UNIVERSITE CONSTANTINE 1 Frères Mentouri

Faculté des Sciences de la Technologie

Département de Génie civil

№ d'ordre : 55/DS/2024

№ de série : 03/GC/2024

THEME

Modélisation analytique des structures sous Charges mobiles

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat en sciences

Spécialité : Génie Civil

Option : Structure

Par

Meriem Ouchenane

Devant le jury composé de :

Mr. Ahmed Beroual	Président.	Professeur.	U. Constantine 1
Mr. Samy Mezhoud	Rapporteur	Professeur.	U. Constantine 1
Mr. Mourad Khebizi	Examinateur	Professeur.	U. Constantine 1
Mr. Mouloud Belachia	Examinateur	Professeur.	U. Guelma
Mr. Toufik Karech	Examinateur	Professeur.	U. de Batna
Mr. Mohamed Saadi	Examinateur	Maitre de conférence A.	U. de Batna

Soutenue publiquement

Le 29/10/2024

Remerciement

Je tiens tout d'abord à remercier profondément Professeur Mezhoud Samy, mon nouveau directeur de thèse, d'avoir accepté de m'encadré et de me donner l'occasion de profiter de son expérience pour finaliser ce travail. Merci pour l'engagement, pour la compréhension, pour les efforts, pour l'écoute et beaucoup plus pour le soutiens et le respect de mes avis. Je suis très reconnaissante.

Je tiens à remercier également mon ancien directeur de thèse, Professeur Lassoued Rachid, qui m'a encadré tout au long de cette thèse et qui m'a fait partager ses brillantes connaissances scientifiques. Qu'il soit aussi remercié pour toute son aide, ces orientations, sa disponibilité permanente et pour les nombreux encouragements qu'il m'a prodiguée.

Sans oublier de remercier les membres de jury : Mr. Ahmed Beroual, Professeur à l'Univérsité Constantine 1 comme président, Mr. Mourad Khebizi, Professeur à l'Univérsité Constantine 1, Mr. Mouloud Belachia, Professeur à l'Univérsité de Guelma, Mr. Toufik Karech Professeur et Mr. Mohamed Saadi Maitre de conférence A de l'Univérsité de Batna, comme examinateurs, d'avoir accepté d'examiné ce travail.

Je tiens également à exprimer ma gratitude envers mes enseignants du département de Génie Civil de l'Université Constantine 1, mes collègues et amis de l'Université de Jijel, de l'Université de Constantine 1 et de l'Université d'Oum El Bouaghi, pour les conseils, le soutien et l'encouragement pour réussir ce travail.

Je souhaite également exprimer ma gratitude envers le personnel de l'agence national des autoroutes à Constantine, notamment le Directeur régional Est Monsieur Kafi Mohamed El-Saleh, le chef de département infrastructure Monsieur Fergani Mohamed et le chef service du projet 84 km plus échangeurs Madame Amira Badr Elboudour pour mettre à ma disposition la documentation dent j'avais besoin dans mon travail.

Enfin, je remercie les membres de ma famille : Mon Père, mon mari, mes frères et sœurs, mes chères enfants, sans oublier ma belle famille, pour le soutien et mon support le long de ces dures années de travail.

Je dédie ce modeste travail à ma très chère *maman*, la personne qui croyez en moi et qui voulais ma réussite, je ne t'oublierai jamais.

الملخص

في ديناميكا الهياكل، وتحديداً فيما يتعلق بالجسور، تُطلق حركية حمولات حركة المرور تحديات هامة. فهم سلوك هذه الهياكل يتطلب وسائل تقدم حلا يقترب من الواقع. في هذا السياق، تُمثل النماذج ثلاثية الأبعاد لهيكل الجسر، باعتبارها التحميل المتنقل، مما يسمح بمعالجة الحمولات المركزة، بينما تعتبر النماذج ثنائية الأبعاد الجسر كلوحة، مع مراعاة تأثيرات الانحناء.

مع ذلك، تقتصر معظم النماذج الحالية على شروط دعم تقليدية مثل العقدة، الدعم البسيط، الدعم المزدوج، أو الدعم الثابت. يهدف هذا البحث إلى تطوير نموذج عام يدمج جميع شروط الدعم الممكنة، من خلال ربط الدعامات بنوابض ذات صلا بات متغيرة.

نقوم بمقارنة ثلاث طرق، بما في ذلك النموذج ثلاثي الأبعاد، الطريقة التحليلية وطريقة العناصر المتناهية، لدراسة سلوك رافدة أولور-بيرنولي تحت تأثير الحمولات المتنقلة، يتم إثبات تقارب الطرق الثلاث، مما يوفر فهمًا عميقًا لاهتزازات الجسور المُنمذجة.

بالإضافة إلى ذلك، نُقدِم نموذجين جديدين قائمين على دالة جرين، يقدمان حلاً للإزاحة في حالات دعم أكثر تعقيدًا. أحدهما باستخدام رافدة مدعومة بنابضين عموديين، والآخر باستخدام دعم يتألف من أربع نوابض عمودية وأفقية، مع تقديم صيغ مبسطة لإزاحة الرافدة. تسهم النتائج المحققة في هذا البحث في تنوع النهج في مجال ديناميكا الهياكل وتفتح آفاقًا للنمذجة المتقدمة للجسور تحت حمولات متنقلة .

الكلمات المفتاحية

ديناميكا الهياكل ، جسر ، رافدة أولور-بيرنولي، اهتزاز، دالة جرين، الأساليب التحليلية.

Résume

En dynamique des structures, spécifiquement pour les ponts, la mobilité des charges du trafic routier introduit des défis importants. Comprendre le comportement de ces structures nécessite des méthodes offrant des solutions proches de la réalité. Sur cet axe, les modèles tridimensionnels représentent la structure du pont en tenant compte du chargement mobile, permettant ainsi de traiter les charges excentrées, tandis que les modèles bidimensionnels le considèrent comme une plaque, prenant en compte les effets de flexion.

Cependant, la plupart des modèles existants se limitent à des conditions d'appuis classiques tels que l'articulation, l'appui simple, l'appui double ou l'encastrement. Notre recherche vise à développer un modèle général intégrant toutes les conditions d'appuis possibles, en associant les appuis à des ressorts de raideurs variables.

Nous confrontons trois méthodes, dont le modèle réel en trois dimensions, par la méthode analytique et par les éléments finis, pour étudier le comportement d'une poutre de type Euler-Bernoulli soumise à des charges mobiles. La convergence des trois méthodes est démontrée, apportant ainsi une compréhension approfondie des vibrations des ponts modélisés.

De plus, nous introduisons deux nouveaux modèles basés sur la fonction de Green, offrant une solution sous forme de déplacement pour des cas d'appuis plus complexes. L'un avec une poutre supportée par deux ressorts verticaux, l'autre avec des supports constitués de quatre ressorts verticaux et horizontaux, avec des formules simplifiées pour le déplacement sur la poutre. Les résultats obtenues dans le cadre de cette recherche contribuent à la diversité des approches dans le domaine de la dynamique des structures et ouvre des perspectives pour la modélisation avancée des ponts sous chargements mobiles.

MOTS CLES : Pont, Poutre Euler-Bernoulli, vibration, fonction de Green, méthodes analytiques, dynamique des structures.

Abstract

In structural dynamics, particularly for bridges, the mobility of traffic loads introduces significant challenges. Understanding the behavior of these structures requires methods that offer solutions close to reality. In this context, three-dimensional models represent the bridge structure, considering mobile loading to address eccentric loads, while two-dimensional models treat it as a plate, considering flexural effects.

However, most existing models are limited to classical support conditions such as articulation, simple support, double support, or fixed support. Our research aims to develop a general model incorporating all possible support conditions by associating supports with variable stiffness springs.

We compare three methods, including the structure in three-dimensional models, with analytical method and with finite element method, to study the behavior of an Euler-Bernoulli beam subjected to mobile loads. The convergence of the three methods is demonstrated, providing an in-depth understanding of the vibrations of modeled bridges.

Additionally, we introduce two new models based on the Green's function, providing a displacement solution for more complex support conditions. One with a beam supported by two vertical springs and the other with supports consisting of four vertical and horizontal springs, with simplified formulas for beam displacement. The results obtained in this research contribute to the diversity of approaches in the field of structural dynamics and open perspectives for advanced modeling of bridges under mobile loading.

KEYWORDS: Bridge**,** Euler-Bernoulli Beam, Vibration, Green's Function, Analytical Methods, Structural Dynamics.

TABLE DES MATIERES

Liste des Tableaux

Liste des Figures

Liste des symboles

Liste des Tableaux

Liste des Figures

Liste des symboles

- y : Le déplacement transversal de la poutre.
- x : La position sur la poutre.
- u : La position de la charge sur la poutre.
- L : La longueur de la poutre.
- θ : La rotation.
- t : Le temps.
- $w(x,t)$: La flèche de la poutre.
- E : Le module d'élasticité de la poutre.
- I : Le moment d'inertie.
- σ : La contrainte normale en plan.
- ρ : Le poids volumique du matériau.
- m_l : La masse volumique de la poutre par unité de longueur.
- F : La force externe.
- Q : L'effort tranchant.
- $\ddot{w}$: L'accélération de la masse.
- A : La section transversale.
- M : Le moment fléchissant.
- dx : Elément en longueur.
- v ou V : La vitesse de la charge mobile.
- $[M]$, $[C]$, $[K]$: Sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité de la poutre.
- $\{F(x,y,z)\}$: Représente le vecteur des forces nodales associées aux forces mobiles situées aux coordonnées (x,y,z) au temps t.
- $\{F_{ext}\}$: Représente le vecteur de forces extérieures.
- Δt : L'intervalle de temps.
- $G(x,t)$: La fonction de Green au point x sur la poutre au temps t.
- $G_g(x,t)$: La fonction de Green à gauche au point x sur la poutre au temps t.
- $G_d(x,t)$: La fonction de Green à droite au point x sur la poutre au temps t.
- $+$: La position à droite.

- $-$: La position à gauche.

- G' : La première dérivée de la fonction G.

- G'' : La deuxième dérivée de la fonction G.

- G''' : La troisième dérivée de la fonction G.

- ω : La pulsation de la poutre.

- ϕ : La fréquence de vibration.

- S : Le paramètre de fréquence.

- $C1$, $C2$, $C3$, $C4$, $C5$, $C6$, $C7$ et $C8$: Les variables de la fonction $G(x,t)$.

- γ : L'inertie de rotation par mètre linéaire.

- μ : L'inertie de la masse par mètre linéaire.

- P ou F : La charge appliquée.

- k, ktg, ktd, $k\lg$ et kld : Les rigidités des ressorts.

- $k1$, $k2$,… $k25$: Des valeurs fonction de ktg, ktd, $k\lg$, kld et de S.

- DC : Le dénominateur commun de la fonction de Green que ce soit à gauche ou à droite.

- Dc : Le nouveau dénominateur commun de la fonction de Green que ce soit à gauche ou à droite.

- $k1dc$,… $k5dc$: Des valeurs du dénominateur DC en fonction de ktg, ktd, $k\lg$, kld et de S.

- R : rapport de rigidité de la poutre sur celle du ressort.

-a : Remplace $\cos(s.L)$

-ah : Remplace $\cosh(s.L)$

- b : Remplace $\sin(s.L)$

- bh : Remplace $\sinh(s.L)$

Introduction générale

La dynamique des structures, en particulier celle des ponts, est fortement influencée par la mobilité des charges du trafic routier. Comprendre le comportement de ces structures nécessite l'application de méthodes visant à fournir des solutions se rapprochant le plus possible de la réalité. Parmi ces approches, certaines adoptent une modélisation tridimensionnelle du pont, prenant en compte le chargement mobile. Ces modèles tridimensionnels sont particulièrement pertinents car ils permettent de traiter les cas complexes des charges excentrées sur les tabliers. D'autres méthodes optent pour une modélisation bidimensionnelle, considérant le pont comme une plaque, intégrant ainsi les effets des charges excentrées et de la flexion en plan. Enfin, le dernier modèle simplifie le pont en une structure unidimensionnelle, souvent représentée comme une poutre. Diverses méthodes analytiques et numériques, telles que la méthode modale et la méthode des éléments finis, sont utilisées pour traiter ces modèles.

Cependant, la plupart de ces modèles négligent les conditions d'appuis, se limitant souvent à des cas classiques tels que l'articulation, l'appui simple, l'appui double, ou l'encastrement. Cette limitation conduit à des modèles restreints, incapable de représenter toutes les conditions d'appuis possibles. Bien que certains travaux aient abordé cette lacune, peu ont proposé des solutions complètes. Ainsi, notre recherche se concentre sur le développement d'un modèle général capable d'englober toutes les conditions d'appuis. Notre approche consiste à associer des ressorts de raideurs variables dans plusieurs directions aux appuis du pont. Pour concrétiser cette approche, notre méthodologie repose sur l'analyse des poutres de type Euler-Bernoulli soumises à des charges mobiles.

Nous avons élaboré une confrontation entre trois méthodes essentielles. La première consiste en une approche analytique, exposant la solution en termes de flèche par la méthode modale. Nous illustrons cela à travers une étude de cas portant sur une poutre simplement appuyée des deux côtés et sollicitée par une charge mobile. Cette charge peut être constante, avec ou sans inertie, peut adopter une forme harmonique, ou même comprendre plusieurs charges sollicitant simultanément la poutre, comme dans le cas d'un convoi. Nous examinons tous les effets induits par le convoi, incluant des paramètres tels que le nombre de charges, l'espacement entre les charges, etc. Une étude paramétrique est menée à bien à l'aide du facteur d'amplification dynamique, permettant d'estimer les effets dynamiques dans chaque situation.

Continuant avec le modèle unidimensionnel, nous présentons une étude basée sur un programme issu de la littérature en éléments finis. Cette étude se concentre sur le déplacement vertical d'une poutre simplement appuyée des deux côtés, sollicitée par une charge mobile. Nous détaillons les matrices de masse, d'amortissement, et de rigidité, en plus des vecteurs de force et de déplacement. Le troisième modèle explore la structure telle qu'elle existe dans la réalité, en créant un modèle tridimensionnel pour prendre en compte tous les paramètres réels. L'étude de ce modèle de pont réel est réalisée au moyen d'un logiciel de calcul de structure. Une confrontation entre ces trois modèles, en considérant le pont comme une poutre dans le modèle unidimensionnel, est ensuite présentée. Cette démarche vise à mettre en évidence la convergence de chaque méthode en confrontant les résultats.

Après avoir identifié les principaux paramètres influant sur les vibrations des ponts modélisés en tant que poutres d'Euler-Bernoulli sollicitées par des charges mobiles, notre recherche propose une résolution alternative basée sur la méthode de la fonction de Green. Cette méthode, largement utilisée dans le domaine du génie civil, de la mécanique et de l'électronique, offre une solution sous forme de déplacement, en tenant compte de la mobilité des charges. La méthode de la fonction de Green, utilisée pour proposer une solution sous forme de déplacement, repose sur une fonction définie sur deux intervalles, à savoir à gauche et à droite du point d'application de la charge. Étant donné que les charges en question sont mobiles, la solution devient en fonction de deux paramètres distincts, la variable $x(t)$ qui traduit le point analysé sur la poutre, et la variable $u(t)$ qui reflète la position de la charge sur la poutre. La fonction définie à gauche et à droite du point d'application de la charge constitue un couplage de huit variables, notées $C1$, $C2$, $C3$, $C4$, $C5$, $C6$, $C7$ et $C8$,évaluées par la résolution d'un système couplé de huit équations. Parmi ces équations, quatre sont calculées au point d'application de la charge, comprenant deux conditions de continuité de déplacement, une de discontinuité de l'effort tranchant de magnitude unitaire, une de rotation, et une de moment fléchissant. Les quatre équations restantes expriment les conditions aux limites aux deux extrémités de la poutre, en fonction du type de support. Le déplacement sur la poutre, induit par l'effet de la charge mobile, est donné par le produit de la fonction de Green et de la charge excitatrice.

Pour englober toutes les conditions d'appuis, Nous proposerons de nouvelles formules pour déterminer le déplacement de la poutre en cas de charges qui dépend de sa position.
Nous avons abouti à des formules très simples pour le premier modèle à deux ressorts verticaux, notamment au niveau des appuis. Ce premier modèle consiste en une poutre soutenue uniquement par deux ressorts verticaux de raideur k. En ce qui concerne le deuxième modèle à quatre ressorts, les appuis sont composés de quatre ressorts, à savoir deux verticaux $k\lg$, kld et deux

horizontaux ktg et ktd. Ces ressorts peuvent reproduire le comportement d'un appui classique en attribuant des valeurs de raideur variant entre 0 et ∞. C'est pour cette raison que les formules développées sont un peu plus complexes en raison de la présence de quatre valeurs de raideur, ce qui entrave le raffinement de la solution. Ces nouvelles formules sont validées par rapport à la méthode analytique et à la littérature.

Ainsi le mémoire s'articule en deux parties qui suivent la méthodologie adoptée pour répondre aux questionnements. La première est consacrée à la revue de littérature et à la présentation de la problématique « de la modélisation analytique des structures sous charges mobiles ». La deuxième partie est réservée à la phase développement des modèles analytique et l'emploie de la fonction de Green.

La partie A fourni un état de l'art assez complet sur le problème étudié. Elle est composée de deux chapitres (chapitre I et II). Le premier présente les notions clés de la modélisation du pont, la modélisation des charges mobiles, et le concept du facteur d'amplification dynamique, il présente également une analyse bibliographique des travaux pertinents. Le 2$^{\text{éme}}$ chapitre aborde les modèles existants dans la littérature des structures sollicités par des charges mobiles.

La partie B est réservée à la phase développement des modèles numérique et analytiques afin de répondre à la problématique posée. Cette partie est composée de trois chapitres (III, IV, V).

Dans le chapitre III on a essayé d'exploré les différentes méthodes de résolution de l'équation dynamique, telles que la méthode analytique, la méthode des éléments finis, la méthode de la fonction de Green, ou l'emploi du logiciel Csi Bridge, pour l'étude d'un modèle réel d'un pont tridimensionnel. Ce dernier présente aussi les résultats numériques de la simulation de la méthode analytique et de la méthode des éléments finis pour la poutre non amortie sous charges mobiles, avec une analyse paramétrique. Le chapitre IV a pour but d'étudier analytiquement les poutres sollicitées par charges mobiles appuyées sur supports élastiques dans la direction verticale par la méthode de la Fonction de Green, ce chapitre constitue également une contribution personnelle, introduisant un nouveau modèle avec des appuis élastiques formés de ressorts verticaux. Le chapitre V est consacré à l'analyse de la vibration des poutres sollicitées par charges mobiles appuyées sur quatre supports élastiques (deux horizontaux et deux verticaux) par la méthode de la Fonction de Green, l'analyse des résultats, y compris la confrontation des modèles à ressorts verticaux et à quatre ressorts dans les deux directions, est présentée. Une validation des nouvelles formules par rapport à la méthode analytique, à la littérature et aux essais de chargement réel est également présentée.

La thèse se clôture par une synthèse des points étudiés, des résultats obtenus, et des perspectives pour de futures recherches.

PARTIE A

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Chapitre I Comportement dynamique des structures

Introduction

Ce chapitre vise à synthétiser de manière exhaustive la littérature concernant le comportement dynamique des structures sous l'impact des charges mobiles. Il expose les notions de calcul classique en liaison avec le sujet et les travaux antérieurs afin d'obtenir une compréhension approfondie de la réaction dynamique des structures notamment les ponts aux charges mobiles. En analysant les recherches existantes, il devient possible d'identifier les paramètres les plus importants qui influent sur la vibration de ces structures. Cela permet également de choisir le type de modèle, tant pour les ponts que pour les charges, en vue d'une représentation aussi réaliste que possible. Ces éléments justifient par la suite le choix du sujet ainsi que du modèle étudié.

SOMMAIRE

I.1 Les ponts

Un pont représente une structure établie pour relier deux points et surmonter des obstacles naturels. Lorsqu'un véhicule franchit le pont, il génère des forces qui reflètent sa masse et sa dynamique. Le comportement du pont est principalement gouverné par des caractéristiques comme la masse, la rigidité et l'amortissement. La masse totale du pont intègre ses éléments en plus de son propre poids. La masse joue un rôle central dans les fréquences de vibration du pont. Des rigidités élevées engendrent des fréquences de vibration élevées. L'amortissement, qu'il résulte des propriétés des matériaux ou de la structure en elle-même, contribue à dissiper l'énergie issue des vibrations. Cela engendre des pertes d'énergie au matériau et au niveau des interfaces entre les diverses parties de la structure, telles que les joints, les appuis et les liaisons.

I.1.1 Modélisation des ponts

Un pont peut être modélisé comme poutre ou comme plaque pour résoudre les problèmes dynamiques (ce modèle permet de prendre en considération une position excentrée du véhicule). Le choix entre des modèles de type "poutre", "plaque" ou réel en trois dimensions est lié aussi au type du modèle de véhicule choisis. Pour les ponts à moyenne et grande portée, la modélisation en poutre est si efficace pour représenter le comportement global.

I.1.1.1 Modélisation de la structure pont par élément poutres

Cette approche est unidimensionnelle, elle consiste à la modélisation du tablier par une poutre simplement appuyée à ses extrémités figure I.1.

Figure I-1 Modèle du tablier comme poutre simplement appuyée.

Il existe deux types de poutres :

- ✓ Poutre épaisse (ou poutre de Timoshenko) : Se caractérise par ses dimensions considérables en comparaison avec sa longueur, et les déformations de flexion et de cisaillement qu'elle subit ne peuvent pas être négligées dans son comportement mécanique.
- ✓ Poutre mince : Sa section transversale est notablement plus fine en comparaison avec sa longueur et les autres dimensions. Elle subit habituellement des charges perpendiculaires à l'axe longitudinal, engendrant principalement des déformations et des contraintes de flexion, et c'est la théorie développée par Euler-Bernoulli.

C'est ce type de poutre que nous avons ensuite adopté dans notre étude pour créer des modèles unidimensionnels. La théorie de poutre mince élaborée par Euler-Bernoulli suppose que les sections transversales plane, qui sont normales à l'axe neutre non déformé, restent planes après flexion et normales à l'axe déformé figure I.2.

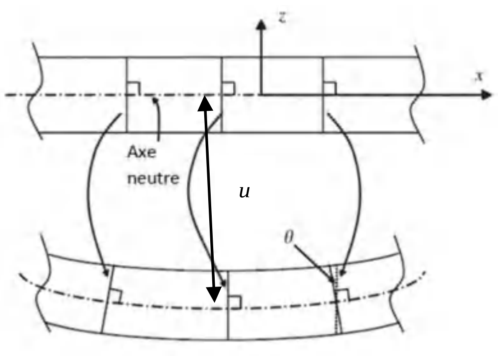


Figure I-2 Théorie d'Euler-Bernoulli pour les poutres minces.

Avec les hypothèses de la théorie de poutre d'Euler-Bernoulli, on peut écrire :

$$\varepsilon_{xz} = 0 \tag{1.1}$$

Ce qui signifie tout simplement que l'effort de cisaillement est négligeable.

