

**République Algérienne Démocratique et populaire**  
**Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique**

N° d'ordre :.....

Serie :.....



**Mémoire de magister**

**Présenté à l'université Des Frères Mentouri - Constantine -**  
**Faculté des sciences de la technologie**  
**Département de : Génie Civil**

Option : Structures

**Thème**

**Analyse de l'effet de cisaillement sur le comportement des poutres :**  
**Comparaison entre la poutre de Bernoulli et la poutre de Timoshenko**

Par :

**BAROUR SABIHA**

Soutenu le : .....

Devant le jury composé de :

Président Mr.Guetteche Mohamed Nacer Prof. Université Des Frères Mentouri - Constantine

Rapporteur Mr.Zergua Abdesselam MCA. Université Des Frères Mentouri - Constantine

Examineurs Mr.Beroual Ahmed MCA. Université Des Frères Mentouri - Constantine

Mr.Zarza Tahar MCA . Université Des Frères Mentouri - Constantine



## REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord mon promoteur Monsieur **Zergua Abdesselam**, maître de conférences au département de génie civil à l'université des frères mentouri ,Constantine pour ses conseils précieux, sa générosité, son suivi et l'aide qu'il m'a apporté tout au long de la réalisation de ce travail, encore merci pour sa patience et sa disponibilité qui m'ont permis de bien organiser ce mémoire.

Je remercie Monsieur **Guetteche Mohamed Nacer** , professeur au département de génie civil à l'université des frères mentouri , Constantine d'avoir accepté de présider mon jury de ce mémoire.

Je remercie également Messieurs **Zarza Tahar** , **Beroual Ahmed** , maîtres de conférences au département de génie civil à l'université des frères mentouri ,Constantine pour leurs sympathiques participations au jury de ce mémoire.

J'adresse mes remerciements à l'ensemble des enseignants du département de génie civil à l'université des frères mentouri , Constantine qu'ont contribué à ma formation au niveau de la graduation et de la poste – graduation.

Je remercie tout mon entourage et particulièrement mes parents et ma famille.

*Barour Sabiha.*

## RESUME

L'analyse des réponses des poutres a fait l'objet de plusieurs théories notamment la théorie de Bernoulli qui néglige les déformées dues à l'effort tranchant et celle de Timoshenko où ces déformées sont prises en compte.

Ce travail a pour objectif la modélisation et l'analyse du comportement d'une poutre en prenant en considération plusieurs paramètres, principalement l'élanement de la poutre, les conditions d'appuis (poutres bi-appuyées, poutres consoles, poutres encastrees – appuyées, poutres bi-encastrees) et le module de Young et leurs effets sur les déplacements – rotations ainsi que sur le phénomène de blocage dû au cisaillement.

La modélisation a été faite en utilisant le logiciel de calcul ANSYS. Les résultats de cette modélisation ont été validés par comparaison avec ceux obtenus à partir des théories des poutres (théorie de Timoshenko, de Bernoulli, de Friedman et Kosmatka) ainsi que ceux obtenus par les formules analytiques de la résistance des matériaux.

Une étude paramétrique comparative a eu lieu. Plusieurs paramètres ont été analysés par les différentes méthodes y compris la modélisation par ANSYS.

Il a été observé que les courbes des déplacements et des rotations augmentent avec l'augmentation du rapport ( $L/h$ ). Les courbes obtenues par les théories de Bernoulli, de Friedman et Kosmatka et de modélisation par ANSYS sont presque confondues avec la courbe analytique de RDM, sauf la courbe de Timoshenko qui est souvent différente. La variation des valeurs des déplacements – rotations apparaissent à partir de ( $L/h = 4$ ).

La poutre de Timoshenko a donné des résultats qui coïncident avec les autres théories pour des élanements ( $L/h \leq 4$ ) au delà de cette valeur les résultats deviennent différents par rapports aux autres théories. C'est l'effet de cisaillement des poutres épaisses qui apparait. La théorie de Bernoulli est satisfaisante pour le domaine des poutres élancées.

### MOTS CLES :

Théories des poutres, théorie de Bernoulli, théorie de Timoshenko, théorie de Friedman et Kosmatka, phénomène de blocage, modélisation par ANSYS ; effet de cisaillement.

## ABSTRACT

Analysis of the beams responses has been the subject of many theories including Bernoulli's theory which neglects the shear deformation and the Timoshenko theory where these deformations are taken into account.

This work aims to modeling and analyzing the behavior of a beam taking into consideration several parameters, mainly the slenderness of the beam, the support condition (Pinned-pinned beam, cantilever beam, pinned-fixed beam, Fixed-fixed beam) and the Young's modulus and their effects on displacement - rotations as well as the locking phenomenon due to shear.

The modeling was done using the ANSYS software, and the obtained results were validated by comparison with those obtained from the beams theories (Timoshenko theory, Bernoulli theory, Friedman and Kosmatka theory) and those obtained by the analytical expressions of the strength of materials.

Comparative parametric study was conducted. Many parameters were analyzed by different methods including modeling by ANSYS. It was observed that the displacements and rotations curves increase with the increase of the ratio ( $L / h$ ). The curves obtained by Bernoulli's theory, Friedman and Kosmatka and those of modeling by ANSYS are nearly the coincident with the analytical curve of RDM, except Timoshenko curve which is often different. Changes in the displacements - rotations values appear from ( $L / h = 4$ ).

The beam of Timoshenko gave results that coincide with other theories for ( $L / h \leq 4$ ); beyond this value, results become different with those of the other theories. It is the shear effect of thick beams. However, Bernoulli's theory is satisfactory for the slender beams.

**Key words :** Beam theories, Bernoulli's theory, Timoshenko's theory, theory of Friedman and Kosmatka, Locking phenomenon, ANSYS modeling; shearing effect.

## ملخص

إن تحليل الردود للروافد كان موضوع عدة نظريات منها نظرية برنولي التي تهمل التشوه الناجم عن القص و نظرية وتيموشينكو التي تأخذ هذه التشوهات بعين الاعتبار.

يهدف هذا العمل إلى نمذجة و تحليل سلوك رافدة مع الأخذ بعين لإعتبار للعديد من العوامل ، أساسا أبعاد الرافدة ، شروط الإرتكاز و التثبيت ( , poutres bi-appuyées , poutres consoles , poutres encastées – appuyées, ) و معامل الليونة (معامل يونغ) و تأثيرها على الإزاحات و الدوران و كذلك على ظاهرة الإقفال بسبب القص.

وقد تم وضع نماذج باستخدام برنامج ANSYS . حيث تم التأكد من صحة نتائج النموذج بالمقارنة مع تلك التي تحصلنا عليها من نظريات الروافد (نظرية تيموشينكو، نظرية برنولي، نظرية فريدمان وكوسماتكا ) و كذلك تلك التي تحصلنا عليها من الطريقة التحليلية لمقاومة المواد.

و قد جرت دراسة مقارنة لعدة عوامل أين تم تحليل تلك العوامل بعدة طرق بما في ذلك طريقة النمذجة ببرنامج ANSYS. وقد لوحظ أن منحنيات الإزاحات و الدوران تزداد مع تزايد نسبة (L/h). حيث أن المنحنيات التي تحصلنا عليها من نظريات برنولي، فريدمان و كوسماتكا و تلك التي تحصلنا عليها من النمذجة هي تقريبا متطابقة مع منحنى العلاقة التحليلية لمقاومة المواد. إلا منحنى تيموشينكو غالبا ما يكون مختلفا. و ان التغيير في قيم الإزاحات و الدوران تظهر ابتداء من (L/h = 4) .

إن رافدة تيموشينكو أعطت نتائج التي تتطابق مع باقي النظريات من أجل قيم (L/h ≤ 4) و عند تجاوز هذه القيم فإن النتائج تصبح مغايرة مقارنة مع النظريات الأخرى. إنه مفعول قوة القص في الروافد السميكة. إن نظرية برنولي مرضية بالنسبة للروافد النحيلة.

### كلمات مفتاحية:

نظريات الروافد، نظرية برنولي، نظرية تيموشينكو، نظرية فريدمان و كوسماتكا , ظاهرة الإقفال ،النمذجة ببرنامج ANSYS، مفعول قوى القص

## RESUME

INTRODUCTION GENERALE.....	1
<b>CHAPITRE 1 RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE</b>	
1.1. Introduction .....	3
1.2. Influence des différents paramètres sur le comportement d'une poutre .....	4
1.2.1. Généralités .....	4
1.2.2. Le coefficient de correction de cisaillement.....	7
1.2.3. Influence des rapports L/h sur le comportement d'une poutre.....	10
<b>CHAPITRE 2 ANALYSE DU COMPORTEMENT D'UNE POUTRE</b>	
2.1. Introduction .....	12
2.2. Notion d'élasticité .....	12
2.2.1. Hypothèses sur le matériau .....	13
2.2.2. Les champs vectoriels .....	13
2.2.2.1. Les champs des contraintes .....	13
2.2.2.2. Les champs des déformations .....	14
2.2.3. Equations d'équilibre pour un corps à l'état statique.....	15
2.2.3.1. Equations d'équilibre des forces .....	15
2.2.4. Relation entre déformations et déplacements .....	16
2.2.4. 1. Types de déformations .....	16
2.2.5. Lois de comportement élastique .....	19
2.3. Méthodes de résolution des problèmes des structures .....	20
2.3.1. Méthode des éléments finis .....	20
2.3.1.1. Principes de la M.E.F.....	21
2.3.1.2 . Présentation générale de la méthode.....	22
2.3.1.3. Etapes de résolution d'un problème par éléments finis.....	23
2.3.1.4. Intérêts et limitations de la M.E.F .....	23

2.3.2. Théorie de Bernoulli .....	24
2.3.2.1. Matrice de rigidité de Bernoulli .....	25
2.3.3. Théorie de Timoshenko .....	25
2.3.3.1. Matrice de rigidité de Timoshenko .....	26
2.3.4. Théorie de Friedman et Kosmatka .....	27
2.3.5. Phénomène de blocage ( ou verrouillage) au cisaillement.....	28
2.3.5 .1. Solutions proposées pour le blocage par cisaillement.....	28
2.4. Conclusion .....	29

### **CHAPITRE 3            MODELISATION DES POUTRES PAR LE LOGICIEL    ANSYS**

3.1. Introduction .....	30
3.2. Description d'Ansys12 .....	30
3.3. Organisation du logiciel ANSYS12.....	31
3.4. Etapes de modélisation des poutres étudiées .....	32
3.4.1. Définition du type élément .....	32
3.4.2 .Définition des propriétés géométriques et matérielles de l'élément .....	34
3.4.3. Génération des points-cles ou (keypoints) .....	36
3.4.4. Maillage .....	37
3.5. Résolution .....	37
3.6. Affichages et traitement des résultats.....	38

### **CHAPITRE 4            RESULTATS ET DISCUSSIONS**

4.1. Introduction .....	42
4.2. Caractéristiques des poutres .....	43
4.3. Effets d'élançement sur le comportement des poutres.....	43
4.3.1. Validation de la modélisation.....	45
4.4. Effets des conditions d'appuis des poutres .....	55
4.4. 1.Différents types d'appuis utilisés .....	55

4.4.2. Résultats obtenus par différentes méthode.....	57
4.5. Influence du module d'élasticité sur le comportement des poutres.....	66
4.5.1. Résultats obtenus par différentes méthodes .....	66
4.6. Conclusion.....	81
Conclusion générale et recommandations.....	82
Références bibliographiques.....	83
Annexe I.....	87

## LISTE DES FIGURES

<b>CHAPITRE 1 RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE</b>		
Figure 1.1	Cas d'une poutre simplement appuyée .....	4
Figure 1.2	Cas d'une poutre console .....	4
Figure 1.3	Cas d'une poutre avec porte à faux .....	5
Figure 1.4	Cas d'une poutre encastree et appuyée .....	5
Figure 1.5	Cas d'une poutre continue .....	6
Figure 1.6	Cas d'une poutre à double encastrement .....	6
Figure 1.7	Cas d'une poutre supportée à double.....	7
<b>CHAPITRE 2 ANALYSE DU COMPORTEMENT D'UNE POUTRE</b>		
Figure 2.1	Vecteurs contraintes $T^{\rightarrow}$ sur trois facettes orthogonales .....	13
Figure 2.2	Tenseur de contrainte pour un volume élémentaire .....	14
Figure 2.3	Déformation d'un élément dans le plan x y .....	17
Figure 2.4	Étapes de l'analyse d'un problème aux limites .....	21
Figure 2.5	discrétisation géométrique .....	21
Figure 2.6	Numérotation des nœuds et des éléments pour un problème à 2 dimensions ( première méthode).....	22
Figure 2.7	Numérotation des nœuds et des éléments pour problème (deuxième méthode).....	22
Figure 2.8	Hypothèses cinématiques pour une poutre Bernoulli .....	24
Figure 2.9	Hypothèses cinématiques pour une poutre Timoshenko .....	26
<b>CHAPITRE 3 MODELISATION DES POUTRES PAR LE LOGICIEL ANSYS</b>		
Figure 3.1	Schéma d'utilisation classique d'ANSYS .....	32
Figure 3.2	Le type d'élément (Elément Type).....	33
Figure 3.3	Schéma statique de poutre par ANSYS (2-D Elastic Beam ) .....	33
Figure 3.4	Définition des propriétés géométriques .....	35
Figure 3.5	Définition des propriétés matérielles de l'élément .....	36
Figure 3.6	Définition des points-clés (Keypoints).....	37
Figure 3.7	Maillage d'une poutre (maillage : 30).....	37
Figure 3.8	Choix du type et d'option d'analyse.....	37
Figure 3.9	Application des conditions aux limites .....	38
Figure 3.10	Imposer les charges .....	38
Figure 3.11	Résolution du modèle .....	38
Figure 3.12	Affichage des déplacements d'une poutre étudiée .....	39
Figure 3.13	Position déformée d'une poutre étudiée .....	41

## CHAPITRE 4                      RESULTATS ET DISCUSSIONS

Figure 4.1	Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports L/h par différentes méthodes.....	45
Figure 4.2	Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports L/h par différentes méthodes .....	46
Figure 4.3	Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports L/h par différents méthodes .....	47
Figure 4.4	Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports L/h par différents méthodes .....	47
Figure 4.5	Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports L/h par différentes méthodes .....	48
Figure 4.6	Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports L/h par différentes méthodes .....	49
Figure 4.7	Rotations ( $\Theta_3$ ) en fonction des rapports L/h par différentes méthodes.....	49
Figure 4.8	Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports L/h par différentes méthodes ...	50
Figure 4.9	Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports L/h par différentes méthodes .....	50
Figure 4.10	Rotations ( $\Theta_1$ ) en fonction des rapports L/h par différentes méthodes .....	51
Figure 4.11	Rotations ( $\Theta_3$ ) en fonction des rapports L/h par différentes méthodes .....	51
Figure 4.12	Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports L/h par différentes méthodes .....	52
Figure 4.13	Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports L/h par différentes méthodes .....	53
Figure 4.14	Déplacements ( $V_3$ ) en fonction des rapports L/h par différentes méthodes...	54
Figure 4.15	Rotations ( $\Theta_3$ ) en fonction des rapports L/h par différentes méthodes .....	54
Figure 4.16	Les liaisons parfaites .....	55
Figure 4.17	Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différentes poutres.....	57
Figure 4.18	Rotation ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différentes poutres .....	58
Figure 4.19	Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différentes poutres..	59
Figure 4.20	Rotation ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différentes poutres .....	59
Figure 4.21	Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différentes poutres .....	60
Figure 4.22	Rotation ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différentes poutres.....	61
Figure 4.23	Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différentes poutres .....	62
Figure 4.24	Rotation ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différentes poutres .....	62
Figure 4.25	Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différentes poutres.....	63
Figure 4.26	Rotation ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différentes poutres .....	64
Figure 4.27	Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différents méthodes..	65
Figure 4.28	Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différents méthodes .....	65
Figure 4.29	Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différents modules de Young (Méthode RDM ; Poutre console) .....	67
Figure 4.30	Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différents modules de Young (Méthode RDM ; Poutre console) .....	68
Figure 4.31	Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différents modules de Young (Méthode RDM ; Poutre appuyée – encastrée) .....	68
Figure 4.32	Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différents modules de Young	69

	(Méthode RDM ; Poutre appuyée – encastrée) .....	
Figure 4.33	Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différents module de Young (Méthode Bernoulli; Poutre console) .....	70
Figure 4.34	Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différents module de Young (Méthode Bernoulli; Poutre console) .....	70
Figure 4.35	Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différents module de Young (Méthode Bernoulli; Poutre appuyée – encastrée) .....	71
Figure 4.36	Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différents module de Young (Méthode Bernoulli; Poutre appuyée – encastrée) .....	71
Figure 4.37	Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différents module de Young (Méthode Friedman et Kosmatka; Poutre console) .....	72
Figure 4.38	Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différents module de Young (Méthode Friedman et Kosmatka; Poutre console).....	73
Figure 4.39	Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différents modules de Young (Méthode Friedman et Kosmatka; Poutre appuyée- encastrée) .....	73
Figure 4.40	Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différents modules de Young (Méthode Friedman et Kosmatka; Poutre appuyée- encastrée) .....	74
Figure 4.41	Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différents modules de Young (Modélisation. Poutre console) .....	75
Figure 4.42	Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différents modules de Young (Modélisation. Poutre console) .....	75
Figure 4.43	Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différents modules de Young (Modélisation. Poutre appuyée - encastrée).....	76
Figure 4.44	Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différents modules de Young (Modélisation. Poutre appuyée - encastrée) .....	76
Figure 4.45	Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différents modules de Young (Méthode de Timoshenko. Poutre console)	77
Figure 4.46	Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différents modules de Young (Méthode de Timoshenko. Poutre console) .....	78
Figure 4.47	Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différents modules de Young (Méthode de Timoshenko. Poutre appuyée - encastrée) .....	78
Figure 4.48	Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différents modules de Young (Méthode de Timoshenko. Poutre appuyée - encastrée) .....	79
Figure 4.49	Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports L/h différentes méthodes.....	80
Figure 4.50	Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports L/h par différentes méthodes.....	80

## LISTE DES TABLEAUX

### **CHAPITRE 3 MODELISATION DES POUTRES PAR LE LOGICIEL ANSYS**

Tableau 3.1	Caractéristiques des éléments types utilisés (Beam 3) .....	34
Tableau 3.2	Différents types de poutres .....	34
Tableau 3.3	Propriétés mécaniques et géométriques des poutres testées .....	35
Tableau 3.4	Les coordonnées de la poutre .....	36
Tableau 3.5	Résultats des déplacements et rotations pour différentes poutres.....	41

### **CHAPITRE 4 RESULTATS ET DISCUSSIONS**

Tableau 4.1	Différents types de poutres.....	42
Tableau 4.2	Propriétés mécaniques et géométriques des poutres testées .....	43
Tableau 4.3	Valeurs des rapports l/h utilisés .....	44
	Expressions des rotations et des flèches pour différents types de poutres selon	44
Tableau 4.4	la méthode des résistances des matériaux.....	
Tableau 4.5	Les actions de liaison .....	56
Tableau 4.6	Types des poutres .....	57
Tableau 4.7	Différents modules de Young .....	66
Tableau 4.8	Types des poutres .....	66

# INTRODUCTION

## **INTRODUCTION GENERALE**

La poutre est un élément essentiel dans une construction. Cet élément est utilisé dans la vie courante pour la construction dans les bâtiments, et des ouvrages de génie civil. Il existe plusieurs méthodes pour le calcul des structures planes. Les plus utilisées sont celle de "Bernoulli" qui néglige les déformées dues à l'effort tranchant et celle de Timoshenko qui suppose qu'une section plane reste plane, mais pas forcément perpendiculaire à la ligne moyenne. Il est nécessaire de tenir compte du cisaillement, pour le cas des poutres fortement courtes à cause de l'apparition du phénomène de blocage du cisaillement.

Le blocage par cisaillement est un problème numérique qui a beaucoup intéressé les chercheurs ces dernières vingt années et dont une abondance de solutions existe dans la littérature Crisfield 1991 [1], Hughes et al. 1977 [2], Stolarski et Belytschko 1983 [3] Friedman et Kosmatka [4].

L'objectif de ce travail consiste à la modélisation et l'analyse du comportement d'une poutre homogène et isotrope, en prenant en considération plusieurs paramètres, tel que : l'élanement, le module de Young et les conditions d'appuis (poutres bi-appuyées, poutres consoles, poutres encastées – appuyées, poutres bi-encastées) et leurs effets sur les déplacements – rotations ainsi que sur le phénomène de blocage dû au cisaillement. Différentes méthodes sont utilisées et comparées (la théorie de Bernoulli, la théorie de Timoshenko, la théorie de Friedman et Kosmatka, ainsi que la modélisation par le logiciel ANSYS12).

Ce mémoire est composé en plus d'une introduction générale, de quatre chapitres et d'une conclusion générale.

Dans le premier chapitre, une étude bibliographique, concernant différents paramètres intervenant dans l'étude des comportements des poutres, notamment les matériaux, les types d'appuis et les dimensions des poutres à été faite.

Au chapitre deux, l'analyse du comportement d'une poutre est présentée. Des rappels des théories des poutres, de la théorie d'élasticité et une brève analyse des équations de base qui définissent les relations entre contraintes et déformations dans le cas bidimensionnel ont été présentées. Il à été également présenté les principes de la méthode des élément finis, de la théories de Bernoulli, de Timoshenko, Friedman et Kosmatka et du phénomène de blocage par cisaillement ainsi que les différentes solutions de ce phénomène.

Au troisième chapitre, la modélisation des poutres par le logiciel ANSYS a été présentée. Il a été commencé par décrire brièvement le logiciel, en suite les étapes de la modélisation, allant du choix de l'élément jusqu'à l'affichage des résultats ont été citées.

Le quatrième chapitre présente l'analyse et discussion des différents résultats de l'étude paramétrique. Les courbes des déplacements et des rotations pour différents types de poutres et différentes méthodes y compris les résultats de la modélisation s'y trouvent. Ce mémoire se termine par une conclusion générale faisant la synthèse des résultats obtenus.

# CHAPITRE 1 RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

## 1.1. INTRODUCTION

Ce chapitre présente une synthèse bibliographique des différents paramètres utilisés dans les études des comportements des poutres.

La poutre est un élément essentiel dans une construction. L'élément poutre est utilisé pour reprendre, en plus de l'effort axial comme l'élément barre, un chargement perpendiculaire à son axe. On considère comme poutres les pièces élancées (en béton armé ou en acier), qui ont une dimension très grande par rapport aux deux autres, travaillant généralement à la flexion [5]. La présente étude est basée sur les poutres homogènes et isotropes.

Il existe en général deux méthodes pour le calcul des structures planes. L'une basée sur l'hypothèse de "Bernoulli" et l'autre sur l'hypothèse de "Hencky-Mindlin" (hypothèse de Timoshenko dans le cas des poutres). Plusieurs chercheurs se sont intéressés à l'utilisation et la comparaison de ces deux théories. Jusqu'à présent, certaines théories ont été développées [6-7]. Le principal inconvénient de toutes ces théories est qu'elles ont été obtenues pour des problèmes de géométrie, de chargement et des conditions aux limites simples. Cependant, au cours des dernières années, de nombreux chercheurs ont affiné ces théories en intégrant plusieurs aspects tels que la non-linéarité géométrique et matérielle [8-9] ainsi que la torsion [10], et les effets dynamiques [11]. De tels problèmes sont généralement résolus en utilisant des méthodes numériques telles que les différences finies et les éléments finis. Parmi toutes ces méthodes, les chercheurs emploient en général les éléments finis basés sur l'approche en déplacement [12,13], en force [14] ou mixte [13-15].

Certains éléments finis connaissent ce qu'on appelle verrouillage pour les grandes rigidités en cisaillement [13,16]. Il est possible de réduire ou éliminer ce verrouillage en abaissant le niveau des fonctions d'interpolation ou en introduisant des éléments avec un plus grand nombre de degrés de liberté [13,16].

Dans présentons dans les paragraphes suivants une synthèse sur les effets de certains paramètres sur le comportement des poutres.

## 1.2. INFLUENCE DES DIFFERENTS PARAMETRES SUR LE COMPORTEMENT D'UNE POUTRE

### 1.2.1. Généralités

Plusieurs types de poutres et d'appuis peuvent exister dans le domaine des structures. On citera

#### A. Poutre simple

C'est une poutre reposant sur deux supports. L'appui double et l'appui simple. Les points d'appui sont articulés de façon à ce que les extrémités puissent se mouvoir librement pendant la flexion. On l'appelle aussi poutre simplement appuyée. La figure (1.1) montre une poutre simplement appuyée.

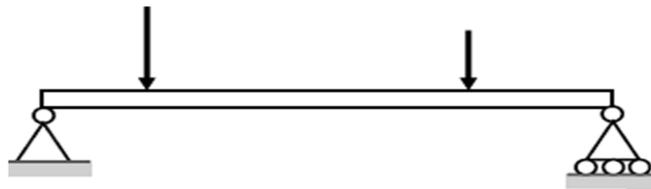


Figure 1.1 : Cas d'une poutre simplement appuyée

#### B. Poutre console

C'est une poutre encastree d'une l'extrémité et libre de l'autre. L'extrémité encastree ne bouge pas pendant la flexion (aucun déplacement n'est permis), tandis que l'autre extrémité est entièrement libre. On appelle aussi cette poutre, poutre en porte-à-faux ou poutre encastree à une extrémité. La figure (1.2) montre une poutre console.

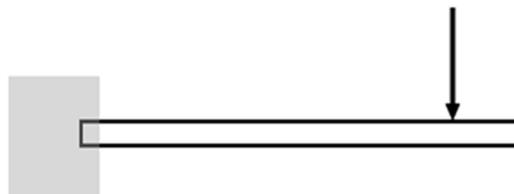


Figure 1.2 : Cas d'une poutre console

### C. Poutre avec porte-à-faux

C'est une poutre qui repose sur deux appuis (un simple et l'autre double) et a une ou deux extrémités qui dépassent les appuis (porte-à-faux). On appelle aussi cette poutre; porte-à-faux figure (1.3).

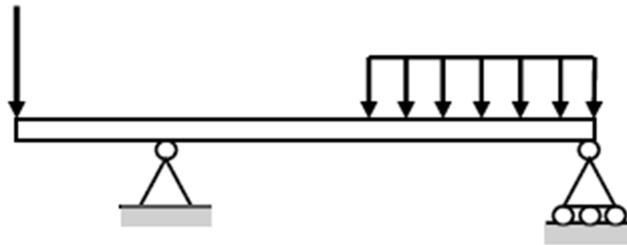


Figure 1.3 : Cas d'une poutre avec porte à faux

Les poutres sont aussi classées suivant leurs appuis. Les trois types de poutres précédentes entrent dans la catégorie des poutres statiquement déterminées (poutres isostatiques), puisqu'elles possèdent trois inconnues reliées aux trois degrés de liberté et par le fait même les trois équations d'équilibre suffisent pour la détermination des réactions d'appuis.

### D. Poutre encastrée et appuyée

Dans ce cas la poutre est liée quatre fois ( 4 inconnues ). C'est une poutre en équilibre hyperstatique où les trois équations d'équilibre ne suffisent pas pour déterminer les réactions d'appuis. La figure (1.4) présente une poutre encastrée et appuyée.

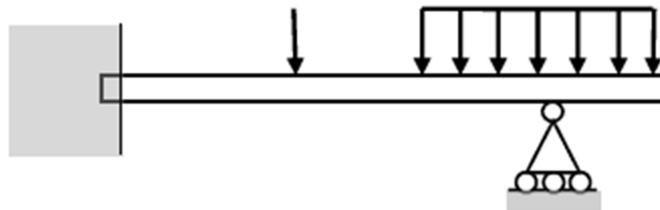


Figure 1.4 : Cas d'une poutre encastrée et appuyée

### E. Poutre continue

C'est une poutre supportée par plus de deux supports. C'est également une poutre en équilibre hyperstatique. La figure (1.5) montre une poutre continue.

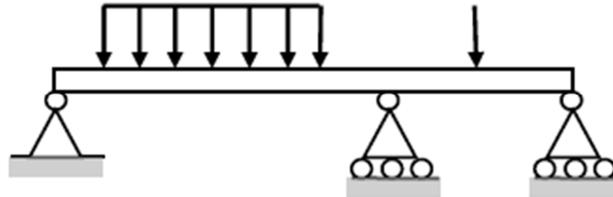


Figure 1.5 : Cas d'une poutre continue

### F. Poutre à double encastrement

C'est une poutre encadrée à ses deux extrémités (doublement encadrée). C'est une poutre en équilibre hyperstatique. La figure (1.6) schématise une poutre à double encastrement.

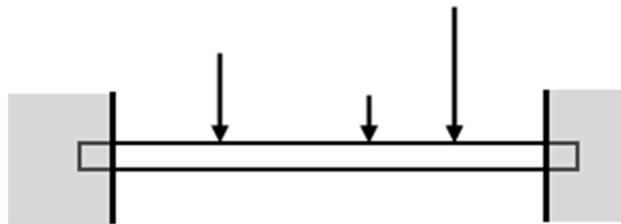


Figure 1.6 : Cas d'une poutre à double encastrement

### G. Poutre appuyée à double encastrement

C'est une poutre soutenue par deux encastrement et supportée par un ou plusieurs supports. C'est également une poutre en équilibre hyperstatique. La figure (1.7) montre une poutre supportée à double encastrement.

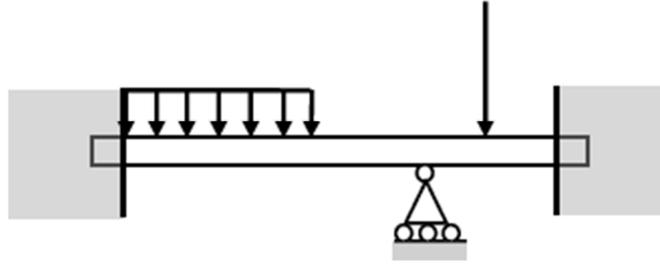


Figure 1.7 : Cas d'une poutre supportée à double

Les poutres hyperstatiques ont plus de fixations ou supports que nécessaires. Cependant, ces supports augmentent la capacité portante de la poutre [17]. Les équations de la statique ne suffisent pas pour analyser ces poutres. On recourt à différentes méthodes pour analyser le comportement de ce type de poutre.

### 1.2.2. Le coefficient de correction de cisaillement

L'idée est d'introduire un coefficient de correction de cisaillement  $k < 1$ . Reissner propose de calculer le coefficient à partir d'une équivalence entre l'énergie interne de déformation associée à la distribution de la contrainte de cisaillement exacte et l'énergie associée au modèle simplifié. Il s'agit de calculer  $k$  en considérant que la contrainte constante de cisaillement  $\sigma_{xy}$  agissant sur une section  $A^*$  (section réduite) fournit la même énergie de déformation que la contrainte exacte agissant sur la section réelle  $A$  de la poutre. Par exemple, pour une poutre isotrope de section rectangulaire ( $A = B \cdot H$ ), l'énergie de déformation par longueur unitaire de la poutre est donnée par Bathe [18] : [19]

$$U_1 = \int_A \frac{1}{2G} \sigma_{XY}^2 \text{exact} dA \quad (1.1a)$$

L'énergie de déformation calculée par le modèle simplifié est

$$U_2 = \int_{A^*} \frac{1}{2G} \left(\frac{T}{A^*}\right)^2 dA^* \quad (1.1b)$$

Avec l'hypothèse que  $U_1 = U_2$  et  $k = A^*/A$  on obtient

$$K = \frac{T^2}{A \int_A \sigma_{XY}^2 \text{exact} dA} \quad (1.2)$$

Pour une poutre à section rectangulaire l'équation (1.2) donne  $k = 5/6$  (coefficient de Reissner).

Cowper [ 20] a donné , pour une section rectangulaire pleine :

$$K = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu} \quad (1.3)$$

Plusieurs autres facteurs de correction ont été proposés par Washizu [21] ( $k=5/6$ ); Timoshenko et Goodier [22] ( $k=2/3$ ), Lowe [23] ( $k=1 - \nu^2$ ).

Pour une poutre homogène isotrope à section circulaire, le facteur  $k$  est donné par

$$K = \frac{6(1+\nu)^2}{(7+14\nu+8\nu^2)} \quad (1.4)$$

Pour un tube cylindrique homogène isotrope le facteur  $k$  est donné par

$$K = \frac{6(a^2+b^2)^2(1+\nu)}{(a^4+b^4)(7+6\nu)+2a^2b^2(17+12\nu)} \quad (1.5)$$

Plusieurs chercheurs ont développé des méthodes de conception pour optimiser le choix des matériaux et de la géométrie. Shanley [24], Cox [25], le Parkhouse [26], Ashby [27], et Pasini [28], ont étudié l'impact de ces variables sur l'efficacité structurelle.

Ashby [27] a décrit une méthode pour choisir des matériaux et des formes de section. Ce choix dépend du mode de sollicitation (traction, flexion, torsion), des formes possibles (sections planes, tubes, sections en I, etc...), des propriétés du matériau qui constitue la forme (module, résistance mécanique, densité), et de quelques critères de performance (minimiser la poids, par exemple).

Une distinction est faite entre forme macroscopique et forme microscopique, qui peuvent toutes deux augmenter les performances en flexion ou en torsion, et qui peuvent être combinées pour donner des structures très efficaces. Cette approche permet d'avoir un aperçu de l'efficacité de matériaux naturels tels que le bois; et elle suggère des façons de développer des combinaisons, nouvelles et efficaces, de matériaux et de formes.

Une théorie générale pour modéliser l'efficacité d'une section quelconque a été présentée par [29, 30].

Huang et Gibson [31] ont examiné le choix d'un matériau pour la conception de poids minimum d'une poutre résistante à la flexion. Un facteur de forme est utilisé pour mesurer l'efficacité d'une forme en section transversale. Les facteurs de forme maximale pour les tubes, les poutres en I et les poutres sandwich ont été examinés. L'analyse suggère que la forme maximale du facteur de chaque poutre est fonction des paramètres de conception et des propriétés mécaniques du matériau solide à partir duquel la poutre est effectuée. Une série de diagrammes de conception de facteurs de forme maximale pour divers matériaux, a été développé.

Singh et al. [32] ont procédé au choix des matériaux, basé sur le concept de transformation de forme. Cette méthode s'étend pour traiter le cas de la conception de la rigidité en torsion. Cette transformation classe des formes d'une manière similaire à la classification du matériel.

Pasini et al. [33] ont présenté les indices de performance pour la sélection des poutres rectangulaires optimales en flexion. Ils ont présenté également un procédé graphique pour la détermination du rendement de poutres rectangulaires dans la conception de raideur.

Pasini et al. [34] ont étudié l'efficience structurelle des différentes sections soumises à la flexion. Un paramètre enveloppe efficience est défini en termes de deux transformateurs de forme pour décrire le rapport relatif de la région et le moment d'inertie de la section transversale par rapport à une enveloppe rectangulaire entourant la forme.

Pasini [35] a également présenté une méthode pour la sélection des matériaux, des formes de section transversale, et des combinaisons de ceux-ci. La nouveauté de la méthode est la définition de transformation de forme. Ces paramètres sont des mesures des quantités sans dimensions géométriques d'une section transversale. Ils décrivent les propriétés de forme indépendamment de leur taille. La justification de l'approche est que les équations fondamentales de la mécanique des milieux continus peuvent être exprimées par un produit de quatre facteurs : la fonctionnelle exigences, les propriétés des matériaux, les transformateurs de forme, et les quantités géométriques d'un rectangle.

### 1.2.3. Influence des rapports L/h sur le comportement d'une poutre

Le rapport L/h est généralement utilisé pour distinguer les différents types de poutre en béton armé, où L est distance entre l'appui et le point d'application de la charge et h la hauteur effective de la section de la poutre. Ainsi, les poutres sont classées comme suit [36]. Poutres très profondes  $L/h \leq 1$  ; Poutres profondes  $1 < L/h \leq 2.5$  ; Poutres élancées  $2.5 < L/h \leq 6$  ; Poutres très élancées  $L/h > 6$ .

Plusieurs études ont montré que l'élancement de la poutre a une influence non négligeable sur la convergence de la solution numérique.

Pour un rapport longueur-hauteur aussi élevé que 10, la déformation de cisaillement est inférieure à 3% et la poutre peut être supposée soumise à une flexion pure. D'autre part, pour une courte et épaisse poutre, la déformation de cisaillement ne peut être ignorée, parce qu'un élancement de poutre aussi grand que 0,2 induit une déflexion de cisaillement qui est au moins 10% de celle provoquée par flexion [37].

Moreno et al. [38] ont proposé l'élancement géométrique de l'axe faible d'un poteau comme variable déterminant pour examiner ou non l'influence de cette imperfection. Cette étude désigne cet élancement par la " limite d'élancement de l'axe faible " qui est associé à une perte de résistance de 10% du moment de flexion des colonnes. Une équation approchée de cette limite est proposée. Ils ont développé une équation pour calculer cette limite d'élancement des colonnes, qui serait également valable pour les colonnes rectangulaires doublement et symétriquement armés pour le béton de résistance normale et élevée. Cette proposition simplifie la conception de colonnes soumise à les moments de flexion par rapport à l'axe fort, en évitant la conception biaxiale de la flexion quand il ne est pas nécessaire.

Girija et Devdas [39] ont présenté les résultats de 15 essais expérimentaux sur des poutres rectangulaires minces en béton armé. Les résultats révèlent des limitations dans les formulations théoriques existantes pour estimer le moment de rupture et le mode de rupture. Une formulation théorique améliorée est proposée pour prédire le moment critique de flambage y compris les effets liés à la non-linéarité et la fissuration du béton. En outre, une mesure améliorée du rapport d'élancement est proposée pour les conceptions en acier. Basé sur une étude des résultats de 72 tests, il ont démontré qu'il y a une interaction entre la tension flexionnelle et l'instabilité des modes de rupture pour les poutres modérément minces. Pour éviter la rupture de l'instabilité latérale, il est suggéré

que le rapport d'élançement se limite à l'unité. Un «facteur de réduction du moment » est également proposé pour tenir compte des effets d'élançement pour les poutres en béton armé.

Kikidis et Papadopoulos [40] ont présenté l'influence du rapport d'élançement d'une poutre avec fissure ouverte, sur son comportement dynamique.

Pour concevoir des colonnes élancées en béton armé soumises aux charges axiales et flexionnelles, les codes de conception (C.E.B Code-90 [41], l'Eurocode 2 (2004) [42], ACI-318 (08) [43]) proposent différentes méthodes simplifiées de prendre l'effet du second ordre en considération.

## CHAPITRE 2 ANALYSE DU COMPORTEMENT D'UNE POUTRE

### 2.1. INTRODUCTION

La poutre est une pièce élancée (en béton armé ou en acier), qui a une dimension très grande par rapport aux autres et qui travaille généralement à la flexion. La théorie des poutres permet d'obtenir une solution approchée pour les champs de contrainte et de déformation et donne une bonne idée des efforts et des déplacements.

On présente dans ce chapitre différentes méthodes et théories utilisées dans les calculs des poutres tel que la méthode des éléments finis, les théories de "Bernoulli", de "Timoshenko", et de "Friedman et Kosmatka".

### 2.2. NOTION D'ELASTICITE

La détermination des contraintes et des déformations peut être faite en utilisant les principes de la méthode des résistances des matériaux (R.D.M). L'application de cette méthode est généralement limitée à l'étude des éléments de formes prismatiques (une des dimensions est plus grande que les deux autres), alors que la théorie de l'élasticité a un champ d'application plus vaste (corps de toutes configurations, plaques et coques, et éléments tridimensionnels).

La théorie d'élasticité (T.E) représente l'une des branches de la mécanique des milieux continus qui permet l'étude mathématique des contraintes et des déformations dans les corps solides déformables sous sollicitations, en état d'équilibre statique ou en mouvement. Elle permet également d'étudier le comportement des solides réels sous l'action des forces qui leur sont appliqués.

Pour établir les lois mathématiques, on doit supposer que les solides sont idéals, c'est à dire homogènes et isotropes. La théorie d'élasticité peut se résumer en trois ensembles d'équations les équations d'équilibre, les relations entre déformations et déplacements et les relations entre contraintes et déformations [44].

### 2.2.1. Hypothèses sur les matériaux

On admet que tous les éléments constituant le matériau ont une structure identique ils sont

- Homogène : où les propriétés sont les mêmes en tout point,
- Isotrope : où les propriétés sont les mêmes dans toutes les directions,
- Continu : où le matériau ne contient pas d'aspérités, il y a continuité de la matière [45].

Dans le domaine élastique les relations entre contraintes et déformations sont linéaires (loi de Hooke).

