivante :

$$[K_{pq}^e] = - \iiint_{V^e} \frac{1}{\mu_r} \left( \gamma \frac{\partial \{N^e\}}{\partial p} \frac{\partial \{N^e\}^T}{\partial q} - \frac{\partial \{N^e\}}{\partial q} \frac{\partial \{N^e\}^T}{\partial p} \right) dV \quad (\text{III.35})$$

Tel que  $p, q = x, y, z ; p \neq q$

### III. 1. 4. 3. Prise en compte de l'aimant permanent

En cas d'existence de l'aimant permanent, l'équation EDP du problème devient :

$$\vec{\nabla} \left( \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = - \vec{\nabla} \frac{1}{\mu} \times \vec{B}_0 \quad (\text{III.36})$$

Le premier terme a été déjà traité pour le cas de l'électroaimant. Il reste à développer le second membre.

La contribution de l'aimant permanent  $\vec{\nabla} \frac{1}{\mu} \times \vec{B}_0$  est supposé une autre composante de courant dans la fonctionnelle énergétique précédente (III.13).

En cartésien, le vecteur  $\vec{B}_0$  s'écrit en 3D,

$$\vec{B}_0 = B_{0x} \vec{i} + B_{0y} \vec{j} + B_{0z} \vec{k} \quad (\text{III.37})$$

Alors, le terme  $\vec{\nabla} \frac{1}{\mu} \times \vec{B}_0$  devient :

$$\vec{\nabla} \frac{1}{\mu} \times \vec{B}_0 = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial B_{0z}}{\partial y} - \frac{\partial B_{0y}}{\partial z} \right) \vec{i} + \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial B_{0x}}{\partial z} - \frac{\partial B_{0z}}{\partial x} \right) \vec{j} + \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial B_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{0x}}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (\text{III.38})$$

Avec le même raisonnement précédent, l'expression de  $\{b_x^e\}$  (vecteur source élémentaire concernant la direction x) par exemple devient :

$$\{b_x^e\} = \iiint_{v^e} \frac{1}{\mu} \{N^e\} \left( \frac{\partial B_{0z}}{\partial y} - \frac{\partial B_{0y}}{\partial z} \right) dV \quad (\text{III.39})$$

en posant

$$\vec{B}_{ex} = \frac{B_{0z}}{\mu} \vec{j} - \frac{B_{0y}}{\mu} \vec{k} \quad (\text{III.40})$$

On peut écrire

$$\{b_x^e\} = \iiint_{v^e} \{N^e\} \text{div}(\vec{B}_{ex}) dV \quad (\text{III.41})$$

Du fait que  $\text{div}(\{N^e\} \vec{B}_{ex}) = \text{grad}\{N^e\} \cdot \vec{B}_{ex} + \{N^e\} \text{div}(\vec{B}_{ex})$ , (III.39) s'écrit :

$$\{b_x^e\} = \iiint_{v^e} \text{div}(\{N^e\} \vec{B}_{ex}) dV - \iiint_{v^e} \text{grad}\{N^e\} \cdot \vec{B}_{ex} dV \quad (\text{III.42})$$

En appliquant le théorème de la divergence, on trouve

$$\{b_x^e\} = \iint_{s^e} \{N^e\} \vec{B}_{ex} ds - \iiint_{v^e} \text{grad}\{N^e\} \cdot \vec{B}_{ex} dV$$

Pour le premier terme du second membre, il s'agit d'une condition aux limites à imposer aux frontières concernées. Il sera traité d'une manière classique [45], [52].

Pour le cas d'une condition de Dirichlet homogène partout, il nous reste à évaluer le terme

$$\{b_x^e\} = - \iiint_{v^e} \text{grad}\{N^e\} \cdot \vec{B}_{ex} dV, \quad \{b_x^e\} = - \iiint_{v^e} \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{B_{0z}}{\mu} \\ -\frac{B_{0y}}{\mu} \end{bmatrix} dV$$

Tout développement fait, on obtient

$$\{b_x^e\} = - \iiint_{v^e} \begin{bmatrix} c_1 \frac{B_{0z}}{\mu} - d_1 \frac{B_{0y}}{\mu} \\ c_2 \frac{B_{0z}}{\mu} - d_2 \frac{B_{0y}}{\mu} \\ c_3 \frac{B_{0z}}{\mu} - d_3 \frac{B_{0y}}{\mu} \\ c_4 \frac{B_{0z}}{\mu} - d_4 \frac{B_{0y}}{\mu} \end{bmatrix} dV \quad (\text{III.43})$$

Finalement, on peut écrire pour le vecteur source de l'aimant permanent [57],

$$\{b_x^e\} = - \begin{bmatrix} \left( c_1 \frac{B_{0z}}{\mu} - d_1 \frac{B_{0y}}{\mu} \right) v^e \\ \left( c_2 \frac{B_{0z}}{\mu} - d_2 \frac{B_{0y}}{\mu} \right) v^e \\ \left( c_3 \frac{B_{0z}}{\mu} - d_3 \frac{B_{0y}}{\mu} \right) v^e \\ \left( c_4 \frac{B_{0z}}{\mu} - d_4 \frac{B_{0y}}{\mu} \right) v^e \end{bmatrix} \quad (\text{III.44})$$

De la même manière, on trouve pour les autres vecteurs sources,  $\{b_y^e\}$  et  $\{b_z^e\}$ , les expressions :

$$\{b_y^e\} = - \begin{bmatrix} \left( d_1 \frac{B_{0x}}{\mu} - b_1 \frac{B_{0z}}{\mu} \right) v^e \\ \left( d_2 \frac{B_{0x}}{\mu} - b_2 \frac{B_{0z}}{\mu} \right) v^e \\ \left( d_3 \frac{B_{0x}}{\mu} - b_3 \frac{B_{0z}}{\mu} \right) v^e \\ \left( d_4 \frac{B_{0x}}{\mu} - b_4 \frac{B_{0z}}{\mu} \right) v^e \end{bmatrix} \quad (\text{III.45})$$

$$\{b_z^e\} = - \begin{bmatrix} \left( b_1 \frac{B_{0y}}{\mu} - c_1 \frac{B_{0x}}{\mu} \right) v^e \\ \left( b_2 \frac{B_{0y}}{\mu} - c_2 \frac{B_{0x}}{\mu} \right) v^e \\ \left( b_3 \frac{B_{0y}}{\mu} - c_3 \frac{B_{0x}}{\mu} \right) v^e \\ \left( b_4 \frac{B_{0y}}{\mu} - c_4 \frac{B_{0x}}{\mu} \right) v^e \end{bmatrix} \quad (\text{III.46})$$

Pour le cas de palier hybride, les matrices élémentaires restent les mêmes et les vecteurs sources élémentaires donnés en (III.26) seront changés en rajoutant les quantités de (III.42-III.44) pour tout volume élémentaire.

Pour un élément, les vecteurs sources dû à la contribution de l'aimant permanent deviennent

$$\{b_x^e\} = \begin{bmatrix} \left( - \left( c_1 \frac{B_{0z}}{\mu} - d_1 \frac{B_{0y}}{\mu} \right) + \frac{1}{4} J_x \right) v^e \\ \left( - \left( c_2 \frac{B_{0z}}{\mu} - d_2 \frac{B_{0y}}{\mu} \right) + \frac{1}{4} J_x \right) v^e \\ \left( - \left( c_3 \frac{B_{0z}}{\mu} - d_3 \frac{B_{0y}}{\mu} \right) + \frac{1}{4} J_x \right) v^e \\ \left( - \left( c_4 \frac{B_{0z}}{\mu} - d_4 \frac{B_{0y}}{\mu} \right) + \frac{1}{4} J_x \right) v^e \end{bmatrix} \quad (\text{III.47})$$

$$\{b_y^e\} = \begin{bmatrix} \left(-\left(d_1 \frac{B_{0x}}{\mu} - b_1 \frac{B_{0z}}{\mu}\right) + \frac{1}{4}J_y\right) v^e \\ \left(-\left(d_2 \frac{B_{0x}}{\mu} - b_2 \frac{B_{0z}}{\mu}\right) + \frac{1}{4}J_y\right) v^e \\ \left(-\left(d_3 \frac{B_{0x}}{\mu} - b_3 \frac{B_{0z}}{\mu}\right) + \frac{1}{4}J_y\right) v^e \\ \left(-\left(d_4 \frac{B_{0x}}{\mu} - b_4 \frac{B_{0z}}{\mu}\right) + \frac{1}{4}J_y\right) v^e \end{bmatrix} \quad (\text{III.48})$$

$$\{b_z^e\} = \begin{bmatrix} \left(-\left(b_1 \frac{B_{0y}}{\mu} - c_1 \frac{B_{0x}}{\mu}\right) + \frac{1}{4}J_z\right) v^e \\ \left(-\left(b_2 \frac{B_{0y}}{\mu} - c_2 \frac{B_{0x}}{\mu}\right) + \frac{1}{4}J_z\right) v^e \\ \left(-\left(b_3 \frac{B_{0y}}{\mu} - c_3 \frac{B_{0x}}{\mu}\right) + \frac{1}{4}J_z\right) v^e \\ \left(-\left(b_4 \frac{B_{0y}}{\mu} - c_4 \frac{B_{0x}}{\mu}\right) + \frac{1}{4}J_z\right) v^e \end{bmatrix} \quad (\text{III.49})$$

### III. 1.5. Assemblage des systèmes élémentaires et système matriciel global

Pour obtenir le système algébrique global, on procède à l'assemblage des systèmes algébriques élémentaires. Pour une discrétisation à  $n$  nœuds, on aura le système suivant :

$$\begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \quad (\text{III.50})$$

Selon la configuration de la matrice de rigidité globale  $K$ , on fait tout d'abord l'assemblage de chaque sous matrice  $K_{pq}$ ,  $p = x, y, z$  et  $q = x, y, z$ . De tel assemblage donne des sous matrices globales  $[K_{xx}]$ ,  $[K_{xy}]$ ,  $[K_{xz}]$ ,  $[K_{yx}]$ ,  $[K_{yy}]$ ,  $[K_{yz}]$ ,  $[K_{zx}]$ ,  $[K_{zy}]$  et  $[K_{zz}]$  de taille  $n \times n$ .

Pour la matrice  $K_{xy}$ , par exemple, elle est le résultat de l'assemblage des  $n_e$  matrices élémentaires  $[K_{xy}^e]$ .

Finalement, la matrice  $K$  est de taille  $3n \times 3n$  ce qui correspond aux vecteurs des trois composantes de l'inconnu et de leur couplage.

La même démarche s'applique pour les vecteurs sources où on aura pour chaque composante un vecteur de taille  $n \times 1$ . Le vecteur source global  $b$  est de taille  $3n \times 1$ .

## *CHAPITRE IV*

---

---

# **RÉSOLUTION NUMÉRIQUE ET RÉSULTATS OBTENUS**

---

---

## IV. Résolution numérique et résultats obtenus

Dans ce chapitre, on s'intéresse au calcul du champ magnétique duquel elles découlent toutes les grandeurs électromagnétiques (force, énergie,...). Pour mettre en œuvre la méthode des éléments finis exposée précédemment, nous avons développé sous l'environnement Matlab un code de calcul capable de traiter des formes diverses de paliers magnétiques circulaires.

Ce code est constitué principalement de trois modules, mailleur 3D, solveur et module d'exploitation.

### IV. 1. Code de calcul développé

#### IV. 1. 1. Mailleur 3D et discrétisation éléments finis

Dans ce module, on procède au départ à l'introduction des données du problème, paramètres géométriques, propriétés physiques et conditions aux limites.

Du fait que notre mailleur est basé sur un maillage par couche, on commence tout d'abord par la génération d'un maillage 2D qui sera étendu par couche le long de la profondeur du domaine d'étude.

Une bonne qualité du maillage 2D et un choix optimal du nombre de couche conduisent à une meilleure qualité du maillage 3D.

Après la génération du maillage 3D, on procède à l'affectation des propriétés physiques par lesquelles on distingue les différentes parties du dispositif traité.

Le processus de maillage est clarifié par le schéma synoptique suivant :

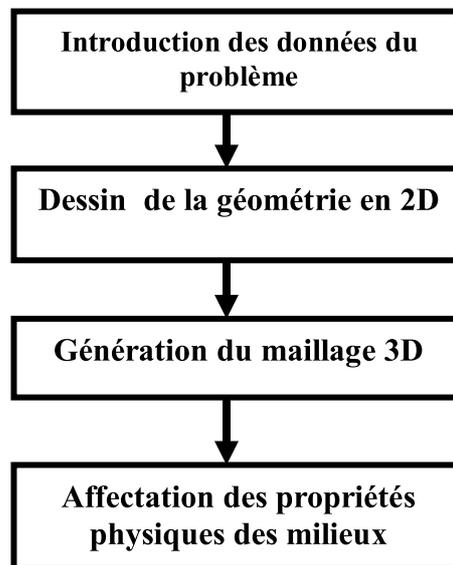


Fig. IV. 1. Processus de la génération du maillage 3D.

Le passage du maillage primaire 2D au maillage 3D pour les configurations rectangulaire et circulaire est montré dans la figure suivante :

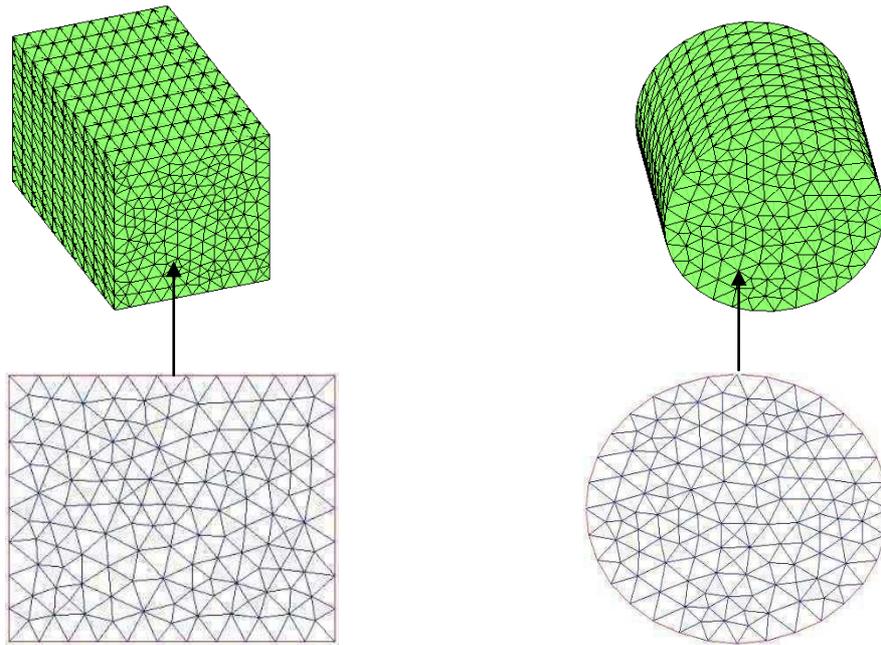


Fig. IV. 2. Génération du maillage 3D par extension en couches du maillage primaire 2D.

La figure ci-dessus représente des maillages 3D des domaines (rectangulaire / cylindrique) utilisés généralement pour l'étude des phénomènes électromagnétiques.

Dans la figure suivante, on montre le maillage 3D d'un palier magnétique hybride à 8 pôles en distinguant les parties sources du champ magnétique.

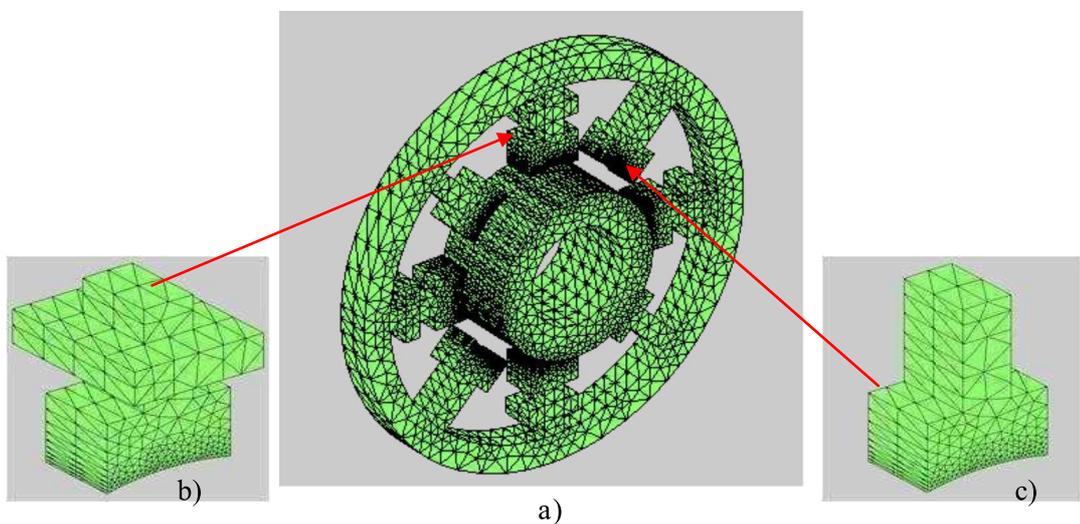


Fig. IV. 3. Maillage 3D d'un palier magnétique hybride à 8 pôles. a) palier complet et rotor suspendu, b) partie électroaimant, c) partie aimant permanent.

Dans les figures suivantes, on montre les maillages 3D pour plusieurs cas de nombre de pôles des paliers actifs et hybrides.

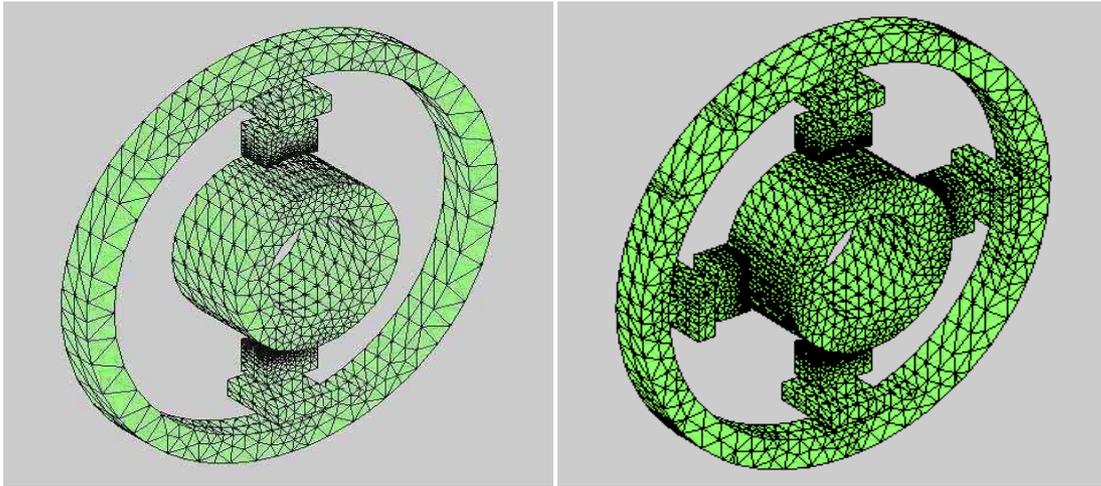


Fig. IV. 4. Suspension unilatérale par palier magnétique actif. a) 2 pôles, b) 4 pôles.

Pour le cas de rotors de longueurs importantes, la suspension peut être réalisée sur les deux cotés (bilatérales) comme le montrent les figures suivantes.

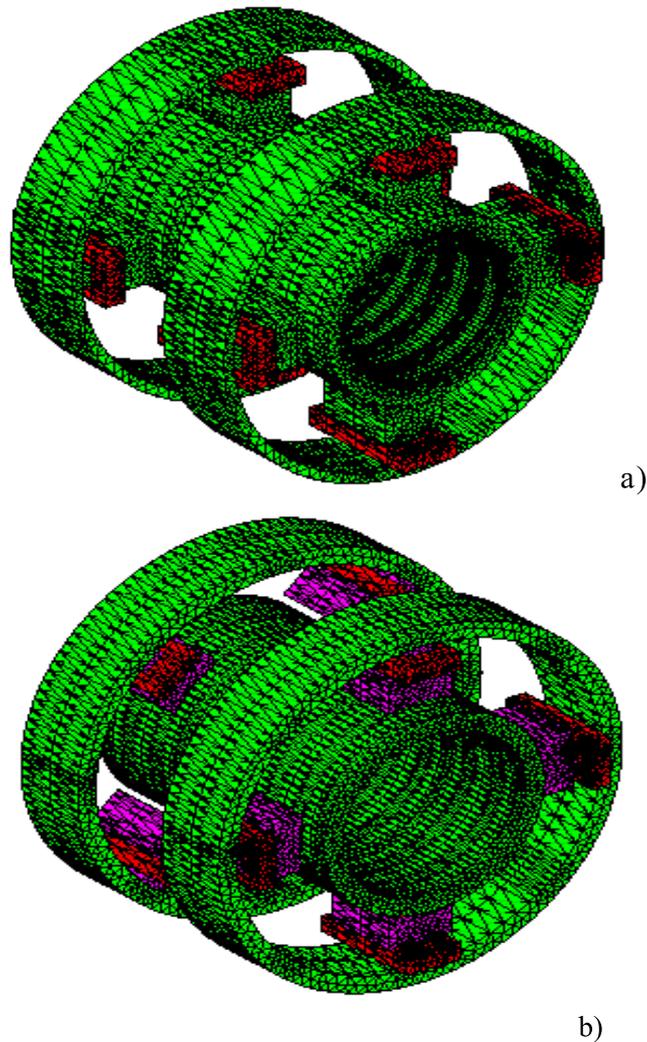


Fig. IV. 5. Suspension bilatérale d'un rotor par palier magnétique actif à 4 pôles.

Dans le cas a, les inducteurs des paliers avant et arrière sont alignés. Par contre dans le cas b, les inducteurs du palier arrière sont inclinés (décalés) par rapport à ceux du palier avant d'un angle de  $45^\circ$ .

Les cas des maillages de la figure IV.5 montrent la capacité de notre mailleur pour servir dans un processus d'optimisation de l'emplacement des inducteurs des paliers. Un tel processus concerne par exemple la recherche de la configuration du palier qui assure en même temps un centrage optimal du rotor et le découplage des différents degrés de liberté qui permet un control relativement simple.

Pour montrer les performances de notre mailleur, on présente dans la figure suivante le maillage d'un domaine d'étude lié à une suspension bilatérale d'un rotor par un palier à 8 pôles.

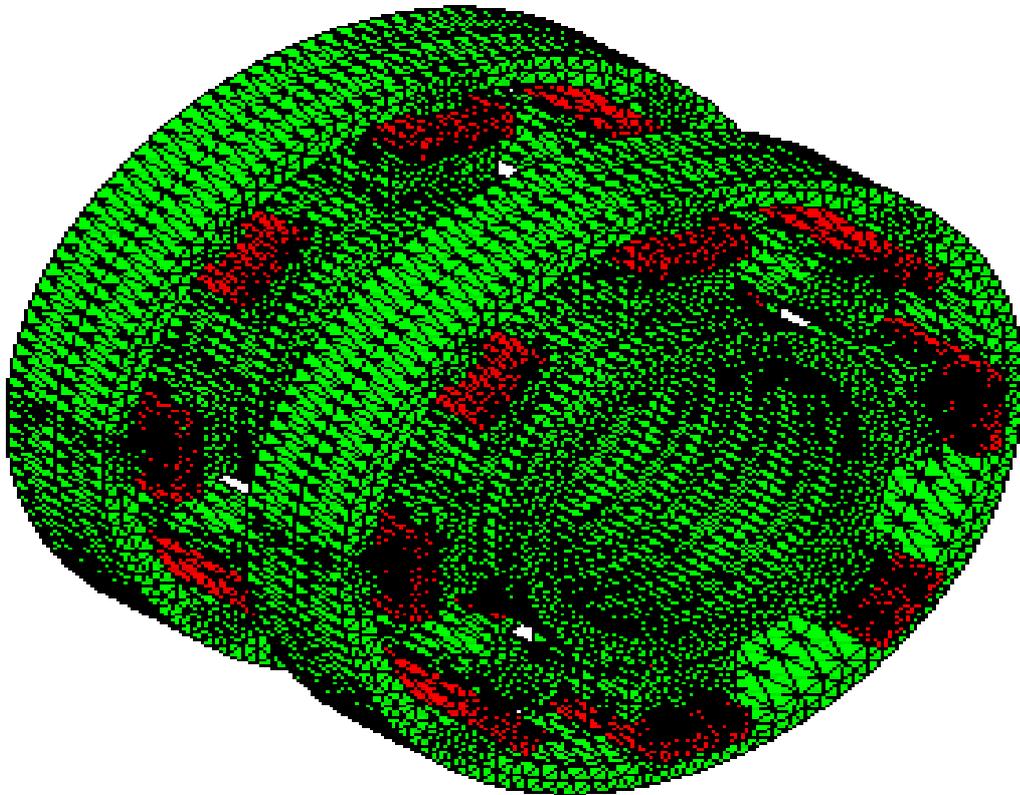


Fig. IV. 6. Maillage d'un domaine d'étude lié à une suspension bilatérale par un palier magnétique actif à 8 pôles.