Le déplacement axial "u" à une distance z de l'axe neutre s'exprime par :

$$u = -z \cdot \theta \tag{1.2}$$

Avec :

θ : La rotation dans le plan $x - z$, elle peut être obtenue à partir de déplacement de l'axe neutre de la poutre w, dans la direction de z, comme suit :

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial x} \tag{1.3}$$

Le rapport entre la contrainte normale et le déplacement est donné par :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -z \cdot L \cdot w \tag{1.4}$$

L'opérateur différentiel L est donné par :

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{1.5}$$

I.1.1.2 Équations constitutives

La loi de Hooke s'appliquant pour les poutres est donnée comme suit :

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} \tag{1.6}$$

La poutre étudiée peut être supportée par un ou plusieurs appuis, sollicitée par un chargement distribué $F_z(x)$. L'étude de la vibration de la poutre est traduite par l'étude de sa flèche $w(x,t)$

par rapport à l'axe neutre dans la direction longitudinale x et aussi fonction du temps t. L'équilibre dynamique est calculé pour un élément de poutre de longueur dx (figure I.3). Tandis que le chargement sur la poutre est situé dans la direction transversale, cela provoque des moments et efforts tranchant correspondant dans le plan en coupe de la poutre. La flexion de la poutre est réalisée d'une part, avec les moments appliqués au lieu du chargement transversal. La figure I.4 représente un petit élément de la poutre de longueur dx. Cet élément est soumis à une force externe F_z, au moment M, à un effort tranchant Q et à une force d'inertie $\rho \cdot A \cdot \ddot{w}$, avec ρ représente le poids volumique du matériau, $\ddot{w}$ est l'accélération de la masse et A la section transversale.

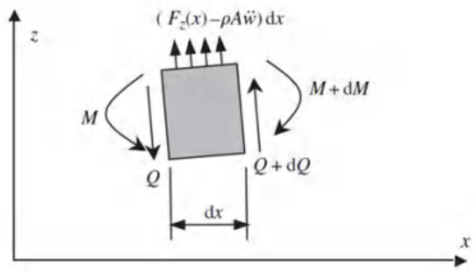


Figure I-3 Elément de poutre isolée de longueur dx.

Le calcul des moments et des efforts tranchants est obtenu par l'intégration d'efforts au-dessus de la section transversale de la poutre.

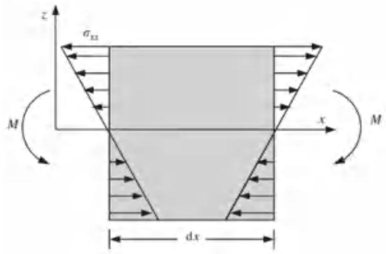


Figure I-4 Contrainte normale due au moment.

Le moment sur la section transversale à la position x dérivé de la contrainte normale distribué σ_{xx} figure I.4, est calculée par la substitution de l'équation 1.4 dans l'équation 1.6:

$$\sigma_{xx} = -z \cdot E \cdot L \cdot w \tag{1.7}$$

On peut dire selon l'équation 1.7 que la contrainte normale σ_{xx} varie linéairement dans la direction verticale sur la section transversale de la poutre. Le moment résultant dérivé de la contrainte normale sur la section transversale est calculé par l'intégrale suivante :

$$M = \int_A \sigma_{xx} \cdot z \cdot dA = -E \cdot \left(\int_A z^2 \cdot dA \right) \cdot L \cdot w = -E \cdot I \cdot L \cdot w = -E \cdot I \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1.8}$$

Avec I est le moment d'inertie de la section transversale dans l'axe des ordonnées y, qui ce calcul pour une forme donnée d'une section transversale par l'équation suivante :

$$I = \int_A z^2 \cdot dA \tag{1.9}$$

La considération de l'équilibre des forces pour ce petit élément de poutre dans la direction de z donne :

$$dQ + \left(F_z(x) - \rho \cdot A \cdot \ddot{w}\right) \cdot dx = 0 \tag{1.10}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{dQ}{dx} = -F_z(x) + \rho \cdot A \cdot \ddot{w} \tag{1.11}$$

L'équilibre des moments d'un petit élément de poutre à n'importe quel point situé sur la surface de l'élément permet d'écrire :

$$dM - Q \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \left(F_z - \rho \cdot A \cdot \ddot{w}\right) \cdot (dx)^2 = 0 \tag{1.12}$$

On peut négliger la petite limite résultant du second degré contenant dx^2, ce qui mène à :

$$\frac{dM}{dx} = Q \tag{1.13}$$

Substituant l'équation 1.8 dans l'équation 1.13 nous permet d'écrire :

$$Q = -E \cdot I \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \tag{1.14}$$

Les équations 1.13 et 1.14 donnent le rapport entre les moments et les forces de cisaillement dans la poutre d'Euler-Bernoulli en fonction de la déflection.

L'obtention de l'équation dynamique d'équilibre est obtenue tout simplement par la substitution de l'équation 1.14 dans l'équation 1.11 :

$$E \cdot I \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho \cdot A \cdot \ddot{w} = F_z(x) \tag{1.15}$$

Ce type de simplification de modélisation, qui concerne une « poutre unidimensionnelle simplement appuyée à ses extrémités », omet plusieurs facteurs importants. Par exemple, il ne tient pas en compte de la flexion transversale observée dans les ponts où la longueur et la largeur présentent des dimensions comparables. De plus, il ne permet pas d'examiner l'effet de la torsion, qui peut être significatif lorsqu'une charge est appliquée de manière excentrée. Il faut également considérer le cas où un véhicule se déplace en dehors de l'axe central du pont. Dans cette situation, la section transversale est soumise non seulement à la flexion mais aussi à la torsion. La théorie des poutres, telle qu'évoquée dans l'étude de (Henchi K., 1995), ne peut pas englober ces phénomènes de manière adéquate.

I.1.1.3 Modélisation de la structure pont par élément plaque

Une plaque est un élément plat caractérisé par sa largeur et sa longueur significativement plus importantes que son épaisseur. Ces plaques sont fréquemment utilisées dans la construction pour soutenir des charges, transférer des forces et résister à des déformations. Elles peuvent être fabriquées à partir de divers matériaux tels que le métal, le béton armé, le bois ou des matériaux composites.

Selon la façon dont les forces et les charges agissent sur une plaque, celle-ci peut subir diverses déformations, incluant la flexion, le cisaillement, la torsion, voire une combinaison de ces modes. Le calcul et l'analyse des propriétés des plaques font appel à des principes de mécanique des matériaux et de théorie de la flexion afin de comprendre son comportement dans différentes situations de charge.

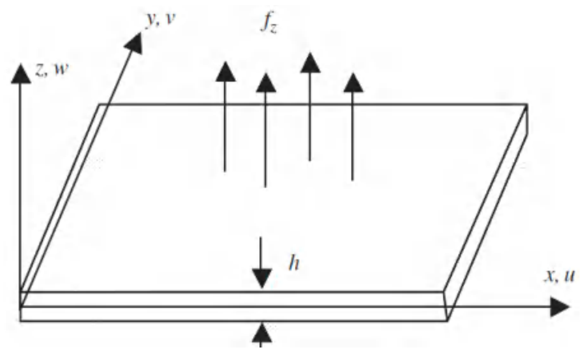


Figure I-5 Plaque soumise à un chargement transversal.

Les plaques sont classées selon leurs épaisseurs en deux types :

- ✓ Plaques épaisses : Ce type de plaque est traité par MINDLIN, Il s'agit des plaques où l'épaisseur n'est pas négligeable par rapport aux autres dimensions. Dans de tels cas, les déformations peuvent devenir plus élaborées et engendrer des phénomènes de cisaillement et de torsion.
- ✓ Plaques minces : La théorie est formulée par Love-Kirchhoff, concerne les cas de plaques où l'épaisseur est considérée comme insignifiante en comparaison avec les autres dimensions. Cependant, il est important de souligner que cette théorie présente une limitation majeure, à savoir l'exclusion des effets liés aux forces de cisaillement et à l'inertie de rotation. Les déformations résultant de la flexion sont les plus dominantes dans ce contexte.

I.1.2 Les charges sur les ponts

Le pont doit avoir la capacité de supporter une combinaison complexe de charges, comprenant le poids propre de sa structure porteuse ainsi que le poids des éléments non porteurs tels que le revêtement, les bordures et divers équipements comme les glissières, les systèmes d'évacuation des eaux, les gaines techniques, et ainsi de suite. En plus de cela, il doit faire face aux charges

dynamiques engendrées par les véhicules circulant sur le pont, qu'ils soient légers ou lourds, se déplaçant à une vitesse constante. Parmi les autres facteurs à prendre en compte figurent également le poids des piétons, les sollicitations causées par les effets du vent et de la neige dans les zones exposées à ces phénomènes, ainsi que la réaction du pont en cas de mouvements sismiques. Pour notre étude, nous allons nous concentrer exclusivement sur les charges générées par les véhicules en mouvement sur le pont.
Les véhicules sont généralement simulés par des forces constantes, harmoniques, masses ou par systèmes mécaniques à un ou plusieurs degrés de liberté.

- **Cas du véhicule simulé par force constante**

Dans cette situation, le véhicule en mouvement est symbolisé par une force constante. Cela s'applique lorsque la masse du véhicule est considérablement inférieure à celle du pont, impliquant une négligence de l'inertie du véhicule. La poutre qui modélise le pont est exposée à l'influence d'une source mobile qui se déplace à une vitesse constante V. (Fryba L., 1972 et Kryloff A.N., 1905).

- **Cas du véhicule représenté par une masse**

Si le rapport entre la masse du véhicule et celle du pont est inférieur à 0.5 et que la vitesse de roulement est faible, la problématique liée à la masse en mouvement peut être simplifiée en une problématique de force en mouvement. Dans cette situation, l'effet de l'inertie due à la masse peut être considéré comme négligeable, comme souligné dans le travail de (Henchi K., 1995). En revanche, si le rapport de masse dépasse 0.5, le véhicule doit être modélisé en tant que masse avec inertie plutôt que comme une force en mouvement.

- **Cas du véhicule représenté par des systèmes mécaniques masses-ressort-amortisseurs**

Pour mieux représenter le mouvement de véhicule à un ou deux dégrée de libertés, une autre modélisation peut être cité qui tient compte des caractéristiques de la suspension du véhicule (figure I.6).

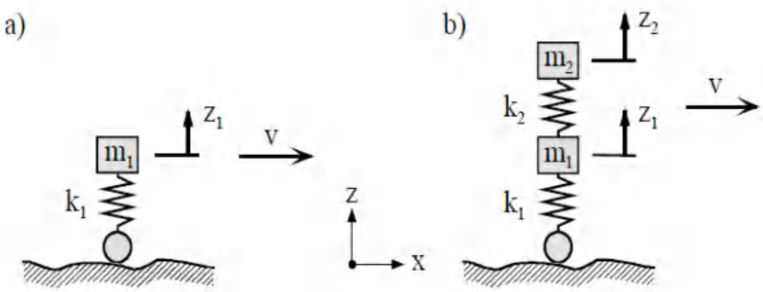


Figure I-6 Modèles bidimensionnelles d'un véhicule à un et deux degrés de liberté sans amortissement.

Si le véhicule se déplace à vitesse constante sur une surface estimée régulière, les masses ne subissent pas de mouvement vertical. Dans le cas où le véhicule traverse un obstacle, la masse en position inférieure va suivre la forme du profile de la chaussée et provoque par la suite un déplacement relatif des extrémités du ressort qui modifie ainsi la force appliquée au niveau du sol. Dès que ces masses se déplacent en verticale, des forces d'inertie et d'amortissement vont s'activer et affrontent l'oscillation du véhicule qui influe aussi sur la force exercée sur la surface de roulement. Des facteurs supplémentaires ont la capacité d'altérer l'intensité des charges exercées sur le pont. Par exemple, les anomalies dans le profil statique de la chaussée, les forces engendrées par l'accélération, le freinage et même l'influence du vent sont autant de paramètres qui induisent une transformation constante dans les sollicitations subies par la structure du pont. Cette modélisation du véhicule ne permet pas de prendre l'effet de l'amortissement, ceci poussent les auteurs à adopter d'autre modèle pour les véhicules mobiles figure I.7.

C'est le modèle d'une masse montée sur un oscillateur (ressort + amortisseur) (Inglis C.E., 1943 et Fryba L., 2007).

- **Cas des modèles bidimensionnelles**

Modèle à 1 DDL : C'est le système dynamique le plus simple à un seul degré de liberté. La masse qui est en contact avec la chaussée est un nœud nulle par contre le nœud supérieur représente le bloc rigide de la masse figure I.7.

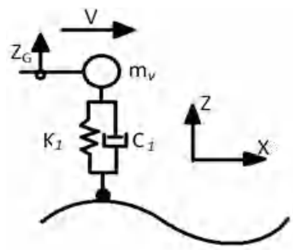


Figure I-7 Modèle à 1 DDL.

I.2 La vibration générée par les véhicules sur les ponts

Afin de saisir le phénomène en question, nous exposons une explication des impacts dynamiques engendrés par le passage de véhicules sur un pont. En premier, on traite le cas du véhicule simulé comme charge constante, on suppose qu'elle est dotée d'une vitesse constante lors de son passage sur le pont. Le pont idéalisé par poutre est caractérisée par sa longueur, sa rigidité et par sa masse par mètre linéaire. Pour chaque instant t, la force mobile se trouve en position $x = v.t$ sur la poutre, qui va provoquer sa déformée par la suite.

Durant l'intervalle de temps Δt, le passage d'un état déformé à un autre, résulte dans chaque élément infinitésimal de la poutre, une accélération plus des forces élastiques, la poutre est sollicitée donc par des forces d'inertie et des forces d'amortissement, c'est les forces d'inertie qui causent les oscillations de la poutre qui, après la sortie de la force mobile, retrouve sa position de repos par l'intermédiaire des forces d'amortissement.

Cette situation décrit le comportement dans le cas où la masse du véhicule qui traverse le pont est très faible par rapport à celle de la structure, dans le cas contraire, l'effet d'inertie de la masse doit être pris en compte. Lors du passage de la masse mobile sur la poutre, elle modifie les propriétés vibratoires de la structure, ce qui entraîne des changements ultérieurs dans les modes et les fréquences de vibration du système en régime forcé.

La structure du véhicule est posée sur des essieux par l'intermédiaire de la suspension dans le but de minimiser les accélérations verticales au niveau du châssis pour des raisons de sécurité et de confort. On peut simplifier ce concept en utilisant un modèle à deux masses : l'une représentant le châssis et la carrosserie, et l'autre symbolisant les essieux et les roues liées entre elles par un ressort concrétisé par la suspension figure I.8 (Broquet C., 1999).

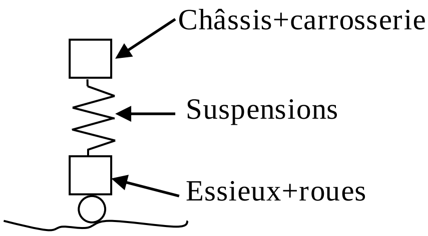


Figure I-8 Véhicule modélisé par un système dynamique (Broquet C., 1999).

Plus loin dans l'étude des effets dynamiques résultant du passage d'un véhicule sur un pont, on suppose que le véhicule se déplace à une vitesse constante sur une surface horizontale sans rugosité. Dans cette situation, le véhicule exerce une force constante sur la surface par le biais de ses pneus, équivalente à sa charge statique. Dès que le véhicule pénètre sur le pont et à mesure de sa progression sur toute sa longueur, il induit des déformations dans la structure du pont, altérant ainsi le profil de la surface de la chaussée.

Ensuite, le déplacement relatif des extrémités du ressort qui représente les suspensions du véhicule survient. En prenant en compte que le véhicule reste en contact continu avec la chaussée, cela entraîne une modification de la force appliquée sous les pneus. Dans cette configuration, les forces élastiques présentes dans la structure agissent automatiquement pour rétablir l'équilibre, mais elles se combinent avec les forces d'inertie, ce qui provoque des oscillations dans la structure. Ce changement dans le profil de la chaussée a un impact sur le mouvement du véhicule en influençant les suspensions, ce qui engendre un autre déplacement relatif des extrémités des suspensions. L'état d'équilibre du véhicule en mouvement entraîne des variations dans l'intensité des charges exercées, perturbant à nouveau l'équilibre du pont. Ce processus d'ajustements successifs, résultant des positions vibratoires des masses et de la déformation de la structure, répété tout au long du trajet du véhicule. Une fois le pont traversé, ces vibrations sont atténuées par les forces d'amortissement.

En réalité, la situation présente des similitudes avec celle énoncée précédemment, mais elle est également complétée par d'autres sources d'excitation qui impactent les vibrations du véhicule. Ces sources comprennent, entre autres, les imperfections dans la surface de la route, les conditions initiales de vibration du véhicule lorsqu'il aborde le pont, la présence simultanée d'autres véhicules sur le pont, ainsi que les forces provenant de l'accélération, du freinage et du vent. Tous ces éléments contribuent à la variation de l'intensité des charges qui sollicitent le pont. Ces facteurs influencent le mouvement global du véhicule et induisent des déformations dans la structure en raison de l'évolution constante de ces charges. C'est en raison de cette conjonction que l'on considère le véhicule et le pont comme deux systèmes vibratoires étroitement interconnectés.

Ces descriptions mettent en évidence la grande diversité des facteurs impliqués, incluant les modèles de la structure du pont ainsi que de la source en mouvement, en se basant sur différentes approches et suppositions (Broquet C., 1999).

I.3 Revue de littérature sur la modélisation du comportement des ponts

Le comportement des ponts lors de passages des véhicules est très compliqué, dû à la sophistication des modèles utilisés pour représenter à la fois les ponts et les charges des véhicules. Il est donc crucial de prêter une attention particulière aux modèles choisis et de les étudier de manière appropriée.

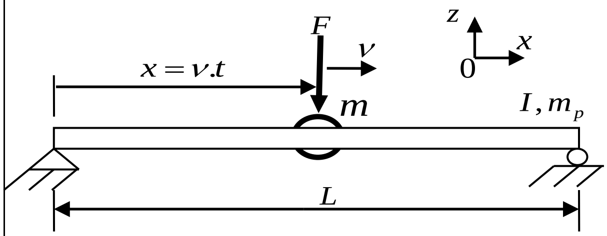
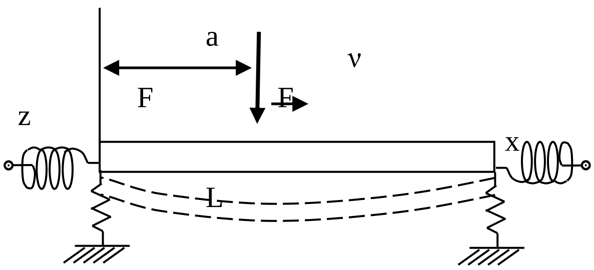
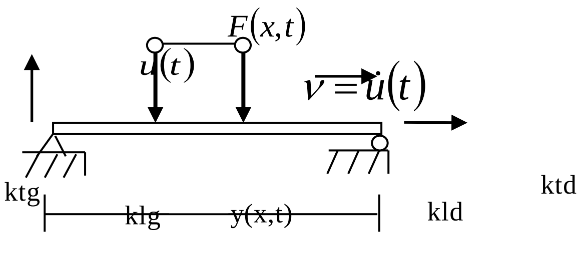
Dans la littérature, on trouve une variété considérable de modèles pour les ponts ainsi que pour les véhicules, présentant des niveaux de complexité variables. Voici ci-dessous, quelques exemples tirés de la litttérature que nous pouvons citer.

I.3.1 Modélisation du pont comme poutre Euler-Bernoulli sous charges mobiles

La plupart des auteurs privilégient le modèle de la poutre simplement appuyée sous charges mobiles en tant que l'un des modèles de pont les plus largement utilisés. Ces modèles qui représentent le comportement dynamique des ponts modélisés comme poutre d'Euler-Bernoulli traversés par des véhicules sont exposés sur le tableau I.1.

On recense les travaux que nous avons identifiés et considérés comme significatifs jusqu'à la date actuelle. Il est également possible de mentionner d'autres études qui nous ont permis de mieux appréhender différents paramètres susceptibles d'affecter le comportement dynamique global des ponts soumis à divers types de charges. De plus, ces travaux prennent en considération de nombreux autres facteurs, tels que l'interaction entre le pont et le véhicule, ainsi que l'état de la surface de la chaussée, qui exercent une influence considérable sur le comportement.

Tableau I-1 Les modèles étudiées par rapport à la littérature.

Le modèle	Type de charges	travaux
 poutre simplement appuyée chargé par une seule force mobile.	Masse sans ou avec inertie	Lee H. P. (1996) Foda A. et Abduljabbar Z. (1998) Museros P. et al. (2013) Sudheesh Kumar C. P. et all. (2015) (2) Dos Santos V. G. R.C. et al. (2019) Ghannadiasl A. et Mofid M. (2023)
	Charge Sous forme Harmonique	Simsek M. et Kocaturk T. (2009) Henchi K. (1995) Garinei A. (2006)
 poutre simplement appuyée chargé par convoi de forces mobile.	Convoi de charges mobile	Henchi K. (1995) Yang Y. B. et al. (1996) Savin E. (2001) Michaltos G. T. (2002) Yau J. D. et Yang Y. B. (2005) Museros P. et al. (2013)
 poutre appuyée sur ressorts élastiques chargé par une seule charge.	Poutre sur appuis élastiques	Foda A. et Abduljabbar Z. (1998) Mehri B. et al. (2009) Museros P. et al. (2013)

I.3.1.1 Synthèse des travaux dans le cas d'une force ou masse mobile

- Nous débutons par l'exposition du travail accompli par Ghannadiasl A. et Mofid M. (2023) effectuer sur une poutre de Timoshenko avec toutes les combinaisons possible d'appuis, dans cette étude les auteurs ont présenté l'effet de la prise en compte de l'inertie de la masse sur la vibration de la poutre en fonction de la vitesse de la charge mobile, l'étude est basée sur les notions de déplacement vertical et d'accélération, la méthode utilisé est celle de la fonction de Green.

- Dos Santos V. G. R.C. et al. (2019) ont présenté une analyse détaillée de la vibration de la poutre d'Euler-Bernoulli. Cette étude ne tiens pas l'effet de l'inertie de la masse mobile c.à.d. la charge est modélisée comme force mobile se déplaçant à vitesse constante. La réponse dynamique de cette poutre est analysée en termes de déflexion. Les résultats obtenus dépendent à la fois de la vitesse et du point d'application de la charge (à $L/4$, $L/2$ et $3 \cdot L/4$). Ces résultats mettent en évidence une symétrie de flexion par rapport au milieu de la poutre, spécifiquement dans le cas où le point analysé se trouve à $x = L/2$. Le document présente également l'impact de l'augmentation de la vitesse de roulement, qui conduit directement à une diminution de l'amplitude des oscillations ainsi que de la période.

Une observation supplémentaire concerne le point sur la poutre où le déplacement atteint son maximum. Il est important de noter que ce point n'est pas toujours situé au milieu de la poutre, c'est-à-dire à $L/2$. Ce comportement découle à la fois à la flexion de la poutre et de l'entraînement de la charge avec la vitesse de roulement. Ces conclusions sont mises en contraste dans la même étude avec celle de Paganelli A. (2014), qui a inclus parmi les cas étudiés dans sa thèse le cas de la poutre de Timoshenko. Malgré la négligence des théories adoptées pour la poutre de Timoshenko, les résultats restent acceptables.

