

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université MENTOURI - CONSTANTINE

Faculté des Sciences de l'Ingénieur

Département d'Electrotechnique

N^o d'ordre :

Série :

Mémoire

*Présenté en vue de l'obtention du diplôme de magister
en Electrotechnique*

Option : Commande et modélisation des machines électriques.

Par

Ryma DELIMI

————— ◆ —————
*Méthodes comparées pour le calcul des forces
d'origine électromagnétique.*

Application aux paliers magnétiques
————— ◆ —————

Soutenu le : .../.../ 2008

Devant le jury:

<i>Président :</i>	Aissa BOUZID	Prof. Université de Constantine
<i>Rapporteur :</i>	Med El-Hadi LATRECHE	Prof. Université de Constantine
<i>Examineurs:</i>	Amar BENTOUNSI	M.C. Université de Constantine
	Rabia MEHASNI	Dr Université de Constantine

REMERCIEMENTS

Nous tenons tout d'abord à remercier dieu qui nous a éclairé
le bon chemin au cours de nos vies.

Je tiens, tout d'abord à remercier et exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur monsieur Latreche Mohamed El-Hadi, professeur et vice recteur chargé de la pédagogie à l'Université Mentouri de Constantine, pour les idées qu'il m'a prodiguées, pour l'aide, pour son suivi continu et les conseils qu'il m'a apportés tout au long de ce travail, et pour ses qualités humaines.

A monsieur D. Belahreche, J'exprime toute ma gratitude pour son expérience, son art de la multi compétence, son soutien et ses qualités humaines.

Je tiens à exprimer ma sincère gratitude à monsieur Mehasni Rabia pour l'aide qu'il m'a apportée.

Je remercie tous les membres du jury :

Monsieur **Bouzid Aissa**, Professeur, chef du Département d'Electrotechnique à l'Université de Constantine, pour m'avoir fait l'honneur de présider ce jury.

Mes remerciements vont aussi à l'endroit de messieurs **Amar Bentounsi**, Maître de Conférences à l'Université Mentouri de Constantine, et **Mehasni Rabia**, Docteur à l'Université Mentouri de Constantine de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être les examinateurs de ce mémoire.

Merci à tous mes collègues du laboratoire d'Electrotechnique, à toute la promotion du Magistère, à tous mes amis proche pour le soutien moral qu'ils m'ont apporté. A tous ceux qui m'ont aimé.

A mes chers parents ;

A l'homme de ma vie mon fiancé Kheir Eddine ;

A mes Sœurs et Frères ;

Et à ceux avec qui je partage de bons souvenirs.



SOMMAIRE

SOMMAIRE

<i>Introduction Générale</i>	<i>1</i>
<i>Chapitre I : Méthodes de calcul des forces magnétiques</i>	
Introduction	5
I.1. Méthodes de calcul des forces magnétiques	5
I.1.1. Formulations basées sur les sources équivalentes	6
I.1.2. Formulations basées sur l'approche énergétique	6
I.1.3. Méthodes fondées sur le tenseur de Maxwell	7
I.2. Calcul du champ électromagnétique	7
I.2.1. Equations de Maxwell et relations constitutives	8
I.2.2. Conditions de continuité aux interfaces de séparation	9
I.2.3. Equation magnétostatique bidimensionnelle	11
I.2.4. Conditions aux limites	12
I.2.5. Méthode de résolution des équations aux dérivées partielles	13
I.2.5.1. Méthodes analytiques	13
I.2.5.2. La méthode des éléments finis	14
I.2.5.2.a. Types d'éléments finis	14
I.2.5.2.b. Fonction d'approximation	15
I.2.5.2.c. Formulation Intégrale	16
I.2.5.2.d. Mise en œuvre de la méthode des éléments finis	
Pour un problème magnétostatique	17
I.3. Méthodes des sources équivalentes	19
I.3.1. Cas des courants équivalents	20
I.3.2. Cas des charges magnétiques équivalentes	21
I.3.3. Cas des charges et courants équivalents	22
I.4. Méthodes de la dérivée de l'énergie magnétique	23
I.5. Méthodes des travaux virtuels	26
I.5.1. Principe de la méthode	26
I.5.2. Dérivation de la matrice [K] par rapport aux déplacements virtuels	28
I.5.3. Organigramme de la mise en œuvre de la méthode des travaux virtuels	33

I.6 Méthode du tenseur de Maxwell	35
I.6.1. Méthode du tenseur de Maxwell avec intégration surfacique	35
I.6.2. Méthode du tenseur de Maxwell avec intégration volumique	38
I.6.3. Organigramme de la mise en œuvre de la méthode de tenseur de Maxwell	40
Conclusion	42

Chapitre II : Les paliers magnétiques

Introduction	44
II.1. Les applications des paliers à suspension magnétique	44
II.2. Les différents types de paliers magnétiques	46
II.2.1. Les paliers magnétiques passifs	46
II.2.1.a. Les paliers passifs à aimants permanents	46
II.2.1.b. Les paliers passifs à réluctance variable	47
II.2.2. Les paliers magnétiques actifs	48
II.2.3. Les paliers magnétiques partiellement passifs	49
II.3. Etude statique d'une suspension magnétique	49
II.3.1. Stabilité statique	49
II.3.2. Critères de stabilité statique	50
II.4. Possibilité d'une suspension magnétique	51
II.4.1. Le théorème d'Earnshaw	51
II.4.1.a. Corps à aimantation rigide	51
II.4.1.b. Corps à aimantation non rigide	52
II.4.1.c. Corps conducteur non magnétique	53
II.5. Les classes de suspensions magnétiques	54
II.5.1. Suspension par un champ magnétique statique	55
II.5.2. Suspension par un champ magnétique alternatif	55
II.5.3. Suspension par contrôle du champ magnétique	55
II.5.3.1. Suspension en un seul degré de liberté	56
II.5.3.2. Suspension à plusieurs degrés de liberté	56
II.6. Suspension totalement magnétique:	
stabilisation par palier magnétique actif	56

II.6.1. Ensemble de paliers contrôlant l'axe du rotor	56
Conclusion	58

Chapitre III : Mise en œuvre numérique et validations

Introduction	60
III.1. La solution éléments finis	60
III.2. Calcul de la force magnétique	61
III.2.1. La force globale qui agit sur un palier radial	61
III.2.2. Calcul des distributions de forces	66
III.2.3. L'équilibre statique d'un palier magnétique (rotor immobile)	70
III.3 Etude d'un palier magnétique planaire	72
III.3.1. Variation de la force de guidage et de lévitation en fonction du déplacement de l'électroaimant	73
III.3.2. Optimisation par variation paramétriques d'un palier magnétique	76
III.3.2.1. Méthode utilisée	76
III.3.2.2. Processus de l'optimisation	77
III.3.2.3. Résultats de l'optimisation	78
III.3.2.4. Changement de la valeur de l'entrefer	79
III.3.2.5. Intérêt de l'optimisation	80
Conclusion	81

Conclusion Générale

<i>Annexes</i>	84
----------------	----

<i>Bibliographie</i>	93
----------------------	----



INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

Les phénomènes liés aux déformations des pièces ferromagnétiques qui composent les dispositifs électromagnétiques tels que les moteurs, et les machines électriques en général, font depuis plusieurs années l'objectif de nombreuses recherches.

Ces déformations sont directement liées à la répartition des forces d'origine magnétique. La détermination correcte de ces forces est alors essentielle pour que l'analyse soit la plus fiable possible [1].

Plusieurs méthodes permettent de calculer les forces d'origine magnétique sont proposées dans la littérature, elles sont basées soit sur le concept des sources équivalentes (charges équivalentes, courants équivalents), soit sur le tenseur de Maxwell, ou sur le principe des travaux virtuels et la dérivée de l'énergie.

Plusieurs critères peuvent être considérés comme déterminant dans le choix d'une méthode par rapport à l'autre, ces critères peuvent être la précision, le temps de calcul, ou la facilité d'implémentation dans un code de calcul éléments finis, on peut aussi considérer la possibilité de donner les vraies densités des forces [2].

Le but de notre travail est l'implémentation dans un code élément finis, les différentes démarches pour le calcul des forces d'origine magnétique, pour les comparées sur un plan numérique. Cette mémoire est organisée en trois chapitres.

Le premiers chapitre est consacré à la description des diverses approches qui permettent d'accéder au calcul des forces, qui sont les méthodes basées sur le tenseur de Maxwell et le concept des sources équivalentes, et la méthode des travaux virtuels, et comme ces forces sont en fonction du champ et de l'induction magnétique, nous avons présenté dans ce chapitre la démarche pour calculer ce champ, car c'est une étape très nécessaire avant d'aller vers les codes du calculs des forces électromagnétiques.

Nous avons choisi les paliers magnétiques comme exemple d'application, ces derniers fonctionnent grâce aux interactions magnétiques engendrées entre la pièce mobile et la pièce statique, le deuxième chapitre sera consacré à l'étude de ces dispositifs, nous commençons par citer leurs différents domaines d'applications, et leurs types (actifs et passive), nous passons par la suite à l'étude statiques d'une suspension magnétique (réalisées par des paliers magnétiques) par le biais du théorème de stabilité et puis nous terminons ce chapitre par la réalisation d'une suspension à partir des paliers magnétiques.

Le troisième chapitre est consacré à la mise en œuvre numérique des différentes méthodes. Une comparaison entre ces méthodes est faite. Cette comparaison repose sur plusieurs paramètres tels que le temps de calculs, la précision et la facilité d'implémentation dans un code de calcul éléments finis. Il est montré l'équivalence entre ces méthodes, quant à la force globale (moyennant certaines restrictions concernant le maillage), bien que certaines soient mieux adaptées que d'autre à la méthode des éléments finis. En ce qui concerne la répartition de ces forces données par les divers approches, nous permettant de confirmer l'incompatibilité de certaines de ces formulations quant à la répartition des forces, seules la méthode qui reposent sur le principe physique des travaux virtuels permettent de parvenir des résultats cohérents.

CHAPITRE : I

*MÉTHODES DE CALCUL DES
FORCES MAGNÉTIQUES*

Introduction

Les forces exercées sur les parties mobiles d'un système électromagnétique constituent des grandeurs importantes pour l'étude de son fonctionnement. C'est le cas des forces responsables du couple dans les machines électriques ou des forces qui s'exercent à la surface d'un matériau magnétique. Sous forme globale, ces grandeurs peuvent servir à un couplage avec l'équation mécanique en vue de calcul de la vitesse et du déplacement, au niveau local exprimées en densités de forces, elles servent à prédire les déformations que peut subir le système [3].

Diverses manières d'évaluation de la force globale sur un corps quelconque sont possibles. La détermination de cette force résultante peut se faire avec ou sans connaissance de la répartition des forces à l'intérieur de l'objet, selon qu'on est en présence d'un simple déplacement ou d'une déformation de l'objet en question. Toutefois, les modèles de calcul utilisés donnent chacun leur propre approche à la notion de densité de force.

Théoriquement quelque soit la formulation utilisée pour calculer la force magnétique globale, le résultat est le même. Cependant lorsque ces résultats étant issus de la méthode des éléments finis (solution approchée) diffèrent sensiblement selon la qualité du maillage utilisée pour résoudre le système.

Seules importants les données magnétiques extérieures au matériau, donc les forces magnétiques globales qui agissent sur un matériau donné sont parfaitement définie par la connaissance de la carte du champ.

I.1. Méthodes de calcul des forces électromagnétiques

Plusieurs méthodes permettent le calcul des forces qui agissent sur un matériau ferromagnétique sont citées dans la littérature, ces méthodes sont fondées sur le principe énergétique, le concept des sources équivalentes ou sur le tenseur de maxwell. Ces méthodes constituent un outil simple et efficace pour calculer la force globale [4-9].

Cependant au niveau local chacune des formulations donne une distribution propre pour les forces. Ces distributions de forces sont incompatibles et ne permettent aucune conclusion physique.

I.1.1. Formulations basées sur les sources équivalentes

Ces méthodes reposent sur le fait que l'on peut remplacer le matériau (ou le champ créé par celui-ci) par des distributions volumiques et surfaciques de sources de champ, Ces distributions définissent un équivalent parfait du système, où les données magnétiques sont équivalentes à celle produites par le matériau. Du point de vue extérieur au matériau, les données (champ et induction magnétique) produites par ces modèles sont parfaitement équivalentes à celles du matériau. Cependant, à l'intérieur du matériau, selon le modèle utilisé, le champ ou l'induction est modifié.

Les sources de champ peuvent être soit des courants, soit des charges magnétiques, soit une combinaison de courants et de charges [1], [2], [10-12].

I.1.2. Formulations basées sur l'approche énergétique

L'approche énergétique se fonde sur une application du principe des travaux virtuels. Selon ce principe, la force électromagnétique est déduite à partir de la variation de l'énergie $[(W = W(B))$ ou de la Co-énergie $(\bar{W} = \bar{W}(H))$] du système par rapport à un déplacement virtuels. Il s'agit d'un principe de la physique de base [1], [5], [10], [11], [13].

Reste à utiliser une expression de l'énergie qui représente l'ensemble des grandeurs mises en jeu, sachant que :

$$\bar{W} = \int \left(\int_0^H \vec{B} \cdot d\vec{H} \right) d\Omega \quad (I-1)$$

$$W = \int \left(\int_0^B \vec{H} \cdot d\vec{B} \right) d\Omega \quad (I-2)$$

La dérivation de l'énergie par rapport au déplacement s , introduit sous l'intégrale de volume conduit à l'expression suivante:

$$F_s = \sum_{elements} \left[\int_{D_{e\ local}} \frac{\partial}{\partial s} \left(\int_0^H \vec{B} \cdot d\vec{H} \right) \cdot |\vec{G}| + \left(\int_0^H \vec{B} \cdot d\vec{H} \right) \frac{\partial |\vec{G}|}{\partial s} \right] dD_{e\ local} \quad (I-3)$$

Pour la mise en œuvre de la méthode des travaux virtuels, il faut évaluer la dérivée du déterminant de la matrice Jacobienne, de champ et de l'induction, ce qui rend la mise en œuvre de la méthode difficile [2], [3].

Pour faciliter la mise en œuvre de cette méthode, nous présentons dans la dernière partie de ce chapitre une nouvelle démarche pour appliquer le principe des travaux virtuels, qui consiste à dériver une nouvelle expression de l'énergie qui s'écrit dans ce cas, en fonction des paramètres de la méthode des éléments finis.

L'utilisation de cette nouvelle expression de l'énergie, facilite considérablement la mise en œuvre du principe des travaux virtuels.

I.1.3. Méthodes fondées sur le tenseur de Maxwell

L'analyse tensorielle est un formalisme mathématique particulièrement utile pour étudier une large variété de systèmes physiques, son appellation vient du fait qu'elle utilise la divergence du tenseur de Maxwell et procure une force qui est celle que subit un volume élémentaire plongé dans un champ magnétique [9], [11] .

$$\vec{F} = \text{div}(\vec{T}) \quad (I-4)$$

Le tenseur de Maxwell permettra d'étudier la force s'exerçant sur un matériau de volume V, en connaissant seulement la répartition de champ aux différents points d'une surface fermé entourant le volume en question. Le système peut contenir des matériaux magnétiques (linéaires ou non-linéaires), des conducteurs ou des régions inductrices caractérisées par une densité de courant uniforme [3].

I.2. Calcul du champ électromagnétique

Quelque soit la formulation utilisée (tenseur de Maxwell, travaux virtuels,.....), les forces électromagnétiques sont fonction du champ et de l'induction magnétique, donc la connaissance du \vec{B} et du \vec{H} est très nécessaire pour accès au calcul des forces.

Le calcul du champ électromagnétique passe par la résolution des équations différentielles aux dérivées partielles de Maxwell qui constituent le modèle de départ.

I.2.1. Equations de Maxwell et relations constitutives

L'inducteur (l'électroaimant du palier magnétique) est alimenté en courant continu de densité constante. Alors, le champ magnétique utilisé est statique (formulation magnétostatique).

Tous les phénomènes électromagnétiques sont régis par les quatre équations aux dérivées partielles de Maxwell qui doivent être adaptées à la région où on veut les résoudre, et par les relations du milieu considéré. Celles ci sont exprimées sous la forme suivante [14], [15]:

-Loi de Maxwell-Gauss

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (I-5)$$

- Loi de Maxwell-Faraday

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (I-6)$$

- Loi de Maxwell-Ampère

$$\operatorname{rot}(\vec{H}) = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (I-7)$$

-Loi de conservation du flux magnétique

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (I-8)$$

Avec :

\vec{E} : Champ électrique en $\left(\frac{V}{m}\right)$.

\vec{B} : Induction magnétique en (T) .

\vec{H} : Champ magnétique en $\left(\frac{A}{m}\right)$.

\vec{J} : Densité de courant en $\left(\frac{A}{m^2}\right)$.

\vec{D} : Induction électrique en $\left(\frac{C}{m^2}\right)$.

ρ : Densité de charge volumique en $\left(\frac{C}{m^3}\right)$.

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$: Densité de courant de déplacement en $\left(\frac{A}{m^2}\right)$.

Des relations supplémentaires doivent venir compléter les équations de Maxwell en fonction des propriétés spécifiques des milieux auxquels on les appliquera.

De telles relations sont appelées équations constitutives, qui dans le cas général s'écrivent sous la forme suivante :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_r \quad (I-9)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (I-10)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (I-11)$$

L'expression détaillée des densités des courants :

$$\vec{J} = \vec{J}_{ind} + \vec{J}_{exi} \quad (I-12)$$

$$\vec{J}_{ind} = \sigma \vec{E} + \sigma(\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (I-13)$$

Avec :

\vec{J}_{ind} : La densité de courant induit.

\vec{J}_{exci} : La densité de courant d'excitation.

\vec{B}_r : Induction magnétique rémanente (cas d'aimants permanents) en (T).

ε : Permittivité en (F/m).

μ : Perméabilité magnétique en (H/m).

σ : Conductivité électrique en (S/m).

\vec{v} : Vecteur vitesse des pièces en mouvement en (m/s).

Le terme $\sigma \vec{E}$ exprime le courant résultant du champ électrique \vec{E} et le terme $\sigma(\vec{v} \wedge \vec{B})$ exprime le courant résultant du mouvement.

I.2.2. Conditions de continuité aux interfaces de séparation

Sur une limite de séparation de deux milieux différents notés 1 et 2, on peut trouver des conditions de continuité du type :

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (I-14)$$

$$\vec{n}\Lambda(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \quad (I-15)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s \quad (I-16)$$

$$\vec{n}\Lambda(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s \quad (I-17)$$

Ici \vec{n} est le vecteur normal à l'interface dirigé du milieu 1 vers le milieu 2, \vec{J}_s est la densité surfacique de courant libre à l'interface et ρ_s est la densité surfacique de charge libre à l'interface.

A partir de ces équations, on montre qu'il y a :

- Continuité des composantes respectivement normale de l'induction magnétique \vec{B} et tangentielle du champ électrique \vec{E} à la traversée de la surface de séparation des deux milieux 1 et 2.
- Discontinuité des composantes respectivement tangentielle du champ magnétique \vec{H} et normale de l'induction électrique \vec{D} par la présence du courant et des charges surfaciques.

Le système d'équations contient beaucoup d'inconnues et se prête donc mal à une résolution numérique. L'utilisation du potentiel vecteur magnétique \vec{A} et du potentiel scalaire Φ permet de condenser et de réduire le nombre d'inconnus. Ces formulations sont bien connues et largement utilisées dans le domaine du calcul du champ électromagnétique.

En admettant les hypothèses suivantes :

- L'électroaimant est alimenté par une source parfaite de courant.
- L'induction rémanente \vec{B}_r dans le système étudié est négligeable.

Le système d'équations devient :

$$\vec{\nabla}\Lambda\vec{H} = \vec{J}_s \quad (I-18)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (I-19)$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \quad (I-20)$$

La relation de la conservation du flux magnétique permet de définir une fonction vectorielle \vec{A} appelée potentiel vecteur magnétique telle que:

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A}) \quad (I-21)$$

Pour assurer l'unicité de la solution nous allons imposer une condition de jauge de telle sorte que :

$$\text{div}(\vec{A}) = 0 \quad (I-22)$$

En remplaçant (I-21) dans (I-18), on obtient l'équation du modèle magnétostatique vectoriel :

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\text{rot}(\vec{A})\right) = \vec{J}_s \quad (I-23)$$

I.2.3. Equation magnétostatique bidimensionnelle

Comme la plupart des problèmes magnétiques, nous allons nous restreindre pour cette étude au cas bidimensionnel. Ainsi, les systèmes considérés, possèdent une symétrie par translation suivant la troisième dimension ou une symétrie d'axe de révolution.

Dans les deux cas, la direction du vecteur densité de courant \vec{J} doit être perpendiculaire au plan d'étude. Le problème reste donc invariant suivant l'axe oz dans les coordonnées (x, y, z) , ou suivant la révolution d'axe oz dans les coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

Dans le calcul suivant, nous ne considérons que le cas d'un système à symétrie par translation, le champ magnétique, présente alors deux composantes suivant les axes \vec{ox} et \vec{oy} , dans un plan perpendiculaire à \vec{J} , impliquant ainsi qu'une seule composante pour le potentiel vecteur magnétique \vec{A} suivant la direction (oz), qu'on désigne par $A_z(x, y)$ [17], [18].

- **Coordonnées cartésiennes**

Pour l'étude d'un système bidimensionnel dans le plan $[x, y]$ On a alors : $\vec{A}_{(0,0,A_z)}$ et $\vec{J}_{(0,0,J_z)}$ Sachant que :

$$\text{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z \end{bmatrix} \quad (I-24)$$

Où, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont les vecteurs unitaires dans le système cartésien suivant les axes $\vec{ox}, \vec{oy}, \vec{oz}$. Après développement on obtient :

$$\vec{rot}(\vec{A}) = \frac{\partial A_z}{\partial y} \vec{i} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \vec{j} \quad (I-25)$$

Ainsi :

$$\frac{1}{\mu} \vec{rot}(\vec{A}) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y} \vec{i} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x} \vec{j} \quad (I-26)$$

$$\vec{rot}\left(\frac{1}{\mu} \vec{rot}(\vec{A})\right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \vec{i} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y}\right) \vec{j} + \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y}\right) \right] \vec{k} \quad (I-27)$$

Il est évidemment clair que les termes selon \vec{ox} et \vec{oy} , sont nuls, d'où l'équation précédente peut s'écrire :

$$\vec{rot}\left(\frac{1}{\mu} \vec{rot}(\vec{A})\right) = \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y}\right) \right] \vec{k} \quad (I-28)$$

Avec \vec{k} le vecteur unitaire selon \vec{oz}

I.2.4. Conditions aux limites

1. Condition de Dirichlet

L'inconnue prend des valeurs données sur les bords du domaine on distingue deux types :

- Dirichlet homogène :

Où l'inconnu de l'équation est fixé sur la limite est considéré égal à zéro : $A=0, V=0$

- Dirichlet non homogène :

Où l'inconnu de l'équation est fixé sur la limite et sa valeur est non nul : $A \neq 0, V \neq 0$

2. Condition de Neumann

La valeur du gradient sur les bords du domaine de résolution est connue. On distingue deux types :

- Neumann homogène :

La dérivé par rapport a la normal de l'inconnu est nulle : $\frac{\delta A}{\delta n} = 0$

\vec{n} : Vecteur normale a la limite

Ce qui signifie que les lignes isovaleurs de l'inconnu sont perpendiculaires à la limite

- Neumann non homogène :

Dans ce cas $\frac{\delta A}{\delta n} = \text{cts} \neq 0$ ce qui signifie que les lignes isovaleurs de l'inconnue forment un angle α avec la limite.

I.2.5.Méthode de résolution des équations aux dérivées partielles

Deux types de résolution peuvent être effectués : analytique ou numériques. Si la résolution analytique semble relativement facile et donne des solutions exactes, elle présente l'inconvénient majeur de ne pas prendre en compte la non linéarité et la déformation de la géométrie. Pour cela, et afin de dépasser ce handicap, on fait rappel aux méthodes numériques. Parmi ces méthodes, on trouve les méthodes des différences finies (MDF) et la méthode des éléments finis (MEF), sa meilleure adaptation aux géométries complexes, donne l'avantage à la méthode des éléments finis.

I.2.5.1.Méthodes analytiques

Ce sont les premières méthodes utilisées. Elles sont d'emploi restreint à des géométries simples dans une approche unidimensionnelle, ou quelque fois dans des problèmes bidimensionnels. La méthode analytique la plus puissante et la plus couramment utilisée pour la résolution des équations différentielles aux dérivées partielles est la méthode de séparation des variables. Le principe de cette méthode consiste à mettre l'inconnue sous forme d'un produit des fonctions, dont chacune ne dépend que d'une seule variable [16].

