



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE



MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES FRERES MENTOURI
CONSTANTINE
Faculté des Sciences de la Technologie
Département : Génie civil

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة الإخوة منتوري
قسنطينة
كلية علوم التكنولوجيا
قسم : الهندسة المدنية

N° d'ordre :

Série :

Thèse

Présentée en vue de l'obtention du
Diplôme de Doctorat LMD en génie civil

Option

Performance et durabilité des constructions

Thème

Comportement dynamique des structures altérées

Par:

 **CHETTAH Mahieddine**

Membres du Jury de Soutenance :

Pr. BELOUAR Abdelghani	Président	Université des frères Mentouri - Constantine 1
Pr. LASSOUED Rachid	Rapporteur	Université des frères Mentouri - Constantine 1
Pr. BOUZERD Hamoudi	Examineur	Université 20 août 1955 - Skikda
Pr. DJEBBAR Nabil	Examineur	Université des frères Mentouri - Constantine 1
Dr. BENZAID Riad	Examineur	Université Mohamed Seddik Ben Yahia - Jijel

Mars 2020

Remerciements

Je remercie ALLAH, le tout puissant qui m'a guidé et donné la force et la volonté de réaliser ce travail.

Je tiens tout d'abord à remercier le directeur de cette thèse, Professeur LASSOUED Rachid de m'avoir proposé ce sujet de thèse, de l'attention qu'il a porté à mon travail et les moments de discussions précieuses qu'il m'a réservé. Je le remercie infiniment pour sa confiance, ses précieux conseils, sa disponibilité et sa courtoisie pendant presque quatre ans.

J'exprime ma gratitude aux membres de jury de soutenance.

Je remercie ma famille pour l'amour qu'elle porte à quelqu'un qui travaille souvent tard le soir, de m'avoir soutenu dans mes choix et m'a encouragé à réaliser cette thèse.

Mes sincères remerciements sont aussi adressés envers mes collègues pour un temps agréable et une ambiance exemplaire passée ensemble.

Toute ma gratitude, ma reconnaissance et mes très vifs remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin et en particulier l'ensemble des enseignants du département de génie civil de Constantine, à ma formation.

Pour terminer, d'autres personnes m'ont encouragée à finir ce travail par des gestes d'amitié dont je suis reconnaissant.

Dédicaces

Merci Allah de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout du rêve et le bonheur.

C'est un grand Plaisir que je dédie ce modeste travail à:

Mon cher père et ma chère mère;

*Mes très chers frères: Abd El-ghani, Issam-Eddine, et ma petite sœur :
Kawther ;*

Ma charmante femme ;

Qui ont supportés avec moi toutes les difficultés matérielles, financières et morales qui se sont posées à moi pendant la période de réalisation de ce travail.

A toute ma famille : ma grande mère, mes oncles, mes tantes, mes cousins et mes cousines ;

A tous mes amis et plus particulièrement à : Fouad, Zaki, Mahdi avec qui nous avons partagé des bons et mauvais moments ;

Enfin, a tous ceux que j'aime et ceux qui m'aiment.

****CHETTAH MAHIEDDINE****



Résumé :

Dans ce travail, les effets de la profondeur et de l'emplacement de la fissure sur les vibrations libres et forcées des structures de poutres fissurées ont été examinés analytiquement en étendant la méthode de Rayleigh. La théorie des poutres d'Euler-Bernoulli est utilisée pour modéliser la poutre fissurée et la fissure est représentée comme un ressort de rotation selon les principes de la mécanique de la rupture. Les effets de la profondeur et de l'emplacement de la fissure sur la fréquence propre, la forme du mode et le déplacement transversal sont présentés en détail. La comparaison entre le présent travail et les résultats obtenus dans plusieurs cas d'études expérimentales, analytiques et numériques antérieures montre un très bon accord.

Les résultats théoriques sont très satisfaisants et suggèrent qu'une méthode pratique pourrait être mise au point, ce qui permettrait des économies considérables en termes d'efforts de calcul et de coûts associés à l'analyse dynamique et à la détection des fissures.

Mots clés : Vibration libre et forcée; Poutre fissurée; Ressort de rotation; Méthode de Rayleigh; Détection de fissure ; Supports élastiques.

Abstract:

In this work, the effects of crack depth and crack location on the free and forced vibrations of cracked beam structures were investigated analytically by extending the Rayleigh method. The theory of Euler-Bernoulli beams is used to model the cracked beam and the crack is represented as a rotation spring according to the principles of fracture mechanics. The effects of crack depth and location on the natural frequency, shape of the mode and transverse displacement are presented in detail. The comparison between the present work and the results obtained in several cases of previous experimental, analytical and numerical studies shows a very good agreement.

The theoretical results are very satisfactory and suggest that a practical method could be developed, which would allow considerable savings in terms of computational effort and costs associated with dynamic analysis and crack detection.

Key words: Free and forced vibration; Cracked beam; Rotational spring; Rayleigh's method; Crack detection; Elastic supports.

ملخص:

في هذا العمل تم فحص آثار عمق وموقع التشقق على الاهتزازات الحرة والقسرية لهياكل العارضة المتشقة بشكل تحليلي عن طريق تمديد طريقة رايلي. استخدمت نظرية عوارض أولر-برنولي لتصميم العارضة المتشقة وتم تمثيل التشقق كإزاحة عرضية بالتفصيل. تشير المقارنة بين العمل الحالي والنتائج التي تم الحصول عليها في العديد من حالات الدراسات التجريبية والتحليلية والعددية السابقة إلى توافق جيد للغاية. النتائج النظرية مرضية للغاية وتشير إلى أنه يمكن تطوير طريقة عملية، التي من شأنها أن توفر الكثير من حيث الجهد الحسابي والتكاليف المرتبطة بالتحليل الديناميكي واكتشاف التشقق.

الكلمات الرئيسية: الاهتزاز الحر والقسري، عارضة متشقة، نابض دوران، طريقة رايلي، الكشف عن التشقق، مساند مرنة.

SOMMAIRE

	Page
NOTATIONS.....	vi
LISTE DES FIGURES.....	viii
LISTE DES TABLEAUX.....	x
LISTE DES PUBLICATIONS.....	xii
INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	1
CHAPITRE 1: LES FISSURES	4
Introduction	4
1.1 Définition de l'endommagement	4
1.2 Les effets des dommages	4
1.3 Les fissures	5
1.4 Classification des fissures	6
1.5 Caractérisation des fissures	7
1.6 La modélisation des fissures	7
1.6.1 Le modèle de la section transversale réduite équivalente	7
1.6.2 Le modèle de flexibilité continue	8
1.6.3 Le modèle de flexibilité locale issu de la mécanique de la rupture.....	10
1.7 Mode de rupture	11
1.8 Le facteur d'intensité de contrainte (FIC).....	11
1.9 Les coefficients de flexibilité.....	14
CHAPITRE 2: LE COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES POUTRES AVEC UNE FISSURE.....	17
Introduction	17
2.1 Le modèle théorique	21
2.1.1 La méthode des matrices des transferts (MMT).....	22
2.1.2 La méthode de Rayleigh (MR).....	28
2.2 Exemples numériques	31
2.3 Conclusion	40
CHAPITRE 3: LE COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES POUTRES AVEC DEUX FISSURES.....	41
Introduction	41
3.1 Le modèle théorique	43
3.2 Exemples numériques	47
3.3 Conclusion	54
CHAPITRE 4: DETECTION DES FISSURES DANS LES POUTRES.....	56
Introduction	56
4.1 L'idée de base de cette technologie.....	56
4.2 Les motivations pour le développement de cette technologie.....	56
4.3 Les techniques de détection des fissures.....	57
4.3.1 Les essais modaux.....	57
4.3.1.1 Les méthodes d'excitation.....	57
4.3.2 Les méthodes traditionnelles (basées sur les vibrations).....	60
4.3.2.1 Méthodes basées sur la fréquence naturelle.....	60
4.3.2.2 Méthodes basées sur la forme du mode de vibration.....	62
4.3.2.3 Méthodes basées sur l'énergie de déformation modale.....	64
4.3.2.4 Méthode basé sur la variation de la flexibilité ou la rigidité structurelle.....	65
4.3.3 Les méthodes modernes.....	66
4.3.3.1 L'analyse en ondelettes.....	66

4.3.3.2	L'algorithme génétique (AG).....	67
4.3.3.3	Les réseaux des neurones artificiels (RNA).....	67
4.4	Cas d'étude.....	68
4.4.1	Méthode 1 (MMT).....	68
4.4.2	Méthode 2 (MR).....	69
4.5	Conclusion.....	73
CHAPITRE 5:	LE COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES POUTRES APPUYEES SUR DEUX SUPPORTS ELASTIQUES AVEC UNE FISSURE.....	74
	Introduction	74
5.1	Le modèle théorique	77
5.2	Validation de la méthode.....	81
5.3	Résultats et discussion.....	84
5.4	Conclusion	89
CHAPITRE 6:	COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UNE POUTRE SIMPLEMENT APPUYEE FISSUREE SOUMISE A UNE CHARGE MOBILE.....	91
	Introduction	91
6.1	Le modèle théorique	94
6.1.1	La réponse libre: Calcul des formes du mode et des fréquences propres.....	95
6.1.2	La réponse forcée: calcul de la réponse temporelle.....	95
6.2	Exemples numériques	96
6.2.1	Convergence de la méthode.....	96
6.2.2	Validation de la méthode.....	99
6.2.2.1	L'effet de la profondeur de la fissure.....	101
6.2.2.2	L'effet de la vitesse de la force mobile.....	103
6.2.2.3	L'effet de l'amplitude de la force mobile.....	104
6.2.2.4	L'effet de la position de fissure.....	104
6.3	Conclusion	105
CONCLUSION GÉNÉRALES.....		106
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....		109

NOTATIONS

AE	: L'analyse en ondelettes
AG	: L'algorithme génétique
CAM	: Le critère d'assurance modal
CAMC	: Le critère d'assurance modal de coordonnées
CES	: Une poutre fissurée avec des supports élastiques
CSS	: Une poutre fissurée simplement appuyée
DPR_n	: Le déplacement aux points de référence
E.R.F.N	: Erreur relative de la fréquence naturelle
E.R.M.P	: Erreur relative du mode propre
E.R.R.M.N	: L'erreur relative de la réponse maximale normalisée
FIC	: Le facteur d'intensité de contrainte
FRF	: La fonction de réponse en fréquence
FRI	: La fonction de réponse d'impulsion
MBV	: La méthode basée sur les vibrations
MEF	: La méthode des éléments finis
MMT	: La méthode des matrices des transferts
MR	: La méthode de Rayleigh
MSEF	: La méthode spectrale par éléments finis
PR	: Points de référence
R.M.N	: La réponse maximale normalisée
RNA	: Les réseaux des neurones artificiels
UES	: Une poutre non-fissurée avec des supports élastiques
USS	: Une poutre non-fissurée simplement appuyée
a	: La profondeur de fissure
A	: La section transversale de la poutre
b	: La largeur de la poutre
c	: Le coefficient d'influence de la flexibilité
E	: Le module de Young
h	: L'hauteur de la poutre
I	: Le moment d'inertie
K	: La rigidité verticale des appuis élastiques
L	: La longueur de la poutre
M	: Le moment de flexion
n	: Le rang du mode
P	: L'amplitude de la charge mobile
P_i	: Le chargement général
q_n	: La fonction du temps
$S(a)$: La fonction de densité d'énergie de déformation
T	: Le temps
T_{max}	: L'énergie cinétique maximale
$T(X)$: L'effort tranchant
u_i	: Le déplacement supplémentaire
U_{max}	: L'énergie potentielle maximale
U_T	: L'énergie de déformation due à la fissure
v	: La vitesse de la charge mobile
$W_i(X, T)$: La fonction de déplacement transversale de la poutre
X	: La coordonnée axiale

Lettres grecques :

σ_x	:	Le champ de contrainte autour d'une fissure
ν	:	Le coefficient de Poisson
η	:	Le coefficient de flexibilité adimensionnelle
ξ	:	Le rapport entre la profondeur de la fissure et la hauteur de la poutre
ρ	:	La densité du matériau
ω_n	:	La fréquence angulaire de la poutre saine
ω_{cn}	:	La fréquence angulaire de la poutre fissurée
φ	:	La forme du mode
θ	:	La rotation
κ_n	:	Le rapport de la rigidité de la poutre à la rigidité du ressort élastique.

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE 1 : LES FISSURES		Page
Figure 1	Comportement des dommages.....	4
Figure 2	Les types des dommages les plus rencontrés dans les structures.....	5
Figure 3	Le modèle de section transversale réduite équivalente : (a) le moment de flexion local ; (b) la poutre courte.....	8
Figure 4	Schéma de distribution de: (a) l'énergie; (b) la contrainte au voisinage de la fissure.....	9
Figure 5	Modèle d'une section fissurée en élément fini.....	9
Figure 6	Modèle de flexibilité locale : (a) poutre avec une fissure et (b) simulation de la fissure par un ressort rotatif.....	10
Figure 7	Les trois modes fondamentaux de rupture (a) mode 1; (b) mode 2; et (c) mode 3	11
Figure 8	Coupe dans une poutre fissurée montrant les détails de la région de pointe de fissure.....	13
Figure 9	Courbes des coefficients de flexibilité adimensionnelle en fonction du rapport ξ	16
 CHAPITRE 2 : LE COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES POUTRES AVEC UNE FISSURE		
Figure 1	Modèle d'une poutre simplement appuyée avec une fissure ouverte.....	21
Figure 2	La méthode graphique.....	27
Figure 3	Comparaison des trois premiers modes de poutre non fissurée et fissurée en utilisant les deux méthodes pour les 10 cas : (a) 1er mode propre, (b) 2ème mode propre et (c) 3ème mode propre.....	39
 CHAPITRE 3 : LE COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES POUTRES AVEC DEUX FISSURES		
Figure 1	Modèle d'une poutre simplement appuyée avec deux fissures ouvertes.....	44
Figure 2	Comparaison des deux premiers modes de poutre non fissurée et fissurée en utilisant la méthode proposée pour les 6 cas : (a) 1er mode propre et (b) 2ème mode propre.....	51
Figure 3	Les changements des deux premières fréquences naturelles en fonction de la position de chaque fissure, tel que : $\xi_1 = \xi_2 = 0.3$	53
Figure 4	Les changements des deux premières fréquences naturelles en fonction de la position de chaque fissure, tel que : $\xi_1 = 0.1$ et $\xi_2 = 0.2$	54
 CHAPITRE 4 : DETECTION DES FISSURES DANS LES POUTRES		
Figure 1	(a) Marteau d'impulsion; (b) Vibreur à masses excentriques; (c) Excitateur électrodynamique; d) Dispositif d'excitation d'impulsion pour les ponts.....	58
Figure 2	Agitateurs servo-hydraulique pour exciter: (a) Ponts verticalement (b) Agitateur électro-hydraulique et (c) Barrages latéralement.....	58
Figure 3	(a) Accéléromètres d'équilibre de force; (b) Acquisition des données à canaux multiples et un système de traitement pour les essais de vibration ambiante.....	59

CHAPITRE 5 : LE COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES POUTRES APPUYEES SUR DEUX SUPPORTS ELASTIQUES AVEC UNE FISSURE

Figure 1	Modèle de la poutre fissurée sur appuis élastiques.....	77
Figure 2	Modèle de forme de vibration libre de poutre fissurée élastiquement supportée..	78
Figure 3	Modélisation de la fissure à l'aide d'un ressort rotatif avec une flexibilité sectionnelle par rapport à la position de la fissure.....	79
Figure 4	Comparaison entre les deux premières formes du mode obtenues par la méthode proposée pour les trois cas: (a) forme du 1er mode, et (b) forme du 2ème mode.....	83
Figure 5	Les deux premières formes du mode d'une poutre fissurée ($l_1 = 0.1, \xi = 0.1$) et non-fissurée obtenues par la méthode proposée avec variation de κ : (a) forme du 1er mode et (b) forme du 2ème mode.....	87
Figure 6	Les deux premières formes du mode d'une poutre fissurée ($l_1 = 0.5, \xi = 0.2$) et non-fissurée obtenues par la méthode proposée avec variation de κ : (a) forme du 1er mode et (b) forme du 2ème mode.....	88
Figure 7	Les deux premières formes du mode d'une poutre fissurée ($l_1 = 0.3, \xi = 0.3$) et non-fissurée obtenues par la méthode proposée avec variation de κ : (a) forme du 1er mode et (b) forme du 2ème mode.....	88

CHAPITRE 6: COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UNE POUTRE SIMPLEMENT APPUYEE FISSUREE SOUMISE A UNE CHARGE MOBILE

Figure 1	Modèle d'une poutre fissurée simplement appuyée soumise à une force mobile..	94
Figure 2	Convergence de la réponse dynamique d'une poutre non fissurée à trois coordonnées différentes (1) $L/4$, (2) $L/2$ et (3) $2L/3$ pour : (a) $v = 2 \text{ m/s}$ et (b) $v = 10 \text{ m/s}$	98
Figure 3	La réponse normalisée à mi-portée d'une poutre simplement appuyée soumise à une force mobile avec différente vitesse, en utilisant: (a) la MEF et (b) la méthode proposée.....	99
Figure 4	La réponse normalisée à mi-portée d'une poutre simplement appuyée soumise à une force mobile, en utilisant la méthode proposée, avec différente vitesse: (a) $v = 5, 20$ et 40 m/s ; et (b) $v = 10, 30$ et 50 m/s	100
Figure 5	Les six premières formes du mode d'une poutre non fissurée et fissurée obtenues par la méthode de la matrice du transfert (MMT) et la méthode proposée (MR).....	101
Figure 6	Effet de la profondeur de la fissure sur la réponse dynamique à mi-portée de la poutre en utilisant la méthode proposée pour $l_1 = 0.5$ et $v = 30 \text{ m/s}$	102
Figure 7	Effet de la vitesse sur la réponse normalisée à mi-portée d'une poutre simplement appuyée fissurée en utilisant la méthode proposée pour $l_1 = 0.5$ et $\xi = 0.5$: (a) $v = 5, 20$ et 40 m/s (b) $v = 10, 30$ et 50 m/s	103
Figure 8	Effet de l'amplitude de la force mobile sur la réponse d'une poutre simplement appuyée à mi-portée avec $v = 30 \text{ m/s}$, $l_1 = 0.5$ et $\xi = 0.5$, en utilisant la méthode proposée : (a) poutre non-fissurée (b) poutre fissurée.....	104
Figure 9	Effet de la position de fissure sur les déplacements transversaux d'une poutre fissurée simplement appuyée avec : $v = 30 \text{ m/s}$, $P = 10 \text{ KN}$ et $\xi = 0.5$: (a) $l_1 = 0.1$ (b) $l_1 = 0.2$ (c) $l_1 = 0.3$ (d) $l_1 = 0.4$	105

LISTE DES TABLAUX

CHAPITRE 1 : LES FISSURES		Page	
Tableau	1	Différentes expressions de flexibilité locale d'une poutre fissurée.....	15
CHAPITRE 2 : LE COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES POUTRES AVEC UNE FISSURE			
Tableau	1	Comparaison des trois premières fréquences naturelles de la poutre non fissurée, obtenues par deux méthodes et les résultats donnés par Xiang et al. (2006).....	31
Tableau	2	Comparaison des trois premières fréquences naturelles de poutres fissurées, obtenues par deux méthodes et les résultats donnés par Xiang et al. (2006) pour divers emplacements et profondeurs de fissures en utilisant le coefficient η_1	33
Tableau	3	Comparaison de l'erreur relative des trois fréquences naturelles (E.R.F.N) calculées à partir des deux méthodes en utilisant le coefficient η_1	33
Tableau	4	Comparaison des trois premières fréquences naturelles de poutres fissurées, obtenues par deux méthodes et les résultats donnés par Xiang et al. (2006) pour divers emplacements et profondeurs de fissures en utilisant le coefficient η_2	34
Tableau	5	Comparaison de l'erreur relative des trois fréquences naturelles (E.R.F.N) calculées à partir des deux méthodes en utilisant le coefficient η_2	34
Tableau	6	Comparaison des trois premières fréquences naturelles de poutres fissurées, obtenues par deux méthodes et les résultats donnés par Xiang et al. (2006) pour divers emplacements et profondeurs de fissures en utilisant le coefficient η_3	35
Tableau	7	Comparaison de l'erreur relative des trois fréquences naturelles (E.R.F.N) calculées à partir des deux méthodes en utilisant le coefficient η_3	35
Tableau	8	Comparaison de l'erreur relative des trois modes propres (E.R.M.P) de quelques points de références (PR) calculées à partir des deux méthodes en utilisant le coefficient η_1	36
Tableau	9	Comparaison de l'erreur relative des trois modes propres (E.R.M.P) de quelques points de références (PR) calculées à partir des deux méthodes en utilisant le coefficient η_2	36
Tableau	10	Comparaison de l'erreur relative des trois modes propres (E.R.M.P) de quelques points de références (PR) calculées à partir des deux méthodes en utilisant le coefficient η_3	36
CHAPITRE 3 : LE COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES POUTRES AVEC DEUX FISSURES			
Tableau	1	Comparaison des deux premières fréquences naturelles de la poutre non fissurée, obtenues par la méthode de Rayleigh (MR), la méthode théorique (MT) et la méthode expérimentale (ME) de Yoon et al. (2007).....	48
Tableau	2	Comparaison de la première fréquence naturelle d'une poutre simplement appuyée avec deux fissures entre la méthode de Rayleigh (MR), la méthode théorique (MT) et la méthode expérimentale (ME) de Yoon et al. (2007).....	48
Tableau	3	Comparaison de la première fréquence naturelle d'une poutre simplement appuyée avec deux fissures entre la méthode de Rayleigh (MR) et la méthode théorique (MT) de Yoon et al. (2007).....	49
Tableau	4	Comparaison de l'erreur relative des premières fréquences naturelles (E.R.F.N) entre la méthode de Rayleigh (MR) et la méthode théorique (MT)	49

		de Yoon et al. (2007).....	
Tableau	5	Calcul des deuxièmes fréquences naturelles d'une poutre simplement appuyée contenant deux fissures avec la méthode de Rayleigh (MR).....	52

CHAPITRE 4 : DETECTION DES FISSURES DANS LES POUTRES

Tableau	1	Comparaison des rapports de longueurs de fissure prédits et réels pour différents cas en utilisant deux fréquences avec le coefficient η_1	70
Tableau	2	Comparaison des rapports de profondeurs de fissure prédits et réels pour différents cas en utilisant deux fréquences avec le coefficient η_1	70
Tableau	3	Comparaison des rapports de longueurs de fissure prédits et réels pour différents cas en utilisant deux fréquences avec le coefficient η_2	71
Tableau	4	Comparaison des rapports de profondeurs de fissure prédits et réels pour différents cas en utilisant deux fréquences avec le coefficient η_2	71
Tableau	5	Comparaison des rapports de longueurs de fissure prédits et réels pour différents cas en utilisant deux fréquences avec le coefficient η_3	72
Tableau	6	Comparaison des rapports de profondeurs de fissure prédits et réels pour différents cas en utilisant deux fréquences avec le coefficient η_3	72

CHAPITRE 5 : LE COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES POUTRES APPUYEES SUR DEUX SUPPORTS ELASTIQUES AVEC UNE FISSURE

Tableau	1	Comparaison des deux premières fréquences naturelles obtenues par la méthode proposée, le modèle discret et l'étude expérimentale pour les deux cas: USS et CSS.....	81
Tableau	2	Comparaison des deux premières fréquences naturelles obtenues par la méthode proposée, la méthode de la matrice du transfert et la méthode des éléments finis pour les deux cas: USS et CSS.....	82
Tableau	3	Comparaison entre les deux premières fréquences naturelles obtenues par les deux méthodes pour les trois cas.....	83
Tableau	4	Comparaison entre les deux premières fréquences des poutres fissurées obtenues par les deux méthodes pour diverses profondeurs, emplacements de fissures et rapports de la rigidité en flexion de la poutre à la rigidité du ressort élastique.....	87

CHAPITRE 6: COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UNE POUTRE SIMPLEMENT APPUYEE FISSUREE SOUMISE A UNE CHARGE MOBILE

Tableau	1	Comparaison de la réponse maximale normalisée à mi-portée d'une poutre simplement appuyée entre la méthode proposée, la MEF et (Mahmoud, 2001)	97
Tableau	2	Comparaison de la réponse maximale normalisée à mi-portée d'une poutre simplement appuyée entre la méthode proposée, la MEF et (Sarvestan et al. 2015).....	99
Tableau	3	Comparaison des six premières fréquences naturelles de la poutre non fissurée et fissurée, obtenue par les deux méthodes pour une fissure située à $L_1 = 10 m$ avec une profondeur $a = 0,3 m$	100
Tableau	4	Comparaison de la réponse maximale normalisée à mi-portée d'une poutre simplement appuyée entre la méthode proposée et (Mahmoud, 2001) avec différente profondeur de fissure pour $l_1 = 0.5$ et $v = 30 m/s$	102
Tableau	5	Comparaison de la réponse maximale normalisée à mi-portée d'une poutre simplement appuyée entre la méthode proposée et (Sarvestan et al. 2015) avec différente profondeur de fissure pour $l_1 = 0.5$ et $v = 20 m/s$	102
Tableau	6	Comparaison de la réponse maximale normalisée à mi-portée d'une poutre simplement appuyée entre la méthode proposée et (Mahmoud, 2001) avec différente vitesse pour for $l_1 = 0.5$ et $\xi = 0.5$	103

LISTE DES PUBLICATIONS

Journaux Internationaux :

1. **Chettah, M.** and Lassoued, R. (2019) 'Free vibration analysis of a cracked elastically supported beam', *Int. J. Vehicle Noise and Vibration*, Vol. 15, No. 1, pp.1–20.
2. **Mahieddine, C., & Rachid, L.** (2018). Comparative study of direct and inverse problems of cracked beams. In MATEC Web of Conferences (Vol. 149, p. 02015). EDP Sciences, <https://doi.org/10.1051/mateconf/201814902015>.

Conférences Internationales :

1. **CHETTAH M., GAHMOUSSE Z. and LASSOUED R.,** EFFECT OF STIFFNESS ON DYNAMIC RESPONSE OF A BEAM SUBJECTED TO MOVING LOAD, 5th International Conference on Energy, Materials, Applied Energetics and Pollution, 22-24 October 2019, Constantine, Algeria. ISBN : 978-9931-9229-7-1.
2. **CHETTAH M. and LASSOUED R.,** FREE VIBRATION ANALYSIS OF CRACKED SIMPLY SUPPORTED BEAM, 1st International Conference on Vulnerability and Rehabilitation of Structures, 07-08 May 2018, Algiers, Algeria. ISBN : 978-9931-9481-0-0.
3. **CHETTAH M. and LASSOUED R.,** L'EFFET DE LA FISSURE SUR LES FREQUENCES NATURELLES D'UNE POUTRE APPUYEE SUR DEUX SUPPORTS ELASTIQUES, 4th International Conference on Energy, Materials, Applied Energetics and Pollution, 29-30 April 2018, Constantine, Algeria. ISBN : 978-9931-9229-4-0.
4. **CHETTAH M. and LASSOUED R.,** Comparative study of direct and inverse problems of cracked beams, 2nd International Congress on Materials and Structural Stability, 22-25 November 2017, Rabat, Morocco. ISBN: 978-1-5108-5259-4.
5. **CHETTAH M. and LASSOUED R.,** Analyse du Comportement Vibratoire des Poutres Fissurées, 3rd International Conference of Mechanics, 26-27 April 2017, Annaba, Algeria. ISBN : 9-789961-899502.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Introduction :

La surveillance des structures est devenue une question importante, en particulier dans les structures mécaniques, aérospatiales, automobiles et civiles, tout en étant soumis au bruit et aux vibrations.

Parmi tous les systèmes de surveillance structurelle, les méthodes d'identification et/ou d'évaluation des dommages, tels que présentées par **Rytter (1993)** peuvent être classés en quatre niveaux. **Park et Inman (2001)** suggèrent un cinquième niveau en état de surveillance qui comprend ce qu'on appelle les «structures auto-réparant». **Worden et Dulieu-Barton (2004)** ont mentionnés que, parfois, la détermination du type de dommages est incluse comme une étape supplémentaire entre les niveaux 1 et 3. Avec l'introduction des nouveaux niveaux, la nouvelle structure devient comme suit:

- Niveau 1: Détecter l'existence du dommage dans la structure : la méthode indique la présence des dommages dans la structure ;
- Niveau 2: Niveau 1 + Localiser l'emplacement géométrique du dommage : la méthode donne des informations sur la position probable des dommages ;
- Niveau 3: Niveau 2 + Classification (nature) du dommage : la méthode donne des informations sur le type du dommage (fissure, corrosion, etc.);
- Niveau 4: Niveau 3 + Quantification de la gravité du dommage : la méthode donne une estimation sur les degrés de risque des dommages (profondeur, propagation) ;
- Niveau 5: Niveau 4 + Prévision de la durée de vie restante de la structure ;
- Niveau 6: Niveau 5 + Les systèmes des structures intelligentes ou les systèmes de contrôle structurel pour les structures auto-réparant. (pour plus de détail voir (**Hurlebaus et Gaul, 2006 ; Saaed et al. 2013**)).

Le niveau 5 est généralement classé avec le domaine de la mécanique de rupture, l'analyse de la fatigue, ou l'évaluation de la conception structurelle et, à ce titre, il n'est pas généralement abordé dans la vibration structurelle (**Doebling et al. 1996**).

L'une des premières activités de surveillance de l'intégrité des ponts est documentée par **Carder (1937)**. Elle a été réalisée sur les ponts de Golden Gate et Bay à San Francisco-Oakland dans un programme expérimental élaboré pour mesurer les périodes causées par des vibrations ambiantes des différents composants du pont lors de sa construction, pour connaître le comportement dynamique et les conséquences possibles lors de l'excitation sismique.

Un élément de poutre se trouve dans la plupart de notre environnement réel, par exemple dans les structures aérospatiales, les plateformes offshore, des infrastructures civiles tels que les bâtiments, les ponts, les tunnels, les barrages, les paquets d'aubes de turbines à gaz ou à vapeur, etc. En fait, les systèmes mécaniques ou leurs structures utilisent fréquemment des éléments de type poutre qui doivent supporter à la fois des forces axiales et transversales, ainsi que des moments, et résister aux effets de charges physiques ou chimiques tels que les chocs, érosions, corrosions, fatigues, soudures ou accidents, etc. Toutes ces influences peuvent entraîner des défauts qui entraînent une modification du comportement dynamique des structures. Le type de dommage le plus courant est la fissure dans les éléments mécaniques ou structurels en forme de poutre soumis à une charge dynamique.

La présence d'une fissure pourrait non seulement provoquer une variation locale de la rigidité, mais également affecter considérablement le comportement mécanique de

l'ensemble de la structure. Comprendre les effets vibratoires des fissures permet de les reconnaître dans les applications pratiques du contrôle des vibrations en utilisant les méthodes de la mécanique de la rupture de manière analytique, numérique et expérimentale. Par conséquent, de nombreux chercheurs ont montrés un intérêt certain pour l'identification vibratoire des poutres fissurées.

La détection de fissure d'éléments de poutre implique deux aspects différents:

Le premier en tant que problème direct, qui est généralement classé dans le niveau 1, consiste à calculer les modifications des paramètres modaux d'une structure donnée en fonction de l'emplacement et de la profondeur, à partir d'un type du dommage connu modélisé mathématiquement. Les paramètres modaux calculés sont comparés aux paramètres modaux mesurés.

Le second comme un problème inverse, qui est généralement du niveau 2 ou 3, consiste à calculer les paramètres du dommage d'une structure donnée (la détermination de l'emplacement et la profondeur de la fissure) en fonction des paramètres modaux mesurés expérimentalement.

L'identification exacte des comportements dynamiques est essentielle au succès des méthodes d'identification des fissures basées sur la vibration, qui sont supportées par les modèles de vibration théoriques. Les méthodes d'identification des fissures utilisant directement plusieurs applications pratiques des mesures et du contrôle des vibrations peuvent ne pas nécessiter des modèles théoriques de vibrations. Ces méthodes sont généralement basées sur l'inspection des paramètres modaux et nécessitent des mesures de très haute qualité qui utilisent des systèmes coûteux d'acquisition et de surveillance des données possédant des propriétés telles que les capteurs multiples, sensibilité élevée, grande capacité du disque dur et traitement rapide. Le système idéal choisi pour l'identification de la fissure devrait être peu coûteux, non invasif et automatisé, de manière à éviter les différences subjectives entre les opérateurs.

Cette thèse de doctorat présente des méthodes directes et inverses d'identification des fissures basées sur les vibrations libres et forcées de flexion des poutres. La motivation de la thèse est structurée en fonction des lacunes observées dans la revue de littérature présentée dans les chapitres suivants.

Objectifs de la thèse:

L'objectif de ce travail est de mettre en relief ces principaux paramètres à travers les points suivants :

- Présenter une analyse exhaustive sur les effets des fissures sur le comportement dynamique des poutres ;
- Contribuer, à travers une extension de la méthode de Rayleigh, des investigations théoriques et des comparaisons entre les différentes études expérimentales, à la compréhension du comportement dynamique des poutres fissurées;
- Présenter une analyse critique sur les différentes méthodes d'identification des fissures ;
- Présenter une étude comparative entre les différentes méthodes analytiques numériques et expérimentales ce qui concerne la vibration libre et forcée.

Contenu de la thèse :

Ce travail est organisé en six chapitres :

Une introduction générale ou on définit au préalable la problématique du sujet et les objectifs recherchés.

Le premier chapitre présente des généralités sur la théorie des fissures, leurs caractérisations, leurs méthodes de modélisations et le calcul des différents coefficients de flexibilités.

Le deuxième chapitre compare la précision et la capacité des deux méthodes notamment la méthode de Rayleigh et la méthode des matrices du transfert à prédire correctement les résultats pour les problèmes directs d'une poutre simplement appuyée avec une fissure, ou plusieurs cas de profondeurs, d'emplacements, et aussi plusieurs modèles de flexibilité transversale sont étudiés.

Le troisième chapitre présente une étude sur les effets des deux fissures sur la fréquence naturelle et la forme du mode d'une poutre simplement appuyée en comparant les résultats théoriques, les mesures expérimentales présentées dans la littérature par la méthode proposée pour différentes cas d'études.

Le quatrième chapitre présente une brève revue sur la recherche des méthodes d'identification des fissures, afin de donner une récapitulation tout autour sur les progrès et le développement de cette récente zone chaude. Par la suite un exemple numérique a été fourni dans le but de tester l'efficacité des deux méthodes autrement-dit la méthode de matrice du transfert et la méthode de Rayleigh à prédire correctement les paramètres des fissures (l'emplacement et la profondeur) en utilisant une des méthodes d'identification présentées précédemment (basé sur les fréquence naturelles).

Le cinquième chapitre présente une méthode simplifiée pour évaluer les deux premières fréquences naturelles et les formes du mode d'une poutre élastiquement supportée avec une fissure, pour lesquels, à la connaissance des auteurs, aucune solution sous forme fermée n'a été proposée dans la littérature. La méthode proposée est comparée avec des études expérimentales, analytiques et numériques antérieures pour plusieurs cas de profondeurs et d'emplacement des fissures, avec différents rapports de rigidité en flexion de la poutre sur la rigidité du support élastique pour des poutres élastiquement supportées, y compris une fissure.

Le sixième chapitre présente une solution analytique approximative pour les réponses forcées d'une poutre fissurée traversée par une seule force mobile à vitesse constante. La méthode proposée est comparée à d'autres méthodes dans plusieurs cas de profondeur et de position de la fissure, de vitesse et d'amplitude de la charge mobile pour des poutres simplement appuyées contenant une fissure.

Ce travail est finalisé par **une conclusion générale** qui synthétise les principales conclusions tirées des différents chapitres et les perspectives futures de ce thème de recherche.

CHAPITRE 1: LES FISSURES

Introduction :

1.1. Définition de l'endommagement :

L'endommagement de la structure, c'est-à-dire un changement apportée aux propriétés matérielles et / ou géométriques d'un système, entraînant des modifications de ses propriétés dynamiques, notamment les fréquences naturelles, les déformées modales et les taux d'amortissement, et qui engendre une incidence défavorable sur ses performances actuelles ou futures. Les variations de ces propriétés ainsi que de leurs dérivées (courbure, flexibilité, etc.) sont utilisées comme indicateurs d'endommagement.

Worden et Dulieu-Barton (2004) ont précisés que la difficulté essentielle est la prise de décision quand est ce qu'une structure est «endommagée». Ils ont défini trois niveaux de désordre :

- **Une défaillance (rupture)** est un changement dans le système qui produit une réduction inacceptable de la qualité de la structure, ou elle ne peut plus fonctionner de façon satisfaisante et ne répond pas aux exigences des clients ou utilisateurs ;
- **Les dommages** sont lorsque la structure ne fonctionne plus dans son état idéal, mais peut encore fonctionner d'une manière sous-optimale ;
- **Un défaut** est inhérent dans le matériau et statistiquement tous les matériaux contiennent une certaine quantité inconnue de défauts, ce qui signifie que la structure peut fonctionner à sa condition de conception, même si les matériaux constitutifs contiennent des défauts (qui sont inévitables dans des matériaux réels).

Ces définitions permettent une relation hiérarchique à développer; à savoir, les défauts conduisent à des dommages et ces derniers conduisent à des défaillances (ruptures).

1.2. Les effets des dommages :

Les effets des dommages sur la structure peuvent être classés comme linéaires ou non linéaires (**Figure 1**):

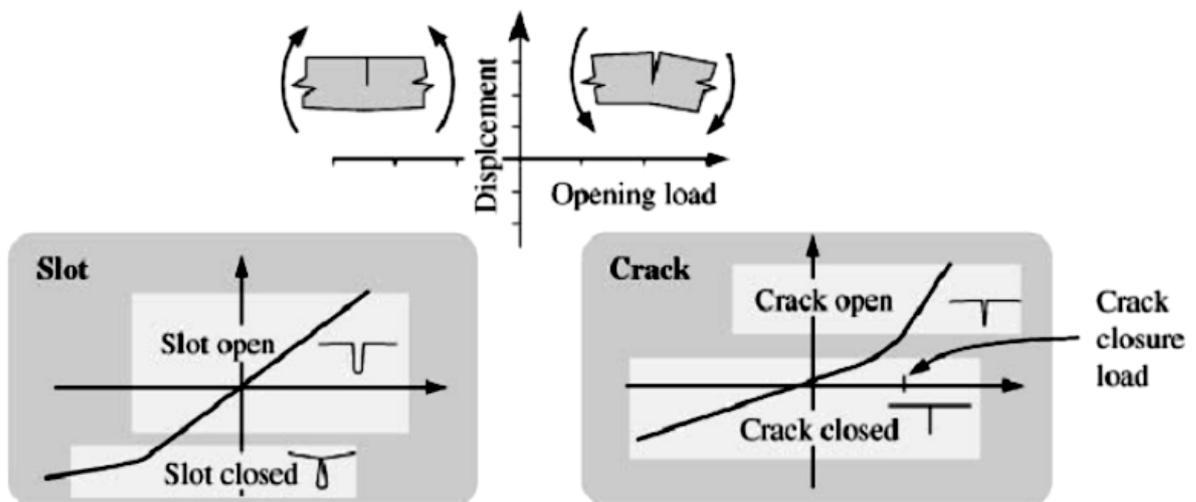


Figure 1: Comportement des dommages (Celico, 2014).

- Une situation du dommage linéaire est définie comme étant le cas lorsque la structure initialement élastique linéaire reste linéaire élastique après les dommages. Les changements dans les propriétés modales sont le résultat des variations de la géométrie et / ou les propriétés du matériau de la structure, mais la réponse structurelle peut encore être modélisée en utilisant une équation linéaire du mouvement ;
- Les dommages non linéaires sont définis comme étant le cas lorsqu'une structure qui se comporte d'abord d'une manière essentiellement linéaire, pour présenter une réponse non linéaire, le dommage est soumis à son environnement de fonctionnement (**Worden et al. 2008**). Un exemple du dommage non linéaire est la formation d'une fissure qui s'ouvre et se ferme sous vibration dans un environnement d'exploitation normale (fissures de respiration).

1.3. Les fissures :

Il est bien connu que les fissures, même de dimension réduite, ne sont pas facilement détectables et sont parmi les types des dommages les plus rencontrés dans les structures (**Figure 2**). Ces fissures lorsqu'elles sont soumises à une variation de contraintes répétitives, se développent et se propagent conduisant à une rupture brutale due à l'incapacité de supporter les charges.

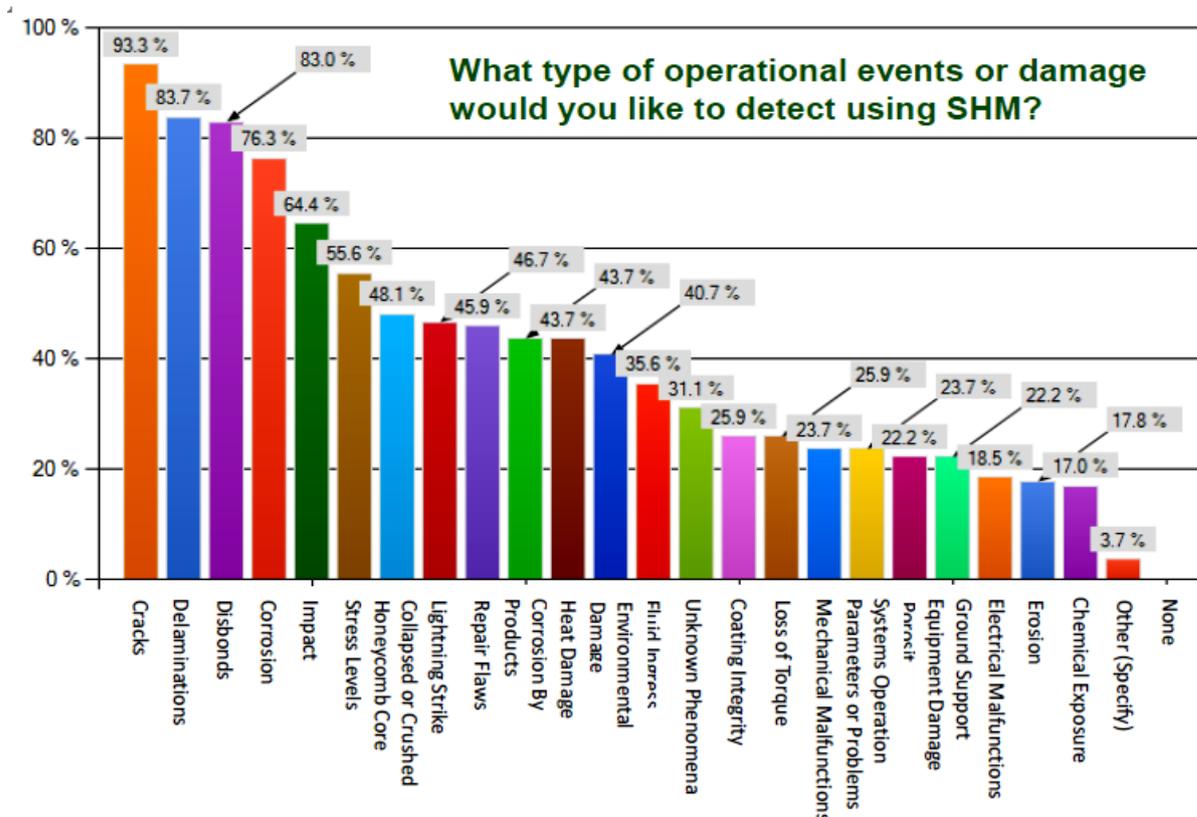


Figure 2: Les types des dommages les plus rencontrés dans les structures (Roach et Neidigk, 2011).

La rupture brutale d'éléments structuraux est très coûteuse en termes économiques, et peut être catastrophique en termes des pertes de vies humaines et des dégâts matériels. C'est pour ces raisons, il est très important d'évaluer les systèmes structurels, d'assurer leurs sécurités

en détectant des dommages structurels et déterminer ses effets sur les caractéristiques de stabilité des structures.

En génie civil, certaines structures comme (les bâtiments, les barrages, les voies ferrées, les ponts, les piles, etc.) doivent être surveillées en permanence, afin d'identifier et de détecter les changements, qui peuvent indiquer d'éventuels dommages ou dégradations (par exemple des fissures) pour assurer une continuité du service en raison de l'évolution des fissures.

1.4. Classification des fissures :

Compte tenu de leurs géométries, Il existe des différents types de fissures utilisées dans les méthodes de détection. Elles peuvent être classées comme suit (**Sabnavis et al. 2004 ; Fegade et al. 2014**):

- Des fissures perpendiculaires à l'axe de la poutre, connues comme «des fissures transversales». Ce sont les plus courantes et les plus graves, car ils réduisent la section transversale et ainsi affaiblissent la capacité portante de la poutre. Elles introduisent une flexibilité locale de la rigidité de la poutre due à la concentration d'énergie de déformation dans le voisinage de la fissure ;
- Des fissures parallèles à l'axe de la poutre sont appelées «des fissures longitudinales». Elles ne sont pas si importantes, mais elles posent un danger lorsque la charge de traction appliquée est perpendiculaire à la direction de la fissure c'est-à-dire perpendiculairement à l'axe de la poutre ;
- Les fissures inclinées (fissures à un angle à l'axe de la poutre) sont également rencontrées, mais ne sont pas très fréquentes. Ceux-ci influent sur le comportement de torsion de la poutre. Leur effet sur les vibrations latérales est inférieur à celle des fissures transversales de même intensité ;
- Des fissures qui s'ouvrent lorsque la partie affectée de la matière est soumise à des contraintes de traction et se ferment lorsque la contrainte est inversée, connues comme (fissures de respiration). La rigidité de l'élément est plus influencée sous tension. Les fissures de respiration causent une non-linéarité dans le comportement vibratoire de la poutre.

Ces fissures se produisent lorsque la taille des fissures est petite, les vitesses de fonctionnement sont faibles et les forces radiales sont grandes. La plupart des efforts de recherche théoriques sont concentrées sur les fissures "de respiration transversale" en raison de leur importance pratique directe ;

- Les fissures qui restent toujours ouvertes sont connues comme «des fissures béantes». Elles sont plus correctement appelées "encoches ou entailles". Ces fissures béantes sont faciles à imiter dans un environnement de laboratoire et donc le travail expérimental se concentre sur ce type de fissure particulier ;
- Les fissures qui s'ouvrent sur la surface sont appelées «des fissures de surface». Elles peuvent généralement être détectées par des techniques telles que la teinture/colorant ou par inspection visuelle ;
- Les fissures qui ne se montrent pas à la surface sont appelés (les fissures du sous-sol). Des techniques spéciales telles que l'ultrason, les particules magnétiques, la radiographie ou la chute de tension de la poutre sont nécessaires pour les détecter. Les fissures de surface ont un effet plus important que les fissures du sous-sol sur le comportement vibratoire des poutres.

1.5. Caractérisation des fissures :

Pour une poutre avec une charge transversale, l'effet de la vibration transversale sera plus important que celle de la vibration longitudinale. L'analyse dynamique de la poutre porte sur l'étude des modes de vibration et la détermination de la réponse dynamique de la structure avec ses paramètres physiques et de les analyser pour tout défaut. Ce type d'analyse dépend principalement des paramètres géométriques de la structure (dimensions), les conditions aux limites et les propriétés du matériau de la section. En plus de cela, la présence d'une fissure dans une structure modifie son comportement dynamique. Ces fissures peuvent être caractérisées par :

- a) La position (emplacement) de la fissure :
 - Pour les fissures horizontales l'emplacement peut être dans la partie inférieure, moyenne ou supérieure ;
 - Pour les fissures verticales l'emplacement peut être dans la zone médiane ou les parties de rives (latérales).
- b) La forme de la fissure : simple, rectiligne, courbé, ou quelconque.
- c) L'orientation de la fissure : verticale, horizontale, inclinée (faire un angle par rapport à l'horizontale), et mixte (plusieurs directions);
- d) L'importance (la gravité) de la fissure : le nombre, la profondeur, la largeur, et la longueur de la fissure.

1.6. La modélisation des fissures :

Dans la littérature, plusieurs approches ont été utilisées pour modéliser les fissures afin d'étudier le comportement dynamique des poutres fissurées. Les travaux d'**Ostachowicz et Krawczuk (2001, 2009)** ont permis d'établir des modèles existants utilisés pour analyser l'influence des fissures de fatigue et des délaminages sur les modifications des caractéristiques dynamiques des éléments de construction. **Friswell et Penny (2002)** comparent les différentes approches de modélisation des fissures avec des données expérimentales sur les vibrations et démontrent que pour la surveillance de l'intégrité structurelle à l'aide des vibrations à basse fréquence, des modèles simples de flexibilité pour des poutres fissurées sont adéquats.

En général, il existe trois modèles de base de fissure, à savoir :

1.6.1. Le modèle de la section transversale réduite équivalente :

Historiquement, c'était la méthode la plus ancienne. D'abord proposée par **Hetenyi (1937)**, puis développée par **Kirmser (1944)** et **Thomson (1949)**. Ils ont simulés l'effet de la région fissurée en utilisant un moment de flexion local (**Figure 3(a)**) et une section réduite (**Figure 3(b)**) qui l'ont considérée comme une poutre courte. Ce modèle était probablement le modèle le plus couramment utilisé jusqu'au milieu des années soixante-dix (**Cheng, 1998**), parce que la théorie des fissures et les méthodes de simulation numérique précises n'étaient pas disponibles à ce moment-là, la réduction de la rigidité due à une fissure a été évaluée expérimentalement.

Avec ce modèle, une solution analytique est facilement établie et une analyse par éléments finis peut être facilement réalisée (**Zheng et Ji, 2012**).

Cependant, la principale limitation de ce modèle était le fait que leur description mathématique reposait sur des équations différentielles partielles, puis ils permettaient des études et des investigations et ne fournissaient des résultats d'une précision suffisamment élevée que dans le cas d'éléments de construction de géométrie très simple. Par conséquent,

ce modèle a été principalement utilisé pour les études du comportement statique et dynamique des poutres de sections transversales constantes.

D'autre part, l'absence de relation explicite entre la géométrie d'une fissure et l'amplitude de sa charge équivalente externe la rend pratiquement inapplicable pour l'analyse de sensibilité des caractéristiques dynamiques des éléments de construction.

Un autre inconvénient de ce modèle était également le fait qu'un caractère singulier des champs de contrainte et de déformation autour de la pointe de la fissure avait été négligé.

Finalement, ce modèle idéalisé n'est pas pratique pour la détection réelle des fissures. La répartition des contraintes est tout à fait différente de la situation réelle; par conséquent, les erreurs dans la méthode de détection seront très importantes en fonction de la taille des fissures.

Compte tenu de ce qui précède, cette méthode n'est pratiquement plus utilisée.

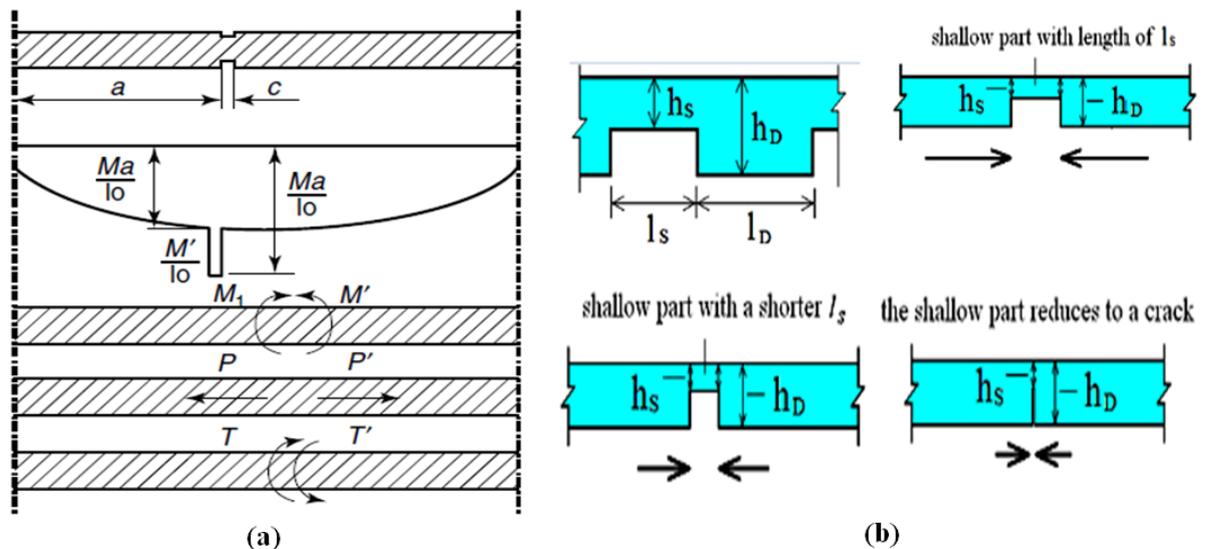


Figure 3: Le modèle de section transversale réduite équivalente : (a) le moment de flexion local (Thomson, 1949); (b) la poutre courte (Zheng et Ji, 2012).

1.6.2. Le modèle de flexibilité continue :

La mise au point des modèles continus a fourni une autre approche pour analyser les éléments de construction fissurés.

Dans les modèles de flexibilité continue, les effets de flexibilité supplémentaires (énergie (**Figure 4(a)**) et contraintes / déformations (**Figure 4(b)**)) provoqués par l'existence des fissures sont répartis le long des poutres avec des fonctions exponentielles, qui ont une valeur maximale à la section fissurée et qui décroît de manière exponentielle à partir de l'emplacement de la fissure. Par la suite, ces fonctions peuvent être utilisées pour construire l'équation du mouvement en appliquant la formule de variation de Hu Washizu en intégrant la section transversale.

Certaines méthodes utilisées par les chercheurs reposent sur le principe de variation pour définir les effets des fissures sur les vibrations. **Christides et Barr (1984, 1986)** ont proposés une fonction de perturbation des fissures de type exponentiel pour modéliser la variation de contrainte / déformation autour de la zone de fissure pour une ou plusieurs paires de fissures symétriques. **Shen et Pierre (1994)** ont proposés une approche similaire pour les poutres à une seule fissure en utilisant les méthodes de Galerkin et Ritz locales en solution. **Chondros et al. (1998)** ont développés une autre fonction de perturbation des fissures pour la vibration d'une poutre simplement appuyée présentant une ou deux fissures. Une autre approche, qui définit la variation de la rigidité autour de la fissure à l'aide de la

répartition de l'énergie de contrainte le long de la poutre, a été proposée par **Yang et al. (2001)** pour les poutres à une ou deux fissures. **Mazanoglu et al. (2009)** modifient la fonction de distribution pour plusieurs poutres fissurées. Les formulations écrites pour l'énergie consommée et leur forme de distribution sont révisés pour les fissures en hauteur (**Mazanoglu et Sabuncu, 2010b**) et les fissures doubles (**Mazanoglu et Sabuncu, 2010a**).

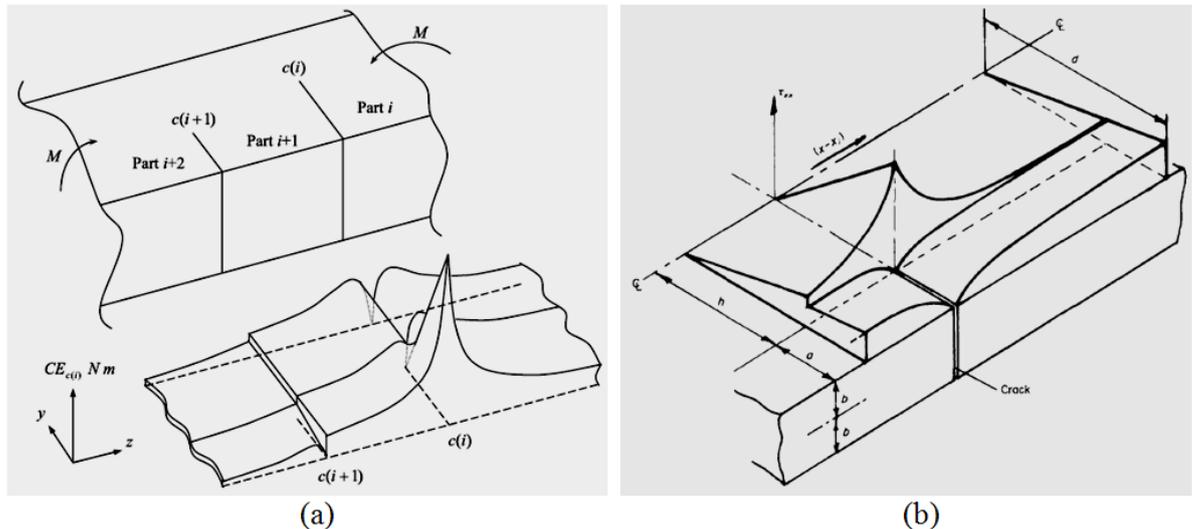


Figure 4: Schéma de distribution de: (a) l'énergie (Mazanoglu et Sabuncu, 2010b); (b) la contrainte (Christides et Barr, 1984) au voisinage de la fissure.