- Ces mêmes résultats sont constatés par les études de Henchi K. (1995) et de Foda A. et Abduljabbar Z. (1998) qui ont traité le cas de la poutre simplement appuyée par la fonction de Green, les conditions aux limites, de continuités et d'effort tranchant sont comme suit :

$$G(0,u) = G(L,u) = G''(0,u) = G''(L,u) \tag{1.16}$$

$$G(u^+,u) = G(u^-,u) \ , \ G'(u^+,u) = G'(u^-,u), \ G''(u^+,u) = G''(u^-,u) \tag{1.17}$$

$$EI \cdot [G'''(u^+,u) - G'''(u^-,u)] = 1 \tag{1.18}$$

Une partie du travail présenté par Sudheesh Kumar et al. (2015) (1) étudie la même poutre, les mêmes remarques concernant la symétrie de la réponse dynamique sous forme de flèche sont constatés bien sur quant le point d'analyse est celui de $L/2$ aussi en prenant en considération uniquement le premier mode car il est à noté que pour la détermination de la déflection de la poutre simplement sollicité par charge mobile, c'est uniquement le premier mode qui est le plus prépondérant.

- Les mêmes chercheurs Sudheesh Kumar et al. (2015) (2) ont également proposé une étude plus générale qui donne la flèche en prenant en considération les trois premiers modes de vibration, ainsi que la méthode de calcul pour tous les modes.

- Parmi les cas d'études exposés par Museros P. et al. (2012), celui de la poutre d'Euler-Bernoulli simplement appuyée sous l'action de charges mobiles. Les auteurs présentent une solution homogène qui prend en compte les quatre premiers modes de vibration. Nous pouvons observer que leurs résultats corroborent les conclusions tirées précédemment, en plus de mettre en avant la possibilité d'annulation de la vibration libre dans les quatre premiers modes, l'un des objectifs poursuivis dans cette étude. Cela revêt de l'importance de déterminer quelle vitesse du véhicule entraînera une vibration libre maximale, ainsi que le nombre de modes impliqués et celui qui contribuera à atténuer la vibration libre.

- Les travaux de recherche menés par Sheng G.G. et Wang X. (2017), par Michaltos G. T. et al. (1996), par Henchi K. (1995) et par Foda A. et Abduljabbar Z. (1998) ont été axés sur une analyse approfondie et une compréhension globale de tous les éléments qui influent sur le comportement dynamique des poutres sous l'effet des charges mobiles. Ils ont introduit un paramètre crucial, à savoir l'impact de l'inertie de la charge roulante, en établissant un rapport de masse (masse de la charge mobile par rapport à la masse de la poutre), et en examinant les résultats de deux approches distinctes.

Les conclusions de ces études, lorsqu'on néglige la masse de la charge, reflètent les mêmes observations mentionnées précédemment.

- L'étude de Michaltos G. T. et al. (1996) montre que plus le rapport de la masse de charge par rapport à la masse de la poutre par mètre linéaire M / m_l augmente dépendant à la valeur de la vitesse, le facteur d'amplification dynamique diminue considérablement, cet effet est moins remarquable pour de vitesse.

- Le travail de Lee H. P. (1995) présente une formulation de l'équation de mouvement pour l'analyse de la réponse dynamique d'une poutre sous l'effet d'une masse mobile. Cette approche utilise la méthode Lagrangienne ainsi que la méthode modale. Comme la plupart des études dans ce domaine, la convergence de cette recherche est uniquement présentée en termes de déplacement.

Lee H. P. (1995) a constaté que la séparation de la masse de la poutre peut se produire à une vitesse relativement faible et avec une masse réduite dans le cas d'une poutre encastrée des deux côtés. Cependant, dans ce même cas, la séparation de la masse de la poutre peut être empêchée par l'application de forces axiales de traction appropriées. Il est à noter que la force de contact calculée peut rester positive, indiquant que la masse reste en contact avec la poutre la plupart du temps. Cela peut être réalisé en appliquant une charge adéquate.

I.3.1.2 Synthèse des travaux dans le cas d'une force harmonique

- Parmi les types de modèles de la charge mobile, on cite celui de la charge mobile sous forme harmonique, on a constaté que peu d'article adopte ce modèle.

Parmi ces études, il convient de mentionner une première recherche présentée par Simsek M. et Kocaturk T. (2009) qui examine l'impact du comportement de la poutre d'Euler-Bernoulli sous l'influence d'une charge harmonique. Cela est accompli en résolvant l'équation du mouvement dans le domaine non linéaire à l'aide des équations de Lagrange, combinées avec la méthode d'intégration implicite dans le temps de Newmark-β associée à la méthode de Newton-Raphson. Cette étude explore les effets de divers paramètres, tels que la flèche significative de la poutre, son amortissement interne, la vitesse de la charge mobile harmonique, et l'impact de la charge mobile elle-même sur la réponse dynamique de la poutre.

Ensuite, une comparaison entre le comportement linéaire et non linéaire est présentée en imposant la condition où la matrice non linéaire des rigidités est égale à zéro. Les résultats sont exprimés sous forme de déplacements, de vitesses et d'accélérations calculés numériquement.

- Un autre travail de Garinei A. (2006) qui examine la déformation des modèles de ponts sous forme de poutres simples sous l'influence de charges mobiles. Les aspects spécifiques étudiés revêtent une importance cruciale pour évaluer les effets résultant de charges combinées et répétées, obtenues par superposition. Lorsqu'une charge constante est appliquée, l'auteur a présenté une méthode analytique qui, en tenant compte des niveaux d'amortissement faibles, permet de calculer le moment où la déformation maximale se produira. De plus, ils ont mis en évidence l'importance de la fréquence dans le cas de charges harmoniques.

Toutes ces considérations sont cruciales lors de l'analyse de certaines combinaisons pour lesquelles les phénomènes d'atténuation des vibrations libres peuvent se manifester. Une investigation plus approfondie des amplifications en présence d'une charge constante a permis d'évaluer divers résultats issus de la littérature. Parmi ceux-ci, il y a l'amplification maximale qui varie lorsque la vitesse de roulement est modifiée, ainsi que le concept de vitesse critique. Cependant, ces aspects ne revêtent pas d'importance significative dans le problème analysé sous l'influence de charges harmoniques, comme ils l'ont démontré.

- toujours le travail de Henchi K. (1995) qui à présenté dans sa thèse une variété de cas de poutres et de charges, citons celui de la charge mobile sous une forme harmonique avec quelque exemples.

I.3.1.3 Synthèse des travaux dans le cas des convois de charges mobiles

- Sur le même travail citer auparavant de Museros P. (2013), le problème des convois de charges mobiles est abordé par l'étude de la vibration d'une poutre simplement appuyée sous passage des charges d'un train, dans le cas ou l'espacement entre les charges du train (ou entre groupes de charges) est répétitive, la vibration libre généré par chaque charge est accumulée et crée une situation de résonnance. Dans le cas où la poutre subit un, deux, trois ou plus de cycles d'oscillation entre groupe de charges consécutive, le phénomène est appelé première résonance, deuxième résonnance, troisième résonnance…etc.

- Yau J. D. et Yang Y. B. (2005) étudient une poutre simplement appuyée sollicité par un groupe de charges mobiles uniformes d'espacements et vitesse constante par la méthode de superposition modale. Pour le cas de la charge en mouvement à vitesse de résonnance, le nombre de modes peut influencer significativement l'amplitude de l'accélération de plus pour les poutres à faible amortissement.

Considérant les vitesses de résonnances associées au premier et deuxième mode, une formule simplifiée est proposé pour vérifier si l'accélération maximum peut se produire au centre de la poutre.

Pour le cas où l'amortissement de la structure est pris en considération, la contribution de plus de modes à la réponse sous forme d'accélération tombe à être atténuer, à la fin il à noter qu'il est à conclure que c'est uniquement les modes fondamentaux de vibration qui domine la réponse maximale de la poutre sous forme d'accélération et cela quand l'amortissement est important.

- il est aussi à noter que les essieux de véhicules sont considérés comme convoi de charges dans le cas de la prise en compte du modèle réel des véhicules. Dans ce cadre, le travail de Michaltos G. T. (2002) introduit le modèle du véhicule comme résultante ou charge réel (deux essieux) dans la réponse dynamique d'une poutre à une travée, la charge due au véhicule est constante doté d'une vitesse, cette étude donne aussi une importance à l'effet d'accélération ou de freinage sur le comportement globale ainsi qu'à l'amortissement de la poutre.

Les conclusions démontrent que la variation de la vitesse exerce une influence significative sur la déflexion du pont modélisé comme poutre. Le choix d'un modèle de véhicule avec des charges réparties sur deux essieux s'avère plus précis que pour celui d'une charge résultante. Enfin, il semble que l'impact de l'amortissement de la poutre puisse être négligé.

- Concernant le modèle de la poutre d'Euler – Bernoulli, il y'a des paramètres qui ont un effet considérable dans quelques cas de poutres sous convoi de charges mobiles et qui sont négligés dans cette théorie, dans ce cadre Savin E. (2001) a présenté un travail qui propose une solution analytique exact d'une poutre d'Euler-Bernoulli traversé par succession de charges ponctuelles en inerties négligés. L'amplification dynamique correspondant à la réponse forcé ou libre est analysée en détail, en particulier, la vibration libre ne peut pas être négligé généralement en la comparant à la vibration forcé si le nombre de charges est de l'ordre de dizaines, qui est le cas pour l'application au chemin de fer. Une tentative de formulation est présentée en tenant en compte des déformations dus au cisaillement transversal et de l'inertie rotationnelle selon le modèle de la poutre de Timoshenko.

- Dans un autre travail, Yang Y. B. et al. (1995) ont traité la vibration d'une poutre simple soumise au passage de train à grande vitesse, ce train est modélisé comme composition de deux sous systèmes de charges dues aux roues à intervalle constants, l'un comprenant l'assemblage des roues d'avant et l'autres des roues arrière par une approche analytique. Les paramètres clés qui régissent la réponse dynamique des poutres sont identifiés, en utilisant l'hypothèse de charges mobiles.

Afin d'évaluer l'influence de l'inertie des véhicules en mouvement, des solutions numériques sont obtenues en utilisant la méthode de Newmark-β. L'objectif de cette étude est d'atténuer la réponse en résonance en fonction des cas d'études examinés, en proposant un concept adapté au pont. Cela dépend de plusieurs paramètres, tels que la longueur de la travée étudiée, la section transversale traversée, et en fin de compte, la vitesse de déplacement du train.

Parmi les conclusions tirées de ce travail, c'est la condition d'annulation de création de la première résonance. Une fois cette condition est appliquée, la résonance est tout simplement annulée. L'effet d'inertie des véhicules en mouvement a tendance à allonger la période de vibration dus au modèle réel du véhicule provoquant un décalage des pics de résonances vers des vitesses plus petites. L'inclusion de l'amortissement de la charge peut entraîner une réduction significative de la résonance, plus la longueur de portée de la poutre est courte, plus le facteur d'impact pour le déplacement de la poutre est grand. Lorsque le rapport portée de la poutre/ longueur de cabine (L/d) est égal à 1.5, pratiquement aucune réponse de résonance ne sera induite, car la première résonance a été supprimée.

I.3.2 Utilisation de la Fonction de Green pour l'Étude des Poutres d'Euler-Bernoulli sous Charges Mobiles avec Différentes Conditions d'Appuis

La vibration de la poutre d'Euleur-Bernoulli peut être étudié par l'utilisation d'une fonction appellé fonction de Green, cette méthode est utiliser par plusieurs auteurs pour des poutres supportées sur appuis connus ou élastiques tableau I-2.

Tableau I-2 Modèles étudiés par la fonction de Green.

Problème poutre sur différentes conditions d'appuis connues par la fonction de Green	- Lueschen G. G. G. et Bergman L. A. (1996) - Foda M. A. et Abduljabbar Z. (1998) - Mehri B. et al. (2009) - Hozhabrossadati S. M. et al. (2015)
Problème poutres sur supports élastiques	Yau J. D. et al. (2001) Ding Y. et al. (2019)
Problème poutre sur supports élastiques par la fonction de Green	- Xu, M., Cheng, D. (1994) - Kukla S. et Posiadala B. (1994) - Li X. Y. et al. (2014)

I.3.2.1 Synthèse des travaux pour le cas de la Poutres sollicité par charge mobile avec différentes conditions d'appuis

- Un premier travail, celui de Hozhabrossadati S. M. et al. (2015), qui explore de manière détaillée la fonction de Green pour la poutre d'Euler-Bernoulli en résonance. Cette représentation générale est sous cette forme :

$$G(x,u)=\begin{cases} A\cdot\sin(S\cdot u)+B\cdot\cos(S\cdot u)+C\cdot\sinh(S\cdot u)+D\cdot\cosh(S\cdot u), 0\le u\le x \\ E\cdot\sin(S\cdot u)+F\cdot\cos(S\cdot u)+J\cdot\sinh(S\cdot u)+H\cdot\cosh(S\cdot u), x\le u\le L\end{cases} \tag{1.19}$$

Avec L est la longueur de la poutre, et les 8 coefficients A jusqu'à H sont des constantes fonctions de u, ces coefficients sont calculés en évaluant les conditions de continuités et de limites. La solution peut ce simplifié sous cette forme :

$$y(x)=A'\cdot\sin(S\cdot x)+B'\cdot\cos(S\cdot x)+C'\cdot\sinh(S\cdot x)+D'\cdot\cosh(S\cdot x) \tag{1.20}$$

La résolution du système obtenu des 8 équations conduit à ce que :

$$\sin(S\cdot L)=0 \tag{1.21}$$

Ce qui donne :

$$S=\frac{n\cdot\pi}{L} \tag{1.22}$$

Avec n est entier.

S est appeler paramètre de fréquence.

Et la fonction de Green peut être réécrite sous la forme :

$$G_m(x,u)=-\frac{\sin(S\cdot x)}{2\cdot L\cdot S^3}\cdot u\cdot\cos(S\cdot u)+E(x)\cdot\sin(S\cdot u)+\frac{\sinh(S\cdot x)}{2\cdot S^3\cdot\tanh(S\cdot L)}\cdot\sinh(S\cdot u)+....$$

$$..+\begin{cases}\frac{\cos(S\cdot x)}{2\cdot S^3}\cdot\sin(S\cdot u)-\frac{\cosh(S\cdot x)}{2\cdot S^3}\cdot\sinh(S\cdot u), 0\le u\le x \\ \frac{\sin(S\cdot x)}{2\cdot S^3}\cdot\cos(S\cdot u)-\frac{\sinh(S\cdot x)}{2\cdot S^3}\cdot\cosh(S\cdot u), x\le u\le L\end{cases} \tag{1.23}$$

Avec $E(x)$ est une fonction arbitraire qui dépond de x et S.

Ils ont conclus que lorsque le paramètre de fréquence S avec $S^4=m\cdot\omega^2/EI$ possède une valeur distincte de $n\cdot\pi/L$, et que $A'=0$ (le premier terme de la fonction de Green générale), cela conduit à une solution triviale. Dans ce cas, la fonction de Green se réduit à celle utilisée dans les articles ultérieurs pour des situations impliquant des appuis élastiques ou d'autres conditions spécifiques. Cette forme simplifiée est comme suit :

$$G(x,u)=\begin{cases} a\cdot\sin(S\cdot u)+b\cdot\cos(S\cdot u)+c\cdot\sinh(S\cdot u)+d\cdot\cosh(S\cdot u), 0\le u\le x \\ e\cdot\sin(S\cdot u)+f\cdot\cos(S\cdot u)+j\cdot\sinh(S\cdot u)+h\cdot\cosh(S\cdot u), x\le u\le L\end{cases} \tag{1.24}$$

Une observation particulièrement crucial à souligner, c'est que lorsque S tend vers zéro, cela équivaut à $\omega \to 0$, la fonction de Green dynamique en l'absence de résonance $S \neq n \cdot \pi / L$, ce qui ramène la fonction à la forme statique de la fonction de Green pour une poutre simplement appuyée.

- Mehri B. et al. (2009) ont mené une étude portant sur la réaction dynamique d'une poutre soumise à des charges mobiles, en tenant compte de diverses conditions aux limites. Cette étude s'est appuyée sur la théorie d'Euler-Bernoulli et utilise la fonction de Green simplifiée utilisé plus tard dans le travail de Hozhabrossadati et al. (2015). L'effet de type des conditions d'appuis, de la vitesse du passage de la charge (constante) sur la poutre sont étudiés, plus d'autres paramètres pertinents.

Dans cette étude, des rigidités transversales (kt) et longitudinales (kl) ont été attribués aux appuis, couvrant ainsi toutes les conditions d'appui, allant de zéro à l'infini.

Cependant, les résultats des études se concentrent uniquement sur les cas d'appuis courants tels que les appuis encastrés ou simplement appuyés, sans aborder le cas général. Dans la formule finale qui est présentée pour le cas de la poutre c-ss encastrée-simplement appuyée, les termes de rigidité qui ont été pris en compte dès le début de la théorie ne figurent pas. Cette formule est exposée en chapitre 2. Les résultats de cette étude sont comparés à ceux de Lee H. P. (1996) et de Foda A. et Abduljabbar Z. (1998). Une observation similaire concernant la symétrie de la réponse de la poutre par rapport au point de la mi-portée est constatée.

Ils ont aussi présenté l'effet de la variation de β_i qui est le rapport de la vitesse de la charge à la valeur de la fréquence naturelle sans unité : $\beta_i = v / \omega_i \cdot L$.

Ils ont noté que pour les conditions aux limites cc-, ss-ss, c-f et c-ss, qu'il existe plusieurs vitesses critiques (où c signifie encastré, ss simplement appuyée et f libre). De plus, la première flèche critique pour toutes les conditions d'appui se situe dans la plage de (0.33-0.36) de β_i. En dehors de cette plage, la flèche pour le cas c-f atteint son maximum tandis que celle de la poutre c-c est minimale.

En résumé, ils ont constaté que la flèche maximale due aux valeurs critiques des rapports β_1, β_2 et β_3, engendre plusieurs pics. De plus, pour toutes les conditions d'appui, le dernier pic parviens dans un intervalle de 0.33 à 0.36.

- Dans une étude distincte, Foda A. et Abduljabbar Z. (1998) ont examiné une poutre similaire à une seule travée, simplement appuyée, traversée par un véhicule modélisé sous la forme d'une masse mobile (en prenant en compte l'inertie de la masse du véhicule pour ce cas). Pour résoudre l'équation du mouvement, ils ont utilisé la fonction de Green. Ils ont analysé divers cas impliquant des rapports de masse du véhicule à celle de la poutre, pour différentes vitesses.

L'approche de résolution du problème à l'aide de la fonction de Green s'est révélée être une méthode simple et directe pour étudier le comportement dynamique de ce type de poutres soumises à des charges mobiles. Les deux approches de modélisation, que ce soit l'approche analytique ou celle basée sur la fonction de Green, ont démontré que la prise en compte de l'inertie du véhicule ou son omission n'a pas un impact significatif sur le comportement dynamique de la poutre lorsque les véhicules se déplacent à des vitesses réduites. Cette conclusion est également corroborée par Henchi K. (1995), et elle est étayée par les résultats obtenus par Foda A. et Abduljabbar Z. (1998).

A la fin de ce travail, les auteurs ont présenté la fonction de Green pour deux cas d'appuis de la poutre : simplement appuyée aux deux extrémités (ss-ss) et en porte-à-faux.

- Une dernière étude, menée par Lueschen G. G. G. et Bergman L. A. (1996), explore les deux types de poutres, à savoir Euler-Bernoulli et Timoshenko, soumises à une force axiale dans diverses conditions d'appuis : s-s, s-c, s-f, c-c, c-f et f-f (où s représente l'appui simple, c l'encastré et f le libre). Cette etude est réalisée en utilisant la fonction de Green. Enfin, une comparaison entre les deux approches de poutres est effectuée pour le cas de la poutre simplement appuyée. L'étude présente les conditions aux limites pour tous les types d'appuis tableau I-3, cependant, notre attention se portera exclusivement sur la poutre d'Euler-Bernoulli sur appuis simples.

Tableau I-3 Conditions aux limites (Lueschen G. G. G. et Bergman L. A., 1996).

Condition aux limites	Théorie d'Euler-Bernoulli
Simple S	$v(x,u)=0, v''(x,u)=0$
Encastré (C)	$v(x,u)=0, v'(x,u)=0$
Libre (F)	$v''(x,u)=0, v'''(x,u)=0$

I.3.2.2 Synthèse des travaux pour le cas de Poutres sur ressorts élastiques sollicité par charge mobile

Dans ce contexte, Ding Y. et al. (2019) ont présenté une solution general d'une poutre à travée simple avec des appuis élastiques transversals, rotationnelles et axiales dues à une charge mobile arbitraire, la théorie adoptée est celle des poutres type Euler-Bernoulli, dans laquelles les appuis sont traitées comme des ressorts aux limites multidirectionnels, les solutions de la vibration transversale de la poutre sous des charges mobiles constantes, sinusoidales et cosinusoidales sont obtenues, puis la vibration d'une poutre soumise à une charge mobile arbitraire est derivée de la superposition de series de Fourier, les effets de ressorts sur les fréquences, les modes propres de vibration et sur la flèche de la poutre sont presentés.

- Une autre étude menée par Yau J. D. et al. (2001) qui examine les répercussions de l'introduction de supports élastiques sur une poutre soumise à des charges en mouvement. Cette étude a été abordée d'un point de vue analytique, en prenant en compte un faible niveau d'amortissement dans la poutre. Les chercheurs ont identifié les conditions de résonance ainsi que le phénomène d'annulation de la vibration libre.

Lorsque la poutre est dépourvue d'amortissement, la réponse en résonance tend à augmenter à mesure que le nombre de charges mobiles traversant la poutre augmente. En revanche, pour une poutre équipée d'un amortissement, sa réponse en résonance reste relativement stable, indépendamment du nombre de charges mobiles qui la parcourent. Les chercheurs ont dérivé une formule d'impact sous forme enveloppe pour la poutre reposant sur des supports élastiques avec un amortissement réduit, lorsqu'elle est soumise au passage d'un nombre infini de charges mobiles.

En conclusion, cette étude a révélé que l'ajout de supports élastiques peut augmenter la réponse de la poutre dans la plupart des situations de résonance. De plus, il y a à noté que plus les supports élastiques sont flexibles, plus la réponse de la poutre est amplifiée.

I.3.3 Utilisation de la Fonction de Green pour l'Étude des Poutres sur Ressorts Élastiques Sollicitées par Charges Mobiles

- Dans le domaine de la modélisation des structures, divers types de poutres qui résument ce comportement ont été étudiés, parmi lesquels le modèle d'Euler-Bernoulli (EB), de Rayleigh (RB) et de Timoshenko (TB). Le travail mené par Li X. Y. et al. (2014) offre un développement de la fonction de Green dans le contexte des vibrations forcées pour le modèle TB, en prenant en compte les effets d'amortissement. Ce développement découle des équations fondamentales et repose sur l'utilisation séquentielle de la méthode de séparation des variables et de la transformation de Laplace pour dériver la fonction de Green.

Les solutions fondamentales ainsi obtenues peuvent être restreintes aux cas particuliers, comme la poutre de Timoshenko sans effet d'amortissement, la poutre d'Euler-Bernoulli (EB) ou encore celle de Rayleigh (RB). Ces réductions sont obtenues en fixant certaines quantités physiques à des valeurs nulles ou infinies. La charge sollicitant la poutre dans ce cas est sous la forme : $p(x,t) = P(x) \cdot e^{i\Omega t}$.

Sur ce même travail ils ont présenté les conditions à utiliser pour résoudre le système des 8 équations pour pouvoir déterminer la fonction de Green finale, ces conditions sont les mêmes présenter sur le travail de Lueschen G. G. G. et Bergman L. A. (1996) tableau I-4.

Tableau I-4 Conditions aux limites de la poutre EB, RB et TB (Lueschen G. G. G. et Bergman L. A., 1996).