### 2.2.2. Les champs vectoriels

#### 2.2.2.1. Les champs des contraintes

Les composantes de la matrice représentative dans le repère (o, x, y, z) sont

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.1)$$

Avec  $T_i$  : vecteur contrainte

$\sigma_{ij}$  : contrainte normale

$n_j$  : le vecteur normale

Ces composantes sont indiquées schématiquement sur la figure (2.1). Sur chaque face, le vecteur contrainte se décompose en une contrainte normale et deux contraintes tangentielles. Sur la figure (2.2) le champ de contraintes à un point M d'un solide est un tenseur d'ordre 2 symétrique.

$$\sigma_{(M)} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

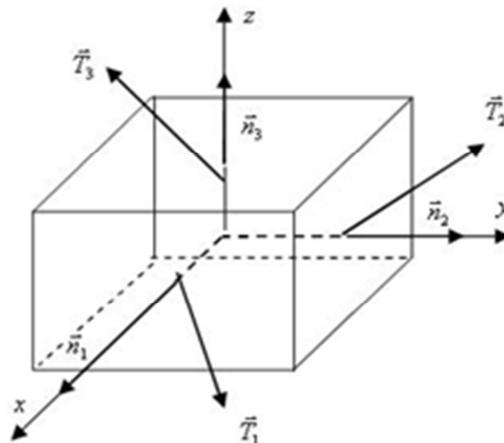


Figure 2.1: Vecteurs contraintes  $T^{\rightarrow}$  sur trois facettes orthogonales [44]

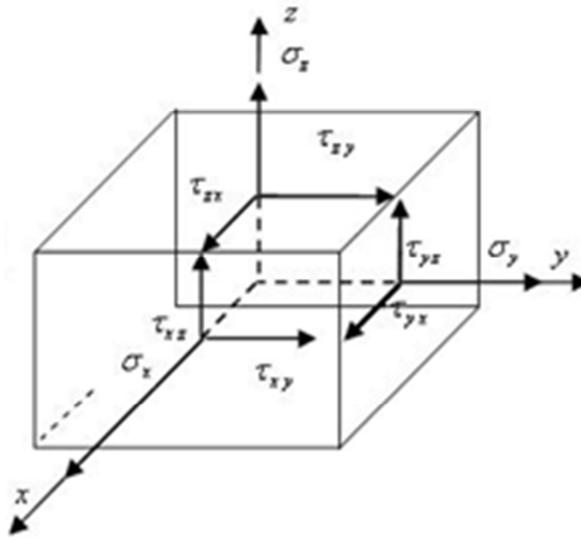


Figure 2.2: Tenseur de contrainte pour un volume élémentaire [44]

### 2.2.2.2. Les champs des déformations

La déformation est la variation relative des dimensions d'un solide lorsque ce dernier est soumis à une action extérieure. Le tenseur des déformations, sous l'hypothèse des petites perturbations est la partie symétrique du gradient du champ de déplacement  $U^{\rightarrow}(u_x, u_y, u_z)$ .

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\text{grad } U^{\rightarrow} + \text{grad}^T U^{\rightarrow}) \quad (2.3)$$

Dans la base  $(e_x^{\rightarrow}, e_y^{\rightarrow}, e_z^{\rightarrow})$ , le tenseur symétrique du second ordre se calcule de la manière suivante [46].

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Le tenseur des déformations est lui aussi entièrement déterminé en tout point par la connaissance de six composantes sur les neuf, que l'on représente vectoriellement par

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{zy}\} \quad (2.5)$$

$$\text{où } \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} \ , \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} \ , \gamma_{zy} = 2\varepsilon_{zy} \quad (2.6)$$

### 2.2.3. Equations d'équilibre pour un corps à l'état statique

#### 2.2.3.1. Equations d'équilibre des forces

On dit qu'un corps de volume  $V$  et de masse  $m$  entouré par une surface  $S$ , soumis à des forces de surface de contrainte ( $T^{\rightarrow}$ ), et des forces de volume ( $F^{\rightarrow}$ ), est en équilibre lorsque la somme des forces exerçantes sur ce corps est nulle [44].

$$\sum F^{\rightarrow} = 0^{\rightarrow} \quad (2.7)$$

En intégrant sur tout le volume et sur toute la surface.

$$\int_V F^{\rightarrow} dv + \int_S T^{\rightarrow} ds = 0^{\rightarrow} \quad (2.8)$$

En notation indicielle

$$\int_V F_i dv + \int_S T_i ds = 0 \quad (2.9)$$

Ou bien

$$\int_V F_i dv + \int_S \sigma_{ij} n_j ds = 0 \quad (2.10)$$

En utilisant le théorème de l'intégral

$$\int_V F_i dv + \int_S \partial_j \sigma_{ij} dv = 0 \quad (2.11)$$

C'est à dire

$$F_i + \partial_j \sigma_{ij} = 0 \quad (2.12)$$

Donc, l'équation fondamentale qui relie les variations spatiales des contraintes dans un corps en état d'équilibre statique est comme suit

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \quad i, j = x, y, z \quad (2.13)$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{pour } i = x \quad F_x + \frac{\partial \sigma_{xj}}{\partial x_j} &= F_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \text{pour } i = y \quad F_y + \frac{\partial \sigma_{yj}}{\partial x_j} &= F_y + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \\ \text{pour } i = z \quad F_z + \frac{\partial \sigma_{zj}}{\partial x_j} &= F_z + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.14)$$

## 2.2.4. Relation entre déformations et déplacements

Lorsqu'un corps est soumis à un système de forces, en général tous les points appartenant au corps changent de position.

Le déplacement d'un point est défini comme étant la distance séparant sa position initiale de sa position finale. Les composantes de ce déplacement ( $u$ ,  $v$  et  $w$ ) sont en général fonction de  $x$ ,  $y$ , et  $z$ . Ainsi un point situé initialement en  $(x, y, z)$  sera déplacé en  $(x + u, y + v, z + w)$  [44].

### 2.2.4. 1. Types de déformations

Dans le cas général, deux types de déformations se produisent

- a) Déformation directe : Elle est définie comme étant le rapport de la variation de longueur par la longueur d'une fibre originalement orientée dans cette direction. Trois composantes indépendantes de déformation directe (normale)  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  et  $\varepsilon_z$  sont définies en chaque point.

b) Déformation de cisaillements : Elle est définie comme étant la variation de l'angle droit formé par deux axes. Elle est associée à deux directions orthogonales.

Trois composantes de déformation de cisaillement  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{zy}$ ,  $\gamma_{xz}$  sont définies en chaque point. Avant de passer au cas général (tridimensionnel), considérons le problème de déformation plane.

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \\ w &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Il est à noter que pour ce cas de déformation, tous les points situés initialement dans le plan (x y) restent dans ce plan après déformation.

Soit un élément infinitésimal "a b c d" tel que montré sur la figure (2.3)

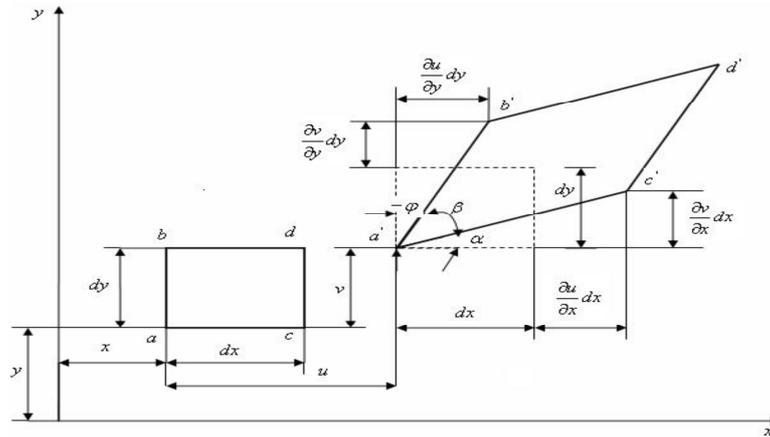


Figure2.3: Déformation d'un élément dans le plan x y

Après déformation l'élément a b c d, aura la configuration a' b' c' d'. Ainsi les déformations directes suivant l'axe x sont

$$\varepsilon_x = \frac{a' c' - ac}{ac}$$

$$ac = dx \quad ; \quad a' c' = ac\varepsilon_x + ac$$

$$a' c' = ac (\varepsilon_x + 1) = dx (\varepsilon_x + 1)$$

$$(a' c' )^2 = (dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx)^2 + (\frac{\partial v}{\partial x} dx)^2$$

$$[dx(\varepsilon_x + 1)]^2 = dx^2 (\varepsilon_x^2 + 2\varepsilon_x + 1) = dx^2(2\varepsilon_x + 1)$$

$$(a' c' )^2 = (dx)^2 + (\frac{\partial u}{\partial x} dx)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} (dx)^2 + (\frac{\partial v}{\partial x} dx)^2$$

$$[dx^2(2\varepsilon_x + 1)] = dx^2(1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + (\frac{\partial v}{\partial x})^2)$$

En éliminant les termes d'ordre supérieur (hypothèse des petits déplacements), on aura

$$2\varepsilon_x + 1 = 1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x}$$

D'où

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.16}$$

De même pour

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.17)$$

L'angle  $\alpha$  étant très petit, on peut écrire

$$\alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \partial x}{\partial x + \frac{\partial u}{\partial x} \partial x}$$

En négligeant le terme  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (car il très petit devant 1), on obtiendra

$$\alpha = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.18)$$

De même pour l'angle  $\varphi$  on aura

$$\varphi = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.19)$$

Ainsi, la déformation de cisaillement sera

$$\gamma_{xy} = \alpha - \varphi \quad (2.20)$$

Le signe négatif est du fait que l'angle  $\varphi$  est mesuré suivant le sens des aiguilles d'une montre qui représente par définition le sens négatif. En remplaçant  $\alpha$  et  $\varphi$  par leurs valeurs respectives on obtiendra [44].

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.21)$$

Après avoir traité les cas unidimensionnel et bidimensionnel, on peut passer au cas tridimensionnel où l'élément considéré est, à l'origine, un prisme rectangulaire.

➤ Les déformations axiales seront

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.22)$$

➤ Les déformations de cisaillement (déformations angulaires) seront

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\quad (2.23)$$

### 2.2.5. Lois de comportement élastique

La relation liant le tenseur des contraintes au tenseur des déformations est la loi de comportement. Sous l'Hypothèse de petites perturbations, pour un matériau homogène, linéaire et isotrope, la loi de comportement est un opérateur linéaire du 4<sup>ième</sup> ordre. La loi d'élasticité, ou loi de Hooke introduit deux paramètres du matériau : le module d'Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ . La relation tensorielle s'exprime comme suit [46]

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \text{tr} \sigma \cdot Id \quad (2.24)$$

$Id$  : est le tenseur identité,  $\text{tr} \sigma$  désigne la trace de  $\sigma$ . À l'inverse, la relation exprimant la contrainte à la déformation, en fonction des coefficients de Lamé ( $\lambda$  et  $\mu$ ) est

$$\sigma = 2\mu \varepsilon + \lambda \text{tr} \varepsilon \cdot Id \quad (2.25)$$

Les paramètres d'élasticité et les coefficients de Lamé sont liés par les relations

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \\ G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases} \quad (2.26)$$

En écrivant les tenseurs des contraintes et déformations en vecteur colonne de taille 6, on peut exprimer la loi de Hooke de manière matricielle, plus simple d'interprétation.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{zy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yx} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{zy} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

Dans un cas de chargement bidimensionnel, la loi de comportement se retrouve sous forme simplifiée et condensée. Dans un cas d'hypothèse de contraintes planes

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yx} \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

Sous l'hypothèse de déformation plane

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yx} \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

## 2.3. METHODES DE RESOLUTION DES PROBLEMES DES STRUCTURES

Il existe plusieurs méthodes, détaillées dans des ouvrages plus conséquents, pour la résolution des problèmes des structures. Nous présentons ici quelques méthodes avec leurs différences.

### 2.3.1. Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis a émergé en tant qu'une des méthodes générales les plus utilisées pour l'analyse des structures. Elle a fourni aux ingénieurs les outils nécessaires pour modéliser et simuler pratiquement n'importe quel système structural de technologie [47].

La méthode des éléments finis (M.E.F) est un des outils les plus efficaces pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie aérospatial, automobile, nucléaire, génie civil, construction navale, mécanique, constructions off-shore, etc....

De tels problèmes sont généralement résolus en utilisant des méthodes numériques telles que les différences finies et les éléments finis.

Dans le domaine du calcul des structures, la M.E.F, est une technique à caractère pluridisciplinaire qui met en œuvre des connaissances relevant de plusieurs disciplines de base telle que la mécanique des structures, l'analyse numérique et l'informatique appliquée.

La méthode des éléments finis est basée en général sur l'approche en déplacement, en force ou mixte. C'est une méthode générale dans laquelle la solution d'un problème dans la mécanique continue est rapprochée par l'analyse d'un assemblage d'éléments finis qui sont reliés ensemble à un nombre de points nodaux finis et représentent le domaine de solution du problème [47].

La méthode des éléments finis est donc une procédure générale de discrétisation pour la résolution des problèmes des milieux continus. Pour avoir une analyse numérique qui simulera au mieux un problème, il faut effectuer deux opérations essentielles la modélisation et la discrétisation. La figure (2.4) suivante résume ces deux étapes [44].

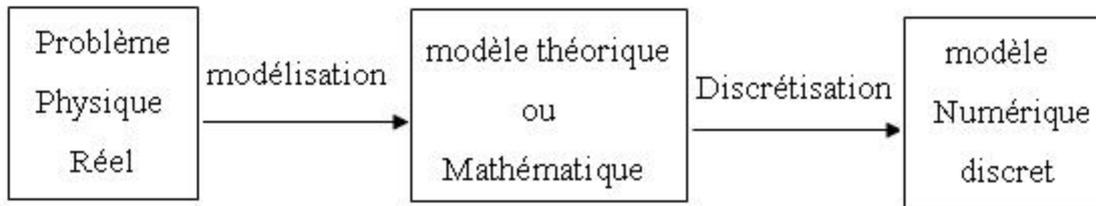


Figure 2.4 : Étapes de l'analyse d'un problème aux limites [44]

### 2.3.1.1. Principes de la M.E.F

La M.E.F est basée sur une idée simple qui consiste à subdiviser (discrétiser) une forme complexe en un grand nombre de sous-domaines élémentaires de formes géométriques simples (éléments finis) interconnectés en des points appelés nœuds [48].

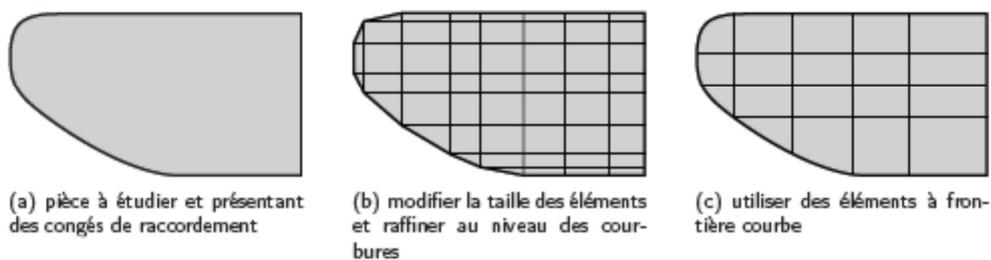


Figure 2.5: discrétisation géométrique [49].

- Nous considérons le comportement mécanique de chaque élément séparément, puis nous assemblons ces éléments de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud.
- La MEF utilise des approximations simples des variables inconnues dans chaque élément pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.
- Les nœuds et les éléments n'ont pas forcément de signification physique particulière, mais sont basés sur des considérations de précision de l'approximation [48].

### 2.3.1.2 Présentation générale de la méthode

#### ➤ Le maillage

Le solide est décomposé en éléments de formes géométriques simples ayant des côtés communs et dont les sommets ou nœuds sont les points d'articulation de plusieurs éléments entre eux. Ces nœuds seront les points d'application des forces intérieures ou extérieures [50]. L'opération de décomposition est le **maillage**. Un bon maillage doit faciliter les opérations prévues par un programme d'ordinateur. Il faut donc adopter une méthode systématique de numérotation des éléments et des nœuds [47].

Il existe deux méthodes le plus répandues pour le maillage [47]. La première consiste à donner des numéros aux nœuds de gauche à droite (ou de bas en haut) figure (2.6). La seconde consiste à attribuer les coordonnées pour chaque nœuds figure (2.7)

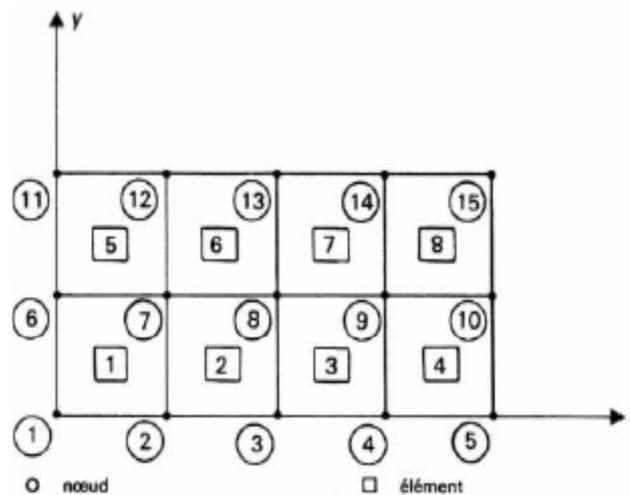


Figure 2.6 : Numérotation des nœuds et des éléments pour un problème à 2 dimensions ( première méthode)

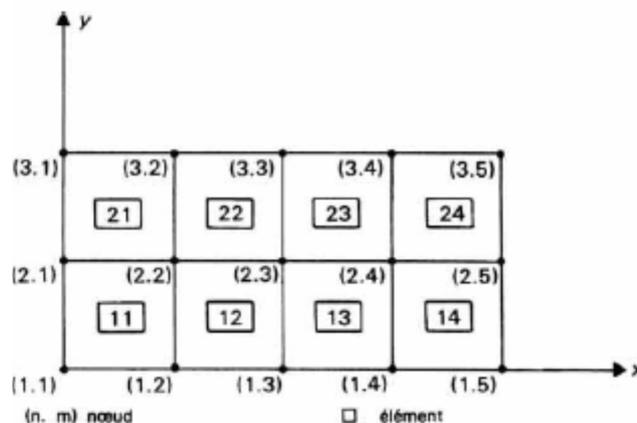


Figure 2.7 : Numérotation des nœuds et des éléments pour problème (deuxième méthode)

### 2.3.1.3. Etapes de résolution d'un problème par éléments finis

Pour résoudre un problème par la MEF, on doit respecter certaines étapes successives qui peuvent être énumérer comme suit [48]

1. Définition de la géométrie de la structure étudiée
2. Maillage de la structure (discrétisation en éléments) - Génération de la table de connectivité entre les éléments
3. Définition du modèle associé à la structure
4. Choix des paramètres du modèle (deux pour un matériau homogène et isotrope)
5. Construction de la matrice de raideur globale par assemblage des matrices de raideur locales des éléments en fonction de la table de connectivité
6. Construction du vecteur effort global par assemblage des vecteurs d'effort locaux suivant la table de connectivité
7. Prise en compte des conditions aux limites
8. Prise en compte du chargement
9. Résolution du système pour obtenir les déplacements nodaux des éléments
10. Traitement du résultat (calcul des déformations, calcul des contraintes).

Dans le système global, et pour les nœuds  $i$  et  $j$  dans la table de connectivité, la matrice de raideur et du vecteur global ont la forme suivante.

$$K = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \ddots \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & K_{ii} & \dots & K_{ij} & \dots \\ & & \dots & \ddots & \dots & \\ \vdots & \dots & K_{ij} & \dots & K_{jj} & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{bmatrix} \text{ et } F = \begin{bmatrix} \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

### 2.3.1.4. Intérêts et limitations de la M.E.F

La puissance de la méthode des éléments finis réside essentiellement dans sa souplesse. Elle peut être applicable à une variété de problèmes mécaniques ou bien physiques. La géométrie du domaine peut être quelconque, les forces et les conditions aux limites peuvent être aussi de natures quelconques.

Le maillage peut combiner autant de types d'éléments que l'on souhaite et toute cette généralité est contenue dans un programme unique qu'on peut faire tourner sur un ordinateur. La méthode des éléments finis réside dans le fait que le modèle qu'elle utilise est très proche

de la structure réelle [44]. Elle permet d'aborder la quasi totalité des phénomènes et particularités de la mécanique du solide ; les phénomènes de comportement statique, les différentes classes de lois de comportement existantes, le phénomène thermique et/ou thermomécanique couplé, les phénomènes d'instabilité de flambage, les phénomènes transitoires et/ou dynamiques...etc. En termes de performance et de précision des résultats, la MEF peut traiter différentes géométries dont les résultats dépendent de la précision interne de stockage de l'ordinateur et par le temps que l'on désire consacrer à la résolution.

Concernant les limitations de la méthode, il faut noter une assez grande complexité de mise en œuvre, d'autant plus importante que l'on aborde des phénomènes et/ou géométries et/ou comportements matériels complexes [51].

### 2.3.2. Théorie de Bernoulli

La théorie d'Euler-Bernoulli, néglige le cisaillement. Elle utilise un champ de déplacement qui rigidifie la section. Elle introduit de plus la liaison interne qui contraint la section droite à rester orthogonale à la ligne moyenne après déformation.

La théorie de Bernoulli pour les poutres suppose qu'une section droite initialement plane et perpendiculaire à la « ligne moyenne » ainsi définie reste plane, pour des poutres minces (la hauteur de poutre est petite par rapport à la longueur) (figure 2.8).

Cette théorie ne tient pas en considération l'effet de cisaillement, par conséquent les déformations dues à l'effort tranchant sont négligées.

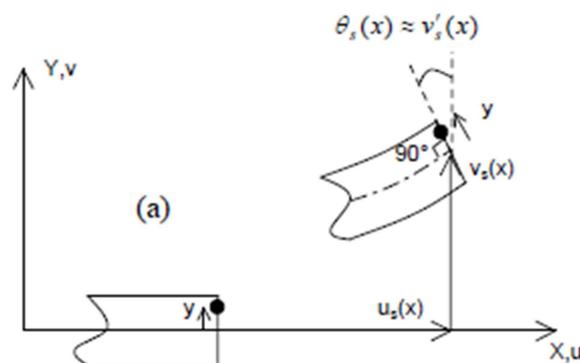


Figure 2.8. Hypothèses cinématiques pour une poutre Bernoulli [52]

### 2.3.2.1. Matrice de rigidité de Bernoulli

On établit les équations d'équilibre à partir du principe des travaux virtuels. L'énergie interne de déformation s'écrit

$$W_{int} = \int_v \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}) dv = \frac{1}{2} \int_v E [B]\{u\}[B]\{u\} dv \quad (2.31)$$

$$W_{int} = \frac{1}{2} \int_v \{u\} E [B]^t [B]\{u\} dv \quad (2.32)$$

La matrice de rigidité est calculée par l'expression

$$[K] = \int_v E [B]^t [B] dv \quad (2.33)$$

Où

$$[B] = -y \left[ -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}, -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}, \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}, -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right] \quad (2.34)$$

Par substitution de l'équation (2.33) dans (2.34) et après intégration de (2.34) on trouvera la matrice de rigidité [K]

$$[k] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Avec E, I, L sont respectivement le module de Young, le moment d'inertie et la longueur de la poutre.

### 2.3.3. Théorie de Timoshenko

La théorie de Timoshenko pour les poutres suppose qu'une section plane reste plane, mais pas forcément perpendiculaire à la ligne moyenne, Pour des poutres petites ou trapues, il est nécessaire de tenir compte du cisaillement [52].

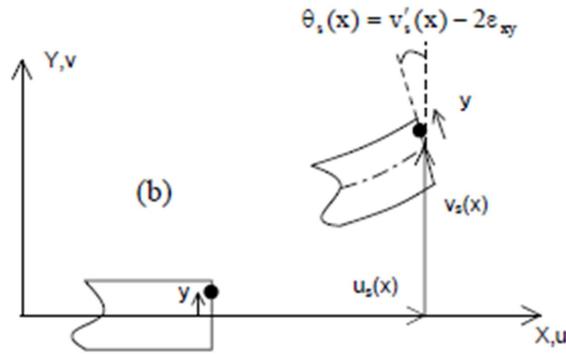


Figure 2.9 : Hypothèses cinématiques pour une poutre Timoshenko [52]

### 2.3.3.1. Matrice de rigidité de Timoshenko

On établit les équations d'équilibre à partir du principe des travaux virtuels comme dans le cas de la théorie des poutres de Bernoulli [53].

Les champs de déplacements sont donnés par

$$u(x, y) = u(x) - y\theta(x) \quad (2.36)$$

$$v(x, y) = v(x) \quad (2.37)$$

Les champs de déformations sont obtenus par la formule

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \quad (2.38)$$

D'où

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u(x)}{\partial x} - \frac{\partial \theta(x)}{\partial x}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} - \theta(x) \quad (2.39)$$

L'équation d'équilibre du système

$$[K_c + K_f]\{v\} = \{F_e\} + \{F_r\} \quad (2.40)$$

$[K_c]$  : Matrice de cisaillement dans la poutre de Timoshenko.

$[K_f]$  : Matrice de flexion dans la poutre de Timoshenko.

$$[K_c] = \frac{GAK}{L} \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{2} & -1 & \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \\ -1 & \frac{L}{2} & 1 & -\frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$[K_f] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

La matrice de rigidité de Timoshenko est :

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{GAK}{L} & \frac{GAK}{2} & -\frac{GAK}{L} & \frac{GAK}{2} \\ \frac{GAK}{2} & \frac{GAKL}{3} + \frac{EI}{L} & -\frac{GAK}{2} & \frac{GAKL}{6} - \frac{EI}{L} \\ -\frac{GAK}{L} & -\frac{GAK}{2} & \frac{GAK}{L} & -\frac{GAK}{2} \\ \frac{GAK}{2} & \frac{GAKL}{6} - \frac{EI}{L} & -\frac{GAK}{2} & \frac{GAKL}{3} + \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

### 2.3.4. Théorie de Friedman et Kosmatka

Cette méthode utilise les mêmes principes que ceux de la théorie de Timoshenko avec des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur. La matrice de rigidité développée par Friedman et Kosmatka a la forme suivante [4].

$$[K] = \frac{EI}{(1+\emptyset)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & (4+\emptyset)L^2 & -6L & (2-\emptyset)L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & (2-\emptyset)L^2 & -6L & (4+\emptyset)L^2 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Avec  $\emptyset$  le rapport entre la rigidité de flexion et la rigidité de cisaillement de l'élément

$$\emptyset = \frac{12 EI}{L^2 GAK} = \frac{24}{L^2} \left( \frac{I}{KA} \right) (1 + \nu) \quad (2.45)$$

### 2.3.5. Phénomène de blocage ( ou verrouillage) au cisaillement

Dans le calcul par éléments finis, on rencontre dans certains problèmes, le blocage numérique dans la convergence des solutions pour les grandes rigidités de cisaillement.

Il est possible de réduire ou éliminer ce verrouillage en abaissant le niveau des fonctions d'interpolation ou en introduisant des éléments avec un plus grand nombre de degrés de liberté [13, 16]. Le phénomène du blocage par cisaillement (apparition de rigidité 'parasite' quand l'élément est élancé) est présent dans tous les éléments finis de poutre Timoshenko où les déplacements transversaux et les rotations sont discrétisés séparément (Stolarski et al.) [3].

Une abondance de remèdes numériques existe dans la littérature (Crisfield) [1].

Pour bien comprendre ce phénomène on considère une poutre soumise au cisaillement seul. On suppose que les sections qui sont initialement orthogonales à la fibre neutre se déplacent uniquement dans la direction verticale. Les éléments tangents à la fibre neutre subissent une rotation. Notons que chaque point de la fibre neutre subit un angle de cisaillement  $\gamma_{xy}$  dans ce modèle. On considère que la déflexion de la fibre neutre subit un angle de cisaillement.

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} - \Theta(x) \quad (2.46)$$

On ne considère que la déflexion de la fibre neutre  $\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$  qui peut être écrite comme la somme des déformations dues à la flexion et au cisaillement

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \gamma_{xy} + \Theta(x) \quad (2.47)$$

Où  $\Theta(x)$  est la rotation des éléments dans la direction de la fibre neutre due à la flexion uniquement. On suppose que le cisaillement est constant sur la hauteur de la poutre .

Cette hypothèse viole l'équilibre car le cisaillement doit être nul sur les parties supérieures et inférieures de la poutre (en  $y = \pm \frac{h}{2}$  ) dans le cas des poutres chargées orthogonalement à la fibre neutre [54].

#### 2.3.5.1. Solutions proposées pour le blocage par cisaillement

Le blocage par cisaillement est un problème numérique qui a beaucoup intéressé les chercheurs ces dernières vingt années et dont une abondance de solutions existe dans la littérature (Crisfield 1991) [1]. Dans la suite plusieurs solutions simples et efficaces vont être présentées.

Une façon d'éviter l'apparition du blocage par cisaillement et de rendre la solution indépendante du rapport  $L/H$  est de calculer les termes de la matrice de rigidité en intégrant de manière exacte les termes relatifs à la flexion et en sous - intégrant les termes relatifs au cisaillement («Selective/reduced integration», Hughes et al. 1977 [2], Stolarski et Belytschko 1983)[3].

Afin d'améliorer les performances de l'élément et pour éviter certains blocages en membrane ou cisaillement, l'intégration réduite a été employée. Pour éliminer les modes à énergie nulle dus à cette sous-intégration, une technique efficace de stabilisation et de contrôle des modes de Hourglass a été utilisée en suivant la démarche de (Belytschko et al., 1993)[55].

Afin de s'affranchir du problème de verrouillage nous pouvons utiliser une interpolation polynomiale de degré plus élevé pour les variables  $v_s(x)$  et  $\Theta_s(x)$  qui ne seront plus indépendantes. Ces approches conduisent à des éléments finis à plus de deux noeuds (deux noeuds aux extrémités, plus des noeuds intérieurs, Ibrahimbegovic et Frey [56] ou à des éléments finis à deux noeuds dont les fonctions de forme dépendent des propriétés des matériaux (De Ville de Goyet [57], Friedman et Kosmatka [4] ).

## 2.4. CONCLUSION

Dans ce chapitre, les principes et bases des théories de Bernoulli, de Timoshenko, de Friedman et Kosmatka ainsi que la méthode des éléments finis ont été rappelés dans le but de leurs utilisations dans les prochains chapitres. Le phénomène du blocage par cisaillement a été défini et les solutions proposées dans la littérature pour sa résolution ont également été présentées.

## CHAPITRE 3    MODELISATION DES POUTRES PAR LE LOGICIEL ANSYS

### 3.1. INTRODUCTION

Il y a plusieurs codes de modélisation utilisés dans l'analyse des structures, tel que ABAQUS, ANSYS, IDEAS ..... etc.

Nous présentons dans ce chapitre la modélisation des poutres par le logiciel ANSYS12.

La simulation numérique par éléments finis est un outil puissant pour la résolution de problèmes de structures ou autres par la réalisation d'expériences virtuelles. Cette expérience virtuelle, qu'est la modélisation par le logiciel Ansys12, dans notre cas, est expliquée brièvement dans, les étapes suivantes :

### 3.2. DESCRIPTION D'ANSYS12

Le logiciels ANSYS, est l'un des plus grands développeurs et fournisseur de logiciels de simulation numérique au monde. Ses produits majeurs sont des logiciels qui mettent en oeuvre la méthode des éléments finis, afin de résoudre des modèles discrétisés.

ANSYS 12 a été développé à Canonsburg en Pennsylvanie. Il est l'un des plus grands développeurs et fournisseur de logiciels de simulation numérique [58].

ANSYS 12 est un code d'éléments finis d'usage général dédié à la résolution numérique d'une large variété de problèmes physiques en général et de mécanique en particulier. Ces problèmes portent notamment sur l'analyse structurale en statique et en dynamique (linéaire et non linéaire), transfert de chaleur, dynamique des fluides, acoustique, électromagnétique ..ect.

Il y à plusieurs produits ANSYS , tel que:

- **ANSYS Structural** : qui permet d'effectuer des simulations mécaniques sur les structures.

Ses principales capacités sont :

l'analyse statique ; l'analyse modale ; l'analyse harmonique (réponse forcée) ; l'analyse temporelle ou transitoire ; la gestion de différentes situations non linéaires (contacts, plasticité des matériaux, grands déplacements ou grandes déformations).

- **ANSYS Mechanical** : Ce produit dispose les mêmes capacités que ANSYS structural, on y ajoutant notamment une solution thermique, avec modélisation du rayonnement.

### 3.3. ORGANISATION DU LOGICIEL ANSYS12

De façon générale, une résolution par ce code d'éléments finis (ANSYS) comporte trois étapes, (figure 3.1) [58].

- **Première étape** : Préparation des données ou pré-processing pour définir le problème.

Ces étapes majeures sont données ci-dessous:

- o Définir les points clés (keypoints) /lignes/surfaces/volumes.
- o Définir le type d'élément fini, ses propriétés géométriques et les propriétés physiques des matériaux.
- o Maillage des lignes /surfaces/volumes si cela est requis.

Les données nécessaires dépendent évidemment de la dimension du problème. (i.e. 1D, 2D, axisymétrique, 3D).

- **Deuxième étape**: Traitement ou processing : Assigner les charges, contraintes (conditions aux limites) et résolution. On spécifie notamment la nature des charges (localisées et/ou distribuées), contraintes ou conditions aux limites (translation et rotation ) et, finalement, on résout le système d'équations.
- **Troisième étape** :Post-processing : Analyse et visualisation des résultats; lors de cette étape, on peut examiner:
  - o La liste des déplacements nodaux .
  - o les forces et les moments au niveau des éléments .
  - o tracé des déformées ; tracé des iso contours des contraintes.

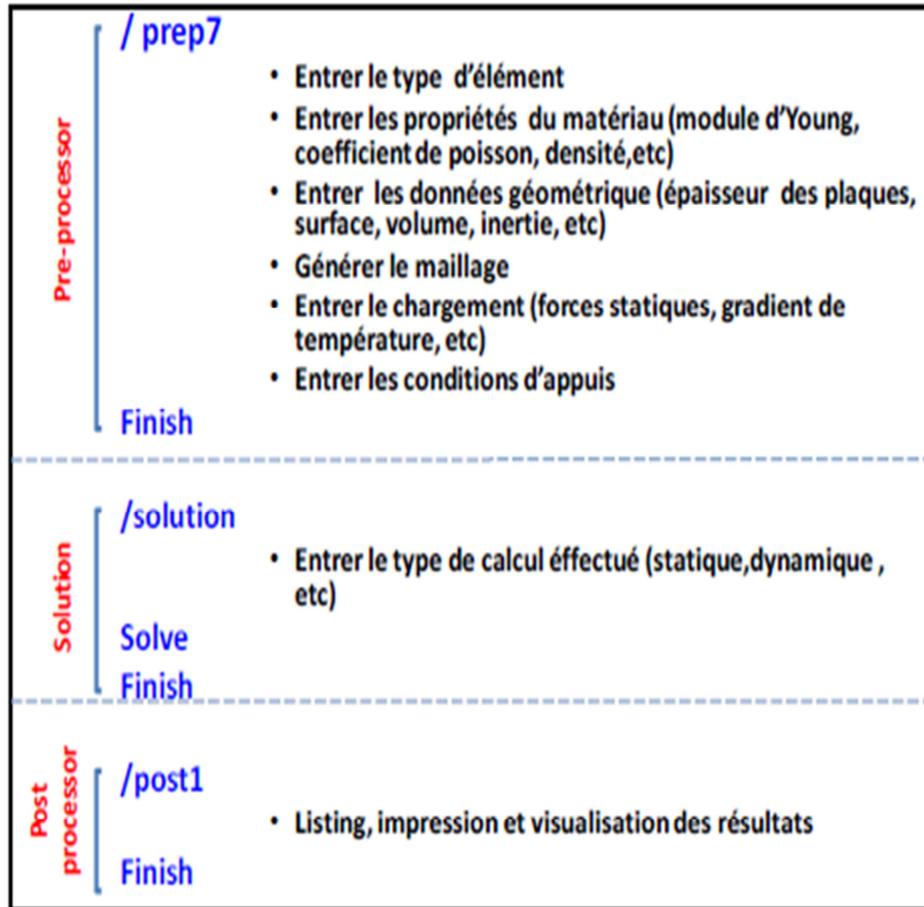


Figure 3.1 : Schéma d'utilisation classique d'ANSYS

Cette description d'ANSYS12 définit le cas générale de modélisation. Le paragraphe suivant définit la modélisation des poutres, étudiées dans notre cas.

### 3.4. ÉTAPES DE MODELISATION DES POUTRES ETUDIÉES

Pour la modélisation d'une poutre par « ANSYS 12 » on utilise les étapes suivantes. Le même principe est pour tous les types des poutres étudiées.

#### 3.4.1. Définition du type élément

La bibliothèque ANSYS propose plusieurs éléments-types [59]. Ces éléments-types se différencient par le nombre de degrés de liberté à chaque nœuds de la structure, par le domaine d'utilisation (structurel, magnétique, thermique, électrique, ...) ou bien encore par l'espace 2D ou 3D. Les degrés de liberté, autorisés sur chaque nœud, pour une structure 3D, sont les déplacements suivant les coordonnées cartésiennes (UX, UY et UZ) mais également, selon les éléments-types, des rotations (ROTX, ROTY et ROTZ). Cela définit donc 3 ou bien

6 degrés de liberté selon les éléments-types utilisés. On peut noter aussi, sur certains éléments-types, des nœuds supplémentaires au milieu de chaque arête.

Pour notre cas nous avons retenu un type d'élément structurel pouvant définir nos poutres : cet élément est appelé Beam3 (Voir figure 3.2). Les caractéristiques de cet élément sont détaillées dans le tableau 3.1.

Après avoir fixé les préférences, tel que le système métrique, la discipline (spécialité), on passe à la définition du type d'éléments.

o A partir du menu préprocessor, on sélectionne: **Element Type**, puis, on choisit "Beam 3" comme l'élément « 2D elastic »

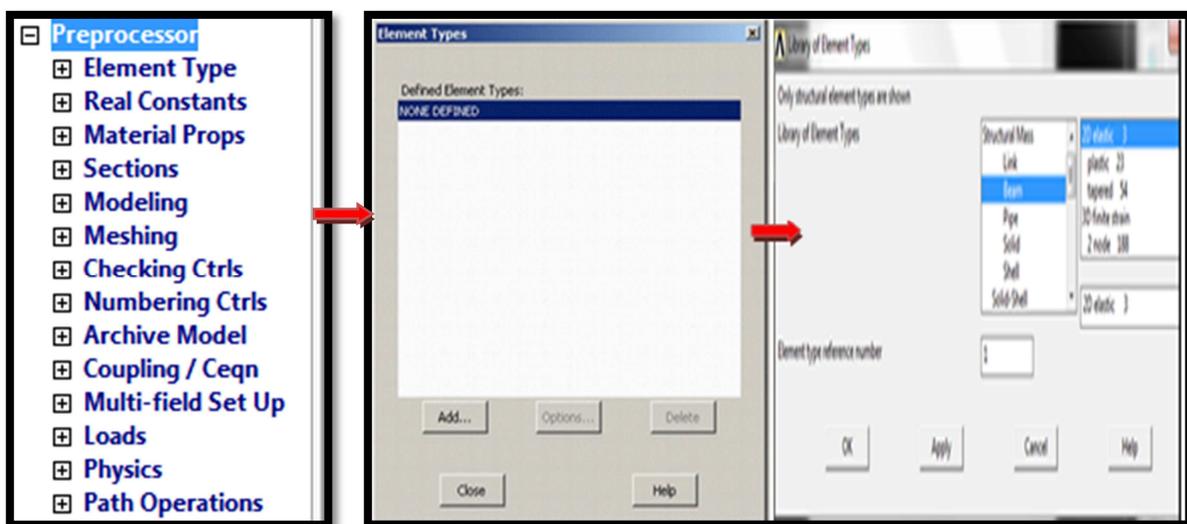


Figure 3.2 : Le type d'élément (Element Type)

L'élément BEAM 3 correspond à des éléments poutres, travaillant en traction, compression, flexion et torsion. Il transmet des translations et des rotations. L'élément possède trois degrés de liberté à chaque nœud : les translations suivant les directions  $x$  et  $y$  et la rotation autour de l'axe  $z$  nodal figure ( 3.3) [59].

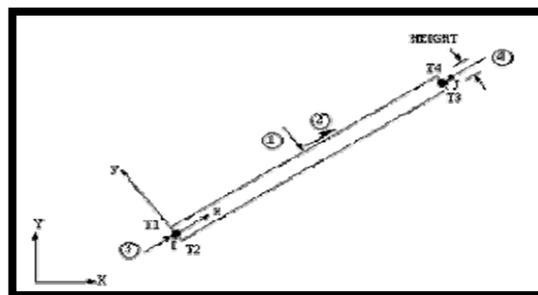


Figure 3.3: Schéma statique de poutre par ANSYS (2-D Elastic Beam ) [59]

<b>Element Name</b>	BEAM3
<b>Nodes</b>	I, J
<b>Degrees of Freedom</b>	UX, UY, ROTZ
<b>Real Constants</b>	AREA, IZZ, HEIGHT, SHEARZ, ISTRN, ADDMAS
<b>Material Properties</b>	EX, ALPX, DENS, GXY, DAMP

Tableau 3.1 : Caractéristiques des éléments types utilisés (Beam 3) [59]

### 3.4.2 .Définition des propriétés géométriques et matérielles de l'élément

Pour cette étude, nous avons choisi différents types de poutres (voir tableau 3.2).

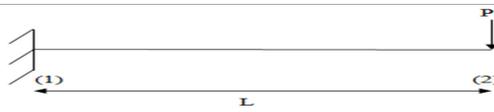
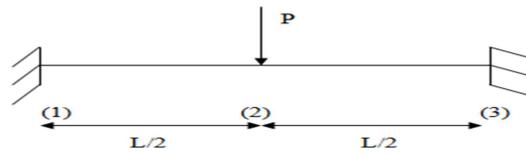
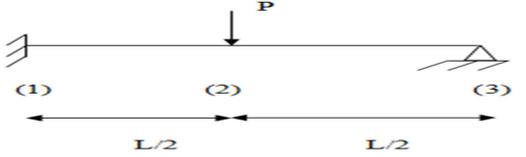
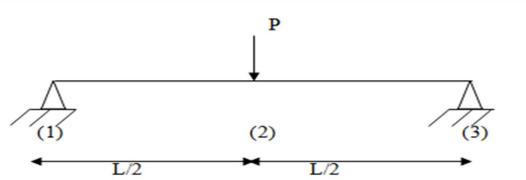
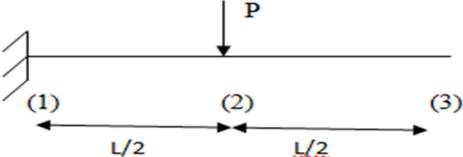
N°	Type des poutres	
1	Poutre console	
2	Poutre bi-encastée	
3	Poutre encastée – appuyée	
4	Poutres bi-appuyées	
5	Poutre console	

Tableau 3.2 : Différents types de poutres

Les propriétés mécaniques et géométriques de ces poutres sont présentées par le tableau (3.3) ci-dessous.