Dans l'analyse par éléments finis (**Figure 5**), il est très facile d'attribuer des propriétés du matériau aux éléments. Dans ce cas, une fissure dans l'élément fini est modélisée par réduction des coefficients d'élasticité de l'élément (**Cawley et Adams, 1979**), par réduction de son module de Young (**Yuen, 1985**) et par réduction de la rigidité locale de l'élément (**Christides et Barr, 1984**).

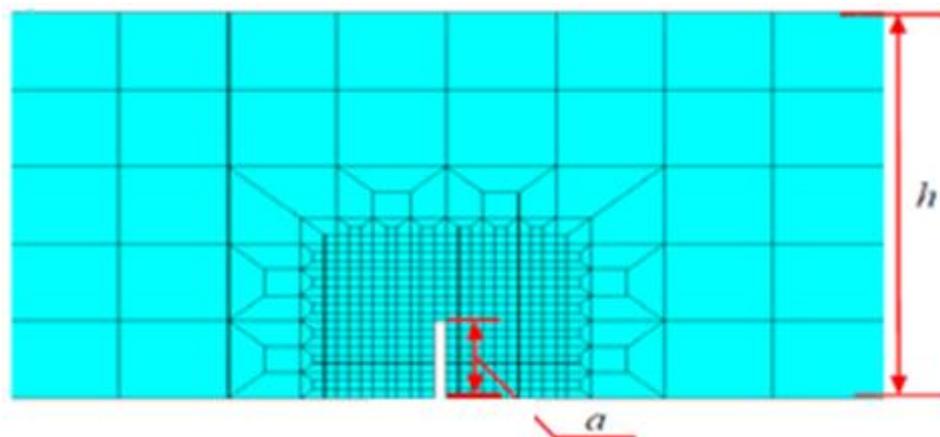


Figure 5: Modèle d'une section fissurée en élément fini.

Cette méthode ne nécessite qu'une simple modification de l'analyse par éléments finis et aucun nouvel élément ne soit requise. Aussi, bien que la fonction simule les conditions aux limites et certains aspects de la distribution des contraintes à proximité et dans la section fissurée, la discontinuité de la distribution des contraintes était une faiblesse évidente de la fonction (Un caractère singulier de la fonction de contrainte autour du fond de fissure est également négligé), car la distribution des contraintes au voisinage d'un changement brusque

de section transversale restait continue, ce qui a été démontré par **Zheng et Ji (2011)** en appliquant le modèle en élément fini à mailles fines.

Une autre limitation de cette approche concerne le fait que les fonctions de distribution des contraintes doivent être déterminées expérimentalement (**Barr, 1966**). En règle générale, leurs valeurs ne sont pas directement liées à la taille réelle d'une fissure et ne permettent donc pas d'étudier de manière précise l'influence de la profondeur de la fissure sur les modifications des caractéristiques dynamiques.

Cependant, il est à noter qu'un tel modèle ne décrit pas précisément une fissure, mais représente plutôt une entaille ou une fente (**Dimarogonas, 1996**).

Les restrictions du modèle susmentionné ne permettent d'analyser la vibration des structures que dans des cas particuliers. Les constructions techniques réelles sont plus complexes et l'application d'autres techniques suit naturellement.

1.6.3. Le modèle de flexibilité locale issu de la mécanique de la rupture :

Le modèle de flexibilité locale (également appelé modèle discret-continu) est le modèle le plus couramment utilisé pour étudier le comportement dynamique d'éléments de construction présentant des fissures. Ce modèle considère une poutre fissurée comme un certain nombre de segments de poutre non endommagés ayant les mêmes propriétés, reliés par des ressorts rotatifs sans masse (**Figure 6**), fournissant des conditions de compatibilité et de continuité au niveau des sections fissurées. La rigidité des ressorts en translation, en rotation et dans le sens axial a été déterminée en estimant la flexibilité locale de la zone fissurée par les résultats théoriques et expérimentaux de la mécanique de la rupture en fonction des propriétés des sections de liaison et de la sévérité de la fissure.

L'effet du ressort rotatif est considéré comme l'effet de la charnière (articulation) provoquant une flexibilité locale entre les deux parties de la poutre. La flexibilité a été quantifiée dans les années 1950 par Irwin, Bueckner, Westmann et Yang (**Sih, 1973; Tada et al. 1973**). Ils associaient la flexibilité locale au facteur d'intensité de contrainte (FIC).

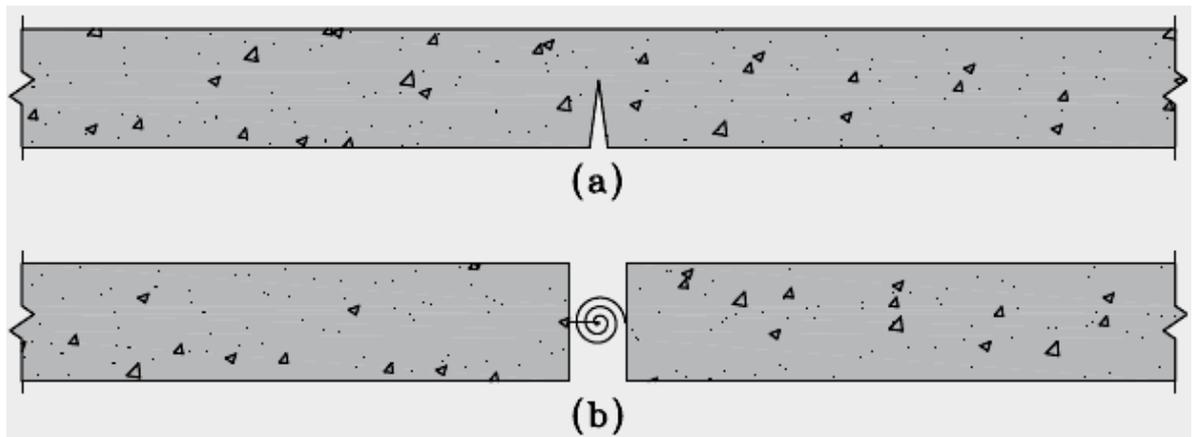


Figure 6: Modèle de flexibilité locale : (a) poutre avec une fissure et (b) simulation de la fissure par un ressort rotatif (Paultre et al. 2015).

Ce modèle peut être utilisé avec succès pour modéliser les fissures dans des éléments de construction unidimensionnels (barres, poutres, rotors, poteaux et tuyaux) (**Gudmundson, 1982 ; Nandwana et Maiti, 1997 ; Gasch, 1993 ; El Arem, 2006 ; Okamura et al. 1969 ; Anifantis et Dimarogonas, 1983**) ou dans des constructions faites de tels éléments (portiques et treillis (**Ozturk et al. 2016b**)) et plaques (**Khadem et Rezaee, 2000 ; Matveev et Boginich, 2004, 2005, 2006**). Aussi, il peut être intégré de manière plus facile dans la

solution fondamentale des poutres fissurées même en appliquant plusieurs méthodes tel que : la méthode de la matrice du transfert (**Khiem et Lien, 2001 ; Lin et al. 2002**), la méthode de Rayleigh (**Fernandez-Saez et al. 1999**) et les méthodes à base d'éléments finis (**Dimarogonas et Papadopoulos, 1983 ; Krawczuk, 1994 ; Yokoyama et Chen, 1998**).

La méthode du ressort de rotation a toujours été jugée utile dans la procédure de simulation de fissure. Cependant, il faut bien comprendre que ce n'est qu'un modèle idéalisé. L'influence de l'amortissement et la répartition des contraintes au voisinage d'une fissure ne peuvent pas être correctement reflétées dans ce modèle. En outre, cette approche est limitée car basée sur des équations aux dérivées partielles ou intégrales, elle permet d'étudier et obtenir des résultats d'une précision suffisamment élevée uniquement dans le cas d'éléments de construction de géométrie simple tels que des barres, des poutres, des poteaux, des arbres ou des plaques rectangulaires avec des conditions aux limites typiques.

1.7. Mode de rupture :

La fissuration se manifeste par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties, appelées lèvres (faces) de la fissure, ce qui introduit une discontinuité au sens des déplacements. Les mouvements possibles des lèvres de chaque fissure sont des combinaisons de trois modes indépendants (**Figure 7**):

- **Le mode I** : correspond au mode d'ouverture dans lequel les faces des fissures se séparent dans une direction normale au plan de la fissure et les déplacements correspondants à des parois de la fissure sont symétriques par rapport au front de fissure. Le chargement est perpendiculaire au plan et tend à ouvrir la fissure. Le mode I est généralement considéré comme la situation de chargement la plus dangereuse.
- **Le mode II** : correspond à une charge de cisaillement dans le plan et il a tendance à faire glisser une face de fissure par rapport à l'autre (mode de cisaillement). La contrainte est parallèle à la direction de croissance de la fissure.
- **Le mode III** : correspond à un cisaillement ou à une déchirure hors du plan. Dans lequel les faces de fissure sont cisailées parallèlement au front de la fissure.

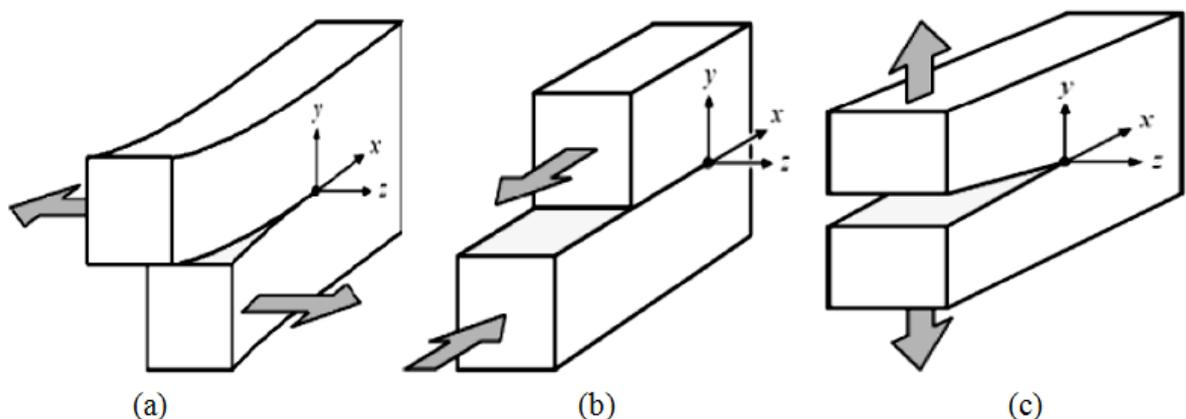


Figure 7: Les trois modes fondamentaux de rupture (a) mode 1; (b) mode 2; et (c) mode 3.

1.8. Le facteur d'intensité de contrainte (FIC):

Le facteur d'intensité de contrainte ' K ' (FIC) est un concept important en mécanique de la rupture, représentant l'intensité du champ de contrainte locale et la magnitude du

déplacement singuliers près de la pointe d'une fissure dans un solide élastique linéaire lorsque les surfaces de la fissure sont déplacées selon les trois modes de déformation de base: mode I (mode d'ouverture), mode II (mode glissant) et mode III (mode de déchirement).

Le FIC dépend du chargement, la taille et la forme de la fissure et des limites géométriques de la section, dont l'unité recommandée pour K est $[MPa\sqrt{m}]$.

La solution élastique linéaire classique pour le champ de contrainte autour d'une fissure est donnée par **Nobile (2000)**:

$$\sigma_x = \frac{(K_I, K_{II}, K_{III})}{\sqrt{2\pi r}} f_x(\vartheta) + O(r)^{1/2} \quad (1.1)$$

Où σ_x est la contrainte agissant à une distance r de la pointe de fissure. L'angle ϑ est mesuré à partir du plan de la fissure, $f_x(\vartheta)$ est une fonction connue et $(K_I, K_{II}$ et $K_{III})$ sont les facteurs d'intensité de contrainte associés aux trois modes de déformation de base.

Les termes d'ordre supérieur (K_{II} et K_{III}) sont négligeables par rapport au premier terme (K_I). Par conséquent, l'utilisation du terme singulier seul est suffisante pour analyser le comportement de la pointe d'une fissure (**Papadopoulos, 2008**).

Afin de dériver le facteur d'intensité de contrainte, une poutre est considéré avec une fissure ouverte et non propagatrice de profondeur a , longueur L , hauteur h et largeur b (**Figure 8**). La distribution singulière des contraintes à la pointe de la fissure prend la forme :

$$\sigma_x^s = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (1.2)$$

Avec les conditions dans lesquelles σ_x^s agit à une distance $r = t$ de la pointe et K_I est le facteur d'intensité de contrainte. La contrainte normale agissant sur la section réduite passant par la pointe de fissure est donnée par :

$$\sigma_x = \frac{M}{\bar{I}} y \quad (1.3)$$

Où M est le moment de flexion et $\bar{I} = b(h - a)^3/12$ est le moment d'inertie de la partie restante de la poutre fissurée. La distance y est donnée à partir de la **figure 8** comme :

$$y = \bar{y} - t = \frac{h}{2} - \frac{a}{2} - t \quad (1.4)$$

Où \bar{y} est la distance entre l'axe neutre de la section transversale réduite et la pointe de la fissure.

La condition de contrainte est considérée comme $\sigma_x^s = \sigma_x$ au niveau de la pointe de la fissure $r = t$. En substituant (1.4) en (1.3), σ_x et K_I peuvent être exprimées par :

$$\sigma_x = \frac{12M}{b(h - a)^3} \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2} - t \right) \quad (1.5)$$

$$K_I = \sqrt{2\pi t} \sigma_x = \frac{12M\sqrt{2\pi t}}{b(h - a)^3} \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2} - t \right) \quad (1.6)$$

La distance t peut être déterminée à partir de la condition d'équilibre des forces sur l'axe des x :

$$\int_0^t \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr = \int_{\bar{y}-t}^{\bar{y}} \sigma_x dy \quad (1.7)$$

Le côté gauche de (1.7) est évalué, en utilisant (1.6), pour être :

$$\int_0^t \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr = \frac{24Mt}{b(h-a)^3} \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2} - t \right) \quad (1.8)$$

La partie droite de (1.7) est évaluée, en utilisant (1.5), pour être :

$$\int_{\bar{y}-t}^{\bar{y}} \sigma_x dy = \frac{6Mt}{b(h-a)^3} (h-a-t) \quad (1.9)$$

La substitution de (1.8) et (1.9) en (1.7) conduit à :

$$\frac{24Mt}{b(h-a)^3} \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2} - t \right) = \frac{6Mt}{b(h-a)^3} (h-a-t) \quad (1.10)$$

Donc :

$$t = \frac{1}{3}(h-a) \quad (1.11)$$

En substituant (1.11) en (1.6), le facteur d'intensité de contrainte peut être trouvé.

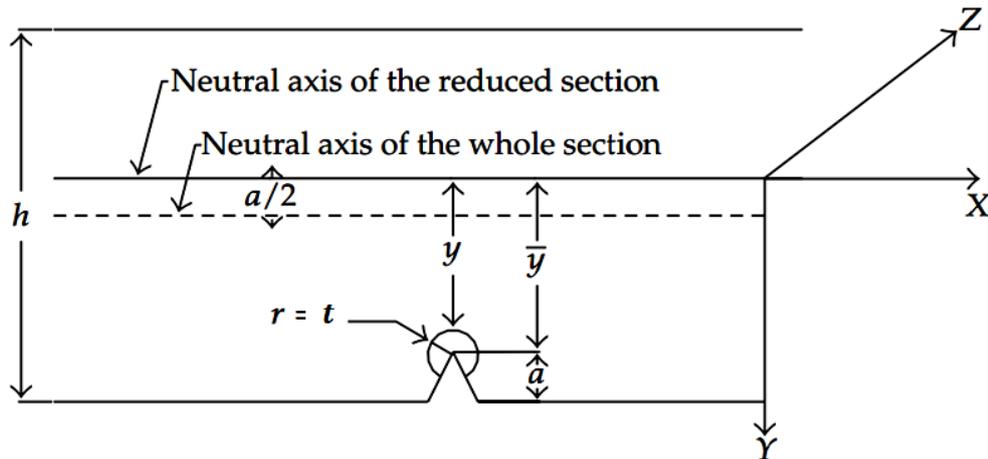


Figure 8: Coupe dans une poutre fissurée montrant les détails de la région de pointe de fissure.

Les facteurs d'intensité de contrainte pour de nombreuses configurations sont disponibles. Dans la plupart des cas, les résultats ont été obtenus au moyen des méthodes analytiques et numériques (**Sih, 1973; Tada et al. 1973**). Les méthodes des éléments finis (**Byskov, 1970 ; Benzley, 1974**) et des éléments finis quadrilatère généralisé sont souvent utilisées. Les méthodes expérimentales sont utilisées pour déterminer la résistance à la rupture des matériaux d'ingénierie (**Chondros et Dimarogonas, 1980**).

1.9. Les coefficients de flexibilité :

La présence d'une fissure dans un élément de structure conduit à une concentration d'énergie à proximité des lèvres et introduit une flexibilité locale.

Pour évaluer la flexibilité d'un ressort en rotation, la relation entre la concentration en énergie de déformation au voisinage de la pointe de fissure et la charge appliquée est établie conformément à la théorie de la mécanique de la rupture élastique linéaire. Ensuite, les coefficients de flexibilité sont exprimés en termes des facteurs d'intensité de contrainte en utilisant le théorème de Castigliano et l'équation de Paris.

Selon le théorème de Castigliano, le déplacement supplémentaire est de la forme :

$$u_i = \frac{\partial U_T}{\partial P_i} \quad (1.12)$$

Où U_T est l'énergie de déformation due à la fissure et P_i est le chargement général.

Comme le moment de flexion M est la seule charge de la structure. Le déplacement supplémentaire u_i est pris comme une rotation θ . Donc, le déplacement se réduira à :

$$\theta = \frac{\partial U_T}{\partial M} \quad (1.13)$$

Par conséquent, l'énergie de déformation aura la forme :

$$U_T = \int_0^a \frac{\partial U_T}{\partial a} da = b \int_0^a S(a) da \quad (1.14)$$

Où $S(a)$ est la fonction de densité d'énergie de déformation. Donc :

$$u_i = \frac{\partial U_T}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i} \left[b \int_0^a S(a) da \right] \quad (\text{l'équation de Paris}) \quad (1.15)$$

En remplaçant le déplacement par θ et le chargement par M , l'équation (1.15) devient :

$$\theta = \frac{\partial}{\partial M} \left[b \int_0^a S(a) da \right] \quad (1.16)$$

Le coefficient d'influence de la flexibilité sera écrit comme :

$$c = \frac{\partial \theta}{\partial M} = \frac{\partial^2}{\partial M^2} \left[b \int_0^a S(a) da \right] \quad (1.17)$$

La fonction de densité d'énergie de déformation $S(a)$ a la forme :

$$S(a) = \frac{K_I^2}{\dot{E}} \quad (1.18)$$

Où $\tilde{E} = E/(1 - \nu^2)$ pour un problème de déformation plane et $\tilde{E} = E$ pour un problème de contrainte plane.

E et ν sont le module de Young et le coefficient de Poisson, respectivement.

Le coefficient de flexibilité devient :

$$c = \frac{\partial^2}{\partial M^2} \left[b \int_0^a \frac{K_I^2}{\tilde{E}} da \right] \quad (1.19)$$

Les chercheurs ont établis de nombreuses expressions de flexibilité du ressort en rotation pour différentes géométries. **Ostachowicz et Krawczuk (1991)** ont dérivés une expression de flexibilité sous forme polynomiale de 8ème ordre. **Rizos et al. (1990)** ont présentés une flexibilité locale dans une forme polynomiale de 10ème ordre. Une autre approche simple de la fonction de flexibilité peut être évaluée par la mécanique des ruptures a été présenté dans (**Chondros et al. 1998 ; Fernandez-Saez et al. 1999**). Plus récemment, **Wang et Lee (2012)** et **Alsabbagh et al. (2009)** ont présentés un facteur de flexibilité simplifiée, en utilisant le théorème des poutres fissurées par la réduction de l'ordre des fonctions polynomiales.

Références	Fonctions de flexibilité
Wang et Lee (2012)	$\eta_1 = \frac{h}{L} \frac{2\pi (1 - \nu^2)[1 - (1 - \xi)^2]}{9 (1 - \xi)^2}$
Fernandez-Saez et al. (1999)	$\eta_2 = \frac{h}{L} f(\xi)$ $f(\xi) = 2 \left(\frac{\xi}{1 - \xi} \right)^2 [5.93 - 19.69 \xi + 37.14 \xi^2 - 35.84 \xi^3 + 13.12 \xi^4]$
Chondros et al. (1998)	$\eta_3 = \frac{h}{L} 6\pi (1 - \nu^2) f(\xi)$ $f(\xi) = 0.6272 \xi^2 - 1.04533 \xi^3 + 4.5948 \xi^4 - 9.9736 \xi^5 + 20.2948 \xi^6 - 33.0351 \xi^7 + 47.1063 \xi^8 - 40.7556 \xi^9 + 19.6 \xi^{10}$
Ostachowicz et Krawczuk (1991)	$\eta_4 = \frac{h}{L} 6\pi f(\xi)$ $f(\xi) = 0.6384 \xi^2 - 1.035 \xi^3 + 3.7201 \xi^4 - 5.1773 \xi^5 + 7.553 \xi^6 - 7.332 \xi^7 + 2.4909 \xi^8$
Rizos et al. (1990)	$\eta_5 = \frac{h}{L} 5.346 f(\xi)$ $f(\xi) = 1.8624 \xi^2 - 3.95 \xi^3 + 16.375 \xi^4 - 37.226 \xi^5 + 76.81 \xi^6 - 126.9 \xi^7 + 172 \xi^8 - 143.97 \xi^9 + 66.56 \xi^{10}$
Alsabbagh et al. (2009)	$\eta_6 = 287.73 \frac{h}{L} \frac{\xi^2}{(1 - \xi)^2}$

Tableau 1: Différentes expressions de flexibilité locale d'une poutre fissurée.

Le **tableau 1** illustre certaines de ces fonctions les plus utilisées sous une forme adimensionnelle.

Ces fonctions de flexibilité serviront à évaluer le comportement dynamique d'une poutre fissurée dans les sections suivantes.

Où $\eta = \frac{EIc}{L}$: est le coefficient de flexibilité adimensionnelle de la poutre fissurée, qui est liée au rapport entre la profondeur de la fissure et la hauteur de la poutre tel que: $\xi = a/h$.

La **figure 9** présente une comparaison entre les courbes des différentes expressions mentionnées ci-dessus en fonction du rapport entre la profondeur de la fissure et la hauteur de la poutre jusqu'à 0,5. Selon la même figure, les coefficients de flexibilité adimensionnelle augmentent avec l'augmentation de la profondeur de la fissure et ça est dû à la diminution de la rigidité de la poutre.

Bien que les formulations soient algébriquement différentes, les valeurs numériques prédites par elles sont en bon accord, sauf pour le 6ème cas ou elle donne des résultats très grands par rapport aux autres expressions. Pour les autres cas, nous pouvons remarquer que les courbes commencent à s'éloigner les unes des autres à partir d'un rapport égal à 0,35. Cette divergence est tout à fait acceptable car le matériau entre dans un état non-linéaire.

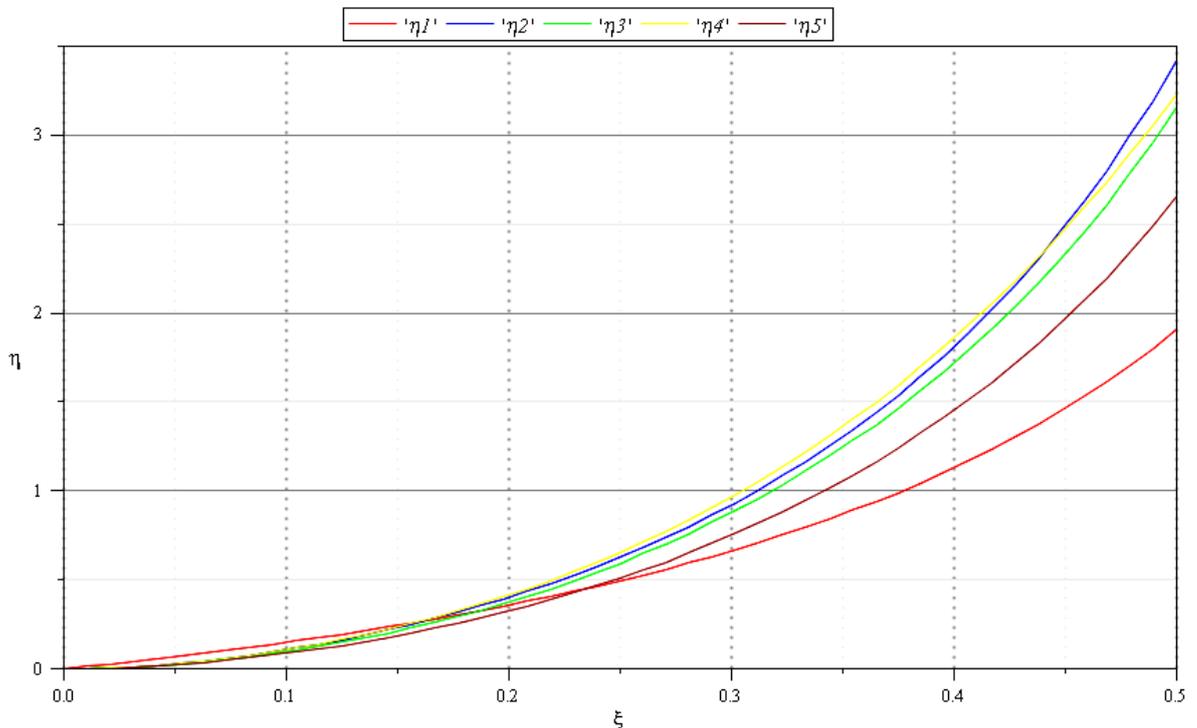


Figure 9: Courbes des coefficients de flexibilité adimensionnelle en fonction du rapport ξ .

CHAPITRE 2: LE COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES POUTRES AVEC UNE FISSURE

Introduction :

Les programmes de surveillance des ponts ont toujours été mis en œuvre dans le but de comprendre les mécanismes responsables aux vibrations et de calibrer des modèles analytiques et/ou numériques qui reflètent fidèlement le comportement dynamique aux différents types des chargements environnementales et opérationnelles, pour assurer la stabilité et la durabilité de ces structures, aussi être en mesure de déterminer non seulement la cause des dommages, mais aussi l'étendue des travaux de réparation, une fois que le dommage est identifié (**Wong, 2007**).

Des études approfondies menées pour les ruptures des ponts ont montrées que 503 ponts de divers types ont été déclarés être partiellement ou totalement non fonctionnels en 12 ans (1989 - 2000) aux États-Unis (**Wardhana et Hadipriono, 2003**).

En 2015, l'administration fédérale de la route des États-Unis (**Federal Highway Administration (FHWA), 2015**) a estimé que 23,35% des 611,845 ponts sont actuellement classés comme structurellement déficients ou fonctionnellement obsolètes (9,6% déficience structurelle).

Les ponts peuvent avoir des fissures dues au développement des divers effets indésirables, dont certains sont induits par des impacts externes, par exemple, les inondations, les déversements des produits chimiques et les tremblements de terre, alors que d'autres fissures peuvent résulter d'une mauvaise conception, la construction et l'entretien, ainsi que la fatigue et la détérioration au fil du temps (**Yanmaz et al. 2007**).

La présence d'une fissure, non seulement provoque une variation locale dans les paramètres structuraux (par exemple, la rigidité) au niveau de son emplacement, mais elle a aussi un effet global qui affecte le comportement dynamique d'ensemble de la structure (telles que les fréquences naturelles et les modes propres). Pour cette raison, la caractérisation dynamique des structures fissurées peut être utilisée pour la détection des dommages à partir des essais non destructifs.

Dans la majorité des études, les ponts sont modélisés par des structures simples à cause de deux principales raisons (**Fan et Qiao, 2011**):

- (1) La plupart des structures ou de leurs composantes principales en génie civil et en mécanique peuvent être simplifiées comme une plaque ou une poutre;
- (2) Le problème de l'identification d'un dommage spécifique dans une poutre / plaque fournit un repère important pour l'efficacité et la précision des techniques d'identification.

Différentes théories ont été développées pour l'étude de la vibration des poutres et l'analyse de son comportement sous l'influence de conditions différentes. Parmi ces théories deux d'entre elles sont très utilisées :

❖ La théorie d'Euler-Bernoulli :

La théorie des poutres d'Euler-Bernoulli, parfois appelée la théorie classique des poutres, la théorie des poutres d'Euler, la théorie des poutres de Bernoulli, ou la théorie des poutres de Bernoulli-Euler, est la plus couramment utilisée car elle est simple et fournit des approximations raisonnables pour de nombreux problèmes. Selon cette théorie, on suppose que les lignes droites perpendiculaires au plan médian avant la flexion restent rectilignes et perpendiculaires après flexion.

Cependant, le modèle d'Euler-Bernoulli tend à surestimer légèrement les fréquences naturelles. Ce problème est aggravé pour les fréquences naturelles des modes supérieures. En outre, la prédiction est meilleure pour les poutres élancées que pour les poutres courtes.

❖ La théorie de Timoshenko :

Timoshenko a proposé une théorie de poutre qui ajoute l'effet du cisaillement et de rotation à la poutre d'Euler-Bernoulli. Le modèle de Timoshenko est une amélioration majeure pour les poutres épaisses et pour les réponses à haute fréquence. Dans cette théorie, on suppose que les lignes perpendiculaires au plan médian avant la flexion reste rectiligne, mais pas perpendiculaire au plan médian après flexion.

Un paramètre crucial dans la théorie des poutres de Timoshenko est le facteur de forme, qui est une fonction du coefficient de Poisson et de la forme de la section transversale. Il est aussi appelé le coefficient du cisaillement ou le facteur de réduction de la surface. Ce paramètre intervient parce que le cisaillement n'est pas constant sur la section transversale.

Plusieurs méthodes expérimentales, analytiques, et numériques ont été utilisées pour étudier la vibration libre des poutres fissurées :

Gudmundson (1983) a appliqué un modèle mathématique à une poutre en porte-à-faux fissurée et les fréquences propres ont été déterminées pour différentes profondeurs et positions de fissure. La validité du modèle a été confirmée par des comparaisons avec des calculs dynamiques par éléments finis et des fréquences propres obtenues expérimentalement. **Papadopoulos et Dimarogonas (1987)** ont étudiés le couplage des vibrations longitudinales et de flexion d'un arbre en rotation en raison d'une fissure superficielle ouverte analytiquement. La flexibilité locale due à la présence de la fissure était représentée par une matrice de 6 x 6 implicitement pour six degrés de liberté dans un élément d'arbre court incluant une fissure. L'étude suppose que la fissure reste ouverte dans la poutre, ce qui induit à un système ayant un comportement similaire à celui d'un rotor avec un moment d'inertie différent le long de deux directions perpendiculaires.

Goumaris et Dimarogonas (1988) ont développés un modèle d'éléments finis pour analyser la réponse dynamique d'une poutre en porte-à-faux avec une fissure à l'aide d'une excitation représentée par une force ponctuelle harmonique. Ils ont constatés que les fréquences de résonance et les amplitudes de vibration sont considérablement affectées par l'existence des fissures modérées. **Guan-Liang et al. (1991)** ont étudiés le comportement vibratoire des plaques carrées fissurées simplement supportées et des plaques en porte-à-faux fissurées par la méthode des éléments finis. Ils ont dérivés la matrice de rigidité des éléments de la plaque avec une fissure par l'intégration du facteur d'intensité de contrainte, estimée sous flexion, torsion et cisaillement. Les fréquences propres sont déterminées pour différentes longueurs de fissure. **Kikidis et Papadopoulos (1992)** ont présentés les vibrations de flexion d'un arbre non rotatif (c'est-à-dire une poutre) avec une fissure en section transversale, conformément à la théorie d'Euler-Bernoulli et à la théorie de Timoshenko pour différentes profondeurs de fissure et différents rapports d'élancement de la poutre par la méthode analytique. Ils ont constatés que les fréquences de résonance de courbure diminuaient avec l'augmentation de la profondeur de la fissure et que l'influence de la déflexion du cisaillement sur la fréquence de résonance diminuait avec l'augmentation du taux d'élancement. En outre, la théorie d'Euler-Bernoulli et la théorie de Timoshenko donnent les mêmes résultats pour des rapports d'élancement importants, avec ou sans fissure dans la poutre. Cependant, à mesure que le taux d'élancement diminue, l'influence de la déflexion du cisaillement augmente et la différence entre les deux théories devient plus grande. **Krawczuk et Ostachowicz (1992)** ont présentés un modèle mathématique des vibrations transversales d'une poutre de Bernoulli-Euler avec une fissure de fermeture. Dans les sections endommagées de la poutre, des éléments élastiques de flexibilité calculés sur la

base des lois de la mécanique de la rupture ont été appliqués. En utilisant ce modèle analytique, l'effet de la profondeur et de la position de la fissure sur la zone d'instabilité de base de la poutre a été effectué. **Krawczuk et Ostachowicz (1993)** ont analysés l'influence d'une fissure transversale unique sur les fréquences propres d'une poutre en porte-à-faux soumise à des charges verticales par la méthode des éléments finis. Ils ont conclu que le changement des fréquences propres correspondant au mode de vibration est plus important lorsque la fissure est située au point auquel une amplitude du mode de vibration est égale à zéro. En revanche, lorsque la fissure est située à des points pour lesquels l'amplitude du mode de vibration est maximale, le changement des fréquences propres est négligeable.

Chati et al. (1997) ont étudiés le problème de la vibration d'une poutre fissurée en utilisant la méthode des éléments finis. L'étude est menée sur l'analyse modale d'une poutre en porte-à-faux avec fissure transversale. La non-linéarité impliquée a été modélisée en tant que système linéaire par morceaux (c'est-à-dire en modélisant la poutre fissurée sous deux configurations linéaires "fissure ouverte et fissure fermée"). En outre, une définition de la fréquence propre naturelle appelée (fréquence bilinéaire) a été développée. **Corn et al. (1997)** ont proposé une nouvelle méthode par éléments finis à deux nœuds basée sur la condensation de Guyan pour étudier le comportement dynamique des poutres de Timoshenko. Le modèle continu, qui tient compte à la fois de l'inertie rotative et de la déformation en cisaillement transversal afin de démontrer certains phénomènes vibratoires caractéristiques des poutres courtes. La méthode proposée est ensuite généralisée pour obtenir des nouveaux éléments finis à trois nœuds améliorés. **Kisa et al. (1998)** ont analysés les caractéristiques de vibration libre de poutre de Timoshenko fissurée par la méthode des éléments finis (avec deux nœuds et 3 degrés de liberté "axiale, transversale et en rotation" à chaque nœud) et la méthode de synthèse en mode composant. La poutre a été divisée en deux composants liés par une matrice de flexibilité incorporant les forces d'interaction obtenues de la théorie de la mécanique de la rupture.

Chondros et al. (2001) ont utilisé la théorie de la vibration de poutre fissurée continue pour prédire les modifications de la vibration transversale d'une poutre simplement appuyée avec une fissure respiratoire. Ils ont observé que les changements dans les fréquences de vibration d'une fissure respiratoire sont plus petits que ceux causés par des fissures ouvertes.

Carneiro et Inman (2002) ont élaborés un modèle continu pour la vibration transversale des poutres fissurées en considérant l'effet de la déformation en cisaillement. L'efficacité du modèle dérivé a été validée en comparant les résultats avec le modèle à éléments finis 2D. Ils ont constatés, en calculant la forme du mode, que les changements dus à la présence d'une fissure dans les poutres courtes ne différaient pas de manière significative du cas des poutres minces. **Fernandez-Saez et Navarro (2002)** ont présenté une approche analytique de la fréquence fondamentale des poutres d'Euler-Bernoulli fissurées avec différentes conditions aux limites en vibrations de flexion. L'enquête a utilisé la méthode de la fonction d'influence de la flexibilité pour résoudre le problème qui conduit à un problème de valeur propre formulé sous forme intégrale. **Dado et Abuzeid (2003)** ont étudié le comportement vibratoire d'une poutre en porte-à-faux fissurée, en particulier les fréquences naturelles et les formes du mode sous l'effet de la masse et de l'inertie rotative ajoutées à l'extrémité libre dans différentes conditions de fissure. Ils ont conclu que les effets de couplage observés entre les vibrations transversales et axiales étaient faibles pour les deux premiers modes. **Krawczuk et al. (2003)** ont présenté un nouvel élément fini spectral pour une poutre de Timoshenko fissurée destiné à l'analyse de la propagation modale des ondes, et ont étudié les réponses des paramètres de la fissure à la propagation des ondes. **Zheng et Kessissoglou (2004)** ont obtenus les fréquences propres et les formes du mode d'une poutre fissurée en utilisant la méthode des éléments finis. Dans leur étude, une «matrice de flexibilité supplémentaire globale» a été ajoutée à la matrice de flexibilité de l'élément de poutre non-

fissurée afin d'obtenir la matrice de flexibilité totale et la matrice de rigidité de l'élément de poutre fissuré. **Lin (2004)** a présenté une méthode de matrice du transfert analytique pour résoudre les problèmes directs et inverses des poutres de Timoshenko simplement appuyées avec une fissure ouverte. **Hsu (2005)** a formulé les problèmes des valeurs propres des poutres de Bernoulli – Euler sur des fondations élastiques avec une seule fissure, un chargement axial et une force d'excitation en utilisant la méthode de la quadrature différentielle. **Al-Said et al. (2006)** ont proposé un modèle pour décrire les caractéristiques de vibration en flexion d'une poutre de Timoshenko fissurée en rotation. Ils ont étudiés l'effet de la profondeur de la fissure, la déformation en cisaillement et de la vitesse de rotation sur les caractéristiques dynamiques de poutre en utilisant une analyse tridimensionnelle par éléments finis.

Loya et al. (2006) ont obtenu des fréquences propres pour les vibrations de flexion des poutres fissurées de Timoshenko par une méthode analytique. Ils ont résolu un problème de poutre simplement appuyée en résolvant des équations différentielles pour les vibrations en flexion libre ainsi que par la méthode de perturbation. Il a été constaté que la méthode de perturbation fournit des expressions simples pour les fréquences propres des poutres fissurées et donne de bons résultats pour les fissures peu profondes. **Fang et al. (2006)** ont étudié l'effet d'une fissure sur la réponse vibratoire d'un modèle simplifié à disques d'aubes de moteurs d'avion, composé des poutres en porte-à-faux (aubes) couplées à des ressorts (couplage interne entre aubes). **Mendelsohn (2006)** a présenté une étude théorique de l'effet de la plasticité du plan de fissure sur la vibration d'une poutre fissurée transversalement.

Viola et al. (2007) ont étudiés l'analyse par vibration libre d'une poutre de Timoshenko fissurée chargé axialement à l'aide de la méthode de rigidité dynamique. Ils ont introduit une nouvelle procédure analytique basée sur le couplage d'une matrice de rigidité dynamique et d'un élément à ressort linéaire pour modéliser la poutre fissurée. Ils ont étudiés l'effet de la charge axiale, la déformation en cisaillement et l'inertie rotative sur les fréquences propres de la poutre avec une fissure transversale. **Rezaee et Hassannejad (2011)** ont utilisé une nouvelle approche analytique pour l'analyse par vibration libre d'une poutre en porte-à-faux avec une fissure respiratoire basée sur la méthode du bilan d'énergie mécanique. Ils ont également comparé leurs résultats avec des résultats expérimentaux.

Agarwalla et Parhi (2013) ont étudié l'effet d'une fissure ouverte sur les paramètres modaux d'une poutre en porte-à-faux. Les résultats de la méthode des éléments finis (MEF) et de la méthode expérimentale sont comparés. **Sethi et al. (2014)** ont étudié les caractéristiques dynamiques d'une poutre en porte-à-faux en utilisant la méthode des éléments finis à l'aide du logiciel ANSYS. Ils ont conclu que les changements des formes du mode et les fréquences naturelles dues à la présence de la fissure peuvent être utilisés pour identifier la position de la fissure et sa profondeur. **Gawande et More (2017)** ont étudié les caractéristiques dynamiques d'une poutre avec une fissure respiratoire.

Dans ce travail, l'étude complète d'une poutre en porte-à-faux avec et sans fissure a été réalisée à l'aide d'une analyse analytique, la méthode des éléments finis et des mesures expérimentales.

Dans ce chapitre, la concentration est focalisée sur deux méthodes les plus fréquemment décrites en littératures : la méthode des matrices du transfert (MMT) et la méthode de Rayleigh (MR). L'objectif est de comparer leur précision et leur capacité à prédire correctement les résultats pour les problèmes directs d'une poutre simplement appuyée avec une fissure. Plusieurs cas de profondeurs, d'emplacements, et aussi plusieurs modèles de flexibilité transversale sont étudiés. La théorie des poutres d'Euler-Bernoulli est employée pour modéliser la poutre fissurée et la fissure est représentée comme un ressort de rotation. Dans la première approche, la méthode de matrice de transfert est utilisée ; La poutre fissurée est modélisée comme deux sous-segments uniformes, reliés par un ressort de

rotation situé au niveau de la section fissurée. La seconde, basée sur la méthode de Rayleigh, les modes propres de la poutre fissurée sont construits en ajoutant une fonction polynomiale cubique à celle de la poutre non fissurée. En appliquant les conditions de compatibilité à l'emplacement de la fissure et les conditions aux limites correspondantes, les formes générales d'équations caractéristiques pour ce système des poutres fissurées sont obtenues.

2.1. Le modèle théorique :

Une poutre simplement appuyée illustrée sur la **figure 1**, d'une longueur (L) et de section rectangulaire uniforme longitudinale d'une hauteur (h) et largeur (b), avec une fissure ouverte de profondeur (a) située à ($X_1 = L_1$) de l'appui gauche de la poutre, où (X_0) et (X_2) représentent les points d'extrémités. La fonction de déplacement transversale de la poutre à la coordonnée axiale X et au temps T est désignée par $W_i(X, T)$ pour deux intervalles : $i = 1$ pour $0 < X < X_1$ et $i = 2$ pour $X_1 < X < L$.

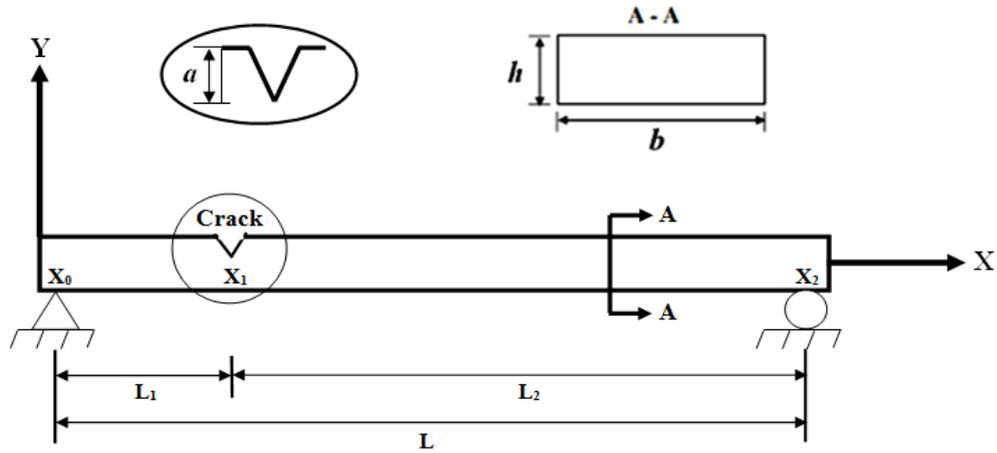


Figure 1: Modèle d'une poutre simplement appuyée avec une fissure ouverte.

L'équation différentielle du mouvement pour chaque segment est:

$$EI \frac{\partial^4 W_i(X, T)}{\partial X^4} + \rho A \frac{\partial^2 W_i(X, T)}{\partial T^2} = 0 \quad X_{i-1} < X < X_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.1)$$

Où E ; ρ ; $A = bh$ and $I = bh^3/12$ sont respectivement le module de Young, la densité du matériau, la section transversale de la poutre et le moment d'inertie.

Des quantités adimensionnelles sont utilisées pour notre analyse:

$$w_i = \frac{W_i}{L} \quad ; \quad t = T \quad ; \quad x_i = \frac{X_i}{L} \quad ; \quad l_i = \frac{L_i}{L} \quad (2.2)$$

L'équation du mouvement peut ensuite être exprimée sous une forme adimensionnelle :

$$\frac{EI}{L^4} \frac{\partial^4 w_i(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w_i(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad x_{i-1} < x < x_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.3)$$

L'arrangement de l'équation (2.3) nous donne :

$$\frac{EI}{L^4 \rho A} \frac{\partial^4 w_i(x, t)}{\partial x^4} = - \frac{\partial^2 w_i(x, t)}{\partial t^2} \quad x_{i-1} < x < x_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.4)$$

2.1.1. La méthode des matrices de transfert (MMT):

Afin de déterminer les fréquences naturelles et les modes propres de la poutre fissurée, le principe de séparation des variables est utilisé :

$$w_i(x, t) = \varphi_i(x) e^{j\omega t} \quad i = 1, 2 \quad (2.5)$$

En intégrant l'équation (2.5) dans l'équation (2.4), l'équation spatiale peut s'écrire comme:

$$\varphi_i^{(4)}(x) - \beta^4 \varphi_i(x) = 0 \quad x_{i-1} < x < x_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.6)$$

Où

$$\beta^4 = \frac{L^4 \rho A \omega^2}{EI} \quad (2.7)$$

ω : est la fréquence angulaire de la poutre ;

La solution générale de l'équation différentielle ordinaire (2.6), pour chaque segment, peut être exprimée comme:

$$\varphi_i(x) = A_i \sin[\beta(x - x_{i-1})] + B_i \cos[\beta(x - x_{i-1})] + C_i \sinh[\beta(x - x_{i-1})] + D_i \cosh[\beta(x - x_{i-1})] \quad x_{i-1} < x < x_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.8)$$

Où A_i , B_i , C_i , et D_i sont des constantes inconnues associées aux ($i = 1, 2$) segments.

Les expressions du déplacement angulaire (rotation) $\theta_i(x)$, le moment de flexion $M_i(x)$ et l'effort tranchant $T_i(x)$ pour chaque segment sont obtenues comme suit:

$$\theta_i(x) = \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} = \frac{\beta}{L} (A_i \cos[\beta(x - x_{i-1})] - B_i \sin[\beta(x - x_{i-1})] + C_i \cosh[\beta(x - x_{i-1})] + D_i \sinh[\beta(x - x_{i-1})]) \quad (2.9)$$

$$M_i(x) = EI \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} = EI \frac{\beta^2}{L^2} (-A_i \sin[\beta(x - x_{i-1})] - B_i \cos[\beta(x - x_{i-1})] + C_i \sinh[\beta(x - x_{i-1})] + D_i \cosh[\beta(x - x_{i-1})]) \quad (2.10)$$

$$T_i(x) = EI \frac{\partial^3 \varphi_i(x)}{\partial x^3} = EI \frac{\beta^3}{L^3} (-A_i \cos[\beta(x - x_{i-1})] + B_i \sin[\beta(x - x_{i-1})] + C_i \cosh[\beta(x - x_{i-1})] + D_i \sinh[\beta(x - x_{i-1})]) \quad (2.11)$$

Si une fissure est située à la section : $x = x_i$, il ya une continuité entre le déplacement transversale, le moment de flexion et l'effort tranchant, mais il ya une discontinuité entre les rotations qui sont en fonction du moment de flexion et de la flexibilité de la poutre fissurée, tel que :

$$\varphi_{i+1}(x_i^+) = \varphi_i(x_i^-) \quad (2.12a)$$

$$M_{i+1}(x_i^+) = M_i(x_i^-) \quad (2.12b)$$

$$\theta_{i+1}(x_i^+) - \theta_i(x_i^-) = c^* M_{i+1}(x_i^+) \quad (2.12c)$$

$$T_{i+1}(x_i^+) = T_i(x_i^-) \quad (2.12d)$$

Où (x_1^-) et (x_1^+) désignent respectivement les positions directes avant et après la position de la fissure (x_i) à partir de la gauche jusqu'à la droite de la poutre.

En intégrant les équations (2.9) - (2.11) dans les équations (2.12a) - (2.12d), les constantes $(A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}, D_{i+1})$ dans le segment $(i + 1)$ sont liées aux constantes (A_i, B_i, C_i, D_i) du segment $(i = 1)$ à travers les conditions de continuité et de compatibilité comme suit:

$$B_{i+1} + D_{i+1} = A_i \sin(\beta l_i) + B_i \cos(\beta l_i) + C_i \sinh(\beta l_i) + D_i \cosh(\beta l_i) \quad (2.13a)$$

$$-B_{i+1} + D_{i+1} = -A_i \sin(\beta l_i) - B_i \cos(\beta l_i) + C_i \sinh(\beta l_i) + D_i \cosh(\beta l_i) \quad (2.13b)$$

$$A_{i+1} + \eta \beta B_{i+1} + C_{i+1} - \eta \beta D_{i+1} = A_i \cos(\beta l_i) - B_i \sin(\beta l_i) + C_i \cosh(\beta l_i) + D_i \sinh(\beta l_i) \quad (2.13c)$$

$$-A_{i+1} + C_{i+1} = -A_i \cos(\beta l_i) + B_i \sin(\beta l_i) + C_i \cosh(\beta l_i) + D_i \sinh(\beta l_i) \quad (2.13d)$$

D'où on trouve les relations suivantes :

$$A_{i+1} = \left[\cos(\beta l_i) - \frac{1}{2} \eta \beta \sin(\beta l_i) \right] A_i + \left[-\frac{1}{2} \eta \beta \cos(\beta l_i) \right] B_i + \left[\frac{1}{2} \eta \beta \sinh(\beta l_i) \right] C_i + \left[\frac{1}{2} \eta \beta \cosh(\beta l_i) \right] D_i \quad (2.14a)$$

$$B_{i+1} = [\sin(\beta l_i)] A_i + [\cos(\beta l_i)] B_i \quad (2.14b)$$

$$C_{i+1} = \left[-\frac{1}{2} \eta \beta \sin(\beta l_i) \right] A_i + \left[-\frac{1}{2} \eta \beta \cos(\beta l_i) \right] B_i + \left[\cosh(\beta l_i) + \frac{1}{2} \eta \beta \sinh(\beta l_i) \right] C_i + \left[\sinh(\beta l_i) + \frac{1}{2} \eta \beta \cosh(\beta l_i) \right] D_i \quad (2.14c)$$

$$D_{i+1} = [\sinh(\beta l_i)] C_i + [\cosh(\beta l_i)] D_i \quad (2.14d)$$

Ces équations peuvent être exprimées sous forme matricielle comme suit : $\{A\}_{i+1} = [T]_i \{A\}_i$

$$\begin{pmatrix} A_{i+1} \\ B_{i+1} \\ C_{i+1} \\ D_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

De même, Grâce à l'application répétée de l'équation, on peut réduire le nombre des constantes indépendants à quatre :

$$\begin{pmatrix} A_{i+1} \\ B_{i+1} \\ C_{i+1} \\ D_{i+1} \end{pmatrix} = [T] \{A\}_1 = [T]_i [T]_{i-1} \dots [T]_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Où $[T]$ est une matrice de transfert de dimension 4×4 qui dépend de la valeur de β .

Les constantes qui restent peuvent être déterminées à partir des conditions aux limites, ce qui conduit :

$$A : X = L$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [B]_{2 \times 4} \begin{Bmatrix} A_{i+1} \\ B_{i+1} \\ C_{i+1} \\ D_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

Où $[B]_{2 \times 4}$ est une matrice obtenue à partir des conditions aux limites à l'extrémité droite de la poutre.

La combinaison des deux dernières matrices nous donne :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [B]_{2 \times 4} [T] \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{Bmatrix} = [R]_{2 \times 4} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

Tel que :

$$[R]_{2 \times 4} = [B]_{2 \times 4} [T]_i [T]_{i-1} \dots \dots [T]_1 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Dans notre cas d'étude, la poutre est prise simplement appuyée avec une fissure, donc par l'application des conditions aux limites correspondantes, une équation caractéristique peut être obtenue.

