

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



T H È S E

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

DOCTORAT
en Sciences en Génie Civil

Thème :

**DYNAMIQUE DE L'INTERACTION SOL STRUCTURE PAR
LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS SPECTRAUX**

Option : **structure**

Par

BOUDAA Souad

Sous la direction du **professeur KHALFALLAH Salah**

Composition du jury :

Président	:	BEROUAL Ahmed	Professeur	Université de Constantine
Rapporteur	:	KHALFALLAH Salah	Professeur	ENP de Constantine
Examineurs	:	MESSAST Salah	Professeur	Université de Skikda
		MESSIOUD Salah	MCA	Université de Jijel
		GUEMMADI Zhor	MCA	Université de Constantine
		KHEBIZI Mourad	MCA	Université de Constantine

Soutenu publiquement le: 20/01/2021

REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord Dieu le tout puissant qui nous éclaire le bon chemin.

*J'adresse mes sincères remerciements et ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse Mr. **Khalfallah Salah, professeur** à l'École Nationale Polytechnique de Constantine qui m'a permis d'entreprendre cette recherche. Je le remercie aussi pour son soutien, ses conseils et sa confiance. Qu'il trouve ici toute ma gratitude.*

*Je tiens à remercier Mr. **BEROUAL Ahmed, professeur** à l'Université de Constantine, d'avoir accepté de présider le jury.*

*Je tiens aussi à remercier Mr. **MESSAST Salah professeur** à l'Université de Skikda, Mr. **MESSIOUD Salah, MCA** à l'Université de Jijel, Mme **GUEMADI Zhor, MCA** à Université de Constantine, Mr. **KHEBIZI Mourad MCA** à l'Université de Constantine, pour leurs participations à l'évaluation de ce modeste travail. Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*

À tous, je tiens à exprimer mes sincères remerciements.

Dédicaces

Je dédie le présent travail

À la mémoire de mes chers parents

À mes frères et sœurs

À ma petite famille

SOMMAIRE

REMERCIEMENTS	i
Dédicaces	ii
SOMMAIRE	iii
Notations et Abréviations	vii
Liste des figures	ix
Liste des tableaux	xii
ملخص	xiii
Résumé	xiv
Abstract	xv

Chapitre I : Introduction générale

I.1 Introduction	1
I.2 Contenu de la thèse	3

Chapitre II : Étude bibliographique

II.1 Introduction	4
II.1.1 Méthode de rigidité dynamique (DSM)	4
II.1.2 Méthode d'analyse spectrale (SAM)	5
II.1.3 Méthode des éléments spectraux (SEM)	6
II.2 Revue de littérature	6
II.3 Poutres sur fondation élastiques	10
II.3.1 Introduction	10
II.3.2 Modèles d'interaction sol-fondation	11
II.3.2.1 Modèle de pression linéaire	11
II.3.2.2 Modèle de WINKLER	11
II.3.2.3 Modèles élastiques à deux paramètres	12
a) Le modèle de Filonenko – Borodich (1945)	12
b) Le modèle de Hetenyi (1946)	13
c) Le modèle de Pasternak(1954)	13
d) Le modèle de Kerr(1964)	14
II.3.2.4 Modèles continus élastiques	15
a) Demi-espace élastique isotrope	15
b) Demi-espace élastique non homogène	15

c) Fondation transversalement anisotrope	16
d) Supports élastiques multicouches	16
II.3.2.5 Interaction sol structure en utilisant une fondation élastique à deux Paramètres	16
II.4 Etude de l'interaction sol-structure dans le cas dynamique	18
II.5 Objectifs du présent travail	20
II.6. Conclusion	21

Chapitre III : Modélisation de l'interaction sol-structure

III.1 Principes fondamentaux de l'interaction dynamique sol-structure	22
III.2 Interaction cinématique	23
III.3 Interaction inertielle	24
III.4 Méthodes d'analyse de l'interaction sol-structure	25
III.4.1 Méthodes directes	25
III.4.2 Méthodes des sous-structures	26
III.4.3 Méthodes hybrides	29
III.4.4 Analyse dans le domaine temporel	29
III.4.5 Analyse dans le domaine fréquentiel	30
III.5 Modèles couramment utilisés	30
III.5.1 Modèles de type de domaine	30
III.5.2 Modèles à ressorts	31
III.5.3 Fonction d'impédance de la fondation	31
III.6 Formulation mathématique de l'ISS	32
III.7. Conclusion	34

Chapitre IV :

Formulation théorique des méthodes Éléments Finis et Éléments Spectraux

IV.1 Introduction	35
IV.2 Méthode des éléments finis	36
IV.2.1 Modèle physique	36
IV.2.2 Formulation éléments finis	38
IV.3 Méthode des éléments spectraux	41

IV.3.1 Transformée de Fourier discrète (DFT)	41
IV.3.2 Elément spectral pour les barres	42
IV.3.3 Elément spectral pour les poutres de Bernoulli-Euler	48
IV.4 Conclusion	53

Chapitre V : Résultats et discussions

V.1.Introduction	54
V.2 Cas 1 : Étude de l'interaction statique entre des poutres et des sols multicouches en utilisant une fondation élastique à deux paramètres	54
V.2.1 Validation et convergences	55
a) modèle avec interaction verticale	55
b) modèle avec interaction horizontale	57
V.2.2 Analyse de la poutre sur une base rigide	59
V.2.3 Influence des propriétés du sol sur la réponse de l'interaction	60
a) Influence de la rigidité du sol	60
b) Influence de la profondeur du sol	64
V.2.4 Influence de la couche de Ballast	65
Conclusion	68
V.3 Cas 2 : Etude dynamique de l'interaction sol-structure par la méthode des éléments spectraux	69
V.3.1 Validations et convergences	69
Exemple 1 : Poutre sans sol de fondation	69
Exemple 2 : Poutre en porte-à-faux sur ressort en translation	70
Exemple 3 : Poutre en porte-à-faux sur un ressort rotationnel	71
V.3.2 Poutre en béton sur fondation élastique	71
V.3.3 Effet de la longueur de la poutre	73
V.3.4 Effet des propriétés du sol	77
Conclusion	78
V.4 Cas 3 : Analyse modale de la poutre sur fondation élastique par la méthode des éléments spectraux	80

V.4.1 Poutre en porte-à-faux sur des ressorts en rotation	80
V.4.2 Poutre en porte-à-faux sur ressorts en translation et en rotation	82
V.4.3 Poutre en porte-à-faux sur ressorts transversaux dominants	83
V.4.4 Poutre en porte-à-faux sur des ressorts en rotation dominants	84
Conclusion	85
<i>Conclusion générale</i>	87
<i>Références bibliographiques</i>	91

Notations et Abréviations

b : Largeur de la poutre

$[C]$: Matrice d'amortissement

E_b : Module d'élasticité de la poutre

E_s : Module d'élasticité du sol

f : Fréquence de vibration

G : module de cisaillement du sol

h : Hauteur de la poutre

H : Hauteur du sol

I : Moment d'inertie

$[k]$: Matrice de rigidité

K_s : Rigidité verticale du sol de Winkler

K_r : Rigidité à la rotation

K_{eq} : Rigidité équivalente

K_h : Rigidité horizontale

K_v : Rigidité verticale

L : Longueur de la poutre

$[M]$: Matrice masse

$M(x, t)$: Moment fléchissant

$T(x, t)$: Effort tranchant

t : le temps

$\{u\}$: vecteur déplacement

$\{\ddot{u}\}$: vecteur accélération

u : déplacement horizontal

v : déplacement vertical

x : la position

α : Pulsation naturelle adimensionnelle

ν_b : Coefficient de Poisson de la poutre

ν_s : Coefficient de Poisson du sol

ρ : masse volumique

ω : Pulsation naturelle

$W(x, \omega)$: Déplacement vertical dans le domaine fréquentiel

Ω : Aire de la section

BEM : Boundary Element Method

DFT: Discrete Fourier Transform

DSM : Dynamic Stiffness Matrix

DTM: differential transform method

FFT : Fast Fourier Transform

FEM : Finite Element Method

IFFT: Inverse Fast Fourier Transform

SAM : Spectral Analysis Method

Liste des figures

Figure II.1 : Fondation de Filonenko – Borodich	12
Figure II.2 : Fondation de Hetenyi	13
Figure II.3 : Fondation de Pasternak	13
Figure II.4 : Fondation de Kerr	14
Figure III.1 : Illustration de l'interaction sol-structure	22
Figure III.2 : Effet de l'interaction cinématique sur les fondations profondes et superficielles.	23
Figure III.3 : Vibration de la fondation (a) mode de translation (b) mode de rotation.	25
Figure III.4 : L'analyse d'un (a) problème d'ISS peut être décomposée en (b) une analyse d'interaction cinématique et (c) une analyse d'interaction inertielle.	26
Figure III.5 : Approche de sous-structure d'un problème d'ISS utilisant la fonction d'impédance (Kramer et Stewart, 2004).	28
Figure III.6 : (a) vibration d'une structure excitée latéralement supportée par une fondation sur un demi-espace de sol élastique ; b) le demi-espace de sol est remplacé par des ressorts en translation et en rotation.	32
Figure III.7 : Modélisation de l'interaction sol-structure.	33
Figure IV.1 : (a) modèle physique. (b) modèle de Winkler.	36
Figure IV.2 : modèle utilisant une poutre ou une plaque.	37
Figure IV.3 : modèle avec couche de cisaillement.	37
Figure IV.4 : modèle utilisant une membrane tendue.	37
Figure IV.5 : modèle avec effet de cisaillement.	37
Figure IV.6 : éléments avec ressorts de cisaillement.	37
Figure IV.7 : Échantillonnage d'une fonction périodique $X(t)$ de période T à intervalle de temps égal Δt .	42
Figure IV.8 : Élément barre infinitésimal.	43
Figure IV.9 : Élément poutre infinitésimal.	48

Figure IV.10 : Modèle mécanique de la poutre.	52
Figure V.1 : Poutre sur un sol de fondation élastique.	55
Figure V.2 : Déplacement vertical le long de la poutre : (a) Méthode du maillage libre (Binesh 2012)	56
(b) La présente étude.	56
Figure V.3 : Déplacement horizontal le long des nœuds de l'interface poutre-sol de fondation	57
Figure V.4 : Poutre sur un sol de fondation élastique (Modèle avec des ressorts horizontaux et verticaux)	57
Figure V.5 : Champ de déplacement horizontal.	58
Figure V.6 : Champ de déplacement vertical.	59
Figure V.7 : Poutre sur une base rigide.	59
Figure V.8 : Champ de déplacement horizontal.	60
Figure V.9 : Champ de déplacement vertical.	60
Figure V.10 : Géométrie de la poutre et du sol de fondation.	61
Figure V.11 Champ de déplacement horizontal au niveau de l'interface.	62
Figure V.12 Champ de déplacement vertical au niveau de l'interface.	62
Figure V.13 : Déplacement horizontal de la poutre.	63
Figure V.14 : Déplacement vertical de la poutre.	63
Figure V.15 : Déplacements horizontaux des nœuds d'interface.	64
Figure V.16 Déplacements verticaux des nœuds d'interface.	64
Figure V.17 Couche de ballast.	65
Figure V.18 Déplacements horizontaux des nœuds de la poutre.	66
Figure V.19 Déplacements verticaux des nœuds de la poutre.	66
Figure V.20 Champ de déplacement horizontal.	67
Figure V.21 Champ de déplacement vertical.	67
Figure V.22 Poutre en acier inoxydable sur un ressort en translation.	70
Figure V.23 Poutre en acier inoxydable sur un ressort en rotation.	71
Figure V.24 Poutres sur des ressorts élastiques : (a) modèle de Winkler,	72
(b) schéma statique équivalent.	72
Figure V.25 Trois premiers modes de vibration : (a) Vibration en translation.	73
(b) Vibration en rotation.	73
Figure V.26 Poutre étudiée avec différentes longueurs.	73
Figure V.27 Effet de la longueur de la poutre sur les vibrations de translation.	75
Figure V.28 Effet de la longueur de la poutre sur les vibrations de rotation.	76
Figure V.29 Effet des propriétés du sol sur la vibration de la poutre.	78

Figure V.30 Poutre en porte-à-faux sur ressorts en translation.	80
Figure V.31 Les trois premiers modes de vibrations d'une poutre sur ressorts en translation.	
(a) Vibration en translation	81
(b) Vibration en rotation	81
Figure V.32 Poutre en porte-à-faux sur ressorts en translation et en rotation.	81
Figure V.33 Les trois premiers modes de vibrations d'une poutre sur ressorts en translation et en rotation.	
(a) Vibration en translation	82
(b) Vibration en rotation	82
Figure V.34 Les trois premiers modes de vibrations d'une poutre sur ressorts transversaux dominants pour $K_0=10 K_r$.	
(a) Vibration en translation	83
(b) Vibration en rotation	83
Figure V.35 Les trois premiers modes de vibration d'une poutre sur ressorts rotationnels dominants avec $K_r = 10 K_0$.	
(a) Vibration en translation	85
(b) Vibration en rotation	85

Liste des tableaux

Tableau IV.1 : Les fréquences des 5 premiers modes de vibration	47
Tableau V.1 : Comparaison des valeurs de α avec celles de la méthode DTM et de la solution exacte	69
Tableau V.2 : Propriétés mécaniques et géométriques de la poutre en acier inoxydable	70
Tableau V.3 : Trois premières fréquences de vibration par FEM et SEM	70
Tableau V.4 : Trois premières fréquences de vibration par FEM et SEM	71
Tableau V.5 : Propriétés mécaniques et géométriques de la poutre béton	72
Tableau. V.6 : Les trois premiers modes de vibrations par la FEM et la SEM	73
Tableau. V.7 : Les trois premiers modes de vibrations par la FEM et la SEM.	74
Tableau V.8 : Les trois premières fréquences de vibration pour différentes valeurs de la rigidité du sol	77
Tableau V.9 : Les trois premiers modes de vibrations d'une poutre sur ressorts en translation	80
Tableau V.10 : Les trois premiers modes de vibrations d'une poutre sur ressorts en translation et en rotation	82
Tableau V.11 : Fréquences des trois premiers modes de vibrations d'une poutre sur ressorts transversaux dominants	83
Tableau V.12 : Les trois premiers modes de vibrations d'une poutre sur ressorts en rotation dominants	84

ملخص

يتكون هذا العمل من محاكاة سلوك تفاعل تربة-هيكل باستخدام طريقة العناصر الطيفية (SEM). أولاً، قمنا بتحليل التفاعل الساكن بين الرافدة و التربة المتعددة الطبقات باستخدام أساس مرن ثنائي المعلمات باستخدام طريقة العناصر المنتهية. يفترض أن سلوك وسط التربة و الرافدة خطياً ومتجانساً ومتماثلاً. باستخدام معادلات طاقة التشوهات. يتم الأخذ بعين الاعتبار تشوهات القص لعنصر الرافدة والتربة. في هذه المقاربة، يتم تطوير مصفوفة الصلابة لكل مكون ودمجها في التحليل بالعناصر المنتهية. العديد من الأمثلة تم علاجها لإظهار فعالية المقاربة المقترحة وقدرة البرنامج الرقمي الذي تم تطويره. بعد ذلك، تم إجراء دراسة بارامترية لإبراز تأثير الخواص الميكانيكية للتربة على واجهة تلامس الهيكل مع التربة وعلى استجابات الرافدة وتأثير عمق التربة وطبقة الصابورة على استجابة واجهة التلامس و الرافدة نفسها. ثانيًا، قمنا بتحليل تفاعل التربة مع الهيكل باستخدام طريقة العناصر الطيفية. كما استخدمنا طريقة العناصر المنتهية (FEM) أيضاً، ولكن فقط لإثبات نجاعة طريقة SEM. تظهر النتائج العددية أن تقارب SEM سريع جداً مقارنةً بتقارب FEM. يتم حل مشكلة القيم الذاتية، ويتم جدولة الترددات الطبيعية للأشكال الثلاثة الأولى للاهتزاز. قمنا بإجراء تحليل نمطي مع وبدون وسط مرن. كما قمنا بدراسة بارامترية لسلوك الرافدة الخرسانية على الأساس المرن، وتأثير طول الرافدة، وخصائص التربة، والشروط الحدودية الغير الكلاسيكية. أخيراً، أظهرنا أن الاستجابة الديناميكية للحزمة على أساس مرن تتأثر تأثيراً شديداً بالصلابة الدورانية. تم الحصول على نتائج مختلفة وتم التعليق عليها.

الكلمات المفتاحية:

تفاعل تربة-رافدة ساكن، التربة المتعددة الطبقات، نموذج الأساس المرن ذو المعلمتين، طريقة العناصر المنتهية، الأساس المرن، طبقة الصابورة، خصائص التربة، الاهتزازات الحرة، طريقة العناصر الطيفية، التحليل الديناميكي، تفاعل تربة-هيكل.

Résumé

Ce travail consiste en la simulation du comportement de l'interaction sol-structure, en utilisant la méthode des éléments spectraux (SEM). Premièrement, nous avons procédé à l'analyse de l'interaction statique entre une poutre et un sol stratifié à l'aide d'une fondation élastique à deux paramètres en utilisant la méthode des éléments finis. Le comportement du milieu sol et de la poutre est supposé être linéaire, homogène et isotrope. En utilisant les expressions d'énergie de déformation, les déformations de cisaillement de l'élément poutre et du sol de fondation sont prises en compte. Dans cette approche, la matrice de rigidité de chaque composant est élaborée et intégrée dans l'analyse par éléments finis. Plusieurs exemples sont traités pour montrer l'efficacité de l'approche proposée et la capacité du programme numérique développé. Ensuite, une étude paramétrique est réalisée pour mettre en évidence l'influence des propriétés mécaniques du sol sur l'interface de contact sol-poutre et sur les réponses de la poutre, l'effet de la profondeur du sol, de la couche de ballast sur la réponse de l'interface et de la poutre elle-même. Deuxièmement, nous avons fait une analyse de l'interaction sol-structure par la méthode des éléments spectraux. Nous avons utilisé la méthode des éléments finis (FEM) aussi, mais seulement pour prouver la robustesse de la SEM. Les résultats numériques montrent que la convergence de la SEM est très rapide comparée à celle de la FEM. La résolution du problème aux valeurs propres est faite, les fréquences naturelles sont tabulées pour les trois premiers modes de vibration. Une analyse modale avec et sans milieu élastique est réalisée. Nous avons établi une étude paramétrique visant à étudier le comportement de la poutre en béton sur une fondation élastique, l'effet de la longueur de la poutre, l'effet des propriétés du sol et l'influence des conditions aux limites non classiques. Finalement, nous avons montré que la réponse dynamique de la poutre sur une fondation élastique est fortement affectée par la contribution des rigidités à la rotation. Divers résultats sont obtenus et commentés.

Mots clés :

Interaction sol-poutre statique, Sols multicouches, Modèle de la fondation élastique à deux paramètres, Méthode des éléments finis, Fondation élastique, Couche de ballast, Propriétés du sol, Vibrations libres, Méthode des éléments spectraux, Analyse dynamique, Interaction sol-structure.

Abstract

This work consists of the simulation of the behavior of the soil-structure interaction, using the spectral element method (SEM). First, we analyzed the static interaction between a beam and a stratified soil using a two-parameter elastic foundation with the finite element method. The behavior of the ground medium and of the beam is supposed to be linear, homogeneous and isotropic. Using the strain energy expressions, the shear strains of the beam element and the subgrade are taken into account. In this approach, the stiffness matrix of each component is developed and integrated into the finite element analysis. Several examples are treated to show the effectiveness of the proposed approach and the capacity of the digital program developed. Then, a parametric study is carried out to highlight the influence of the mechanical properties of the soil on the soil-beam contact interface and on the responses of the beam, the effect of the depth of the soil, of the ballast layer on the response of the interface and of the beam itself. Second, we made an analysis of the soil-structure interaction by the spectral element method. We used the Finite Element Method (FEM) too, but only to prove the robustness of the SEM. The numerical results show that the convergence of the SEM is very fast compared to that of the FEM. The resolution of the problem with the eigenvalues is made, the natural frequencies are tabulated for the first three modes of vibration. A modal analysis with and without elastic medium is realised. We established a parametric study to investigate the behavior of the concrete beam on an elastic foundation, the effect of the length of the beam, the effect of soil properties and the influence of non-classical boundary conditions. Finally, we have shown that the dynamic response of the beam on an elastic foundation is highly affected by the contribution of rotational springs. Various results are obtained and commented.

Keywords :

Static soil-beam interaction, Multi-layered soils, Model of the elastic foundation with two parameters, Finite element method, Elastic foundation, Ballast layer, Soil properties, Free vibrations, Spectral element method, Dynamic analysis, Soil-structure interaction.

Chapitre I

Introduction générale

I.1 Introduction

Les structures comme les bâtiments, les ponts, les pipelines, les échafaudages, les voies ferrées, les chaussées, les pistes d'aéroport... etc., sont directement en contact avec le sol. Ce qui engendre un transfert de charge à l'interface entre la structure et le sol de fondation. Ce phénomène doit être réellement pris en compte dans l'analyse sous charges statiques ou dynamiques. Dans le passé, les modèles classiques ne prenaient pas en compte les effets de l'interaction entre la structure et le sol de fondation. Mais, actuellement, ceci a reçu une attention particulière, qui a occupé un large éventail de problèmes d'ingénierie.

En effet, l'influence de l'interaction sol-structure sur les réponses dynamiques ou sismiques des structures et des constructions ne doit pas être négligée et plus précisément dans le cas des constructions à importance majeure telles que les centrales nucléaires, les hôpitaux, les bases pétrolières,...etc. Dans ce cas les fréquences naturelles et les amplitudes de vibrations influencent considérablement le comportement structurel. Ces vibrations sont causées par exemple par les véhicules lourds comme les bus, les camions, les tramways,...etc, comme elles peuvent être engendrées par les phénomènes naturels tels que les séismes.

De nombreuses études ont été réalisées pour analyser les déflexions statiques, les réponses dynamiques, et la stabilité des poutres reposant sur des fondations à comportement élastique ou viscoélastique. L'un des problèmes à résoudre est le calcul de la réponse de la structure et du sol à la fois. L'analyse dynamique de l'interaction sol structure (ISS) est une tâche très compliquée, en raison d'une part du comportement complexe du sol et d'autre part de l'approche dynamique elle-même qui est réellement fastidieuse. L'innovation connue dans le domaine des programmes numériques d'une part et le développement des méthodes numériques d'autre part, ont apporté une aide considérable pour que les modèles numériques puissent tenir compte du phénomène de l'ISS. Actuellement, les modèles numériques ne négligent pas la contribution de ce phénomène dans l'analyse et la conception des structures fondées sur un sol.

Les études en dynamique des structures sont considérées comme étant essentielles car elles reflètent au mieux le comportement réel des structures, c'est pour cela que, le comportement des structures sous sollicitations dynamiques doit être bien analysé. Les structures étant fondées sur des milieux continus déformables par lesquels sont transmises des sollicitations dynamiques, il

s'avère en conséquence essentiel de connaître le fonctionnement de l'ensemble du système sol-structure. En effet, non seulement la nature des sols a une influence sur le comportement des structures, mais les structures mises en mouvement induisent aussi des charges supplémentaires dans les sols qui modifieront à leur tour les composantes des sollicitations.

Auparavant, l'analyse des structures était basée sur l'hypothèse que la structure était encastrée au sol. En réalité, la structure interagit avec le sol environnant, c'est pour cela qu'il est nécessaire de tenir compte de cette interaction, en particulier dans le cas de charge dynamique.

Dans le cas où la structure repose sur un massif de sol souple, dont la rigidité est faible, des déplacements assez importants apparaissent. Ceci indique que les propriétés du sol ont un effet significatif sur le comportement dynamique de la structure. De plus, le comportement du sol peut être modifié par la présence de la structure. En effet, le comportement du sol en champ libre peut différer significativement de celui en présence de la structure. L'influence de la structure sur le comportement du sol dépend fortement du contraste de leurs rigidités. Une structure encastrée dans un rocher par exemple n'aura aucun effet sur le comportement du sol en champ libre. Etant donné que la rigidité du rocher est infiniment grande, l'insertion de la structure dans le rocher ne modifie pratiquement pas la rigidité de l'ensemble sol-structure. De même, les efforts inertiels générés par la masse de la structure n'ont aucun effet sur le rocher très rigide. Par contre, pour une structure reposant sur un massif de sol plus souple, nous distinguons la notion d'interaction cinématique et d'interaction inertielle :

- L'interaction cinématique se traduit par la différence entre le mouvement sismique en champ libre et celui dans un champ dont l'excavation et l'inclusion de la fondation ont changé les caractéristiques. Elle ne résulte que de la différence de raideur entre le sol et la fondation, qui l'empêche de suivre les mouvements imposés par le sol.
- L'interaction inertielle provient des efforts d'inertie engendrés par la masse de la structure à sa base et donc dans le sol sous effet du mouvement imposé à la fondation.

La méthode des éléments finis (FEM) est communément utilisée pour résoudre les problèmes d'interaction sol-structure (ISS), le champ de déplacement de chaque élément fini est donné sous forme d'un polynôme. La précision des résultats dépend de la taille des éléments finis utilisés dans le maillage, il faut donc augmenter le nombre des éléments, ce qui nécessite plus de temps de calcul et plus d'effort pour résoudre le problème. Dans l'analyse dynamique, le nombre des éléments finis requis est plus important que dans l'analyse statique. La taille des

éléments finis est également influencée par la fréquence la plus élevée dans l'analyse. Plus la fréquence est élevée, plus le nombre des éléments finis nécessaire dans l'analyse est important.

Comme une alternative à la FEM en analyse dynamique, et pour surmonter ses inconvénients, la méthode des éléments spectraux (SEM) est utilisée pour analyser les problèmes de vibration. Pour les éléments unidimensionnels, comme les poutres et les barres le champ de déplacement de l'élément spectral est la solution exacte de l'équation différentielle de mouvement. Par conséquent, un seul élément peut représenter exactement le comportement dynamique d'un élément de la structure à n'importe quelle fréquence. La fonction de forme et les matrices de rigidité dynamique de l'élément spectral dépendent de la fréquence. Par conséquent, l'analyse de la réponse dynamique doit être effectuée dans le domaine fréquentiel.

Dans la méthode des éléments spectraux, un seul élément peut représenter exactement le comportement dynamique d'une structure, indépendamment de la fréquence de vibration.

En utilisant des éléments spectraux, le nombre des éléments, c'est-à-dire le nombre d'inconnues, est considérablement réduit et la précision des résultats numériques est augmentée.

I.2 Contenu de la thèse

La présente thèse est composée de cinq chapitres, et d'une conclusion.

- ✓ Le premier chapitre de cette étude comprend quelques généralités sur le concept de l'interaction sol-structure.
- ✓ Dans le deuxième chapitre, on présente une étude bibliographique sur les travaux antérieurs utilisant différentes méthodes d'analyse et de recherches dans le domaine de l'interaction sol-structure.
- ✓ La modélisation du phénomène de l'interaction sol-structure fait l'objet du troisième chapitre.
- ✓ Le quatrième chapitre expose une formulation de la méthode spectrale et de la méthode des éléments finis.
- ✓ Dans le cinquième chapitre, on présente les résultats des simulations en utilisant la méthode des éléments finis et celle des éléments spectraux.
- ✓ Finalement, on termine par une conclusion générale.

Chapitre II

Étude bibliographique

II.1 Introduction :

Dans le domaine de l'ingénierie, les caractéristiques dynamiques d'une structure sont d'une grande importance et nécessitent une attention considérable pour atteindre plus de précision. Dans le monde actuel du calcul numérique, les chercheurs se penchent toujours vers cette précision qui ne peut être obtenue qu'avec un coût de calcul onéreux. La méthode des éléments finis (FEM) a pris sa place en tant qu'outil numérique compétant pour analyser la dynamique des structures. Bien qu'elle puisse gérer efficacement les problèmes, elle est limitée aux modes d'onde de basses fréquences. Lorsque la structure vibre à haute fréquence, la méthode des éléments finis utilise un très grand nombre d'éléments pour capturer toutes les fréquences nécessaires des modes supérieurs. La disponibilité des logiciels informatiques a permis aux chercheurs de gérer les expressions algébriques fastidieuses avec moins d'effort.

La solution exacte des équations différentielles gouvernantes pour les problèmes de vibration avec des modes de vibration plus élevés peut être formée en utilisant les fonctions de forme qui dépendent de la fréquence. Ainsi, en utilisant ces fonctions de forme dépendantes de la fréquence, la matrice de rigidité qui dépend elle aussi de la fréquence, peut être formulée et elle est connue sous le nom de "Dynamic Stiffness Matrix" (DSM). Une fois cette matrice de rigidité dynamique pour un élément est formulée, la matrice de rigidité dynamique globale est obtenue en suivant la procédure similaire à celle de la méthode des éléments finis (FEM). Le grand avantage d'une telle matrice est que des fréquences encore plus élevées de la structure peuvent être obtenues en considérant seulement quelques éléments et minimisant ainsi le coût de calcul.

II.1.1 Méthode de rigidité dynamique (DSM)

Les travaux de Kolousek datant de 1941 sont probablement les premiers à dériver la matrice de rigidité dynamique de la poutre de Bernoulli-Euler. Przemieniecki (1968) a introduit la formulation des matrices de masse et de rigidité en fonction de la fréquence pour les barres et les poutres. Contrairement aux matrices classiques de masse et de rigidité des éléments finis, qui aboutissent aux problèmes propres linéaires, les matrices de rigidité dynamique exactes conduisent à des problèmes propres, dont les coefficients sont des fonctions de la fréquence.

Ainsi, l'un des inconvénients de la méthode de rigidité dynamique est qu'il n'est pas facile de calculer toutes les fréquences naturelles avec précision.

En 1971, cette difficulté a été résolue par Wittrick et Williams par le développement d'un Algorithme célèbre de Wittrick-Williams pour le calcul automatique des fréquences propres. La matrice de rigidité dynamique exacte est utilisée dans la DSM. La matrice de rigidité dynamique exacte est formulée dans le domaine fréquentiel en utilisant des fonctions de forme dynamiques exactes dérivées des solutions d'onde exactes des équations différentielles gouvernantes. Pour obtenir les solutions d'ondes exactes dans le domaine fréquentiel, les équations différentielles gouvernantes dans le domaine temporel sont transformées dans le domaine fréquentiel en supposant des solutions harmoniques à une seule fréquence. En conséquence, la matrice de rigidité dynamique exacte est dépendante de la fréquence et peut être considérée comme un mélange d'inertie, de rigidité et de propriétés d'amortissement d'un élément de structure. La matrice de rigidité dynamique relie les variables forces harmoniques aux déplacements harmoniques au niveau des nœuds d'un élément de la structure.

II.1.2 Méthode d'analyse spectrale (SAM)

Les méthodes de résolution des équations différentielles gouvernantes formulées dans le domaine temporel peuvent être classées en deux catégories principales. La première est constituée des méthodes utilisant le domaine temporel, telles que les méthodes d'intégration numérique et la méthode d'analyse modale, qui est couramment utilisée pour l'analyse des vibrations. La deuxième comprend les méthodes dans le domaine de fréquence. La méthode d'analyse spectrale (SAM) représente une de ces méthodes.

Dans la SAM, les solutions des équations différentielles gouvernantes sont représentées par la superposition d'un nombre infini de modes d'ondes de fréquences différentes. Ce qui correspond à la transformation de Fourier continue des solutions. Cette approche consiste à déterminer un ensemble infini de composantes spectrales dans le domaine fréquentiel et à effectuer la transformée de Fourier inverse pour reconstruire l'historique temporel des solutions. La transformée de Fourier continue n'est réalisable que lorsque la fonction à transformer est mathématiquement simple, de plus la transformée inverse représente le principal obstacle dans la plupart des cas pratiques. Au lieu d'utiliser la transformée de Fourier continue, la transformée de Fourier discrète (DFT) est une autre alternative qui est largement utilisée.