Notre code de calcul traite les deux types d'excitations, par aimant permanent et par électroaimant. Pour l'électroaimant, on suppose les bobines ont une forme (voir Fig. IV.7.a) rectangulaire. Dans cette forme, le problème réside dans la prise en charge correcte de la direction du courant sur les corners des bobines où le courant possède au moins deux composantes (voir Fig. IV.7.b).

Dans notre cas, l'affectation des courants se fait de la manière illustrée dans la figure Fig. IV.7.b :

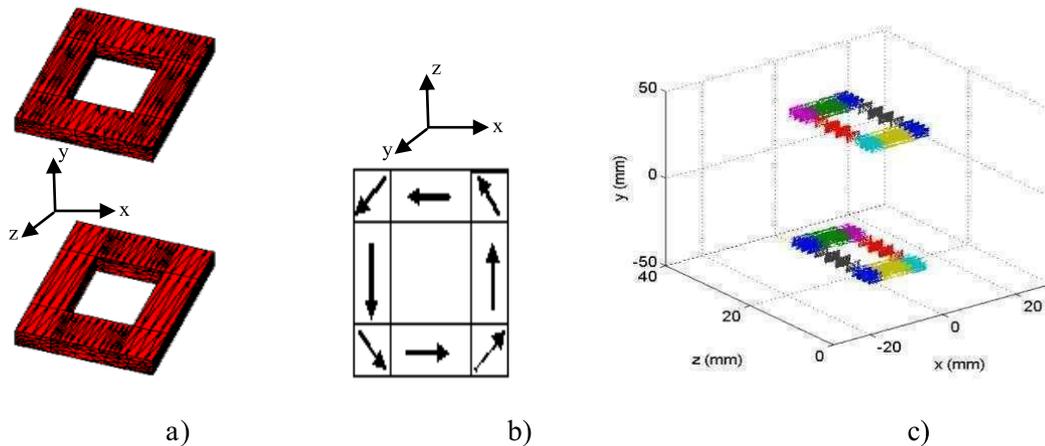


Fig. IV.7. Forme géométrique des bobines et injection des courants dans les éléments finis. a) forme géométrique, b) manière d'injection du courant, c) différentes zones d'injection du courant.

La figure ci-dessus montre le maillage 3D des inducteurs d'un palier actif à 2 pôles et la manière d'affectation des courants dans des zones distinguées des inducteurs. Ces différentes zones sont distinguées par des couleurs différentes dans La figure IV.7.c.

#### IV. 1. 2. Le solveur 3D (code central)

Le code central sert à introduire les conditions aux limites, traitement et résolution du système d'équations algébriques résultant. En linéaire, on suit les étapes du schéma synoptique suivant :

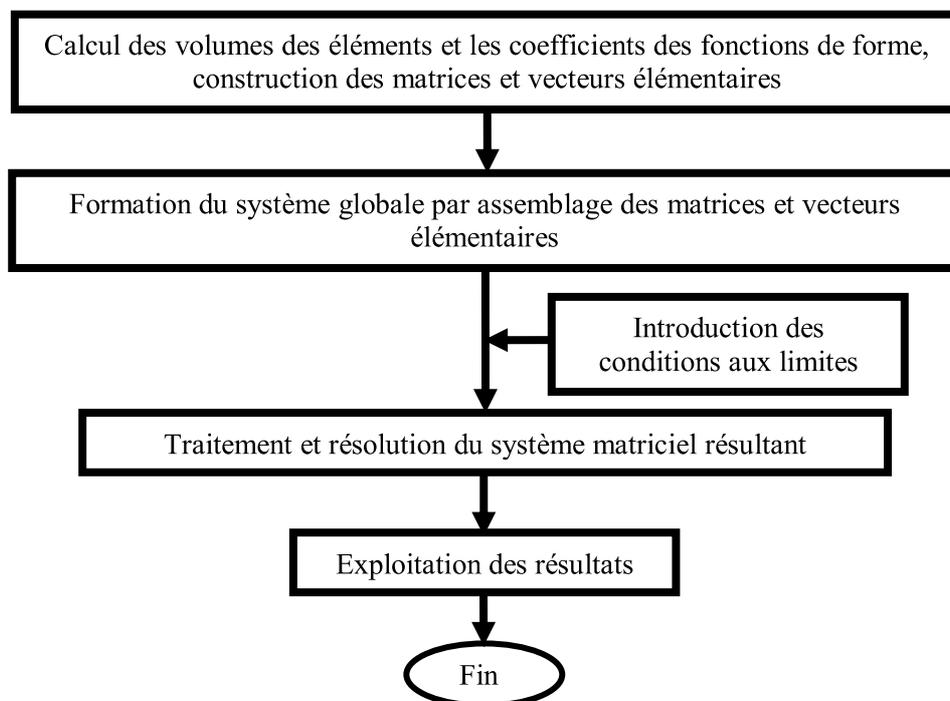


Fig. IV.8 Schéma synoptique clarifiant le processus de résolution.

### IV. 1. 2. 1. Type de conditions aux limites traitées

Le solveur développé peut servir pour traiter les problèmes magnétiques dans des géométries rectangulaire ou circulaire. Seules des conditions aux limites de type Dirichlet homogène ont été traitées. Sous forme générale, la condition est donnée par [41].

$$\vec{A} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ n_x & n_y & n_z \end{vmatrix} = \vec{0} \quad (\text{III.48})$$

Le développement de (III.48) donne,

$$(A_y n_z - A_z n_y) \vec{i} + (A_z n_x - A_x n_z) \vec{j} + (A_x n_y - A_y n_x) \vec{k} = \vec{0} \quad (\text{III.49})$$

Dans notre cas de palier circulaire, le domaine d'étude 3D a une forme cylindrique (voir Fig. III.9) dans laquelle on distingue trois limites, limites de faces avant et arrières (face 1 et face 2) et la limite de la surface extérieure du cylindre (face 3).

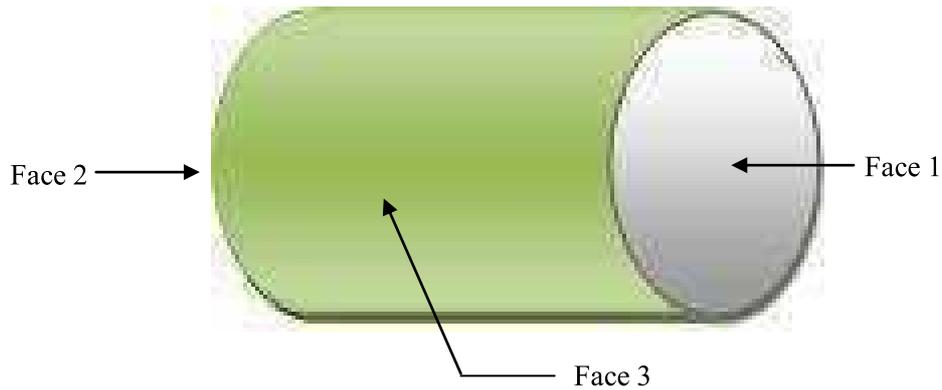


Fig. III.9. Frontières du domaine d'étude traité.

Sur les faces 1 et 2,  $\vec{n} = \vec{k}$  ou  $\vec{n} = -\vec{k}$ .

L'équation (III.49) devient  $A_y \vec{i} - A_x \vec{j} = \vec{0}$ , ce qui donne  $A_y = A_x = 0$ .

Ainsi, la condition à imposer sur ces faces est :

$$\begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = 0 \\ A_z \text{ reste inconnu} \end{cases} \quad (\text{III.50})$$

Sur la face 3,  $\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j}$ . Pour que  $\vec{A} \times \vec{n}$  soit nul, il faut que  $\vec{A}$  appartienne au plan (x, y).

Alors, la composante  $A_z$  doit être nulle.

De ce fait, l'équation (III.49) devient  $(A_x n_y - A_y n_x) \vec{k} = \vec{0}$ , ce qui donne :

$$A_x n_y - A_y n_x = 0.$$

Alors, la condition aux limites à imposer est :

$$\begin{cases} A_z = 0 \\ A_x n_y - A_y n_x = 0 \end{cases} \quad (\text{III.51})$$

Une solution simple qui donne une condition valable pour un éloignement suffisant est  $A_x = 0$  et  $A_y = 0$ . Alors, on peut imposer sur la face 3 la condition :

$$\begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = 0 \\ A_z = 0 \end{cases}$$

#### IV. 1. 2. 2. Nature du système global et méthode de résolution

La matrice globale liée au problème traité est de grande taille où un très grand nombre d'éléments est nuls ce qui rend la matrice creuse. La prise en compte du creux dans l'algorithme de résolution est fondamentale en termes d'efficacité. En fait, il est vain d'allouer une place en mémoire aux éléments nuls, ainsi qu'il est inutile d'exécuter les calculs les concernant.

Dans notre cas, et dans le but d'exploiter la nature creuse de la matrice (aussi bande), on utilise dans la programmation Matlab la fonction "sparse" au lieu d'utiliser la fonction "zeros" ce qui permet de gagner de l'espace mémoire et donc la réduction du temps de calcul. Dans une telle manière, on stocke seulement les éléments de la matrice qui ne sont pas nuls.

Pour trouver un élément, il suffit de connaître ses coordonnées dans la matrice et d'exécuter les opérations courantes qui le concernent dans le processus de résolution [57], [58].

Pour résoudre le système matriciel global, nous avons utilisé une méthode itérative appelée **GMRES** abréviation de Generalized Minimum Residual.

Présenté en 1986 par Y. Saad et M. H. Schultz [59], la méthode GMRES permet de résoudre efficacement les systèmes linéaires non symétriques de grande taille [60], [61], [62].

L'avantage de la méthode est la conservation de la structure creuse de la matrice. Son principe est, par un calcul itératif, à partir d'un vecteur initial  $x_0$  plus ou moins aléatoire, de développer une série de vecteurs  $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  convergeant vers le vecteur résultant  $\bar{x}$ , en calculant à chaque itération  $i$  le résidu  $r = (b - Ax)$ .

Les étapes de l'application de la méthode de GMRS sont les suivant:

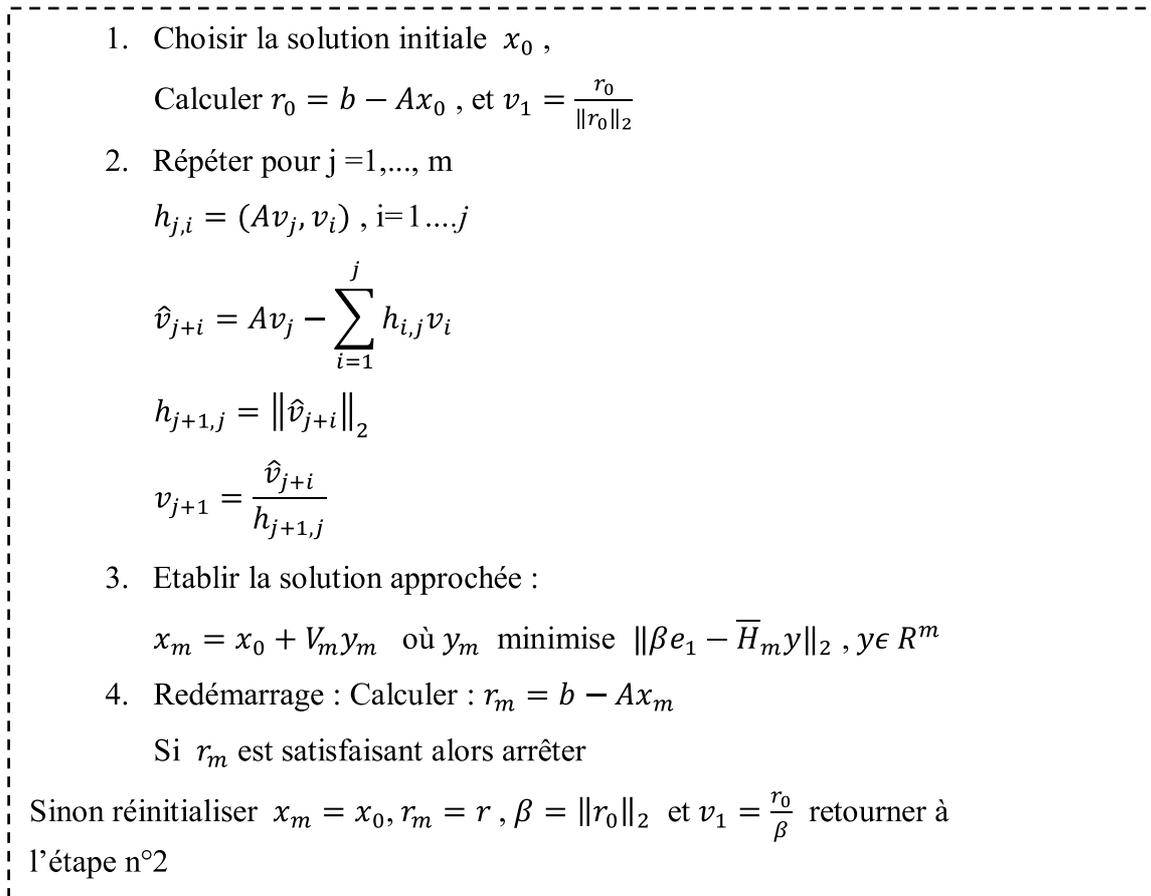


Fig. IV.10. Algorithme d'application de la méthode itérative GMRES [60]

### IV. 1. 3. Module d'exploitation des résultats

Dans les paliers magnétiques la grandeur physique de laquelle dépendent les paramètres de fonctionnement ou de contrôle est la force magnétique générée par le palier. En valeur maximale, la force est appelée capacité de charge du palier [37].

Dans notre cas, la force est calculée par la méthode de tenseur de Maxwell. Afin de connaître la qualité de la force appliquée sur le rotor, nous avons calculé sa distribution dans toute la surface du rotor en contact avec l'air (interne, externe et latérales).

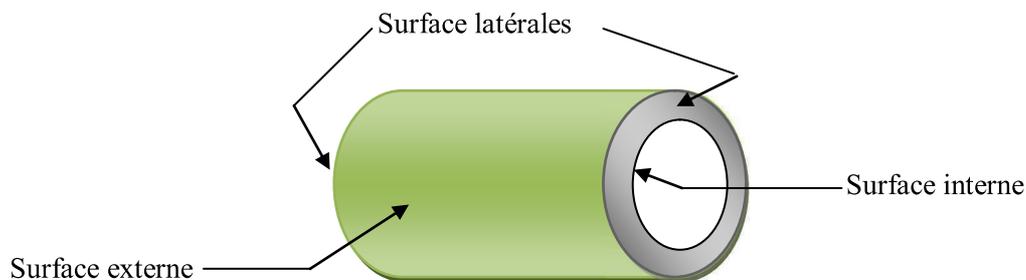


Fig. IV.11. Surface d'application du tenseur de Maxwell

Le processus couplet de résolution du problème magnétique du palier magnétique est clarifié par le schéma synoptique suivant

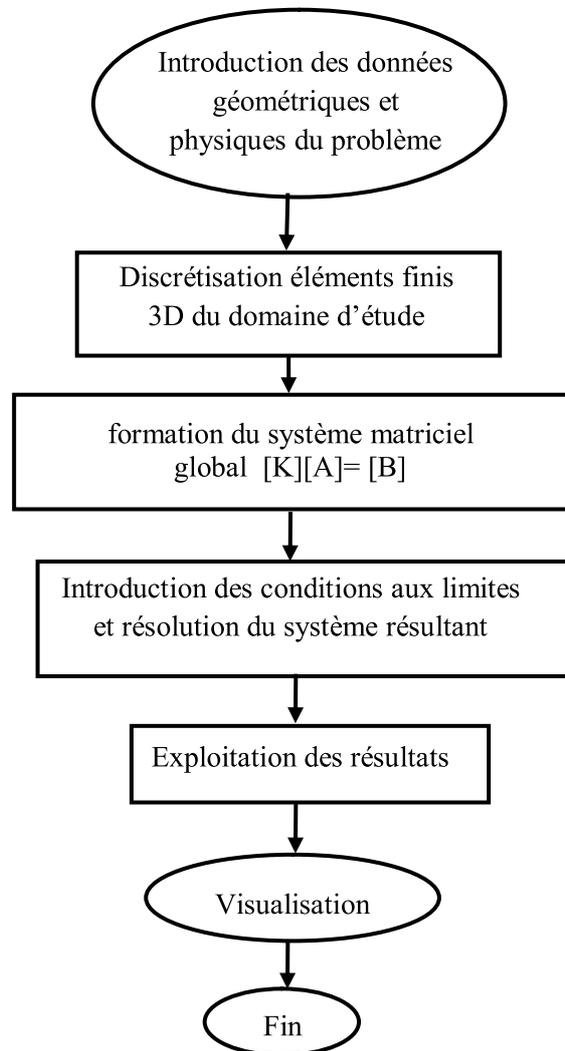


Fig. IV. 12. Diagramme de résolution du problème magnétique lié au palier.

## IV. 2. Validation du code développé et résultats obtenus

Dans cette partie, on présente les résultats de la mise en œuvre des codes de calcul développés. Pour cela, nous avons traité plusieurs cas de paliers actifs et hybrides où un régime statique est considéré (excitation en courant continu et/ou aimant permanent). Pour montrer les performances de notre code, on présente tout d'abord la distribution spatiale du potentiel vecteur magnétique et de l'induction magnétique. Ensuite, on présente les résultats concernant la distribution de la force magnétique dans les zones d'intérêt.

Avant de procéder à l'exploitation de notre code, nous l'avons validé par comparaison de nos résultats avec ceux trouvés par d'autres auteurs [49]. Une telle comparaison concerne la

distribution de la force magnétique dans un système simple de lévitation magnétique (voir Fig. IV. 13).

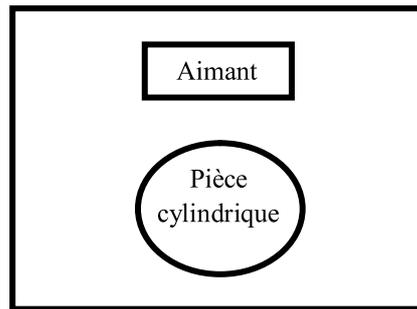


Fig. IV. 13. Système de lévitation traité : lévitation d'une pièce cylindrique [50].

Pour permettre la comparaison des résultats dans notre cas 3D et ceux obtenus pour le cas 2D [50], nous avons calculé pour le cas 3D la distribution de la force magnétique sur le périmètre le long du rotor. Dans cette comparaison on s'intéresse à la direction de la force qui définit les zones d'attraction et de répulsion au niveau du rotor. Cette comparaison qualifiée de qualitative est justifiée par le fait que les données de calcul géométriques et physiques sont pas les mêmes pour les deux cas 2D et 3D.

La comparaison de la figure montre une bonne concordance qualitative des résultats 2D et 3D, mêmes zones d'attraction et de répulsion. De même une lévitation (attraction par l'aimant) est obtenue pour les deux cas 2D et 3D. Pour la densité des vecteurs de la force, la différence est réduite principalement à la qualité de maillage qui n'est pas la même pour les deux cas 2D et 3D. En ce qui concerne les modules des vecteurs de la force, la différence entre les cas 2D et 3D est réduite principalement au dimensionnement et la valeur de l'aimantation qui ne sont pas les mêmes pour les deux cas. Aussi, pour le cas 3D, tous les composants du champ contribuent dans le calcul de la force ce qui n'est pas le cas dans la résolution 2D.

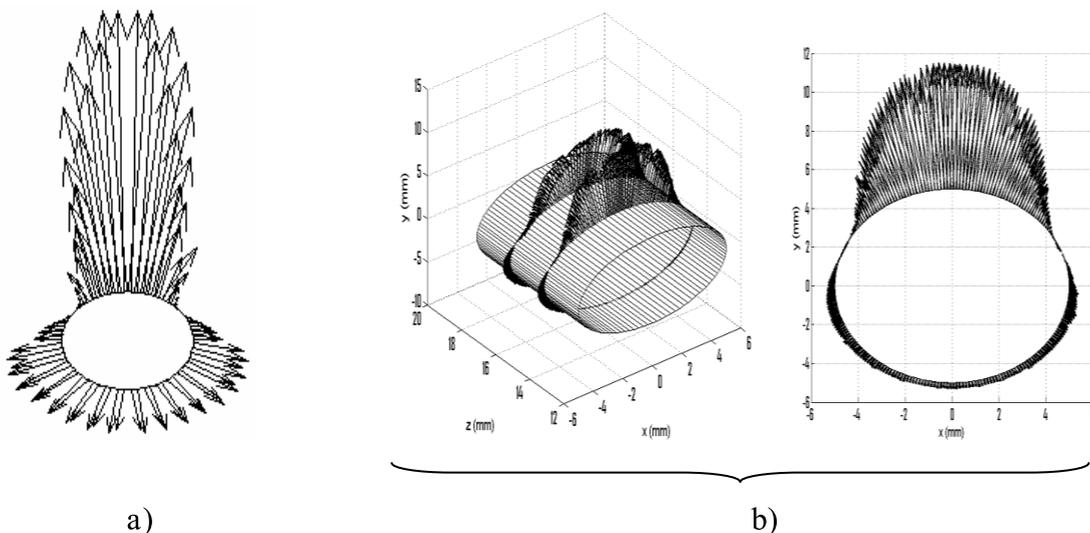


Fig. IV. 14. Distribution de la force magnétique sur le périmètre du rotor. a) Résultat de [50], b) résultats obtenus par le code développé 3D.

## IV. 2. 1. Palier magnétique actif à 2 pôles

### IV. 2. 1. 1. Géométries traitée et maillage 3D du domaine d'étude.

Dans cette partie, on va traiter un cas de palier magnétique actif à 2 pôles. Le domaine d'étude et les conditions aux limites sont montrés dans la figure IV. 15.

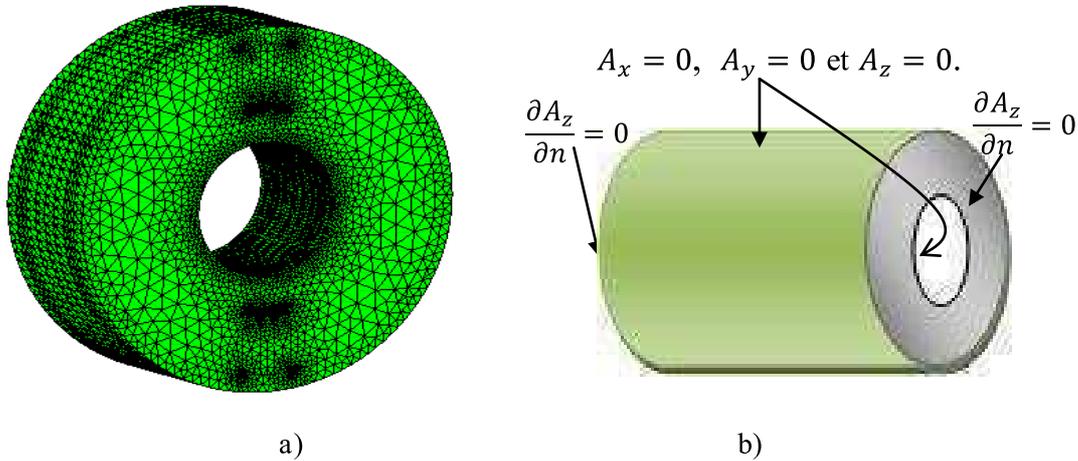


Fig. IV. 15. Géométrie d'un palier magnétique actif à 2poles. a) différentes parties constituant le dispositif étudié, b) forme du domaine d'étude et conditions aux limites imposées.