Au niveau de l'appui gauche on a :

$$X = 0 \quad \begin{cases} \varphi_1(0) = 0 \\ M_1(0) = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Ce qui conduit à :

$$[\sin \beta(0)]A_1 + [\cos \beta(0)]B_1 + [\sinh \beta(0)]C_1 + [\cosh \beta(0)]D_1 = 0 \quad (2.21a)$$

$$[-\sin \beta(0)]A_1 + [-\cos \beta(0)]B_1 + [\sinh \beta(0)]C_1 + [\cosh \beta(0)]D_1 = 0 \quad (2.21b)$$

Donc :

$$B_1 = D_1 = 0 \quad (2.22)$$

De même, au niveau de l'appui droit on a :

$$X = L \quad \begin{cases} \varphi_2(1) = 0 \\ M_2(1) = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Ce qui conduit à :

$$[\sin(\beta l_2)]A_2 + [\cos(\beta l_2)]B_2 + [\sinh(\beta l_2)]C_2 + [\cosh(\beta l_2)]D_2 = 0 \quad (2.24a)$$

$$[-\sin(\beta l_2)]A_2 + [-\cos(\beta l_2)]B_2 + [\sinh(\beta l_2)]C_2 + [\cosh(\beta l_2)]D_2 = 0 \quad (2.24b)$$

Ces équations nous permettent d'obtenir la matrice $[B]_{2 \times 4}$:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\beta l_2) & \cos(\beta l_2) & \sinh(\beta l_2) & \cosh(\beta l_2) \\ -\sin(\beta l_2) & -\cos(\beta l_2) & \sinh(\beta l_2) & \cosh(\beta l_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

Comme la poutre contient une fissure, donc les constantes (A_2, B_2, C_2, D_2) peuvent être écrites en fonction des constantes (A_1, B_1, C_1, D_1) comme suit :

$$A_2 = \left[\cos(\beta l_1) - \frac{1}{2} \eta \beta \sin(\beta l_1) \right] A_1 + \left[-\frac{1}{2} \eta \beta \cos(\beta l_1) \right] B_1 + \left[\frac{1}{2} \eta \beta \sinh(\beta l_1) \right] C_1 + \left[\frac{1}{2} \eta \beta \cosh(\beta l_1) \right] D_1 \quad (2.26a)$$

$$B_2 = [\sin(\beta l_1)] A_1 + [\cos(\beta l_1)] B_1 \quad (2.26b)$$

$$C_2 = \left[-\frac{1}{2} \eta \beta \sin(\beta l_1) \right] A_1 + \left[-\frac{1}{2} \eta \beta \cos(\beta l_1) \right] B_1 + \left[\cosh(\beta l_1) + \frac{1}{2} \eta \beta \sinh(\beta l_1) \right] C_1 + \left[\sinh(\beta l_1) + \frac{1}{2} \eta \beta \cosh(\beta l_1) \right] D_1 \quad (2.26c)$$

$$D_2 = [\sinh(\beta l_1)] C_1 + [\cosh(\beta l_1)] D_1 \quad (2.26d)$$

Ce qui nous permet d'écrire la forme matricielle suivante :

$$\{A\}_2 = [T]_1 \{A\}_1 \quad (2.27)$$

En combinant les équations (2.27) et (2.25), et en utilisant l'équation (2.22), on obtient :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} &= [B]_{2 \times 4} [T] \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{Bmatrix} = [R]_{2 \times 4} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ 0 \\ C_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Où :

$$r_{11} = \sin(\beta l_2) \left[\cos(\beta l_1) - \frac{1}{2} \eta \beta \sin(\beta l_1) \right] + \sin(\beta l_1) \left[\cos(\beta l_2) - \frac{1}{2} \eta \beta \sinh(\beta l_2) \right] \quad (2.29a)$$

$$r_{12} = -\frac{1}{2} \eta \beta \sin(\beta l_2) \cos(\beta l_1) + \cos(\beta l_2) \cos(\beta l_1) - \frac{1}{2} \eta \beta \sinh(\beta l_2) \cos(\beta l_1) \quad (2.29b)$$

$$r_{13} = \frac{1}{2} \eta \beta \sin(\beta l_2) \sinh(\beta l_1) + \sinh(\beta l_2) \left[\cosh(\beta l_1) + \frac{1}{2} \eta \beta \sinh(\beta l_1) \right] + \cosh(\beta l_2) \sinh(\beta l_1) \quad (2.29c)$$

$$r_{14} = \frac{1}{2} \eta \beta \sin(\beta l_2) \cosh(\beta l_1) + \sinh(\beta l_2) \left[\sinh(\beta l_1) + \frac{1}{2} \eta \beta \cosh(\beta l_1) \right] + \cosh(\beta l_2) \cosh(\beta l_1) \quad (2.29d)$$

$$r_{21} = -\sin(\beta l_2) \left[\cos(\beta l_1) - \frac{1}{2} \eta \beta \sin(\beta l_1) \right] - \cos(\beta l_2) \sin(\beta l_1) - \frac{1}{2} \eta \beta \sinh(\beta l_2) \sin(\beta l_1) \quad (2.29e)$$

$$r_{22} = \frac{1}{2} \eta \beta \sin(\beta l_2) \cos(\beta l_1) - \cos(\beta l_2) \cos(\beta l_1) - \frac{1}{2} \eta \beta \sinh(\beta l_2) \cos(\beta l_1) \quad (2.29f)$$

$$r_{23} = -\frac{1}{2} \eta \beta \sin(\beta l_2) \sinh(\beta l_1) + \sinh(\beta l_2) \left[\cosh(\beta l_1) + \frac{1}{2} \eta \beta \sinh(\beta l_1) \right] + \cosh(\beta l_2) \sinh(\beta l_1) \quad (2.29g)$$

$$r_{24} = -\frac{1}{2} \eta \beta \sin(\beta l_2) \cosh(\beta l_1) + \sinh(\beta l_2) \left[\sinh(\beta l_1) + \frac{1}{2} \eta \beta \cosh(\beta l_1) \right] + \cosh(\beta l_2) \cosh(\beta l_1) \quad (2.29h)$$

Ce qui réduit la matrice comme suit :

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{13} \\ r_{21} & r_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ C_1 \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

Pour trouver la valeur de β , et comme $\{A\}_1 \neq 0$, une solution non triviale nécessite que le déterminant de cette dernière égale à zéro, tel que:

$$\det \begin{bmatrix} r_{11}(\beta) & r_{13}(\beta) \\ r_{21}(\beta) & r_{23}(\beta) \end{bmatrix} = 0 \quad (2.31)$$

L'équation analytique est obtenue à l'aide du logiciel Maple 11 comme suit :

$$\eta \beta [\sinh(\beta l_1) \sinh(\beta l_2) [\cos(\beta l_1) \sin(\beta l_2) + \sin(\beta l_1) \cos(\beta l_2)]] - \eta \beta [\sin(\beta l_1) \sin(\beta l_2) [\cosh(\beta l_1) \sinh(\beta l_2) + \sinh(\beta l_1) \cosh(\beta l_2)]] + 2 [[\cosh(\beta l_1) \sinh(\beta l_2) + \sinh(\beta l_1) \cosh(\beta l_2)] [\cos(\beta l_1) \sin(\beta l_2) + \sin(\beta l_1) \cos(\beta l_2)]] = 0 \quad (2.31)$$

Après simplification l'équation caractéristique devient :

$$\eta \beta_n [\sinh(\beta_n l_1) \sinh(\beta_n l_2) \sin(\beta_n) - \sin(\beta_n l_1) \sin(\beta_n l_2) \sinh(\beta_n)] + 2 \sinh(\beta_n) \sin(\beta_n) = 0 \quad (2.32)$$

➤ La détermination des fréquences naturelles :

L'équation caractéristique peut être résolue en utilisant une des méthodes numériques (Newton-Raphson, Dichotomie...), la méthode graphique (voir **figure 2**) ou par élément finis (sous environnement MATLAB).

Le paramètre β_n ainsi obtenu, il est utilisé dans l'équation (2.7) pour évaluer les fréquences naturelles angulaires correspondantes de la poutre fissurée ω_{cn} .

$$\omega_{cn} = \left(\frac{\beta_n}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (2.33)$$

Où n représente le rang du mode.

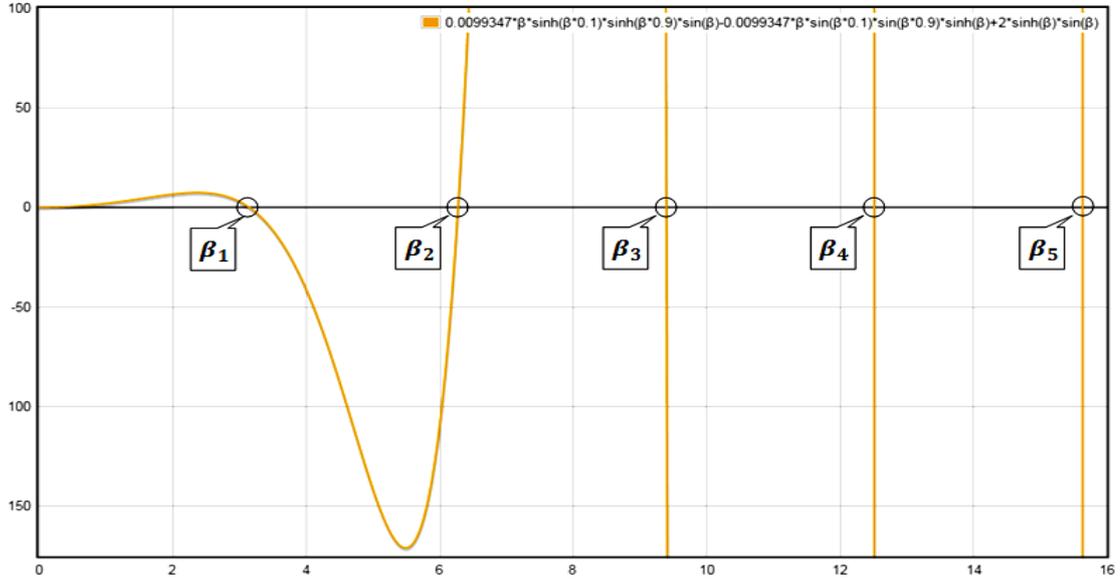


Figure 2: La méthode graphique.

➤ **La détermination des modes propres :**

Dans le but de déterminer les modes propres, les étapes suivantes ont été suivies :

- Diviser l'équation (2.8) par A_1 pour le premier et le deuxième segment, elles peuvent être écrites comme :

$$\frac{\varphi_1(x)}{A_1} = \sin(\beta x) + \frac{C_1}{A_1} \sinh(\beta x) \quad ; \quad 0 < x < l_1 ; \quad i = 1 \quad (2.34a)$$

$$\frac{\varphi_2(x)}{A_1} = \frac{A_2}{A_1} \sin(\beta x) + \frac{B_2}{A_1} \cos(\beta x) + \frac{C_2}{A_1} \sinh(\beta x) + \frac{D_2}{A_1} \cosh(\beta x) \quad ; \quad l_1 < x < 1 ; \quad i = 2 \quad (2.34b)$$

- Diviser les équations (2.26a)-(2.26d) par A_1 , elles peuvent être écrites comme :

$$\frac{A_2}{A_1} = \left[\cos(\beta l_1) - \frac{1}{2} \eta \beta \sin(\beta l_1) \right] + \left[\frac{1}{2} \eta \beta \sinh(\beta l_1) \right] \frac{C_1}{A_1} \quad (2.35a)$$

$$\frac{B_2}{A_1} = [\sin(\beta l_1)] \quad (2.35b)$$

$$\frac{C_2}{A_1} = \left[-\frac{1}{2} \eta \beta \sin(\beta l_1) \right] + \left[\cosh(\beta l_1) + \frac{1}{2} \eta \beta \sinh(\beta l_1) \right] \frac{C_1}{A_1} \quad (2.35c)$$

$$\frac{D_2}{A_1} = [\sinh(\beta l_1)] \frac{C_1}{A_1} \quad (2.35d)$$

- À partir de l'équation (2.30), nous utilisons la relation : $r_{11} \cdot A_1 + r_{13} \cdot C_1 = 0$ pour trouver la valeur de $\frac{C_1}{A_1}$:

$$\frac{C_1}{A_1} = \frac{\sin(\beta l_1)[-2 \cos(\beta l_2) + \eta \beta \sinh(\beta l_2)] + \sin(\beta l_2)[-2 \cos(\beta l_1) + \eta \beta \sin(\beta l_1)]}{\eta \beta \sin(\beta l_2) \sinh(\beta l_1) + \sinh(\beta l_2) [2 \cosh(\beta l_1) + \eta \beta \sinh(\beta l_1)] + 2 \cosh(\beta l_2) \sinh(\beta l_1)} \quad (2.36)$$

- Mettre $A_1 = 1$ et substituer la valeur de $\frac{C_1}{A_1}$ dans les équations précédentes.
- Vérifier si les conditions aux limites et les conditions de continuités sont satisfaites.

2.1.2. La méthode de Rayleigh (MR):

L'application de la méthode de Rayleigh permet d'obtenir les modes propres et les fréquences fondamentales d'une poutre simplement appuyée avec une fissure. Le déplacement transversal de la poutre fissurée est construit en ajoutant une fonction polynomiale cubique à celle de la poutre non fissurée pour représenter les effets de fissure sur le déplacement de la section de la poutre fissurée situés respectivement à gauche et à droite de la fissure.

L'expression générale pour les modes propres de la poutre fissurée est:

$$\varphi(X) = \begin{cases} \varphi_i(X) = \sin\left(\frac{n\pi X}{L}\right) + A_i X^3 + B_i X^2 + C_i X + D_i & ; 0 \leq X \leq L_i \\ \varphi_{i+1}(X) = \sin\left(\frac{n\pi X}{L}\right) + A_{i+1} X^3 + B_{i+1} X^2 + C_{i+1} X + D_{i+1} & ; L_i \leq X \leq L \end{cases} \quad (2.37)$$

A_i , B_i , C_i , et D_i sont des constantes inconnues qui doivent être déterminées à partir des conditions aux limites et les conditions de continuités des deux segments de la poutre ($i = 1, 2$).

Les expressions de rotation $\theta(X)$, le moment de flexion $M(X)$ et l'effort tranchant $T(X)$ des deux segments de la poutre ($i = 1, 2$) sont obtenues comme suit :

$$\theta(X) = \frac{\partial \varphi(X)}{\partial X} = \begin{cases} \theta_i(X) = \left(\frac{n\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi X}{L}\right) + 3 A_i X^2 + 2 B_i X + C_i \\ \theta_{i+1}(X) = \left(\frac{n\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi X}{L}\right) + 3 A_{i+1} X^2 + 2 B_{i+1} X + C_{i+1} \end{cases} \quad (2.38)$$

$$M(X) = EI \frac{\partial^2 \varphi(X)}{\partial X^2} = \begin{cases} M_i(X) = -EI \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi X}{L}\right) + 6 A_i X + 2 B_i \\ M_{i+1}(X) = -EI \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi X}{L}\right) + 6 A_{i+1} X + 2 B_{i+1} \end{cases} \quad (2.39)$$

$$T(X) = EI \frac{\partial^3 \varphi(X)}{\partial X^3} = \begin{cases} T_i(X) = -EI \left(\frac{n\pi}{L}\right)^3 \cos\left(\frac{n\pi X}{L}\right) + 6 A_i \\ T_{i+1}(X) = -EI \left(\frac{n\pi}{L}\right)^3 \cos\left(\frac{n\pi X}{L}\right) + 6 A_{i+1} \end{cases} \quad (2.40)$$

En appliquant les conditions aux limites et les conditions de continuités, nous obtenons les équations suivantes :

$$X = 0 \quad \begin{cases} \varphi_i(0) = 0 \\ M_i(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \{B_i = D_i = 0\} \quad (2.41)$$

$$X = L_i \quad \begin{cases} \varphi_i(L_i) = \varphi_{i+1}(L_i) \\ \theta_i(L_i) = \theta_{i+1}(L_i) - c M_{i+1}(L_i) \\ M_i(L_i) = M_{i+1}(L_i) \\ T_i(L_i) = T_{i+1}(L_i) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_i = A_{i+1} \\ B_{i+1} = 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

$$X = L \quad \begin{cases} \varphi_{i+1}(L) = 0 \\ M_{i+1}(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \{A_{i+1} = 0\} \quad (2.43)$$

Ce qui réduit le nombre à trois équations :

$$\begin{cases} C_i L_i = C_{i+1} L_i + D_{i+1} \\ C_i = C_{i+1} - c \left[-EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{n\pi L_i}{L} \right) \right] \\ C_{i+1} L + D_{i+1} = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

Après simplification on trouve :

$$\begin{cases} D_{i+1} = -c L_i \left[-EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{n\pi L_i}{L} \right) \right] \\ C_{i+1} = c \frac{L_i}{L} \left[-EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{n\pi L_i}{L} \right) \right] \\ C_i = c \left[-EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{n\pi L_i}{L} \right) \right] \left[\frac{L_i}{L} - 1 \right] \end{cases} \quad (2.45)$$

En remplaçant l'équation (2.45), les équations (2.37)-(2.40) deviennent :

$$\varphi(X) = \begin{cases} \varphi_i(X) = \sin \left(\frac{n\pi X}{L} \right) + c \left[-EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{n\pi L_i}{L} \right) \right] \left[\frac{L_i}{L} - 1 \right] X \\ \varphi_{i+1}(X) = \sin \left(\frac{n\pi X}{L} \right) + c \left[-EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{n\pi L_i}{L} \right) \right] \left[\frac{L_i}{L} \right] [X - L] \end{cases} \quad (2.46a)$$

$$\theta(X) = \begin{cases} \theta_i(X) = \left(\frac{n\pi}{L} \right) \cos \left(\frac{n\pi X}{L} \right) + c \left[-EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{n\pi L_i}{L} \right) \right] \left[\frac{L_i}{L} - 1 \right] \\ \theta_{i+1}(X) = \left(\frac{n\pi}{L} \right) \cos \left(\frac{n\pi X}{L} \right) + c \left[\frac{L_i}{L} \right] \left[-EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{n\pi L_i}{L} \right) \right] \end{cases} \quad (2.46b)$$

$$M(X) = \begin{cases} M_i(X) = -EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{n\pi X}{L} \right) \\ M_{i+1}(X) = -EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{n\pi X}{L} \right) \end{cases} \quad (2.46c)$$

$$T(X) = \begin{cases} T_i(X) = -EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^3 \cos \left(\frac{n\pi X}{L} \right) \\ T_{i+1}(X) = -EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^3 \cos \left(\frac{n\pi X}{L} \right) \end{cases} \quad (2.46d)$$

Pour simplification, l'expression générale du mode propre pour la poutre fissurée est représentée en forme adimensionnelle comme suit :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_i(x) = \sin(n\pi x) + \eta [(n\pi)^2 \sin(n\pi l_i)][1 - l_i] x & ; 0 \leq x \leq l_i \\ \varphi_{i+1}(x) = \sin(n\pi x) + \eta [(n\pi)^2 \sin(\frac{n\pi l_i}{L})][l_i][1 - x] & ; l_i \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.47)$$

La méthode de Rayleigh est utilisée, donc en égalisant les valeurs maximales de l'énergie potentielle U_{max} et de l'énergie cinétique T_{max} de la poutre fissurée, une expression analytique des fréquences naturelles peut être déterminée.

L'énergie potentielle maximale peut être évaluée comme:

$$\begin{aligned} U_{max} &= \frac{EI}{2} \left[\int_0^{L_i} \left(\frac{M_i}{EI} \right)^2 dX + \int_{L_i}^L \left(\frac{M_{i+1}}{EI} \right)^2 dX \right] + \left[\frac{1}{2} (\theta_{i+1} - \theta_i) M \right]_{X=L_i} \\ &= \frac{EI (n\pi)^4}{4 L^3} \left[\int_0^{L_i} \left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi X}{L}\right) \right) dX + \int_{L_i}^L \left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi X}{L}\right) \right) dX \right] + \left[EI c \left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi L_i}{L}\right) \right) \right] \\ U_{max} &= \frac{EI (n\pi)^4}{4 L^3} \left[1 + \left(\frac{EI c}{L} \right) \left(2 \sin^2\left(\frac{n\pi L_i}{L}\right) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.48)$$

L'énergie cinétique maximale peut être calculée comme:

$$\begin{aligned} T_{max} &= \frac{\rho A \omega_{cn}^2}{2} \left[\int_0^{L_i} (\varphi_i)^2 dX + \int_{L_i}^L (\varphi_{i+1})^2 dX \right] \\ &= \frac{\rho A \omega_{cn}^2}{2} \frac{L}{2} \left[1 + 2 \frac{EI c}{L} \left(2 \sin^2\left(\frac{n\pi L_i}{L}\right) \right) + \left(\frac{EI c}{L} \right)^2 \frac{(n\pi)^4}{3} \left(2 \sin^2\left(\frac{n\pi L_i}{L}\right) \right) \left[\left(\frac{L_i}{L}\right)^4 - 2 \left(\frac{L_i}{L}\right)^3 + \left(\frac{L_i}{L}\right)^2 \right] \right] \\ T_{max} &= \frac{\rho A \omega_{cn}^2}{2} \frac{L}{2} \left[1 + \left(\frac{EI c}{L} \right) \left(2 \sin^2\left(\frac{n\pi L_i}{L}\right) \right) \left[2 + \left(\frac{EI c}{L} \right) \left(\frac{(n\pi)^4}{3} \right) \left[\left(\frac{L_i}{L}\right)^4 - 2 \left(\frac{L_i}{L}\right)^3 + \left(\frac{L_i}{L}\right)^2 \right] \right] \right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

En égalisant les équations (2.48) et (2.49), la nième fréquence de la poutre fissurée est:

$$\omega_{cn}^2 = \omega_n^2 \left[\frac{1 + \left(\frac{EI c}{L} \right) \left(2 \sin^2\left(\frac{n\pi L_i}{L}\right) \right)}{1 + \left(\frac{EI c}{L} \right) \left(2 \sin^2\left(\frac{n\pi L_i}{L}\right) \right) \left[2 + \left(\frac{EI c}{L} \right) \left(\frac{(n\pi)^4}{3} \right) \left[\left(\frac{L_i}{L}\right)^4 - 2 \left(\frac{L_i}{L}\right)^3 + \left(\frac{L_i}{L}\right)^2 \right] \right]} \right] \quad (2.50)$$

Pour le cas général d'une poutre simplement appuyée avec une seule fissure:

$$\omega_{cn} = \omega_n \left[\frac{1 + \eta \gamma_{n1}}{1 + \eta \gamma_{n1} \left[2 + \eta \left(\frac{(n\pi)^4}{3} \right) (l_1 l_2)^2 \right]} \right]^{1/2} \quad (2.51)$$

Tel que :

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} ; \quad \eta = \left(\frac{EI c}{L}\right) ; \quad \gamma_{n1} = \left(2 \sin^2\left(\frac{n\pi L_1}{L}\right)\right) ; \quad l_i = \left(\frac{L_i}{L}\right) \quad (2.52)$$

Où ω_n représente la nième fréquence de la poutre non-fissurée (saine).

2.2. Exemples numériques:

Afin de valider l'étude présentée dans ce chapitre et de montrer l'efficacité et les limites des deux méthodes, les résultats obtenus en appliquant ces deux méthodes sont comparés aux données disponibles pour une poutre simplement appuyée avec une fissure ouverte.

Les paramètres de la poutre non-fissurée utilisée précédemment par **Xiang et al. (2006)** sont considérés : $E = 2.1 \times 10^{11} Pa$, $\rho = 7860 kg/m^3$, coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, et ses dimensions: $L = 0.5 m$, $h = 0.02 m$ et $b = 0.012 m$.

ω_n [rad/s]	ω_1	ω_2	ω_3
Xiang et al. (2006)	1178.160	4712.577	10603.252
Méthode 1 (MMT)	1178.141	4712.566	10603.274
Méthode 2 (MR)			

Tableau 1: Comparaison des trois premières fréquences naturelles de la poutre non fissurée, obtenues par deux méthodes et les résultats donnés par Xiang et al. (2006).

Le **tableau 1** montre une comparaison des trois premières fréquences naturelles de la poutre non fissurée obtenues à partir des deux méthodes (MMT et MR) en utilisant l'équation (2.52) avec ceux qui sont calculées par **Xiang et al. (2006)**.

Les résultats montrent que les deux méthodes donnent les mêmes fréquences exactes et concordent bien avec celles obtenues par **Xiang et al. (2006)**.

Par la suite, les trois premières fréquences naturelles sont calculées par les deux méthodes et comparées à celles rapportées par **Xiang et al. (2006)** pour la même poutre contenant une fissure ouverte. Il est bien évident que les fréquences propres diminuent en raison de l'existence de fissure. Cela est dû au fait que la poutre fissurée devient plus flexible en raison de la réduction de la rigidité de la section.

Les **tableaux 2, 4 et 6** comparent les trois premières fréquences propres obtenues par les deux méthodes et celle présentée par **Xiang et al. (2006)** dans le cas d'une poutre avec une fissure ouverte en utilisant trois coefficients différents de η .

En générale, les résultats pour différentes positions et profondeurs des fissures avec différentes formules de η (Voir **Tableau 1- chapitre 1**), montrent un accord raisonnable entre les résultats des deux méthodes et ceux obtenus par **Xiang et al. (2006)** pour tous les cas de la poutre fissurée, mais la différence entre les fréquences propres augmente pour les modes d'ordre supérieur.

Le but de cette section est de montrer l'efficacité et les limites de la méthode de Rayleigh. Afin de comparer les résultats modaux obtenus avec les deux méthodes (MMT et MR), plusieurs simulations ont été effectuées dans le cas des poutres simplement supportées avec une fissure ouverte. La combinaison des ratios de profondeur de fissure et de la position des fissures en utilisant trois coefficients différents de η a été considérée et les trois premiers modes ont été analysés.

En outre, pour comparer les modes propres, quelques points importants de poutre dans chaque mode appelé dans ce document «Points de référence (PR)» sont considérés (**Figure 3**). Les points $L/4$; $L/2$ et $3L/4$ pour le premier mode, points $L/4$; et $3L/4$ pour le second

mode et les points L/6; L/2 et 5L/6 pour le troisième mode sont considérés comme des points de référence. Dans chaque mode, deux paramètres : E.R.F.N (erreur relative de la fréquence naturelle) et E.R.M.P (erreur relative du mode propre) sont introduits comme suit:

$$ERFN (\%) = \left| \frac{\omega_{cn1} - \omega_{cn2}}{\omega_{cn1}} \right| * 100 \quad (2.53)$$

$$ERMP (\%) = \left| \frac{DPR_1 - DPR_2}{DPR_1} \right| * 100 \quad (2.54)$$

Où ω_{cn1} et ω_{cn2} représentent respectivement les nièmes fréquences de la poutre fissurée obtenues des premières et deuxièmes méthodes.

DPR_n représente le déplacement aux points de référence dans les premières et deuxièmes méthodes respectivement.

Les **tableaux 3, 5 et 7** indiquent l'erreur relative des trois premières fréquences naturelles (E.R.F.N) en utilisant trois coefficients différents de η , respectivement.

Comme on peut le constater, la méthode de Rayleigh permet d'approcher la première fréquence naturelle de la poutre fissurée avec une grande précision pour divers emplacements et profondeurs de fissures pour n'importe quels coefficients de flexibilité. La méthode analytique peut également se rapprocher de la deuxième fréquence propre des poutres fissurées avec une erreur inférieure à: 4% dans tous les cas avec η_1 , 8% dans tous les cas avec η_2 et 7% dans tous les cas avec η_3 .

Dans le cas d'un rapport de profondeur inférieur ou égal à 0,3, la méthode analytique peut se rapprocher de la troisième fréquence propre de poutre fissurée avec une erreur inférieure à 7% (pour tout coefficient de flexibilité), à l'exception des cas (7 et 9) dans lesquels les erreurs étaient très élevées.

Les **tableaux 8, 9 et 10** comparent les trois premiers modes obtenus par les deux méthodes dans le cas d'une poutre avec une fissure en utilisant trois coefficients différents de η . Dans ces tableaux, les colonnes 3, 4 et 5 indiquent l'erreur relative du mode propre (E.R.M.P) de quelques points de références (PR) désignés précédemment pour les trois premiers modes respectivement.

Comme on peut le voir sur ces tableaux, le rapport de profondeur des fissures et le rang du mode jouent un rôle primordial dans la majorité des cas. L'E.R.M.P augmente lorsque la profondeur de la fissure augmente pour divers emplacements de fissure, c'est-à-dire que les différences des E.R.M.P entre les deux méthodes sont d'autant plus importantes que la fissure est plus profonde. En outre, plus le mode est élevé, plus la différence est grande. Ainsi, pour des rapports de profondeurs de fissure de 0.4, les tableaux montrent que les différences des E.R.M.P les plus importantes sont d'environ 83%, 130% et 124% pour le 3ème mode à un point de référence égale à L/2 en utilisant les trois coefficients de flexibilité, respectivement. En général, à partir d'un rapport de profondeur spécifique supérieur à 0.3 la différence entre les résultats obtenus par les différents coefficients de flexibilité devient plus ou moins grande, et ça est dû à la grande sensibilité de la méthode de Rayleigh à la profondeur de fissure et la divergence de ces coefficients à partir de ce seuil (rapport de 0.3).

Bien que l'effet des fissures sur les première et troisième fréquences est perceptible, les résultats des tableaux montrent que la deuxième fréquence propre n'est pas affectée par des fissures de profondeurs diverses (même grandes). En effet, les fissures sont situées à mi-portée, où la compression et la tension disparaissent pour donner des formes de déviation antisymétriques.

N° du cas	l_1	ξ	η	Méthodes	Fréquences naturelles ω_{cn} [rad/s]			
					ω_{c1}	ω_{c2}	ω_{c3}	
1	0.1	0.1	η_1	Xiang et al. (2006)	1177.660	4705.604	10573.663	
				Méthode 1	1177.471	4702.872	10562.081	
				Méthode 2		4702.689	10557.314	
2	0.2	0.1	η_1	Xiang et al. (2006)	1176.402	4694.446	10562.889	
				Méthode 1	1175.720	4687.394	10547.379	
				Méthode 2		4685.668	10524.893	
3	0.2	0.3	η_1	Xiang et al. (2006)	1162.672	4557.815	10281.642	
				Méthode 1	1167.480	4604.385	10373.102	
				Méthode 2	1167.482	4573.530	9988.086	
4	0.3	0.2	η_1	Xiang et al. (2006)	1165.559	4644.925	10587.306	
				Méthode 1	1167.251	4653.808	10589.391	
				Méthode 2	1167.253	4635.646	10565.117	
5	0.3	0.3	η_1	Xiang et al. (2006)	1149.363	4563.174	10568.267	
				Méthode 1	1158.196	4607.051	10578.450	
				Méthode 2	1158.200	4548.732	10496.520	
6	0.4	0.2	η_1	Xiang et al. (2006)	1160.876	4686.538	10544.768	
				Méthode 1	1163.185	4689.978	10552.492	
				Méthode 2		4680.003	10442.853	
7	0.4	0.4	η_1	Xiang et al. (2006)	1105.780	4608.053	10369.596	
				Méthode 1	1132.647	4645.470	10452.809	
				Méthode 2	1132.653	4553.268	9531.843	
8	0.5	0.2	η_1	Xiang et al. (2006)	1159.108	4712.566	10436.419	
				Méthode 1	1161.646		10458.170	
				Méthode 2	1161.647		10141.683	
9	0.5	0.4	η_1	Xiang et al. (2006)	1099.580		9964.053	
				Méthode 1	1128.214		10183.657	
				Méthode 2	1128.215		8136.554	
10	0.7	0.4	η_1	Xiang et al. (2006)	1124.204		4446.840	10541.653
				Méthode 1	1144.600		4540.198	10562.967
				Méthode 2	1144.610		4387.345	10331.136

Tableau 2: Comparaison des trois premières fréquences naturelles de poutres fissurées, obtenues par deux méthodes et les résultats donnés par Xiang et al. (2006) pour divers emplacements et profondeurs de fissures en utilisant le coefficient η_1 .

N° du cas	η	1er E.R.F.N (%)	2ème E.R.F.N (%)	3ème E.R.F.N (%)
1	η_1	≈ 0	0.003	0.045
2			0.036	0.213
3			0.670	3.711
4			0.390	0.229
5			1.265	0.774
6			0.212	1.038
7			1.984	8.810
8			≈ 0	3.026
9				20.101
10			3.366	2.194

Tableau 3: Comparaison de l'erreur relative des trois fréquences naturelles (E.R.F.N) calculées à partir des deux méthodes en utilisant le coefficient η_1 .

N° du cas	l_1	ξ	η	Méthodes	Fréquences naturelles ω_{cn} [rad/s]			
					ω_{c1}	ω_{c2}	ω_{c3}	
1	0.1	0.1	η_2	Xiang et al. (2006)	1177.660	4705.604	10573.663	
				Méthode 1	1177.664	4705.660	10573.903	
				Méthode 2		4705.567	10571.472	
2	0.2	0.1	η_2	Xiang et al. (2006)	1176.402	4694.446	10562.889	
				Méthode 1	1176.416	4694.592	10563.212	
				Méthode 2		4693.710	10551.705	
3	0.2	0.3	η_2	Xiang et al. (2006)	1162.672	4557.815	10281.642	
				Méthode 1	1163.366	4564.455	10294.421	
				Méthode 2	1163.371	4507.717	9611.455	
4	0.3	0.2	η_2	Xiang et al. (2006)	1165.559	4644.925	10587.306	
				Méthode 1	1165.925	4646.842	10587.755	
				Méthode 2	1165.926	4624.123	10557.171	
5	0.3	0.3	η_2	Xiang et al. (2006)	1149.363	4563.174	10568.267	
				Méthode 1	1150.632	4569.377	10569.702	
				Méthode 2	1150.639	4462.880	10413.594	
6	0.4	0.2	η_2	Xiang et al. (2006)	1160.876	4686.538	10544.768	
				Méthode 1	1161.375	4687.281	10546.436	
				Méthode 2	1161.376	4674.739	10409.005	
7	0.4	0.4	η_2	Xiang et al. (2006)	1105.780	4608.053	10369.596	
				Méthode 1	1107.490	4610.388	10374.769	
				Méthode 2	1107.502	4392.317	8458.616	
8	0.5	0.2	η_2	Xiang et al. (2006)	1159.108	4712.566	10436.419	
				Méthode 1	1159.656		10441.109	
				Méthode 2	1159.657		10049.400	
9	0.5	0.4	η_2	Xiang et al. (2006)	1099.580		9964.053	
				Méthode 1	1100.906		9977.470	
				Méthode 2	1100.908		6532.010	
10	0.7	0.4	η_2	Xiang et al. (2006)	1124.204		4446.840	10541.653
				Méthode 1	1125.516		4452.609	10542.960
				Méthode 2	1125.541		4119.887	9981.640

Tableau 4: Comparaison des trois premières fréquences naturelles de poutres fissurées, obtenues par deux méthodes et les résultats donnés par Xiang et al. (2006) pour diverses emplacements et profondeurs de fissures en utilisant le coefficient η_2 .

N° du cas	η	1er E.R.F.N (%)	2ème E.R.F.N (%)	3ème E.R.F.N (%)	
1	η_2	≈ 0	0.001	0.022	
2			0.018	0.108	
3			1.243	6.634	
4			0.488	0.288	
5			2.330	1.476	
6			0.267	1.303	
7			0.001	4.729	18.469
8			≈ 0	≈ 0	3.751
9					34.532
10			0.002	7.472	5.324

Tableau 5: Comparaison de l'erreur relative des trois fréquences naturelles (E.R.F.N) calculées à partir des deux méthodes en utilisant le coefficient η_2 .

N° du cas	l_1	ξ	η	Méthodes	Fréquences naturelles ω_{cn} [rad/s]		
					ω_{c1}	ω_{c2}	ω_{c3}
1	0.1	0.1	η_3	Xiang et al. (2006)	1177.660	4705.604	10573.663
				Méthode 1	1177.709	4706.310	10576.662
				Méthode 2		4706.234	10574.665
2	0.2	0.1	η_3	Xiang et al. (2006)	1176.402	4694.446	10562.889
				Méthode 1	1176.578	4696.275	10566.932
				Méthode 2		4695.550	10557.471
3	0.2	0.3	η_3	Xiang et al. (2006)	1162.672	4557.815	10281.642
				Méthode 1	1164.032	4570.851	10306.810
				Méthode 2		1164.036	4518.740
4	0.3	0.2	η_3	Xiang et al. (2006)	1165.559	4644.925	10587.306
				Méthode 1	1166.720	4651.012	10588.734
				Méthode 2		1166.721	4631.081
5	0.3	0.3	η_3	Xiang et al. (2006)	1149.363	4563.174	10568.267
				Méthode 1	1151.851	4575.368	10571.089
				Méthode 2		1151.858	4477.435
6	0.4	0.2	η_3	Xiang et al. (2006)	1160.876	4686.538	10544.768
				Méthode 1	1162.459	4688.896	10550.062
				Méthode 2		1162.460	4677.927
7	0.4	0.4	η_3	Xiang et al. (2006)	1105.780	4608.053	10369.596
				Méthode 1	1110.837	4614.974	10384.937
				Méthode 2		1110.847	4416.368
8	0.5	0.2	η_3	Xiang et al. (2006)	1159.108	4712.566	10436.419
				Méthode 1	1160.849		10451.318
				Méthode 2			10105.454
9	0.5	0.4	η_3	Xiang et al. (2006)	1099.580		9964.053
				Méthode 1	1104.527		10003.928
				Méthode 2			1104.528
10	0.7	0.4	η_3	Xiang et al. (2006)	1124.204	4446.840	10541.653
				Méthode 1	1128.076	4463.962	10545.535
				Méthode 2		1128.099	4157.552

Tableau 6: Comparaison des trois premières fréquences naturelles de poutres fissurées, obtenues par deux méthodes et les résultats donnés par Xiang et al. (2006) pour diverses emplacements et profondeurs de fissures en utilisant le coefficient η_3 .

N° du cas	η	1er E.R.F.N (%)	2ème E.R.F.N (%)	3ème E.R.F.N (%)	
1	η_3	≈ 0	0.001	0.018	
2			0.015	0.089	
3			1.140	6.124	
4			0.428	0.252	
5			2.140	1.348	
6			0.233	1.141	
7			4.303	17.118	
8			≈ 0		3.309
9					32.787
10				0.002	6.864

Tableau 7: Comparaison de l'erreur relative des trois fréquences naturelles (E.R.F.N) calculées à partir des deux méthodes en utilisant le coefficient η_3 .

N° du cas	η	1er E.R.M.P (%)			2ème E.R.M.P (%)		3ème E.R.M.P (%)		
		L/4	L/2	3L/4	L/4	3L/4	L/6	L/2	5L/6
1	η_1	0.340	0.351	0.355	1.784	0.545	4.311	0.821	2.049
2		0.693	0.713	0.725	3.309	0.563	5.575	5.749	0.853
3		3.121	3.191	3.251	14.662	2.743	24.274	24.838	3.643
4		2.336	2.396	2.433	7.827	5.160	4.138	7.530	0.059
5		4.318	4.424	4.526	14.372	9.453	7.661	13.668	0.290
6		2.639	2.659	2.680	4.469	5.179	6.980	17.667	2.075
7		8.305	8.415	8.530	14.032	15.558	22.214	57.662	7.963
8		2.504	2.505	2.504	≈ 0		10.002	27.680	10.700
9		7.923	7.902	7.938			31.757	83.847	33.882
10		4.334	4.170	3.983	12.391	29.447	5.965	18.258	20.319

Tableau 8: Comparaison de l'erreur relative des trois modes propres (E.R.M.P) de quelques points de références (PR) calculées à partir des deux méthodes en utilisant le coefficient η_1 .

N° du cas	η	1er E.R.M.P (%)			2ème E.R.M.P (%)		3ème E.R.M.P (%)		
		L/4	L/2	3L/4	L/4	3L/4	L/6	L/2	5L/6
1	η_2	0.241	0.240	0.241	1.267	0.383	3.074	0.586	1.455
2		0.509	0.511	0.511	2.360	0.392	3.974	4.100	0.617
3		4.334	4.449	4.530	20.375	3.982	33.464	34.111	4.958
4		2.630	2.690	2.738	8.788	5.784	4.646	8.436	0.078
5		6.024	6.151	6.298	19.867	13.024	10.645	18.712	0.353
6		2.963	2.989	3.039	5.023	5.803	7.845	19.883	2.362
7		13.365	13.498	13.701	22.405	23.941	35.818	94.896	14.662
8		2.829	2.809	2.815	≈ 0		11.239	31.009	12.024
9		12.707	12.674	12.723			51.144	130.786	54.481
10		6.924	6.685	6.397	19.901	32.231	9.574	29.396	32.796

Tableau 9: Comparaison de l'erreur relative des trois modes propres (E.R.M.P) de quelques points de références (PR) calculées à partir des deux méthodes en utilisant le coefficient η_2 .

N° du cas	η	1er E.R.M.P (%)			2ème E.R.M.P (%)		3ème E.R.M.P (%)		
		L/4	L/2	3L/4	L/4	3L/4	L/6	L/2	5L/6
1	η_3	0.212	0.230	0.227	1.146	0.362	2.770	0.525	1.508
2		0.438	0.461	0.454	2.140	0.361	3.608	3.713	0.557
3		4.122	4.240	4.335	19.449	3.771	31.976	32.624	4.751
4		2.448	2.508	2.549	8.205	5.413	4.347	7.887	0.069
5		5.747	5.873	6.013	18.977	12.449	10.160	17.899	0.335
6		2.752	2.789	2.838	4.697	5.429	7.322	18.548	2.181
7		12.654	12.798	13.005	21.264	22.837	33.943	89.705	13.669
8		2.631	2.622	2.631	≈ 0		10.495	29.014	11.231
9		12.086	12.020	12.058			48.477	124.467	51.661
10		6.566	6.337	6.089	18.877	45.058	9.083	27.867	31.091

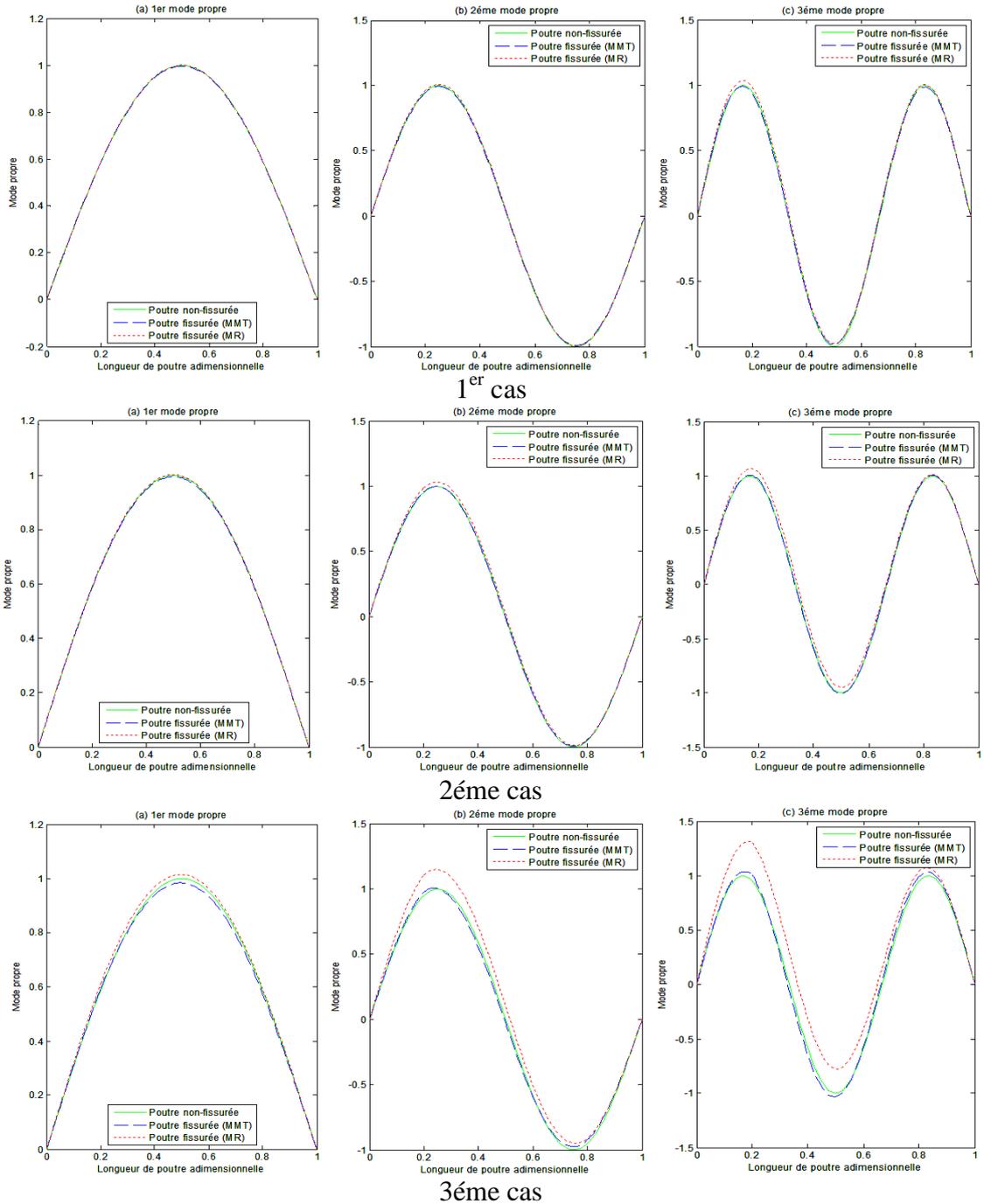
Tableau 10: Comparaison de l'erreur relative des trois modes propres (E.R.M.P) de quelques points de références (PR) calculées à partir des deux méthodes en utilisant le coefficient η_3 .

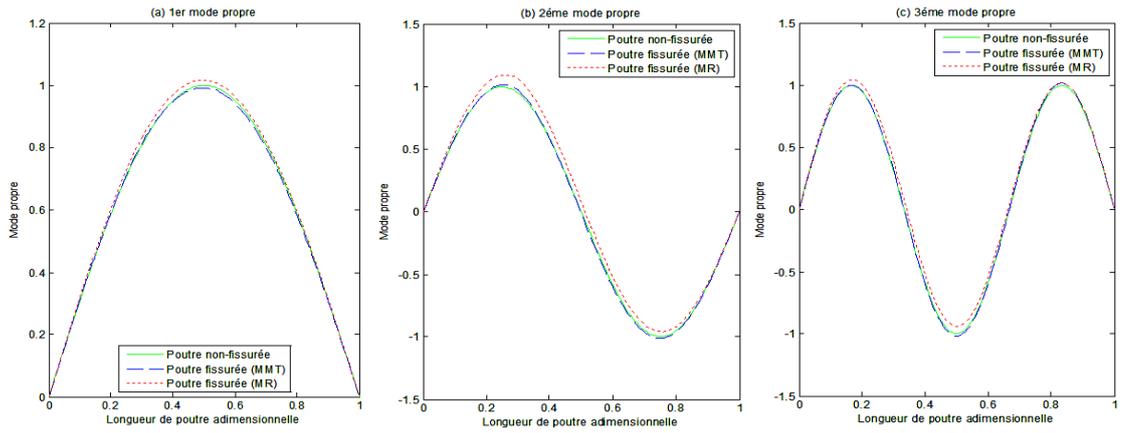
Comme le mouvement dans le second mode est antisymétrique, les fissures de mi-portée ne sont ni sous compression ni sous tension. Il s'ensuit que la déformation dans la direction de l'axe neutre est presque nulle (à l'exception d'une très faible déformation dans le plan due au déplacement dans le plan); ainsi, la singularité de contrainte disparaît et le second mode de vibration n'est pas affecté par les fissures. En effet, pour une poutre bloquée aux deux

extrémités, une généralisation immédiate est qu'une fissure située à mi-portée n'affecte aucun des modes de vibration antisymétriques.

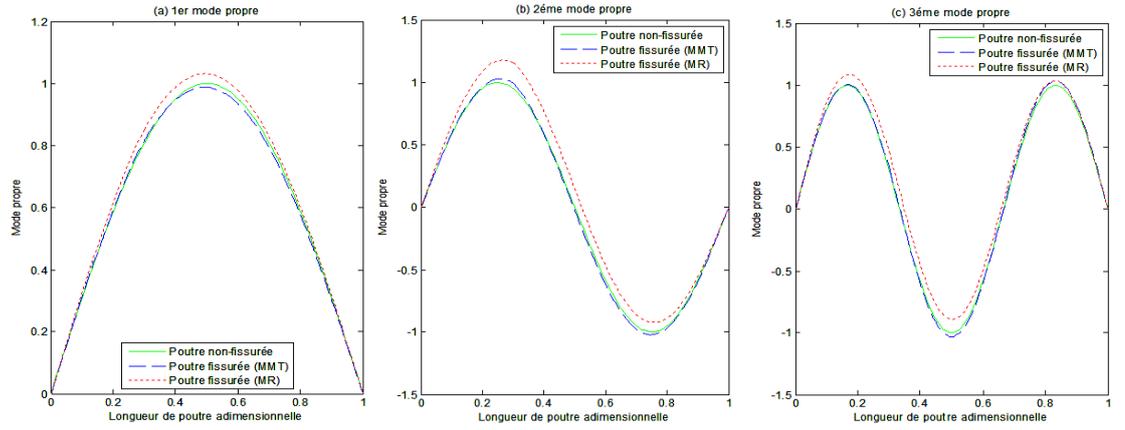
Les trois formes du mode les plus basses sont représentées à la **figure 3** pour différentes profondeurs et emplacements de fissures. Trois courbes apparaissent sur chaque graphique: la poutre non fissurée, la poutre fissurée avec le résultat de la matrice du transfert et la poutre fissurée avec l'approximation de Rayleigh.

De plus, on observe sur ces graphes que les résultats de la méthode de la matrice du transfert sont moins visibles (plus proches à celles de la poutre non-fissurée) que les résultats de la méthode de Rayleigh. Cela est attendu en raison de la grande sensibilité de la deuxième méthode aux paramètres de fissuration (emplacement et profondeur).

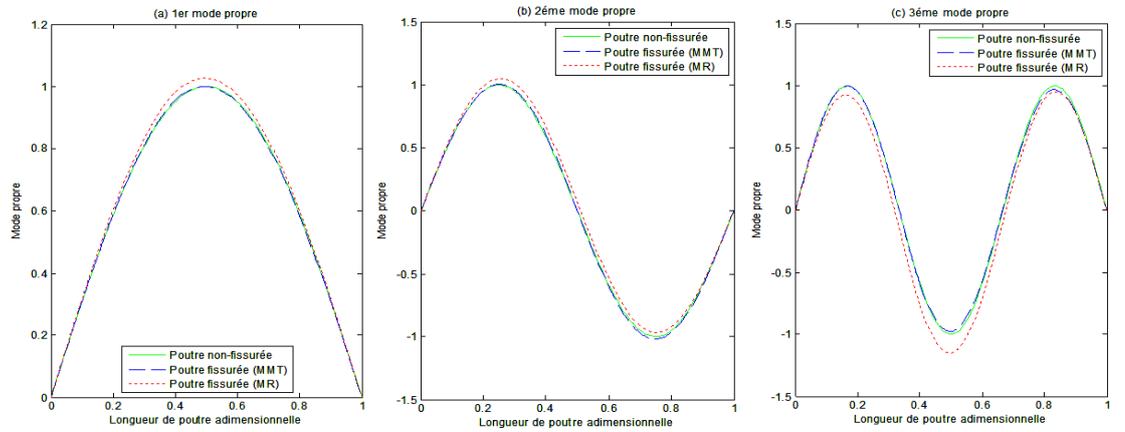




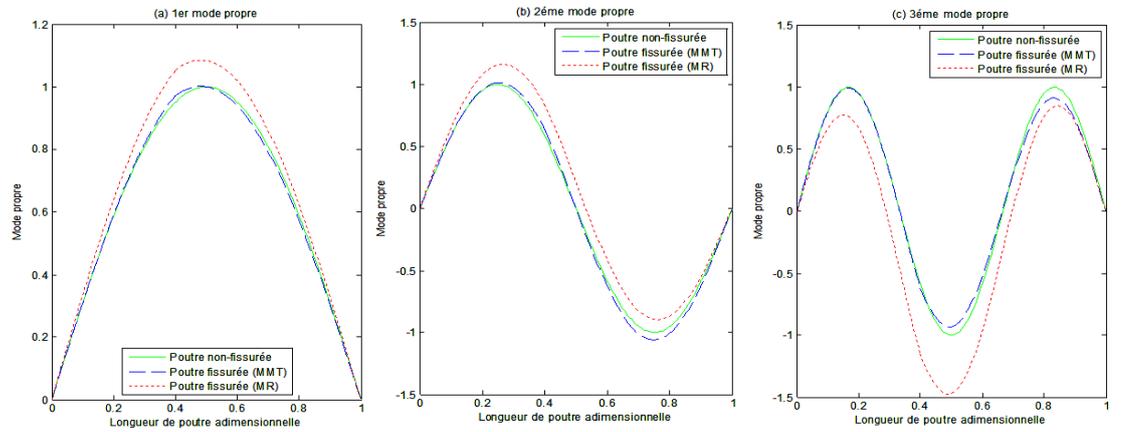
4ème cas



5ème cas



6ème cas



7ème cas

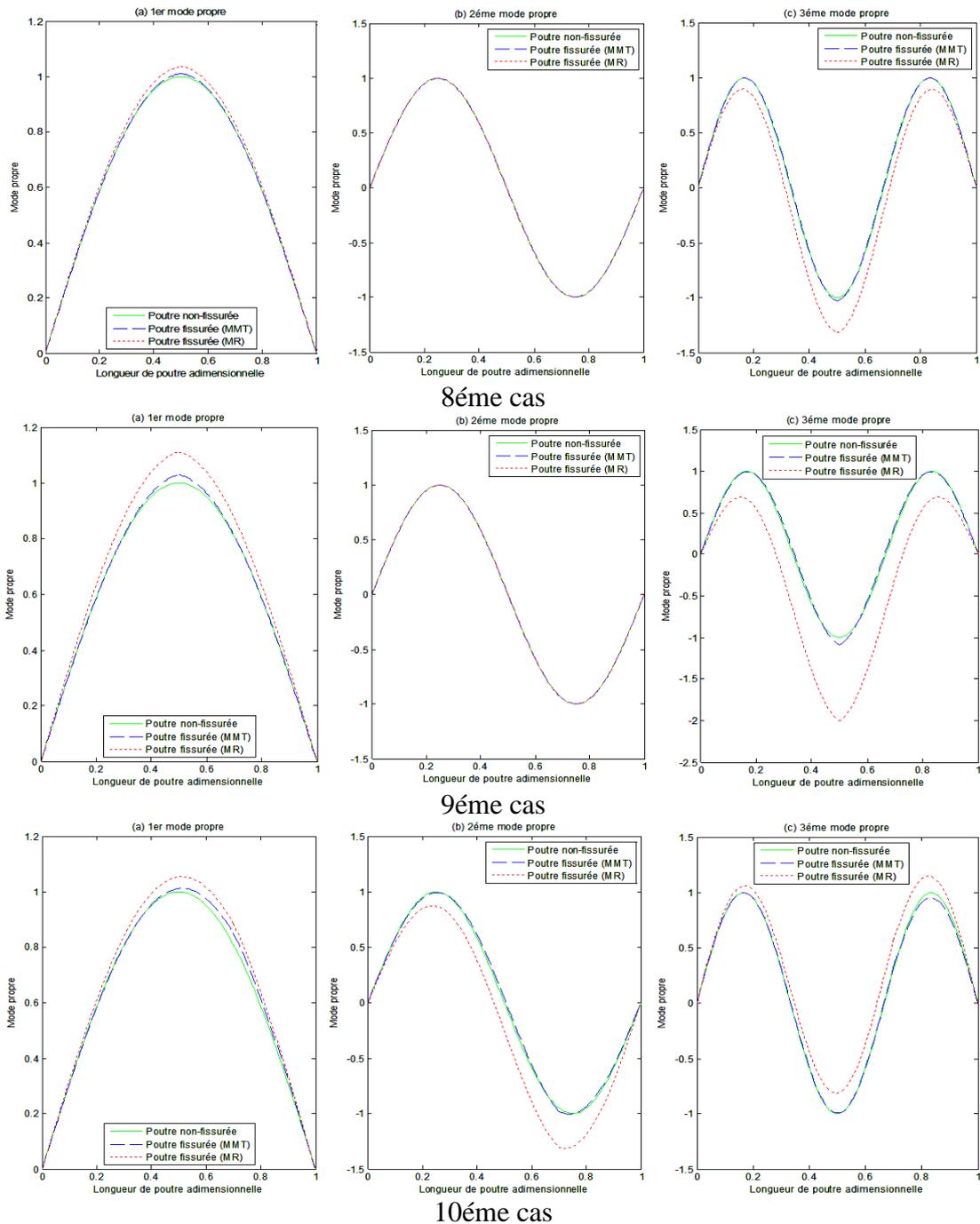


Figure 3: Comparaison des trois premiers modes de poutre non fissurée et fissurée en utilisant les deux méthodes pour les 10 cas : (a) 1er mode propre, (b) 2ème mode propre et (c) 3ème mode propre.

Les résultats ci-dessus suggèrent que les petites fissures ont peu d'effet sur les fréquences naturelles et les formes du mode des poutres. Seules les grandes fissures donnent lieu à une fréquence modérée et subissent des graves changements du mode propre.

Les modes propres sont l'outil permettant de diagnostiquer la position de la fissure sur la poutre. Cela se produit étant donné que les modes propres présentent une discontinuité de pente au point où la fissure existe. Cette discontinuité est d'autant plus forte que la profondeur de la fissure augmente; malheureusement, une défaillance structurale serait susceptible de se produire avant que ces profondeurs de fissure soient atteintes.

Il est également montré sur la **figure 3(b)** (8ème et 9ème cas) que la forme du second mode n'est pas affectée par la présence de fissures, pour toutes les profondeurs des fissures étudiées. Cela a été prédit ci-dessus (les fissures de mi-portée). De plus, pour les premiers et troisièmes modes, les changements des formes de déviation dus aux fissures ne sont significatifs que pour des taux de fissure supérieurs à environ 0,2. Cependant, notez que la forme du troisième mode est plus affectée par les fissures que la première (voir **figure 3(a) et 3(c)**).

2.3. Conclusion :

En résolvant le problème aux valeurs propres qui donne les fréquences naturelles et les formes des modes exactes, une équation algébrique doit être résolue numériquement, puis les coefficients des termes trigonométriques et hyperboliques dans les formes du mode seront trouvés en utilisant des matrices obtenues à partir des conditions de compatibilité aux points des fissures et aux conditions aux limites des deux extrémités. Ainsi, afin d'examiner les effets de la profondeur ou de l'emplacement des fissures sur les fréquences naturelles et les formes du mode, il faut résoudre l'équation algébrique numériquement à chaque fois, ce qui est fastidieux, prend du temps et ne montre pas les effets de la profondeur et de l'emplacement de fissure dans une forme explicite.