La DFT est une approximation de la transformée de Fourier continue. Contrairement à la transformée de Fourier continue, la solution est représentée par un nombre fini de modes d'onde à fréquences discrètes. Nous pouvons utiliser l'algorithme de la transformée de Fourier rapide (FFT) pour calculer la DFT. L'utilisation de l'algorithme FFT permet de prendre en compte efficacement autant de composantes spectrales que nécessaire jusqu'à la fréquence d'intérêt la plus élevée.

II.1.3 Méthode des éléments spectraux (SEM)

La méthode des éléments spectraux (SEM) peut être considérée comme la combinaison des caractéristiques des méthodes conventionnelles FEM, DSM et SAM.

1. Caractéristiques de la FEM : Maillage et assemblage des éléments finis.
2. Caractéristiques de la DSM : Précision de la matrice de rigidité dynamique formulée en termes de nombre minimal de DDL.
3. Caractéristiques principales de la SAM : Superposition des modes d'onde via la transformée de Fourier discrète (DFT) et l'algorithme FFT.

Dans la SEM, les matrices de rigidité dynamique exactes sont utilisées comme matrices de rigidité d'élément pour l'élément fini dans une structure. Pour formuler une matrice de rigidité dynamique exacte pour la DSM classique, les réponses dynamiques d'une structure sont généralement supposées être les solutions harmoniques d'une seule fréquence. Pour la méthode des éléments spectraux (SEM), les réponses dynamiques sont supposées être la superposition d'un nombre fini de modes d'onde d'une fréquence discrète différente basée sur la théorie de la DFT.

La SEM est formulée en rigidité. Les éléments spectraux peuvent être assemblés pour former la matrice du système global pour l'ensemble du domaine du problème en utilisant exactement les mêmes techniques d'assemblage que celles utilisées dans les modèles classiques. L'équation globale de la matrice système est ensuite résolue pour les degrés de liberté nodaux spectraux globaux. L'algorithme inverse-FFT (IFFT) est utilisé pour calculer l'historique de temps des réponses dynamiques.

II.2 Revue de littérature

Dans la littérature, de nombreux chercheurs ont formulé la matrice de rigidité dynamique (DSM) pour résoudre les problèmes de vibration des barres, des poutres en utilisant les méthodes citées ci-dessus. Ils ont dérivé des expressions algébriques très fastidieuses, mais les fréquences naturelles des problèmes structurels sont limitées aux seules premières fréquences de mode inférieures. Les modes naturels les plus élevés des fréquences de ces structures sont très rares dans la littérature.

Kolousek V. (1941) est le premier à dériver la matrice de rigidité dynamique pour la poutre de Bernoulli-Euler.

Przemieniecki J.S. (1968) a présenté la formulation des matrices de masse et de rigidité en fonction de la fréquence pour les éléments barres et poutres.

L'algorithme de Wittrick-Williams (1971) a amélioré l'applicabilité de la matrice de rigidité dynamique pour le calcul automatique des fréquences propres.

Narayanan, G.V. et Beskos D.E. (1978) ont introduit pour la première fois le concept fondamental de la méthode des éléments spectraux. Ils ont dérivé une matrice de rigidité dynamique exacte pour l'élément de poutre et a utilisé la méthode FFT pour l'analyse dynamique des cadres plans.

Banerjee, Guo et Howson(1996) ont présenté une matrice de rigidité dynamique exacte d'une poutre travaillant à la flexion-torsion. Le travail présenté dans leur article étend l'approche en exprimant les équations gouvernantes sous la forme d'une matrice de rigidité d'élément dynamique. Une nouvelle procédure est présentée, basée sur l'algorithme de Wittrick-Williams (1978) pour la convergence avec certitude sur toute fréquence propre requise.

La méthode des éléments spectraux est une technique des éléments finis d'ordre élevé qui combine la flexibilité géométrique des éléments finis avec la grande précision des méthodes spectrales. Elle utilise plusieurs propriétés favorables au calcul, telles que les produits tensoriels, des matrices de masse naturellement diagonales et de plus elle est très adéquate aux implémentations dans un système informatique parallèle. En raison de ces avantages, la méthode des éléments spectraux est une alternative viable aux solutions actuellement populaires des méthodes telles que les volumes finis et les éléments finis, si des solutions précises aux problèmes courants sont recherchées.

Des matrices de rigidité dynamique précises ont été développées principalement pour les structures 1-D, y compris les poutres de Timoshenko avec ou sans force axiale, les poutres de Rayleigh-Timoshenko et les poutres composites.

Banerjee et Williams (1996) ont présenté la matrice exacte de rigidité dynamique pour une poutre composite. Cela inclut l'effet de la déformation en cisaillement et de l'inertie rotatoire c'est-à-dire qu'il s'agit de poutre de Timoshenko composite. La théorie prend en compte le couplage entre la déformation en flexion et en torsion qui se produit généralement pour ces poutres en raison de la nature anisotrope des composites fibreux.

Chandrashekhara et al. (2003) et Abramovich et Livshits (1994) ont examiné la vibration libre des poutres composites de Timoshenko soumise à la flexion, mais sans inclure le couplage entre les déformations en flexion et en torsion. En revanche, Teoh et Huang (1977) et Teh et Huang (1980) ont inclus ce couplage dans leur investigation.

Abramovich (1992) a présenté les solutions exactes pour des poutres composites stratifiées symétriquement avec dix conditions aux limites différentes, où la déformation par cisaillement et l'inertie rotative ont été incluses dans l'analyse.

Banerjee (2000) a effectué l'analyse de vibration libre de poutres composites de Timoshenko soumises à une charge axiale en utilisant la méthode de la matrice de rigidité dynamique avec les effets de la force axiale, de la déformation en cisaillement, de l'inertie rotative et du couplage entre la flexion et les déformations en torsion prises en compte.

Banerjee (2001) a développé une matrice de rigidité dynamique exacte qui a ensuite été utilisée pour l'analyse vibratoire d'une poutre torsadée dont les déplacements en flexion sont couplés dans les deux plans.

D'abord, les équations différentielles qui régissent le mouvement de la poutre torsadée soumise à une vibration naturelle libre sont dérivées du principe de Hamilton. Ensuite, la solution générale des équations est obtenue lorsque le mouvement oscillatoire de la poutre est harmonique. La matrice de rigidité dynamique résultante est utilisée avec l'algorithme de Wittrick-Williams pour calculer les fréquences propres et les formes des modes de la poutre torsadée avec la condition de l'extrémité en porte-à-faux.

Fiberg (1983) a présenté une matrice de rigidité d'élément dynamique exacte couplée.

Banerjee (2000) a mis au point une matrice de rigidité dynamique exacte pour une poutre de Timoshenko torsadée afin d'examiner ses caractéristiques de vibrations libres. D'abord, les

équations différentielles qui régissent le mouvement et les conditions aux limites naturelles associées de la poutre de Timoshenko torsadée soumis à une vibration naturelle libre sont dérivées du principe de Hamilton.

L'inclusion d'une distance donnée ainsi que les effets de la déformation par cisaillement et de l'inertie rotatoire donnent lieu, en vibration libre, à quatre équations différentielles partielles de second ordre couplées impliquant des déplacements en flexion et des rotations en flexion dans deux plans. Pour l'oscillation harmonique, ces quatre équations différentielles partielles sont combinées en une équation différentielle ordinaire du huitième ordre, qui est identiquement satisfaite par toutes les composantes des déplacements en flexion et des rotations en flexion.

Banerjee et Williams (1996) ont déduit les expressions analytiques de l'élément de matrice de rigidité dynamique de la poutre de Timoshenko uniforme soumise à la torsion couplée à la flexion dans un sens exact, en résolvant les équations différentielles du mouvement de l'élément.

Banerjee et Fisher (1992) ont présenté des expressions analytiques de la matrice de rigidité dynamique pour l'élément en flexion-torsion couplées d'une poutre uniforme chargée axialement.

Banerjee (2004) a présenté, à partir des équations différentielles qui régissent le mouvement en vibration libre, la matrice de rigidité dynamique d'une poutre de type Bernoulli-Euler en rotation uniforme utilisant la méthode de résolution de Frobenius en séries de puissances. La dérivation comprend la présence d'une force axiale à l'extrémité extérieure de la poutre en plus de l'existence de la force centrifuge habituelle résultant du mouvement de rotation. Cela permet l'assemblage général de matrices de rigidité dynamique de plusieurs éléments, de sorte qu'une poutre rotative non uniforme (ou conique) puisse être analysée pour déterminer ses caractéristiques de vibration libre en l'idéalisant comme un assemblage de nombreuses poutres rotatives uniformes.

Gopalakrishnan et Doyle (1994) ont formulé un élément spectral pour une poutre de sections variables afin d'analyser la propagation des ondes dans les guides d'ondes connectés.

Rosen (1991) a présenté le comportement structurel et dynamique des barres et des poutres tendues.

Capron et Williams (1988) ont présenté des coefficients de rigidité dynamique exacts pour un élément de Timoshenko à charge axiale incorporé dans un milieu élastique et ont montré comment les utiliser dans une théorie générale pour la recherche des fréquences propres des

cadres plans ou spatiaux. L'élément est considéré comme ayant une répartition uniforme de la masse et de la rigidité tient éventuellement compte des effets séparés ou combinés de la charge axiale, de l'inertie rotatoire et de la déflexion en cisaillement. Les réponses axiales, en torsion et en flexion sont supposées être découplées, comme cela se produit pour les sections transversales à double symétrie.

Banerjee (1997) a exposé une théorie générale pour développer la matrice de rigidité dynamique d'un élément structural. Il a montré que des économies substantielles de temps de calcul pouvaient être réalisées en utilisant des expressions analytiques explicites pour les éléments de la matrice de rigidité dynamique au lieu des méthodes numériques. De telles expressions peuvent être dérivées à l'aide du calcul symbolique.

En 1985, Banerjee et Williams ont utilisé la théorie de Bernoulli-Euler et les fonctions de Bessel pour obtenir une expression explicite de la rigidité exacte de la déformation axiale, de torsion et de flexion d'une poutre effilée axialement.

Les termes couplés de la matrice de rigidité dynamique torsion-torsion d'un élément de poutre Timoshenko uniforme chargé axialement sont dérivés en résolvant les équations différentielles qui régissent le mouvement de l'élément, par Banerjee et Williams (1996).

Lee (2009) a présenté la méthode des éléments spectraux et ses diverses applications dans la dynamique des structures.

Chakraborty et Gopalakrishnan (2003) ont appliqué des éléments finis formulés spectralement à l'analyse de la propagation des ondes dans des poutres. Howson et Zare (2005) ont formulé une matrice de rigidité dynamique exacte pour la vibration en flexion de poutres sandwich à trois couches.

Rizzi SA et Doyle FJ (1992) ont principalement appliqué la SEM à la propagation des ondes dans les structures. On trouvera une liste complète des travaux de Doyle FJ., ses collègues et d'autres chercheurs dans le livre de Doyle(1997).

II.3 Poutres sur fondation élastiques

II.3.1 Introduction

On distingue deux types de fondations, les fondations superficielles et les fondations profondes. Les fondations superficielles ont généralement la forme de poutres ou de plaques, et

transmettent directement le chargement de la superstructure au sol en surface. D'autre part, les fondations profondes transmettent les charges au substratum de sol qui se trouve à une grande profondeur de la surface. Bien que ces fondations supportent des charges plus importantes, elles sont malheureusement plus onéreuses. Donc, les fondations peu profondes sont toujours plus populaires. Dans le but d'améliorer les systèmes de fondations peu profondes, de nombreux efforts ont été déployés pour améliorer la conception et l'analyse de celles-ci et des recherches avancées sur la modélisation du milieu sol et de l'action de l'interaction entre le sol et la fondation. Par conséquent, un examen de l'état de l'art de la technique utilisée dans ce domaine, sera certainement utile pour les chercheurs dans la stratégie de recherche et les ingénieurs dans la conception de leur système de fondation à une telle demande. Dans la section suivante, le développement de la modélisation du milieu, différentes approches analytiques et numériques ainsi que des méthodes semi-numériques, pour l'analyse des poutres et des plaques sur fondations élastiques sont examinées. L'étude se penchera sur l'analyse statique et le sol sera supposé se comporter comme un matériau élastique. L'hypothèse d'élasticité n'est pas irréaliste car la plupart des structures se comportent de manière élastique pendant leur état de service.

II.3.2 Modèles d'interaction sol-fondation

La principale difficulté dans l'analyse de l'interaction sol-fondation réside dans la détermination de la pression de contact. À proprement parler, tous les modèles constitutifs peuvent être utilisés pour simuler l'action du milieu du sol. Néanmoins, certains modèles sont si compliqués qu'ils trouvent des applications pratiques limitées. Par conséquent, les modèles simples mais suffisamment précis sont toujours populaires pour les chercheurs et les ingénieurs. Ils comprennent le modèle de pression linéaire, le modèle de Winkler, le modèle à deux paramètres ainsi que le modèle de milieu continu élastique.

II.3.2.1 Modèle de pression linéaire

Une poutre courte reposant sur une fondation élastique peut être traitée comme une semelle rigide (Selvadurai APS (1979)). Sous l'action d'une charge symétrique, la pression de contact sous ce type de fondation est uniforme. Pour les autres charges de contact, la pression de contact variera linéairement et elle peut être déterminée en considérant l'équilibre du système. De même, on peut supposer que la pression de contact agissant sous une plaque rigide reposant sur une base élastique varie linéairement dans les deux sens.

II.3.2.2 Modèle de WINKLER

Dans le modèle de Winkler (1867), la pression de contact en tout point est supposée être proportionnelle au tassement du sol à ce point et indépendante de la pente en d'autres endroits. Mathématiquement, ceci peut être exprimé comme suit :

$$q(x, y) = kw(x, y) \quad (\text{II.1})$$

où $q(x, y)$ est la pression de contact, $w(x, y)$ est la flèche et k est la constante de proportionnalité, appelée module de réaction du sol.

Physiquement, le modèle de Winkler peut être considéré comme une idéalisation du milieu sol par un certain nombre de ressorts mutuellement indépendants. Ce modèle est simple, mais son application devrait être limitée aux sols non cohésifs dans lesquels l'interaction l'action des éléments de sol n'est pas significative.

II.3.2.3 Modèles élastiques à deux paramètres

Étant donné qu'en réalité, il existe une interaction latérale entre les éléments de sol, le modèle de Winkler ne représente pas au mieux le comportement du sol au niveau de l'interface.

Pour remédier à cette lacune, plusieurs modèles à deux paramètres ont été proposés permettant de tenir compte de cette interaction horizontale entre les ressorts de Winkler. Parmi ces modèles, on peut citer :

a) Le modèle de Filonenko – Borodich (1945)

La figure II.1 montre la représentation physique du modèle de la fondation de Filonenko – Borodich. Selon ce modèle, la connectivité des ressorts du modèle de Winkler est obtenue grâce à une fine membrane élastique soumise à une tension constante T . Cette membrane est fixée aux extrémités supérieures des ressorts.

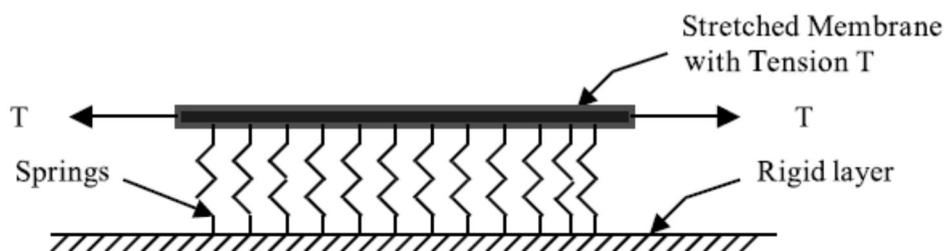


Figure II.1 : Fondation de Filonenko – Borodich

Ainsi, la réponse dans ce modèle est exprimée mathématiquement comme suit :

$$q(x, y) = kw(x, y) - T\nabla^2 w(x, y) \quad (\text{II.2})$$

Où ∇^2 est l'opérateur différentiel de Laplace en coordonnées cartésiennes rectangulaires et T est une constante représentant l'action de la tension d'une membrane élastique mince.

b) Le modèle de Hetenyi (1946)

Dans ce modèle, l'interaction entre les ressorts discrets est accomplie en incorporant une poutre élastique ou une plaque élastique, qui ne subit qu'une déformation en flexion, comme le montre la figure II.2.

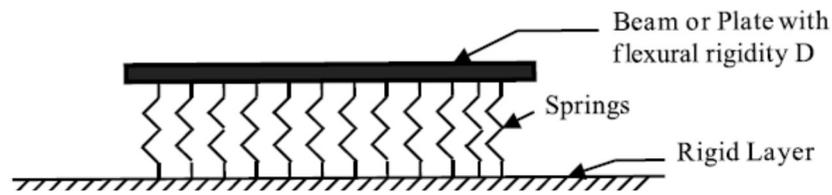


Figure II.2 : Fondation de Hetenyi

Ainsi, la relation force-déplacement devient :

$$q(x, y) = kw(x, y) - D\nabla^4 w(x, y) \quad (\text{II.3})$$

Où : D est la rigidité à la flexion de la plaque élastique.

c) Le modèle de Pasternak(1954)

La figure II.3 montre le modèle de Pasternak. Dans ce cas, les ressorts verticaux sont reliés par une couche de cisaillement.

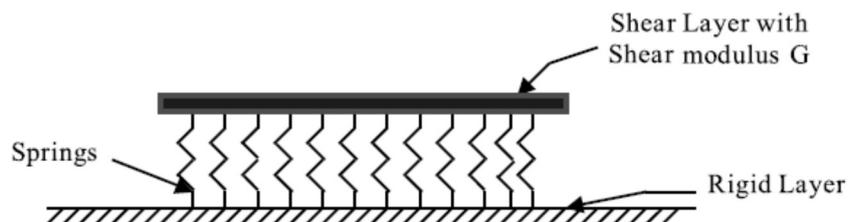


Figure II.3 : Fondation de Pasternak

Ainsi, la réponse du modèle de Pasternak est exprimée comme suit :

$$q(x, y) = kw(x, y) - G_p \nabla^2 w(x, y) \quad (\text{II.4})$$

Où : G_p est le paramètre d'interaction latérale ou module de cisaillement.

Physiquement, ce paramètre représente l'interaction due à l'action du cisaillement entre les éléments de ressort. On peut montrer facilement que l'équation (II.4) est identique à l'équation (II.2), il suffit de remplacer la tension T par le module de cisaillement G_p .

d) Le modèle de Kerr(1964)

Une couche de cisaillement est introduite dans la fondation de Winkler et les constantes des ressorts au-dessus et en dessous de cette couche sont supposées être différentes dans ce modèle. La figure II.4 montre la représentation physique de ce modèle mécanique.

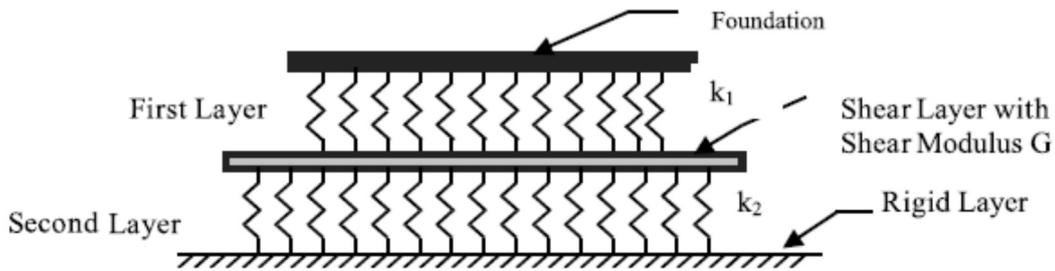


Figure II.4 : Fondation de Kerr.

L'équation mathématique pour ce modèle peut être exprimée comme suit :

$$\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) p = \frac{G}{k_1} \nabla^2 p + k_2 w - G \nabla^2 w \quad (\text{II.5})$$

Où k_1 est la constante du ressort de la première couche; k_2 est la constante du ressort de la deuxième couche; w est le déplacement vertical de la première couche.

En outre, plusieurs autres modèles ont été proposés tels que le modèle de Reissner (1958) et celui de Vlasov et Leentiev(1966)...etc. Une caractéristique commune à ces modèles est qu'un paramètre, en plus du paramètre de la réaction du sol, est utilisé pour simuler l'action du sol. L'introduction du deuxième paramètre permet d'améliorer la précision de la simulation de l'interaction sol-structure.

II.3.2.4 Modèles continus élastiques

Le milieu sol a souvent été idéalisé comme étant un solide élastique continu. Le travail initial sur le milieu continu représentant le massif de sol est issu de celui de Boussinesq (1885), qui a analysé le problème d'un demi-espace élastique linéaire semi-infini homogène isotrope soumis à une force concentrée agissant perpendiculairement à la surface. Cette solution de base a ensuite été utilisée comme solution fondamentale pour d'autres problèmes.

En outre, des solutions pour d'autres modèles de milieux de sol ont également été proposées. Elles incluent le milieu continu élastique anisotrope, le milieu continu élastique non homogène et le milieu élastique en multicouches.

a) Demi-espace élastique isotrope

La relation entre la contrainte et le déplacement pour un demi-espace élastique isotrope due à l'action d'une force normale concentrée P sur sa surface a été dérivée pour la première fois par Boussinesq(1885). Le déplacement en surface dans la direction verticale est donné par la relation :

$$w(r, 0) = \frac{P(1-\nu_s)}{2\pi G_s r} \quad (\text{II.5})$$

Où G_s et ν_s sont respectivement le module de cisaillement et le coefficient de Poisson du matériau élastique (demi-espace).

b) Demi-espace élastique non homogène

Dans de nombreux cas de dépôts de sol par exemple, on constate que la rigidité du sol augmente avec la profondeur en raison de la pression croissante des terrains surchargés. Par conséquent, le module de Young du modèle de sol non homogène peut être approché par la relation suivante (Stark RF. et Booker JR. (1997)):

$$E(z) = m_E z^\alpha \quad (0 < \alpha < 1) \quad (\text{II.6})$$

Où : m_E est une constante, elle est égale au module de Young lorsque $z = l$,

et α est l'indice de non-homogénéité. Lorsque $\alpha = 1$, le module augmentera linéairement avec la profondeur et ce sol est appelé un sol de Gibson(1967).

Pour une charge ponctuelle d'intensité P agissant sur la surface du demi-espace non homogène, le tassement vertical peut être calculé par l'expression suivante (Booker JR et al. (1985)) :

$$W = \frac{PB}{m_E r^{1+\alpha}} \quad (\text{II.7})$$

c) Fondation transversalement anisotrope

Selon Nayak (1973), le tassement en surface w dû à une charge ponctuelle P agissant sur un sol transversalement anisotrope peut être obtenu par la relation :

$$W = \frac{P}{r} \left(\frac{1-\mu^2}{\pi E_z} \right) I_w \quad (\text{II.8})$$

d) Supports élastiques multicouches

En appliquant la transformation de Hankel, Wang Y. et Ishikawa I.(2001) ont obtenu la solution pour les sols stratifiés, une approche similaire a été également adoptée par Yin et al.(2001) selon l'expression suivante :

$$w(r, 0) = \frac{P}{2\pi} \int_0^\infty \frac{B_{21}B_{13}-B_{11}B_{23}}{B_{11}B_2-B_{21}B_{12}} \xi J_0(\xi, r) d\xi \quad (\text{II.9})$$

Où : r est la distance entre le point où l'on cherche le tassement et le point de chargement ; ξ est le paramètre d'intégration dans la transformée de Hankel; B_{ij} sont les éléments de la matrice des déplacements et contraintes transformés. Une relation de transfert de la matrice a ensuite été établie de sorte que les réactions de la fondation agissant sur les plaques sont exprimées en termes de déplacements de la surface de la fondation. Les détails sont donnés par Wang YH, Tham LG, Tsui Y et Yue ZQ(2003). L'équation (II.9) ne peut pas être intégrée facilement et le recours à l'intégration numérique devient nécessaire.

II.3.2.5 Interaction sol structure en utilisant une fondation élastique à deux paramètres

Le concept de poutre sur sol de fondation élastique a été largement utilisé dans différents domaines et dans de nombreuses applications dans les pratiques d'ingénierie, tels que les fondations filantes, les voies ferrées, les constructions, les barrages, les pistes d'aéroport, les chaussées d'autoroutes, les pipelines reposant sur le sol, l'aérospatiale, pétrole, géotechnique, et génie civil...(Barber JR (2010)).

La mécanique des sols présente un comportement très complexe des fondations en raison de l'hétérogénéité, de la composition physique et de la présence d'imperfections et de pores dans les sols. Différentes méthodes d'analyse et de recherches dans le domaine de l'interaction sol-structure ont été illustrées par Prakash et al. (2016).

La quantification de l'interaction sol-structure est un défi jusqu'à présent. La modélisation du contact entre la structure et le sol de fondation est une tâche primordiale dans cette analyse. Les solutions analytiques sont limitées par rapport aux études numériques utilisant un modèle de sol de fondation à deux paramètres pour les poutres reposant sur un demi-espace élastique isotrope ou anisotrope (Johnson 1985, Kachanov et al. 2003). Dans le domaine numérique, divers modèles ont été développés pour modéliser les sols de fondation. Ils sont classés en trois catégories : (1) les modèles continus, (2) les modèles mixtes et (3) les modèles à ressorts.

Dans le concept de la mécanique des milieux continus, le demi-espace sol est régi par une loi de comportement linéaire, isotrope et élastique (Irgens, 1980). La solution pour un milieu continu simplifié utilisant l'idéalisation par des éléments finis a été développée par Reissner (1967). Le milieu continu peut être analysé avec de nombreuses méthodes numériques, telles que la méthode des éléments finis (FEM), la méthode des éléments aux frontières (BEM) ou des méthodes combinées FEM et BEM, qui conviennent à l'analyse de l'interaction sol-structure. En particulier, la FEM est bien connue et largement utilisée dans de nombreuses approches pour étudier le comportement d'interaction sol-structure et la BEM présente de nombreux avantages dans le domaine de la modélisation des espaces infinis et semi-infinis (Bolteus 1984 ; Tezzon et al. 2015).

En raison de la complexité des problèmes d'interaction sol-structure, les solutions analytiques sont rares et le recours à des approches numériques est une alternative souhaitée pour la résolution de tels problèmes (Dinev 2012 ; Hassan et Doha 2015 ; Ai et Cai 2016). La méthode des éléments finis (FEM) reste populaire dans ce domaine (Bourgeois et al. 2012 ; Su et Li 2013), mais elle présente des inconvénients par rapport à la méthode des éléments de frontière (BEM) et à la méthode des éléments spectraux (SEM) (Omolofe 2013; Mokhatari et al. 2016) qui utilisent la modélisation par des frontières absorbantes. La FEM requiert la discrétisation du domaine en un grand nombre d'éléments finis, mais le problème peut être résolu avec la BEM où seule la frontière des domaines est discrétisée (Padron et al. 2011 ; Ai et Cheng 2013 ; Ribeiro et Paiva 2014).

La poutre utilisant le modèle de fondation de Winkler (1867) est utilisée dans plusieurs problèmes pratiques. Dans cette approche, la flexibilité de la fondation est représentée par un ensemble de ressorts continus et elle est utilisée pour modéliser l'interaction sol-structure (Kim et Yang (2010) ; Chore et al. (2010) ; Sapountzakis et Kanpitsis (2011) ; Raychowdhury (2011); Limkatanyu et al. (2012)).

Les ressorts ainsi introduits fournissent une résistance dans la direction verticale seulement, en se confinant à la déformation du sol de fondation. De toute évidence, le modèle de sol de fondation à un paramètre souffre d'un grand handicap, qui est la discontinuité du milieu support.

Pour améliorer le modèle de Winkler, de nombreux modèles de sol de fondation à deux paramètres et à trois paramètres ont été développés, en tenant compte cette fois-ci des déformations de cisaillement du sol. Pour remédier aux faiblesses du modèle de fondation à un paramètre, de nombreux chercheurs ont proposé divers modèles de fondation décrivant de manière rigoureuse la réponse du sol en assurant l'interconnexion des ressorts verticaux.

Dans la première approche, l'interaction entre les ressorts a été établie par une membrane tendue élastique (Filonenko 1968) et la seconde utilise des éléments de poutre ou une plaque pour interagir entre eux (Hetényi 1966). Dans ce cas, la membrane sous tension est quantifiée par un paramètre de cisaillement. Troisièmement, pour modéliser l'effet mutuel entre les ressorts, Kerr (1964) a intégré une couche de cisaillement divisant le sol de fondation en deux couches différentes.

Le sol de fondation à deux paramètres a connu des développements considérables au cours de la dernière décennie. Une nouvelle méthode de calcul par éléments finis a été mise au point pour étudier la réponse d'une fondation superficielle et d'un radier en surmontant les déficits du modèle de Winkler (Mullapudi, 2010). Afin d'étudier les grandes déformations d'une poutre reposant sur une fondation élastique à deux paramètres, une procédure par éléments finis a été développée par Gan et Kien (2014). Enfin, l'effet de la non-homogénéité des matériaux et de la fondation élastique à deux paramètres a été pris en compte pour quantifier la réponse des poutres simplement appuyées. Le comportement du support de la fondation est supposé être linéaire élastique, homogène et isotrope, avec deux paramètres décrivant la réaction de la fondation élastique sur la poutre (Avcar 2016).

II.4 Etude de l'interaction sol-structure dans le cas dynamique

Comme il a été cité ci-dessus, l'un des principaux problèmes de l'ingénierie des structures et de la géotechnique est de calculer la réponse des structures avec les sols avoisinants. Certes, l'analyse du comportement dynamique de l'ISS est une tâche très difficile en raison de la complexité du comportement du sol et de l'approche dynamique en elle-même. Par conséquent, les modèles numériques doivent prendre en compte les effets de l'ISS dans l'analyse et la conception des structures fondées sur le sol.

La modélisation de la continuité de l'interface entre une poutre et un sol est un facteur essentiel dans l'analyse d'un tel problème (Avramidis et al. 2006). Cette modélisation devient une tâche plus compliquée pour les structures dont les réponses sont influencées par les milieux environnants. L'analyse dynamique de l'ISS est compliquée par le comportement du sol, le milieu de l'interface, la structure et la procédure dynamique utilisée.

Dans ce sens, (Far 2017) a illustré une revue complète des techniques de modélisations précises et réalistes et des méthodes de calcul traitant les effets de l'ISS sur les structures reposant sur des sols meubles. Les investigations élaborées visaient à étudier l'effet de l'ISS et de l'impact sismique sur la réponse des structures (Behnamfar 2016 ; Feng et al. 2018 ; Khosravikia et al. 2018 ; Mirzaie et al. 2017).

Avec les progrès de la simulation numérique, la méthode des éléments finis (FEM) a été utilisée de manière intensive pour prédire les réponses dynamiques des structures d'ingénierie. En réalité, c'est un outil important pour analyser le comportement des structures sous des chargements statiques ou dynamiques. Pour obtenir des réponses significatives en utilisant cette méthode, l'ensemble du système doit être discrétisé en un grand nombre d'éléments finis et infinis, ce qui complique la tâche de calcul (Wang et al. 2005). La FEM est utilisée comme un outil pour décrire le comportement de la poutre et du milieu du sol ayant différents profils (Baraldi et al. 2018).

Outre la FEM, la méthode des éléments aux frontières (BEM) est également l'une des méthodes numériques alternatives les plus puissantes et l'une des techniques les plus appropriées pour la propagation des ondes sismiques dans un milieu géologique complexe (Messioud, Becker 1992 ; Yaseri et al.2014). Les deux méthodes peuvent être formulées soit dans le domaine temporel, soit dans le domaine fréquentiel, et chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients.