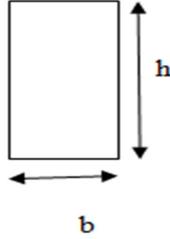
Section de la poutre : rectangulaire	
La force appliquée	$P = 10000\text{N}$
Longueur de la poutre	$L = 4\text{m}$
Module de Young	$E = 2\text{E}+11\text{ N /m}^2$
Largeur de poutre	$b = 0.4\text{ m}$
Coefficient de forme	$K = 6 / 5$
Coefficient de poisson	$\nu = 0.2$

Tableau 3.3 : Propriétés mécaniques et géométriques des poutres testées

L'introduction des propriétés géométriques de la poutre par ANSYS12 est présentée par la figure (3.4) ci dessous.

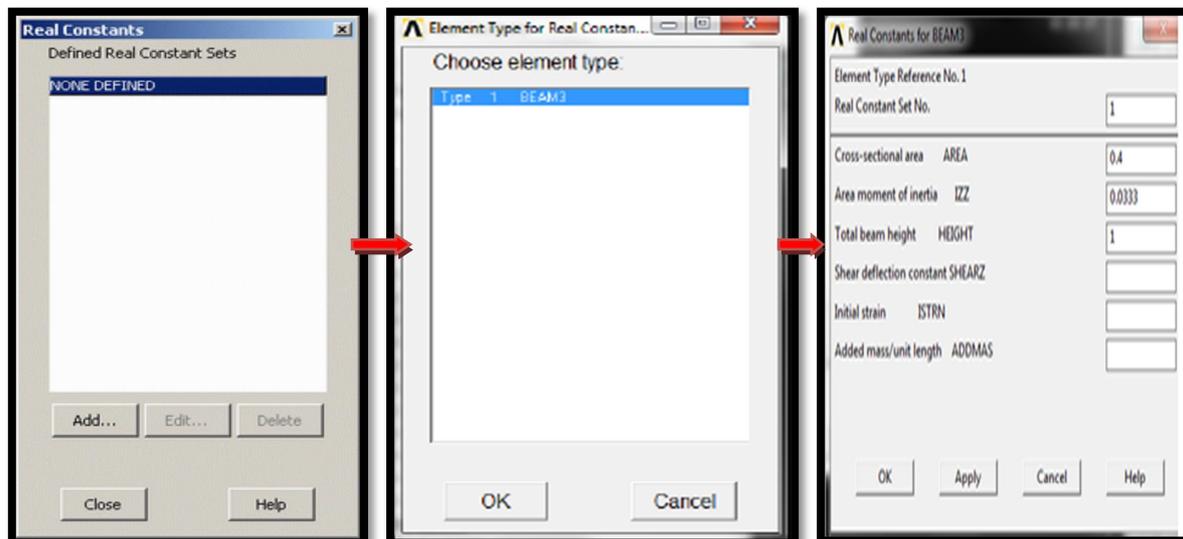


Figure 3.4 : Définition des propriétés géométriques

Désormais, nous devons définir les spécificités matérielles de l'élément, Celles – ci ont été introduites pour le module de Young  $E = 2\text{E}+11\text{ N /m}^2$  et le coefficient de poisson  $\nu = 0.2$ , comme représenté sur la figure (3.5).

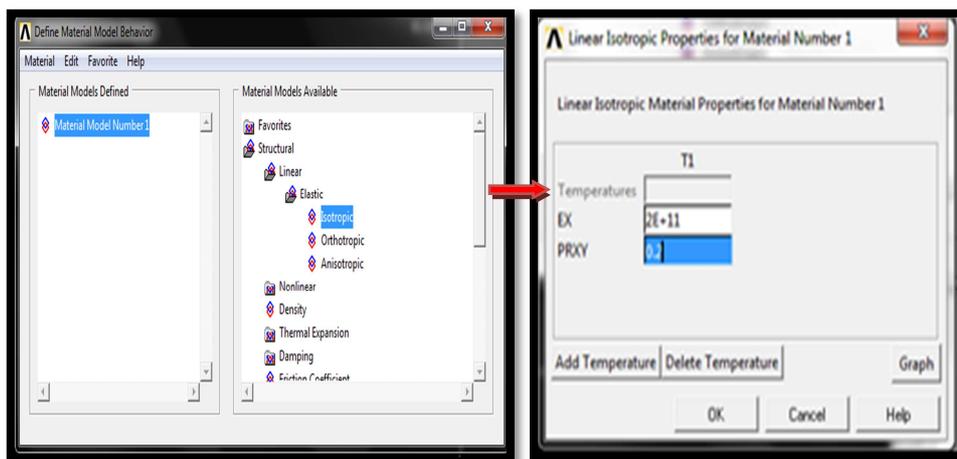


Figure 3.5 : Définition des propriétés matérielles de l'élément

### 3.4.3. Génération des points-cles ou (keypoints)

La géométrie du problème traité est définie en utilisant des points-clés ou ( keypoints). Pour notre exemple, ces points coïncident avec les extrémités de chaque élément. Nous allons définir 2 points-clés, modélisant la structure simplifiée, dont les coordonnées en « m » sont indiquées dans le tableau (3.4) suivant.

Point - clé	Coordonnées		
	X	Y	Z
1	0	0	0
2	4	0	0

Tableau 3.4 : Les coordonnées de la poutre

- Les points-clés sont indiqués sur la tableau (3.4). Ceci dit que notre poutre à une longueur suivante l'axe x égale à 4 mètre.

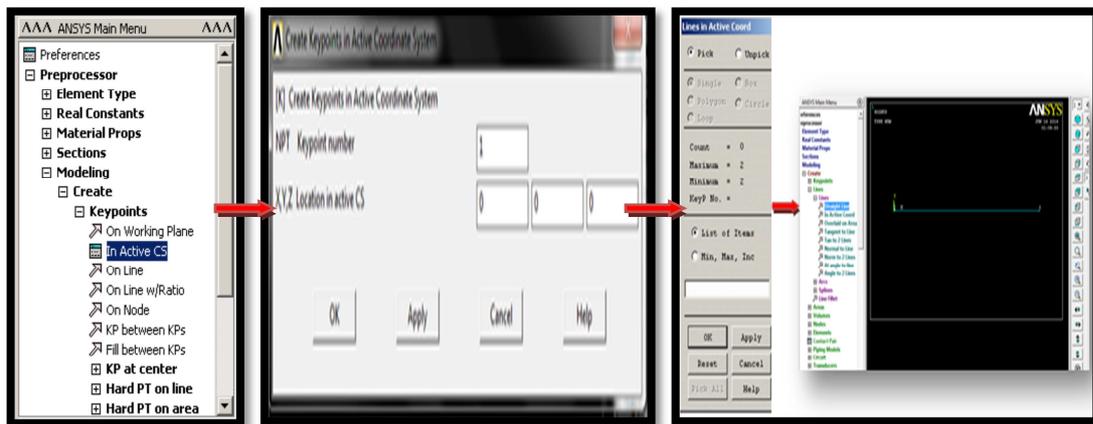


Figure 3.6 : Définition des points-clés (Keypoints)

### 3.4.4. Maillage

La phase de maillage est de spécifier à ANSYS12 la taille des éléments. Le maillage des poutres testées, a été fixé à 30. C'est-à-dire que la poutre testée sera subdivisée en 30 éléments.

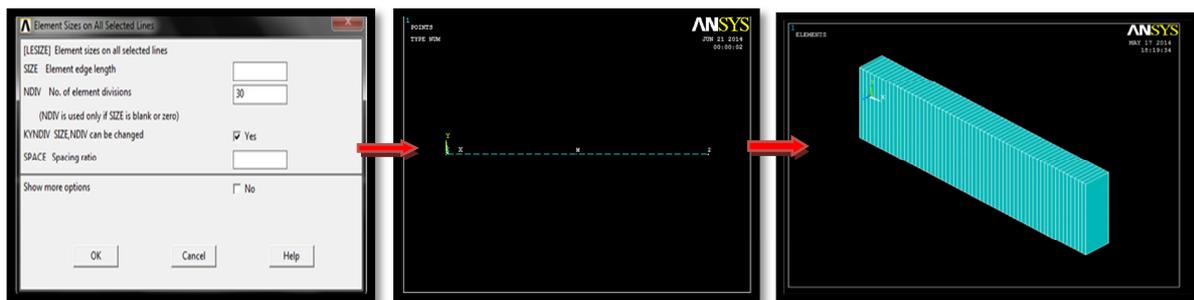


Figure 3.7 : Maillage d'une poutre (maillage : 30)

## 3.5. RESOLUTION

Une fois le modèle défini et avant de résoudre les systèmes d'équations, on doit introduire les sollicitations, les types d'appuis et les conditions aux limites. Les étapes sont montrées sur les figures suivantes :

➤ **Choix du type d'analyse & Options**

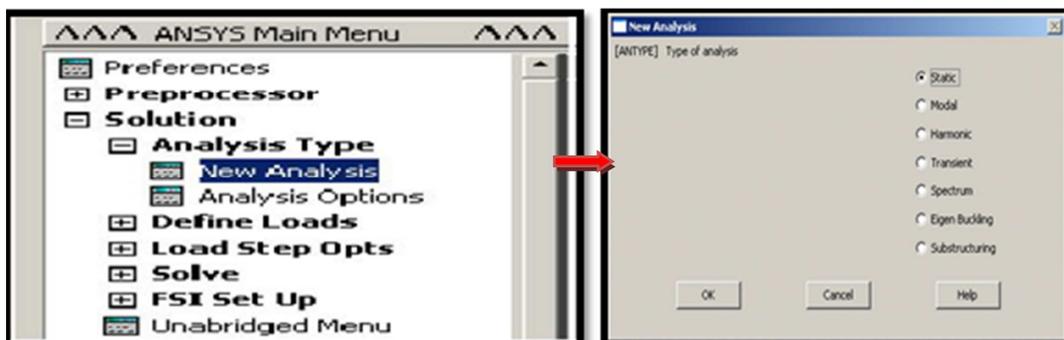


Figure 3.8. Choix du type et d'option d'analyse

➤ Introduction des conditions aux limites

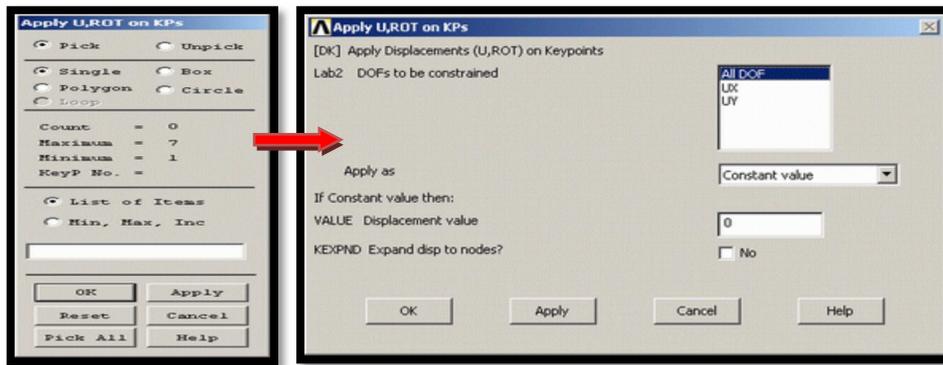


Figure 3.9 : Application des conditions aux limites

➤ Introduction des sollicitations (charges) extérieures

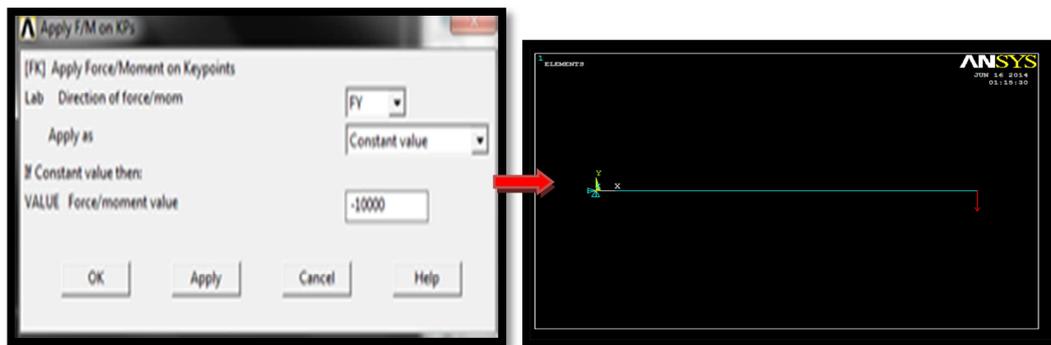


Figure 3.10: Imposer les charges

➤ Exécution du programme

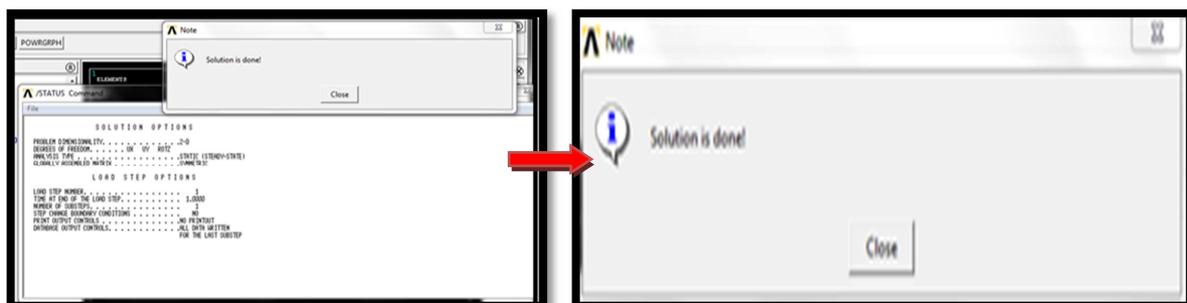


Figure 3.11 : Résolution du modèle

### 3.6. AFFICHAGES ET TRAITEMENT DES RESULTATS

Une fois toutes les données ont été introduites et que l'exécution du programme est terminée on doit alors afficher les résultats de la modélisation sous forme numérique ou graphique pour procéder à leurs analyses et traitements. La figure (3.12) montre un exemple du déplacement d'une poutre étudiée.

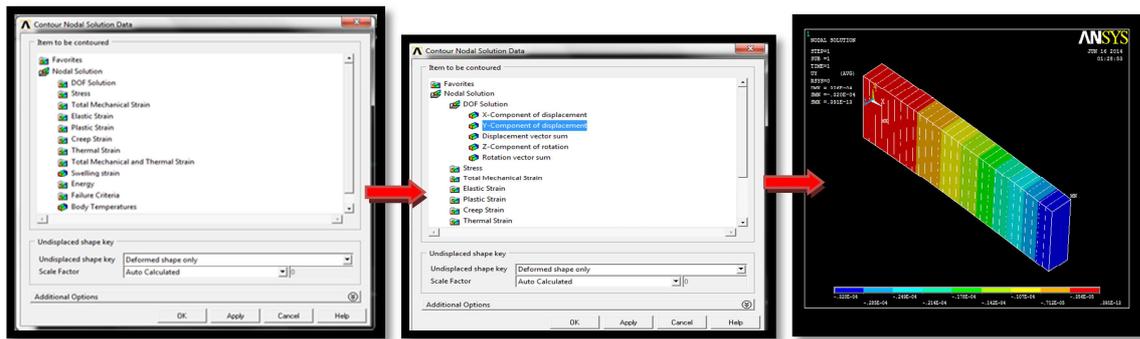
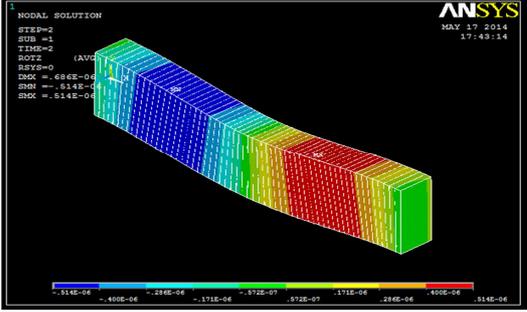
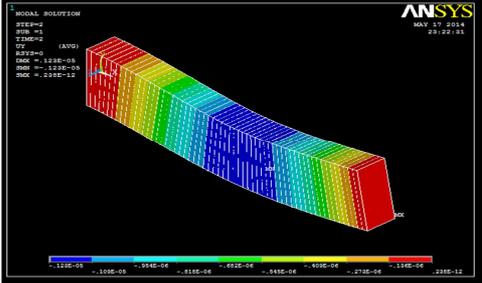
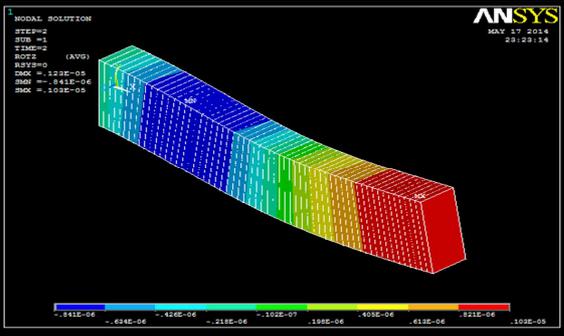
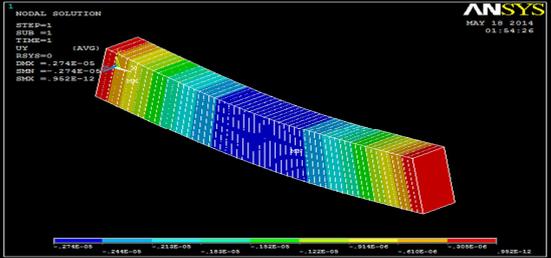
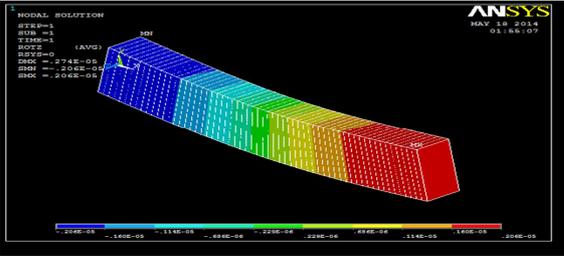


Figure 3.12 : Affichage des déplacements d’une poutre étudiée

Les résultats des déplacements et rotations obtenus par la modélisation des différentes poutres sont montrés sur tableau (3.5)

Poutre console	
Déplacement suivant l’axe Y	
Rotation suivant l’axe Z	
Poutre bi –encastée	
Déplacement suivant l’axe Y	

<p>Rotation suivant l'axe Z</p>	
<p><b>Poutre encastée – appuyée</b></p>	
<p>Déplacement suivant l'axe Y</p>	
<p>Rotation suivant l'axe Z</p>	
<p><b>Poutre bi-appuyé</b></p>	
<p>Déplacement suivant l'axe Y</p>	
<p>Rotation suivant l'axe Z</p>	
<p><b>Poutre console</b></p>	

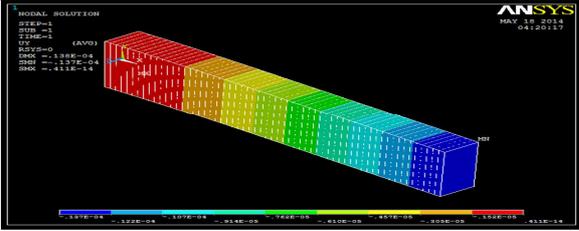
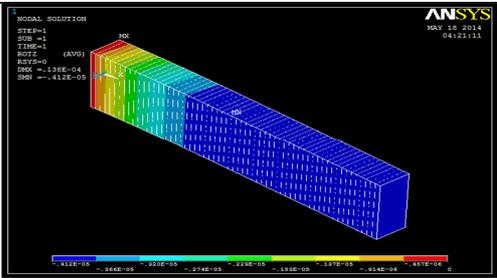
<p>Déplacement suivant l'axe Y</p>	
<p>Rotation suivant l'axe Z</p>	

Tableau 3.5 : Résultats des déplacements et rotations pour différentes poutres

La figure ( 3.13) montre la déformation d'une poutre. On observe que la valeur maximale de la déflexion se situe dans le coin haut à gauche (DMX=0.326 E-04).

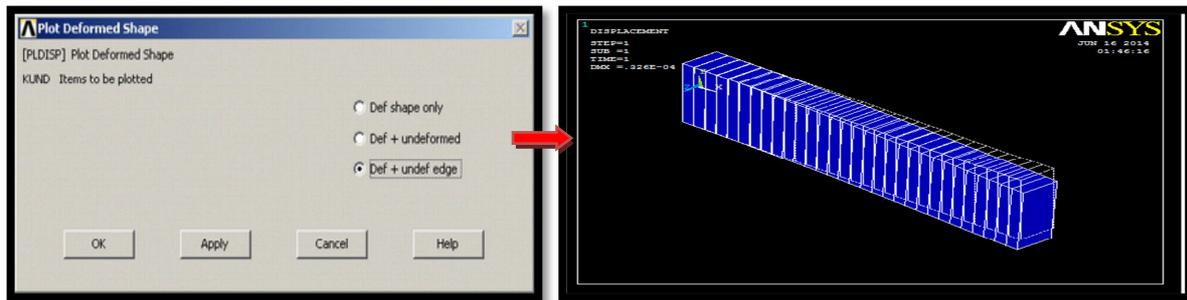


Figure 3.13: Position déformée d'une poutre étudiée

## CHAPITRE 4 RESULTATS ET DISCUSSIONS

### 4.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre les résultats obtenus par la modélisation sont discutés. Plusieurs types de poutres ont été testés. On cite : poutre console, poutre bi-appuyée, poutre encastrée – appuyée, poutre bi-encastrée.

Le tableau (4.1) présente ces différents types de poutre. Chaque poutre a été analysée par différentes méthodes, notamment la méthode RDM, la théorie de Bernoulli, la théorie de Timoshenko et celle de Friedman et Kosmatka ainsi que par la modélisation avec ANSYS12. Les effets de différents paramètres, tel que, les dimensions des poutres, les types d'appuis et le module d'élasticité, sur le comportement des poutres ont été également analysés.

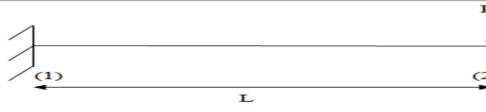
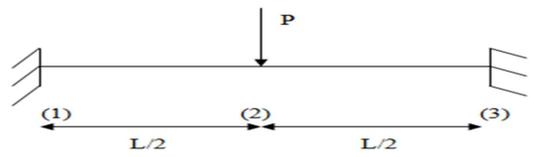
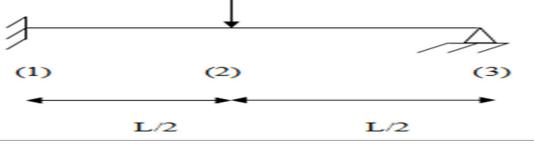
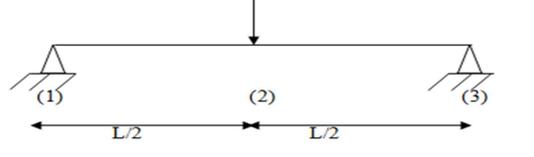
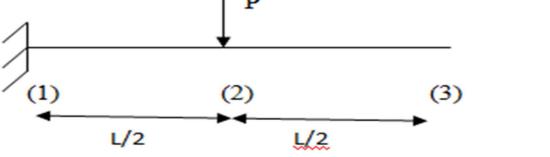
N°	Type des poutres	
1	Poutre console	
2	Poutre bi-encastrée	
3	Poutre encastrée – appuyée	
4	Poutres bi-appuyées	
5	Poutre console	

Tableau 4.1 : Différents types de poutres

## 4.2. CARACTERISTIQUES DES POUTRES

Le tableau (4.2) ci-dessous présente les caractéristiques mécaniques et géométriques des poutres testées.

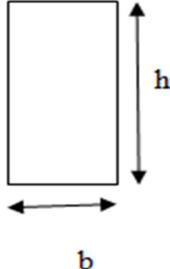
Section de la poutre : rectangulaire	
La force appliquée	$P = 10000\text{N}$
Longueur de la poutre	$L = 4\text{m}$
Module de Young	$E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
Largeur de poutre	$b = 0.4 \text{ m}$
Coefficient de forme	$K = 6/5$
Coefficient de poisson	$\nu = 0.2$

Tableau 4.2 : Propriétés mécaniques et géométriques des poutres testées

## 4.3. EFFETS D'ELANCEMENT SUR LE COMPORTEMENT DES POUTRES

Plusieurs l'élancement (rapports  $L/h$ ) ont été fixés pour étudier leurs influences sur les réponses des poutres testées. Le tableau (4.3) présente ces différents élancements. Sachant que la dimension «  $b$  » et les autres paramètres mécaniques sont restés inchangés. La hauteur de la poutre «  $h$  » a pris des valeurs allant de 2 m jusqu'à 0,2 m, par conséquent les élancements varient de 2 jusqu'à 20. Les valeurs des moments d'inertie «  $I$  » et des sections de la poutre «  $A$  » pour chaque valeur de  $(L/h)$ , y sont également présentées.

h	2	1.5	1.2	1	0.9	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2
L/h	2	2,666	3,333	4	4,444	6,666	8	10	13,333	20
$I = \frac{b h^3}{12}$	0.2666	0.1125	0.0576	0.0333	0.0243	0.0072	0.004166	0.002133	0.0009	0.0002666
A = b*h	0.8	0.6	0.48	0.4	0.36	0.24	0.2	0.16	0.12	0.08

Tableau 4.3 : Valeurs des rapports l/h utilisés

Dans les paragraphes suivants, les valeurs des déplacements et des rotations obtenus par les différentes méthodes utilisées (citées au chapitre 2) sont présentées.

Il est important de rappeler que la méthode analytique (Résistance des matériaux « RDM ») donne les valeurs et les expressions des rotations ( $\Theta_i$ ) et des flèches ( $V_i$ ) aux points  $i$  pour les différents types de poutres comme indiqué sur le tableau (4.4).

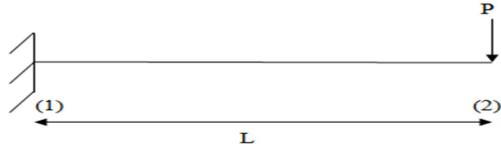
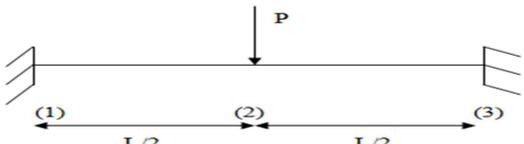
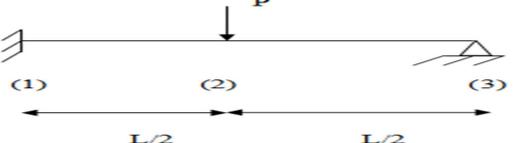
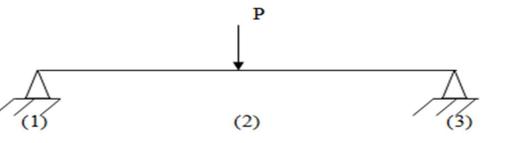
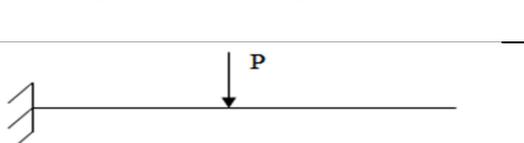
N°	Type des poutres	V <sub>1</sub>	Θ <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	Θ <sub>2</sub>	V <sub>3</sub>	Θ <sub>3</sub>
1		0	0	$-\frac{Pl^3}{3EI}$	$-\frac{Pl^2}{2EI}$		
2		0	0	$-\frac{Pl^3}{192EI}$	0	0	0
3		0	0	$-\frac{7Pl^3}{768EI}$	$-\frac{Pl^2}{128EI}$	0	$+\frac{Pl^2}{32EI}$
4		0	$-\frac{Pl^2}{16EI}$	$-\frac{Pl^3}{48EI}$	0	0	$+\frac{Pl^2}{16EI}$
5		0	0	$-\frac{Pl^3}{24EI}$	$-\frac{Pl^2}{8EI}$	$-\frac{5Pl^3}{48EI}$	$-\frac{Pl^2}{8EI}$

Tableau 4.4 : Expressions des rotations et des flèches pour différents types de poutres selon la méthode des résistances des matériaux.

### 4.3.1. Validation de la modélisation

A fin de valider la présente modélisation, il va falloir comparer ses résultats obtenus avec ceux obtenus par une autre méthode. La méthode analytique (la résistance des matériaux) à été adoptée comme méthode de référence. Les formules données dans le tableau (4.4) sont appliquées pour les différentes poutres. Les mêmes poutres sont analysées par les méthodes de Bernoulli, de Timochenko, de Friedman et Kosmatka. Le système d'équations  $[K].\{U\}=\{F\}$  à été résolu pour obtenir les déplacements et rotations de chaque types de poutre. Sachant que le matrice  $[K]$  est donnée par chaque théorie dans le chapitre 2. Ces poutres ont également été modélisées en utilisant le logicielle ANSYS12. Les résultats des rotations et des flèches pour différents élancements sont présentés sur les figures suivantes, pour les différents types de poutres.

#### ➤ Poutre 1

Pour cette poutre, les déplacements et les rotations sont calculés à l'extrémité libre de la poutre console. Les résultats sont présentés sur les figures (4.1) et (4.2).

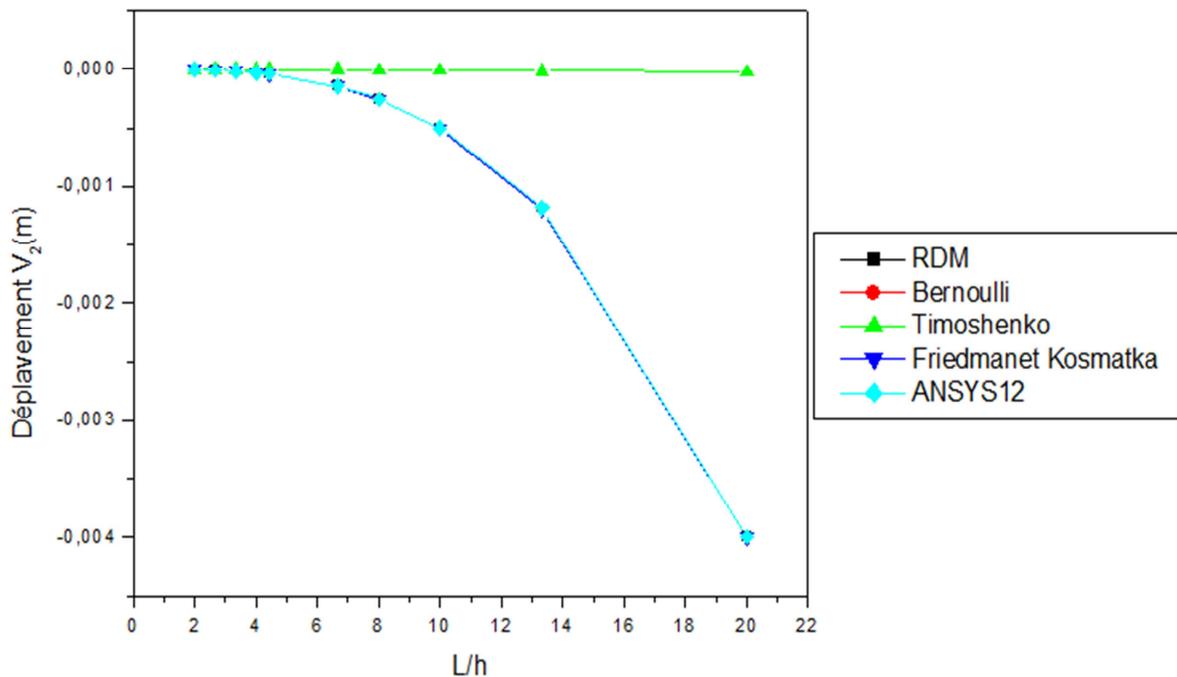


Figure 4.1: Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  par différentes méthodes

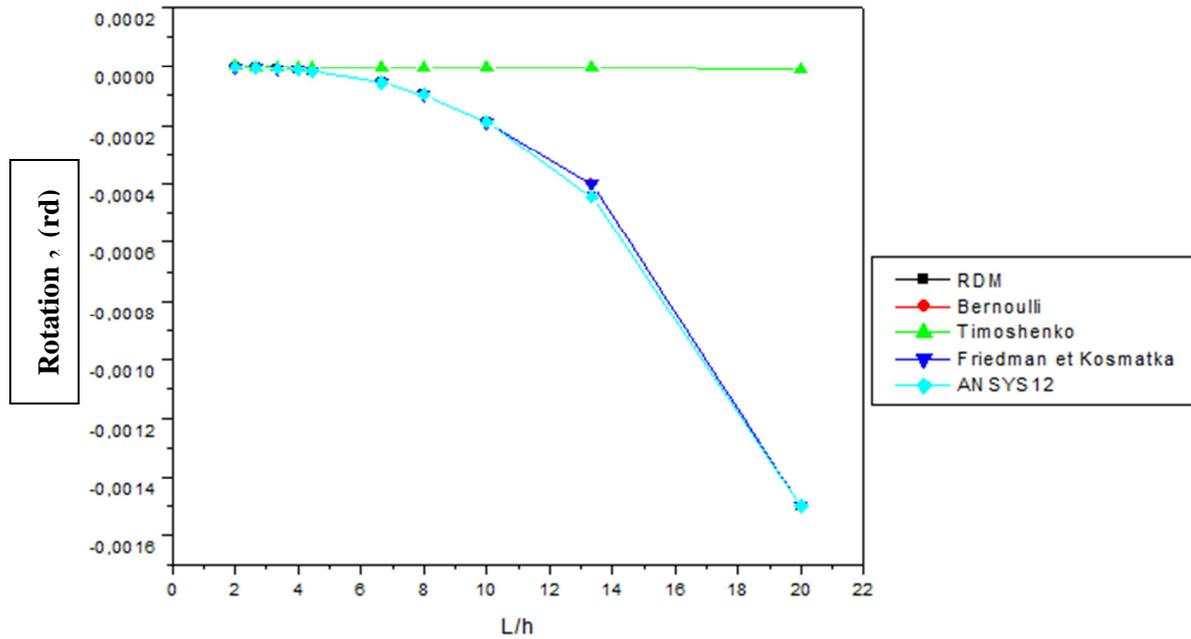


Figure 4.2 : Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports L/h par différentes méthodes

Les deux figures (4.1) et (4.2) montrent les courbes des déplacements et des rotations ( $V_2$ ,  $\Theta_2$ ) à l'extrémité libre de la poutre (poutre console). On remarque de ces courbes que les déplacements ( $V_2$ ) et les rotations ( $\Theta_2$ ) augmentent lorsqu'on augmente le rapport d'élancement (L/h). Il a été remarqué aussi que les courbes de Bernoulli; de Friedman et Kosmatka ainsi que celles de la modélisation sont presque superposées avec la courbe de RDM dans les différents points (L/h = 2 à 20).

Les courbes de Timoshenko font exception. Elles restent pratiquement constantes quelque soit le rapport (L/h) et que les valeurs des déplacements – rotations sont quasiment nulles.

Contrairement aux courbes de Timoshenko, les autres courbes obtenues par les méthodes de Bernoulli, Friedman et Kosmatka ainsi que celles de la modélisation donnent des valeurs qui changent d'une manière significative et croissante à partir du rapport (L/h  $\geq$  4).

Les résultats de la présente modélisation sont très proches des résultats analytiques. Ceci dit que cette modélisation donne de bons résultats comparativement aux autres théories. Par conséquent, on peut conclure qu'elle est bien validée.

➤ Poutre 2

Dans cette poutre, les déplacements et les rotations ont été calculés au milieu de la poutre. Les résultats sont présentés sur les figures (4.3) et (4.4).

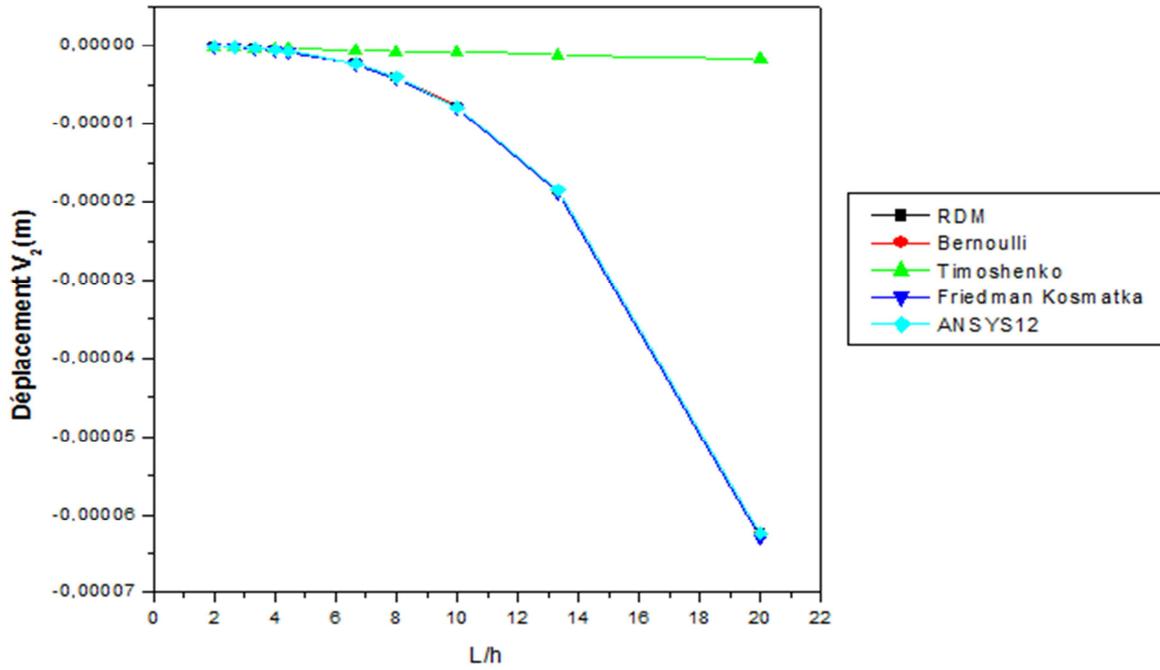


Figure 4.3 : Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  par différentes méthodes

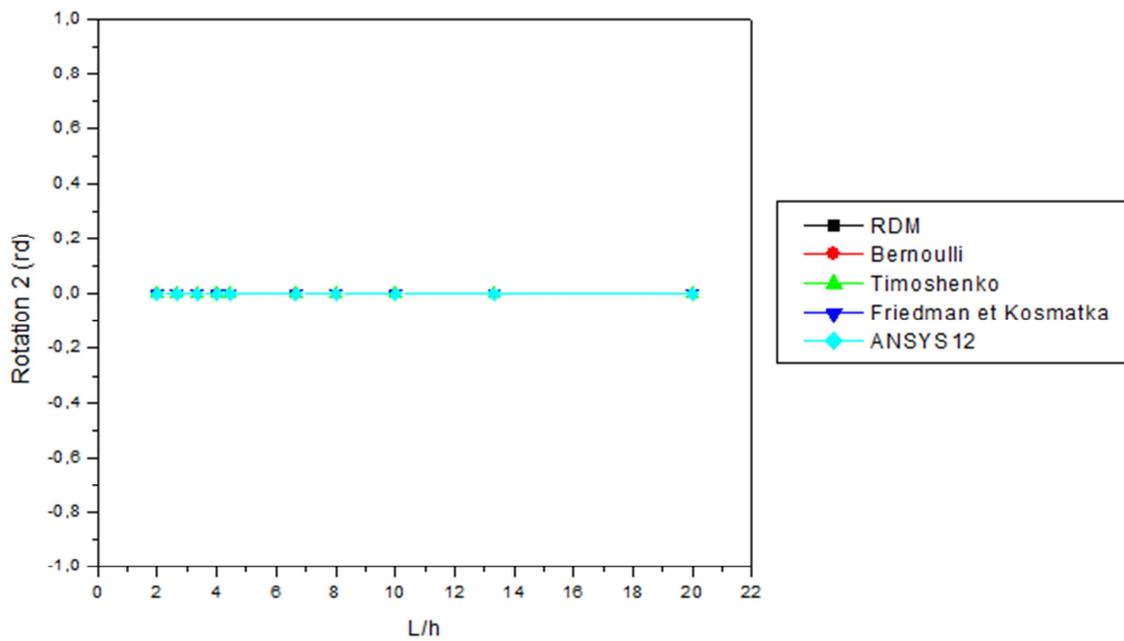


Figure 4.4 : Rotations ( $\theta_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  par différentes méthodes

Les figures (4.3) et (4.4) montrent les courbes de déplacements et des rotations ( $V_2$ ,  $\Theta_2$ ) au milieu de la poutre 2 (poutre bi-encastée). La figure (4.4) montre que l'angle à rotations  $\Theta_2$  est nul quelque soit le rapport ( $L/h$ ) pour toutes les méthodes utilisées. Ceci s'explique par la symétrie géométrique et matérielle, de la poutre 2 au milieu ( $x = L/2$ ).