Le maillage réduit (exclusion du domaine de l'air) qui montre les différentes parties du dispositif traité (les 2poles et la culasse) est montré dans la figure IV. 16.

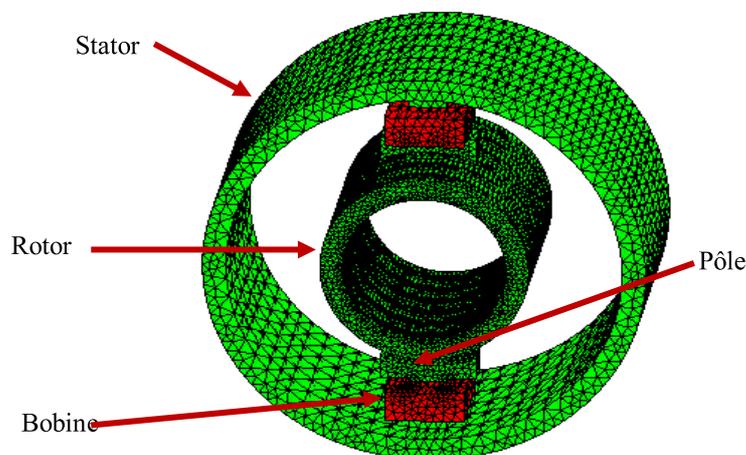


Fig. IV. 16. maillage réduit aux différentes parties du dispositif traité.

Dans ce dispositif, on a supposé une même longueur pour le rotor et la culasse de fermeture de champ, ce qui simplifie l'introduction des conditions aux limites.

Dans cette application, on a supposé un même courant dans les deux inducteurs de densité constante  $\mathbf{J} = 3 \times 10^6 \text{ A/m}^2$ . Le rotor et la culasse sont supposés de matériau ferromagnétique de perméabilité magnétique relative  $\mu_r = 1000$ . Les différents paramètres géométriques du dispositif étudié sont montrés dans la figure suivante.

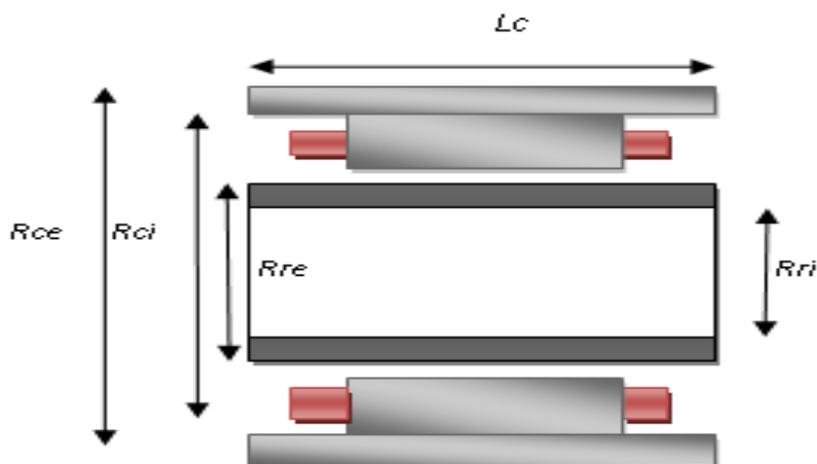


Fig. IV. 17. Coupe longitudinale sur le dispositif étudiée

Les différentes valeurs du calcul sont montres dans les tableaux suivants :

Rayon externe de la culasse $R_{ce}$ /2(mm)	Rayon interne de la culasse $R_{ci}$ (mm)	Longueur de la culasse $L_c$ (mm)
48	43.5	40

Tab. IV. 1. Données géométriques concernant la culasse de fermeture de champ.

Rayon externe du rotor $R_{re}$ (mm)	Rayon interne du rotor $R_{ri}$ (mm)	Longueur du rotor $L_c$ (mm)
25,4	20	40

Tab. IV. 2. Données géométriques concernant le rotor à stabiliser.

Rayon polaire (mm)	Angle polaire ( $^{\circ}$ )	Longueur (mm)	Section du bobinage $\text{mm}^2$
26.4	22,5	20	$12 \times 5$

Tab. IV. 3. Paramètres géométriques des inducteurs

#### IV. 2. 1. 2. Résultats obtenu et vérification

##### a) Induction magnétique B

Dans le calcul des problèmes de champ électromagnétique, la cartographie de ce dernier permet à la fois de vérifier les calculs et de connaître la qualité de champ produit. Pour cela, on commence ici par la représentation de la distribution du champ en terme de potentiel vecteur magnétique qui permet le calcul de toutes les grandeurs électromagnétiques par une simple dérivation ou intégration d'espace où de temps.

Afin de vérifier nos résultats 3D concernant le potentiel vecteur, nous l'avons comparé avec ceux obtenus par une résolution 2D. Pour permettre cette comparaison, nous avons considéré la composante  $A_z$  pour laquelle nous avons représenté les lignes isovaleurs dans le plan de symétrie longitudinal du domaine d'étude pour le cas 3D.

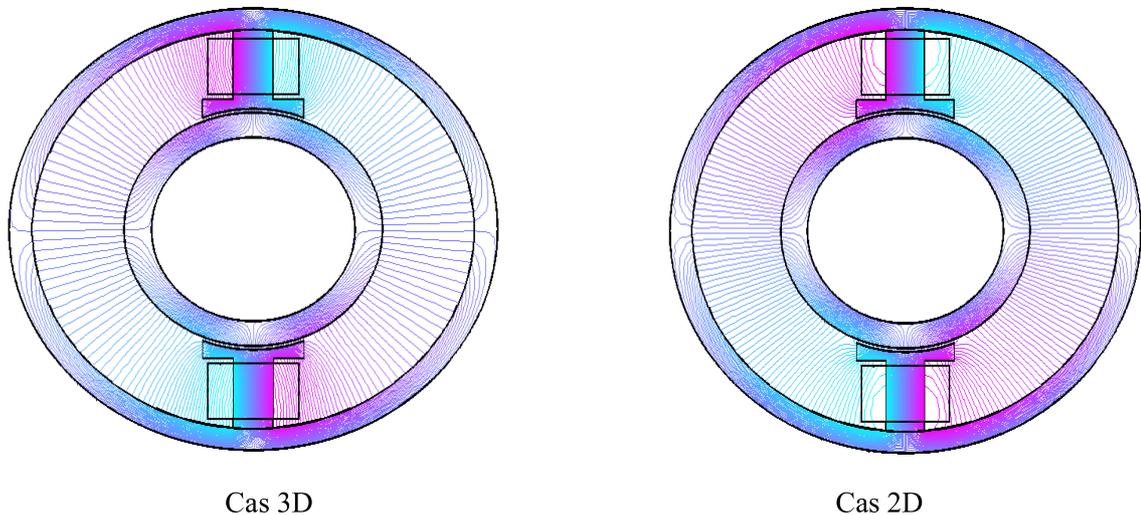


Fig. IV. 18. Lignes équipotentielles de la composante  $A_z$  du potentiel vecteur magnétique au centre du pôle (plan de symétrie longitudinal du dispositif, plan  $(x, y)$ ).

Sur la figure ci-dessus, on voit une différence entre les deux cartographies du potentiel. Cela est réduit principalement à l'effet des têtes du bobinage prise en compte dans le cas 3D, les conditions aux limites imposées sur les trois composantes de  $\vec{A}$  et à la qualité du maillage qui n'est pas la même pour les deux cas 2D et 3D.

Pour montrer l'effet des têtes du bobinage sur la distribution du champ, on présente les distributions de la composante  $A_z$  sur les faces avant et arrière du domaine d'étude.

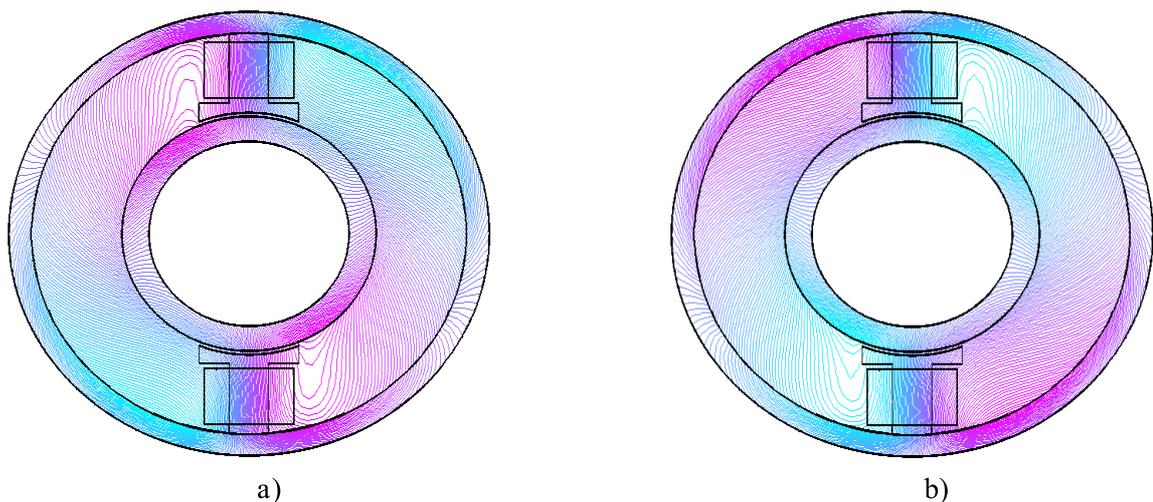


Fig. IV. 19. Distribution de la composante  $A_z$  du potentiel vecteur sur les faces avant et arrière du domaine d'étude (plan  $(x, y)$ ). a) face avant, b) face arrière.

Dans la figure ci-dessus, on voit clairement une différence de la distribution du champ par rapport aux cas de la Fig. IV. 18.

Pour justifier la différence entre les distributions du champ de la Fig. IV. 18, on présente dans la figure suivante les distributions des deux composantes du champ  $A_x$  et  $A_y$  dans le plan de symétrie longitudinale du dispositif (centre du pôle).

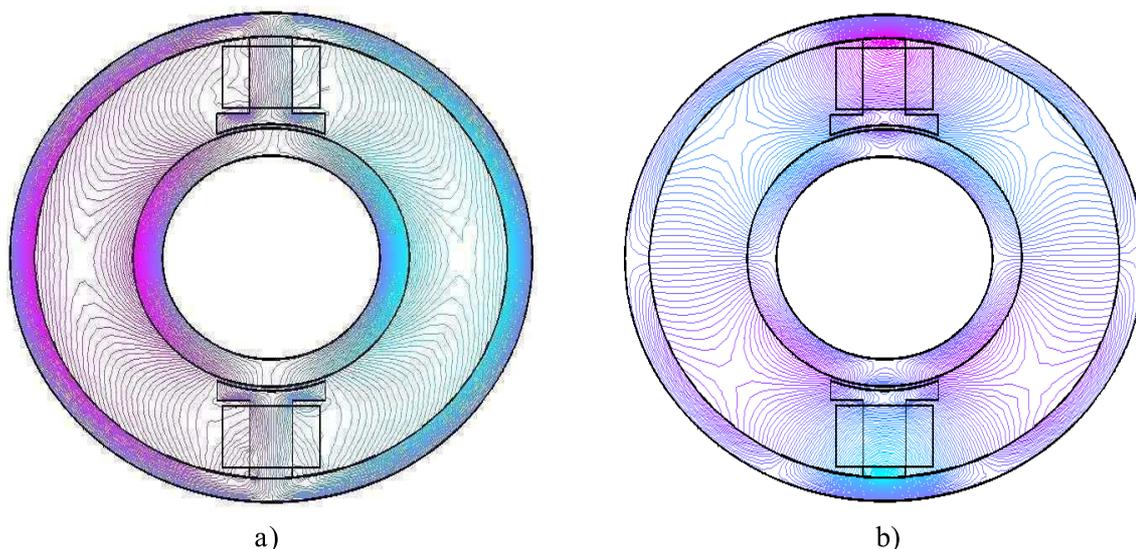


Fig. IV. 20. Distribution des composantes  $A_x$  et  $A_y$  du potentiel vecteur dans le plan du centre du pôle (plan  $(x, y)$ ). a) la composante  $A_x$ , b) la composante  $A_y$ .

La connaissance des valeurs de potentiel vecteur n'est pas le but recherché en soi car en pratique on aura besoin de connaître les répartitions de l'induction magnétique, induction maximal, induction en un point donné et forces...Il faut donc passer du potentiel vecteur magnétique aux quantités mentionnées précédemment.

Pour l'induction magnétique, on passe du potentiel vecteur à son rotationnel, ce qui donne pour le cas général 3D :

$$B_x = \frac{\partial\{N^e\}}{\partial y} \cdot \{A_z^e\} - \frac{\partial\{N^e\}}{\partial z} \cdot \{A_y^e\} \quad (\text{IV.01})$$

$$B_y = \frac{\partial\{N^e\}}{\partial z} \cdot \{A_x^e\} - \frac{\partial\{N^e\}}{\partial x} \cdot \{A_z^e\} \quad (\text{IV.02})$$

$$B_z = \frac{\partial\{N^e\}}{\partial x} \cdot \{A_y^e\} - \frac{\partial\{N^e\}}{\partial y} \cdot \{A_x^e\} \quad (\text{IV.03})$$

Le calcul de la distribution de l'induction magnétique pour les données des tableaux mentionnées précédemment a donné les résultats suivants :

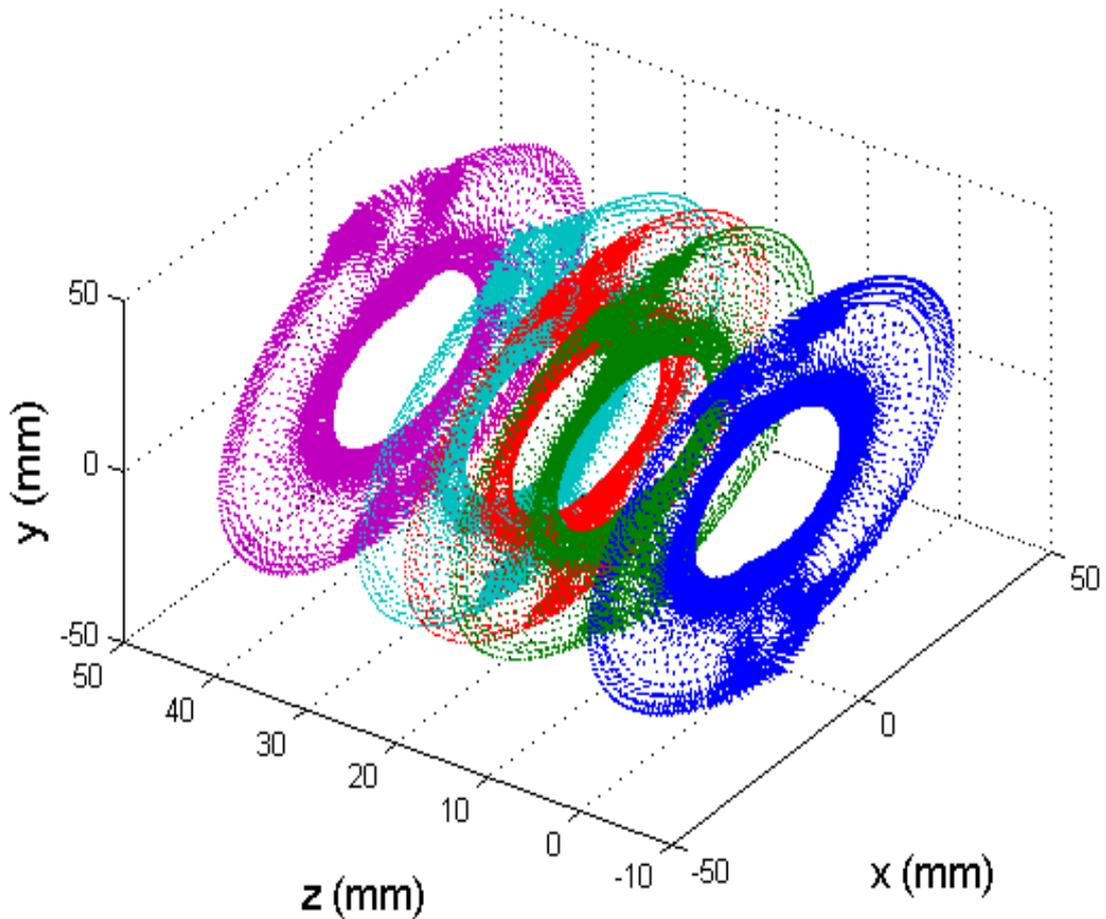


Fig. IV. 21. Distribution de l'induction magnétique  $\vec{B}$  dans des plans  $(x, y)$  pour différents points  $z$ .

La figure ci-dessus montre peu de différence entre les distributions de l'induction dans les plans considérés. Cela est réduit principalement à l'effet des extrémités (têtes des bobines). Pour vérifier la qualité de nos résultats nous l'avons confronté avec ceux obtenus pour le cas 2D.

Pour minimiser les effets des bords qui permet une confrontation acceptable entre les deux cas 2D et 3D, nous avons choisi pour le dernier cas la distribution dans le plan central du pôle (plan de symétrie longitudinal du dispositif étudié).

Pour une bonne clarté, nous faisons des zooms au niveau des pôles où les vecteurs d'induction sont concentrés (voir Fig.VI.22).

La différence entre les cartographies de l'induction des cas 2D et 3d de la figure précédente est réduit principalement aux qualités des maillages qui ne sont pas les mêmes pour les deux cas d'une part et la négligence des composante  $A_x$  et  $A_y$  dans le calcul du ca 2D.

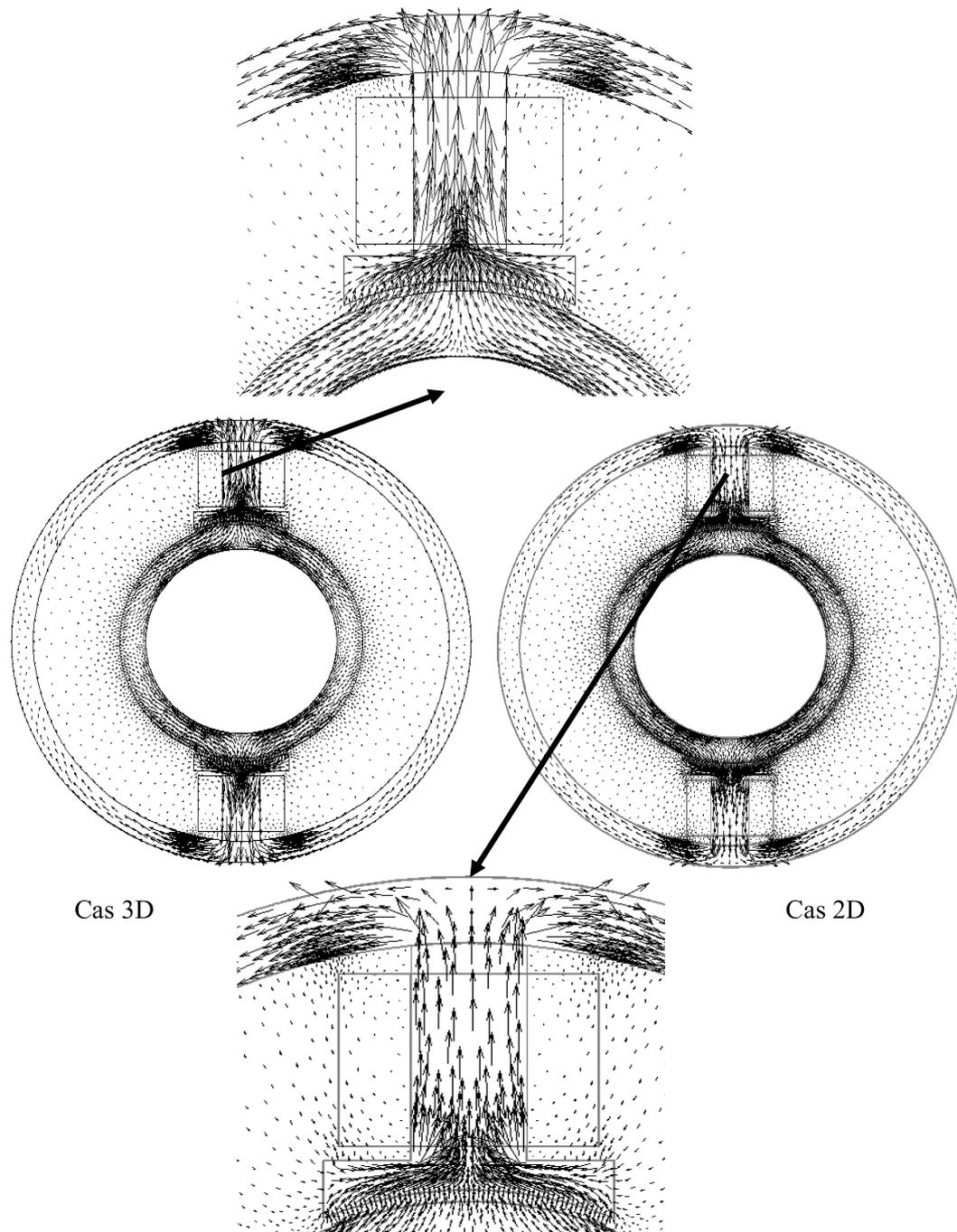


Fig. IV. 22. Comparaison des distributions de l'induction magnétique  $\vec{B}$  dans la plan de symétrie longitudinale pour les cas 3D et 2D.

Pour estimer quantitativement l'induction générée par le palier et appliquée sur le rotor d'une part, et vérifier nos calcul 3D nous avons présenté et comparé les variations de l'induction sur le périmètre du rotor pour les deux cas 2d et 2D.

Pour permettre cette comparaison on a choisi les composantes  $B_x$  et  $B_y$  (voir Fig. IV. 23 et 24).

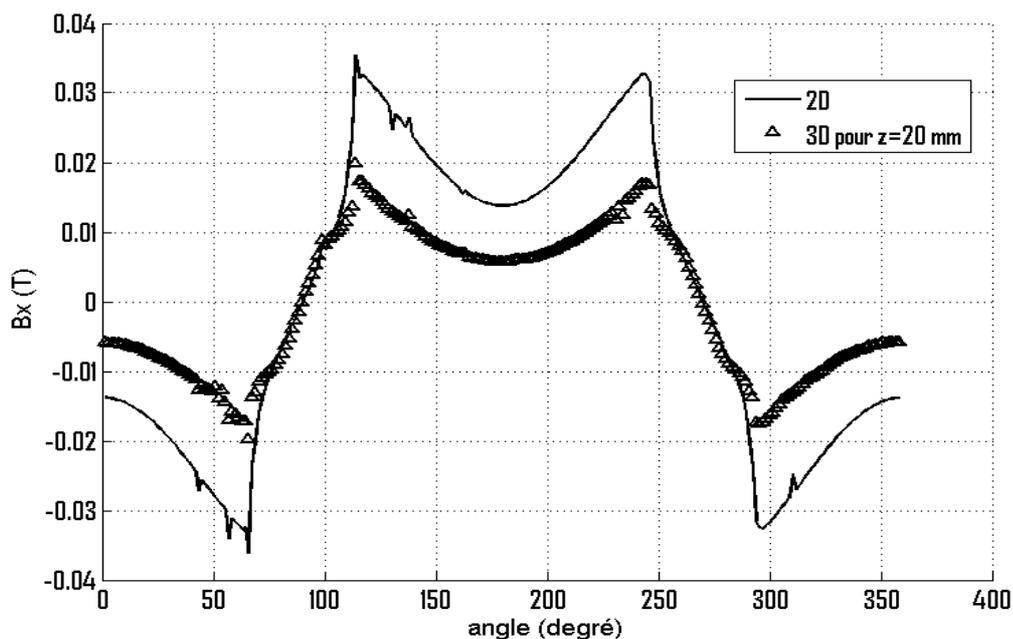


Fig. IV. 23. Variation de  $B_x$  sur le périmètre du rotor pour les cas 3D et 2D au niveau du plan de symétrie longitudinale.