Ces faiblesses ont été surmontées à l'aide de la méthode d'estimation analytique. L'avantage de l'estimation analytique basée sur la méthode de Rayleigh par rapport à la méthode de l'analyse propre est que la méthode de Rayleigh fournit une expression explicite à la fois pour les fréquences naturelles et les formes du mode dans lesquelles l'effet des paramètres tels que la profondeur et l'emplacement de la fissure peut être modifié et/ou étudié analytiquement avec des étapes relativement simples. Cependant, il est montré que la précision de cette estimation par rapport à la solution exacte diminue lorsque la profondeur de la fissure et la gamme du mode augmentent.

CHAPITRE 3: LE COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES POUTRES AVEC DEUX FISSURES

Introduction :

Les fissures dans la structure peuvent provoquer des défaillances catastrophiques si elles ne sont pas détectées. Plusieurs chercheurs ont développés des modèles du système de poutres fissurées afin de prévoir l'évolution du comportement vibratoire dû à la croissance des fissures. De nombreux chercheurs ont compris l'importance des structures fissurées, en particulier la dynamique des poutres et des rotors fissurés, ce qui est bien documenté dans un livre de **Dimarogonas et al. (2013)**, d'une étude bibliographique de **Wauer (1990)**; une étude sur les rotors simples réalisée par **Gasch (1993)** et une étude générale sur les structures fissurées par **Dimarogonas (1996)**.

Cependant, la plupart des études décrites ci-dessus se concentrent principalement sur l'analyse de l'effet d'une fissure transversale unique. En pratique, lorsque la structure est fissurée dans au moins deux positions, la réponse dynamique devient nettement plus compliquée, en particulier lorsque la fissure doit être identifiée à l'aide d'un paramètre supplémentaire. De plus, diverses combinaisons de position et de profondeur peuvent entraîner des modifications identiques des fréquences propres.

Le comportement dynamique d'une poutre et/ ou d'un rotor à deux fissures a été étudié par plusieurs auteurs :

Ruotolo et al. (1996) ont décrits des essais expérimentaux menés sur des poutres en acier en porte-à-faux comportant deux fissures et ont réalisés une étude systématique en corrélant l'emplacement et la profondeur des fissures aux modifications correspondantes des fréquences propres, montrant un bon accord entre les résultats théoriques et expérimentaux.

Ruotolo et Surace (1997) ont proposés une procédure de résolution utilisant un algorithme génétique et les résultats du modèle d'éléments finis pour la détection des fissures multiples dans des poutres. **Lin et al. (2002)** ont étudiés les vibrations d'une poutre avec un nombre arbitraire des fissures ouvertes transversales à double ou simple côté en utilisant une méthode hybride (analytique / solution numérique) de la matrice du transfert, c.-à-d., le procédé utilise une implémentation numérique pour résoudre la forme analytique obtenue à partir de la méthode de matrice du transfert. **Ostachowicz et Krawczuk (1991)** ont étudiés l'effet des deux fissures ouvertes sur les fréquences propres d'une poutre en porte-à-faux. Pour modéliser l'effet de la contrainte locale dans la fissure, ils ont introduit deux fonctions différentes en fonction de la symétrie de la fissure: les fissures à double côté résultant d'un chargement cyclique et la fissure à un côté résultant de la fluctuation de la charge.

Christides et Barr (1984) ont déduits l'équation différentielle et les conditions aux limites associées à une poutre uniforme d'Euler – Bernoulli contenant une ou plusieurs fissures ouvertes symétriques. Les fissures ont été considérées comme normales par rapport à l'axe neutre de la poutre et symétriques par rapport au plan de flexion. La perturbation de la contrainte résultante de la présence de fissure a été introduite par une fonction. Cette fonction présentait une décroissance exponentielle avec la distance de la fissure et incluait un paramètre évalué par des tests expérimentaux. Ils ont montrés que leurs résultats théoriques correspondaient étroitement aux résultats expérimentaux. **Shen et Pierre (1990)** ont envisagés le même problème dans le cas des poutres avec paires de fissures ouvertes symétriques en utilisant une solution de Galerkin approximative. Ils ont examinés une série des fonctions de comparaison constituées des formes du mode de la poutre non fissurée correspondante. Leur approche permet de déterminer les fréquences propres et les formes du mode les plus élevées d'une poutre fissurée. Ils ont utilisés la méthode des éléments finis à

deux dimensions pour valider leur approche théorique. **Chasalevris et Papadopoulos (2006)** ont étudiés le comportement dynamique d'une poutre avec deux fissures transversales à la surface. Une matrice de conformité locale à deux degrés de liberté, fléchissant dans les plans horizontal et vertical, est utilisée pour modéliser la fissure transversale en rotation et est calculée en fonction des expressions disponibles des facteurs d'intensité et des expressions associées au taux de libération de l'énergie de contrainte. Chaque fissure était caractérisée par sa profondeur, sa position et son angle relatif. **Haisty et Springer (1988)** ont utilisés une approche par éléments finis et ont mis au point un élément de poutre générale contenant une fissure ouverte à double côté pouvant être utilisée pour modéliser les dommages dans les structures complexes. **Shifrin et Ruotol (1999)** ont proposés une nouvelle méthode pour calculer les fréquences propres d'une poutre avec un nombre fini arbitraire de fissures ouvertes. La principale caractéristique de leur travail était de réduire la dimension de la matrice du calcul et donc le temps du calcul par rapport aux méthodes courantes du modèle de poutre continue. **Zheng et Fan (2001)** ont calculés les fréquences propres d'une poutre non uniforme avec un nombre arbitraire de fissures transversales ouvertes en utilisant une série de Fourier modifiée. **Li (2002)** a étudié l'analyse par vibration libre d'une poutre non uniforme avec un nombre arbitraire de fissures et de masses concentrées. **Chondros et al. (1998)** ont développés la théorie de la vibration continue pour une poutre d'Euler – Bernoulli simplement supportée, avec une ou deux fissures ouvertes. Ils ont utilisés la formulation variationnelle de Hu – Washizu – Barr pour dériver l'équation différentielle et les conditions aux limites de la poutre fissurée sous la forme d'un continuum unidimensionnel. Ils ont également obtenus la première fréquence naturelle de la poutre fissurée et ont validés leurs résultats avec des expériences dans deux cas: (1) une poutre en aluminium avec fissures de fatigue et (2) une poutre en acier à deux fissures. **Douka et al. (2004)** ont étudiés l'influence des deux fissures et ont utilisés les changements d'antirésonance, complémentaires avec des changements de fréquence naturelle, dans un schéma de prévision pour déterminer l'emplacement et la profondeur des deux fissures transversales ouvertes dans des poutres en porte-à-faux, à la fois analytiquement et expérimentalement. **Loutridis et al. (2004)** ont étudiés l'identification des doubles fissures dans des poutres en se basant sur l'analyse en ondelettes. Le mode de vibration fondamental d'une poutre en porte-à-faux est analysé à l'aide de la transformation continue en ondelettes et l'emplacement et la profondeur des fissures sont estimés. **Patil et Maiti (2003, 2005)** ont utilisés une méthode de prévision de l'emplacement et de la profondeur des fissures multiples basée sur la mesure des fréquences propres des poutres élancées en porte-à-faux avec deux et trois fissures alignées. **Binici (2005)** a proposé une nouvelle méthode permettant d'obtenir les fréquences propres et les formes des modes des poutres simplement supportées et des poutres en porte-à-faux contenant plusieurs fissures et soumis à une force axiale. **Yoon et al. (2007)** ont étudiés l'influence des deux fissures ouvertes sur le comportement dynamique d'une poutre simplement supportée contenant deux fissures de manière analytique et expérimentale. L'équation du mouvement est dérivée en utilisant le principe de Hamilton et l'analyse est faite par une méthode numérique. La poutre simplement supportée est modélisée par la théorie de poutre d'Euler-Bernoulli. **Khiem et Lien (2001)** ont proposés une méthode plus simplifiée pour évaluer les fréquences propres des poutres comportant un nombre arbitraire de fissures. Leur méthode est basée sur l'utilisation du modèle de fissure à ressort en rotation et conduit à un calcul d'un déterminant d'une matrice $[4 \times 4]$. **Jena et al. (2012)** ont mis en évidence la détection des fissures dans des poutres d'Euler Bernoulli minces par la connaissance des modifications des fréquences propres et de leurs mesures. La méthode est basée sur l'approche de la modélisation d'une fissure par un ressort de rotation. Des expressions théoriques pour les fréquences propres ont été formulées pour déterminer l'effet des fissures sur les fréquences propres et les formes du

mode. Les résultats obtenus pour une poutre en porte-à-faux avec analyse des deux fissures montrent un état efficace de la recherche sur les effets des fissures multiples et leur identification. **Tsai et Wang (1997)** ont analysés la vibration d'un rotor à fissures multiples sur la base de la théorie de poutre de Timoshenko. **Sekhar (1999)** a mené une étude paramétrique des deux fissures transversales ouvertes alignées dans un rotor et a étudié l'effet des divers paramètres de fissure sur les fréquences propres et les vitesses de seuil des rotors. Il a utilisé le modèle d'éléments finis d'un système de roulement de rotor pour les vibrations de flexion. **Darpe et al. (2002)** ont étudiés l'effet des deux fissures respiratoires sur la réponse dynamique au déséquilibre d'un simple rotor de Jeffcott. **Han et Chu (2012)** ont étudiés l'instabilité paramétrique d'un système à rotor avec deux fissures transversales. **Sekhar (2008)** a résumé les différentes études sur les fissures doubles / multiples et il a noté les influences et les méthodes d'identification des structures vibrantes telles que les poutres, les rotors, les tuyaux, etc. et leur identification. **Wu et al. (2005)** ont étudiés la vibration couplée en torsion latérale d'un rotor présentant deux fissures transversales. Pour un arbre fixe à deux fissures, **Chasalevris et Papadopulos (2008)** ont expliqué les vibrations de flexion couplées sur les plans horizontal et vertical. **Behzad et al. (2013)** ont utilisés une procédure simple basée sur l'énergie présentée pour la détection des fissures dans des poutres d'Euler – Bernoulli présentant deux types de fissures différents, à savoir une fissure en largeur et une fissure en hauteur. Les fissures ont été modélisées à l'aide des ressorts de torsion locaux sans masse. Une technique, qui utilise les modifications des trois premières fréquences naturelles, est présentée par **Morassi et Rollo (2001)** pour une poutre simplement supportée avec deux fissures de sévérité égale. L'étude précédente a été étendue par **Rubio et al. (2016)** au cas des fissures de gravité différente et pour deux fissures de gravité égale dans une tige uniforme libre- libre sous vibration longitudinale par **Rubio et al. (2015)**. **Khan et Parhi (2013)** ont estimés les effets de la profondeur des fissures sur la fréquence naturelle et la forme du mode des poutres en porte-à-faux et fixe-fixe soumises à deux fissures transversales ouvertes à l'aide d'ANSYS. Des expériences ont également été menées pour valider les résultats. **Mazanoglu et Sabuncu (2012)** ont utilisés un algorithme basé sur la fréquence pour l'identification d'une et deux fissures via une approche statistique utilisée dans l'expérience. **Mazanoglu (2015)** a proposé des méthodes directes et inverses basées sur la fréquence naturelle pour l'identification des fissures multiples dans des poutres. **Bakhtiari-nejad et al. (2014)** ont donnés une estimation analytique basée sur la méthode de Rayleigh, étendue à une poutre comportant une ou deux fissures afin de trouver des fréquences propres et les formes du mode dans le but de surmonter la faiblesse de la résolution du problème de la valeur propre. Ils ont développés une équation algébrique qui a été résolue numériquement, puis les coefficients des termes trigonométriques et hyperboliques dans les formes du mode sont trouvés en utilisant des matrices obtenues à partir des conditions aux limites et des conditions de compatibilité en chaque point de fissure.

Dans ce chapitre, les effets des deux fissures sur la fréquence naturelle et la forme du mode d'une poutre simplement appuyée ont été examinés en comparant les résultats théoriques, les mesures expérimentales présentées dans **(Yoon et al. 2007)** et la méthode proposée pour différentes études des cas.

3.1. Le modèle théorique :

Une poutre simplement appuyée illustrée sur la **figure 1**, d'une longueur (L) et de section rectangulaire uniforme longitudinale d'une hauteur (h) et largeur (b), avec deux fissures ouvertes de profondeurs (a_1 et a_2) situées respectivement à ($X_1 = L_1$ et $X_2 = L_2$) de l'appui gauche de la poutre, où (X_0) et (X_3) représentent les points d'extrémités. La fonction de

déplacement transversale de la poutre à la coordonnée axiale X et au temps T est désignée par $W_i(X, T)$ pour trois intervalles : $i = 1$ pour $0 < X < X_1$, $i = 2$ pour $X_1 < X < X_2$ et $i = 3$ pour $X_2 < X < L$.

L'équation différentielle du mouvement pour chaque segment est:

$$EI \frac{\partial^4 W_i(X, T)}{\partial X^4} + \rho A \frac{\partial^2 W_i(X, T)}{\partial T^2} = 0 \quad X_{i-1} < X < X_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

En utilisant le même principe décrit précédemment (voir **chapitre 2**), la méthode de Rayleigh peut être étendue à fin d'obtenir les modes propres et les fréquences naturelles pour une poutre simplement appuyée contenant deux fissures alignées.

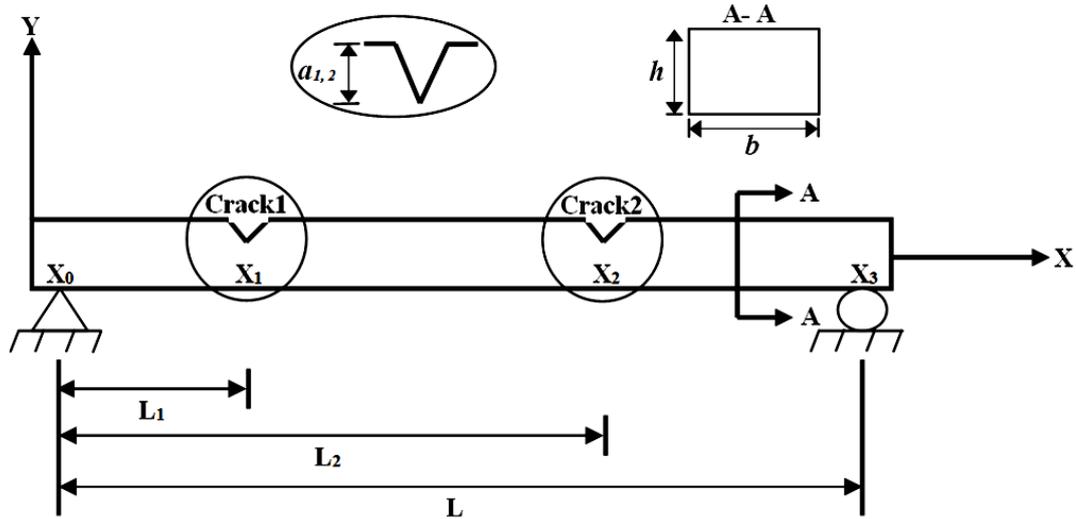


Figure 1: Modèle d'une poutre simplement appuyée avec deux fissures ouvertes.

L'expression générale pour les modes propres de la poutre fissurée est:

$$\varphi(X) = \begin{cases} \varphi_i(X) = \sin\left(\frac{n\pi X}{L}\right) + A_i X^3 + B_i X^2 + C_i X + D_i & ; 0 \leq X \leq L_i \\ \varphi_{i+1}(X) = \sin\left(\frac{n\pi X}{L}\right) + A_{i+1} X^3 + B_{i+1} X^2 + C_{i+1} X + D_{i+1} & ; L_i \leq X \leq L_{i+1} \\ \varphi_{i+2}(X) = \sin\left(\frac{n\pi X}{L}\right) + A_{i+2} X^3 + B_{i+2} X^2 + C_{i+2} X + D_{i+2} & ; L_{i+1} \leq X \leq L \end{cases} \quad (3.2)$$

A_i , B_i , C_i , et D_i sont des constantes inconnues qui doivent être déterminées à partir des conditions aux limites et les conditions de continuités des trois segments de la poutre ($i = 1, 2, 3$).

Les expressions de rotation $\theta(X)$, le moment de flexion $M(X)$ et l'effort tranchant $T(X)$ des trois segments de la poutre ($i = 1, 2, 3$) sont obtenues comme suit :

$$\theta(X) = \frac{\partial \varphi(X)}{\partial X} = \begin{cases} \theta_i(X) = \left(\frac{n\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi X}{L}\right) + 3 A_i X^2 + 2 B_i X + C_i \\ \theta_{i+1}(X) = \left(\frac{n\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi X}{L}\right) + 3 A_{i+1} X^2 + 2 B_{i+1} X + C_{i+1} \\ \theta_{i+2}(X) = \left(\frac{n\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi X}{L}\right) + 3 A_{i+2} X^2 + 2 B_{i+2} X + C_{i+2} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$M(X) = EI \frac{\partial^2 \varphi(X)}{\partial X^2} = \begin{cases} M_i(X) = -EI \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi X}{L}\right) + 6 A_i X + 2 B_i \\ M_{i+1}(X) = -EI \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi X}{L}\right) + 6 A_{i+1} X + 2 B_{i+1} \\ M_{i+2}(X) = -EI \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi X}{L}\right) + 6 A_{i+2} X + 2 B_{i+2} \end{cases} \quad (3.4)$$

$$T(X) = EI \frac{\partial^3 \varphi(X)}{\partial X^3} = \begin{cases} T_i(X) = -EI \left(\frac{n\pi}{L}\right)^3 \cos\left(\frac{n\pi X}{L}\right) + 6 A_i \\ T_{i+1}(X) = -EI \left(\frac{n\pi}{L}\right)^3 \cos\left(\frac{n\pi X}{L}\right) + 6 A_{i+1} \\ T_{i+2}(X) = -EI \left(\frac{n\pi}{L}\right)^3 \cos\left(\frac{n\pi X}{L}\right) + 6 A_{i+2} \end{cases} \quad (3.5)$$

En appliquant les conditions aux limites et les conditions de continuités, nous obtenons les équations suivantes :

$$X = 0 \quad \begin{cases} \varphi_i(0) = 0 \\ M_i(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \{B_i = D_i = 0\} \quad (3.6)$$

$$X = L_i \quad \begin{cases} \varphi_i(L_i) = \varphi_{i+1}(L_i) \\ \theta_i(L_i) = \theta_{i+1}(L_i) - c_1 M_{i+1}(L_i) \\ M_i(L_i) = M_{i+1}(L_i) \\ T_i(L_i) = T_{i+1}(L_i) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_i = A_{i+1} \\ B_i = B_{i+1} \end{cases} \quad (3.7)$$

$$X = L_{i+1} \quad \begin{cases} \varphi_{i+1}(L_{i+1}) = \varphi_{i+2}(L_{i+1}) \\ \theta_{i+1}(L_{i+1}) = \theta_{i+2}(L_{i+1}) - c_2 M_{i+2}(L_{i+1}) \\ M_{i+1}(L_{i+1}) = M_{i+2}(L_{i+1}) \\ T_{i+1}(L_{i+1}) = T_{i+2}(L_{i+1}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{i+1} = A_{i+2} \\ B_{i+1} = B_{i+2} \end{cases} \quad (3.8)$$

$$X = L \quad \begin{cases} \varphi_{i+1}(L) = 0 \\ M_{i+1}(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \{A_{i+2} = 0\} \quad (3.9)$$

Ce qui réduit le nombre à cinq équations :

$$\begin{cases} C_i L_i = C_{i+1} L_i + D_{i+1} \\ C_i = C_{i+1} - c_1 \left[-EI \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi L_i}{L}\right) \right] \\ C_{i+1} L_{i+1} + D_{i+1} = C_{i+2} L_{i+1} + D_{i+2} \\ C_{i+1} = C_{i+2} - c_2 \left[-EI \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi L_{i+1}}{L}\right) \right] \\ C_{i+2} L + D_{i+2} = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Après simplification on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{i+1} = -c_1 L_i \left[-EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{n\pi L_i}{L} \right) \right] \\ D_{i+2} = -c_1 L_i \left[-EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{n\pi L_i}{L} \right) \right] - c_2 L_{i+1} \left[-EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{n\pi L_{i+1}}{L} \right) \right] \\ C_{i+2} = c_1 \frac{L_i}{L} \left[-EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{n\pi L_i}{L} \right) \right] + c_2 \frac{L_{i+1}}{L} \left[-EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{n\pi L_{i+1}}{L} \right) \right] \\ C_{i+1} = c_1 \frac{L_i}{L} \left[-EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{n\pi L_i}{L} \right) \right] + c_2 \left[\frac{L_{i+1}}{L} - 1 \right] \left[-EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{n\pi L_{i+1}}{L} \right) \right] \\ C_i = c_1 \left[\frac{L_i}{L} - 1 \right] \left[-EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{n\pi L_i}{L} \right) \right] + c_2 \left[\frac{L_{i+1}}{L} - 1 \right] \left[-EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{n\pi L_{i+1}}{L} \right) \right] \end{array} \right. \quad (3.11)$$

En remplaçant l'équation (3.11), les équations (3.2)-(3.5) deviennent en forme adimensionnelle comme suit:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_i(x) = \sin(n\pi x) + \frac{(n\pi)^2}{\sqrt{2}} [\eta_1 \sqrt{\gamma_{n1}} (1 - l_i) + \eta_2 \sqrt{\gamma_{n2}} (1 - l_{i+1})] x & ; 0 \leq x \leq l_i \\ \varphi_{i+1}(x) = \sin(n\pi x) + \frac{(n\pi)^2}{\sqrt{2}} [\eta_1 \sqrt{\gamma_{n1}} l_i (1 - x) + \eta_2 \sqrt{\gamma_{n2}} (1 - l_{i+1}) x] & ; l_i \leq x \leq l_{i+1} \\ \varphi_{i+2}(x) = \sin(n\pi x) + \frac{(n\pi)^2}{\sqrt{2}} (1 - x) [\eta_1 \sqrt{\gamma_{n1}} l_i + \eta_2 \sqrt{\gamma_{n2}} l_{i+1}] & ; l_{i+1} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (3.12a)$$

$$\theta(x) = \begin{cases} \theta_i(x) = \left(\frac{n\pi}{L} \right) \cos(n\pi x) + \frac{(n\pi)^2}{\sqrt{2}L} [\eta_1 \sqrt{\gamma_{n1}} (1 - l_i) + \eta_2 \sqrt{\gamma_{n2}} (1 - l_{i+1})] \\ \theta_{i+1}(x) = \left(\frac{n\pi}{L} \right) \cos(n\pi x) + \frac{(n\pi)^2}{\sqrt{2}L} [\eta_2 \sqrt{\gamma_{n2}} (1 - l_{i+1}) - \eta_1 \sqrt{\gamma_{n1}} l_i] \\ \theta_{i+2}(x) = \left(\frac{n\pi}{L} \right) \cos(n\pi x) - \frac{(n\pi)^2}{\sqrt{2}L} [\eta_1 \sqrt{\gamma_{n1}} l_i + \eta_2 \sqrt{\gamma_{n2}} l_{i+1}] \end{cases} \quad (3.12b)$$

$$M(x) = \begin{cases} M_i(x) = -EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin(n\pi x) \\ M_{i+1}(x) = -EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin(n\pi x) \\ M_{i+2}(x) = -EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin(n\pi x) \end{cases} \quad (3.12c)$$

$$T(x) = \begin{cases} T_i(x) = -EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^3 \cos(n\pi x) \\ T_{i+1}(x) = -EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^3 \cos(n\pi x) \\ T_{i+2}(x) = -EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^3 \cos(n\pi x) \end{cases} \quad (3.12d)$$

La méthode de Rayleigh est utilisée, donc en égalisant les valeurs maximales de l'énergie potentielle U_{max} et de l'énergie cinétique T_{max} de la poutre fissurée, une expression analytique des fréquences naturelles peut être déterminée.

L'énergie potentielle maximale peut être évaluée comme:

$$\begin{aligned}
U_{max} &= \frac{EI}{2} \left[\int_0^{L_i} \left(\frac{M_i}{EI} \right)^2 dX + \int_{L_i}^{L_{i+1}} \left(\frac{M_{i+1}}{EI} \right)^2 dX + \int_{L_{i+1}}^L \left(\frac{M_{i+2}}{EI} \right)^2 dX \right] + \left[\frac{1}{2} (\theta_{i+1} - \theta_i) M \right]_{X=L_i} \\
&\quad + \left[\frac{1}{2} (\theta_{i+2} - \theta_{i+1}) M \right]_{X=L_{i+1}} \\
U_{max} &= \frac{EI (n\pi)^4}{4 L^3} [1 + \eta_1 \gamma_{n1} + \eta_2 \gamma_{n2}] \tag{3.13}
\end{aligned}$$

L'énergie cinétique maximale peut être calculée comme:

$$\begin{aligned}
T_{max} &= \frac{\rho A \omega_{cn}^2}{2} \left[\int_0^{L_i} (\varphi_i)^2 dX + \int_{L_i}^{L_{i+1}} (\varphi_{i+1})^2 dX + \int_{L_{i+1}}^L (\varphi_{i+2})^2 dX \right] \\
T_{max} &= \frac{\rho A \omega_{cn}^2}{2} \frac{L}{2} \left[1 + (\eta_1 \gamma_{n1}) \left[2 + \eta_1 \frac{(n\pi)^4}{3} (l_i(1-l_i))^2 \right] \right. \\
&\quad + (\eta_2 \gamma_{n2}) \left[2 + \eta_2 \frac{(n\pi)^4}{3} (l_{i+1}(1-l_{i+1}))^2 \right] \\
&\quad \left. + \frac{(n\pi)^4}{3} (\eta_1 \sqrt{\gamma_{n1}}) (\eta_2 \sqrt{\gamma_{n2}}) l_i(1-l_{i+1}) [l_{i+1}(2+l_{i+1}) - l_i^2] \right] \tag{3.14}
\end{aligned}$$

En égalisant les équations (3.13) et (3.14), la nième fréquence de la poutre simplement appuyée avec deux fissures est:

$$\omega_{cn}^2 = \omega_n^2 \left[\frac{1 + \eta_1 \gamma_{n1} + \eta_2 \gamma_{n2}}{1 + \eta_1 \gamma_{n1} \left[2 + \eta_1 \frac{(n\pi)^4}{3} (l_1(1-l_1))^2 \right] + \eta_2 \gamma_{n2} \left[2 + \eta_2 \frac{(n\pi)^4}{3} (l_2(1-l_2))^2 \right] + \frac{(n\pi)^4}{3} (\eta_1 \sqrt{\gamma_{n1}}) (\eta_2 \sqrt{\gamma_{n2}}) l_1(1-l_2) [l_2(2+l_2) - l_1^2]} \right] \tag{3.15}$$

Tel que :

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} ; \quad \eta_i = \left(\frac{EI c_i}{L} \right) ; \quad \gamma_{ni} = (2 \sin^2(n\pi l_i)) ; \quad l_i = \left(\frac{L_i}{L} \right) \tag{3.16}$$

Où ω_n représente la nième fréquence de la poutre non-fissurée (saine).

3.2. Exemples numériques:

Afin de valider le modèle présentée dans cette étude et de montrer son efficacité, les fréquences naturelles et les modes propres d'une poutre simplement appuyée avec deux fissures ouvertes sont étudiés.

La longueur de la poutre utilisée est de 0.4 m et avec une section transversale carrée de $0.01 \times 0.01 \text{ m}^2$. Les propriétés des matériaux sont: le module d'élasticité de la poutre $E = 2.16 \times 10^{11} \text{ Pa}$ et la densité $\rho = 7650 \text{ kg/m}^3$.

Le **tableau 1** montre une comparaison des deux premières fréquences naturelles de la poutre non fissurée obtenues à partir de la méthode de Rayleigh en utilisant l'équation (3.16) avec les résultats théoriques et expérimentaux de **Yoon et al. (2007)**.

Les résultats montrent que les deux méthodes donnent presque les mêmes fréquences exactes et concordent bien avec les mesures expérimentales.

Fréquence	MR	MT (Yoon et al. 2007)	ME (Yoon et al. 2007)	Erreur (%)	
				$\frac{ E - R }{E}$	$\frac{ E - T }{E}$
ω_1 [rad/s]	946.205	946.185	951.903	0.599	0.601
ω_2 [rad/s]	3784.820	3784.802	3785.619	0.021	0.022

Tableau 1: Comparaison des deux premières fréquences naturelles de la poutre non fissurée, obtenues par la méthode de Rayleigh (MR), la méthode théorique (MT) et la méthode expérimentale (ME) de Yoon et al. (2007).

Dans ce qui suit, une étude paramétrique de l'effet des deux fissures sur les fréquences naturelles et les modes propres d'une poutre simplement appuyée en fonction de la position et de la profondeur de chaque fissure. Un code de calcul est développé sous environnement MATLAB pour l'évaluation des deux premières fréquences naturelles et leurs modes propres respectivement.

Pour les cas de test étudiés, une comparaison des variations des fréquences naturelles entre la méthode de Rayleigh (MR), la méthode théorique (MT) et la méthode expérimentale (ME) est présentée dans les **tableaux 2 et 3** respectivement. La **figure 2** donne une représentation graphique des deux premières formes modales des cas présentées sur le **tableau 1 et 2** respectivement avec la méthode de Rayleigh.

Sur la base des résultats obtenus à partir des analyses théoriques et expérimentales pour une poutre simplement appuyée à deux fissures, les discussions suivantes peuvent être menées.

L'analyse de ces tableaux montre que, dans le **tableau 2**, le modèle théorique et les résultats expérimentaux pour la fréquence fondamentale extraits directement de la littérature (**Yoon et al. 2007**) sont en bon accord avec la méthode proposée. Le **tableau 3** montre également que la méthode proposée est en très bon accord avec le modèle théorique pour tous les cas étudiés (sauf pour le cas : $l_1 = 0.3, l_2 = 0.4, \xi_1 = 0.3$ et $\xi_2 = 0.5$ ou la différence entre les deux résultats est de 5.271% (voir **tableau 4**)).

l_2	ξ_1	l_1	ξ_2	ω_{c1} [rad/s]			Erreur (%)		ω_{c2} [rad/s]
				MR	MT (Yoon et al. 2007)	ME (Yoon et al. 2007)	$\frac{ E - R }{E}$	$\frac{ E - T }{E}$	
0.5	0.5	0.1	0.1	936.038	935.943	939.336	0.351	0.361	3648.956
			0.3	917.592	920.864	922.372	0.518	0.163	
			0.5	867.118	862.681	878.389	1.283	1.788	
		0.3	0.1	894.450	891.521	892.212	0.251	0.077	3202.939
			0.3	876.419	878.452	884.672	0.933	0.703	
			0.5	827.833	827.621	845.088	2.042	2.067	

Tableau 2: Comparaison de la première fréquence naturelle d'une poutre simplement appuyée avec deux fissures entre la méthode de Rayleigh (MR), la méthode théorique (MT) et la méthode expérimentale (ME) de Yoon et al. (2007).

C'est attendu que les fréquences propres de la poutre fissurée soient inférieures à celle de poutre non fissurée. C'est un fait dû à la réduction de la rigidité de la poutre causée par l'existence des fissures. Ceci est visible là où les fréquences propres sont un peu plus basses que celles du **tableau 1**. En outre, comme la fréquence naturelle est en fonction de la rigidité, une fissure plus profonde provoque une réduction plus importante de la fréquence propre.

Lorsque les positions des fissures sont constantes, les fréquences propres d'une poutre à deux fissures sont inversement proportionnelles à la profondeur de la fissure, en d'autre terme quand la profondeur augmente les fréquences diminuent et vis-versa.

En général, lorsque les positions des fissures sont constantes et que la profondeur des fissures augmente, les fréquences propres d'une poutre simplement appuyée à deux fissures sont diminuées. En particulier, lorsque la première position de la fissure existe au centre de la poutre, ou nous avons remarqués que les fréquences propres sont plus sensibles.

l_1	l_2	Méthode	ω_{c1} [rad/s]				
			$\xi_1 = 0.5$			$\xi_2 = 0.5$	
			$\xi_2 = 0.1$	$\xi_2 = 0.3$	$\xi_2 = 0.5$	$\xi_1 = 0.1$	$\xi_1 = 0.3$
0.1	0.2	MR	937.667	931.132	911.700	918.912	917.131
		MT (Yoon et al. 2007)	937.200	931.859	909.240	916.842	915.397
	0.5	MR	936.038	917.592	867.118	874.032	872.322
		MT (Yoon et al. 2007)	935.943	920.864	862.681	868.902	867.771
	0.7	MR	936.885	924.550	889.298	896.657	894.837
		MT (Yoon et al. 2007)	936.634	926.644	886.369	893.029	891.772
0.3	0.4	MR	894.718	878.582	834.386	878.738	867.145
		MT (Yoon et al. 2007)	891.647	879.709	832.648	874.431	915.397
	0.5	MR	894.450	876.419	827.833	872.683	860.924
		MT (Yoon et al. 2007)	891.521	878.452	827.621	868.085	867.771
	0.7	MR	895.218	882.692	847.525	895.218	882.692
		MT (Yoon et al. 2007)	892.087	883.604	848.921	892.087	883.604
0.5	0.6	MR	871.831	865.212	806.652	877.612	858.055
		MT (Yoon et al. 2007)	867.645	856.712	813.296	873.865	861.550
	0.7	MR	872.412	858.726	821.087	894.143	874.014
		MT (Yoon et al. 2007)	868.085	860.105	827.621	891.521	878.452
	0.8	MR	873.225	865.459	843.040	916.410	896.347
		MT (Yoon et al. 2007)	868.525	864.315	846.408	915.209	901.134

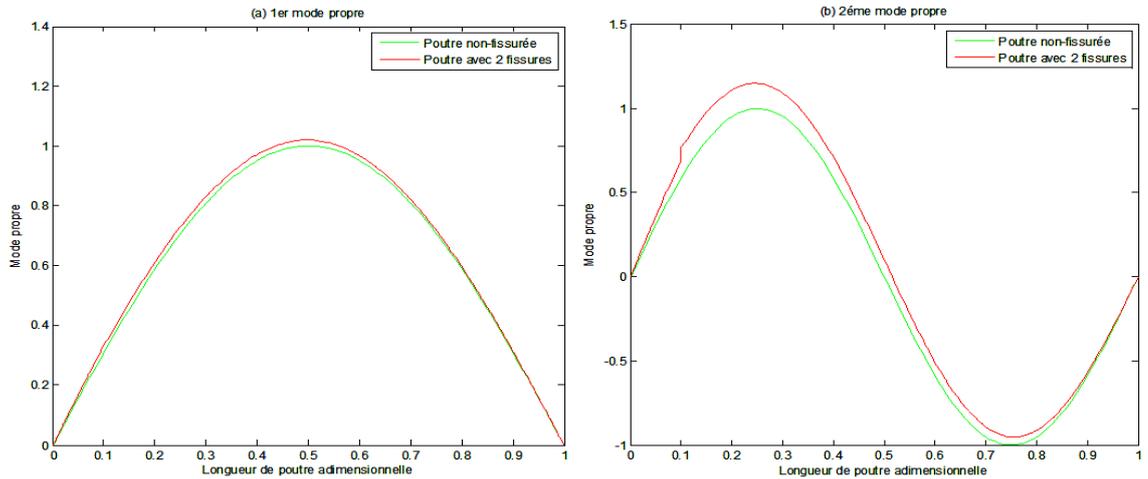
Tableau 3: Comparaison de la première fréquence naturelle d'une poutre simplement appuyée avec deux fissures entre la méthode de Rayleigh (MR) et la méthode théorique (MT) de Yoon et al. (2007).

l_1	l_2	Erreur (%)				
		$\xi_1 = 0.5$			$\xi_2 = 0.5$	
		$\xi_2 = 0.1$	$\xi_2 = 0.3$	$\xi_2 = 0.5$	$\xi_1 = 0.1$	$\xi_1 = 0.3$
0.1	0.2	0.050	0.078	0.271	0.226	0.189
	0.5	0.010	0.355	0.514	0.590	0.524
	0.7	0.027	0.226	0.330	0.406	0.344
0.3	0.4	0.344	0.128	0.209	0.493	5.271
	0.5	0.329	0.231	0.026	0.530	0.789
	0.7	0.351	0.103	0.164	0.351	0.103
0.5	0.6	0.482	0.992	0.817	0.429	0.406
	0.7	0.498	0.160	0.790	0.294	0.505
	0.8	0.541	0.132	0.398	0.131	0.531

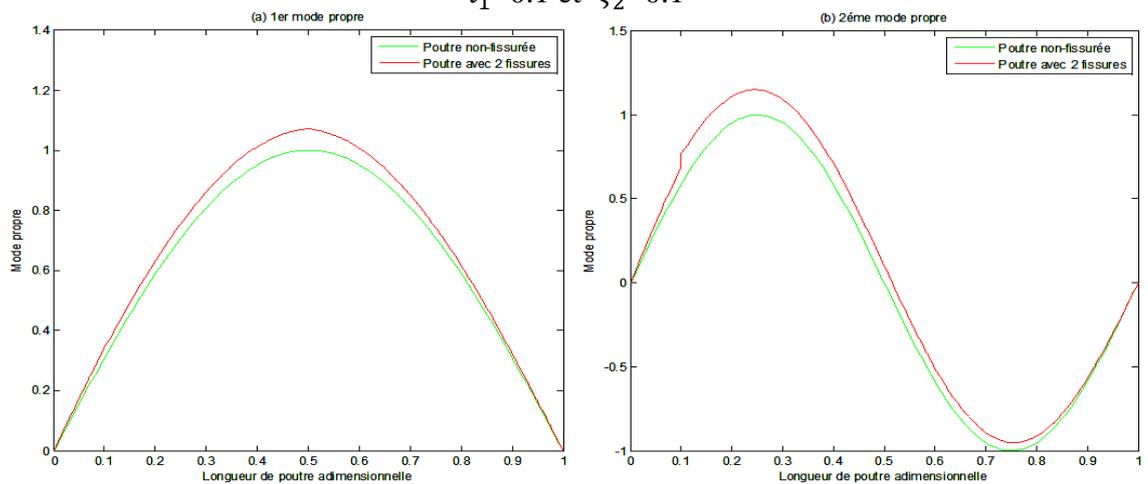
Tableau 4: Comparaison de l'erreur relative des premières fréquences naturelles (E.R.F.N) entre la méthode de Rayleigh (MR) et la méthode théorique (MT) de Yoon et al. (2007).

Il est observé à travers la **figure 2** que la présence des deux fissures dans les poutres cause des modifications raisonnables de la forme des modes en comparant ces derniers par les poutres à une fissure.

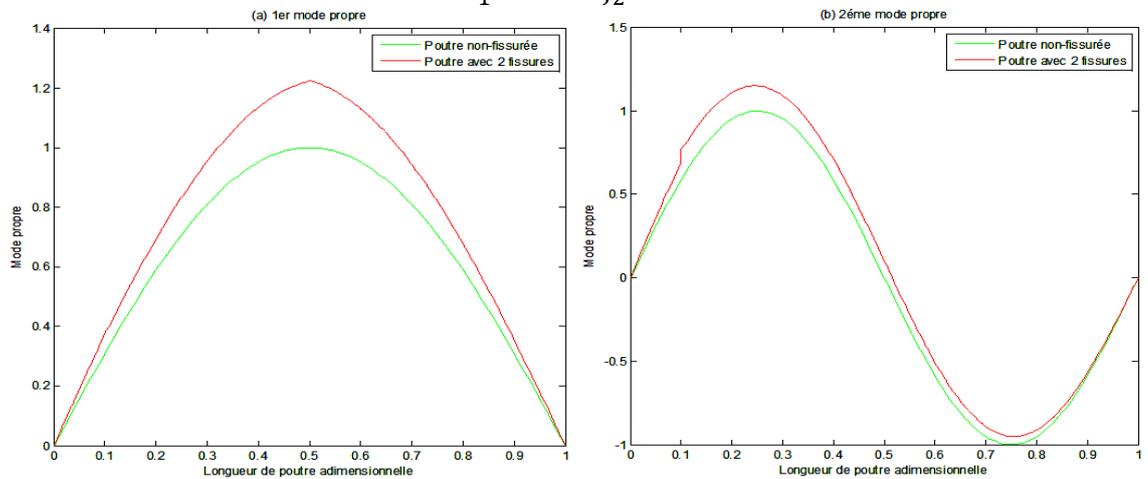
De plus, les formes du mode présentent des sensibilités différentes en ce qui concerne l'existence des fissures en fonction de leur emplacement. Les changements dans les formes du mode sont plus importants à la deuxième position de la fissure pour le premier mode, par contre pour le deuxième mode de vibration les changements sont en fonction directe avec la fissure la plus profonde, c.à.d. la plus grande fissure a l'effet le plus significatif, sauf pour le cas où la deuxième fissure est située au centre de la poutre, dans cette situation les formes du modes sont influencées directement par la première fissure.



$$l_1=0.1 \text{ et } \xi_2=0.1$$



$$l_1=0.1 \text{ et } \xi_2=0.3$$



$$l_1=0.1 \text{ et } \xi_2=0.5$$

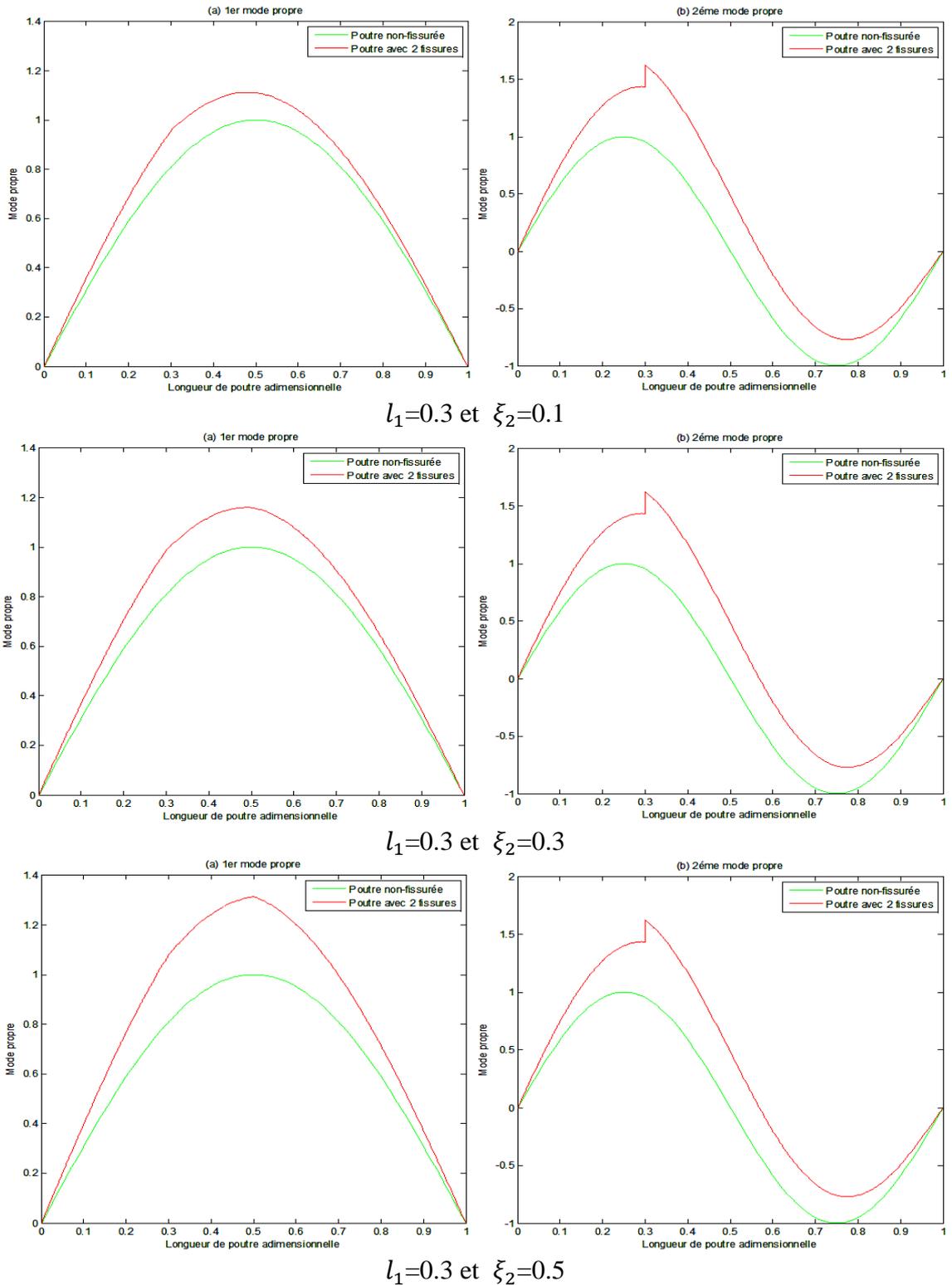


Figure 2: Comparaison des deux premiers modes de poutre non fissurée et fissurée en utilisant la méthode proposée pour les 6 cas : (a) 1er mode propre et (b) 2ème mode propre.

De plus, les formes du mode présentent des sensibilités différentes en ce qui concerne l'existence des fissures en fonction de leur emplacement.

En général, quelque soit le nombre des fissures sur la poutre et le niveau de profondeur, la courbe modifiée se retrouve toujours dans la déviation des modes fondamentaux entre la

poutre fissurée et non fissurée. Ces modifications et déformations de la forme du mode dues aux fissures peuvent être utilisées pour inspecter toutes les fissures situées du même côté. Le **tableau 5** représente les deuxièmes fréquences naturelles des différents cas étudiés précédemment.

On peut voir que les résultats obtenus sont fortement influencés par les différents paramètres des fissures à savoir la position et la profondeur.

Un point très importants peut être déduit du tableau est que la variation de la profondeur d'une fissure située au milieu de la poutre donne les mêmes résultats en ce qui concerne les fréquences naturelles et les modes propres, tant que l'autre fissure a des paramètres fixes (les mêmes profondeurs et emplacements).

l_1	l_2	Méthode	ω_{c2} [rad/s]				
			$\xi_1 = 0.5$			$\xi_2 = 0.5$	
			$\xi_2 = 0.1$	$\xi_2 = 0.3$	$\xi_2 = 0.5$	$\xi_1 = 0.1$	$\xi_1 = 0.3$
0.1	0.2	MR	3634.478	3517.091	3133.556	3330.619	3280.821
	0.5		3648.956			3781.323	3752.765
	0.7		3629.729	3470.674	2954.957	3194.486	3131.392
0.3	0.4		3181.454	3023.818	2612.958	3424.105	3186.029
	0.5		3202.939			3775.268	3674.433
	0.7		3166.264	2914.926	2370.572	3166.264	2914.926
0.5	0.6		3781.088	3767.984	3457.205	3457.205	
	0.7		3775.268	3674.433	3202.939	3202.939	
	0.8		3775.497	3689.816	3337.174	3337.174	

Tableau 5: Calcul des deuxièmes fréquences naturelles d'une poutre simplement appuyée contenant deux fissures avec la méthode de Rayleigh (MR).

La distance entre deux fissures dans une poutre affecte de manière significative le changement des fréquences. La diminution de la fréquence propre est largement dominée par la plus profonde des fissures sauf si elle est située près du nœud ou du "point d'inflexion" de la forme du mode.

Les **figures 3 et 4** présentent des histogrammes sur les changements des deux premières fréquences naturelles en fonction de la position de chaque fissure. Dans la **figure 3** le rapport de la profondeur des deux fissures est maintenue constant, tel que : $\xi_1 = \xi_2 = 0.3$, par contre dans la **figure 4** le rapport de la profondeur des deux fissures est maintenue différent, tel que : $\xi_1 = 0.1$ et $\xi_2 = 0.2$.

À partir de ces figures, on voit que pour le premier mode de vibration, les fréquences propres ont diminués progressivement à mesure que la deuxième fissure se déplace vers la droite jusqu'à atteindre ses valeurs minimales au milieu de la poutre et ont augmentés progressivement jusqu'à atteindre les valeurs maximales au voisinage de l'extrémité droite.

Pour le second mode, les fréquences propres diminuent progressivement à mesure que la seconde fissure se déplace vers la droite jusqu'à atteindre ses valeurs minimales au premier quart de la poutre et augmente progressivement jusqu'à atteindre les valeurs maximales au voisinage du nœud de la forme du mode.

De plus, pour la seconde moitié de la poutre, les fréquences décroissent et augmentent respectivement par un palier de 0,1 jusqu'au voisinage du support droit.

Aussi, Comme les fissures sont plus proches des points antinodaux dans le cas du second mode et que la seconde fissure est plus proche de l'antinode (centre) dans le cas du premier mode, les modifications des fréquences propres en présence de fissure sont très importantes.

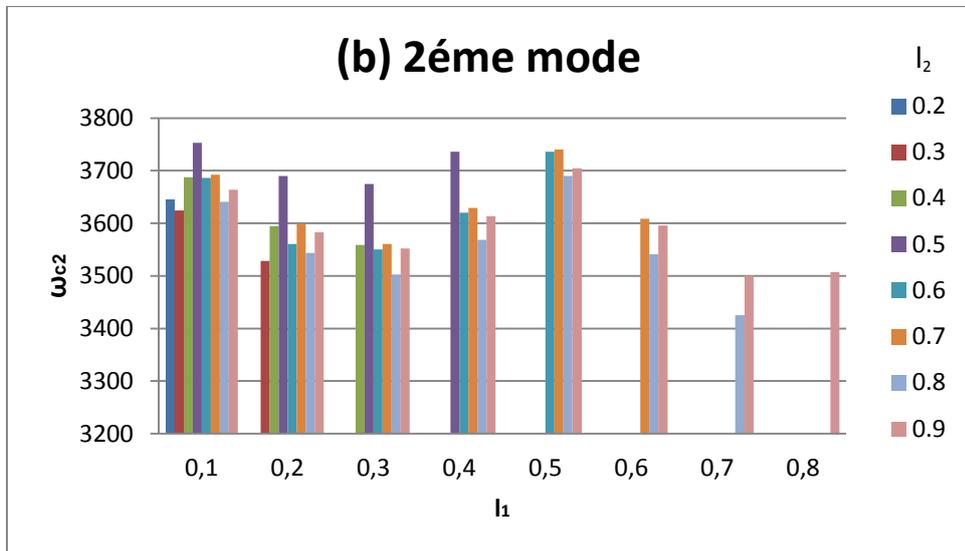
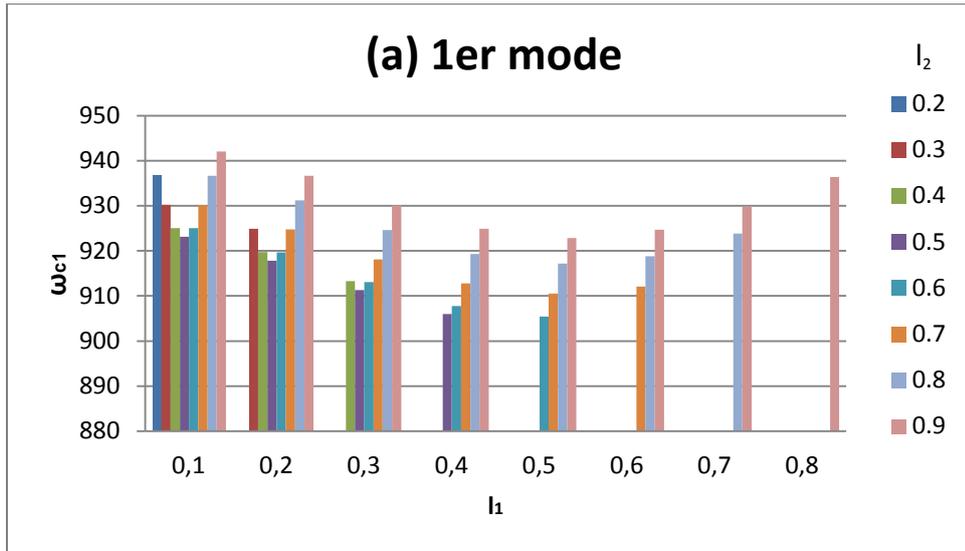
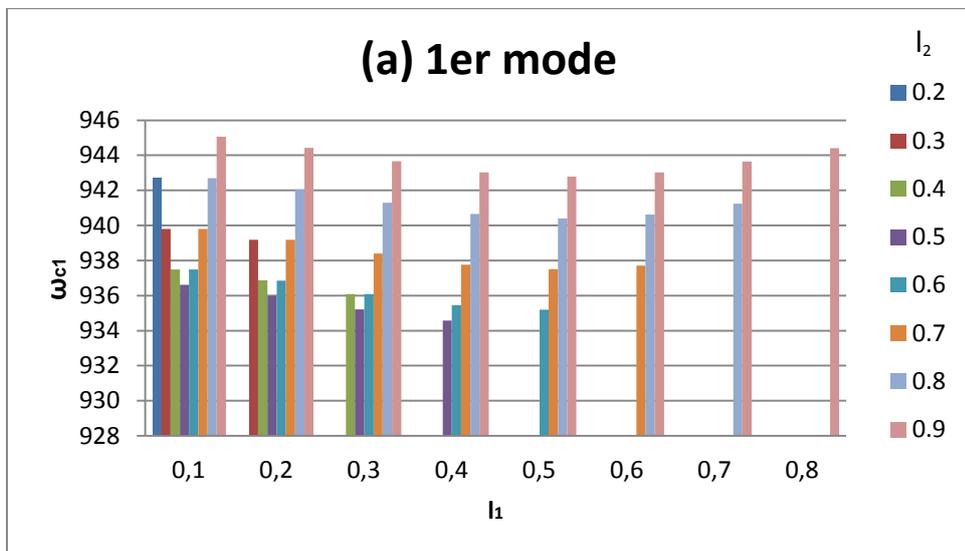


Figure 3: Les changements des deux premières fréquences naturelles en fonction de la position de chaque fissure, tel que : $\xi_1 = \xi_2 = 0.3$.



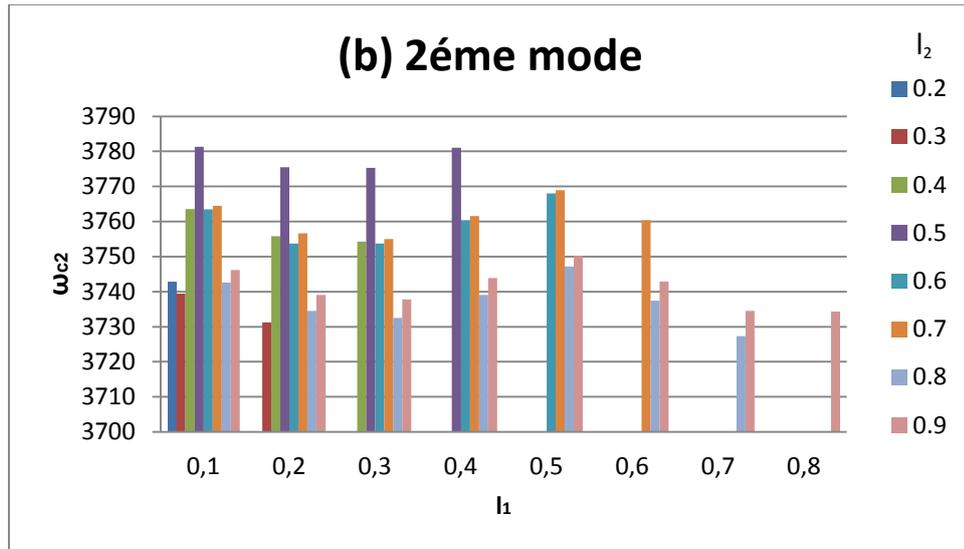


Figure 4: Les changements des deux premières fréquences naturelles en fonction de la position de chaque fissure, tel que : $\xi_1=0.1$ et $\xi_2=0.2$.

En général, plus les fissures apparaissent loin des nœuds de la forme du premier mode, plus les fréquences diminuent considérablement. Ce fait est dû à la torsion interne en flexion développée lors de la flexion. Alors que pour le deuxième mode, la fréquence atteint la minimalité et la maximalité à différents emplacements de la fissure.

Le comportement des deux fréquences est identique, même lorsque les deux fissures ont des profondeurs égales ou non. Par contre, on observe que les variations des fréquences propres montrent un changement plus important avec l'augmentation de la profondeur de la fissure.