Les courbes des déplacements ( $V_2$ ) figure (4.3) augmentent lorsque l'on augmente le rapport d'élancement ( $L/h$ ). Il a été remarqué que les courbes de Bernoulli, de Friedman et Kosmatka et de la modélisation sont presque superposées avec la courbe de la RDM dans les différents points ( $L/h = 2$  à 20). Les courbes de Timoshenko restent constantes quelque soit le rapport ( $L/h$ ) et que les valeurs de déplacements sont quasiment nulles.

Les résultats de la modélisation sont très des résultats analytiques. Ceci dit que cette modélisation a été validée et donne de bons résultats comparativement aux autres théories.

### ➤ Poutre 3

Pour cette poutre le calcul des déplacements et des rotations s'est fait dans 3 sections: ( $V_2$ ,  $\Theta_2$ ) à la section 1 (milieu de la poutre) et  $\Theta_3$  au niveau de l'appui comme indiqué dans le tableau (4.4). Ceci permettra la comparaison de résultats avec les formules de la RDM, données également au tableau (4.4).

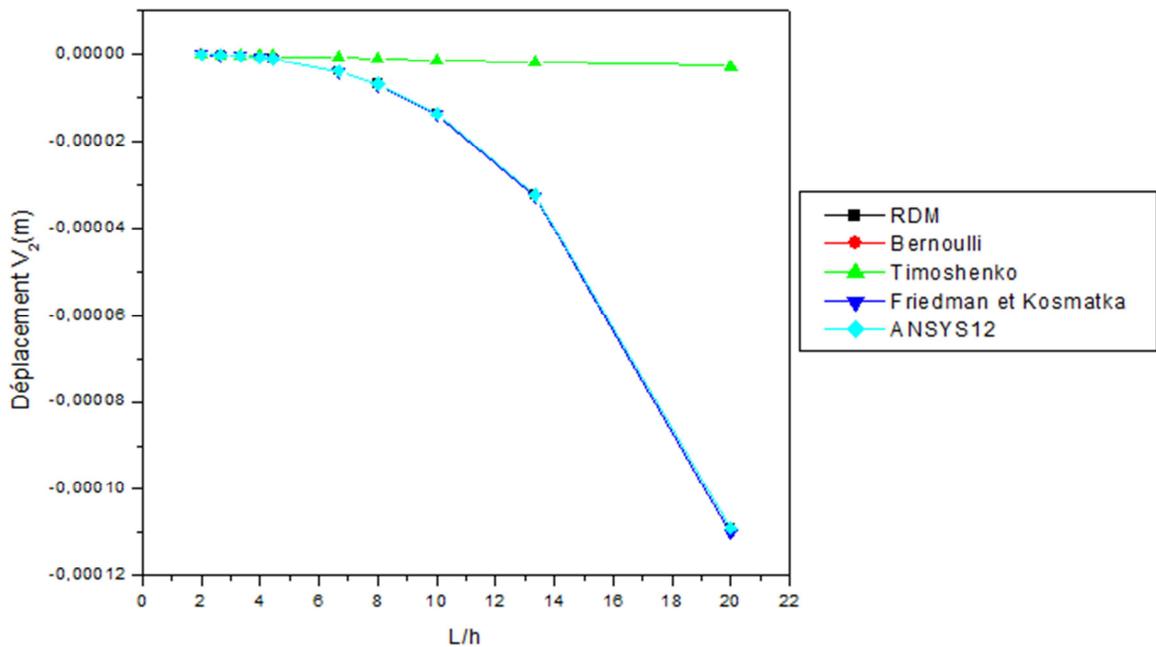


Figure 4.5: Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  par différentes méthodes

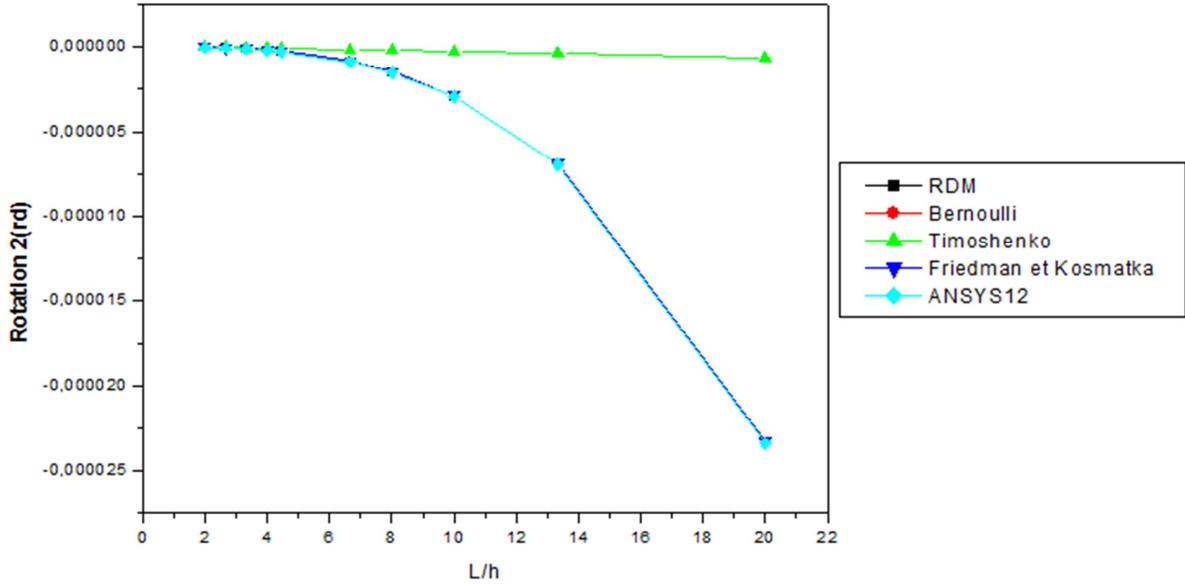


Figure 4.6 : Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  par différentes méthodes

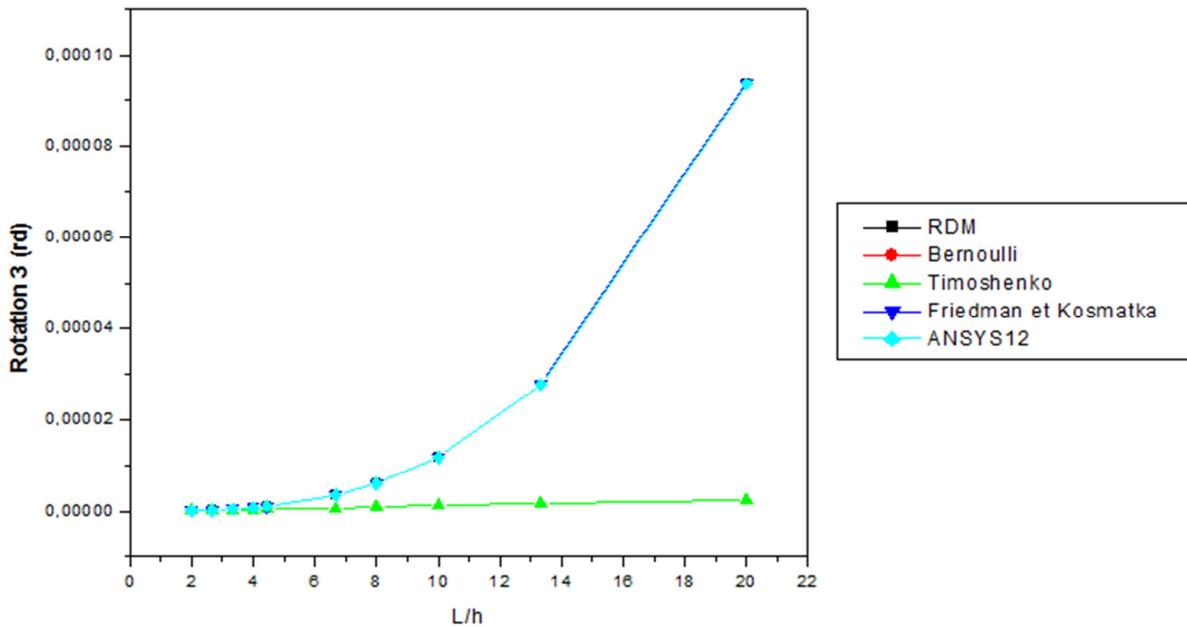


Figure 4.7 : Rotations ( $\Theta_3$ ) en fonction des rapports  $L/h$  par différentes méthodes

Les figures (4.5) (4.6) et (4.7) montrent les déplacements et les rotations ( $V_2$ ,  $\Theta_2$ ) au milieu de la poutre 3 (poutre encastée –appuyée); les rotations ( $\Theta_3$ ) à l'appui de la poutre. Comme cela à été constaté pour les poutres 1 et 2, les valeurs des déplacements et des rotations donnés par Timoshenko sont quasiment nulles pour tous les rapports ( $L/h$ ). Tandis que, les courbes donnés par les autres méthodes sont pratiquement confondues et qui augmentent avec l'augmentation du rapport ( $L/h$ ). Cette augmentation devient significative à

partir de ( $L/h \geq 4$ ). Là aussi les résultats de la présente modélisation coïncident avec ceux des autres théories.

#### ➤ Poutre 4

Pour cette poutre, les déplacements et les rotations au milieu de la poutre en plus des rotations au niveau des appuis ont également été calculés. Les résultats sont présentés sur les figures (4.8) à (4.12)

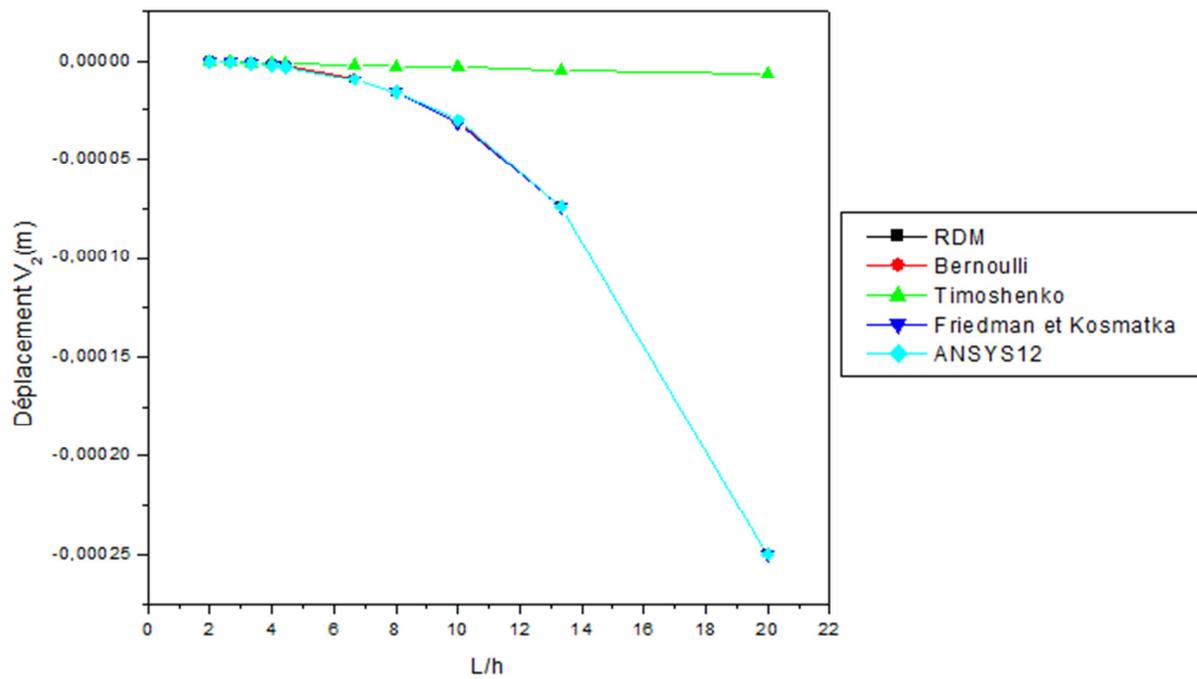


Figure 4.8 : Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  par différentes méthodes

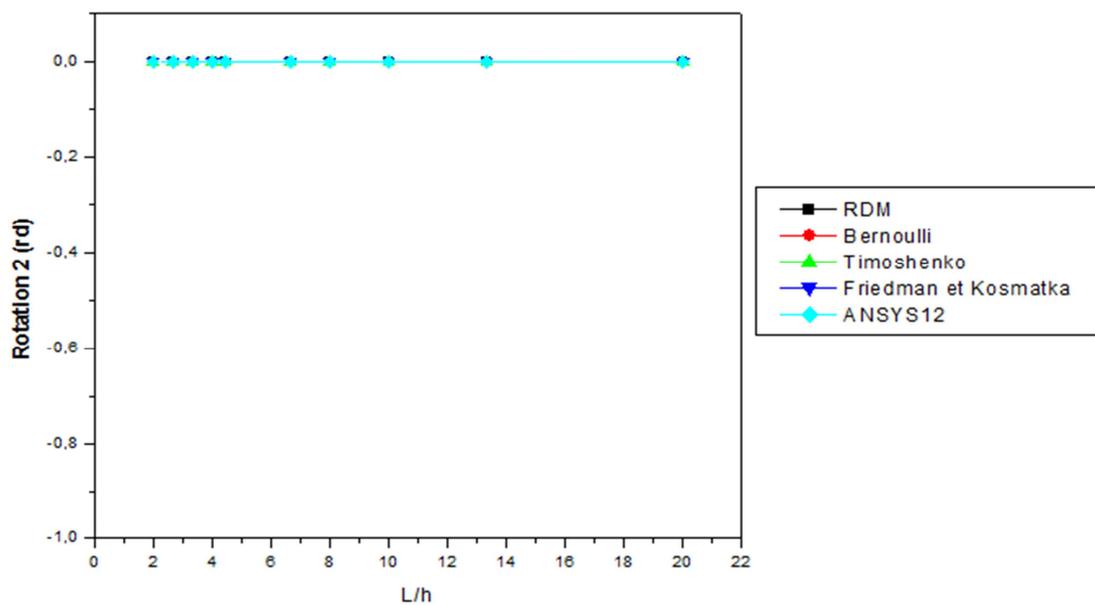
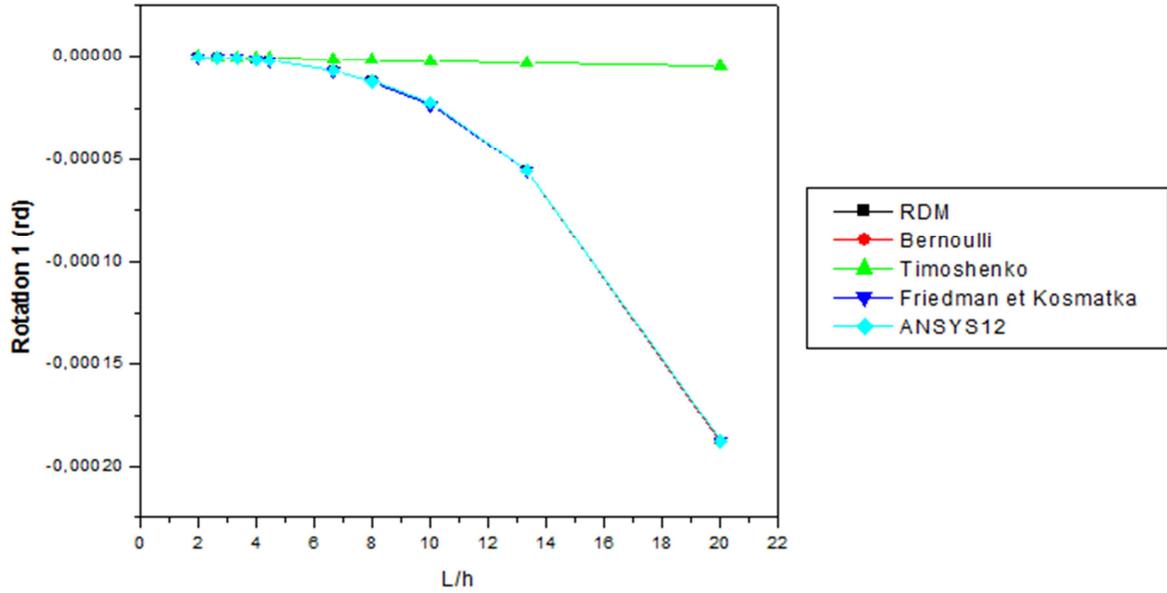
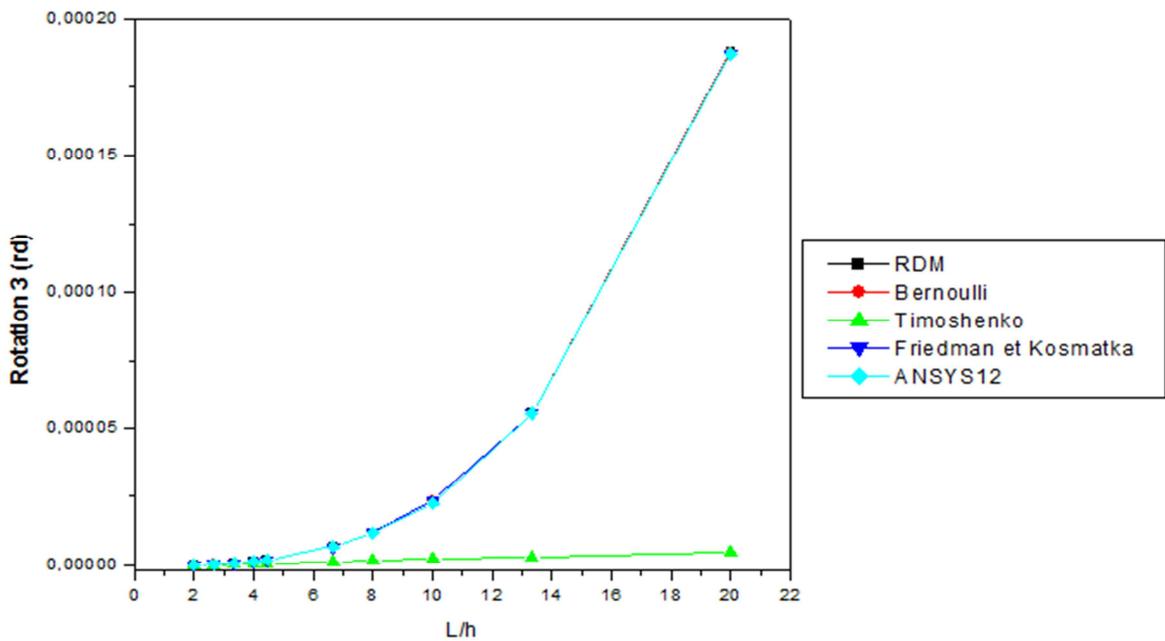


Figure 4.9 : Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  par différentes méthodes

Figure 4.10 : Rotations ( $\Theta_1$ ) en fonction des rapports  $L/h$  par différentes méthodesFigure 4.11 : Rotations ( $\Theta_3$ ) en fonction des rapports  $L/h$  par différentes méthodes

La figure (4.9) montre que l'angle de rotation  $\Theta_2$  calculé au milieu de la poutre est nul quelque soit le rapport ( $L/h$ ) pour toutes les méthodes utilisées. Ceci est dû à la symétrie géométrique et matérielle de la poutre au niveau de la section du milieu ( $x = L/2$ ). Les figures (4.8) (4.10) et (4.11) montrent que les déplacements  $V_2$  et les rotations, aux niveaux des appuis augmentent lorsque l'on augmente le rapport d'élancement ( $L/h$ ).

Les courbes obtenues par les méthodes de Bernoulli ; de Friedman et Kosmatka et de la modélisation par ANSYS12 sont presque confondues avec la courbe de RDM, sauf la courbe de Timoshenko qui donne toujours des valeurs nulles quelque soit le rapport (L/h).

Les courbes obtenues par les méthodes Bernoulli, Friedman et Kosmatka et la modélisation augmentent de manière significative à partir du rapport ( $L/h \geq 4$ ). Ces résultats montrent également que notre modélisation est bien validée du fait que ses résultats sont en bonne concordance avec ceux des autres méthodes.

### ➤ Poutre 5

Pour cette poutre, qui est une poutre console, le charge est appliqué au milieu de la poutre. Les déplacements et les rotations sont calculés au point d'application de la charge et à l'extrémité libre. Les résultats sont présentés sur les figures (4.12) à (4.15)

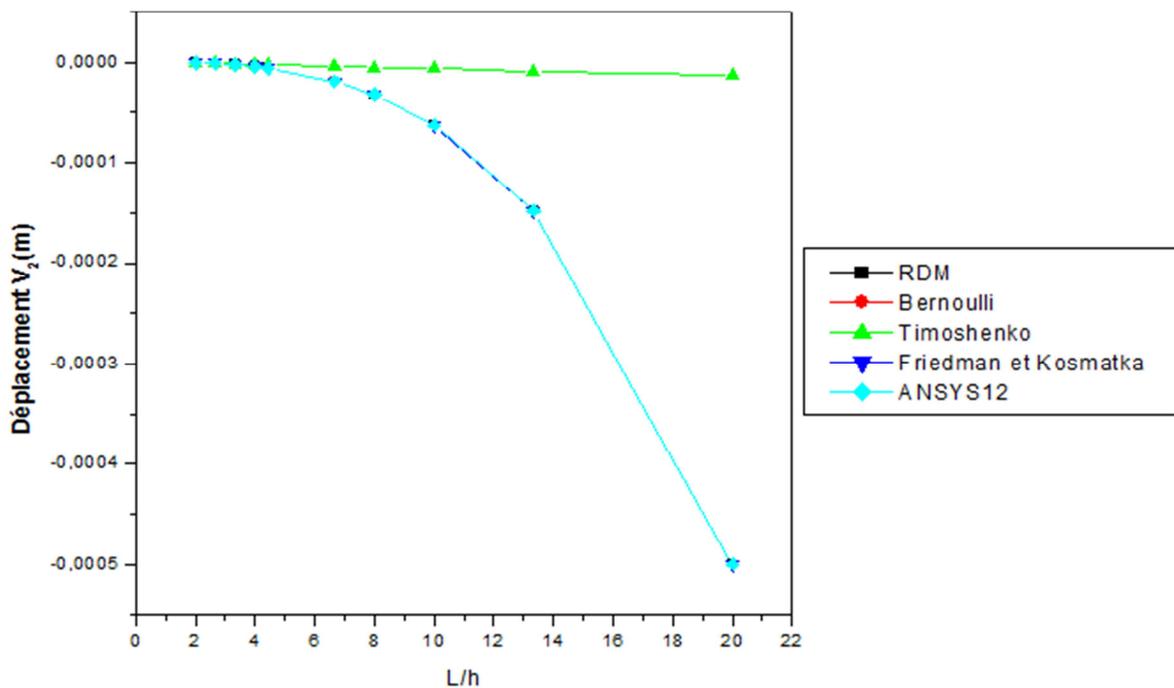


Figure 4.12 : Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  par différentes méthodes

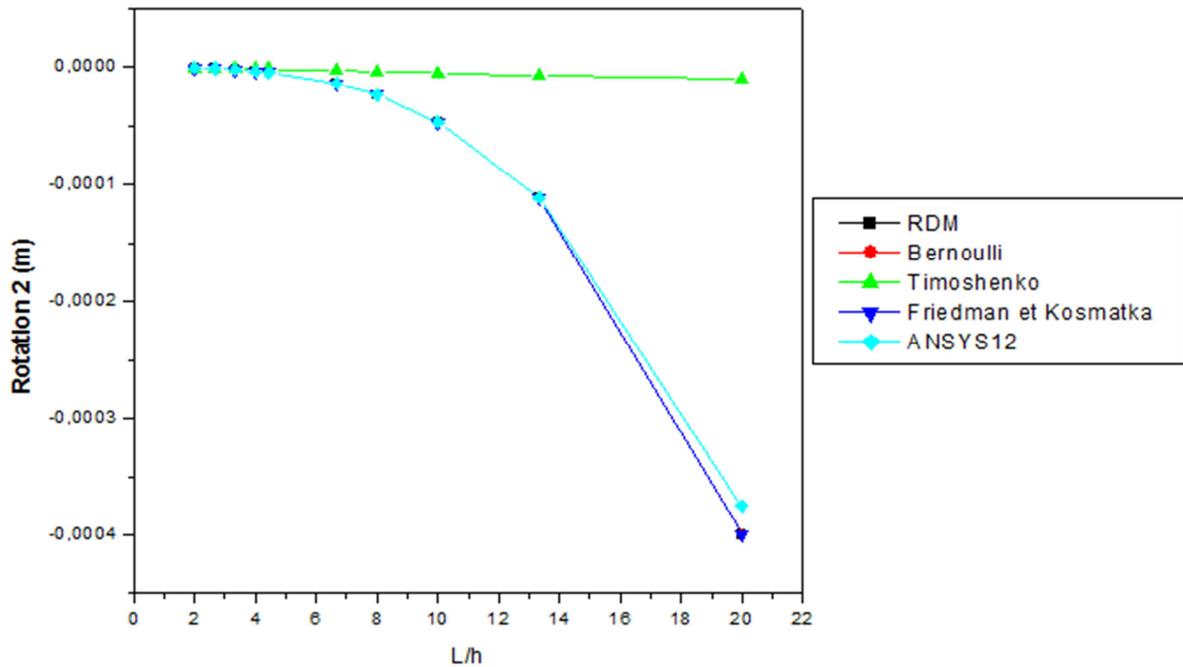


Figure 4.13 : Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  par différentes méthodes

A partir des figures (4.12) et (4.13) on constate que les déplacements et les rotations ( $V_2, \Theta_2$ ) à la section 2 sont quasiment nuls pour la méthode de Timoshenko, tandis qu'ils augmentent avec le rapport ( $L/h$ ). Cette augmentation devient plus rapide et plus grande à partir du rapport ( $L/h \geq 4$ ). Cependant, on doit noter une légère différence dans les valeurs de  $\Theta_2$  entre les valeurs données par la modélisation et celles données par les méthodes (RDM ; Bernoulli, Friedman et Kosmatka). Cette différence est de l'ordre de  $10^{-4}$ .

Pour les valeurs ( $V_3, \Theta_3$ ) dans le section 3 (l'extrémité libre), on constate également que celles données par le théorie de Timoshenko sont quasiment nulles, alors que celles données par les autres méthodes augmentent avec l'augmentation du rapport ( $L/h$ ). Comme cela a été constaté précédemment, ces augmentations deviennent importantes à partir du rapport ( $L/h \geq 4$ ). Une légère différence à également été constatée et de l'ordre de  $5.10^{-5}$ .

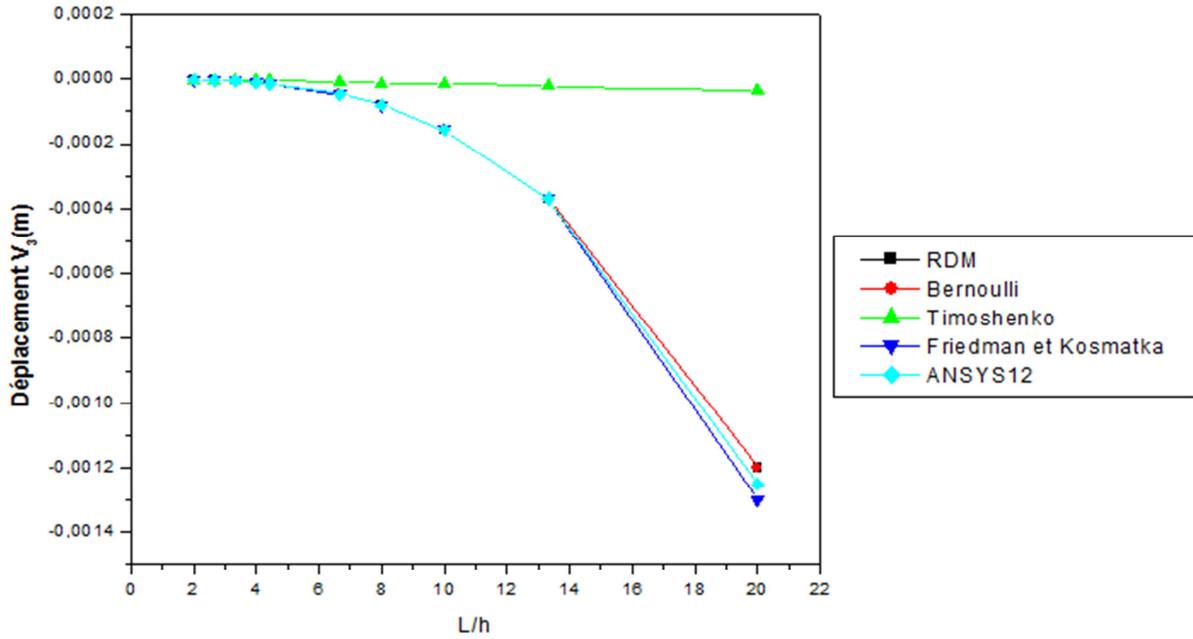


Figure 4.14 : Déplacements ( $V_3$ ) en fonction des rapports  $L/h$  par différentes méthodes

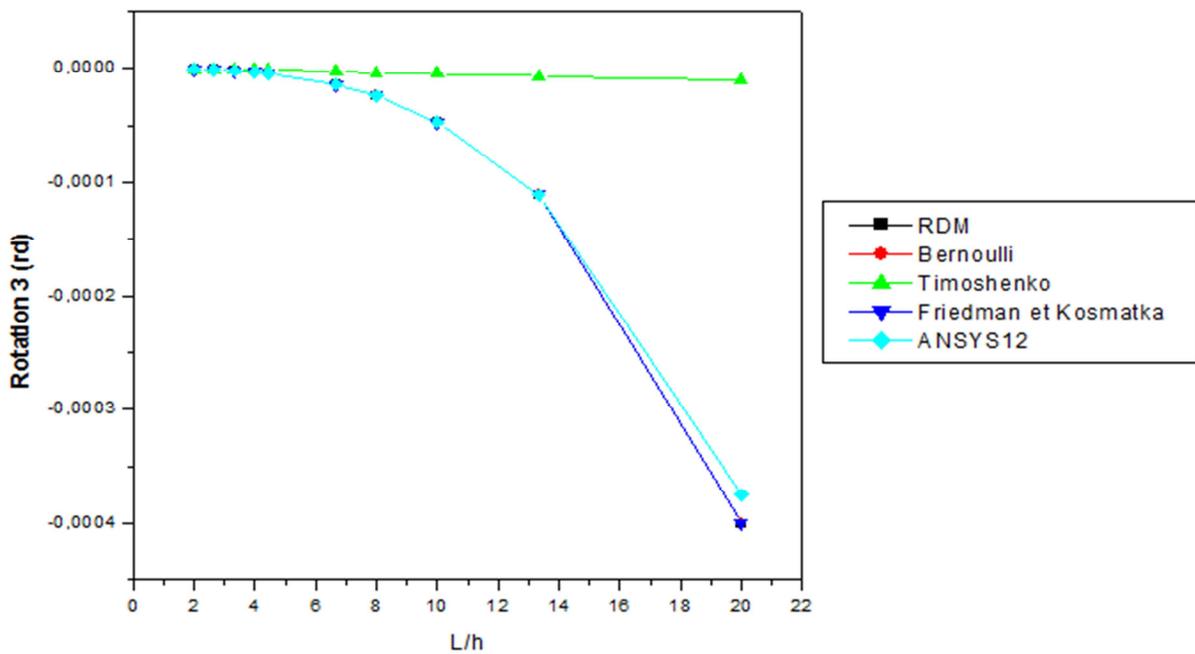


Figure 4.15 : Rotations ( $\theta_3$ ) en fonction des rapports  $L/h$  par différentes méthodes

On note à partir des figures (4.12) à (4.15) que les déplacements  $V_3$  dans l'extrémité libre sont plus grandes par rapport aux déplacements  $V_2$  ce qui est évident. Cela confirme la bonne modélisation. On remarque également que les courbes de Bernoulli et de Friedman et Kosmatka et de la modélisation sont confondues à la courbe de RDM. Exception fait pour la courbe de Timoshenko qui demeure très loin de la courbe de (RDM) et dont les valeurs sont

pratiquement nulles (d'ordre  $10^{-7}$ ). Comme cela été observé dans le cas des autres poutres, les courbes déplacements et rotations augmentent avec le rapport ( $L/h$ ). L'augmentation devient significative à partir de ( $L/h \geq 4$ ). Les résultats de la présente modélisation sont très proches des résultats analytiques. Ceci montre la validité de cette modélisation.

### Conclusion

A partir des figures (4.4 - 4.9) on peut conclure que l'angle de rotation ( $\Theta_2$ ) est nul quelque soit l'élanement de la poutre pour toutes les méthodes utilisées du fait des symétries des poutres.

Les courbes des déplacements ( $V_i$ ) et des rotations ( $\Theta_i$ ) augmentent avec les rapports ( $L/h$ ) notamment pour le valeur ( $L/h \geq 4$ ). Exception fait pour les valeurs données par la théorie de Timoshenko qui sont quasiment nulles. On note également que courbes de Friedman et Kosmatka et de Bernoulli ainsi que celles de la modélisation, sont presque superposées par rapport à la courbe de RDM dans tous les différents points ( $L/h=2$  à  $20$ ).

La courbe de Timoshenko, est superposée avec les autres courbes seulement dans les quatre premiers points ( $L/h=2$  à  $4$ ). Ceci l'explique par rigidité de la poutre qui bloque les déplacements et les rotations dans le cas de cette théorie.

Les résultats de notre modélisation sont très proches des résultats analytiques. Ceci dit que cette modélisation a été validée et donne de bons résultats comparativement aux autres théories.

## 4.4. EFFETS DES CONDITIONS D'APPUI DES POUTRES

### 4.4. 1. Différents types d'appuis utilisés

Toute poutre (ou système de poutres) isolé et en équilibre a nécessairement des liaisons avec son milieu extérieur. Les liaisons parfaites ce sont des liaisons telles que le travail des forces de liaison dans les déplacements relatifs permis est nul. La figure (4 .16) présente les types d'appuis utilisés.

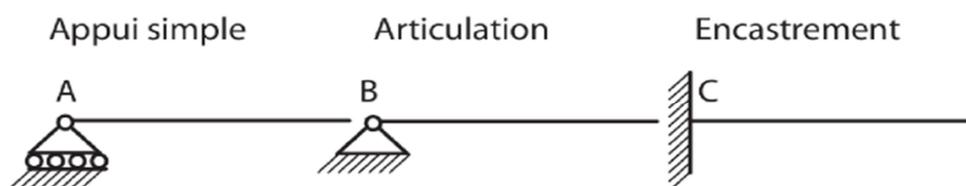


Figure 4.16: Les liaisons parfaites

Le tableau (4.5) définit les déplacements des différents types de liaison.

Nature de l'appui	Représentation schématique de l'appui	Réactions	Déplacements
<b>Appui simple</b>		Réaction : $R_y$ $R_x = M = 0$	$v = 0$ $u, \theta$ libres
<b>Articulation (appui simple fixe)</b>		Réaction : $(R_x, R_y)$ $M = 0$	$u = v = 0$ $\theta$ libre
<b>Encastrement</b>		Réaction : $(R_x, R_y, M)$	$u = v = \theta = 0$

Tableau 4.5 : Les actions de liaison

Dans cette partie, les effets sont analysés des différents types d'appuis des poutres, isostatiques est hyperstatiques, par différentes méthodes ; notamment la méthode RDM, la théorie de Bernoulli, Timoshenko et Friedman et Kosmatka ainsi que par la modélisation par ANSYS.

Le tableau (4.6) présente les quatre poutres étudiées. Deux poutres isostatiques et deux autres hyperstatiques. Les déplacements et les rotations seront calculés dans quelques sections.

N°	Type des poutres	
1	Poutre bi-encastree	
2	Poutre encastree – appuyee	

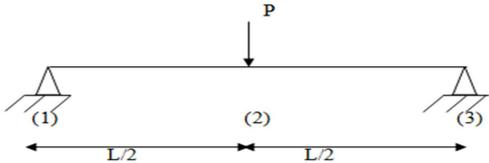
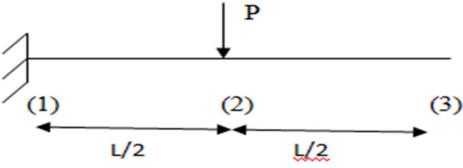
3	Poutres bi-appuyées	
4	Poutre console	

Tableau 4.6 : Types des poutres

### 4.4.2. Résultats obtenus par différentes méthodes

Les courbes des rotations ( $\Theta_2$ ) et des flèches ( $V_2$ ) obtenues par différentes méthodes et différents élancements pour chaque poutre sont présentées sur les figures (4.17) à (4.28).

➤ **La méthode des résistances des matériaux**

Les courbes des rotations ( $\Theta_2$ ) et des flèches ( $V_2$ ) obtenues pour différents élancements au point d'application du chargement sont donnés par les relations de la résistance des matériaux comme suit :

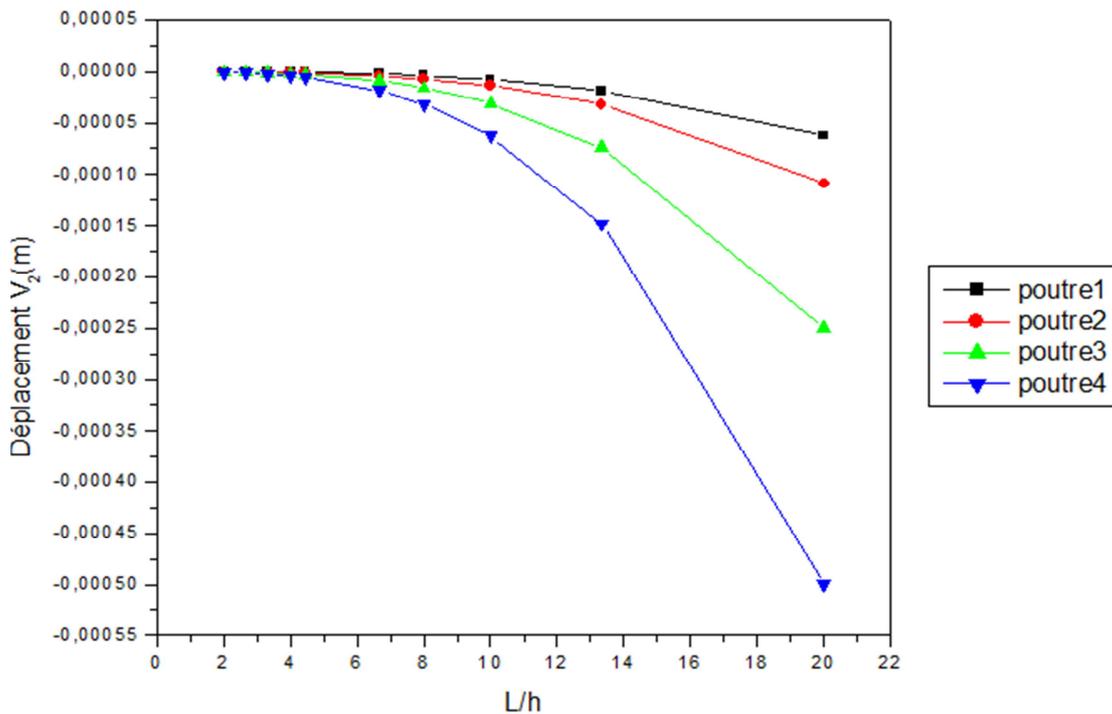


Figure 4.17 : Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différentes poutres

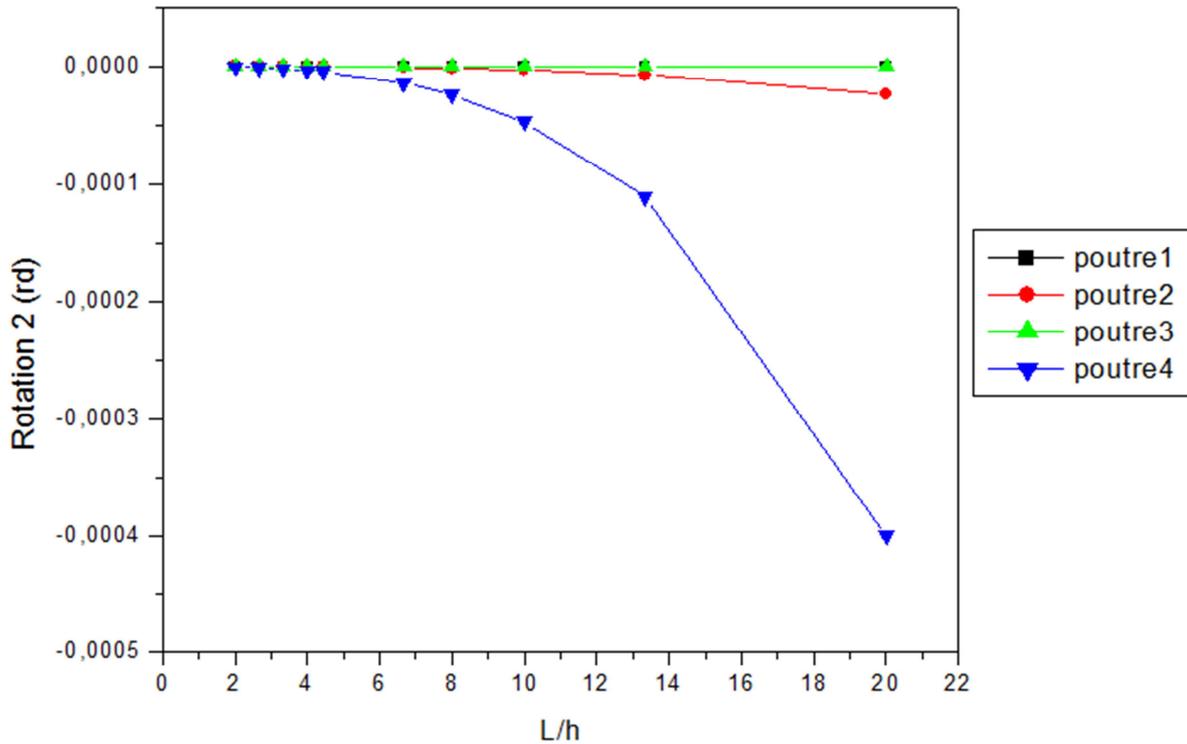


Figure 4.18 : Rotation ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différentes poutres

Il à été remarqué à partir des figures (4.17) et (4.18) que les déplacements et les rotations de la poutre 4 (poutre console) sont les plus grandes. Alors que les plus faibles sont ceux de la poutre 1 (poutre bi-encastée). Ces résultats sont logiques. Ils montrent à quel point les encastrements empêchent la poutre de fléchir.