Le choix de la méthode numérique en modélisation dépend des propriétés du système telles que la géométrie, les propriétés des matériaux, le type de chargement et les conditions aux limites. Par conséquent, les technologies offertes et les modèles combinant les deux méthodes (la FEM et la BEM) sont avantageusement utilisées dans la modélisation numérique des domaines infinis ou semi-infinis (Messast 2007).

Par ailleurs, Doyle (1986,1988 et 1990), (Leung 2000), (Lee et al. 2000 et 2009), (Bashir et Ahmed. 2016) et (Penava et al. 2018) ont contribué au développement de la méthode des éléments spectraux (SEM).

Cette méthode numérique a été étendue pour étudier les réponses dynamiques des structures, ce qui a permis d'obtenir des résultats précis par rapport aux méthodes FEM et BEM. Tout d'abord, le concept de la SEM a été introduit par (Narayanan et Beskos 1978), dans lequel la matrice de rigidité dynamique de l'élément de poutre est dérivée et la solution correspondante est obtenue en utilisant la transformée de Fourier rapide (FFT). Plus tard, (Rizzi et Doyle 1992) ont utilisé pour la première fois la terminologie « Méthode des éléments spectraux » combinée à une approche d'analyse par éléments spectraux basée sur la FFT.

En raison de leur nature universelle, les méthodes spectrales sont le plus souvent utilisées pour modéliser la détection et l'identification de dommages structurels (Palacz 2018). Fourier et al. (2004) ont présenté une application de la méthode des éléments spectraux aux équations de Navier–Stokes pour la modélisation des écoulements axisymétriques. De plus, un schéma numérique appliqué aux ondes sonores est élaboré, celui-ci utilise la méthode des éléments spectraux (Pind et al. 2018).

La formulation de la SEM est semblable à celle de la FEM classique, mais dans la formulation des éléments spectraux, l'équation différentielle gouvernante du mouvement est transférée du domaine temporel au domaine fréquentiel en utilisant une transformée de Fourier discrète (DFT). Dans ce cas, la variable temps disparaît et la variable fréquence apparaît comme une nouvelle variable mathématique du problème. D'après les résultats obtenus (Hamioud et Khalfallah 2016 et 2017), un seul élément fini spectral peut être utilisé pour obtenir des résultats satisfaisants. Cette méthode numérique réduit considérablement le nombre des éléments finis conventionnels et donc le nombre de degrés de liberté (Doyle JF et Farris 1990), le temps nécessaire à cet effet et la surface de stockage dans la mémoire de l'ordinateur.

II.5 Objectifs du présent travail

Le but principal du travail effectué dans cette thèse consiste en l'étude de l'interaction sol-structure. Il comprend trois parties :

Dans la première, il s'agit de traiter le problème en utilisant le modèle de sol à deux paramètres. En effet, la structure poutre et le sol sont modélisés grâce à la FEM en intégrant des déformations de cisaillement. Pour améliorer la précision des calculs, les éléments finis sont raffinés dans la zone chargée. La modélisation utilise un état de contrainte plane pour la poutre en contact adhérent avec le sol de fondation qui lui, est dans un état de déformation plane.

De plus, une étude paramétrique est élaborée pour montrer l'influence :

- (1) du comportement du sol de fondation dans la direction horizontale,

(2) des propriétés mécaniques du sol de fondation,

(3) de la couche de ballast.

L'objectif principal de la deuxième partie de ce travail est l'utilisation de la méthode des éléments spectraux (SEM) pour quantifier les effets de l'interaction sol-structure sur les vibrations libres des poutres. Dans cette analyse dynamique, on traite l'effet de : (a) l'analyse modale avec et sans milieu élastique, (b) l'influence de l'interaction entre la poutre et le sol de fondation, (c) l'influence des propriétés du sol sur la réponse dynamique, et enfin (d) l'influence des conditions aux limites non classiques. Les résultats obtenus de ces effets sont présentés et commentés.

Dans la troisième partie, le problème aux valeurs propres est résolu, les fréquences de vibration de la poutre sont tabulées pour les trois premiers modes. Le but de cette dernière partie est : (1) la formulation de base de la méthode des éléments spectraux, (2) l'analyse modale de la poutre avec et sans ressorts élastiques, (3) l'influence de l'interaction entre la poutre et le sol de fondation, et (4) l'influence des propriétés mécaniques du sol de fondation sur la réponse dynamique de la poutre d'Euler-Bernoulli.

II.6. Conclusion

La prise en compte de l'interaction sol structure pour déterminer les déflexions est d'une grande importance. Ceci a été prouvé à travers l'étude bibliographique qu'on a effectuée où des méthodes analytiques, semi analytiques, expérimentales et numériques ont été utilisées. D'après la littérature plusieurs chercheurs ont formulé la matrice de rigidité dynamique pour résoudre les problèmes de vibration des barres, des poutres en utilisant la méthode de rigidité dynamique (DSM), la méthode d'analyse spectrale (SAM) et la méthode des éléments spectraux (SEM).

Différentes études ont été entreprises dans le domaine de la modélisation numérique pour prévenir le comportement des structures en contact avec le sol en considérant leurs rigidités par rapport à celle du sol, et de nombreux modèles ont été établis pour améliorer la conception et l'analyse des systèmes de fondations peu profondes.

L'étude des réponses dynamiques des structures par la SEM a permis d'obtenir une convergence rapide et des résultats précis par rapport aux méthodes FEM et BEM.

Chapitre III

Modélisation de l'interaction sol-structure

III.1 Principes fondamentaux de l'interaction dynamique sol-structure

Le calcul de la réponse sismique des structures fondées sur des sols supposait que celles-ci étaient supportées de manière rigide, c'est-à-dire une condition de «base fixe», ce qui est une hypothèse grossière, car dans de nombreuses situations (Figure III.1), les structures sont fondées sur des sols déformables, c'est-à-dire une condition de base flexible (Yang Zhou (2019)).

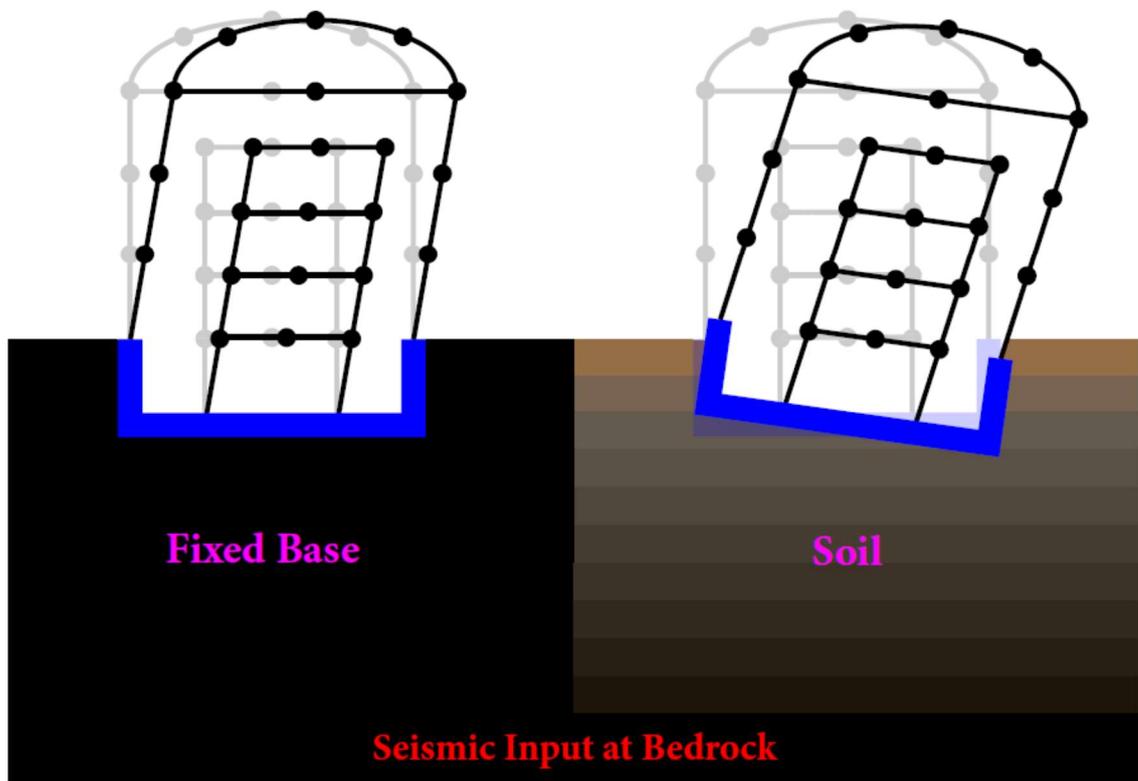


Figure III.1 : Illustration de l'interaction sol-structure

En effet, l'introduction de la souplesse du sol modifie le comportement sismique de la structure en comparaison avec la condition de base fixe. Ce chapitre passe en revue les principes fondamentaux de l'interaction dynamique sol-structure en introduisant les approches communément utilisées pour l'analyse de l'ISS dynamique (Lu, Yang (2016)).

III.2 Interaction cinématique

L'interaction cinématique est le résultat direct du contraste étroit entre les rigidités du sol et de la fondation (Lu, Yang (2016)). Dans le champ libre où une structure est absente, le sol suit le mouvement induit par la propagation des ondes. Supposant qu'une fondation, reposant sur le sol ou enterrée dans le sol, est tellement rigide qu'elle ne peut pas se conformer à l'allure du déplacement en champ libre ; une déviation du mouvement de la fondation par rapport au mouvement en champ libre sera provoquée, même si la fondation est sans masse.

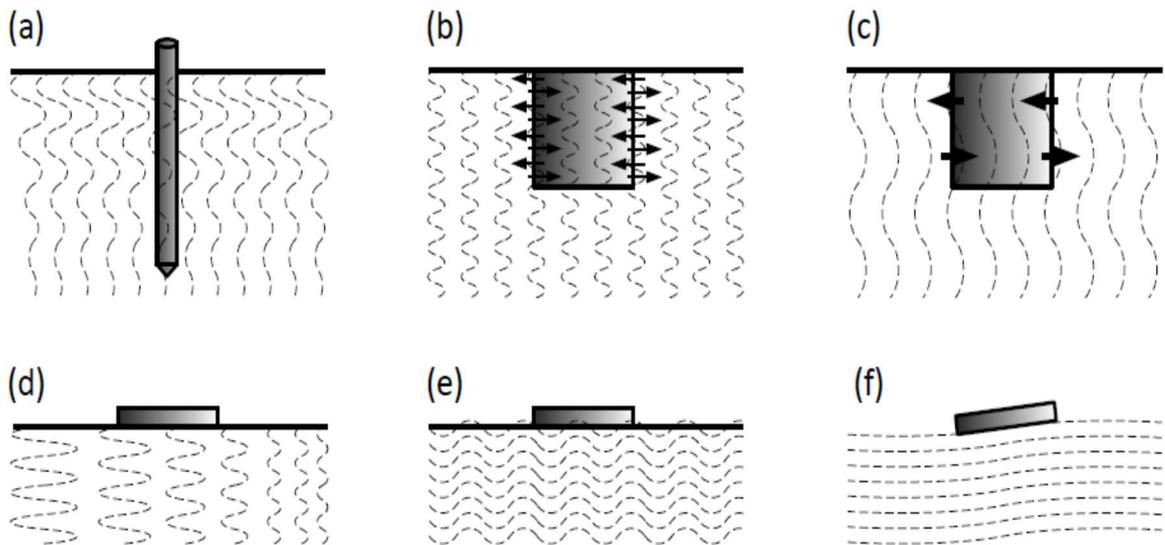


Figure III.2 : Effet de l'interaction cinématique sur les fondations profondes et superficielles.

La figure III.2 illustre des cas dans lesquels le phénomène d'interaction cinématique est visible.

Notez que dans toutes les figures, les fondations sont supposées ne pas avoir de masse et les courbes en pointillés représentent les mouvements du champ libre. La figure III.2 (a) montre un pieu soumis à des ondes de cisaillement dont l'amplitude augmente en se propageant verticalement vers le haut à travers le sol. D'une part, le pieu ne suit pas le mouvement du terrain, mais tend à modifier les déplacements du sol au voisinage de celui-ci (en comparaison aux déplacements en champ libre). D'autre part, le mouvement du sol autour du pieu génère des moments de flexion qui peuvent menacer sa stabilité.

Les figures III.2 (b) et (c) comparent l'effet des composantes fréquentielles d'un mouvement sur la réponse d'une fondation sans masse enterrée. Soumis à un mouvement de haute fréquence variant horizontalement (figure III.2 (b)), « les forces cinématiques » exercées sur la fondation s'annulent, la fondation n'est pas endommagée par le mouvement des ondes. Dans le cas

contraire, i.e. lorsqu'elle est excitée par un mouvement à basse fréquence (figure III.2 (c)), la base de la fondation a tendance à basculer, même si le mouvement en champ libre est purement horizontal.

L'effet de l'interaction cinématique est également important pour les fondations de surface. Un exemple est illustré à la figure III.2 (d) où la rigidité de la fondation ne lui permet pas de suivre le mouvement du sol sous-jacent. De plus, les figures III.2 (e) et (f) démontrent à nouveau que la fréquence d'excitation a un effet important sur la réponse de la fondation, ce qui est similaire aux explications données pour les cas de figures III.2 (b) et (c).

III.3 Interaction inertielle

Dans une interaction inertielle, la superstructure est mobilisée par le mouvement de la fondation dû à des forces d'inertie développées dans la structure (Lu, Yang (2016)). Deux importants aspects découlent de cette interaction et sont discutés ci-dessous.

Tout d'abord, la force de cisaillement transversale et le moment de renversement induits par l'inertie se développent à la base de la fondation causant une déformation dans le sol en plus de celle due au mouvement en champ libre. La magnitude de la déformation dépend de l'amplitude des vibrations et de la rigidité du sol. L'introduction de la fondation dans le sol déformable rend l'ensemble du système sol-structure plus flexible, et donc plus sujet à de grandes déformations.

Deuxièmement, la base excitée agit comme une source de vibrations qui émet des ondes se propageant à travers le sol vers l'infinie. Pour une fondation peu profonde, la réponse en mode de translation (avec le déplacement désigné par u_h (figure III.3 (a)) génère des ondes P (ondes de dilatation) provoquant une compression ou une extension (aux interfaces verticales) et des ondes S (ondes de cisaillement) provoquant un frottement (à l'interface horizontale) entre la fondation et le sol sous-jacent. Dans le mode de vibration en rotation (avec un angle noté Θ (figure III.3 (b)), les ondes P proviennent principalement de contraintes de compression transmises de la base de la fondation au sol sous-jacent.

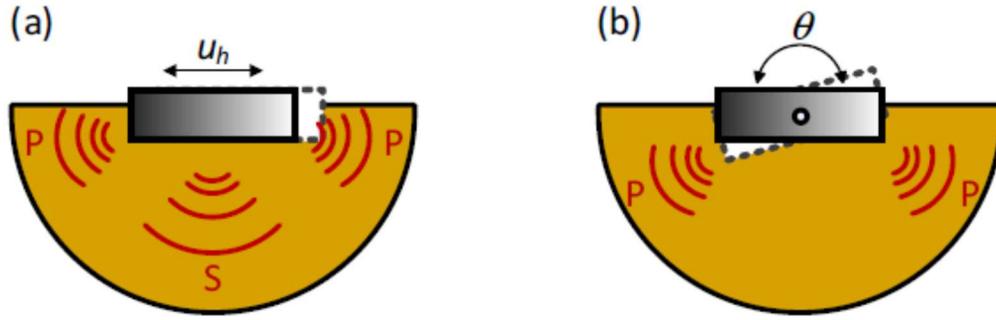


Figure III.3 : Vibration de la fondation (a) mode de translation (b) mode de rotation.

III.4 Méthodes d'analyse de l'interaction sol-structure :

Il existe trois méthodes d'analyse de l'interaction sol-structure : la méthode directe (ou globale), la méthode de sous-structures et la méthode hybride. Dans la méthode directe, le sol et la structure sont inclus dans le même modèle et analysés comme un système complet. Dans la méthode de sous-structure, le problème de l'interaction sol-structure est divisé en parties distinctes qui sont ensuite combinées pour former la solution complète. La méthode hybride consiste en une combinaison de la méthode directe et de sous-structure, profitant ainsi des avantages de chacune d'elles.

III.4.1 Méthodes directes :

Les méthodes directes, ou méthodes globales, traitent le problème de l'interaction sol-structure dans sa globalité de façon à obtenir les réponses du sol et de la structure simultanément. Elles consistent à résoudre directement l'équation du mouvement dans l'ensemble du système sol-structure. La résolution directe est tellement complexe que le recours aux méthodes numériques, comme la méthode des éléments finis, la méthode des éléments spectraux et la méthode des différences finies, ... est pratiquement inévitable.

L'un des avantages principaux des méthodes directes est leur capacité d'intégrer dans le modèle numérique les hétérogénéités matérielles du sol et de la structure, les singularités géométriques du problème, et les lois de comportement bien adaptées pour la prise en compte des non linéarités dans le sol ou à l'interface sol-fondation du système.

Les équations du mouvement du modèle interaction sol-structure en éléments finis sont les suivantes :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = -[M]\{\ddot{u}_g\} \quad (\text{III.1})$$

Où $[M]$ et $[k]$ sont respectivement les matrices masse et de rigidité du système global, $\{u\}$ et $\{\ddot{u}\}$ sont respectivement le vecteur déplacement et accélération du système et $\{\ddot{u}_g\}$ est le vecteur accélération appliqué à la base du modèle (input motion).

Bien que l'approche directe puisse traiter le sol et la structure avec la même rigueur, elle nécessite généralement un grand effort de calcul et n'est pas facile à mettre en œuvre, en effet, le nombre de degrés de liberté du système sol-structure combiné est très grand. En outre, la nécessité de capturer la réponse du sol et de la structure à des fréquences relativement grandes, nécessite une très fine discrétisation du système, ce qui implique à son tour un effort de calcul extraordinaire. C'est pour cette raison que l'approche directe n'est pas couramment utilisée dans l'ingénierie pratique.

III.4.2 Méthodes des sous-structures :

Elles consistent à analyser le problème de l'interaction sol-structure en plusieurs étapes successives, chacune des étapes représente un problème plus facile à résoudre que le problème global (Méthode directe). Cette méthode est basée sur le principe de superposition en découplant les analyses de l'interaction cinématique et de l'interaction inertielle (figure III.4).

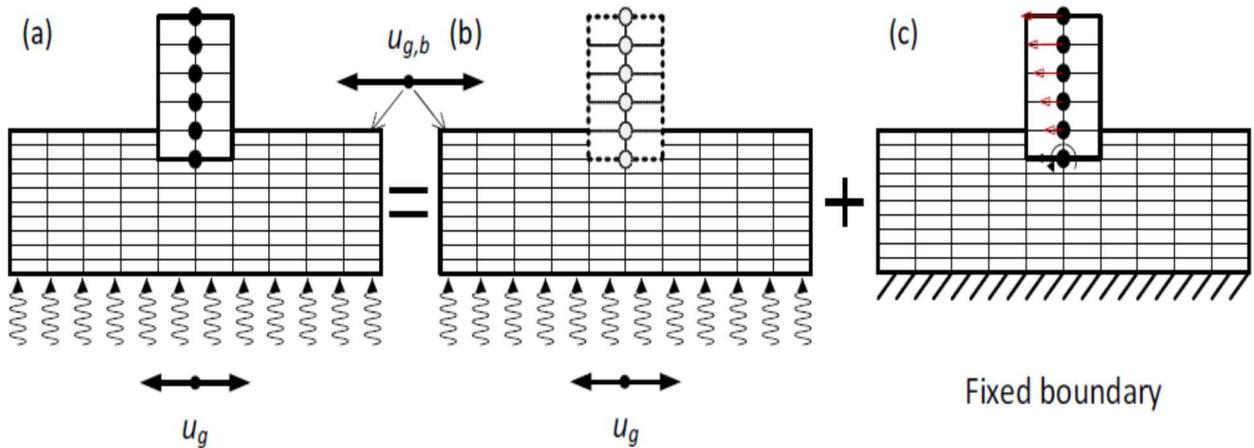


Figure III.4 : L'analyse d'un (a) problème d'ISS peut être décomposée en (b) une analyse d'interaction cinématique et (c) une analyse d'interaction inertielle.

Dans l'analyse d'interaction cinématique (figure III.4 (b)), l'excitation sismique est appliquée en bas du modèle ISS où la structure et la fondation sont supposées avoir une rigidité mais pas une masse. L'équation du mouvement pour l'interaction cinématique peut être écrite comme suit :

$$[M_{Sol}]\{\ddot{u}_{cin}\} + [K]\{u_{cin}\} = -[M_{Sol}]\{\ddot{u}_g\} \quad (III.2)$$

Où : $[M_{Sol}]$ est la matrice masse du système global (c'est-à-dire superstructure-fondation-sol) après avoir supposé égal à zéro la masse de la fondation et la masse de la superstructure et l'indice 'cin' est relatif à l'interaction cinématique. $[K]$ est la matrice de rigidité du système global.

Mathématiquement, l'équation du mouvement dans le cas de l'interaction inertielle peut être déduite en soustrayant l'équation du mouvement totale (équation III.1)) de celle de l'interaction cinématique (équation III.2), soit :

$$[M]\{\ddot{u}_{II}\} + [K]\{u_{II}\} = -[M_{Str}]\{\ddot{u}_g + \ddot{u}_{cin}\} \quad (III.3)$$

Où $\{u_{II}\} = \{u\} - \{u_{cin}\}$ est la composante de l'interaction inertielle du vecteur déplacement $\{u\}$, $[M_{Str}]$ est la matrice masse du système global en supposant que la masse du sol est égale à zéro, on a : $[M_{Str}] = [M] - [M_{Sol}]$.

Pour prouver l'exactitude (des systèmes linéaires) de l'approche des sous-structures, on écrit l'équation suivante qui combine les effets des interactions cinématique et inertielle, on a :

$$\begin{aligned} [M_{Sol}]\{\ddot{u}_{cin}\} + [M]\{\ddot{u}_{II}\} + [K]\{u_{cin}\} + [K]\{u_{II}\} \\ = -[M_{Sol}]\{\ddot{u}_g\} - [M_{Str}]\{\ddot{u}_g + \ddot{u}_{cin}\} \end{aligned}$$

Comme $\{u_{cin}\} + \{u_{II}\} = \{u\}$ et $[M_{Str}] + [M_{Sol}] = [M]$, on a :

$$\begin{aligned} ([M_{Sol}] + [M_{Str}])\{\ddot{u}_{cin}\} + [M]\{\ddot{u}_{II}\} + [K](\{u_{cin}\} + \{u_{II}\}) \\ = -[M_{Sol}]\{\ddot{u}_g\} - [M_{Str}]\{\ddot{u}_g\} \end{aligned}$$

On retrouve donc l'équation de départ :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = -[M]\{\ddot{u}_g\}$$

Notant que pour le vecteur des degrés de liberté correspondant au système structure-fondation, $\{u_{cin}\} + \{u_g\}$ est réduit au mouvement de la fondation. En particulier, pour une fondation de surface soumise à des ondes de cisaillement à propagation verticale cohérente, $\{u_{cin}\} + \{u_g\}$ au niveau de la fondation est égal à $\{u_g\}$ qui est le vecteur déplacement du au mouvement à la surface du sol dans le champ libre.

Du point de vue pratique, pour simplifier une analyse ISS, le sol est généralement remplacé par ce qu'on appelle la «fonction d'impédance» qui est égale à la réaction exercée sur une fondation sans masse lorsqu'elle est soumise à des déplacements harmoniques unitaires dirigés suivant l'un

de ses degrés de liberté. La fondation étant sans masse, l'impédance représente également le quotient d'une force directement appliquée à la fondation (qui est égale à la réaction du sol) par le déplacement résultant, elle prend en compte la rigidité et l'amortissement dans l'interaction sol-fondation lorsqu'elle est soumise à différentes fréquences de vibrations.

Cette impédance dépend de la fréquence, ces fonctions sont physiquement représentées par des ressorts ayant des valeurs de rigidités complexes. Dans ce cas, la procédure présentée dans la figure III.5 est utilisée avec un modèle ISS encore plus simple et qui comporte trois étapes (Kramer et Stewart, 2004) :

- (1) D'abord, calculer le mouvement de la fondation qui dépend de la rigidité et de la géométrie de la fondation et du sol.
- (2) Ensuite, évaluer la fonction d'impédance qui, pour un cas simple de fondation rigide, est fonction des propriétés élastiques du sol (par exemple, la rigidité et le coefficient de Poisson), de la stratigraphie du sol, de la géométrie des fondations et de la fréquence.
- (3) Enfin, effectuer une analyse dynamique sur la structure à base souple soumise au mouvement de la fondation.

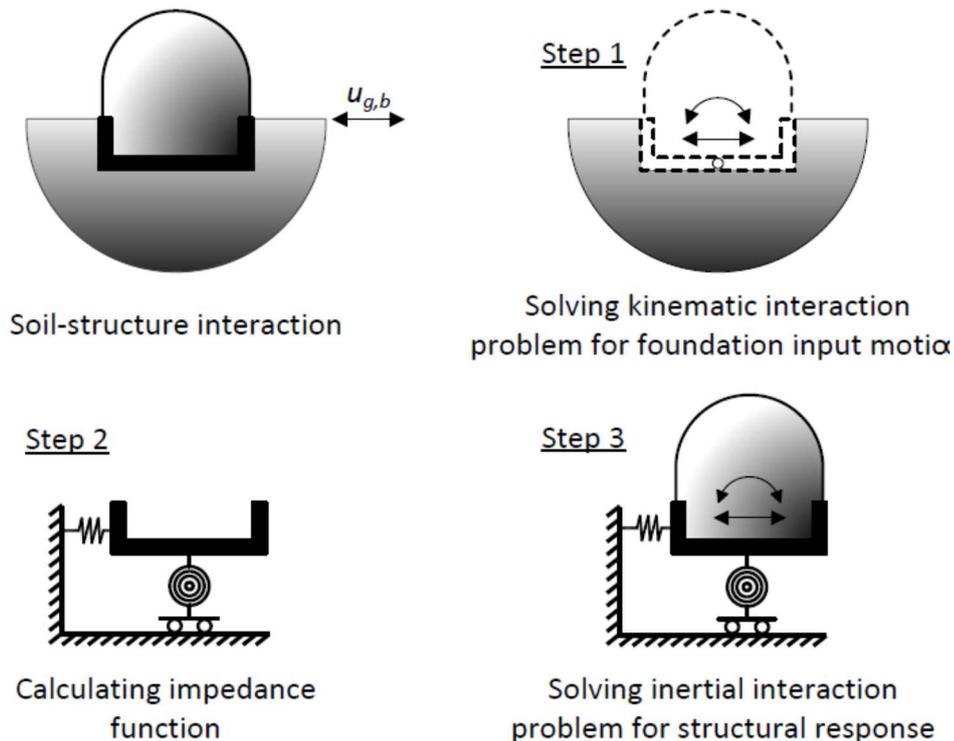


Figure III.5 : Approche de sous-structure d'un problème d'ISS utilisant la fonction d'impédance (Kramer et Stewart, 2004).

Il est clair que la solution de l'interaction cinématique donne le mouvement effectif de la fondation. L'interaction inertielle résout la réponse du système SSI où la structure (y compris la fondation) interagit avec le sol environnant. La réponse totale du système est donc la somme des réponses obtenues à partir des deux analyses d'interaction.

La méthode de sous-structure utilise les fonctions d'impédances dynamiques (ressorts) pour représenter les caractéristiques sol-fondation. De ce fait, elle réduit le temps de calcul par rapport à la méthode directe.

Cette méthode est basée sur le principe de superposition, elle exige alors l'hypothèse de comportement du sol et de la structure linéaire. Cette exigence ne reflète pas au mieux le comportement réel de la structure et du sol. Cependant de nombreux travaux montrent que cette technique donne de très bons résultats (Pitilakis et al. (2008)).

III.4.3 Méthodes hybrides :

Ces méthodes proviennent de la combinaison des méthodes directes et de sous-structures, tout en profitant des avantages de chacune. Dans ces méthodes, on décompose le problème en deux sous-domaines. Le premier domaine semi-infini est appelé champ lointain, il est formé du sol seulement et il est pris suffisamment loin de la fondation pour qu'il ne soit pas influencé par l'interaction sol-structure. Pour ces raisons, on considère ce champ comme élastique (linéaire) et on utilise les méthodes adaptées aux problèmes linéaires (impédance dynamique) pour sa modélisation. Le deuxième domaine fini est appelé champ proche, il est formé d'une fondation superficielle et d'un volume fini du sol sous-jacent. Ce champ inclut toutes les hétérogénéités et non linéarités du système qui sont composées en deux parties : les non linéarités matérielles et les non linéarités géométriques. Il est inclut dans le modèle de la superstructure et peut être traité par une méthode directe.

Cette méthode réduit le temps de calcul et donne une modélisation précise de l'interaction sol-structure, puisqu'elle prend en considération la non-linéarité dans le champ proche du sol.

III.4.4 Analyse dans le domaine temporel

Étant donné que les équations du mouvement sont formulées dans le domaine temporel, l'approche la plus générale pour résoudre ces équations est l'analyse de l'historique des réponses. Un certain nombre de méthodes d'intégration numériques sont disponibles pour obtenir des solutions incrémentielles à chaque pas de temps. Une analyse interaction sol-structure non

linéaire doit être effectuée dans le domaine temporel, où des itérations peuvent être nécessaires pour résoudre les équations d'équilibre. Cela nécessite un énorme effort de calcul pour un problème comportant un grand nombre de degrés de liberté.

III.4.5 Analyse dans le domaine fréquentiel

En raison de la nature dépendante de la fréquence de la fonction d'impédance, une analyse dans le domaine fréquentiel convient mieux à l'approche décrite à la Figure III.5.

Avant de pouvoir effectuer une analyse dans le domaine fréquentiel, les données variant dans le temps sont séparées, par une transformation de Fourier (FT) (Lee U.(2009)), en une série de fonctions harmoniques, chacune avec un angle de phase et une amplitude spécifique, ainsi qu'une fréquence unique. La réponse est ensuite calculée indépendamment des fréquences individuelles. Les réponses fonction de la fréquence peuvent éventuellement être reconverties dans le domaine temporel à l'aide de la transformée de Fourier inverse (IFT).

III.5 Modèles couramment utilisés

On passe en revue les modèles disponibles couramment utilisés dans l'analyse sismique des problèmes d'interaction sol-structure. Les modèles de type domaine sont largement utilisés dans la recherche avec l'approche directe alors que les modèles de type ressort sont plus privilégiés par les ingénieurs comme outil simple d'évaluation de la performance sismique des bâtiments et des fondations en interaction inertielle. Les avantages et les inconvénients de ces modèles sont également abordés.

III.5.1 Modèles de type de domaine

Les modèles de type domaine sont généralement utilisés pour traiter des problèmes où la forme est arbitraire et le comportement matériel est complexe avec des conditions de chargement dynamique complexe. Le problème est souvent discrétisé par un nombre infini de degrés de liberté. Pour résoudre un tel problème, tout le domaine a besoin d'être discrétisé en un certain nombre de sous-domaines avec un nombre fini de degrés de liberté. La discrétisation peut être réalisée en utilisant la méthode des éléments finis ou la méthode des différences finies.

Outre les techniques de calcul numérique, deux questions principales doivent être traitées avec attention. La première concerne la description du comportement du sol, qui est généralement obtenu au moyen de formules mathématiques constitutives. La deuxième concerne l'analyse de la réponse du site qui traite la variation spatiale des propriétés du matériau dans un dépôt de sol et la propagation des ondes à travers le sol avec un chargement dynamique et des conditions aux limites bien définies.