3.3. Conclusion :

Dans ce chapitre, les influences de la profondeur et de la position de fissure ont été étudiées sur le comportement dynamique d'une poutre simplement appuyée en étendant la méthode de Rayleigh à deux fissures et en comparant les résultats avec la méthode numérique et les mesures expérimentales.

Une poutre simplement appuyée est modélisée par la théorie de poutre d'Euler-Bernoulli. L'équation du mouvement est obtenue en utilisant le principe de Hamilton. La poutre à deux fissures a été traitée comme trois segments non fissurés reliés par un ressort élastique en rotation au niveau de chaque section fissurée. La rigidité du ressort dépend de la profondeur de la fissure et de la géométrie de la section fissurée. Les principaux résultats de cette étude se résument comme suit:

1. Les positions des fissures les unes par rapport aux autres affectent de manière significative les modifications de la fréquence des vibrations naturelles dans le cas d'une profondeur égale des fissures. Toute réduction de la fréquence propre d'un mode est la plus grande si les fissures sont proches les unes des autres et plus proches du point antinodal de cette forme du mode; Lorsque la distance entre les fissures augmente, la réduction des fréquences propres de la poutre n'est pas significative, même avec des fissures profondes ;
2. Dans le cas des deux fissures de profondeurs différentes, la fissure la plus grande à l'effet le plus significatif sur la fréquence propre ;

3. Pour estimer la position et la profondeur de la fissure à partir d'une mesure de vibration, il convient de prendre en compte les informations relatives à la fréquence et à la forme du mode. Cependant, il faut interpréter les résultats avec soin et procéder à une analyse multimodale.

Des relations simples rendent la méthode proposée disponible et augmentent la vitesse d'adaptation de la méthode appliquée aux poutres ayant des propriétés différentes.

En conséquence, on peut en conclure que la méthodologie actuelle peut être proposée en raison de son coût peu élevé, de son caractère pratique, de sa robustesse, de l'indépendance de l'utilisateur et de la commodité de son automatisation.

CHAPITRE 4: DÉTECTION DES FISSURES DANS LES POUTRES

Introduction :

Le problème de base pour la détection structurelle des fissures consiste à vérifier leur naissance (existence), emplacement et profondeur en utilisant les données mesurées des réponses dynamiques structurelles (**Yan et al. 2007**).

Un système efficace de détection des fissures devrait être capable de :

- a) Détecter si un système (par exemple, une structure) est endommagé ou non, en comparant les paramètres modaux de la structure endommagée aux paramètres de la structure dans son état intact (saine), dans ce qui est appelé un diagnostic global ;
- b) Si c'est le cas, un modèle de la structure dans un état endommagé peut être utilisé pour localiser le lieu et le type du dommage (par exemple, une fissure) ;
- c) Fournir une estimation de l'importance ou de la gravité des dommages (la profondeur de la fissure);
- d) Une fois ces résultats sont accumulées, le système d'identification doit donner des informations sur le niveau de sécurité, prédire la durée de vie restante de la structure et de décider quelles actions doivent être lancées (par exemple, une restauration et/ou réparation).

La méthode devrait également être bien adaptée à l'automatisation, et devrait être indépendante du jugement humain (**Montalvao et al. 2006**).

4.1. L'idée de base de cette technologie :

Les paramètres modaux couramment mesurés (notamment les fréquences, les modes et les amortissements modaux) sont des fonctions des propriétés physiques de la structure (masse, amortissement et rigidité). Par conséquent, des changements dans les propriétés physiques, telles que la réduction de la rigidité résultant de l'apparition des fissures ou de relâchement d'une connexion, vont provoquer des changements détectables dans ces propriétés modales (**Farrar et Doebling, 1997 ; Doebling et al. 1998**).

4.2. Les motivations pour le développement de cette technologie :

Les facteurs de motivation pour le développement des méthodes de détections des fissures sont très liés entre eux, et peuvent être généralement classés selon quatre besoins fondamentales comme :

- **Besoin de sécurité :** La rupture des éléments structuraux à cause du vieillissement de l'infrastructure actuelle et les catastrophes naturelles (les séismes) peuvent être tragique en termes de pertes des vies humaines et des dégâts matériels, d'où la nécessité des essais, pour détecter, localiser et caractériser les fissures, afin d'assurer la sécurité des personnes et des structures ;
- **Besoin économique :** La préoccupation économique associée aux coûts très élevés soit : de mettre hors service les structures (tel que les entreprises industrielles), ou des renforcements et/ou réparations ;
- **Besoin technologique :** Les développements des matériaux, matériels et des nouveaux principes, normes et/ou hypothèses dans la conception basées sur la performance et la modernisation structurelle: les capteurs, les méthodes numériques

comme les éléments finis, les techniques expérimentales, les méthodes d'identification et les systèmes de traitement des données linéaires et/ou non linéaire;

- **Besoin sociale et politique :** Les ruptures catastrophiques des structures causant des pertes de vie, et qui ont bénéficiés d'une couverture suffisante à travers des articles de presse et /ou des émissions dans les médias, stimulent les préoccupations des professionnels et augmentent la conscience du public, d'où à son tour, attirent l'attention des politiciens et les autorités gouvernementales sur l'importance de ce sujet et, par conséquent, les chercheurs, les entreprises de construction et les organismes de réglementation sont influencés à fournir les ressources de financement nécessaires pour le développement et l'avancement de cette technologie.

4.3. Les techniques de détection des fissures :

Le premier article de recherche qui a proposé de détecter les dommages en utilisant des mesures de vibration a été écrit par **Lifshitz et Rotem (1969)**. Ils ont utilisés les changements dans les fréquences naturelles qui ont étaient liées à des changements dans les modules dynamiques pour détecter les dommages dans les élastomères chargés en particules.

Les techniques d'évaluation des fissures peuvent être divisées en trois catégories (**Sabnavis et al. 2004**): **les essais modaux, les méthodes traditionnelles (basées sur les vibrations) et les méthodes non-traditionnelles (modernes)**.

4.3.1. Les essais modaux sont probablement les méthodes les plus populaires pour la surveillance de l'intégrité structurelle, dans lesquels les changements des paramètres modaux, tels que les fréquences naturelles, les modes propres et les rapports d'amortissement mesurés à partir de la réponse structurelle sont utilisés pour la détection des fissures.

Dans ce qui suit, les diverses méthodes d'excitation qui ont été utilisées pendant les essais dynamiques des structures sont discutées avec une bref description des avantages et des inconvénients (limitations) liées à chaque méthodes.

4.3.1.1. Les méthodes d'excitation :

Les méthodes d'excitation sont classées dans les catégories générales des méthodes d'excitation forcées (entrée-sortie) et des méthodes d'excitation ambiantes (sortie seule).

A. Les méthodes d'excitation forcées (Entrées-sorties) :

Traditionnellement, l'identification modale nécessite la mesure de la réponse structurelle (sortie) à partir d'un système des forces connues et contrôlées (entrée) (**Federici et al. 2012**). Plusieurs structures de génie civil, comme les ponts, les bâtiments ou les barrages, ont été soumises à des tests de vibrations forcées. Au cours de ces essais dynamiques, la structure est excitée avec une vibration en régime permanent induite par différents dispositifs (**Figure 1 et 2**) ayant un contrôle précis de la vitesse et utilisant une grande variété des techniques de forçage (y compris divers types d'agitateurs, l'étape de relaxation, ainsi que diverses méthodes d'impact mesurée comme la chute du poids) (**Farrar et al. 1999**).

Il y a une grande variété des méthodes d'identification modale d'entrées-sorties dont l'application repose soit sur des estimations d'un ensemble des fonctions de réponse en fréquence (FRF) qui sont dérivés dans le domaine fréquentiel ou sur des fonctions

correspondantes à une réponse d'impulsion (FRI) qui sont dérivées dans le domaine temporel (Maia et Silva, 2001 ; Peeters et Ventura, 2003). Les FRI peuvent être obtenues à partir des FRF par une transformée de Fourier inverse.

Ces méthodes sont généralement classées selon les critères suivants:

- Le domaine d'application (temporel ou fréquentiel) ;
- Le type des propriétés dynamiques à identifiées (direct ou indirecte) ;
- Le nombre des modes analysées (un seul degré de liberté ou des degrés de liberté multiples) ;
- Le nombre d'emplacements d'entrée et de sortie (entrée unique-sortie unique, entrée unique-sortie multiple, entrée multiple-sortie multiple, entrée multiple-sortie unique).



Figure 1: (a) Marteau d'impulsion; (b) Vibreur à masses excentriques; (c) Excitateur électrodynamique; d) Dispositif d'excitation d'impulsion pour les ponts (Cunha et Caetano, 2006). **Figure 2:** Agitateurs servo-hydraulique pour exciter: (a) Ponts verticalement (b) Agitateur électro-hydraulique et (c) Barrages latéralement (Cunha et Caetano, 2006).

Les principaux problèmes associés à des essais de vibrations forcées sur des structures à grandes échelles sont :

- La difficulté à construire des systèmes d'excitation appropriés qui peuvent générer des forces d'excitation suffisantes aux basses fréquences, en particulier pour les ponts minces de longue portée (Salawu et Williams, 1995).
- Les tests à grande échelle pourraient être coûteux et peu pratique (la nécessité d'un équipement approprié extrêmement lourd) ;
- La difficulté des mesures en cours d'exécution et lors de service normal de la structure d'où la nécessité de mettre hors service la structure pendant les essais.

Cependant, l'identification du système d'entrées-sorties est fortement favorisée par rapport aux méthodes de sortie seule si l'excitation (à savoir, l'entrée du système) peut être mesurée avec précision (Kim et Lynch, 2012).

B. Les méthodes d'excitation ambiantes (Sortie seule) :

La réalisation des tests d'identification modale de sortie seule est devenue une alternative d'une grande importance dans le domaine du génie civil. Dans les essais de vibration ambiante, l'excitation d'entrée n'est pas contrôlée, elle est induite par le vent, le mouvement des ondes (vagues), la circulation des véhicules ou des piétons et l'excitation sismique. Le développement de cette méthode est probablement dû à des aspects économiques (l'élimination des dispositifs d'excitation) et la facilité de mesurer la réponse vibratoire lors de la mise en service de la structure ou pendant leurs conditions normales de fonctionnement avec une identification précise des propriétés modales.

Les méthodes d'identification modale de sortie uniquement supposent que l'excitation d'entrée est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle. Cela signifie que l'excitation réelle peut être exprimée par la sortie d'un filtre approprié excité par une entrée de bruit blanc (Cunha et Caetano, 2006).

Les développements technologiques (par exemple : les accéléromètres modernes d'équilibre de force (Figure 3(a)) et l'utilisation des réseaux de capteurs sans fil pour l'analyse de la sortie seule (Gattulli, 2016)) et la disponibilité des systèmes d'acquisition et de traitement des données, spécialement conçus pour les essais de vibrations ambiantes (Figure 3(b)), ont grandement contribué au succès des essais de vibrations ambiantes.

Bien que l'identification par l'excitation de sortie seule soit un choix populaire parmi les ingénieurs civils, l'approche a un certain nombre de limitations notables :

- Le type d'entrée est souvent non stationnaire (Farrar et al. 1999);
- L'évaluation mathématique de la précision des modèles des systèmes résultant des méthodes de sortie seule est difficile à réaliser en raison de l'absence d'une entrée mesurée (Kim et Lynch, 2012).

Un objectif commun des deux méthodes d'excitation mentionnées ci-dessus est d'explorer les paramètres modaux (fréquences naturelles, les modes propres et les valeurs d'amortissement modal). La connaissance de ces caractéristiques est essentielle pour comprendre et interpréter la réponse structurelle et peut être utilisée pour caractériser et surveiller la performance de la structure et effectuer un certain ajustement entre les fonctions mesurées et théoriques afin de valider des modèles analytiques et/ou numériques.

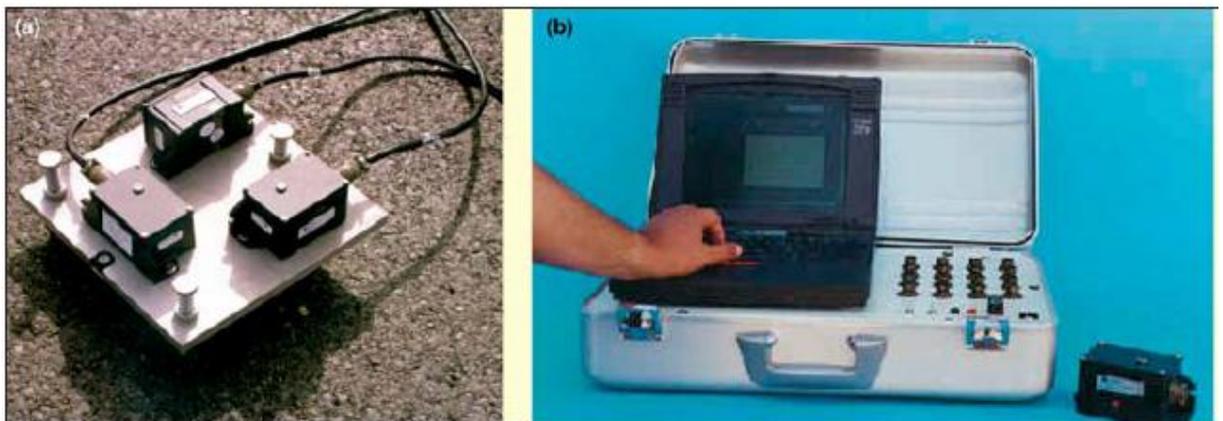


Figure 3: (a) Accéléromètres d'équilibre de force; (b) Acquisition des données à canaux multiples et un système de traitement pour les essais de vibration ambiante (Cunha et Caetano, 2006).

Malgré que la méthode basée sur les essais modaux est la plus courantes, **Bakhtiari-Nejad et al. (2005)** ont mentionnés plusieurs limites à cette approche :

- Tout d'abord, les méthodes d'identification dynamiques nécessitent l'utilisation de la masse, la rigidité et les propriétés d'amortissement ;
- Deuxièmement, avec des méthodes dynamiques, un contrôle adéquat de l'excitation (y compris l'élimination des excitations parasites) est essentiel pour une mesure précise des modes propres, et cela peut être difficile à réaliser dans le domaine ;
- L'influence des conditions aux limites a également un effet significatif sur les fréquences de vibration mesurées et les modes propres.

4.3.2. Les méthodes traditionnelles (basées sur les vibrations):

Après l'obtention, les paramètres modaux ou leurs dérivés peuvent être utilisés comme des caractéristiques sensibles permettant d'extraire des informations sur les fissures structurelles. Les méthodes de types traditionnels se réfèrent à la méthode de détection des fissures structurels en fonction des vibrations, utilisant seulement les caractéristiques mécaniques naturelles des structures, telles que les fréquences naturelles, l'amortissement modal, l'énergie de déformation modale ou des formes modales, etc.

Une partie importante de la littérature publiée sur la détection des fissures se concentre sur la méthode basée sur les vibrations (MBV). Cette dernière peut encore être subdivisée en deux techniques :

1. Les techniques basées sur **un modèle paramétriques / un modèle en éléments finis mise à jour**: supposent généralement qu'un modèle analytique ou numérique détaillé représentant le système est connu en calibrant ou mise à jour des paramètres qui sont principalement liés à des grandeurs physiques telles que : la masse, l'amortissement et la rigidité, avant la collecte des données pour détecter les paramètres des fissures. Dans ce domaine de recherche, l'objectif est de réduire les écarts qui se posent lorsqu'on compare les prédictions du modèle avec des données d'essais (**Schuëller et Jensen, 2008**).
2. Les techniques basées sur **la réponse / un modèle non paramétrique**: ne nécessitent pas la connaissance des paramètres structurels pour choisir le scénario des dommages qui correspond le mieux aux réponses expérimentales. En d'autres termes, les indicateurs des fissures qui sont sensibles aux changements structurels peuvent être identifiés à partir des données mesurées sans la nécessité d'un modèle analytique de la structure.

4.3.2.1. Méthodes basées sur la fréquence naturelle :

Cawley et Adams (1979) ont été parmi les premiers à utiliser un ensemble incomplet des fréquences naturelles pour identifier l'emplacement des dommages. Une discussion détaillée sur l'utilisation de la fréquence naturelle en tant que paramètre de diagnostic dans la procédure d'évaluation des structures est documentée par **Salawu (1997)**.

Bien que ces méthodes qui utilisent la variation des fréquences naturelles comme une caractéristique fondamentale pour l'identification des paramètres des fissures aient été largement étudiées, elles ont quelques limites qui doivent être explorés.

Les avantages :

- Les fréquences naturelles peuvent être facilement mesurées en utilisant un ou quelques capteurs à partir de quelques points accessibles sur la structure ;
- Les fréquences naturelles sont indépendantes de la position mesurée ;
- Les fréquences naturelles sont généralement moins contaminées (influencées) par le bruit expérimental ;
- La précision de mesure des fréquences peut généralement assurer l'existence des fissures, en comparant par celle des modes et des amortissements modaux.

Les inconvénients (Limitations) :

- La majorité des techniques sont basées sur un modèle de la physique linéaire, ce qui réduit significativement la précision de ces méthodes (la modélisation des structures de type poutre reposent sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli et la modélisation de la fissure comme un ressort de rotation) ;

Explication : Le comportement non linéaire de certaines structures a une très grande influence sur l'efficacité de ces méthodes, aussi, il est bien connu que la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli surestime les fréquences naturelles dans les poutres courtes et les modes de flexion haute fréquence. Il est également connu que la modélisation de la fissure comme un ressort de rotation sur la base de la mécanique de la rupture va perdre sa crédibilité dans les modes de haute fréquence ou des cas des fissures profondes, c.-à-d. ils ne disposent pas de fidélité nécessaire pour représenter avec précision les conditions aux limites et la connectivité des composants structurels (**Worden et al. 2008**).

- Les changements des fréquences provoquées par les fissures sont généralement très petits et peuvent être modifiés (masqués / contaminés) par les conditions environnementales et opérationnelles (les charges, le trafic, les conditions aux limites, etc.). Pour cette raison, le succès des méthodes d'identification des fissures en utilisant la fréquence est vérifié généralement aux petites structures à l'échelle de laboratoire contrôlé au lieu des structures réelles dans leur environnement d'exploitation ;

Explication : Il est reconnu que les fréquences mesurées in situ peuvent être variées de 5-10%, à cause des vibrations ambiantes et les effets environnementaux (pollution sonores, pluie, températures, vent, humidité, etc.), ce qui nécessite de modifier la fréquence naturelle d'environ 5% pour détecter des fissures en toute confiance (**Salawu, 1997**). L'étude de **Farrar et al. (1994)** sur le pont I-40 sur le Rio Grande à Albuquerque dans l'état du Nouveau-Mexique aux Etats-Unis, où ils ont observés une augmentation de la fréquence fondamentale, et ont conclu que la température joue un rôle majeur dans les propriétés dynamiques du pont.

- Les méthodes inverses pour l'identification des fissures sont souvent mal posées, cela signifie qu'il y a un nombre insuffisant des fréquences dans les données mesurées avec plusieurs changements (des conditions différentes ou à des moments différents), par conséquent, elles ne produisent pas nécessairement des solutions uniques de l'emplacement et la profondeur des fissures ;

Explication : Tout d'abord, dans le cas des structures symétriques, les fissures avec la même profondeur produisent des changements de fréquences identiques. En outre, les fissures avec des dimensions (profondeurs) variables dans différentes positions spatiales peuvent

également provoquer les mêmes changements de fréquences naturelles mesurées. Ce problème est encore plus grave pour la détection des fissures multiples.

- Les fréquences sont des propriétés globales de la structure, et contrairement aux fissures à grandes profondeurs, elles ont une sensibilité relativement faible aux petites fissures initiales. Ce qui ne permet pas généralement de fournir des résultats fiables sur les changements structurels et rendre l'identification des fissures très difficiles;
- Un autre problème dans l'identification des fissures par les méthodes basées sur la fréquence est la différence entre la résistance et la rigidité ;

Explication : En effet, dans les structures en béton armé (ponts), ou la plupart de la rigidité est assurée par le béton qui n'a pas de résistance en traction, et même avec la détérioration des armatures en acier, **Friswell et Penny (1997)** ont montré qu'il n'y a aucun changement considérable dans la fréquence naturelle.

- Certaines formes des dommages ne peuvent pas affecter la fréquence à un faible niveau du mode de vibration.

Explication : Par exemple, la perte d'un boulon dans le cadre de plusieurs boulons peut sembler être fixée parce que le frottement fournie par les boulons restants peut être suffisante pour maintenir les membres à la connexion de tourner à de faibles niveaux de forces (**Peter et al. 2003**).

- Cette méthode nécessite une connaissance préalable des propriétés géométriques et physiques de la structure en bon état, ce qui est n'est pas possible dans des nombreux cas.

Les solutions proposées :

- L'application de ces modèles juste pour les structures minces avec des fissures peu importantes, ainsi, avoir les outils nécessaires pour augmenter le nombre des modes de vibration adapté pour la détection des fissures, la concentration sur les la théorie des poutres de Timoshenko et l'analyse non-linéaire dans le cas des ponts par exemple ;
- L'utilisation d'un modèle de détection des fissures basé sur une technique de reconnaissance des modèles statistiques, pour faire la différence entre les changements induits par des fissures et les changements induits par l'environnement et les conditions opérationnelles ;
- Le problème de la non-unicité peut être évité d'une manière que le nombre de fréquences modales mesurées doit être proche du nombre des paramètres requis pour caractériser les fissures ;
- Les mesures doivent être réalisées avec précision en maîtrisant parfaitement les conditions expérimentales.

4.3.2.2. Méthodes basées sur la forme du mode de vibration :

Selon **Doebling et al. (1996)**, West en 1984 présente ce qui est peut-être la première utilisation systématique des informations de forme du mode pour identifier l'emplacement des dommages structuraux sans l'utilisation d'un modèle en éléments finis antérieur. L'auteur utilise les critères d'assurances modales (CAM) pour déterminer le niveau de corrélation

entre les modes de l'essai d'un volet, un corps de la navette spatiale en bon état et les modes de l'essai du volet après qu'il a été exposé à la charge acoustique.

Cette méthode adoptée par **Chen et Garba (1988)**, présente des informations spatiales sur les fissures, utilise deux techniques pour comparer le changement des formes du mode ou des courbes de forme du mode à partir des structures saines et fissurées : le critère d'assurance modal (CAM) pour étudier les différences globales dans les formes du mode et le critère d'assurance modal de coordonnées (CAMC) pour indiquer la corrélation entre les formes du mode à un point de mesure sélectionné d'une structure (**pandey et al. 1991**). Les données peuvent être obtenues à partir soit d'essais de vibration sur la structure saine ou un modèle numérique précis de la structure saine, ou à partir d'un modèle d'éléments finis lorsque les données expérimentales sur la structure saine ne sont pas disponibles.

Les avantages :

- Les formes du mode de vibration élevées sont plus sensibles aux changements des fissures locaux par rapport aux fréquences;

Explication : Par comparaison visuelle des formes du mode avant et après l'endommagement, les informations locales sur les fissures permettent une utilisation directe, surtout dans la détection des fissures multiples. Par exemple, en utilisant la méthode de la courbure et le changement graphique de forme du mode de vibration on peut déterminer et confirmer l'emplacement structurel de fissures.

- Les formes du mode ont une grande valeur pour coupler les modes analytiques et expérimentaux, et aussi pour les structures «symétriques» ;
- Les formes du mode de vibration sont moins sensibles aux effets de l'environnement tels que la température, par rapport à l'utilisation des fréquences naturelles ;

Les inconvénients :

- La mesure des formes du mode n'est pas une question triviale, et l'erreur de mesure du mode de vibration est nettement plus grande que celle de la fréquence naturelle ;

Explication : Si les formes du mode peuvent être mesurées, alors pourquoi ne pas mesurer la déformation, ce qui est probablement plus facile à mesurer, et elles peuvent être utilisées pour déterminer les fissures aussi bien (**Peter et al. 2003**). Aussi, la résolution typique pour les fréquences naturelles d'une structure mécanique légèrement amorties sont de 0,1% tandis que les erreurs de forme du mode typique est de 10% ou plus (**Friswell et Penny, 1997**).

- Les modes de vibration inférieurs mesurés sont souvent insensibles à des fissures, surtout dans certaines zones des structures, par exemple : aucun changement détectable dans la forme du mode n'a été observé, quand il y a des fissures à l'emplacement d'un nœud (**Gunes et Gunes, 2011**);
- les formes du mode mesurés sont plus sensibles à la contamination par des bruits environnementaux provenant des différentes sources telles que les charges ambiantes que les fréquences naturelles, ce qui peut être un inconvénient majeur qui limite ces applications pratiques dans des structures in situ.

Les solutions proposées :

- La nécessité d'une série de capteurs suffisamment dense et bien distribués pour des mesures à de nombreux endroits sur la structure pour caractériser avec précision les formes du mode et de fournir une résolution suffisante pour déterminer l'emplacement des fissures, (par exemple, un point d'excitation unique et de nombreux capteurs ou un excitateur avec un ou plusieurs capteurs fixes (**Carden et Fanning, 2004**));
- Ces méthodes nécessitent une utilisation d'une mise à l'échelle correcte et une précision dans les données avec un grand rapport de signal au bruit et même si elles sont bien vérifiées avec des données simulées ;
- La distinction entre les effets du bruit et celles des fissures est un facteur déterminant sur la précision de la procédure de détection qui doit être pris en compte.

4.3.2.3. Méthodes basées sur l'énergie de déformation modale :

Le changement de l'énergie de déformation stockée dans un mode de vibration particulier avant et après l'endommagement, peut également être considéré comme un indicateur potentiel sur l'existence et l'emplacement des fissures.

Les avantages :

- Contrairement à d'autres méthodes, cette technique ne nécessite aucune information préalable sur les matrices de rigidités et de masses complètes de la structure. Elle utilise cependant que les formes du mode et des matrices de rigidité élémentaires (**shi et al. 1998**);
- La méthode de l'énergie de déformation modale permet de produire des prévisions plus précises sur l'emplacement des fissures que la méthode basée sur la fréquence, dans des zones avec des réductions aussi faibles que 10% de la rigidité en utilisant relativement peu de modes (**cornwell et al. 1999**).
- Cette méthode est facilement capable de détecter des zones de fissures uniques ou multiples dans la structure (**Alvandi et Cremona, 2006**);
- La méthode basée sur l'énergie de déformation modale peut également être considérée comme un cas particulier de la méthode basée sur la courbure en forme du mode, est effectivement applicable pour la détection des fissures dans des structures de type poutre ou de type plaque (**Fan et Qiao, 2011 ; Das et al. 2016**).

Les inconvénients :

- Toutefois, si les fissures sont distribuées dans toute la structure, la déformation ne peut pas être un bon indicateur, sauf si un ensemble des données de mesure de référence de la structure en bon état sont disponibles (**Peter et al. 2003**).
- Il a été constaté que des mauvaises indications des fissures (fausses-positives et fausses négatifs) ont été fortement influencées par la qualité et la quantité des données modales recueillies (**Alvandi et Cremona, 2006**).

- La plus grande erreur impliquée dans cette approche est que la rigidité en torsion entre les parties n'est pas conservée (**Carden et Fanning, 2004**);
- Semblable à des méthodes mentionnées ci-dessus, la présence du bruit peut avoir un effet significatif sur la détection des fissures à faibles profondeurs.

Les solutions proposées :

- La mesure de l'énergie de déformation modale de plusieurs modes ou l'utilisation des modèles en éléments finis efficace avec des algorithmes pour la localisation des fissures doivent être prise en compte (**Das et al. 2016**).

4.3.2.4. Méthode basé sur la variation de la flexibilité ou la rigidité structurelle :

La matrice de flexibilité dynamique est une fonction de transfert, défini comme étant l'inverse de la matrice de rigidité statique. Ainsi, chaque colonne de la matrice de flexibilité représente le modèle de déplacement de la structure associée à une force unitaire appliquée aux degrés de liberté associée (**Montalvao et al. 2006**).

Les variations des indices de la matrice de flexibilité ont été utilisées comme des éléments sensibles aux fissures. La matrice de flexibilité mesurée est estimée à partir de la masse normalisée mesurée des formes du mode, et la matrice des valeurs propres. Les fissures sont détectées par la comparaison des matrices de flexibilité de la structure saine (qui peuvent être obtenues en utilisant un modèle en élément fini) et fissurée.

Les avantages :

- La matrice de flexibilité peut être évaluée facilement et avec précision à partir de quelques modes de basse fréquence de vibration de la structure, ce qui peut être facilement mesurée (**Pandey et Biswas, 1994**).
- En raison de la relation inverse du carré des fréquences modales, la matrice de flexibilité dynamique est très sensible aux changements dans les modes d'ordre inférieur, alors que la matrice de rigidité est plus sensible aux modes d'ordre supérieur ;
- Elle est moins sensible au bruit par rapport aux formes du mode (**Fan et Qiao, 2011**).

Les inconvénients :

- Toutefois, si les fissures sont très faibles, cette méthode ne peut pas bien fonctionner (**Yan et al. 2007**);
- La formulation de la matrice de flexibilité est approximative car dans la plupart des cas, seuls les quelques premiers modes de la structure (généralement les modes de fréquence la plus basse) sont mesurés ;
- En raison de bruit, cette méthode est fiable que lorsque les changements de fréquences naturelles mesurées et les changements des vecteurs modaux dépassent la magnitude des erreurs de mesure (**Montalvao et al. 2006**).

En général, ces méthodes (basées sur les vibrations) peuvent présenter quelques inconvénients (**Yan et al. 2007 ; Federici et al. 2012**):

- Ce genre de méthode nécessite généralement l'analyse modale expérimentale ou la fonction du transfert mesurer, ce qui n'est pas très pratique pour la détection en ligne (automatiques) des structures en service, parce que ces mesures expérimentales ont souvent besoin d'instrument ou multiple opération manuelle;
- En utilisant la méthode du type traditionnel pour détecter l'emplacement des fissures structuraux, il est difficile d'établir une méthode universelle pour les différentes structures, et il est plus dépendant des propriétés des structures individuelles à détecter;
- Les méthodes de type traditionnel ne sont pas efficaces aux petites fissures initiaux qui pourraient se produire au début du processus d'endommagement dans les structures ;
- Enfin, les variations des paramètres modaux peuvent être dues à la fois par la présence des fissures, que ce soit à la suite des changements dans les conditions environnementales et opérationnelles.

4.3.3. Les méthodes modernes :

De nombreuses nouvelles technologies et des résultats ont été développés et appliqués au cours des dernières années, en utilisant les réponses dynamiques des structures en service mesurées en ligne, par des méthodes de détection et d'identification des fissures structurels à base de vibrations de type moderne.

Ces méthodes sont également appelées les méthodes de diagnostic intelligents des fissures, prennent principalement des techniques de traitement du signal moderne et l'intelligence artificielle (IA) comme des outils d'analyse avec une bonne universalité et moins de dépendance sur la forme structurelle. Parmi les méthodes de type moderne : l'analyse en ondelettes (AE), l'algorithme génétique (AG) et les réseaux de neurones artificiels (RNA).

4.3.3.1. L'analyse en ondelettes (AE):

En génie civil, **Newland (1993)** a été l'un des premiers chercheurs qui ont proposés d'appliquer l'approche par ondelettes pour analyser les vibrations des structures.

L'idée de base est que tout signal dynamique d'une réponse structurelle peut être décomposé en une série des fonctions de base locales appelées ondelettes. Toute caractéristique locale particulière d'un signal peut être analysée en fonction des caractéristiques d'échelle et de la translation d'ondelettes.

Contrairement à la transformée de Fourier classique, qui est adaptée pour les signaux de vibration à l'état stationnaire et décompose le signal en sinus et cosinus de longueur infinie, où les informations du domaine temporel devient presque invisible. La transformée en ondelettes est très appropriée pour l'analyse multi-échelle, de telle sorte que les caractéristiques temps-fréquence et les changements dans les propriétés d'un signal non stationnaire qui ne sont pas clairement vues dans les données d'origine, peuvent être décrites avec précision.

L'analyse en ondelettes peut être appliquée dans le domaine spatial, temporel et fréquentiel (**Medda et al. 2006**) pour la détection des fissures structurelles, par exemple : la détection des singularités dans un signal, la séparation signal-bruit, l'analyse de la bande de fréquence, etc.

La sélection d'un type approprié d'une ondelette est essentielle pour une détection efficace des fissures sur la base de l'analyse par ondelettes. Les plus couramment utilisés sont l'ondelette de Morlet, l'ondelette de Paul, l'ondelette de Gabor, la dérivée d'une gaussienne, l'ondelette de Symlet, l'ondelette de Coiflet et l'ondelette bi-orthogonales (**Sinou, 2009**).

4.3.3.2. L'algorithme génétique (AG) :

Depuis le développement des algorithmes génétiques dans les années 1975 par John Holland, comme des programmes informatiques qui imitent les processus évolutifs dans la nature, il a été de plus en plus mis en place dans divers domaines tels que la production de la musique, la synthèse génétique, la planification stratégique, l'apprentissage des machines et la détection des fissures (**Srinivas et Patnaik, 1994**).

Les algorithmes génétiques basés sur le principe de Darwin de la sélection naturelle et de l'évolution, sont des outils très puissants dans la recherche de solution complète et d'atteindre l'optimum global dans les problèmes d'optimisation (**Meruane et Heylen, 2010**), en particulier dans la détection des fissures structurelles, où ils ont l'avantage de produire des solutions multimodales pour déterminer les emplacements des fissures.

Dans l'application de l'algorithme génétique pour la détection des fissures dans les structures, une fonction objective en termes des paramètres liés aux propriétés physiques et de l'état de la structure doit être formulée (**Srinivas et al. 2009**).

A cause de sa grande efficacité de calcul dans le traitement des données, les erreurs entre les données mesurées et les résultats numériques peuvent être minimisés, ainsi, il est possible d'obtenir la meilleure solution globale, même si les mesures sont faites à quelques degrés de liberté.

Autres avantages de l'utilisation des AGs, sont que ces méthodes n'exigent pas sur de valeur initiale des paramètres inconnus, elles n'ont pas besoin d'informations telles que les gradients ou des dérivés de la fonction à minimiser, et aussi la facilité de la mise en œuvre de l'ordinateur (**Panigrahi et al. 2009**).

4.3.3.3. Les réseaux des neurones artificiels (RNA) :

Le premier article sur les applications des réseaux neuronaux dans les structures de génie civil a été publié par **Adeli et Yeh (1989)**.

Le réseau des neurones artificiels se réfère à des structures des calculs composés d'unités de traitement. Un tel réseau représente une entité de calcul efficace et parallèle et reflétera les niveaux des simulations par différents signaux d'entrée (**Tsou et Shen, 1994**).

Une architecture typique d'un réseau de neurones est généralement construite par trois couches :

- La couche d'entrée reçoit des modèles et transmet fidèlement les signaux à la couche suivante (par exemple, les caractéristiques de l'indice qui décrivent les fissures) ;
- La couche cachée, se trouvant entre la couche d'entrée et la couche de sortie, sont constitués d'un certain nombre d'unités de traitement. Ces dernières additionnent les signaux et effectuent une réponse pour la transmettre à la couche suivante ; et
- Une couche de sortie qui sera capable de donner l'emplacement et la profondeur des fissures structurels.

Le nombre d'éléments dans les couches d'entrée et de sortie est déterminé par la taille des ensembles de données d'apprentissage et de test (**Nazarko et Ziemiański, 2017**).

Malgré que les réseaux des neurones soient utilisés dans de nombreux domaines et tâches intéressantes, il y aura toujours des erreurs systématiques entre le modèle utilisé pour le test et la structure réelle. Les réseaux des neurones exigent qu'une importante base des données soient disponible, tel que le choix de la fonction du transfert et les caractéristiques de la structure endommagée obtenues par des essais ou des simulations numériques pour la structure à détecter.

Le choix d'une architecture appropriée de RNA, le nombre des couches cachée et le nombre des neurones dans chaque couche peut améliorer la capacité de RNA (**Hakim et Razak, 2014**).

Bien sûr, il y a encore quelques problèmes à étudier et à résoudre dans les méthodes du type moderne, tel que (**Yan et al. 2007 ; Srinivas et al. 2009**):

- 1) Cette méthode doit compter sur le type et l'environnement d'excitation aux structures à détecter;
- 2) Les signaux mesurés sont éventuellement contaminés par le bruit de sorte que les informations de petite fissure dans les structures peut être couvert par le bruit; et
- 3) La sélection et la construction des caractéristiques qui sont utilisés comme des indices des fissures structuraux sont très flexibles et variables.

4.4. Cas d'étude :

En continuant sur l'exemple d'étude déjà présenté dans le **chapitre 2**, les deux méthodes (la matrice du transfert et la méthode de Rayleigh) sont par la suite utilisées pour déterminer les paramètres de la fissure en utilisant l'une des deux fréquences naturelles obtenues à partir des mesures comme entrée.

4.4.1. Méthode 1 (MMT):

Pour obtenir les paramètres inconnus η et l_1 , on utilise les étapes suivantes (**Lin, 2004**) :

- L'équation (2.32) est réécrite comme suit:

$$\eta \beta_n [\sinh(\beta_n l_1) \sinh(\beta_n l_2) \sin(\beta_n) - \sin(\beta_n l_1) \sin(\beta_n l_2) \sinh(\beta_n)] = -2 \sinh(\beta_n) \sin(\beta_n) \quad (3.1)$$

- Calculer β_1 et β_2 à partir de l'équation (2.7) en utilisant les deux fréquences mesurées ω_{c1} et ω_{c2} ;
- En substituant β_1 et β_2 séparément dans l'équation (3.1) et en divisant ces deux équations, le coefficient de flexibilité η peut alors être annulé et l'équation d'identification suivante peut être obtenue:

$$\frac{\beta_1 [\sinh(\beta_1 l_1) \sinh(\beta_1 l_2) \sin(\beta_1) - \sin(\beta_1 l_1) \sin(\beta_1 l_2) \sinh(\beta_1)]}{\beta_2 [\sinh(\beta_2 l_1) \sinh(\beta_2 l_2) \sin(\beta_2) - \sin(\beta_2 l_1) \sin(\beta_2 l_2) \sinh(\beta_2)]} = \frac{\sinh(\beta_1) \sin(\beta_1)}{\sinh(\beta_2) \sin(\beta_2)} \quad (3.2)$$

- La position de la fissure l_1 , est déterminée sous environnement MATLAB ;
- Après l'obtention de l_1 , le coefficient de flexibilité η peut être déterminé à partir de l'équation (2.32), et la profondeur de fissure a peut alors être obtenue à partir de l'un des expressions des η déjà présenté dans le **chapitre 1**.

4.4.2. Méthode 2 (MR):

Dans cette section, le problème inverse peut être résolu en utilisant l'équation (14) dans (Hu et Liang, 1993), comme suit:

$$\frac{\Delta\omega_n}{\omega_n} = \frac{\eta \gamma_{n1}}{2} \quad (3.3)$$

Ou:

$$\Delta\omega_n = \omega_n - \omega_{cn} \quad (3.4)$$

- En calculant ω_1 et ω_2 à partir de l'équation (2.52) et en utilisant les deux fréquences mesurées ω_{c1} et ω_{c2} , $\Delta\omega_1$ et $\Delta\omega_2$ peuvent être obtenues;
- En remplaçant $\frac{\Delta\omega_1}{\omega_1}$ et $\frac{\Delta\omega_2}{\omega_2}$ séparément dans l'équation (3.3) et en divisant ces deux équations, le coefficient de flexibilité η peut alors être annulé et l'équation d'identification suivantes peut être obtenue:

$$\frac{\Delta\omega_1}{\omega_1} \frac{\omega_2}{\Delta\omega_2} = \frac{\gamma_{n1}}{\gamma_{n2}} \quad (3.5)$$

- La position de la fissure l_1 est déterminé sous environnement MATLAB;
- Après l'obtention de l_1 , le coefficient de flexibilité η peut être déterminé à partir de l'équation (2.51), et la profondeur de fissure a peut alors être obtenue à partir de l'un des expressions des η déjà présenté dans le **chapitre 1**.

Le problème inverse est résolu en utilisant les trois premières fréquences exactes de la référence (Xiang et al. 2006) comme entrées pour divers cas.

Les **tableaux 1 à 6** montrent une comparaison des paramètres de fissure prédits (l_1^* , ξ^*) et réels (l_1 , ξ) en utilisant deux des trois fréquences et en s'appuyant sur un des coefficients η déjà utilisés dans le problème directe (voir **chapitre 2**).

On observe que les résultats d'identification pour l'emplacement de fissure normalisée sont relativement acceptables. Il convient de noter que pour les 8ème et 9ème cas, la méthode de matrice du transfert donne des solutions très loin du résultat réels pour tous les cas de η . Par contre la méthode de Rayleigh donne des résultats uniquement en utilisant les deux premières fréquences $\omega_{c1} - \omega_{c2}$.

Il est évident que les résultats d'identification pour la profondeur de fissure normalisée ne sont pas satisfaisants; Ceci est dû au comportement différé de chaque coefficient de flexibilité et à l'erreur observée entre les fréquences calculées et mesurées.

Les paramètres de fissure prédits dans les exemples numériques montrent que les deux méthodes sont théoriquement capables d'estimer l'emplacement des fissures et avec moins de performance les profondeurs de fissure.

Dans la majorité des cas, les deux méthodes ne peuvent pas estimer une valeur unique pour l'emplacement de la fissure, ce qui nécessite habituellement une approximation initiale plus proche de l'emplacement réelle. Ceci est dû à la symétrie des emplacements des fissures (par exemple 0,2 et 0,8), lorsque les conditions aux limites sont également symétriques (par exemple, simplement appuyé).

Le choix d'un coefficient de flexibilité convenable influe d'une manière significative sur les résultats, surtout dans le problème inverse.

N° du cas	η	Méthodes	$\omega_{c1} - \omega_{c2}$		$\omega_{c1} - \omega_{c3}$		$\omega_{c2} - \omega_{c3}$	
			l_1^*	Erreur (%)	l_1^*	Erreur (%)	l_1^*	Erreur (%)
1	η_1	Méthode 1	0.1002	0.2473	0.1000	0.0881	0.0999	0.0015
		Méthode 2	0.1005	0.5028	0.1005	0.5714	0.1006	0.6103
2		Méthode 1	0.2000	0.0223	0.2000	0.0066	0.1999	0.0003
		Méthode 2	0.2011	0.5813	0.2009	0.4995	0.2009	0.4630
3		Méthode 1	0.2000	0.0041	0.2000	0.0012	0.1999	0.00001
		Méthode 2	0.2097	4.8554	0.2081	4.0728	0.2074	3.7319
4		Méthode 1	0.2999	0.0004	0.2999	0.00003	0.3000	0.00003
		Méthode 2	0.3031	1.0639	0.3005	0.1801	0.3001	0.0382
5		Méthode 1	0.2999	0.0005	0.2999	0.0001	0.2999	0.00005
		Méthode 2	0.3070	2.3661	0.3012	0.4000	0.3002	0.0836
6	Méthode 1	0.4000	0.0002	0.3999	0.0002	0.3999	0.00003	
	Méthode 2	0.4006	0.1726	0.3994	0.1495	0.3999	0.0056	
7	Méthode 1	0.3999	0.0001	0.4000	0.00006	0.3999	0.00001	
	Méthode 2	0.4028	0.7158	0.3974	0.6369	0.3998	0.0364	
8	Méthode 1	Aucun résultat						
	Méthode 2	0.5	≈ 0	Aucun résultat				
9	Méthode 1	Aucun résultat						
	Méthode 2	0.5	≈ 0	Aucun résultat				
10	Méthode 1	0.6999	0.0001	0.6999	0.00001	0.7000	≈ 0	
	Méthode 2	0.6872	1.8225	0.6978	0.3076	0.6995	0.0632	

Tableau 1: Comparaison des rapports de longueurs de fissure prédits et réels pour différents cas en utilisant deux fréquences avec le coefficient η_1 .

N° du cas	η	Méthodes	$\omega_{c1} - \omega_{c2}$		$\omega_{c1} - \omega_{c3}$		$\omega_{c2} - \omega_{c3}$	
			ξ^*	Erreur (%)	ξ^*	Erreur (%)	ξ^*	Erreur (%)
1	η_1	Méthode 1	0.0745	25.4124	0.0747	25.2079	0.0748	25.1266
		Méthode 2	0.1339	33.9878	0.1338	33.8448	0.1307	30.7372
2		Méthode 1	0.0748	25.1409	0.0748	25.1228	0.0748	25.1286
		Méthode 2	0.1336	33.6628	0.1338	33.8145	0.1248	24.8900
3		Méthode 1	0.3696	23.2265	0.3696	23.2297	0.3696	23.2285
		Méthode 2	0.4813	60.4628	0.4837	61.2629	0.4066	35.5366
4		Méthode 1	0.2217	10.8902	0.2217	10.8897	0.2217	10.8907
		Méthode 2	0.3341	67.0827	0.3363	68.1836	0.2678	33.9480
5		Méthode 1	0.3696	23.2281	0.3696	23.2277	0.3696	23.2286
		Méthode 2	0.4871	62.3877	0.4920	64.0107	0.3760	25.3514
6	Méthode 1	0.2217	10.8917	0.2217	10.8920	0.2217	10.8903	
	Méthode 2	0.3353	67.6833	0.3358	67.9248	0.2537	26.8715	
7	Méthode 1	0.4954	23.8571	0.4954	23.8571	0.4954	23.8575	
	Méthode 2	0.5997	49.9415	0.6015	50.3886	0.4288	7.2009	
8	Méthode 1	Aucun résultat						
	Méthode 2	0.3351	67.5947	Aucun résultat				
9	Méthode 1	Aucun résultat						
	Méthode 2	0.5983	49.5923	Aucun résultat				
10	Méthode 1	0.4954	23.8574	0.4954	23.8576	0.4954	23.8572	
	Méthode 2	0.5950	48.7554	0.6025	50.6450	0.4555	13.8750	

Tableau 2: Comparaison des rapports de profondeurs de fissure prédits et réels pour différents cas en utilisant deux fréquences avec le coefficient η_1 .

N° du cas	η	Méthodes	$\omega_{c1} - \omega_{c2}$		$\omega_{c1} - \omega_{c3}$		$\omega_{c2} - \omega_{c3}$	
			l_1^*	Erreur (%)	l_1^*	Erreur (%)	l_1^*	Erreur (%)
1	η_2	Méthode 1	0.1002	0.2473	0.1000	0.0881	0.0999	0.0015
		Méthode 2	0.1005	0.5028	0.1005	0.5714	0.1006	0.6103
2		Méthode 1	0.2000	0.0223	0.2000	0.0066	0.1999	0.0003
		Méthode 2	0.2011	0.5813	0.2009	0.4995	0.2009	0.4630
3		Méthode 1	0.2000	0.0041	0.2000	0.0012	0.1999	0.00001
		Méthode 2	0.2097	4.8554	0.2081	4.0728	0.2074	3.7319
4		Méthode 1	0.2999	0.0004	0.2999	0.00003	0.3000	0.00003
		Méthode 2	0.3031	1.0639	0.3005	0.1801	0.3001	0.0382
5		Méthode 1	0.2999	0.0005	0.2999	0.0001	0.2999	0.00005
		Méthode 2	0.3070	2.3661	0.3012	0.4000	0.3002	0.0836
6		Méthode 1	0.4000	0.0002	0.3999	0.0002	0.3999	0.00003
		Méthode 2	0.4006	0.1726	0.3994	0.1495	0.3999	0.0056
7		Méthode 1	0.3999	0.0001	0.4000	0.00006	0.3999	0.00001
		Méthode 2	0.4028	0.7158	0.3974	0.6369	0.3998	0.0364
8		Méthode 1	Aucun résultat					
		Méthode 2	0.5	≈ 0	Aucun résultat			
9		Méthode 1	Aucun résultat					
		Méthode 2	0.5	≈ 0	Aucun résultat			
10		Méthode 1	0.6999	0.0001	0.6999	0.00001	0.7000	≈ 0
		Méthode 2	0.6872	1.8225	0.6978	0.3076	0.6995	0.0632

Tableau 3: Comparaison des rapports de longueurs de fissure prédits et réels pour différents cas en utilisant deux fréquences avec le coefficient η_2 .

N° du cas	η	Méthodes	$\omega_{c1} - \omega_{c2}$		$\omega_{c1} - \omega_{c3}$		$\omega_{c2} - \omega_{c3}$	
			ξ^*	Erreur (%)	ξ^*	Erreur (%)	ξ^*	Erreur (%)
1	η_2	Méthode 1	0.1002	0.2047	0.1003	0.3659	0.1004	0.4299
		Méthode 2	0.1435	43.5712	0.1434	43.4721	0.1413	41.3137
2		Méthode 1	0.1004	0.4186	0.1004	0.4329	0.1004	0.4283
		Méthode 2	0.1433	43.3459	0.1434	43.4511	0.1372	37.2311
3		Méthode 1	0.3064	2.1490	0.3064	2.1514	0.3064	2.1505
		Méthode 2	0.3925	30.8524	0.3945	31.5036	0.3339	11.3191
4		Méthode 1	0.2030	1.5412	0.2030	1.5409	0.2030	1.5416
		Méthode 2	0.2807	40.3730	0.2823	41.1598	0.2344	17.2103
5		Méthode 1	0.3064	2.1502	0.3064	2.1499	0.3064	2.1506
		Méthode 2	0.3972	32.4221	0.4012	33.7531	0.3111	3.7119
6		Méthode 1	0.2030	1.5422	0.2030	1.5424	0.2030	1.5413
		Méthode 2	0.2816	40.8021	0.2819	40.9747	0.2247	12.3725
7		Méthode 1	0.4040	1.0143	0.4040	1.0143	0.4040	1.0146
		Méthode 2	0.4958	23.9532	0.4974	24.3748	0.3509	12.2704
8		Méthode 1	Aucun résultat					
		Méthode 2	0.2814	40.7387	Aucun résultat			
9		Méthode 1	Aucun résultat					
		Méthode 2	0.4944	23.6247	Aucun résultat			
10		Méthode 1	0.4040	1.0146	0.4040	1.0147	0.4040	1.0144
		Méthode 2	0.4913	22.8402	0.4984	24.6170	0.3717	7.0530

Tableau 4: Comparaison des rapports de profondeurs de fissure prédits et réels pour différents cas en utilisant deux fréquences avec le coefficient η_2 .

N° du cas	η	Méthodes	$\omega_{c1} - \omega_{c2}$		$\omega_{c1} - \omega_{c3}$		$\omega_{c2} - \omega_{c3}$	
			l_1^*	Erreur (%)	l_1^*	Erreur (%)	l_1^*	Erreur (%)
1	η_3	Méthode 1	0.1002	0.2473	0.1000	0.0881	0.0999	0.0015
		Méthode 2	0.1005	0.5028	0.1005	0.5714	0.1006	0.6103
2		Méthode 1	0.2000	0.0223	0.2000	0.0066	0.1999	0.0003
		Méthode 2	0.2011	0.5813	0.2009	0.4995	0.2009	0.4630
3		Méthode 1	0.2000	0.0041	0.2000	0.0012	0.1999	0.00001
		Méthode 2	0.2097	4.8554	0.2081	4.0728	0.2074	3.7319
4		Méthode 1	0.2999	0.0004	0.2999	0.00003	0.3000	0.00003
		Méthode 2	0.3031	1.0639	0.3005	0.1801	0.3001	0.0382
5		Méthode 1	0.2999	0.0005	0.2999	0.0001	0.2999	0.00005
		Méthode 2	0.3070	2.3661	0.3012	0.4000	0.3002	0.0836
6	Méthode 1	0.4000	0.0002	0.3999	0.0002	0.3999	0.00003	
	Méthode 2	0.4006	0.1726	0.3994	0.1495	0.3999	0.0056	
7	Méthode 1	0.3999	0.0001	0.4000	0.00006	0.3999	0.00001	
	Méthode 2	0.4028	0.7158	0.3974	0.6369	0.3998	0.0364	
8	Méthode 1	Aucun résultat						
	Méthode 2	0.5	≈ 0	Aucun résultat				
9	Méthode 1	Aucun résultat						
	Méthode 2	0.5	≈ 0	Aucun résultat				
10	Méthode 1	0.6999	0.0001	0.6999	0.00001	0.7000	≈ 0	
	Méthode 2	0.6872	1.8225	0.6978	0.3076	0.6995	0.0632	

Tableau 5: Comparaison des rapports de longueurs de fissure prédits et réels pour différents cas en utilisant deux fréquences avec le coefficient η_3 .

N° du cas	η	Méthodes	$\omega_{c1} - \omega_{c2}$		$\omega_{c1} - \omega_{c3}$		$\omega_{c2} - \omega_{c3}$	
			ξ^*	Erreur (%)	ξ^*	Erreur (%)	ξ^*	Erreur (%)
1	η_3	Méthode 1	0.1054	5.4543	0.1056	5.6217	0.1056	5.6883
		Méthode 2	0.1500	50.0562	0.1499	49.9553	0.1477	47.7570
2		Méthode 1	0.1056	5.6766	0.1056	5.6914	0.1056	5.6866
		Méthode 2	0.1498	49.8268	0.1499	49.9339	0.1435	43.5931
3		Méthode 1	0.3128	4.2935	0.3128	4.2958	0.3128	4.2949
		Méthode 2	0.4007	33.5849	0.4027	34.2600	0.3406	13.5507
4		Méthode 1	0.2099	4.9612	0.2099	4.9609	0.2099	4.9615
		Méthode 2	0.2871	43.5758	0.2887	44.3610	0.2410	20.5419
5		Méthode 1	0.3128	4.2947	0.3128	4.2944	0.3128	4.2950
		Méthode 2	0.4056	35.2128	0.4097	36.5950	0.3175	5.8650
6	Méthode 1	0.2099	4.9622	0.2099	4.9624	0.2099	4.9612	
	Méthode 2	0.2880	44.0040	0.2883	44.1763	0.2314	15.7370	
7	Méthode 1	0.4126	3.1733	0.4126	3.1732	0.4126	3.1736	
	Méthode 2	0.5087	27.1855	0.5105	27.6268	0.3579	10.5215	
8	Méthode 1	Aucun résultat						
	Méthode 2	0.2878	43.9407	Aucun résultat				
9	Méthode 1	Aucun résultat						
	Méthode 2	0.5073	26.8415	Aucun résultat				
10	Méthode 1	0.4126	3.1735	0.4126	3.1737	0.4126	3.1734	
	Méthode 2	0.5040	26.0199	0.5115	27.8803	0.3793	5.1735	

Tableau 6: Comparaison des rapports de profondeurs de fissure prédits et réels pour différents cas en utilisant deux fréquences avec le coefficient η_3 .

4.5. Conclusion :

Cette brève revue a été rédigé dans le but de fournir un état de l'art de la littérature avec le soutien des références bibliographiques relativement large et aider les lecteurs à identifier des points de départ intéressants vers une efficacité globale sur la recherche des méthodes d'identification des fissures, afin que la compréhension du sujet soit renforcée. Cette contribution fournira une précieuse introduction et tente également de donner une récapitulation tout autour sur les progrès et le développement de cette récente zone chaude. Par la suite un exemple numérique a été fourni dans le but de tester l'efficacité des deux méthodes autrement-dit la méthode de matrice du transfert et la méthode de Rayleigh à prédire correctement les paramètres des fissures (l'emplacement et la profondeur) en utilisant une des méthodes d'identification présentées précédemment (basé sur les fréquence naturelles).

D'après les résultats, on peut conclure que la résolution des problèmes inverses liés aux méthodes d'identification des fissures est basée principalement sur la résolution des problèmes directs. En d'autre terme, il faut minimiser le maximum l'erreur entre les résultats analytiques et/ou numérique et les résultats expérimentaux, et ça ne peut pas être fait sauf en éliminant les causes principales de ces erreurs, on peut citer par exemple : les conditions aux limites, les coefficients de flexibilités... etc.

CHAPITRE 5: LE COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES POUTRES APPUYÉES SUR DEUX SUPPORTS ÉLASTIQUES AVEC UNE FISSURE

Introduction :

Selon les observations de l'ingénierie, les vibrations sont l'un des problèmes majeurs de la conception des véhicules et des structures. Elles provoquent un bruit indésirable, des déviations excessives et éventuellement des dommages à la structure, ce qui entraîne des problèmes de durabilité et une perte économique majeure (Qatu et al. 2009; Qatu, 2012). L'apparition et l'accumulation des dommages donneront lieu à la naissance et au développement des fissures (Yan et al. 2016).