La figure (4.18) montre également que les rotations pour les poutres 1 et 3 sont nulles quelque soit le rapport ( $L/h$ ) du fait de leurs symétries mécaniques et matérielles.

#### ➤ La méthode de Bernoulli

Les courbes des rotations ( $\Theta_2$ ) et des flèches ( $V_2$ ) obtenues pour différents élancements au point d'application de la charge, en utilisant la théorie de Bernoulli sont représentés sur les figures (4-19) et (4-20).

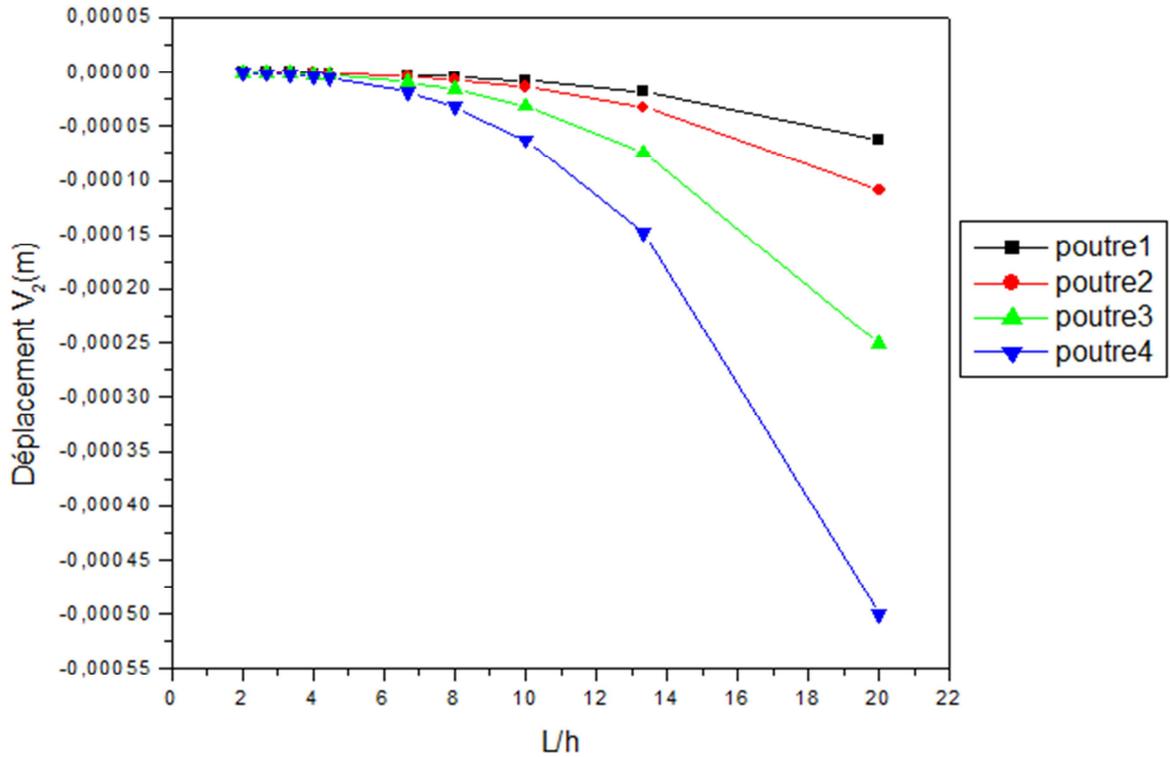


Figure 4.19 : Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différentes poutres

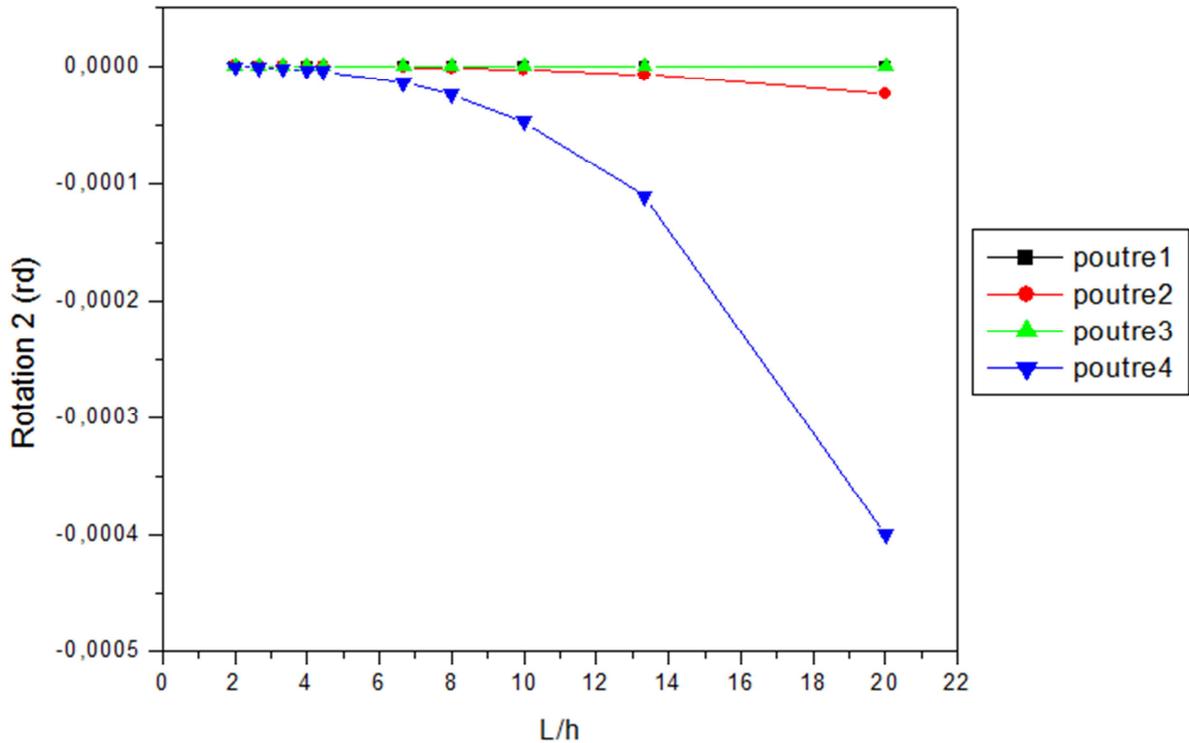


Figure 4.20 : Rotation ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différentes poutres

Là aussi on remarque des valeurs similaires à celles données par la RDM. La poutre 4 (poutre console) donnent des valeurs supérieures à celles des autres poutres.

Dans tous les cas, les déplacements et les rotations augmentent avec le rapport ( $L/h$ ). C'est à dire la diminution de  $h$ . Ces augmentations deviennent remarquables à partir de  $(L/h) \geq 4$ .

➤ **La méthode de Timoshenko**

Les courbes des rotations ( $\Theta_2$ ) et des flèches ( $V_2$ ) obtenues par la méthode de Timoshenko sont présentés sur les figures (4-21) et (4-22).

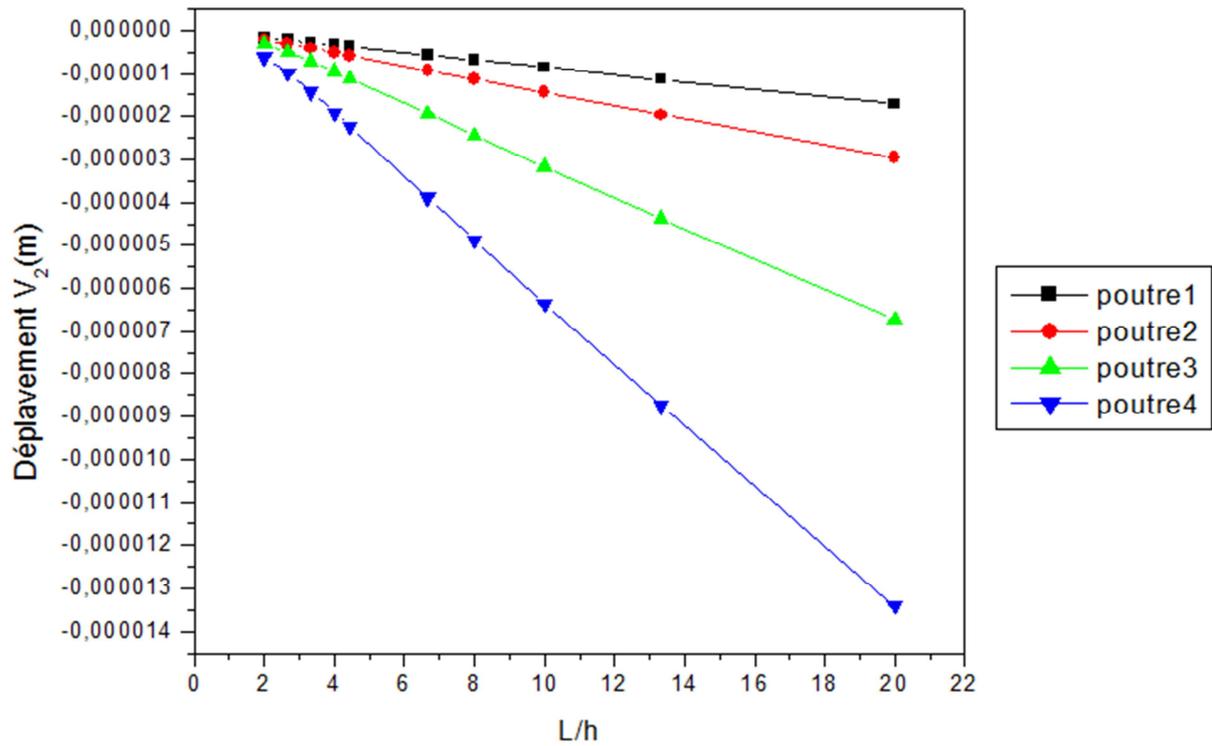


Figure 4.21 : Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différentes poutres

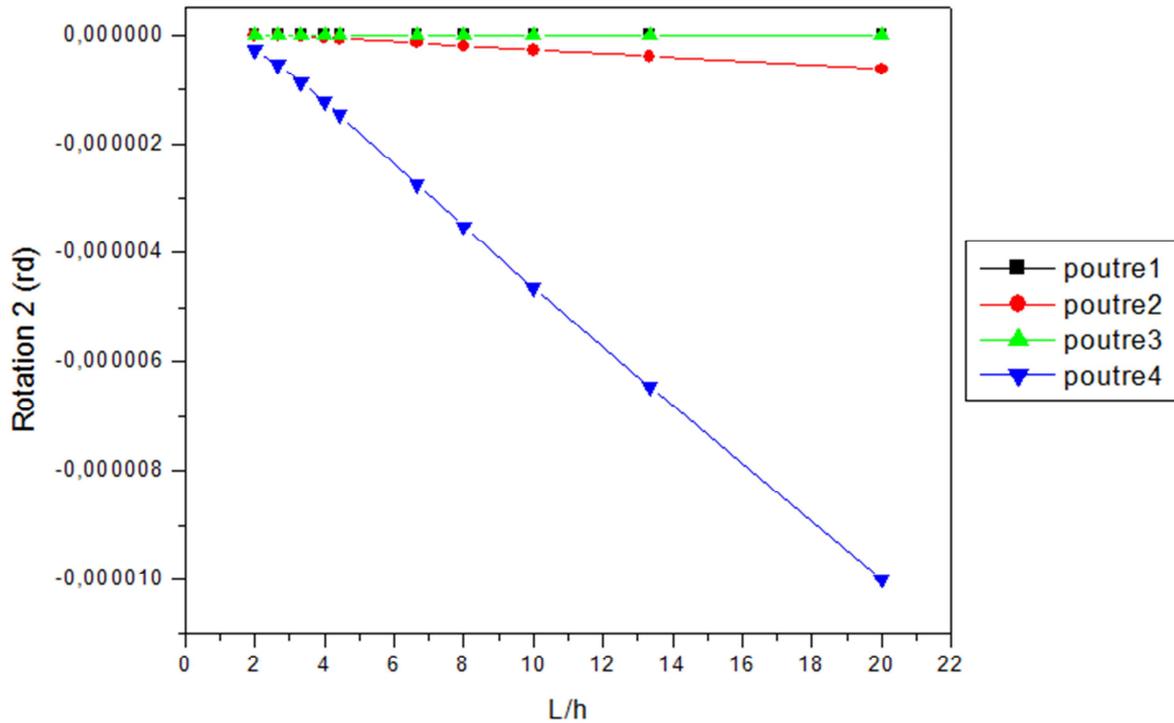


Figure 4.22 : Rotation ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différentes poutres

Il à été constaté a partir des figures (4.21) et (4.22) que la poutre console 4 donne toujours les grandes valeurs par rapports aux autres poutres. Néanmoins ces valeurs sont très minimales et sont presque négligeables devant celles données par la méthode RDM et la méthode de Bernoulli pour tous les élancements ( $L/h$ ).

De même, la rotation ( $\Theta_2$ ) de la poutre 1 (poutre bi-encastée) et la poutre 3 (poutre bi-appuyées) est nuls quelque soit le rapport ( $L/h$ ). Ceci s'explique par la symétrie géométrique et matérielle de ces poutres aux points concernés.

➤ La méthode de Friedman et Kosmatka

Les courbes des rotations ( $\Theta_2$ ) et des flèches ( $V_2$ ) obtenues par la méthode de Friedman et Kosmatka sont présentées sur les figures (4-23) et (4-24).

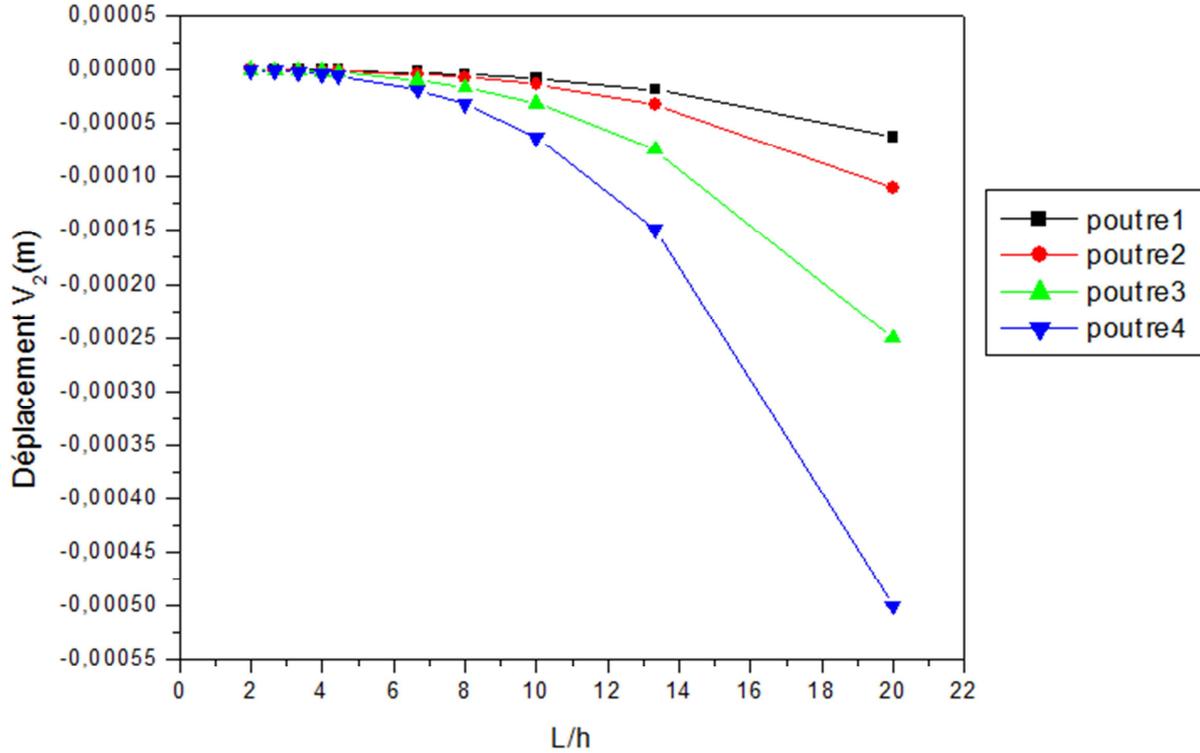


Figure 4.23 : Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différentes poutres

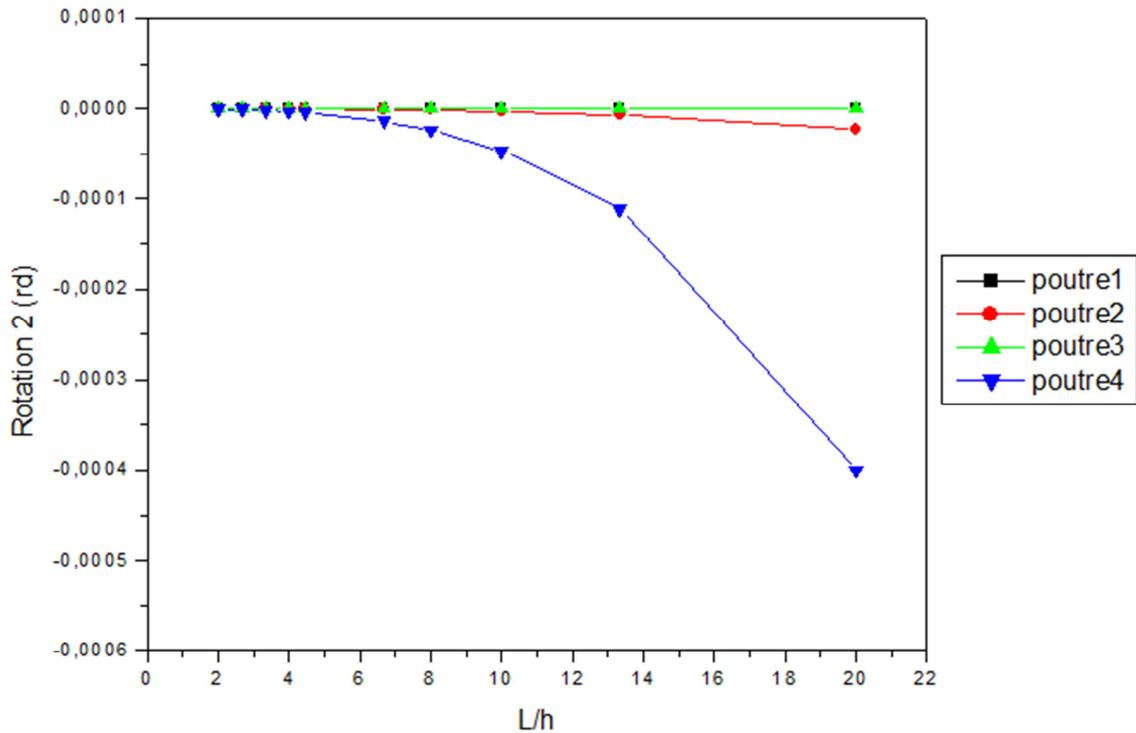


Figure 4.24 : Rotation ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports L/h pour différentes poutres

Les résultats obtenus par la méthode de Friedman et Kosmatka sont similaires à ceux obtenus par la méthode RDM et la méthode de Bernoulli. Là aussi, la poutre console se déplace plus que les autres et sa section au milieu tourne plus que les sections des autres poutres. On remarque également que les rotations des poutres 1 et 3 sont nulles à la section de milieu à cause de la symétrie à cet endroit.

#### ➤ Déplacement et rotation par ANSYS

Les courbes des rotations ( $\Theta_2$ ) et des flèches ( $V_2$ ) obtenues par la modélisation avec ANSYS sont présentées sur les figures (4-25) et (4-26).

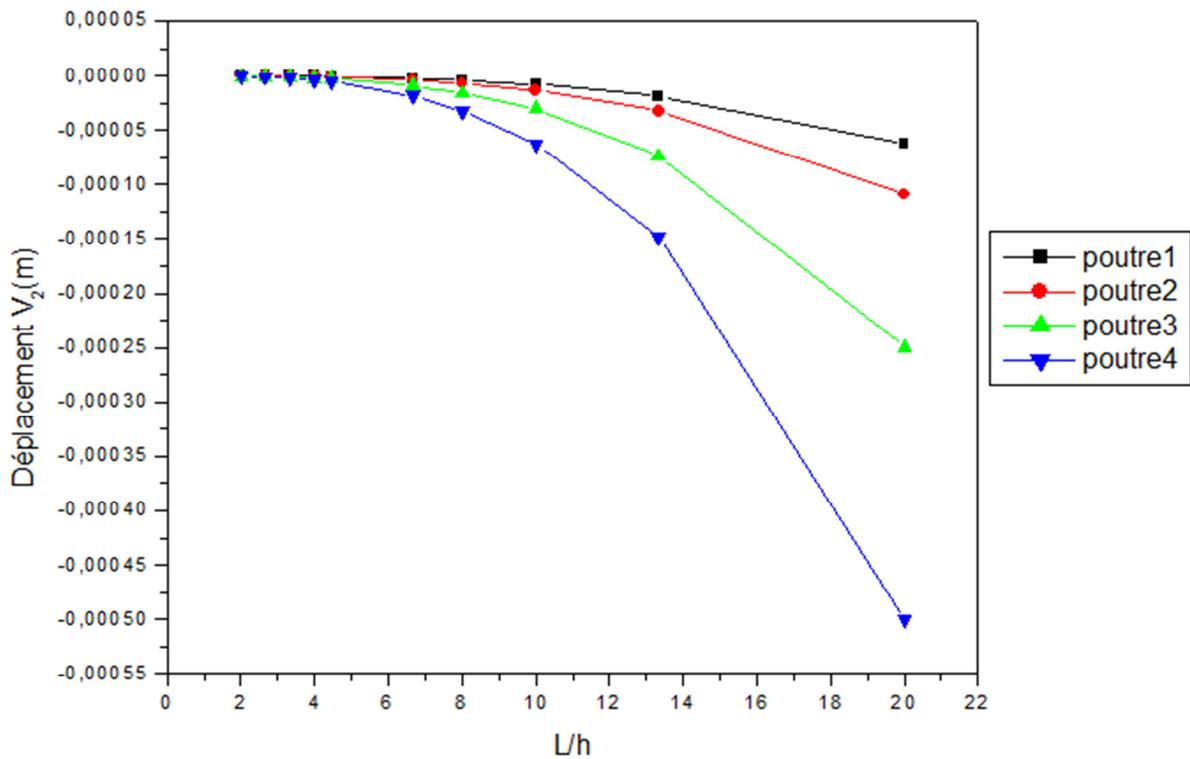


Figure 4.25: Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différentes poutres

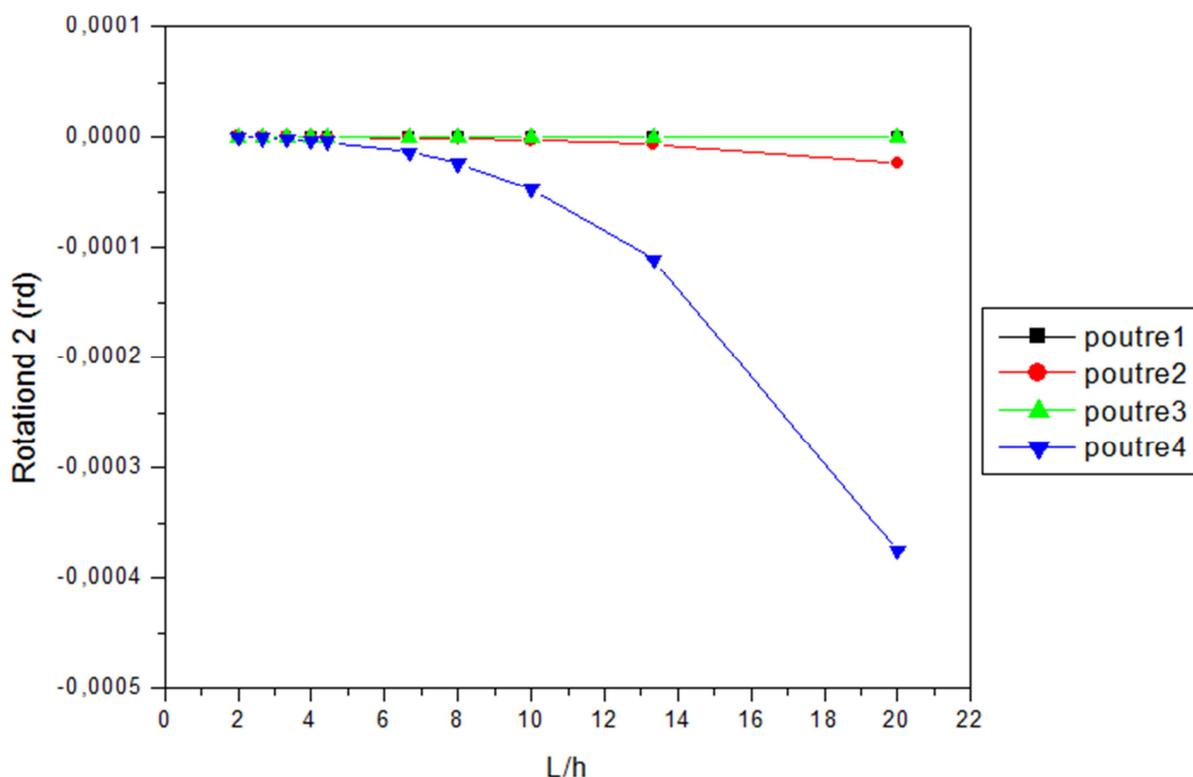


Figure 4.26 : Rotation ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différentes poutres

Les figures (4.25) et (4.26) montrent une grande similitude entre les résultats de la modélisation et ceux donnés par la méthode RDM et les méthodes de Bernoulli et de Friedman et Kosmatka. Ceci montre que la modélisation est bien faite.

Comme cela a été montré précédemment, les déplacements et les rotations dans la poutre console (poutre 4) sont plus grands que dans les autres poutres. Plus il y'a encastrement plus les déplacements deviennent petits.

Les rotations sont également les plus grandes dans le cas de la poutre console et sont nulles dans les sections médianes des poutres 1 et 3 symétriques.

Dans les figures suivantes (4-27) et (4-28); les courbes des déplacements ( $V_2$ ) et des rotations ( $\Theta_2$ ) au milieu de la poutre 1 (poutre bi-encastree) données par les différentes méthodes utilisées sont comparées.

Il ressort de ces figures que les déplacements donnés par les méthodes de RDM, de Bernoulli, de Friedman et Kosmatka ainsi que ceux de la modélisation sont confondues et augmentent avec l'augmentation de ( $L/h$ ). La courbe de Timoshenko est différente des autres. Cette méthode donne des valeurs pratiquement nulles quelque soit l'élancement pour cette poutre. Les déplacements et les rotations (excepté ceux de Timoshenko) augmentent avec l'accroissement du rapport ( $L/h$ ) notamment pour les rapports ( $L/h$ )  $\geq 4$ .

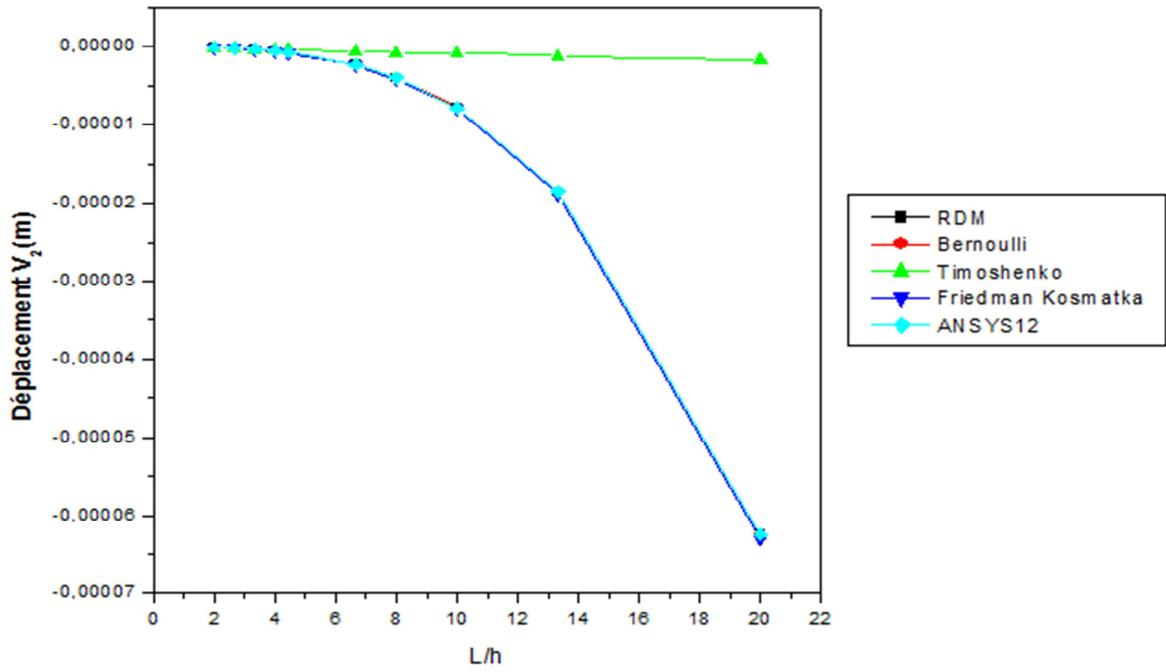


Figure 4.27 : Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différents méthodes

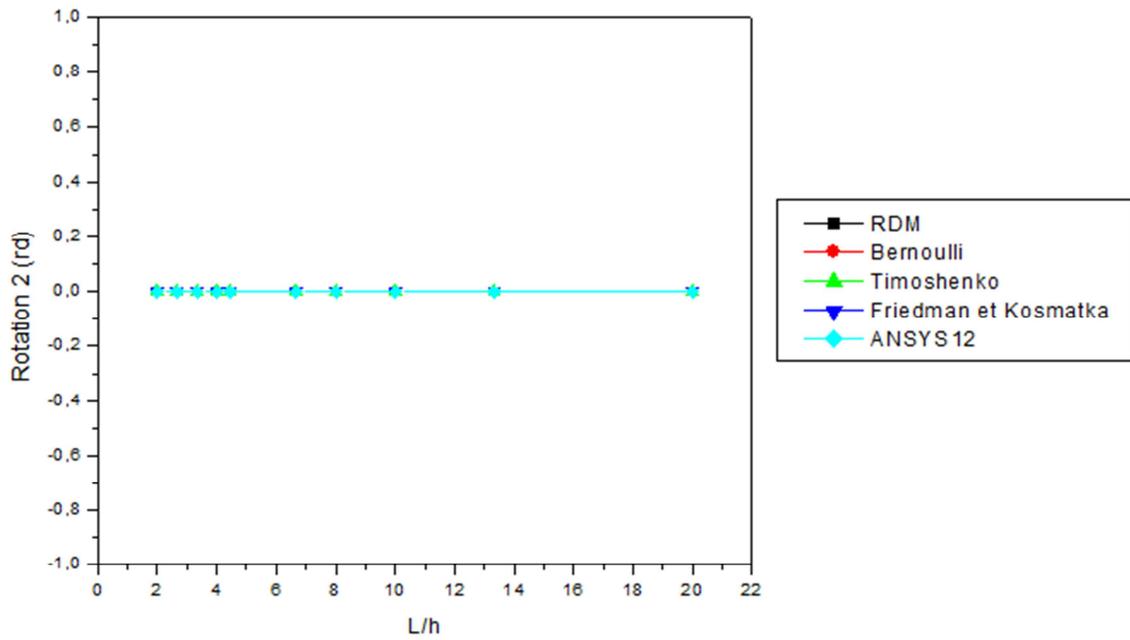


Figure 4.28 : Rotations ( $\theta_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différents méthodes

**Conclusion**

L'influence des conditions d'appuis sur la flèche et la rotation d'une section d'une poutre a été étudiée. Il a été observé que la poutre console donne des déplacements plus grands comparativement aux autres poutres. Plus la poutre est encastree dans un de ses extrémités, plus sa flèche diminue. Il a été également observé que la symétrie des appuis a une influence sur les rotations des sections des poutres. Ces rotations sont nulles dans les sections médianes pour les poutres aux appuis symétriques.

**4.5. INFLUENCE DU MODULE D'ELASTICITE SUR LE COMPORTEMENT DES POUTRES**

Pour étudier l'influence du module d'élasticité ou module de Young (E) sur les comportements des différentes poutres, choisi plusieurs valeurs de (E) ont été choisies tout en maintenant les autres paramètres fixes tableau ( 4.7).

N°	1	2	3	4	5
E	2E+11 N /m2	1,26 E+11 N /m2	1E+11 N /m2	7E+10 N /m2	2E+10 N /m2

Tableau 4.7 : Différents modules de Young

**4.5.1. Résultats obtenus par différentes méthodes**

Deux types de poutres ( poutre console et poutre encastree-appuyée) ont été testés par les différentes méthodes (tableau 4.8). Les résultats obtenus pour différents modules d'élasticités aux sections médianes sont présentés sur les figures suivantes :

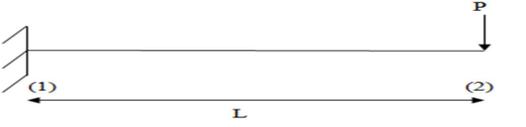
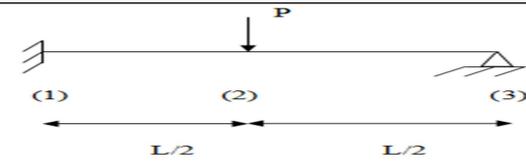
N°	Type des poutres	
1	poutre console	
2	poutre encastree – appuyée	

Tableau 4.8 : Types des poutres

➤ **La méthode des résistances des matériaux**

Les courbes des rotations ( $\Theta_2$ ) et des flèches ( $V_2$ ) pour la poutre console sont présentées sur les figures (4-29) et (4-30). Tandis que celles de la poutre appuyée-encastree sont présentées sur les figures (4-31) et (4-32).

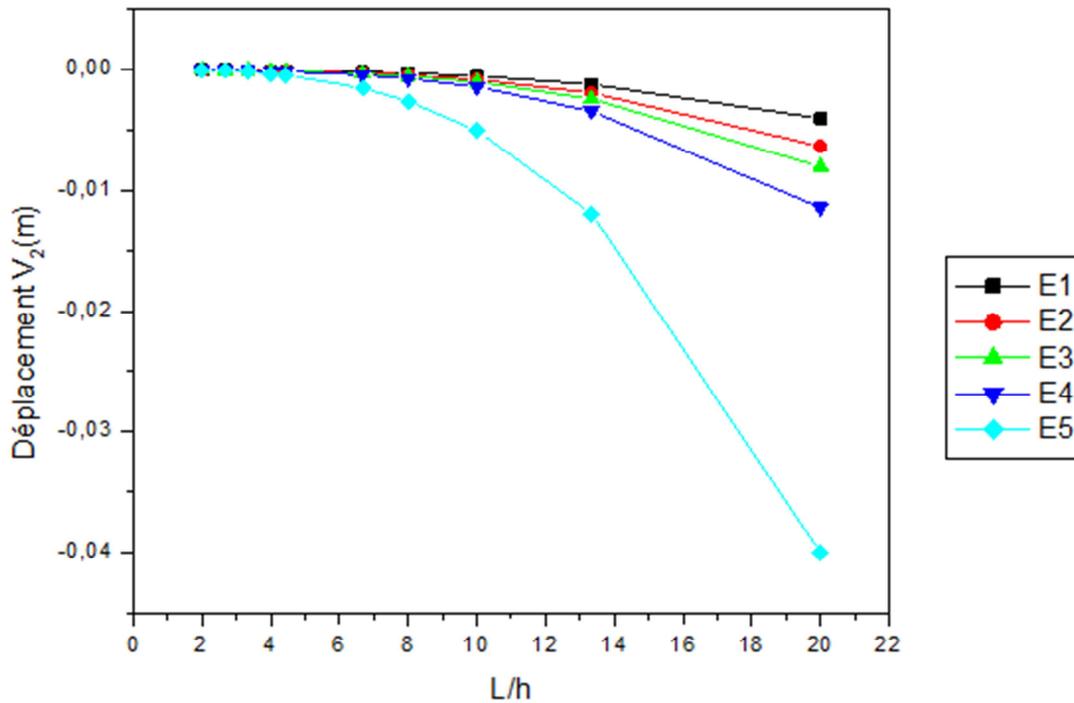


Figure 4.29 : Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différents modules de Young (Méthode RDM ; Poutre console)

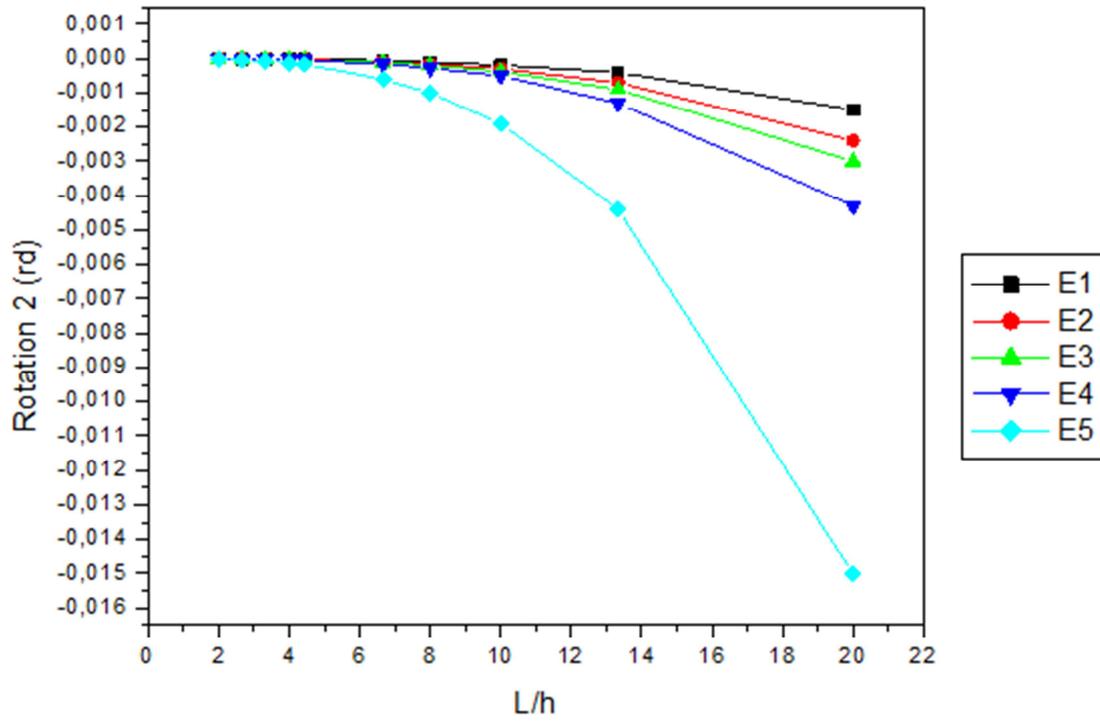


Figure 4.30 : Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différents modules de Young (Méthode RDM ; Poutre console)

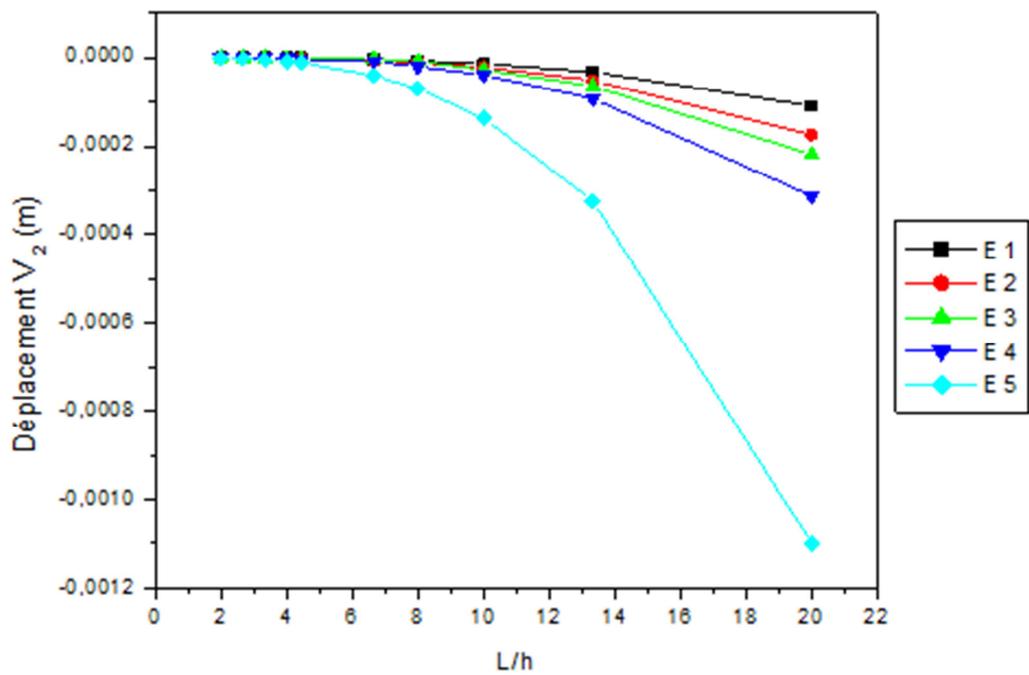


Figure 4.31 : Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différents modules de Young (Méthode RDM ; Poutre appuyée – encastree)

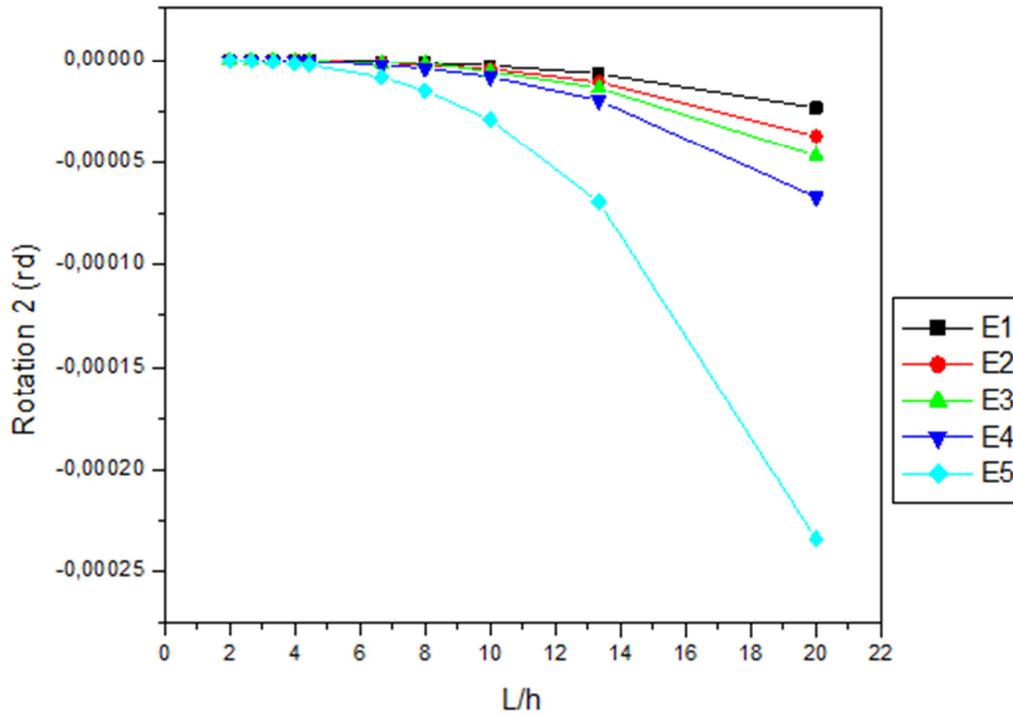


Figure 4.32 : Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différents modules de Young (Méthode RDM ; Poutre appuyée – encastrée)

Il ressort des figures (4-29) à (4-32) que plus le module de Young est petit plus le déplacement et la rotation sont grands. Ceci confirme l'évidence que moins la poutre est rigide plus le déplacement est grand.