III.5.2 Modèles à ressorts

En pratique, pour les ingénieurs, il est souhaitable de disposer d'un modèle plus simple que le modèle de type domaine et qui est capable de décrire les caractéristiques les plus importantes d'un système sol-fondation vibrant afin de fournir des informations fiables pour la conception de la superstructure. Des hypothèses simplificatrices sont formulées afin de développer de tels modèles (Wang YH et al. 2005). Par exemple, on suppose généralement que la fondation est rigide, de sorte que seules les réponses en un point représentatif de la fondation (par exemple, le centre de la base d'une fondation de surface) sont calculées. La rigidité du sol peut être représentée par des ressorts couplés ou non couplés, dont la valeur est soit constante (Tiliouine B, Goual MS 1996), soit dépendante de la fréquence ou de la déformation.

III.5.3 Fonction d'impédance de la fondation

Une fonction d'impédance d'une fondation caractérise la relation dynamique force-déplacement de la fondation sans masse reposant sur ou enterrée dans un milieu de sol élastique. Elle est fonction de la rigidité et de la géométrie de la fondation ainsi que de la stratification du sol (De Barros FCP, Luco JE (1995)).

Pour une structure construite sur une fondation de surface, reposant sur un demi-espace de sol élastique comme illustré à la figure III.6 (a). Lorsque le sol est soumis à une propagation d'onde verticale de cisaillement, les mouvements de la fondation (sans masse) peuvent être déterminés en utilisant un modèle simplifié (voir Figure III.6 (b)) qui remplace le demi-espace du sol par une fonction d'impédance de la fondation en translation et en rotation (couplage entre le balancement et le basculement).

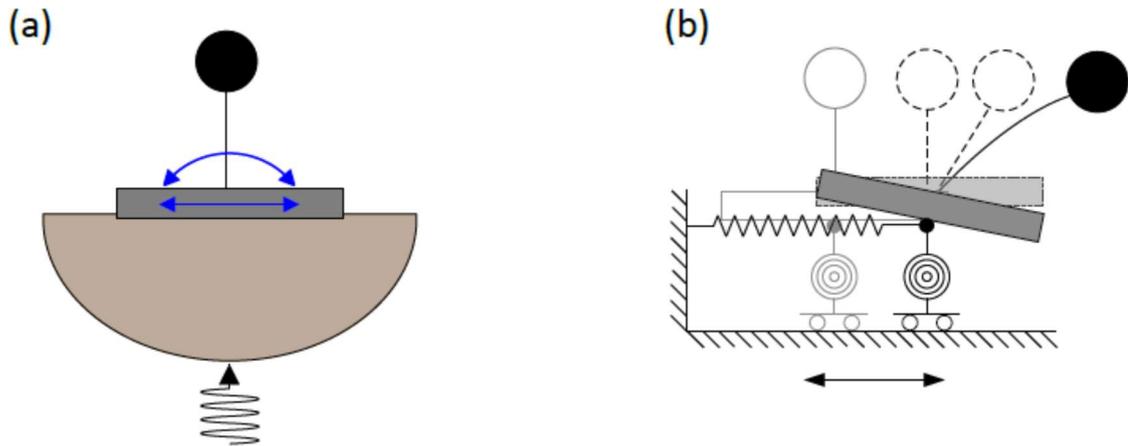


Figure III.6 (a) vibration d'une structure excitée latéralement supportée par une fondation sur un demi-espace de sol élastique ; b) le demi-espace de sol est remplacé par des ressorts en translation et en rotation.

III.6 Formulation mathématique de l'ISS:

Récemment, l'hypothèse de base fixe de la structure est rarement utilisée pour étudier la réponse dynamique des structures. En effet, la rigidité du sol de fondation donne lieu à deux aspects distincts sur la réponse dynamique de la structure :

- (1) la modification du mouvement du champ libre à la base de la structure (c'est ce qu'on appelle interaction cinématique)
- (2) et l'apparition de déformations dues à la réponse dynamique de la structure dans le sol porteur (c'est ce qu'on appelle interaction inertielle) utilisée dans ce travail.

Les forces initiales induites par le mouvement de la fondation lors d'un tremblement de terre par exemple, engendrent des déformations dans le sol et affectent ainsi les forces d'inertie dans la superstructure.

Les problèmes d'interaction dynamique sol-structure peuvent être analysés dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel. Dans la présente thèse, comme on utilise la méthode des éléments spectraux, le problème est abordé dans le domaine fréquentiel (Penava D, et al. (2018)).

Pour la structure (beam), on écrit la relation force-déplacement comme suit :

$$\{F_B\} = [K^B] \{u_B\} \quad (III.1)$$

De la même façon, pour le sol on écrit :

$$\{F_S\} = [K^S] \{u_S\} \quad (III.2)$$

En regroupant les deux équations précédentes et en incluant l'interface, on obtient l'équation discrète du système sol-structure, qui peut être formulée dans le champ de déplacement avec le système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} K_{BB}^B & K_{BI}^B & 0 \\ K_{IB}^B & K_{BB}^B + K_{II}^S & K_{IS}^S \\ 0 & K_{SI}^S & K_{SS}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B \\ u_1 \\ u_S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_B \\ F_1 \\ F_S \end{Bmatrix} \quad (III.3)$$

Avec : K^B et K^S sont les matrices de rigidités de la poutre et du sol respectivement.

Les exposants B, I et S sont posés pour la poutre (beam), l'interface et le sol, respectivement.

u_B , u_I et u_S sont les degrés de liberté cinématiques du système et F_B , F_I et F_S sont les forces dynamiques pour les différentes composantes comme indiqué à la figure III.7.

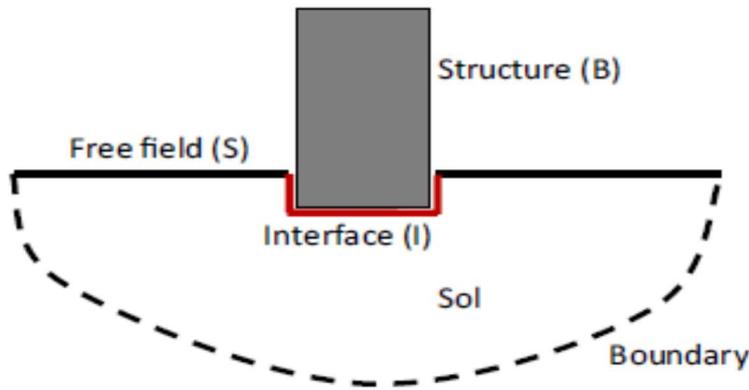


Figure III.7 : Modélisation de l'interaction sol-structure.

Si aucune force extérieure n'agit sur la structure, les vecteurs de déplacement u_B et u_I peuvent être calculés à l'aide des deux premières équations de la relation (III.3). Le système d'équations se réduit à :

$$\begin{bmatrix} K_{BB}^B & K_{BI}^B \\ K_{IB}^B & K_{II}^B + K_{II}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B \\ u_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -K_{IS}^S u_S \end{Bmatrix} \quad (III.4)$$

Dans le cas de l'étude en vibrations libres, les forces sont nulles, donc le déterminant de la matrice dans l'expression (III.4) doit être nul. On obtient :

$$\left| \begin{bmatrix} K_{BB}^B & K_{BI}^B \\ K_{IB}^B & K_{II}^B + K_{II}^S \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (\text{III.5})$$

Le calcul des rigidités et des valeurs propres du système d'équations (III.5) est décrit en détails dans le chapitre IV.

III.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principes fondamentaux de l'interaction dynamique sol-structure à savoir l'interaction cinématique et inertielle, et les méthodes d'analyse de l'interaction sol-structure : les méthodes directes, les méthodes des sous-structures et les méthodes hybrides. La formulation mathématique traitant les problèmes d'interaction dynamique sol-structure a été présentée pour déterminer les rigidités et les fréquences propres.

Chapitre IV

Formulation théorique des méthodes Éléments Finis

et

Éléments Spectraux

IV.1 Introduction :

Dans la méthode des éléments finis (FEM), le champ de déplacement de chaque élément est donné sous forme d'un polynôme. La précision des résultats dépend de la taille des éléments finis utilisés dans le maillage, mais l'augmentation du nombre d'éléments nécessite plus de temps de résolution à l'ordinateur et plus d'efforts pour résoudre le problème. En règle générale, dans l'analyse dynamique, un nombre plus important d'éléments finis est requis que dans l'analyse statique. La taille des éléments finis est également influencée par la fréquence la plus élevée dans l'analyse. Plus la fréquence est élevée, plus le nombre d'éléments finis nécessaires est élevé. Selon Lysmer (1978), la taille de l'élément fini doit être 5 à 10 fois plus petite que la longueur d'onde de la plus haute onde de fréquence d'intérêt. Alford et al. (1974) ont suggéré la taille maximale du produit fini l'élément doit être 10 à 20 fois plus petit que la longueur d'onde de la fréquence la plus haute.

La méthode des éléments spectraux (SEM) peut être utilisée comme une autre alternative à la FEM en analyse dynamique des problèmes de vibrations ((Doyle 1997), (Banerjee1997), (Lee 2000), Lee et autres (2000)). Pour les poutres et les barres, le champ de déplacement de l'élément spectral est la solution exacte de l'équation différentielle de mouvement. Par conséquent, un seul élément peut représenter exactement le comportement dynamique d'un élément de la structure à n'importe quelle fréquence. Les fonctions de forme et la matrice de rigidité dynamique de l'élément spectral dépendent de la fréquence, par conséquent, l'analyse dynamique doit être effectuée dans le domaine fréquentiel.

L'utilisation des éléments spectraux permet de réduire considérablement le nombre d'inconnues, d'augmenter la précision des résultats numériques et de diminuer le temps de calcul (Lee et al. (2000)). La précision de la SEM est l'un de ses points forts. Comme conséquence, des éléments de taille grande peuvent être utilisés sans perdre la précision (Kulla 1997). De plus, la

rigidité dynamique du système sol-fondation qui dépend de la fréquence, peut être facilement et efficacement incorporée dans le modèle élément spectral (Petronijevic et al. (2008), Nefovska-Danilovic et al. (2011), Radišić et al. (2012)). L'efficacité de la transformée de Fourier rapide (FFT) sont des algorithmes qui font de la SEM un outil puissant pour résoudre les problèmes de propagation d'ondes dans les structures.

IV.2 Méthode des éléments finis :

IV.2.1 Modèle physique :

Des déflexions transversales d'une poutre élastique mince peuvent être produites suite à l'effet réciproque entre le chargement et les réactions de la fondation. En effet, les forces de réaction des couches de sol sont proportionnelles à la déflexion en chaque point de l'interface. L'inconvénient majeur du modèle de Winkler est la discontinuité de déplacement qui apparaît entre la région chargée et celle non chargée de la surface de la fondation. En effet, le champ de déplacement doit être une fonction continue le long de toute la surface (Figure IV.1)

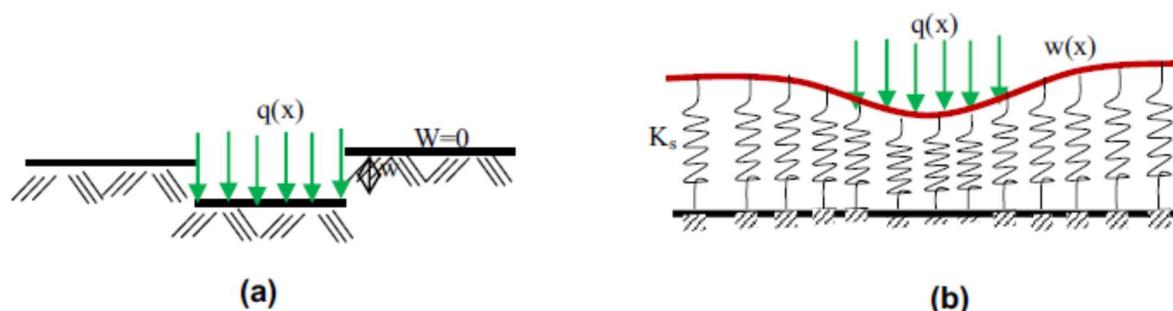


Figure IV.1 : (a) modèle physique. (b) modèle de Winkler.

Dans le modèle de Winkler, les sections verticales du sol de fondation sont modélisées par des ressorts élastiques discrets identiques caractérisés par leur rigidité mécanique, K_s (Figure IV.1(b)). Pour améliorer la prédiction du comportement de l'ensemble du système, un support d'interface entre la fondation et la poutre doit être intégré. Dans la littérature, de nombreuses approches interprètent la réponse de l'interaction sol-poutre de manière à simuler au mieux le comportement réel de celle-ci. Cette interaction est simulée au moyen d'un élément de flexion (poutre ou plaque) (Figure IV.2), d'une couche de cisaillement (Figure IV.3) ou d'une membrane prétendue (Figure IV.4).

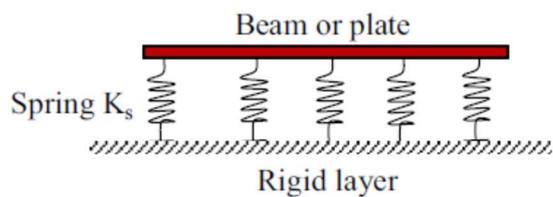


Figure IV. 2 : modèle utilisant une poutre ou une plaque.

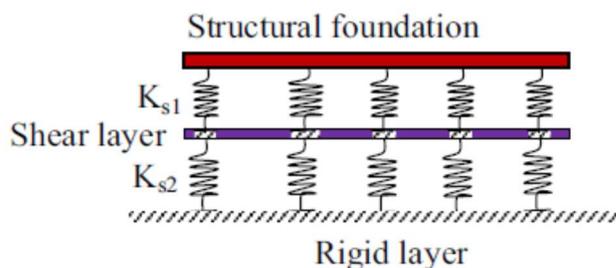


Figure IV.3 : modèle avec couche de cisaillement.

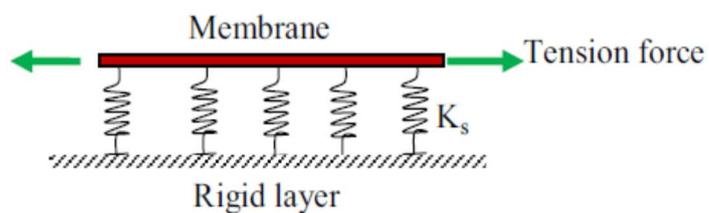


Figure IV.4 : modèle utilisant une membrane tendue.

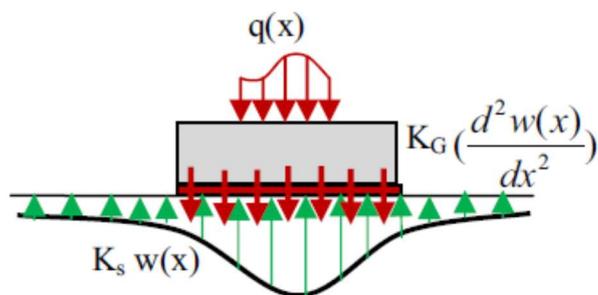


Figure IV.5 : modèle avec effet de cisaillement.

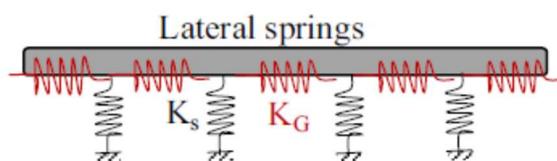


Figure IV. 6 : éléments avec ressorts de cisaillement.

D'autre part, pour prendre en compte l'interaction latérale en raison de la cohésion du sol, on utilise une plaque introduisant l'effet de cisaillement ($K_G \frac{d^2w(x)}{dx^2}$) (figure IV.5).

En outre, un ensemble de ressorts est introduit dans la direction longitudinale du sol de fondation afin de garantir l'interaction entre le comportement longitudinal et transversal (Figure IV.6).

IV.2.2 Formulation éléments finis :

Afin de bien simuler le comportement au niveau de l'interface sol-structure dans la formulation éléments finis, on introduit le phénomène de cisaillement (figure IV.5). En effet, la réaction à l'interface entre la poutre et le sol est exprimée comme une combinaison de deux termes, comme suit :

$$R(x) = K_S w(x) - K_G \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (IV.1)$$

Où : $w(x)$ est le déplacement vertical de la ligne centrale de la poutre,

K_S est le premier paramètre de la fondation, ou la rigidité verticale du sol de Winkler,

K_G est le deuxième paramètre de la fondation, il représente le module de cisaillement de celle-ci.

La théorie des poutres mène à l'équation différentielle du 4^{ème} ordre de la ligne centrale déformée de la poutre reposant sur un sol élastique, ce qui conduit à l'expression suivante :

$$E_b I_b \frac{d^4w(x)}{dx^4} + K_S b w(x) - K_G b \frac{d^2w(x)}{dx^2} - q(x) = 0 \quad (IV.2)$$

Où : $E_b I_b$ représente la rigidité flexionnelle de la poutre,

$q(x)$ est la charge extérieure,

b est la largeur de la poutre.

La formulation par éléments finis décrite ici, est la même que celle utilisée dans diverses publications (Cen et al. 2009; Logan 2012; Zienkiewicz et al. 2005). La poutre est divisée en un nombre d'éléments de la longueur L et de la rigidité flexionnelle $E_b I_b$. L'interpolation du champ de déplacement $w_e(x)$ pour un élément fini linéaire, peut être écrite comme suit :

$$w_e(x) = \langle N(x) \rangle \{q_e\} \quad (IV.3)$$

Avec : $\{q_e\}$ est le vecteur des degrés de liberté.

Les fonctions de forme sont :

$$N_1(x) = 1 - 3 \left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2 \left(\frac{x}{L}\right)^3 ;$$

$$N_2(x) = x - 2 \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} ;$$

$$N_3(x) = 3 \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2 \left(\frac{x}{L}\right)^3 ;$$

$$N_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} .$$

L'énergie de déformation de l'élément poutre est écrite sous forme d'une somme telle que :

$$U = U_b + U_F$$

Avec U_b et U_F sont les énergies de déformation de la poutre fléchie et du sol de fondation respectivement.

Dans ce cas, l'énergie de déformation du sol de fondation est aussi décomposée en la somme suivante : $U_F = U_s + U_G$

Pour le modèle de la fondation à deux paramètres, Shen (2011) a donné l'expression de l'énergie de déformation, U_F , comme suit :

$$U_F = \frac{1}{2} \int_L K_s w^2(x) dx + \frac{1}{2} \int_L K_G \left(\frac{\partial w(x)}{\partial x}\right)^2 dx \quad (IV.4)$$

Substituant l'équation (IV.3) dans l'équation (IV.4) :

$$U_F = \frac{1}{2} \{q_e\}^t \left[\int_L K_s [N(x)]^t [N(x)] dx + \int_L K_G \left[\frac{dN(x)}{dx} \right]^t \left[\frac{dN(x)}{dx} \right] dx \right] \{q_e\} \quad (IV.5)$$

Ou bien sous une autre forme :

$$U_F = \frac{1}{2} \{q_e\}^t [KM_s] \{q_e\} + \frac{1}{2} \{q_e\}^t [KM_G] \{q_e\} \quad (IV.6)$$

Les matrices de rigidité correspondantes sont :

$$[KM_s] = \int_L K_s [N(x)]^t [N(x)] dx = \frac{K_1}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L^2 \\ & 4L^2 & 13L & -13L^2 \\ & & 156 & -22L^2 \\ Sym & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (IV.7)$$

$$[KM_G] = \int_L K_G \left[\frac{dN(x)}{dx} \right]^t \left[\frac{dN(x)}{dx} \right] dx = \frac{K_2}{30} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ & & 36 & -3L^2 \\ Sym & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (IV.8)$$

Avec : $K_1 = K_s bL$ et $K_2 = \frac{K_G b}{L}$

De la même façon l'énergie de déformation de la poutre en flexion est :

$$U_B = \frac{1}{2} E_b I_b \{q_e\}^t \left[\int_L \left[\frac{d^2 N(x)}{dx^2} \right]^t \left[\frac{d^2 N(x)}{dx^2} \right] dx \right] \{q_e\} \quad (IV.9)$$

Substituant l'équation (IV.3) dans l'équation (IV.9), on obtient :

$$[K_b] = \frac{E_b I_b}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ Sym & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (IV.10)$$

Le vecteur charge $\{F_e\}$ dépend des forces distribuées le long de l'élément. Pour une charge uniforme $q(x) = q_0$, le vecteur charge correspondant peut être formulé comme suit :

$$\{F_e\} = \int_L [N(x)]^t q(x) dx = q_0 \int_L [N(x)]^t dx \quad (\text{IV.11})$$

IV.3 Méthode des éléments spectraux

Dans ce chapitre, la matrice de rigidité dynamique pour les éléments unidimensionnels tels que les barres et les poutres (Black T. (2005)), est établie dans le domaine fréquentiel, en utilisant la solution exacte des équations du mouvement. Nous exposant d'abord un aperçu sur la transformée de Fourier discrète (DFT).

IV.3.1 Transformée de Fourier discrète (DFT)

En mathématiques, il est bien connu qu'un signal périodique arbitraire peut être décomposé en plusieurs composantes harmoniques et, dans la transformation inverse, le signal peut être synthétisé en superposant toutes ses composantes harmoniques. C'est la base de l'analyse spectrale de Fourier (Lee, U. (2009)).

Soit $x(t)$ est une fonction périodique continue du temps t , avec la période T , on peut toujours la représenter sous forme d'une série de Fourier telle que :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{i\omega_n t} \quad (\text{IV.12})$$

Où X_n est le nième coefficient de Fourier pour la fonction périodique continue $x(t)$.

Il est donné par :

$$X_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i\omega_n t} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty) \quad (\text{IV.13})$$

Bien que la fonction $x(t)$ soit périodique continue dans le temps, avec une période T , seules les valeurs échantillonnées de la fonction sont disponibles. Cela est vrai, lorsque l'historique de la fonction $x(t)$ est mesuré expérimentalement sous la forme de données numérisées prises avec un espacement de temps égal en utilisant un système moderne d'acquisition de données. Soit N le

nombre d'échantillons dans le domaine temporel et, comme le montre la figure IV.7, on suppose qu'ils sont échantillonnés à des intervalles de temps également espacés donnés par (Lee, U. (2009)) :

$$\Delta t = \frac{T}{N} \quad (IV.14)$$

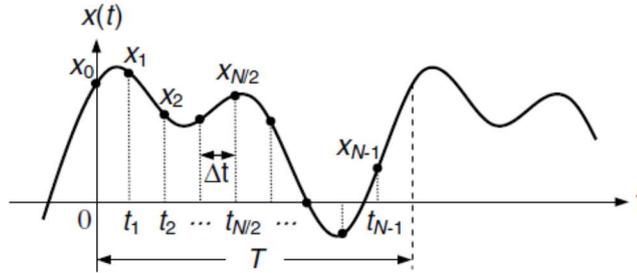


Figure IV.7 : Échantillonnage d'une fonction périodique $X(t)$ de période T à intervalle de temps égal Δt

Nous exprimons les N échantillons dans une série discrète $\{x_r\}$, où : $x_r = x(t_r)$, $t_r = r\Delta t$

et $r = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

En utilisant la série temporelle discrète $\{x_r\}$, l'intégrale de l'équation IV.13 peut être approximativement remplacée par la sommation :

$$X_n = \frac{1}{T} \sum_{r=0}^{N-1} x_r e^{-i\omega_n t_r} \Delta t \quad (IV.15)$$

En utilisant l'équation (IV.14), l'équation (IV.15) peut être réécrite comme suit :

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} x_r e^{-i\omega_n t_r} \quad (IV.16)$$

IV.3.2 Élément spectral pour les barres :

Un élément barre est représenté sur la figure IV.8 Dans cet élément de section Ω et de masse volumique ρ , on suppose que le mouvement d'onde est longitudinal (Hamioud S, Khalfallah S (2017)). L'équation du mouvement est obtenue à partir de l'équilibre des forces axiales incluant les forces d'inertie, soit :

$$-F(x, t) + \left(F(x, t) + \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} dx \right) - \Omega \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{IV.17})$$

Ou bien :

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial x} dx = \rho \Omega \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (\text{IV.18})$$

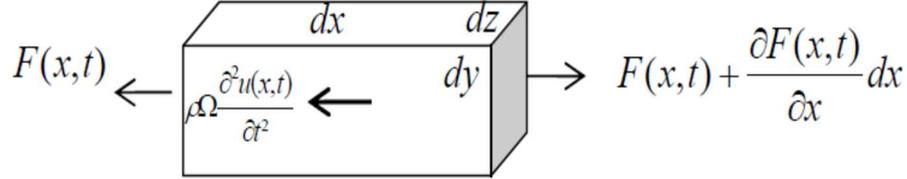


Figure IV.8 : Élément barre infinitésimal.

En supposant que le matériau est élastique linéaire et que la section est constante de l'élément barre, la relation contrainte-déformation est donnée par :

$$\sigma(x, t) = \frac{F(x, t)}{\Omega} = E \cdot \varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{IV.19})$$

D'où

$$F(x, t) = \sigma(x, t) \cdot \Omega = E \Omega \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (\text{IV.20})$$

Substituant l'équation (IV.20) à l'équation (IV.18), on obtient :

$$E \Omega \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \rho \Omega \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (\text{IV.21})$$

Soit :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{IV.22})$$

La solution de l'équation (IV.22) peut s'écrire sous la forme :

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (\text{IV.23})$$

On dérive l'équation (IV.18) deux fois par rapport à x , puis deux fois par rapport à t , on obtient:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \cdot T(t) \quad (\text{IV.24.a})$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = X(x) \cdot \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} \quad (\text{IV.24.b})$$

Remplaçant les équations (IV.24.a) et (IV.24.b) dans l'équation (IV.22), on obtient :

$$X(x) \cdot \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \frac{E}{\rho} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \cdot T(t) \quad (\text{IV.25})$$

Ou bien, en séparant les variables x et t :

$$\frac{\frac{d^2 T(t)}{dt^2}}{T(t)} = \frac{E}{\rho} \frac{\frac{d^2 X(x)}{dx^2}}{X(x)} = c \quad (\text{IV.26})$$

Avec c est une constante.

La solution de l'équation (IV.26) est donnée par la relation :

$$T(t) = D e^{i\omega t} \quad (\text{IV.27})$$

Substituant l'équation (IV.27) dans l'équation (IV.26), on obtient :

$$D e^{i\omega t} (\omega^2 + c) = 0 \quad (\text{IV.28})$$

D'où :
$$c = -\omega^2 \quad (\text{IV.29})$$

$$T(t) = D_1 e^{i\omega t} + D_2 e^{-i\omega t} \quad (\text{IV.30})$$

La même démarche est utilisée pour calculer $X(x)$, on a donc :

$$X(x) = A e^{ikx} \quad (\text{IV.31})$$

On remplace $X(x)$ dans l'équation (IV.26), on obtient :

$$A e^{ikx} (E k^2 + c \rho) = 0 \quad (\text{IV.32})$$

Substituant l'équation (IV.29) dans l'équation (IV.32), et après simplification, on obtient :

$$E k^2 - \omega^2 \rho = 0 \quad (\text{IV.33})$$

D'où la solution :

$$k = \pm \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (\text{IV.34})$$

Donc :

$$X(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (\text{IV.35})$$

En combinant la solution spatiale (équation (IV.35)) et de la solution temporelle (équation (IV.30)), on obtient la solution totale pour le champ de déplacement, soit :

$$u(x, t) = (Ae^{ikx} + Be^{-ikx}) \cdot e^{i\omega t} \quad (\text{IV.36})$$

Sous forme matricielle :

$$u(x, t) = \langle e^{ikx} \quad e^{-ikx} \rangle \cdot e^{i\omega t} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.37})$$

Les déplacements nodaux peuvent être écrits en termes de coefficients inconnus A et B :

$$u_1 = u(0, t) = (A + B) \cdot e^{i\omega t} \quad (\text{IV.38})$$

$$u_2 = u(L, t) = (A \cdot e^{ikL} + B \cdot e^{-ikL}) \cdot e^{i\omega t} \quad (\text{IV.39})$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{ikL} & e^{-ikL} \end{bmatrix} \cdot e^{i\omega t} \cdot \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.40})$$

Donc :

$$e^{i\omega t} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{ikL} & e^{-ikL} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \begin{bmatrix} e^{-ikL} & -1 \\ -e^{ikL} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.41})$$

Substituant l'équation (IV.41) dans l'équation (IV.37), on obtient :

$$u(x, t) = \langle e^{ikx} \quad e^{-ikx} \rangle \cdot \frac{1}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \begin{bmatrix} e^{-ikL} & -1 \\ -e^{ikL} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.42})$$

D'où :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = ik \langle e^{ikx} - e^{-ikx} \rangle \cdot \frac{1}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \begin{bmatrix} e^{-ikL} & -1 \\ -e^{ikL} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.43})$$

En déduit les forces nodales :

$$F_1 = -E\Omega \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = -ik \cdot E\Omega \langle 1 - 1 \rangle \cdot \frac{1}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \begin{bmatrix} e^{-ikL} & -1 \\ -e^{ikL} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.44})$$

$$F_2 = E\Omega \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = ik \cdot E\Omega \langle e^{ikL} - e^{-ikL} \rangle \frac{1}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \begin{bmatrix} e^{-ikL} & -1 \\ -e^{ikL} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.45})$$

Ou bien :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = ik \cdot E\Omega \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ e^{ikL} & -e^{-ikL} \end{bmatrix} \frac{1}{e^{-ikL} - e^{ikL}} \begin{bmatrix} e^{-ikL} & -1 \\ -e^{ikL} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.46})$$

Soit :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{ik \cdot E\Omega e^{ikL}}{e^{ikL} - e^{-ikL}} \begin{bmatrix} 1 + e^{-2ikL} & -2e^{-ikL} \\ -2e^{-ikL} & 1 + e^{-2ikL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.47})$$

La matrice de rigidité spectrale pour un élément barre est par conséquent :

$$[K_{spec}] = \frac{ik \cdot E\Omega e^{ikL}}{e^{ikL} - e^{-ikL}} \begin{bmatrix} 1 + e^{-2ikL} & -2e^{-ikL} \\ -2e^{-ikL} & 1 + e^{-2ikL} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.48})$$

Pour obtenir les fréquences en vibration libre, le déterminant de la matrice spectrale doit être nul, on écrit donc :

$$\det([K_{spec}]) = \frac{ik \cdot E\Omega e^{ikL}}{e^{ikL} - e^{-ikL}} \left\| \begin{bmatrix} 1 + e^{-2ikL} & -2e^{-ikL} \\ -2e^{-ikL} & 1 + e^{-2ikL} \end{bmatrix} \right\| = 0 \quad (\text{IV.49})$$

Ce qui donne :

$$\cos(2kL) - i \sin(2kL) = 1 \quad (\text{IV.50})$$

On ne tient pas compte de la partie imaginaire, on a donc :

$$\sin(2kL) = 0 \quad (\text{IV.51})$$

La solution est obtenue pour :

$$k = \frac{n\pi}{2L} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (\text{IV.52})$$

avec $n = 1, 2, 3, \dots$

La fréquence au $n^{\text{ième}}$ mode de vibration, est alors :

$$f = \frac{n}{4L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{IV.53})$$

Les fréquences des 5 premiers modes de vibration sont données dans le tableau IV.1 suivant :

Tableau IV.1 : Les fréquences des 5 premiers modes de vibration.