En raison de leur importance vitale en génie aérospatial, mécanique, civil et océanique, de nombreux chercheurs ont suggéré la nécessité de développer des théories plus précises et des méthodes efficaces pour comprendre le sujet des méthodes de détection des fissures basées sur la réponse vibratoire au fil des années.

La détection des fissures des éléments poutres présente deux aspects différents:

- Le premier consiste à étudier les effets des fissures sur les comportements dynamiques de la structure, à partir d'un modèle numérique détaillé basé sur les propriétés géométriques et matérielles de la structure en tant qu'un problème direct.

Nguyen (2014) a appliqué la méthode des éléments finis à l'analyse des formes du mode d'une poutre fissurée à l'aide de l'élément de poutre 3D qui permet d'inspecter une petite fissure en utilisant les projections des formes du mode sur des plans normaux appropriés. Mirzabeigy et Bakhtiari-Nejad (2014) ont examinés la vibration libre des poutres fissurées reposant sur une fondation élastique à deux paramètres avec des extrémités élastiquement retenues en utilisant la méthode de transformation différentielle pour déterminer les fréquences adimensionnelles et les formes du mode normalisées. Lee et Lee (2017) ont mis au point une méthode de matrice du transfert permettant d'évaluer l'effet de la fissuration sur les fréquences naturelles et les formes du mode pour les vibrations de flexion couplées d'une poutre torsadée de Bernoulli-Euler. Ma et al. (2016) ont analysés les effets des charges d'excitation (gravité, amplitude de l'excitation et angle d'excitation) et des paramètres de fissure (angle, profondeur et emplacement) sur la réponse dynamique d'une poutre en porte-à-faux via un nouveau modèle d'éléments finis. Tan et al. (2018) ont utilisés la méthode de la matrice du transfert pour étudier l'analyse par vibration libre des poutres fissurées portant des systèmes masse-ressort. Tan et al. (2017) illustrent une approche exacte pour étudier les fréquences naturelles et les formes du mode des poutres fissurées à sections multiples en I présentant différentes conditions aux limites, et présentent une méthode d'identification des fissures basée sur la fréquence propre du premier ordre et la forme du mode correspondante. Xu et al. (2018) ont mis au point une méthode améliorée d'élément spectral pour évaluer avec exactitude les caractéristiques modales d'ordre élevé d'une poutre multi-fissures d'Euler – Bernoulli, pour étudier l'effet des fissures multiples sur la propriété dynamique des poutres. Altunışık et al. (2018a) ont présentés une étude approfondie sur les vibrations des poutres en porte-à-faux de Timoshenko à section transversale en caisson, y compris les fissures multiples, à l'aide de la méthode de la matrice du transfert, la méthode des éléments finis et l'analyse modale opérationnelle.

Dans leurs conclusions, ils ont recommandés d'utiliser des ressorts dans le modèle numérique et de modifier les rigidités jusqu'à l'obtention des valeurs les plus proches des mesures afin de représenter les conditions aux limites réelles du modèle de laboratoire utilisé.

- Le second consiste à détecter l'emplacement et la profondeur des fissures, à partir des données mesurées expérimentalement, en analysant les modifications des caractéristiques de vibration de la structure (fréquences propres, formes du mode, etc.), comme un problème inverse (**Parhi et Kumar, 2009**).

Dans une série de documents sur les vibrations et la détection des fissures, **Altunışık et al. (2017a, 2017b, 2017c)** ont présentés une étude détaillée sur la mise à jour automatique des modèles de poutres en porte-à-faux avec section transversale et circulaire creuse, y compris des fissures multiples. **Lin (2004)** a effectué l'analyse de vibration libre des poutres simplement appuyées avec une fissure en résolvant les problèmes directs et inverses par la méthode de matrice du transfert. **Parhi et Dash (2010)** ont montrés la détection des fissures par analyse en éléments finis d'une poutre fissurée à l'aide des signatures vibratoires. **Attar (2012)** a utilisé une méthode de matrice du transfert pour l'analyse des vibrations libres et l'identification des fissures dans les poutres étagées comportant plusieurs fissures et différentes conditions aux limites. **Aminpour et al. (2012)** ont présentés et comparés le réseau des neurones artificiels et l'analyse en ondelettes pour l'identification des fissures multiples dans une poutre en porte-à-faux de section transversale rectangulaire. **Abu Hussain et al. (2010)** ont présentés une procédure d'évaluation non destructive permettant d'identifier les défauts d'une structure soudée par points à l'aide d'une mise à jour du modèle d'éléments finis basée sur les fréquences propres. **Altunışık et al. (2018b)** ont réalisés une étude comparative pour montrer l'efficacité des méthodes de courbure modale et de flexibilité modale dans la détermination de l'emplacement des fissures sur la base des données expérimentales mesurées à partir des poutres en porte-à-faux en acier avec section transversale et circulaire creuse comprenant plusieurs fissures. **Fernández-Sáez et al. (2017)** ont examinés le problème de l'identification d'une fissure ouverte dans une tige vibrante longitudinalement avec un profil variable lisse à l'aide des données de fréquence propre. **Shifrin (2016)** a développé un algorithme d'identification des petites fissures multiples dans des tiges et des poutres simplement appuyées en utilisant des fréquences propres. **Dilena et al. (2017)** ont examinés l'identification d'une seule petite fissure ouverte dans une poutre dans des conditions d'extrémité élastiquement restreintes de flexibilité inconnue.

Une analyse plus approfondie de la littérature conduit à des conclusions importantes:

- **La plupart des résultats du problème inverse se rapportent à des conditions aux limites idéales (libre, simple ou fixe), ce qui conduit à des solutions non uniques des paramètres de fissure;**
- **La plupart des résultats ne prenaient en compte que l'effet des fissures sur le comportement dynamique des poutres, alors que l'affaiblissement et la rigidité inconnue des conditions aux limites ne sont pas discutés;**
- **Dans une procédure de diagnostic, la comparaison des vibrations calculées avec les vibrations mesurées nous permet d'identifier non seulement la présence d'une fissure, mais également son emplacement et sa profondeur. C'est pourquoi; une compréhension plus profonde du problème direct est une condition fondamentale pour la résolution de la formulation inverse bien posée (Caddemi et Calio, 2009).**

Pour cet objet, le support élastique semble être la solution optimale, ce qui peut nous amener à déterminer la rigidité du support avant et après exposition aux fissures. En outre, il peut être utilisé pour la détection précise des fissures, ce qui peut réduire les erreurs entre les résultats mesurés et calculés.

Différentes approches ont été utilisées pour modéliser les fissures dans les poutres, telles que la section transversale équivalente, le moment de flexion local et la flexibilité locale (voir le **chapitre 1**).

La modélisation des vibrations transversales à l'aide de la théorie des poutres d'Euler – Bernoulli a été utilisée dans des nombreuses études antérieures sur les poutres fissurées avec différentes méthodes numériques, analytiques et expérimentales. La méthode des éléments finis est une méthode courante dans des nombreux domaines de l'ingénierie. Cela peut fournir une réponse dynamique précise d'une structure. Cependant, un plus grand nombre d'éléments finis devrait être utilisé pour obtenir des résultats avec une précision suffisante (**Sarvestan et al. 2017**). La matrice du transfert est une autre méthode répandue utilisée par de nombreux chercheurs pour réduire l'ordre des équations et améliorer l'efficacité du calcul. Le principal inconvénient de cette méthode est qu'une équation algébrique doit être résolue numériquement et ensuite, les coefficients de termes trigonométriques et hyperboliques dans les formes du mode seront trouvés en utilisant des matrices obtenues à partir de conditions de compatibilité en chaque point de fissure et des conditions aux limites. Clairement, ces méthodes peuvent augmenter le temps et le coût des calculs.

Par conséquent, la méthode d'estimation analytique nous permet d'obtenir une expression explicite à la fois pour les fréquences naturelles et les formes du mode grâce à des paramètres de fissure pouvant simplifier non seulement l'analyse dynamique de poutre fissurée mais également le problème de la détection de la fissure.

Dans ce contexte, **Fernández-Sáez et al. (1999)** ont présentés une méthode simplifiée basée sur la méthode de Rayleigh pour évaluer la forme fermée de la fréquence fondamentale et la forme du mode des poutres d'Euler – Bernoulli simplement appuyées avec une fissure. La déflexion transversale de la poutre fissurée a été construite en ajoutant une fonction polynomiale, qui représente l'effet de la fissure, à la fonction de la poutre non fissurée. Plus tard, **Zhong et Oyadiji (2008)** ont étendus la méthode pour évaluer les formes du mode et les fréquences naturelles d'une poutre simplement appuyée ayant une fissure avec une masse en mouvement. **Khiem et Hai (2011)** ont dérivés des expressions analytiques pour toute fréquence naturelle des poutres à fissures multiples avec des conditions aux limites arbitraires à l'aide de la méthode de Rayleigh. **Bakhtiari-Nejad et al. (2014)** ont présentés une estimation analytique des caractéristiques dynamiques d'une poutre d'Euler – Bernoulli simplement appuyée avec une ou deux fissures. Récemment, **Chettah et Lassoued (2018)** ont comparés les méthodes de Rayleigh et de matrice du transfert dans le cas d'une poutre d'Euler – Bernoulli simplement appuyée avec une fissure et ont conclu qu'il existait un accord raisonnable entre les deux méthodes, mais la différence entre les fréquences propres et les formes du mode augmentait pour les modes d'ordre supérieur.

Dans le présent travail, la méthode proposée est axée sur l'étude de la vibration libre des poutres fissurées supportées par deux supports élastiques. L'attention est consacrée à la recherche des expressions sous forme fermée pour le calcul des deux premières formes du mode et des fréquences propres d'une poutre d'Euler – Bernoulli avec une fissure, pour lesquels, à la connaissance des auteurs, aucune solution sous forme fermée n'a été proposée dans la littérature.

La méthode proposée est comparée avec des études expérimentales, analytiques et numériques antérieures dans plusieurs cas de profondeurs et d'emplacement de fissures,

avec différents rapports de rigidité en flexion de la poutre sur la rigidité du support élastique pour des poutres élastiquement supportées, y compris une fissure. Les résultats théoriques sont très satisfaisants et laissent entrevoir qu'une méthode pratique pourrait être développée, ce qui permettrait de réaliser des économies considérables en termes d'efforts de calcul et de coûts associés à l'analyse dynamique et à la détection des fissures des poutres élastiquement supportées.

5.1. Modèle théorique:

Une poutre fissurée supportée par deux appuis élastiques identiques de rigidité verticale K est illustrée sur la **figure 1**. La poutre est supposée avoir une longueur L et une section transversale uniforme d'une hauteur h , une largeur b et avec une fissure ouverte de profondeur a située à la position $x_1 = L_1$ à partir du support gauche de la poutre, où x_0 et x_3 représentent les points d'extrémités. La fissure est représentée comme un ressort de rotation avec une flexibilité en coupe et elle est supposée rester ouverte pendant toute la période de vibration. Dans cette étude, seuls les deux premiers modes de vibrations sont considérés.

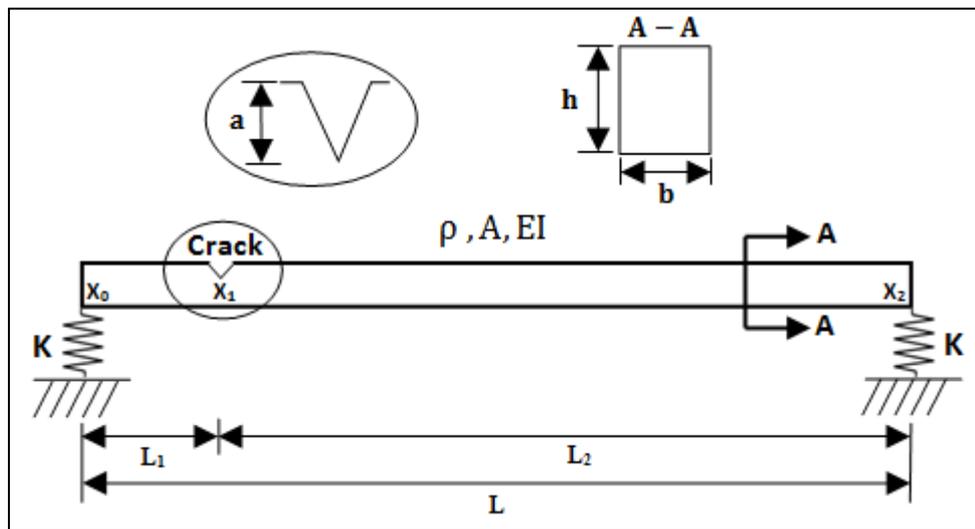


Figure 1: Modèle de la poutre fissurée sur appuis élastiques.

L'équation dynamique du mouvement d'une poutre uniforme soumise à des vibrations libres peut être exprimée comme suit:

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5.1)$$

Où :

$w(x, t)$ désigne la fonction de déplacement transversal de la poutre à la coordonnée axiale x et à l'instant t .

E ; ρ ; $A = bh$ et $I = bh^3/12$ sont respectivement le module de Young, la densité du matériau, la section transversale de la poutre et le moment d'inertie.

La solution de l'équation différentielle (5.1) peut être exprimée comme suit:

$$w(x, t) = \varphi(x) e^{j\omega t} \quad (5.2)$$

Où : ω représente la fréquence et $\varphi(x)$ la fonction de forme du mode de vibration.

Afin de dériver des expressions en forme fermée pour les deux premières fréquences naturelles et formes du mode d'une poutre élastiquement supportée avec une fissure, la méthode de Rayleigh est utilisée. L'expression de la forme vibratoire de la poutre élastiquement supportée introduite par (Yau et al. 2001; Yang et al. 2004; Wu et Yang, 2004) est étendue aux poutres fissurées élastiquement supportées en ajoutant une fonction polynomiale cubique de x pour représenter l'effet de la fissure tel qu'elle est utilisée par (Fernández-Sáez et al. 1999) à celle de la poutre non fissurée simplement supportée. En d'autres termes, la forme de vibration de la poutre fissurée avec des supports élastiques sera approchée comme la superposition des deux premières formes modales de flexion de la poutre fissurée avec des supports simples et les deux premières formes modales d'une poutre rigide supportée par des ressorts élastiques, comme indiqué dans la **figure 2**.

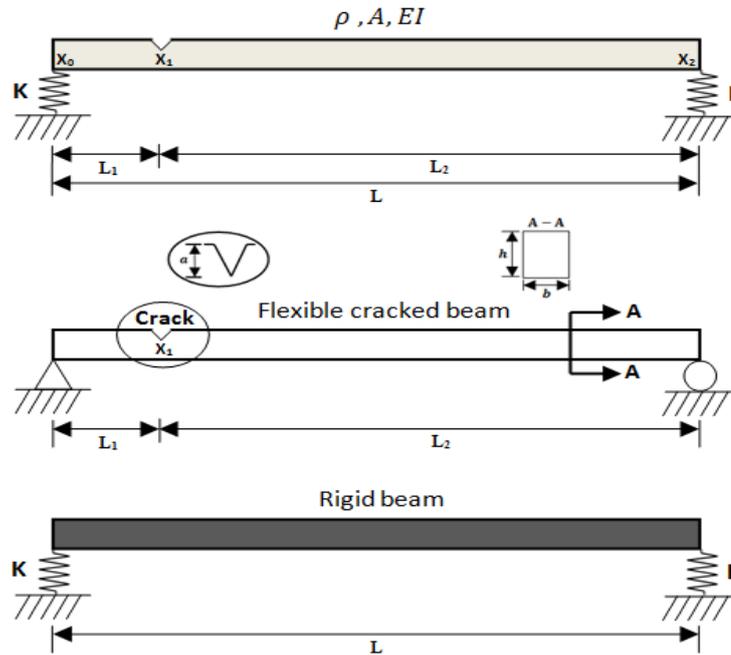


Figure 2: Modèle de forme de vibration libre de poutre fissurée élastiquement supportée (Chettah et Lassoued, 2019).

Pour prendre en compte l'effet de la fissure et la rigidité des supports, les expressions générales des deux premiers modes de vibration d'une poutre fissurée élastiquement supportée (CES) ont été proposées comme suit:

Le 1^{er} mode de vibration:

$$\varphi_{(CES)1}(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + A_1 x^3 + B_1 x^2 + C_1 x + D_1 + \kappa_1 & ; 0 \leq x \leq L_1 \\ \varphi_2(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + A_2 x^3 + B_2 x^2 + C_2 x + D_2 + \kappa_1 & ; L_1 \leq x \leq L \end{cases} \quad (5.3)$$

Le 2^{ème} mode de vibration:

$$\varphi_{(CES)2}(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + A_1 x^3 + B_1 x^2 + C_1 x + D_1 + \kappa_2 \left(1 - \frac{2x}{L}\right) & ; 0 \leq x \leq L_1 \\ \varphi_2(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + A_2 x^3 + B_2 x^2 + C_2 x + D_2 + \kappa_2 \left(1 - \frac{2x}{L}\right) & ; L_1 \leq x \leq L \end{cases} \quad (5.4)$$

Où :

$\kappa_n = \frac{EI (n\pi)^3}{K L^3}$ ($n = 1,2$) désigne le rapport de la rigidité en flexion de la poutre à la rigidité du ressort élastique.

$A_i, B_i, C_i,$ et D_i sont des constantes inconnues qui doivent être déterminées à partir des conditions aux limites et les conditions cinématiques des deux segments de la poutre ($i = 1,2$).

Les conditions aux limites de cette poutre élastiquement supportée sont:

$$x = 0 \begin{cases} M_1(0) = 0 \\ T_1(0) = -K \varphi_1(0) \end{cases} \quad x = L \begin{cases} M_2(L) = 0 \\ T_2(L) = K \varphi_2(L) \end{cases} \quad (5.5)$$

Comme le montre la **figure 3**, les deux segments de la poutre ($i = 1,2$) sont reliés par des ressorts de rotation à la position de la fissure. La relation entre les deux côtés peut être obtenue à partir des conditions cinématiques comme suit :

$$x = L_1 \begin{cases} \varphi_1(L_1) = \varphi_2(L_1) \\ \theta_1(L_1) = \theta_2(L_1) - c M_2(L_1) \\ M_1(L_1) = M_2(L_1) \\ T_1(L_1) = T_2(L_1) \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\theta_{(CES)n}(x) = \frac{\partial \varphi_{(CES)n}(x)}{\partial x}; M_{(CES)n}(x) = EI \frac{\partial^2 \varphi_{(CES)n}(x)}{\partial x^2}; T_{(CES)n}(x) = EI \frac{\partial^3 \varphi_{(CES)n}(x)}{\partial x^3} \quad n = 1,2 \quad (5.7)$$

Où:

$\theta_{(CES)n}, M_{(CES)n}, T_{(CES)n}$ sont respectivement les expressions de rotation, moment de flexion et l'effort tranchant pour les deux premiers modes de la poutre fissurée.

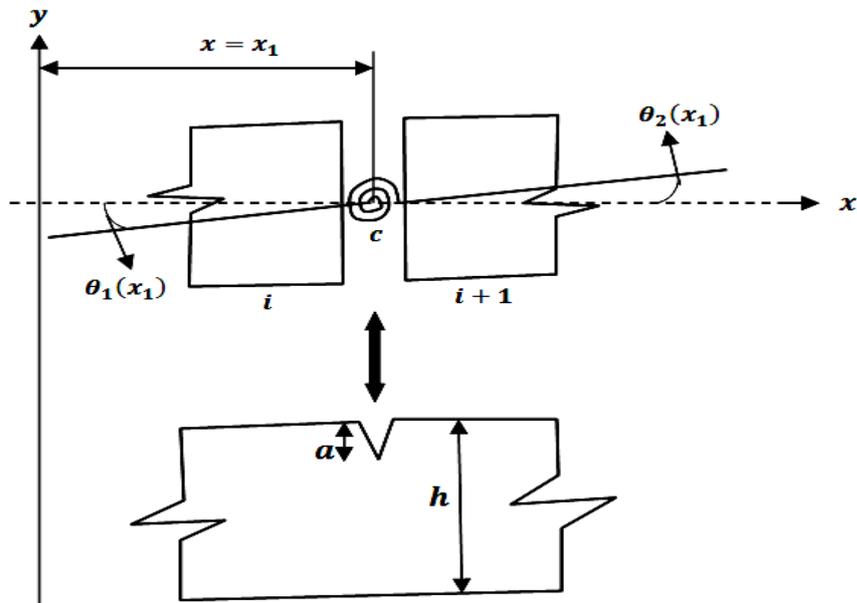


Figure 3: Modélisation de la fissure à l'aide d'un ressort rotatif avec une flexibilité sectionnelle par rapport à la position de la fissure.

c est la constante de flexibilité, qui est liée au rapport entre la profondeur de la fissure et la hauteur de la poutre $\xi = a/h$. Elle peut être exprimée comme suit:

$$c = \frac{h}{EI} f(\xi) \quad (5.8a)$$

$$f(\xi) = 2 \left(\frac{\xi}{1-\xi} \right)^2 [5.93 - 19.69 \xi + 37.14 \xi^2 - 35.84 \xi^3 + 13.12 \xi^4] \quad (5.8b)$$

Les expressions pour la déviation transversale de la poutre fissurée élastiquement supportée, qui satisfont les conditions aux limites et les conditions cinématiques ci-dessus à la fois pour les premier et deuxième modes de vibration, sont respectivement:

Le 1^{er} mode de vibration:

$$\varphi_{(CES)1}(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + c EI \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi L_1}{L}\right) \left(1 - \frac{L_1}{L}\right)x + \kappa_1 & ; 0 \leq x \leq L_1 \\ \varphi_2(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + c EI \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi L_1}{L}\right) \frac{L_1}{L} (L - x) + \kappa_1 & ; L_1 \leq x \leq L \end{cases} \quad (5.9)$$

Le 2^{ème} mode de vibration:

$$\varphi_{(CES)2}(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + c EI \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi L_1}{L}\right) \left(1 - \frac{L_1}{L}\right)x + \kappa_2 \left(1 - \frac{2x}{L}\right) & ; 0 \leq x \leq L_1 \\ \varphi_2(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + c EI \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi L_1}{L}\right) \frac{L_1}{L} (L - x) + \kappa_2 \left(1 - \frac{2x}{L}\right) & ; L_1 \leq x \leq L \end{cases} \quad (5.10)$$

La méthode de Rayleigh est utilisée, donc en égalisant les valeurs maximales de l'énergie potentielle U_{max} et de l'énergie cinétique T_{max} de la poutre fissurée, les solutions en forme fermée sont obtenues pour les deux premières fréquences naturelles de la poutre fissurée élastiquement supportée, qui peuvent être exprimées comme:

L'énergie potentielle maximale peut être évaluée comme:

$$U_{max} = \frac{EI}{2} \left[\int_0^{L_1} \left(\frac{M_1}{EI}\right)^2 dx + \int_{L_1}^L \left(\frac{M_2}{EI}\right)^2 dx \right] + \left[\frac{1}{2} (\theta_2 - \theta_1) M \right]_{x=L_1} + \frac{K}{2} [\varphi_1^2(0) + \varphi_1^2(L)] \quad (5.11)$$

L'énergie cinétique maximale peut être calculée comme:

$$T_{max} = \frac{\rho A \omega_{(CES)n}^2}{2} \left[\int_0^{L_1} \varphi_1^2(x) + \int_{L_1}^L \varphi_2^2(x) \right] dx \quad (5.12)$$

La première fréquence naturelle:

$$\omega_{(CES)1}^2 = \omega_1^2 \left[\frac{1 + \eta \gamma_{11} + \frac{4 \kappa_1}{\pi}}{1 + \eta \gamma_{11} \left[2 + (\pi)^2 l_1(1 - l_1) \left[\eta \frac{(\pi)^2}{3} l_1(1 - l_1) + \sqrt{\frac{2}{\gamma_{11}}} \kappa_1 \right] \right] + 2 \kappa_1 \left(\kappa_1 + \frac{4}{\pi} \right)} \right] \quad (5.13)$$

La deuxième fréquence naturelle:

$$\omega_{(CES)2}^2 = \omega_2^2 \left[\frac{1 + \eta \gamma_{21} + \frac{2 \kappa_2}{\pi}}{1 + \eta \gamma_{21} \left[2 + (2\pi)^2 l_1(1 - l_1) \left[\eta \frac{(2\pi)^2}{3} l_1(1 - l_1) + \sqrt{\frac{2}{\gamma_{21}}} \frac{\kappa_2}{3} (1 - 2l_1) \right] \right]} + 2 \kappa_2 \left(\frac{\kappa_2}{3} + \frac{2}{\pi} \right) \right] \quad (5.14)$$

Où:

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} ; \quad \eta = \left(\frac{EI c}{L} \right) ; \quad \gamma_{ni} = (2 \sin^2(n\pi l_i)) ; \quad l_i = \left(\frac{L_i}{L} \right) \quad (5.15)$$

5.2. Validation de la méthode :

Trois cas particuliers d'expressions approximatives pour trouver les deux premières fréquences naturelles et formes du mode peuvent être extraits de la méthode proposée:

- Cas 1 ($\kappa_n = 0$ et $\xi = 0$) qui cède au cas d'une poutre non-fissurée simplement appuyée (USS);
- Cas 2 ($\kappa_n = 0$ et $\xi \neq 0$) qui donne exactement les mêmes équations utilisées que (**Fernández-Sáez et al. 1999**) après avoir étendu la méthode pour trouver les deux premières fréquences naturelles et les formes du mode d'une poutre simplement appuyée avec une fissure (CSS);
- Cas 3 ($\kappa_n \neq 0$ et $\xi = 0$) qui donne exactement les mêmes équations utilisées dans (**Yang et al. 2004; Wu et Yang, 2004**) pour trouver les deux premières fréquences naturelles et les formes du mode d'une poutre non-fissurée avec des supports élastiques (UES).

Afin de valider cette étude, les résultats obtenus avec la présente méthode sont comparés aux résultats analytiques, numériques et expérimentaux discutés dans des travaux précédents pour les deux premiers cas mentionnés ci-dessus (USS et CSS).

Cas	l_1	ξ	ω_n [rad/s]					
			Méthode proposée		Modèle discret (Khnaïjar et Benamar, 2017)		Expérimentale (Yoon et al. 2007)	
			ω_1	ω_2	ω_1	ω_2	ω_1	ω_2
USS	-	-	946.20	3784.82	946.12	3783.54	951.90	3785.61
CSS	0.2	0.1	945.33	3775.49	946.62	3788.76	950.01	3768.65
		0.3	938.75	3689.81	942.47	3742.89	948.76	3695.76
		0.5	919.14	3337.17	929.15	3603.84	928.65	3571.99
	0.3	0.1	944.56	3775.26	947.00	3788.06	945.61	3796.30
		0.3	932.23	3674.43	938.51	3734.91	941.22	3733.46
		0.5	896.89	3202.93	911.94	3584.74	903.52	3546.85
	0.5	0.1	943.70	3784.82	947.37	3783.42	937.45	3768.65
		0.3	925.15	3784.82	933.30	3782.54	922.37	3756.08
		0.5	874.25	3784.82	890.95	3779.96	874.61	3725.92

Tableau 1: Comparaison des deux premières fréquences naturelles obtenues par la méthode proposée, le modèle discret et l'étude expérimentale pour les deux cas: USS et CSS.

Le **tableau 1** présente une comparaison des deux premières fréquences naturelles entre les résultats de la présente étude et ceux utilisant un modèle discret (**Khnaïjar et Benamar, 2017**) et l'étude expérimentale réalisée par (**Yoon et al. 2007**).

De la même manière, le **tableau 2** compare les deux premières fréquences naturelles entre les résultats de la présente étude et ceux utilisant la méthode de la matrice du transfert (MMT) et la méthode des éléments finis (MEF) qui a été réalisée par (**Kindova- Petrova, 2014**).

Comme on peut le constater, les résultats obtenus avec la méthode proposée sont en bon accord avec les autres méthodes, à savoir le modèle discret, l'étude expérimentale, la méthode de la matrice du transfert et la méthode des éléments finis, ce qui révèlent la précision du modèle utilisé dans cette étude.

Comme autre validation de la méthode proposée pour les trois cas mentionnés ci-dessus, il convient tout d'abord d'examiner l'effet des rapports entre la rigidité en flexion de la poutre et la rigidité des ressorts élastiques.

les paramètres du matériau pour une poutre non-fissurée avec des supports élastiques: $E = 3.84 \times 10^{10} Pa$, $\rho = 3200 kg/m^3$, et ses dimensions: $L = 27 m$, $h = 2.5 m$ et $b = 4 m$ sont considérés. Pour le 2ème cas: $L_1 = 10.8 m$, $a = 0.5 m$ et pour le 3ème cas: $\kappa = 0.1, 0.2$ et 0.3 .

Les deux premières fréquences naturelles sont calculées par la méthode proposée et comparées aux résultats obtenus à partir de la méthode de la matrice du transfert.

Cas	l_1	ξ	ω_n [rad/s]					
			Méthode proposée		MMT		MEF (Kindova-Petrova, 2014)	
			ω_1	ω_2	ω_1	ω_2	ω_1	ω_2
USS	-	-	491.20	1964.81	491.20	1964.81	506.10	1929.8
CSS	0.1	0.125	490.44	1953.26	490.44	1953.82	505.61	1923.2
		0.250	488.27	1915.23	488.27	1922.83	503.76	1896.0
		0.375	484.06	1825.49	484.05	1864.11	500.02	1825.1
		0.500	475.57	1622.63	475.54	1754.49	493.11	1690.2
	0.2	0.125	488.46	1931.55	488.46	1936.65	504.45	1914.1
		0.250	480.81	1803.66	480.81	1863.73	498.09	1854.0
		0.375	466.55	1523.16	466.52	1747.47	485.56	1738.0
		0.500	440.14	1112.23	440.01	1584.93	463.44	1567.0
	0.3	0.125	486.05	1927.40	486.05	1937.09	503.00	1914.3
		0.250	472.09	1758.78	472.08	1869.04	488.26	1846.5
		0.375	447.52	1394.09	447.48	1769.73	466.52	1749.2
		0.500	406.42	9391.40	406.31	1645.24	431.31	1615.9
	0.4	0.125	484.13	1948.79	484.13	1954.15	501.84	1923.9
		0.250	465.44	1857.13	465.44	1927.30	486.00	1901.9
		0.375	434.06	1583.69	434.05	1886.33	457.72	1861.2
		0.500	385.13	1107.51	385.09	1831.81	414.74	1796.1
	0.5	0.125	483.40	1964.81	483.40	1964.81	501.40	1929.8
		0.250	463.00	1964.81	463.00	1964.81	484.05	1929.8
		0.375	429.32	1964.81	429.32	1964.81	453.57	1929.4
		0.500	378.06	1964.81	378.06	1964.81	408.31	1928.2

Tableau 2: Comparaison des deux premières fréquences naturelles obtenues par la méthode proposée, la méthode de la matrice du transfert et la méthode des éléments finis pour les deux cas: USS et CSS.

Les résultats donnés dans le **tableau 3** montrent qu'il existe un accord assez encourageant entre les résultats de la présente méthode et ceux obtenus par la méthode de la matrice du transfert:

- Les deux méthodes donnent les mêmes fréquences pour le 1er cas ;
- Pour le deuxième et le troisième cas, les résultats sont très proches de ceux obtenus par la méthode de la matrice du transfert, mais la différence entre les fréquences propres augmente pour le deuxième mode de vibration ;
- Le troisième cas montre également la variation des deux premières fréquences naturelles d'une poutre non-fissurée élastiquement supportée en faisant varier le rapport entre la rigidité en flexion de la poutre à la rigidité du ressort élastique. On peut observer qu'il y a une réduction des fréquences propres de la poutre.

Cas	l_1	ξ	κ_n	ω_n [rad/s]			
				Méthode proposée		MMT	
				ω_1	ω_2	ω_1	ω_2
Cas 1 (USS)	0	0	0	33.846	135.385	33.846	135.385
Cas 2 (CSS)	0.4	0.2	0	32.760	131.940	32.760	133.774
Cas 3 (UES)	0	0	0.1	31.830	106.364	31.828	105.731
			0.2	30.072	88.314	30.066	87.264
			0.3	28.537	76.604	28.524	75.537

Tableau 3: Comparaison entre les deux premières fréquences naturelles obtenues par les deux méthodes pour les trois cas.

La **figure 4** représente les tracés des deux formes du mode correspondantes pour les trois cas en utilisant la méthode proposée. Il est très évident que les amplitudes sont augmentées pour les deux cas (CSS) et (UES).

Il convient de noter qu'en utilisant la méthode de la matrice du transfert, les équations caractéristiques peuvent être trouvées dans (**Patil et Maiti, 2003**) pour le 2ème cas et (**Gorman, 1975**) pour le 3ème cas.

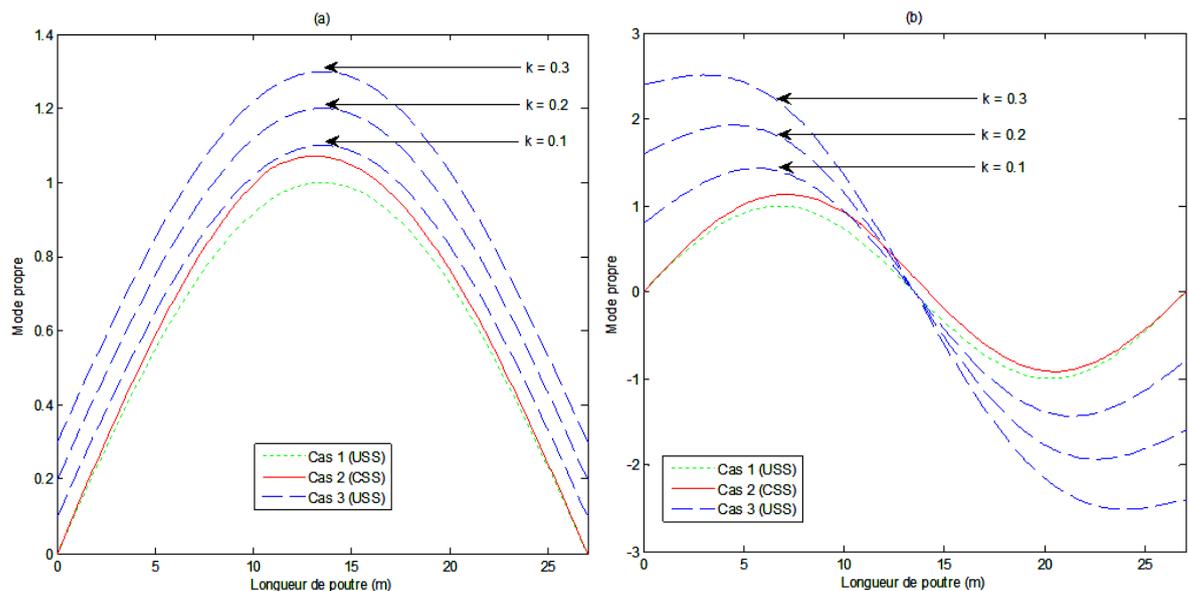


Figure 4: Comparaison entre les deux premières formes du mode obtenues par la méthode proposée pour les trois cas: (a) forme du 1er mode, et (b) forme du 2ème mode.

5.3. Résultats et discussion :

Afin de montrer l'efficacité, l'application et les limites de la méthode proposée, plusieurs simulations de profondeur et d'emplacement des fissures couplées à différents rapports de rigidité en flexion de la poutre à la rigidité du ressort élastique ont été testées et comparées aux résultats obtenus à l'aide de la méthode de la matrice du transfert. Les propriétés matérielles et géométriques de la poutre mentionnée précédemment ont été utilisées et tous les calculs sont effectués sous environnement MATLAB.

La méthode de la matrice du transfert pour une poutre fissurée élastiquement supportée sous une forme adimensionnelle :

L'équation générale de la vibration libre peut être écrite comme suit :

$$\varphi_i^{(4)}(x) - \beta^4 \varphi_i(x) = 0 \quad x_{i-1} < x < x_i, \quad i = 1, 2 \quad (5.16)$$

Où:

$$\beta^4 = \frac{L^4 \rho A \omega^2}{EI} \quad (5.17)$$

La solution générale de l'équation différentielle ordinaire (5.16), pour chaque segment, peut être exprimée comme:

$$\varphi_i(x) = A_i \sin[\beta(x - x_{i-1})] + B_i \cos[\beta(x - x_{i-1})] + C_i \sinh[\beta(x - x_{i-1})] + D_i \cosh[\beta(x - x_{i-1})] \quad x_{i-1} < x < x_i, \quad i = 1, 2 \quad (5.18a)$$

A_i , B_i , C_i , and D_i sont des constantes inconnues associées au ($i = 1, 2$) segment. Les expressions de rotation $\theta_i(x)$, moment de flexion $M_i(x)$ et l'effort tranchant $T_i(x)$ sont obtenus comme:

$$\theta_i(x) = \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} = \frac{\beta}{L} [A_i \cos[\beta(x - x_{i-1})] - B_i \sin[\beta(x - x_{i-1})] + C_i \cosh[\beta(x - x_{i-1})] + D_i \sinh[\beta(x - x_{i-1})]] \quad (5.18b)$$

$$\begin{aligned} M_i(x) &= EI \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \\ &= EI \frac{\beta^2}{L^2} [-A_i \sin[\beta(x - x_{i-1})] - B_i \cos[\beta(x - x_{i-1})] + C_i \sinh[\beta(x - x_{i-1})] + D_i \cosh[\beta(x - x_{i-1})]] \end{aligned} \quad (5.18c)$$

$$\begin{aligned} T_i(x) &= EI \frac{\partial^3 \varphi_i(x)}{\partial x^3} \\ &= EI \frac{\beta^3}{L^3} [-A_i \cos[\beta(x - x_{i-1})] + B_i \sin[\beta(x - x_{i-1})] + C_i \cosh[\beta(x - x_{i-1})] + D_i \sinh[\beta(x - x_{i-1})]] \end{aligned} \quad (5.18d)$$

Dans le cas d'une fissure, les constantes du deuxième segment sont liées aux constantes du premier segment à partir des conditions de compatibilités, ils sont exprimés comme suit:

$$A_2 = \left[\cos(\beta l_1) - \frac{\eta \beta}{2} \sin(\beta l_1) \right] A_1 + \left[-\frac{\eta \beta}{2} \cos(\beta l_1) \right] B_1 + \left[\frac{\eta \beta}{2} \sinh(\beta l_1) \right] C_1 + \left[\frac{\eta \beta}{2} \cosh(\beta l_1) \right] D_1 \quad (5.19a)$$

$$B_2 = [\sin(\beta l_1)] A_1 + [\cos(\beta l_1)] B_1 \quad (5.19b)$$

$$C_2 = \left[-\frac{\eta \beta}{2} \sin(\beta l_1) \right] A_1 + \left[-\frac{\eta \beta}{2} \cos(\beta l_1) \right] B_1 + \left[\cosh(\beta l_1) + \frac{\eta \beta}{2} \sinh(\beta l_1) \right] C_1 + \left[\sinh(\beta l_1) + \frac{\eta \beta}{2} \cosh(\beta l_1) \right] D_1 \quad (5.19c)$$

$$D_2 = [\sinh(\beta l_1)] C_1 + [\cosh(\beta l_1)] D_1 \quad (5.19d)$$

Les équations précédentes peuvent s'écrire sous forme matricielle: $\{\mathbf{A}\}_2 = [\mathbf{T}_{4 \times 4}] \{\mathbf{A}\}_1$

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Où: $[\mathbf{T}]$ est une matrice de transfert 4×4 qui dépend de la valeur de β .

Les conditions aux limites correspondantes à l'appui droit peuvent être écrit comme suit:

$$[-\beta^2 \sin(\beta l_2)] A_2 + [-\beta^2 \cos(\beta l_2)] B_2 + [\beta^2 \sinh(\beta l_2)] C_2 + [\beta^2 \cosh(\beta l_2)] D_2 = 0 \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} & \left[-\beta^3 \cos(\beta l_2) - \left(\frac{\pi^3}{\kappa} \right) \sin(\beta l_2) \right] A_2 + \left[\beta^3 \sin(\beta l_2) - \left(\frac{\pi^3}{\kappa} \right) \cos(\beta l_2) \right] B_2 \\ & + \left[\beta^3 \cosh(\beta l_2) - \left(\frac{\pi^3}{\kappa} \right) \sinh(\beta l_2) \right] C_2 + \left[\beta^3 \sinh(\beta l_2) - \left(\frac{\pi^3}{\kappa} \right) \cosh(\beta l_2) \right] D_2 \\ & = 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Les équations précédentes peuvent s'écrire sous forme matricielle: $\{\mathbf{0}\} = [\mathbf{B}_{2 \times 4}] \{\mathbf{A}\}_2$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

La substitution de l'équation (5.20) dans l'équation (5.23) conduit à:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [B_{2 \times 4}] [T_{4 \times 4}] \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = [R_{2 \times 4}] \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

Les conditions aux limites correspondantes à l'appui gauche peuvent être écrit comme:

$$[0] A_1 + [-\beta^2] B_1 + [0] C_1 + [\beta^2] D_1 = 0 \quad (5.25)$$

$$[-\beta^3]A_1 + \left[\left(\frac{\pi^3}{\kappa}\right)\right]B_1 + [\beta^3]C_1 + \left[\left(\frac{\pi^3}{\kappa}\right)\right]D_1 = 0 \quad (5.26)$$

Les équations précédentes peuvent s'exprimer sous forme matricielle: $\{0\} = [S_{2 \times 4}] \{A\}_1$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{Bmatrix} \quad (5.27)$$

La combinaison de l'équation (5.24) avec l'équation (5.26), donne: $\{0\} = [W_{4 \times 4}] \{A\}_1$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$

Une solution non-triviale ne nécessite que le déterminant égal à zéro:

$$\det \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.29)$$

Après avoir résolu l'équation ci-dessus, les fréquences propres peuvent être obtenues à l'aide de l'équation suivante :

$$\omega_{(CES)n} = \left(\frac{\beta_n}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} ; \quad n = 1, 2 \quad (5.30)$$

Le **tableau 4** présente huit cas de variations des deux premières fréquences naturelles d'une poutre fissurée élastiquement supportée calculées par les deux méthodes, dans lesquelles certaines combinaisons de différentes profondeurs de fissures, emplacements de fissures et rapports de rigidité de flexion de la poutre à la rigidité des ressorts élastiques sont examinés. Les résultats de la méthode proposée montrent qu'il y a une réduction de toutes les fréquences sauf pour le mode 2 dans les 7^{ème} et 8^{ème} cas, cette réduction est due à la présence d'une fissure qui modifie la rigidité de la poutre. Cependant, la MMT montre une tendance anormale dans les résultats, en particulier pour le mode 2, où il y a une augmentation des fréquences pour presque tous les cas sauf pour les cas 7 et 8.

Toujours pour le mode 1, on peut observer que seulement deux cas (6 et 8) montrent une diminution des fréquences et ceci est dû à la profondeur très importante de la fissure, ceci indique que la méthode proposée est plus sensible aux fissures même avec une faible profondeur.

Comme on peut observer à partir de ce tableau, la différence entre les résultats dans tous les cas est très élevée surtout dans le deuxième mode de vibration. Ceci montre l'effet du rapport de la rigidité en flexion de la poutre à la rigidité du ressort élastique. En d'autres termes, les fréquences sont diminuées lorsque ce rapport augmente.

En outre, la **figure 5** montre que les amplitudes des formes du mode correspondantes sont augmentées lorsque les rapports de la rigidité en flexion de la poutre à la rigidité du ressort élastique augmentent même lorsque la profondeur de la fissure est très petite.

Numéro de cas	l_1	ξ	κ	Méthode proposée (rad/s)		Méthode MT (rad/s)	
				$\omega_{(CES)1}$	$\omega_{(CES)2}$	$\omega_{(CES)1}$	$\omega_{(CES)2}$
1	0.1	0.1	0.1	31.803	106.113	31.895	109.242
			0.2	30.049	88.171	30.209	91.621
			0.3	28.517	76.513	28.727	79.921
2	0.2	0.3	0.1	31.018	99.304	31.322	109.630
			0.2	29.383	84.676	29.902	94.847
			0.3	27.947	74.446	28.614	83.941
3	0.3	0.2	0.1	31.165	103.461	31.736	113.812
			0.2	29.512	86.917	30.490	99.886
			0.3	28.061	75.816	29.322	90.040
4	0.3	0.3	0.1	30.358	97.649	30.893	110.835
			0.2	28.829	84.034	29.753	97.787
			0.3	27.476	74.176	28.676	88.471
5	0.4	0.2	0.1	30.928	105.095	31.707	109.540
			0.2	29.316	87.734	30.676	93.474
			0.3	27.896	76.289	29.677	82.940
6	0.4	0.4	0.1	28.259	94.174	28.859	107.243
			0.2	27.032	82.436	28.106	92.067
			0.3	25.924	73.342	27.367	82.136
7	0.5	0.2	0.1	30.840	106.364	31.708	105.731
			0.2	29.243	88.314	30.786	87.264
			0.3	27.834	76.604	29.893	75.537
8	0.5	0.4	0.1	27.965	106.364	28.616	105.731
			0.2	26.779	88.314	27.965	87.264
			0.3	25.705	76.604	27.325	75.537

Tableau 4: Comparaison entre les deux premières fréquences des poutres fissurées obtenues par les deux méthodes pour diverses profondeurs, emplacements de fissures et rapports de la rigidité en flexion de la poutre à la rigidité du ressort élastique.

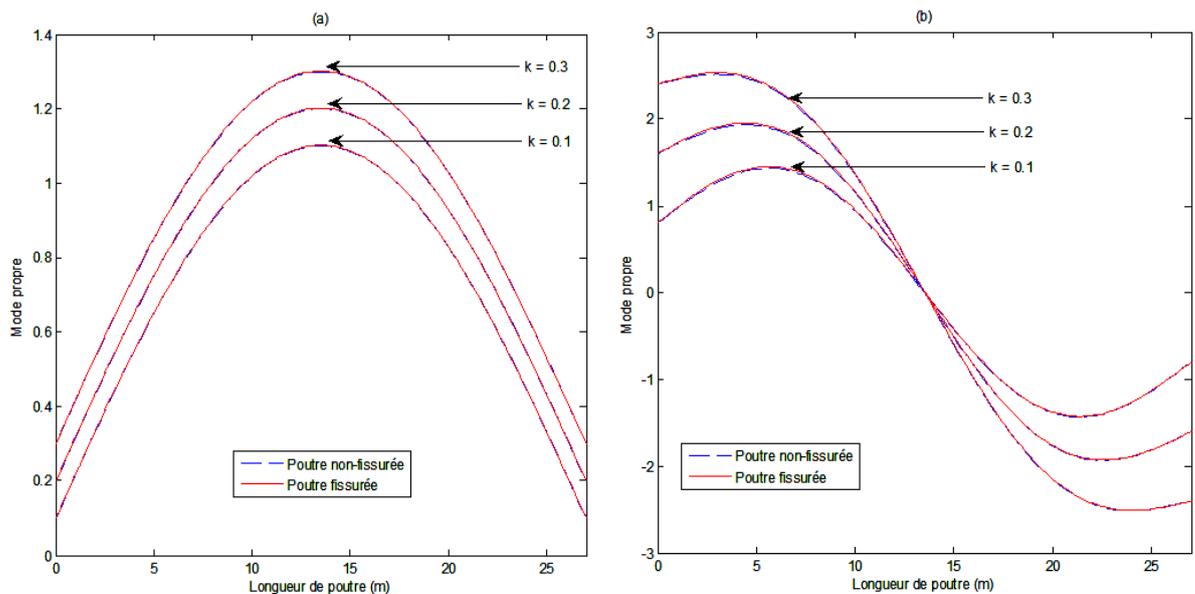


Figure 5: Les deux premières formes du mode d'une poutre fissurée ($l_1 = 0.1$, $\xi = 0.1$) et non-fissurée obtenues par la méthode proposée avec variation de κ : (a) forme du 1er mode et (b) forme du 2ème mode.

D'autre part, la profondeur de la fissure n'a aucun effet sur les secondes fréquences naturelles à mi-portée (cas 7 et 8). En d'autres termes, il n'y a pas de variation des fréquences (mêmes fréquences propres pour la poutre fissurée et non-fissurée) et des modes (les courbes de la poutre fissurée et non-fissurée sont identiques) lorsque la fissure est exactement située sur le nœud d'un mode (le mode 2 a un nœud à la position $l_1 = 0.5$) que l'on peut voir sur la **figure 6 (b)**.

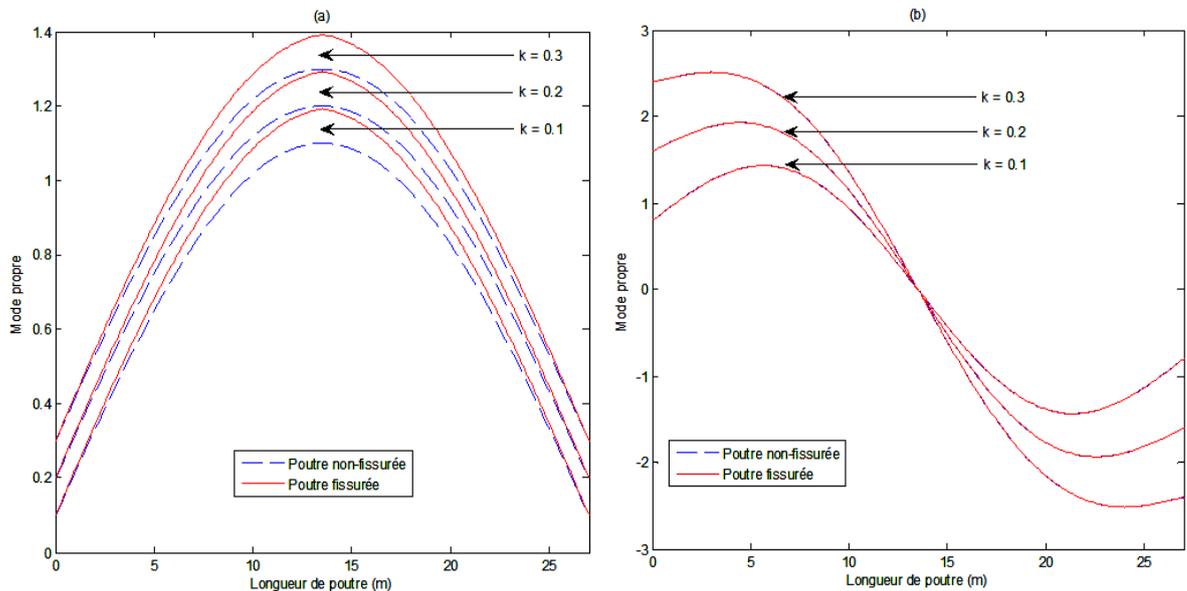


Figure 6: Les deux premières formes du mode d'une poutre fissurée ($l_1 = 0.5$, $\xi = 0.2$) et non-fissurée obtenues par la méthode proposée avec variation de κ : (a) forme du 1er mode et (b) forme du 2ème mode.

L'effet de l'emplacement de la fissure a également été étudié en changeant la position de la fissure le long de la direction axiale.

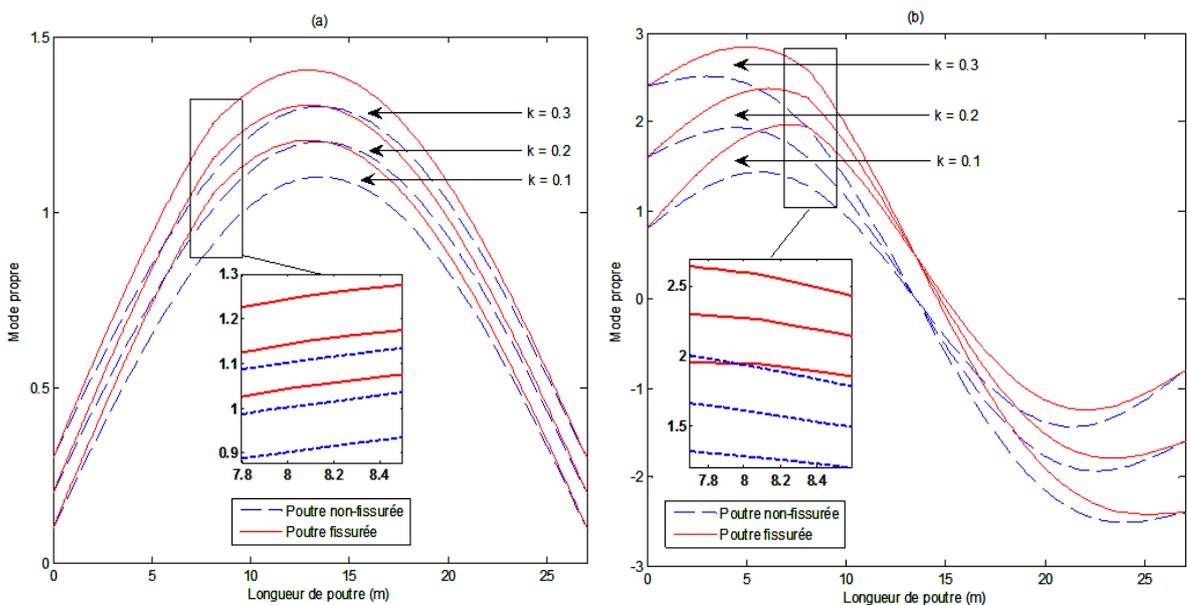


Figure 7: Les deux premières formes du mode d'une poutre fissurée ($l_1 = 0.3$, $\xi = 0.3$) et non-fissurée obtenues par la méthode proposée avec variation de κ : (a) forme du 1er mode et (b) forme du 2ème mode.

Les cas 3, 5 et 7 du **tableau 4** montrent que les premières fréquences naturelles de la poutre fissurée décroissent progressivement au fur et à mesure que la fissure se déplace vers le milieu, ce qui est l'inverse pour les secondes fréquences naturelles (modes antisymétriques). A partir de la **figure 7**, on peut observer que l'emplacement de la fissure peut être facilement détecté en recherchant les discontinuités dans les diagrammes de la forme du mode, en particulier lorsque la fissure est plus profonde.

La méthode proposée permet de traiter deux problèmes majeurs: la valeur non nulle au niveau des extrémités des poutres évoquée précédemment par (Altunışık et al. 2018a, 2017a, 2017b, 2017c) et le problème de la rigidité inconnue des conditions aux limites discutée par (Dilena et al. 2017), en prenant en compte la rigidité exacte du ressort jusqu'à l'obtention des valeurs les plus proches des mesures.

5.4. Conclusion :

Une méthode simplifiée pour évaluer les deux premières fréquences naturelles et les formes du mode d'une poutre élastiquement supportée avec une fissure est présentée.

L'avantage de cette méthode réside dans le fait qu'elle est plus simple dans l'application et qu'elle peut être utilisée pour analyser différents cas (poutres simplement appuyées fissurées et non fissurées et poutres élastiquement supportées fissurées et non fissurées), ce qui peut réduire le temps et le coût des calculs par rapport à d'autres méthodes.

Sur la base des résultats numériques obtenus dans cette étude, les conclusions suivantes peuvent être tirées:

- La profondeur et l'emplacement de la fissure modifient les fréquences naturelles et les formes du mode de la poutre fissurée élastiquement supportée;
- Les fréquences propres d'une poutre fissurée diminuent avec l'augmentation de la profondeur de la fissure et le rapport de la rigidité en flexion de la poutre à la rigidité du ressort élastique respectivement;
- La profondeur de la fissure n'a aucun effet sur les secondes fréquences naturelles et les formes du mode à mi-portée;
- Les premières fréquences naturelles de la poutre fissurée diminuent progressivement pour la même profondeur de fissure lorsque l'emplacement de la fissure se déplace vers le milieu, ce qui est l'inverse pour les secondes fréquences naturelles;
- L'amplitude des formes du mode augmente à mesure que la profondeur de la fissure et le rapport de la rigidité en flexion de la poutre à la rigidité du ressort élastique augmentent respectivement;
- Les changements des fréquences naturelles peuvent être utilisés comme un problème inverse pour détecter la présence des fissures dans les structures;
- Les discontinuités dans certaines formes du mode peuvent fournir des informations spatiales supplémentaires pour la détection des fissures.
- La méthode proposée peut être utilisée pour minimiser la différence entre les résultats mesurés et les résultats calculés en tenant compte de la rigidité exacte du ressort jusqu'à l'obtenir des valeurs les plus proches des mesures. Ceci, à son tour, peut être une solution utile aux problèmes d'une solution non unique dans l'identification des paramètres de fissure.