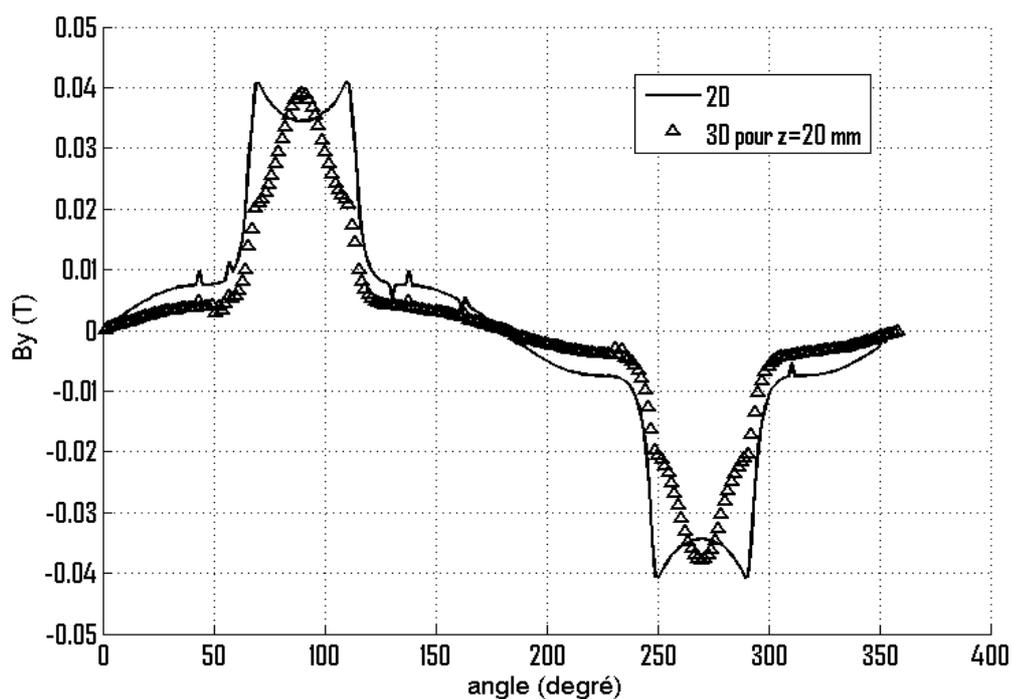


Fig. IV. 24. Variation de  $B_y$  sur le périmètre du rotor pour les cas 3D et 2D au niveau du plan de symétrie longitudinale.

Sur la figure ci-dessus, on voit que la composante  $B_y$  atteint presque la même valeur maximale pour les deux cas 2D et 3D. Les autres différences sont liées aux effets des têtes des bobines qui se traduit par les contributions des composantes  $A_x$  et  $A_y$  dans le calcul des composantes de  $\vec{B}$ .

Pour donner plus d'information sur la distribution de l'inductance magnétique qui permette de prévoir la qualité de la force, on présente dans la figure suivante les variations de l'induction magnétique sur le périmètre du rotor pour une même distance  $z=5\text{mm}$  avant et après le plan central des pôles.

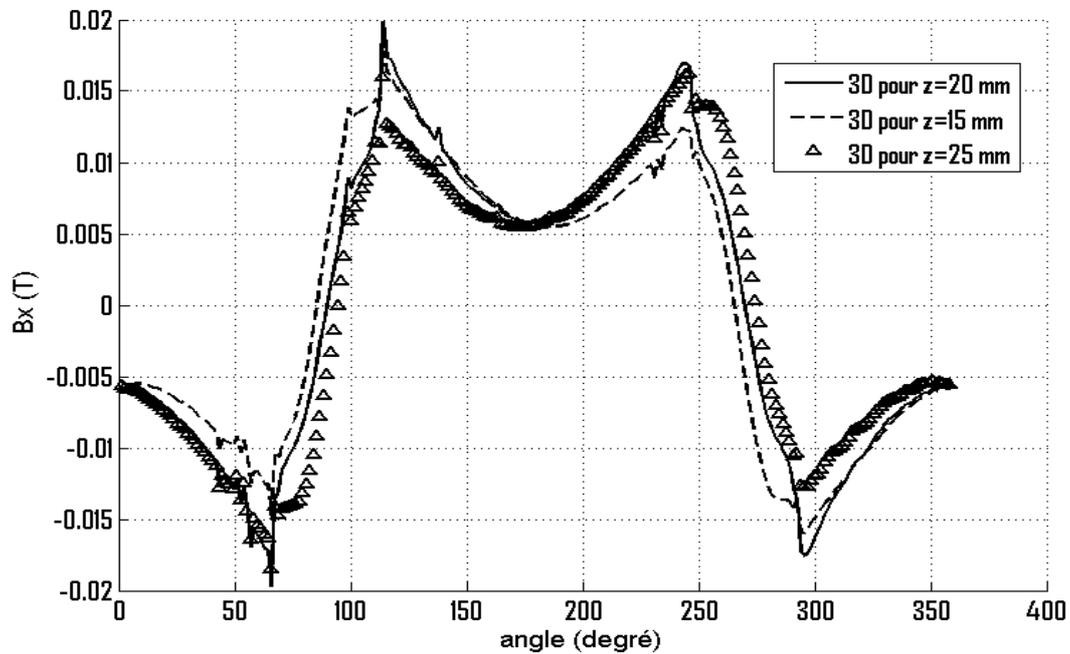


Fig. IV. 25. Variation de  $B_x$  sur le périmètre du rotor pour les cas 3D dans le plan de symétrie longitudinale  $z=20\text{ mm}$  et dans les plans avant et arrière respectivement  $z=15\text{ mm}$  et  $z=25\text{ mm}$ .

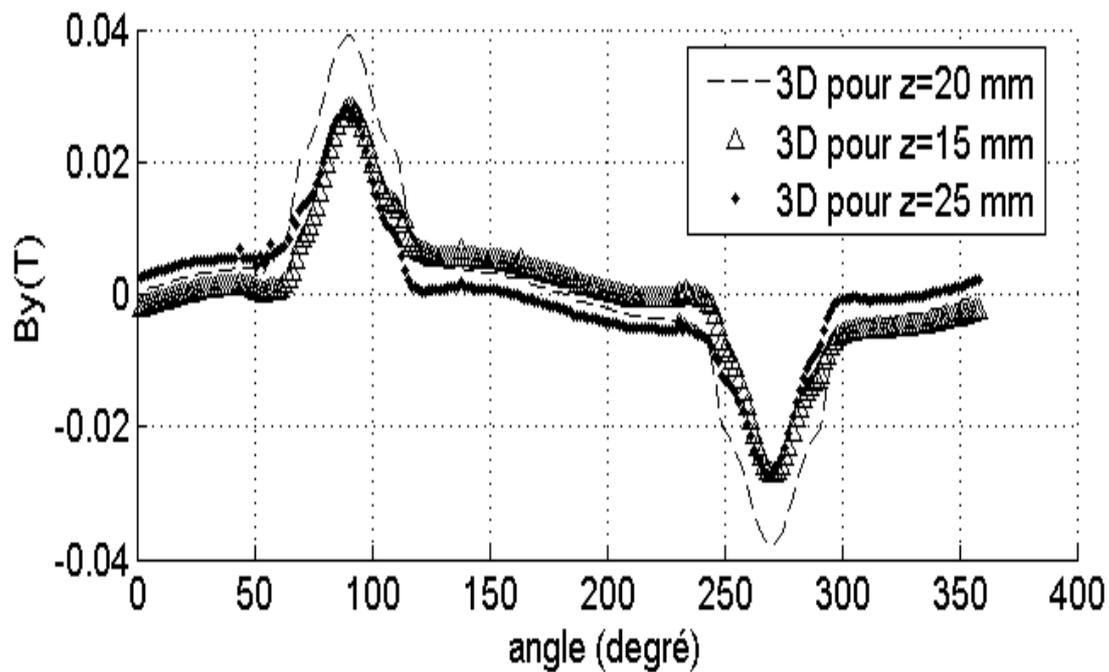


Fig. IV. 26. Variation de  $B_y$  sur le périmètre du rotor pour les cas 3D dans le plan de symétrie longitudinale  $z=20\text{ mm}$  et dans les plans avant et arrière respectivement  $z=15\text{ mm}$  et  $z=25\text{ mm}$ .

La différence entre les variations de l'induction des cas  $z=25\text{mm}$  et  $z=15\text{mm}$  est dû principalement à la qualité du maillage.

Selon le calcul précédent, on voit que qualitativement nos résultats 3D sont en bonne concordance avec ceux obtenu en 2D. Du coté quantitative, nos résultats 3D montre clairement l'effet des têtes des bobinages qui a une grande influence sur les composantes de l'induction  $\vec{B}$ , ainsi que son amplitude  $B$ .

### b) Force magnétique appliquée au rotor

Comme en a mentionné précédemment, la force magnétique est le paramètre essentiel du fonctionnement des paliers magnétiques. C'est de la qualité de cette dernière que dépende la fiabilité du système de suspension. Pour la qualité de la force, il s'agit de l'intensité et la direction. Afin de connaitre ces dernières, on calcule le champ des vecteur de la force dans la région d'intérêt que dans notre cas est le rotor à suspendre.

Pour calculer le champ de force (distribution de la force) dans le rotor nous avons appliqué la méthode de tenseur de maxwell surfacique. Dans la configuration considérée (Fig. IV. 16), la surface qui nous s'intéresse est celle au niveau de laquelle il y aura interaction direct entre le rotor et le palier (surface extérieure du rotor).

Pour montrer la qualité attractive que chaque palier applique à la région du rotor qui se trouve en face de lui, on présente le champ de la force au niveau des plans différents (x, y) (voir Fig. IV. 27). Sur cette figure, on voit que l'intensité de l'attraction réside au centre du pôle et diminue à chaque fois on s'éloigne du centre du pole. .

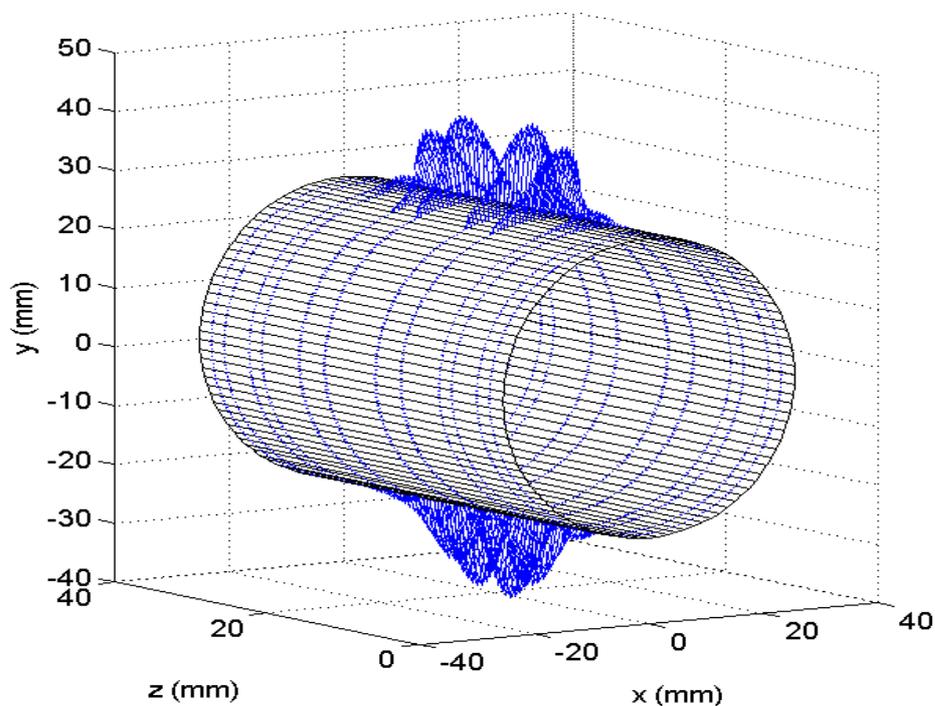


Fig. IV. 27. Force magnétique  $\vec{F}$  appliquée par le palier actif à 2 pôles sur le rotor.

Pour bien montrer la variation de la qualité de l'attraction appliquée au rotor, on présente les projections longitudinale et transversale du champ de la force (voir Fig. IV. 28)

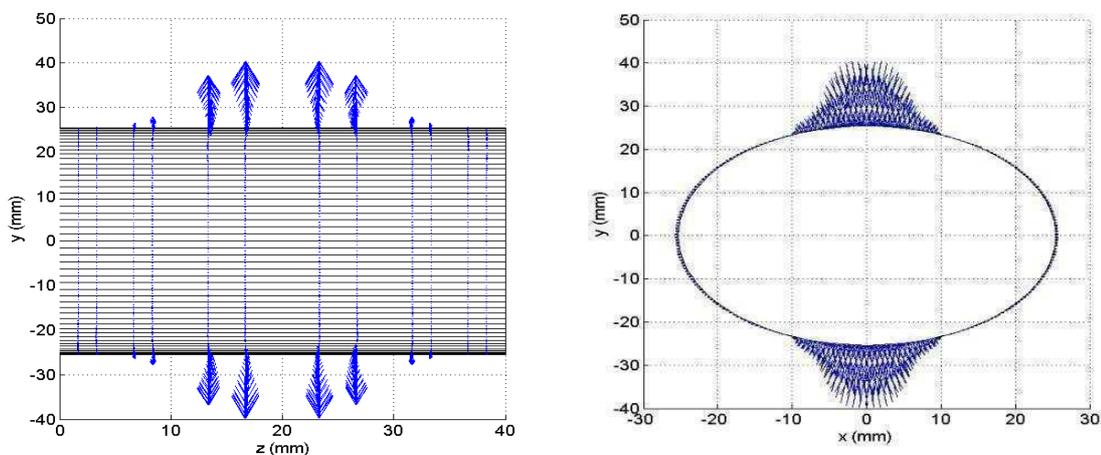


Fig. IV. 28. Projections longitudinale et transversale de la force magnétique.

Les figures ci-dessus montrent la nature attractive de la force magnétique appliquée par le palier sur le rotor. Cela est réduit à la nature ferromagnétique du rotor à suspendre. Dans les calculs précédents, l'intensité de la force est infectée par la qualité du maillage. Si le maillage adopté a permis de bien déterminer la direction de la force, un raffinement suffisant du maillage permettra d'aboutir à l'intensité réelle de la force. Afin de savoir complètement la qualité de la force appliquée par le palier, nous avons calculé et représenté la distribution de la force magnétique appliquée sur le reste des surfaces du rotor, interne et surfaces des faces latérales (voir Fig. IV. 29 et IV. 31).

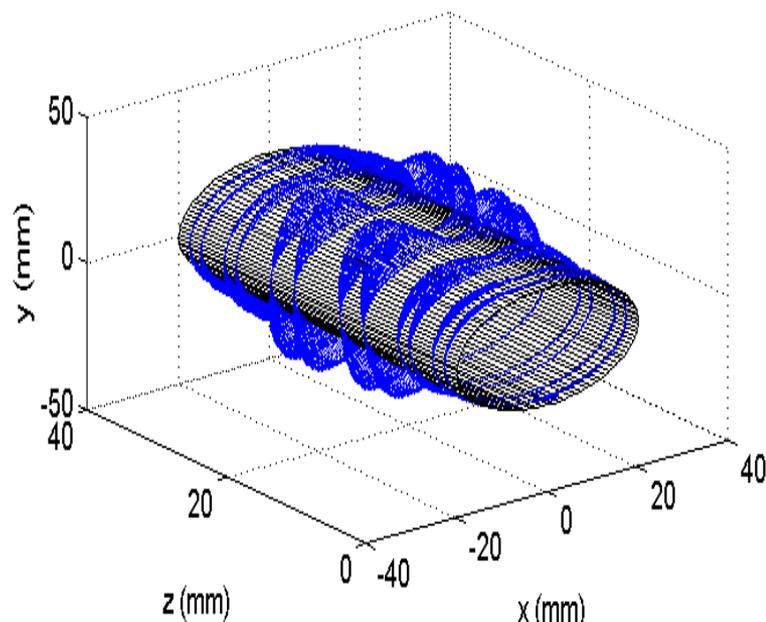


Fig. IV. 29. Force magnétique  $\vec{F}$  appliquée sur la surface interne du rotor.

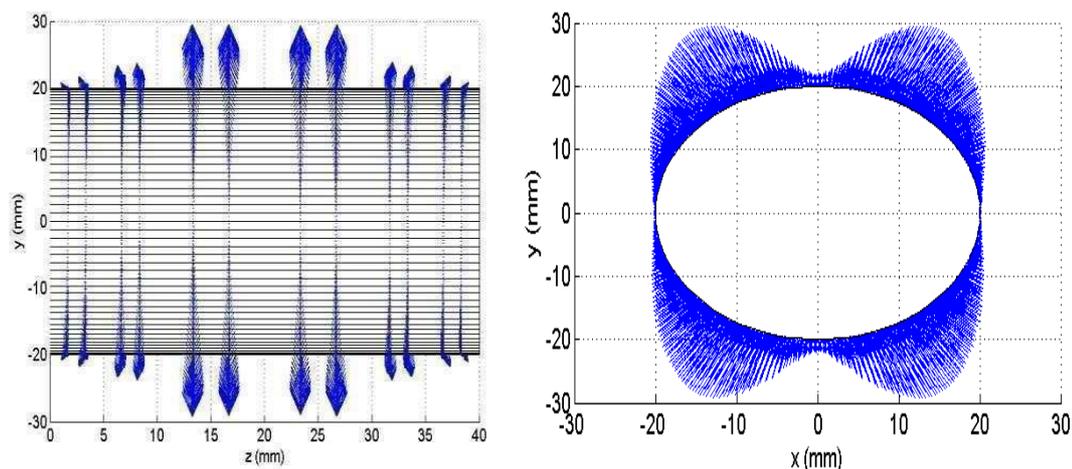


Fig. IV. 30. Projections longitudinale et transversale de la force magnétique.

D'après ces figures, on voit que même au niveau de la surface interne du rotor, il existe des zones d'attraction et des zones neutres.

En comparaison avec les résultats de la figure IV. 27 par exemple, on voit que pour la surface extérieure la zone d'attraction est celle au-dessous des pôles par contre pour la surface intérieure ; la zone juste au-dessus des pôles il y a une attraction très faible et au niveau des zones latérales il' y a une attraction importante. Ces résultats sont obtenus pour le cas où on a considéré que la partie ferromagnétique du rotor est un tube cylindrique supporté par un arbre non magnétique supposé dans les calculs comme de l'air où on a imposé des conditions de type Dirichlet homogène.

Le calcul de la force au niveau des surfaces latérales du rotor a donné les résultats de la figure suivante :

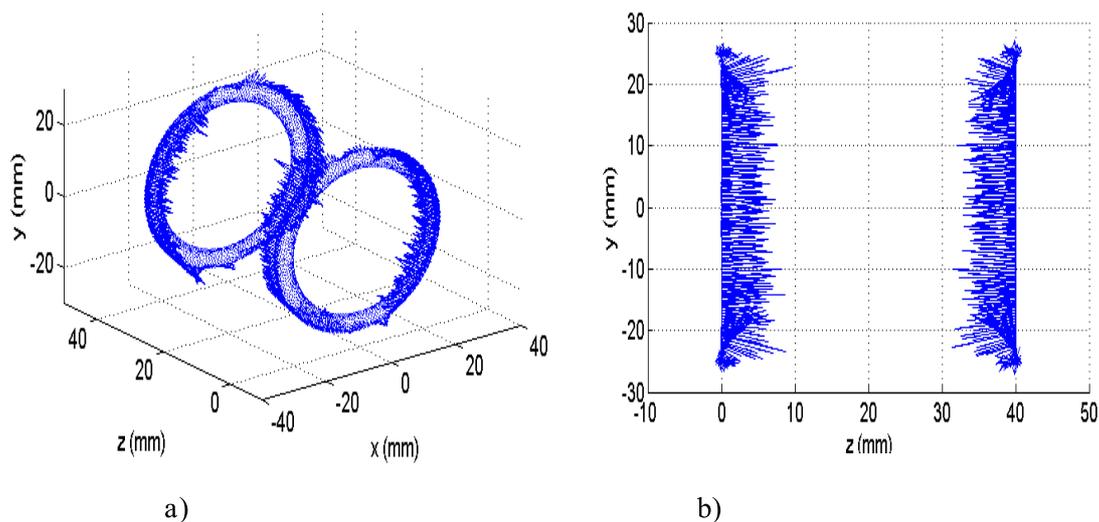


Fig. IV. 31. a) Force magnétique  $\vec{F}$  appliquée sur les surfaces de faces latérales du rotor, b) projection sur le plan  $(y, z)$ .

Ces figures montrent des zones de répulsion et des zones d'attraction vers le centre du palier.

Dans un palier magnétique, on cherche à contrôler le rotor suivant les deux axes longitudinal et radial. Alors, il est nécessaire de connaître l'amplitude de la force sur tout le périmètre du rotor. Pour ce but, et afin de connaître les effets de chaque composante de la force, on présente ici les variations de chaque composante de la force sur le périmètre du rotor.