Mode de vibration n	1	2	3	4	5
$f / \left(\frac{1}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \right)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$

IV.3.3 Élément spectral pour les poutres de Bernoulli-Euler :

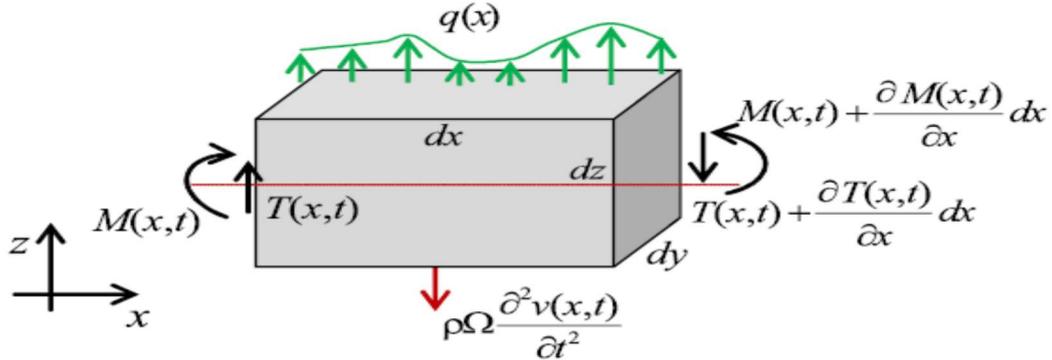


Figure IV.9 : Élément poutre infinitésimal.

Soit un élément de poutre (figure IV.9) de dimensions infinitésimales dx , dy et dz soumis :

- aux efforts internes : moment fléchissant $M(x, t)$ et effort tranchant $T(x, t)$ à la position x et à l'instant t ,
- à la charge externe répartie $q(x)$,
- à la force d'inertie $\rho\Omega \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} dx$ (Hamioud S, Khalfallah S (2016)).

$v(x, t)$ étant le déplacement vertical d'un point de la poutre à l'abscisse x et à l'instant t .

L'équilibre des forces suivant l'axe vertical s'écrit donc :

$$T(x, t) - \left(T(x, t) + \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} dx \right) + q(x, t) dx - \rho\Omega \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} dx = 0 \quad (\text{IV.54})$$

Ou bien :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = q(x, t) - \rho\Omega \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{IV.55})$$

Comme : $T(x, t) = \frac{\partial M(x,t)}{\partial x}$ et $M(x, t) = EI \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$

L'équation (IV.55) se réduit à l'équation différentielle générale suivante :

$$\frac{EI}{\rho\Omega} \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = \frac{q(x)}{\rho\Omega} \quad (\text{IV.56})$$

Ou bien, en posant $c^2 = \frac{EI}{\rho\Omega}$:

$$c^2 \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = \frac{q(x)}{\rho\Omega} \quad (\text{IV.57})$$

L'équation (IV.57) est l'équation différentielle aux dérivées partielles qui régit le mouvement en vibration transversale de la poutre Euler-Bernoulli.

En vibration libre, les forces externes sont considérées nulles, l'équation (IV.57) devient :

$$c^2 \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{IV.58})$$

La solution générale de l'équation (IV.58), peut être déterminée par la méthode des variables séparées :

$$v(x, t) = X(x).Y(t) \quad (\text{IV.59})$$

Substituant l'équation (IV.59) dans l'équation (IV.58), on obtient :

$$c^2 \frac{\frac{d^4 X(x)}{dx^4}}{X(x)} = -\frac{\frac{d^2 Y(t)}{dt^2}}{Y(t)} = \omega^2 = cste \quad (\text{IV.60})$$

Avec : ω est la pulsation naturelle.

Ce qui conduit à :

$$\frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) \quad (\text{IV.61.a})$$

$$\frac{\partial^2 Y(t)}{\partial t^2} = -\omega^2 Y(t) \quad (\text{IV.61.b})$$

On pose : $\alpha^4 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = \omega^2 \frac{\rho\Omega}{EI}$

On pose α la pulsation naturelle adimensionnelle, l'équation différentielle (IV.61.a) est écrite comme suit :

$$\frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} - \alpha^4 X(x) = 0 \quad (\text{IV.62})$$

La solution de l'équation (IV.62) est donnée par :

$$X(x) = C e^{\beta x} \quad (\text{IV.63})$$

Substituant l'équation (IV.63) dans l'équation (IV.62), on obtient :

$$(\beta^4 - \alpha^4)C e^{\beta x} = 0 \quad (\text{IV.64})$$

La solution de l'équation (IV.64) est alors :

$$X(x) = c_1 e^{i\alpha x} + c_2 e^{-i\alpha x} + c_3 e^{\alpha x} + c_4 e^{-\alpha x} \quad (\text{IV.65})$$

Le déplacement $v(x, t)$ est donc :

$$v(x, t) = [c_1 e^{i\alpha x} + c_2 e^{-i\alpha x} + c_3 e^{\alpha x} + c_4 e^{-\alpha x}] e^{i\omega t} \quad (\text{IV.66})$$

L'équation aux dérivées partielles (IV.58) peut être résolue en utilisant la décomposition de Fourier du champ de déplacement en une somme de fonctions harmoniques comme suit :

$$v(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_n(x) \cdot e^{i\omega_n t} \quad (\text{IV.67})$$

En substituant l'équation (IV.67) dans la relation (IV.58), nous obtenons les valeurs propres du problème pour $\omega = \omega_n$.

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \alpha^4 W(x) = 0 \quad (\text{IV.68})$$

Donc, la solution de l'équation (IV.68) est donnée par l'expression suivante :

$$W(x, \omega) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x + c_3 \cosh \alpha x + c_4 \sinh \alpha x \quad (\text{IV.69})$$

Les déplacements et les rotations aux nœuds, c'est-à-dire en : $x = 0$ et $x = L$ sont donnés par :

$$\{q_e\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \alpha \\ \cos \alpha L & \sin \alpha L & \cosh \alpha L & \sinh \alpha L \\ -\alpha \sin \alpha L & \alpha \cos \alpha L & \alpha \sinh \alpha L & \alpha \cosh \alpha L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.70})$$

Avec : $\theta(x)$ est la rotation, elle est donnée par l'expression : $\theta(x) = \frac{\partial X(x,\omega)}{\partial x}$,

Ou bien sous forme compacte :

$$\{q_e\} = [B(\omega)]\{c\} \quad (\text{IV.71})$$

Donc :

$$\{c\} = [B(\omega)]^{-1}\{q_e\} \quad (\text{IV.72})$$

Avec :

$$[B(\omega)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \alpha \\ \cos \alpha L & \sin \alpha L & \cosh \alpha L & \sinh \alpha L \\ -\alpha \sin \alpha L & \alpha \cos \alpha L & \alpha \sinh \alpha L & \alpha \cosh \alpha L \end{bmatrix} \quad (\text{IV.73})$$

Pour résoudre ce problème il est nécessaire de poser 4 conditions aux limites indépendantes.

Pour cela, on considère le modèle de la poutre représentée sur la figure (IV.10).

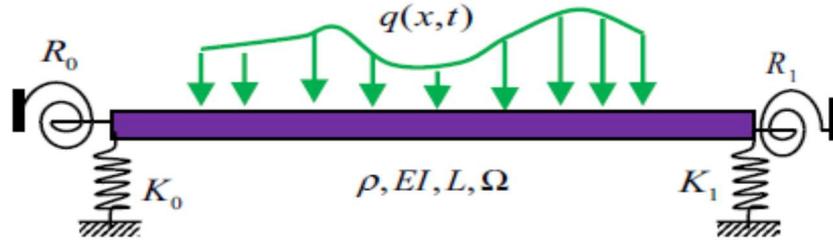


Figure IV.10 : Modèle mécanique de la poutre.

Le vecteur des forces nodales est établi grâce aux conditions aux appuis.

En $x = 0$:

$$T_1 = EI \frac{d^3 X(0)}{dx^3} + k_0 X(0) \quad (\text{IV.74.a})$$

$$M_1 = EI \frac{d^2 X(0)}{dx^2} - R_0 \frac{dX(0)}{dx} \quad (\text{IV.74.b})$$

Et, en $x = L$:

$$T_2 = EI \frac{d^3 X(L)}{dx^3} - K_1 X(L) \quad (\text{IV.74.c})$$

$$M_2 = EI \frac{d^2 X(L)}{dx^2} + R_1 \frac{dX(L)}{dx} \quad (\text{IV.74.d})$$

Sous forme matricielle, le vecteur forces nodales est donc :

$$\{F_e\} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} K_0 & -E\alpha^3 & K_0 & E\alpha^3 \\ -E\alpha^2 & -R_0\alpha & E\alpha^2 & -R_0\alpha \\ E\alpha^3\sin\alpha L - K_1\cos\alpha L & -E\alpha^3\cos\alpha L - K_1\sin\alpha L & E\alpha^3\sinh\alpha L - K_1\cosh\alpha L & E\alpha^3\cosh\alpha L - K_1\sinh\alpha L \\ -E\alpha^2\cos\alpha L - R_1\alpha\sin\alpha L & -E\alpha^2\sin\alpha L + R_1\alpha\cos\alpha L & E\alpha^2\cosh\alpha L + R_1\sinh\alpha L & E\alpha^2\sinh\alpha L + R_1\alpha\cosh\alpha L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} \quad (IV.75)$$

Ou bien sous forme compacte :

$$\{F_e\} = [F(\omega)]\{c\} \quad (IV.76)$$

Substituant l'équation (IV.72) dans l'équation (IV.76), on obtient :

$$\{F_e\} = [F(\omega)][B(\omega)]^{-1}\{q_e\} \quad (IV.77)$$

La matrice de rigidité spectrale est par conséquent :

$$[K_e(\omega)] = [F(\omega)][B(\omega)]^{-1} \quad (IV.78)$$

IV.4 Conclusion

Le modèle de Winkler ne permet pas de prendre en compte l'interaction latérale au niveau de l'interface sol-structure. Nous avons utilisé un modèle de fondation élastique à deux paramètres pour combler cette lacune, ce modèle inclut l'effet du cisaillement. Le comportement au niveau de l'interface sol-structure est ainsi bien représenté en utilisant la formulation éléments finis.

L'élément fini spectral est basé sur L'équilibre des forces qui aboutit à une équation différentielle partielle séparable du second ordre. Nous avons établi la formulation par des éléments spectraux pour les barres et les poutres de Bernoulli-Euler. La relation entre les déplacements nodaux et les forces nodales aboutit à une matrice de rigidité spectrale dépendant de la fréquence et de la rigidité.

Chapitre V

Résultats et discussions

V.1. Introduction

Dans ce chapitre nous présentons les résultats de l'étude statique et dynamique de l'interaction sol-structure liés aux références (Boudaa S. et al. (2019)), (Boudaa S. et al. bis (2019)) et (Boudaa S. et al. (2020)).

Dans l'étude statique, il s'agit d'une analyse de l'interaction statique entre des poutres et des sols multicouches en utilisant une fondation élastique à deux paramètres.

La deuxième étude consiste en l'analyse dynamique de l'interaction sol-structure par la méthode des éléments spectraux.

La troisième étude consiste en l'analyse modale d'une poutre sur une fondation élastique par la méthode des éléments spectraux.

Nous procédons d'abord à la validation des codes de calcul, afin de nous assurer de l'exactitude et de la précision des résultats. Pour ce faire, nous avons effectué une étude de convergence par des exemples numériques existants dans la littérature, et pour lesquels nous avons comparé leurs résultats avec les nôtres.

Nos résultats ont été obtenus en utilisant ces codes de calcul, dans lesquels nous avons développé des programmes spécifiques à chaque cas étudié, sous l'environnement Fortran et Matlab.

V.2 Cas 1 :

Étude de l'interaction statique entre des poutres et des sols multicouches en utilisant une fondation élastique à deux paramètres

Dans cette analyse, le problème de l'interaction sol-structure a été étudié en utilisant efficacement un modèle à deux paramètres du sol stratifié (Boudaa S. et al. (2019)). La poutre et le sol sont modélisés au moyen de la FEM intégrant des déformations de cisaillement.

Cependant, pour assurer un déplacement nul à la frontière du substrat, le maillage doit être étendu loin de la zone chargée. Pour améliorer la précision des calculs, le maillage éléments finis bidimensionnels est raffiné dans la zone chargée.

La modélisation utilise un état de contrainte plane pour la poutre et un état de déformation plane pour le sol de fondation. Dans ce travail, une étude paramétrique est élaborée pour montrer l'influence :

- 1) - de l'interaction latérale poutre-sol de fondation.
- 2) - des propriétés mécaniques du sol de fondation.
- 3) - de la couche de Ballast.

V.2.1 Validation et convergence

a) Modèle avec interaction verticale

Premièrement, la poutre sur le modèle de sol de fondation de Winkler (Figure V.1) est utilisée pour montrer la capacité du code de calcul conçu pour les simulations numériques. Cette poutre a été étudiée à l'aide de la méthode du maillage libre par Binesh en 2012. Le module de réaction du sol de fondation est de $K_s = 10^4 \text{ kN/m}^3$ et la charge appliquée P est une charge verticale concentrée d'intensité égale à 100 kN , cette charge est appliquée à 2 m de l'extrémité gauche de la poutre comme montré en figure V.1. La poutre a une longueur de 14 m et une rigidité à la flexion de $2604,167 \text{ kN.m}^2$, soit l'équivalent d'une poutre d'épaisseur égale à $0,25 \text{ m}$, et de module de Young $E = 2 \times 10^3 \text{ MPa}$. La poutre est étudiée dans des conditions de contraintes planes. Le coefficient de Poisson est supposé égal à $\nu = 0,25$.

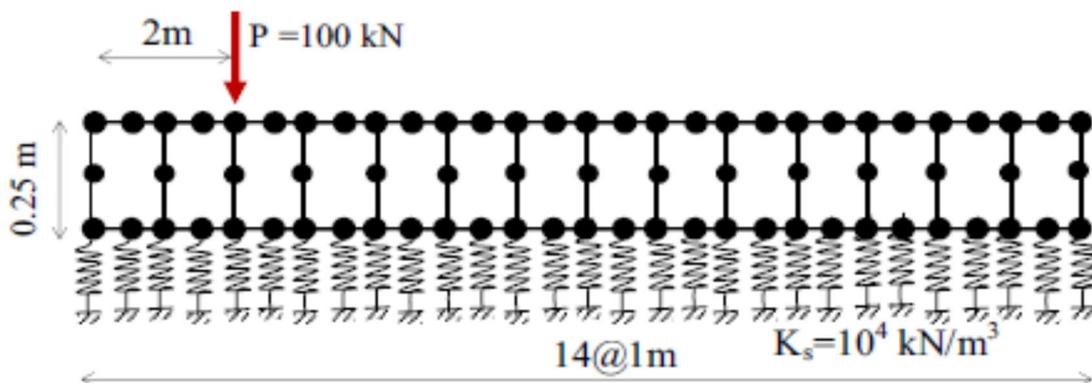
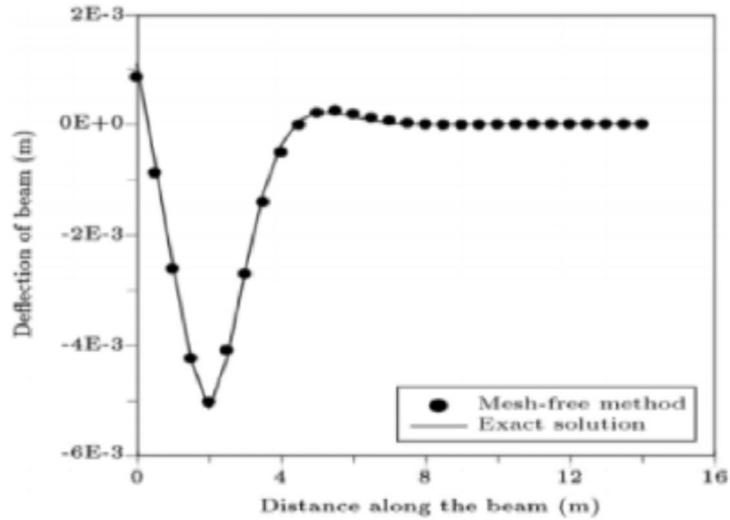
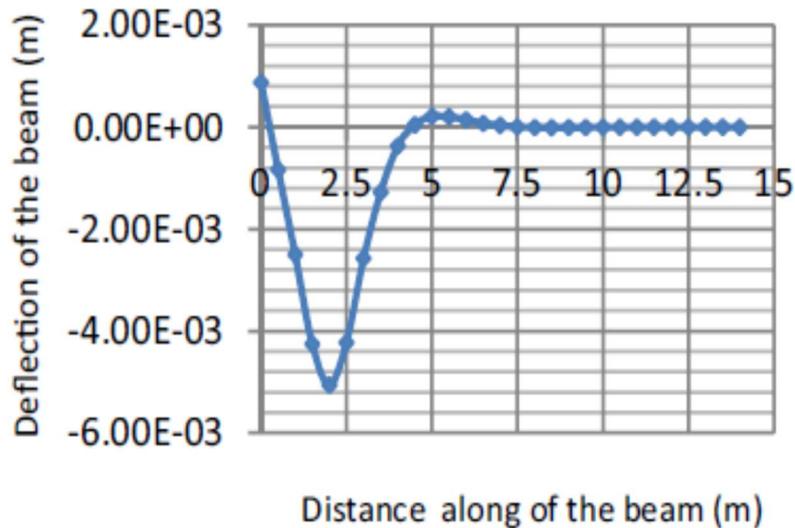


Figure V.1 Poutre sur un sol de fondation élastique (modèle de Winkler)

Le modèle comprend 73 nœuds et un maillage avec 14 blocs pour l'intégration numérique. Les résultats obtenus à l'aide de la méthode du maillage libre Binesh (2012) et de la solution exacte sont illustrés sur la figure V.2. À des fins de comparaison, il existe un bon accord entre la solution exacte, la méthode du maillage libre et les résultats de cette approche, ce qui confirme la précision et l'efficacité de la solution numérique proposée.



(a)



(b)

Figure V.2 : Déplacement vertical le long de la poutre. (a) Méthode du maillage libre (Binesh 2012). (b) La présente étude.

La figure V.3 décrit les déplacements horizontaux des nœuds de l'interface continue. Elle montre des déplacements importants dans la région gauche où la force est appliquée, tandis qu'une légère fluctuation est notée, celle-ci est accompagnée de faibles déplacements aux niveaux des nœuds lointains.

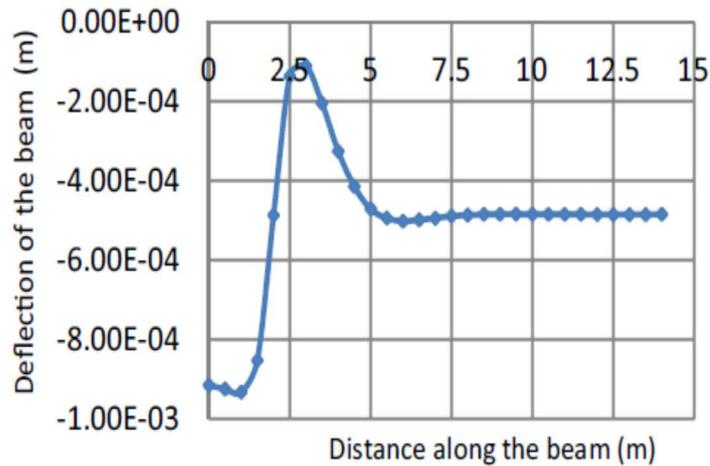


Figure V.3 Déplacement horizontal le long des nœuds de l'interface poutre-sol de fondation

b) Modèle avec interaction horizontale

Dans le deuxième cas, le modèle avec interaction horizontale est représenté en figure V.4. Cette fois-ci, les ressorts sont introduits dans les deux directions verticale et horizontale simultanément.

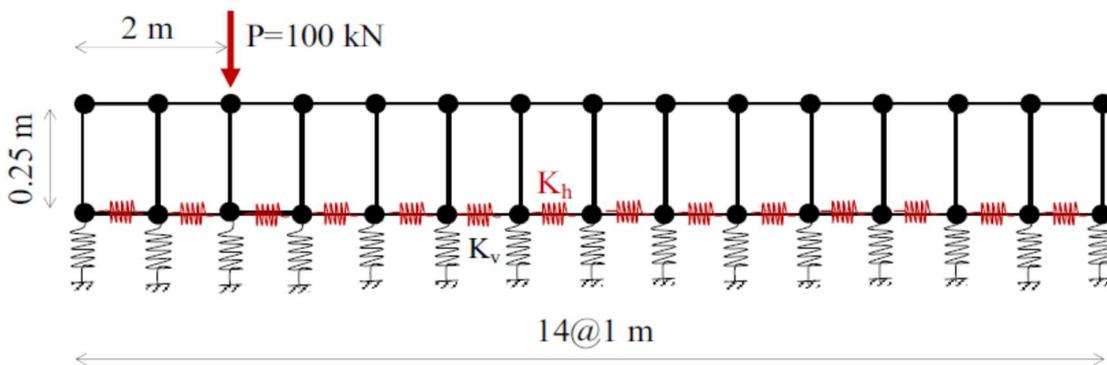


Figure V.4 Poutre sur un sol de fondation élastique (Modèle avec des ressorts horizontaux et verticaux)

Les ressorts horizontaux sont placés pour surmonter le déficit rencontré dans le modèle de Winkler. Dans cette étude, les mêmes valeurs de rigidité des ressorts horizontaux et verticaux sont considérées en raison de la continuité du milieu ($K_h = K_v = 10^4 \text{ kN/m}^3$).

Lorsque l'on tient compte de l'interaction latérale dans l'analyse (c'est-à-dire en rajoutant des ressorts horizontaux), les déplacements horizontaux sont différents de ceux obtenus par l'approche de Winkler (ressorts verticaux uniquement). Dans ce cas, on observe une nette amélioration du comportement de la poutre (Figure V.5), en effet, les déplacements horizontaux sont réduits de 45,13% sur l'axe de symétrie en $x = 0 \text{ m}$ et de 100% lorsque $x \geq 5 \text{ m}$ tout au long du sol sous la poutre.

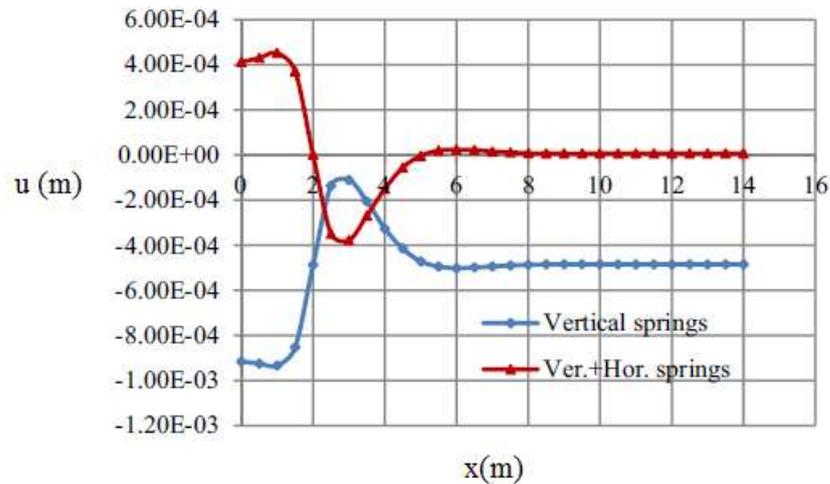


Figure V.5 Champ de déplacement horizontal

Par contre, on remarque sur la figure V.6 que l'interaction latérale, c'est-à-dire, l'ajout des ressorts horizontaux, apparaît n'avoir aucun effet sur les déplacements verticaux (les deux courbes sont superposées).

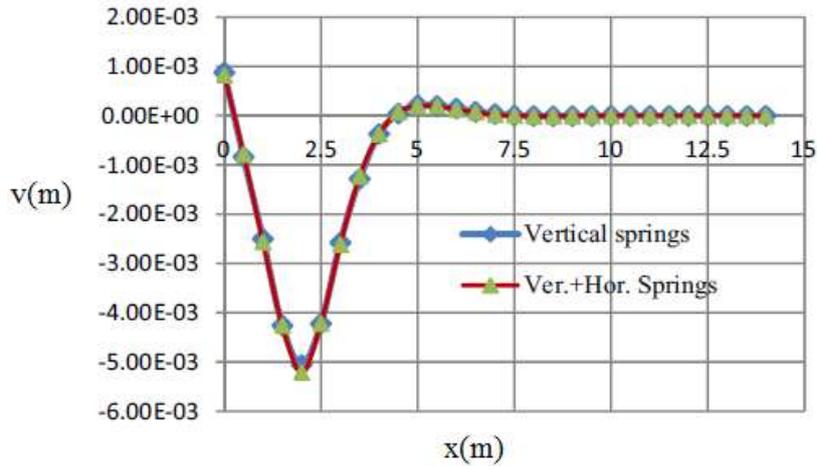


Figure V.6 Champ de déplacement vertical

V.2.2 Analyse de la poutre sur une base rigide

Pour cela on considère la poutre de longueur $L=5m$, de largeur $b=0,60m$ et de hauteur $h=0,80m$, reposant sur un sol de fondation rigide (voir Figure V.7). La charge appliquée sur la poutre est de $500kN$, celle-ci est située au milieu de la poutre. Pour des raisons de symétrie, seule la moitié de la poutre est prise en compte dans l'analyse.

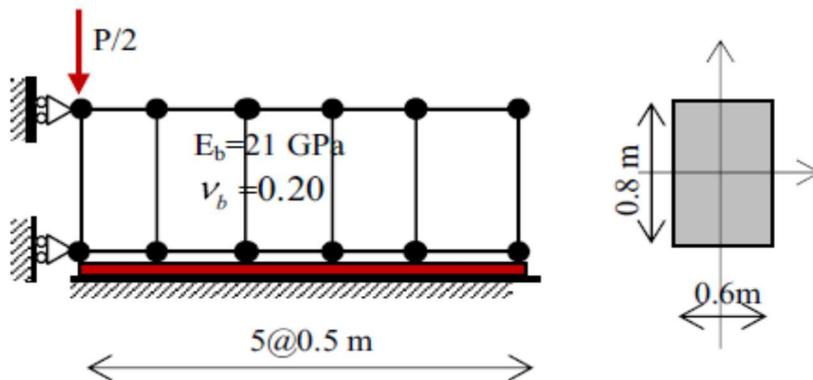


Figure V.7 Poutre sur une base rigide

La poutre reposant sur une base rigide présente des déplacements horizontaux importants au niveau des nœuds supérieurs voisins de la zone où la charge est appliquée (Figure V.8), alors que les déplacements verticaux sont très importants au milieu de la poutre et diminuent en s'éloignant de celle-ci (figure V.9).

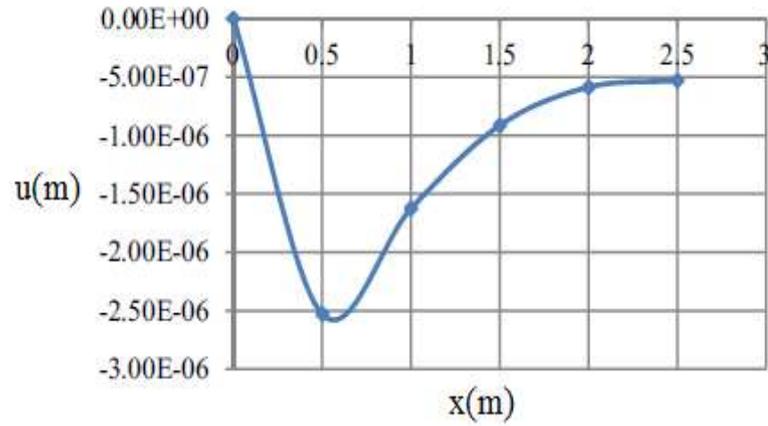


Figure V.8 Champ de déplacement horizontal

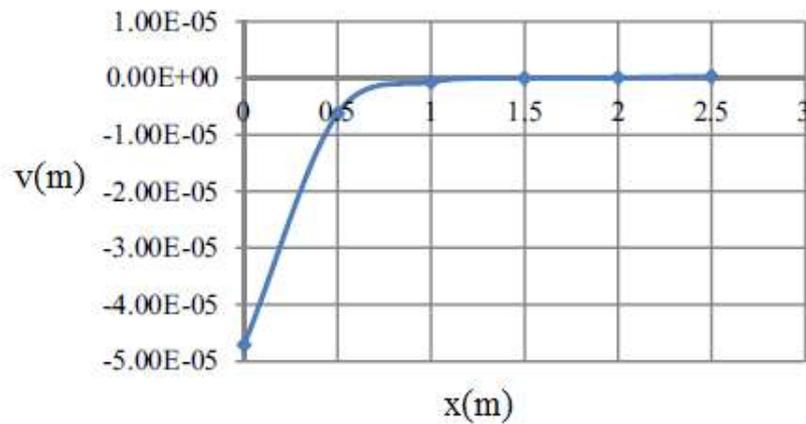


Figure V.9 Champ de déplacement vertical

V.2.3 Influence des propriétés du sol sur la réponse de l'interaction

a) Influence de la rigidité du sol

Les propriétés mécaniques de la poutre et du sol de fondation sont représentées sur la figure V.10. Le maillage est raffiné dans la direction horizontale alors qu'il est uniforme dans la direction verticale. La profondeur du sol de fondation est $H=30m$ et sa longueur est $L=54m$.

On considère différentes valeurs du module de Young du sol E_s , variant de 15 à 100MPa. Le coefficient de Poisson ν_s est pris égal à 0,30.

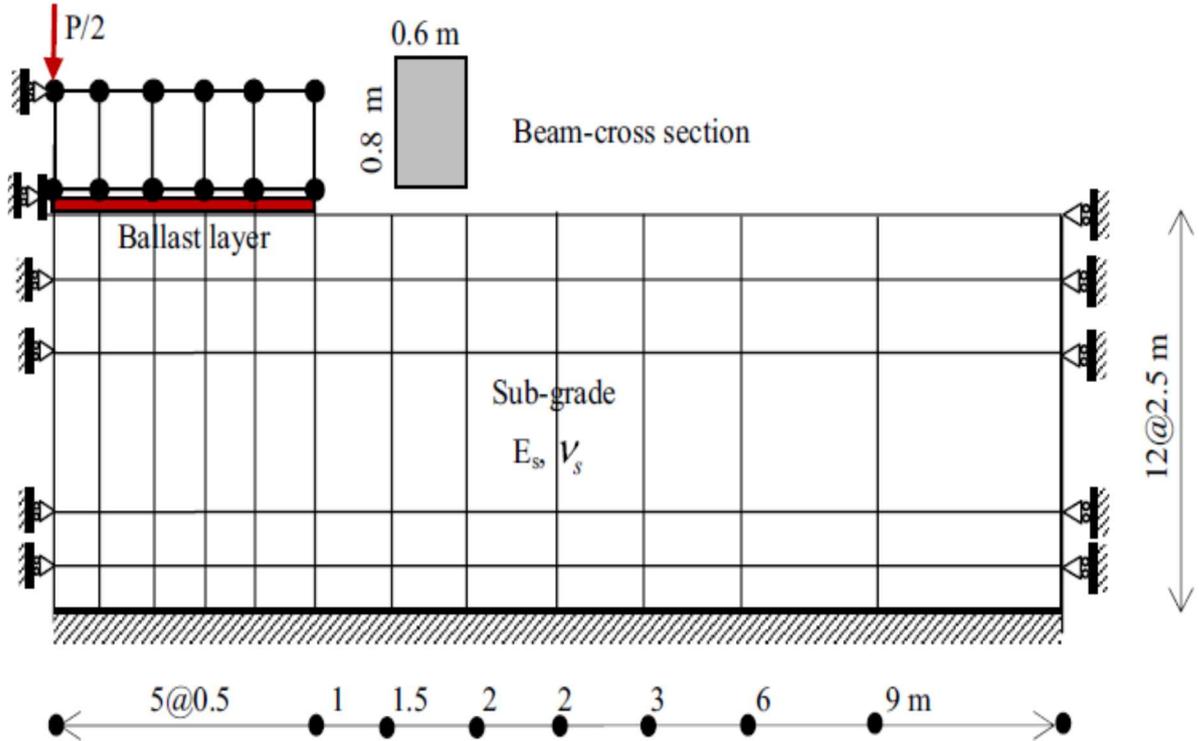


Figure V.10 Géométrie de la poutre et du sol de fondation

Les figures V.11 et V.12 montrent l'influence des propriétés mécaniques du sol sur la réponse au niveau de l'interface continue sol-poutre. On remarque que lorsque les sols ont de faibles rigidités, les déplacements dans les deux directions horizontale et verticale sont plus importants.