BC	encastré	simple	libre
EB	$w(0,L)=0,$ $w''(0,L)=0$	$w(0,L)=0,$ $w'(0,L)=0$	$w(0,L)=0,$ $w'''(0,L)=0$
RB	$w(0,L)=0,$ $w''(0,L)=0$	$w(0,L)=0,$ $w'(0,L)=0$	$w''(0,L)=0,$ $(w'''+\lambda_0\cdot w')(0,L)=0$
TB (ND)	$w(0,L)=0,$ $w''(0,L)=0$	$w(0,L)=0,$ $(w'''+\lambda_5\cdot w')(0,L)=0$	$(w''+\lambda_1\cdot w)(0,L)=0,$ $(w'''+\lambda_6\cdot w')(0,L)=0$
TB (D)	$w(0,L)=0, w''(0,L)=0$	$w(0,L)=0,$ $(w'''+\lambda_8\cdot w')(0,L)=0$	$(w''+\lambda_7\cdot w)(0,L)=0,$ $(w'''+\lambda_9\cdot w')(0,L)=0$

A noter que

$$:\begin{cases}\lambda_0=\gamma\cdot\Omega^2/EI\\ \lambda_1=\Omega^2\cdot\mu/K\cdot GA\\ \lambda_2=K\cdot GA/EI\\ \lambda_3=i\cdot\Omega\cdot c_1/k\cdot GA\\ \lambda_4=i\cdot\Omega\cdot c_2/EI\\ \lambda_5=\lambda_1+\lambda_2\\ \lambda_6=\lambda_0+\lambda_1\\ \lambda_7=\lambda_1-\lambda_3\\ \lambda_8=\lambda_5-\lambda_3\\ \lambda_9=\lambda_6-\lambda_3+\lambda_4\end{cases} \tag{1.25}$$

Avec :

w est le déplacement transversal, $E\cdot I$ et $k\cdot GA$ représentent respectivement les modules de raideur en flexion et en cisaillement, c_1 et c_2 sont deux variables caractérisant les effets d'amortissement de la translation et de la rotation. γ et μ représentent respectivement l'inertie de rotation et la masse par mètre linéaire de la poutre, $p(x,t)$ désigne la charge appliquée sur la poutre et k est le facteur de correction de cisaillement.

L'étude à été effectuer sur plusieurs types de section de poutre citons : section rectangulaire, circulaire, ellipse et circulaire creuse, la comparaison de la flèche est effectuer par rapport à l'étude de Lueschen G. G. G. et Bergman L. A. (1996) pour le cas de la poutre simplement appuyée.

Parmi les conclusions tirées de cette étude, la flèche dynamique de la poutre RB est très proche à celle de EB, cela indique que l'inertie rotationnelle à un faible effet sur la flèche. Par contre les amplitudes de la flèche du TB sont beaucoup plus importantes que celles de la RB et TB, cela signifie que l'effet de cisaillement introduit dans le modèle TB à une influence significative sur la vibration de la poutre.

- Un autre travail qui a utilisé la même méthode de calcul, présenté par Kukla S. et Posiadala B. (1994), la charge mobile dans ce cas d'étude est sous forme de masse liée à la poutre par un ressort, les expressions des équations pour les fréquences naturelles sont obtenues au moyen de la méthode de la fonction de Green. La solution contient toutes les combinaisons possibles des conditions d'appuis classiques de la poutre, des exemples numériques montrent l'influence des masses attachées sur les fréquences du système et qu'elles peuvent provoquer des augmentations (ou des diminutions) des fréquences du système par rapport à celles de la poutre sans masses attachées.

- d'autre part, Xu M. et Cheng, D. (1994) ont présenté une nouvelle approche pour résoudre le problème de vibration des structures poutres avec appuis élastiques et masses concentrées montées élastiquement sur la poutre.

I.3.4 D'autres travaux de modélisation du comportement des ponts

- Henchi K. (1995) à traité dans cette étude le cas de pont modélisé par poutre sur appuis simple, l'objectif de son étude était de développer un modèle numérique de simulation du comportement dynamique des ponts sous charges mobiles. Il a présenté deux approches analytiques et en éléments finis, deux méthodes de résolution pour le problème de poutres sous forces mobile basé sur l'approche fréquentielle par l'utilisation de l'algorithme FFT, ainsi que la méthode semi analytique utilisé pour résoudre les problèmes de poutres sous masses mobiles.

Il a aussi présenté les différents aspects de la modélisation de l'interaction pont-véhicule avec la prise en compte de la rugosité du profile de la chaussée, puis à la fin il a présenté un cas réel de pont, il a présenté des mesures expérimentales sur un pont réel puis il a fait une étude paramétrique qui lui a permis de mettre en évidence quelque recommandations, concernant la résistance des ponts aux effets dynamiques et l'établissement d'un facteur dynamique adapté aux conditions spécifiques de chargement des ponts.

- Une autre étude concernant la vibration forcée de la poutre d'Euler-Bernoulli par la méthode de la fonction de Green a été présentée par Abu Hilal M. (2003), la poutre étudiée dans ce travail est supportée sur des ressorts qui travaillent à la torsion et à la translation aux deux extrémités, il a présenté la fonction de Green mais pour différents cas d'appuis encastré- simplement appuyée- libre avec une écriture simplifiée et un cas de poutre en porte à faux avec des supports simples intermédiaires. La méthode que nous allons suivre pour le ré-ordonnement des termes de la fonction de Green pour le deuxième modèle est inspiré de ce travail.

- D'autres études comme celle de Sheng G.G. et Wang X. (2017) qui prend en considération la rugosité de la chaussé, ainsi que l'étude approfondie de Wu J. J. et al. (2001) qui présente une étude dynamique de la réponse de la structure sous charges mobiles en utilisant les méthodes analytiques et en éléments finis, ce paramètre non pris en considération dans notre étude mais qui influencent énormément le comportement vibratoire de la poutre.
- Feng D. et al. (2015) et Law S. S. et Zhu X. Q. (2005) ont présenté un système de véhicule à plusieurs degrés de libertés, avec la prise en compte de la rugosité de la chaussée pour Feng D. et al. (2015) et les dommages du béton pour Law S. S. et Zhu X. Q. (2005).
- Une autre étude présentée par Law S. S. et Zhu X. Q. (2004) qui modélise le véhicule par un système mécanique à sept degré de libertés.
- Chan T. H. T. et Ashebo D. B. (2006) ont aussi étudié la même poutre (trois travées) sous charges constante mobile.
- Rahimzadeh R. F. (2008) a étudié le comportement dynamique de la poutre d'Euler-Bernoulli sous masse mobile pour montrer l'effet de son inertie. Une formulation approximative du problème est obtenue par la limitation des effets initiales de la masse mobile sur l'accélération du comportement verticale de la poutre et la détermination de la vitesse critique en fonction de la période fondamentale et de la longueur de la poutre. Les résultats montre la même conclusion tirée par Henchi K. (1995), que pour de petites vitesses, les approches approximatives et exactes sont en très bonne concordance. Malgré cela, la variation de la valeur de la vitesse critique dépend du poids de la masse mobile, d'autre part, il est remarquable que les effets des modes de vibrations les plus prépondérants n'est pas négligeable pour un certain intervalle de vitesse.
- le type de la modélisation des véhicules mobiles est un facteur très important, dans les études citées précédemment, les charges mobiles sont modélisées par des forces ou des masses de valeurs constantes, c'est pour cette raison dans l'étude présentée par Simsek M. et Kocaturk T. (2009), ils ont montré l'effet d'une charge concentrée mais sous forme harmonique. Ils ont présenté la réponse dynamique non linéaire d'une poutre pré-stressée par charge harmonique mobile.
- L'utilisation du principe de la modélisation de la structure réelle en une forme unidimensionnel par le modèle poutre est utilisée aussi par Savin E. (2001), il a utilisé les résultats des expressions analytiques du facteur d'amplification dynamique des poutres sollicitées par charges ponctuelles à vitesses constantes. Ces expressions donnent une méthode d'un calcul rapide de l'amplitude de la vibration induite par une succession de charges en mouvement sur la poutre. Ces résultats sont particulièrement utiles pour les ponts de chemin de fer en vibration sous l'effet de passage de trains à grandes vitesses. Il a présenté une solution analytique exacte pour le cas de la poutre d'Euler-Bernoulli traversée par une succession de charges à petites masses

appliquées ponctuellement puis une présentation détaillée du facteur d'amplification dynamique pour le cas de la réponse forcée et libre, en particulier l'étude de la vibration libre montre qu'elle ne peut être négligée dans ce cas en la comparant avec la vibration forcée.

- Toujours dans le cadre de l'étude de la vibration de la poutre d'Euler-Bernoulli, Wang Y. M. et Ko M. Y. (2014) ont présenté un travail qui étudie l'interaction dynamique des véhicules qui traversent les poutres simplement appuyées. Un modèle plan de véhicule est pris en considération, le système de ce type de voiture est traité comme masse mobile avec une petite charge harmonique qui roule sur une poutre simplement appuyée, il présente une méthodologie analytique et numérique pour évaluer l'effet de l'interaction véhicule-poutre pour plusieurs vitesses de passage du véhicule.

I.3.4.1 Études concernant la modélisation du pont comme poutre sur appuis élastiques

Dans un autre axe de recherche et toujours concernant la vibration des poutres, la considération des différents types d'appuis affecte le comportement et la réponse dynamique du pont.

- Ding H. et al. (2018) ont présenté un travail récent qui donne des caractéristiques non linéaires d'une poutre sur appuis élastiques asymétriques. Seule la non linéarité de la géométrie est considéré.

- Par contre auparavant Yau J. D. et al. (2001) donne de l'importance à la rigidité des appuis, ils donnent une seule rigidité transversale et suppose que la rigidité longitudinale est infinie, ils ont présenté la réponse dynamique d'un pont à poutres avec appuis élastiques sollicité par un train en mouvement par une approche analytique, cette étude a montré que la réponse dynamique de la poutre en résonnance est généralement constante si l'effet d'amortissement est pris en considération et que l'insertion des appuis élastiques aux extrémités de la poutre amplifie la réponse dynamique.

- Dans le même contexte, Alsaif K. et Foda M. A. (2002) ont étudié le cas d'une partie de poutre continu entre deux appuis élastiques par la méthode des fonctions de Green pour déterminer les valeurs optimales des masses et / ou des ressorts et leurs positions sur la poutre pour supprimer la vibration à n'importe quel position.

I.3.4.2 *Études concernant la modélisation du pont comme poutre sollicitées par des véhicules modélisés par des systèmes mécaniques, par une charge répartie et/ou la prise en charge du contacte chaussée/véhicule et la rugosité de la chaussée*

La modélisation de la charge mobile n'est pas toujours prise comme dans les exemples cités auparavant comme force ou masse mobile, ou par charges harmoniques, une autre méthode est présentée par plusieurs auteurs concernant les types de modèles des véhicules mobiles.

- Humar J. L. et Kashif A. H. (1995) ont modélisé la charge mobile comme système mécanique masse-ressort- amortisseur à un degré de liberté. Le même système mécanique sur deux essieux est étudié par Obrien E. et al. (2006).

- Zhu D. Y. et al. (2015) ont présenté une méthode pour l'analyse dynamique des ponts sous les véhicules en mouvement en tenant compte de la séparation et de la rugosité de la surface de la chaussée. Ils ont introduit une méthode de complément linéaire entre le déplacement relatif des roues et du pont aux points de contact, le problème d'interaction dynamique du système couplé véhicule-pont est transformé en un problème de complément linéaire standard avec des relations de connexion différentes entre les roues et le pont.

- Parmi les modèles présentés dans le travail de J. C. Molina-Villegas et Ortega J. E. B. (2023), nous citons celui de la poutre encastrée sur les deux cotés sollicitée par charge unitaire et celui de la poutre simplement appuyée sur les deux cotés sollicitée par charge répartie mobile, ils presentent une formulation dans le domaine fréquentiel puis converti dans le domaine temporel de la fonction de Green pour une poutre type Euler-Bernoulli.

I.3.4.3 *Études concernant la modélisation du pont comme poutre de plusieurs travées*

Dans le même contexte des vibrations des poutres sous charges mobiles, des études ont était mené sur un autre type de poutre.

- Henchi K. et Fafard M. (1997) ont présenté une étude du comportement dynamique d'une poutre à plusieurs travées sous charges mobiles mais la poutre à une section uniforme.

- Martinez-Castro A. E. et al. (2006) ont présenté une étude semi-analytique d'une poutre de section non uniforme à trois travées traversées par charges mobiles.

I.3.4.4 *D'autres travaux concernant la modélisation du pont comme poutre*

- Une étude établie par Hamidi S. A. et Danshjoo F. (2010) mené pour la détermination de l'effet de l'impact factor fonction de la vitesse du véhicule et le rapport de la distance entre roues à celle de la longueur de la travée du pont. Une étude paramétrique menée pour spécifier les effets de divers paramètres, notamment la vitesse, la distance entre roues, le nombre de roues et la longueur de la travée.

- Dans un autre travail, Yang Y. B. et Lin C. W. (2004) ont étudié l'interaction dynamique entre le véhicule en mouvement et le pont porteur, cela par la méthode de superposition modale, la réponse est obtenue en supposant que le rapport masse véhicule /masse pont est petit. Le véhicule dans cette étude est simulé comme une masse suspendue et le pont comme poutre simplement appuyée.
- l'étude de Kukla S. et Zamojska I. (2007) utilise la méthode de la fonction de Green pour solutionner la vibration libre des poutres de section variable (étagées) chargées par forces axiales. L'approche concerne la vibration de poutres étagées avec un nombre quelconque de segments uniformes peuvent être utilisées comme une approximation de poutres non uniformes avec des sections transversales non uniformes variables en continu. Les cas d'appuis pris en compte dans cette étude est celui de la poutre encastré-libre ou libre-appuyée.
- Dans un autre contexte de la modélisation des ponts, une étude bidimensionnelle réalisée par Boua B. (2012) qui détermine la déflection d'un tablier de pont dalle sous charges roulantes, le modèle présenté modélise le tablier comme une plaque mince simplement appuyée aux coins de la plaque, le véhicule est modélisé dans cette étude par le modèle masse-ressort.
- Dans un autre travail, Ogunyebi S. N. et al. (2023) ont présenté une étude du mouvement dynamique d'un élément de structure de type poutre soumise à une charge harmonique partiellement répartie à vitesse constante qui repose sur une plateforme élastique. La transformée sinusoidale de Fourier est utilisée pour réduire l'équation du mouvement ainsi résolue par les transformées de Laplace.
- Enfin, dans un cadre plus général, une étude présentée par Dimitrovová Z. et Mazilu T. (2024) qui donne une approche semi-analytique et par la fonction de Green pour une poutre infinie sur une fondation viscoélastique à trois couches en prennant en consideration l'effet de l'interaction de la masse en mouvement ainsi l'amortissement de la fondation.

I.4 Conclusion partielle

Cette première partie théorique présente une revue de littérature portant sur la modélisation des véhicules mobiles et des ponts. Les modèles de véhicules englobent des aspects complexes tels que la force ponctuelle mobile, la masse mobile, la charge harmonique mobile et des systèmes mécaniques avec des degrés de liberté, prenant en compte les caractéristiques spécifiques des véhicules.

Le pont lui-même peut être appréhendé en 3D pour refléter sa réalité physique, en 2D voire unidimensionnel par le modèle appelé poutre.

Une synthèse des études antérieures traitant le comportement et de la modélisation des ponts en tant que poutres, en particulier par le biais de la méthode de la fonction de Green, la méthode analytique ou éléments finis ainsi que d'autres approches, nous ont permis d'acquérir une compréhension approfondie de la problématique, préparant ainsi le terrain pour la réalisation de cette thèse.

Ces travaux reposent sur des théories, des hypothèses et des méthodes de calcul qui nécessitent une clarification et une explication approfondies présentées dans la deuxième partie théorique en chapitre 2, et qui seront par la suite employées dans les chapitres 3, 4 et 5. Dans cette optique, le prochain chapitre sera consacré à la présentation des méthodes de calcul, qu'elles soient appliquées au modèle unidimensionnel ou tridimensionnel.

Chapitre II Présentation des méthodes pour l'étude des modèles unidimensionnel et tridimensionnel des ponts sollicités par des charges mobiles

Introduction

Ce chapitre approfondit la compréhension du comportement dynamique des ponts en explorant diverses méthodes de modélisation, dont l'approche analytique, semi-analytique, et des éléments finis. La substitution de la structure complète par un modèle unidimensionnel, comme celui de la poutre, est une méthode courante, tout comme l'utilisation de logiciels avancés tels que Csi Bridge pour des modèles réalistes. Nous examinons le comportement des poutres sous différents cas de chargement comme forces ou masses, comme charge harmonique en mettant en lumière des chargements mobiles variés, ou comme des forces constantes sans inertie aux convois de charges. Les modèles analytiques sont présentés, de même que la méthode des éléments finis. L'accent est également mis sur le calcul du facteur d'amplification dynamique, soulignant son rôle dans la préservation du caractère statique malgré les effets dynamiques du trafic. La méthode unidimensionnelle de la fonction de Green est introduite, fournissant les bases théoriques pour les chapitres ultérieurs et contribuant à une meilleure compréhension du comportement dynamique des ponts. Sans oublier la présentation de la méthode réelle pour le calcul tridimensionnel.

SOMMAIRE

II.1 Dynamique des Poutres sous Charges Mobiles : Exploration Approfondie par la Méthode Analytique Unidimensionnelle

II.1.1 Poutre sous sollicitations mobiles

Soit la poutre simplement appuyée sollicité par une force mobile figure II.1.

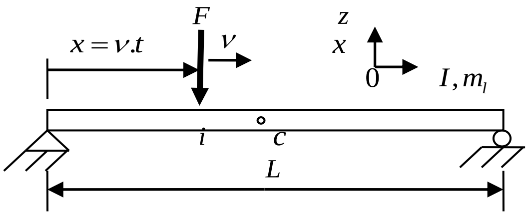


Figure II-1 Poutre simplement appuyée excité par une force mobile.

Pour comprendre le comportement dynamique d'une poutre sous un convoi de véhicules mobiles, il est nécessaire d'étudier les cas de :

- forces mobiles si la masse du véhicule est petite par rapport à la masse du pont.
- masses mobiles si la masse du véhicule n'est pas négligeable par rapport à la masse du pont.
- charges sous formes harmonique.
- convoi de plusieurs véhicules.

La solution présentée est exprimée sous forme analytique pour identifier le phénomène d'amplification dynamique de la réponse fonction de la vitesse. L'influence de la masse est étudiée dans une façon semi-analytique.

II.1.1.1 Poutres sollicitées par une force mobile

La structure pont est idéalisée par une poutre Euler-Bernoulli simplement appuyée soumise à une source mobile représentant le véhicule dotée d'une vitesse constante (figure II.1).

L'équation fondamentale qui régit la vibration forcée d'une poutre mince dans le plans x-z en flexion simple est donnée par : Henchi K. (1995), Khadri Y. (2009) et par Rezaiguia A. (2000) comme suit :

$$E \cdot I \cdot \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + m_l \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P(t) \tag{2.1}$$

Ou sous une autre forme :

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + v^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot P(t) \tag{2.2}$$

Avec v appelée vitesse critique donné par :

$$v = \sqrt{\frac{m_l}{E \cdot I}} \tag{2.3}$$

Où E est le module d'élasticité, I est le module d'inertie de la section, EI est la rigidité flexionnel de la poutre, $m_l(x)$ est la masse de la poutre par unité de longueur, t est le temps et w est le déplacement transversal de la poutre. Pour résoudre l'équation différentielle, on suppose que la réponse dynamique selon l'équation (2.4) exprimé par une solution spatio-temporelle. La réponse dynamique peut être exprimé par une série de modes propres.

$$w(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(x) \cdot y_j(t) \tag{2.4}$$

ϕ_j sont les modes propres de vibration et $y_j(t)$ sont les coordonnées généralisés modales de la poutre.

Les conditions aux limites pour la poutre simplement appuyée sont :

$$\begin{cases} x = 0 \quad w(0,t) = 0 \quad et \quad \dfrac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} = 0 \\ x = L \quad w(L,t) = 0 \quad et \quad \dfrac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

La substitution de l'équation (2.4) dans l'équation (2.2) en séparant les variables, on obtient :

$$\left(\frac{\partial^4 \phi_j}{\partial x^4}\right) \cdot y_j + v^2 \cdot \phi_j \cdot \frac{\partial^2 y_j}{\partial t^2} = \frac{1}{E \cdot I} P(t) \tag{2.6}$$

La relation (2.6) s'écrit aussi sous la forme :

$$E \cdot I \cdot \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}\right) + m_l \cdot \omega^2 \cdot \phi = P(t) \tag{2.7}$$

Où ω_j est la pulsation propre du j^{eme} mode.

La solution de l'équation (2.7) s'écrit comme suit:

$$\phi(x) = C_1 \cdot \cosh(\beta \cdot x) + C_2 \cdot \sinh(\beta \cdot x) + C_3 \cdot \cos(\beta \cdot x) + C_4 \cdot \sin(\beta \cdot x) \tag{2.8}$$

avec : $\beta^4 = \dfrac{m_l \cdot \omega^2}{E \cdot I}$ (2.9)

Pour une Poutre simplement appuyée

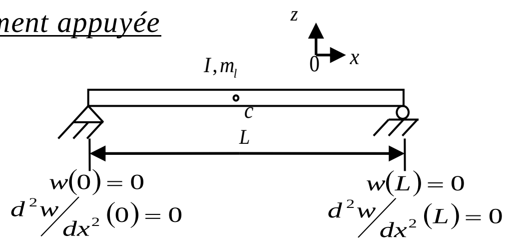


Figure II-2 Vibration transversale des poutres simplement appuyée-conditions aux limites.

En utilisant les conditions aux limites figure II.2, nous obtenons les valeurs propres β_j, les pulsations ω_j et les modes propres ϕ_j.