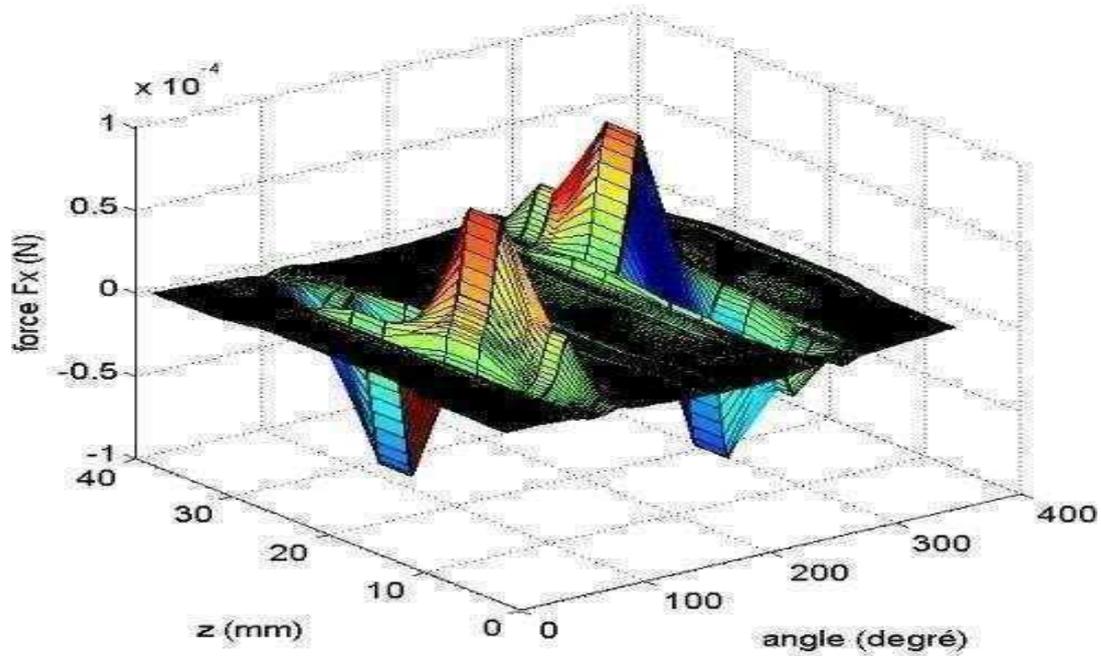


Fig. IV. 32. Variation de la composante  $F_x$  de la force magnétique sur le périmètre du rotor

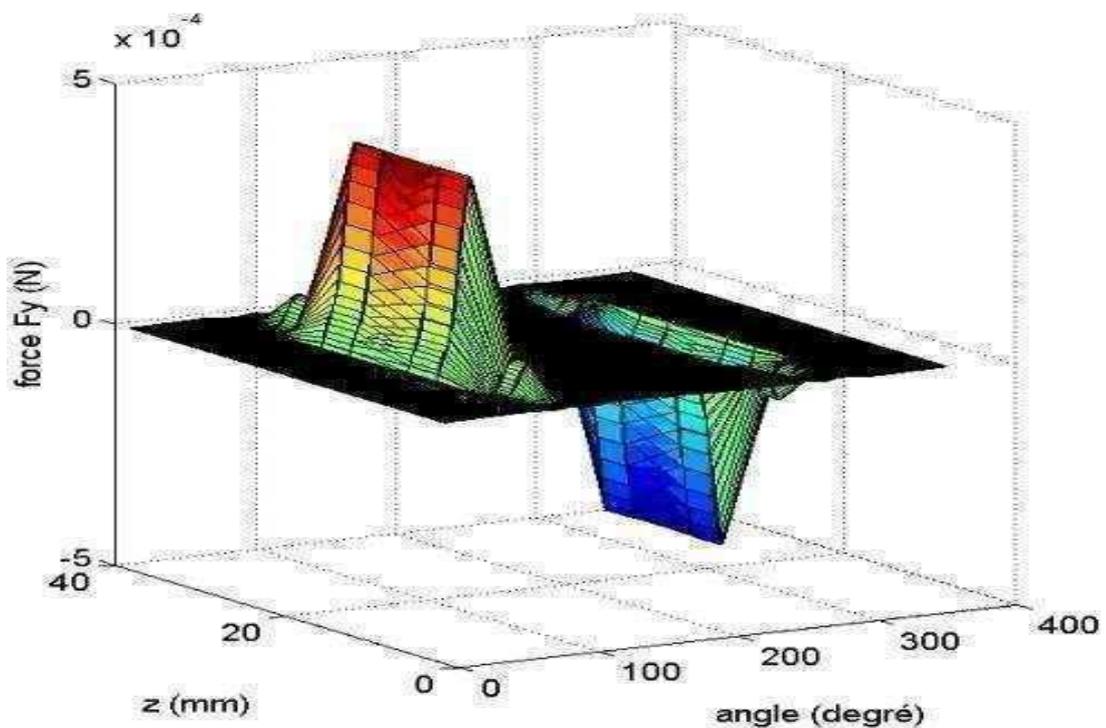


Fig. IV. 33. Variation de la composante  $F_y$  de la force magnétique sur le périmètre du rotor

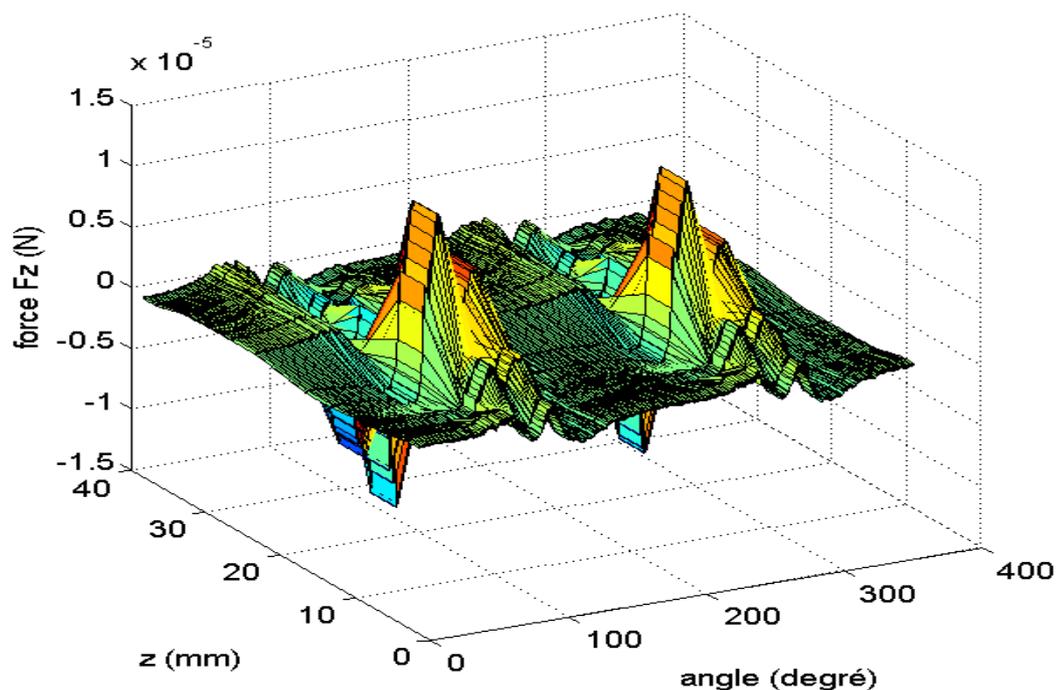


Fig. IV. 34. Variation de la composante  $F_z$  de la force magnétique sur le périmètre extérieur du rotor

D'après les résultats des figures ci-dessus, on voit qu'il existe des zones d'attraction pour chaque composante de la force qui dépend de la qualité du champ appliqué (configuration du palier). Pour savoir l'effet d'attraction dans chaque zone du rotor, on présente ici les variations de la force magnétique appliquée sur la surface interne du rotor. Pour la même raison que précédent, on présente ici les variations en 3D de la force magnétique sur le périmètre interne du rotor.

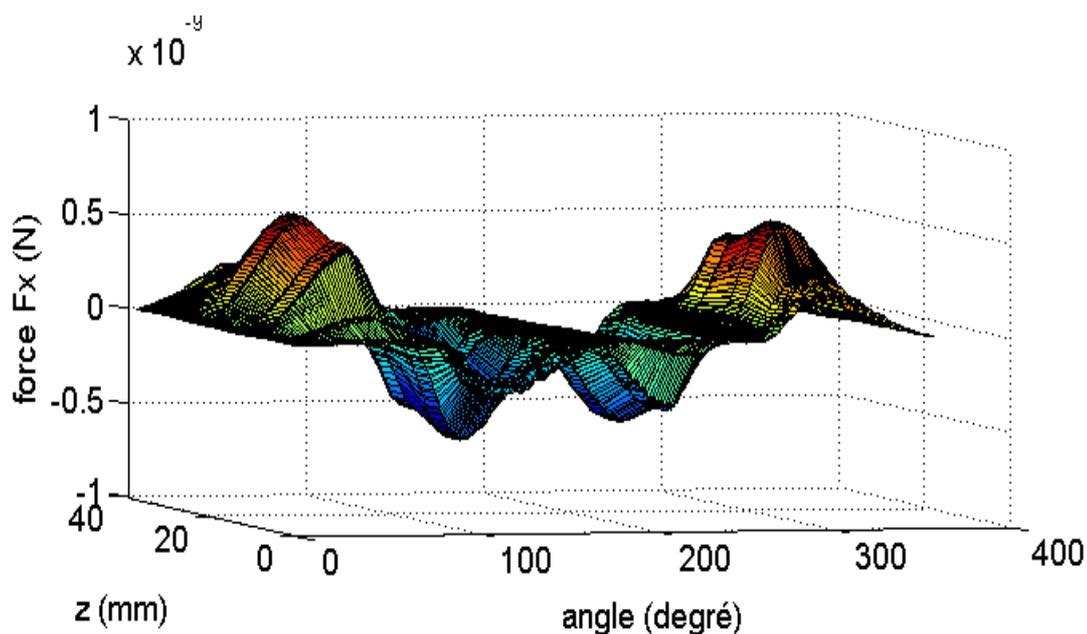


Fig. IV. 35. Variation de la composante  $F_x$  de la force magnétique sur le périmètre intérieur du rotor

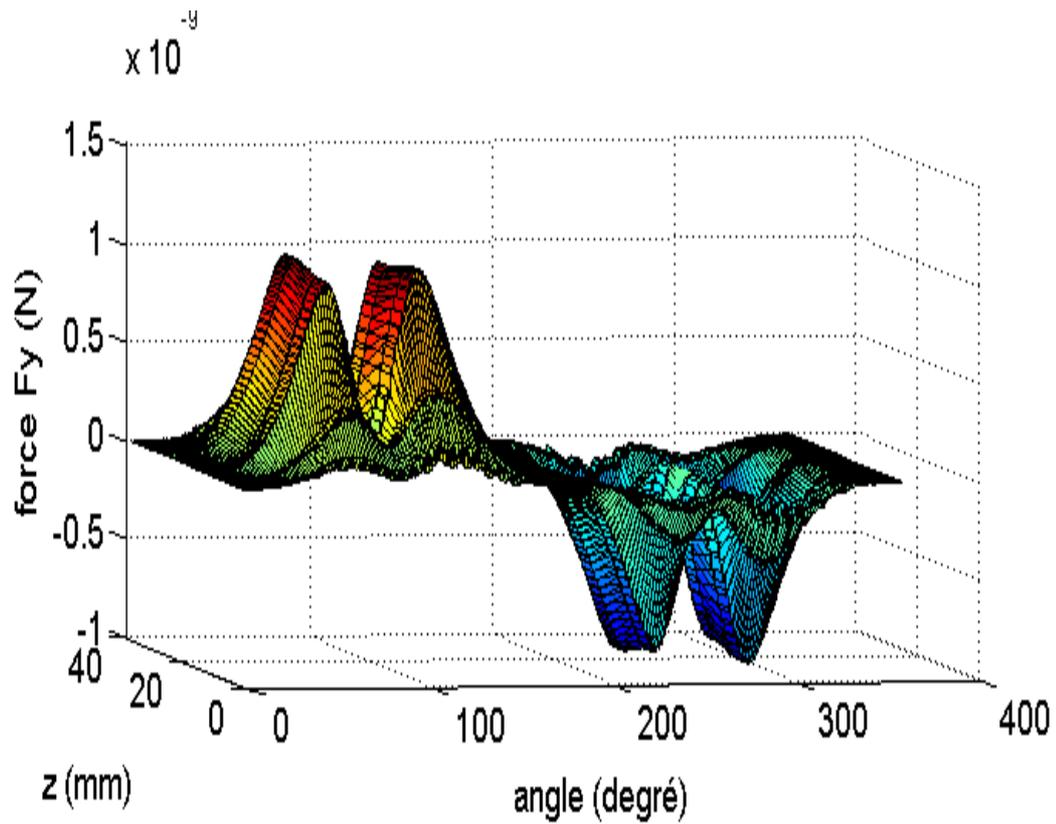


Fig. IV. 36. Variation de la composante  $F_y$  de la force magnétique sur le périmètre intérieur du rotor

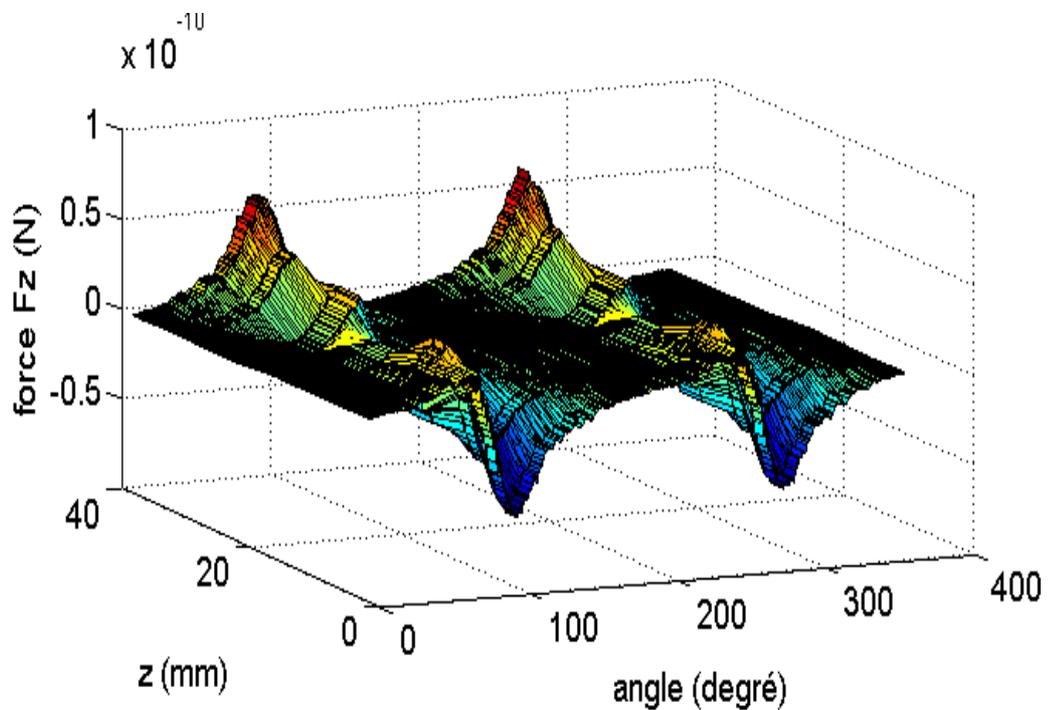


Fig. IV. 37. Variation de la composante  $F_z$  de la force magnétique sur le périmètre intérieur du rotor

En comparaison avec les forces appliquées sur la surface extérieure du rotor, les forces appliquées sur la surface interne sont négligeable.

De Cela, on conclut que pour une analyse des fonctionnements suspension de ce type, on peut se contenter à évaluer la force sauf à la surface extérieure du rotor.

#### IV. 2. 2. Palier magnétique passif (aimant permanent) à 2 pôles

Comme nous l'avons déjà mentionné, une suspension de rotor peut réaliser des paliers à aimant permanent mais avec exclusion de tout contrôle.

Pour étudier la qualité des forces appliquées dans ce cas, nous avons refait les calculs précédents en remplaçant les électroaimants par des aimants permanents.

Les paramètres géométriques de l'aimant utilisé sont montrés dans la figure suivante.

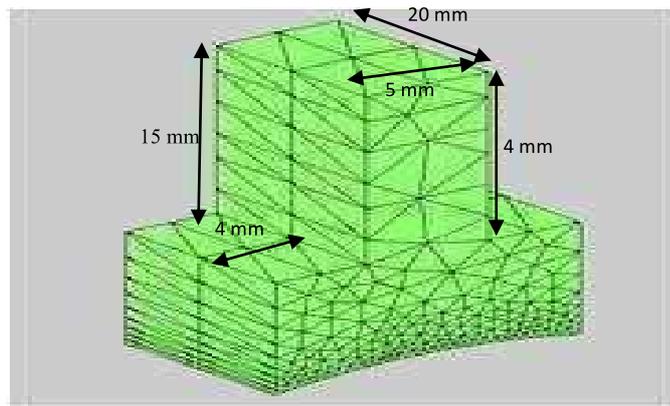


Fig. IV. 38. Forme et dimensionnement de l'aimant permanent considéré.

Pour valider l'approche utilisée pour prendre en charge l'aimant permanent dans notre solveur, on présente tout d'abord la cartographie du champ en terme de potentiel vecteur magnétique. Pour vérifier la qualité des résultats, on effectue une comparaison entre les cas 2D et 3D pour la composante  $A_z$  (seul inconnu en 2D).

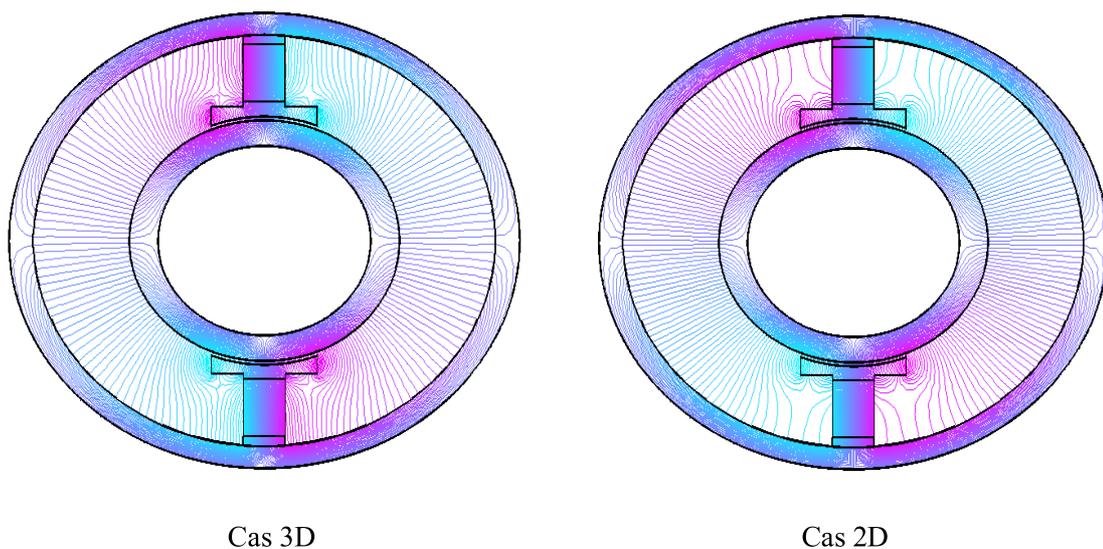


Fig. IV. 39. Lignes équipotentiels de la composante  $A_z$  du potentiel vecteur magnétique au centre du pôle (plan de symétrie longitudinal du dispositif).

Les variations des composantes de l'induction magnétique sur le périmètre extérieure du rotor sont montrées dans les figures suivantes. Afin de connaître la valeur maximale de chaque composante nous avons considéré le plan de symétrie longitudinal du dispositif.

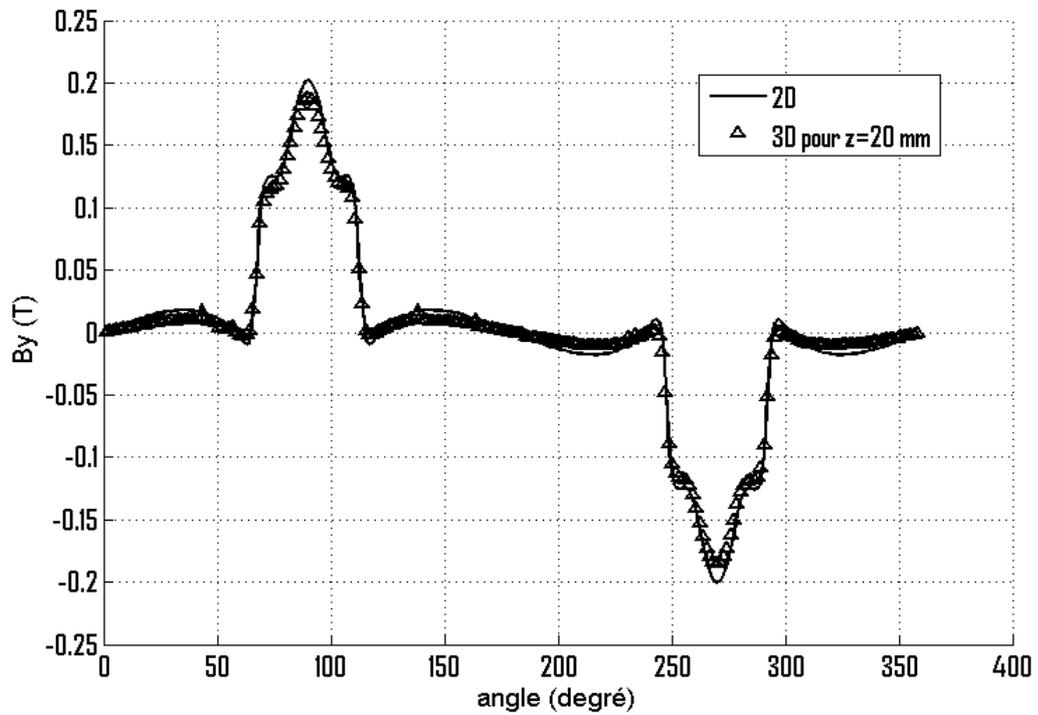


Fig. IV.40. Variation de  $B_y$  sur le périmètre du rotor pour les cas 3D et 2D au niveau du plan de symétrie longitudinale.

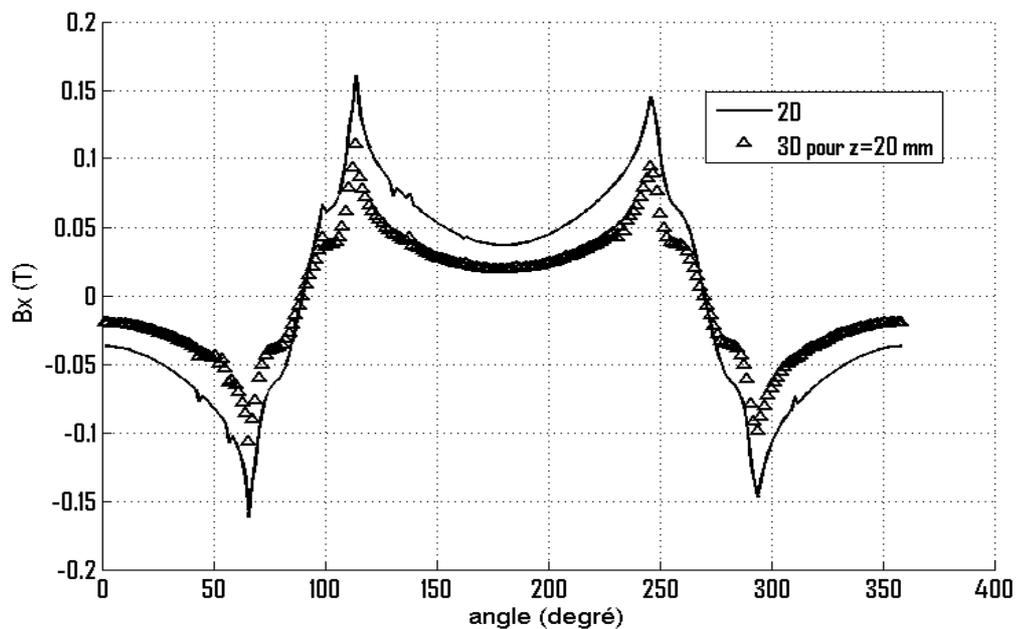


Fig. IV.41. Variation de  $B_x$  sur le périmètre du rotor pour les cas 3D et 2D au niveau du plan de symétrie longitudinale.

De la figure ci-dessus, on voit que les variations de la composante  $B_y$  sont les mêmes pour le cas 2D et 3D. Par contre les variations de la composante  $B_x$  sont les mêmes au voisinage des deux pôles où l'entrefer est minimum (finesse de maillage).

En 2D, on suppose que le dispositif est infini dans le sens perpendiculaire au plan d'étude ce qui donne une même distribution de  $B$  suivant cet axe. Pour montrer l'effet de cette hypothèse sur les résultats réels, on présente ici les variations de l'induction magnétique dans deux plans avant et arrière par rapport au plan de symétrie longitudinale.

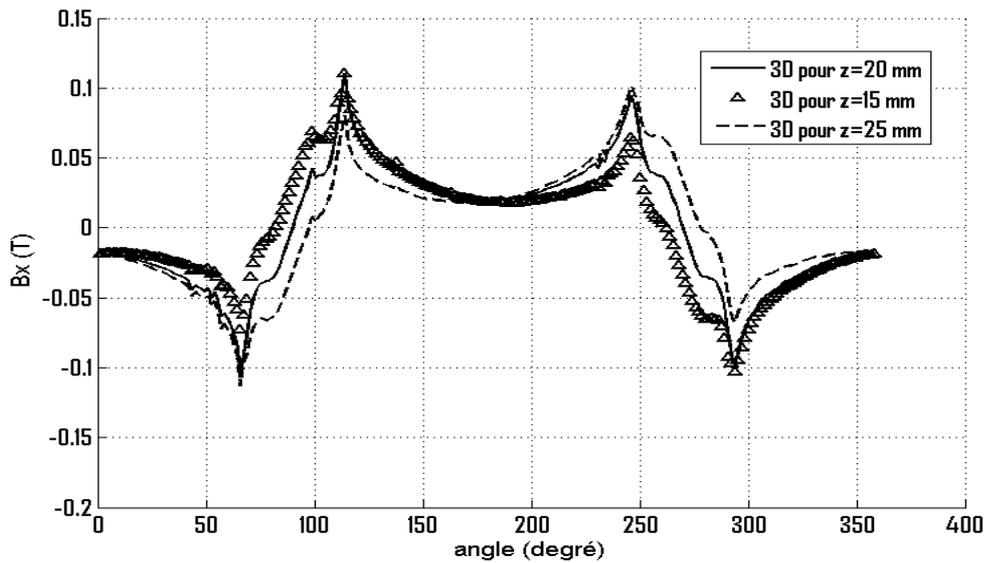


Fig. IV. 42. Variation de  $B_x$  sur le périmètre du rotor pour les cas 3D dans le plan de symétrie longitudinale  $z=20$  mm et dans les plans avant et arrière respectivement  $z=15$  mm et  $z=25$  mm.