De plus, on observe que le comportement du sol s'améliore lorsque le module de Young du sol E_s passe de 15 à 45MPa. Ce qui est confirmé par les figures V.11 et V.12, en effet, le déplacement horizontal maximum (en $x=7m$) diminue de $1,15 \times 10^{-3}$ à $0,357 \times 10^{-3} m$ (soit une diminution de 31,04%), et le déplacement vertical (en $x=0$) diminue aussi de 11×10^{-3} à $3,89 \times 10^{-3} m$ (35,36%).

Dans le même contexte, lorsque le module de Young du sol E_s passe de 45 à 100MPa, une amélioration du comportement du sol est montrée sur les figures V.11 et V.12, en effet, le

déplacement horizontal passe de $0,357 \times 10^{-3}$ à $0,154 \times 10^{-3} m$ en $x=7m$ (43,13%) et le déplacement vertical passe de $3,89 \times 10^{-3}$ à $1,85 \times 10^{-3} m$ en $x=0$ (47,55%).

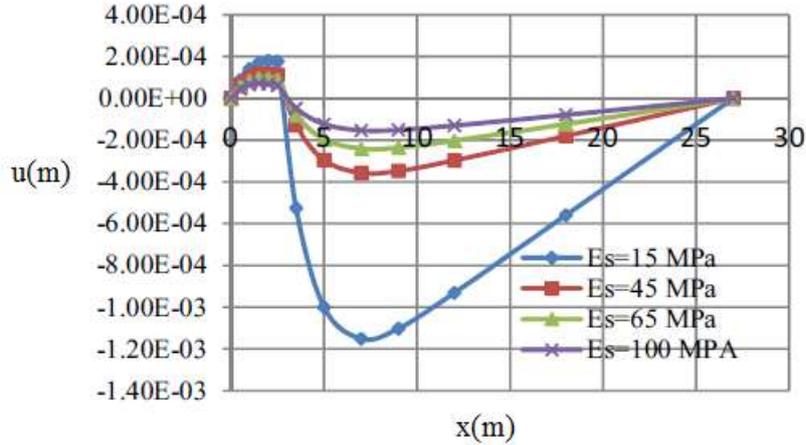


Figure V.11 Champ de déplacement horizontal au niveau de l'interface

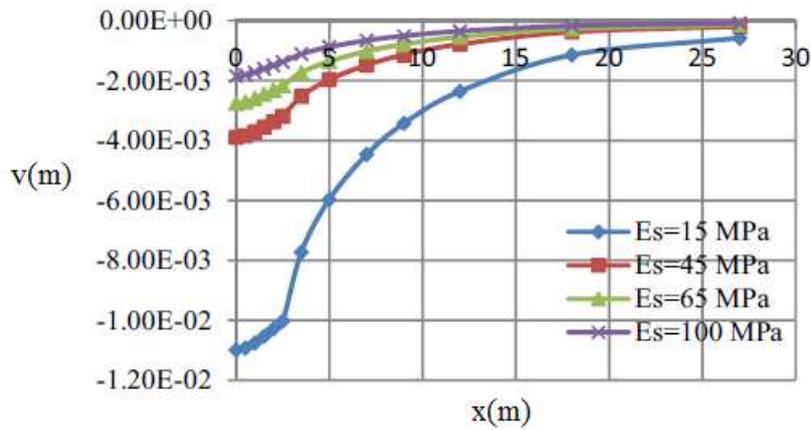


Figure V.12 Champ de déplacement vertical au niveau de l'interface

De la même façon, on représente les déplacements horizontaux et verticaux des nœuds supérieurs de la poutre sur les figures V.13 et V.14 respectivement.

On voit bien sur la Figure V.13 que les déplacements horizontaux augmentent lorsque la rigidité du sol diminue, par contre, on remarque sur la Figure V.14, une indépendance partielle entre les propriétés du sol et les déplacements verticaux des nœuds supérieurs de la poutre, lorsque la

distance x augmente. Les déplacements verticaux sont importants seulement lorsque $E_s=15MPa$, tandis que leurs valeurs se rapprochent lorsque E_s varie de 45 à 100MPa.

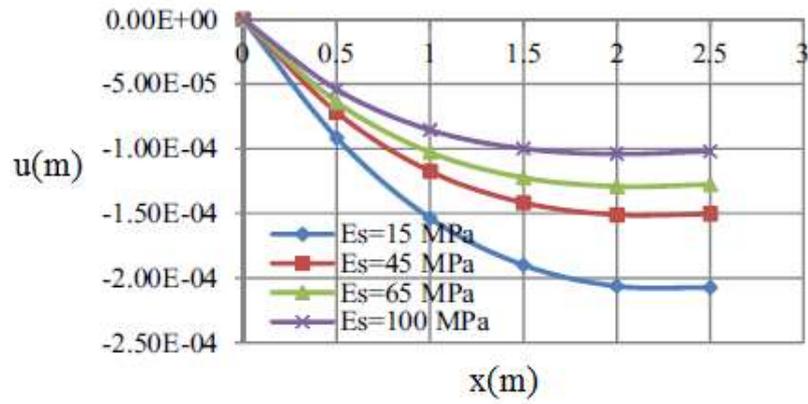


Figure V.13 Déplacement horizontal des nœuds supérieurs de la poutre

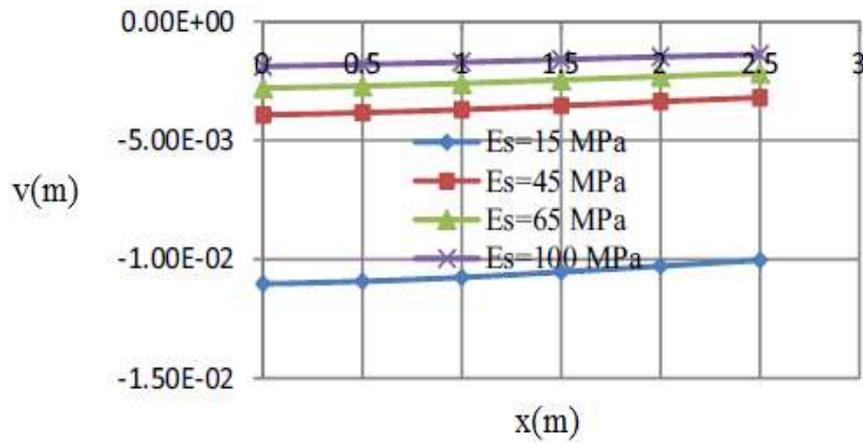


Figure V.14 Déplacement vertical des nœuds supérieurs de la poutre

b) Influence de la profondeur du sol

Sur la figure V.15, les déplacements horizontaux des nœuds de l'interface sont représentés en fonction de la profondeur du sol, on remarque que le changement de la profondeur du sol de fondation n'a presque aucun effet sur le comportement de l'interaction horizontale (c'est-à-dire sur les déplacements horizontaux).

Par contre, sur la figure V.16, on note une légère différence entre les déplacements verticaux des nœuds de l'interface lorsque la profondeur du sol de fondation augmente.

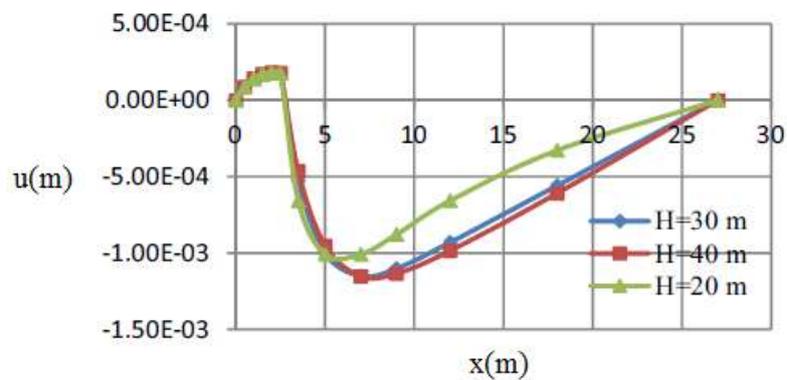


Figure V.15 Déplacements horizontaux des nœuds de l'interface

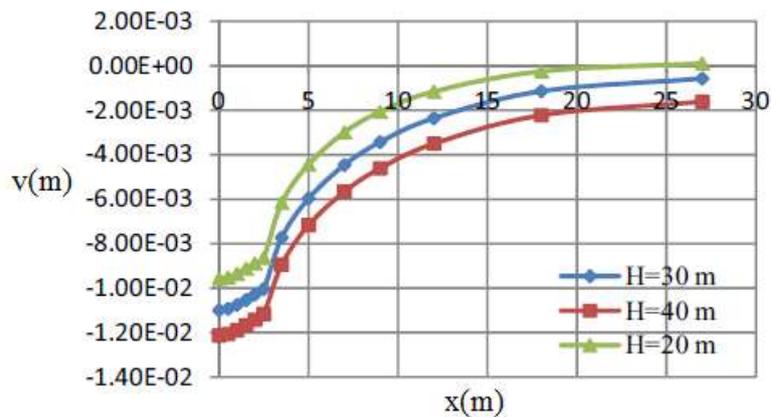


Figure V.16 Déplacements verticaux des nœuds de l'interface

V.2.4 Influence de la couche de ballast

De nos jours, les exigences en matière de résistance et de stabilité des voies de chemin de fer s'imposent de plus en plus, et ceci en raison par exemple de la grande vitesse des trains et de la charge imposée sur les essieux (Petriaev et al. 2017; Sayeed et Shahin 2018).

Le ballast doit être conçu pour répondre à de nombreux rôles, à savoir :

- l'isolation du bruit sur les lignes de chemin de fer dans les régions peuplées.
- la minimisation des effets de la vibration.
- la stabilité des voies ferrées et de la couche de répartition de la charge.
- fournit un support longitudinal et latéral de la voie pour mieux résister aux charges imposées par les véhicules ainsi qu'aux contraintes thermiques.

Dans ce qui suit et pour montrer l'influence de la couche de ballast, on considère l'exemple représenté en figure V.17.

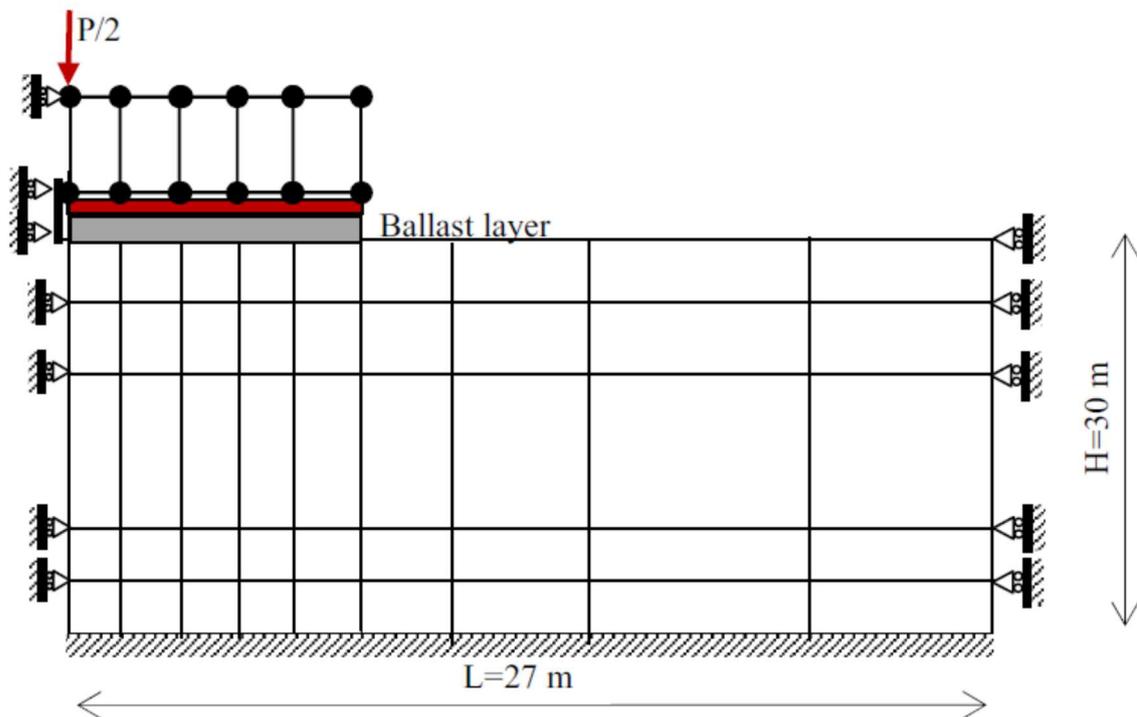


Figure V.17 Couche de ballast

La couche de ballast est introduite entre le sol de fondation et la poutre. Les résultats numériques montrent que la présence de cette couche n'a pas d'effet sur les réponses horizontale

et verticale de l'interface continue, par contre, elle a une grande influence sur le comportement de la poutre, ceci est montré en figures V.18 et V.19. En effet, l'introduction de la couche de ballast entre la poutre et le sol, implique une diminution des déplacements horizontaux de la poutre lorsque l'épaisseur de celle-ci augmente (voir figure V.18), cependant, les déplacements verticaux de la poutre augmentent avec l'épaisseur de cette couche (voir figure V.19).

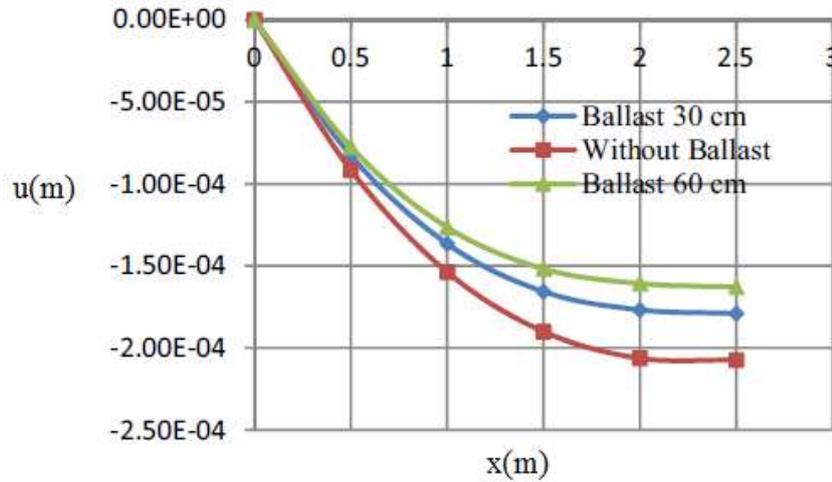


Figure V.18 Déplacements horizontaux des nœuds de la poutre

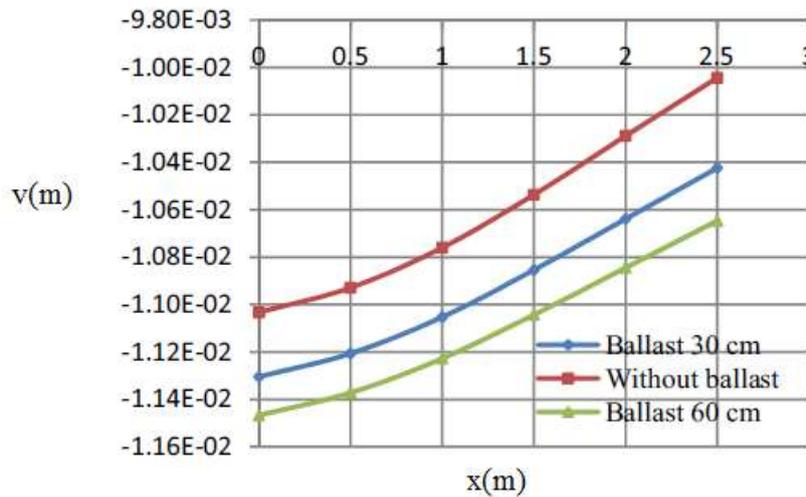


Figure V.19 Déplacements verticaux des nœuds de la poutre

Finalement, les champs de déplacement dans la poutre et le sol de fondation sont analysés. Sur la figure V.20, on remarque que les déplacements horizontaux ont une distribution

irrégulière dans le milieu, alors que sur la figure V.21, les déplacements verticaux sont maximaux dans la région où la charge est appliquée et diminuent progressivement en s'éloignant de celle-ci.

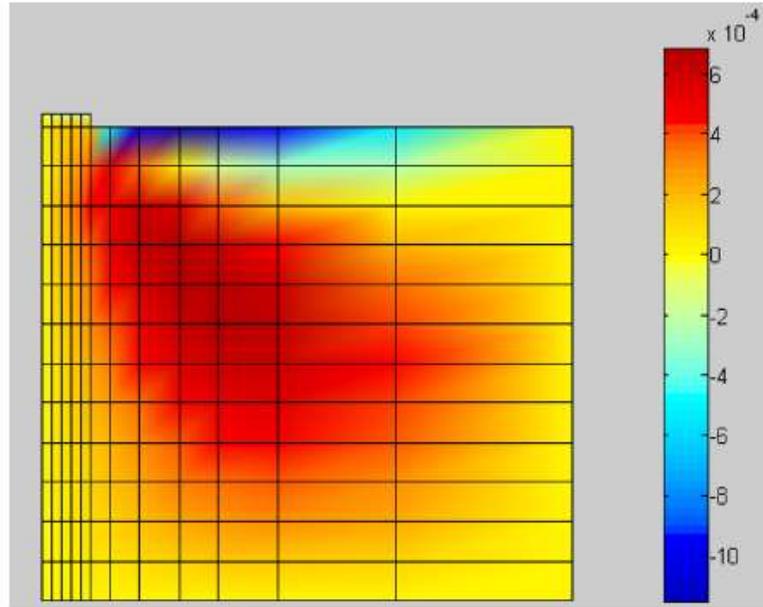


Figure V.20 Champ de déplacement horizontal

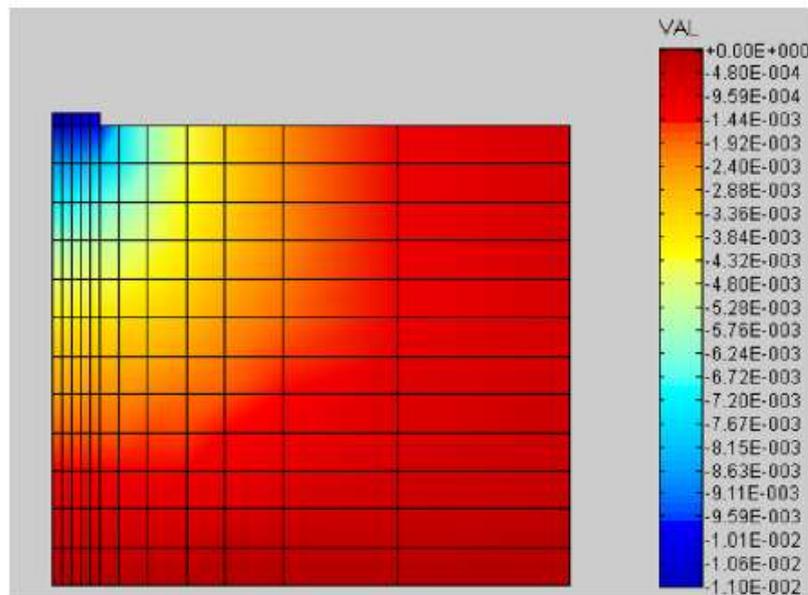


Figure V.21 Champ de déplacement vertical

Conclusion

L'étude des poutres prismatiques avec une parfaite adhérence avec un demi-espace bidimensionnel homogène, linéaire, élastique et isotrope est proposée. En se basant sur les expressions de l'énergie de déformation, les déformations de l'élément poutre soumis à un état de contrainte plane et du sol de fondation soumis à un état de déformation plane, sont formulées et utilisées dans cette analyse.

Les résultats numériques montrent que cette formulation conduit à une convergence rapide et permet d'étudier divers problèmes d'interaction sol-structure. Une étude paramétrique a été réalisée et les conclusions suivantes peuvent être tirées :

- ✓ Il existe une influence notable de l'interaction latérale sur le comportement de la poutre-sol de fondation.
- ✓ Les propriétés du sol ont un effet primordial sur la poutre et sur l'interaction poutre-sol de fondation.
- ✓ La profondeur de la fondation élastique a un effet régulier sur l'interaction poutre-sol de fondation.
- ✓ L'introduction d'une couche de ballast (couche de hauteur) engendre une influence sur l'interaction poutre-sol de fondation dans la direction longitudinale.
- ✓ La formulation en éléments finis a été établie indépendamment des conditions aux limites de la poutre, par conséquent, cette approche peut être facilement utilisée pour d'autres conditions aux limites des poutres.
- ✓ Cette approche peut être considérée comme une introduction au cas non linéaire et à l'analyse vibratoire de l'interaction sol-structure.

Le présent travail a fait l'objet d'une publication internationale dans :

International Journal of Advanced Structural Engineering (2019) 11 :21–30
<https://doi.org/10.1007/s40091-019-0213-9>

L'intitulé de l'article est :

Static interaction analysis between beam and layered soil using a two-parameter elastic foundation

V.3 Cas 2 :

Étude dynamique de l'interaction sol-structure par la méthode des éléments spectraux.

Dans cette partie de la thèse, la méthode des éléments spectraux est utilisée pour quantifier les effets de l'interaction sol-structure sur les vibrations libres des poutres (Boudaa S. et al. bis (2019)). Cette méthode est une technique numérique puissante adaptée à l'analyse dynamique. À cet effet, une étude paramétrique est réalisée pour analyser :

- a) Le comportement d'une poutre en béton sur une fondation élastique.
- b) L'effet de la longueur de la poutre.
- c) L'effet des propriétés du sol.

On commence d'abord par une validation du code de calcul.

V.3.1 Validations et convergences

Exemple 1 : Poutre sans sol de fondation

Afin de mettre en évidence la précision de cette approche, on étudie la vibration libre de la poutre d'Euler-Bernoulli en porte-à-faux sans sol de fondation, présentée dans l'article de Kacar A. et al. (2001), où la solution est obtenue par la méthode de transformation différentielle (DTM). Les résultats de cette étude comparés à ceux obtenus par la DTM (Kacar A. et al. 2001) et par la solution exacte (Rao S.S. 2003) sont présentés dans le tableau V.1.

Tableau V.1. Comparaison des valeurs de α (pulsation propre adimensionnelle) avec celles de la DTM et de la solution exacte.

Mode	1	2	3
<i>Cette étude</i>	1.87510	4.69409	7.85175
<i>DTM (Kacar et al. 2001)</i>	1.87510	4.69409	7.85175
<i>Solution exacte (Rao 2003)</i>	1.87510	4.69409	7.85175

Comme le montre le tableau V.1, nos résultats sont en très bon accord comparés à ceux de la DTM (differential transform method) et de la solution exacte.

Exemple 2 : Poutre en porte-à-faux sur ressort en translation

Dans ce cas, on étudie la poutre en porte-à-faux illustrée par la figure V.22. Les caractéristiques de cette poutre sont les suivantes : acier inoxydable, les propriétés mécaniques et les dimensions géométriques regroupées dans le tableau V.2. Là encore, les performances de la SEM comparées à la FEM classique sont présentées dans le tableau V.3.

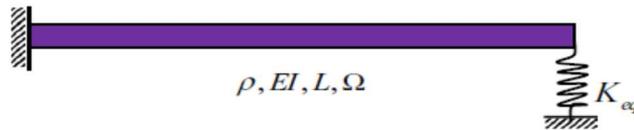


Figure V.22 Poutre en acier inoxydable sur un ressort en translation

Tableau V.2. Propriétés mécaniques et géométriques de la poutre en acier inoxydable

Module d'Young (GPa)	Masse volumique (kg/m ³)	Coefficient de Poisson	Longueur (mm)	Largeur (mm)	Epaisseur (mm)	Raideur du ressort (N/m)
210	7850	0.3	450	20	3	10000

Tableau V.3. Les trois premières fréquences de vibration par la FEM et par la SEM

Mode	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)
1 FEM	53.7740	163.1550	-
200 FEM	46.4038	110.0322	229.5686
1 SEM	46.4039	110.0322	229.5686
Résultats numériques (Jafari et al.2014)	46.4039	110.0355	229.5714
Solution exacte (Jafari et al.2014)	46.4039	110.0323	229.5695

Pour obtenir des résultats précis en utilisant la FEM, il est nécessaire de faire un maillage de la poutre avec environ 200 éléments finis, ce qui conduit à des matrices de rigidité et de masse de taille (400×400). Ainsi, le temps de calcul et l'espace mémoire requiert dans cette phase de calcul doivent être suffisants.

Exemple 3 : Poutre en porte-à-faux sur un ressort rotationnel

On considère la même poutre en acier inoxydable utilisée dans l'exemple précédent, elle repose cette fois-ci sur un ressort qui travaille à la rotation, ayant une raideur $K = 10^4 \text{ N/m/rad}$. (voir Figure V.23).

Le tableau V.4 montre les trois premières fréquences de vibration en utilisant la FEM et la SEM. En outre, environ 200 éléments finis sont nécessaires pour obtenir des résultats satisfaisants, tandis qu'un seul élément spectral suffit pour obtenir des résultats acceptables.

La convergence des résultats numériques est validée par les programmes numériques utilisant la SEM et la FEM développés pour ce type de problème. Le programme élément finis est utilisé pour calculer les fréquences propres et tracer la forme des modes de vibration, alors que le second utilisant les éléments spectraux permet le calcul du coefficient de fréquence adimensionnel pour en déduire les fréquences propres de vibration.

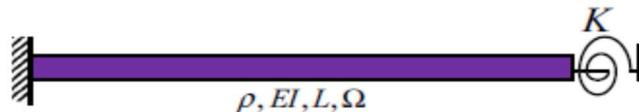


Figure V.23 Poutre en acier inoxydable sur un ressort en rotation

Tableau V.4. Les trois premières fréquences de vibration par la FEM et la SEM

Mode	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)
1 FEM	19.9778	166.3721	-
200 FEM	19.6605	106.1847	262.2182
1 SEM	19.6897	106.3991	262.7394

V.3.2 Poutre en béton sur fondation élastique

Ici, une poutre cantilever en béton est utilisée. Le béton est de la classe C30. La poutre est caractérisée par les propriétés géométriques et mécaniques représentées dans le tableau V.5.

Tableau V.5. Propriétés mécaniques et géométriques de la poutre en béton

Poutre en béton	Module d'Young (GPa)	Masse volumique (kg/m ³)	Longueur (m)	Largeur (m)	Épaisseur (m)	Raideur du ressort (kN/m ³)
	30	2000	10	1.10	0.5	5×10^4

La poutre repose sur un sol modélisé par des ressorts de type Winkler, ce qui est illustré en figure V.24 (a), le schéma statique équivalent est représenté en figure V.24 (b), en effet, les différentes rigidités k sont remplacées par la rigidité équivalente du sol K_{eq} .

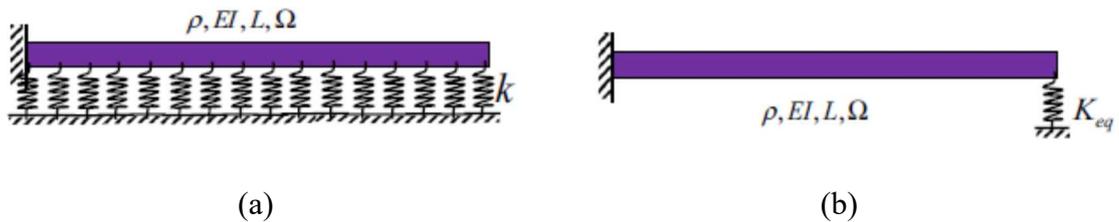
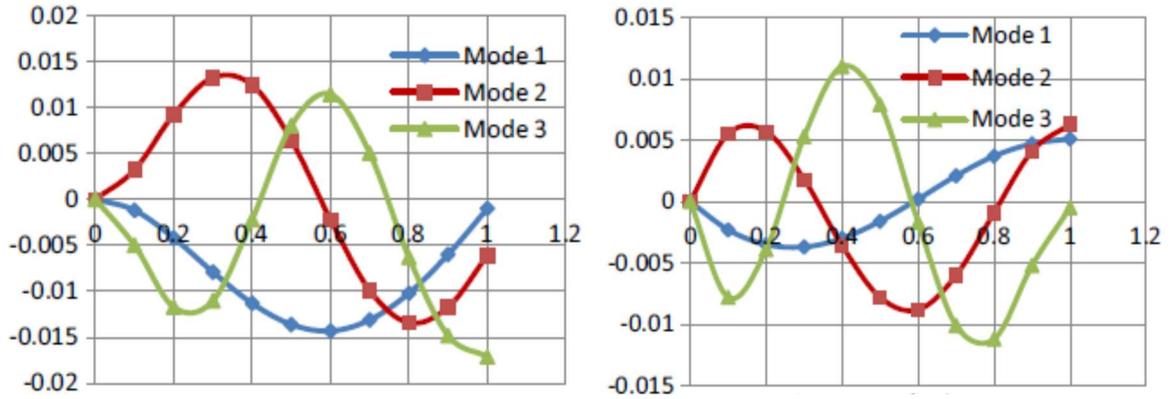


Figure V.24 Poutres sur des ressorts élastiques : (a) modèle de Winkler, (b) schéma statique équivalent.

La robustesse de la SEM est prouvée dans cet exemple : il suffit d'un seul élément spectral pour obtenir les trois premières fréquences de vibration, tandis que l'analyse par la FEM nécessite environ 150 éléments finis pour converger au même résultat. Les trois premiers modes de vibration en translation et en rotation sont illustrés par les figures V.25 (a) et (b) respectivement.

On peut noter que la déflexion maximale est obtenue au premier mode de vibration alors que la rotation maximale est observée au troisième mode de vibration



(a) Vibration en translation

(b) Vibration en rotation

Figure V.25 Trois premiers modes de vibration

Dans le tableau V.6, on regroupe les fréquences des 3 premiers modes de vibration en utilisant 1 élément fini, 150 éléments finis et 1 élément spectral.

Tableau. V.6 Les trois premières fréquences de vibrations par la FEM et par la SEM

Mode	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)
1 FEM	17.5205	90.8901	-
150 FEM	13.4669	41.4406	78.4476
1 SEM	13.4669	41.4406	78.4476

V.3.3 Effet de la longueur de la poutre

Dans ce cas, on veut étudier l'influence de la longueur de la poutre sur la vibration libre, pour cela, on choisit trois différentes longueurs de la poutre Euler–Bernoulli. Le modèle est représenté par la figure V.26.

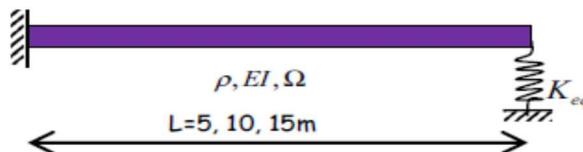


Figure V.26 Poutre étudiée avec différentes longueurs

Le tableau V.7 illustre les trois premiers modes de vibration obtenus avec la SEM et avec la FEM.