En supposant que la structure est initialement au repos, pour cela les conditions initiales sont :

$$w(x,0) = \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = 0 \tag{2.10}$$

L'équation (2.8) s'écrit sous une forme matricielle comme suit :

$$[P_n(\beta)]\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = 0 \tag{2.11}$$

Avec :

$$[P_n(\beta)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \beta^2 & 0 & -\beta^2 & 0 \\ ch\beta L & sh\beta L & \cos\beta L & \sin\beta L \\ \beta^2 ch\beta L & \beta^2 sh\beta L & -\beta^2\cos\beta L & -\beta^2\sin\beta L \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Pour obtenir une solution non-triviale, le déterminant est :

$$\det|P_n(\beta)| = 0 \tag{2.13}$$

D'où les pulsations propres de la poutre comme suit :

$$\omega_j = \left(\frac{j\cdot\pi}{L}\right)\cdot\sqrt{\frac{E\cdot I}{m_l}} \tag{2.14}$$

L'utilisation des propriétés d'orthogonalités des modes (Clough R. H. et Penzien J., 1993) permet de découpler le système.

$$\int_0^L m_l\cdot\phi_j\cdot\phi_i\cdot dx = \delta_{ij} \text{ avec } \begin{matrix} \delta_{ij} = 1 \;\; pour \;\; i = j \\ \delta_{ij} = 0 \;\; pour \;\; i \neq j \end{matrix} \tag{2.15}$$

$$\int_0^L E\cdot I\cdot\phi_i\cdot\frac{\partial^4\cdot\phi_j}{\partial x^4}\cdot dx = \omega_j^2\delta_{ij} \tag{2.16}$$

La résolution du déterminant $\det(P(\beta)) = 0$ permet de déterminer les valeurs C_1, C_2, C_3 et C_4 :

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0 \text{ et } C_4 = \sqrt{\frac{2}{m_l\cdot L}} \tag{2.17}$$

$\sin\beta L = 0$ soit : $\beta_j = {j\cdot\pi}/{L}$, j=1,2,…

$$\omega_j = (j\cdot\pi)^2\cdot\sqrt{\frac{E\cdot I}{m_l\cdot L^4}} \tag{2.18}$$

Ou bien sous une autre forme :

$$\omega_j = \frac{(j \cdot \pi)^2}{L^2 \cdot v} \tag{2.19}$$

Les modes propres de la poutre deviennent ainsi:

$$\phi_j(x) = c_4 \sin \beta_j L \tag{2.20}$$

Ce qui donne :

$$\phi_j(x) = \sqrt{\frac{2}{m_l L}} \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \tag{2.21}$$

Propriétés des modes ϕ_j *:*

Les relations (2.7) et (2.9) donnent :

$$\frac{\partial^4 \phi_j}{\partial x^4} - \beta_j^4 \phi_j = 0 \Rightarrow EI \frac{\partial^4 \phi_j}{\partial x^4} = m_p \omega_j^2 \phi_j \tag{2.22}$$

La charge p(t) équation 2.1 est dotée d'une vitesse est représentée par une Dirac, avec :

$$\begin{cases} \bar{x} = x(t) & \text{si } v \text{ n'est pas constante.} \\ \bar{x} = v.t & \text{si } v \text{ est constante.} \end{cases} \quad ; \quad 0 \le \bar{x} \le L \tag{2.23}$$

La Dirac est une fonction Echelon comme présenter sur la figure II.3.

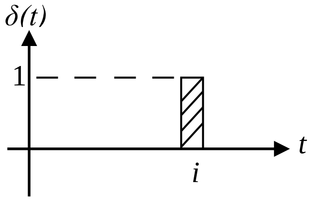


Figure II-3 Représentation de la fonction Dirac.

Alors :

$$\begin{cases} \delta(x - \bar{x}) = 1 & en\, x = \bar{x} \\ \delta(x - \bar{x}) = 0 & en\, x \ne \bar{x} \end{cases} \tag{2.24}$$

Avec :

δ : Opérateur de la Dirac.

$\bar{x}$: Point d'application.

Physiquement, la force existe au point d'application i et nulle partout, elle est donné par :

$$P(x,t) = F \cdot \delta(x - \bar{x}) \tag{2.25}$$

La relation 2.8 devient comme suit :

$$E \cdot I \cdot \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right) + m_l \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F.\delta(x - \bar{x}) \tag{2.26}$$

On utilise la représentation modale :

$$w(x,t) = \phi(x) \cdot y(t) \tag{2.27}$$

Utilisant l'orthogonalité des modes, la relation 2.10 devient (Fryba L., 1972) et (Geradin M., 1996) :

$$\frac{\partial^2 y_j}{\partial t^2} + \omega_j^2 \cdot y_j = P_j(t), j=1,2,\ldots.. \tag{2.28}$$

On multipliant les deux cotés de l'équation (2.28) par $\phi_j(x)$, on obtiens :

$$\frac{\partial^2 y_j}{\partial t^2} + \omega_j^2 \cdot y_j = F \cdot \sqrt{\frac{2}{m_l \cdot L}} \cdot \sin(\Omega_j) = P_j(t) \tag{2.29}$$

$$P_j(t) = \int_0^L \phi_j(x) \cdot F \cdot \delta(x - \bar{x}) \cdot dx = \phi_j(\bar{x}) \cdot F \tag{2.30}$$

Où :

$$\Omega_j = \frac{j \cdot \pi \cdot v}{L} \tag{2.31}$$

La solution de (2.29) est donnée par :

$$y_j(t) = \frac{1}{\omega_j} \int_0^t P_j(\tau).\sin(\omega_j \cdot (t - \tau)) \cdot d\tau + \left(y_j(0) \cdot \cos(\omega_j \cdot t) + \frac{\dot{y}(0)}{\omega_{jd}} \cdot \sin(\omega_j \cdot t) \right) \tag{2.32}$$

Où :

$$y_j(t) = \frac{1}{\omega_j} \int_0^t P_j(\tau).\sin(\omega_j \cdot (t - \tau)) \cdot d\tau \tag{2.33}$$

C'est une intégrale par partie dont le résultat est donné par l'équation (2.34) :

$$y_j(t) = \frac{F}{\omega_j} \sqrt{\frac{2}{m_l \cdot L}} \int_0^t \sin(\Omega_j \cdot \tau).\sin(\omega_j \cdot (t - \tau)) \cdot d\tau \tag{2.34}$$

Avec : $\tau = L / v$, qui est le temps de passage de la force F.

Nous utilisant les transformations trigonométriques, nous obtenons :

$$y_j(t) = \frac{F}{2 \cdot \omega_j} \sqrt{\frac{2}{m_l \cdot L}} \left[\frac{1}{\Omega_j + \omega_j} \cdot (\sin(\Omega_j \cdot t) + \sin(\omega_j \cdot t)) - \frac{1}{\Omega_j - \omega_j} (\sin(\Omega_j \cdot t) - \sin(\omega_j \cdot t)) \right] \tag{2.35}$$

$$y_j(t) = \sqrt{\frac{2}{m_l \cdot L}} \cdot \left(\frac{F}{\omega_j^2 - \Omega_j^2} \right) \cdot \left(\sin(\Omega_j \cdot t) - \left(\frac{\Omega_j}{\omega_j} \right) \cdot \sin(\omega_j \cdot t) \right) \tag{2.36}$$

Rappelons que :

$$\Omega_j = \frac{j \cdot \pi \cdot v}{L}$$

Et que : $w_j(t) = \phi_j(t).y_j(t)$

Les développements intermédiaires sont détaillés en annexe 1-A, On obtient à la fin :

$$w_j(t) = \frac{2F}{m_l L} \frac{1}{(\omega_j^2 - \Omega_j^2)} \left(\sin(\Omega_j t) - \left(\frac{\Omega_j}{\omega_j} \right) \sin(\omega_j t) \right) \sin \frac{j \pi x}{L}, 0 \le t \le \frac{L}{v} \tag{2.37}$$

II.1.1.2 Poutres sollicitées par une force harmonique

Nous allons utiliser cette fois ci une forme harmonique pour la force excitatrice de la poutre sur appuis simple qui prend la forme suivante :

$$F(t) = F.\sin\left(\Omega_f \cdot t\right) \tag{2.38}$$

Ω_f représente la fréquence de la force mobile.

Nous avons :

$$P_j(t) = F(t).\phi_j\left(\bar{x}\right) \tag{2.39}$$

Avec :

$$\bar{x} = v \cdot t \tag{2.40}$$

Ce qui donne :

$$P_j(t) = F \cdot \sin\left(\Omega_f \cdot t\right)\sqrt{\frac{2}{m_l \cdot L}} \cdot \sin\left(\Omega_j \cdot t\right) \tag{2.41}$$

Nous utilisons les transformations trigonométriques, nous obtenons :

$$P_j(t) = \frac{F}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{m_l \cdot L}} \cdot \left[\cos\left(\Omega_f - \Omega_j\right) \cdot t - \cos\left(\Omega_f + \Omega_j\right) \cdot t\right] \tag{2.42}$$

La solution de l'équation du mouvement de la poutre non amortie avec ce type de chargement développé par l'intégrale de Duhamel est comme suit :

$$y_j(t) = \frac{1}{\omega_j} \cdot \int_0^t P_j(\tau).\sin\left(\omega_j \cdot (t - \tau)\right) \cdot d\tau \tag{2.43}$$

$$y_j(t) = \frac{F}{2 \cdot \omega_j} \cdot \sqrt{\frac{2}{m_l \cdot L}} \cdot \int_0^t \left[\cos\left(\Omega_f - \Omega_j\right) \cdot \tau.\sin\left(\omega_j \cdot (t - \tau)\right) - \cos\left(\Omega_f + \Omega_j\right) \cdot \tau.\sin\left(\omega_j \cdot (t - \tau)\right)\right] \cdot d\tau \tag{2.44}$$

Nous utilisons les transformations trigonométriques, et on mettant :

$$I = \int_0^t \cos\left(\Omega_f - \Omega_j\right) \cdot \tau.\sin\left(\omega_j \cdot (t - \tau)\right) \cdot d\tau \tag{2.45}$$

Et aussi :

$$II = \int_0^t \cos\left(\Omega_f + \Omega_j\right) \cdot \tau.\sin\left(\omega_j \cdot (t - \tau)\right) \cdot d\tau \tag{2.46}$$

Et finalement on réécrit:

$$y_j(t) = \frac{F}{2 \cdot \omega_j} \cdot \sqrt{\frac{2}{m_l \cdot L}} \cdot (I - II) \tag{2.47}$$

Le développement de l'équation 2.47 est présenté en annexe 1-B.

On obtient alors :

$$y_j(t)=\frac{F}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{m_l\cdot L}}\cdot\left[\frac{\cos(\Omega_f-\Omega_j)\cdot t-\cos(\omega_j\cdot t)}{\omega_j^2-(\Omega_f-\Omega_j)^2}-\frac{\cos(\Omega_f+\Omega_j)\cdot t-\cos(\omega_j\cdot t)}{\omega_j^2-(\Omega_f+\Omega_j)^2}\right] \tag{2.48}$$

On substituant l'équation 2.48 dans l'équation 2.4, on obtient :

$$w_j(t)=\frac{F}{m_l\cdot L}\cdot\left(\sin\frac{j\cdot\pi\cdot x}{L}\right)\cdot\left[\frac{\cos((\Omega_f-\Omega_j)\cdot t)-\cos(\omega_j\cdot t)}{\omega_j^2-(\Omega_f-\Omega_j)^2}-\frac{\cos((\Omega_f+\Omega_j)\cdot t)-\cos(\omega_j\cdot t)}{\omega_j^2-(\Omega_f+\Omega_j)^2}\right] \tag{2.49}$$

II.1.1.3 Poutres sollicitées par convois de forces mobiles

Soit l'équation 2.50 de la vibration transversale d'une poutre homogène non amortie sollicitées par des charges mobiles ponctuelles *F(x,t)* qui roules à une vitesse constante figure II.4 (Henchi K., 1995) :

$$EI\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)+m_l\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=F(x,t) \tag{2.50}$$

Avec:

$$F(x,t)=\sum_{k=1}^{n_c}\delta\left(x-\bar{x}_k\right)F_k(t) \tag{2.51}$$

Où : n_c est le nombre de forces qui sollicites la poutre à l'instant t, $\delta\left(x-\bar{x}_k\right)$ représente la fonction Dirac à la position $x=\bar{x}_k$.

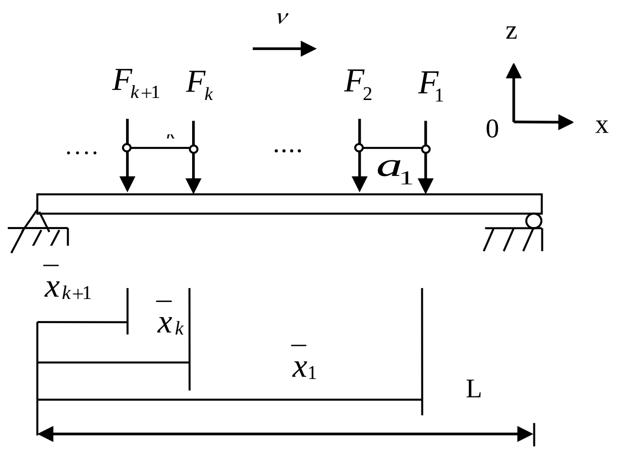


Figure II-4 Poutre excitée par un convoi de forces mobiles.

Le temps nécessaire pour le passage du convoi sur la poutre est :

$$\tau=\frac{\bar{x}_k}{V} \tag{2.52}$$

Avec :

$$\bar{x}_k=\bar{x}_1-\sum_{l=1}^{k-1}a_1 \tag{2.53}$$

Pour $\bar{x}_k \prec 0$ ou $\bar{x}_k \succ 0 \Rightarrow F_k(t)=0$ (2.54)

L est la longueur de la poutre et a_k est l'espacement entre F_k et F_{k+1}.

De la même manière que pour une seule force mobile, en utilisant la représentation modale équation 2.4.

L'orthogonalité des modes conduit à l'équation 2.28 (Fryba L., 1972) et (Geradin M., 1996) :

$$\frac{\partial^2 y_j}{\partial t^2} + \omega_j^2 y_j = p_j(t) \quad j = 1,2,.......$$

Avec :

$$p_j(t) = \int_0^L \phi_j F(\bar{x},t)dx = \sum_{k=1}^{n_c} \phi_j(\bar{x}_k)F_k(t) \tag{2.55}$$

La solution de l'équation 2.28 pour une seule force est donnée dans la partie précédente. La solution pour un convoi de n_c forces mobiles est obtenue par superposition des solutions de toutes les forces (on omet l'indice j des modes en raison de simplicité d'écriture, on suppose aussi que la poutre est initialement au repos) :

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n_c} y^k + \beta^k \tag{2.56}$$

y^k est la réponse forcée due à la force k donnée par :

$$\sum_{k=1}^{n_c} y^k = \sum_{k=1}^{n_c} \frac{1}{\omega} \cdot \int_0^{t_k} F_k(t_k) \cdot \phi(\bar{x}_k) \cdot \sin(\omega \cdot (t_k - \tau)) \cdot d\tau \,, 0 \le \bar{x}_k = \bar{x}_1 - \sum_{l=1}^{k-1} a_l \le L \tag{2.57}$$

β^k est la réponse de la vibration libre due à la force k donnée par:

$$\sum_{k=1}^{n_c} \beta^k = \sum_{k=1}^{n_c} y(\tau_k)\cos \omega(t_k - \tau_k) + \frac{\dot{y}(\tau_k)}{\omega_d}\sin \omega(t_k - \tau_k) \tag{2.58}$$

Avec : $$\begin{cases} \tau_k = \left(\sum_{l=1}^{k} a_{l-1} + L \right) / v \\ \bar{x}_k = \bar{x}_1 - \sum_{l=1}^{k-1} a_l \ge L \end{cases} \tag{2.59}$$

Donc, la solution à chaque instant t est calculé par la somme des solutions équation 2.57 et équation 2.58. En chapitre 3, nous illustrons sous forme graphique la solution analytique d'une poutre sous les sollicitations d'un convoi de deux et de trois forces, tel que l'espacement entre la première et la seconde force est a_1 et entre la seconde et la troisième force est a_2.

II.1.2 Poutre sous Sollicitation de Masses Mobiles

La masse mobile utilisée, en se référant à la plupart des cas pratiques, est due à l'effet de la gravitation des charges mobiles :

$$F = -m.g \qquad (2.60)$$

Dans le cas où la masse mobile est petite par rapport à la masse de la poutre, la solution obtenue en tenant compte de l'inertie de la masse mobile est approximativement correcte par rapport à la solution obtenue en la négligeant. Dans le cas contraire, l'étude doit tenir compte la masse de la source mobile.

La force modélisée par masse mobile sur la poutre figure II.5 est (Henchi K., 1995) :

$$F(x) = -\delta \cdot (x - \overline{x}) \cdot m \cdot (g + \ddot{\overline{w}}) \qquad (2.61)$$

$\ddot{\overline{w}}$ est l'accélération de la poutre dans la position $A(x = \overline{x})$ de la masse mobile.

Figure II-5 Poutre traversée par une masse mobile-Condition général d'appuis.

On appliquant la méthode modale et multipliant à gauche et à droite l'équation 2.61 par $\phi_j(x)$ et en l'intégrant de 0 à L par rapport à x, on obtient la force modale j comme suit:

$$P_j(x,t) = \phi_j(x).F(x,t) \qquad (2.62)$$

$$P_j(x,t) = -\int_0^L \phi_j \delta(x - \overline{x}) m (g + \ddot{\overline{w}}) dx \qquad (2.63)$$

D'où : $P_j(x,t) = -mg.\phi_j(\overline{x}) - m.\phi_j(\overline{x}).\ddot{\overline{w}}$ (2.64)

L'accélération du point du contact ce calcul de la façon suivante :

$$\overline{w}(x,t) = \sum_j \phi_j(\overline{x}).y_j(t) \qquad (2.65)$$

Où :

$$\sum_j = \sum_{j=1}^{\infty} \qquad (2.66)$$

$$\dot{\overline{w}} = \frac{d\overline{w}}{dt} \qquad (2.67)$$

$$\dot{\overline{w}} = \overline{w}_{,x}.\dot{\overline{x}} + \overline{w}_{,t} \qquad (2.68)$$

$$\dot{\overline{w}} = \sum_j \phi_{j,x}(\overline{x}).y_j.\dot{\overline{x}} + \sum_j \phi_j(\overline{x}).\dot{y}_j \qquad (2.69)$$

$$\ddot{\overline{w}} = \frac{d^2\overline{w}}{dt^2} \qquad (2.70)$$

$$\ddot{\bar{w}} = \bar{w}_{,tt} + 2.\bar{w}_{,xt}.\dot{\bar{x}} + \bar{w}_{,xx}.\dot{\bar{x}}^2 + \bar{w}_{,x}.\ddot{\bar{x}} \tag{2.71}$$

$$P_j(x,t) = -mg..\phi_j(\bar{x}) - m.\phi_j(\bar{x}).\ddot{\bar{w}} \tag{2.72}$$

$$P_j(x,t) = -mg..\phi_j(\bar{x}) - m.\phi_j(\bar{x}).\left[\bar{w}_{,tt} + 2.\bar{w}_{,xt}.\dot{\bar{x}} + \bar{w}_{,xx}.\dot{\bar{x}}^2 + \bar{w}_{,x}.\ddot{\bar{x}}\right] \tag{2.73}$$

- $$\bar{w}_{,xx} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \tag{2.74}$$

$$\bar{w}_{,xx} = \sum_j \phi_{j,xx}(\bar{x}).y_j \tag{2.75}$$

- $$\bar{w}_{,xt} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x.\partial t} \tag{2.76}$$

$$\bar{w}_{,xt} = \sum_j \phi_{j,x}(\bar{x}).\dot{y}_j \tag{2.77}$$

- $$\bar{w}_{,x} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \tag{2.78}$$

$$\bar{w}_{,x} = \sum_j \phi_{j,x}(\bar{x}).y_j \tag{2.79}$$

- $$\bar{w}_{,tt} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} \tag{2.80}$$

$$\bar{w}_{,tt} = \sum_j \phi_j(\bar{x}).\ddot{y}_j \tag{2.81}$$

$$\ddot{\bar{w}} = \dot{\bar{x}}^2 \sum_j \phi_{j,xx}(\bar{x}).y_j + 2.\dot{\bar{x}}\sum_j \phi_{j,x}(\bar{x}).\dot{y}_j + \ddot{\bar{x}}\sum_j \phi_{j,x}(\bar{x}).y_j + \sum_j \phi_j(\bar{x}).\ddot{y}_j \tag{2.82}$$

Remplaçant l'équation (2.82) dans (2.64), on obtient :

$$P_j(x,t) = -mg.\phi_j(\bar{x}) - m.\phi_j(\bar{x}).\left[\dot{\bar{x}}^2.\left(\sum_j \phi_{j,xx}(\bar{x}).y_j\right) + 2.\dot{\bar{x}}.\left(\sum_j \phi_{j,x}(\bar{x}).\dot{y}_j\right) + \ddot{\bar{x}}.\left(\sum_j \phi_{j,x}(\bar{x}).y_j\right) + \left(\sum_j \phi_j(\bar{x}).\ddot{y}_j\right)\right] \tag{2.83}$$

Sous une forme simplifiée :

$$P_j(x,t) = -mg..\phi_j(\bar{x}) - F(y,\dot{y},\ddot{y},\bar{x}) \tag{2.84}$$

L'équation modale (2.11) est sous la forme :

$$P_j(x,t) = \ddot{y}_j + w_j^2.y_j = -mg..\phi_j(\bar{x}) - F(y,\dot{y},\ddot{y},\bar{x}) \tag{2.85}$$

$$\ddot{y}_j + m.\phi_j.\langle\phi\rangle.\ddot{y} + 2\dot{\bar{x}}m.\phi_j.\langle\phi\rangle.\dot{y} + w_j^2.y_j + m.\phi_j.\left(\dot{\bar{x}}^2.\langle\phi_{,xx}\rangle + \ddot{\bar{x}}.\langle\phi_{j,x}\rangle\right)y_j = -mg.\phi_j(\bar{x}) \tag{2.86}$$

Où :

$\langle\phi\rangle$, $\langle\phi_{,x}\rangle$ et $\langle\phi_{,xx}\rangle$ sont évalués à $x = \bar{x}$

avec : $j = 1$ et r est le nombre de modes.

Pour le cas de la vitesse constante, nous avons : $\bar{x} = v.t$.

L'équation (2.86) représente r équations couplées, avec r est le nombre de modes nécessaire pour représenter la réponse dynamique de la poutre. Le système d'équations peut être réécris sous une forme matricielle (équation 2.87), pour qu'elle soit adapter aux résolutions numériques connus.

$$\begin{bmatrix} 1+B_{3(1,1)} & B_{3(1,1)} & . & B_{3(1,j)} & . & B_{3(1,r)} \\ B_{3(2,1)} & 1+B_{3(2,2)} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ B_{3(j,1)} & . & . & 1+B_{3(j,j)} & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ B_{3(r,1)} & . & . & . & . & 1+B_{3(r,r)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ . \\ \ddot{y}_j \\ . \\ \ddot{y}_r \end{Bmatrix} + \dots\dots + \begin{bmatrix} B_{1(1,1)} & B_{1(1,2)} & . & B_{1(1,j)} & . & B_{1(1,r)} \\ B_{1(2,1)} & B_{1(2,2)} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ B_{1(j,1)} & . & . & B_{1(j,j)} & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ B_{1(r,1)} & . & . & . & . & B_{1(r,r)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ . \\ \dot{y}_j \\ . \\ \dot{y}_r \end{Bmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{bmatrix} \omega_1^2 + B_{2(1,1)} & B_{2(1,2)} & . & B_{2(1,j)} & . & B_{2(1,r)} \\ B_{2(2,1)} & \omega_2^2 + B_{2(2,2)} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ B_{2(j,1)} & . & . & \omega_j^2 + B_{2(j,j)} & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ B_{2(r,1)} & . & . & . & . & \omega_r^2 + B_{2(r,r)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ y_j \\ . \\ y_r \end{Bmatrix} = -mg \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ . \\ \phi_j \\ . \\ \phi_r \end{Bmatrix}$$

(2.87)

Avec :

$$\begin{cases} B_1(i,j) = 2 \cdot m \cdot \dot{\bar{x}} \cdot \phi_i(\bar{x}) \cdot \phi_{j,x}(\bar{x}) \\ B_2(i,j) = m \cdot \phi_i \cdot \left(\dot{\bar{x}}^2 \cdot \phi_{j,xx}(\bar{x}) + \ddot{\bar{x}} \cdot \phi_{j,x}(\bar{x}) \right) \\ B_3(i,j) = m \cdot \phi_i(\bar{x}) \cdot \phi_j(\bar{x}) \end{cases}$$

(2.88)

Sous une forme compacte, l'équation 2.87 s'écrit :

$$[M^*] \cdot \{\ddot{y}\} + [C^*] \cdot \{\dot{y}\} + [K^*] \cdot \{y\} = F^* \qquad (2.89)$$

Le système d'équation 2.89 est le couplage de r équations différentielles.