Soit en coordonnées cartésiennes, l'inconnue $A_z(x, y)$, qui est écrit comme suit :

$$A_z(x, y) = A_z(x).A_z(y) \quad (I-29)$$

$A_z(x, y)$: Solution de l'équation différentielle aux dérivées partielles considérée de sorte que :

$A_z(x)$: est une fonction ne dépend que de la variable x .

$A_z(y)$: est une fonction ne dépend que de la variable y .

I.2.5.2. La méthode des éléments finis

Cette méthode consiste à subdiviser le domaine étudié en éléments finis, et approcher l'inconnu dans chaque élément par des fonctions d'interpolation. Ces fonctions sont généralement des polynômes de Lagrange de premier ou deuxième degré. L'interpolation dans un élément est effectuée en fonction de ses valeurs nodales, ce qui impose la continuité de l'inconnu sur les interfaces des éléments.

Le principe de la méthode des éléments finis est la transformation de l'équation aux dérivées partielles (EDP) qui régit le problème traité à un système d'équation algébrique dont la résolution permet de définir l'inconnu à un ensemble de points (nœuds) de la discrétisation.

I.2.5.2.a. Types d'éléments finis

Selon que le domaine d'étude, soit à une, deux ou trois dimensions, on rencontre le plus souvent des éléments linéaires, quadratiques ou cubiques.

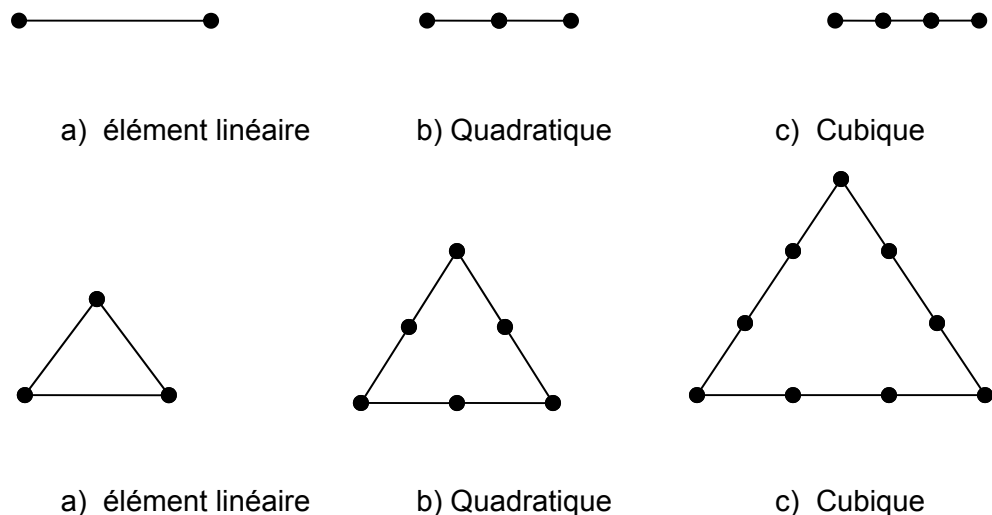


Figure I-1 éléments classiques en une et deux dimensions

Dans la majorité de cas bidimensionnels, on préfère utiliser des éléments triangulaires du premier ordre. Pour aboutir à une meilleur exactitude de la solution, on procède a raffiner le maillage

I.2.5.2.b. Fonction d'approximation

Le potentiel vecteur magnétique \vec{A} dans un élément peut être approchée par des fonctions d'approximations (dites fonctions de formes) dont l'expression varie d'un type d'élément à un autre. Ces fonctions d'approximations doivent assurer la continuité du potentiel aux interfaces des éléments. Généralement on utilise des fonctions polynomiales.

Pour un élément triangulaire de premier ordre [18]:

$$A_e(x, y) = a + bx + cy \quad (I-30)$$

Pour un élément quadrilatéral :

$$A_e(x, y) = a + bx + cy + dxy \quad (I-31)$$

Ici a , b , c et d sont des constantes à déterminer.

Dans le domaine global contenant n_e éléments, le potentiel $A(x, y)$ est la contribution des potentiels de tous les éléments du maillage. On écrit donc :

$$A(x, y) = \sum_{e=1}^{n_e} A_e(x, y) \quad (I-32)$$

n_e : est le nombre total des éléments du maillage

Le potentiel en tout point dans un élément ainsi que la densité de courant est parfaitement définis en fonction des valeurs de ses sommets.

Pour un élément triangulaire :

$$A_e = a + bx + cy = \sum_{i=1}^3 \alpha_i A_i \quad (I-33)$$

$$J_e = a + bx + cy = \sum_{i=1}^3 \alpha_i J_i \quad (I-34)$$

Où α_i sont des fonctions d'interpolations, appelées aussi fonctions de formes.

Ces fonctions de formes ont les propriétés suivantes :

$$\alpha_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (I-35)$$

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) = 1 \quad (I-36)$$

Pour un élément triangulaire de premier ordre on a :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2s} [(x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \quad (I-37)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2s} [(x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \quad (I-38)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2s} [(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \quad (I-39)$$

s est la surface de l'élément triangulaire.

$$s = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)] \quad (I-40)$$

I.2.5.2.c. Formulation Intégrale

L'étape importante qui permet d'aboutir au système algébrique est la mise sous forme intégrale de l'équation EDP.

Au premier lieu, cette formulation nous permet d'obtenir les expressions des éléments des différentes matrices et vecteurs du système algébrique élémentaire (dans un élément type). La formulation intégrale peut être de deux manières [2], [19] :

- . Variationnelle.
- . Résidus pondérés.
- **Formulation Variationnelle**

L'utilisation de la méthode Variationnelle exige la connaissance au préalable de la fonctionnelle d'énergie du système à étudier. Cette fonctionnelle est déterminée à partir du principe de l'action hamiltonienne qui stipule l'existence d'une fonctionnelle de type intégral défini par :

$$\mathfrak{Z}(A) = \int_{\Omega} L d\Omega \quad (I-41)$$

L est la fonction de Lagrange qui résulte de la Co-énergie du système de type cinétique et son énergie potentielle.

Ω est le Domaine de résolution.

La résolution du problème variationnel revient à minimiser cette fonctionnelle d'énergie.

- **Formulation Résidus Pondérés**

C'est la méthode projective où on cherche à projeter l'équation locale sur des fonctions de base d'un espace de fonctions de pondérations, et on essaie de minimiser le résidu par l'approximation de la fonction de l'inconnu, dont l'expression est [2], [19]:

$$\int_{\Omega} R_i \phi_i d\Omega = 0 \quad (I-42)$$

$$R = DF(A) - g \quad (I-43)$$

R est le résidu de l'approximation, DF(A) est l'opérateur différentiel, g est une fonction définie dans le domaine de résolution, ϕ_i est la fonction de projection et A est l'inconnu du problème. Les valeurs de \bar{A} qui permettent d'annuler l'intégrale sont solutions du système algébrique obtenu. Parmi les méthodes qui découlent de la méthode des résidus pondérés on cite:

-La méthode de collocation par points.

-La méthode des moindres carrés.

-La méthode de GALERKINE.

La méthode de collocation par points utilise les fonctions de Dirac comme fonction de projection. La méthode des moindres carrés utilise la minimisation de la norme quadratique de l'erreur sur l'équation et les conditions aux limites. Quant à la méthode de GALERKINE, elle consiste à choisir les fonctions de projection identiques aux fonctions d'approximation.

I.2.5.2.d. Mise en œuvre de la méthode des éléments finis pour un problème magnétostatique [19]

Dans ce travail on se limite aux problèmes magnétostatiques dont le champ est généré par une source de courant supposé parfaite. Alors, l'équation EDP à résoudre est celle de poisson de la magnétostatique donnée par :

$$-\frac{1}{\mu} \Delta A = J \quad (I-44)$$

La formulation intégrale par résidu pondéré donne le résidu:

$$R = \frac{1}{\mu} \Delta A + J \quad (I-45)$$

D'après (I-45), et en choisissant des fonctions de pondérations ϕ_i les même que les fonctions d'interpolations α_i , on aura,

$$\int_{\Omega} R \alpha_i d\Omega_e = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\mu} \Delta A + J \right) \alpha_i d\Omega_e = 0 \quad (I-46)$$

La minimisation de (I-46), donne le système élémentaire $[K]^e [A]^e = [F]^e$

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \quad (I-47)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (I-48)$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (I-49)$$

$[K]^e$: est la matrice de rigidité locale, $[A]^e$ est le vecteur inconnu et $[F]^e$ est Le vecteur source.

Les éléments K_{ij} de la matrice élémentaire $[K]^e$ sont donnés par :

$$K_{ij} = \iint_{\Omega_e} \nu \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad (I-50)$$

$$F_i = \iint_{\Omega_e} J \alpha_i d\Omega_e \quad (I-51)$$

Pour obtenir le système d'équations algébrique global, on procède à l'assemblage des systèmes élémentaires. La taille du système global dépend directement du maillage.

Les étapes précédentes nous permettant de calculer le champ électromagnétique qui représente une grandeur très intéressante pour accéder aux calculs des forces électromagnétiques, une étude détaillée concernant les méthodes de calcul de ces forces, sera fourni par la suite.

I.3. Méthodes des sources équivalentes

Des méthodes pour le calcul des forces basées sur une densité surfacique de forces obtenue à partir des sources de champ, on a été proposées dans plusieurs références [3], [12], [20]. Ces méthodes sont basées sur le principe des sources équivalentes aux matériaux ferromagnétiques tels que les charges magnétiques équivalentes ou les courants équivalents, ou encore, la combinaison des deux à la fois.

Ces méthodes consistent à remplacer le milieu magnétique sur lequel le calcul de force est effectué par un milieu amagnétique à l'intérieur duquel se trouve une distribution volumique de source de champ et à la surface duquel existe une distribution surfacique de source de champ. Ces distributions peuvent être soit des distributions de courants, ou des distributions de charges, soit encore une combinaison de ces deux types de distributions.

L'expression permettant de tenir compte de la présence du matériau par son vecteur intensité d'aimantation induite \vec{M} est définie en fonction du champ magnétique \vec{H} ou de l'induction magnétique \vec{B} par la relation:

$$\vec{M} = (\mu_r - 1)\vec{H} = \left(1 - \frac{1}{\mu_r}\right) \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (I-52)$$

La conservation de la composante normale de l'induction et tangentielle du champ, nous permet d'obtenir les conditions de passage d'un milieu 1 de perméabilité μ et d'aimantation induite \vec{M}_1 , ne comportant pas de courants surfaciques, à un autre milieu 2 de perméabilité μ_0 .

$$B_{2n} = B_{1n} \quad H_{2t} = H_{1t} \quad (I-53)$$

En fonction des composantes normales et tangentielles de l'induction et du champ magnétiques, l'aimantation s'écrit :

$$M_{1n} = (H_{2n} - H_{1n}) \quad M_{1t} = \frac{1}{\mu_0} (B_{1t} - B_{2t}) \quad (I-54)$$

En utilisant les relations précédentes on obtient des relations en fonction de la perméabilité relative μ_r du milieu magnétique 1 tel que :

$$H_{2n} = \mu_r H_{1n} \quad B_{2t} = \frac{1}{\mu_r} B_{1t} \quad (I-55)$$

I.3.1. Cas des courants équivalents

Le milieu magnétique de perméabilité μ est remplacé par un milieu amagnétique auquel sont associés deux sources de courants équivalents, une densité de courants volumique \vec{J}_v et une autre surfacique \vec{J}_s dont les expressions sont données en fonctions du vecteur aimantation \vec{M} comme suit: [21-24]

$$\vec{J}_s = \vec{M} \wedge \vec{n} \quad (I-56)$$

$$\vec{J}_v = \text{rot}(\vec{M}) \quad (I-57)$$

\vec{n} : est le vecteur unitaire normale à la surface S limitant le milieu.

En faisant appel à la loi de Laplace, la densité volumique de la force et la densité surfacique de la force sont données par les relations suivantes:

$$\vec{f}_s = \vec{J}_s \wedge \vec{B}_s \quad (I-58)$$

$$\vec{f}_v = \vec{J}_v \wedge \vec{B}_1 \quad (I-59)$$

Où \vec{B}_s désigne l'induction à la surface S du milieu compte tenu de la relation de l'aimantation. La densité volumique du courant équivalent peut être donnée en fonction du champ magnétique comme suit : [1], [2], [3], [10], [11]

$$\vec{J}_v = \left[(\mu_r - 1) \text{rot}(\vec{H}_1) \right] + \left[\text{grad}(\mu_r) \wedge \vec{H}_1 \right] \quad (I-60)$$

Dans le cas d'un milieu homogène l'expression de la densité volumique du courant équivalent est simplifiée, elle est donnée par l'équation suivante:

$$\vec{J}_v = (\mu_r - 1) \text{rot}(\vec{H}_1) \quad (I-61)$$

De plus, si le milieu en question ne comporte pas de courants réels ($\sigma = 0$), le rotationnel du champ magnétique et donc nul (équation de Maxwell), par conséquent la densité volumique du courant équivalent est nulle, donc seul subsiste la densité surfacique du courant équivalent, et les densités de forces qui en résultent sont purement superficielles.

Le vecteur induction magnétique \vec{B}_s à la surface S du milieu 1 est égale à la moyenne entre l'induction \vec{B}_2 à l'extérieur de la surface S et l'induction \vec{B}_1 à l'intérieur de cette surface.

$$\vec{B}_s = \frac{1}{2}(\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \quad (I-62)$$

Compte tenu des conditions de passage d'un milieu à un autre, la densité surfacique de la force est donnée par:

$$\vec{f}_s = \frac{1}{2\mu_0} (B_{2t} - B_{1t}) \vec{k} \wedge (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \quad (I-63)$$

\vec{k} : est le vecteur unitaire tangent à la surface au point considéré.

La force globale est obtenue en intégrant cette expression sur la surface S entourant le milieu.

I.3.2. Cas des charges magnétiques équivalentes

Dans cette formulation [1], [2], [3], [10], le milieu magnétique de perméabilité μ est remplacé par un milieu amagnétique contenant une distribution volumique de charge magnétique de densité ρ_v égale à:

$$\rho_v = -\mu_0 \text{div}(\vec{M}_1) \quad (I-64)$$

Combinée avec une distribution surfacique de charges magnétiques de densité ρ_s égale à :

$$\rho_s = \mu_0 \vec{n} \cdot \vec{M}_1 \quad (I-65)$$

Avec ces distributions de charges équivalentes, le champ magnétique \vec{H} dans tout le système reste inchangé, alors que l'induction \vec{B}_1 à l'intérieur du milieu est différente de celle

existant dans le système réel. Cette formulation donne une distribution volumique de force de densité \vec{f}_v et une distribution surfacique de force de densité \vec{f}_s :

$$\vec{f}_v = \rho_v \cdot \vec{H}_1 \quad (I-66)$$

$$\vec{f}_s = \rho_s \cdot \vec{H}_s \quad (I-67)$$

Pour le cas particulier d'un milieu linéaire et homogène, l'expression de la densité volumique de charges magnétiques équivalentes est nulle, il suffit donc de tenir compte la densité surfacique des forces magnétiques. [11], [23], [24]

Le champ magnétique \vec{H}_s à la surface S du milieu égale :

$$\vec{H}_s = \frac{1}{2} (\vec{H}_1 + \vec{H}_2) \quad (I-68)$$

Compte tenu les conditions de passage d'un milieu à un autre, la densité surfacique de la force est donnée par:

$$\vec{f}_s = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot (H_{2n} - H_{1n}) (\vec{H}_1 + \vec{H}_2) \quad (I-69)$$

Pour obtenir la force globale il suffit d'intégrer l'expression précédente sur l'ensemble de la surface S entourant le milieu en question.

I.3.3. Cas des charges et courants équivalents

D'autre distributions de sources équivalentes peuvent être déduites en combinant des distributions des charges magnétiques et des distributions de courants équivalents, une des plus intéressantes est la combinaison d'une distribution surfacique de charges magnétiques de densité ρ_s avec une distribution surfacique de courants de densité \vec{J}_s dont les expressions sont données par les relations suivantes [1], [2], [3], [10], [11] :

$$\rho_s = \vec{n} \cdot \vec{B}_2 \quad (I-70)$$

$$\vec{J}_s = \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{n} \wedge \vec{B}_2 \quad (I-71)$$

Dans ce cas, les sources équivalentes sont uniquement des sources surfaciques par conséquent seule une distribution de forces surfaciques de densité \vec{f}_s et crée, et dont l'expression et donné par :

$$\vec{f}_s = \left[\left(\vec{n} \cdot \vec{B}_2 \right) \frac{\vec{B}_s}{\mu_0} \right] + \left[\left(\vec{n} \wedge \frac{\vec{B}_2}{\mu_0} \right) \wedge \vec{B}_s \right] \quad (I-72)$$

Dans ce cas particulier, l'induction à l'intérieur du milieu est nulle, par conséquent, l'expression de l'induction à la surface est fonction d'une seule grandeur, et dont l'expression est donnée par :

$$\vec{B}_s = \frac{1}{2} \cdot \vec{B}_2 \quad (I-73)$$

Après développement de la formule de \vec{f}_s précédente, on obtient l'expression de la densité de forces magnétiques exercées sur l'ensemble de la surface S du milieu:

$$\vec{f}_s = \frac{1}{\mu_0} \left[\left(\vec{n} \cdot \vec{B}_2 \right) \vec{B}_2 - \frac{1}{2} \left(\vec{B}_2^2 \right) \vec{n} \right] \quad (I-74)$$

Pour aboutir à la force globale, il suffit d'intégrer l'expression de la densité de force sur l'ensemble de la surface S entourant le milieu en question.

I.4. Méthode de la dérivée de l'énergie magnétique

Dans un milieu isotrope et ne comportant pas de sources de courant, la variation de l'énergie δw lors d'un déplacement δs peut s'exprimer en fonction de la variation de la perméabilité magnétique $\delta \mu$ par la relation suivante [3], [10], [11] :

$$\delta w = \frac{1}{2} \int_V (\delta \mu H^2) dv \quad (I.75)$$

W : l'énergie magnétique du milieu

V : le volume du milieu sur lequel la force est calculée.

\vec{H} : le champ magnétique

La variation de la perméabilité magnétique $\delta \mu$ peut être due à la non homogénéité physique et aux contraintes mécaniques subies par le milieu. Si on néglige la variation due aux contraintes mécaniques, l'expression de $\delta \mu$ lors d'un déplacement δs suivant la direction S est donnée par la relation:

$$\delta \mu = \frac{\partial \mu}{\partial s} \delta s \quad (I.76)$$

Cette relation n'est valable que si la perméabilité varie d'une façon continue dans le domaine d'étude. Pour un volume contenu dans un milieu isotrope, non déformable, ne comporte pas de courants, et où la perméabilité magnétique varie de façon continue, la composante de la force totale suivant la direction choisie est donnée par :

$$F_v = -\frac{1}{2} \int_v \left[\frac{\partial \mu}{\partial s} \vec{H}^2 \right] dv \quad (1.77)$$

De la même manière, on peut obtenir les autres composantes de la force totale suivant les autres directions du repère de travail, et la force globale exercée sur l'ensemble du volume sera donc donnée par :

$$\vec{F}_v = -\frac{1}{2} \int_v \left(\vec{H}^2 \overrightarrow{\text{grad}}(\mu) \right) dv \quad (1.78)$$

Et sa densité \vec{f}_v est donnée par :

$$\vec{f}_v = -\frac{1}{2} \vec{H}^2 \overrightarrow{\text{grad}}(\mu) \quad (1.79)$$

Si le volume V est parcouru par des courants de densité volumique \vec{J}_v , il est nécessaire d'en tenir compte par l'ajout d'un terme représentant ces courants à la relation précédente. La nouvelle densité volumique de force est alors donnée par la relation :

$$\vec{f}_v = -\frac{1}{2} \vec{H}^2 \overrightarrow{\text{grad}}(\mu) + \vec{J}_v \wedge (\mu \vec{H}) \quad (1.80)$$

Lorsque nous voulons calculer la force qui s'exerce sur un volume V entouré d'une surface S , où la perméabilité magnétique est discontinue, il faut alors rajouter à la formule précédente la force qui s'exerce sur les surfaces de discontinuité (interface entre deux milieux physique de propriétés différentes). Pour calculer cette force, on suppose que cette surface possède une épaisseur non nulle et forme ainsi un volume fictif où la perméabilité varie de façon continue. Pour déterminer la force qui s'exerce sur cette surface, il faut donc intégrer l'expression de sa densité sur le volume fictif correspondant V_s (voir fig. 1.2).

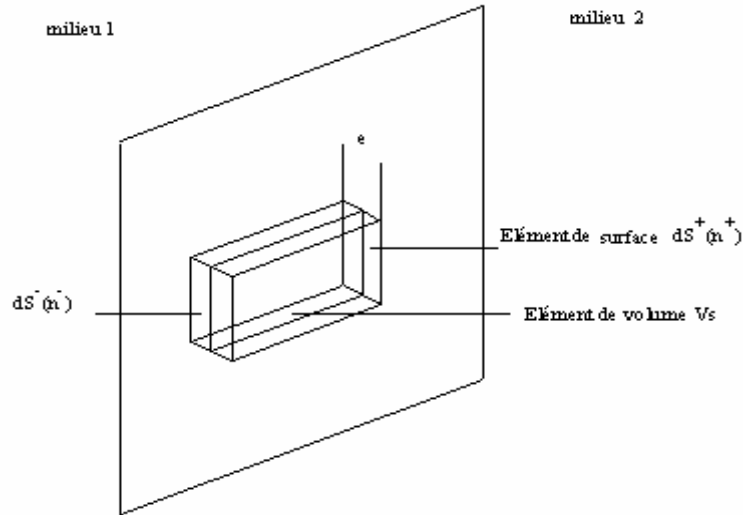


Figure I-2 : volume fictif (V_s) pour le calcul des densités de forces à l'interface entre deux milieux

e : épaisseur du volume

V_s : volume fictif

Le théorème de la divergence permet alors de calculer la force exercée sur le volume V_s en intégrant sur la surface entourant ce volume. Alors l'expression de la force est la suivante :

$$\vec{f}_s = (\vec{n} \cdot \vec{B}) \vec{H} - \frac{1}{2} (\vec{B} \cdot \vec{H}) \vec{n} \quad (I.81)$$

Ici, \vec{n} est le vecteur unitaire normal

Afin d'obtenir la force qui s'exerce sur la surface S , on fait tendre l'épaisseur e du volume V_s vers zéros, l'intégrale est alors calculée sur les deux faces de la surface S . Il s'agit de S^+ et S^- dont les vecteurs normaux respectives sont \vec{n}^+ et \vec{n}^- , tels que : $\vec{n}^- = -\vec{n}^+$. On obtient donc :

$$\vec{F}_s = \iint_{S^+} \left[(\vec{B} \cdot \vec{n}) \vec{H} - \frac{1}{2} (\vec{B} \cdot \vec{H}) \vec{n}^+ \right] dS + \iint_{S^-} \left[(\vec{B} \cdot \vec{n}) \vec{H} - \frac{1}{2} (\vec{B} \cdot \vec{H}) \vec{n}^- \right] dS \quad (I.82)$$

$$\vec{F}_s = \iint_{S^+} \left[(\vec{B} \cdot \vec{n}) \vec{H} - \frac{1}{2} (\vec{B} \cdot \vec{H}) \vec{n} \right] dS - \iint_{S^-} \left[(\vec{B} \cdot \vec{n}) \vec{H} - \frac{1}{2} (\vec{B} \cdot \vec{H}) \vec{n} \right] dS \quad (I.83)$$

\vec{n} Étant la normale à la surface S tel que $\vec{n} = \vec{n}^+$

La différence entre ces deux termes s'explique par le fait que la force totale est due à la différence des forces exercées de part et d'autre de la surface de séparation S [22], [23], [25].

Le développement des calculs (voir Annexe A-1) nous mène à une expression de la densité de force surfacique \vec{f}_s simplifiée, exprimée en fonction des composantes continues du champ magnétique, de l'induction et des perméabilités d'une part et d'autre de l'interface, et donnée par la relation suivante:

$$\vec{f}_s = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) (\mathbf{B}_n^2) - (\mu_1 - \mu_2) (\mathbf{H}_t^2) \right] \cdot \vec{n} \quad (1.84)$$

La force globale correspondante est :

$$\vec{F}_s = \int_s \vec{f}_s \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \int_s \left[\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) (\mathbf{B}_n^2) - (\mu_1 - \mu_2) (\mathbf{H}_t^2) \right] \cdot \vec{n} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.85)$$

A partir de cette forme facilement exploitable de la force globale, on peut faire apparaître deux résultats essentiels:

- La force est toujours normale à la surface de séparation des deux milieux de perméabilités différentes.
- La force est dirigée du milieu de perméabilité la plus forte (matériau magnétique) à celui où la perméabilité est la plus faible (air).

I.5. Méthode des travaux virtuels

Afin d'éviter la dérivation de la matrice Jacobienne, nous proposons une nouvelle approche pour la mise en œuvre de la méthode des travaux virtuels, qui consiste à dériver une nouvelle expression de l'énergie [2], [13] .