Tableau V.7 Les trois premiers modes de vibrations par la FEM et la SEM

Mode	Méthode utilisée	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)
$L = 5\text{ m}$	<i>SEM</i>	41.1618	96.2746	225.7280
	<i>FEM (150 éléments)</i>	41.1618	96.2746	225.7280
$L = 10\text{ m}$	<i>SEM</i>	13.4669	41.4406	78.4476
	<i>FEM (150 éléments)</i>	13.4669	41.4406	78.4476
$L = 15\text{ m}$	<i>SEM</i>	6.0747	19.5078	40.0746
	<i>FEM (150 éléments)</i>	6.0747	19.5078	40.0746

Sur la base des résultats obtenus ci-dessus, la poutre est maillée avec 150 éléments finis. Les résultats numériques montrent que la longueur de la poutre a un grand effet sur la réponse dynamique de la poutre. En effet, lorsque la longueur est importante, on remarque que les fréquences de vibration diminuent considérablement. Ainsi, lorsqu'on augmente de trois fois la longueur de la poutre, la fréquence de vibration de celle-ci diminue de sept fois environ (voir Tableau V.7).

De plus, à partir de la théorie des poutres, on peut conclure que les poutres de faibles longueurs vibrent de manière différente de celles ayant de grande et de moyenne longueur. Des déformations (figure V.27) et des rotations (figure V.28) maximales sont observées le long des poutres de petites longueurs et ceci, en raison des déformations de cisaillement négligées dans les sections de ces poutres. Dans les vibrations en translation et en rotation, la longueur de la poutre influence l'amplitude de vibration, les poutres courtes vibrent avec la plus grande amplitude (Figures V.27 et V.28).

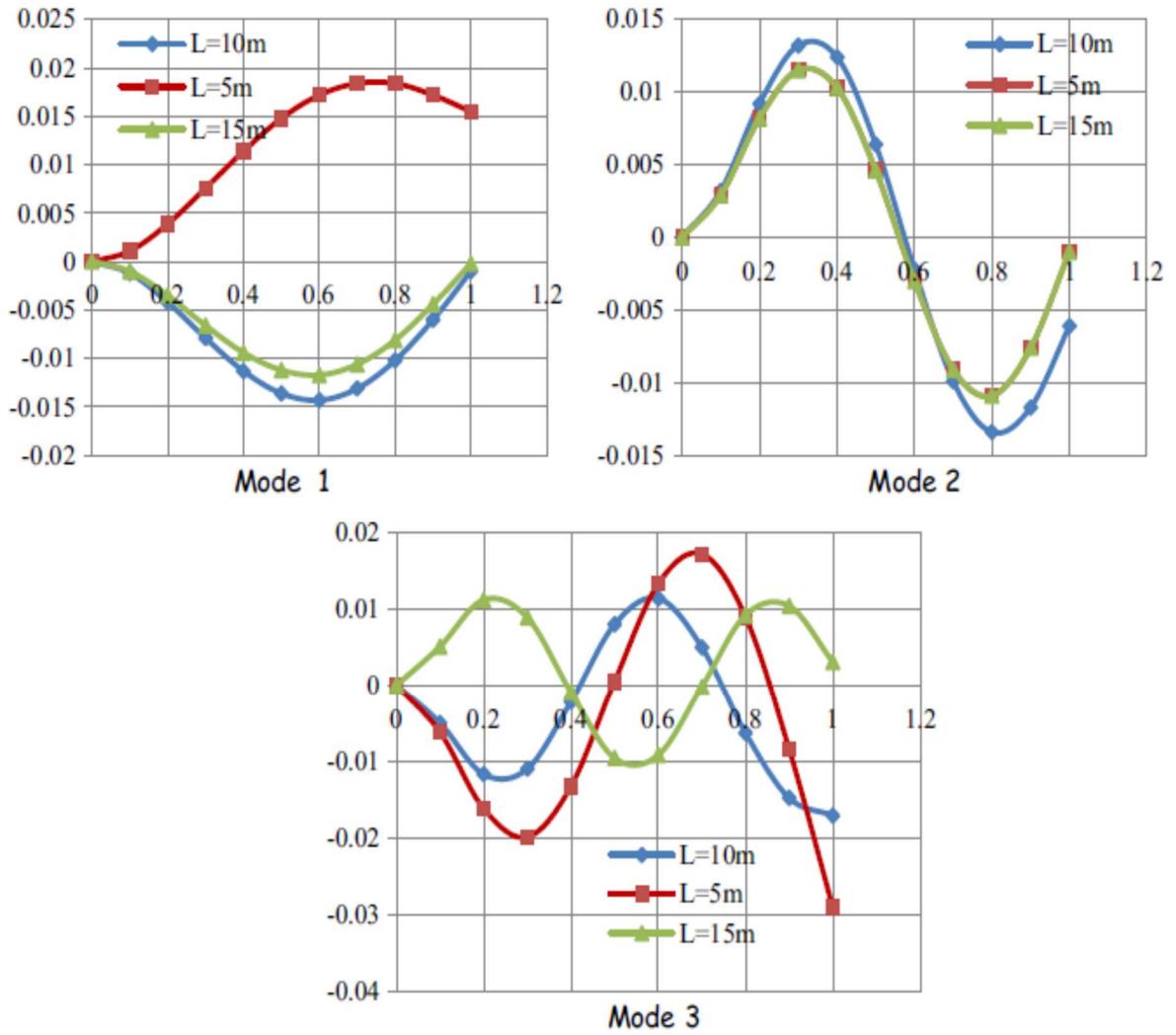


Figure V.27 Effet de la longueur de la poutre sur les vibrations en translation

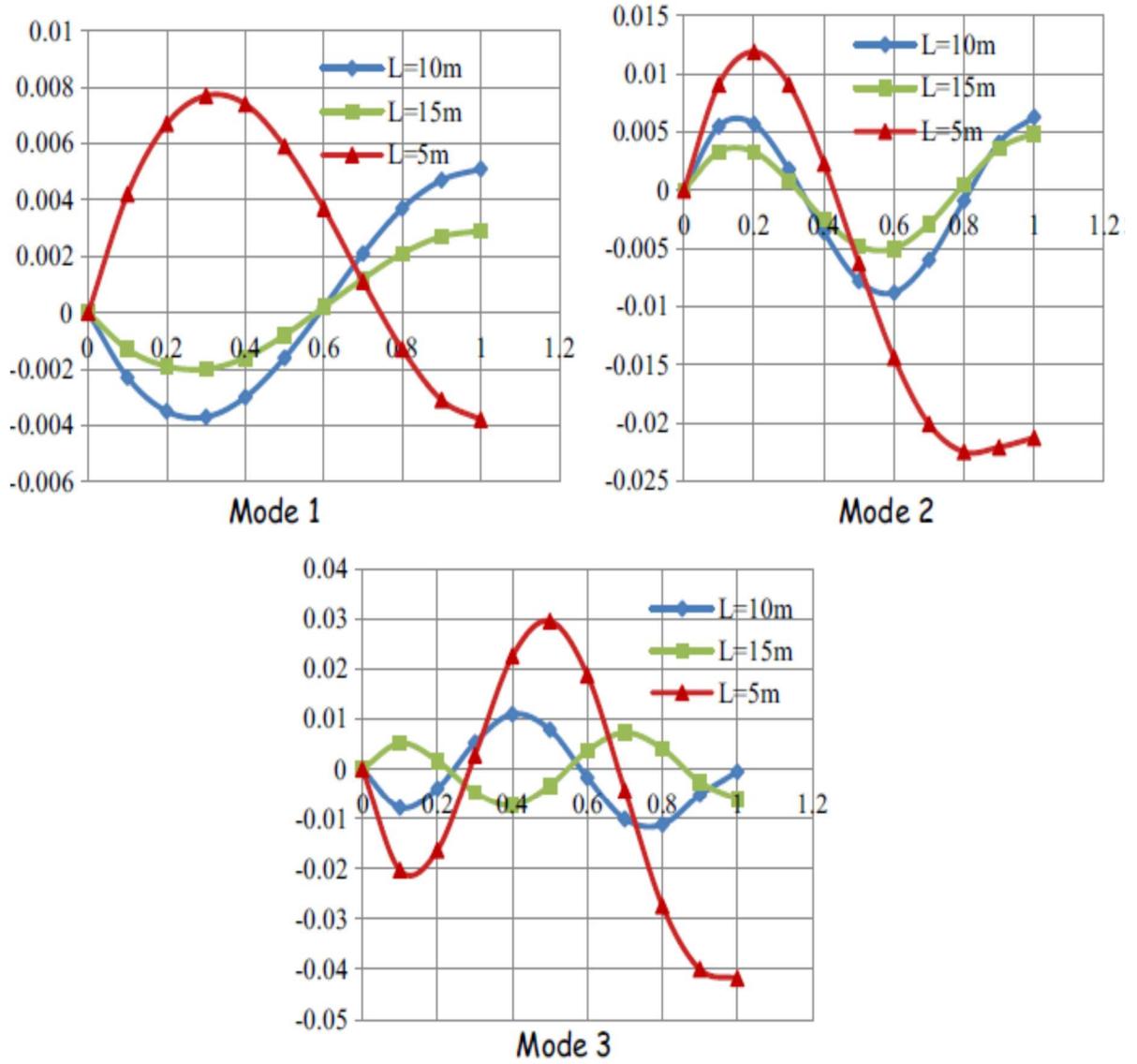


Figure V.28 Effet de la longueur de la poutre sur les vibrations en rotation

V.3.4 Effet des propriétés du sol

L'effet des propriétés mécaniques du sol est l'un des objectifs majeur de cette étude. Pour cette raison, trois types de sol ont été sélectionnés, ceux-ci reposent sur des ressorts de Winkler et variant de sol meuble, à modéré, à ferme, et dont les valeurs des rigidités sont respectivement égales à $K_0 = (0,5 ; 5 ; 50) \times 10^4 \text{ kN/m}^3$.

Les fréquences naturelles de ce système sont obtenues pour les trois premiers modes de vibration avec les différentes rigidités du sol, celles-ci sont énumérées dans le tableau V.8.

Tableau V.8 Les trois premières fréquences de vibration pour différentes valeurs de la rigidité du sol

Rigidité du sol	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)
$K_0 = 0,5 \times 10^4 \text{ kN/m}^3$	11.3701	26.5790	57.4415
$K_0 = 5 \times 10^4 \text{ kN/m}^3$	13.4669	41.4406	78.4477
$K_0 = 50 \times 10^4 \text{ kN/m}^3$	13.6926	41.1725	91.4894

Ce dernier montre que les fréquences augmentent avec les propriétés du sol, c'est-à-dire, lorsque la rigidité du sol augmente.

La figure V.29 représente l'allure de la poutre en vibration dans les trois cas de sol ($K_0 = (0,5 ; 5 ; 50) \times 10^4 \text{ kN/m}^3$).

Lorsque le sol possède une faible rigidité ($K_0=0,5 \times 10^4 \text{ kN/m}^3$), les vibrations en rotation de la poutre se font du côté opposé à celles du cas de sol présentant de grandes rigidités ($K_0=5 \times 10^4 \text{ kN/m}^3$ et $K_0=50 \times 10^4 \text{ kN/m}^3$).

La figure V.29 illustre aussi, l'allure de la poutre cantilever lorsqu'on fait varier les rigidités du sol. On remarque que la forme de la poutre en vibration est affectée par les propriétés du sol dans les deux cas de vibrations en translation et en rotation de la poutre. Aussi, pour de meilleures rigidités du sol ($K_0=5 \times 10^4 \text{ kN/m}^3$ et $K_0=50 \times 10^4 \text{ kN/m}^3$), la poutre vibre avec la même forme dans le cas de la rotation.

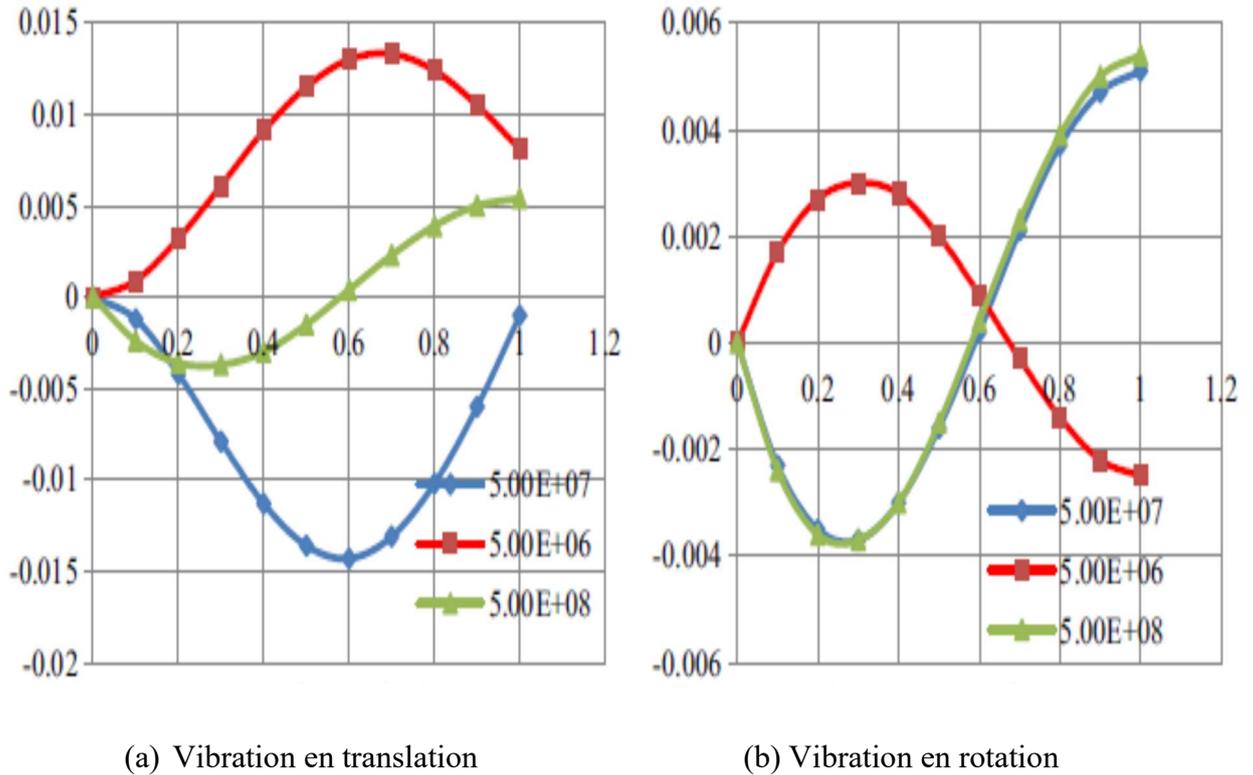


Figure V.29 Effet des propriétés du sol sur les vibrations de la poutre

Conclusion

Dans cette partie de l'étude, la méthode des éléments spectraux est utilisée pour analyser la vibration des poutres avec des conditions aux limites non classiques. Les conclusions qui peuvent être tirées de cette analyse sont les suivantes :

- ✓ La validation de cette approche par rapport à la méthode de transformation différentielle et à la méthode analytique est vérifiée en prenant l'exemple d'une poutre en porte-à-faux avec et sans ressorts de Winkler.
- ✓ la convergence de la SEM est très rapide par rapport à celle de la FEM, en effet, un seul élément spectral permet d'aboutir à des résultats précis.

- ✓ Les déflexions maximales sont observées avec le premier mode de vibration, tandis que les rotations maximales avec le troisième mode de vibration.
- ✓ Les fréquences naturelles de la poutre diminuent en augmentant la longueur de celle-ci, de plus, les poutres courtes vibrent avec une forte amplitude.
- ✓ Les propriétés du sol ont une influence notable sur la forme de la poutre en vibration, sur les flèches ainsi que sur les rotations des poutres.

Le présent travail a fait l'objet d'une publication internationale dans le journal :

Innovative Infrastructure Solutions (2019) 4 :40

<https://doi.org/10.1007/s41062-019-0227-y>

L'intitulé de l'article est :

**Dynamic analysis of soil structure interaction by the
spectral element method**

V.4 Cas 3 :

Analyse modale de la poutre sur fondation élastique par la méthode des éléments spectraux

Dans cette partie de l'étude, l'analyse modale d'une poutre sur fondation élastique est réalisée dans le domaine fréquentiel. La méthode des éléments spectraux est alors utilisée pour étudier les vibrations libres de la poutre Euler-Bernoulli reposant sur des appuis élastiques aux extrémités, c'est-à-dire des ressorts en rotation et en translation. Ainsi, les fréquences naturelles sont tabulées pour les trois premiers modes de vibration. Les résultats obtenus sont regroupés dans le cas des poutres sur appuis élastiques avec des rigidités transversales et rotationnelles modélisant le milieu continu sous la fondation, nous avons aussi étudié l'influence des propriétés élastiques du milieu sur la réponse dynamique, et des conditions aux limites non classiques (Boudaa S. et al. (2020)).

V.4.1 Poutre en porte-à-faux sur des ressorts en rotation

La même poutre en porte à faux (voir § V.2.2.2) est utilisée dans cet exemple, les propriétés géométriques et mécaniques de cette poutre sont regroupées dans le tableau V.5. Dans ce cas, l'interaction entre la poutre et le sol de fondation est faite grâce à système continu de ressorts en rotation (figure V.30).

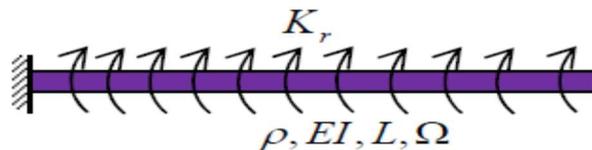


Figure V.30 Poutre en porte-à-faux sur des ressorts en rotation

Le tableau V.9 regroupe les trois premières fréquences de vibration de la poutre sur des ressorts en rotation.

Tableau V.9 Les trois premiers modes de vibrations de la poutre sur des ressorts en rotation

Mode	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)
150 FEM	4.77234	25.49936	63.28474
1 SEM	4.77232	25.49933	63.28470

On montre ici (Tableau V.9) la robustesse de la méthode des éléments spectraux : un seul élément fini spectral suffit pour obtenir une bonne précision des trois premières fréquences, tandis que l'analyse par éléments finis nécessite l'utilisation d'environ 150 éléments finis classiques.

La poutre sur des ressorts transversaux vibre avec des fréquences (Tableau. V.6) trois fois plus grandes que celles de la poutre sur des ressorts en rotation (Tableau V.9).

Les figures V.31 (a) et (b) montrent respectivement la vibration en translation et en rotation de la poutre pour les trois premiers modes.

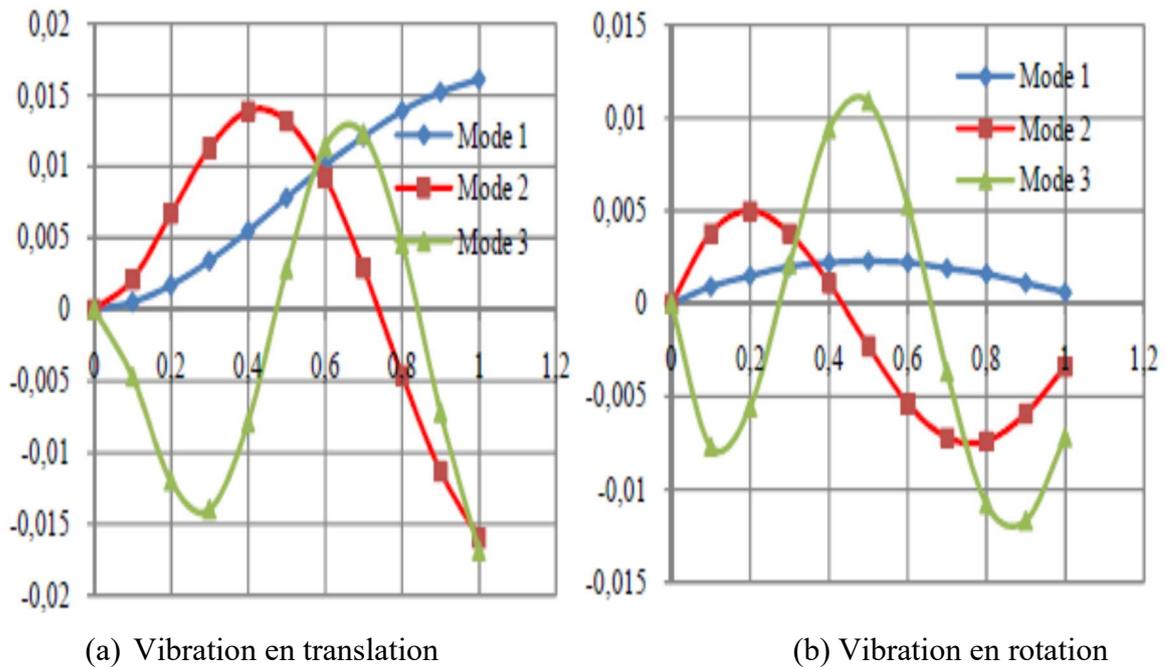


Figure V.31 Les trois premiers modes de vibrations de la poutre sur ressorts en rotation

On remarque dans ce cas que le troisième mode de vibration de la poutre sur des ressorts en rotation est dominant, en effet, des déflexions et des rotations maximales sont observées le long de la poutre.

V.4.2. Poutre en porte-à-faux sur ressorts en translation et en rotation

Dans ce cas on considère une poutre en porte-à-faux sur des ressorts en translation et en rotation comme le montre la figure V.32. Ici, les supports de la poutre sont identiques et possèdent les mêmes valeurs de rigidité, c'est à dire :

$$K_0 = K_r = 5 \times 10^4 \text{ kN/m/(rad)}$$

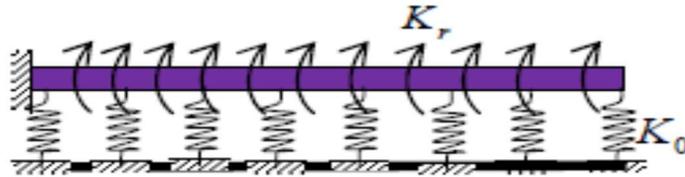


Figure V.32 Poutre en porte-à-faux sur des ressorts en translation et en rotation

Le tableau V.10 regroupe les trois premières fréquences de vibrations.

Tableau. V.10 Les trois premiers modes de vibrations d'une poutre sur ressorts en translation et en rotation

Mode	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)
150 FEM	17.70616	47.26930	87.26125
1 SEM	17.70615	47.26926	87.26120

Les résultats obtenus (Tableau V.10) montrent que la réponse dynamique (ou les fréquences de vibration) de la poutre sur des supports élastiques en rotation et en translation est plus appréciable que celle obtenue dans les exemples précédents (c'est-à-dire cas des ressorts en translation (Tableau V.6) et des ressorts en rotation (Tableau V.9)).

De plus, les poutres sur fondation élastique tenant compte des rigidités verticales et rotationnelles sont efficaces par rapport à celles conçues sur des sols modélisés par des ressorts verticaux uniquement. Cette performance est évaluée à 76,05% pour le premier mode de vibration et devient plus prononcée à 87,67% et 89,90% pour le deuxième et le troisième mode de vibration, respectivement.

La figure V.33 montre que les formes des modes de vibration sont similaires aux cas précédents (figures V.25 et V.31) mais avec des magnitudes différentes.

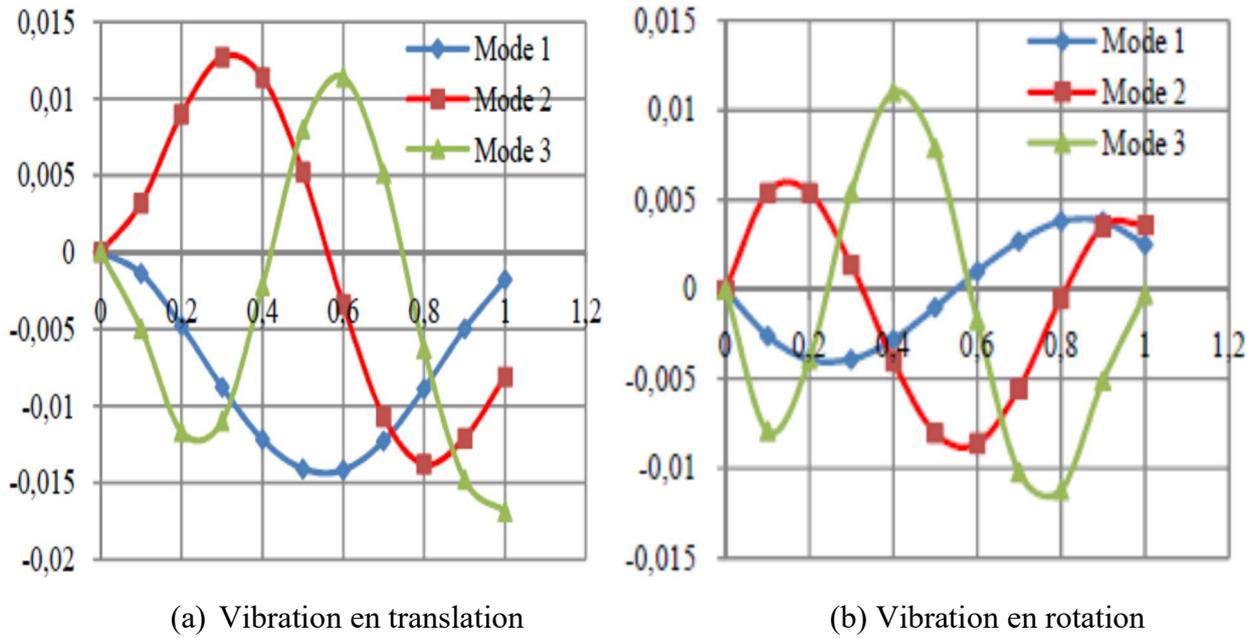


Figure V.33 Les trois premiers modes de vibration d'une poutre sur ressorts en translation et en rotation

V.4.3. Poutre en porte-à-faux sur ressorts transversaux dominants

Dans ce cas, le même exemple représenté sur la figure V.32 est considéré. La poutre en porte-à-faux repose sur un sol de fondation modélisé par des ressorts transversaux et rotatifs. De plus, la rigidité verticale du sol est dominante par rapport à la rigidité en rotation, c'est-à-dire :

$$K_o = 10 K_r.$$

Les fréquences des trois premiers modes de vibration sont regroupées dans le tableau V.11.

Tableau. V.11 Fréquences des trois premiers modes de vibration d'une poutre sur ressorts transversaux dominants

Mode	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)
150 FEM	18.0761	50.30309	99.04211
1 SEM	18.0757	50.30303	99.04200

Les figures V.34 (a) et (b) montrent l'allure de la poutre pour les trois modes de vibration en translation et en rotation.

On remarque que les déflexions transversales ont la plus grande amplitude dans le premier mode de vibration en translation (Figure V.34 (a)), alors que les rotations ont des amplitudes plus dominantes au troisième mode de vibration en rotation (Figure V.34 (b)).

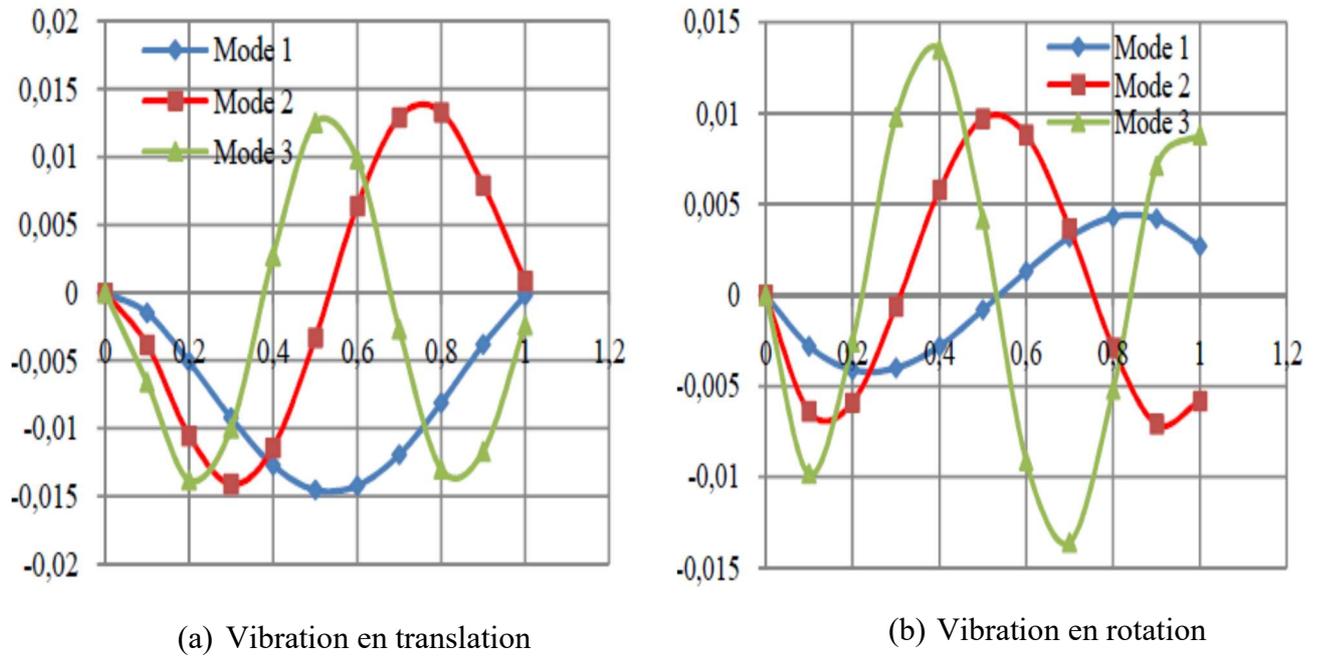


Figure V.34 Les trois premiers modes de vibrations d'une poutre sur ressorts transversaux dominants avec $K_o=10 K_r$

V.4.4. Poutre en porte-à-faux sur des ressorts en rotation dominants

Dans ce cas, la rigidité à la rotation de la poutre représentée en figure V.32 est très supérieure à la rigidité transversale, c'est-à-dire : $K_r = 10 K_o$.

Les trois premières fréquences de vibration sont regroupées dans le tableau V.12.

Tableau. V.12 : Fréquences des trois premiers modes de vibration d'une poutre sur ressorts en rotation dominants

Mode	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)
150 FEM	18.4168461105	45.0745886408	78.4609151370
1 SEM	18.4168466754	45.0745886505	78.4609145904

Les figures V.35 (a) et (b) montrent les trois premiers modes de vibration de la poutre selon les deux directions verticale et rotationnelle. On remarque que le premier mode de vibration est dominant en translation, alors que le troisième mode de vibration l'est en rotation.

Les trois premières fréquences propres de la poutre en porte-à-faux reposant sur des sols modélisés par des ressorts en translation et en rotation sont étudiées en utilisant la méthode des éléments spectraux et la méthode des éléments finis. Les résultats obtenus ont montré la robustesse et la performance de la méthode des éléments spectraux comparée à la méthode des éléments finis pour laquelle un grand maillage du domaine est nécessaire pour aboutir à la même précision.