Cette approche d'analyse pour la masse mobile est une approche semi-analytique.

Dans le cas de faible vitesse de roulement de la masse v, l'équation 2.87 devient (en supposant que C=0) :

$$\begin{bmatrix} 1+m\phi_1^2 & m\phi_1\phi_2 & . & m\phi_1\phi_j & . & m\phi_1\phi_r \\ m\phi_2\phi_1 & 1+m\phi_2^2 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ m\phi_j\phi_1 & . & . & 1+m\phi_j^2 & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ m\phi_r\phi_1 & . & . & . & . & 1+m\phi_r^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ . \\ \ddot{y}_j \\ . \\ \ddot{y}_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & . & 0 & . & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & \omega_j^2 & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & \omega_r^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ y_j \\ . \\ y_r \end{Bmatrix} = -m \cdot g \cdot \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ . \\ \phi_j \\ . \\ \phi_r \end{Bmatrix}$$

(2.90)

L'application de cette équation pour les cas des masses importantes à grandes vitesses peut induire cependant de sévères erreurs.

II.2 Calcul du facteur d'amplification dynamique

L'analyse des résultats établie dans cette recherche est basée sur la notion du facteur d'amplification dynamique, qui est une valeur calculé pour majorer les effets statiques d'un pont causés par la charge statique du véhicule mobile, et pour tenir compte des effets dynamiques induits du passage du véhicule.

Cette approche considère les effets dynamiques comme des effets statiques supplémentaires pour lesquels le principe de superposition s'applique pour autant que le comportement de la structure reste linéaire (Brockuet C., 1999).

La définition du facteur d'amplification dynamique FAD est peu différente selon les auteurs et suivant les pays, l'objectif commun est de fournir une valeur qui permet de prendre en considération les effets dynamiques liés au trafic tout en conservant le caractère statique de l'analyse.

L'amplification dynamique est définie comme suit :

$$A.D = \frac{R_{dyn} - R_{sta}}{R_{sta}} \tag{2.91}$$

Où : R_{dyn} représente la réponse dynamique maximum

R_{sta} représente la réponse statique maximum

Nous avons :

$$R_{dyn} = R_{sta} \cdot (1 + AD) \tag{2.92}$$

De cela, le Facteur d'Amplification Dynamique est :

$$FAD = (1 + AD) \tag{2.93}$$

Par contre, la notion souvent utilisée est celle du facteur d'amplification dynamique (Le terme "réponse" peut correspondre aux déplacements, déformations, efforts et réactions d'appuis) calculée directement par le rapport entre la réponse dynamique et statique :

$$F.A.D = \frac{R_{dyn}}{R_{sta}} \tag{2.94}$$

Pour la poutre simplement appuyée non amortie soumise à la sollicitation d'une force constante ponctuelle mobile, le facteur d'amplification dynamique est donné par :

$$F.A.D = \frac{flèche \quad dynamique \quad \max imale}{flèche \quad statique \quad \max imale}$$

Avec la flèche statique maximale est :

$$w_{st\max} = \frac{FL^3}{48 \cdot E \cdot I} \tag{2.95}$$

II.3 Résolution des problèmes des poutres sollicitées par charges mobiles par la méthode des éléments finis (cas unidimensionnel)

II.3.1 Résolution dans le cas d'une force mobile

L'équation d'équilibre dynamique d'une structure modélisée par éléments finis est donnée par l'équation (Thomas M. et Laville F., 2007):

$$[M]\cdot\{\ddot{U}\}+[C]\cdot\{\dot{U}\}+[K]\cdot\{U\}=\{F(x,y,z,t)\}+\{F_{ext}\} \tag{2.96}$$

Où $[M]$, $[C]$, $[K]$ sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité de la poutre, $\{F(x,y,z)\}$ représente le vecteur des forces nodales associé aux forces mobiles situées aux coordonnées (x,y,z) au temps t et finalement $\{F_{ext}\}$ représente le vecteur de forces extérieurs autre que les forces mobiles (séisme, vent, poids propre, etc……).

Le vecteur $\{F(x,y,z,t)\}$ noté par $\{F(x,t)\}$ est estimé par :

$$\{F(x,t)\}=\sum_{k=1}^{n_c}\langle N_k^T\rangle\cdot F_k(t) \tag{2.97}$$

Où n_c est le nombre de charges (forces) exercées à l'instant t.

$F_k(t)$ peut-être écrite sous la forme générale suivante :

$$\{F_k(t)\}=F_{0k}+F_{1k}\cdot\sin(\Omega_k t) \tag{2.98}$$

Avec l'indice k représentant le numéro de la force mobile.

Le vecteur $\langle N_k^T\rangle$ représente les fonctions de forme évaluées à la position de la force à $x=v\cdot t$ si v est constante (où $x_k = x_k(t)$).

L'équation (2.96) s'écrit dans l'espace modale comme suit:

$$\ddot{y}_j+2\cdot\xi_j\omega_j\cdot\dot{y}_j+\omega_j^2\cdot y_j=\{\phi\}_j^T\cdot\{F(x,t)\}+\{F_{ext}\} \tag{2.99}$$

II.3.2 Résolution dans le cas d'une masse mobile

La modélisation du problème de masse est identique à celui de la force présenté précédemment (Thomas M. et Laville F., 2007), nous avons :

$$[M]\cdot\{\ddot{u}\}+[C]\cdot\{\dot{u}\}+[K]\cdot\{u\}=\{F(x,t)\} \tag{2.100}$$

La force produite par la masse mobile est donnée par :

$$\{F(x,t)\}=-\{N\}\cdot m\cdot(g+\ddot{\overline{w}}) \tag{2.101}$$

Au point de contact, le déplacement $\overline{w}$ est présenté par :

$$\overline{w} = \sum_{i=1}^{NN} N_i \cdot w_i^e \tag{2.102}$$

NN est le nombre de nœuds de l'élément.

Pour simplifier l'écriture, nous allons prendre dans ce qui ce suit, $w = w^e$ et la vitesse du chargement $v = \dot{\overline{x}}$:

$$\dot{\overline{w}} = \overline{w}_{,x} \cdot x_{,t} + \overline{w}_{,t} = \langle N_{,x} \rangle \cdot \{w\} \cdot v + \langle N \rangle \cdot \{w_{,t}\} \tag{2.103}$$

$$\ddot{\overline{w}} = \langle N_{,xx} \rangle \cdot \{w\} \cdot v^2 + \langle N_{,x} \rangle \cdot \{w_{,t}\} \cdot v + \langle N_{,x} \rangle \cdot \{w_{,t}\} \cdot v + \langle N_{,x} \rangle \cdot \{w\} \cdot v_{,t} + \langle N \rangle \cdot \{w_{,tt}\}$$

$$\ddot{\overline{w}} = \langle N_{,xx} \rangle \cdot \{w\} \cdot v^2 + 2 \cdot \langle N_{,x} \rangle \cdot \{w_{,t}\} \cdot v + \langle N_{,x} \rangle \cdot \{w\} \cdot v_{,t} + \langle N \rangle \cdot \{w_{,tt}\} \tag{2.104}$$

$$\{w^e\} = [\overline{\phi}] \cdot \{y\} \tag{2.105}$$

$$\ddot{\overline{w}} = \langle N_{,xx} \rangle \cdot [\overline{\phi}] \cdot \{y\} \cdot \dot{\overline{x}}^2 + 2 \cdot \langle N_{,x} \rangle [\overline{\phi}] \cdot \{\dot{y}\} \cdot \dot{\overline{x}} + \langle N \rangle \cdot [\overline{\phi}] \cdot \{\ddot{y}\} + \langle N_{,x} \rangle \cdot [\overline{\phi}] \cdot \{y\} \cdot \ddot{\overline{x}} \tag{2.106}$$

Où $[\overline{\phi}]$ est la matrice des vecteurs propres, ces composants correspondent aux directions des composantes de $\{w^e\}$.

L'équation (2.99) peut être réécrite par l'analyse modale sous la forme suivante :

$$\ddot{y}_j + 2 \cdot \xi_j \cdot \omega_j \cdot \dot{y}_j + \omega_j^2 \cdot y_j = \{\phi_j\}^T \cdot \{F(x,t)\} = p_j(x,t) \tag{2.107}$$

Où :

$$p_j = -\{\phi_j\}^T \cdot \{N\} \cdot m \cdot (g + \ddot{\overline{w}}) \tag{2.108}$$

Et : $\{N\}$ représente le vecteur des fonctions de forme calculées à la position de la masse mobile.

En remplaçant la force modale équation 2.108 et l'accélération équation 2.106 dans l'équation 2.107, on obtient :

$$\begin{aligned} \ddot{y}_j + m \cdot \{\phi_j\}^T \cdot \{N\} \cdot \langle N \rangle [\overline{\phi}] \cdot \{\ddot{y}\} + 2 \cdot \xi_j \cdot \omega_j \cdot \dot{y}_j + 2 \cdot m \cdot \dot{x} \cdot \{\phi_j\}^T \cdot \{N\} \cdot \langle N_{,x} \rangle \cdot [\overline{\phi}] \cdot \{\dot{y}\} + \ldots \\ \ldots + \omega_j^2 \cdot y_j + m \cdot \dot{x}^2 \cdot \{\phi_j\}^T \cdot \{N\} \cdot \langle N_{,xx} \rangle \cdot [\overline{\phi}] \cdot \{y\} + \ldots \\ \ldots + m \cdot \ddot{x} \cdot \{\phi_j\}^T \cdot \{N\} \cdot \langle N_{,x} \rangle \cdot [\overline{\phi}] \cdot \{y\} = -\{\phi_j\}^T \cdot \{N\} \cdot m \cdot g \end{aligned} \tag{2.109}$$

Mettant :

$$m \cdot \{\phi_j\}^T \cdot \{N\} \cdot \langle N \rangle \cdot [\overline{\phi}] = [B_3] \tag{2.110}$$

$$2m\dot{x}\{\phi_j\}^T \cdot \{N\} \langle N_{,x} \rangle \cdot [\overline{\phi}] = [B_1] \tag{2.111}$$

$$m \cdot \left(\dot{x}^2 \cdot \{\phi_j\}^T \cdot \{N\} \cdot \langle N_{,xx} \rangle \cdot [\overline{\phi}] + \ddot{x} \cdot \{\phi_j\}^T \cdot \{N\} \cdot \langle N_{,x} \rangle \cdot [\overline{\phi}]\right) = [B_2] \tag{2.112}$$

Le couplage des équations modales 2.109 permet d'écrire le système 2.113 :

$$
\begin{bmatrix}
1+B_{3(1,1)} & B_{3(1,2)} & . & B_{3(1,j)} & . & B_{3(1,r)} \\
B_{3(2,1)} & 1+B_{3(2,2)} & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
B_{3(j,1)} & . & . & 1+B_{3(j,j)} & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
B_{3(r,1)} & & & & & 1+B_{3(r,r)}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ . \\ \ddot{y}_j \\ . \\ \ddot{y}_r \end{Bmatrix} + \dots
$$

$$
\dots +
\begin{bmatrix}
2\xi_1\omega_1 + B_{1(1,1)} & B_{1(1,2)} & . & B_{1(1,j)} & . & B_{1(1,r)} \\
B_{1(2,1)} & 2\xi_2\omega_2 + B_{1(2,2)} & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
B_{1(j,1)} & . & . & 2\xi_j\omega_j + B_{1(j,j)} & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
B_{1(r,1)} & & & & & 2\xi_r\omega_r + B_{1(r,r)}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ . \\ \dot{y}_j \\ . \\ \dot{y}_r \end{Bmatrix} + \dots
$$

$$
\dots +
\begin{bmatrix}
\omega_1^2 + B_{2(1,1)} & B_{2(1,2)} & . & B_{2(1,j)} & . & B_{2(1,r)} \\
B_{2(2,1)} & \omega_2^2 + B_{2(2,2)} & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
B_{2(j,1)} & . & . & \omega_j^2 + B_{2(j,j)} & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
B_{2(r,1)} & & & & & \omega_r^2 + B_{2(r,r)}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ y_j \\ . \\ y_r \end{Bmatrix}
= -mg
\begin{bmatrix} \langle\phi_1\rangle \\ \langle\phi_2\rangle \\ . \\ \langle\phi_j\rangle \\ . \\ \langle\phi_r\rangle \end{bmatrix}
\{N\}
$$

(2.113)

Ce qui permet d'écrire sous une autre forme :

$$
[M^*]\cdot\{\ddot{y}\}+[C^*]\cdot\{\dot{y}\}+[K^*]\cdot\{y\}=\{F^*(t)\} \tag{2.114}
$$

Tableau II-1 Matrices abtenues par force ou masse mobile.

Matrices obtenues avec masse mobile	Matrices obtenues avec force mobile
$[M^*]$ Pleine	$[I]$ Diagonale
$[C^*]$ Pleine	$[2\cdot\xi_i\cdot\omega_i]$Diagonale
$[K^*]$ Pleine	$[\omega_i^2]$ Diagonale

II.3.3 Exemple d'une poutre horizontale

Nous allons modéliser dans cet exemple la structure du pont comme une poutre idéalisée par le modèle Euler-Bernoulli figure II.6 chargée par une force mobile.

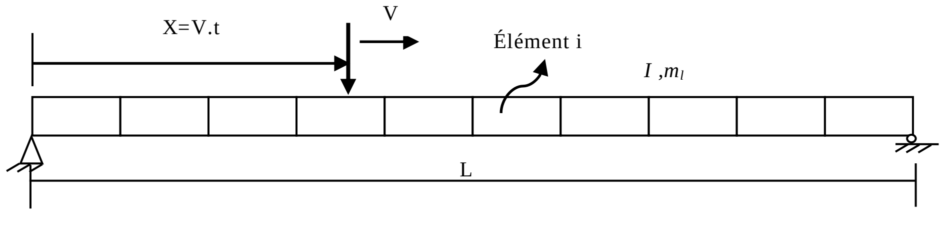


Figure II-6 Modèle en éléments finis de la poutre sous l'effet d'une force mobile.

La poutre dans cet exemple est discrétisée en n éléments. Nous considérons deux degrés de libertés dans chaque élément, où u_1, u_3 représentent les déplacements verticaux et u_2, u_4 représentent les rotations figure II.7.

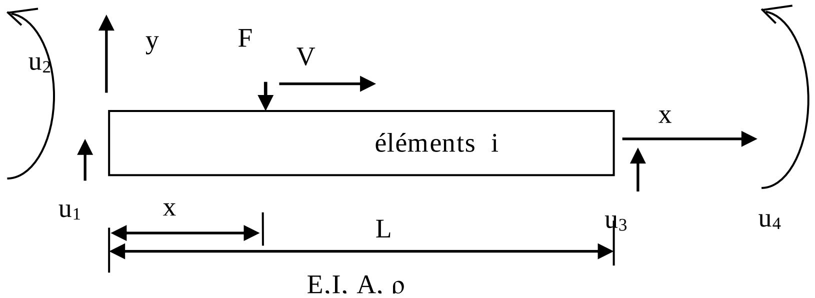


Figure II-7 Elément finis de la poutre à deux nœuds.

Nous utilisons le principe du travail virtuel qui s'exprime en terme de déformation-contrainte ou en termes de déplacement-force comme suit (Thomas M. et Laville F., 2007):

$$\int \{\varepsilon(x,t)\}^T \cdot \{\sigma(x,t)\} \cdot dV = \{u(x,t)\}^T \cdot \{F(x,t)\} \tag{2.115}$$

Avec : $\varepsilon(x,t) = [B(x)] \cdot \{u_i(t)\}$ (2.116)

Ce qui donne :

$$\{\varepsilon(x,t)\}^T = \{u_i(t)\}^T \cdot [B(x)]^T \tag{2.117}$$

L'utilisation de la relation contrainte déformation suivante :

$$\{\sigma(x,t)\} = [D] \cdot \varepsilon(x,t) \tag{2.118}$$

Et aussi :

$$\varepsilon(x,t) = [B(x)] \cdot \{u_i(t)\} \tag{2.119}$$

Nous permet d'écrire :

$$\{\sigma(x,t)\} = [D] \cdot [B(x)] \cdot \{u_i(t)\} \tag{2.120}$$

Le déplacement s'écrit en chaque point comme suit :

$$u(x,t) = [N(x)] \cdot \{u_i(t)\} \tag{2.121}$$

Ce qui donne :

$$\{u(x,t)\}^T = \{u_i(t)\}^T \cdot [N(x)]^T \tag{2.122}$$

La force peut être écrite comme suit :

$$\{F(x,t)\} = [K] \cdot \{u(x,t)\} \tag{2.123}$$

On remplace l'équation 2.122 dans l'équation 2.123, nous aurons:

$$\{F(x,t)\} = [K] \cdot [N(x)] \cdot \{u_i(t)\} \tag{2.124}$$

L'équation 2.115 devient comme suit:

$$\{u_i(t)\}^T \cdot \int [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV \cdot \{u_i(t)\} = \{u_i(t)\}^T \cdot [K] \cdot \{u_i(t)\} \tag{2.125}$$

Où [B] est la matrice écrite en fonction de la relation déformation-déplacement et [D] est une matrice fonction des caractéristiques des matériaux.

La matrice de rigidité est alors donnée par :

$$\int [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV = [K] \tag{2.126}$$

Pour ce qui est de la force d'inertie, elle est exprimée par le produit de la masse et de l'accélération sur l'élément de volume comme suit :

$$\{F(x,t)\} = -\rho \cdot \left\{ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \right\} = -\rho \cdot [N(x)] \cdot \{\ddot{u}_i(t)\} \tag{2.127}$$

Où ρ est la masse volumique.

On remplace l'équation 2.126 en partie droite de l'équation 2.115 et en l'égalant à la partie droite de l'équation 2.125, on obtient :

$$[K] \cdot \{u_i(t)\} = -\rho \cdot (\int [N]^T \cdot [N] \cdot dV) \cdot \{\ddot{u}_i(t)\} \tag{2.128}$$

La matrice de masse de chaque élément est :

$$[M] = \rho \cdot \int [N]^T \cdot [N] \cdot dV \tag{2.129}$$

L'élément barre possède deux degrés de libertés, soit les déplacements longitudinaux aux extrémités u_1 et u_2 figure II.7.

Le déplacement u(x,t) est exprimé par un polynôme d'ordre 3 comprenant 4 constantes :

$$u(x,t) = C_1(t) \cdot x^3 + C_2(t) \cdot x^2 + C_3(t) \cdot x + C_4(t) \tag{2.130}$$

On détermine les constantes C_1 à C_4 par les conditions aux frontières :

$$u(0,t) = u_1(t) \tag{2.131}$$

$$u(L,t) = u_3(t) \tag{2.132}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = u_2(t) \tag{2.133}$$

$$\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = u_4(t) \tag{2.134}$$

En introduisant les équations 2.131 et 2.132 en 2.130, on trouve les constantes C_3 et C_4 :

$$u(0,t) = u_1(t) = C_4(t) \tag{2.135}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = u_2(t) = C_3(t) \tag{2.136}$$

Le remplacement de C_3 et C_4 dans l'équation 2.130 conduit à :

$$u_3(t) = C_1 \cdot L^3 + C_2 \cdot L^2 + u_2 \cdot L + u_1 \tag{2.137}$$

Ce qui donne :

$$u_4(t) = 3 \cdot C_1 \cdot L^2 + 2 \cdot C_2 \cdot L + u_2 \tag{2.138}$$

En introduisant u_2 équation 2.133 et u_4 équation 2.134 dans u_3 équation 2.137 et u_4 équation 2.138 et en éliminant C_2 on obtient :

$$u_4 \cdot L - 2 \cdot u_3 = C_1 \cdot L^3 - u_2 \cdot L - 2 \cdot u_1 \tag{2.139}$$

On obtient C_1 sous cette forme :

$$C_1 = \frac{1}{L^3} \cdot [L \cdot (u_2 + u_4) + 2 \cdot (u_1 - u_3)] \tag{2.140}$$

Remplaçant C_1 équation 2.140 dans les équations 2.137 et dans équation 2.138, on obtient :

$$3 \cdot u_3 - u_4 \cdot L = C_2 \cdot L^2 + 2 \cdot u_2 \cdot L + 3 \cdot u_1 \tag{2.141}$$

Ce qui donne :

$$C_2 = \frac{1}{L^2} \cdot [3 \cdot (u_3 + u_1) - L \cdot (2 \cdot u_2 - u_4)] \tag{2.142}$$

L'équation du déplacement devient comme suit :

$$u(x,t) = \frac{x^3}{L^2} \cdot u_2 + \frac{x^3}{L^2} \cdot u_4 + \frac{2x^3}{L^3} \cdot u_1 - \frac{2x^3}{L^3} \cdot u_3 + 3 \cdot \frac{x^2}{L^2} \cdot u_3 - 3 \cdot \frac{x^2}{L^2} \cdot u_1 - 2 \cdot \frac{x^2}{L} \cdot u_2 - \frac{x^2}{L} \cdot u_4 + u_2 \cdot x + u_1 \tag{2.143}$$

Le ré-ordonnément de l'équation 2.143 en fonction des coordonnées nodales, fait apparaitre les fonctions de forme comme suit :

$$u(x,t) = (1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}) \cdot u_1 + L(\frac{x}{L} - \frac{2x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3}) \cdot u_2 + (\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}) \cdot u_3 + L \cdot (\frac{-x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3}) \cdot u_4 \tag{2.144}$$

Sous une forme synthétisée, l'équation 2.144 peut s'écrire comme suit :

$$u(x,t) = [\underset{1\times 4}{N}] \cdot \{u_i\} \tag{2.145}$$

La fonction de forme est donnée donc par :

$$[N] = \left[(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}) \quad L \cdot (\frac{x}{L} - \frac{2x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3}) \quad (\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}) \quad L \cdot (\frac{-x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3}) \right] \tag{2.146}$$

La matrice [B] est la dérivée des fonctions de forme et dépond du nombre de degrés de liberté de l'élément avec :

$$[B(x)] = \frac{\partial [N(x)]}{\partial x} \tag{2.147}$$

On parvient à écrire:

$$[B] = \left[(-\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3}) \quad (1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2}) \quad (\frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3}) \quad (\frac{-2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2}) \right] \tag{2.148}$$

On obtient donc de l'équation 2.128, la matrice de rigidité avec D=E :

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{2.149}$$

Et de l'équation 2.129, on obtient la matrice de masse élémentaire :

$$[M] = \frac{\rho \cdot A \cdot l}{420} \cdot \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \qquad (2.150)$$

Les matrices globales de la masse [M] et de rigidité [K] de la poutre, sont constituées en construisant la matrice globale de 10 matrices élémentaires.

II.4 Résolution des Problèmes des poutres sollicitées de charges mobiles par la méthode de la fonction de Green (cas unidimensionnel)

L'utilisation de la fonction de Green rapporte une solution exacte pour l'expression de la flèche de la poutre sous une forme simple, le calcul des de la réponse dynamique des poutres autre que simplement appuyée devient donc plus efficace. Pour cette méthode, les conditions d'appuis sont incorporées dans la fonction de Green de poutres correspondantes. En outre, en employant cette méthode, il n'est pas nécessaire de résoudre le problème en vibration libre pour obtenir les valeurs propres correspondantes exigées par la solution de superposition modales.