I.5.1. Principe de la méthode

Cette nouvelle méthode, consiste à dériver une nouvelle expression de l'énergie, cette expression s'écrit en fonction des grandeurs de la méthode des éléments finis (potentiel vecteur A, la matrice de rigidité M).

Si on prend une petite variation de la densité de l'énergie magnétique :

$$\delta \vec{W} = \vec{H} \delta \vec{B} = \vec{H} \left(\overrightarrow{\text{rot}}(\delta \vec{A}) \right) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} \delta \vec{A} \quad (1-86)$$

Par l'utilisation de l'équation de Maxwell –Ampère $\left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J} \right)$ on obtient :

$$\delta \vec{W} = \vec{J} \delta \vec{A} \quad (I-87)$$

Ce qui donne :

$$\int_0^B \vec{H} d\vec{B} = \int_0^A \vec{J} d\vec{A} \quad (I-88)$$

Le système matricielle issu de la méthode des éléments finis $[K][A] = [F]$, nous permet d'écrire :

$$[J] = [K][A] \quad (I-89)$$

Où:

[K] : matrice de rigidité issue de la méthode des éléments finis.

[J] : densité de courant total.

[A] : potentiel vecteur aux nœuds du maillage.

En appliquant le principe des travaux virtuels :

$$F = -\frac{\partial W}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial s} \int_0^A [K][A] dA \quad (I-90)$$

La dérivation de l'énergie s'effectue à potentiel constant, ce qui nous permet d'introduire la dérivée sous le signe de l'intégration :

$$F = -\int_0^A [A]^t \frac{\partial [K]}{\partial s} dA \quad (I-91)$$

Pour un élément du maillage de la matrice $[K^e]$ élémentaire est donnée par :

$$[K_{ij}^e] = \frac{\nu}{4\Delta} [b_i b_j + c_i c_j] \quad (I-92)$$

Où :

$$b_i = y_j - y_k \quad (I-93)$$

$$c_i = x_k - x_j \quad (I-94)$$

Avec x_i et y_i coordonnées des nœuds i de l'élément.

Δ : Surface de l'élément considéré.

I.5.2. Dérivation de la matrice $[K]$ par rapport aux déplacements virtuels

Les dérivées de la matrice $[K^e]$ par rapport au déplacement virtuel se font analytiquement :

$$\frac{\partial [K^e]}{\partial x_1} = \frac{\nu}{4\Delta} \begin{bmatrix} 0 & c_1 & -c_1 \\ c_1 & 2c_2 & c_3 - c_2 \\ -c_1 & c_3 - c_2 & -2c_3 \end{bmatrix} - \frac{b_1}{2\Delta} [K^e] + \frac{[K^e]}{\nu} \frac{\partial \nu}{\partial x_1} \quad (I-95)$$

$$\frac{\partial [K^e]}{\partial x_2} = \frac{\nu}{4\Delta} \begin{bmatrix} -2c_1 & -c_2 & c_1 - c_3 \\ -c_2 & 0 & c_2 \\ c_1 - c_3 & c_2 & 2c_3 \end{bmatrix} - \frac{b_2}{2\Delta} [K^e] + \frac{[K^e]}{\nu} \frac{\partial \nu}{\partial x_2} \quad (I-96)$$

$$\frac{\partial [K^e]}{\partial x_3} = \frac{\nu}{4\Delta} \begin{bmatrix} 2c_1 & c_2 - c_1 & c_3 \\ c_2 - c_1 & -2c_2 & -c_3 \\ c_3 & -c_3 & 0 \end{bmatrix} - \frac{b_3}{2\Delta} [K^e] + \frac{[K^e]}{\nu} \frac{\partial \nu}{\partial x_3} \quad (I-97)$$

$$\frac{\partial [K^e]}{\partial y_1} = \frac{\nu}{4\Delta} \begin{bmatrix} 0 & -b_1 & b_1 \\ -b_1 & -2b_2 & -b_3 + b_2 \\ b_1 & -b_3 + b_2 & 2b_3 \end{bmatrix} - \frac{c_1}{2\Delta} [K^e] + \frac{[K^e]}{\nu} \frac{\partial \nu}{\partial y_1} \quad (I-98)$$

$$\frac{\partial [K^e]}{\partial y_2} = \frac{\nu}{4\Delta} \begin{bmatrix} 2b_1 & b_2 & b_3 - b_1 \\ b_2 & 0 & -b_2 \\ b_3 - b_1 & -b_2 & -2b_3 \end{bmatrix} - \frac{c_2}{2\Delta} [K^e] + \frac{[K^e]}{\nu} \frac{\partial \nu}{\partial y_2} \quad (I-99)$$

$$\frac{\partial [K^e]}{\partial y_3} = \frac{\nu}{4\Delta} \begin{bmatrix} -2b_1 & b_1 - b_2 & -b_3 \\ b_1 - b_2 & 2b_2 & b_3 \\ -b_3 & b_3 & 0 \end{bmatrix} - \frac{c_3}{2\Delta} [K^e] + \frac{[K^e]}{\nu} \frac{\partial \nu}{\partial y_3} \quad (I-100)$$

En faisant le changement de variable $A = A_0 t$ donc $dA = A_0 dt$, l'intégrale des deux premiers termes des équations (I-95), (I-96), (I-97), (I-98), (I-99) et (I-100), devient :

$$\int_0^A [A] \left(\frac{\nu}{4\Delta} [K_{li}] - \frac{bc_i}{2\Delta} [K^e] \right) dA = \int_0^1 [A_0] \left(\frac{\nu}{4\Delta} [K_{li}] - \frac{bc_i}{2\Delta} [K^e] \right) [A_0] t dt$$

$$= \left(\frac{1}{4\Delta} [A_0] [K_{li}] [A_0] - \frac{bc_i}{2\Delta} [A_0] \frac{1}{\nu} [K^e] [A_0] \right) \int_0^1 \nu t dt \quad (I-101)$$

Où :

$[K_{li}]$: matrice dans le premier terme des équations (I-95), (I-96), (I-97), (I-98), (I-99) et (I-100).

bc_i : C'est b_i ou c_i dans les mêmes équations.

$[A_0]$: Le potentiel vecteur aux nœuds de chaque élément.

- Dans le cas linéaire, ν est constant par conséquent on peut facilement évaluer l'intégrale dans l'équation (I-101).
- Dans le cas non linéaire en faisant un autre changement de variable $B = B_0 t$ on

obtient : $t dt = \frac{1}{B_0^2} dB^2$ par conséquent :

$$\int_0^1 \nu t dt = \frac{1}{2B_0^2} \int_0^{B_0^2} \nu(B_0^2) d(B^2) \quad (I-102)$$

Pour calculer cette intégrale il faut écrire ν en fonction de B^2 , on peut écrire ν en fonction de B^2 comme suit :

$$\nu = \alpha_{0n+1} + \alpha_{1n+1} (B_0^2 - B_n^2) + \alpha_{2n+1} (B_0^2 - B_n^2)^2 + \alpha_{3n+1} (B_0^2 - B_n^2)^3 \dots \quad (I-103)$$

Où :

$\alpha_{0i} \dots \alpha_{3i}$, $i = 1 \dots n+1$ sont les coefficients de l'approximation de la réductivité en terme de B^2 dans l'intervalle i .

Ces intervalles ayant une longueur de ΔB^2 , B_n^2 la valeur de B dans le dernier intervalle.

Utilisant l'équation (I-103), l'intégration de l'équation (I-102) donne :

$$\int_0^{B_0^2} \nu dB^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_{0i} \Delta B^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \alpha_{1i} (\Delta B^2)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} \alpha_{2i} (\Delta B^2)^3 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{4} \alpha_{3i} (\Delta B^2)^4$$

$$\dots + \alpha_{0n+1} (B_0^2 - B_n^2) + \frac{1}{2} \alpha_{1n+1} (B_0^2 - B_n^2)^2 + \frac{1}{3} \alpha_{2n+1} (B_0^2 - B_n^2)^3 + \dots \quad (I-104)$$

L'intégration du troisième terme dans les équations (I-95), (I-96), (I-97), (I-98), (I-99) et (I-100)

donne :

$$\int_0^A [A] \frac{\partial \nu}{\partial x_1} \frac{[K^e]}{\nu} dA = [A_0] \frac{[K^e]}{\nu} [A_0] \left(\int_0^{A_0} [A] \frac{\partial \nu}{\partial x_1} dA \right) \quad (I-105)$$

En utilisant pour la deuxième fois le changement de variable ($A = A_0 t$ donc $dA = A_0 dt$), le second terme de l'équation (I-105) devient :

$$[A_0] \frac{[K^e]}{\nu} [A_0] \left(\int_0^{A_0} [A] \frac{\partial \nu}{\partial x_1} dA \right) = [A_0] \frac{[K^e]}{\nu} [A_0] \left(\int_0^1 \frac{\partial \nu}{\partial x_1} t dt \right) \quad (I-106)$$

$$\int_0^1 \frac{\partial \nu}{\partial x_1} t dt = \int_0^1 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} \frac{\partial B}{\partial x_1} t dt \quad (I-107)$$

L'intégrale du second terme de l'équation (I-107) donne :

$$\frac{\partial \nu(B^2)}{\partial B^2} \frac{\partial B}{\partial x_1} = \frac{\partial \nu(B^2)}{\partial B^2} \frac{1}{\Delta} [B_x (A_2 - A_3) - b_1 B^2] \quad (I-108)$$

Où :

L'équation précédente se réduit à :

$$\frac{\partial \nu(B^2)}{\partial B^2} \frac{\partial B}{\partial x_1} = \frac{\partial \nu(B^2)}{\partial B^2} G_{x1} B^2 \quad (I-109)$$

En utilisant le changement de variable ($B = B_0 t$ donc $t dt = \frac{1}{B_0^2} dB^2$), l'intégrale de (I-107)

devient :

$$\int_0^1 \frac{\partial \nu}{\partial x_1} t dt = \frac{G_{x1}}{2B_0^2} \int_0^{B_0^2} \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B^2 dB^2 \quad (I-110)$$

Où :

$$G_{x1} = \frac{b_1 \sin \gamma \sin(\alpha - \gamma)}{\Delta \cos \gamma} \quad (I-111)$$

α : angle entre l'arête 2-3 de l'élément considéré de l'axe des y.

γ : angle entre l'induction (B) et l'axe des x.

On peut calculer l'intégrale (I-107) :

$$\int_0^{B_0^2} \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B^2 d(B)^2 = B_0 \nu_0^2 - \int_0^{B_0^2} \nu(B^2) dB^2 \quad (I-112)$$

Ceci montre qu'on peut déduire la valeur de l'équation (I-112) directement à partir de (I-104). On peut aussi déduire les G_{x1} directement à partir de l'expression donnée dans l'équation (I-109) :

$$G_{x1} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{B_x}{B^2} (A_2 - A_3) - b_1 \right] \quad (I-113)$$

$$G_{x2} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{B_x}{B^2} (A_3 - A_1) - b_2 \right] \quad (I-114)$$

$$G_{x3} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{B_x}{B^2} (A_1 - A_2) - b_3 \right] \quad (I-115)$$

$$G_{y1} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{B_y}{B^2} (A_3 - A_2) - c_1 \right] \quad (I-116)$$

$$G_{y2} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{B_y}{B^2} (A_1 - A_3) - c_2 \right] \quad (I-117)$$

$$G_{y3} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{B_y}{B^2} (A_2 - A_1) - c_3 \right] \quad (I-118)$$

Où b_1, b_2, b_3 et c_1, c_2, c_3 sont donnés par les deux équations (I-93) et (I-94) respectivement .

B_x et B_y sont donnés par :

$$B_x = \frac{1}{2\Delta} (c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3) \quad (I-119)$$

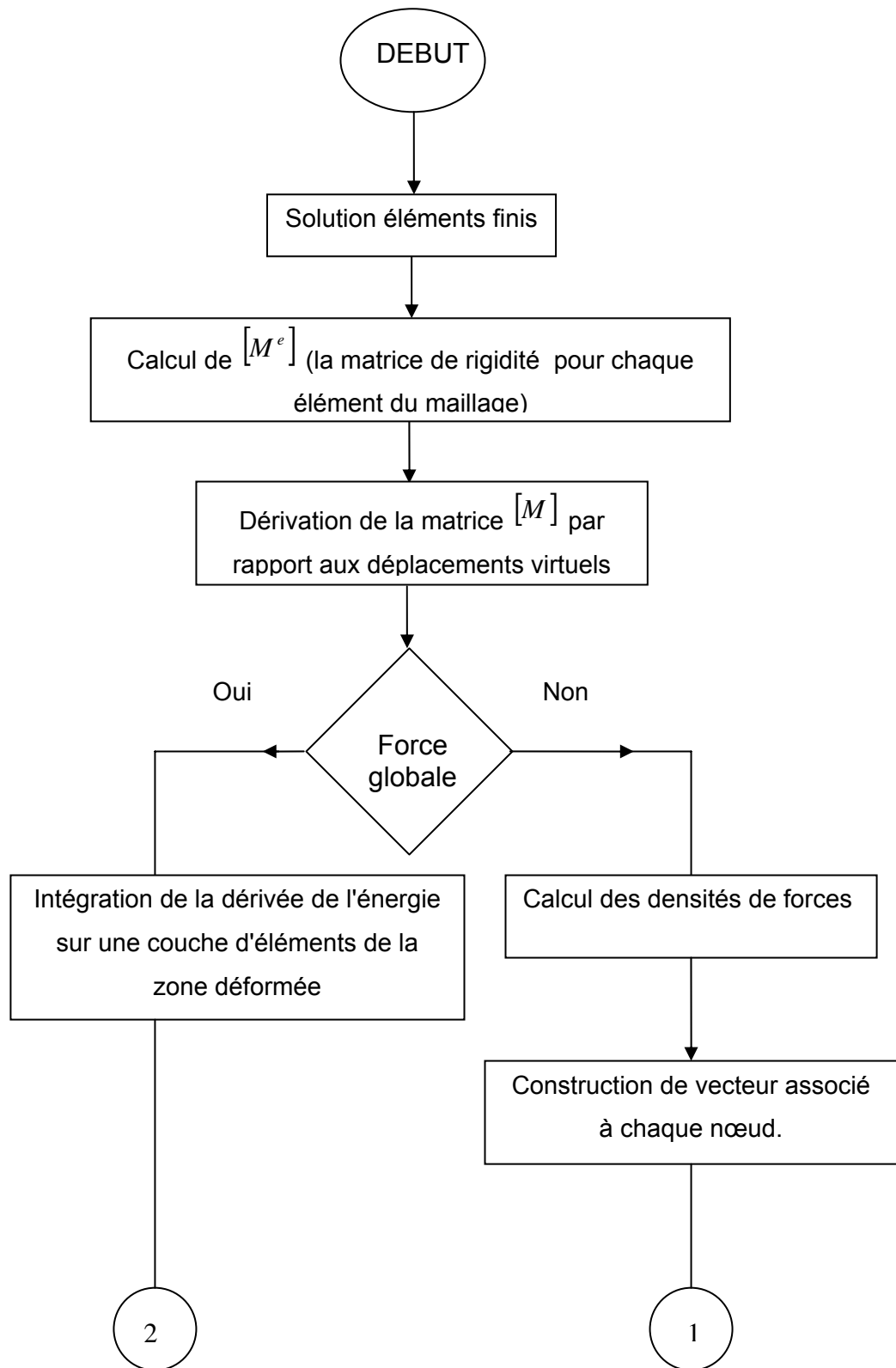
$$B_y = \frac{1}{2\Delta} (b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3) \quad (I-120)$$

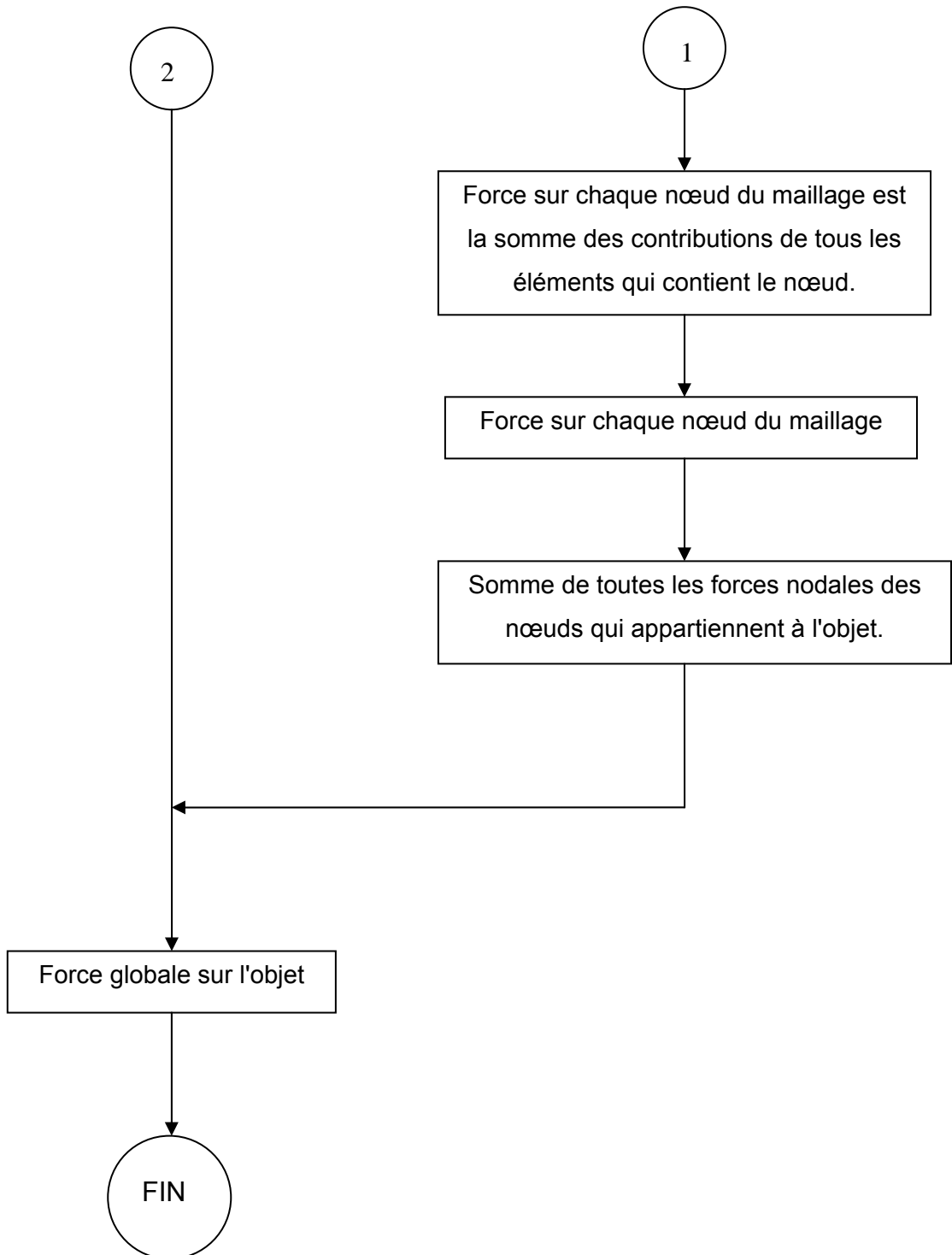
Par cette méthode la force qui s'exerce sur un nœud du maillage, est la somme des contributions de tous les éléments qui contiennent le nœud considéré.

La force globale qui agit sur l'objet est la somme des forces nodales des nœuds qui appartiennent à l'objet.

Cette méthode est simple à mettre en œuvre surtout dans le cas linéaire. Dans ce cas le troisième terme des équations (I-95), (I-96), (I-97), (I-98), (I-99), (I-100) devient nulle et, par conséquent on peut calculer la force directement à partir de l'équation (I-101) .

I.5.3. Organigramme de la mise en œuvre de la méthode des travaux virtuels





I.6. Méthode du tenseur de Maxwell

Les méthodes fondées sur le tenseur de Maxwell sont de deux types [22-25] :

- avec intégration surfacique.
- avec intégration volumique.

La méthode reposant sur une intégration surfacique est la plus couramment utilisée, elle sera décrite en premier. Cependant, la méthode reposant sur une intégration volumique représente elle aussi, certain avantages.

I.6.1.Méthode du tenseur de Maxwell avec intégration surfacique

Nous présentons tout d'abord le principe de la formulation par les tenseurs en prenant comme exemple le cas de la force s'exerçant sur un conducteur électrique amagnétique. Ensuite nous généraliserons cette formulation au calcul des forces s'exerçant sur un milieu magnétique.

L'exemple que l'on prend habituellement est la formulation de la force s'exerçant sur un conducteur électrique amagnétique. L'équation de Laplace découle des équations de Maxwell. Elle donne l'expression de la force s'exerçant sur un conducteur idéal placé dans un champ d'induction magnétique [3], [9], [11] .

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad (I.121)$$

Cette équation peut être exprimée sous forme locale. Soit \vec{f} la force par unité de volume:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{d\vec{V}} \quad (I.122)$$

$$\vec{f} = \frac{id\vec{l} \wedge \vec{B}}{d\vec{V}} = \frac{id\vec{l} \wedge \vec{B}}{S d\vec{l}} \quad (I.123)$$

Soit:

$$\vec{f} = \vec{J} \wedge \vec{B} \quad (I.124)$$

La force globale est donnée par:

$$\vec{F} = \int_v \vec{f} dV = \int_v (\vec{J} \wedge \vec{B}) dV \quad (I.125)$$

V est le volume du conducteur.

En utilisant les équations de la magnétostatique:

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{J} \quad (\text{I.126})$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (\text{I.127})$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (\text{I.128})$$

Et en substituant les équations (I.126) et (I.128) dans (I.124), on obtient:

$$\vec{f} = \mu_0 (\text{rot}(\vec{H})) \wedge \vec{H} \quad (\text{I.129})$$

En recourant à la notation faisant appel au symbole nabla ($\vec{\nabla}$), on peut écrire:

$$\vec{f} = \mu_0 (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) \wedge \vec{H} \quad (\text{I-130})$$

$$= \mu_0 \left[(\vec{H} \cdot \vec{\nabla}) \vec{H} - \left(\frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{H}^2) \right) \right] \quad (\text{I-131})$$

Qui s'écrit sous la forme matricielle :

$$f = \mu_0 \begin{bmatrix} H_x \cdot \frac{\partial H_x}{\partial x} + H_y \cdot \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_z \cdot \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{1}{2} [H_x^2 + H_y^2 + H_z^2] \\ H_x \cdot \frac{\partial H_y}{\partial x} + H_y \cdot \frac{\partial H_y}{\partial y} + H_z \cdot \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{1}{2} [H_x^2 + H_y^2 + H_z^2] \\ H_x \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x} + H_y \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y} + H_z \cdot \frac{\partial H_z}{\partial z} - \frac{1}{2} [H_x^2 + H_y^2 + H_z^2] \end{bmatrix} \quad (\text{I-132})$$

Pour chacune des coordonnées x, y, z la relation précédente devient en notation condensée :

$$f_m = \mu_0 \left[\sum_{n=1}^3 \left(H_n \frac{\partial H_m}{\partial x_n} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_m} (\vec{H}^2) \right] \quad (\text{I-133})$$

Avec: (m, n)=x, y, z

Dans cette expression, la grandeur \vec{H}^2 est donnée par la relation:

$$\vec{H}^2 = H_x^2 + H_y^2 + H_z^2 \quad (\text{I-134})$$

On utilisant le coefficient de Kronecker δ_{mn} tel que :

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \quad (\text{I-135})$$

On peut alors écrire:

$$f_m = \mu_0 \sum_{n=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial x_n} \left(H_n H_m - \frac{1}{2} \delta_{mn} (\vec{H}^2) \right) - H_m \frac{\partial H_n}{\partial x_n} \right] \quad (\text{I-136})$$

Le dernier terme de cette équation peut s'écrire :

$$\mu_0 \sum_{n=1}^3 \left[H_m \frac{\partial H_n}{\partial x_n} \right] = \sum_{n=1}^3 \left[H_m \frac{\partial (\mu_0 H_n)}{\partial x_n} \right] = H_m \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \quad (\text{I-137})$$

L'expression de la composante généralisée de la force se simplifie alors comme suit :

$$f_m = \mu_0 \sum_{n=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial x_n} \left(H_n H_m - \frac{1}{2} \delta_{mn} (\vec{H}^2) \right) \right] \quad (\text{I-138})$$

Le tenseur de maxwell \vec{T} est donné par l'expression suivante :

$$T_{m,n} = \mu_0 \left(H_n H_m - \frac{1}{2} \delta_{m,n} (\vec{H}^2) \right)_{m,n=x,y,z} \quad (\text{I-139})$$

$$f_m = \operatorname{div}(\vec{T}_{m,n}) \quad (\text{I-140})$$

Le vecteur \vec{T}_m est constitué de trois composantes du tenseur de maxwell :

$$\vec{T}_m = \tau_{m1} \vec{i} + \tau_{m2} \vec{j} + \tau_{m3} \vec{k} \quad (\text{I-141})$$

Le tenseur de Maxwell prend alors la forme suivante :

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} \quad (\text{I-142})$$

Les forces s'exerçant sur un volume sont déterminées par les relations suivantes :

$$\vec{F}_m = \int_V \vec{f}_m \cdot dV = \int_V \operatorname{div}(\vec{T}_m) \cdot dV \quad (\text{I-143})$$

Par le théorème de divergence, on obtient :

$$\vec{F}_m = \oint_S \vec{T}_m \cdot ds = \oint_S (\vec{T}_{m,n} \cdot \vec{n}) \cdot ds \quad (\text{I-144})$$

La force globale est donnée par:

$$\vec{F} = \mu_0 \oint_s \left((\vec{H} \cdot \vec{n}) \vec{H} - \frac{1}{2} (\vec{H}^2) \vec{n} \right) dS \quad (I-145)$$

Le fait de passer d'une intégrale de volume à une intégrale de surface à travers le théorème de divergence, peut être fort utile dans le cas d'un calcul numérique et peut permettre un gain de temps de calcul considérable.