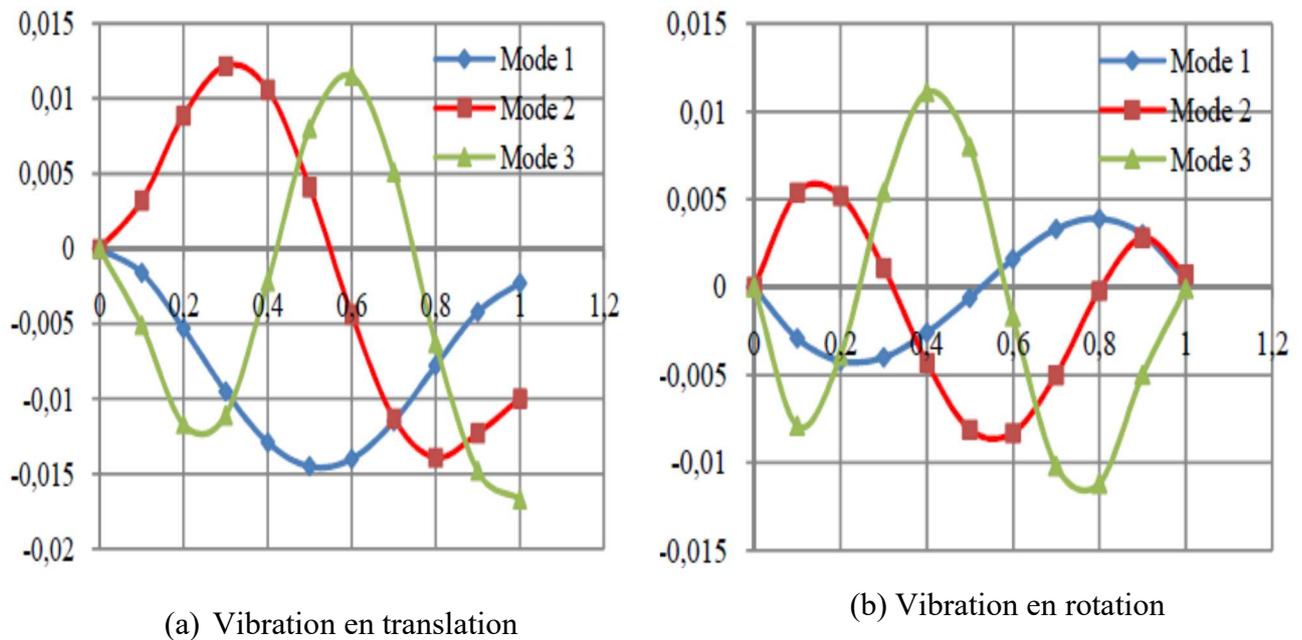


Figure V.35 Les trois premiers modes de vibration d'une poutre sur ressorts rotationnels dominants avec $K_r = 10 K_o$

Conclusion

La méthode des éléments spectraux a été utilisée pour analyser les vibrations des poutres Euler-Bernoulli avec différentes conditions d'appuis en utilisant le modèle élastique de Winkler. Les résultats ont été comparés à ceux obtenus par la méthode des éléments finis. Les fréquences

propres de vibration de la poutre ont été tabulées moyennant la matrice de rigidité dynamique. De nombreuses conclusions peuvent être tirées de cette étude comme suit :

- ✓ la convergence de la SEM est très rapide par rapport à celle la FEM ; un seul élément fini spectral est utilisé pour obtenir des résultats précis.
- ✓ Des programmes numériques sont développés pour résoudre les problèmes d'interaction sol structure en se basant sur la méthode des éléments spectraux et sur la méthode des éléments finis. Ces outils sont appliqués pour analyser différents problèmes.
- ✓ Les déflexions maximales sont observées avec le premier mode de vibration, tandis que les rotations maximales sont obtenues avec le troisième mode de vibration. En outre, les rotations maximales sont apparentes à l'extrémité libre de la poutre en porte-à-faux.
- ✓ Les propriétés mécaniques du sol influencent considérablement les modes de vibration et les déformations de la poutre.
- ✓ La vibration libre d'une poutre sur une fondation élastique est fortement influencée par le couplage des ressorts rotationnels et transversaux qui ont une contribution importante dans la réponse dynamique des poutres.
- ✓ Les formes des modes de vibration dépendent des rigidités verticales et rotationnelles des ressorts.

Le présent travail a fait l'objet d'une publication internationale (acceptée) dans le journal :

Mathematical Modelling in Civil Engineering

L'intitulé de l'article est :

**Modal analysis of beam on elastic foundation by the spectral
element method**

Conclusion générale

L'interaction sol structure est un concept qui cherche à montrer que pour une structure reposant sur un sol de fondation, il existe une influence réciproque dans le comportement du sol et de la structure. Selon les caractéristiques de la structure et le mouvement du sol, l'interaction sol-structure peut avoir un effet sur la magnitude des forces induites à la structure en question.

La complexité du problème d'interaction sol structure réside dans l'intégration et le couplage des deux éléments, le sol et la structure. Ce phénomène peut décrire les effets qui se produisent dans le plan de contact sol-structure, de sorte que, dans l'analyse de la réponse dynamique, non seulement les propriétés structurelles soient incluses mais également les propriétés du sol sous-jacent. L'interaction sol structure peut donc contribuer à amplifier ou à diminuer la réponse dynamique de la structure.

Dans la même optique nous avons entrepris ce travail qui consiste à simuler le comportement dynamique de l'interaction sol-structure, en identifiant les différents paramètres ayant une influence sur la réponse dynamique des structures en utilisant la méthode des éléments spectraux.

Après une introduction générale qui nous a permis de connaître le phénomène de l'interaction sol-structure et son domaine d'application, nous avons fait un tour d'horizon en faisant passer en revue certains travaux accomplis dans ce contexte. Ensuite, nous avons procédé à la modélisation des différentes parties, à savoir, le sol, la structure et le milieu interface, et la procédure numérique a été entreprise en utilisant la méthode des éléments spectraux. Nous avons utilisé la méthode des éléments finis aussi, mais seulement pour prouver la robustesse de la méthode des éléments spectraux.

Après une validation de notre code de calcul par des exemples numériques pris de certains travaux de la littérature, nous avons fait l'étude du phénomène sol-structure en statique et en dynamique, à travers l'analyse de l'influence de la stratification du sol et de certains autres paramètres.

Les conclusions qui peuvent être tirées de cette analyse sont les suivantes :

a) Étude statique :

Une procédure de quantification des poutres prismatiques avec une adhérence parfaite à un demi-espace bidimensionnel homogène, linéaire, élastique et isotrope a été proposée. Sur la base des expressions d'énergie de contrainte, des déformations de cisaillement de l'élément poutre soumis à une contrainte plane et du sol de fondation soumis à des déformations planes, les équations sont formulées et utilisées dans l'analyse.

Les résultats numériques montrent que la formulation dérivée conduit à une convergence rapide et permet d'étudier divers problèmes d'interaction sol-structure. Une étude paramétrique a été réalisée et les conclusions dérivées peuvent être tirées :

- ✓ La validation de cette approche par rapport à la méthode du maillage libre (Binesh 2012) et à la solution exacte est vérifiée sur l'exemple d'une poutre en porte-à-faux avec et sans ressorts de Winkler.
- ✓ Il y a une influence notable de l'interaction latérale sur le comportement poutre-sol de fondation. Les déplacements horizontaux dans ce cas, sont différents de ceux obtenus par l'approche de Winkler (c'est-à-dire avec des ressorts verticaux uniquement). On observe une nette amélioration du comportement, en effet, les déplacements horizontaux sont réduits presque de moitié dans la zone chargée et deviennent nuls loin de celle-ci. Par contre, on remarque que l'interaction latérale, n'a pas d'effet sur les déplacements verticaux.
- ✓ La poutre reposant sur une base rigide montre des déplacements horizontaux importants pour les nœuds supérieurs au voisinage de la zone chargée uniquement par contre les déplacements verticaux sont très importants au milieu de la poutre et diminuent aux points éloignés.
- ✓ Les propriétés du sol ont un effet sur la poutre et sur l'interaction poutre-sol de fondation. Il y a une influence notable des propriétés mécaniques des sols sur les réponses de l'interface du continuum. En effet, lorsque les sols ont de faibles propriétés mécaniques (sols meubles), les déflexions horizontales et verticales deviennent de plus en plus importantes.
Aucun effet de la profondeur du sol de fondation n'est constaté sur le comportement de l'interaction horizontale. Seulement une petite variation est remarquée sur les déplacements verticaux en utilisant différentes valeurs de la profondeur du sol de fondation.

- ✓ L'introduction d'une couche de ballast engendre une influence sur l'interaction poutre-sol de fondation dans la direction longitudinale.
- ✓ La formulation des éléments finis a été établie indépendamment des conditions aux limites de la poutre. Il en résulte que cette approche peut facilement être utilisée pour d'autres conditions aux limites des poutres.
- ✓ L'approche peut être considérée comme une introduction à l'analyse non linéaire et à l'analyse vibratoire de l'interaction sol-structure.

b) Étude dynamique :

La méthode des éléments spectraux a été utilisée pour analyser les vibrations des poutres d'Euler-Bernoulli avec des supports d'appuis non classiques. Les réponses ont été comparées à la FEM et les fréquences propres de vibration de la poutre ont été tabulées en utilisant la matrice de rigidité dynamique. De nombreuses conclusions peuvent être tirées de cette étude comme suit :

- ✓ La validation de cette approche par rapport à la méthode de transformation différentielle (DTM) et à la méthode analytique est vérifiée sur l'exemple d'une poutre en porte-à-faux avec et sans ressorts de Winkler.
- ✓ La convergence de la SEM est très rapide par rapport à celle de la FEM ; un seul élément fini spectral est utilisé pour obtenir des résultats précis.
- ✓ Les exemples traités montrent que les déflexions maximales sont observées avec le premier mode, tandis que les rotations maximales sont obtenues avec le 3^{ème} mode de vibration.
- ✓ Dans les vibrations en translation et en rotation, la longueur de la poutre influence l'amplitude de vibration, en effet, la poutre de faible longueur vibre avec la plus grande amplitude.
- ✓ Les propriétés mécaniques du sol ont une influence considérable sur la forme du mode de vibration, sur les flèches ainsi que sur les rotations des poutres. Les fréquences augmentent avec les propriétés du sol, c'est-à-dire lorsque la rigidité du sol augmente. La forme de la poutre en vibration est affectée aussi. lorsque le sol possède une faible rigidité, les vibrations en rotation de

la poutre sont opposées à celles du cas de sol présentant de grandes rigidités. Pour de meilleures caractéristiques du sol, la poutre vibre avec la même forme que dans le cas de la rotation.

- ✓ La réponse dynamique d'une poutre sur une fondation élastique est fortement affectée par la contribution des ressorts de rotation, et de plus les ressorts de translation ont un rapport important dans la réponse dynamique des poutres.
- ✓ Les fréquences naturelles de la poutre diminuent en augmentant la longueur de celle-ci et de plus, les poutres courtes vibrent avec une plus grande amplitude.

Dans la dernière partie de l'étude, nous avons traité le cas de poutre reposant sur des ressorts en rotation uniquement, puis celui de poutre reposant sur des ressorts en translation et en rotation à la fois, d'abord avec des valeurs de rigidités égales, ensuite avec des valeurs de rigidités dominantes en translation, et enfin avec des valeurs de rigidités dominantes en rotation. Les conclusions tirées de cette partie d'étude sont les suivantes :

- ✓ Dans le cas des poutres reposant sur des ressorts en rotation uniquement, le troisième mode de vibration est dominant, en effet, des déflexions et des rotations maximales sont engendrées tout au long de la poutre.
- ✓ Dans le cas des poutres sur des ressorts en translation et en rotation avec les mêmes valeurs de rigidités, les fréquences de vibration sont plus importantes que celles du cas précédent et là aussi le troisième mode de vibration est dominant.
- ✓ Dans le cas des poutres sur des ressorts en translation dominants relativement à ceux en rotation, c'est-à-dire que les valeurs de rigidités en translation sont plus importantes, les fréquences de vibration sont élevées par rapport aux cas précédents et les déflexions transversales ont la plus grande amplitude dans le premier mode de vibration en translation, alors que les rotations ont des amplitudes plus dominantes au troisième mode de vibration
- ✓ Dans le dernier cas, les poutres reposent sur des ressorts en rotation dominants, c'est-à-dire que les valeurs de rigidités en rotation sont plus importantes, les fréquences de vibration augmentent davantage, et l'amplitude des déplacements est plus grande dans le premier mode de vibration, alors que l'amplitude des rotations l'est dans le troisième mode de vibration.

Finalement, et en perspective, nous jugeant intéressant de compléter ce travail par une étude :

- 1) dynamique non linéaire de l'interaction sol structure.
- 2) du comportement dynamique des structures sous sollicitations diverses.

Références bibliographiques

Abramovich, H.(1992) Shear deformation and rotatory inertia effects of vibrating composites beams. *Composite structure*, **20**, 165-173.

Abramovich, H. and Livshits (1994), A. Free vibration of non-symmetric cross-ply laminated composite beams. *Journal of Sound and Vibration*, **176**, 597-612.

Ai ZH, Cai JB (2016) Static interaction analysis between a Timoshenko beam and layered sols by analytical layer element/boundary element method coupling. *Applied Mathematical Modelling* 40 :9485–9499.

Ai ZY, Cheng YC (2013) Analysis of vertically loaded piles in multilayered transversely isotropic soils by BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 37 :327–335.

Avcar M (2016) Effect of material non-homogeneity and two-parameter elastic foundation on fundamental frequency parameters of Timoshenko beam. *Acta Physica Polonica A* 130 :375–378.

Avramidis IE, Morfidis K (2006) Bending of beams on three parameter elastic foundation. *International Journal of solids and Structures* 43(2) :357–375.

Banerjee, J. R.(2001) Free vibration analysis of a twisted beam using the dynamic stiffness method. *International Journal of Solids and Structures*, **38**, 6703-6722.

Banerjee, J. R. (2000) Free vibration of centrifugally stiffened uniform and tapered beams using the dynamic stiffness method. *Journal of Sound and Vibration*, **233**, 857-875.

Banerjee, J. R. (2004) Development of an exact dynamic stiffness matrix for free vibration analysis of a twisted Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration*, **270**, 379-401.

Banerjee, J. R. (1997) Dynamic stiffness formulation for structural elements: A general approach. *Computers and Structures*, **63**(1), 101-103.

Banerjee, J. R, Guo, S. and Howson, W. P. (1996) Exact dynamic stiffness matrix of a bending torsion coupled beam including warping. *Computers & structures*.**59**, 613-621.

Banerjee, J. R and Williams, F.W. (1985) Exact Bernouli-Euler Dynamic Stiffness Matrix for a ranged of Tapered beams. *International Journal for numerical Methods in Engineering*, **21**, 2289-2302.

- Banerjee, J. R and Williams, F.W.(1996) Exact dynamic stiffness matrix for composite Timoshenko beams with applications. *Journal of Sound and Vibration*, **194**, 573-585.
- Banerjee, J. R and Fisher, S. A. (1992) Coupled bending torsional dynamic stiffness matrix for axially loaded beam element. *International Journal for numerical Methods in Engineering*, **33**, 739-751.
- Banerjee, J. R. (1989) Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix for beam elements. *International Journal for numerical Methods in Engineering*, **28**, 1283-1298.
- Baraldi D, Minghini F, Tezzon E, Tullini N (2018) Nonlinear analysis of RC box culverts resting on a linear elastic soil. *International Journal of Structural Glass and Advanced Materials Research* 2:30–45.
- Barber JR (2010) Intermediate mechanics of materials, vol 175. *Springer, Berlin*.
- Bashir MN, Ahmad MO (2016) Development of numerical technique by Galerkin approach of spectral element method for hybrid beam. *American Institute of Physics Advances* 6(11):115107.
- Becker AA (1992) The boundary element method in engineering. *McGraw-Hill, Berkshire*.
- Behnamfar F, Fathollahi A (2016) Conversion factors for design spectral accelerations including soil–structure interaction. *Bulletin of Earthquake Engineering* 14:2731–2755.
- Binesh SM (2012) Analysis of beam on elastic foundation using the radial point interpolation method. *Scientia Iranica Transactions A* 19(3) :403–409.
- Black T. (2005) Spectral Element Analysis of Bars, Beams, and Levy Plates. *Master thesis in Mechanical Engineering*
- Bolteus L (1984) Soil-structure interaction a study based on numerical methods. *Ph. D. thesis. Division of structural design Chalmers University of technology, Goteborg, Sweden, 1984*, p 165.
- Booker JR, Balaam NP & Davis EH. (1985) The behaviour of an elastic nonhomogeneous half-space, Part I: Line and point loads. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*: 9: 353–367.
- Booker JR, Balaam NP & Davis EH. (1985)The behaviour of an elastic nonhomogeneous half-space, Part II: Circular and strip footings. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*: 9: 369–381.

Boudaa S., Khalfallah S. & Bilotta E. (2019) Static interaction analysis between beam and layered soil using a two-parameter elastic foundation. *International Journal of Advanced Structural Engineering*; 11: 21–30.

Boudaa S., Khalfallah S. & Hamioud S. (2019) Dynamic analysis of soil structure interaction by the spectral element method. *Innovative Infrastructure Solutions*: 4:40.

Boudaa S., Khalfallah S. & Bilotta E. (2020) Modal analysis of beam on elastic foundation by the spectral element method. *Mathematical Modelling in Civil Engineering*.

Bourgeois E, de Buhan P, Hassen G (2012) Settlement analysis of piled-raft foundations by means of a multiphase model accounting for soil-pile interactions. *Computers and Geotechnics* 46 :26–38.

Boussinesq J. (1885) Application des Potentiels à l'Etude de l'Equilibre et du Mouvement des Solides Elastique. *Paris: Gauthier-Villars*.

Capron, M. D. and Williams, F. W. (1988) Exact dynamic stiffness for an axially loaded uniform Timoshenko member embedded in an elastic medium. *Journal of Sound and Vibration*, **124**, 453-466.

Cen S, CHen X-M, Fu X-R (2009) Quadrilateral membrane element with analytical element stiffness matrices formulated by the new quadrilateral area coordinate method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 77:1172–1200.

Chakraborty, A. and Gopalkrishnan, S. (2003) A spectrally formulated finite element for wave propagation analysis in functionally graded beams. *International Journal of Solids and Structures*, **40** (10), 2421-2448.

Chandrasekhar, K., Krishnamurthy, K. and Roy, S. (1990) Free vibration of composite beams including rotatory inertia and shear deformation. *Composites Structures*, **14**, 269-279, 1990.

Chore HS, Ingle RK, Sawant VA (2010) Building frame-pile foundation-soil interaction analysis: a parametric study. *Interaction and Multiscale Mechanics* 3(1):55–79.

De Barros FCP, Luco JE (1995) Identification of foundation impedance functions and soil properties from vibration tests of the Hualien containment model. *Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 14:229–248.

Dinev D (2012) Analytical solution of beam on elastic foundation by singularity functions. *Engineering Mechanics* 19:381–392.

Doyle JF, Farris TN (1990) A spectrally formulated finite element for flexural wave propagation in beams. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis* 5:99–107.

- Doyle JF (1988) A spectrally formulated finite element for longitudinal wave propagation. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis* 3:1–5.
- Doyle JF (1986) Application of the fast-Fourier transform to wave propagation problems. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis* 1:18–28.
- Doyle, J. F. (1997) Wave propagation in structures: Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transforms, 2nd edn, Springer-Verlag, New York.
- Far H. (2017) Advanced computation methods for soil–structure interaction analysis of structures resting on soft soils. *International Journal of Geotechnical Engineering* 11(1) :1–8.
- Feng D., Feng MQ. (2018) Computer vision for SHM of civil infrastructure: from dynamic response measurement to damage detection—a review. *Engineering Structures* 156:105–117.
- Friberg, P.O. (1983) Coupled vibration of beams-an exact dynamic element stiffness matrix. *International Journal of numerical Methods in Engineering*, **19**, 479-493.
- Filonenko-Borodich MM. (1945) A very simple model of an elastic foundation capable of spreading the load. *Sb. Tr. Mosk. Elektro. Inst. Inzh. Tran.* No: 53, Transzhedorizdat (in Russian).
- Filonenko B (1968) Theory of elasticity. *Mir, Moscow*, p 388.
- Fourier A, Bunge HP, Hollerbach R, Vilotte JP (2004) Application of the spectral-element method to the axisymmetric Navier–Stokes equation. *Geophysical Journal International* 156:682–700.
- Gan BS, Kien ND (2014) Large deflection analysis of functionally graded-beams resting on a two-parameter elastic foundation. *Journal of Asian Architecture Building Engineering* 13(3):649–656.
- Gazetas G, Mylonakis G (2003) Soil–structure interaction effects on elastic and inelastic structures. In: *4th international conference on recent advances in geotechnical earthquake engineering and soil dynamics, San Diego, California.*
- Genes MC, Kocak S (2005) Dynamic soil–structure interaction analysis of layered unbounded media via a coupled finite element / boundary element/scaled boundary finite element model. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 62:798–823.
- Gibson RG. (1967) Some results concerning displacements and stresses in a non-homogeneous elastic half-space. *Géotechnique*: 17: 58–67.
- Gopalakrishna S, Doyle, J. F. (1994) Wave propagation in connected waveguides of varying cross-section. *Journal of Sound and Vibration*, **175** (3), 347-363.

- Hamioud S, Khalfallah S (2018) Free-vibration of Timoshenko Beam using the spectral element method. *International Journal for Engineering Modelling* 31(1–2):61–76.
- Hamioud S, Khalfallah S (2017) Dynamic analysis of rods using the spectral element method (in French). *Algérie Equipement J* 57:49–55.
- Hamioud S, Khalfallah S (2016) Free-vibration of Bernoulli–Euler Beam by the spectral element method. *Technical Journal* 10(3–4):106–112.
- Hassan MT, Doha EH (2015) Recursive differentiation method: application to the analysis of beams on two-parameter foundations. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 55(1):15–26.
- Hetenyi M. (1946) Beams on Elastic Foundations. *Michigan University of Michigan Press*.
- Hetényi M (1966) Beams and plates on elastic foundations and related problems. *Applied Mechanics Review* 19 :95–102.
- Howson, W.P. and Zare A.(2005) Exact dynamic stiffness matrix for flexural vibration of the three-layered sandwich beams. I. Forward calculation. *Journal of Sound and Vibration*, 282, (3-5), 753-767.
- Irgens F (1980) Continuum mechanics. *Springer, Berlin, Heidelberg*, p 649.
- Jafari M, Djojodihardjo H, Arifin AK (2014) Vibration analysis of a cantilevered beam with spring loading at the tip as a generic elastic structure. *Applied Mechanics and Materials*. 629: 407-413.
- Johnson KL (1985) Contact mechanics. *Cambridge University Press, Cambridge*.
- Kacar A, Tan HT, Kaya MO (2001) Free vibration analysis of beams on variable elastic foundation by using the differential transform method. *Mathematical and Computational Applications*. 16(3):773–783.
- Kachanov ML, Shafiro B, Tsukrov I (2003) Handbook of elasticity solutions. *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*, p 324.
- Kerr AD (1964) Elastic and viscoelastic foundation models. *Journal of Applied Mechanics* 31(3):491–498.
- Khosravikia F, Mahsuli M, Ghannad MA (2018) The effect of soil–structure interaction on the seismic risk to buildings. *Bulletin of Earthquake Engineering* 16(9):3653–3673.

Kim SM, Yang S (2010) Moving two-axle high frequency harmonic loads on axially loaded pavement systems. *Korean Journal of Civil Engineering* 14(4):513–526.

Kolousek, V. (1941) Anwendung des gesetzes der virtuellenverschiebungen und des reziprozitätssatzes in der stabwerksdynamic. *IngenieurArchiv*, **12**, 363-370.

Kramer, S. L. and Stewart, J. P. (2004), 'Geotechnical aspects of seismic hazards', *Earthquake Engineering: from Engineering Seismology to Performance-Based Engineering*, Y. Bozorgnia, V. Bertero (Eds.), CRC Press 4, p. 85.

Lee, U. (2009) Spectral element method in structural dynamics. *Wiley, Hoboken*.

Lee U, Kim J, Leung AYT (2000) The spectral element method in structural dynamics. *Shock and Vibration Digest* 32(6):451–465.

Leung AYT (2000) Dynamic stiffness for structures with distributed deterministic or random loads. *Journal of Sound Vibration* 242:377–395.

Limkatanyu S, Kwon M, Prachasaree W, Chaiviriyawong P (2012) Contact-interface fiber-section element: shallow foundation modelling. *Geomechanics and Engineering* 4(3) :173–190.

Logan DL (2012) A first course in the finite element method. *CL Engineering, Stamford*, p 937.

Lu Yang (2016) Seismic soil-structure interaction in performance-based design. *PhD thesis, University of Nottingham*.

Messast S. (2007) Calcul des déplacements d'un pieu soumis à des charges dynamiques. *Thèse de Doctorat d'état. Université Badji Mokhtar, Annaba*.

Messioud S. Etude de l'interaction Sol-Fondation 3D Sous Sollicitations Sismiques. *Thèse de Doctorat en sciences. Université 20 Août 1955, Skikda*.

Mirzaie F, Mahsuli M, Ghannad MA (2017) Probabilistic analysis of soil–structure interaction effects on the seismic performance of structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamic* 46(4):641–660.

Mokhtari A, Sarvestan V, Mirdamadi HR (2016) Spectrally formulated finite element for vibration analysis of an Euler-Bernoulli beam on Pasternak foundation. *Journal of Theoretical and Applied Vibration and Acoustics* 2(2):119–132.

Mullapudi TRS (2010) Nonlinear finite element formulation of the soil structure interaction through two-parameter foundation model. *Master thesis, 2010, Missouri-Rolla University*, p 46.

- Narayanan GV, Beskos DE (1978) Use of dynamic influence coefficients in forced vibration problems with the aid of fast Fourier transform. *Computers and Structures* 9(2):145–150.
- Nayak M. (1973) Elastic settlement of a cross-anisotropic medium under axisymmetric loading. *Soil and Foundations*: 13(2): 83–90.
- Omolofe B (2013) Deflection profile analysis of beams on two-parameter elastic subgrade. *Latin American Journal of Solids and Structures*10:263–282.
- Padron LA, Aznarez JJ, Maeso O (2011) 3-D boundary element-finite element method for the dynamic analysis of piled buildings. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 35 :465–477.
- Palacz M (2018) Spectral methods for modelling of wave propagation in structures in terms of damage detection—a review. *Applied Sciences* 8(7):1124–1149.
- Pasternak PL. (1954) On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants. *GosudarstvennoeIzdatelstroLiberaturipoStroitelstvuiArkhitekture, Moscow (in Russian)*.
- Penava D, Kraus I, Petronijevic M, Schmid H (2018) Dynamic soil–structure analysis of tower-like structures using spectral elements. *Technical Gazette* 25(3):738–747.
- Petriaev A, Konon A, Solovyov V (2017) Performance of ballast layer reinforced with geosynthetics in terms of heavy axle load operation. *Procedia Engineering* 189:654–659.
- Pind F, Mejling MS, Engsig-Karup AP, Jeong CG, Strømmand-Andersen J (2018) Room acoustic simulations using high-order spectral element methods. In: *Euronoise 2018 conference*, pp 2085–2092.
- Pitilakis, D., Dietz, M., Wood, D. M., Clouteau, D. et Modaressi, A. (2008). Numerical simulation of dynamic soil-structure interaction in shaking table testing. *Soil Dynamics and Earthquake engineering*, 28:453–467.
- Prakash MY, Ghugal YM, Wankhade RL (2016) Study on soil-structure interaction: a review. *International Journal of Engineering Research* 6(3):737–741.
- Przemieniecki, J.S. (1968) *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill Inc, New York.
- Rao SS (2003) *Mechanical vibrations, 4th edn. Pearson Prentice Hall, Pearson*.
- Raychowdhury P (2011) Seismic response of low-rise steel moment resisting frame buildings incorporating nonlinear soil structure interaction (SSI). *Engineering Structures* 33(3):958–967.

- Reissner E. (1958) Deflection of plates on viscoelastic foundation. *Journal of Applied Mechanics (ASME)*: 80: 144–145.
- Reissner E (1967) Note on the formulation of the problem of the plate on an elastic foundation. *Acta Mechanica* 4(1):88–91.
- Ribeiro DB, Paiva JB (2014) Mixed FEM-BEM formulations applied to soil-structure interaction problems. In : *Proceedings of the World Congress on Engineering, London, 2–4 July 2014. Lecture Notes in Engineering and Computer Science*, 2014, pp 1178–1183.
- Rizzi SA, Doyle FJ (1992) A spectral element approach to wave motion in layered solids. *Journal of Vibration and Acoustics* 114(4):569–577.
- Rosen, A. (1991) Structural and dynamics behaviour of pretwisted rods and beams. *Applied Mechanics Reviews*, **44**, 483-515, 1991.
- Sapountzakis EJ, Kanpitsis AE (2011) Nonlinear analysis of shear deformable beam-columns partially supported on tensionless three-parameter foundation. *Archive of Applied Mechanics* 81(12) :1833–1851.
- Sayed M, Shahin M (2018) Design of ballast railway track foundation using numerical modelling. Part II: applications. *Canadian Geotechnical Journal* 55(3):369–396.
- Selvadurai APS. (1979) Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction. *Amsterdam: Elsevier*.
- Shen HS (2011) A novel technique for nonlinear analysis of beams on two-parameter elastic foundation. *International Journal of Structural Stability Dynamics* 11(6):999–1014.
- Stark RF & Booker JR. (1997) Surface displacements of a non-homogeneous elastic half-space subjected to uniform surface tractions, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*: 21: 361–378; 379–395.
- Su D, Li JH (2013) Three-dimensional finite element study of a single pile response to multidirectional lateral loadings incorporating the simplified state-dependent dilatancy model. *Computers and Geotechnics* 50:129–142.
- Teh, K. K. and Huang, C. C. (1980) The effects of fibre orientation on free vibration of composite beams. *Journal of Sound and Vibration*, **69**, 327-337.
- Teoh, S. L. and Huang, C. C. (1977) The vibration of beams of fibre reinforced material. *Journal of Sound and Vibration*, **51**, 467-473.

- Tezzon E, Tullini N, Minghini F (2015) Static analysis of shear flexible beams and frames in adhesive contact with an isotropic elastic half-plane using a coupled FE-BIE model. *Engineering Structures* 104:32–50.
- Tiliouine B & Goual MS (1996) Interaction statique sol-structure, analyse matricielle des structures reposant sur une fondation élastique. *Algérie équipement*, **23** 2-6
- Vlazov VZ & Leontiev UN. (1966) Beams, Plates and Shells on Elastic Foundations. *Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem (translated from Russian)*.
- Wang Y & Ishikawa I. (2001) A method for linear elastic-static analysis of multi-layered axisymmetrical bodies using Henkel's transform. *Computational Mechanics*: 27: 474–483
- Wang YH, Tham LG, Tsui Y & Yue ZQ. (2003) Plate on layered foundation analyzed by a semi-analytical and semi-numerical method. *Computers and Geotechnics*: 30: 409–418.
- Wang YH, Tham LH, Cheung YK (2005) Beams and plates on elastic foundations: a review. *Progress in Structural Engineering and Materials* 7(4):174–182.
- Winkler E. (1867) Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit. *Dominicus, Prague*.
- Wittrick, W. H. and Williams F. W. (1971) A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, **24**, 263-284.
- Wittrick, W. H. and Williams, F. W. (1983) Exact buckling and frequency calculation surveyed. *Journal of Structural Engineering ASCE*. **109**, 169-187.
- Yaseri A, Bazayr MH, Hataf N (2014) 3D coupled scaled boundary finite-element/finite-element analysis of ground vibrations induced by underground train movement. *Computers and Geotechnics* 60:1–8.
- Yin YP, Wang YH & Zhu JQ. (2001) Solutions of axisymmetric load applied to layered foundation. *Rock and Soil Mechanics*: 22(2): 156–158 (in Chinese).
- Yang Zhou (2019) Direct Method for Floor Response Spectra Considering Soil-Structure Interaction *PhD thesis University of Waterloo, Ontario, Canada*.
- Zienkiewicz OC, Taylor RL, Zhu JZ (2005) The finite element method: Its basis and fundamentals. *Elsevier, Boston*, p 733.