L'équation différentielle qui régit la vibration de la poutre en flexion est donnée par l'équation 2.1 :

$$E \cdot I \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m_l \cdot \frac{d^2 y}{\partial t^2} = P(x,t)$$

Les conditions d'appuis de la poutre sont (Mehri B., 2009) :

$$\frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x^3} = k_l \cdot y(x,t) = 0 \qquad (2.151)$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = k_t \cdot \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = 0 \qquad (2.152)$$

$$y(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = 0 \qquad (2.153)$$

Appliquant ces conditions pour x=0 et x=L. kt et kl sont les raideurs des ressorts d'appuis de la poutre figure II.8.

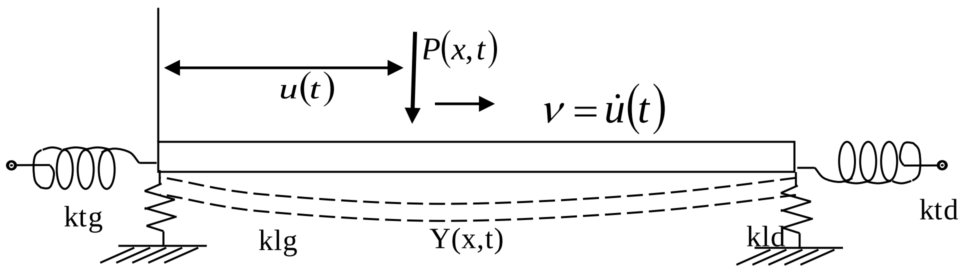


Figure II-8 La poutre appuyée sur ressorts des deux côtés.

La force extérieur est définie par la Dirac équation 2.25 par :

$P(x,t) = p \cdot \delta(x - \bar{x})$

Avec P est l'amplitude de la charge appliquée.

En utilisant la fonction de Green, la solution de l'équation 2.1 s'écrit sous la forme suivante (Mehri B., 2009) :

$$y(x,t) = G(x,\bar{x}) \cdot P(x,t) \tag{2.154}$$

Avec $G(x,\bar{x}) \cdot P$ est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^4 y(x)}{\partial x^4} - y(x) = \delta(x - \bar{x}) \tag{2.155}$$

Cette solution est donnée sous la forme suivante (Mehri B., 2009) :

$$G(x,\bar{x}) = \begin{cases} C_1 \cdot \cos(\phi \cdot x) + C_2 \cdot \sin(\phi \cdot x) + C_3 \cdot \cosh(\phi \cdot x) + C_4 \cdot \sinh(\phi \cdot x), 0 \le x \le \bar{x} \\ C_5 \cdot \cos(\phi \cdot x) + C_6 \cdot \sin(\phi \cdot x) + C_7 \cdot \cosh(\phi \cdot x) + C_8 \cdot \sinh(\phi \cdot x), \bar{x} \le x \le l \end{cases} \tag{2.156}$$

Avec :

$$\phi^4 = \frac{\omega^2 \cdot m}{E \cdot I} \tag{2.157}$$

ϕ représente le paramètre de fréquence.

Les constantes $C_1, C_2, ..., C_8$ sont calculées tels que la fonction de Green $G(x,\bar{x})$ doit satisfaire les huit conditions suivantes:

a) les conditions d'appuis de la poutre (Mehri B., 2009) :

$$G''(0,\bar{x}) = k_t \cdot G'(0,\bar{x}) = 0 \tag{2.158}$$

$$G''(l,\bar{x}) = k_t \cdot G'(l,\bar{x}) = 0 \tag{2.159}$$

$$G'''(0,\bar{x}) = k_l \cdot G(0,\bar{x}) = 0 \tag{2.160}$$

$$G'''(l,\bar{x}) = k_l \cdot G(l,\bar{x}) = 0 \tag{2.161}$$

b) les conditions de continuité de déplacement, rotation et du moment au point d'application de la charge à $x = \bar{x}$:

$$G(\bar{x}^+,\bar{x}) = G(\bar{x}^-,\bar{x}) \tag{2.162}$$

$$G'(\bar{x}^+,\bar{x}) = G'(\bar{x}^-,\bar{x}) \tag{2.163}$$

$$G''(\bar{x}^+,\bar{x}) = G''(\bar{x}^-,\bar{x}) \tag{2.164}$$

c) La condition de l'effort tranchant au point $x = \bar{x}$:

$$E \cdot I \cdot \left[G'''(\bar{x}^+,\bar{x}) - G'''(\bar{x}^-,\bar{x})\right] = 1 \tag{2.165}$$

Pour avoir les huit valeurs de $C1$ jusqu'à $C8$, on écrit les huit équations sous forme matricielle, puis on obtient la solution $G(x, \bar{x})$.

II.5 Méthode de Calcul en trois dimensions

Comme précisé dans l'introduction, nous proviendrons à une comparaison entre les modèles unidimensionnels et le modèle tridimensionnel réel créé à l'aide d'un logiciel de calcul consacré aux structures de ponts, nommé Csi Bridges.

CSI bridge est un logiciel de calcul de structures, il est adapté particulièrement aux ouvrages d'art. Il permet le calcul des efforts interne dans la structure du pont.

Les principales raisons pour le choisi de ce logiciel pour le calcul de la structure en trois 3D dans cette étude sont :

- La méthode d'analyse, qui prend en compte la vitesse des charges, leurs positions ainsi que l'instant de départ initial (t_0).
- La possibilité d'introduire tout type de véhicule selon le cas, avec des charges ponctuelles ou distribuées, ainsi que les espacements entre les essieux.
- La position de la voie de circulation des véhicules sur le tablier, en position centrée ou excentrés.
- La définition du matériau comme isotrope ou orthotrope.
- La possibilité du choix des points de calcul.
- La modélisation du tablier du pont par poutre ou plaque, mince selon Love- Kirchhoff ou épaisse selon Mindlin.
- La facilité d'exploit des résultats.

II.5.1 Méthodes d'analyses utilisées

Le problème peut être traité par le Csi Bridge selon deux méthodes (Messai O. et Guerda B., 2013):

II.5.1.1 Analyse par les lignes d'influence

Ce type d'analyse est statique, ne tient pas compte de la vitesse des véhicules roulants. Les charges roulantes sont positionnées le long de la longueur et de la largeur des voies pour produire le maximum et le minimum de la réponse à travers la structure étudié. Chaque véhicule peut agir sur toutes les voies ou limité à certaines d'entre elles. Ce programme peut calculer le maximum et le minimum de la réponse dans chaque point de calcul.

II.5.1.2 Analyse de type pas à pas:

Cette méthode est basée sur l'analyse temporelle (Time History Analysis), où nous cherchons à solutionner l'équation d'équilibre en chaque pas du temps. Ce type d'analyse est utilisé si nous nous intéressons à la réponse dynamique. Les véhicules peuvent être exécutés simultanément sur les voies, chacune d'entre eux avec son propre temps de départ, sa position, sa direction et sa vitesse de roulement.

Remarque

CSI bridge prend les charges dynamique appliquées sans coefficient de majoration, car il nous permet d'introduire les systèmes de chargement réel.

II.5.2 Paramètres de l'étude par la méthode des éléments finis du modèle réel

Des restrictions sont imposées par le logiciel concernant le choix du maillage ainsi que son raffinement hypothèque une fine analyse :

- Le maillage utilisé est tributaire de la géométrie, le logiciel nous impose des dimensions de (78x78) cm, où chaque nœud possède six degrés de liberté.
- Pour ce qui est de type d'analyse, il serait question d'utiliser l'analyse temporelle avec un pas de temps $\Delta t = 0{,}001 s$ par la méthode d'intégration directe de Newmark.

II.5.3 Les charges permanentes

Le pont est modélisé par le logiciel CSI bridge qui prend en compte le poids propre des éléments constructifs (Dead), mais nous devons déterminer les caractéristiques des matériaux tous d'abord avec la géométrie et les sections des éléments constructifs, puis on introduit les charges roulantes.

II.5.4 Les surcharges routières :

Ils existent plusieurs types de chargement qui sont définies par le D.T.R, selon le fascicule 61 titre 2 du pont route, tel que « AL, BC, MC120, D240…etc. », nous allons s'intéresser uniquement au type de chargement BC.

On dispose autant de files ou convois de camions sur la chaussée, nous plaçons ces files dans le calcul en situation la plus défavorable pour l'élément considéré.

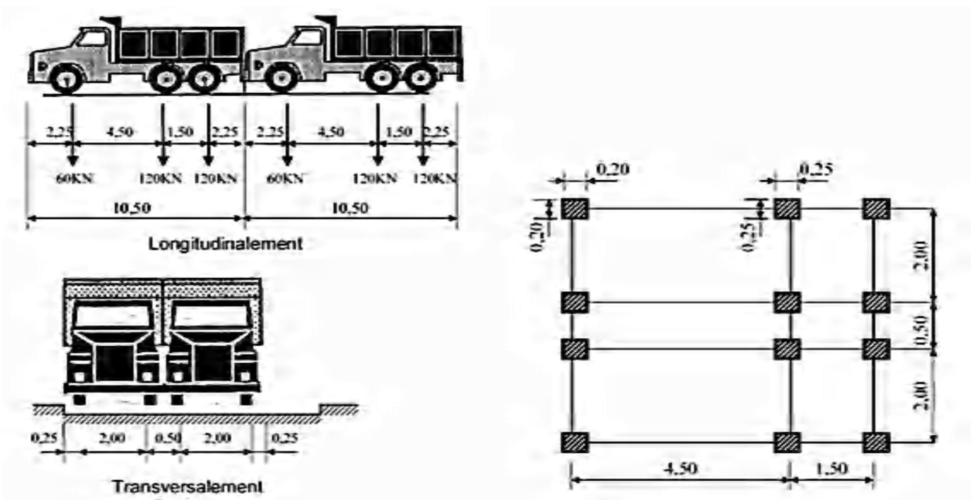


Figure II-9 Modèle du convoi type BC.

II.5.5 Types de modèle de la charge

Le système représenté sur la figure II.10. (Système BC) sera modélisé soit comme plusieurs charges espacer ou par une charge unique équivalente représentant la somme des charges appliquées du système Bc, cela au centre de gravité du véhicule figure II.11.

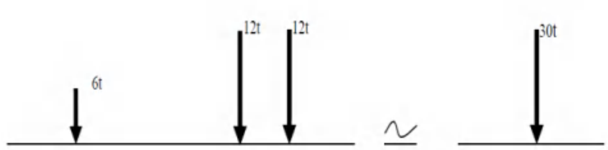


Figure II-10 Modélisation du véhicule par résultante.

II.6 Conclusion partielle

Nous avons présenté dans ce chapitres trois méthodes pour le calcul unidimensionnel pour poutre de ponts, une première méthode complètement analytique qui tient en considération le type de la charge mobile comme charge mobile avec ou sans inertie, nous avons aussi présenté le cas de la charge harmonique et enfin le cas des convois mobiles.

Nous avons aussi présenté dans le même contexte la méthode en éléments finis utilisé pour le même modèle unidimensionnel.

La troisième méthode est celle de la fonction de Green qui va être utilisé dans les deux chapitres 4 et 5 pour présenter une nouvelle formulation pour un nouveau cas de poutre avec des conditions d'appuis plus générales.

A la fin de ce chapitre et pour traiter le cas tridimensionnel, nous avons présenté le principe du logiciel utilisé dans le prochain chapitre 3 pour le calcul en 3D d'un pont réel pour le but de le confronter les résulats avec les modèles unidimensionnels.

Synthèse de la partie A

Les conclusions en chapitres 1 et 2 de la revue de littérature fournissent une base solide pour la compréhension et l'approfondissement de la modélisation des ponts sollicités par des charges mobiles. Dans le chapitre 1, une revue approfondie de la littérature a été présentée, mettant en lumière la complexité des modèles de véhicules mobiles et des ponts, tout en soulignant l'importance de la méthode de la fonction de Green dans la modélisation. Cette première partie a donnée les bases nécessaires pour aborder les différents aspects des modèles théoriques.

Le chapitre 2, quant à lui, se concentre sur les méthodes de calcul unidimensionnel pour les poutres de ponts. Trois approches distinctes ont été exposées, allant de la méthode analytique à la méthode des éléments finis, jusqu'à la méthode de la fonction de Green. Chaque méthode a été adaptée à des cas spécifiques, tels que des charges mobiles avec ou sans inertie, des charges harmoniques, ou des convois mobiles. De plus, un passage vers le modèle tridimensionnel a été introduit, en présentant le logiciel utilisé pour confronter les modèles unidimensionnels avec la réalité physique des ponts.

Ensemble, ces deux chapitres posent les fondements théoriques et méthodologiques nécessaires à la compréhension approfondie des modèles de ponts sollicités par des charges mobiles. La synthèse des études antérieures a permis d'identifier des lacunes et des perspectives, ouvrant ainsi la voie aux chapitres suivants de la thèse qui explorerent de nouvelles formulations et des applications pratiques des méthodes présentées.

PARTIE B

DEVELOPPEMENT DE MODELES NUMERIQUE ET ANALYTIQUES

Chapitre III Etude numérique des modèles unidimensionnels et tridimensionnels des ponts sous l'effet des charges mobiles

Introduction

Ce chapitre se propose pour synthétiser de manière exhaustive les divers paramètres qui influent sur le comportement dynamique des ponts soumis à des charges en mouvement. L'objectif est d'approfondir la compréhension de cette réaction dynamique. En analysant la littérature existante, il devient possible d'identifier les paramètres les plus significatifs affectant ce comportement dynamique, permettant ainsi de sélectionner des modèles pour les ponts et les charges, visant une représentation réaliste. Cette étude débute en examinant certains modèles de poutres préalablement étudiés. Le premier utilise la méthode analytique pour étudier l'impact de la masse de la charge par rapport à celle de la poutre en fonction de la vitesse de la charge à la vitesse critique, puis la combinaison des charges pour avoir les convois mobiles. Sans oublier le cas des charges sous forme harmonique. L'étude est élargie par l'utilisation d'un modèle en éléments finis pour le chargement en masse mobiles. Puis une confrontation est établie avec le modèle réel en 3D.

Ces travaux constituent un socle essentiel pour notre exploration approfondie du comportement dynamique des poutres soumises à des charges mobiles.

SOMMAIRE

III.1 Application aux cas réels pour comprendre l'effet de l'inertie de la masse roulante sous vitesse constante

Dans cet exemple, nous analysons le comportement dynamique d'une poutre mince simplement appuyée soumise à des charges modélisées sous la forme d'une force et d'une masse mobile se déplaçant à vitesse constante. Nous examinons trois cas impliquant le rapport de masse du véhicule par rapport à la masse de la poutre, qui est initialement au repos. Ensuite, nous étudions l'impact de prendre en compte de l'inertie de la charge mobile et le comparons au cas de la force mobile pour plusieurs cas de α_m. Nous allons prendre en compte plusieurs vitesses: $v = 20$, 40, 60 et finalement $v = 100 m/s$ .La vitesse $v = 80 m/s$ n'est pas prise en considération dans cette étude car elle ne reflète pas la théorie, comme conclu dans (Henchi K, 1995). Ensuite, nous utiliserons les mêmes données d'Aguenini M., (2008) telle que reprises dans le travail de Henchi K. (1995). Les données de la poutre et de la charge sont les suivantes:

$L = 25m$, $m_l = 5.96.10^3 kg/m$, $A = 2.384m^2$, $I = 2.222m^4$, $E = 2.5.10^{10} N/m^2$, $m_p = 149000kg$, $g = 9.81 m/s^2$, $F = -m.g$, présente la charge mobile.

Notons que la pulsation est donnée par: $\omega_j = (j\pi)^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{m_l \cdot L^4}}$.

La flèche statique: $w_{sta} = F \cdot L^3 / 48 \cdot EI$, La vitesse critique : $v_{cri} = 2 \cdot L / T$.

Le rapport des vitesses : $\alpha = \frac{v}{v_{cri}}$ et le rapport de masse $\alpha_m = \frac{m}{v_P}$.

Le Facteur d'Amplification Dynamique $F.A.D = \frac{w_{dyn}}{w_{sta}}$, avec: w_{dyn} est la réponse dynamique maximal et w_{sta} est la réponse statique maximal.

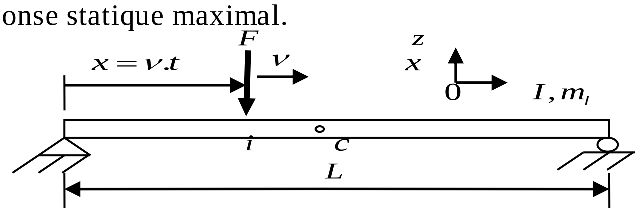


Figure III-1 Poutre simplement appuyée sous l'effet d'une force mobile.

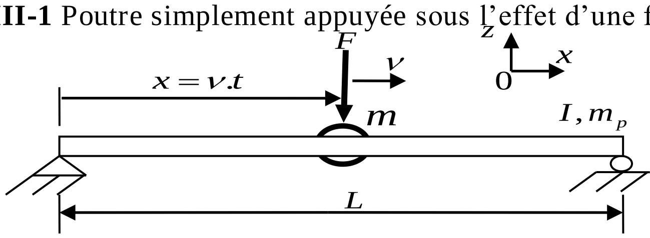


Figure III-2 Poutre simplement appuyée sous l'effet d'une masse mobile.

Nous allons utiliser la solution sous la forme suivante expliqué en chapitre 2 :

$$y_j(t)=\sqrt{\frac{2}{m_l\cdot L}}\cdot\left(\frac{F}{\omega_j^2-\Omega_j^2}\right)\cdot\left(\sin(\Omega_j t)-\left(\frac{\Omega_j}{\omega_j}\right)\cdot\sin(\omega_j\cdot t)\right)$$ avec $\Omega_j=\frac{j\cdot\pi\cdot v}{L}$ et $w_j(t)=\phi_j(t).y_j(t)$.

Cela donne : $w_j(t)=\frac{2\cdot F}{m_l\cdot L}\cdot\frac{1}{(\omega_j^2-\Omega_j^2)}\cdot\left(\sin(\Omega_j\cdot t)-\left(\frac{\Omega_j}{\omega_j}\right)\cdot\sin(\omega_j\cdot t)\right)\cdot\sin\frac{j\cdot\pi\cdot x}{L}$ avec : $0\le t\le\frac{L}{v}$.

L'étude en cette partie se porte sur les notions de modes propres de vibration de la poutre, sur les déplacements et sur le facteur d'amplification dynamique.

III.1.1 Cas d'un rapport de masse important

Nous prenons : $\alpha_m=m/m_p=149000/149000=1.0$, $F=-mg=-1461.69kn$ et $m_l=5.96.10^3 Kg/m$.

Les pulsations pour les quatre premier modes propres de vibration cas 1 pour $\alpha_m=1$ sont:

$\omega1=48.1613\text{rad}/s$, $\omega2=192.6452\text{rad}/s$, $\omega3=433.4517\text{rad}/s$, $\omega4=770.5808\text{rad}/s$ représentés sur la figure III.3.

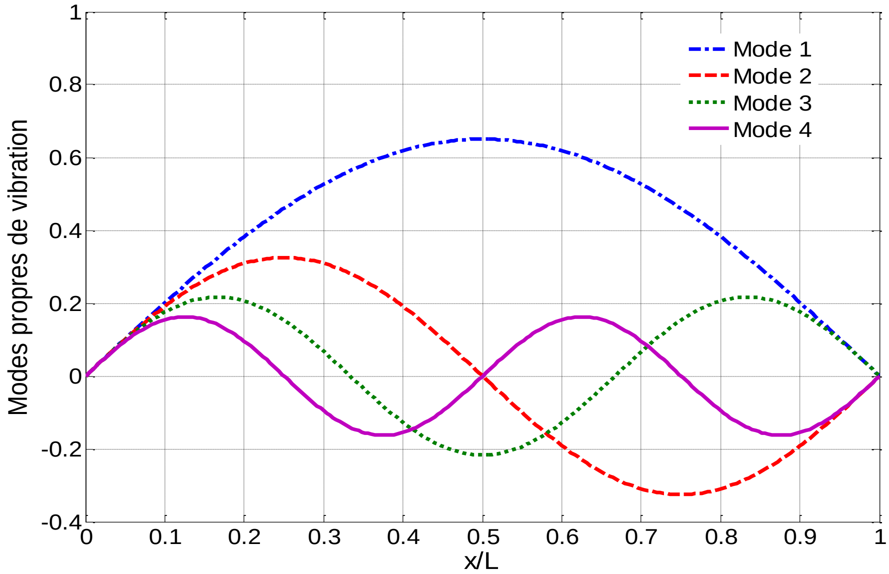


Figure III-3 Les modes propres de vibration pour le cas 1 $\alpha_m=1$.

Le déplacement maximal dans ce cas pour $v=20$, 40, 60 et $v=100m/s$ est représenté sur la figure III.4. L'augmentation de la vitesse de roulement entraîne automatiquement une augmentation du déplacement maximal de la poutre. Le même effet est remarqué pour l'amplification dynamique (tableau III.1 et figure III.5).

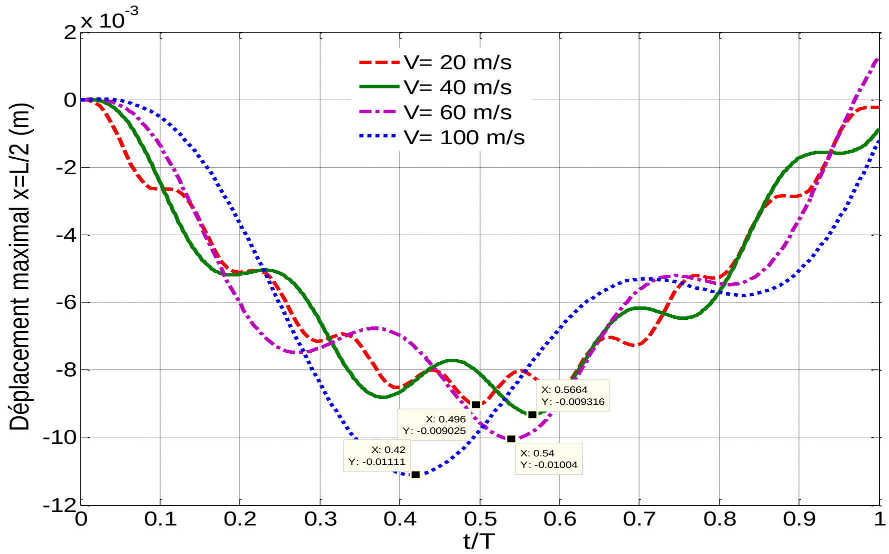


Figure III-4 Déplacement maximal de la poutre cas 1 $\alpha_m = 1$ pour $v = 20$, 40, 60 et $v = 100 m/s$.

Tableau III-1 Facteur d'amplification dynamique cas 1 pour $\alpha_m = 1.0$ pour plusieurs vitesses.

Vitesses v **(m/s)**	**Temps** t **(s)**	y_{sta} **(m)**	y_{dyn} **(m)**	*FAD*
20	1.25	0.0086	0.009025	1.0494
40	0.625	0.0086	0.009316	1.0833
60	0.417	0.0086	0.01004	1.1674
100	0.25	0.0086	0.01111	1.2919

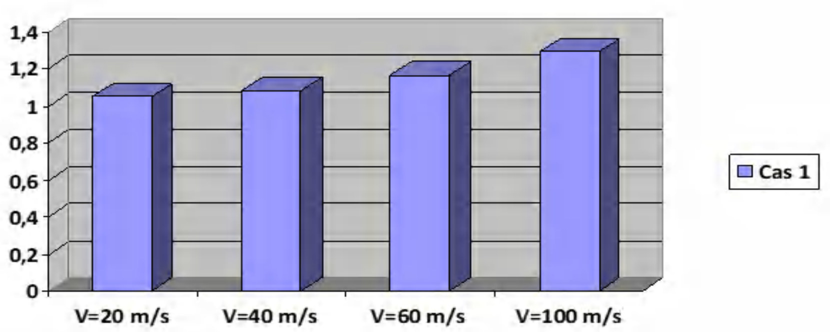


Figure III-5 Facteur d'amplification dynamique cas 1 $\alpha_m = 1$ en fonction des vitesses.