Nous démontrons (Voir Annexe A-2) que l'expression de la force donnée par la relation (I-145), peuvent être généralisées et appliquées au calcul des forces sur des milieux magnétiques. Ainsi, la force s'exerçant sur un milieu magnétique peut donc être formulée par le tenseur de Maxwell, et exprimée en fonction du vecteur champ magnétique \vec{H} , ou également en fonction du vecteur induction magnétique \vec{B} .

On constate ainsi, que l'expression de la force globale qui découle du calcul surfacique de la force d'origine magnétique reste inchangée si au lieu des forces de Laplace on doit considérer des forces sur des matériaux ferromagnétiques.

I.6. 2.Méthode du tenseur de Maxwell avec intégration volumique

L'avantage de cette méthode par rapport à la méthode avec intégration surfacique et l'élimination de la définition de la surface d'intégration.

Cette intégrale volumique peut donc, dans certaines conditions, être plus simple à mettre en œuvre par la MEF.

Par cette méthode, la force sur un nœud k d'un élément du maillage en utilisant le tenseur de Maxwell, est donnée par [1], [2], [10] :

$$f_k = - \int_{\Omega} [B_k]^T \{ \vec{\tau} \} d\Omega \quad (I-146)$$

Où

Ω : concerne les éléments qui contiennent le nœud k , les termes du $[B_k]$ et $\{ \vec{\tau} \}$ sont donnés par :

$$[B_k] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \alpha_k}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \alpha_k}{\partial z} \\ \frac{\partial \alpha_k}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \alpha_k}{\partial z} & \frac{\partial \alpha_k}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha_k}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (I-147)$$

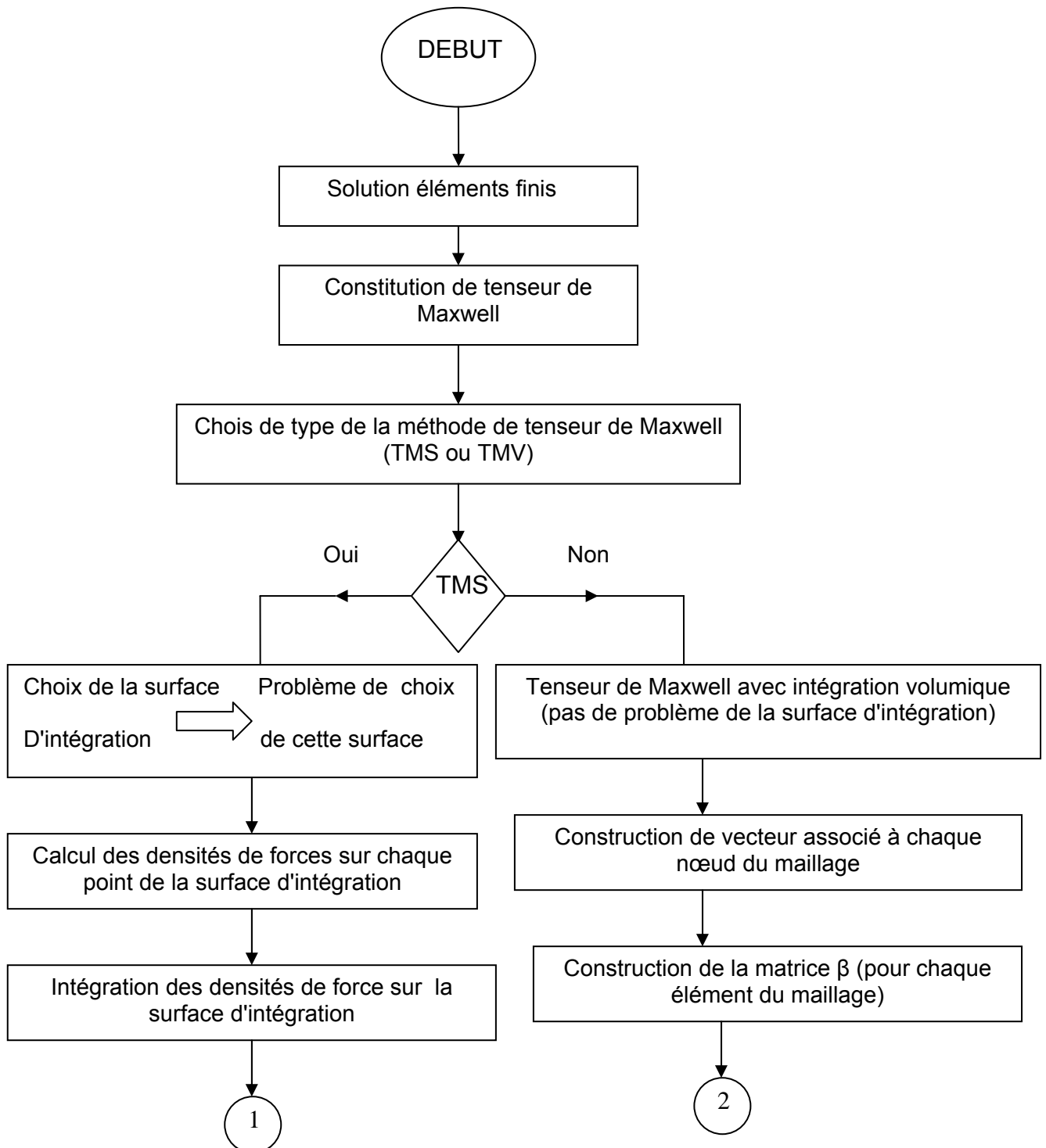
$$\{\tau\} = \begin{Bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (I-148)$$

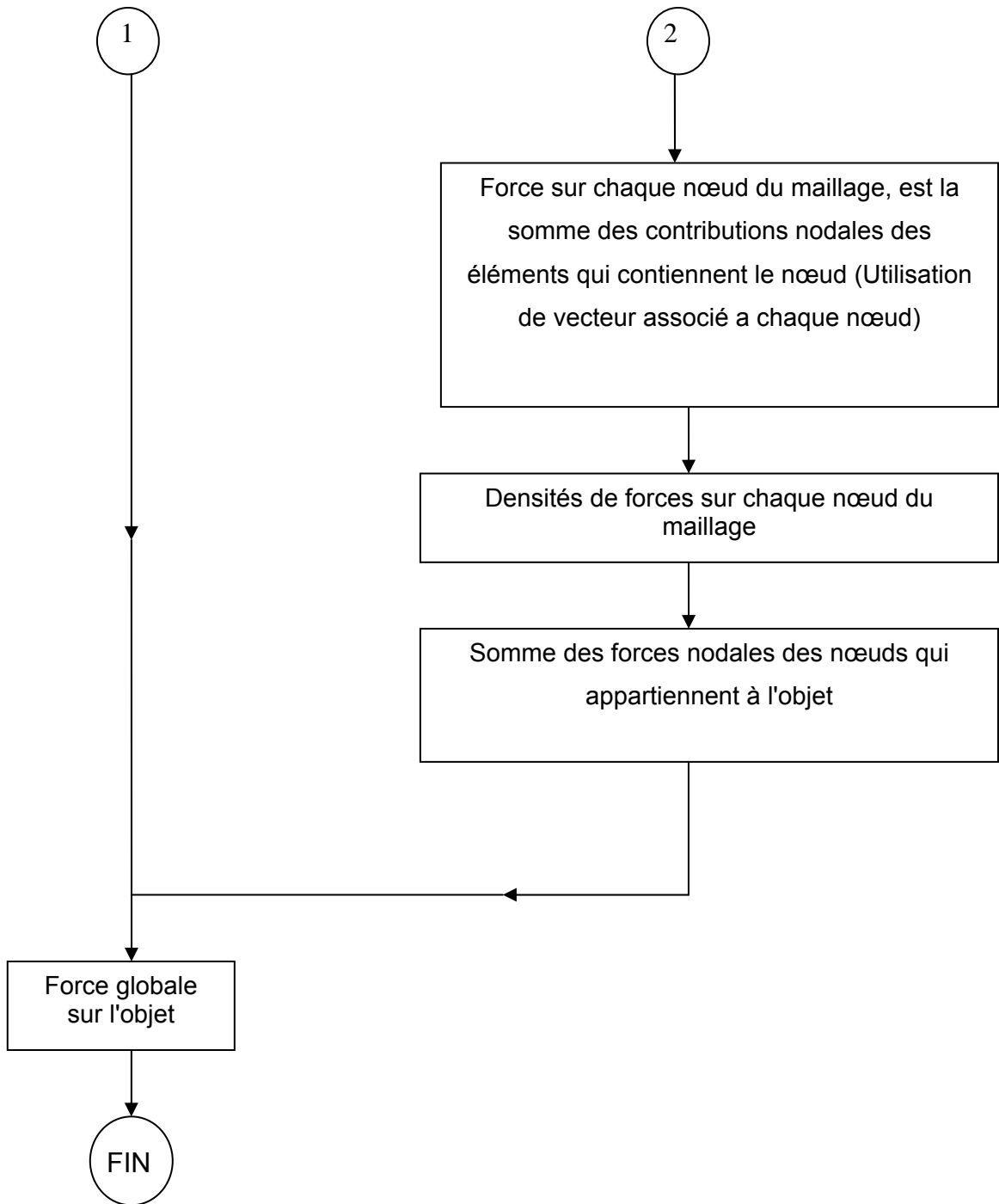
Où les termes τ_{ij} du tenseur de Maxwell sont données par (I-139) et α_k sont les fonctions d'interpolations des nœuds k de l'élément considéré (élément à k nœuds).

On obtient ainsi, les forces sur les nœuds du maillage de matériau, les forces sur un nœud étant donnée par la somme de chaque contribution nodale des éléments qui contiennent le nœud.

La force globale exercée sur le matériau est donné par la sommation des forces nodales de tous les nœuds de l'objet.

I.6.3. Organigramme de la mise en œuvre de la méthode de tenseur de Maxwell





Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté plusieurs méthodes qui permettent de calculer la force globale et les distributions de forces, à savoir, celles reposant sur les sources équivalentes, sur le tenseur de Maxwell et sur le principe de la dérivée de l'énergie et les travaux virtuels.

Bien que chacune de ces méthodes adopte une approche différente pour la détermination de la densité de force, l'intégration de cette dernière par les différentes méthodes, conduit pratiquement à la même force globale. Cependant, certaines d'entre elles sont plus, ou moins dépendantes de la qualité de la solution apportée par la méthode des éléments finis.

Concernant les distributions des forces, nous avons montré que les méthodes qui reposent sur des modèles équivalents ou sur des modèles purement mathématiques conduisent à des résultats incohérents. Les distributions obtenues n'ont aucune signification physique et leur utilisation ne doit surtout pas aller au-delà du calcul de la force globale s'exerçant sur le matériau. Ces méthodes ne traduisent pas l'état des contraintes en un instant précis et ne sont qu'un artifice rapide et pratique pour l'obtention de la force globale.

Nous avons présenté aussi une méthode fondée sur le principe physique de la dérivée de l'énergie et des travaux virtuels, où les distributions de forces sont fortement liées à l'équation de l'énergie utilisée pour calculer la force.

Le chapitre suivant sera consacré à l'étude du fonctionnement de notre dispositif d'application qui sera un palier magnétique.

CHAPITRE : II

LES PALIERS MAGNÉTIQUES

Introduction

La plupart des machines utilisent pour leur fonctionnement, que se soient dans le guidage en translation ou en rotation, des paliers mécaniques conventionnels. Mais ces derniers atteignent leurs limites dans certains cas de caractéristiques de fonctionnement, ou conditions d'utilisation.

Des systèmes plus récents permettent le déplacement sans aucun contact d'un objet par rapport à un autre. Ce sont les paliers à suspension magnétiques. Ils fonctionnent grâce aux interactions magnétiques engendrées entre la pièce mobile et la pièce statique.

Le support, ou le guidage en rotation ou en translation d'équipements à l'aide des paliers magnétiques est une nouvelle approche technologique permet de minimiser les pertes, éviter l'usure, ne pas polluer un environnement sensible par des poussières ou un lubrifiant, supprimer les vibrations, fonctionner à très basses ou très hautes température et limiter la maintenance [26-28].

Plusieurs types de paliers magnétiques sont utilisés. Actuellement, l'industrie utilise essentiellement des paliers magnétiques "actifs", les paliers magnétiques actifs permettent la sustentation sans contact d'un rotor tournant à très haute vitesse, cette technologie de pointe est déjà utilisée dans des produits du commerce, surtout pour des applications où toute lubrification est interdite (p.ex. turbocompresseurs, applications dans le vide). Ces paliers acceptent des charges importantes et font actuellement concurrence aux paliers hydrodynamiques. Cependant, cette technologie est lourde à mettre en œuvre et son prix de revient est très élevé [29-31].

Pour simplifier une suspension magnétique, il est possible d'associer des paliers passifs aux paliers actifs pour obtenir une suspension partiellement passive. Les paliers passifs sont autonomes et sont généralement réalisés avec des aimants permanents. Lorsque la suspension n'est pas soumise à des contraintes trop importantes, ils permettent des mises en œuvre très simples et à moindre coût.

II.1. Les applications des paliers à suspension magnétique

Les paliers à suspensions magnétiques sont utilisés dans des domaines très différents. Les principales applications sont les suivantes [32-36] :

- **Le spatial :**

La principale application des suspensions magnétiques dans le spatial concerne la mise en œuvre des volants d'inertie permettant de stabiliser un satellite ou bien d'emmagasiner de l'énergie.

- **L'usinage :**

Les suspensions magnétiques permettent d'équiper des broches d'usinage et de faire tourner des outils de coupe (rectification et fraisage), à des vitesses allant de 15000 à 150000 tr/min pour des puissances respectives de 50 kW à quelques centaines de Watt ,de plus les paliers magnétiques apportent une grande précision en rotation lors de l'usinage.

- **Les turbocompresseurs :**

Ce sont souvent des machines de grande puissance : il existe des gammes de 2 MW à 20000 tr/mm jusqu'à 25 MW à 7000 tr/mm. Ils sont utilisés dans l'industrie du gaz, en production, transport et stockage ainsi qu'en pétrochimie.

- **Les turboexpanders :**

Ce sont des machines rapides permettant la détente des gaz. Ils sont utilisés dans des opérations de traitement, de refroidissement, de purification, de séparation ou de liquéfaction. Ces machines sont généralement puissantes et rapides : de 10 000 à 50000 tr/mm et quelques centaines de KW où plusieurs MW.

- **Les pompes turbomoléculaires :**

Elles permettent d'obtenir un vide très poussé grâce à une turbine tournante à grande vitesse. Le vide obtenu peut atteindre 10⁻¹⁰ mbar, ils permettent d'atteindre des vitesses élevées (100000 tr/mn) sans polluer l'atmosphère environnant avec un lubrifiant. La suspension peut être active ou partiellement passive. Les deux solutions existent industriellement.

- **Les centrifugeuses :**

Elles permettent grâce à leur vitesse de rotation extrêmement élevée de séparer des substances de densités différentes. Il permet d'atteindre des vitesses importantes. Ce sont essentiellement des paliers passifs qui sont utilisés pour cette application.

- **Trains sustentés magnétiquement**

De la même manière qu'une machine obtenir un moteur linéaire, il est possible de dérouler un palier magnétique afin d'obtenir un guidage linéaire. C'est par ce type de système

que les suspensions magnétiques sont connues du grand public, car elles permettent à des trains expérimentaux d'être léviter au dessus de leurs voies.

II.2. Les différents types de palier magnétique

Dans la technologie à haute vitesse on trouve différents types de paliers, soit autonomes auxquels leur fonctionnement ne nécessite aucun apport d'énergie venant de l'extérieur c'est le cas des paliers magnétiques passifs, ou bien commandés par des systèmes électroniques, c'est le cas des paliers actifs.

Les paliers magnétiques quelque soit leurs types ont pour fonction soit de centrer un axe (exactement comme un roulement à billes), soit de contrôler la translation le long de l'axe. Dans le premier cas, le palier est appelé **centreur magnétique (palier radial)**, et dans l'autre cas **butée magnétique (palier axial)** [32], [33].

II.2.1 Les paliers magnétiques passifs

Un palier magnétique passif PMP ne fonctionne que par les forces permanentes d'interaction entre sa partie fixe et sa partie tournante. Ces forces peuvent être créées :

- soit par l'attraction entre des pièces en fer doux en vis-à-vis, polarisées par un flux magnétique.
- soit par l'attraction ou la répulsion directe entre des aimants permanents.

Le premier principe est utilisé dans les paliers magnétiques passifs à réluctance variable, le second dans les paliers à aimants permanents.

Le système fonctionne seul sans apport d'énergie, il est dit "passif" car les forces de rappel ne sont générées que par la variation de l'énergie magnétostatique existant dans le système.

Cette autonomie lui confère une fiabilité assez grande. Lorsque le rotor est déplacé de sa position d'équilibre, des forces magnétiques de rappel créent par le stator, ramènent le rotor en position centrée.

II.2.1 .a. Les paliers passifs à aimants permanents

Ils sont constitués au minimum de deux bagues d'aimant permanent en interaction, l'une des bagues est fixe tandis que l'autre est solidaire du rotor.

En fonction des directions d'aimantation des deux bagues, il est possible d'obtenir avec la même géométrie, soit un centreur, soit une butée.

1) Soit pour le centrage de la partie tournante vis-à-vis de la partie fixe, si la bague intérieure se décale radialement, la bague extérieure la repousse vers le centre il s'agit d'un **centreur**

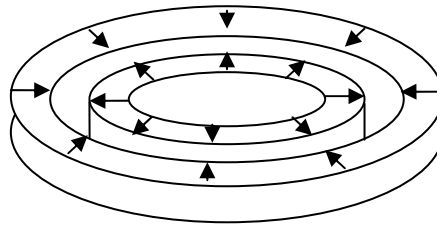


Figure. II.1 : Centreur à aimant permanent

2) Soit pour le positionnement axial le long de l'axe de rotation, si la bague intérieure se décale axialement, la bague extérieure l'attire dans son plan de symétrie. Il s'agit donc d'une **butée**.

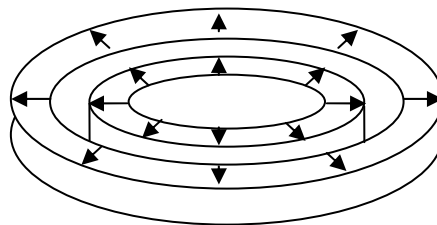


Figure. II.2 : Butée à aimant permanent

En conclusion, nous pouvons retenir la simplicité de réalisation d'un centreur passif et d'une butée passive. Néanmoins, leur utilisation est rendue délicate par les différentes instabilités qui peuvent survenir. Nous verrons d'ailleurs par la suite qu'une stabilité complète est impossible à obtenir avec ce type de paliers.

II.2.1 .b. Les paliers passifs à réductance variable

Ils sont composés de deux circuits magnétiques indépendants. L'un des circuits est lié au rotor tandis que l'autre est fixée au stator. Les circuits magnétiques sont composés de dents en vis-à-vis. La moitié de ces dents est placée sur la partie statique du palier tandis que l'autre est sur la partie mobile.

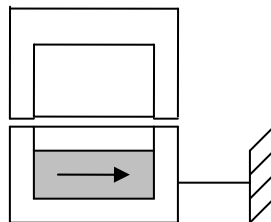


Figure. II.3 Centreur à réductance variable

Une différence de potentiel magnétique est créée entre ces dents soit par un aimant soit éventuellement par une bobine. Cette différence de potentiel magnétique crée un flux qui circule entre les dents. Ce flux engendre une pression qui tend à rapprocher les dents. Lorsque nous les décalons latéralement l'une par rapport à l'autre, on observe dans le même temps, un allongement des lignes de champ et donc une augmentation de l'énergie magnétique globale du système. Les dents cherchent alors à se réaligner afin de minimiser cette énergie.

II.2.2 Les paliers magnétiques actifs

Rappelons qu'une suspension magnétique entièrement passive n'est jamais stable, leurs utilisation sera limité, se qui exige une solution beaucoup plus acceptable, les paliers active ont comme avantage de commander le courant pour fixer la partie suspendue dans la position désirée.

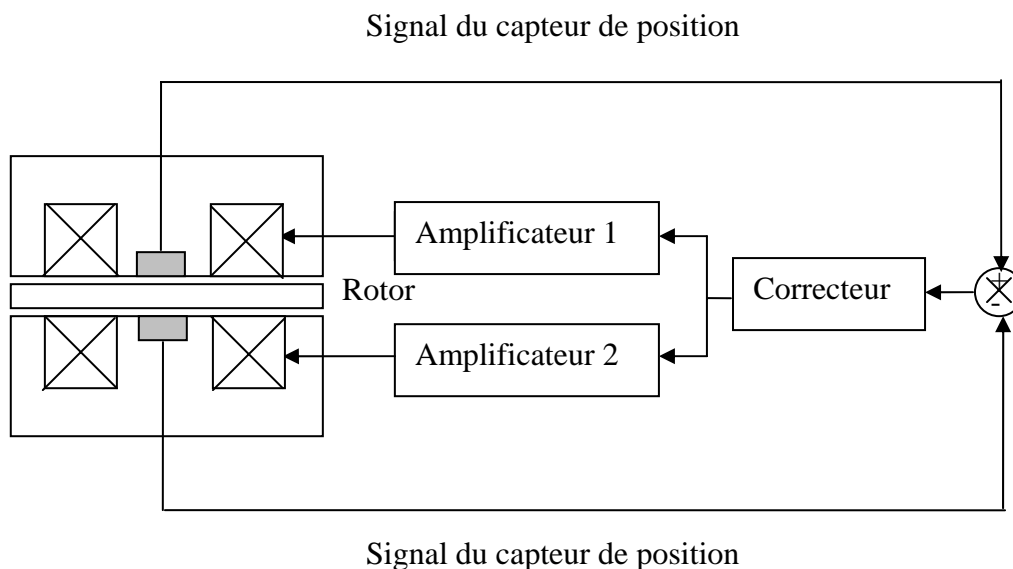


Figure. II.4 Principe d'une butée active

Les suspensions magnétiques actif sont conçues à l'aide d'électroaimants qui exercent des forces électromagnétiques assurent la lévitation sans contact du corps en rotation. Ils sont en général, placés par paires car un électroaimant ne peut exercer qu'une force d'attraction, donc pour asservir un axe, soit deux directions, il faut donc deux électroaimants.

Ils ont besoin d'un apport d'énergie pour fonctionner. Pour alimenter chacun des actionneurs constituant un palier actif, il faut une alimentation de puissance, une commande et un capteur de position.

II.2.3 Les paliers magnétiques partiellement passifs

Pour réaliser une suspension magnétique sans contact, plusieurs solutions sont proposées, soit tous les degrés de liberté du rotor sont contrôlés par des électroaimants asservis, cette solution est la plus utilisée industriellement, elle est robuste et permet de répondre à tous les types de cahier des charges. Cependant elle est lourde à mettre en œuvre car elle nécessite de nombreux actionneurs, capteurs, contrôleurs et amplificateurs de puissance.

Soit la lévitation est obtenue grâce à des systèmes à aimants, cette suspension est alors obligatoirement instable, cela veut dire que quelque soit la structure utilisée, le rotor sera éjecté de sa position initiale.

Donc il est préférable d'utiliser un système mélangeant à la fois l'actif et le passif, afin d'en réduire la complexité, c'est-à-dire une suspension ou certains degrés de liberté sont contrôlés par l'asservissement tandis que l'autre par des paliers passifs.

Il devient fort intéressant d'utiliser tel sortes des suspensions, leur simplicité de fabrication ainsi que l'absence de l'asservissement électronique, permettant la réalisation d'une suspension à des prix très inférieurs.