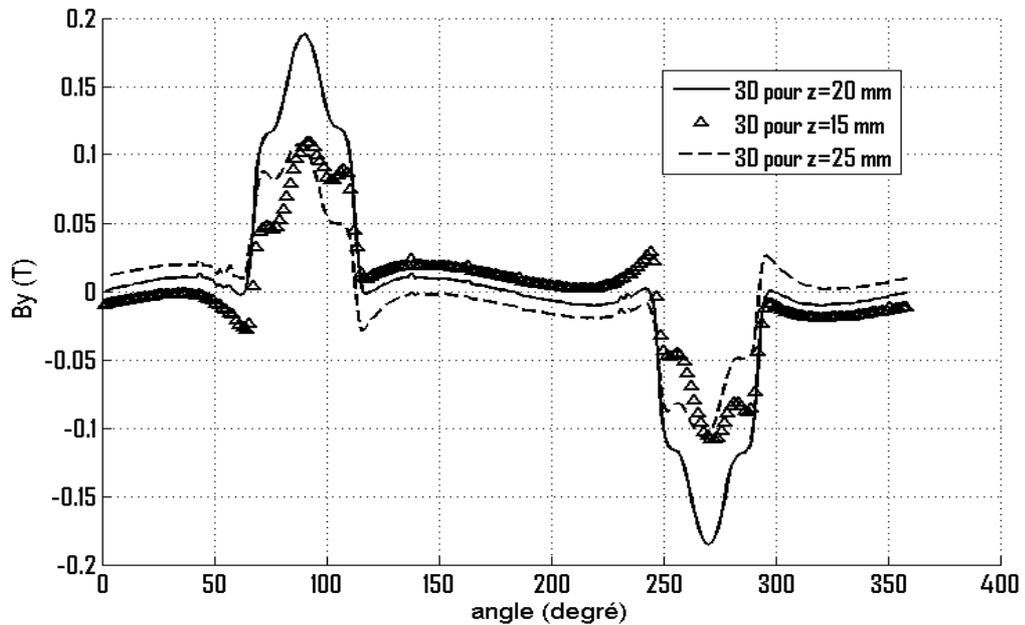


Fig. IV. 43. Variation de  $B_y$  sur le périmètre du rotor pour les cas 3D dans le plan de symétrie longitudinale  $z=20$  mm et dans les plans avant et arrière respectivement  $z=15$  mm et  $z=25$  mm.

La distribution de la force magnétique générée et appliquée par le palier à aimants permanents sur le rotor est montrée dans les figures suivantes.

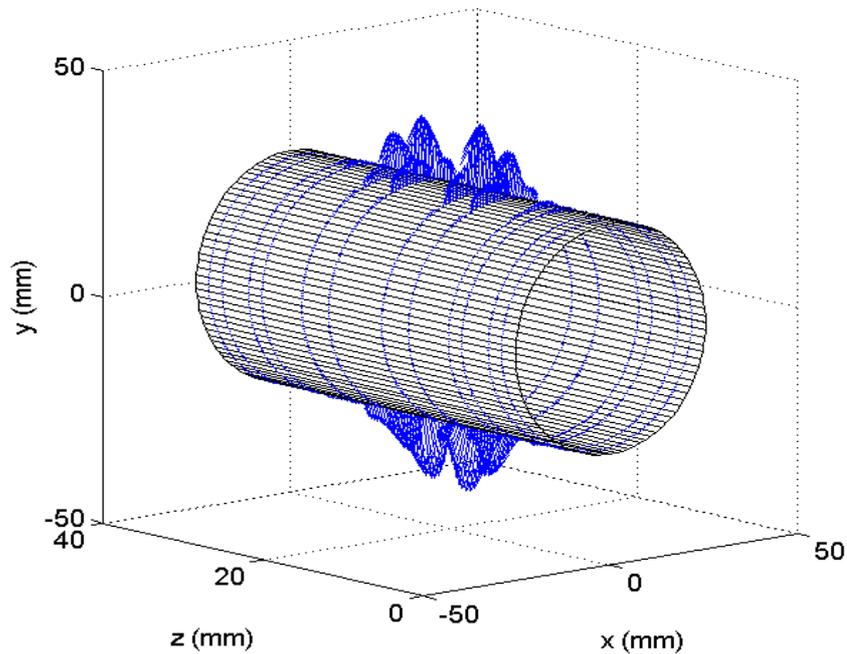


Fig. IV. 44. Force magnétique  $\vec{F}$  appliquée sur la surface externe du rotor.

La figure montre une attraction du rotor vers les aimants. Cette attraction est très intense au niveau des centres des pôles.

Pour une meilleure clarification et une compréhension du résultat de la Fig. IV. 44, on présente ici les projections transversale et longitudinale de la force magnétique.

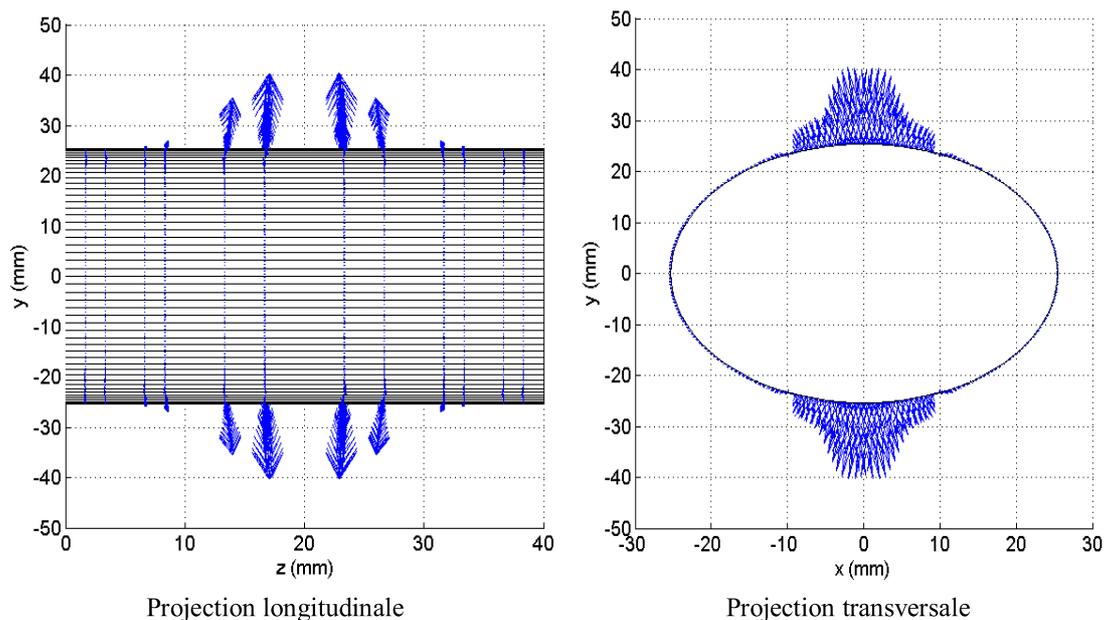


Fig. IV. 45. Projection longitudinale et transversale la force magnétique  $\vec{F}$  appliquée sur la surface externe du rotor.

Pour une lecture quantitative complète des résultats concernant la force magnétique appliquée sur le rotor, on présente dans la figure suivante les variations des composantes  $F_x$ ,  $F_y$  et  $F_z$  appliquées sur le périmètre extérieur du rotor.

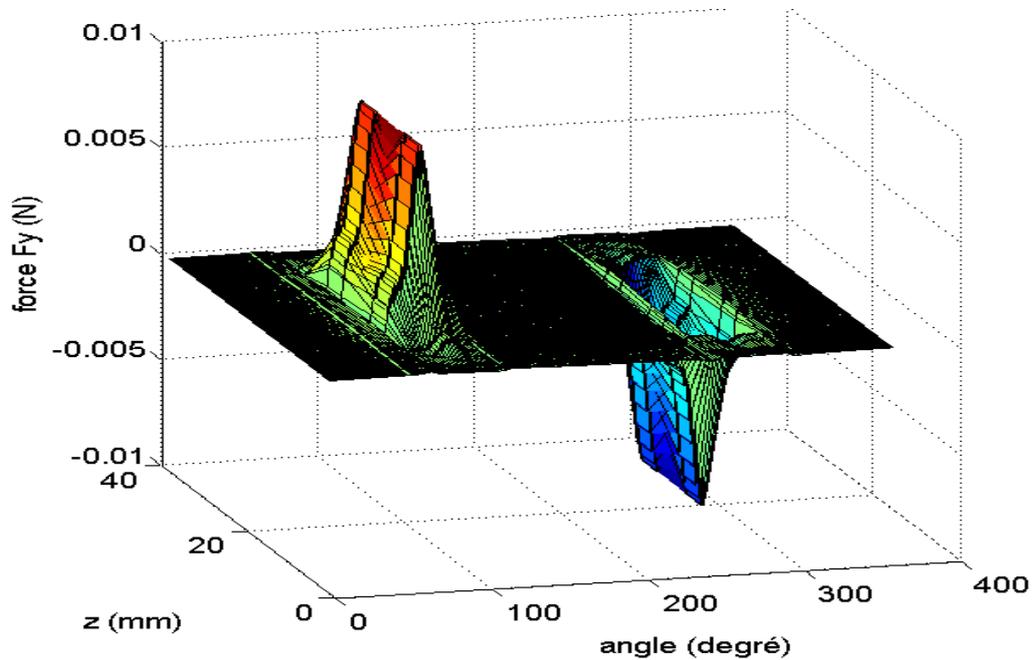


Fig. IV. 46. Variation de la composante  $F_y$  de la force magnétique sur le périmètre du rotor

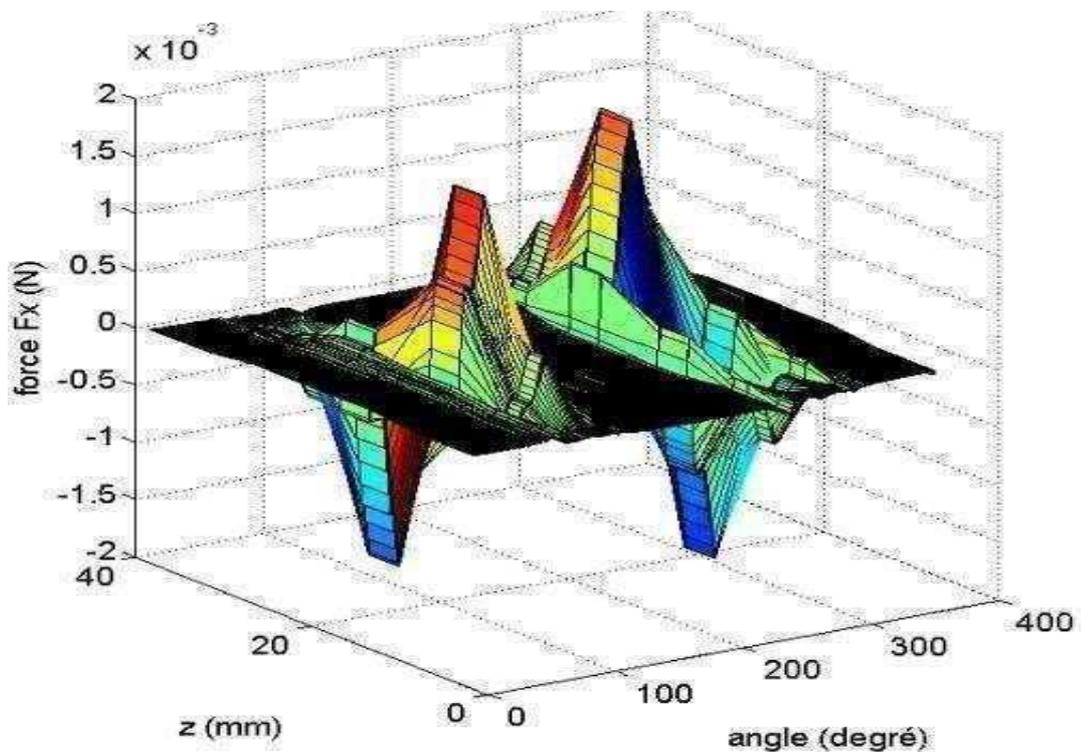


Fig. IV. 47. Variation de la composante  $F_x$  de la force magnétique sur le périmètre du rotor

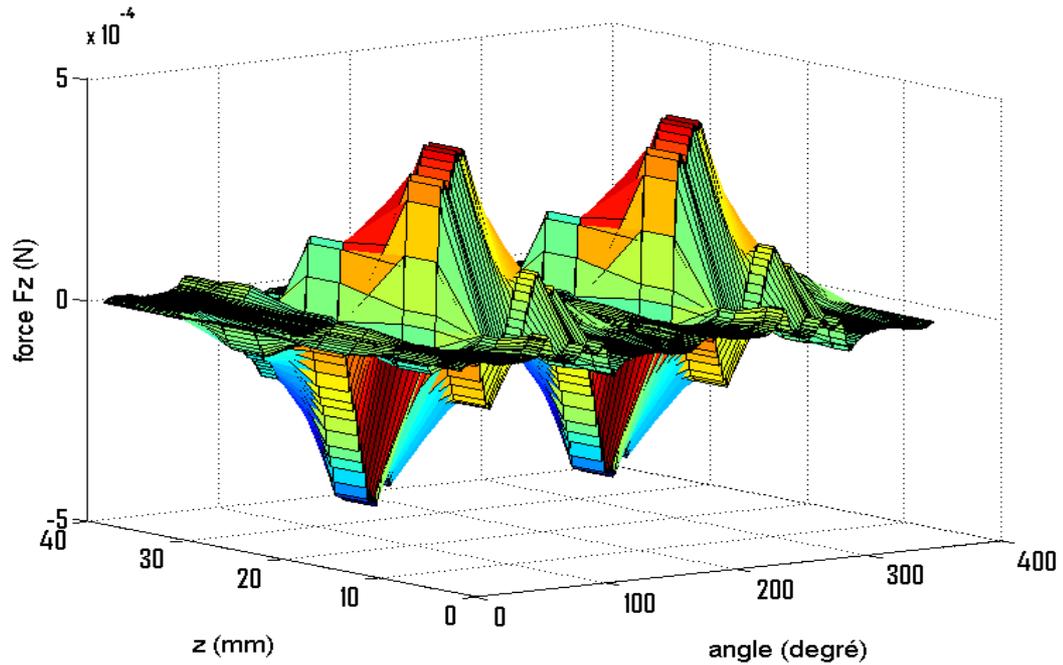


Fig. IV. 48. Variation de la composante  $F_z$  de la force magnétique sur le périmètre du rotor

### Conclusion

Les étapes de calcul effectués pour les cas de paliers actif et passif ont montré les mêmes variations des grandeurs électromagnétiques dans le dispositif étudié.

La différence entre les deux cas réside dans les valeurs qui dépendent directement du courant d'excitation pour le palier actif et de l'aimantation pour le cas passif. Une meilleure qualité des résultats peut être obtenue par une amélioration de la qualité du maillage.

#### IV. 2. 1. Palier magnétique hybride à 8 pôles

L'objectif de ce travail est l'étude de la suspension d'un rotor par palier magnétique hybride dans le cas 3D. Le choix du palier hybride est basé sur l'exploitation des avantages de chaque type de palier, possibilité de contrôle pour le palier actif et pertes négligeables pour le palier passif.

Selon les résultats obtenus précédemment (paliers actif et passif à 2 pôles), la force magnétique est maximale au centre des pôles du palier. De cela, et afin d'avoir une distribution quasi homogène de la force sur le périmètre du rotor et qui conduit à une meilleure stabilité de ce dernier, on propose par exemple une couverture alternée de pôles actifs et passifs le long du périmètre du rotor. Le nombre des pôles ainsi que la manière d'alternance doivent être choisis d'une manière optimale.

D'après l'étude comparative 2D effectuée sur plusieurs types de paliers, actif, passif et hybride [64], on a trouvé que le palier magnétique hybride à 8 pôles (4 pôles actifs et 4 pôles passifs) présente les avantages suivants :

- Dans la configuration étudiée, on peut générer quatre forces (égale au nombre des aimants) importantes par les aimants permanents capables d'assurer un bon centrage du rotor. L'addition des autres 4 pôles actifs (électroaimants) permet de générer d'autres forces supplémentaires contrôlables permettant à la fois de renforcer la stabilité du rotor et la correction de sa position en cas d'une excentricité suivant l'un ou les deux axes x et y.
- Le second avantage est que dans cette configuration, les deux degrés de liberté des axes x et y sont découplés. On peut concevoir un circuit de contrôle qui agit d'une manière indépendante pour chaque axe. C'est-à-dire, s'il y a une excentricité du rotor suivant l'axe des x on peut la corriger par l'action sur les pôles situés sur l'axe x sans toucher aux pôles situés sur l'axe y.

Dans notre cas et afin d'estimer les effets des extrémités et têtes des bobines sur les résultats 2D (dispositif supposé de longueur infini), on va procéder à une étude 3D du palier prédéfini.

Dans la limite de réalisation de ce travail, l'étude va être focalisée sur le calcul de la cartographie du champ ainsi que la force appliquée par le palier sur le rotor à centrer.

#### a) Distribution de l'induction magnétique dans le dispositif étudié

La distribution de l'induction magnétique dans le dispositif étudié est montrée dans la figure suivante :

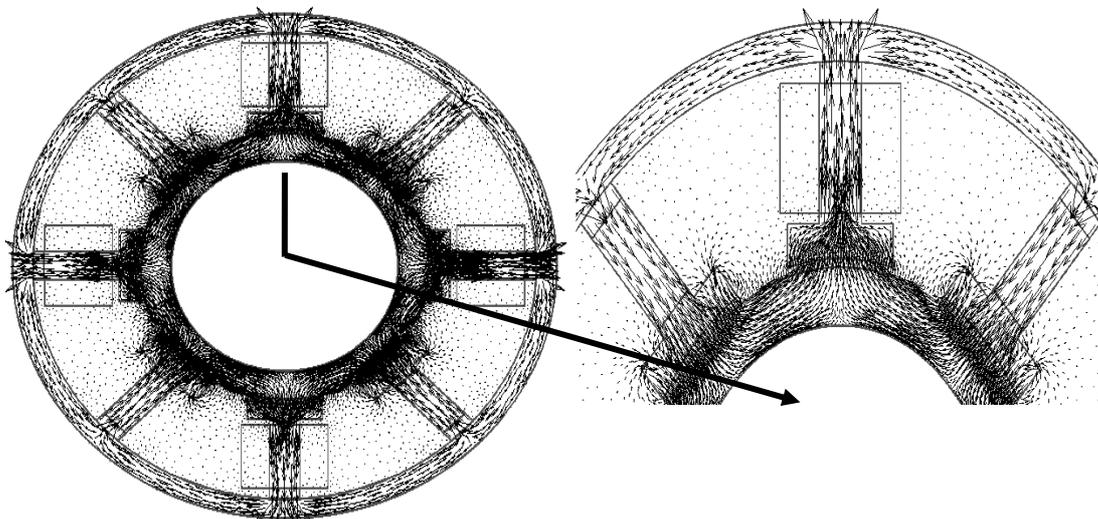


Fig. IV. 49. Distribution de l'induction magnétique dans le plan de symétrie longitudinale  $z=20$  du dispositif étudié.

Pour montrer la qualité de l'induction magnétique de laquelle dépend la force magnétique, on présente les variations de l'induction magnétique sur le périmètre du rotor (voir Fig. IV. 50 et Fig. IV. 51).

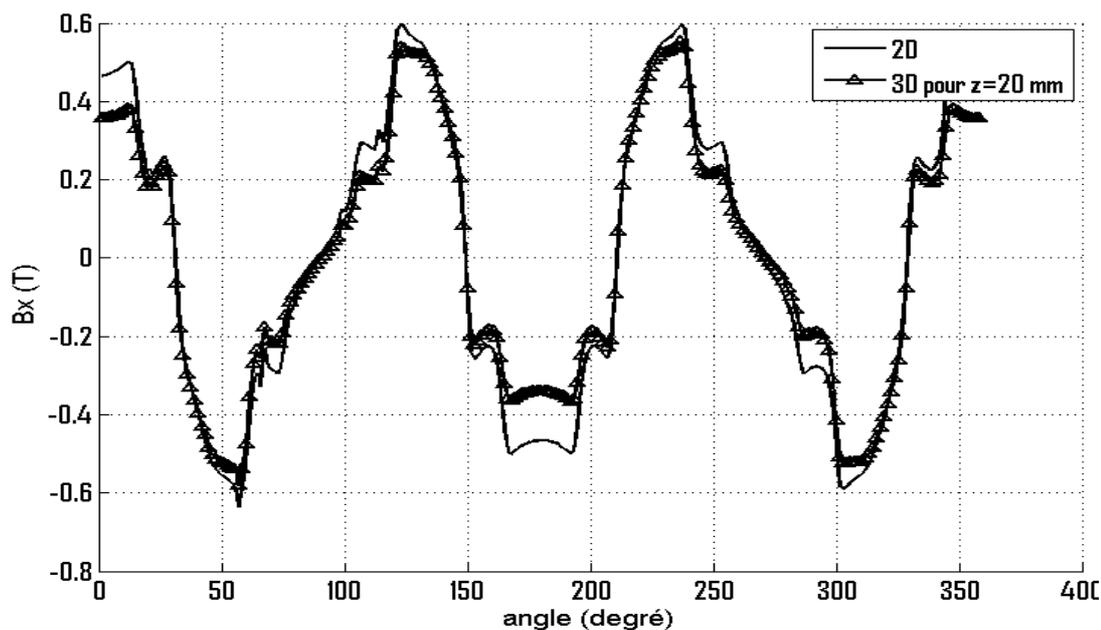


Fig. IV. 50. Variation de  $B_x$  sur le périmètre du rotor au niveau du plan de symétrie longitudinale.

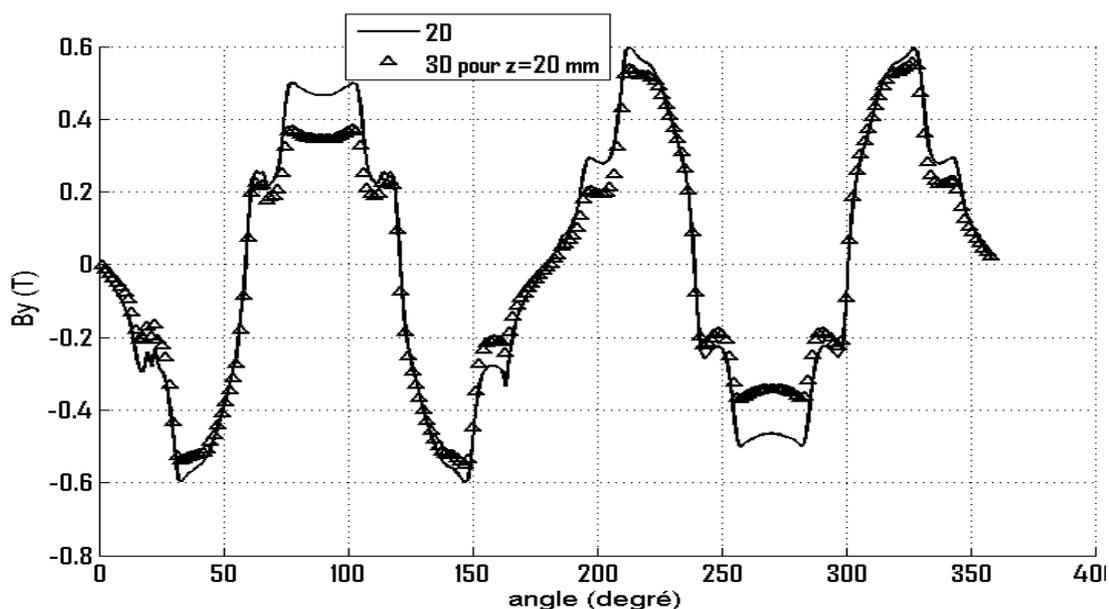


Fig. IV. 51. Variation de  $B_y$  sur le périmètre du rotor au niveau du plan de symétrie longitudinale.

De point de vue qualité du champ, on voit des figures ci-dessus, qu'une induction magnétique presque homogène sur le périmètre du rotor peut être obtenue par augmentation du nombre de pôles.