Même lorsque les résultats de la méthode proposée sont validés à l'aide du modèle discret, de l'étude expérimentale, de la méthode de la matrice du transfert et de la méthode des éléments finis dans le cas des poutres simplement appuyées fissurées et non fissurées, et malgré l'accord assez encourageant entre les résultats de la présente étude et ceux obtenus par la méthode de la matrice du transfert dans le cas des poutres non fissurées avec des supports élastiques, une comparaison avec des tests expérimentaux et la méthode des éléments finis concernant des poutres fissurées à support élastique est nécessaire. Cette observation a été discutée en raison de l'absence des travaux directement comparables aux résultats de ces travaux qui n'ont pas pu être trouvés dans une enquête réalisée par les auteurs.

En outre, il convient de noter également que cette étude sera utilisée dans un futur travail pour étudier la réponse dynamique d'une poutre fissurée sur des supports élastiques soumis à une charge mobile basée sur l'utilisation du modèle de poutre de Timoshenko, qui inclut les effets de l'inertie rotative et la déformation par cisaillement.

CHAPITRE 6: COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UNE POUTRE SIMPLEMENT APPUYÉE FISSURÉE SOUMISE A UNE CHARGE MOBILE

Introduction :

Depuis plusieurs années, la construction des nouvelles lignes de chemin de fer à grande vitesse, l'augmentation du nombre des véhicules lourds, l'intégrité structurelle et la conception améliorée des ponts ont attirés l'attention de nombreux ingénieurs et chercheurs dans les domaines du génie civil, mécanique et des transports. En conséquence, diverses nouvelles méthodologies et applications pratiques concernant l'analyse vibratoire des poutres soumises à des charges mobiles ont été rapportées dans la littérature.

Fryba (1972) a mené une étude approfondie avec diverses solutions analytiques pour l'analyse dynamique d'une poutre simplement appuyée soumise à diverses charges mobiles. **Olsson (1991)** a comparé des solutions analytiques et des solutions d'éléments finis afin de résoudre le problème fondamental des charges mobiles d'une structure simplement appuyée sous une force mobile se déplaçant à une vitesse constante. **Ouyang (2011)** a réalisé un tutoriel sur les problèmes de dynamique des charges mobiles. **Azizi et al. (2012)** ont appliqués une méthode spectrale par éléments finis (MSEF) afin d'étudier la réponse d'une poutre d'Euler-Bernoulli amorti non fissurée sous une charge mobile à vitesse constante. **Johansson et al. (2013)** ont proposés une solution de forme fermée en considérant le modèle à force concentrée et la méthode de superposition modale pour examiner l'analyse vibratoire d'une structure de pont à plusieurs travées supportant une charge mobile. **Museros et al. (2013, 2017)** et **Kumar et al. (2015)** ont étudiés l'analyse de vibration libre des poutres simplement appuyées sous charge mobile, où le phénomène de résonance maximale, d'annulation et d'accélération verticale de résonance sont étudiés en détail.

En effet, des nombreux ponts ont été construits il y a longtemps et beaucoup d'entre eux ont subis de graves détériorations ou des dégâts dus à la charge de trafic croissante, aux effets environnementaux, au vieillissement des matériaux ou à un entretien insuffisant. La présence d'une fissure provoque non seulement une variation locale des paramètres structurels (par exemple, la rigidité d'une poutre) à son emplacement, mais elle a également un effet global qui affecte le comportement dynamique global de la structure (telles que les fréquences naturelles et les formes du mode).

Le comportement dynamique des structures fissurées a été étudié selon plusieurs méthodes analytiques et numériques. **Dimarogonas (1996)** et **Gasch (1993)** ont présentés des analyses complètes de la dynamique des structures fissurées. **Chondros et al. (1998)** ont développés une théorie de la vibration continue des poutres fissurées pour la vibration latérale des poutres d'Euler-Bernoulli fissurées simplement appuyées avec un ou deux fissures ouvertes. Différentes approches ont été utilisées pour modéliser les fissures dans les poutres, telles que la section transversale équivalente, le moment de flexion local et la flexibilité locale. **Ostachowicz et Krawczuk (2001)** ont présentés des enquêtes exhaustives sur les approches de modélisation des fissures. **Friswell et Penny (2002)** ont comparés les différentes approches de la modélisation des fissures et ont démontrés que pour la surveillance de l'état structurel au moyen de vibrations à basse fréquence, des modèles simples de flexibilité sont adéquats. **Lin et al. (2002)** ont proposés d'utiliser la méthode de la matrice du transfert pour les poutres comportant un nombre arbitraire de fissures afin d'obtenir les fréquences propres et les formes du mode. **El Kafrawy (2011)** a utilisé la méthode des éléments finis. **Fernandez-Saez et Navarro (2002)** ont utilisés la méthode de Rayleigh et **Bakhtiari-Nejad**

et al. (2014) l'ont étendus pour une poutre à double fissure. Cette méthode a une meilleure applicabilité à la méthode des valeurs propres.

Afin d'analyser la réponse dynamique d'une poutre avec une fissure soumise à une charge mobile à vitesse constante, **Lee et Ng (1994)** ont formulés les équations du mouvement sous forme de matrice à l'aide du principe de Hamilton et de la méthode du mode supposé. **Cheng et al. (1999)** ont examinés la réponse vibratoire d'une poutre avec une fissure respiratoire. Une poutre en porte-à-faux a été utilisée et modélisée comme un système de paramètres groupés à un degré de liberté. Leur analyse a montré que la réduction de la fréquence naturelle pour une fissure de fatigue (fissure respiratoire) était bien inférieure à celle d'une fissure ouverte. **Mahmoud (2001)** a étudié l'effet des fissures transversales sur le comportement dynamique d'une poutre simplement appuyée non amortie, soumise à une force mobile. **Mahmoud et Abou Zaid (2002)** ont présentés une technique d'analyse modale itérative visant à examiner les conséquences d'une fissure transversale sur la réponse dynamique d'une poutre d'Euler – Bernoulli non amortie simplement appuyée, soumise à une masse mobile. Ils ont expliqués les effets exacts des fissures et de la masse en fonction des divers paramètres tels que le temps de parcours, la vitesse de déplacement, l'emplacement des fissures et les types de fissures. **Bilello et Bergman (2004)** ont réalisés une enquête théorique ainsi qu'une vérification expérimentale pour l'analyse d'une poutre d'Euler – Bernoulli fissurée traversée par une masse mobile. Ils ont appliqués un modèle à petite échelle pour satisfaire les similitudes statiques et dynamiques avec un prototype de structure de pont. **Law et Zhu (2004)** ont examinés la réponse d'un pont en béton armé endommagé sous un véhicule mobile en utilisant à la fois des fissures ouvertes et des fissures de respiration, puis un test expérimental a été réalisé pour vérifier les performances des modèles de fissure. **Lin et Chang (2006)** ont mis au point une méthode analytique pour présenter la réponse dynamique d'une poutre en porte-à-faux d'Euler – Bernoulli fissurée soumise à une charge mobile concentrée. Ils ont utilisés la méthode de la matrice du transfert théorique pour obtenir des solutions propres et la réponse forcée de ce système fissuré a été trouvée par la théorie de l'expansion modale utilisant les fonctions propres déterminées. **Lin (2007)** a utilisé la même méthode pour déterminer le comportement vibratoire d'une poutre fissurée simplement appuyée soumise au véhicule mobile. Le véhicule à deux essieux est conçu comme deux charges mobiles concentrées et séparées par une distance fixe. **Vaidya et Chatterjee (2018)** ont prolongés ce travail en considérant deux masses séparées par une distance fixe et traversant la poutre d'Euler – Bernoulli contenant une fissure. Ils ont conclu que l'analyse de la réponse d'accélération peut être efficace pour présenter une explication qualitative de la présence de la fissure et de son emplacement. **Yang et al. (2008)** ont étudiés la vibration libre et forcée des poutres non-homogènes d'Euler-Bernoulli avec des fissures ouvertes sous l'action combinée d'une force de compression axiale et d'une charge transversale mobile concentrée. Les déflexions dynamiques sont obtenues pour les poutres en porte-à-faux, articulées / articulées et simplement appuyée en utilisant une technique d'expansion en série modale. **Ariaei et al. (2009)** ont utilisés la technique des éléments discrets et la méthode des éléments finis pour obtenir la réponse dynamique des poutres non amorties d'Euler – Bernoulli sous une masse mobile avec des fissures ouvertes et respiratoires. Ils ont étudiés l'effet de la vitesse, la profondeur et l'emplacement de la fissure sur la déflexion de la poutre et ont constatés que la poutre avec une fissure respiratoire présentait une moindre déflexion par rapport à la poutre ayant une fissure complètement ouvert. **Ariaei et al. (2010)** ont utilisés la méthode de la matrice du transfert pour étudier la réparation d'une poutre de Timoshenko fissurée sous une masse mobile à l'aide des patches piézoélectriques. Il en résulte que l'application d'un patch piézoélectrique dans la zone de la fissure est utile et que les fréquences naturelles de poutre réparée sont bien ajustées par rapport à celles des poutres saines. **Shafiei et Khaji (2011)**

ont évalués la réponse vibratoire forcée d'une poutre de Timoshenko avec un nombre arbitraire des fissures ouvertes sous une charge mobile concentrée, à l'aide de la méthode de superposition modale. **Nguyen (2013)** a étudié l'influence du phénomène de respiration sur la détection des fissures d'un pont en forme de poutre soumis à un véhicule mobile par rapport au cas des fissures complètement ouvertes. **Pala et Reis (2013)** ont étudiés l'importance des effets des forces centripètes, de Coriolis et d'inertie sur la réponse dynamique d'une poutre simplement appuyée avec une seule fissure sous une masse mobile. La réponse de la structure fissurée a été calculée en utilisant l'intégrale de Duhamel. Il a été conclu que la masse et la vitesse de la charge transversale influent sur les forces inertielles, centripètes et de Coriolis. **Attar et al. (2017)** ont utilisés une combinaison de la méthode de la matrice du transfert et du schéma d'expansion modale pour présenter une approche semi-analytique permettant de prédire la réponse forcée d'une poutre de Timoshenko à fissures multiples sur des fondations élastiques (entièrement ou partiellement supportées), traversées par une charge harmonique mobile avec une vitesse constante. **He et Zhu (2016)** ont examinés les effets des fissures locaux sur les deux composantes des réponses dynamiques d'une poutre sous une charge mobile (la charge mobile et la composante de fréquence propre de la poutre) et ont développés une méthode de détection intuitive des fissures basée sur une transformée en ondelettes discrète à l'échelle correspondante. **Fu (2015, 2016)** a adopté les effets de la commutation des fissures sur la vibration d'une structure de pont continue sous des véhicules en mouvement. Dans sa dernière enquête, il a formulé une solution numérique pour un pont fissuré simplement appuyé avec des fissures de commutation sous l'action de la charge du train de roulement et des vibrations sismiques. **Zhou et Liu (2016)** ont développés un modèle tridimensionnel couplé (pont-véhicule) pour étudier la réponse dynamique de poutre simplement appuyée en béton avec des fissures respiratoires. Une étude paramétrique a été réalisée pour étudier l'effet des différents paramètres, notamment la vitesse du véhicule, le taux de profondeur des fissures, la position transversale de la charge mobile et le nombre des fissures, sur les facteurs d'impact dynamique et les facteurs d'intensité de contrainte pour la poutre fissurée. **Alebrahim et al. (2016)** ont utilisés la méthode de la matrice du transfert pour étudier l'analyse vibratoire des poutres de Timoshenko à fissures multiples soumis à une masse mobile. **Yin et al. (2017)** se sont concentrés sur le développement d'une nouvelle méthode permettant de prendre pleinement en compte l'effet des fissures de pont, des modèles de véhicule et de l'état de la rugosité de la surface de la route sur le comportement du pont sous des charges de véhicules en mouvement. **Zhang et al. (2017)** ont brièvement décrits la vibration d'un pont simplement appuyé avec une fissure sous une charge mobile et présentés une approche de détection des fissures basée sur le changement de trajectoire de phase. Les études expérimentales ont démontrés que l'approche proposée peut être utilisée pour identifier avec succès la défaillance de la liaison de cisaillement dans un modèle de structure de pont composite soumis à des charges mobiles. **Ozturk et al. (2016a)** ont utilisés la méthode des éléments finis pour étudier le comportement dynamique des poutres d'Euler – Bernoulli fissurées avec des supports élastiques soumis à une force concentrée se déplaçant à une vitesse constante. La réponse forcée de la structure a été calculée à l'aide de la méthode d'intégration de Newmark. Les conséquences de la profondeur et de la position de la fissure, de la vitesse de déplacement de la charge, de la fondation élastique sur la déviation dynamique de poutre ont été vérifiées.

Pour obtenir des résultats avec une précision suffisante, il convient d'utiliser un plus grand nombre d'éléments finis. Ainsi, il en résulte des degrés de liberté considérables qui peuvent augmenter le temps et le coût des calculs. Par conséquent, des nombreux chercheurs considèrent des outils efficaces et des alternatives puissantes à la méthode des éléments finis. **Sarvestan et al. (2015, 2017)** ont présentés un modèle (MSEF) pour l'analyse

vibratoire des poutres d'Euler – Bernoulli viscoélastiques fissurées et de Timoshenko fissurées, soumises respectivement à des charges en mouvement. Les résultats de la méthode présentent une supériorité remarquable par rapport aux éléments finis en termes de réduction du nombre d'éléments et de l'effort de calcul. De même, **He et al. (2018)** ont proposés un nouveau modèle d'éléments finis en ondelettes, facilitant le raffinement adaptatif des mailles, pour l'analyse dynamique et la détection des fissures des structures de poutre soumises à une charge mobile. Bien que les deux méthodes présentent de nombreux avantages, un calcul exhaustif doit être effectué.

Afin de surmonter cette faiblesse, des expressions sous forme fermée sont présentées afin de déterminer la réponse en vibration libre et forcée d'une poutre simplement appuyée, fissurée et non amortie soumise à une seule force mobile à vitesse constante.

La méthode proposée est comparée à d'autres méthodes dans plusieurs cas de profondeur et de position de la fissure, de vitesse et d'amplitude de la charge mobile pour des poutres simplement appuyées contenant une fissure. Les résultats théoriques sont très satisfaisants et laissent entrevoir des possibilités de développement ultérieur en tant qu'une méthode de calcul pratique dans le cas des poutres fissurées soumises à des charges mobiles.

6.1. Le modèle théorique :

Une poutre simplement appuyée sous une force mobile est illustrée sur la **figure 1**. Une fissure de profondeur (a) située à la position ($X_1 = L_1$) est modélisée comme un ressort de rotation avec une flexibilité sectionnelle. Le modèle de poutre d'Euler – Bernoulli non amorti est utilisé. La poutre est supposé avoir une longueur (L) et de section transversale uniforme avec une hauteur (h) et une largeur (b). On suppose que la force mobile reste en contact avec la surface de la poutre pendant le déplacement et que la fissure reste ouverte pendant toutes les périodes de vibration.

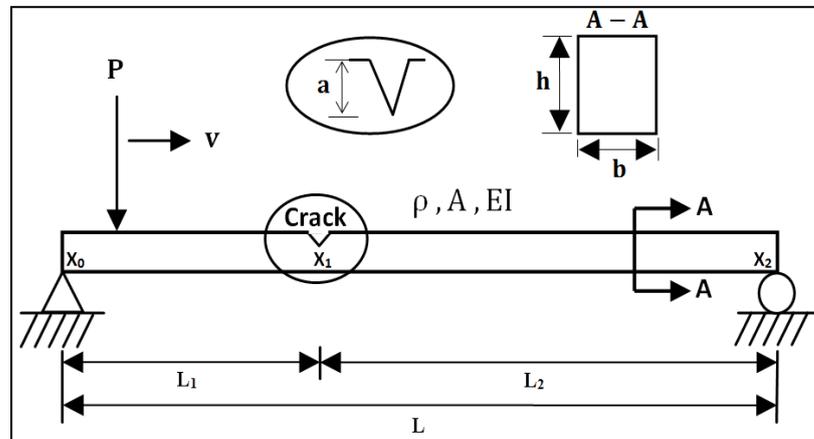


Figure 1: Modèle d'une poutre fissurée simplement appuyée soumise à une force mobile.

L'équation différentielle du mouvement traversée par une force mobile pour chaque segment est:

$$EI \frac{\partial^4 W_i(X, T)}{\partial X^4} + \rho A \frac{\partial^2 W_i(X, T)}{\partial T^2} = P \delta(X - vT) \quad X_{i-1} < X < X_i, \quad i = 1, 2 \quad (6.1)$$

Où : $W_i(X, T)$ désigne la fonction du déplacement transversale de la poutre à la coordonnée axiale X et au temps T . $\delta(X - vT)$ désigne la distribution du delta de Dirac et (v) est la vitesse de la charge mobile P .

En utilisant le concept de superposition modale, le déplacement transversal de chaque segment de ce système peut être exprimé comme suit:

$$W_i(X, T) = \sum_{n=1}^N \varphi_n(X) q_n(T), \quad X_{i-1} < X < X_i, \quad i = 1, 2 \quad (6.2)$$

Où $\varphi_n(X)$ désigne la fonction de forme du mode, $q_n(T)$ est la fonction du temps et N le nombre des modes de vibrations.

6.1.1. La réponse libre: Calcul des formes du mode et des fréquences propres

Les expressions des formes du mode et des fréquences naturelles d'une poutre simplement appuyée d'Euler-Bernoulli non-amortie avec une fissure en utilisant la méthode de Rayleigh ont été déjà obtenues (voir **chapitre 2**), d'où :

L'expression pour les modes propres de la poutre fissurée est:

$$\varphi_n(X) = \begin{cases} \varphi_i(X) = \sin\left(\frac{n\pi X}{L}\right) + c \left[-EI \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi L_i}{L}\right)\right] \left[\frac{L_i}{L} - 1\right] X \\ \varphi_{i+1}(X) = \sin\left(\frac{n\pi X}{L}\right) + c \left[-EI \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi L_i}{L}\right)\right] \left[\frac{L_i}{L}\right] [X - L] \end{cases} \quad (6.3)$$

L'expression analytique des fréquences naturelles est :

$$\omega_{cn} = \omega_n \left[\frac{1 + \eta \gamma_{n1}}{1 + \eta \gamma_{n1} \left[2 + \eta \left(\frac{(n\pi)^4}{3} \right) (l_1 l_2)^2 \right]} \right]^{1/2} \quad (6.4)$$

6.1.2. La réponse forcée: calcul de la réponse temporelle

Afin de calculer la réponse temporelle de la poutre fissurée, l'équation (6.1) est réécrite comme suit :

$$\frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 W_i(X, T)}{\partial X^4} + \frac{\partial^2 W_i(X, T)}{\partial T^2} = \frac{P}{\rho A} \delta(X - vT) \quad (6.5)$$

En substituant l'équation (6.2) dans l'équation (6.5) et en multipliant les deux côtés par la fonction de forme du mode φ_n pour chaque segment respectivement et en intégrant de 0 à L, on obtient après une approximation :

$$q_n(T) \omega_{cn}^2 + \ddot{q}_n(T) = \frac{2P}{\rho AL} \left[1 + \eta \gamma_{n1} \left[2 + \eta \left(\frac{(n\pi)^4}{3} \right) (l_1 l_2)^2 \right] \right]^{-1} \varphi_i(vT); \quad i = 1, 2 \quad (6.6)$$

Par l'utilisation de l'intégrale de Duhamel, avec des conditions initiales nulles, la coordonnée généralisée $q_n(T)$ peut être résolue, comme :

$$q_n(T) = \frac{2P}{\rho AL \omega_{cn}} \left[1 + \eta \gamma_{n1} \left[2 + \eta \left(\frac{(n\pi)^4}{3} \right) (l_1 l_2)^2 \right] \right]^{-1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \varphi_1(vT) \sin[\omega_{cn}(T - \tau)] d\tau \quad ; \quad 0 \leq \tau \leq L_1/v \\ \int_0^{L_1/v} \varphi_1(vT) \sin[\omega_{cn}(T - \tau)] d\tau + \int_{L_1/v}^T \varphi_2(vT) \sin[\omega_{cn}(T - \tau)] d\tau \quad ; \quad \tau > L_1/v \end{array} \right. \quad (6.7)$$

Après un certain arrangement, une solution sous forme fermée peut être obtenue pour la fonction temporelle en tant que :

$$q_n(T) = \frac{2PL^3}{(n\pi)^4 EI} [1 + \eta \gamma_{n1}]^{-1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin(\Omega_n T) - S_n \sin(\omega_{cn} T)}{1 - S_n^2} + \eta(n\pi) \sin(n\pi l_1) (1 - l_1) \Omega_n \left[T - \frac{\sin(\omega_{cn} T)}{\omega_{cn}} \right] \quad ; \quad T \leq L_1/v \\ \frac{\sin(\Omega_n T) - S_n \sin(\omega_{cn} T)}{1 - S_n^2} + \eta(n\pi) \sin(n\pi l_1) \left[\left[\sin \left[\omega_{cn} \left(T - \frac{L_1}{v} \right) \right] - \sin(\omega_{cn} T) \right] S_n \right. \\ \left. + \Omega_n \left[\frac{L_1}{v} \cos \left[\omega_{cn} \left(T - \frac{L_1}{v} \right) \right] - l_1 \left[T - \frac{\sin(\omega_{cn} T)}{\omega_{cn}} \right] \right] + (n\pi) l_1 \left[1 - \left[\omega_{cn} \left(T - \frac{L_1}{v} \right) \right] \right] \right] \quad ; \quad T > L_1/v \end{array} \right. \quad (6.8)$$

Où Ω_n désigne la fréquence de conduite impliquée par la force mobile et S_n est un paramètre de vitesse défini comme :

$$S_n = \frac{\Omega_n}{\omega_{cn}} \quad ; \quad \Omega_n = \frac{n\pi v}{L} \quad (6.9)$$

Une fois les fonctions temporelles sont obtenues, la fonction du déplacement transversale $W_i(X, T)$ peut ensuite être reconstruite à partir de l'équation (6.2).

6.2. Exemples numériques:

Afin d'illustrer la méthode proposée, certains résultats numériques sont calculés et comparés aux données disponibles. Les paramètres géométriques et matériels de la poutre adoptés par (Mahmoud, 2001) sont utilisés :

- Les propriétés géométriques de la poutre sont les suivantes: $L = 50 \text{ m}$, $h = 1 \text{ m}$, $b = 0,5 \text{ m}$.
- Les paramètres du matériau de la poutre sont les suivants: $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$, $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$.
- On suppose que la force mobile $P = 10 \text{ KN}$ se déplace de l'extrémité gauche à l'extrémité droite.

6.2.1. Convergence de la méthode :

Tout d'abord, la convergence de la méthode est étudiée sur la réponse dynamique d'une poutre non fissurée. Pour comparer les résultats, les six premiers modes sont utilisés. Le problème est résolu pour deux vitesses de la force mobile $v = 2$ et 10 m/s à trois positions

différentes ($L/4$; $L/2$ et $2L/3$) en utilisant l'environnement MATLAB et les résultats de la réponse dynamique sont illustrés à la **figure 2**.

À partir de ces figures, on constate que les différences entre ces courbes sont très proches et que les résultats de la réponse dynamique des six premiers modes tendent à être stables. Ainsi, tous les résultats numériques de ce chapitre sont obtenus sur la base des six premiers modes.

Deuxièmement, la précision et l'efficacité de la méthode proposée dans le cas d'une poutre non fissurée sous l'action d'une force mobile concentrée à mi-portée sont examinées. Les déplacements transversaux dynamiques en fonction du temps sont normalisés par rapport à la valeur ($PL^3/48EI$), qui correspond à la réponse statique correspondante due à l'amplitude de la force appliquée au milieu de la poutre.

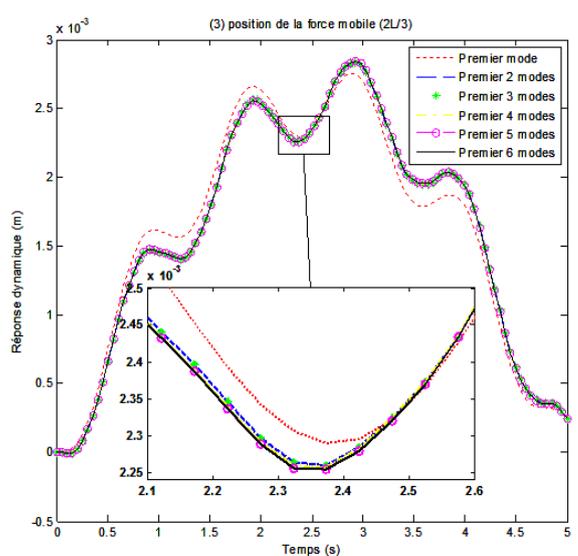
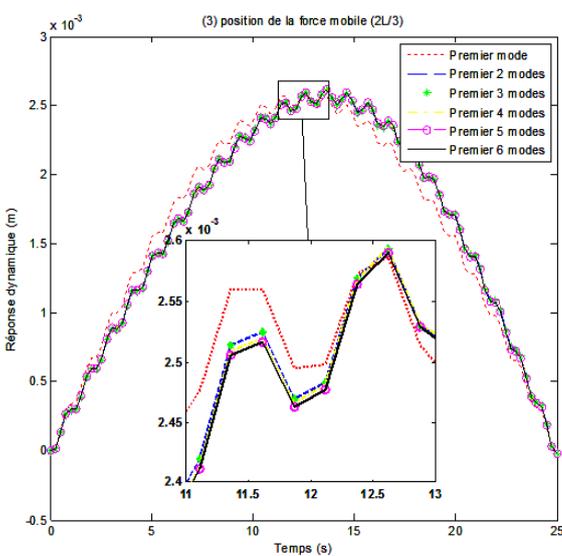
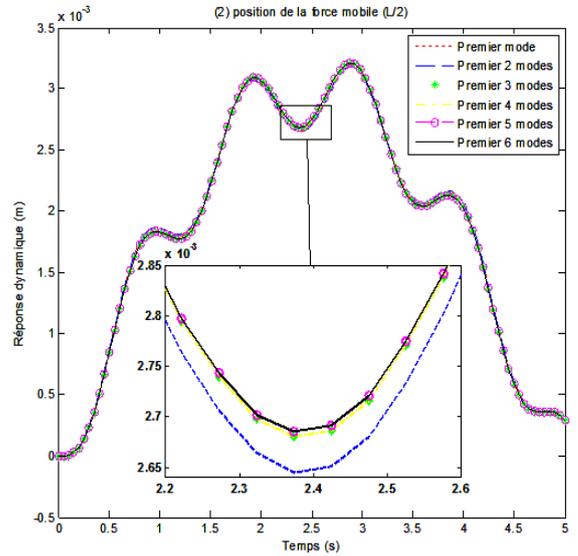
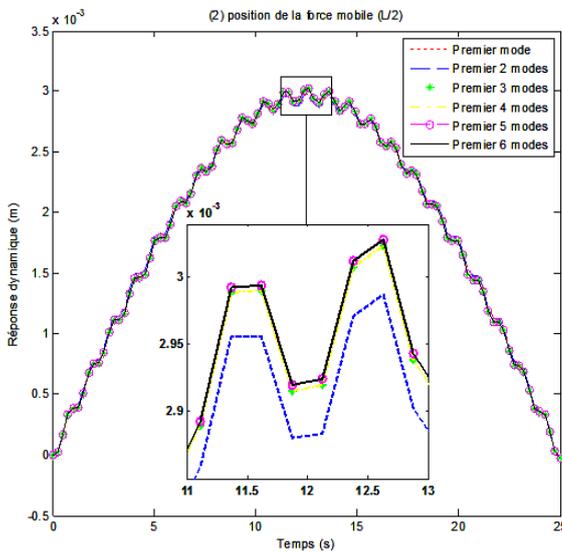
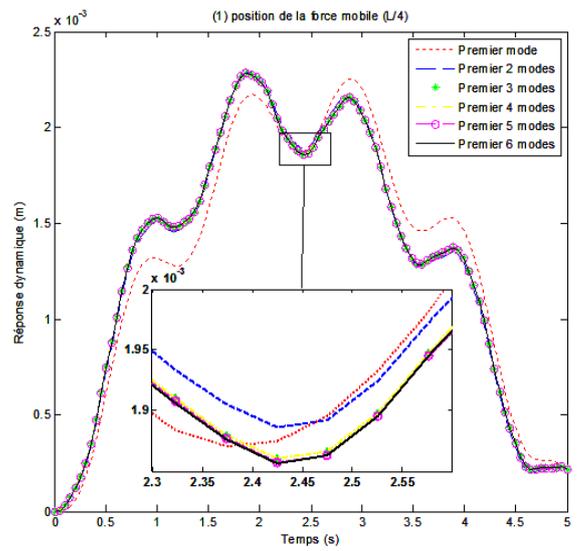
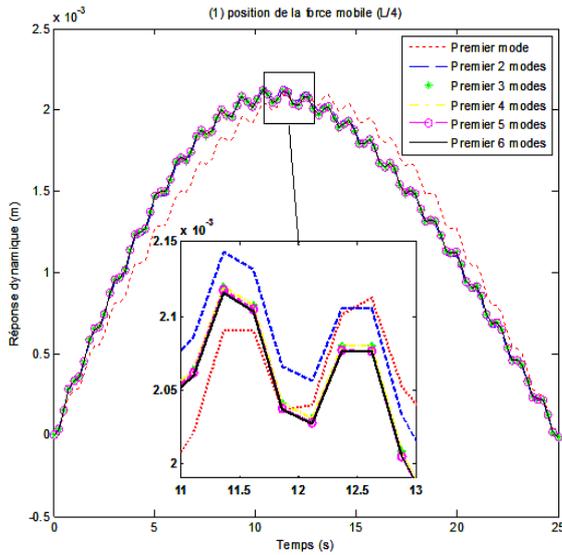
Les réponses maximales normalisées (R.M.N) de la poutre à mi-portée sont extraites de (**Mahmoud, 2001**) et (**Sarvestan et al. 2015**) respectivement à différentes vitesses et comparées à celles obtenues avec la méthode des éléments finis (MEF) et la méthode proposée, les résultats sont présentés sous forme des tableaux (le **tableau 1** et le **tableau 2**).

Vitesse (m/s)	Méthode	Réponse maximale normalisée	E.R.R.M.N (%)
5	(Mahmoud, 2001)	1.05	---
	Méthode proposée	1.0543	0.409
	MEF	1.0524	0.228
10	(Mahmoud, 2001)	1.071	---
	Méthode proposée	1.0799	0.830
	MEF	1.0779	0.644
20	(Mahmoud, 2001)	1.122	---
	Méthode proposée	1.1206	0.124
	MEF	1.1160	0.534
30	(Mahmoud, 2001)	1.455	---
	Méthode proposée	1.4602	0.357
	MEF	1.4572	0.151
40	(Mahmoud, 2001)	1.647	---
	Méthode proposée	1.6473	0.018
	MEF	1.6436	0.206
50	(Mahmoud, 2001)	1.7165	---
	Méthode proposée	1.7185	0.116
	MEF	1.7148	0.099

Tableau 1: Comparaison de la réponse maximale normalisée à mi-portée d'une poutre simplement appuyée entre la méthode proposée, la MEF et (Mahmoud, 2001).

L'erreur relative de la réponse maximale normalisée (E.R.R.M.N) est également calculée pour indiquer l'erreur numérique de la méthode proposée et de la MEF en comparaison avec (**Mahmoud, 2001**) et (**Sarvestan et al. 2015**) respectivement, ou:

$$E. R. R. M. N = \left| \frac{R. M. N_{\text{(Mahmoud 2001)}} - R. M. N_{\text{(méthode proposée)}}}{R. M. N_{\text{(Mahmoud 2001)}}} \right| \times 100 \quad (6.10)$$



(a) $v = 2 \text{ m/s}$

(b) $v = 10 \text{ m/s}$

Figure 2: Convergence de la réponse dynamique d'une poutre non fissurée à trois coordonnées différentes (1) $L/4$, (2) $L/2$ et (3) $2L/3$ pour : (a) $v = 2 \text{ m/s}$ et (b) $v = 10 \text{ m/s}$.

Vitesse (m/s)	Méthode	Réponse maximale normalisée	E.R.R.M.N (%)
15	(Sarvestan et al. 2015)	1.47	---
	Méthode proposée	1.4602	0.666
	MEF	1.4572	0.870
20	(Sarvestan et al. 2015)	1.65	---
	Méthode proposée	1.6473	0.163
	MEF	1.6436	0.387
30	(Sarvestan et al. 2015)	1.73	---
	Méthode proposée	1.7304	0.023
	MEF	1.7278	0.127

Tableau 2: Comparaison de la réponse maximale normalisée à mi-portée d'une poutre simplement appuyée entre la méthode proposée, la MEF et (Sarvestan et al. 2015).

On peut constater que les résultats de la méthode proposée sont en excellent accord avec la MEF et les études disponibles dans la littérature. De plus, le maximum E.R.R.M.N ne dépasse pas 1% dans tous les cas. Cela permettrait de vérifier la plus grande précision et l'efficacité de l'utilisation de la méthode actuelle.

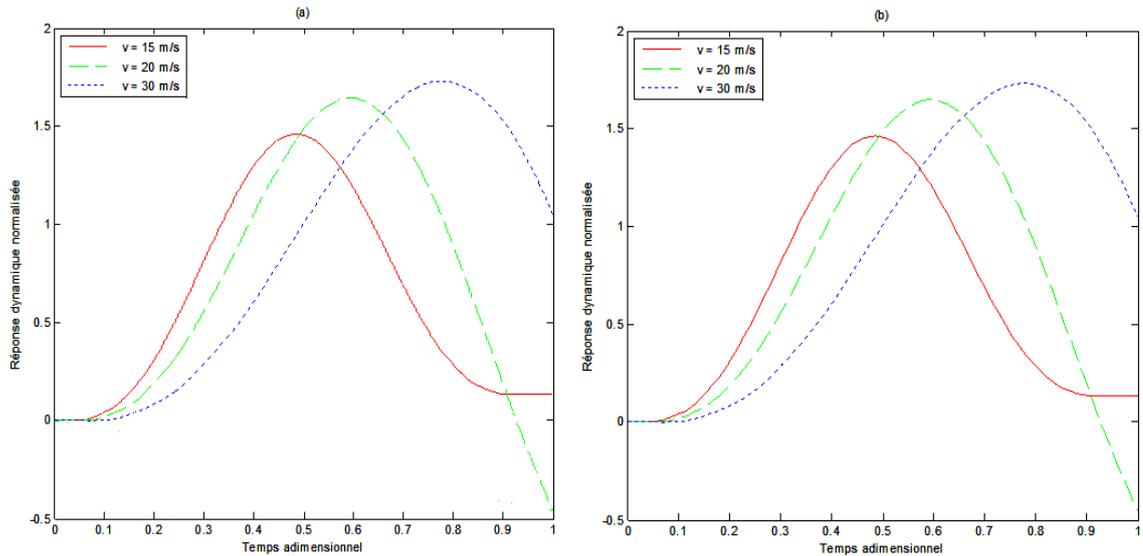


Figure 3: La réponse normalisée à mi-portée d'une poutre simplement appuyée soumise à une force mobile avec différente vitesse, en utilisant: (a) la MEF et (b) la méthode proposée.

La réponse normalisée à mi-portée de la poutre soumise à une force en mouvement avec différentes vitesses en utilisant la MEF et la méthode proposée a été comparée à la **figure 3**. On peut voir que les courbes sont presque identiques.

Sur la **figure 4**, les réponses normalisées à mi-portée de la poutre pour différentes vitesses sont présentées avec le procédé proposé. On peut voir qu'une augmentation de la vitesse entraînerait une augmentation correspondante de la réponse dynamique maximale.

6.2.2. Validation de la méthode :

La présence d'une fissure transversale diminue la rigidité de la poutre et modifie donc la réponse vibratoire libre de sorte qu'elle réduit les fréquences propres et modifie les formes du mode.

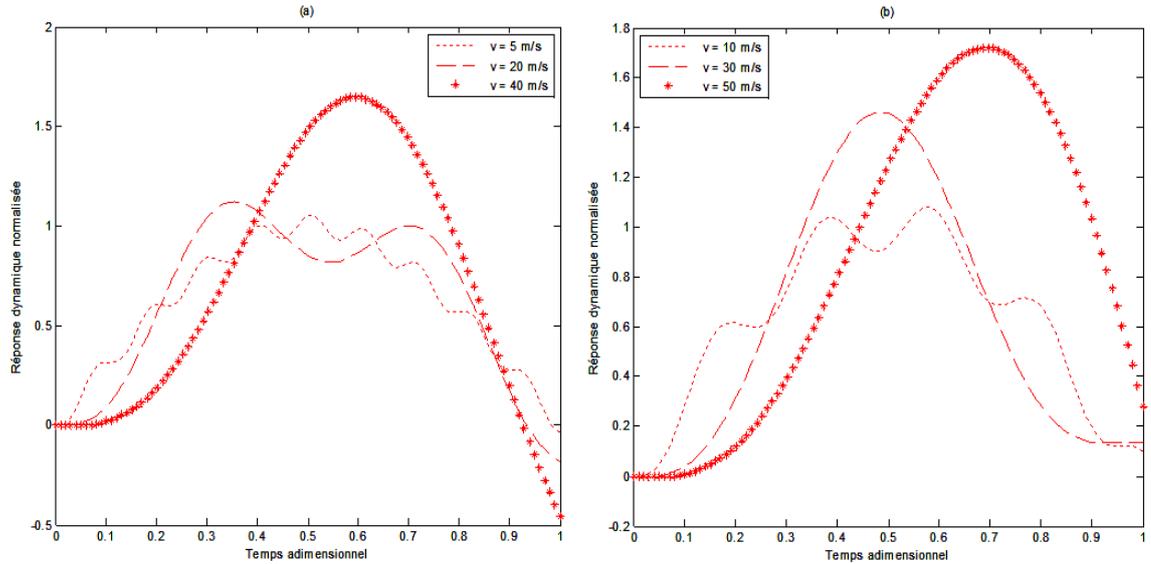


Figure 4: La réponse normalisée à mi-portée d’une poutre simplement appuyée soumise à une force mobile, en utilisant la méthode proposée, avec différente vitesse: (a) $v = 5, 20$ et 40 m/s ; et (b) $v = 10, 30$ et 50 m/s.

Pour valider la méthode proposée dans le cas d'une poutre simplement appuyée fissurée, les propriétés matérielles et géométriques de la poutre susmentionnée (voir section 6.2) ont été utilisées et tous les calculs ont été effectués à l'aide du logiciel MATLAB. La fissure est située à la position $L_1 = 10$ m avec une profondeur de fissure $a = 0.3$ m.

Le **tableau 3** montre une comparaison des six premières fréquences naturelles de la poutre non fissurée et fissurée. Les résultats de la méthode proposée sont calculés et comparés aux résultats de la méthode de la matrice du transfert (MMT). On peut constater une réduction des fréquences propres de la poutre fissurée. Les erreurs relatives des six premières fréquences naturelles (E.R.F.N) obtenues par les deux méthodes sont également calculées, comme indiqué dans le **tableau 3**, où:

$$E. R. F. N (\%) = \left| \frac{\omega_{cn(MMT)} - \omega_{cn(Méthode\ proposée)}}{\omega_{cn(MMT)}} \right| \times 100 \quad (6.11)$$

Les résultats présentés dans le **tableau 3** montrent un accord raisonnable entre les deux méthodes, mais la différence entre les fréquences propres augmente pour les modes d'ordre supérieur, ce qui correspond à la même conclusion que celle discutée par **Chettah et Lassoued (2018)**.

Cas		Fréquences naturelles (rad/s)					
		1 ^{er}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	4 ^{ème}	5 ^{ème}	6 ^{ème}
Non-fissurée		5.890	23.562	53.016	94.251		212.065
Fissurée	méthode proposée	5.853	23.104	51.202	91.471	147.267	188.821
	MMT		23.181	52.192	93.704		210.773
E.R.F.N (%)		≈ 0	0.334	1.896	2.382	≈ 0	10.415

Tableau 3: Comparaison des six premières fréquences naturelles de la poutre non fissurée et fissurée, obtenue par les deux méthodes pour une fissure située à $L_1 = 10$ m avec une profondeur $a = 0,3$ m.

Les formes du mode normalisées correspondantes de ce système non fissuré et fissuré sont également déterminées et illustrées à la **figure 5**. On peut voir que la différence entre les

formes du mode augmente également pour les modes supérieurs (sauf pour le cinquième mode).

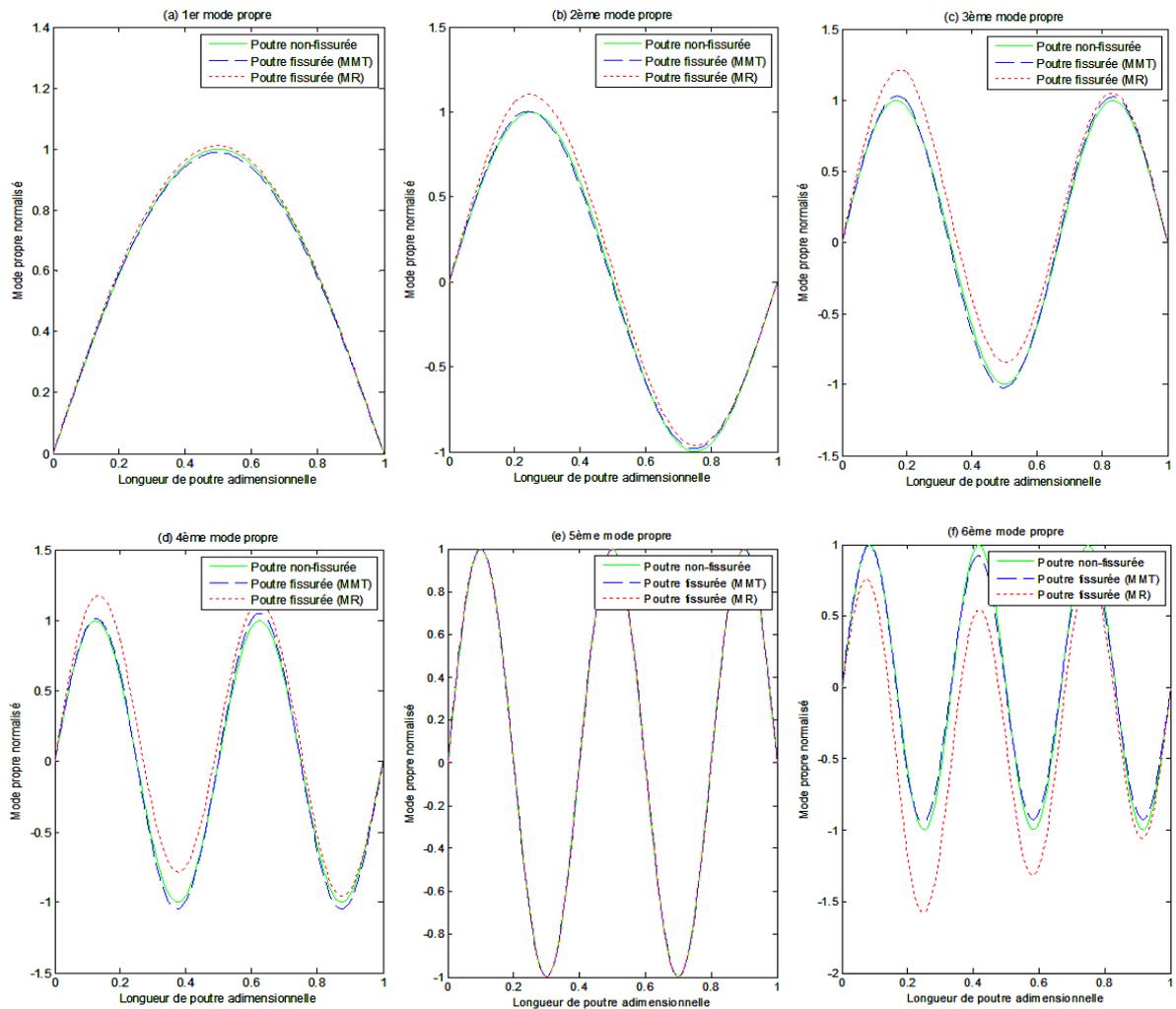


Figure 5: Les six premières formes du mode d'une poutre non fissurée et fissurée obtenues par la méthode de la matrice du transfert (MMT) et la méthode proposée (MR).

Afin d'étudier la réponse dynamique d'une poutre fissurée simplement supportée sous l'action d'une force mobile concentrée. Plusieurs enquêtes sont considérées et comparées aux données disponibles.

6.2.2.1. L'effet de la profondeur de la fissure :

Dans cet exemple, la fissure est située à mi-portée de la poutre et la vitesse de la force mobile est de 30 m/s pour (Mahmoud, 2001) et de 20 m/s pour (Sarvestan et al. 2015).

Les **tableaux 4 et 5** présentent une comparaison de la réponse maximale normalisée entre les résultats de la méthode proposée et ceux de (Mahmoud, 2001) et (Sarvestan et al. 2015), respectivement, en modifiant le coefficient de profondeur de la fissure de 0,1 à 0,5. On peut constater que les résultats sont très acceptables et que le maximum E.R.R.M.N est rapporté au niveau du ratio 0,5.

$\xi = a/h$	Méthode	Réponse maximale normalisée	E.R.R.M.N (%)
0	(Mahmoud, 2001)	1.455	0.357
	Méthode proposée	1.4602	
0.1	(Mahmoud, 2001)	Pas Mentionnée	-----
	Méthode proposée	1.4708	
0.2	(Mahmoud, 2001)	1.49	0.731
	Méthode proposée	1.5009	
0.3	(Mahmoud, 2001)	1.535	1.472
	Méthode proposée	1.5576	
0.4	(Mahmoud, 2001)	1.615	2.619
	Méthode proposée	1.6573	
0.5	(Mahmoud, 2001)	1.767	5.127
	Méthode proposée	1.8576	

Tableau 4: Comparaison de la réponse maximale normalisée à mi-portée d'une poutre simplement appuyée entre la méthode proposée et (Mahmoud, 2001) avec différente profondeur de fissure pour $l_1 = 0.5$ et $v = 30$ m/s.

$\xi = a/h$	Méthode	Réponse maximale normalisée	E.R.R.M.N (%)
0	(Sarvestan et al. 2015)	1.65	0.163
	Méthode proposée	1.6473	
0.2	(Sarvestan et al. 2015)	1.68	0.702
	Méthode proposée	1.6682	
0.35	(Sarvestan et al. 2015)	1.73	0.862
	Méthode proposée	1.7157	
0.5	(Sarvestan et al. 2015)	1.84	0.461
	Méthode proposée	1.8315	

Tableau 5: Comparaison de la réponse maximale normalisée à mi-portée d'une poutre simplement appuyée entre la méthode proposée et (Sarvestan et al. 2015) avec différente profondeur de fissure pour $l_1 = 0.5$ et $v = 20$ m/s.

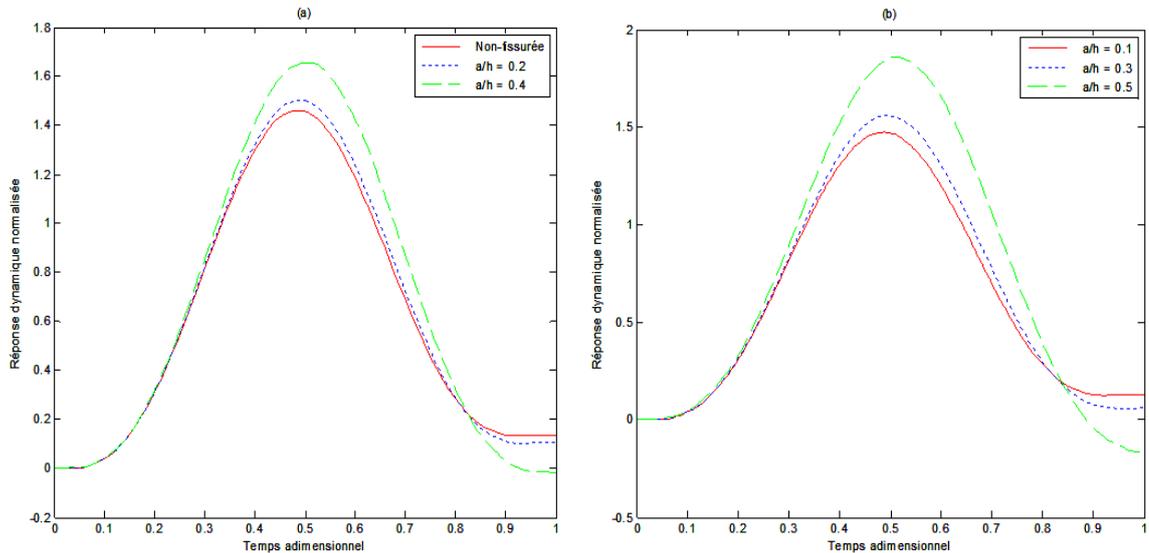


Figure 6: Effet de la profondeur de la fissure sur la réponse dynamique à mi-portée de la poutre en utilisant la méthode proposée pour $l_1 = 0.5$ et $v = 30$ m/s.

La **figure 6** montre la différence entre la réponse à mi-portée d'une poutre avec différente profondeur de fissure et le même pour une poutre non fissurée. On peut constater que, lorsque la profondeur de la fissure augmente, la valeur de R.M.N augmente et que la courbe de la réponse dynamique devient plus grande en prenant plus du temps pour s'accumuler.

6.2.2.2. L'effet de la vitesse de la force mobile :

Dans cet exemple, la fissure est située à mi-portée d'une poutre avec une profondeur de 0,5 m.

Le **tableau 6** présente une comparaison de la réponse maximale normalisée entre les résultats de la méthode proposée et ceux de (Mahmoud, 2001) en modifiant la vitesse de la force mobile de 5 à 50 m/s. On peut voir que l'E.R.R.M.N diminue avec l'augmentation de la vitesse et que le maximum E.R.R.M.N est rapporté à la vitesse de 5 m/s.

Vitesse (m/s)	Méthode	Réponse maximale normalisée	E.R.R.M.N (%)
5	(Mahmoud, 2001)	1.253	6.943
	Méthode proposée	1.34	
10	(Mahmoud, 2001)	1.254	5.837
	Méthode proposée	1.3272	
20	(Mahmoud, 2001)	1.36	4.448
	Méthode proposée	1.4205	
30	(Mahmoud, 2001)	1.767	5.127
	Méthode proposée	1.8576	
40	(Mahmoud, 2001)	1.974	2.689
	Méthode proposée	2.0271	
50	(Mahmoud, 2001)	2.03	1.610
	Méthode proposée	2.0627	

Tableau 6: Comparaison de la réponse maximale normalisée à mi-portée d'une poutre simplement appuyée entre la méthode proposée et (Mahmoud, 2001) avec différente vitesse pour $l_1 = 0.5$ et $\xi = 0.5$.

La **figure 7** illustre l'effet de la vitesse de la force mobile à mi-portée de la poutre. Il est évident que le R.M.N augmente avec l'augmentation de la vitesse de la force mobile.

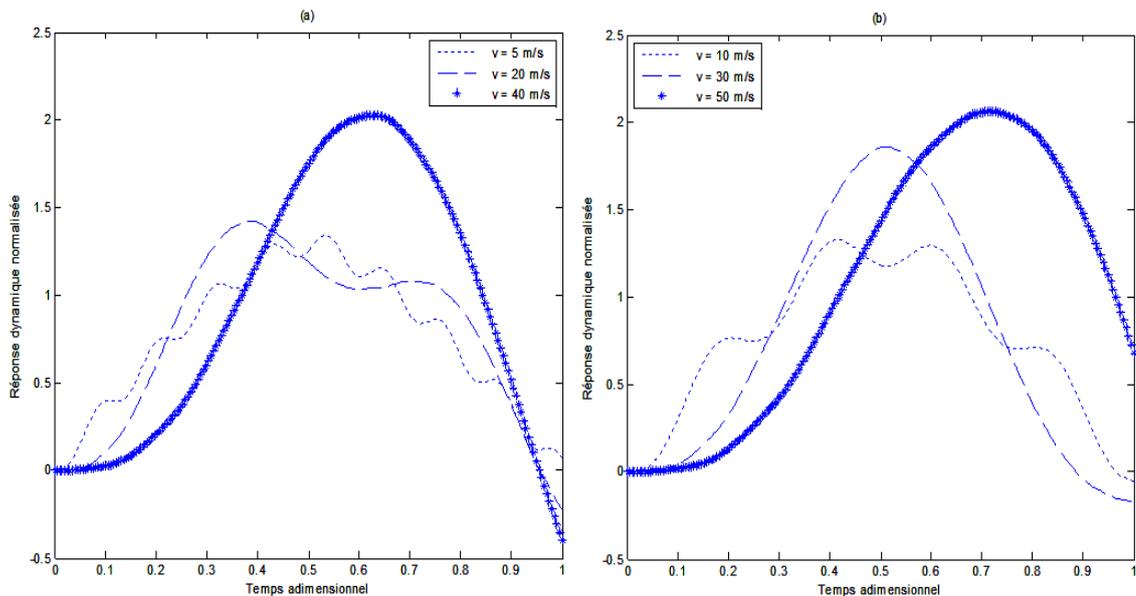


Figure 7: Effet de la vitesse sur la réponse normalisée à mi-portée d'une poutre simplement appuyée fissurée en utilisant la méthode proposée pour $l_1 = 0.5$ et $\xi = 0.5$: (a) $v = 5, 20$ et 40 m/s (b) $v = 10, 30$ et 50 m/s.

6.2.2.3. L'effet de l'amplitude de la force mobile :

L'effet de l'amplitude de la force mobile est étudié en augmentant l'amplitude de la force de 20 à 100 kN. La **figure 8** illustre l'effet de l'amplitude de la force mobile sur la réponse dynamique à mi-portée d'une poutre fissurée et non-fissurée soumise à différente force mobile avec une vitesse constante $v = 30 \text{ m/s}$. On peut constater qu'en augmentant l'amplitude de la force mobile, la réponse dynamique à mi-portée de la poutre augmente.