II.3. Etude statique d'une suspension magnétique

Afin de pouvoir obtenir une suspension stable, il nous faut contrôler la suspension que nous avons imaginée. Pour ce faire, nous avons besoin de connaître toutes ses caractéristiques statiques [32], [33].

II.3.1 Stabilité statique

-La première condition pour qu'un corps immobile soit en équilibre est qu'il doit être soumis à des forces dont la somme est nulle :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \quad (II-1)$$

- La deuxième condition nécessaire à l'obtention d'un équilibre stable :

$$\sum \overrightarrow{M}_{ext} = \vec{0} \quad (II-2)$$

Malheureusement, ces conditions d'équilibre sont nécessaires mais insuffisantes pour obtenir une stabilité parfaite.

II.3.2 Critères de stabilité statique

Si on applique une force sur un ressort, il exercera une tension qui s'opposera toujours

à cette force ($F_x = -k \cdot x$ avec $k > 0$), d'où la raideur est :

$$K = -\frac{\partial F_x}{\partial x} \quad (II-3)$$

La raideur d'un ressort est toujours positive : il ne gère que des forces de rappel, plus le ressort se déforme, plus il essaye de revenir à son état initial. Par contre, un système instable dont la raideur est négative, génère des forces qui favorisent l'écartement de ses éléments.

La raideur est définie plus généralement comme :

$$\vec{K} = - \begin{vmatrix} \frac{dF_x}{dx} \\ \frac{dF_y}{dy} \\ \frac{dF_z}{dz} \end{vmatrix} \quad (II-4)$$

La raideur angulaire peut aussi être définie :

$$\vec{K}_\theta = - \begin{vmatrix} \frac{dM_{\theta_x}}{d\theta_x} \\ \frac{dM_{\theta_y}}{d\theta_y} \\ \frac{dM_{\theta_z}}{d\theta_z} \end{vmatrix} \quad (II-5)$$

Où M est le couple qui correspond au décalage angulaire θ . Pour avoir l'équilibre stable et pouvoir fonctionner, un palier doit avoir une suspension qui vérifie une somme de forces et une somme de moments qui soient nuls ainsi que des raideurs linéaires et angulaires toutes positives.

II.4 Possibilité d'une suspension magnétique

II.4.1 Le théorème d'Earnshaw

Ce théorème démontre qu'il n'y a pas d'objet stationnaire construit de charge, aimants et masses en configuration fixe peut rester en équilibre stable par n'importe quelle combinaison de champ électrostatique ou magnétostatique ou gravitationnel, car l'équilibre stable d'un objet doit avoir une énergie qui possède un minimum, qui est impossible parce que l'énergie obéit à l'équation de Laplace ou ses solutions ne possèdent pas de minimum isolé (ou maximum) [32].

II.4.1.a Corps à aimantation rigide (aimant permanent)

Soit un corps de volume V et d'aimantation rigide \vec{J} , soumis à un champ extérieur statique \vec{H} .

L'énergie d'interaction entre l'aimant et le champ s'écrit :

$$W_i = -\iiint_V \vec{J} \cdot \vec{H} \, dv \quad (\text{II-6})$$

La force d'interaction est obtenue en dérivant l'énergie:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} W_i \quad (\text{II-7})$$

Les raideurs sont obtenues en dérivant chacune des composantes de la force, la somme des raideurs est donc égale à la divergence de la force :

$$K_i = -\overrightarrow{\text{div}} \vec{F} \quad (\text{II-8})$$

$$K_i = -\text{div} \left(-\overrightarrow{\text{grad}} W_i \right) = \Delta W_i \quad (\text{II-9})$$

$$\Delta W_i = \iiint_V \Delta \vec{J} \cdot \vec{H} \, dv \quad (\text{II-10})$$

$$\vec{J} \text{ Constant} \Rightarrow \Delta W_i = \iiint_V \vec{J} \cdot \Delta \vec{H} \, dv \quad (\text{II-11})$$

Le Laplacien de \vec{H} est nul, ce qui implique que la somme des raideurs est aussi nulle.

$$K_x + K_y + K_z = 0 \quad (\text{II-12})$$

La somme des raideurs des aimants plongés dans un champ extérieur statique est égale à zéro. Cette relation ne peut être vérifiée que si l'une des raideurs au moins est inférieure ou égale à zéro. Dans ce cas, au moins un des trois axes de translation de l'aimant sera instable. Par conséquent il est impossible de réaliser une suspension stable uniquement à base d'aimants. Ces propriétés restent valables pour des bobines parcourues par un courant constant car elles sont alors équivalentes à un aimant .

II.4.1.b Corps à aimantation non rigide

Le calcul des forces et des raideurs est semblable au calcul précédent, mais si on effectue un déplacement d'une quantité dx du corps aimanté, l'aimantation se réorganise en une nouvelle répartition qui modifie l'énergie magnétostatique du système. Pour atteindre l'état final, on peut supposer que le déplacement a été effectué à aimantation rigide puis que les aimantations ont été libérées et se sont redistribuées. La variation d'énergie de la première transformation est identique au cas précédent.

Pour la deuxième transformation :

- Si la susceptibilité magnétique χ est positive ($\mu_r > 1$), la redistribution des aimantations s'effectue toujours par une diminution de l'énergie magnétostatique emmagasinée (Théorème de Thomson). Globalement, la variation d'énergie est plus faible que si l'aimantation avait été rigide. A intensité d'aimantations identique, les forces et les raideurs sont donc inférieures ou égales aux précédentes. La relation entre les raideurs est alors :

$$K_x + K_y + K_z < 0 \quad (\text{II-13})$$

Le corps ne peut toujours pas trouver une position d'équilibre stable puisqu'il y a instabilité suivant au moins une des trois directions.

- Si la susceptibilité magnétique χ est négative (matériau diamagnétique), il est impossible d'aboutir à une conclusion générale de stabilité ou d'instabilité, chaque système étant un cas particulier [32].

Cependant il y a beaucoup d'auteurs qui ont mis en évidence des expériences des suspensions diamagnétiques entièrement stables.

II.4.1.c Corps conducteur non magnétique

Un conducteur de conductivité σ , parcouru par un courant induit J , engendre un champ magnétique dans tout l'espace, L'énergie totale s'écrit alors:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{B} \cdot \vec{H} dv \quad (\text{II-14})$$

Avec \vec{B} : induction magnétique en un point de l'espace.

\vec{H} : Champ magnétique en un point de l'espace.

$$K_x + K_y + K_z = \frac{1}{2} \iiint_V \Delta \vec{B} \cdot \vec{H} dv = \frac{1}{2} \iiint_V \text{div} \cdot \text{grad} (\vec{B} \cdot \vec{H}) dv \quad (\text{II-15})$$

$$K_x + K_y + K_z = \frac{1}{2} \iiint_V \text{div} (\vec{B} \times \text{rot} \vec{H} + \vec{H} \times \text{rot} \vec{B}) dv = \frac{1}{2} \iiint_V \text{div} (\vec{B} \times \vec{J}) dv \quad (\text{II-16})$$

Le courant étant nul en dehors du conducteur, cette équation s'écrit:

$$K_x + K_y + K_z = \iiint_V (\vec{J} \cdot \text{rot} \vec{B} - \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{J}) dv = \iiint_V \mu_0 J^2 + \sigma \mu_0^2 \vec{H} \cdot \frac{\delta \vec{H}}{\delta t} dv \quad (\text{II-17})$$

$$K_x + K_y + K_z = \iiint_V \mu_0 J^2 + \frac{\sigma \omega_0^2}{2} \frac{\delta H^2}{\delta t} dv \quad (\text{II-18})$$

-Premier cas: le conducteur est placé dans un champ magnétostatique:

$$K_x + K_y + K_z = \iiint_V \mu_0 J^2 dv \quad (\text{II-19})$$

L'unique moyen d'avoir un courant induit qui ne s'annule pas dans un champ statique est que le conducteur ait une résistivité nulle. Un supraconducteur vérifie donc:

$$K_x + K_y + K_z > 0 \quad (\text{II-20})$$

Il n'y a donc pas d'impossibilité à ce qu'un corps de résistivité nulle soit soumis à des raideurs positives suivant ses trois axes des translations. Un supraconducteur peut donc être stable dans un champ magnétostatique.

-Deuxième cas: le conducteur est placé dans un champ magnétodynamique:

En supposant que le champ soit sinusoïdal, le conducteur est parcouru par des courants sinusoïdaux.

$$H = H_{eff} \sin(\omega t) \quad (\text{II-21})$$

$$J = J_{eff} \sin(\omega t - \varphi) \quad (II-22)$$

La somme des raideurs s'écrit alors:

$$K_x + K_y + K_z = \iiint_V 2\mu_0 J_{eff}^2 \sin^2(\omega t - \varphi) + \sigma \mu_0^2 H_{eff}^2 \frac{\delta \sin^2(\omega t)}{\delta t} dv \quad (II-23)$$

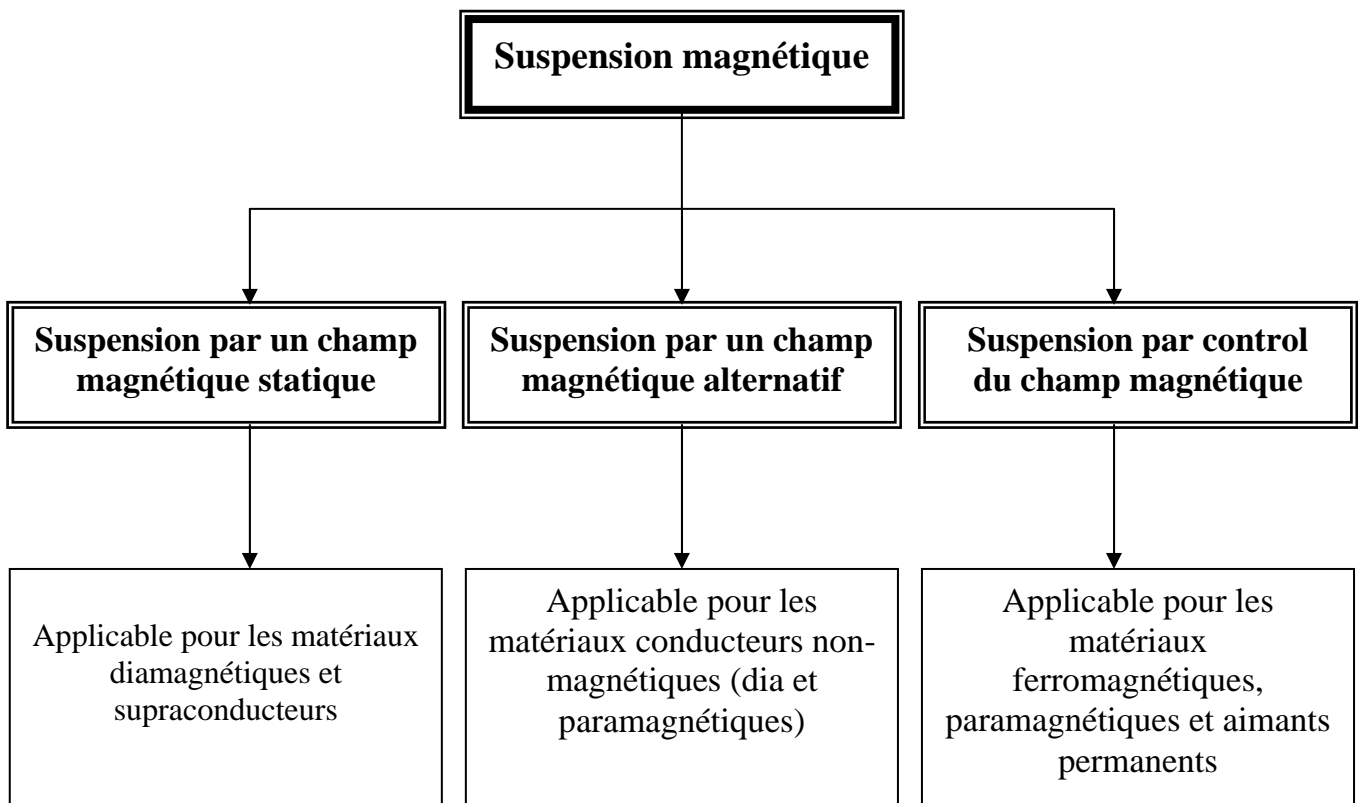
Cette somme dépend du temps, nous allons calculer sa moyenne:

$$(K_x + K_y + K_z)_{moy} = \iiint_V \mu_0 J_{eff}^2 dv \quad (II-24)$$

En conclusion, un conducteur placé dans un champ magnétodynamique est soumis à des raideurs dont la somme est toujours positive en moyenne. Chacune des raideurs peut donc être positive et entraîner la stabilité suivant les trois axes de translation. Un supraconducteur peut donc être stable dans un champ magnétodynamique.

II.5. Les classes de suspensions magnétiques

Après avoir étudié les différents matériaux du point de vue magnétique et la stabilité des corps qui subissent des forces d'origine magnétique, nous allons diviser en trois grandes catégories les principales classes de suspensions magnétiques, qui se résument dans l'organigramme suivant [35] :



II.5.1. Suspension par un champ magnétique statique

Une suspension stable par un champ magnétique statique est possible pour les matériaux diamagnétiques et les supraconducteurs (théorème d'Earnshaw).

- Sous l'action d'un champ magnétique extérieur statique, les matériaux diamagnétiques, tels que le bismuth et l'argent, présentent une faible aimantation dont la direction est opposée à celle du champ appliqué, donc produit une force de répulsion.
- Les conducteurs parfaits (supraconducteurs) génèrent des courants à l'intérieur du matériau qui repoussent le champ magnétique à l'extérieur et donc créent une force de suspension (les lignes de champ magnétique appliqué ne peuvent pas pénétrer le matériau supraconducteur).

II.5.2. Suspension par un champ magnétique alternatif

Une suspension stable par un champ magnétique alternatif est applicable aux conducteurs non magnétique (dia et paramagnétique), comme l'aluminium et le cuivre.

Selon le principe de Lenz, tout conducteur soumis à un champ alternatif (Un champ magnétique alternatif généré par un courant alternatif, ou par le mouvement d'un aimant permanent) est parcouru par des courants produisant un champ induit tendant à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance. Des interactions naissent alors entre la partie induite et la partie inductrice (la création des forces répulsives)

II.5.3. Suspension par control du champ magnétique

Cette méthode peut être utilisée pour stabiliser des forces électromagnétiques instables, elle est applicable aux matériaux ferromagnétiques, paramagnétiques, et aimants permanent.

D'une façon générale la suspension magnétique par contrôle du champ magnétique est un système permettant de contrôler l'ensemble des degrés de liberté d'une pièce par interaction magnétique.

C'est pour cela qu'il y a de nombreux chercheurs dans ce domaine qui ont classés la suspension magnétiques contrôlée selon les degrés de liberté qui se résume ainsi:

II.5.3.1. Suspension en un seul degré de liberté

Ces systèmes sont tels que seulement un degré de liberté des corps suspendu est activement stabilisé, typiquement les autres aussi sont passivement stabilisés, ou ne sont pas importants dues à la symétrie de l'objet suspendu, cela présente une des premières classes du contrôle actif de suspension.

II.5.3.2. Suspension à plusieurs degrés de liberté

Les systèmes décrits au dessous sont seulement stabilisés en un seul degré de liberté, mais il est évident que pour réussir une bonne stabilisation il faut l'élargir en plusieurs degrés de liberté.

Plusieurs applications récentes en besoin d'un contrôle de plusieurs degrés de liberté, parmi eux le contrôle de vibration, les trains à sustentation magnétique.

II.6. Suspension totalement magnétique: stabilisation par palier magnétique actif

Ces suspensions fonctionnent sans contact, en lévitation magnétique totale. Elles utilisent des paliers magnétiques passifs pour certains axes, et un ou plusieurs paliers actifs sur les autres axes. Ces derniers assurent la stabilité statique du système. De nombreuses configurations plus ou moins complexes sont réalisables [36].

II.6.1. Ensemble de paliers contrôlant l'axe du rotor

Les deux principales configurations sont présentées sur la figure Fig. II.5:

La suspension de **type I** fonctionne avec un seul palier passif: une butée. L'axe de rotation est centré par deux centreurs actifs. L'amortissement radial est fourni par les paliers actifs. Ce type de suspension magnétique, avec le contrôle actif de quatre degrés de liberté, est relativement complexe.

La suspension de **type IV** est construite avec deux centreurs passifs et une butée active. C'est la suspension entièrement magnétique la plus simple, avec seulement un axe actif. Toutefois, pour assurer la stabilité dynamique, il faut ajouter des dispositifs d'amortissement aux centreurs passifs.

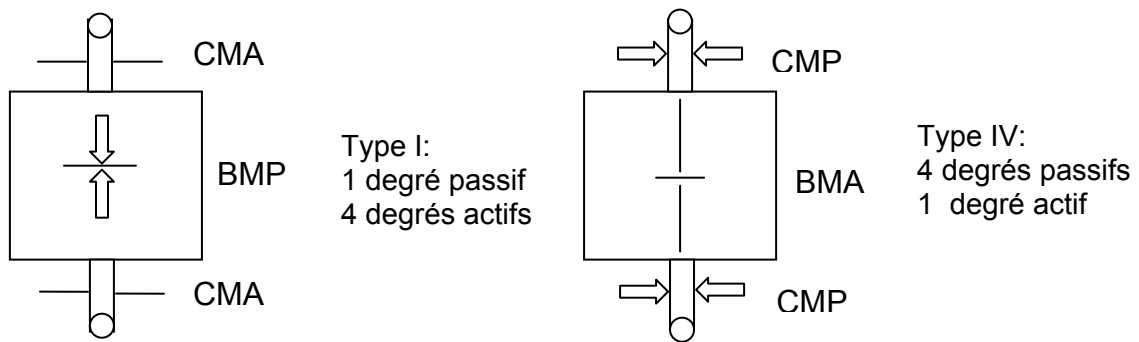


Figure. II.5 Suspension magnétique à paliers passifs et actifs: contrôle de l'axe de rotation

Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la compréhension du fonctionnement des paliers magnétiques. Nous avons présenté tous d'abord les avantages et les limitations des paliers magnétiques ainsi que leurs domaines d'utilisations dans l'industrie, ensuite on a cités leurs différents types (passive, active....), et puis, nous avons décrit la stabilité statique de point de vue (forces et raideurs) ainsi que le comportement des matériaux concernées par les suspensions magnétiques (Théorème d'Earnshaw), cela pourra nous aider par la suite à définir pour chaque type de matériaux la technique convenable qui sera utilisée pour réussir une suspension magnétique totalement stable.

CHAPITRE : III

*MISE EN ŒUVRE NUMÉRIQUE
ET VALIDATIONS*

Introduction

Plusieurs méthodes qui permettent de calculer la force globale ainsi que les densités de forces qui agissent sur un matériau ferromagnétique ont été présentées dans le premier chapitre. Ces méthodes sont basées, soit sur des modèles équivalents ou mathématiques, telles que les sources équivalentes et le tenseur de Maxwell, soit sur le principe de physique de la dérivée de l'énergie (travaux virtuels).

Ce chapitre sera consacré à la mise en œuvre numérique de ces méthodes. Pour cela, nous avons réalisé plusieurs codes de calcul sous l'environnement MATLAB.

Le but est de déterminer des éléments de choix de la méthode la plus appropriée. Plusieurs critères peuvent être considérés comme déterminants, et jouent un rôle important dans le choix d'une méthode par rapport à l'autre, parmi lesquels nous pouvons énoncer:

- La précision
- Le temps de calcul.
- La facilité d'implémentation dans un code de calcul éléments finis.
- La possibilité de donner les vraies distributions de forces.

Nous avons vu que les méthodes basées sur le concept des sources équivalentes et le tenseur de Maxwell ne permettent pas d'avoir les distributions des forces sur les matériaux. Ces méthodes servent d'artifices simples et rapides pour calculer la force globale. Ce chapitre contient aussi une comparaison entre ces méthodes par rapport aux critères énoncés.

III-1 La solution élément finis

Pour aller vers le block de calcul des forces électromagnétiques nous nous baserons sur la solution éléments finis qui représente une étape essentielle, car la précision de calcul des forces dépend de la précision du calcul du potentiel vecteur, donc de la solution éléments finis.

Dans notre travail la solution éléments finis est réalisée en utilisant le logiciel PDETOOL de MATLAB [37], [38], qui nous permet d'obtenir la solution de l'équation de diffusion électromagnétique en bidimensionnel, cependant dans certains cas, ce logiciel devient incapable de fournir cette solution. Ceci est notamment le cas lorsqu'il y a présence d'un aimant permanent ou quand il y a déplacement de structure (terme de vitesse dans

l'équation de diffusion électromagnétique). Dans ces conditions, et vu la puissance du mailleur automatique du MATLAB, il reste intéressant d'utiliser ce dernier pour mailler nos domaines, et de lui associer les outils d'assemblage et de résolution considérant la facilité d'interfaçage de programmes développés sous l'environnement Matlab.

III-2 Calcul de la force magnétique

III-2-1 La force globale qui agit sur un plier radial

Le premier dispositif étudié consiste à calculer la force qui s'exerce sur un palier radial à quatre pôles. C'est un modèle similaire à celui présenté dans la référence [39]. La géométrie du modèle ainsi que les conditions aux limites sont données dans la figure (III-1):

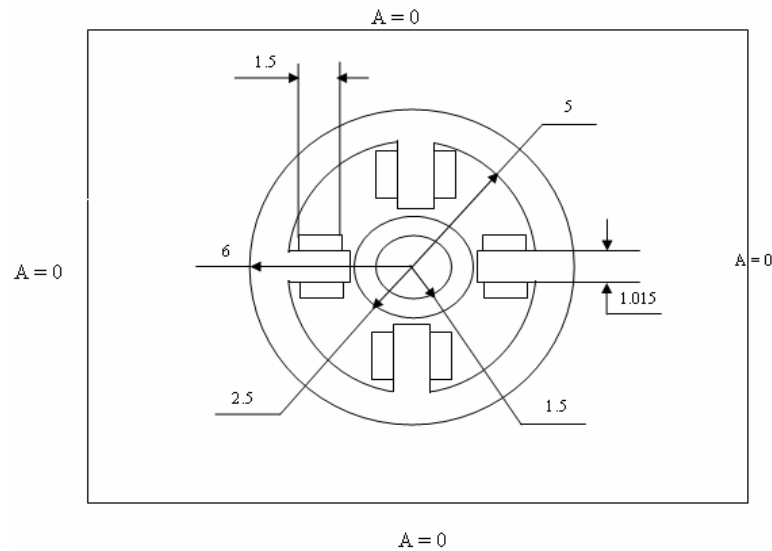


Figure III-1: Géométrie du modèle et conditions aux limites utilisées dans la résolution éléments finis (les dimensions en cm)

Le domaine de résolution considéré dans le cas d'une étude bidimensionnelle, ceci est valable en supposant que l'arbre de la machine est suffisamment long, ce qui nous permet de ramener l'étude au plan (xoy). Nous imposons une valeur nulle du potentiel vecteur magnétique sur les frontières du domaine de résolution (conditions aux limites de type Dirichlet : $A=0$ sur les frontières du domaine de résolution).

L'équation électromagnétique à résoudre en terme de potentiel vecteur magnétique ' \vec{A} ' est donnée par l'équation:

$$\vec{rot}\left(\frac{1}{\mu}\vec{rot}(\vec{A})\right) = \vec{J}_s \quad (\text{III-1})$$

La figure suivante représente le maillage éléments finis adopté à l'étude de notre système. Ce maillage est généré par le mailleur automatique du logiciel Matlab.

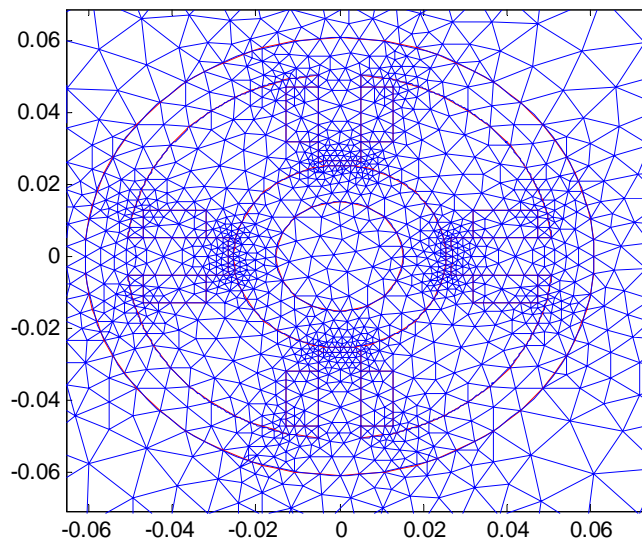


Figure III-2:Maillage éléments finis du domaine d'étude

En appliquant une excitation statorique et en utilisant le code de calcul adapté au modèle magnétostatique, nous obtenons les valeurs du potentiel vecteur \vec{A} en chaque nœud du maillage éléments finis du domaine d'étude. La figure (III-3) représente la distribution de ce potentiel vecteur magnétique.