L'importance de l'induction sous les pôles aimants permanents par rapport au électroaimant est réduite tout simplement à la valeur de l'aimantation  $B_r$  choisie la même pour tous les aimants.

Une distribution homogène sous les pôles peut être obtenue par un choix optimal du courant d'excitation et de l'aimantation des aimants permanents.

Pour montrer le changement important de l'induction magnétique suivant la profondeur du palier et qui exige une étude 3D pour aboutir à des résultats plus valables, on présente les variations de l'induction magnétique sur le périmètre du rotor dans trois plan différents, plan de la face où  $z=12\text{mm}$ , plan de symétrie longitudinale et le plan où  $z=28\text{mm}$  (voir Fig. IV. 52 et Fig. IV. 53).

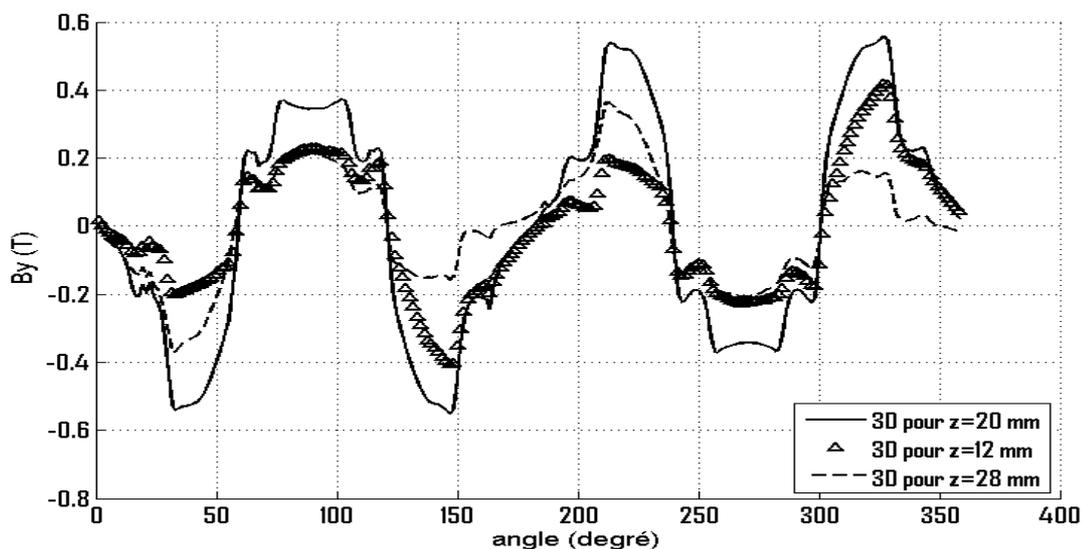


Fig. IV. 52. Variation de  $B_y$  sur le périmètre du rotor pour les cas 3D dans le plan de symétrie longitudinale  $z=20\text{ mm}$  et dans les plans avant et arrière respectivement  $z=12\text{ mm}$  et  $z=28\text{ mm}$ .

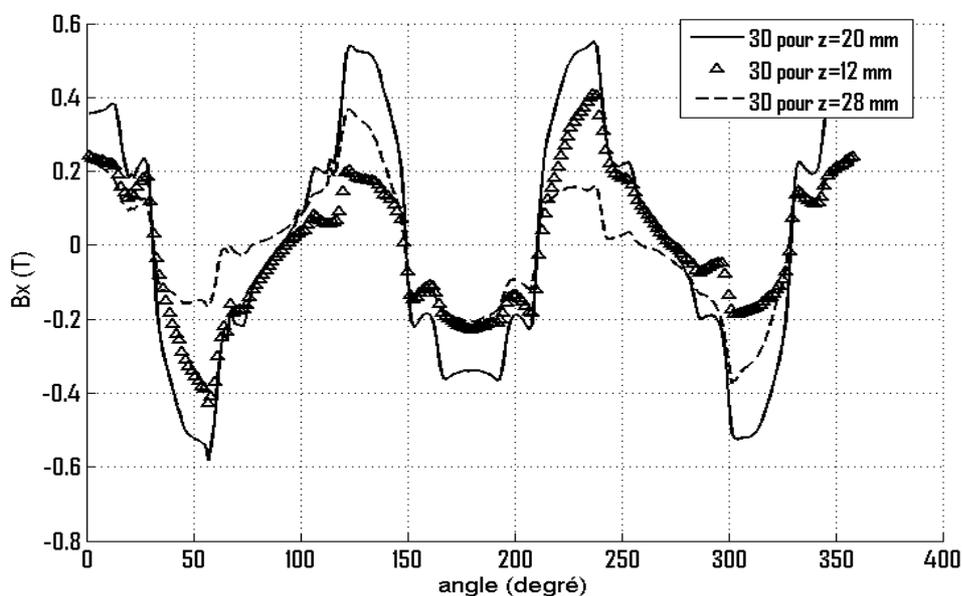


Fig. IV. 53. Variation de  $B_x$  sur le périmètre du rotor pour les cas 3D dans le plan de symétrie longitudinale  $z=20\text{ mm}$  et dans les plans avant et arrière respectivement  $z=12\text{ mm}$  et  $z=28\text{ mm}$ .

Après avoir évalué et analysé la distribution du champ, on procède maintenant au calcul de la force magnétique dans la configuration considérée.

**b) Force magnétique**

La force magnétique produite et appliquée par le palier sur le rotor dans la configuration considérée est montrée dans la figure suivante :

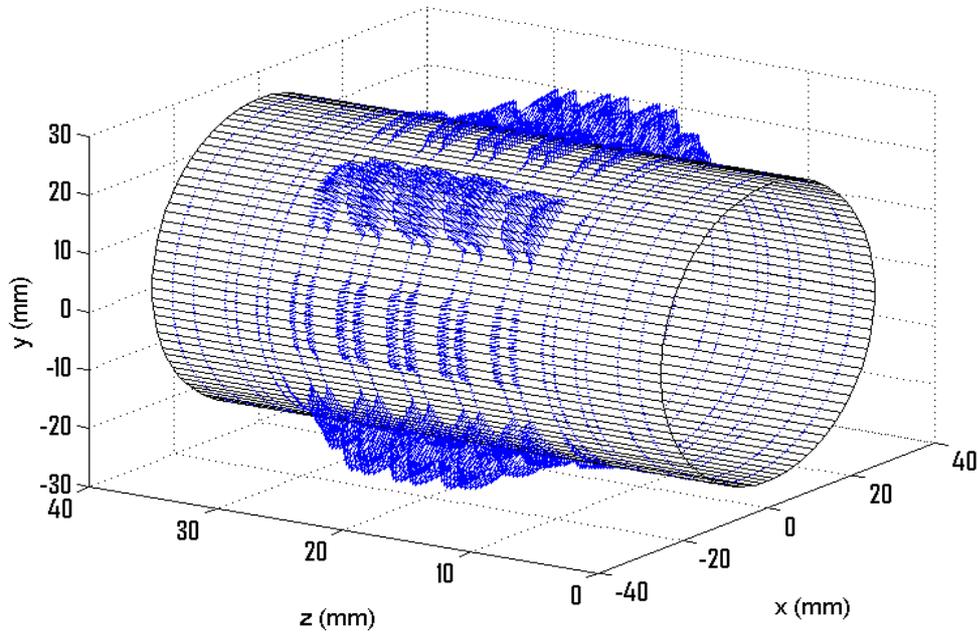


Fig. IV. 54. Force magnétique  $\vec{F}$  appliquée par le palier hybride à 8 pôles sur le rotor.

Pour une bonne présentation de la force qui montre l'importance action des aimants par rapport aux électroaimants, on fait une projection transversale de la figure précédente (3D) qui nous ramène bien sure au plan de symétrie longitudinal situé au centre des pôles (voir Fig. IV. 55).

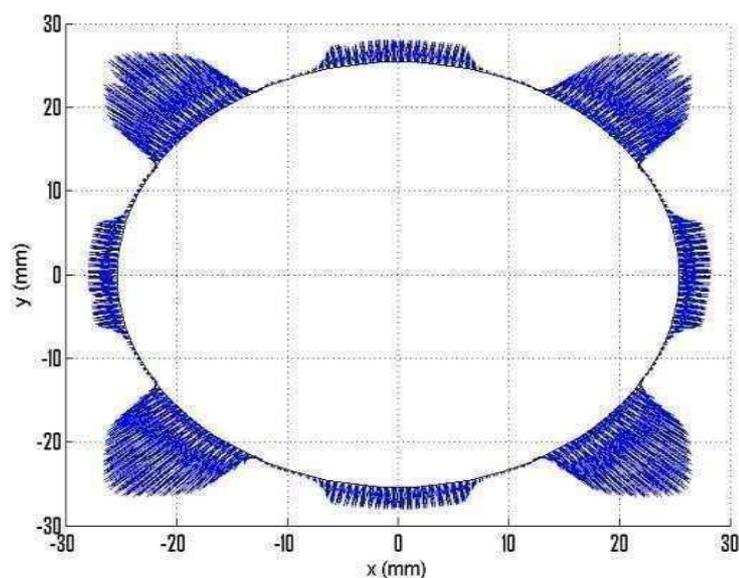


Fig. IV. 55. projections transversale de la force magnétique.

Pour voir comment la force varie le long du rotor, on présente la projection longitudinale de la figure (3D) précédente (voir Fig. IV. 56).

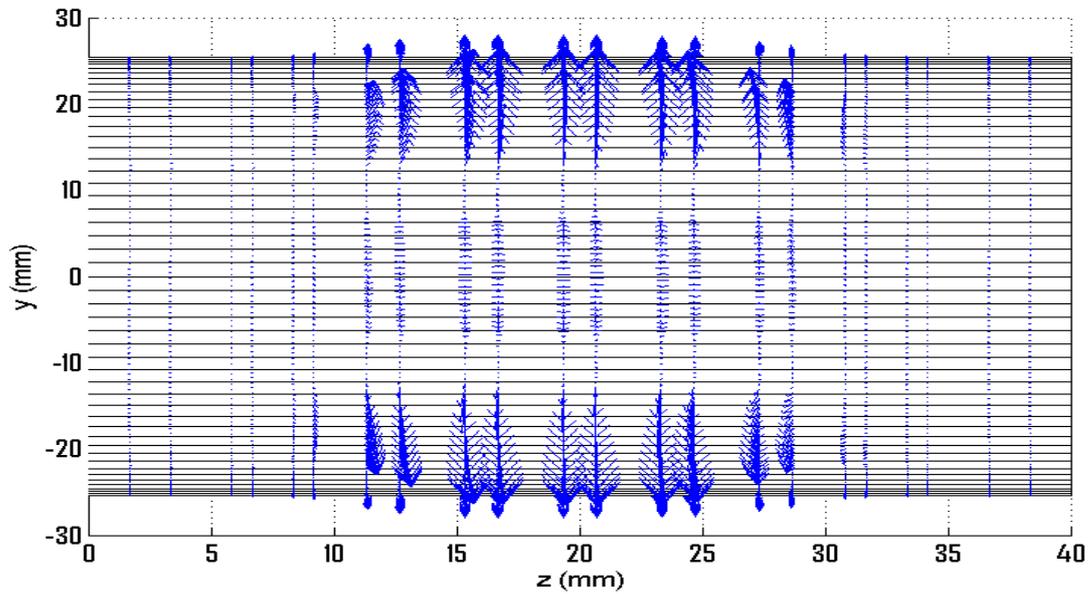


Fig. IV. 56. projections longitudinale de la force magnétique.

Pour montrer les variations quantitatives de la force magnétique sur le périmètre du rotor, on présente les allures 3D des 3 composantes de la force magnétique.

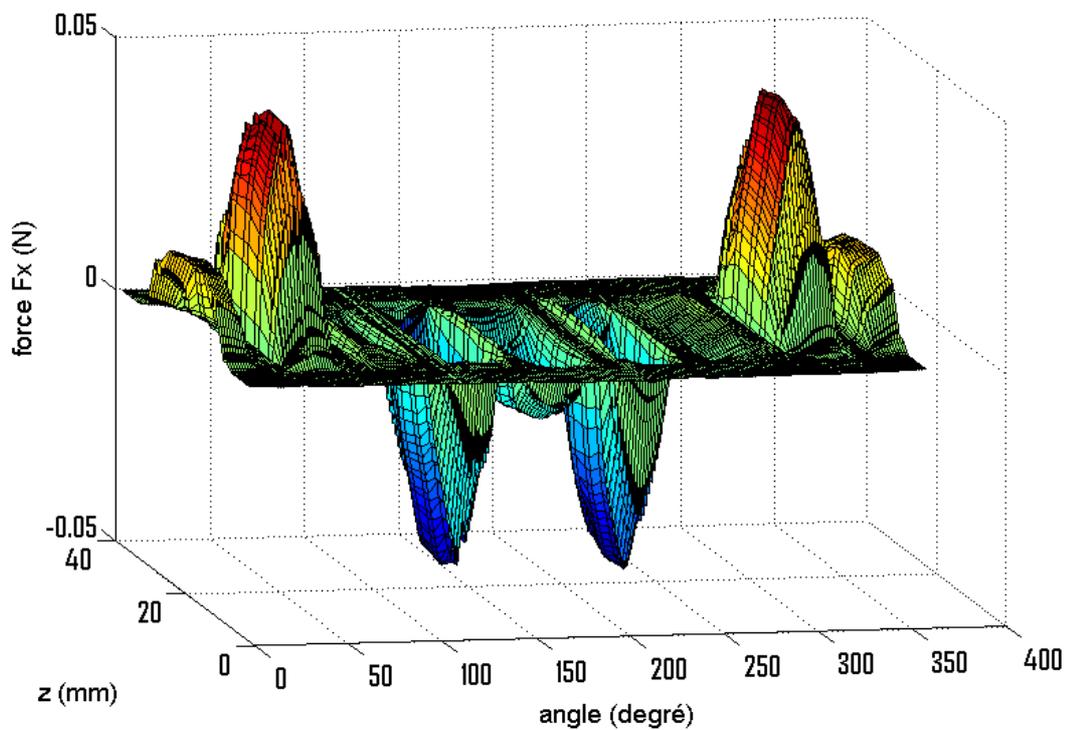


Fig. IV.57. Variation de la composante  $F_x$  de la force magnétique sur le périmètre du rotor

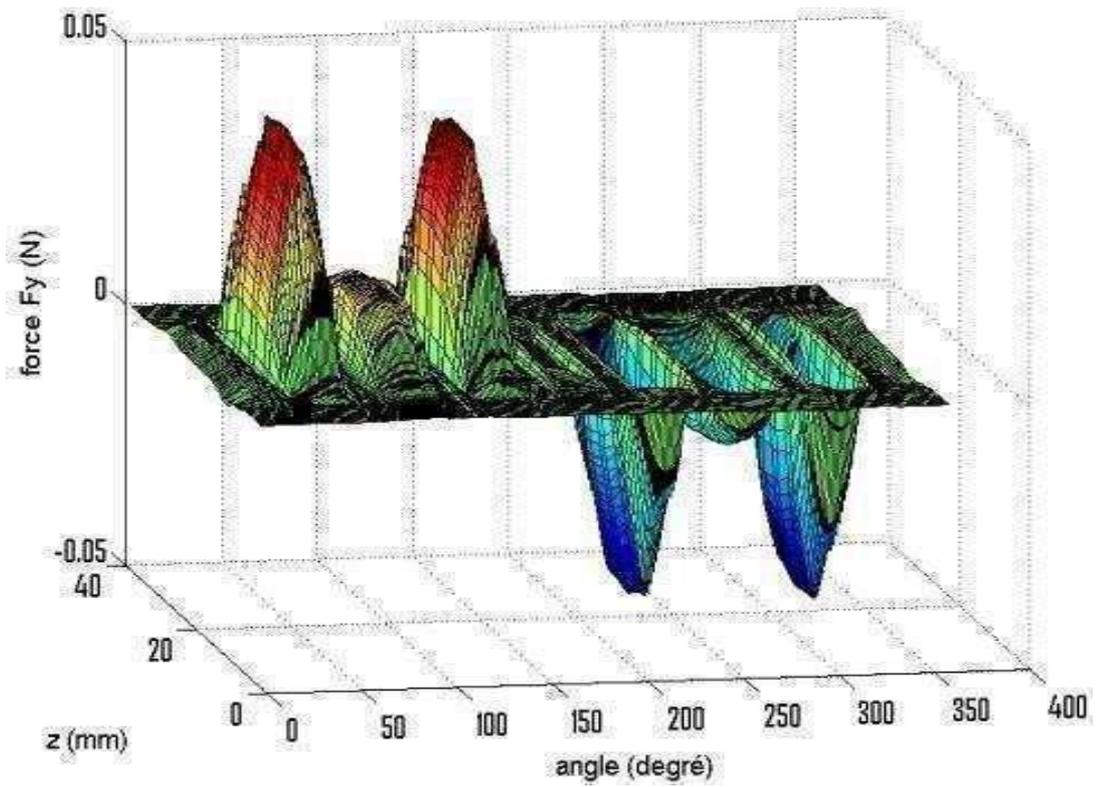


Fig. IV. 58. Variation de la composante  $F_y$  de la force magnétique sur le périmètre du rotor

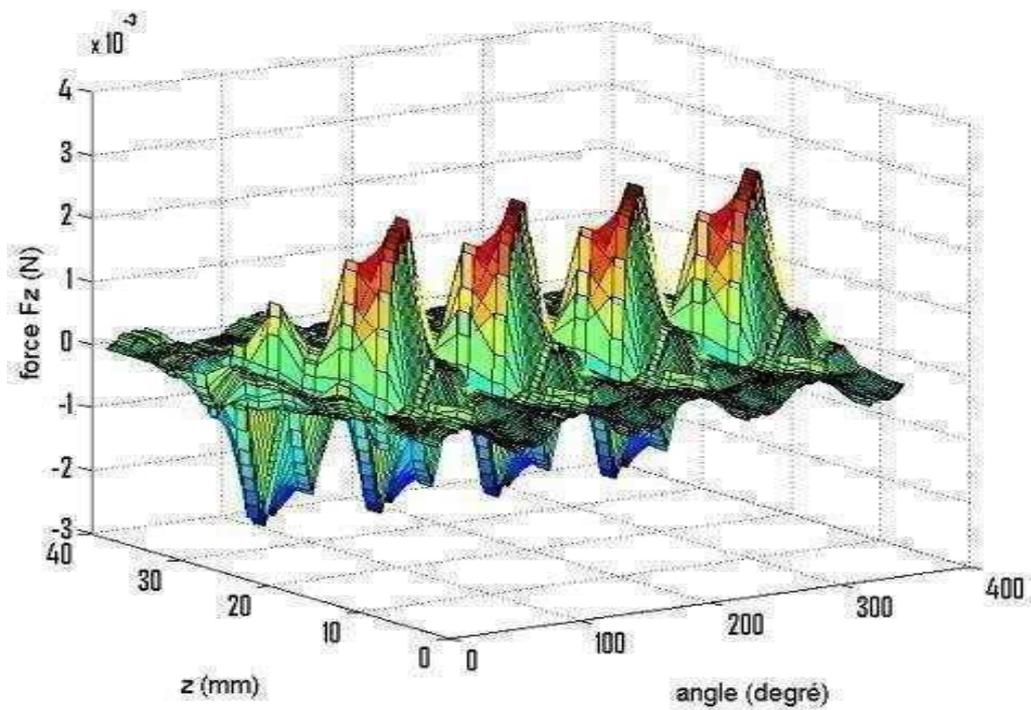


Fig. IV. 59. Variation de la composante  $F_z$  de la force magnétique sur la surface du rotor.

Pour une lecture plus claire des résultats de la figure cidessus, on présente les variation des deux composantes  $F_x$  et  $F_y$  dans le plan de symétrie longitudinale et la composante  $F_z$  dans les plans des deux faces avant et rrière du rotor.

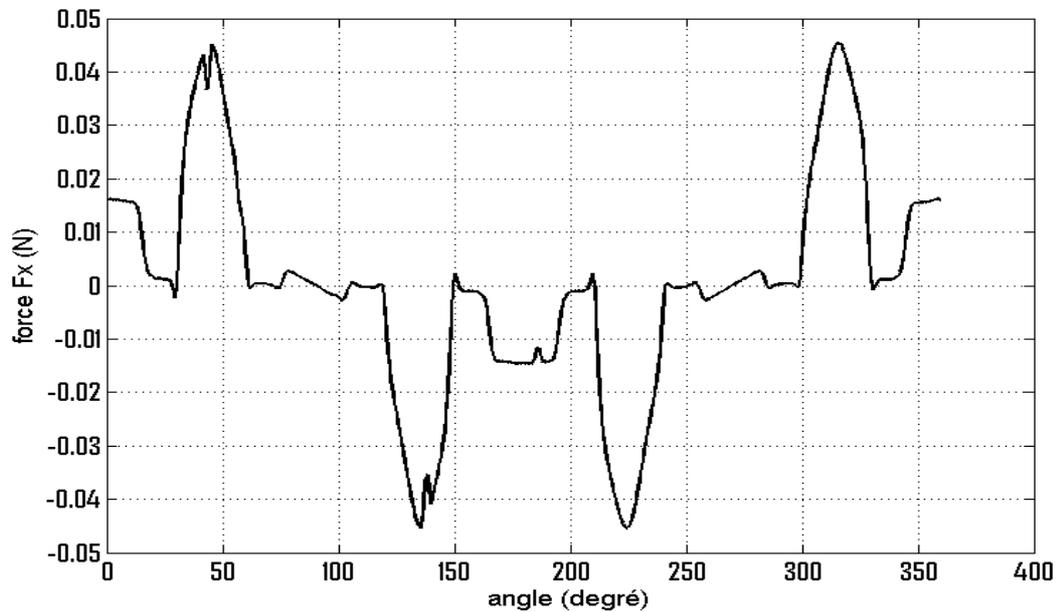


Fig. IV. 60. Variation de la composante  $F_x$  de la force magnétique dans le plan de symétrie longitudinale du rotor.

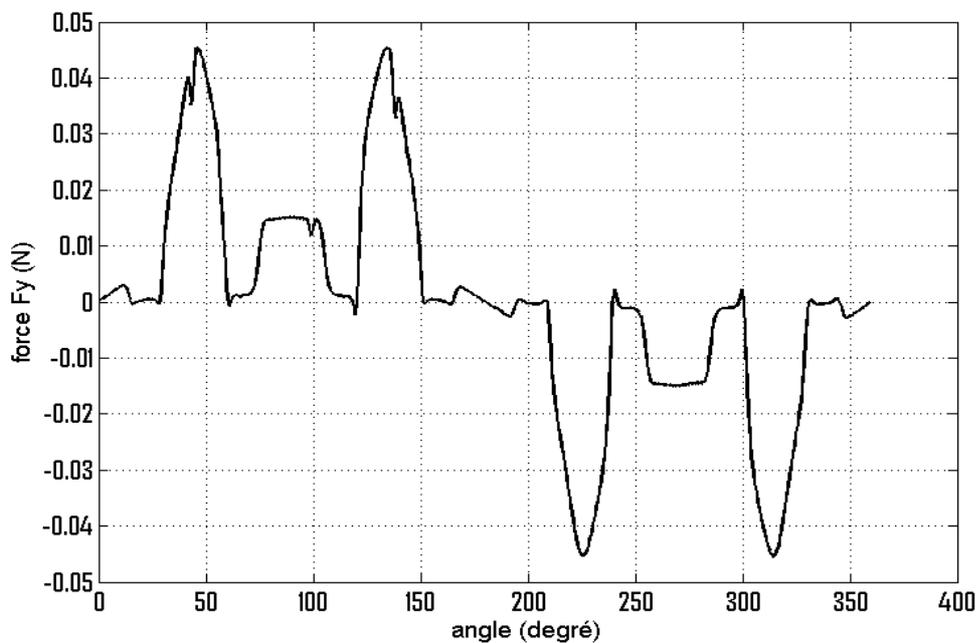


Fig. IV. 61. Variation de la composante  $F_y$  de la force magnétique dans le plan de symétrie longitudinale du rotor.

Selon les figures, on voit que la force est plus important au-dessus des pôles.

Pour voir la qualité de la force et donc la qualité de la suspension au niveau des extrémités du rotor, on présente les variations de la force avant et arrière du rotor.