On note également que les déplacements et les rotations dans la poutre console sont nettement plus grands que ceux de la poutre appuyée – encastrée.

#### ➤ La méthode de Bernoulli

Les courbes des rotations ( $\Theta_2$ ) et des flèches ( $V_2$ ) pour la poutre console sont présentées sur les figures (4-33) et (4-34). Tandis que celles de la poutre appuyée-encastrée sont présentées sur les figures (4-35) et (4-36).

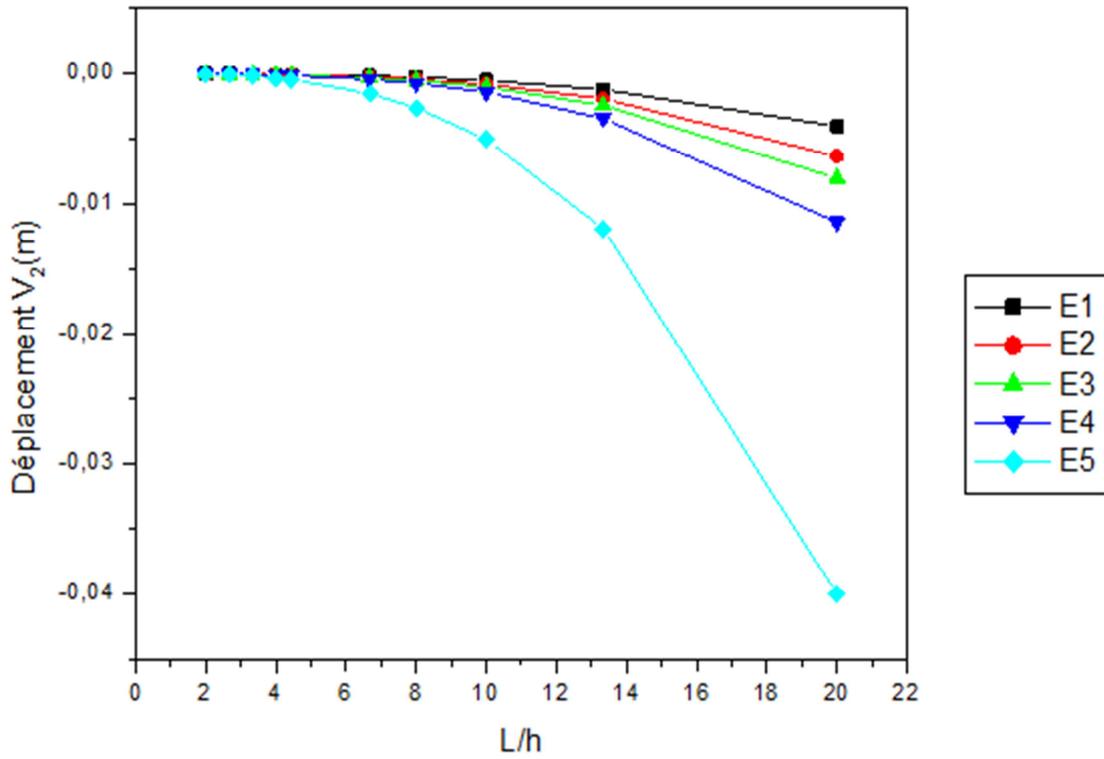


Figure 4.33 : Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différents modules de Young (Méthode Bernoulli; Poutre console)

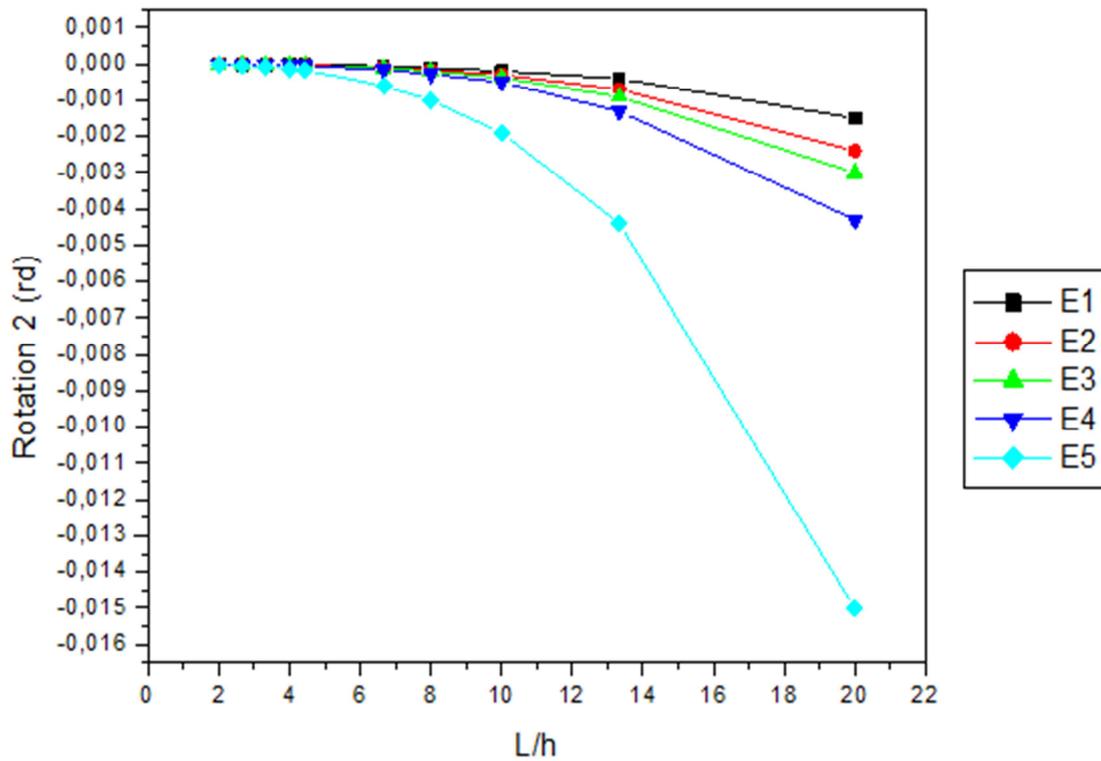


Figure 4.34: Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différents modules de Young (Méthode Bernoulli; Poutre console)

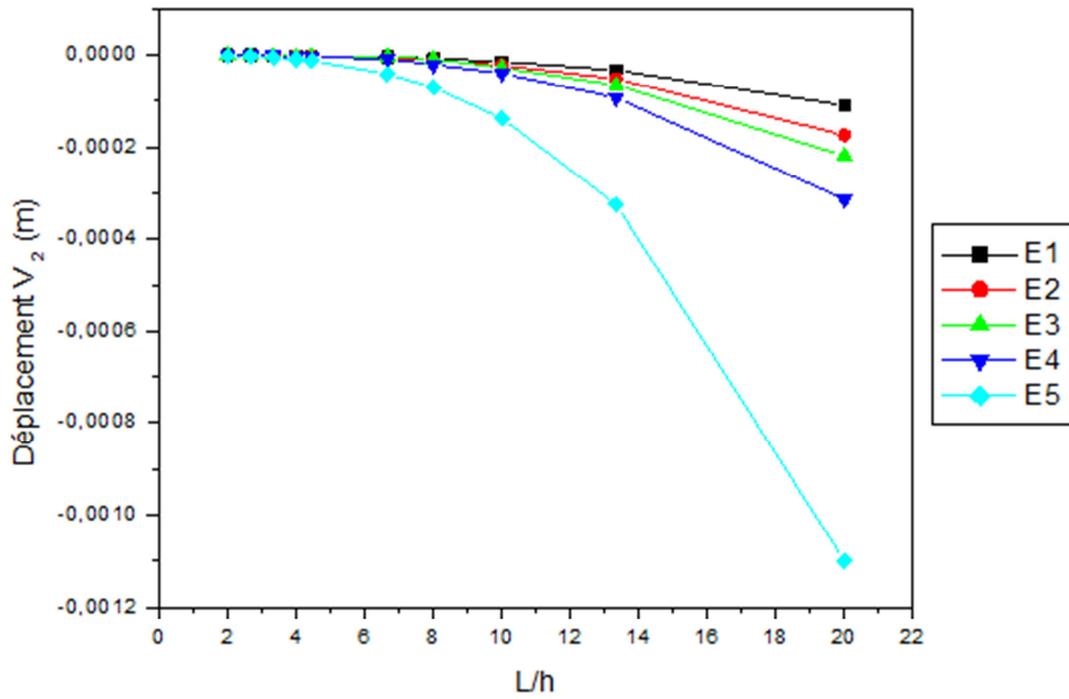


Figure 4.35 : Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différents modules de Young (Méthode Bernoulli; Poutre appuyée – encastrée)

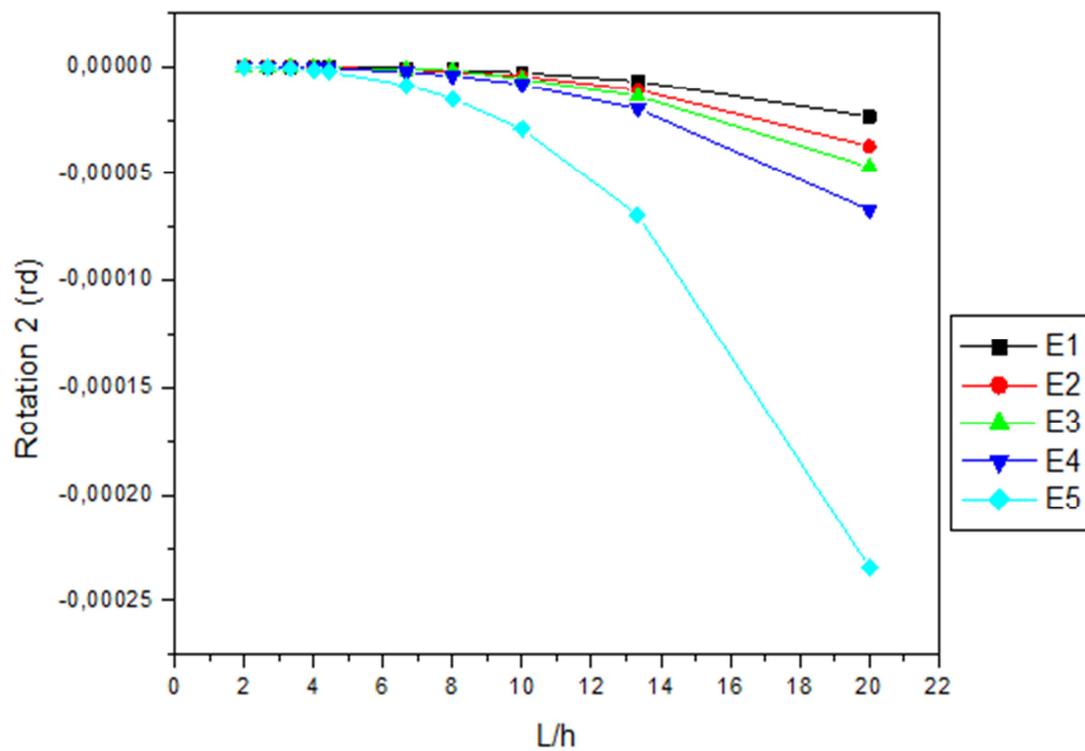


Figure 4.36 : Rotations ( $\theta_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différents modules de Young (Méthode Bernoulli; Poutre appuyée – encastrée)

A partir des figures (4-33) à (4-36) on remarque la même logique dans les déplacements et les rotations des poutres.

Lorsque le module d'élasticité est faible (E5), donc une rigidité faible, alors les déplacements et les rotations deviennent grands quelque soit le type de poutre. Néanmoins, la poutre console donne des valeurs plus grande que la poutre appuyée – encastree.

#### ➤ La méthode de Friedman et Kosmatka

Les courbes des rotations ( $\Theta_2$ ) et des flèches ( $V_2$ ) pour la poutre console sont présentées sur les figures (4-37) et (4-38). Tandis que celles de la poutre appuyée-encastree sont présentées sur les figures (4-39) et (4-40).

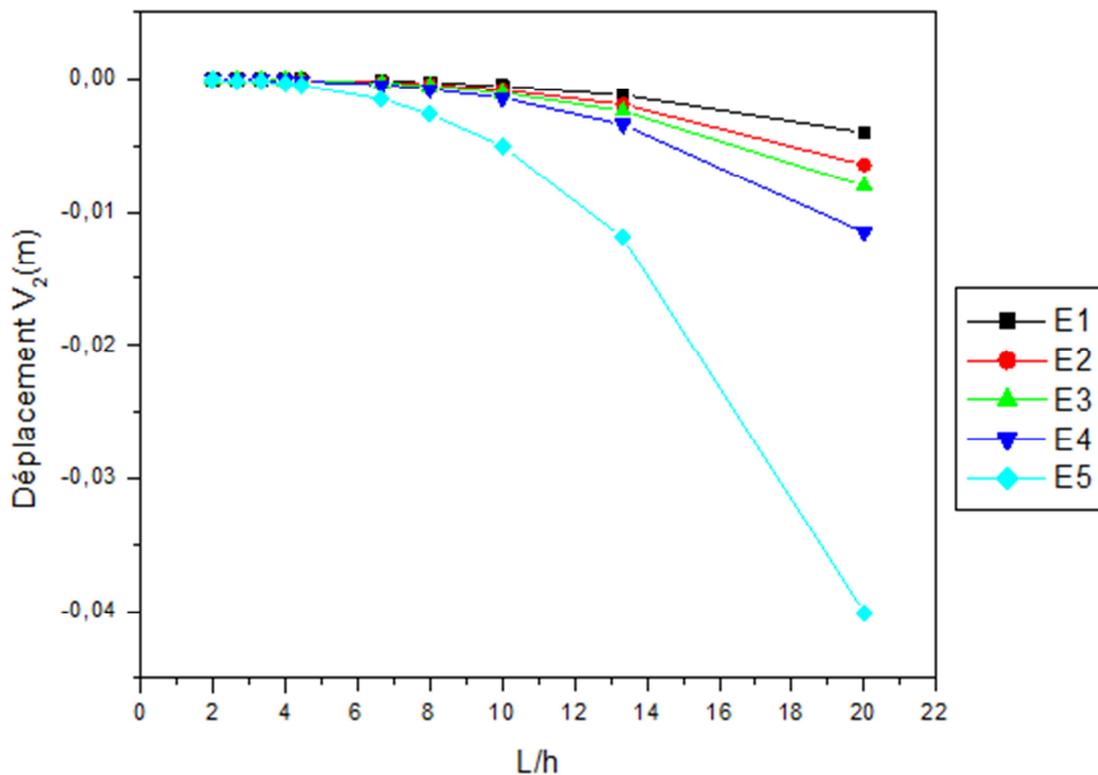


Figure 4.37 : Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différents modules de Young (Méthode Friedman et Kosmatka; Poutre console)

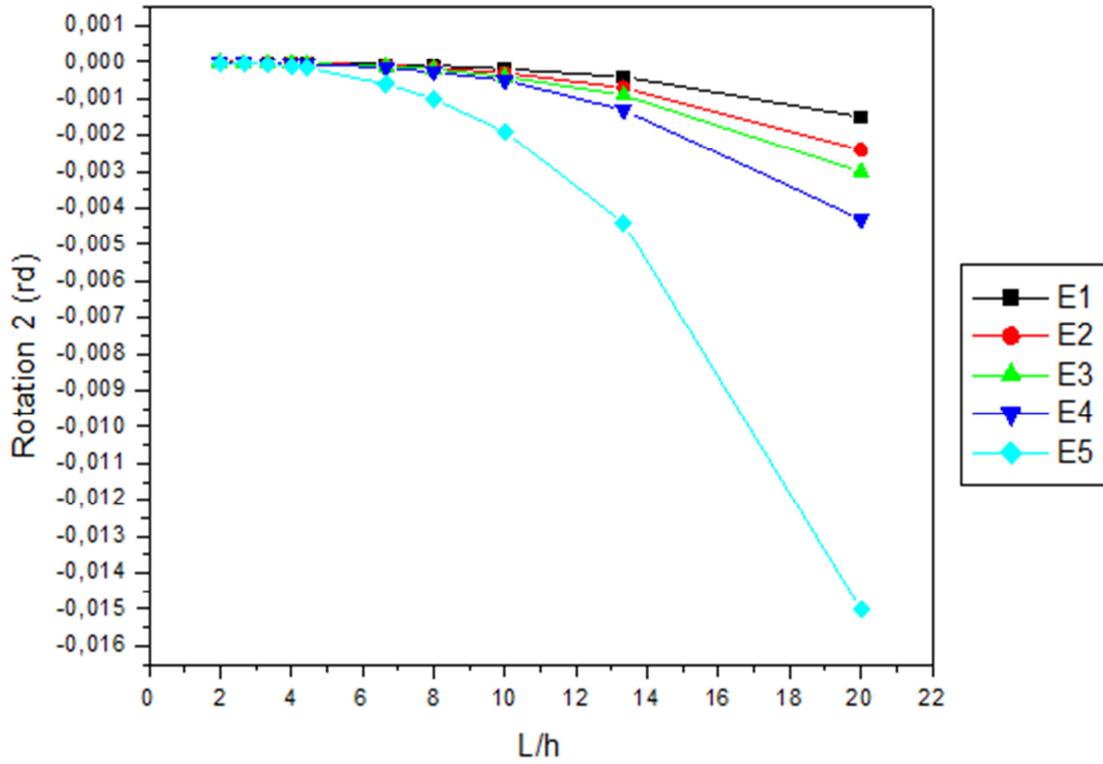


Figure 4.38: Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différents module de Young (Méthode Friedman et Kosmatka; Poutre console)

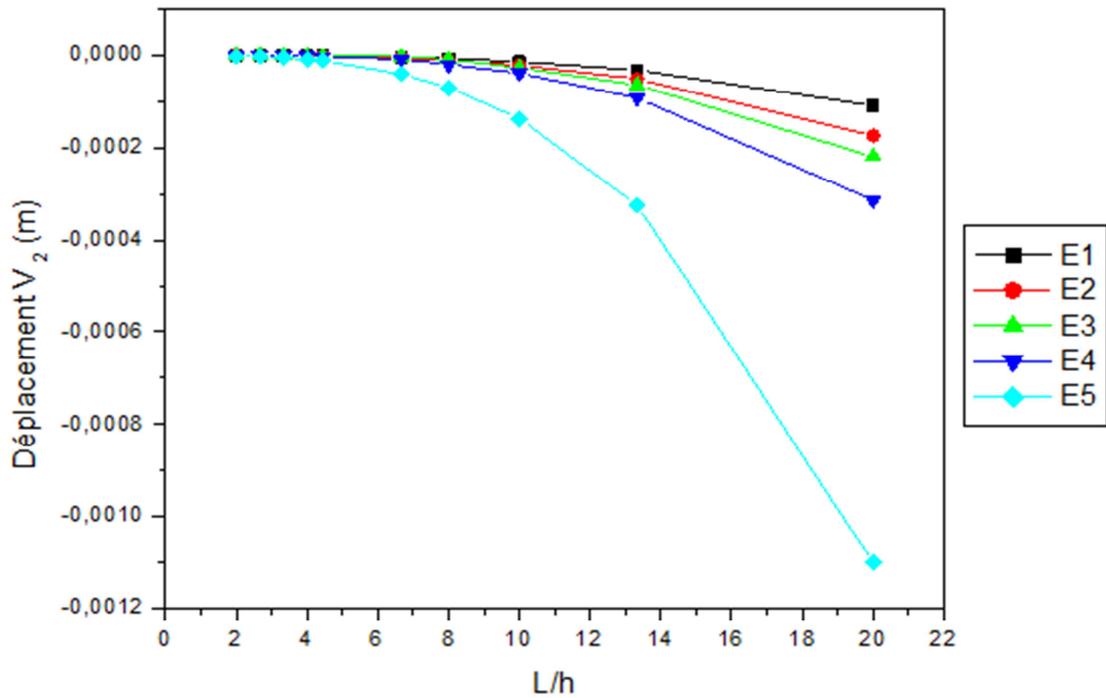


Figure 4.39 : Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différents modules de Young (Méthode Friedman et Kosmatka; Poutre appuyée-encastée)

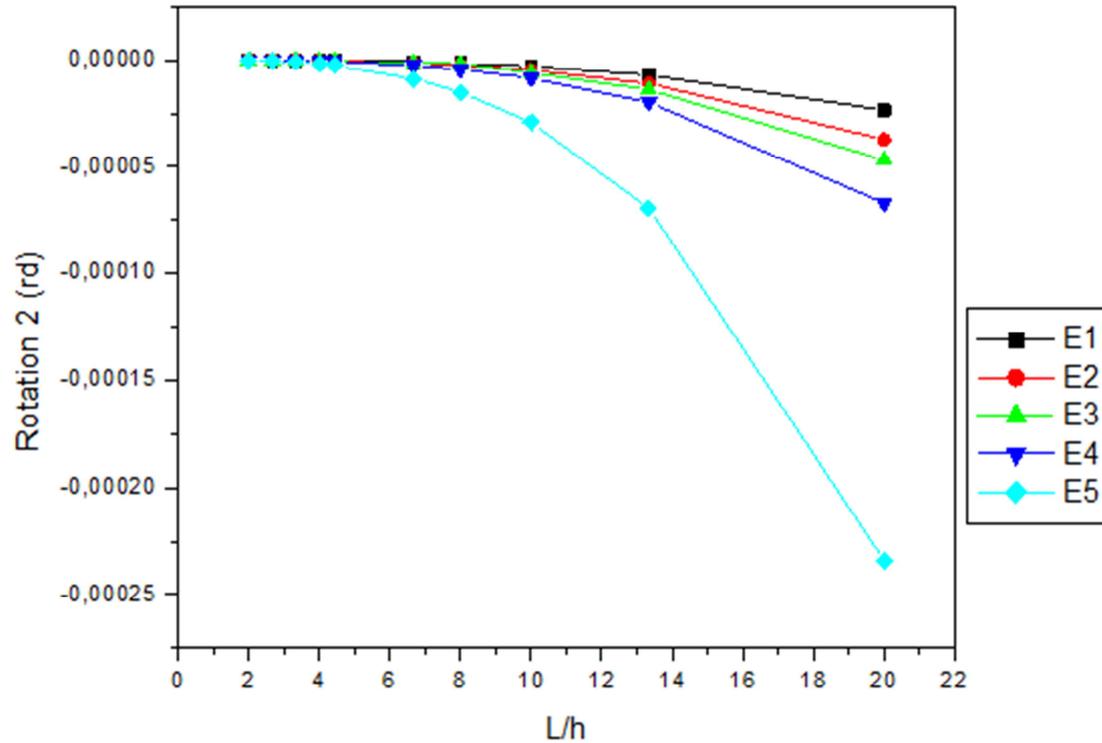


Figure 4.40 : Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différents modules de Young (Méthode Friedman et Kosmatka; Poutre appuyée- encastree)

De la même manière que précédemment, les déplacements et les rotations sont inversement proportionnels aux modules de Young. Plus ces modules sont faibles, plus les déplacements et les rotations sont grands.

Les déplacements et les rotations dans la poutre console sont plus grands que ceux dans la poutre appuyée – encastree.

#### ➤ Modélisation par ANSYS

Les courbes des rotations ( $\Theta_2$ ) et des flèches ( $V_2$ ) pour la poutre console sont présentées sur les figures (4-41) et (4-42). Tandis que celles de la poutre appuyée-encastree sont présentées sur les figures (4-43) et (4-44).

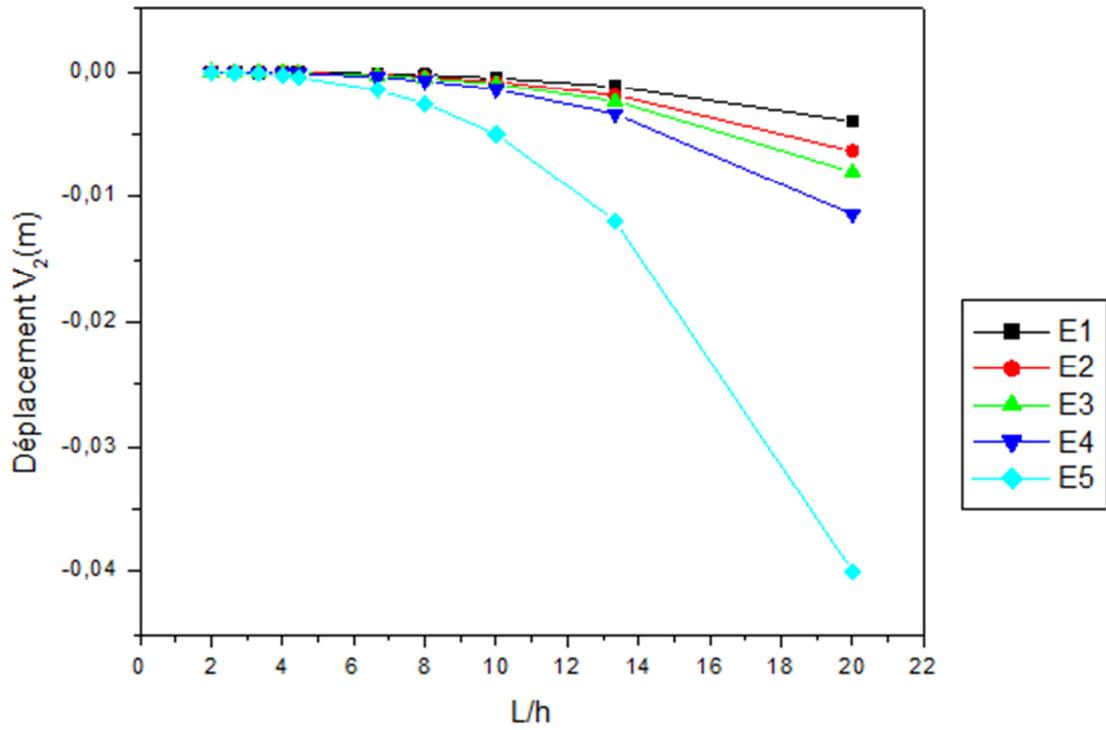


Figure 4.41 : Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différents modules de Young (Modélisation. Poutre console)

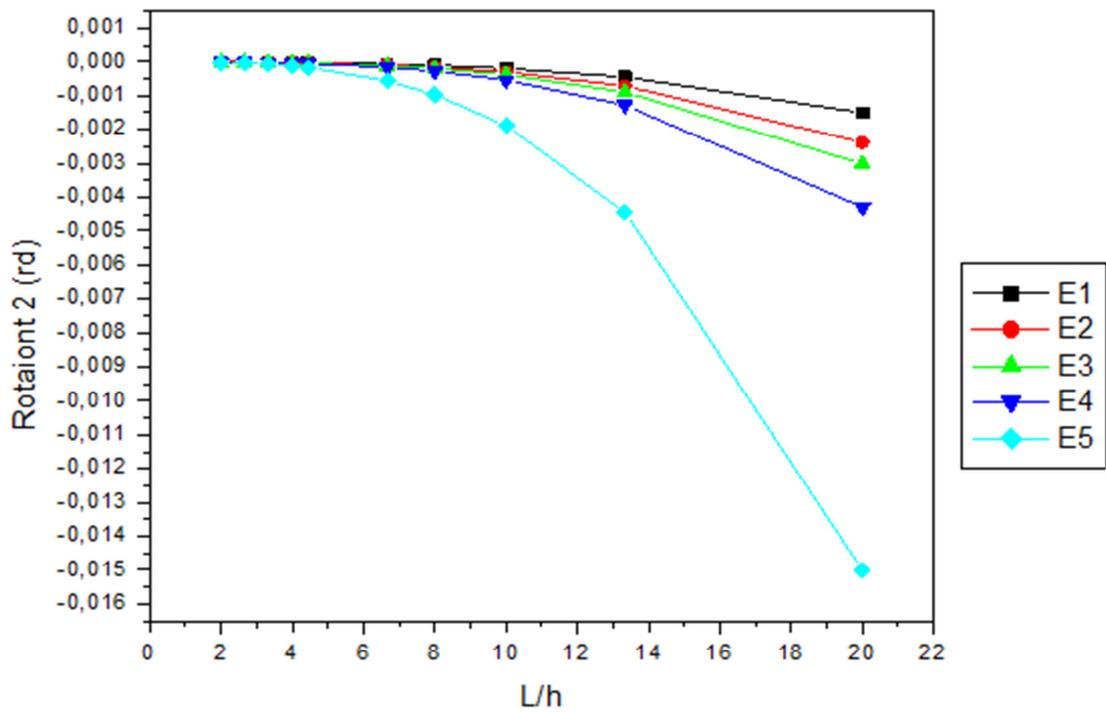


Figure 4.42 : Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différents modules de Young (Modélisation. Poutre console)

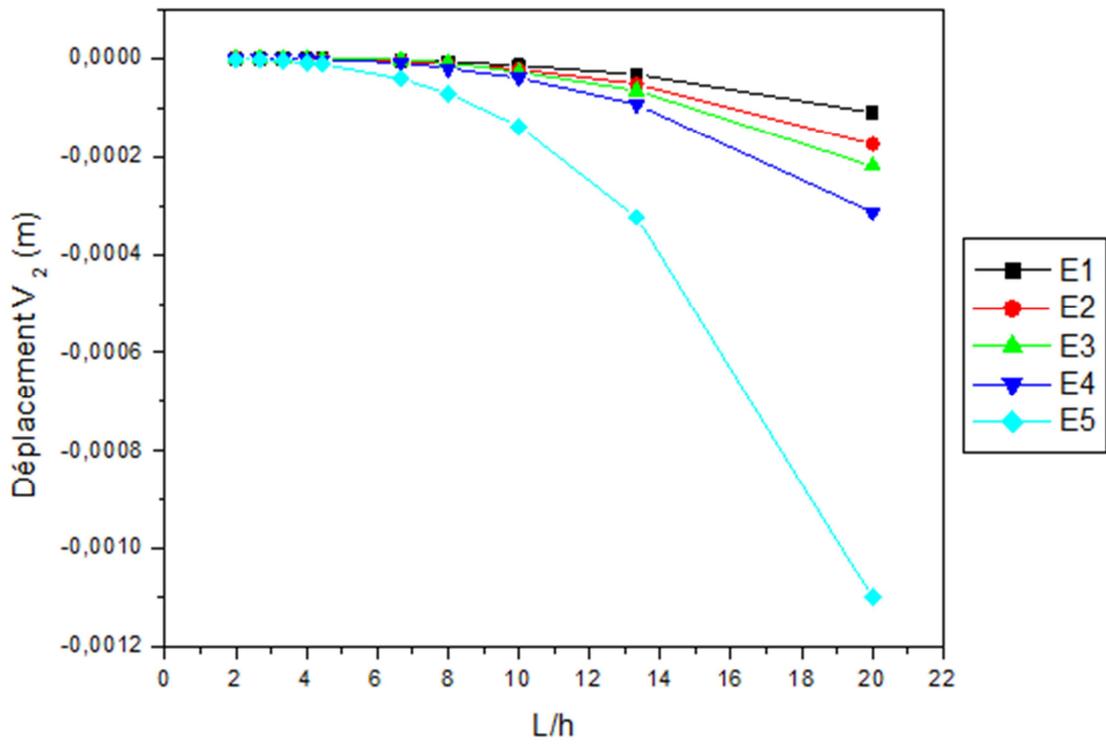


Figure 4.43 : Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différents modules de Young (Modélisation. Poutre appuyée - encastrée)

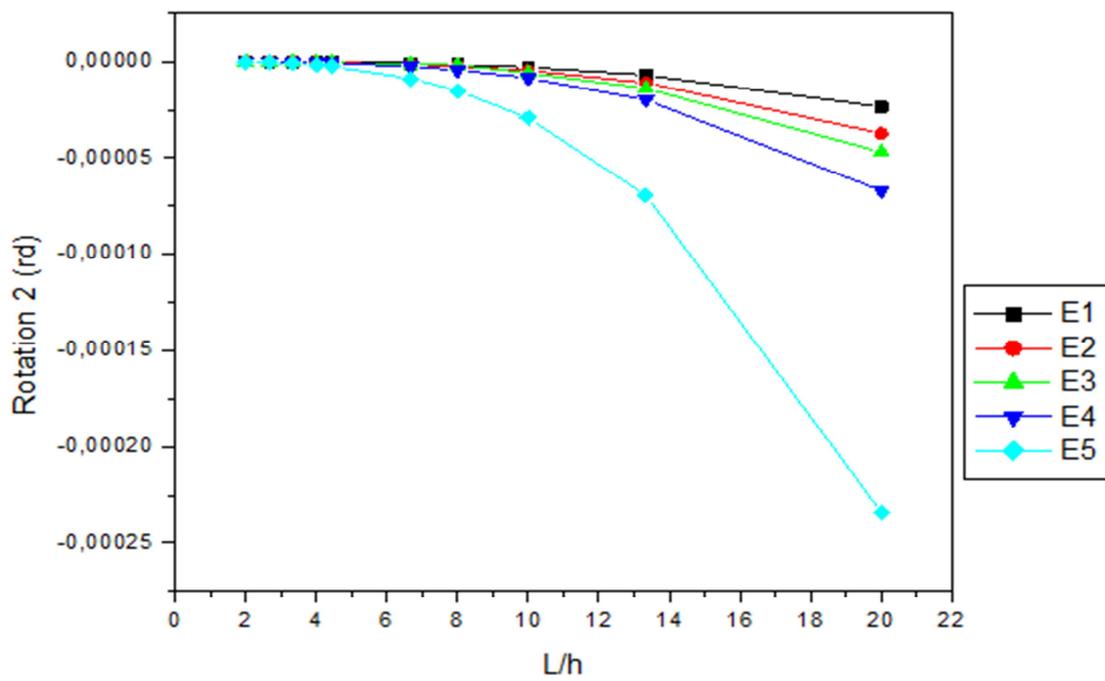


Figure 4.44 : Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différents modules de Young (Modélisation. Poutre appuyée - encastrée)

Notre modélisation donne des courbes qui suivent la même logique des autres courbes données par les autres méthodes vues précédemment. Ceci prouve encore la validité de notre modélisation.

Il est constaté des figures (4-41) à (4-44) que les déplacements et les rotations augmentent avec la diminution du module de Young, donc de la rigidité de la poutre. Il est à noter également que la poutre console donne des valeurs des déplacements et des rotations plus grandes que ceux donnés pour une poutre appuyée – encastree.

#### ➤ La méthode de Timoshenko

Les courbes des rotations ( $\Theta_2$ ) et des flèches ( $V_2$ ) pour la poutre console sont présentées sur les figures (4-45) et (4-46). Tandis que celles de la poutre appuyée-encastree sont présentées sur les figures (4-47) et (4-48).