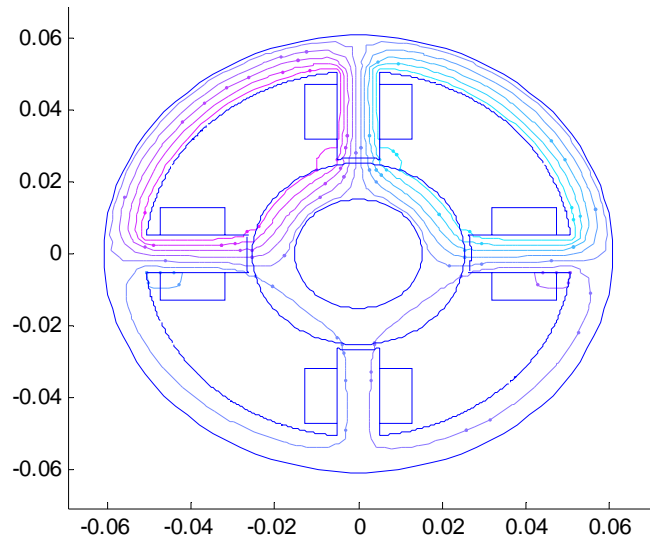


Figure III-3: distribution des lignes équipotentiels.

Pour calculer la distribution de l'induction magnétique, on se base sur la formule $\vec{B} = \text{rot}(\vec{A})$.

Sachant que $\vec{A} = A_z \cdot \vec{u}_z$, le calcul donne en coordonnées cartésiennes les composantes suivantes :

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}(x, y) \quad (\text{III.2})$$

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}(x, y) \quad (\text{III.3})$$

Pratiquement, l'induction magnétique a été calculée au centre des éléments du maillage, en se servant de la fonction « Pdegrad » de pdetool. La distribution de l'induction magnétique est montrée sur la figure suivante :

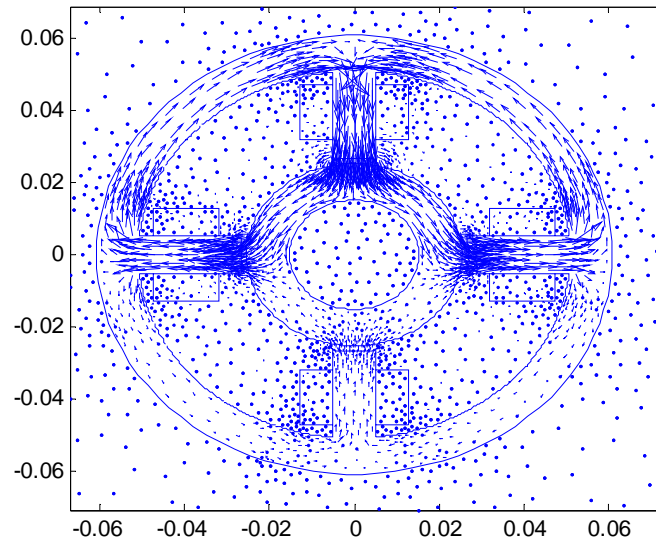


Figure III-4: distribution de l'induction magnétique \vec{B} .

La figure (III-4) montre que l'induction magnétique est maximale sous les pôles alimentés, ce qui signifie que dans cette zone règne la résultante de la force magnétique appliquée sur le rotor. Nous appliquerons les différentes approches évoquées dans le chapitre I pour calculer les forces exercées sur le rotor. Nous comparons, dans le Tableau III.1, les résultats donnés pour la valeur de la force globale.

Méthode	force suivant x [N]	force suivant y [N]	force globale [N]
Charges équivalentes	7.8674e-003	1.6744 ^e +002	1.6744e+002
Charges et courants équivalents	5.2083e-003	1.6763 ^e +002	1.6763e+002
Tenseur de Maxwell surfacique	5.3660e-003	1.6769 ^e +002	1.6769e+002
Tenseur de Maxwell volumique	3.4508e-003	1.6733 ^e +002	1.6733e+002
Travaux virtuels	1.0350e-002	1.6701 ^e +002	1.6701e+002
Dérivée de l'énergie	5.0547e-003	1.6768 ^e +002	1.6768e+002

Tableau III-1 Comparaison de la force globale qui agit sur un palier radial (Centreur) pour un maillage serré

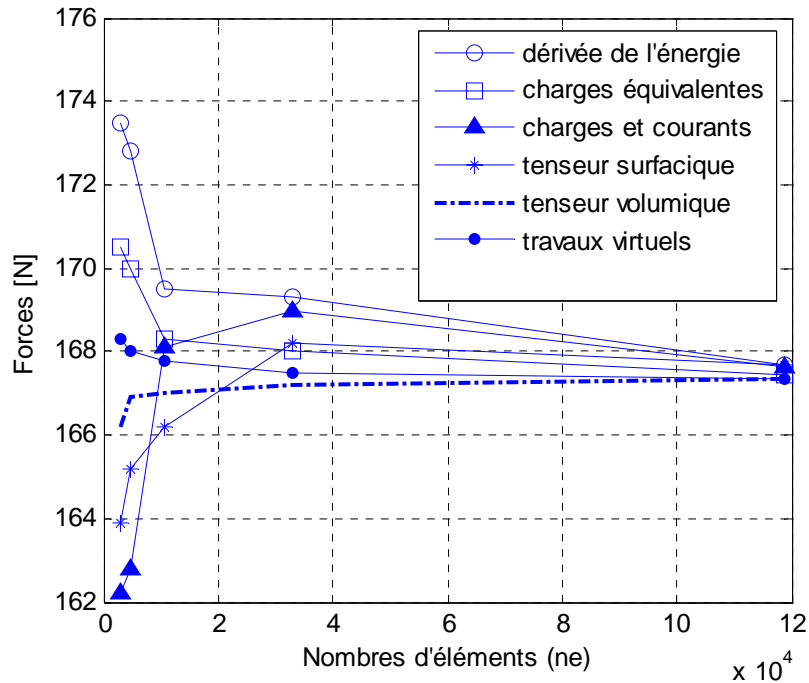


Figure III-5: La force globale calculée par les différentes méthodes par rapport au nombre d'éléments du maillage.

On remarque à travers les résultats présentés ci-dessus que pour un maillage faible, les méthodes divergent considérablement quant à la valeur de la force globale, et qu'elles ne présentent pas une bonne précision.

Cependant, les méthodes qui reposent sur une intégration volumique (travaux virtuels, tenseur de Maxwell avec intégration volumique) présentent même pour ce type de maillage des erreurs acceptables.

On remarque aussi que, au fur et à mesure que le maillage est raffiné, toutes les méthodes tendent à converger vers une valeur constante. En outre la convergence des méthodes basées sur une intégration volumique est beaucoup plus rapide que celle des méthodes basées sur une intégration surfacique.

Il reste cependant évident, que la précision de la force globale, dépend de la qualité de la solution apportée par la méthode des éléments finis. Les figures (III-5) montrent clairement que les résultats peuvent être différents d'une méthode à l'autre.

Concernant la facilité d'implémentation dans un code éléments finis, les méthodes basées sur une intégration volumique sont les plus difficiles à mettre en œuvre, car elles sont basées sur un calcul local (la force est calculée sur chaque point du maillage). Par

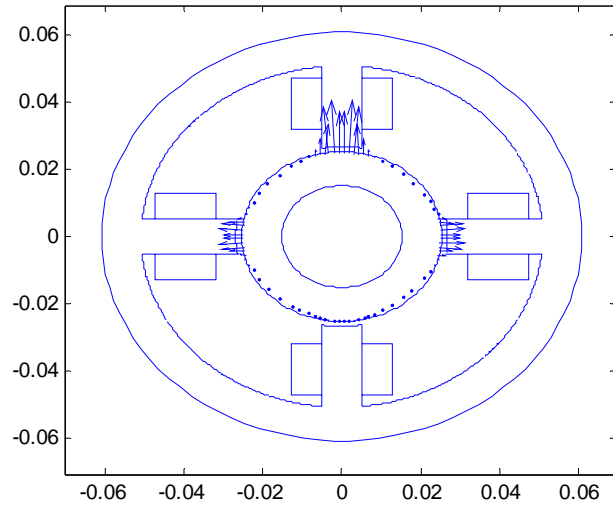
conséquent le temps de calcul pour ces méthodes est très élevé, surtout pour les systèmes à grande taille. Cependant les méthodes basées sur une intégration surfacique nécessitent un temps de calcul faible puisque l'intégration est réalisée seulement sur une couche d'éléments de la zone déformée.

III-2-2 Calcul des distributions de forces

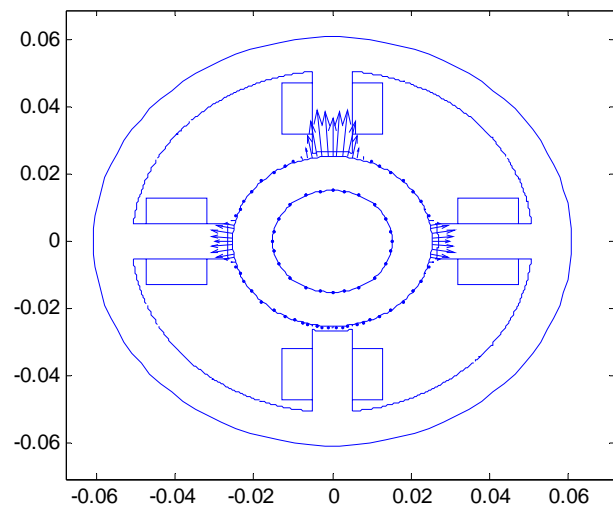
L'étude du comportement vibratoire des machines électriques nécessite une connaissance bien détaillée des distributions de forces sur la surface et à l'intérieur de ces dispositifs, car les déformations (vibrations) sont directement liées à la répartition de ces forces.

Nous avons vu dans les résultats présentés dans le paragraphe précédent que moyennant certaines restrictions concernant le maillage, toutes les méthodes aboutissent au même résultat (concernant la force globale). Cependant nous avons montré que certaines parmi elles sont fondées sur des modèles équivalents ou sur des artifices mathématiques, ces méthodes ne permettent pas de trouver des conclusions concrètes sur les distributions des forces. Les densités résultantes n'ont aucune interprétation physique. Cette partie de ce chapitre, consiste tout d'abord à confirmer l'étude théorique faite dans le chapitre I sur les méthodes équivalentes ou mathématiques.

Dans le chapitre précédent nous avons présenté plusieurs méthodes pour calculer les distributions de forces. La figure III-6 présente les distributions obtenues par les méthodes fondées sur les sources équivalentes:



(a)



(b)

Figure III-6 Distribution de forces magnétiques obtenues par les sources équivalentes

(a): Charges équivalentes

(b) : Charges et courants équivalents

Comme nous l'avons dit précédemment, ces distributions n'ont aucune interprétation physique. Chaque méthode donne une distribution différente et spécifique.

Il semble clair qu'aucune méthode ne présente effectivement les distributions de forces au sein du dispositif.

Les figures (III-7) et (III-8) donnent les distributions de forces calculées par les méthodes fondées sur le tenseur de Maxwell:

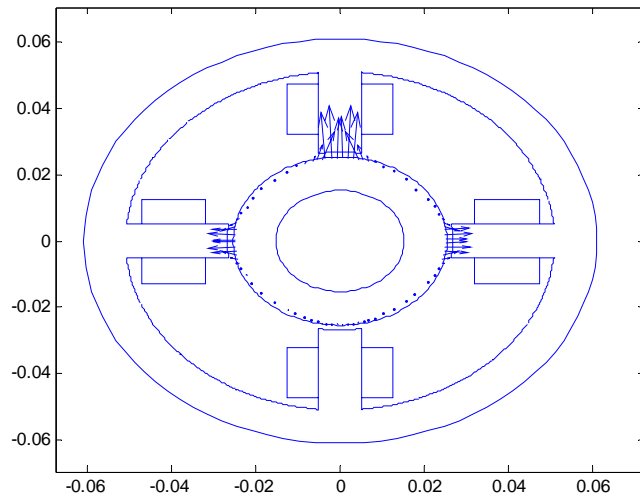


Figure III-7 Distribution de forces obtenues par le tenseur de Maxwell avec intégration surfacique

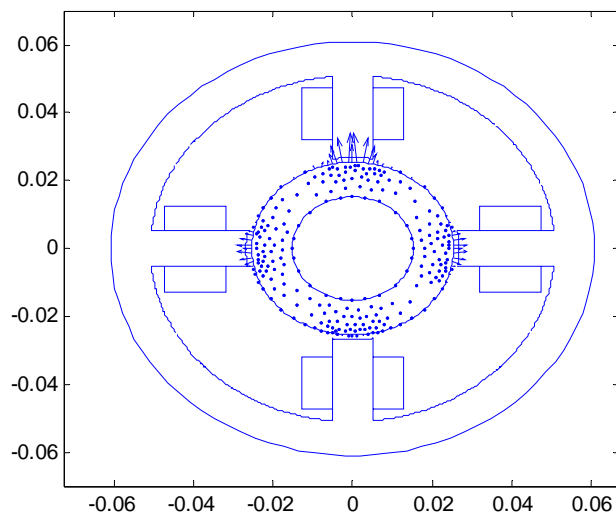


Figure III-8 Distribution de forces obtenues par le tenseur de Maxwell avec intégration volumique

Pour les méthodes fondées sur le tenseur de Maxwell, on peut faire les remarques suivantes :

Pour le tenseur de Maxwell avec intégration surfacique, les distributions de forces sont concentrées sur la surface d'intégration (en 2D le contour d'intégration), par conséquent on n'a aucune distribution de force à l'intérieur du matériau, ce qui n'est pas toujours le cas. Notons aussi que cette méthode ne nous permet pas d'obtenir les vraies densités de forces.

Pour la méthode du tenseur de Maxwell avec intégration volumique, le calcul donne des résultats similaires à ceux obtenue par la méthode des travaux virtuels. Cependant elle est basée sur un artifice mathématique, qui ne permet pas de conclure sur les densités de forces trouvées.

La figure (III-9) donne les distributions de forces par la méthode de la dérivée de l'énergie:

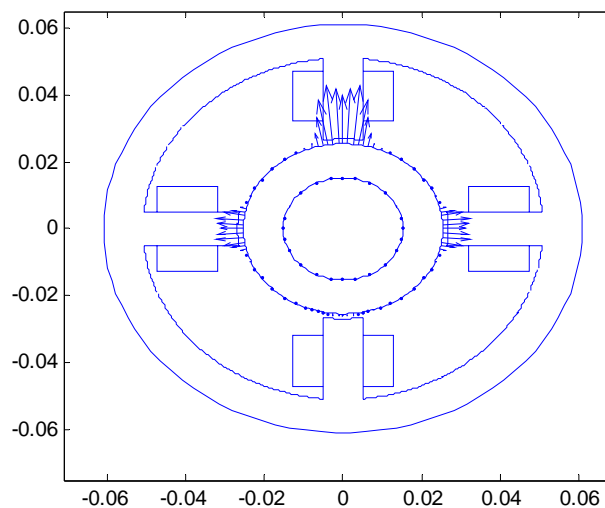


Figure III-9 Distribution de forces obtenues par la dérivée de l'énergie

La figure (III-10) donne les distributions de forces par la méthode des travaux virtuels:

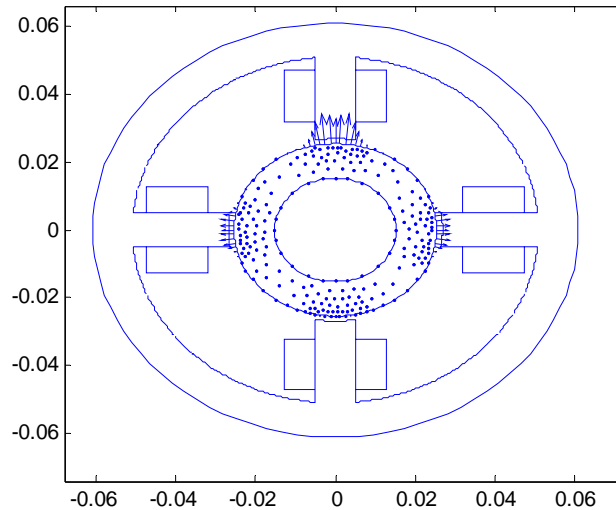


Figure III-10 Distribution de forces obtenues par la méthode des travaux virtuels

La méthode des travaux virtuels semble être la plus capable de donner les vraies densités de forces, car elle est basée sur un principe de physique (la force sur chaque nœud de l'objet est la variation de l'énergie de tous les éléments qui contiennent le nœud). Cependant, la prise en compte de certains phénomènes (la magnétostriction, la non linéarité des matériaux) complique considérablement la mise en œuvre de cette méthode.

III-2-3 L'équilibre statique d'un palier magnétique (rotor immobile)

La première condition pour qu'un corps immobile soit en équilibre est qu'il doit être soumis à des forces dont la somme vectorielle est nulle :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \quad (\text{II-4})$$

Pour des paliers magnétiques possèdent des nombres de pôles différents (2 pôles, 4 pôles, 8 pôles), on alimente toutes les bobines par la même valeur courant (12 A), pour vérifier que chacun de ces paliers est en équilibre statique.

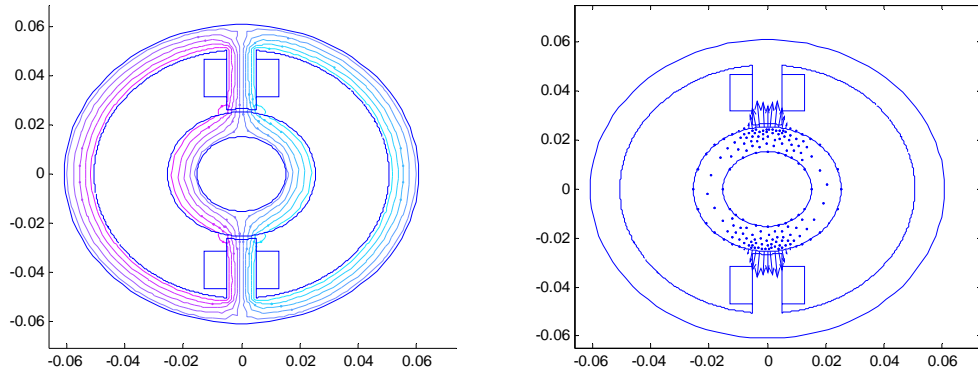


Figure III-11 Distribution des lignes de champ et de la force calculées sur un palier a 2 pôles.

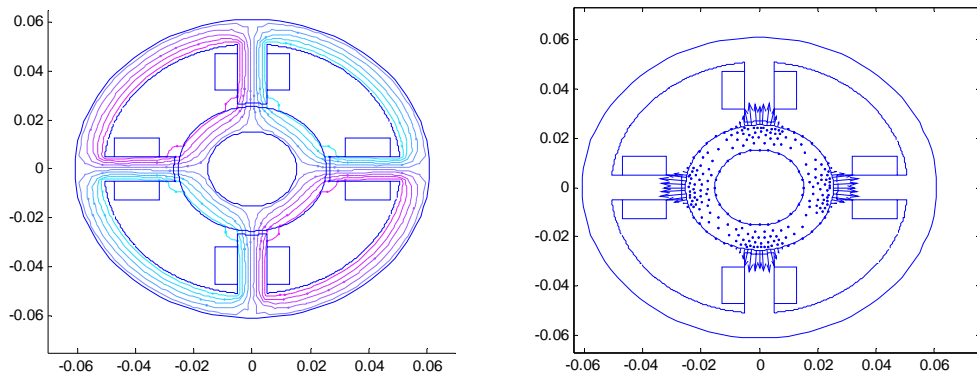


Figure III-12 Distribution des lignes de champ et de la force calculées sur un palier a 4 pôles

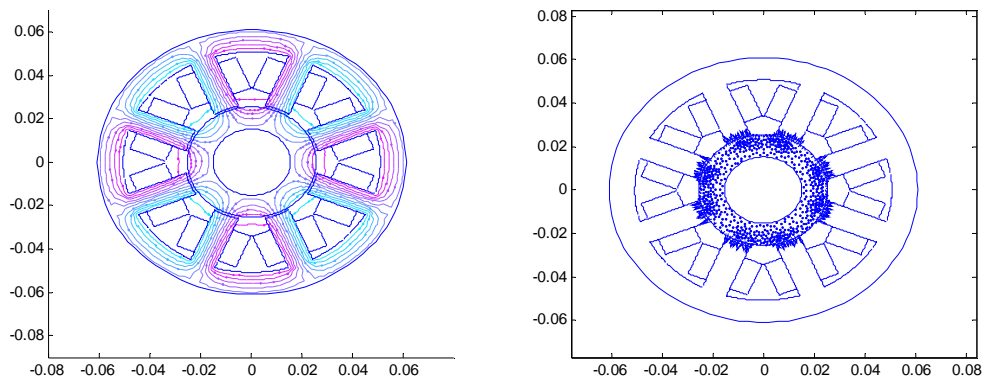


Figure III-13 Distribution des lignes de champ et de la force calculées sur un palier a 8 pôles

Nombres de pôles	F_x [N]	F_y [N]	$F_{globale}$ [N]
2 pôles	3.7713 e-004	4.9435e-004	4.9579e-003
4 pôles	5.1258e-003	7.5130 e-003	9.0950e-003
8 pôles	8.4717e-004	1.1653e-003	1.4407e-003

Tableau III-2 La valeur de la résultante de la force qui agit sur des paliers possédant différents nombres de pôles.

On remarque que la force globale est presque nulle dans tous les cas précédents, nous pouvons en conclure que la première condition de stabilité est vérifiée.

III-3 Etude d'un palier magnétique planaire

Le deuxième exemple d'application est un rail d'un train à lévitation magnétique, qui est supposé de longueur infinie, cela nous permet d'étudier ce modèle dans un plan de coordonnées cartésiennes(x-y). C'est un modèle similaire à celui présenté dans la référence [40]. La géométrie du modèle ainsi que les conditions aux limites sont données dans la figure (III-14):

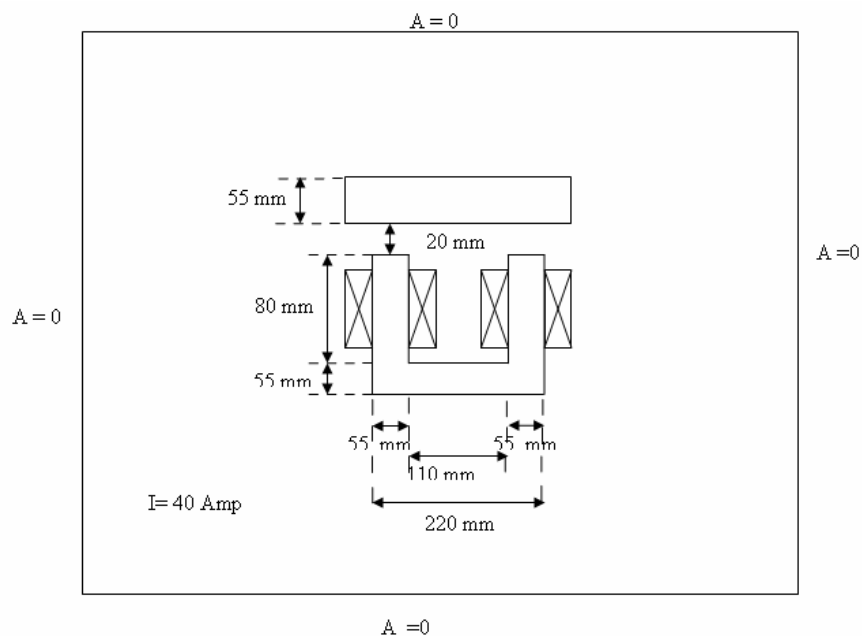


Figure. (III-14): géométrie du modèle

L'exemple précédent présente un modèle simple d'un rail du train à lévitation magnétique. Pour étudier la force de lévitation (f_y) et la force de guidage (f_x), la structure du rail ainsi que l'électroaimant est prise en compte. L'étude suivante justifie que le même électroaimant couplé avec des rails ayant des structures différentes résultent des forces de densités différentes. Le calcul des forces de guidage et de lévitation nous permet de définir la structure qui donne le meilleur guidage.

III-3-1 Variation de la force de guidage et de lévitation en fonction du déplacement de l'électroaimant

On alimente l'électroaimant avec un courant constant. Les forces de lévitation et de guidage dépendent de la position de l'électroaimant ' x ' et l'entrefer ' δ '. Nous calculons ces deux forces pour un entrefer fixé, mais en fonction du déplacement ' x '. Dans un premier temps, on considère que l'électroaimant est couplé avec un rail de forme plate. La figure suivante présente la distribution du champ magnétique en terme de potentiel vecteur magnétique et le module de la force de guidage et de lévitation en fonction du déplacement de l'électroaimant.