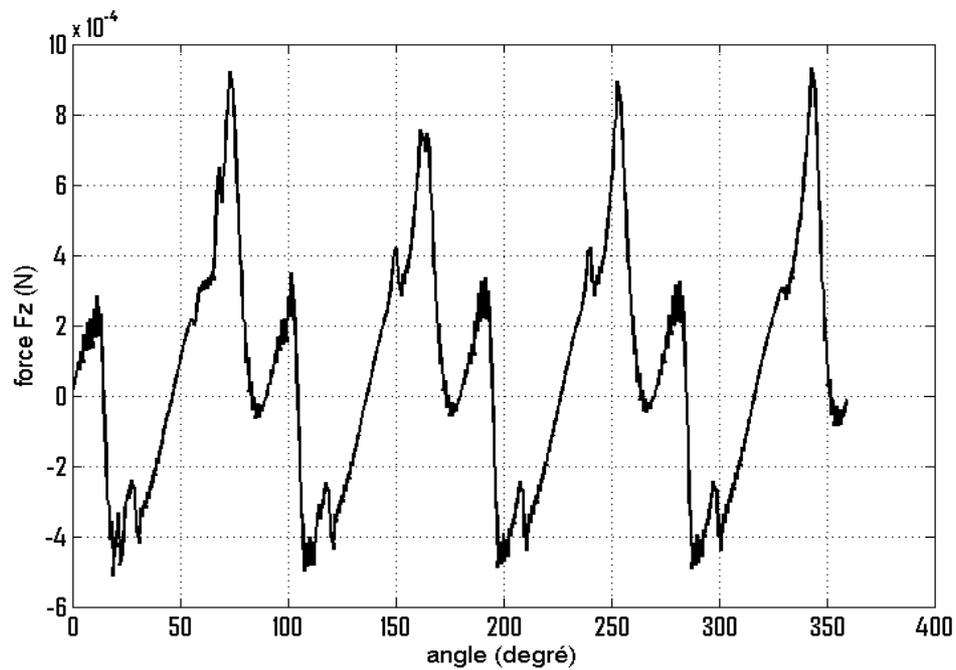


Fig.

IV. 62. Variation de la composante  $F_z$  sur le périmètre du rotor dans le plan de la face avant.

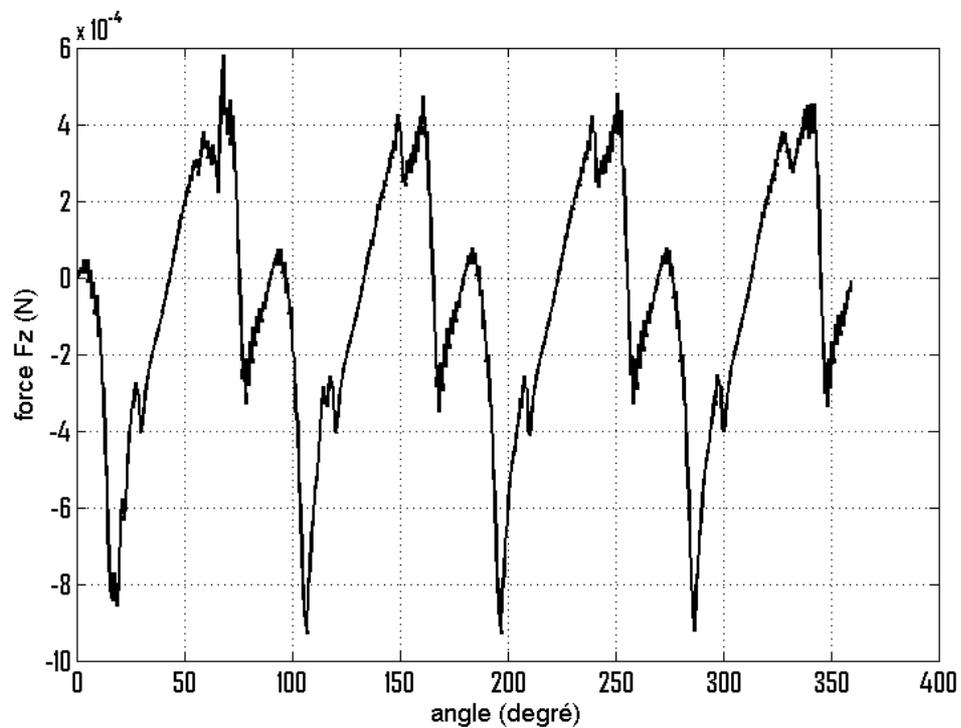


Fig. IV. 63. Variation de la composante  $F_z$  sur le périmètre du rotor dans le plan de la face arrière.

Les résultats précédents montrent que l'attraction appliquée par le palier diminue à chaque fois on s'éloigne du centre du palier vers les deux extrémités du rotor. Cela conduit à une suspension non homogène le long de la longueur du rotor, ce qui conduit à l'instabilité de la suspension et donc à d'éventuelles vibrations.

**Conclusion :**

L'étude 3D nous a permis de connaître la réalité de la distribution de la force magnétique sur le rotor ce qu'on n'a pas pu l'avoir par l'étude 2D. Une telle étude (cas de palier hybride à 8 pôles) a été réalisée pour une discrétisation de la géométrie en 839590 éléments tétraédriques à 4 nœuds, ce qui a donné un nombre de nœuds égale à 164700. Pour les 3 composantes de l'inconnu à chaque nœud, on calcul en total  $164700 \times 3$  inconnus, ce qui a nécessité un temps de résolution d'environ 30 heures qui est jugé comme un inconvénient de notre code de calcul.

Pratiquement, pour aboutir à des résultats meilleurs, on travaille avec des maillages de plus de 500000 nœuds nécessitant un très grand espace mémoire (4 GO de RAM).

Une meilleure qualité de la force en terme valeur peut être obtenue par amélioration de la qualité du maillage en intensifiant le maillage primaire 2D et l'augmentation du nombre de couche suivant « z ». Les perturbations qui apparaissent dans les figures qui présentent les variations de la force sont réduites au raffinement aléatoire généré automatiquement dans le maillage 2D.

Tous ces inconvénients précédés vont être traité par optimisation du code de calcul développé en terme de qualité de maillage, processus de résolution et exploitation du mémoire du calculateur.

---

---

## ***CONCLUSION GÉNÉRALE***

---

---

## Conclusion Générale

Dans ce travail de magister nous nous sommes intéressés à l'étude d'un problème de suspension de rotors par paliers magnétiques. Une telle étude a concerné le calcul du problème électromagnétique dans différentes configurations et types de paliers magnétiques, actif, passif et hybride. La focalisation de l'étude sur le problème magnétique est justifiée par le fait que la clé de toute étude des paliers (dimensionnement, optimisation ou réalisation d'un contrôle) peut être la capacité de charge du palier (force magnétique maximale générée et appliquée par le palier) qui dépend directement et fortement de la cartographie du champ dans le dispositif traité.

Notre contribution ici est le calcul numérique 3D du phénomène magnétique dans les cas de paliers précités. Il s'agit du calcul de la cartographie du champ électromagnétique et l'évaluation de la force magnétique par laquelle le palier agit sur le rotor à suspendre (à centrer). Pour permettre ce calcul, nous avons développé un code de calcul numérique éléments finis 3D capable de prendre en charge différentes configurations et type de paliers magnétiques radiaux (circulaires) par génération automatique de géométries. Notre code se compose principalement d'un maillage éléments finis 3D, d'un solveur et d'un module d'exploitation.

Le maillage sert à générer le maillage éléments finis 3D sur la base d'éléments tétraédriques linéaires par extension par couches d'un maillage de base 2D dans le calcul on figure les particularités transversales du dispositif étudié. Pour les particularités longitudinales du dispositif, il s'agit de distinguer entre les différentes parties du dispositif par affectation des propriétés physiques de chaque milieu.

Le solveur qui est le module central du code développé sert à résoudre l'équation EDP qui gouverne le problème en question. Il assure le calcul des systèmes algébriques élémentaires, leur assemblage, le traitement du système algébrique global selon les conditions aux limites imposées et à la fin la résolution du système algébrique résultant. Pour prendre en compte les particularités de ce système (nature de la matrice de rigidité globale) et dépasser les difficultés de résolution (problème de l'espace mémoire et temps de calcul) nous avons utilisé la méthode de résolution GMRES.

Pour l'exploitation des résultats, il s'agit de l'évaluation de la force magnétique appliquée par le palier sur le rotor à centrer. Afin de prévoir les performances du centrage et les chances de stabilité du système, on calcule la distribution de la force magnétique dans tout le milieu du rotor ce qui permet à la fois de connaître l'intensité et la direction de la force à chaque point de ce dernier (rotor). Pour cela, nous avons utilisé la méthode de tenseur de Maxwell surfacique où la surface d'intérêt est celle au niveau de laquelle il y a interaction entre le palier et le rotor.

Avant de mettre en œuvre notre code de calcul pour les cas de paliers proposés, nous l'avons validé par un calcul du champ électromagnétique dans des géométries simples et la

comparaison des résultats avec ceux obtenus dans le cas 2D (ici on a pris les spécifications de chaque cas).

Pour les résultats qui concernent le calcul de la force, nous avons comparé nos résultats avec ceux trouvés par d'autres auteurs pour un cas simple de lévitation magnétique.

Après l'étape de validation, nous avons procédé au calcul de la distribution de la force magnétique pour les cas de paliers actif à 2 pôles (2 électroaimants) et passif à 2 pôles (2 aimants permanents) et hybride à 8 pôles (4 électroaimants et 4 aimants permanents). L'analyse des résultats obtenus a montré une concordance qualitative acceptable en comparaison avec les cas similaires trouvés dans la littérature. L'handicap majeur qui nous a empêché d'aboutir à des résultats meilleurs est l'impossibilité d'atteindre des finesses suffisantes des maillages 3D et cela à cause de l'espace mémoire disponible et le temps très important de calcul (nombre de nœuds important pour un nombre réduit de couche d'une part et le calcul en même temps des trois composantes de l'inconnu d'autre part).

L'avantage majeur de notre code de calcul est la possibilité d'extension de ces modules pour prendre en compte toutes les particularités des paliers magnétiques rotatifs et notamment les problèmes de la saturation (implémentation des codes déjà développés pour le cas 2D) et du problème de l'échauffement.

Comme nous l'avons mentionné au départ, notre objectif à travers l'étude de la suspension des rotors par paliers magnétiques rotatifs est de réunir toutes les conditions qui permettent un fonctionnement fiable du système de suspension. De cela, on conclut immédiatement qu'il est impératif d'améliorer les différentes composantes du code de calcul développé pour réduire le coût des opérations et hausser la qualité des résultats obtenus. Les perspectives de ce travail sont multiples. Après l'amélioration du code de calcul, on procèdera à l'optimisation du palier magnétiques hybride à 8 pôles proposé (dimensionnement, nombre et alternance des pôles actifs et passifs, possibilité d'addition d'aimantation homopolaire qui peut renforcer la stabilité longitudinale du rotor, ...), calcul des paramètres desquels dépend la conception du circuit de contrôle (le gain du courant et la raideur de position), prise en compte du problème de la saturation, traitement du problème d'échauffement, la conception et la réalisation du contrôle de la suspension de rotor par paliers magnétique.

---

---

## ***RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES***

---

---

## Références

- [01] M. BOUKALLEL, “Etude, conception et réalisation d’un capteur de micro et nano-forces”, Thèse de doctorat, laboratoire de Besançon, Décembre 2003.
- [02] F. MOON, “Superconducting levitation: Applications to bearings and magnetic transportation”, Wiley-VCH, 2004.
- [03] H. Bleuler, M. Cole, P. Keogh, R. Larsonneur, E. Maslen, R. Nordmann, Y. Okada, G. Schweitzer, A. Traxler, “Magnetic; Bearings Theory, Design, and Application to Rotating Machinery”, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.
- [04] L. Burdet, “active magnetic bearing design and characterization for high temperature applications”, Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Septembre 2006.
- [05] A. Chiba, T. Fukao, O. Ichikawa, M. Oshima, M. Takemoto et D. G. Dorrell, “Magnetic bearings and Bearingless Drives”, Elsevier. 2005.
- [06] F. Betschon, “Design principles of Integrated Magnetic Bearings”. Doctor of Technical Sciences, Swiss Federal Institute of Technology, 2000.
- [07] F. FAURE, “Suspension magnétique pour volant d’inertie”, Thèse de Doctorat, Université de Grenoble. 2003.
- [08] D. Yueqin and X. Yanliang, “A new hybrid-type permanent magnet biased magnetic bearing with rotor magnet”, J. Shandong Univ., vol. 34 no. 4, pp. 46–50, 2004.
- [09] G. Schweitzer, H. Bleuler, and A. Traxler, “Active magnetic bearings basics properties and applications”, Verlag der Fachvereine (vdf), pp. 48–60, Aug. 1994.
- [10] V. Babuska, S. M. Beatty, B. J. deblonk, and J. L. Fausz, “A review of technology developments in flywheel attitude control and energy transmission systems”, in Proc. IEEE Aerospace Conf., vol. 4, Mar. 2004, pp. 2784–2800.
- [11] <http://www.patentstorm.us>. Three axis force actuator for magnetic bearing. 1998.
- [12] <http://www.s2m.fr/index.html>.
- [13] J-P YONNET, “Etude des paliers magnétiques passifs”, Thèse d’Etat, INP Grenoble, Juillet 1980.
- [14] R. Moser, J. Sandtner, and H. Bleuler, “Optimization of Repulsive Passive Magnetic Bearings”, IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, vol. 42, n° 8, AUGUST 2006.
- [15] A. V. Filatov, H. Maslen, A. V. Filatov, and E. H. Maslen, “Passive magnetic bearing for flywheel energy storage systems”, IEEE Ttrans. Magn., vol. 37, n° 6, pp. 3913–3924, Nov. 2001.

- [16] K. Davey and T. Morris, “Passive Magnetic Bearing System for Translation or Rotation”, U.S. Patent 5 481 146, Jan. 2, 1996.
- [17] P. A. Basore, “Passive stabilization of flywheel magnetic bearings” .Ph.D. thesis, Massachusetts Inst. Technol., Cambridge, 1980. 1980-21.
- [18] A. V. Filatov and E. H. Maslen, “Passive magnetic bearing for flywheel energy storage systems”, IEEE Trans. Magn., vol. 37, n° 6, pp. 3913–3924, Nov. 2001.
- [19] J-P YONNET, “ Etude des centreurs à réductance variable ”. Rapport interne, Laboratoire d’Electrotechnique de Grenoble, Mai 1977.
- [20] M. R, L. P.Wang, L. J. Qin and T. Barry, “Continuous Time System Identification of Magnetic Bearing Systems Using Frequency Response Data”, in Proceedings of 5th Asian Control Conference, Melbourne, Australia, July 2004, 2066.2072.
- [21] R. Larsonneur, “Design and control of active magnetic bearing systems for high speed rotation”, Diss. ETH Zurich n° 9140, 1990.
- [22] Jeorey D. Lindlau and Carl R. Knospe, “Feedback Linearization of an Active Magnetic Bearing With Voltage Control”, IEEE Transactions on control system technology, vol. 10, n° 1, Jan. 2002.
- [23] G-R. Duan, Senior Member, IEEE, Zhan-Yuan Wu, Chris Bingham, Member, IEEE, and David Howe, “Robust Magnetic Bearing Control Using Stabilizing Dynamical Compen-sator”, IEEE Transactions on Industry applications, vol. 36, n° 6, Nov/Dec. 2000
- [24] Guang-Ren Duan and David Howe, “Robust Magnetic Bearing Control via Eigen-structure Assignment Dynamical Compensation”, IEEE Transactions on control system technology, vol. 11, n° 2, Mar. 2003.
- [25] Zi-Jiang Yang, Kouichi Miyazaki, Shunshoku Kanae, Member, IEEE, and Kiyoshi Wada, Member, IEEE, “Robust Position Control of a Magnetic Levitation System via Dynamic Surface Control Technique”, IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 51, n° 1, Feb 2004.
- [26] X. Yanliang, D. Yueqin, W. Xiuhe, and K. Yu , “Analysis of Hybrid Magnetic Bearing With a Permanent Magnet in the Rotor by FEM”, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 42, n° 4, April 2006 .
- [27 ] M. Nakagawa, Y. Asano, A. Mizuguchi, A. Chiba1, C. Xuan, M. Ooshima, M. Takemoto, T. Fukao, Fellow, IEEE, Osamu Ichikawa, and David G. Dorrell “Optimization of Stator Design in a Consequent-Pole Type Bearingless Motor

- Considering Magnetic Suspension Characteristics”, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 42, n° 10, October 2006.
- [28] R. B. Zmood, L. J. Qin, J. A. Kirk, and L. Sun, “A magnetic bearing system design methodology and its application to a 50 Wh open core flywheel ”, in Proc. 32nd Intersociety Energy Conversion Engineering Conf., vol. 4, 1997, pp. 2306–2311.
- [29] Y. Zhilichev, “Analysis of a magnetic bearing pair with a permanent magnet excitation”, IEEE Ttrans. Magn., vol. 36, n° 5, pp. 3690–3692, Sep. 2000.
- [30] C. R. Knospe, R. W. Hope, S. J. Fedigan, and R. D. Williams, “Experiments in the control of unbalance response using magnetic bearings”, Mechatronics, vol. 5, pp. 385–400, 1995.
- [31] R. Herzog, P. Buhler, C. Gahler, and R. Larsonneur, “Unbalance compensation using generalized notch filters in the multivariable feedback of magnetic bearings”, IEEE Trans. Contr. Syst. Technol., vol. 4, n° 5, pp. 580–586, Sep. 1996.
- [32] F. Matsumura, M. Fujita, and K. Okawa, “Modeling and control of magnetic bearing systems achieving a rotation around the axis of inertia”, in Proc. 2nd Int. Symp. Magnetic Bearings, Tokyo, Japan, Jul. 12–14, 1990, pp. 273–280.
- [33] T. Mizuno and T. Higuchi, “Design of magnetic bearing controllers based on disturbance estimation”, in Proc. 2nd Int. Symp. Magnetic Bearings, Tokyo, Japan, Jul. 12–14, 1990, pp. 281–288.
- [34] B. Shafai, S. Beale, P. Larocca, and E. Cusson, “Magnetic bearing control systems and adaptive forced balancing”, IEEE Control Syst. Mag., vol. 14, n° 2, pp. 4–13, Apr. 1994.
- [35] J. Shi, R. Zmood, and L. Qin, “Synchronous disturbance attenuation in magnetic bearing systems using adaptive compensation signals”, Control Eng. Practice, vol. 12, no. 3, pp. 283–290, Mar. 2004.
- [36] J. D. Setiewan, R. Mukherjee, and E. H. Maslen, “Synchronous sensor runout and unbalance compensation in active magnetic bearings using bias current excitation”. Trans. ASME, J. Dyn. Syst., Meas. Control, vol. 124, n° 1, pp. 14–24, 2002.
- [37] B. Polajzer, “Design and Analysis of an Active Magnetic Bearing Experimental System», Thèse de Doctorat, Université de Maribor, Octobre2003.
- [38] M. Necip Sahinkaya and Ahu E. Hartavi Variable Bias Current in Magnetic Bearings for Energy Optimization”, IEEE Transactions on Magnetic, vol. 43, n° 3, March 2007.

- [39] M. Antila, E. Lantto, and A. Arkkio, “Determination of forces and linearized parameters of radial active magnetic bearings by finite element technique”, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 34, n° 3, pp. 684–694, 1998.
- [40] D. Dolinar, G. Stumberger, and B. Gracar, “Calculation of the linear induction motor model parameters using finite elements”, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 34, n° 5, pp. 3640–3643, 1998.
- [41] J-L. Coulomb, “ analyse tridimensionnel du champ électriques et magnétiques par la méthode des éléments finis ”, Thèse de Doctorat, Université de Grenoble, 1981.
- [42] B. Polajzer, G. Stumberger, J. Ritonja, D. Dolinar, “Variations of active magnetic bearings linearized model parameters analyzed by finite element computation”, IEEE Transactions on Magnetics, vol 44, n° 6, pp 1534-1537, 2008.
- [43] D. Cardinaux, “Etude et modélisation numérique 3D par éléments finis d’un procédé de traitement thermique de tôles embouties après chauffage par induction: application à un renfort de pied central automobile”, Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines, 2008.
- [44] T. Son. “ Couplage de la méthode des éléments finis avec la méthode PEEC : application à la modélisation de dispositifs électromagnétiques comprenant de systèmes de conducteurs complexes ”, Thèse de Doctorat, Université JOSEPH FOURIER, 2008.
- [45] J-C. Sabonnadière, J-L Coulomb, “Calcul des champs électromagnétiques”. Techniques de l’ingénieur.
- [46] A. Lefevre, “Contribution à la modélisation électromagnétique et thermique des transformateurs: Application à l’étude de l’échauffement sur charges non linéaires”, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 2006.
- [47] P. Tuan, “ Développement de formulation électromagnétiques éléments finis 3D pour la modélisation des dispositifs en fréquence élevée ”, Thèse de Doctorat, Université de Grenoble, 2006.
- [48] O. Barre, “ contribution à l'étude des formulations de calcul de la force en magnétostatique, approche numérique et validation expérimental ”, Thèse de doctorat, Université de Lille, décembre 2003.
- [49] R. Mehasni, “ Elaboration de modèles de calcul de dispositifs à induction électromagnétique : application à un système de séparation magnétique dans les milieux particuliers ”, Thèse de doctorat, Université de Mentouri-Constantine, Février 2007.
- [50] B. Veit Phuong , “ diagnostic des machine électriques par l’analyse du champs de fuite ”, Thèse de Doctorat, INP Grenoble , octobre 2007.

- [51] D. V. Hutton, “Fundamentals of Finite Element Analysis», McGraw Hill. Inc2004.
- [52] J. Jin, “The Finite Element Method in Electromagnetics ”, John Wiley & Sons, Inc, 2002.
- [53] G. R. Liu S.S Quek, “The Finite Element Method: A Practical Course», Elsevier Science Ltd.2003.
- [54] Y-W. Hwon , H. Bang, “The finite element method using Matlab”, CRC Press .1997.
- [55] J. Pedro A. Bastos, N. Sadowski, “Electromagnetic modelling by finite element methods”, Marcel Dekker, Inc, 2003.
- [56] J-L. Coulomb “ finite element three dimensional magnetic field computation » IEEE trans magn..vol .Mag -17, pp: 3241-3246.Juin 1981
- [57] Alaa A. Hussien<sup>1</sup>, Sotoshi Yamada<sup>1</sup>, Member, IEEE, Masayoshi Iwahara<sup>2</sup>, Associate Member, IEEE, Tomotada Okada<sup>1</sup>, and Takahisa Ohji<sup>3</sup>, Member, IEEE Application of the Repulsive-Type Magnetic Bearing for Manufacturing Micromass Measurement Balance Equipment”, IEEE Tans magn..vol. 41, n° 10, OCTOBER 2005.
- [58] Y.Saad. SPARSKIT: “a basic tool kit for sparse matrix computations”, RIACS, NASA Ames Research Center, 1991.
- [59] S. Petiton. “Data parallel sparse matrix computation on CM2 and CM5 for iterative methods”, University of Minnesota, AHPCRC, 1993.
- [60] B. H. Ashtiani, “Méthodes d'assemblage rapide et de résolution itérative pour un solveur adaptatif en équations intégrales de frontières destiné à l'électromagnétisme”, Thèse de doctorat, Ecole central de Lyon, Mai 1998.
- [61] H. HE. “Analyse avancées de la méthode hybride GMRES/LS-Arnoldi asynchrone parallèle et distribuée pour les grilles de calculs et les supercalculateurs”, Thèse de doctorat, Université de Lille, Juillet 2005.
- [62] MATLAB Source Codes. [http://people.sc.fsu.edu/~burkardt/m\\_src/m\\_src.html](http://people.sc.fsu.edu/~burkardt/m_src/m_src.html).
- [63] R. Mehasni, D. Belharche, M.E Latreche, M. Feliachi “ Analyse of a hybride magnetic bearing based on the computation of the magnetic force appleid on the rotor ”, Colloque National sur l’induction CN’09, Laghouat 14, 15 et 16 avril 2009.