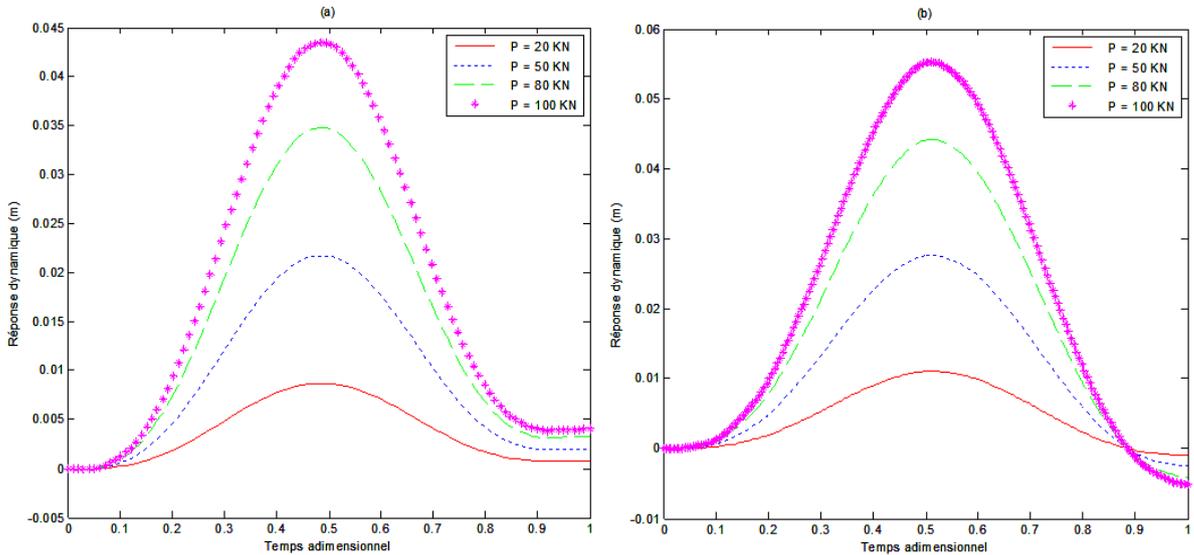
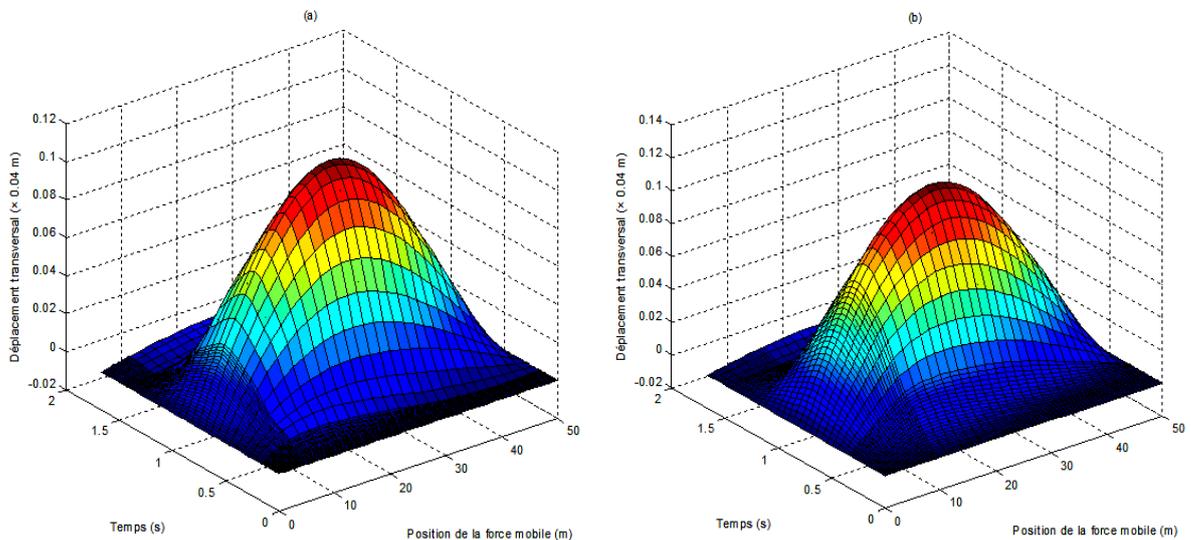


Figure 8: Effet de l'amplitude de la force mobile sur la réponse d'une poutre simplement appuyée à mi-portée avec $v = 30 \text{ m/s}$, $l_1 = 0.5$ et $\xi = 0.5$, en utilisant la méthode proposée : (a) poutre non-fissurée (b) poutre fissurée.

6.2.2.4. L'effet de la position de fissure :

L'effet de la position de fissure est également étudié en augmentant le rapport de position de 0,1 à 0,4.

Les résultats sur les déplacements transversaux de la poutre fissurés simplement appuyée sont présentés sur la **figure 9** sous forme de graphiques 3D avec $v = 30 \text{ m/s}$, $P = 10 \text{ kN}$ et $\xi = 0,5$. Il est évident que lorsque la fissure se déplace vers le milieu de la poutre, la réponse dynamique augmente.



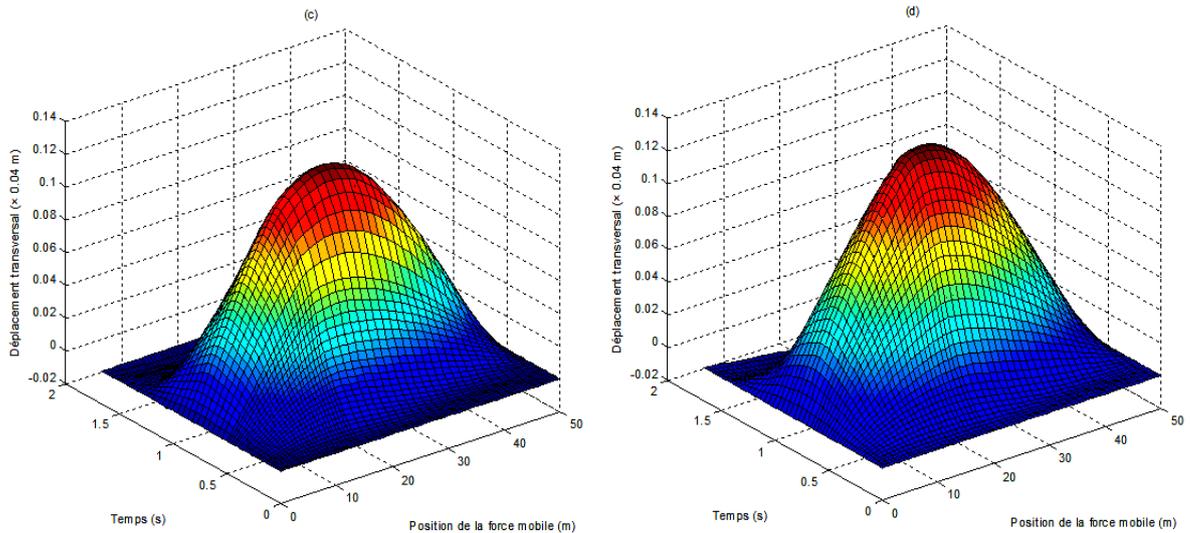


Figure 9: Effet de la position de fissure sur les déplacements transversaux d'une poutre fissurée simplement appuyée avec : $v = 30 \text{ m/s}$, $P = 10 \text{ KN}$ et $\xi = 0.5$: (a) $l_1 = 0.1$ (b) $l_1 = 0.2$ (c) $l_1 = 0.3$ (d) $l_1 = 0.4$.

6.3. Conclusion :

Une solution analytique approximative pour les réponses forcées d'une poutre fissurée traversée par une seule force mobile à vitesse constante est fournie. Les fréquences propres et les formes du mode obtenues à partir de la méthode de Rayleigh sont utilisées pour déterminer la réponse forcée par la méthode de superposition des modes et l'intégrale de Duhamel. Des poutres d'Euler-Bernoulli simplement appuyées avec et sans fissure sont utilisées dans les exemples numériques pour valider la méthode actuelle et prouver son efficacité de calcul par rapport à la MEF, MSEF et la technique d'analyse modale itérative. Les effets de la profondeur de fissure, la position de fissure, de la vitesse et de l'amplitude de la force mobile sur les réponses dynamiques des poutres sont prédits. Les réponses obtenues par la méthode approchée s'avèrent être aussi précises que celles déterminées par les méthodes mentionnées précédemment, tandis qu'une faible différence est observée dans le cas des poutres à faible vitesse avec un taux de fissures égal à 0,5. Cela est dû à la grande sensibilité de la méthode à la profondeur de la fissure.

L'avantage de cette méthode est qu'elle est plus simple dans l'application et plus rapide en termes de réduction du temps et du coût des calculs par rapport aux autres méthodes. Le présent document ne prend en compte que des poutres simplement appuyées avec une fissure, mais la méthode proposée, qui fait l'objet d'un futur projet de recherche, permet d'analyser les poutres élastiquement supportées comportant un nombre arbitraire de fissures sous des charges mobiles.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES

Dans les domaines de génie civil, mécanique et aérospatial, la structure doit répondre à quelques exigences telle que la durabilité, la résistance, le travail en toute sécurité et la capacité de satisfaire les besoins des utilisateurs pendant sa durée de vie opérationnelle, ce qui nécessite un contrôle qui permet une évaluation de son état à partir des conditions structurelles actuelles, aussi fournir une certaine prévision de son futur rendement et des informations pour la maintenance, dans le but de vérifier son intégrité et conformité aux règlements applicables.

Au cours des dernières décennies, en Algérie comme ailleurs dans le monde, le vieillissement et la détérioration des structures existantes ont été les points chauds dans plusieurs domaines d'ingénierie. Certains chercheurs sont engagés dans le développement des méthodes de réhabilitation, pendant que d'autres ont été accordés à l'analyse et l'évaluation de ces structures, pour éviter la rupture brutale de ses composants par les méthodes de détection des dommages à l'état précoce. Plus précisément, les méthodes d'identification des fissures et la surveillance de l'intégrité structurelle. Ces derniers ont été au centre de l'attention de la part des communautés scientifiques et techniques et ont fait l'objet d'un grand intérêt avec des enquêtes complètes et importantes couvrant diverses méthodologies et applications pour la détection, la localisation et l'estimation des fissures ou des changements dans une structure existante, afin d'obtenir des outils fiables et efficaces pour maintenir la sécurité et la performance des structures sur une base proactive.

L'objectif principal de cette étude est d'analyser l'effet des paramètres influençant le comportement dynamique des poutres fissurées en contribuant avec des méthodes simplifiées pour résoudre les problèmes liés à ce sujet :

Dans la première contribution, la méthode de Rayleigh a été étendue pour deux fissures, modes multiples, conditions aux limites élastiques, problème inverse et a également été utilisée pour étudier la réponse forcée des poutres fissurées, en surmontant les limitations théoriques du nombre des modes et de fissures, dépassant ainsi les limites de l'utilisation d'un plus grand nombre d'éléments finis pour obtenir des résultats avec une précision suffisante en ce qui concerne la méthode des éléments finis et les problèmes de résolution numérique de l'équation algébrique concernant la méthode de la matrice du transfert dans les travaux précédents.

Un autre problème traité est que la précision et l'applicabilité de la méthode peuvent changer considérablement en fonction de la plage du mode et des paramètres de fissure (position et profondeur). Une attention particulière est accordée au choix du coefficient de flexibilité et à son optimisation.

Dans la deuxième contribution, l'influence des paramètres de fissure sur le comportement dynamique des poutres fissurées a fait l'objet d'une étude approfondie dans plusieurs cas.

Dans la troisième contribution, la méthode a été développée sur la base du problème inverse, permettant la localisation de la fissure à travers les fréquences mesurées, ainsi que la quantification de la profondeur de la fissure dans une seconde étape.

Dans la quatrième contribution, des expressions simplifiées basées sur la méthode de Rayleigh ont été proposées dans le cas des poutres élastiquement supportées pour obtenir les valeurs les plus proches des mesures afin de représenter la condition limite réelle et en tenant compte de l'effet des fissures sur l'affaiblissement et la rigidité inconnue des conditions aux limites.

Dans la cinquième contribution, la méthode a été incorporée avec l'intégrale de Duhamel pour étudier la réponse forcée d'une poutre fissurée. Une étude paramétrique a été menée

pour montrer l'influence des différents paramètres sur le déplacement transversal des poutres.

Dans la dernière contribution, les méthodes proposées sont validées et leurs performances sont testées de manière approfondie en les comparant à de nombreuses études de cas d'expériences de laboratoire et des simulations numériques.

Les conclusions suivantes peuvent être énoncées :

- A la lumière des résultats obtenus dans le deuxième chapitre 'comparaison entre les différents coefficients de flexibilité', on observe une dispersion significative des résultats récoltés surtout au niveau des profondeurs de fissures plus importantes. Cette non-concordance peut être expliquée par l'adoption des différentes méthodes pour chaque modèle analytique malgré la similitude des paramètres traités. L'écart observé montre bien que, certains aspects semblent encore échapper à la prédiction réelle des résultats ;
- Les fréquences propres de la poutre fissurée sont inférieures à celles de la poutre non fissurée. C'est un fait dû à la réduction de la rigidité de la poutre causée par l'existence des fissures. En outre, comme la fréquence naturelle est en fonction de la rigidité, le nombre des fissures, l'augmentation de la profondeur de la fissure et le rapport de la rigidité en flexion de la poutre à la rigidité du ressort élastique respectivement, ils provoquent une réduction plus importante de la fréquence propre ;
- La profondeur de la fissure n'a aucun effet sur les secondes fréquences naturelles et les formes du mode à mi-portée;
- Les premières fréquences naturelles de la poutre fissurée diminuent progressivement pour la même profondeur de fissure lorsque l'emplacement de la fissure se déplace vers le milieu, ce qui est l'inverse pour les secondes fréquences naturelles;
- Les changements de fréquences naturelles peuvent être utilisés comme un problème inverse pour détecter la présence des fissures dans les structures;
- La distance entre deux fissures dans une poutre affecte de manière significative le changement des fréquences. La diminution de la fréquence propre est largement dominée par la plus profonde des fissures sauf si elle est située près du nœud ou du "point d'inflexion" de la forme du mode ;
- L'amplitude des formes du mode augmente à mesure que la profondeur de la fissure et le rapport de la rigidité en flexion de la poutre à la rigidité du ressort élastique augmentent respectivement;
- Les discontinuités dans certaines formes du mode peuvent fournir des informations spatiales supplémentaires pour la détection des fissures ;
- Pour estimer la position et la profondeur de la fissure à partir d'une mesure de vibration, il convient de prendre en compte les informations relatives à la fréquence et à la forme du mode. Cependant, il faut interpréter les résultats avec soin et procéder à une analyse multimodale pour plus de précision ;
- La résolution des problèmes inverses liés aux méthodes d'identification des fissures est basée principalement sur la résolution des problèmes directs. En d'autres termes, il faut minimiser le maximum l'erreur entre les résultats analytiques et/ou numérique et les résultats expérimentaux, et ça ne peut pas être fait sauf en éliminant les causes principales de ces erreurs, on peut citer par exemple : les conditions aux limites, les coefficients de flexibilités... etc. ;
- L'utilisation des supports élastiques au lieu des supports idéals semble la solution la plus pratique pour représenter la condition aux limites réelle des structures de types poutres ;

- L'effet exact de la fissure et de la force mobile sur le déplacement transversale des poutres dépend de la vitesse, du temps, de la profondeur et l'emplacement de la fissure et de l'amplitude de la force en mouvement.

Recommandations pour les travaux futurs :

La portée future des travaux peut être :

- La vibration et la stabilité des poutres fissurées compte tenu de la non-linéarité ;
- La vibration des poutres en béton armé avec fissures ;
- La proposition d'un nouveau coefficient de flexibilité valable pour différent niveau de profondeur des fissures ;
- Développement d'une méthode capable de détecter plusieurs nombres de fissures ;
- L'étude de la réponse dynamique d'une poutre fissurée sur des supports élastiques soumise à une charge mobile basée sur l'utilisation du modèle de poutre de Timoshenko.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Abu Husain, N., Haddad Khodaparast, H., & Ouyang, H. (2010). FE model updating of welded structures for identification of defects. *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, 6(2-4), 163-175.
- Adeli, H., & Yeh, C. (1989). Perceptron learning in engineering design. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 4(4), 247-256.
- Agarwalla, D. K., & Parhi, D. R. (2013). Effect of crack on modal parameters of a cantilever beam subjected to vibration. *Procedia Engineering*, 51, 665-669.
- Alebrahim, R., Haris, S. M., Mohamed, N. A. N., & Abdullah, S. (2016). Vibration Analysis of Multi-Cracked Beam Traversed by Moving Mass. *Asian Journal of Materials Science*, 8, 1-10.
- Alsabbagh, A. S. Y., Abuzeid, O. M., & Dado, M. H. (2009). Simplified stress correction factor to study the dynamic behavior of a cracked beam. *Applied Mathematical Modelling*, 33(1), 127-139.
- Al-Said, S. M., Naji, M., & Al-Shukry, A. A. (2006). Flexural vibration of rotating cracked Timoshenko beam. *Journal of Vibration and Control*, 12(11), 1271-1287.
- Altunışık, A. C., Okur, F. Y., & Kahya, V. (2017a). Automated model updating of multiple cracked cantilever beams for damage detection. *Journal of Constructional Steel Research*, 138, 499-512.
- Altunışık, A. C., Okur, F. Y., & Kahya, V. (2017b). Structural identification of a cantilever beam with multiple cracks: Modeling and validation. *International Journal of Mechanical Sciences*, 130, 74-89.
- Altunışık, A. C., Okur, F. Y., & Kahya, V. (2017c). Modal parameter identification and vibration based damage detection of a multiple cracked cantilever beam. *Engineering Failure Analysis*, 79, 154-170.
- Altunışık, A. C., Okur, F. Y., & Kahya, V. (2018a). Vibrations of a Box-Sectional Cantilever Timoshenko Beam with Multiple Cracks. *International Journal of Steel Structures*, 1-15.
- Altunışık, A. C., Okur, F. Y., Karaca, S., & Kahya, V. (2018b). Vibration-based damage detection in beam structures with multiple cracks: modal curvature vs. modal flexibility methods. *Nondestructive Testing and Evaluation*, 1-21.
- Alvandi, A., & Cremona, C. (2006). Assessment of vibration-based damage identification techniques. *Journal of sound and vibration*, 292(1-2), 179-202.
- Aminpour, H., Nazari, F., & Baghalian, S. (2012). Applying artificial neural network and wavelet analysis for multiple cracks identification in beams. *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, 8(1), 51-59.
- Anifantis, N., & Dimarogonas, A. (1983). Stability of columns with a single crack subjected to follower and vertical loads. *International Journal of Solids and Structures*, 19(4), 281-291.
- Ariaei, A., Ziaei-Rad, S., & Ghayour, M. (2009). Vibration analysis of beams with open and breathing cracks subjected to moving masses. *Journal of sound and vibration*, 326(3-5), 709-724.

- Ariaei, A., Ziaei-Rad, S., & Ghayour, M. (2010). Repair of a cracked Timoshenko beam subjected to a moving mass using piezoelectric patches. *International Journal of Mechanical Sciences*, 52(8), 1074-1091.
- Attar, M. (2012). A transfer matrix method for free vibration analysis and crack identification of stepped beams with multiple edge cracks and different boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 57(1), 19-33.
- Attar, M., Karrech, A., & Regenauer-Lieb, K. (2017). Dynamic response of cracked Timoshenko beams on elastic foundations under moving harmonic loads. *Journal of Vibration and Control*, 23(3), 432-457.
- Azizi, N., Saadatpour, M. M., & Mahzoon, M. (2012). Using spectral element method for analyzing continuous beams and bridges subjected to a moving load. *Applied Mathematical Modelling*, 36(8), 3580-3592.
- Bakhtiari-Nejad, F., Khorram, A., & Rezaeian, M. (2014). Analytical estimation of natural frequencies and mode shapes of a beam having two cracks. *International Journal of Mechanical Sciences*, 78, 193-202.
- Bakhtiari-Nejad, F., Rahai, A., & Esfandiari, A. (2005). A structural damage detection method using static noisy data. *Engineering structures*, 27(12), 1784-1793.
- Barr, A. D. S. (1966). An extension of the Hu-Washizu variational principle in linear elasticity for dynamic problems. *ASME J. Appl. Mech*, 33(2), 465.
- Behzad, M., Ghadami, A., Maghsoodi, A., & Hale, J. M. (2013). Vibration based algorithm for crack detection in cantilever beam containing two different types of cracks. *Journal of Sound and Vibration*, 332(24), 6312-6320.
- Benzley, S. E. (1974). Representation of singularities with isoparametric finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8(3), 537-545.
- Bilello, C., & Bergman, L. A. (2004). Vibration of damaged beams under a moving mass: theory and experimental validation. *Journal of Sound and Vibration*, 274(3-5), 567-582.
- Binici, B. (2005). Vibration of beams with multiple open cracks subjected to axial force. *Journal of Sound and Vibration*, 287(1-2), 277-295.
- Byskov, E. (1970). The calculation of stress intensity factors using the finite element method with cracked elements. *International Journal of Fracture Mechanics*, 6(2), 159-167.
- Caddemi, S., & Calio, I. (2009). Exact closed-form solution for the vibration modes of the Euler-Bernoulli beam with multiple open cracks. *Journal of Sound and Vibration*, 327(3-5), 473-489.
- Carden, E. P., & Fanning, P. (2004). Vibration based condition monitoring: a review. *Structural health monitoring*, 3(4), 355-377.
- Carder, D. S. (1937). Observed vibrations of bridges. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 27(4), 267-303.
- Carneiro, S. H., & Inman, D. J. (2002). Continuous model for the transverse vibration of cracked Timoshenko beams. *Journal of vibration and acoustics*, 124(2), 310-320.
- Cawley, P., & Adams, R. D. (1979). The location of defects in structures from measurements of natural frequencies. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 14(2), 49-57.

- Celico fadini, G. I. A. N. M. A. R. I. A. (2014). Crack identification method for mechanical structures.
- Chasalevris, A. C., & Papadopoulos, C. A. (2006). Identification of multiple cracks in beams under bending. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(7), 1631-1673.
- Chasalevris, A. C., & Papadopoulos, C. A. (2008). Coupled horizontal and vertical bending vibrations of a stationary shaft with two cracks. *Journal of Sound and Vibration*, 309(3-5), 507-528.
- Chati, M., Rand, R., & Mukherjee, S. (1997). Modal analysis of a cracked beam. *Journal of sound and vibration*, 207(2), 249-270.
- Chen, J. C., & Garba, J. A. (1988). On-orbit damage assessment for large space structures. *AIAA journal*, 26(9), 1119-1126.
- Cheng, S. (1998). Non-destructive evaluation of cracking in tubular T-joints using vibration procedures (Doctoral dissertation, Memorial University of Newfoundland).
- Cheng, S. M., Swamidass, A. S. J., Wu, X. J., & Wallace, W. (1999). Vibrational response of a beam with a breathing crack.
- Chettah, M., & Lassoued, R. (2018). Comparative study of direct and inverse problems of cracked beams. In *MATEC Web of Conferences* (Vol. 149, p. 02015). EDP Sciences.
- Chettah, M., & Lassoued, R. (2019). Free vibration analysis of a cracked elastically supported beam. *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, 15(1), 1-20.
- Chondros, T. G., & Dimarogonas, A. D. (1980). Identification of cracks in welded joints of complex structures. *Journal of sound and vibration*, 69(4), 531-538.
- Chondros, T. G., Dimarogonas, A. D., & Yao, J. (1998). A continuous cracked beam vibration theory. *Journal of sound and vibration*, 215(1), 17-34.
- Chondros, T. G., Dimarogonas, A. D., & Yao, J. (2001). Vibration of a beam with a breathing crack. *Journal of Sound and vibration*, 239(1), 57-67.
- Christides, S., & Barr, A. D. S. (1984). One-dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 26(11-12), 639-648.
- Christides, S., & Barr, A. D. S. (1986). Torsional vibration of cracked beams of non-circular cross-section. *International journal of mechanical sciences*, 28(7), 473-490.
- Corn, S., Bouhaddi, N., & Piranda, J. (1997). Transverse vibrations of short beams: finite element models obtained by a condensation method. *Journal of Sound and vibration*, 201(3), 353-363.
- Cornwell, P., Doebling, S. W., & Farrar, C. R. (1999). Application of the strain energy damage detection method to plate-like structures. *Journal of sound and vibration*, 224(2), 359-374.
- Cunha, A., & Caetano, E. (2006). Experimental modal analysis of civil engineering structures.
- Dado, M. H. F., & Abuzeid, O. (2003). Coupled transverse and axial vibratory behaviour of cracked beam with end mass and rotary inertia. *Journal of sound and vibration*, 261(4), 675-696.
- Darpe, A. K., Gupta, K., & Chawla, A. (2003). Dynamics of a two-crack rotor. *Journal of Sound and Vibration*, 259(3), 649-675.

- Das, S., Saha, P., & Patro, S. K. (2016). Vibration-based damage detection techniques used for health monitoring of structures: a review. *Journal of Civil Structural Health Monitoring*, 6(3), 477-507.
- Dilena, M., Dell'Oste, M. F., & Morassi, A. (2017). Crack identification in rods and beams under uncertain boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 133, 651-661.
- Dimarogonas, A. D. (1996). Vibration of cracked structures: a state of the art review. *Engineering fracture mechanics*, 55(5), 831-857.
- Dimarogonas, A. D., & Papadopoulos, C. A. (1983). Vibration of cracked shafts in bending. *Journal of sound and vibration*, 91(4), 583-593.
- Dimarogonas, A. D., Paipetis, S. A., & Chondros, T. G. (2013). *Analytical methods in rotor dynamics*. Springer Science & Business Media.
- Doebling, S. W., Farrar, C. R., & Prime, M. B. (1998). A summary review of vibration-based damage identification methods. *Shock and vibration digest*, 30(2), 91-105.
- Doebling, S. W., Farrar, C. R., Prime, M. B., & Shevitz, D. W. (1996). Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: a literature review (No. LA-13070-MS). Los Alamos National Lab., NM (United States).
- Douka, E., Bamnios, G., & Trochidis, A. (2004). A method for determining the location and depth of cracks in double-cracked beams. *Applied acoustics*, 65(10), 997-1008.
- El Arem, S. (2006). *Vibrations non-linéaires des structures fissurées: application aux rotors de turbines* (Doctoral dissertation, Ecole des Ponts ParisTech).
- El-Kafrawy, A. (2011). Crack detection by modal analysis in 3D beams based on FEM. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 7(4), 265.
- Fan, W., & Qiao, P. (2011). Vibration-based damage identification methods: a review and comparative study. *Structural health monitoring*, 10(1), 83-111.
- Fang, X., Tang, J., Jordan, E., & Murphy, K. D. (2006). Crack induced vibration localization in simplified bladed-disk structures. *Journal of sound and vibration*, 291(1-2), 395-418.
- Farrar, C. R., & Doebling, S. W. (1997). An overview of modal-based damage identification methods (No. LA-UR-97-2468; CONF-9706153-). Los Alamos National Lab., NM (United States).
- Farrar, C. R., Baker, W. E., Bell, T. M., Cone, K. M., Darling, T. W., Duffey, T. A., ... & Migliori, A. (1994). Dynamic characterization and damage detection in the I-40 bridge over the Rio Grande (No. LA-12767-MS). Los Alamos National Lab., NM (United States).
- Farrar, C. R., Duffy, T. A., Cornwell, P. J., & Doebling, S. W. (1999). Excitation methods for bridge structures (No. LA-UR-98-4579). Los Alamos National Lab., NM (US).
- Federal Highway Administration (FHWA), (2015), Deficient bridges by state and highway system. Available online: <http://www.fhwa.dot.gov/bridge/deficient.cfm> (accessed on 07 September 2016).
- Federici, F., Graziosi, F., Faccio, M., Colarieti, A., Gattulli, V., Lepidi, M., & Potenza, F. (2012). An integrated approach to the design of wireless sensor networks for structural health monitoring. *International Journal of Distributed Sensor Networks*, 8(3), 594842.

- Fegade, P. V., Mahajan, J. A., & Bhole, G. P. (2014). Study on Vibration Analysis of an Un-crack and Cracked Cantilever Beam. *International Journal of Emerging Technologies in Computational and Applied Sciences*, 10(4), 340-343.
- Fernandez-Saez, J., & Navarro, C. (2002). Fundamental frequency of cracked beams in bending vibrations: an analytical approach. *Journal of Sound and Vibration*, 256(1), 17-31.
- Fernández-Sáez, J., Morassi, A., & Rubio, L. (2017). Crack identification in elastically restrained vibrating rods. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 94, 257-267.
- Fernandez-Saez, J., Rubio, L., & Navarro, C. (1999). Approximate calculation of the fundamental frequency for bending vibrations of cracked beams. *Journal of Sound and Vibration*, 225(2), 345-352.
- Friswell, M. I., & Penny, J. E. (2002). Crack modeling for structural health monitoring. *Structural health monitoring*, 1(2), 139-148.
- Friswell, M. I., & Penny, J. E. T. (1997, June). Is damage location using vibration measurements practical. In *Euromech 365 international workshop: Damas* (Vol. 97, pp. 351-362).
- Fryba, L. *Vibration of solids and structures under moving loads*,(1972). Academia, Prague.
- Fu, C. (2015). The effect of switching cracks on the vibration of a continuous beam bridge subjected to moving vehicles. *Journal of Sound and Vibration*, 339, 157-175.
- Fu, C. (2016). Dynamic behavior of a simply supported bridge with a switching crack subjected to seismic excitations and moving trains. *Engineering Structures*, 110, 59-69.
- Gasch, R. (1993). A survey of the dynamic behaviour of a simple rotating shaft with a transverse crack. *Journal of sound and vibration*, 160(2), 313-332.
- Gattulli, V. (2016). Implementation of Identification Methodologies on Large-Scale Structures. In *Identification Methods for Structural Health Monitoring* (pp. 1-34). Springer, Cham.
- Gawande, S. H., & More, R. R. (2016, November). Effect of Notch Depth & Location on Modal Natural Frequency of Cantilever Beams. In *Structures* (Vol. 8, pp. 121-129). Elsevier.
- Gorman, D. J. (1975). *Free vibration analysis of beams and shafts*(Book). Research supported by the National Research Council of Canada. New York, Wiley-Interscience, 1975. 395 p.
- Gounaris, G., & Dimarogonas, A. (1988). A finite element of a cracked prismatic beam for structural analysis. *Computers & Structures*, 28(3), 309-313.
- Guan-Liang, Q., Song-Nian, G., & Jie-Sheng, J. (1991). A finite element model of cracked plates and application to vibration problems. *Computers & Structures*, 39(5), 483-487.
- Gudmundson, P. (1982). Eigenfrequency changes of structures due to cracks, notches or other geometrical changes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 30(5), 339-353.
- Gudmundson, P. (1983). The dynamic behaviour of slender structures with cross-sectional cracks. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 31(4), 329-345.
- Gunes, B., & Gunes, O. (2013). Structural health monitoring and damage assessment Part I: A critical review of approaches and methods. *International Journal of Physical Sciences*, 8(34), 1694-1702.

- Haisty, B. S., & Springer, W. T. (1988). A general beam element for use in damage assessment of complex structures. *ASME, Transactions, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 110, 389-394.
- Hakim, S. J. S., & Razak, H. A. (2014). Modal parameters based structural damage detection using artificial neural networks—a review. *Smart Structures and Systems*, 14(2), 159-189.
- Han, Q., & Chu, F. (2012). Parametric instability of a rotor-bearing system with two breathing transverse cracks. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 36, 180-190.
- He, W. Y., & Zhu, S. (2016). Moving load-induced response of damaged beam and its application in damage localization. *Journal of Vibration and Control*, 22(16), 3601-3617.
- He, W. Y., Zhu, S., & Chen, Z. W. (2018). A multi-scale wavelet finite element model for damage detection of beams under a moving load. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 18(06), 1850078.
- Hetenyi, M. (1937). Deflection of beams of varying cross section. *ASME Trans. J. Appl. Mech*, 4, A49-A52.
- Hsu, M. H. (2005). Vibration analysis of edge-cracked beam on elastic foundation with axial loading using the differential quadrature method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(1), 1-17.
- Hu, J., & Liang, R. Y. (1993). An integrated approach to detection of cracks using vibration characteristics. *Journal of the Franklin Institute*, 330(5), 841-853.
- Hurlebaus, S., & Gaul, L. (2006). Smart structure dynamics. *Mechanical systems and signal processing*, 20(2), 255-281.
- Jena, P. K., Thatoi, D. N., Nanda, J., & Parhi, D. R. K. (2012). Effect of damage parameters on vibration signatures of a cantilever beam. *Procedia engineering*, 38, 3318-3330.
- Johansson, C., Pacoste, C., & Karoumi, R. (2013). Closed-form solution for the mode superposition analysis of the vibration in multi-span beam bridges caused by concentrated moving loads. *Computers & Structures*, 119, 85-94.
- Khadem, S. E., & Rezaee, M. (2000). Introduction of modified comparison functions for vibration analysis of a rectangular cracked plate. *Journal of Sound and Vibration*, 236(2), 245-258.
- Khan, I. A., & Parhi, D. R. (2013). Finite element analysis of double cracked beam and its experimental validation. *Procedia Engineering*, 51, 703-708.
- Khiem, N. T., & Hai, T. T. (2011). Rayleigh's quotient for multiple cracked beam and application. *Vietnam Journal of Mechanics*, 33(1), 1-12.
- Khiem, N. T., & Lien, T. V. (2001). A simplified method for natural frequency analysis of a multiple cracked beam. *Journal of sound and vibration*, 245(4), 737-751.
- Khnaijar, A., & Benamar, R. (2017). A new model for beam crack detection and localization using a discrete model. *Engineering Structures*, 150, 221-230.
- Kikidis, M. L., & Papadopoulos, C. A. (1992). Slenderness ratio effect on cracked beam. *Journal of Sound and Vibration*, 155(1), 1-11.
- Kim, J., & Lynch, J. P. (2012). Subspace system identification of support-excited structures—part I: theory and black-box system identification. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 41(15), 2235-2251.

- Kindova-Petrova, D. (2014). Vibration-based methods for detecting a crack in a simply supported beam. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 44(4), 69-82.
- Kirmser, P. G. (1944). The effects of discontinuities on the natural frequency of beams. The College.
- Kisa, M., Brandon, J., & Topcu, M. (1998). Free vibration analysis of cracked beams by a combination of finite elements and component mode synthesis methods. *Computers & structures*, 67(4), 215-223.
- Krawczuk, M. (1994). Rectangular shell finite element with an open crack. *Finite Elements in Analysis and Design*, 15(3), 233-253.
- Krawczuk, M., & Ostachowicz, W. M. (1992). Parametric vibrations of beam with crack. *Archive of Applied Mechanics*, 62(7), 463-473.
- Krawczuk, M., & Ostachowicz, W. M. (1993). Transverse natural vibrations of a cracked beam loaded with a constant axial force. *Journal of vibration and acoustics*, 115(4), 524-528.
- Krawczuk, M., Palacz, M., & Ostachowicz, W. (2003). The dynamic analysis of a cracked Timoshenko beam by the spectral element method. *Journal of Sound and Vibration*, 264(5), 1139-1153.
- Kumar, C. S., Sujatha, C., & Shankar, K. (2015). Vibration of simply supported beams under a single moving load: A detailed study of cancellation phenomenon. *International Journal of Mechanical Sciences*, 99, 40-47.
- Law, S. S., & Zhu, X. Q. (2004). Dynamic behavior of damaged concrete bridge structures under moving vehicular loads. *Engineering Structures*, 26(9), 1279-1293.
- Lee, H. P., & Ng, T. Y. (1994). Dynamic response of a cracked beam subject to a moving load. *Acta mechanica*, 106(3-4), 221-230.
- Lee, J. W., & Lee, J. Y. (2017). A transfer matrix method capable of determining the exact solutions of a twisted Bernoulli–Euler beam with multiple edge cracks. *Applied Mathematical Modelling*, 41, 474-493.
- Li, Q. S. (2002). Free vibration analysis of non-uniform beams with an arbitrary number of cracks and concentrated masses. *Journal of Sound and Vibration*, 252(3), 509-525.
- Lifshitz, J. M., & Rotem, A. (1969). Determination of reinforcement unbonding of composites by a vibration technique. *Journal of Composite Materials*, 3(3), 412-423.
- Lin, H. P. (2004). Direct and inverse methods on free vibration analysis of simply supported beams with a crack. *Engineering structures*, 26(4), 427-436.
- Lin, H. P. (2007, July). Vibration analysis of a cracked beam subjected to a traveling vehicle. In *Proceedings of the 14th International Congress on Sound and Vibration*, Cairns, Australia (pp. 9-12).
- Lin, H. P., & Chang, S. C. (2006). Forced responses of cracked cantilever beams subjected to a concentrated moving load. *International Journal of Mechanical Sciences*, 48(12), 1456-1463.
- Lin, H. P., Chang, S. C., & Wu, J. D. (2002). Beam vibrations with an arbitrary number of cracks. *Journal of Sound and vibration*, 258(5), 987-999.
- Loutridis, S., Douka, E., & Trochidis, A. (2004). Crack identification in double-cracked beams using wavelet analysis. *Journal of sound and vibration*, 277(4-5), 1025-1039.

- Loya, J. A., Rubio, L., & Fernández-Sáez, J. (2006). Natural frequencies for bending vibrations of Timoshenko cracked beams. *Journal of Sound and Vibration*, 290(3-5), 640-653.
- Ma, H., Zeng, J., Lang, Z., Zhang, L., Guo, Y., & Wen, B. (2016). Analysis of the dynamic characteristics of a slant-cracked cantilever beam. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 75, 261-279.
- Mahmoud, M. A. (2001). Effect of cracks on the dynamic response of a simple beam subject to a moving load. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 215(3), 207-215.
- Mahmoud, M. A., & Zaid, M. A. (2002). Dynamic response of a beam with a crack subject to a moving mass. *Journal of Sound and Vibration*, 256(4), 591-603.
- Maia, N. M. M., & Silva, J. M. M. (2001). Modal analysis identification techniques. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 359(1778), 29-40.
- Matveev, V. V., & Boginich, O. E. (2004). Vibrodiagnostic parameters of fatigue damage in rectangular plates. Part 1. A procedure of determination of damage parameters. *Strength of materials*, 36(6), 549-557.
- Matveev, V. V., & Boginich, O. E. (2005). Vibrodiagnostic parameters of fatigue damage in rectangular plates. Part 2. Straight cracks of constant depth. *Strength of materials*, 37(1), 30-42.
- Matveev, V. V., & Boginich, O. E. (2006). Vibrodiagnostic parameters of fatigue damage in rectangular plates. Part 3. Through-the-thickness and surface semi-elliptical cracks. *Strength of materials*, 38(5), 466-480.
- Mazanoglu, K. (2015). A novel methodology using simplified approaches for identification of cracks in beams. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 12(13), 2460-2479.
- Mazanoglu, K., & Sabuncu, M. (2010a). Flexural vibration of non-uniform beams having double-edge breathing cracks. *Journal of Sound and Vibration*, 329(20), 4181-4191.
- Mazanoglu, K., & Sabuncu, M. (2010b). Vibration analysis of non-uniform beams having multiple edge cracks along the beam's height. *International Journal of Mechanical Sciences*, 52(3), 515-522.
- Mazanoglu, K., & Sabuncu, M. (2012). A frequency based algorithm for identification of single and double cracked beams via a statistical approach used in experiment. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 30, 168-185.
- Mazanoglu, K., Yesilyurt, I., & Sabuncu, M. (2009). Vibration analysis of multiple-cracked non-uniform beams. *Journal of sound and vibration*, 320(4-5), 977-989.
- Medda, A., DeBrunner, V., & Mish, K. (2006, October). Wavelet based structure damage detection. In *2006 Fortieth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers* (pp. 574-578). IEEE.
- Mendelsohn, D. A. (2006). Free vibration of an edge-cracked beam with a Dugdale-Barenblatt cohesive zone. *Journal of sound and vibration*, 292(1-2), 59-81.
- Meruane, V., & Heylen, W. (2010). Damage detection with parallel genetic algorithms and operational modes. *Structural Health Monitoring*, 9(6), 481-496.

- Mirzabeigy, A., & Bakhtiari-Nejad, F. (2014). Semi-analytical approach for free vibration analysis of cracked beams resting on two-parameter elastic foundation with elastically restrained ends. *Frontiers of Mechanical Engineering*, 9(2), 191-202.
- Montalvao, D., Maia, N. M. M., & Ribeiro, A. M. R. (2006). A review of vibration-based structural health monitoring with special emphasis on composite materials. *Shock and vibration digest*, 38(4), 295-324.
- Morassi, A., & Rollo, M. (2001). Identification of two cracks in a simply supported beam from minimal frequency measurements. *Journal of Vibration and Control*, 7(5), 729-739.
- Museros Romero, P., & Moliner, E. (2017). Comments on Vibration of simply supported beams under a single moving load: A detailed study of cancellation phenomenon by CP. *International Journal of Mechanical Sciences*, 128, 709-713.
- Museros, P., Moliner, E., & Martínez-Rodrigo, M. D. (2013). Free vibrations of simply-supported beam bridges under moving loads: Maximum resonance, cancellation and resonant vertical acceleration. *Journal of Sound and Vibration*, 332(2), 326-345.
- Nandwana, B. P., & Maiti, S. K. (1997). Modelling of vibration of beam in presence of inclined edge or internal crack for its possible detection based on frequency measurements. *Engineering Fracture Mechanics*, 58(3), 193-205.
- Nazarko, P., & Ziemiański, L. (2017). Application of artificial neural networks in the damage identification of structural elements. *Computer Assisted Methods in Engineering and Science*, 18(3), 175-189.
- Newland, D. E. (1993). *An Introduction to Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis*, 477 pp.
- Nguyen, K. V. (2013). Comparison studies of open and breathing crack detections of a beam-like bridge subjected to a moving vehicle. *Engineering Structures*, 51, 306-314.
- Nguyen, K. V. (2014). Mode shapes analysis of a cracked beam and its application for crack detection. *Journal of Sound and Vibration*, 333(3), 848-872.
- Nobile, L. (2000). Mixed mode crack initiation and direction in beams with edge crack. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 33(2), 107-116.
- Okamura, H., Liu, H. W., Chu, C. S., & Liebowitz, H. (1969). A cracked column under compression. *Engineering Fracture Mechanics*, 1(3), 547-564.
- Olsson, M. (1991). On the fundamental moving load problem. *Journal of sound and vibration*, 145(2), 299-307.
- Ostachowicz, W. M., & Krawczuk, M. (1991). Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam. *Journal of sound and vibration*, 150(2), 191-201.
- Ostachowicz, W. M., & Krawczuk, M. (2001). On modelling of structural stiffness loss due to damage. In *Key Engineering Materials* (Vol. 204, pp. 185-200). Trans Tech Publications.
- Ostachowicz, W., & Krawczuk, M. (2009). Modeling for detection of degraded zones in metallic and composite structures. *Encyclopedia of Structural Health Monitoring*.
- Ouyang, H. (2011). Moving-load dynamic problems: a tutorial (with a brief overview). *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(6), 2039-2060.

- Ozturk, H., Kiral, Z., & Kiral, B. G. (2016a). Dynamic analysis of elastically supported cracked beam subjected to a concentrated moving load. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 13(1), 175-200.
- Ozturk, H., Yashar, A., & Sabuncu, M. (2016b). Dynamic stability of cracked multi-bay frame structures. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 23(6), 715-726.
- Pala, Y., & Reis, M. (2012). Dynamic response of a cracked beam under a moving mass load. *Journal of Engineering Mechanics*, 139(9), 1229-1238.
- Pandey, A. K., & Biswas, M. (1994). Damage detection in structures using changes in flexibility. *Journal of sound and vibration*, 169(1), 3-17.
- Pandey, A. K., Biswas, M., & Samman, M. M. (1991). Damage detection from changes in curvature mode shapes. *Journal of sound and vibration*, 145(2), 321-332.
- Panigrahi, S. K., Chakraverty, S., & Mishra, B. K. (2009). Vibration based damage detection in a uniform strength beam using genetic algorithm. *Meccanica*, 44(6), 697.
- Papadopoulos, C. A. (2008). The strain energy release approach for modeling cracks in rotors: A state of the art review. *Mechanical systems and signal processing*, 22(4), 763-789.
- Papadopoulos, C. A., & Dimarogonas, A. D. (1987). Coupled longitudinal and bending vibrations of a rotating shaft with an open crack. *Journal of sound and vibration*, 117(1), 81-93.
- Parhi, D. R. K., & Dash, A. K. (2010). Faults detection by finite element analysis of a multi cracked beam using vibration signatures. *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, 6(1), 40-54.
- Parhi, D. R. K., & Kumar, D. A. (2009). Analysis of methodologies applied for diagnosis of fault in vibrating structures. *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, 5(4), 271-286.
- Park, G., & Inman, D. J. (2001). Smart bolts: an example of self-healing structures. *Smart Materials Bulletin*, 2001(7), 5-8.
- Patil, D. P., & Maiti, S. K. (2003). Detection of multiple cracks using frequency measurements. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(12), 1553-1572.
- Patil, D. P., & Maiti, S. K. (2005). Experimental verification of a method of detection of multiple cracks in beams based on frequency measurements. *Journal of Sound and Vibration*, 281(1-2), 439-451.
- Paultre, P., Proulx, J., Bouaanani, N., & Sanda, M. S. (2015). ÉVOLUTION DES PROPRIÉTÉS DYNAMIQUES DE POUTRES EN BÉTON ARMÉ ENDOMMAGÉES EN LABORATOIRE.
- Peeters, B., & Ventura, C. E. (2003). Comparative study of modal analysis techniques for bridge dynamic characteristics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(5), 965-988.
- Peter, C. C., Alison, F., & Liu, S. C. (2003). Review paper: health monitoring of civil infrastructure. *Structural health monitoring*, 2(3), 0257-267.
- Qatu, M. S. (2012). Recent research on vehicle noise and vibration. *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, 8(4), 289-301.
- Qatu, M. S., Abdelhamid, M. K., Pang, J., & Sheng, G. (2009). Overview of automotive noise and vibration. *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, 5(1-2), 1-35.

- Rezaee, M., & Hassannejad, R. (2011). A new approach to free vibration analysis of a beam with a breathing crack based on mechanical energy balance method. *Acta Mechanica Sinica*, 24(2), 185-194.
- Rizos, P. F., Aspragathos, N., & Dimarogonas, A. D. (1990). Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes. *Journal of sound and vibration*, 138(3), 381-388.
- Roach, D. P., & Neidigk, S. (2011). Does the Maturity of Structural Health Monitoring Technology Match User Readiness? (No. SAND2011-4075C). Sandia National Lab.(SNL-NM), Albuquerque, NM (United States).
- Rubio, L., Fernández-Sáez, J., & Morassi, A. (2015). Identification of two cracks in a rod by minimal resonant and antiresonant frequency data. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 60, 1-13.
- Rubio, L., Fernández-Sáez, J., & Morassi, A. (2016). Identification of two cracks with different severity in beams and rods from minimal frequency data. *Journal of Vibration and Control*, 22(13), 3102-3117.
- Ruotolo, R., & Surace, C. (1997). Damage assessment of multiple cracked beams: numerical results and experimental validation. *Journal of sound and vibration*, 206(4), 567-588.
- Ruotolo, R., Surace, C., & Mares, C. (1996). Theoretical and experimental study of the dynamic behaviour of a double-cracked beam. In *Proceedings-SPIE the International Society for Optical Engineering* (pp. 1560-1564). SPIE International Society for Optical.
- Rytter, A. (1993). *Vibrational based inspection of civil engineering structures* (Doctoral dissertation, Dept. of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University).
- Saaed, T. E., Nikolakopoulos, G., Jonasson, J. E., & Hedlund, H. (2015). A state-of-the-art review of structural control systems. *Journal of Vibration and Control*, 21(5), 919-937.
- Sabnavis, G., Kirk, R. G., Kasarda, M., & Quinn, D. (2004). Cracked shaft detection and diagnostics: a literature review. *Shock and Vibration Digest*, 36(4), 287.
- Salawu, O. S. (1997). Detection of structural damage through changes in frequency: a review. *Engineering structures*, 19(9), 718-723.
- Salawu, O. S., & Williams, C. (1995). Review of full-scale dynamic testing of bridge structures. *Engineering Structures*, 17(2), 113-121.
- Sarvestan, V., Mirdamadi, H. R., & Ghayour, M. (2017). Vibration analysis of cracked Timoshenko beam under moving load with constant velocity and acceleration by spectral finite element method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 122, 318-330.
- Sarvestan, V., Mirdamadi, H. R., Ghayour, M., & Mokhtari, A. (2015). Spectral finite element for vibration analysis of cracked viscoelastic Euler–Bernoulli beam subjected to moving load. *Acta Mechanica*, 226(12), 4259-4280.
- Schuëller, G. I., & Jensen, H. A. (2008). Computational methods in optimization considering uncertainties—an overview. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(1), 2-13.
- Sekhar, A. S. (1999). Vibration characteristics of a cracked rotor with two open cracks. *Journal of Sound and Vibration*, 223(4), 497-512.
- Sekhar, A. S. (2008). Multiple cracks effects and identification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22(4), 845-878.

- Sethi, R., Senapati, S. K., & Parhi, D. R. K. (2014). Analysis of Crack in Structures Using Finite Element Method. *Global Science and Technology Journal*, 2(2), 52-57.
- Shafiei, M., & Khaji, N. (2011). Analytical solutions for free and forced vibrations of a multiple cracked Timoshenko beam subject to a concentrated moving load. *Acta Mechanica*, 221(1-2), 79.
- Shen, M. H., & Pierre, C. (1990). Natural modes of Bernoulli-Euler beams with symmetric cracks. *Journal of sound and vibration*, 138(1), 115-134.
- Shen, M. H., & Pierre, C. (1994). Free vibrations of beams with a single-edge crack. *Journal of sound and vibration*, 170(2), 237-259.
- Shi, Z., Law, S. S., & Zhang, L. M. (1998). Structural damage localization from modal strain energy change. *Journal of sound and vibration*, 218(5), 825-844.
- Shifrin, E. I. (2016). Identification of a finite number of small cracks in a rod using natural frequencies. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 70, 613-624.
- Shifrin, E. I., & Ruotolo, R. (1999). Natural frequencies of a beam with an arbitrary number of cracks. *Journal of Sound and vibration*, 222(3), 409-423.
- Sih, G. C. (1973). Some basic problems in fracture mechanics and new concepts. *Engineering fracture mechanics*, 5(2), 365-377.
- Sinou, J. J. (2009). A review of damage detection and health monitoring of mechanical systems from changes in the measurement of linear and non-linear vibrations.
- Srinivas, M., & Patnaik, L. M. (1994). Genetic algorithms: A survey. *computer*, 27(6), 17-26.
- Srinivas, V., Sasmal, S., & Ramanjaneyulu, K. (2009). Studies on methodological developments in structural damage identification. *Structural Durability and Health Monitoring*, 5(2), 133-160.
- Tada, H., Paris, P. C., & Irwin, G. R. (1973). *The stress analysis of cracks*. Handbook, Del Research Corporation.
- Tan, G., Shan, J., Wu, C., & Wang, W. (2017). Direct and inverse problems on free vibration of cracked multiple I-section beam with different boundary conditions. *Advances in Mechanical Engineering*, 9(11), 1687814017737261.
- Tan, G., Zhu, Z., Wang, W., & Cheng, Y. (2018). Free vibration analysis of a uniform continuous beam with an arbitrary number of cracks and spring-mass systems. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 43(9), 4619-4634.
- Thomson, W. T. (1949). Vibration of slender bars with discontinuities in stiffness. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme*, 16(2), 203-208.
- Tsai, T. C., & Wang, Y. Z. (1997). The vibration of a multi-crack rotor. *International Journal of Mechanical Sciences*, 39(9), 1037-1053.
- Tsou, P., & Shen, M. H. (1994). Structural damage detection and identification using neural networks. *AIAA journal*, 32(1), 176-183.
- Vaidya, T., & Chatterjee, A. (2018). Crack Estimation of Beam Under the Moving Mass Using the Dynamic Characteristics Based on Two Contact Point Theory. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, 1-20.

- Viola, E., Ricci, P., & Aliabadi, M. H. (2007). Free vibration analysis of axially loaded cracked Timoshenko beam structures using the dynamic stiffness method. *Journal of Sound and Vibration*, 304(1-2), 124-153.
- Wang, C. S., & Lee, L. T. (2012). Modified and simplified sectional flexibility of a cracked beam. *Journal of Applied Mathematics*, 2012.
- Wardhana, K., & Hadipriono, F. C. (2003). Analysis of recent bridge failures in the United States. *Journal of performance of constructed facilities*, 17(3), 144-150.
- Wauer, J. (1990). On the dynamics of cracked rotors: a literature survey. *Applied Mechanics Reviews*, 43(1), 13-17.
- Wong, K. Y. (2007). Design of a structural health monitoring system for long-span bridges. *Structure and Infrastructure Engineering*, 3(2), 169-185.
- Worden, K., & Dulieu-Barton, J. M. (2004). An overview of intelligent fault detection in systems and structures. *Structural Health Monitoring*, 3(1), 85-98.
- Worden, K., Farrar, C. R., Haywood, J., & Todd, M. (2008). A review of nonlinear dynamics applications to structural health monitoring. *Structural Control and Health Monitoring: The Official Journal of the International Association for Structural Control and Monitoring and of the European Association for the Control of Structures*, 15(4), 540-567.
- Wu, X., Sawicki, J. T., Friswell, M. I., & Baaklini, G. Y. (2005, January). Finite element analysis of coupled lateral and torsional vibrations of a rotor with multiple cracks. In *ASME Turbo Expo 2005: Power for Land, Sea, and Air* (pp. 841-850). American Society of Mechanical Engineers.
- Wu, Y. S., & Yang, Y. B. (2004). A semi-analytical approach for analyzing ground vibrations caused by trains moving over elevated bridges. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 24(12), 949-962.
- Xiang, J. W., Chen, X. F., Li, B., He, Y. M., & He, Z. J. (2006). Identification of a crack in a beam based on the finite element method of a B-spline wavelet on the interval. *Journal of Sound and Vibration*, 296(4-5), 1046-1052.
- Xu, Z. M., Cao, M. S., Bai, R. B., Xu, H., & Xu, W. (2018). Evaluation of high-order modes and damage effects of multi-crack beams using enhanced spectral element method. *Journal of Vibration and Control*, 24(21), 5186-5200.
- Yan, Y. J., Cheng, L., Wu, Z. Y., & Yam, L. H. (2007). Development in vibration-based structural damage detection technique. *Mechanical systems and signal processing*, 21(5), 2198-2211.
- Yan, Y., Ren, Q., Xia, N., & Zhang, L. (2016). A close-form solution applied to the free vibration of the Euler–Bernoulli beam with edge cracks. *Archive of Applied Mechanics*, 86(9), 1633-1646.
- Yang, J., Chen, Y., Xiang, Y., & Jia, X. L. (2008). Free and forced vibration of cracked inhomogeneous beams under an axial force and a moving load. *Journal of Sound and Vibration*, 312(1-2), 166-181.
- Yang, X. F., Swamidass, A. S. J., & Seshadri, R. (2001). Crack identification in vibrating beams using the energy method. *Journal of sound and vibration*, 244(2), 339-357.
- Yang, Y. B., Lin, C. L., Yau, J. D., & Chang, D. W. (2004). Mechanism of resonance and cancellation for train-induced vibrations on bridges with elastic bearings. *Journal of Sound and Vibration*, 269(1-2), 345-360.

- Yanmaz, A. M., Caner, A., & Berk, A. (2007). Renovation of a safety-inspection methodology for river bridges. *Journal of performance of constructed facilities*, 21(5), 382-389.
- Yau, J. D., Wu, Y. S., & Yang, Y. B. (2001). Impact response of bridges with elastic bearings to moving loads. *Journal of Sound and Vibration*, 248(1), 9-30.
- Yin, X., Liu, Y., Deng, L., & Kong, X. (2017). Dynamic behavior of damaged bridge with multi-cracks under moving vehicular loads. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 17(02), 1750019.
- Yokoyama, T., & Chen, M. C. (1998). Vibration analysis of edge-cracked beams using a line-spring model. *Engineering Fracture Mechanics*, 59(3), 403-409.
- Yoon, H. I., Son, I. S., & Ahn, S. J. (2007). Free vibration analysis of Euler-Bernoulli beam with double cracks. *Journal of mechanical science and technology*, 21(3), 476-485.
- Yuen, M. M. F. (1985). A numerical study of the eigenparameters of a damaged cantilever. *Journal of sound and vibration*, 103(3), 301-310.
- Zhang, W., Li, J., Hao, H., & Ma, H. (2017). Damage detection in bridge structures under moving loads with phase trajectory change of multi-type vibration measurements. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 87, 410-425.
- Zheng, D. Y., & Fan, S. C. (2001). Natural frequencies of a non-uniform beam with multiple cracks via modified Fourier series. *Journal of Sound and Vibration*, 242(4), 701-717.
- Zheng, D. Y., & Kessissoglou, N. J. (2004). Free vibration analysis of a cracked beam by finite element method. *Journal of Sound and vibration*, 273(3), 457-475.
- Zheng, T., & Ji, T. (2011). Equivalent representations of beams with periodically variable cross-sections. *Engineering Structures*, 33(3), 706-719.
- Zheng, T., & Ji, T. (2012). An approximate method for determining the static deflection and natural frequency of a cracked beam. *Journal of Sound and Vibration*, 331(11), 2654-2670.
- Zhong, S., & Oyadiji, S. O. (2008). Analytical predictions of natural frequencies of cracked simply supported beams with a stationary roving mass. *Journal of Sound and Vibration*, 311(1-2), 328-352.
- Zhou, L., & Liu, H. (2016). Response of cracked simply supported concrete beam with moving vehicle load. *Structural Concrete*, 17(5), 875-882.