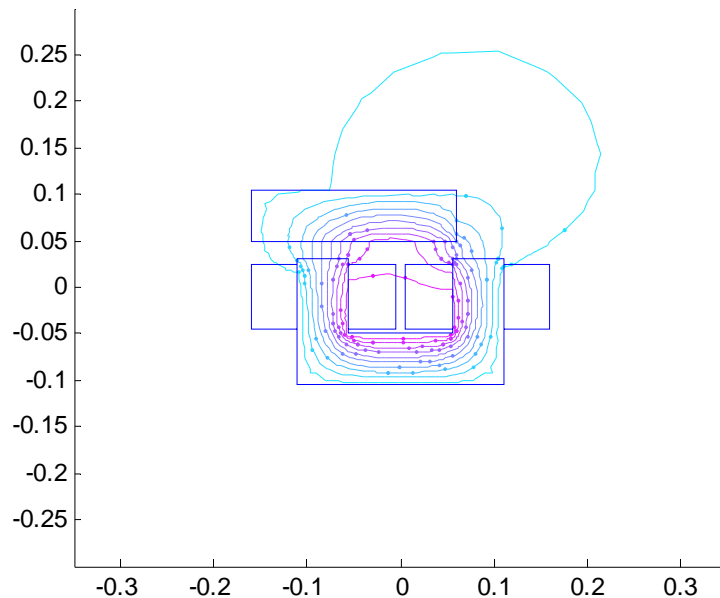


Figure III-15 : distribution des lignes équipotentielle.

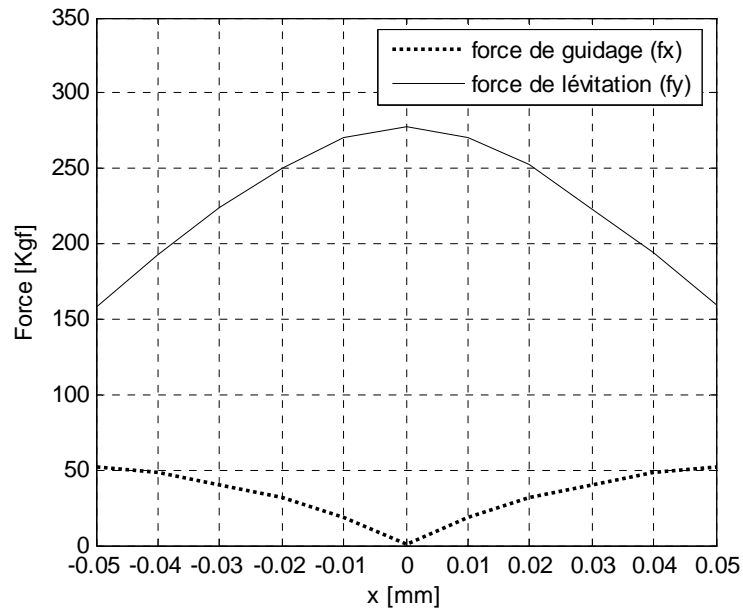


Figure III-16:Variation de la force de guidage et de lévitation en fonction du déplacement

On remarque que la force de lévitation est maximale quand l'électroaimant est centré ($x=0$), alors que la force de guidage est nulle, plus l'électroaimant éloigné du centre plus la force de guidage augmente.

La figure suivante présente la distribution du champ magnétique en terme de potentiel vecteur magnétique et le module de la force de guidage et de lévitation en fonction du déplacement de l'électroaimant pour un rail de forme C.

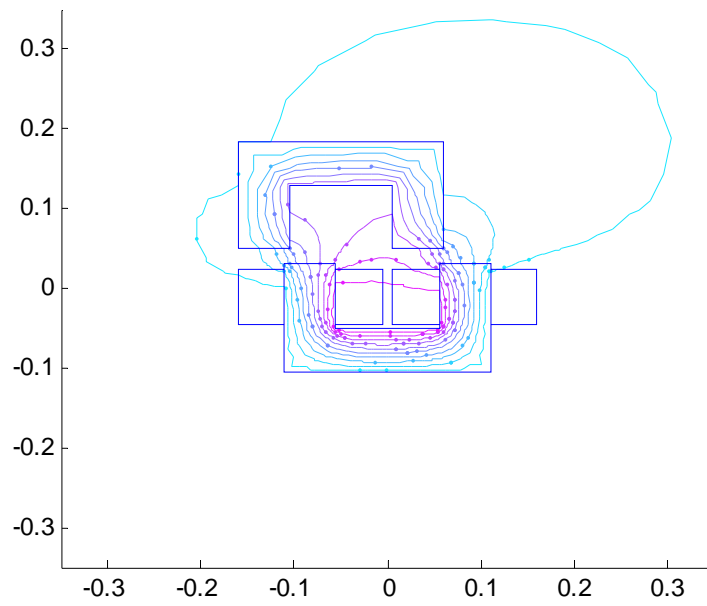


Figure III-17: distribution des lignes équipotentielle.

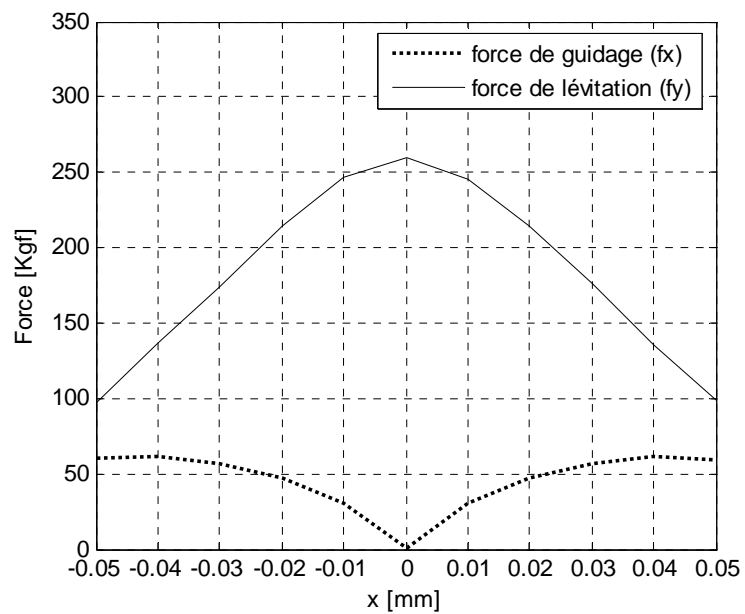


Figure III-18: Variation de la force de guidage et de lévitation en fonction du déplacement

On remarque aussi que le meilleur résultat pour de la force de guidage est obtenu avec le rail de forme C.

III-3-2 Optimisation par variation paramétriques d'un palier magnétique

L'électroaimant doit supporter une force de lévitation verticale constante pour compenser le poids du train, et comme l'électroaimant est l'actionneur du système de lévitation, il doit maintenir la position verticale constante ($\delta = \text{cts}$) (il doit avoir une force de lévitation constante). Si on étudie la force de guidage dans ces conditions, on peut noter que cette force est plus grande que dans le calcul direct.

Le problème est ainsi posé : si on veut garder la valeur de la force de lévitation constante, pour chaque position de l'électroaimant, quelle est la valeur du courant d'alimentation nécessaire pour avoir cette dernière, et la force de guidage correspondante?

III-3-2-1 méthode utilisée

- 1- Introduction de la géométrie du domaine d'étude pour une position x_m de l'électroaimant et discrétisation du domaine.
- 2- Solution éléments finis pour un courant d'alimentation I_n (on choisit une valeur initiale inférieure à celle utilisée dans cette position pour un calcul direct).
- 3- Calcul de la force magnétique suivant x et y
 - Si la force suivant y égale à la force de lévitation désirée :
On prend la valeur du courant et de la force suivant x comme solution pour cette position
 - Si non, on augmente le courant jusqu'au avoir la valeur de force suivant y désiré
- 4 - refaire les étapes 1 ,2 et 3 pour une nouvelle position de l'électroaimant.

Suivant les étapes précédentes, pour une valeur constante de la force de lévitation en peut avoir la valeur du courant d'alimentation et la force de guidage correspondante pour chaque position de l'électroaimant.

III-3-2-2 : Processus de l'optimisation

Le processus de l'optimisation et les étapes de calcul effectuées sont illustrés dans l'organigramme suivant

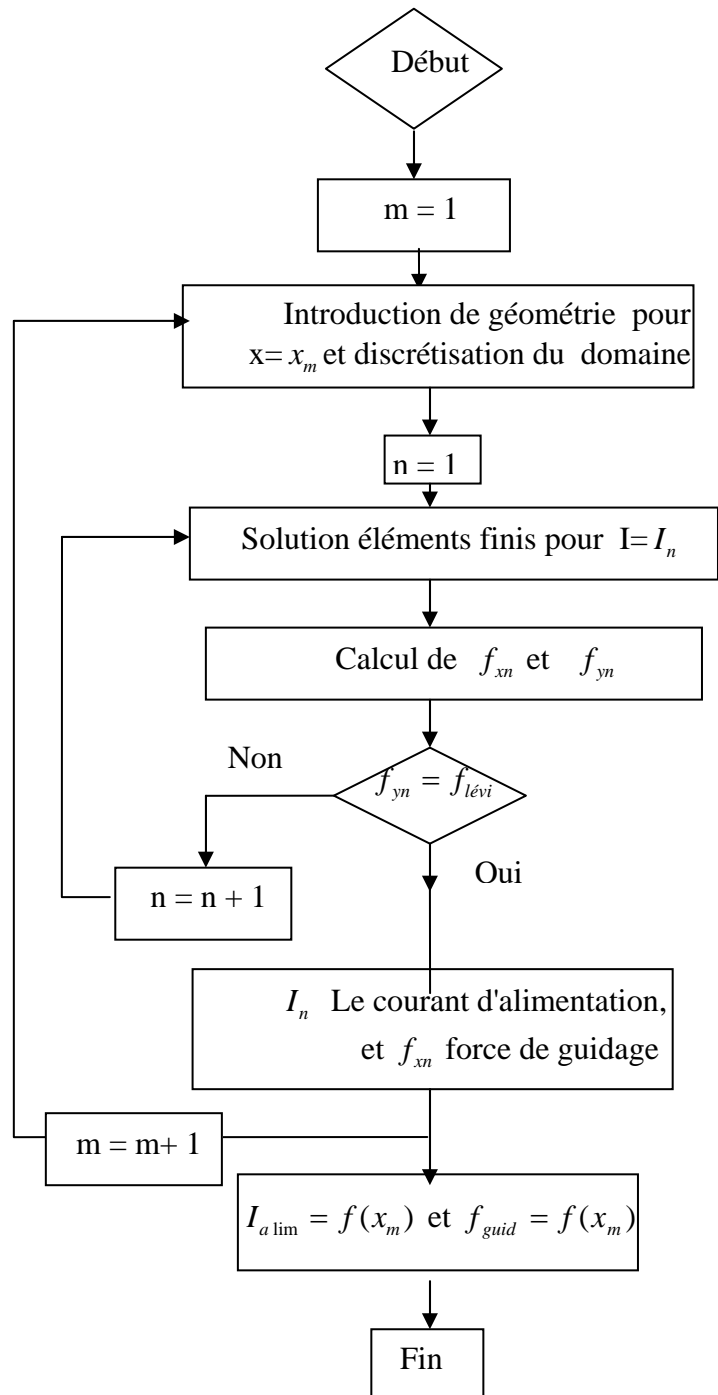


Figure (III-19): Processus de l'optimisation

III-3-2-3 Résultats de l'optimisation

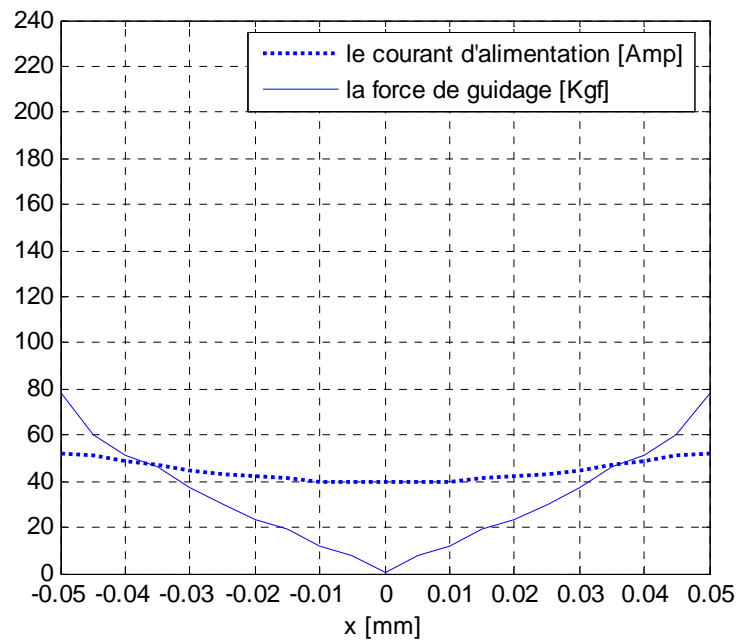


Figure III-20: la force de guidage est le courant nécessaire pour produire cette dernière pour une valeur constante de la force de lévitation pour un rail d'une forme plate.

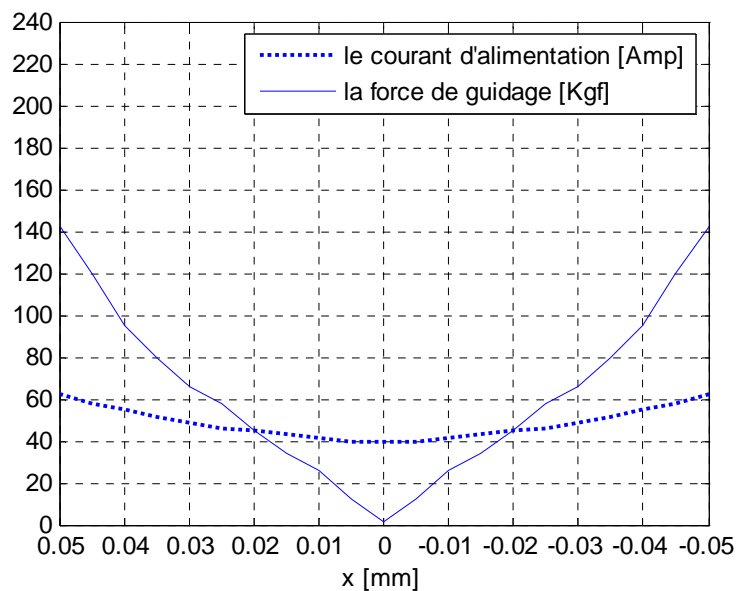


Figure III-21: la force de guidage est le courant nécessaire pour produire cette dernière pour une valeur constante de la force de lévitation pour un rail de forme C

En remarque que même pour un calcul inverse la force de guidage pour un rail de forme C est la plus élevée. Il est évidemment clair que la meilleur force de guidage est obtenue à partir du rail de forme C.

III-3-2-4 Changement de la valeur de l'entrefer

L'étude précédente est faite pour les deux types de rails pour un entrefer de valeur de 20 mm, si on conserve la même force de lévitation et on change la valeur de l'entrefer, la caractéristique précédente comment elle doit changer ?

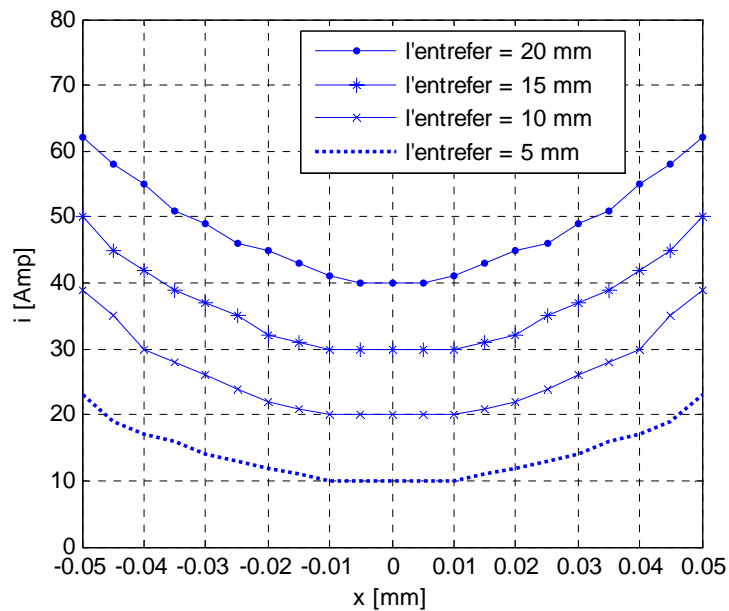


Figure III-22: Le courant d'alimentation nécessaire pour une force de lévitation constante pour plusieurs valeurs de l'entrefer.

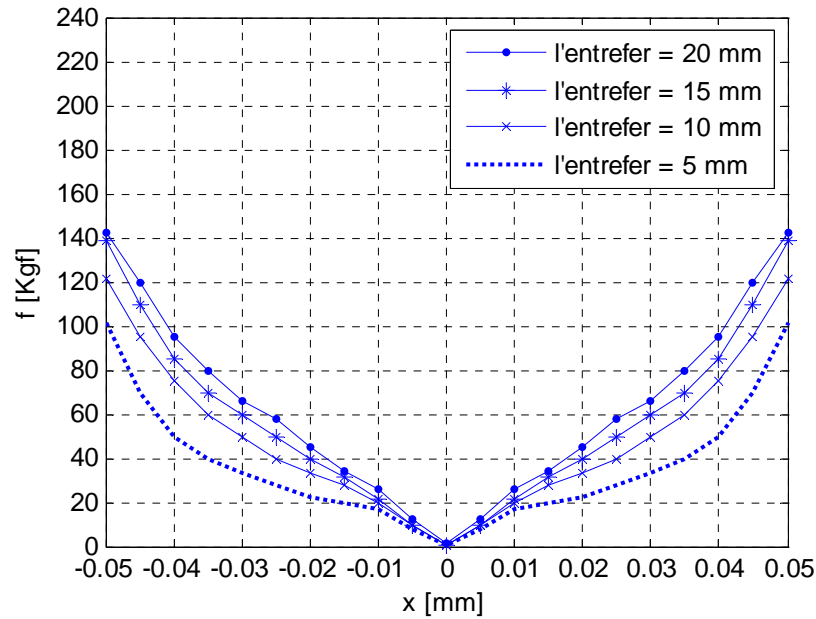


Figure III-23: La force de guidage nécessaire pour une force de lévitation constante pour plusieurs valeurs de l'entrefer.

Nous ne considérons que le cas de rail du type C, dans les figures (III-22), (III-23). Nous traçons la courbe de la force de guidage et le courant pour des différentes valeurs de l'entrefer. Nous notons que pour un petit entrefer il résulte une faible force de guidage. Nous remarquons aussi que l'inclinaison de la courbe pour $x=0$ est toujours la même quelque soit la valeur de l'entrefer.

III-3-2-5 intérêt de l'optimisation

Pour atteindre les meilleures conditions de fonctionnement du train à lévitation magnétique, il est nécessaire que la position de l'électroaimant reste fixe. En cas de déplacement, l'étude précédente nous permet de connaître la valeur de courant nécessaire pour produire une force de guidage capable de ramener l'électroaimant vers sa position initiale et garder la force de lévitation fixe.

De plus l'optimisation de deux type de rails nous permet de comparer la force de guidage pour les deux forme de rails (plate et forme C). L'étude nous a laissé voir que le rail de forme C est celui qui donne une force de guidage la plus élevée et donc la plus apte à forcer l'électroaimant à rester immobile.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons testé les performances des méthodes présentées dans les chapitres précédents. L'objectif est de chercher la méthode la plus convenable.

En ce qui concerne la force globale, plusieurs méthodes ont été analysées et comparées selon plusieurs critères, tels que la précision, le temps de calcul, et la facilité d'implémentation. Nous avons remarqué que les méthodes les plus précises sont celles qui reposent sur une intégration volumique (travaux virtuels et tenseur de Maxwell avec intégration volumique). Pour le temps de calcul les méthodes fondées sur une intégration surfacique s'avèrent les meilleures. En ce qui concerne les densités de forces, nous avons remarqué que les méthodes fondées sur les sources équivalentes ou mathématiques ne fournissent pas des résultats cohérents. Les densités obtenues sont propres à chaque méthode, même si le tenseur de Maxwell intégré volumiquement donne des résultats similaires à ceux obtenue par les travaux virtuels, et du fait qu'il soit basé sur un artifice mathématique, il reste difficile de déduire une interprétation physique des densités obtenues.

Les densités de forces obtenues par la méthode des travaux virtuels, peuvent être les vraies densités de forces, car cette méthode est fondée sur un principe physique (la variation de l'énergie). Cependant, toutes les démarches suivies pour la mise en œuvre de la méthode des travaux virtuels supposent que les matériaux sont homogènes, isotropes et incompressibles, ce qui n'est pas toujours le cas.

L'optimisation des systèmes électromagnétiques où le fonctionnement est basé sur l'interaction magnétique entre les parties fixes et les parties mobiles (dans notre cas un palier d'un tain à lévitation magnétique), peut être basée sur le calcul de la force global, elle a l'avantage de déterminer l'influence de la structure du rail sur la stabilité de l'ensemble (rail, train).

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

Les paliers magnétiques sont des dispositifs qui fonctionnent avec le phénomène de la lévitation magnétique, qui est basé sur le principe de l'interaction magnétique entre deux parties magnétiques dont l'une est fixe et l'autre est mobile. L'importance des paliers magnétiques réside dans le fait qu'ils peuvent être utilisés là où les autres paliers atteignent leurs limites ou créent des problèmes de fonctionnement, de précision ou de maintenance. Ils peuvent être utilisés dans les domaines de grandes vitesses, de hautes et de basses températures.

Les efforts magnétiques exercés sur la partie mobile d'un palier magnétique est donc constituant des grandeurs importantes pour l'étude de son fonctionnement, nous avons présenté dans ce mémoire, le développement des résultats concernant les diverses méthodes utilisées pour le calcul des distributions de ces forces, ainsi que la force globale qui agissent sur un palier magnétique.

L'intégration sur la surface pour les forces qui font apparaître seulement des densités surfacique (modèle équivalent, tenseur de Maxwell surfacique), ou sur le volume pour celui qui représentent des densités volumique (travaux virtuels, tenseur de Maxwell volumique), conduit pratiquement à la même force globale, Or, dans la modélisation numérique, l'équivalence théorique de ces méthodes ne signifie pas l'équivalence vis-à-vis de la précision numérique, car les différentes méthodes dépendent différemment de la précision du champ magnétique.

Concernant les distributions des forces, nous avons pu souligner les avantages et les limitations de chaque méthodes, nous avons montré que les méthodes fondées sur les modèles équivalents ou mathématiques ne représentent pas une réalité physique, seule la méthodes des travaux virtuels fournissent des résultats cohérents, et vu la difficulté de la mise en œuvre de cette dernière, nous avons proposé une nouvelle démarche pour l'appliquer, elle consiste à dériver une nouvelle expression de l'énergie qui s'écrit en fonction des paramètres liées à la méthode des éléments finis .

Le travail réalisé dans le cadre de magister nous permet d'aborder les problèmes liés aux interactions magnéto-mécaniques avec ou sans déformations telle que les vibrations dans les machine électriques dans lesquelles une grandes précision est exigée dans l'étude de la distribution des forces mises en jeu. Ce travail peut être compléter par un aspect tridimensionnel, avec application à des cas concrets industriels. Dans ces cas, l'étude exige le couplage de l'équation électromagnétique avec une équation mécanique.