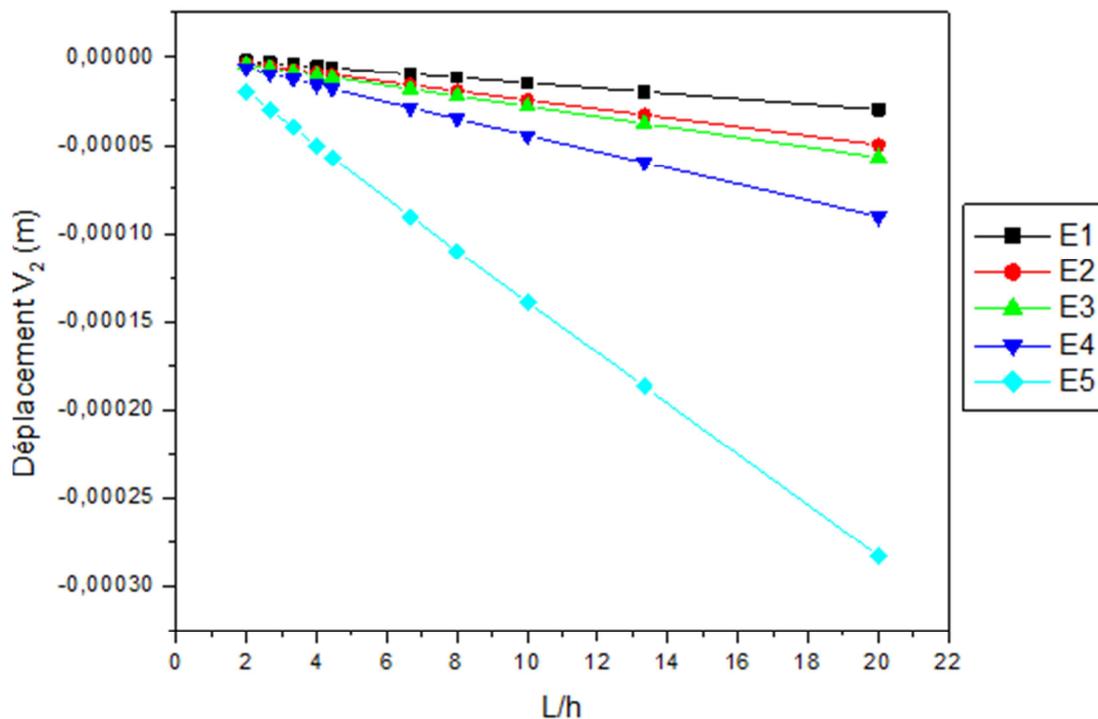


Figure 4.45 : Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différents modules de Young (Méthode de Timoshenko. Poutre console)

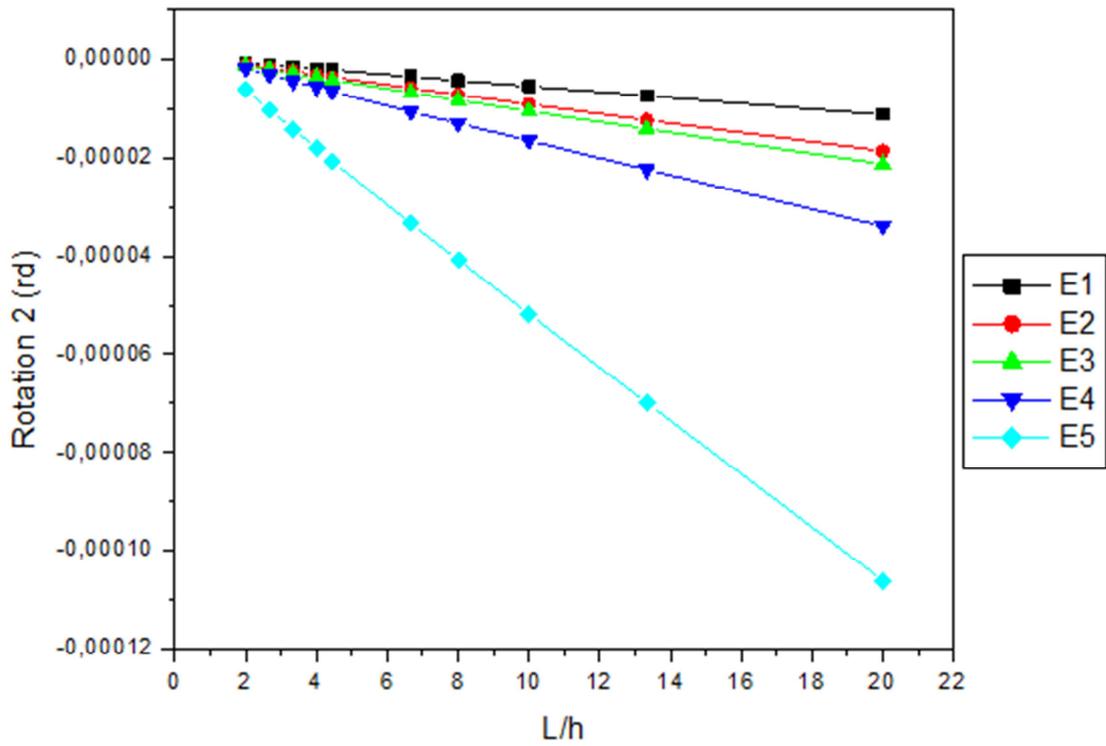


Figure 4.46 : Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différents modules de Young (Méthode de Timoshenko. Poutre console)

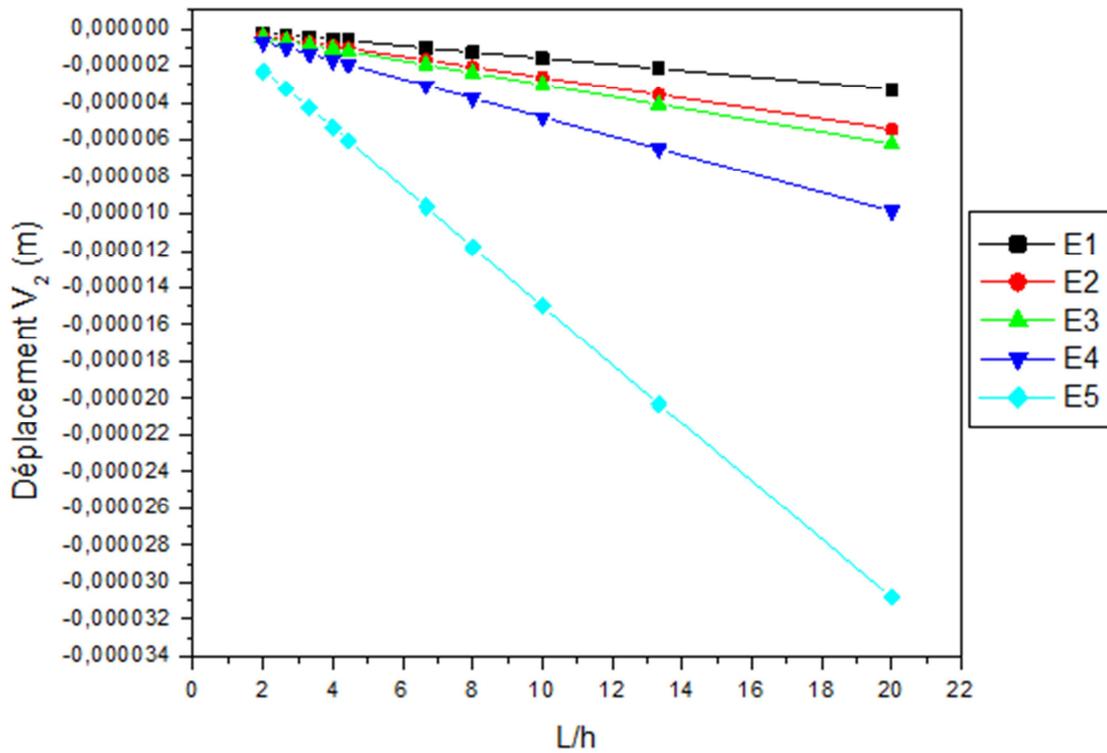


Figure 4.47 : Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différents modules de Young (Méthode de Timoshenko. Poutre appuyée – encastrée)

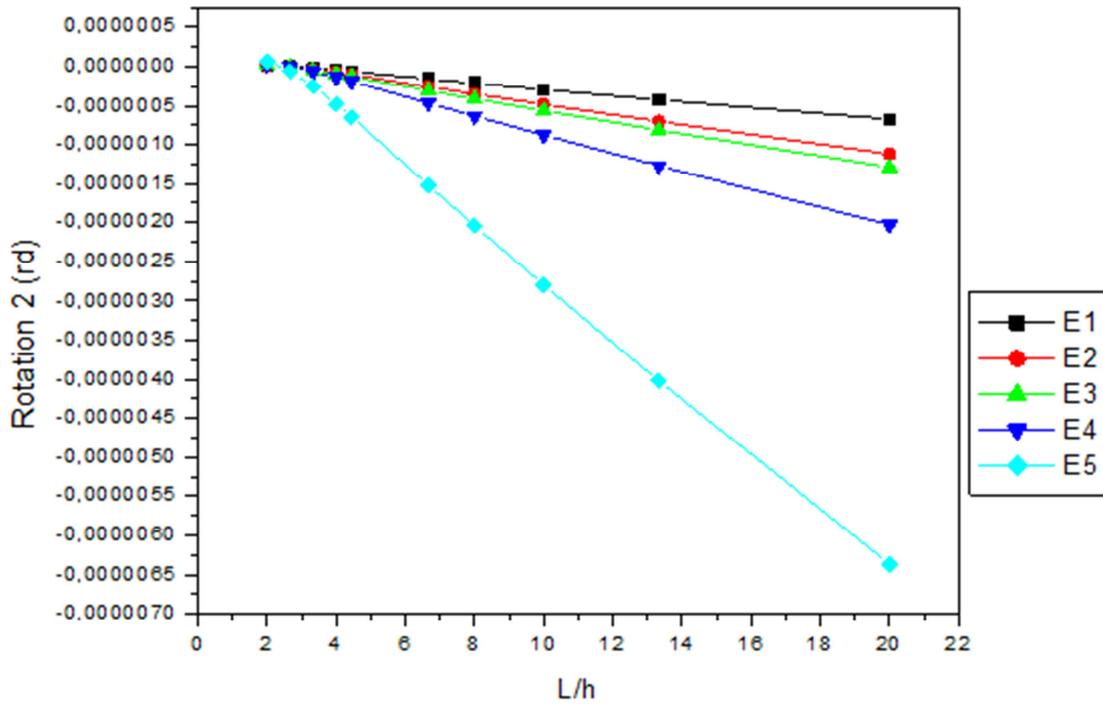


Figure 4.48 : Rotations ( $\Theta_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  pour différents modules de Young  
(Méthode de Timoshenko. Poutre appuyée – encastée)

Les figures (4-45) à (4-48) confirment les observations déjà notées dans le cas des autres méthodes. Néanmoins, ces courbes montrent également que la méthode de Timoshenko donne des valeurs des déplacements et des rotations nettement plus faibles, voire négligeables, comparativement à celles données par les autres méthodes.

Les comparaisons entre les valeurs données par les différentes méthodes sont présentées par les figures (4-49) et (4-50) pour la poutre console prise à titre d'exemple pour le module de Young ( $E_1 = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ).

A partir de ces deux figures, on remarque une très forte similitude entre les résultats donnés par les méthodes de RDM, de Bernoulli, de Friedman et Kosmatka ainsi que la modélisation. Une exception est faite pour la méthode de Timoshenko qui donne des valeurs négligeables comparativement aux autres méthodes.

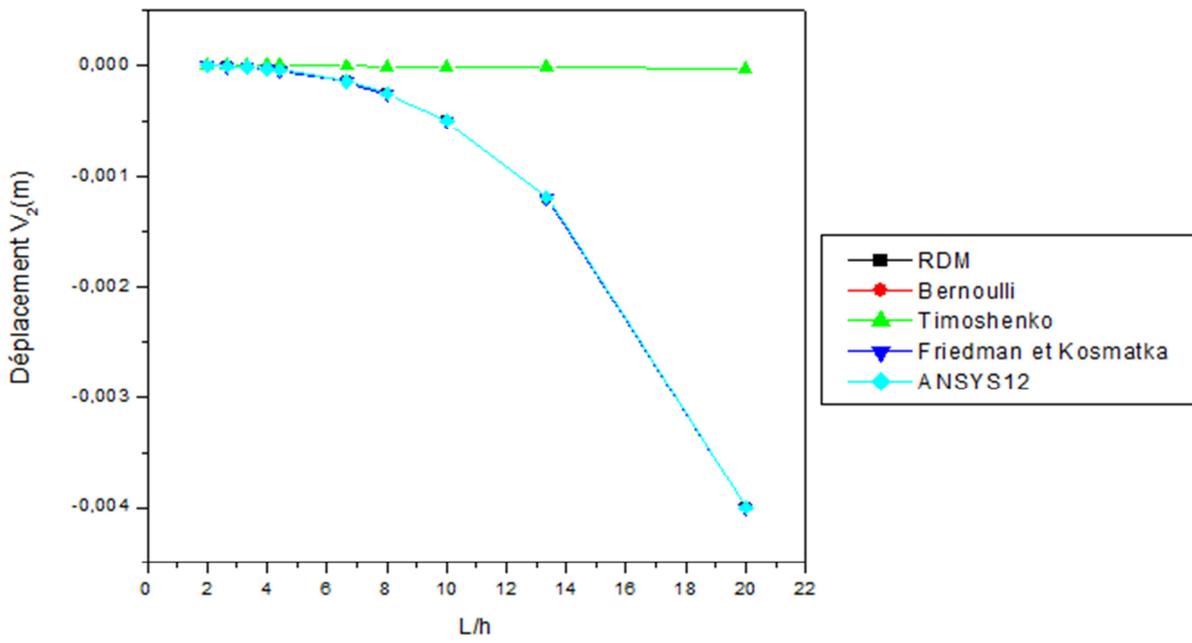


Figure 4.49: Déplacements ( $V_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  différentes méthodes

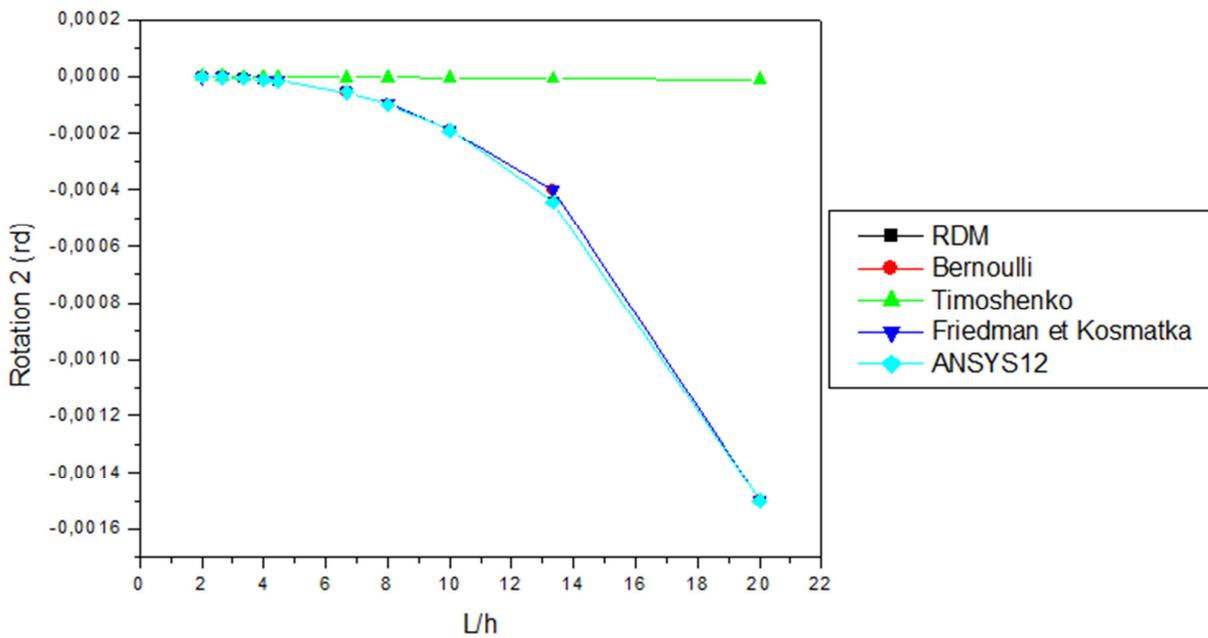


Figure 4.50 : Rotations ( $\theta_2$ ) en fonction des rapports  $L/h$  par différentes méthodes

## 4.6. CONCLUSION

Dans ce chapitre les effets notamment des élancements des poutres, des conditions d'appuis des poutres (poutre console, poutre bi-appuyée, poutre encastrée – appuyée, poutre bi-encastrée) et les effets du module de Young sur les déplacements et les rotations des poutres ont été étudiées. Ces études ont été réalisées par différentes méthodes, qui sont la méthode RDM, la théorie de Bernoulli, la théorie de Timoshenko et celle de Friedman et Kosmatka ainsi que par la modélisation avec ANSYS12.

Les courbes obtenues par la modélisation ont été validées par comparaison avec les autres méthodes. Il a été montré que les déplacements et les rotations augmentent avec les élancements des poutres, notamment pour la valeur ( $L/h \geq 4$ ). Néanmoins, les valeurs données par la théorie de Timoshenko sont quasiment nulles. On note également que courbes de Friedman et Kosmatka et de Bernoulli ainsi que celles de la modélisation, sont presque superposées.

Il a été observé également que le type d'appui a une influence sur la réponse de la poutre. La poutre console donne des déplacements plus grands comparativement aux autres poutres. Pour une poutre symétrique les donne des rotations nulles dans les sections médianes.

Les différentes courbes de l'influence du module de Young ont montré que les déplacements et les rotations des poutres sont inversement proportionnels aux valeurs de ces modules. Plus le module de Young augmente, donc augmentation de la rigidité, plus les déplacements et les rotations sont faibles. Les méthodes de RDM, de Bernoulli, de Friedman et Kosmatka ainsi que la modélisation sont fortement confondues alors que celle de Timoshenko qui donne des valeurs négligeables comparativement aux autres méthodes.

## CONCLUSION GENERALE ET RECOMMANDATIONS

Ce travail de mémoire a porté sur une étude paramétrique de l'analyse du comportement d'une poutre. Plusieurs paramètres ; tel que : l'élanement; le module de Young et les conditions d'appuis (poutres bi-appuyées, poutres consoles, poutres encastées – appuyées, poutres bi-encastées) et leurs effets sur les déplacements et les rotations ainsi que sur le phénomène de blocage dû au cisaillement ont été pris en considération.

Ces analyses ont été réalisées par différentes méthodes (la théorie de Bernoulli, la théorie de Timoshenko, la théorie de Friedman et Kosmatka, ainsi que la modélisation par le logiciel ANSYS12).

Après avoir validé les résultats de la modélisation par comparaison avec les résultats des autres méthodes, ces différents résultats ont montré que les déplacements et les rotations augmentent avec les élanements des poutres, notamment pour la valeur ( $L/h \geq 4$ ). Néanmoins, les valeurs données par la théorie de Timoshenko sont quasiment nulles. Ceci s'explique par la rigidité de la poutre qui bloque les déplacements et les rotations dans le cas de cette théorie. On note également que les courbes de Friedman et Kosmatka et de Bernoulli ainsi que celles de la modélisation, sont presque superposées.

L'analyse de l'effet des conditions d'appuis des poutres a montré que le type d'appui a une influence sur leurs réponses. La poutre console donne des déplacements plus grands comparativement aux autres poutres ayant des appuis ou des encastements. Pour une poutre symétrique les rotations sont nulles dans les sections médianes.

Les différentes courbes de l'influence du module de Young ont montré également que les déplacements et les rotations des poutres augmentent avec la diminution de ces modules. Plus le module de Young augmente, donc augmentation de la rigidité, plus les déplacements et les rotations sont faibles. Les méthodes de la RDM, de Bernoulli, de Friedman et Kosmatka ainsi que la modélisation sont fortement confondues alors que celle de Timoshenko donne des valeurs négligeables comparativement aux autres méthodes.

Cette étude a permis l'utilisation du logiciel ANSYS d'une part et l'analyse comparative entre certaines méthodes d'autre part. Il serait judicieux de poursuivre cette étude pour la modélisation du renforcement et de réparation des poutres et d'autres structures plus complexes, avec d'autres paramètres tels que le type, la taille et la disposition du renfort ainsi que les propriétés mécaniques et géométriques des éléments structuraux, en prenant en considération les lois de comportement non linéaire des différents matériaux.

La modélisation de tels types de structures permettra un gain énorme en temps et en argent comparativement aux essais expérimentaux au laboratoire.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Crisfield, M. A., *Nonlinear Finite Element analysis of solids and structures*, John Wiley, Chichester. Vol. I, 1991
- [2] Hughes, T. J. R., Taylor, R.,L. and Kanoknukulchai, W., *A simple and efficient finite element for plate bending*, Inter. J. Numer. Methods Eng, Vol. 11, pp.1529-1543, 1977
- [3] Stolarski, H. and Belytschko, T., *Shear and membrane locking in  $C^0$  elements*, Computers methods in Applied Mechanics and Engin., Vol. 41, 1983.
- [4] Friedman, Z. and Kosmatka , J. B., *An improved two-node Timoshenko beam finite element*, Computers and structures, Vol. 47, no 3, pp. 473- 481, 1993.
- [5] [www.freewebs.com/seghir/mef/mef\\_poutre.pdf](http://www.freewebs.com/seghir/mef/mef_poutre.pdf)
- [6] J.R. Goodman, E.P. Popov, *Layered beam systems with inter-layer slip*, J. Struct. Div. ASCE 94 (11) (1968) 2535–2547.
- [7] U.A. Girhammar, V.K.A. Gopu, *Composite beam-columns with interlayer slip-exact analysis*, J. Struct. Eng. ASCE 199 (4) (1993)1265–1282.
- [8] A. Ayoub, *A two-field mixed variational principle for partially connected composite beams*, Finite Elem. Anal. Des. 37 (2001) 929–959.
- [9] B. C as, S. Bratina, M. Saje, I. Planinc, *Non-linear analysis of composite steel-concrete beams with incomplete interaction*, Steel Compos. Struct.4 (6) (2004) 489–507
- [10] A. Dall’Asta, *Composite beams with weak shear connection*, Int. J.Solids Struct. 38 (2001) 5605–5624.
- [11] U.A. Girhammar, D. Pan, *Dynamic analysis of composite members with interlayer slip*, Int. J. Solids Struct. 33 (6) (1993) 797–823.
- [12] G. Ranzi, P. Ansourian, F. Gara, G. Leoni, L. Dezi, *Displacement-based formulations for composite beams with longitudinal slip and vertical uplift*, Research Report No. R837, The University of Sydney, January,2005.
- [13] A. Dall’Asta, A. Zona, *Three-field mixed formulation for the non-linear analysis of composite beams with deformable shear connection*, Finite Elem. Anal. Des. 40 (2004) 425–448
- [14] M.R. Salari, E. Spacone, *Analysis of steel-concrete composite frames with bond-slip*, J. Struct. Eng. ASCE 127 (11) (2001) 1241–1250.
- [15] A. Dall’Asta, A. Zona, *Non-linear analysis of composite beams by adisplacement approach*, Comput. Struct. 80 (2002) 2217–2228.

- [16] A. Dall'Asta, A. Zona, *Slip locking in finite elements for composite beams with deformable shear connection*, Finite Elem. Anal. Des. 40(2004) 1907–1930.
- [17] Kaskas S, *étude de l'effet du cisaillement transverse sur le comportement mécanique de poutres composites*, mémoire de magistère, Université mentouri constantine, 2010.
- [18] Bathe K.J. *"Finite element procedures in engineering analysis"*. Prentice Hall, Inc, New Jersey. 1996.
- [19] Philippe S, *Mise en oeuvre et illustrations de la théorie exacte des poutres*, thèse de doctorat l'école normale supérieure de cachan, 2001
- [20] Cowper G.R. *"The shear coefficient in Timoshenko's beam theory"*. Journal of applied mechanics, Transactions of the ASME, Vol. 33, pp. 335-340. 1966.
- [21] Washizu K. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Pergamon Press, Oxford, U.K., 1968.
- [22] Timoshenko S.P., Goodier J.N. *Theory of Elasticity*. 3rd Edn., McGraw-Hill, New York, 1970.
- [23] Lowe P.G. *Classical Theory of Structures*. Cambridge University Press, U.K., 1971
- [24] Shanley FR. *Weight-strength analysis of aircraft structures. 2nd ed. New York: Dover; 1960*.
- [25] Cox HL. *Design of structures of least weight. Pergamon Press; 1965*.
- [26] Parkhouse JG. *Structuring a process of material dilution. In: Nooshin H, editor. Proceedings of 3rd international conference on space structures. Elsevier; 1984. p. 367–74*.
- [27] Ashby MF. *Materials and shape. Acta Metall Mater 1991;39(6):1025–39*.
- [28] Pasini D, Smith DJ, Burgess SC. *Selection of arbitrarily scaled cross-sections in bending stiffness design. Proc Instn Mech Engrs Part L, J Mater: Des Appl 2003;217(2):113–25*.
- [29] Pasini, D., Burgess, S. C. and Smith, D. J. *Performance indices for arbitrarily scaled rectangular cross-sections in bending stiffness design. Proc. Instn Mech. Engrs, Part L: J. Materials: Design and Applications, 2002, 216, 1–13*.
- [30] Pasini, D., Smith, D. J. and Burgess, S. C. *Selection of arbitrarily scaled cross-sections in bending stiffness design. Proc. Instn Mech. Engrs, Part L: J. Materials: Design and Applications, 2003, 217(2), 113–125*.
- [31] J. S. Huang and L. J. Gibson, *Materials and cross-sectional shapes for bending stiffnes*, Materials Science and Engineering, A 163 (1993) 51-59, 1992.
- [32] Jasveer Singh, Vahid Mirjalili, Damiano Pasini, *Integrated shape and material selection for single and multi-performance criteria*, Materials and Design 32 (2011) 2909–2922.

- [33] D Pains , S C Burgess and D j Smith , *Performance indices for arbitrarily scaled rectangular cross-sections in bending stiffness design* , proc instn Mech Engrs Vol 216 part L: J Materials : Design and Application
- [34] D Pasini, D J Smith and S C Burgess , *Structural efficiency maps for beams subjected to bending* , Proc. Instn Mech. Engrs Vol. 217 Part L: J. Materials: Design and Applications.
- [35] Damiano Pasini, *Shape transformers for material and shape selection of lightweight beams* , Materials and Design 28 (2007) 2071–2079
- [36] Bouazzouni O , *analyse non linéaire des éléments en béton armé en tenant compte de l'effort tranchant* ; mémoire de magister université mouloud mameri–tizi -ouzou.
- [37] Timoshenko S, Young DH. *Elements of strength of materials*. 5th ed. Van Nostrand; 1968.
- [38] E. Cortés-Moreno, J.L. Bonet, M.L. Romero, P.F. Miguel , *Slenderness limit of the weak axis in the design of rectangular reinforced concrete non-sway columns* , Engineering Structures 33 (2011) 1157–1165.
- [39] K. Girija, Devdas Menon, *Reduction in flexural strength in rectangular RC beams due to slenderness*, Engineering Structures 33 (2011) 2398–2406
- [40] M. L. Kikidis And C. A. Papadopoulo , *slenderness ratio effect on cracked beam*, Journal of Sound and Vibration (1992) 155( 1), 1-11
- [41] C.E.B. Bulletin, No. 155-buckling and instability—progress report. *Laussane: Comité Euro-International du Béton*; 1983.
- [42] CEN-European Committee for Standardization. *Eurocode 2: design of concrete structures-part 1: general rules and rules for buildings*. EN 1992-1-1; 2004.
- [43] ACI 318-08. *Building code requirements for reinforced concrete*. Detroit: American Concrete Institute; 2008.
- [44] Lakhdar B , *Analyse des structures par la M.E.F basée sur l'approche en déformation* , mémoire magister , Université mohamed khider – Biskra2012
- [45] Antoine Legay , *Dimensionnement des structures* , Cnam-Paris 2012-2013
- [46] Arnaud Delaplace , Fabrice Gatuingt , Frédéric Ragueneau , *Aide-mémoire mécanique des structures résistance des matériaux* , Dunod, Paris, 2008
- [47] Merabet W , *modélisation du comportement des poutres apres fissuration « tension stiffening effect »* , mémoire magister ,université mentouri constantine.
- [48] <http://lme.e.univ-evry.fr/~feng/ME63.pdf>
- [49] Hervé O , *Méthode des éléments finis* ; 2008
- [50] Paul R, *lauréat de l'institut ingénieur de l'école supérieure d'électricité "méthode des éléments finis "* , technique de l'ingénieur, pp ; a 656-2.

- [51] Ibrahima pouye , *Modélisation par éléments finis des poutres courbes* , projet de finis d'études en vue de l'obtention du diplôme d'ingénieure de conception , 2008-2009 .
- [52] Panagiotis K , *cisaillement dynamique de mure en béton arme méthodes simplifiées 2D ET 3D* , these de doctorat de l'école normale supérieure de cachan2000
- [53] Yves Debard, *Méthode des éléments finis :flexion des poutres à plan moyen* , 24 mars 2006 - 29 mars 2011 .
- [54] Remacle , J. F., *Mecanique des structures, Univ. Louvain, 2002, 118p.*
- [55] Belytschko, T.and Bindeman, L. P. , *Assumed Strain Stabilization of the Eight Node Hexahedral Element*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol.105,pp. 225-260, 1993
- [56] Ibrahimbegovic A. & Frey F. "*Finite element analysis of linear and non linear deformations of elastic initially curved beams*". LSC internal report 92/02, January. 1992.
- [57] De Ville de Goyet V. "*L'analyse statique non linéaire par la méthode des éléments finis des structures spatiales formées de poutres à section non symétrique*". Thèse de doctorat à l'Université de Liège, 1989.
- [58] Mertani B, *Modélisation numérique et expérimentale du comportement des panneaux sandwichs a âme en nids d'abeilles* , memoire magister, universite ferhat abbas – setif ufas (algerie) .2011.
- [59] Help ANSYS

# ANNEXE I

- Résultats des déplacements  $V_i$  et des rotations  $\Theta_i$  pour différents types des poutres et différentes méthodes

## ➤ Poutre 1

L/h	2	2,666	3,333	4	4,444	6,666	8	10	13,333	20
$V_{2(RDM)}$	-0,000004	-9,48E-06	-1,85E-05	-3,20E-05	-4,39E-05	-1,48E-04	-2,56E-04	-5,00E-04	-0,0012	-0,004
$V_{2(Bernoulli)}$	-0,000004	-0,000009481	-0,00001852	-0,000032	-0,0000439	-0,0001481	-0,000256	-0,0005	-0,0012	-0,004
$V_{2(Timoshenko)}$	-0,000001906	-0,000002894	-0,000003893	-0,000004884	-0,000005538	-0,000008744	-0,00001063	-0,00001344	-0,00001808	-0,00002729
$V_{2(Friedman et Kosmatka)}$	-0,000004686	-0,0000104	-0,00001966	-0,00003337	-0,00004542	-0,0001504	-0,0002587	-0,0005034	-0,0012	-0,004
$V_{2(Beam3)}$	-0,000004001	-9,4815E-06	-0,000018519	-0,000032032	-0,00004396	-0,00014815	-0,000256	-0,00050008	-0,0011852	-0,003998
$\Theta_{2(RDM)}$	-0,0000015	-3,56E-06	-6,94E-06	-1,20E-05	-1,65E-05	-5,56E-05	-9,60E-05	-1,88E-04	-4,44E-04	-0,0015
$\Theta_{2(Bernoulli)}$	-0,0000015	-0,000003556	-0,00000694	-0,000012	-0,00001646	-0,0000556	-0,000096	-0,0001875	-0,0004	-0,0015
$\Theta_{2(Timoshenko)}$	-0,00000061	-0,00000099	-0,000001375	-0,000001756	-0,000002007	-0,000003229	-0,00000395	-0,00000501	-0,00000675	-0,00001022
$\Theta_{2(Friedman et Kosmatka)}$	-0,0000015	-0,00000356	-0,00000694	-0,000012	-0,00001646	-0,0000556	-0,000096	-0,0001875	-0,0004	-0,0015
$\Theta_{2(Beam3)}$	-1,5004E-06	-3,5556E-06	-6,9444E-06	-0,000012012	-0,000016461	-0,000055556	-0,000096015	-0,00018753	-0,00044444	-0,001499

## ➤ poutre 2

L/h	2	2,666	3,333	4	4,444	6,666	8	10	13,333	20
$V_{2(RDM)}$	-6,25E-08	-1,48E-07	-2,89E-07	-5,00E-07	-6,86E-07	-2,31E-06	-4,00E-06	-7,81E-06	-1,85E-05	-6,25E-05
$V_{2(Bernoulli)}$	-6,25E-08	-1,481E-07	-2,894E-07	-0,0000005	-6,859E-07	-0,000002315	-0,000004	-0,000007812	-0,00001852	-0,0000625
$V_{2(Timoshenko)}$	-1,714E-07	-2,286E-07	-2,857E-07	-3,429E-07	-0,000000381	-5,714E-07	-6,857E-07	-8,571E-07	-0,000001143	-0,000001714
$V_{2(Friedman et Kosmatka)}$	-1,054E-07	-2,053E-07	-3,608E-07	-5,857E-07	-7,811E-07	-0,000002458	-0,000004171	-0,000008027	-0,0000188	-0,00006293
$V_{2(Beam3)}$	-6,2516E-08	-1,4815E-07	-2,8935E-07	-5,005E-07	-6,8587E-07	-2,3148E-06	-4,0006E-06	-7,8137E-06	-0,000018519	-0,000062469
$\Theta_{2(RDM)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\Theta_{2(Bernoulli)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\Theta_{2(Timoshenko)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\Theta_{2(Friedman et Kosmatka)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\Theta_{2(Beam3)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

➤ **poutre 3**

L /h	2	2,666	3,333	4	4,444	6,666	8	10	13,333	20
$V_2$ (RDM)	-1,09E-07	-2,59E-07	-5,06E-07	-8,75E-07	-1,20E-06	-4,05E-06	-7,00E-06	-1,37E-05	-3,24E-05	-1,09E-04
$V_2$ (Bernoulli)	-1,09E-07	-2,59E-07	-5,06E-07	-8,75E-07	-1,20E-06	-4,05E-06	-7,00E-06	-1,37E-05	-3,24E-05	-1,09E-04
$V_2$ (Timoshenko)	-2,21E-07	-3,14E-07	-4,12E-07	-5,14E-07	-5,83E-07	-9,31E-07	-1,14E-06	-1,45E-06	-1,96E-06	-2,97E-06
$V_2$ (Friedman et Kosmatka)	-1,58E-07	-3,24E-07	-5,88E-07	-9,73E-07	-1,31E-06	-4,21E-06	-7,20E-06	-1,39E-05	-3,27E-05	-1,10E-04
$V_2$ (Beam3)	-1,09E-07	-2,59E-07	-5,06E-07	-8,76E-07	-1,20E-06	-4,05E-06	-7,00E-06	-1,37E-05	-3,24E-05	-1,09E-04
$\Theta_2$ (RDM)	-2,34E-08	-5,56E-08	-1,09E-07	-1,88E-07	-2,57E-07	-8,68E-07	-1,50E-06	-2,93E-06	-6,94E-06	-2,34E-05
$\Theta_2$ (Bernoulli)	-2,34E-08	-5,56E-08	-1,09E-07	-1,88E-07	-2,57E-07	-8,68E-07	-1,50E-06	-2,93E-06	-6,94E-06	-2,34E-05
$\Theta_2$ (Timoshenko)	-5,40E-09	-7,00E-09	-2,57E-08	-4,81E-08	-6,41E-08	-1,48E-07	-1,99E-07	-2,72E-07	-3,90E-07	-6,16E-07
$\Theta_2$ (Friedman et Kosmatka)	-1,48E-08	-4,38E-08	-9,37E-08	-1,70E-07	-2,37E-07	-8,38E-07	-1,46E-06	-2,88E-06	-6,88E-06	-2,33E-05
$\Theta_2$ (Beam3)	-2,34E-08	-5,56E-08	-1,09E-07	-1,88E-07	-2,57E-07	-8,68E-07	-1,50E-06	-2,93E-06	-6,94E-06	-2,34E-05
$\Theta_3$ (RDM)	9,38E-08	2,22E-07	4,34E-07	7,50E-07	1,03E-06	3,47E-06	6,00E-06	1,17E-05	2,78E-05	9,38E-05
$\Theta_3$ (Bernoulli)	9,38E-08	2,22E-07	4,34E-07	7,50E-07	1,03E-06	3,47E-06	6,00E-06	1,17E-05	2,78E-05	9,37E-05
$\Theta_3$ (Timoshenko)	9,89E-08	1,70E-07	2,53E-07	3,43E-07	4,04E-07	7,19E-07	9,06E-07	1,18E-06	1,63E-06	2,52E-06
$\Theta_3$ (Friedman et Kosmatka)	1,05E-07	2,38E-07	4,54E-07	7,74E-07	1,06E-06	3,51E-06	6,05E-06	1,18E-05	2,79E-05	9,39E-05
$\Theta_3$ (Beam3)	9,38E-08	2,22E-07	4,34E-07	7,51E-07	1,03E-06	3,47E-06	6,00E-06	1,17E-05	2,78E-05	9,37E-05

➤ **Poutre 4**

L /h	2	2,666	3,333	4	4,444	6,666	8	10	13,333	20
$\Theta_1$ (RDM)	-1,88E-07	-4,44E-07	-8,68E-07	-1,50E-06	-2,06E-06	-6,94E-06	-1,20E-05	-2,34E-05	-5,56E-05	-1,88E-04
$\Theta_1$ (Bernoulli)	-1,88E-07	-4,44E-07	-8,68E-07	-1,50E-06	-2,06E-06	-6,94E-06	-1,20E-05	-2,34E-05	-5,56E-05	-1,88E-04
$\Theta_1$ (Timoshenko)	-1,37E-07	-2,70E-07	-4,31E-07	-6,10E-07	-7,35E-07	-1,38E-06	-1,76E-06	-0,000002317	-0,000003229	-0,000005006
$\Theta_1$ (Friedman et Kosmatka)	-1,88E-07	-4,44E-07	-8,68E-07	-1,50E-06	-2,06E-06	-6,94E-06	-1,20E-05	-0,00002344	-0,00005556	-0,0001875
$\Theta_1$ (Beam3)	-1,88E-07	-4,44E-07	-8,68E-07	-1,50E-06	-2,06E-06	-6,94E-06	-1,20E-05	-0,000022591	-0,000055556	-0,00018741
$V_2$ (RDM)	-2,50E-07	-5,93E-07	-1,16E-06	-2,00E-06	-2,74E-06	-9,26E-06	-1,60E-05	-3,13E-05	-7,41E-05	-2,50E-04
$V_2$ (Bernoulli)	-2,50E-07	-5,93E-07	-1,16E-06	-2,00E-06	-2,06E-06	-9,26E-06	-1,60E-05	-3,13E-05	-7,41E-05	-2,50E-04
$V_2$ (Timoshenko)	-3,09E-07	-4,98E-07	-7,17E-07	-9,53E-07	-1,12E-06	-1,95E-06	-2,44E-06	-0,000003174	-0,000004372	-0,00000672
$V_2$ (Friedman et Kosmatka)	-2,93E-07	-6,50E-07	-1,23E-06	-2,09E-06	-2,84E-06	-9,40E-06	-1,62E-05	-0,00003146	-0,00007436	-0,0002504
$V_2$ (Beam3)	-2,50E-07	-5,93E-07	-1,16E-06	-2,00E-06	-2,74E-06	-9,26E-06	-1,60E-05	-0,000030121	-0,000074074	-0,00024988

$\Theta_2$ (RDM)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\Theta_2$ (Bernoulli)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\Theta_2$ (Timoshenko)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\Theta_2$ (Friedman et Kosmatka)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\Theta_2$ (Beam3)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\Theta_3$ (RDM)	1,88E-07	4,44E-07	8,68E-07	1,50E-06	2,06E-06	6,94E-06	1,20E-05	2,34E-05	5,56E-05	1,88E-04
$\Theta_3$ (Bernoulli)	1,88E-07	4,44E-07	8,68E-07	1,50E-06	2,06E-06	6,94E-06	1,20E-05	2,34E-05	5,56E-05	1,88E-04
$\Theta_3$ (Timoshenko)	1,37E-07	2,70E-07	4,31E-07	6,10E-07	7,35E-07	1,38E-06	1,76E-06	0,000002317	0,000003229	0,000005006
$\Theta_3$ (Friedman et Kosmatka)	1,88E-07	4,44E-07	8,68E-07	1,50E-06	2,06E-06	6,94E-06	1,20E-05	0,00002344	0,00005556	0,0001875
$\Theta_3$ (Beam3)	1,88E-07	4,44E-07	8,68E-07	1,50E-06	2,06E-06	6,94E-06	1,20E-05	0,000022591	0,000055556	0,00018741

➤ **Poutre 5**

L /h	2	2,666	3,333	4	4,444	6,666	8	10	13,333	20
$V_2$ (RDM)	-5,00E-07	-1,19E-06	-2,32E-06	-4,00E-06	-5,49E-06	-1,85E-05	-3,20E-05	-6,25E-05	-1,48E-04	-5,00E-04
$V_2$ (Bernoulli)	-5,00E-07	-1,19E-06	-2,32E-06	-4,00E-06	-5,49E-06	-1,85E-05	-3,20E-05	-6,25E-05	-1,48E-04	-5,00E-04
$V_2$ (Timoshenko)	-6,18E-07	-9,96E-07	-1,43E-06	-1,91E-06	-2,23E-06	-3,89E-06	-4,88E-06	-6,35E-06	-8,74E-06	-1,34E-05
$V_2$ (Friedman et Kosmatka)	-5,86E-07	-1,30E-06	-2,46E-06	-4,17E-06	-5,68E-06	-1,88E-05	-3,23E-05	-6,29E-05	-1,49E-04	-5,00E-04
$V_2$ (Beam3)	-5,00E-07	-1,19E-06	-2,31E-06	-4,00E-06	-5,49E-06	-1,85E-05	-3,20E-05	-6,25E-05	-1,48E-04	-5,00E-04
$\Theta_2$ (RDM)	-3,75E-07	-8,89E-07	-1,74E-06	-3,00E-06	-4,12E-06	-1,39E-05	-2,40E-05	-4,69E-05	-1,11E-04	-4,00E-04
$\Theta_2$ (Bernoulli)	-3,75E-07	-8,89E-07	-1,74E-06	-3,00E-06	-4,12E-06	-1,39E-05	-2,40E-05	-4,69E-05	-1,11E-04	-4,00E-04
$\Theta_2$ (Timoshenko)	-2,75E-07	-5,39E-07	-8,63E-07	-1,22E-06	-1,47E-06	-2,75E-06	-3,51E-06	-4,63E-06	-6,46E-06	-1,00E-05
$\Theta_2$ (Friedman et Kosmatka)	-3,75E-07	-8,89E-07	-1,74E-06	-3,00E-06	-4,12E-06	-1,39E-05	-2,40E-05	-4,69E-05	-1,11E-04	-4,00E-04
$\Theta_2$ (Beam3)	-3,75E-07	-8,89E-07	-1,74E-06	-3,00E-06	-4,12E-06	-1,39E-05	-2,40E-05	-4,69E-05	-1,11E-04	-3,75E-04
$V_3$ (RDM)	-1,25E-06	-2,96E-06	-5,79E-06	-1,00E-05	-1,37E-05	-4,63E-05	-8,00E-05	-1,56E-04	-3,70E-04	-1,20E-03
$V_3$ (Bernoulli)	-1,25E-06	-2,96E-06	-5,79E-06	-1,00E-05	-1,37E-05	-4,63E-05	-8,00E-05	-1,56E-04	-3,70E-04	-1,20E-03
$V_3$ (Timoshenko)	-1,17E-06	-2,08E-06	-3,16E-06	-4,35E-06	-5,17E-06	-9,39E-06	-1,19E-05	-1,56E-05	-2,17E-05	-3,35E-05
$V_3$ (Friedman et Kosmatka)	-1,34E-06	-3,08E-06	-5,93E-06	-1,02E-05	-1,39E-05	-4,66E-05	-8,03E-05	-1,57E-04	-3,71E-04	-1,30E-03
$V_3$ (Beam3)	-1,25E-06	-2,96E-06	-5,71E-06	-1,00E-05	-1,37E-05	-4,63E-05	-8,00E-05	-1,56E-04	-3,70E-04	-1,25E-03
$\Theta_3$ (RDM)	-3,75E-07	-8,89E-07	-1,74E-06	-3,00E-06	-4,12E-06	-1,39E-05	-2,40E-05	-4,69E-05	-1,11E-04	-4,00E-04
$\Theta_3$ (Bernoulli)	-3,75E-07	-8,89E-07	-1,74E-06	-3,00E-06	-4,12E-06	-1,39E-05	-2,40E-05	-4,69E-05	-1,11E-04	-4,00E-04
$\Theta_3$ (Timoshenko)	-2,75E-07	-5,39E-07	-8,63E-07	-1,22E-06	-1,47E-06	-2,75E-06	-3,51E-06	-4,63E-06	-6,46E-06	-1,00E-05
$\Theta_3$ (Friedman et Kosmatka)	-3,75E-07	-8,89E-07	-1,74E-06	-3,00E-06	-4,12E-06	-1,39E-05	-2,40E-05	-4,69E-05	-1,11E-04	-4,00E-04
$\Theta_3$ (Beam3)	-3,75E-07	-8,89E-07	-1,74E-06	-3,00E-06	-4,12E-06	-1,39E-05	-2,40E-05	-4,69E-05	-1,11E-04	-3,75E-04