ANNEXES

ANNEXE A.1

Etablissement de la densité de force surfacique pour la méthode de la dérivée de l'énergie

Nous avons reporté dans cette partie la démonstration de l'équivalence suivante (Voir chapitre I, Section I-4):

$$\begin{aligned}\vec{F}_s &= \int_s \left[\left((\vec{n} \cdot \vec{B}_1) \vec{H}_1 - \frac{1}{2} (\vec{B}_1 \cdot \vec{H}_1) \right) - \left((\vec{n} \cdot \vec{B}_2) \vec{H}_2 - \frac{1}{2} (\vec{B}_2 \cdot \vec{H}_2) \right) \right] \vec{n} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_s \left[\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) (\vec{B}_n^2) - (\mu_1 - \mu_2) (H_t^2) \right] \vec{n} ds\end{aligned}$$

Si on repère par 1 et 2 les deux milieux de part et d'autre de la séparation, l'expression de la force globale peut être exprimée par:

$$\vec{F}_s = \int_s \left[\left((\vec{n} \cdot \vec{B}_1) \vec{H}_1 - \frac{1}{2} (\vec{B}_1 \cdot \vec{H}_1) \right) - \left((\vec{n} \cdot \vec{B}_2) \vec{H}_2 - \frac{1}{2} (\vec{B}_2 \cdot \vec{H}_2) \right) \right] \vec{n} ds \quad (\text{A.1.1})$$

Et sa densité surfacique est donnée par:

$$\vec{f}_s = \left[(\vec{n} \cdot \vec{B}_1) \vec{H}_1 - (\vec{n} \cdot \vec{B}_2) \vec{H}_2 \right] - \frac{1}{2} \left[(\vec{B}_1 \cdot \vec{H}_1) - (\vec{B}_2 \cdot \vec{H}_2) \right] \vec{n} \quad (\text{A.1.2})$$

Soit \vec{n} et \vec{t} les vecteurs unitaires normal et tangentiel à la surface S. Dans un repère (\vec{n}, \vec{t}) les vecteurs champ et induction magnétiques peuvent être exprimés de la manière suivante:

$$\vec{B} = \vec{B}_n + \vec{B}_t \Rightarrow \begin{cases} \vec{B}_1 = \vec{B}_{1n} + \vec{B}_{1t} \\ \vec{B}_2 = \vec{B}_{2n} + \vec{B}_{2t} \end{cases} \quad (\text{A.1.3})$$

$$\vec{H} = \vec{H}_n + \vec{H}_t \Rightarrow \begin{cases} \vec{H}_1 = \vec{H}_{1n} + \vec{H}_{1t} \\ \vec{H}_2 = \vec{H}_{2n} + \vec{H}_{2t} \end{cases} \quad (\text{A.1.4})$$

Avec les conditions d'interface suivantes:

$$\begin{cases} \vec{B}_1 \cdot \vec{n} = \vec{B}_2 \cdot \vec{n} = \vec{B} \cdot \vec{n} = B_n \\ \vec{H}_1 \cdot \vec{t} = \vec{H}_2 \cdot \vec{t} = \vec{H} \cdot \vec{t} = H_t \end{cases} \quad (\text{A.1.5})$$

Prenons le **Premier terme** de l'équation (A.1.2) :

$$\left[(\vec{n} \cdot \vec{B}_1) \vec{H}_1 - (\vec{n} \cdot \vec{B}_2) \vec{H}_2 \right] \quad (\text{A.1.6})$$

A partir des équations (A.1.3), (A.1.4) et (A.1.5), on peut écrire:

$$1- (\vec{n} \cdot \vec{B}_1) \vec{H}_1 = B_n (\vec{H}_{1n} + \vec{H}_{1t}) = B_n \left(\frac{\vec{B}_{1n}}{\mu_1} - \vec{H}_{1t} \right) = B_n \left(\frac{\vec{B}_n}{\mu_1} - \vec{H}_t \right) \quad (\text{A.1.7})$$

$$2- (\vec{n} \cdot \vec{B}_2) \vec{H}_2 = B_n (\vec{H}_{2n} + \vec{H}_{2t}) = B_n \left(\frac{\vec{B}_{2n}}{\mu_2} - \vec{H}_{2t} \right) = B_n \left(\frac{\vec{B}_n}{\mu_2} - \vec{H}_t \right) \quad (\text{A.1.8})$$

Donc:

$$\left[(\vec{n} \cdot \vec{B}_1) \vec{H}_1 - (\vec{n} \cdot \vec{B}_2) \vec{H}_2 \right] = B_n \left(\frac{\vec{B}_n}{\mu_1} - \vec{H}_t \right) - B_n \left(\frac{\vec{B}_n}{\mu_2} - \vec{H}_t \right)$$

$$\left[(\vec{n} \cdot \vec{B}_1) \vec{H}_1 - (\vec{n} \cdot \vec{B}_2) \vec{H}_2 \right] = B_n^2 \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) \vec{n} \quad (\text{A.1.9})$$

Deuxième terme:

$$\frac{1}{2} \left[(\vec{B}_1 \cdot \vec{H}_1) - (\vec{B}_2 \cdot \vec{H}_2) \right] \vec{n} \quad (\text{A.1.10})$$

A partir des équations (A.1.3), (A.1.4) et (A.1.5), on peut écrire:

$$\begin{aligned} 1/ \vec{B}_1 \cdot \vec{H}_1 &= (\vec{B}_{1n} + \vec{B}_{1t}) (\vec{H}_{1n} + \vec{H}_{1t}) \\ &= (\vec{B}_{1n} + \mu_1 \vec{H}_{1t}) \left(\frac{\vec{B}_{1n}}{\mu_1} + \vec{H}_{1t} \right) \\ &= (\vec{B}_n + \mu_1 \vec{H}_t) \left(\frac{\vec{B}_n}{\mu_1} + \vec{H}_t \right) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\bar{B}_n^2}{\mu_1} + \bar{H}_t \bar{B}_n + \mu_1 \bar{H}_t^2 \right) \quad (\text{A.1.11})$$

$$\begin{aligned} 2/ \bar{B}_2 \cdot \bar{H}_2 &= (\bar{B}_{2n} + \bar{B}_{2t}) (\bar{H}_{2n} + \bar{H}_{2t}) \\ &= (\bar{B}_{2n} + \mu_2 \bar{H}_t) \left(\frac{\bar{B}_{2n}}{\mu_2} + \bar{H}_{2t} \right) \\ &= (\bar{B}_n + \mu_2 \bar{H}_t) \left(\frac{\bar{B}_n}{\mu_2} + \bar{H}_t \right) \\ &= \left(\frac{\bar{B}_n^2}{\mu_2} + 2\bar{H}_t \bar{B}_n + \mu_2 \bar{H}_t^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.1.12})$$

Les deux équations (A.I.11) et (A.I.12) donnent:

$$\begin{aligned} (\bar{B}_1 \cdot \bar{H}_1) - (\bar{B}_2 \cdot \bar{H}_2) &= \left(\frac{\bar{B}_n^2}{\mu_1} + 2\bar{H}_t \bar{B}_n + \mu_1 \bar{H}_t^2 - \frac{\bar{B}_n^2}{\mu_2} - 2\bar{H}_t \bar{B}_n - \mu_2 \bar{H}_t^2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) (B_n^2) + (\mu_1 - \mu_2) (H_t^2) \end{aligned} \quad (\text{A.1.13})$$

Donc:

$$\frac{1}{2} [(\bar{B}_1 \cdot \bar{H}_1) - (\bar{B}_2 \cdot \bar{H}_2)] \bar{n} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) (B_n^2) + (\mu_1 - \mu_2) (H_t^2) \right] \bar{n} \quad (\text{A.1.14})$$

A partir des deux expressions (A.I.9) et (A.I.14)

$$\begin{aligned} [(\bar{n} \cdot \bar{B}_1) \bar{H}_1 - (\bar{n} \cdot \bar{B}_2) \bar{H}_2] &= \frac{1}{2} [(\bar{B}_1 \cdot \bar{H}_1) - (\bar{B}_2 \cdot \bar{H}_2)] \bar{n} \\ &= B_n^2 \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) \bar{n} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) (B_n^2) + (\mu_1 - \mu_2) (H_t^2) \right] \bar{n} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) (B_n^2) - (\mu_1 - \mu_2) (H_t^2) \right] \bar{n} \end{aligned} \quad (\text{A.1.15})$$

Finalement, on aboutit à l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
& [(\vec{n} \cdot \vec{B}_1) \vec{H}_1 - (\vec{n} \cdot \vec{B}_2) \vec{H}_2] - \frac{1}{2} [(\vec{B}_1 \cdot \vec{H}_1) - (\vec{B}_2 \cdot \vec{H}_2)] \vec{n} \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) (B_n^2) - (\mu_1 - \mu_2) (H_t^2) \right] \vec{n}
\end{aligned} \tag{A.1.16}$$

Et l'expression de la densité de force surfacique \vec{f}_s sera donc donnée par la relation suivante:

$$\vec{f}_s = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) (B_n^2) - (\mu_1 - \mu_2) (H_t^2) \right] \vec{n} \tag{A.1.17}$$

La force globale correspondante est:

$$\vec{F}_s = \int_s \vec{f}_s dS = \frac{1}{2} \int_s \left[\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) (B_n^2) - (\mu_1 - \mu_2) (H_t^2) \right] \vec{n} dS \tag{A.1.18}$$

ANNEXE A.2

Calcul des forces dans le cas d'un milieu magnétique (matériau ferromagnétique)

Par la suite, et à cause des discontinuités du champ au passage d'un milieu à un autre lors du calcul des forces s'exerçant sur un milieu magnétique, on se posera la question de savoir de quel côté de la surface S on calcul le champ. Pour cela, nous adoptons les notations suivantes:

$[\bar{T}]^+$: Les termes du tenseur sont calculés à l'extérieur.

$[\bar{T}]^-$: Les termes du tenseur sont calculés à l'intérieur.

S^+ : La surface S coté extérieur.

S^- : La surface S coté intérieur.

Nous allons maintenant généraliser l'expression de la force (Voir chapitre I, Section I-6-1) au calcul des forces sur les milieux magnétiques.

Supposons un milieu composé de différents milieux magnétique: air, cuivre, fer, etc. A l'intérieur de chaque milieu magnétique, on a:

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{J} \quad (\text{A.2.1})$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (\text{A.2.2})$$

Où \vec{J} , \vec{H} et \vec{B} représentent respectivement, la densité de courant volumique, le champ magnétique et l'induction magnétique.

A la surface des différents milieux, nous avons:

$$\vec{n} \wedge (\vec{H}^+ - \vec{H}^-) = \vec{K} \quad (\text{A.2.3})$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}^+ - \vec{B}^-) = 0 \quad (\text{A.2.4})$$

Où (\vec{H}^+, \vec{B}^+) sont respectivement le champ et l'induction magnétique au voisinage de la surface extérieur du milieu, (\vec{H}^-, \vec{B}^-) le champ et l'induction magnétique au voisinage de la surface intérieur du milieu et \vec{K} la densité de courant surfacique.

A ces deux relations, il faut ajouter la relation qui caractérise le milieu:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \quad (\text{A.2.5})$$

Où \vec{M} est l'aimantation du milieu donnée par la relation suivante:

$$\vec{M} = \vec{M}_i + \vec{M}_r \quad (\text{A.2.6})$$

Où \vec{M}_i est l'aimantation induite et \vec{M}_r l'aimantation rigide.

En tenant compte de cette relation, les équations (A.2.1) et (A.2.2) prennent à l'intérieur du milieu, la forme suivante:

$$\text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J} + \text{rot} \left(\frac{\vec{M}}{\mu_0} \right) \quad (\text{A.2.7})$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (\text{A.2.8})$$

Et à la surface extérieure du milieu:

$$\vec{n} \wedge \left(\frac{\vec{B}^+}{\mu_0} - \frac{\vec{B}^-}{\mu_0} \right) = \vec{K} + \vec{n} \wedge \left(\frac{\vec{M}^+}{\mu_0} - \frac{\vec{M}^-}{\mu_0} \right) \quad (\text{A.2.9})$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}^+ - \vec{B}^-) = 0 \quad (\text{A.2.10})$$

Par comparaison avec les équations (A.2.1), (A.2.2), (A.2.3) et (A.2.4), les équations (A.2.7), (A.2.8), (A.2.9) et (A.2.10) signifient qu'un milieu magnétique peut être remplacé par un milieu amagnétique parcouru par un courant de densité volumique \vec{J}_e et de densité surfacique \vec{K}_e données par:

$$\vec{J}_e = \vec{J} + \text{rot} \left(\frac{\vec{M}}{\mu_0} \right) \quad (\text{A.2.11})$$

$$\vec{K}_e = \vec{K} + \vec{n} \wedge \left(\frac{\vec{M}^+}{\mu_0} - \frac{\vec{M}^-}{\mu_0} \right) \quad (\text{A.2.12})$$

Des considérations théoriques montrent que la force qui s'exerce sur ce milieu est égale à:

$$\vec{F} = \int_V (\vec{J}_e \wedge \vec{B}) dV + \oint_s (\vec{K}_e \wedge \vec{B}) dS \quad (\text{A.2.13})$$

D'après les relations (A.2. 7) et (A.2.11) on a d'une part:

$$\vec{J}_e = \text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \quad (\text{A.2.14})$$

Et d'autre part pour l'intégrale de volume:

$$\vec{F}_v = \int_v \left(\text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \wedge \vec{B} \right) dV \quad (\text{A.2.15})$$

Des développements de calcul sont analogues à ceux qui permettent d'établir le tenseur de Maxwell à partir de la loi de Laplace, et conduisent à l'expression suivante:

$$\vec{F}_v = \oint_s \left([\vec{T}]^- \cdot \vec{n} \right) dS \quad (\text{A.2.16})$$

Le signe (-) indique que le tenseur est calculé à l'intérieur du volume.

D'après les relations (A.2.9), (A.2.10) et (A.2.12), on a:

$$\vec{K}_e = \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{n} \wedge (\vec{B}^+ - \vec{B}^-) \right] \quad (\text{A.2.17})$$

Et l'intégrale de surface s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \vec{F}_s &= \oint_s (\vec{K}_e \wedge \vec{B}_s) dS \\ &= \frac{1}{\mu_0} \int_s \left[(\vec{n} \wedge (\vec{B}^+ - \vec{B}^-)) \wedge \vec{B}_s \right] dS \end{aligned} \quad (\text{A.2.18})$$

Le vecteur induction magnétique \vec{B}_s à la surface S du milieu est donné comme étant égale à la moyenne des vecteurs inductions magnétiques calculés da part et d'autre de l'interface, et qu'on exprime en fonction de \vec{B}^+ et \vec{B}^- comme suit:

$$\vec{B}_s = \frac{1}{2} (\vec{B}^+ + \vec{B}^-) \quad (\text{A.2.19})$$

Les développements du calcul conduisent ensuite à:

$$\vec{F}_s = \left(\oint_s ([\vec{T}]^+ \cdot \vec{n}) dS \right) - \left(\int_s ([\vec{T}]^- \cdot \vec{n}) dS \right) \quad (\text{A.2.20})$$

Or:

$$\oint_{s^+} ([\vec{T}] \vec{n}) dS = \oint_s ([\vec{T}]^+ \cdot \vec{n}) dS \quad (\text{A.2.21})$$

La force totale est donc égale à:

$$\vec{F} = \vec{F}_s + \vec{F}_v \quad (\text{A.2.22})$$

$$\vec{F} = \oint_s ([\vec{T}]^+ \cdot \vec{n}) dS \quad (\text{A.2.23})$$

La force s'exerçant sur un milieu magnétique peut donc être formulé par le tenseur de Maxwell. Cette force peut donc aussi s'exprimer par la relation:

$$\vec{F} = \frac{1}{\mu_0} \oint_s \left((\vec{B} \cdot \vec{n}) \vec{B} - \frac{1}{2} (\vec{B}^2) \vec{n} \right) dS \quad (\text{A.2.24})$$

Ou en fonction de l'induction magnétique \vec{H} :

$$\vec{F} = \mu_0 \oint_s \left((\vec{H} \cdot \vec{n}) \vec{H} - \frac{1}{2} (\vec{H}^2) \vec{n} \right) dS \quad (\text{A.2.25})$$

On constate ainsi, que l'expression de la force globale qui découle du calcul surfacique de la force d'origine magnétique reste inchangée si au lieu des forces de Laplace on doit considérer es forces s'appliquant à des matériaux ferromagnétiques.



BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **Luiz Henrique Alves DE MEDEIROS**, "Méthodes de calcul des forces électromagnétiques, Application au calcul des distributions de forces sur les aimants permanents", Thèse de Doctorat de l'institut national polytechnique de Grenoble, 28 septembre 1998
- [2] **Ali Rezek**, "Etude numérique comparative des différents modèles éléments finis pour le calcul des forces d'origine magnétique", Thèse de Magister de l'institut de technologie centre universitaire de Jijel, Algérie, 2002.
- [3] **rachek m'hemed**, "Modélisation par éléments finis de systèmes électromagnétiques en mouvement de structures tridimensionnelles, application au couplage magnétique-mécanique et au contrôle Non-destructif par courant de Foucault ", Thèse de Doctorat de l'Université de Tizi-Ouzou, Algérie, 2006.
- [4] **L.H. De Medeiros, G. Reyne, G. Meunier**, " Comparison of Global Force Calculations on Permanent Magnets", IEEE Transactions on magnetics, VOL. 34, NO. 5, September 1998.
- [5] **W. N. Fu, P. Zhou, D. Lin, S. Stanton, and Z. J. Cendes**, " Magnetic Force Computation in Permanent Magnets Using a Local Energy Coordinate Derivative Method", IEEE Transactions on magnetics, VOL. 40, NO. 2 March 2004.
- [6] **A. Benhama, A.C. Williamson, A.B.J. Reece**, " Force and torque computation from 2-D and 3-D finite element field solutions", IEE Proc-Electr. Power Appl., Vol. 146, No. 1. January 1999.
- [7] **A. Benhama, A.C. Williamson and A.B.J. Reece**, "Virtual work approach to the computation of magnetic force distribution from finite element field solutions", IEE Proc-Electr. Power Appl., Vol. 147 No. 6. November 2000.
- [8] **A. Benhama, A.C. Williamson and A.B.J. Reece**, "Computation of electromagnetic forces from finite element field solution"

- [9] **Y.M.Du, P.C. Xia, L.Y .Xiao**, "Calculating Magnetic Force of Permanent Magnet Using Maxwell Stress Method", IEEE Transactions on Superconductivity, VOL .10 .N0 .1. March 2000.
- [10] **Kamel Srairi**, "Modélisation d'Actionneurs Electromagnétiques en Régime Transitoire", Thèse de doctorat de l'IUT de Saint Nazaire, Nantes ,14 Novembre 1996.
- [11] **Olivier Barre**, "Contribution à l'étude des formulations de calcul de la force magnétiques en magnétostatique, approche numérique et validation expérimentale", Thèse de Doctorat, Ecole centrale de Lille Université des sciences et technologies de Lille, 15 Décembre 2003.
- [12] **Scipione Bobbio, Federico Delfino, Paola Girdinio, and Paolo Molfino**, "Equivalent Sources Methods for the Numerical Evaluation of Magnetic Force with Extension to Nonlinear Materials" IEEE Transactions on magnetics, VOL. 36, NO. 4, July 2000.
- [13] **A.BELAHCEN**, "Methods of calculating the magnetic forces for vibration and noise analysis of electrical machines" ACTA Polytechnica Scandinavica ,Electrical engineering series No.103,Finish academies of technology, Espoo, Finland, 2000
- [14] **Mehasni Rabia**, "Elaboration de modèle de calcul de dispositifs a induction électromagnétique : Application a un système de séparation magnétique dans les milieux particulières", Thèse de Doctorat, université-Mentouri Constantine, Faculté de sciences de l'ingénieur, Département d'électrotechnique, Algérie, 2007.
- [15] **E. Durand**, "Magnétostatique", Masson et Cie, 1968.
- [16] **Mattew N.O. Sadiku**, "Numerical Technique in Electromagnetic", Copyright c 1992 by CRC Press Inc, ISBN 0-8493-4232-5.
- [17] **Kissa Nadjet**, "Modélisation de l'hystérésis magnétique en vue de son intégration dans un code de calcul de champ électromagnétique " Thèse de Magistère, Université de Batna, Faculté de sciences de l'ingénieur, Département d'électrotechnique, Algérie, 2006.

-
- [18] **J. Pedro A. Bastos, N. Sadawski**, "Electromagnetic modelling by finite element methods", Marcel Dekker, Inc, 2003.
- [19] **Jean-Claude Sabonnadiere et Jean-Louis COULOMB**," Technique de l'ingénieur par (D 3020) ".
- [20] **Sadowski N., Lefèvre Y., Lajoie-Maxence M., Bastos J.P.A.**, "Sur le calcul des forces magnétiques", J Phys.III, France, vol.2, pp.859-870,1992.
- [21] **Takefumi Kabashima, Atsushi Kawahara, Tadahiko Goto***,"Force calculation using magnetizing currents" IEEE Transactions on magnetics, VOL. 24, NO. 1, January 1988
- [22] **M.Ito, F. Tajima, H. Kanazawa**,"Evaluation of force calculation methods" IEEE Transactions on magnetics, VOL. 26, NO. 2, March 1990
- [23] **W. Miiller**," Comparison of different methods of force calculation", IEEE Transactions on magnetics, VOL. 26, NO. 2, March 1990
- [24] **Z. Ren**," Comparison of Different Force Calculation Methods in 3D Finite Element Modeling", IEEE Transactions on magnetics, VOL. 30, NO. 5. SEPTEMBER 1994
- [25] **Olivier Barré, Pascal Brochet, and Michel Hecquet**," Experimental Validation of Magnetic and Electric Local Force Formulations Associated to Energy Principle ", IEEE Transactions on magnetics, VOL. 42, NO. 4, APRIL 2006
- [26] Airex Corporation Active Magnetic Bearings_ Linear Motion Components_ Actuator Motor Design and Stator Assemblies.htm
- [27] Magnetic Bearings - Applied Nonlinear Controls Lab - University of Alberta.htm.
- [28] High Temperature AMB for Smart Aero Engine.htm
- [29] Magnetic Bearings Information on GlobalSpec.htm

-
- [30] **Alexey Gavrilov**, "Analysis of flexible rotor position control using active magnetic bearings", thèse de Master, Lappeenranta university of technology, Department of electrical Engineering, Finland, 2006.
- [31] **Matti Antila**, " Electromechanical properties of radial active magnetic bearings", Thèse de Doctorat, ACTA Polytechnica Scandinavica ,Electrical engineering series No.92, Espoo, Finland, 1998.
- [32] **J.Delamare**, "Suspensions magnétiques partiellement passives "Thèse de Doctorat soutenue au LEG Grenoble, France, 1994.
- [33] **F.Faure**, "Suspension magnétique pour volant d'inertie" Thèse de doctorat, Laboratoire d'électrotechnique de Grenoble, L'école doctorale, France, 20 juin 2003.
- [34] **Jérôme Delamare, Fabien Faure** "Les paliers magnétiques", Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble
- [35] **H.Allag**, " Etude et élaboration d'un calcul analytique en 3D pour un système à lévitation magnétique ", Thèse de Magistère, université de Constantine .2002.
- [36] **Chouikhi Lotfi**, "Modélisation d'un palier à lévitation magnétique", Thèse de Magister, université de Constantine, 2005.
- [37] Matlab-User Guide.
- [38] Matlab – PDE Tool-Box Guide.
- [39] **David Meeker**, "Example: Radial Magnetic Bearing (Nonlinear Magnetostatics)"
September, 1999
- [40] **D'Arrigo Aldo, Rufer Alfred**, "Design of an integrated electromagnetic levitation and guidance system for Swiss Metro", Swiss Federal Institute of Technology, Industrial Electronics Laboratory, 1999.

Résumé

Les forces électromagnétiques constituent des grandeurs importantes pour l'étude du fonctionnement de plusieurs dispositifs tels que les paliers magnétiques, qui sont utilisés là où les autres paliers atteignent leurs limites ou créent des problèmes de fonctionnement, de précision ou de maintenance. Dans ce mémoire de Magistère, les différentes approches théoriques et algorithmiques pour le calcul des forces magnétiques (tenseur de Maxwell, travaux virtuels, sources équivalentes) sont mises en place. Nous montrons notamment l'équivalence entre ces méthodes, du point de vue du calcul de la force globale. Nous montrons, par contre, que pour l'appréciation de la répartition spatiale de ces forces des écarts existent entre les résultats fournis par les différentes approches, et seules les méthodes qui reposent sur le principe physique des travaux virtuels permettent de parvenir à des résultats cohérents. Plusieurs applications sont présentées au titre de la validation de nos travaux

Abstract

The electromagnetic forces are a very important quantities for the treatment of different systems like the magnetic bearings which used when the conventional bearings achieve their limits or generate some problems in working, precision or maintenance. In this thesis, the different theoretic and algorithmic approaches for the calculation of the electromagnetic forces (Maxwell stress tensor, virtual work, equivalent sources) are treated. The global force is the same for all methods, but the spatial repartition of forces densities is different between those methods to another; only the method which based on a physical principe (virtual work) gives a logical result. Some applications are presented to valid our approaches.

ملخص

إن القوة المغناطيسية تعتبر كمية مهمة أثناء دراسة عمل العديد من الأنظمة مثل المساند المغناطيسية، هذه الأخيرة تستعمل عندما تعترض المساند التقليدية مشاكل في التشغيل، في الدقة أو في الصيانة. في هذه المذكرة قمنا بدراسة نظرية و رقمية من اجل حساب هاته القوى مستعملين طرقا مختلفة (طريقة ماكسويل، الأعمال الافتراضية، المصادر المكافئة). لقد برهنا تكافؤ هاته الطرق من حيث القيمة الكلية للقوة المغناطيسية، في حين أن توزيع هاته القوى يختلف من طريقة إلى أخرى، فقط تلك التي تعتمد على مبدأ فيزيائي (الأعمال الافتراضية) تعطي نتيجة منطقية. قمنا ببعض التطبيقات لإثبات صحة دراستنا.