• **Résultats de l'influence du module de Young sur le comportement de la poutre console par la méthode 'RDM'**

L/h	2	2,666	3,333	4	4,444	6,666	8	10	13,333	20
V <sub>2</sub> (E1)	-4,00E-06	-9,48E-06	-1,85E-05	-3,20E-05	-4,39E-05	-1,48E-04	-2,56E-04	-5,00E-04	-1,20E-03	-4,00E-03
V <sub>2</sub> (E2)	-6,35E-06	-1,51E-05	-2,94E-05	-5,08E-05	-6,97E-05	-2,35E-04	-4,06E-04	-7,94E-04	-1,90E-03	-6,30E-03
V <sub>2</sub> (E3)	-8,00E-06	-1,90E-05	-3,70E-05	-6,40E-05	-8,78E-05	-2,96E-04	-5,12E-04	-1,00E-03	-2,40E-03	-8,00E-03
V <sub>2</sub> (E4)	-1,14E-05	-2,71E-05	-5,29E-05	-9,1429e-005	-1,25E-04	-4,23E-04	-7,31E-04	-1,40E-03	-3,40E-03	-1,14E-02
V <sub>2</sub> (E5)	-4,00E-05	-9,48E-05	-1,85E-04	-3,20E-04	-4,39E-04	-1,50E-03	-2,60E-03	-5,00E-03	-1,19E-02	-4,00E-02
Θ <sub>2</sub> (E1)	-1,50E-06	-3,56E-06	-6,94E-06	-1,20E-05	-1,65E-05	-5,56E-05	-9,60E-05	-1,88E-04	-4,44E-04	-1,50E-03
Θ <sub>2</sub> (E2)	-2,38E-06	-5,64E-06	-1,10E-05	-1,90E-05	-2,61E-05	-8,82E-05	-1,52E-04	-2,98E-04	-7,05E-04	-2,40E-03
Θ <sub>2</sub> (E3)	-3,00E-06	-7,11E-06	-1,39E-05	-2,40E-05	-3,29E-05	-1,11E-04	-1,92E-04	-3,75E-04	-8,89E-04	-3,00E-03
Θ <sub>2</sub> (E4)	-3,00E-06	-2,38E-06	-5,64E-06	-1,10E-05	-1,91E-05	-2,61E-05	-8,82E-05	-1,52E-04	-2,98E-04	-7,00E-04
Θ <sub>2</sub> (E5)	-1,50E-05	-3,56E-05	-6,94E-05	-1,20E-04	-1,65E-04	-5,56E-04	-9,60E-04	-1,90E-03	-4,40E-03	-1,50E-02

• **Résultats de l'influence du module de Young sur le comportement de la poutre encadrée – appuyée par la méthode 'RDM'**

L/h	2	2,666	3,333	4	4,444	6,666	8	10	13,333	20
V <sub>2</sub> (E1)	-1,09E-07	-2,59E-07	-5,06E-07	-8,75E-07	-1,20E-06	-4,05E-06	-7,00E-06	-1,37E-05	-3,24E-05	-1,09E-04
V <sub>2</sub> (E2)	-1,74E-07	-4,12E-07	-8,04E-07	-1,39E-06	-1,91E-06	-6,43E-06	-1,11E-05	-2,17E-05	-5,14E-05	-1,74E-04
V <sub>2</sub> (E3)	-2,19E-07	-5,19E-07	-1,01E-06	-1,75E-06	-2,40E-06	-2,40E-06	-8,10E-06	-2,73E-05	-6,48E-05	-2,19E-04
V <sub>2</sub> (E4)	-3,13E-07	-7,41E-07	-1,45E-06	-2,50E-06	-3,43E-06	-8,10E-06	-2,00E-05	-3,91E-05	-9,26E-05	-3,13E-04
V <sub>2</sub> (E5)	-1,09E-06	-2,59E-06	-5,06E-06	-8,75E-06	-1,20E-05	-4,05E-05	-7,00E-05	-1,37E-04	-3,24E-04	-1,10E-03
Θ <sub>2</sub> (E1)	-2,34E-08	-5,56E-08	-1,09E-07	-1,88E-07	-2,57E-07	-8,68E-07	-1,50E-06	-2,93E-06	-6,94E-06	-2,34E-05
Θ <sub>2</sub> (E2)	-3,72E-08	-8,82E-08	-1,72E-07	-2,98E-07	-4,08E-07	-1,38E-06	-2,38E-06	-4,65E-06	-1,10E-05	-3,72E-05
Θ <sub>2</sub> (E3)	-4,69E-08	-1,11E-07	-2,17E-07	-3,75E-07	-5,14E-07	-1,74E-06	-1,74E-06	-5,86E-06	-1,39E-05	-4,69E-05
Θ <sub>2</sub> (E4)	-6,70E-08	-1,59E-07	-3,10E-07	-5,36E-07	-7,35E-07	-2,48E-06	-4,29E-06	-8,37E-06	-1,98E-05	-6,70E-05
Θ <sub>2</sub> (E5)	-2,34E-07	-5,56E-07	-1,09E-06	-1,88E-06	-2,57E-06	-8,68E-06	-1,50E-05	-2,93E-05	-6,94E-05	-2,34E-04
Θ <sub>3</sub> (E1)	9,38E-08	2,22E-07	4,34E-07	7,50E-07	1,03E-06	3,47E-06	6,00E-06	1,17E-05	2,78E-05	9,38E-05
Θ <sub>3</sub> (E2)	1,49E-07	3,53E-07	6,89E-07	1,19E-06	1,63E-06	5,51E-06	9,52E-06	1,86E-05	4,41E-05	1,49E-04
Θ <sub>3</sub> (E3)	1,88E-07	4,44E-07	8,68E-07	1,50E-06	2,06E-06	6,94E-06	6,94E-06	2,34E-05	5,56E-05	1,88E-04
Θ <sub>3</sub> (E4)	2,68E-07	6,35E-07	1,24E-06	2,14E-06	2,94E-06	9,92E-06	1,71E-05	3,35E-05	7,94E-05	2,68E-04
Θ <sub>3</sub> (E5)	9,75E-07	2,22E-06	4,34E-06	7,50E-06	1,03E-05	3,47E-05	6,00E-05	1,17E-04	2,78E-04	9,38E-04

• **Résultats de l'influence du module de Young sur le comportement de la poutre console par la méthode de Bernoulli**

L/h	2	2,666	3,333	4	4,444	6,666	8	10	13,333	20
V <sub>2</sub> (E1)	-4,00E-05	-9,48E-05	-1,85E-04	-3,20E-04	-4,39E-04	-1,50E-03	-2,60E-03	-5,00E-03	-1,19E-02	-4,00E-02
V <sub>2</sub> (E2)	-1,14E-05	-2,71E-05	-5,29E-05	-9,14E-05	-1,25E-04	-4,23E-04	-7,31E-04	-1,40E-03	-3,40E-03	-1,14E-02
V <sub>2</sub> (E3)	-8,00E-06	-1,90E-05	-3,70E-05	-6,40E-05	-8,78E-05	-2,96E-04	-5,12E-04	-1,00E-03	-2,40E-03	-8,00E-03
V <sub>2</sub> (E4)	-6,35E-06	-1,51E-05	-2,94E-05	-5,08E-05	-6,97E-05	-2,35E-04	-4,06E-04	-7,94E-04	-1,90E-03	-6,30E-03
V <sub>2</sub> (E5)	-4,00E-06	-9,48E-06	-1,85E-05	-3,20E-05	-4,39E-05	-1,48E-04	-2,56E-04	-5,00E-04	-1,20E-03	-4,00E-03
Θ <sub>2</sub> (E1)	-1,50E-05	-3,56E-05	-6,94E-05	-1,20E-04	-1,65E-04	-6,00E-04	-1,00E-03	-1,90E-03	-4,40E-03	-1,50E-02
Θ <sub>2</sub> (E2)	-4,29E-06	-1,02E-05	-1,98E-05	-3,43E-05	-4,70E-05	-1,59E-04	-2,74E-04	-5,00E-04	-1,30E-03	-4,30E-03
Θ <sub>2</sub> (E3)	-3,00E-06	-7,11E-06	-1,39E-05	-2,40E-05	-3,29E-05	-1,11E-04	-1,92E-04	-3,75E-04	-9,00E-04	-3,00E-03
Θ <sub>2</sub> (E4)	-2,38E-06	-5,64E-06	-1,10E-05	-1,91E-05	-2,61E-05	-8,82E-05	-1,52E-04	-2,98E-04	-7,00E-04	-2,40E-03
Θ <sub>2</sub> (E5)	-1,50E-06	-5,56E-06	-6,94E-06	-1,20E-05	-1,65E-05	-5,56E-05	-9,60E-05	-1,88E-04	-4,00E-04	-1,50E-03

• **Résultats de l'influence du module de Young sur le comportement de la poutre encastree – appuyée par la méthode de Bernoulli**

L/h	2	2,666	3,333	4	4,444	6,666	8	10	13,333	20
V <sub>2</sub> (E1)	-1,09E-07	-2,59E-07	-5,06E-07	-8,75E-07	-0,1200	-4,05E-06	-7,00E-06	-1,37E-05	-3,24E-05	-1,09E-04
V <sub>2</sub> (E2)	-1,74E-07	-4,12E-07	-8,04E-07	-1,39E-06	-1,91E-06	-6,43E-06	-1,11E-05	-2,17E-05	-5,14E-05	-1,74E-04
V <sub>2</sub> (E3)	-2,19E-07	-5,19E-07	-1,01E-06	-1,75E-06	-2,40E-06	-8,10E-06	-1,40E-05	-2,73E-05	-6,48E-05	-2,19E-04
V <sub>2</sub> (E4)	-3,13E-07	-7,41E-07	-1,45E-06	-2,50E-06	-3,43E-06	-1,16E-05	-2,00E-05	-3,91E-05	-9,26E-05	-3,13E-04
V <sub>2</sub> (E5)	-1,09E-06	-2,59E-06	-5,06E-06	-8,75E-06	-1,20E-05	-4,05E-05	-7,00E-05	-1,37E-04	-3,24E-04	-1,10E-03
Θ <sub>2</sub> (E1)	-2,34E-08	-5,56E-08	-1,09E-07	-1,88E-07	-2,57E-07	-8,68E-07	-1,50E-06	-2,93E-06	-6,94E-06	-2,34E-05
Θ <sub>2</sub> (E2)	-3,72E-08	-8,82E-08	-1,72E-07	-2,98E-07	-4,08E-07	-1,38E-06	-2,38E-06	-4,65E-06	-1,10E-05	-3,72E-05
Θ <sub>2</sub> (E3)	-4,69E-08	-1,11E-07	-2,17E-07	-3,75E-07	-5,14E-07	-1,74E-06	-3,00E-06	-5,86E-06	-1,39E-05	-4,69E-05
Θ <sub>2</sub> (E4)	-6,70E-08	-1,59E-07	-3,10E-07	-5,36E-07	-7,35E-07	-2,48E-06	-4,29E-06	-8,37E-06	-1,98E-05	-6,70E-05
Θ <sub>2</sub> (E5)	-2,34E-07	-5,56E-07	-1,09E-06	-1,88E-06	-2,57E-06	-8,68E-06	-1,50E-05	-2,93E-05	-6,94E-05	-2,00E-04
Θ <sub>3</sub> (E1)	9,38E-08	2,22E-07	4,34E-07	7,50E-07	1,03E-06	3,47E-06	6,00E-06	1,17E-05	2,78E-05	9,37E-05
Θ <sub>3</sub> (E2)	1,49E-07	3,53E-07	6,89E-07	1,19E-06	1,63E-06	5,51E-06	9,52E-06	1,86E-05	4,41E-05	1,49E-04
Θ <sub>3</sub> (E3)	1,88E-07	4,44E-07	8,68E-07	1,50E-06	2,06E-06	6,94E-06	1,20E-05	2,34E-05	5,56E-05	1,88E-04
Θ <sub>3</sub> (E4)	2,68E-07	6,35E-07	1,24E-06	2,14E-06	2,94E-06	9,92E-06	1,71E-05	3,35E-05	7,94E-05	2,68E-04
Θ <sub>3</sub> (E5)	9,38E-07	2,22E-06	4,34E-06	7,50E-06	1,03E-05	3,47E-05	6,00E-05	1,17E-04	2,78E-04	9,00E-04

• **Résultats de l'influence du module de Young sur le comportement de la poutre console par la méthode de Timoshenko**

L/h	2	2,666	3,333	4	4,444	6,666	8	10	13,333	20
V <sub>2</sub> (E1)	-2,04E-06	-3,12E-06	-4,21E-06	-5,30E-06	-6,02E-06	-9,55E-06	-1,16E-05	-1,47E-05	-1,98E-05	-2,99E-05
V <sub>2</sub> (E2)	-3,35E-06	-5,14E-06	-6,96E-06	-8,77E-06	-9,97E-06	-1,59E-05	-1,93E-05	-2,45E-05	-3,29E-05	-4,98E-05
V <sub>2</sub> (E3)	-3,94E-06	-6,00E-06	-8,08E-06	-1,02E-05	-1,15E-05	-1,82E-05	-2,22E-05	-2,81E-05	-3,78E-05	-5,70E-05

$V_2(E4)$	-6,08E-06	-9,32E-06	-1,26E-05	-1,59E-05	-1,81E-05	-2,88E-05	-3,51E-05	-4,45E-05	-5,99E-05	-9,05E-05
$V_2(E5)$	-1,96E-05	-2,98E-05	-4,01E-05	-5,04E-05	-5,72E-05	-9,04E-05	-1,10E-04	-1,39E-04	-1,87E-04	-2,83E-04
$\Theta_2(E1)$	-6,44E-07	-1,06E-06	-1,48E-06	-1,90E-06	-2,18E-06	-3,52E-06	-4,31E-06	-5,47E-06	-7,39E-06	-1,12E-05
$\Theta_2(E2)$	-1,05E-06	-1,73E-06	-2,44E-06	-3,14E-06	-3,60E-06	-5,84E-06	-7,15E-06	-9,10E-06	-1,23E-05	-1,86E-05
$\Theta_2(E3)$	-1,25E-06	-2,04E-06	-2,85E-06	-3,65E-06	-4,17E-06	-6,73E-06	-8,23E-06	-1,05E-05	-1,41E-05	-2,13E-05
$\Theta_2(E4)$	-1,90E-06	-3,14E-06	-4,42E-06	-5,69E-06	-6,53E-06	-1,06E-05	-1,30E-05	-1,65E-05	-2,24E-05	-3,39E-05
$\Theta_2(E5)$	-6,23E-06	-1,02E-05	-1,41E-05	-1,81E-05	-2,07E-05	-3,34E-05	-4,08E-05	-5,18E-05	-6,99E-05	-1,06E-04

- Résultats de l'influence du module de Young sur le comportement de la poutre encastree par la méthode de Timoshenko**

L/h	2	2,666	3,333	4	4,444	6,666	8	10	13,333	20
$V_2(E1)$	-2,40E-07	-3,41E-07	-4,48E-07	-5,59E-07	-6,34E-07	-1,02E-06	-1,24E-06	-1,58E-06	-2,14E-06	-3,26E-06
$V_2(E2)$	-3,97E-07	-5,64E-07	-7,41E-07	-9,25E-07	-1,05E-06	-1,68E-06	-2,06E-06	-2,63E-06	-3,56E-06	-5,42E-06
$V_2(E3)$	-4,59E-07	-6,52E-07	-8,57E-07	-1,07E-06	-1,21E-06	-1,94E-06	-2,37E-06	-3,02E-06	-4,09E-06	-6,21E-06
$V_2(E4)$	-7,22E-07	-1,02E-06	-1,35E-06	-1,68E-06	-1,91E-06	-3,06E-06	-3,75E-06	-4,78E-06	-6,48E-06	-9,85E-06
$V_2(E5)$	-2,28E-06	-3,24E-06	-4,26E-06	-5,31E-06	-6,02E-06	-9,62E-06	-1,18E-05	-1,50E-05	-2,03E-05	-3,08E-05
$\Theta_2(E1)$	7,50E-09	-4,90E-09	-2,42E-08	-4,80E-08	-6,52E-08	-1,57E-07	-2,13E-07	-2,93E-07	-4,23E-07	-6,73E-07
$\Theta_2(E2)$	1,36E-08	-5,80E-09	-3,70E-08	-7,58E-08	-1,04E-07	-2,57E-07	-3,49E-07	-4,84E-07	-7,01E-07	-1,12E-06
$\Theta_2(E3)$	1,28E-08	-1,21E-08	-5,01E-08	-9,60E-08	-1,29E-07	-3,05E-07	-4,10E-07	-5,64E-07	-8,11E-07	-1,29E-06
$\Theta_2(E4)$	2,52E-08	-1,00E-08	-6,60E-08	-1,36E-07	-1,88E-07	-4,65E-07	-6,33E-07	-8,79E-07	-1,27E-06	-2,03E-06
$\Theta_2(E5)$	6,20E-08	-6,20E-08	-2,52E-07	-4,81E-07	-6,46E-07	-1,52E-06	-2,04E-06	-2,80E-06	-4,02E-06	-6,37E-06
$\Theta_3(E1)$	1,04E-07	1,80E-07	2,69E-07	3,65E-07	4,32E-07	7,77E-07	9,82E-07	1,29E-06	1,78E-06	2,75E-06
$\Theta_3(E2)$	1,69E-07	2,93E-07	4,39E-07	5,99E-07	7,10E-07	1,28E-06	1,63E-06	2,13E-06	2,96E-06	4,58E-06
$\Theta_3(E3)$	2,02E-07	3,50E-07	5,21E-07	7,07E-07	8,35E-07	1,49E-06	1,88E-06	2,46E-06	3,41E-06	5,25E-06
$\Theta_3(E4)$	3,05E-07	5,31E-07	7,95E-07	1,09E-06	1,29E-06	2,33E-06	2,95E-06	3,88E-06	5,38E-06	8,32E-06
$\Theta_3(E5)$	1,01E-06	1,74E-06	2,59E-06	3,51E-06	4,15E-06	7,41E-06	9,35E-06	1,22E-05	1,69E-05	2,60E-05

- Résultats de l'influence du module de Young sur le comportement de la poutre console par la méthode de Friedman et Kosmatka**

L/h	2	2,666	3,333	4	4,444	6,666	8	10	13,333	20
$V_2(E1)$	-4,71E-05	-1,04E-04	-1,97E-04	-3,34E-04	-4,55E-04	-1,50E-03	-2,60E-03	-5,00E-03	-1,19E-02	-4,01E-02
$V_2(E2)$	-1,37E-05	-3,01E-05	-5,67E-05	-9,60E-05	-1,31E-04	-4,31E-04	-7,41E-04	-1,40E-03	-3,40E-03	-1,15E-02
$V_2(E3)$	-9,43E-06	-2,09E-05	-3,94E-05	-6,69E-05	-9,10E-05	-3,01E-04	-5,18E-04	-1,00E-03	-2,40E-03	-8,00E-03
$V_2(E4)$	-7,60E-06	-1,67E-05	-3,15E-05	-5,33E-05	-7,25E-05	-2,39E-04	-4,11E-04	-8,00E-04	-1,90E-03	-6,40E-03
$V_2(E5)$	-4,75E-06	-1,05E-05	-1,98E-05	-3,35E-05	-4,56E-05	-1,51E-04	-2,59E-04	-5,04E-04	-1,20E-03	-4,00E-03
$\Theta_2(E1)$	-1,50E-06	-3,56E-06	-6,94E-06	-1,20E-05	-1,65E-05	-5,56E-05	-9,60E-05	-1,88E-04	-4,00E-04	-1,50E-03
$\Theta_2(E2)$	-2,38E-06	-5,64E-06	-1,10E-05	-1,91E-05	-2,61E-05	-8,82E-05	-1,52E-04	-2,98E-04	-7,00E-04	-2,40E-03

$\Theta_2(E3)$	-3,00E-06	-7,11E-06	-1,39E-05	-2,40E-05	-3,29E-05	-1,11E-04	-1,92E-04	-4,00E-04	-9,00E-04	-3,00E-03
$\Theta_2(E4)$	-4,29E-06	-1,02E-05	-1,98E-05	-3,43E-05	-4,70E-05	-1,59E-04	-2,74E-04	-5,00E-04	-1,30E-03	-4,30E-03
$\Theta_2(E5)$	-1,50E-05	-3,56E-05	-6,94E-05	-1,20E-04	-1,65E-04	-6,00E-04	-1,00E-03	-1,90E-03	-4,40E-03	-1,50E-02

- **Résultats de l'influence du module de Young sur le comportement de la poutre encastree – appuyée par la méthode de Friedman et Kosmatka**

L/h	2	2,666	3,333	4	4,444	6,666	8	10	13,333	20
$V_2(E1)$	-1,60E-06	-3,27E-06	-5,91E-06	-9,76E-06	-1,31E-05	-4,22E-05	-7,20E-05	-1,39E-04	-3,27E-04	-1,10E-03
$V_2(E2)$	-4,74E-07	-9,56E-07	-1,72E-06	-2,82E-06	-3,79E-06	-1,21E-05	-2,07E-05	-3,99E-05	-9,37E-05	-3,14E-04
$V_2(E3)$	-3,20E-07	-6,54E-07	-1,18E-06	-1,95E-06	-2,63E-06	-8,44E-06	-1,44E-05	-2,79E-05	-6,55E-05	-2,20E-04
$V_2(E4)$	-2,62E-07	-5,30E-07	-9,52E-07	-1,57E-06	-2,10E-06	-6,73E-06	-1,15E-05	-2,22E-05	-5,20E-05	-1,75E-04
$V_2(E5)$	-1,63E-07	-3,31E-07	-5,96E-07	-9,82E-07	-1,32E-06	-4,23E-06	-7,21E-06	-1,39E-05	-3,28E-05	-1,10E-04
$\Theta_2(E1)$	-1,45E-07	-4,34E-07	-9,31E-07	-1,69E-06	-2,37E-06	-8,37E-06	-1,46E-05	-2,88E-05	-6,88E-05	-2,00E-04
$\Theta_2(E2)$	-3,84E-08	-1,20E-07	-2,61E-07	-4,76E-07	-6,69E-07	-2,38E-06	-4,17E-06	-8,22E-06	-1,96E-05	-6,67E-05
$\Theta_2(E3)$	-2,88E-08	-8,65E-08	-1,86E-07	-3,38E-07	-4,73E-07	-1,67E-06	-2,92E-06	-5,77E-06	-1,38E-05	-4,67E-05
$\Theta_2(E4)$	-2,15E-08	-6,68E-08	-1,45E-07	-2,65E-07	-3,72E-07	-1,32E-06	-2,32E-06	-4,57E-06	-1,09E-05	-3,70E-05
$\Theta_2(E5)$	-2,15E-08	-6,68E-08	-1,45E-07	-2,65E-07	-3,72E-07	-1,32E-06	-2,32E-06	-4,57E-06	-1,09E-05	-3,70E-05
$\Theta_3(E1)$	1,06E-06	2,39E-06	4,55E-06	7,75E-06	1,06E-05	3,51E-05	6,05E-05	1,18E-04	2,79E-04	9,00E-04
$\Theta_3(E2)$	3,06E-07	6,87E-07	1,31E-06	2,22E-06	3,03E-06	1,01E-05	1,73E-05	3,37E-05	7,96E-05	2,68E-04
$\Theta_3(E3)$	2,12E-07	4,77E-07	9,09E-07	1,55E-06	2,11E-06	7,03E-06	1,21E-05	2,36E-05	5,57E-05	1,88E-04
$\Theta_3(E4)$	1,70E-07	3,81E-07	7,25E-07	1,23E-06	1,68E-06	5,58E-06	9,61E-06	1,87E-05	4,42E-05	1,49E-04
$\Theta_3(E5)$	1,70E-07	3,81E-07	7,25E-07	1,23E-06	1,68E-06	5,58E-06	9,61E-06	1,87E-05	4,42E-05	1,49E-04

- **Résultats de l'influence du module de Young sur le comportement de la poutre console par ANSYS12**

L/h	2	2,666	3,333	4	4,444	6,666	8	10	13,333	20
$V_2(E1)$	-4,00E-06	-9,48E-06	-1,85E-05	-3,20E-05	-4,39E-05	-1,48E-04	-2,56E-04	-5,00E-04	-1,19E-03	-4,00E-03
$V_2(E2)$	-6,35E-06	-1,51E-05	-2,94E-05	-5,08E-05	-6,97E-05	-2,35E-04	-4,06E-04	-7,94E-04	-1,88E-03	-6,35E-03
$V_2(E3)$	-8,00E-06	-1,90E-05	-3,70E-05	-6,41E-05	-8,78E-05	-2,96E-04	-5,12E-04	-1,00E-03	-2,37E-03	-8,00E-03
$V_2(E4)$	-1,14E-05	-2,71E-05	-5,29E-05	-9,15E-05	-1,25E-04	-4,23E-04	-7,32E-04	-1,43E-03	-3,39E-03	-1,14E-02
$V_2(E5)$	-4,00E-05	-9,48E-05	-1,85E-04	-3,20E-04	-4,39E-04	-1,48E-03	-2,56E-03	-5,00E-03	-1,19E-02	-4,00E-02
$\Theta_2(E1)$	-1,50E-06	-3,56E-06	-6,94E-06	-1,20E-05	-1,65E-05	-5,56E-05	-9,80E-05	-1,88E-04	-4,44E-04	-1,50E-03
$\Theta_2(E2)$	-2,38E-06	-5,64E-06	-1,10E-05	-1,91E-05	-2,61E-05	-8,82E-05	-1,52E-04	-2,98E-04	-7,05E-04	-2,38E-03

$\Theta_2(E3)$	-3,00E-06	-7,11E-06	-1,39E-05	-2,40E-05	-3,29E-05	-1,11E-04	-1,92E-04	-3,75E-04	-8,89E-04	-3,01E-03
$\Theta_2(E4)$	-4,29E-06	-1,02E-05	-1,98E-05	-3,43E-05	-4,70E-05	-1,59E-04	-2,74E-04	-5,36E-04	-1,27E-03	-4,29E-03
$\Theta_2(E5)$	-1,50E-05	-3,56E-05	-6,94E-05	-1,20E-04	-1,65E-04	-5,56E-04	-9,60E-04	-1,88E-03	-4,44E-03	-1,50E-02

- **Résultats de l'influence du module de Young sur le comportement de la poutre encastree – appuyée par ANSYS12**

L/h	2	2,666	3,333	4	4,444	6,666	8	10	13,333	20
$V_{2(E1)}$	-1,09E-07	-2,59E-07	-5,06E-07	-8,76E-07	-1,20E-06	-4,05E-06	-7,00E-06	-1,37E-05	-3,24E-05	-1,09E-04
$V_{2(E2)}$	-1,74E-07	-4,12E-07	-8,04E-07	-1,39E-06	-1,91E-06	-6,43E-06	-1,11E-05	-2,17E-05	-4,77E-05	-1,74E-04
$V_{2(E3)}$	-2,19E-07	-5,19E-07	-1,01E-06	-1,75E-06	-2,40E-06	-8,10E-06	-1,40E-05	-2,73E-05	-6,48E-05	-2,19E-04
$V_{2(E4)}$	-3,13E-07	-7,41E-07	-1,45E-06	-2,50E-06	-3,43E-06	-1,16E-05	-2,00E-05	-3,91E-05	-9,26E-05	-3,13E-04
$V_{2(E5)}$	-1,09E-06	-2,59E-06	-5,06E-06	-8,76E-06	-1,20E-05	-4,05E-05	-7,00E-05	-1,37E-04	-3,24E-04	-1,09E-03
$\Theta_2(E1)$	-2,34E-08	-5,56E-08	-1,09E-07	-1,88E-07	-2,57E-07	-8,68E-07	-1,50E-06	-2,93E-06	-6,94E-06	-2,34E-05
$\Theta_2(E2)$	-3,72E-08	-8,82E-08	-1,72E-07	-2,98E-07	-4,08E-07	-1,38E-06	-2,38E-06	-4,65E-06	-1,02E-05	-3,72E-05
$\Theta_2(E3)$	-4,69E-08	-1,11E-07	-2,17E-07	-3,75E-07	-5,14E-07	-1,74E-06	-3,00E-06	-5,86E-06	-1,39E-05	-4,69E-05
$\Theta_2(E4)$	-6,70E-08	-1,59E-07	-3,10E-07	-5,36E-07	-7,35E-07	-2,48E-06	-4,29E-06	-8,37E-06	-1,98E-05	-6,70E-05
$\Theta_2(E5)$	-2,34E-07	-5,56E-07	-1,09E-06	-1,88E-06	-2,57E-06	-8,68E-06	-1,50E-05	-2,93E-05	-6,94E-05	-2,34E-04
$\Theta_3(E1)$	9,38E-08	2,22E-07	4,34E-07	7,51E-07	1,03E-06	3,47E-06	6,00E-06	1,17E-05	2,78E-05	9,38E-05
$\Theta_3(E2)$	1,49E-07	3,53E-07	6,89E-07	1,19E-06	1,63E-06	5,51E-06	9,53E-06	1,86E-05	4,09E-05	1,49E-04
$\Theta_3(E3)$	1,88E-07	4,44E-07	8,68E-07	1,50E-06	2,06E-06	6,94E-06	1,20E-05	2,34E-05	5,56E-05	1,88E-04
$\Theta_3(E4)$	2,68E-07	6,35E-07	1,24E-06	2,15E-06	2,94E-06	9,92E-06	1,71E-05	3,35E-05	7,94E-05	2,68E-04
$\Theta_3(E5)$	9,38E-07	2,22E-07	4,34E-06	0,75075E-05	1,03E-06	3,47E-05	6,00E-05	1,17E-04	2,78E-04	9,38E-04

- **Influence du module de Young sur le comportement de la poutre console, par différentes méthodes (E<sub>i</sub>)T : Timoshenko , (E<sub>i</sub>)B : théories résistance de matériaux , Bernoulli , Friedman et Kosmatka et la modélisation par ANSYS 12'' Beam 3'**

L/h	2	2,666	3,333	4	4,444	6,666	8	10	13,333	20
$V_{2(E1)T}$	-2,04E-06	-3,12E-06	-4,21E-06	-5,30E-06	-6,02E-06	-9,55E-06	-1,16E-05	-1,47E-05	-1,98E-05	-2,99E-05
$V_{2(E2)T}$	-3,35E-06	-5,14E-06	-6,96E-06	-8,77E-06	-9,97E-06	-1,59E-05	-1,93E-05	-2,45E-05	-3,29E-05	-4,98E-05
$V_{2(E3)T}$	-3,94E-06	-6,00E-06	-8,08E-06	-1,02E-05	-1,15E-05	-1,82E-05	-2,22E-05	-2,81E-05	-3,78E-05	-5,70E-05
$V_{2(E4)T}$	-6,08E-06	-9,32E-06	-1,26E-05	-1,59E-05	-1,81E-05	-2,88E-05	-3,51E-05	-4,45E-05	-5,99E-05	-9,05E-05
$V_{2(E5)T}$	-1,96E-05	-2,98E-05	-4,01E-05	-5,04E-05	-5,72E-05	-9,04E-05	-1,10E-04	-1,39E-04	-1,87E-04	-2,83E-04
$V_{2(E1)B}$	-4,00E-05	-9,48E-05	-1,85E-04	-3,20E-04	-4,39E-04	-1,50E-03	-2,60E-03	-5,00E-03	-1,19E-02	-4,00E-02

$V_{2(E2)B}$	-1,14E-05	-2,71E-05	-5,29E-05	-9,14E-05	-1,25E-04	-4,23E-04	-7,31E-04	-1,40E-03	-3,40E-03	-1,14E-02
$V_2(E3)B$	-8,00E-06	-1,90E-05	-3,70E-05	-6,40E-05	-8,78E-05	-2,96E-04	-5,12E-04	-1,00E-03	-2,40E-03	-8,00E-03
$V_{2(E4)B}$	-1,14E-05	-2,71E-05	-5,29E-05	-9,14E-05	-1,25E-04	-4,23E-04	-7,31E-04	-1,40E-03	-3,40E-03	-1,14E-02
$V_{2(E5)B}$	-4,00E-06	-9,48E-06	-1,85E-05	-3,20E-05	-4,39E-05	-1,48E-04	-2,56E-04	-5,00E-04	-1,20E-03	-4,00E-03

L/h	2	2,666	3,333	4	4,444	6,666	8	10	13,333	20
$\Theta_2(E1)T$	-6,44E-07	-1,06E-06	-1,48E-06	-1,90E-06	-2,18E-06	-3,52E-06	-4,31E-06	-5,47E-06	-7,39E-06	-1,12E-05
$\Theta_{2(E2)T}$	-1,05E-06	-1,73E-06	-2,44E-06	-3,14E-06	-3,60E-06	-5,84E-06	-7,15E-06	-9,10E-06	-1,23E-05	-1,86E-05
$\Theta_2(E3)T$	-1,25E-06	-2,04E-06	-2,85E-06	-3,65E-06	-4,17E-06	-6,73E-06	-8,23E-06	-1,05E-05	-1,41E-05	-2,13E-05
$\Theta_{2(E4)T}$	-1,90E-06	-3,14E-06	-4,42E-06	-5,69E-06	-6,53E-06	-1,06E-05	-1,30E-05	-1,65E-05	-2,24E-05	-3,39E-05
$\Theta_{2(E5)T}$	-6,23E-06	-1,02E-05	-1,41E-05	-1,81E-05	-2,07E-05	-3,34E-05	-4,08E-05	-5,18E-05	-6,99E-05	-1,06E-04
$\Theta_2(E1)B$	-1,50E-06	-3,56E-06	-6,94E-06	-1,20E-05	-1,65E-05	-5,56E-05	-9,60E-05	-1,88E-04	-4,44E-04	-1,50E-03
$\Theta_{2(E2)B}$	-2,38E-06	-5,64E-06	-1,10E-05	-1,90E-05	-2,61E-05	-8,82E-05	-1,52E-04	-2,98E-04	-7,05E-04	-2,40E-03
$\Theta_2(E3)B$	-3,00E-06	-7,11E-06	-1,39E-05	-2,40E-05	-3,29E-05	-1,11E-04	-1,92E-04	-3,75E-04	-8,89E-04	-3,00E-03
$\Theta_{2(E4)B}$	-3,00E-06	-2,38E-06	-5,64E-06	-1,10E-05	-1,91E-05	-2,61E-05	-8,82E-05	-1,52E-04	-2,98E-04	-7,00E-04
$\Theta_{2(E5)B}$	-1,50E-05	-3,56E-05	-6,94E-05	-1,20E-04	-1,65E-04	-5,56E-04	-9,60E-04	-1,90E-03	-4,40E-03	-1,50E-02

- **Influence du module de Young sur le comportement de la poutre encastree – appuiee, par Différentes méthodes.**  
**(E<sub>i</sub>)T : Timoshenko , (E<sub>i</sub>)B : théories résistance de matériaux , Bernoulli , Friedman et Kosmatka et la modélisation par ANSYS 12' Beam 3'**

L/h	2	2,666	3,333	4	4,444	6,666	8	10	13,333	20
$V_2(E1)T$	-2,40E-07	-3,41E-07	-4,48E-07	-5,59E-07	-6,34E-07	-1,02E-06	-1,24E-06	-1,58E-06	-2,14E-06	-3,26E-06
$V_2(E2)T$	-3,97E-07	-5,64E-07	-7,41E-07	-9,25E-07	-1,05E-06	-1,68E-06	-2,06E-06	-2,63E-06	-3,56E-06	-5,42E-06
$V_2(E3)T$	-4,59E-07	-6,52E-07	-8,57E-07	-1,07E-06	-1,21E-06	-1,94E-06	-2,37E-06	-3,02E-06	-4,09E-06	-6,21E-06
$V_2(E4)T$	-7,22E-07	-1,02E-06	-1,35E-06	-1,68E-06	-1,91E-06	-3,06E-06	-3,75E-06	-4,78E-06	-6,48E-06	-9,85E-06
$V_2(E5)T$	-2,28E-06	-3,24E-06	-4,26E-06	-5,31E-06	-6,02E-06	-9,62E-06	-1,18E-05	-1,50E-05	-2,03E-05	-3,08E-05
$V_2(E1)B$	-1,09E-07	-2,59E-07	-5,06E-07	-8,76E-07	-1,20E-06	-4,05E-06	-7,00E-06	-1,37E-05	-3,24E-05	-1,09E-04
$V_2(E2)B$	-1,74E-07	-4,12E-07	-8,04E-07	-1,39E-06	-1,91E-06	-6,43E-06	-1,11E-05	-2,17E-05	-4,77E-05	-1,74E-04
$V_2(E3)B$	-2,19E-07	-5,19E-07	-1,01E-06	-1,75E-06	-2,40E-06	-8,10E-06	-1,40E-05	-2,73E-05	-6,48E-05	-2,19E-04
$V_2(E4)B$	-3,13E-07	-7,41E-07	-1,45E-06	-2,50E-06	-3,43E-06	-1,16E-05	-2,00E-05	-3,91E-05	-9,26E-05	-3,13E-04
$V_2(E5)B$	-1,09E-06	-2,59E-06	-5,06E-06	-8,76E-06	-1,20E-05	-4,05E-05	-7,00E-05	-1,37E-04	-3,24E-04	-1,09E-03

L/h	2	2,666	3,333	4	4,444	6,666	8	10	13,333	20
$\Theta_2(E1)T$	7,50E-09	-4,90E-09	-2,42E-08	-4,80E-08	-6,52E-08	-1,57E-07	-2,13E-07	-2,93E-07	-4,23E-07	-6,73E-07
$\Theta_{2(E2)T}$	1,36E-08	-5,80E-09	-3,70E-08	-7,58E-08	-1,04E-07	-2,57E-07	-3,49E-07	-4,84E-07	-7,01E-07	-1,12E-06
$\Theta_2(E3)T$	1,28E-08	-1,21E-08	-5,01E-08	-9,60E-08	-1,29E-07	-3,05E-07	-4,10E-07	-5,64E-07	-8,11E-07	-1,29E-06
$\Theta_{2(E4)T}$	2,52E-08	-1,00E-08	-6,60E-08	-1,36E-07	-1,88E-07	-4,65E-07	-6,33E-07	-8,79E-07	-1,27E-06	-2,03E-06
$\Theta_{2(E5)T}$	6,20E-08	-6,20E-08	-2,52E-07	-4,81E-07	-6,46E-07	-1,52E-06	-2,04E-06	-2,80E-06	-4,02E-06	-6,37E-06
$\Theta_2(E1)B$	-2,34E-08	-5,56E-08	-1,09E-07	-1,88E-07	-2,57E-07	-8,68E-07	-1,50E-06	-2,93E-06	-6,94E-06	-2,34E-05

$\Theta_{2(E2)B}$	-3,72E-08	-8,82E-08	-1,72E-07	-2,98E-07	-4,08E-07	-1,38E-06	-2,38E-06	-4,65E-06	-1,02E-05	-3,72E-05
$\Theta_{2(E3)B}$	-4,69E-08	-1,11E-07	-2,17E-07	-3,75E-07	-5,14E-07	-1,74E-06	-3,00E-06	-5,86E-06	-1,39E-05	-4,69E-05
$\Theta_{2(E4)B}$	-6,70E-08	-1,59E-07	-3,10E-07	-5,36E-07	-7,35E-07	-2,48E-06	-4,29E-06	-8,37E-06	-1,98E-05	-6,70E-05
$\Theta_{2(E5)B}$	-2,34E-07	-5,56E-07	-1,09E-06	-1,88E-06	-2,57E-06	-8,68E-06	-1,50E-05	-2,93E-05	-6,94E-05	-2,34E-04

L/h	2	2,666	3,333	4	4,444	6,666	8	10	13,333	20
$\Theta_{3(E1)T}$	1,04E-07	1,80E-07	2,69E-07	3,65E-07	4,32E-07	7,77E-07	9,82E-07	1,29E-06	1,78E-06	2,75E-06
$\Theta_{3(E2)T}$	1,69E-07	2,93E-07	4,39E-07	5,99E-07	7,10E-07	1,28E-06	1,63E-06	2,13E-06	2,96E-06	4,58E-06
$\Theta_{3(E3)T}$	2,02E-07	3,50E-07	5,21E-07	7,07E-07	8,35E-07	1,49E-06	1,88E-06	2,46E-06	3,41E-06	5,25E-06
$\Theta_{3(E4)T}$	3,05E-07	5,31E-07	7,95E-07	1,09E-06	1,29E-06	2,33E-06	2,95E-06	3,88E-06	5,38E-06	8,32E-06
$\Theta_{3(E5)T}$	1,01E-06	1,74E-06	2,59E-06	3,51E-06	4,15E-06	7,41E-06	9,35E-06	1,22E-05	1,69E-05	2,60E-05
$\Theta_{3(E1)B}$	9,38E-08	2,22E-07	4,34E-07	7,50E-07	1,03E-06	3,47E-06	6,00E-06	1,17E-05	2,78E-05	9,37E-05
$\Theta_{3(E2)B}$	1,49E-07	3,53E-07	6,89E-07	1,19E-06	1,63E-06	5,51E-06	9,52E-06	1,86E-05	4,41E-05	1,49E-04
$\Theta_{3(E3)B}$	1,88E-07	4,44E-07	8,68E-07	1,50E-06	2,06E-06	6,94E-06	1,20E-05	2,34E-05	5,56E-05	1,88E-04
$\Theta_{3(E4)B}$	2,68E-07	6,35E-07	1,24E-06	2,14E-06	2,94E-06	9,92E-06	1,71E-05	3,35E-05	7,94E-05	2,68E-04
$\Theta_{3(E5)B}$	9,38E-07	2,22E-06	4,34E-06	7,50E-06	1,03E-05	3,47E-05	6,00E-05	1,17E-04	2,78E-04	9,00E-04