III.1.2 Cas d'un rapport de masse moins important

Pour ce cas, nous prenons : $\alpha_m = m / m_p = 74500/149000 = 0.5$, $F = -mg = -730.84kn$ et $m_l = 2.98.10^3 kg/m$.

Les pulsations pour les quatre premier modes propres de vibration cas 2 pour $\alpha_m = 0.5$ sont :

$\omega 1 = 68.1 rad/s$, $\omega 2 = 272.4 rad/s$, $\omega 3 = 613.0 rad/s$, $\omega 4 = 1089.8 rad/s$, ces modes sont représentés sur la figure III.6.

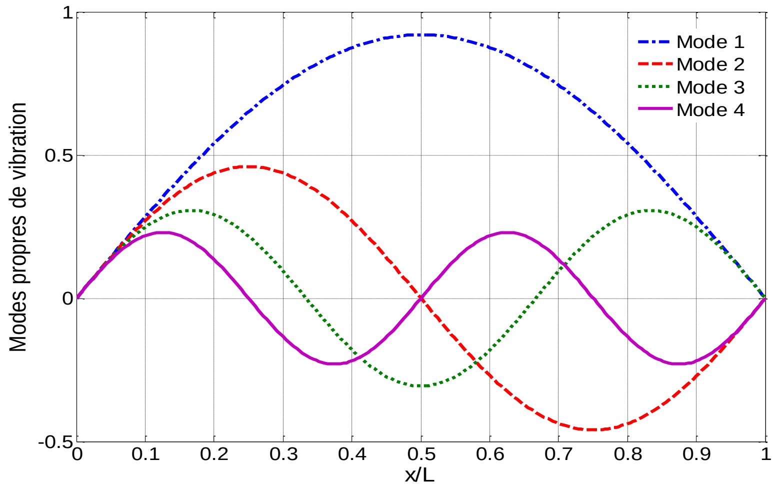


Figure III-6 Les modes propres de vibration pour le cas 2 $\alpha_m = 0.5$.

Le déplacement maximal dans ce cas pour $v = 20$, 40, 60 et $v = 100 m/s$ est représenté sur la figure III.7. L'augmentation de la vitesse de roulement entraîne automatiquement le déplacement maximal de la poutre. Le même effet est remarqué sur l'amplification dynamique (tableau III.2 et figure III.8). Cependant les déplacements sont néttement inferieurs à ceux du premier cas.

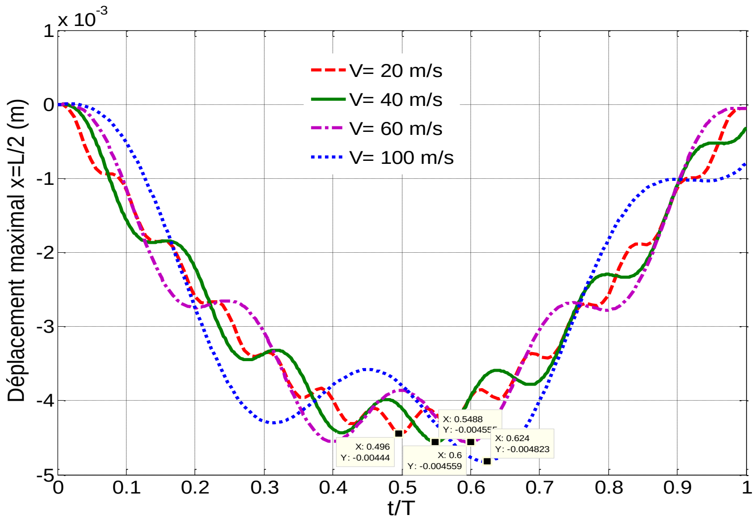


Figure III-7 Déplacement maximal de la poutre cas 2 pour $\alpha_m = 0.5$.

Tableau III-2 Facteur d'amplification dynamique cas 2 $\alpha_m = 1$ pour plusieurs vitesses.

Vitesses v (m/s)	**Temps t (s)**	y_{sta} **(m)**	y_{dyn} **(m)**	*FAD*
20	1.25	0.0043	0.00444	1.0326
40	0.625	0.0043	0.004555	1.0593
60	0.417	0.0043	0.004559	1.0602
100	0.25	0.0043	0.004823	1.1216

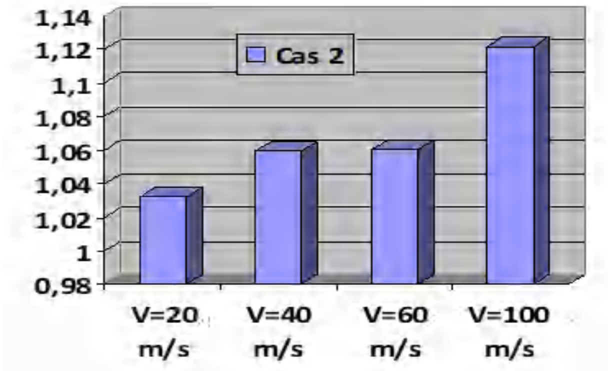


Figure III-8 Facteur d'amplification dynamique cas 2 $\alpha_m = 0.5$ en fonction des vitesses.

III.1.3 Cas d'un faible rapport de masse

Pour ce cas, on à : $\alpha_m = m/m_p = 29800/149000 = 0.2$, $F = -mg = -292.338KN$ et $m_l = 1.192.10^3 Kg/m$.

Les pulsations pour les quatre premier modes propres de vibration cas 3 pour $\alpha_m = 0.2$ sont :

$\omega 1 = 107.7 rad/s$, $\omega 2 = 430.8 rad/s$, $\omega 3 = 969.2 rad/s$, $\omega 4 = 1723.1 rad/s$, ces modes sont représentés sur la figure III.9.

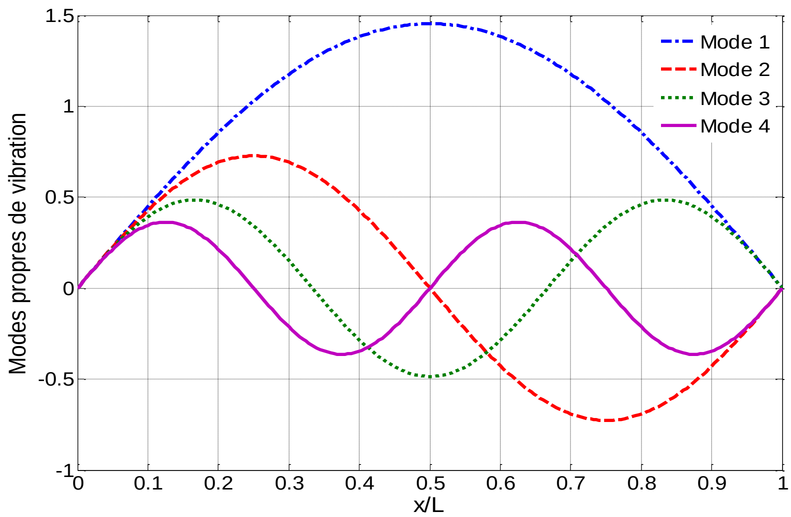


Figure III-9 Les modes propres de vibration pour le cas 3 $\alpha_m = 0.2$.

Le déplacement maximal dans ce cas pour V=20, 40 60 et 100 m/s est représenté sur la figure III.10. L'augmentation de la vitesse de roulement entraîne automatiquement le déplacement maximal de la poutre. Le même effet est remarqué sur l'amplification dynamique (tableau III.3 et figure III.11).

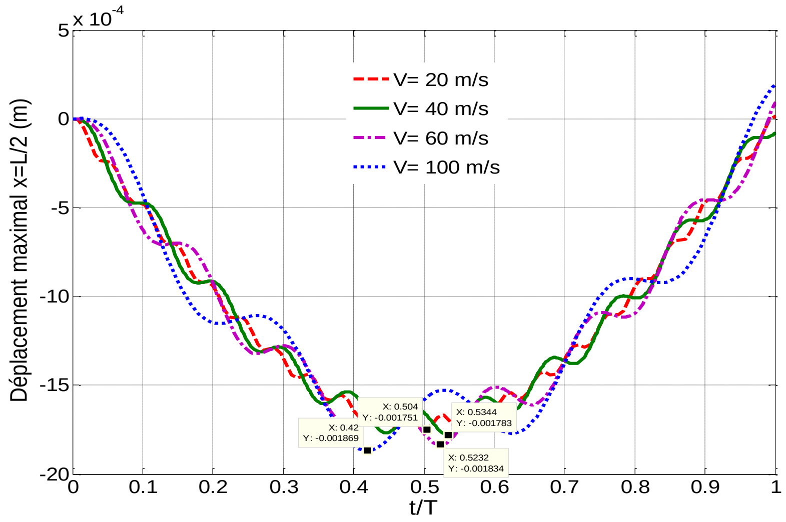


Figure III-10 Déplacement maximal de la poutre cas 3 $\alpha_m = 0.2$ pour V= 20, 40, 60 et 100 m/s.

Tableau III-3 Facteur d'amplification dynamique pour $\alpha_m = 0.2$ pour plusieurs vitesses.

Vitesses v **(m/s)**	**Temps** t **(s)**	y_{sta} **(m)**	y_{dyn} **(m)**	*FAD*
20	1.25	0.0017	0.001751	1.03
40	0.625	0.0017	0.001783	1.0488
60	0.417	0.0017	0.001834	1.0788
100	0.25	0.0017	0.001869	1.0994

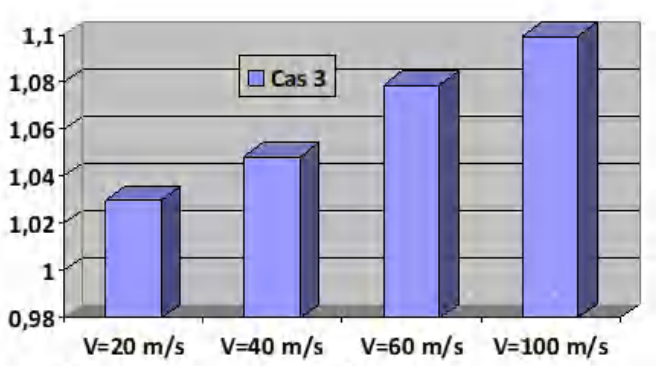


Figure III-11 Facteur d'amplification dynamique cas 3 en fonction des vitesses.

III.1.4 Etude comparative selon le rapport de masse

L'augmentation de la vitesse de roulement entraîne une augmentation du déplacement maximal mais elle le décale galement du point de mi-travée de la poutre, comme le montrent les figures III.4, III.7 et III.10.

Pour une même vitesse de roulement de la charge sur la poutre $V = 20m/s$, la diminution du rapport de masse α_m diminue le déplacement maximal ainsi que le facteur d'amplification dynamique, comme illustré sur la figure III.12 et le tableau III.4. Cette même tendance est observée pour les autres vitesses de roulement (figure III.13).

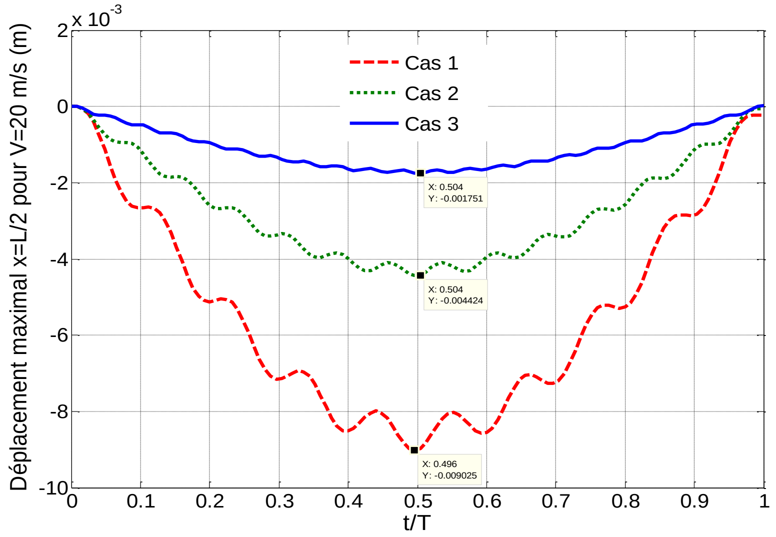


Figure III-12 Déplacement maximal de la poutre pour $V = 20m/s$ pour les trois cas de rapport de masses cas 1 $\alpha_m = 1$, cas 2 $\alpha_m = 0.5$ et cas 3 $\alpha_m = 0.2$.

Tableau III-4 Facteur d'amplification dynamique en fonction de α_m et de la vitesse.

$V\ (m/s)$	Cas 1 $\alpha_m = 1$	Cas 2 $\alpha_m = 0.5$	Cas 3 $\alpha_m = 0.2$
20	1.0494	1.0326	1.03
40	1.0833	1.0593	1.0488
60	1.1674	1.0602	1.0788
100	1.2919	1.1216	1.0994

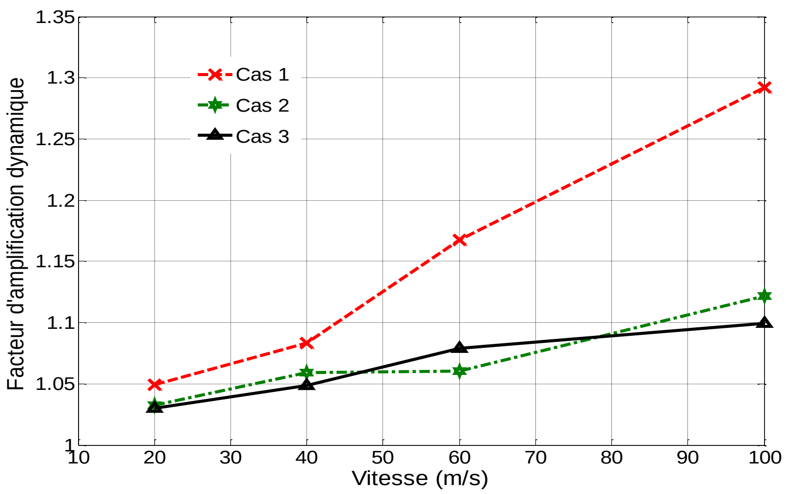


Figure III-13 Facteur d'amplification dynamique maximal au centre de la poutre en fonction de la vitesse et de α_m.

L'amplification dynamique augmente avec l'augmentation du rapport de masse, se rapprochant de la mi-portée de la poutre (tableau III.5).

Tableau III-5 Facteur d'amplification dynamique pour $V = 60m/s$.

t/T	$\alpha_m = 1$	$\alpha_m = 0.5$	$\alpha_m = 0.2$
0	0	0	0
0.1	0.16	0.4	0.3
0.2	0.7	0.82	0.7
0.3	0.83	0.85	0.9
0.4	0.84	0.9	0.86
0.5	1.1	1.14	0.93
0.6	1	1.1	1.1
0.7	0.68	0.7	0.85
0.8	0.65	0.65	0.47
0.9	0.36	0.3	0.32
1	0	0	0.14

La comparaison avec les résultats de (Henchi K., 1995) est effectuée en terme d'amplification dynamique, pour une vitesse de $V = 60m/s$ et pour $\alpha_m = 1$ (figure III.14), pour $\alpha_m = 0.5$ (figure III.15) et pour $\alpha_m = 0.2$ (figure III.16).

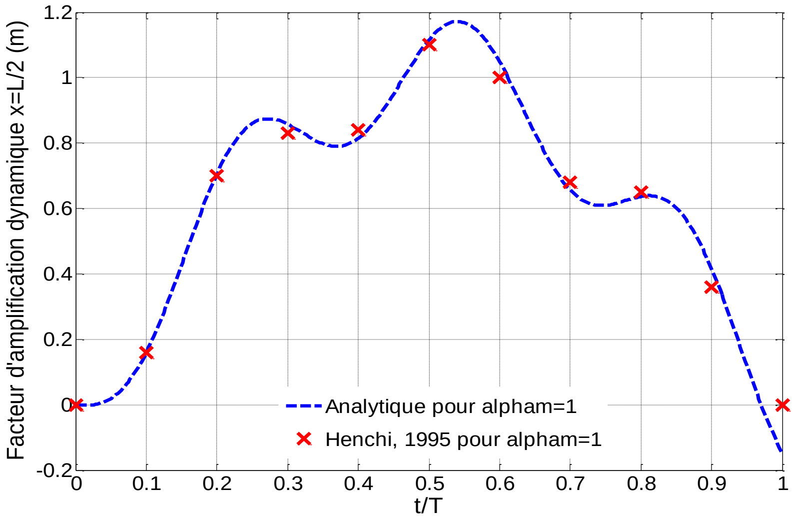


Figure III-14 Facteur d'amplification dynamique maximal au centre de la poutre pour $\alpha_m = 1$ et $V = 60m/s$.

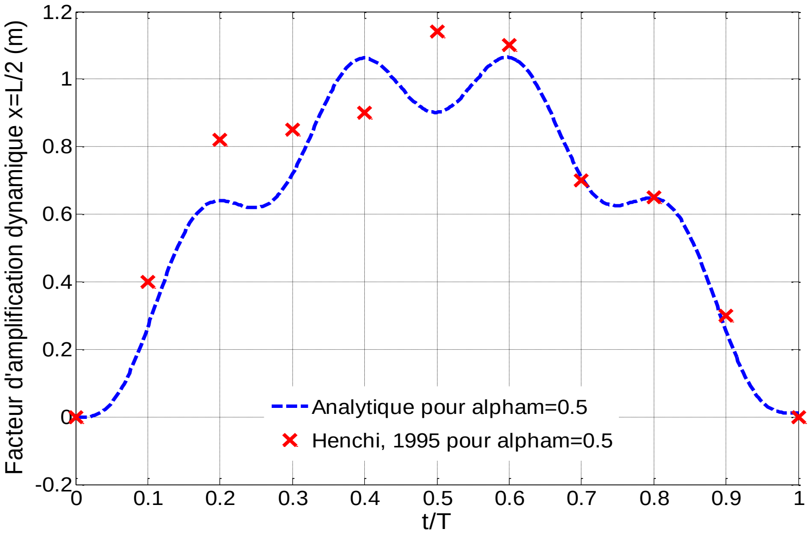


Figure III-15 Facteur d'amplification dynamique maximal au centre de la poutre pour

$\alpha_m = 0.5$ et $V = 60m/s$.

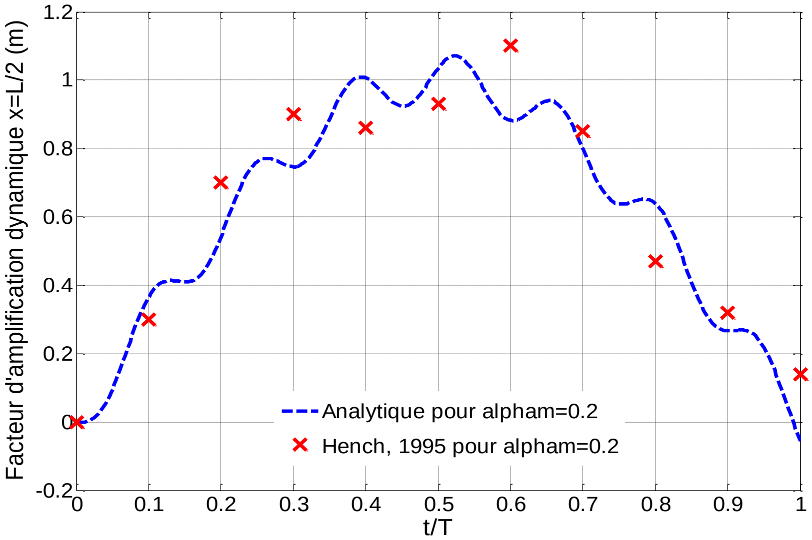


Figure III-16 Facteur d'amplification dynamique maximal au centre de la poutre pour

$\alpha_m = 0.2$ et $V = 60m/s$.

III.1.5 Analyse et synthèse des résultats

a. Les résultats de cette partie démontrent que plus le rapport α_m diminue, plus les fréquences naturelles de vibration augmentent pour une même valeur de vitesse de la charge mobile. De plus, la réponse dynamique, sous forme de facteur d'amplification dynamique, diminue également.

Pour la même valeur de la vitesse $V = 20m/s$, nous avons :

$\omega 1 = 48.1613\, rad/s$ pour $\alpha_m = 1$, $\omega 1 = 68.1\, rad/s$ pour $\alpha_m = 0.5$ et finalement

$\omega 1 = 107.7\ rad/s$ pour $\alpha_m = 0.2$, cela donne une augmentation de la première fréquence de

41.3998% (de $\alpha_m = 1$ à $\alpha_m = 0.5$), une augmentation de 123.7238% (de $\alpha_m = 1$ à $\alpha_m = 0.2$), et finalement une augmentation de 58.1498% (de $\alpha_m = 0.5$ à $\alpha_m = 0.2$).

Concernant le facteur d'amplification dynamique, les valeurs pour la même vitesse $V = 20m/s$ sont comme suit:

FAD=1,054 pour $\alpha_m = 1$, FAD=1,037 pour $\alpha_m = 0.5$ et de FAD=1,022 pour $\alpha_m = 0.2$, cela donne une diminution de l'amplification dynamique de 1.6128% (de $\alpha_m = 1$ à $\alpha_m = 0.5$), une diminution de 3.0361% (de $\alpha_m = 1$ à $\alpha_m = 0.2$), et une diminution de 1.4465% (de $\alpha_m = 0.5$ à $\alpha_m = 0.2$).

b. Pour le cas de la force mobile, les résultats de cette étude convergent avec ceux de Henchi K. (1995). Pour une vitesse $V = 60m/s$ nous avons :

FAD=1,172 pour $\alpha_m = 1$, FAD=1,065 pour $\alpha_m = 0.5$ et FAD=1,07 pour $\alpha_m = 0.2$. Ces valeurs sont presque identiques à ceux de Henchi K. (1995), mais nous remarquons un décalage de la position de la valeur maximal du milieu de la poutre due à l'effet d'entraînement de la charge par la vitesse.

c. Concernant l'effet de la modélisation de la charge par force ou masse mobile, l'étude conduit aux conclusions suivantes:

- la réponse dynamique causé par les deux types de modèles (force ou masse mobile) n'est pas identique et surtout pour des grandes vitesses.
- pour les cas de $\alpha_m \geq 0.5$, la différence dans la réponse dynamique de la poutre due aux deux types de modélisations (la prise en compte ou pas de l'inertie de la masse mobile) devient importante pour les grandes vitesses.
- dans le cas contraire ($\alpha_m \prec 0.5$), la variation de la réponse dynamique des deux type de modèles est peu importante pour les grandes vitesses.
- pour $\alpha_m \prec 0.5$ et pour des petites variations de la vitesse, le comportement devient presque identique pour les deux types de modélisation, l'effet de l'inertie de la masse est négligeable dans ce cas (Henchi K., 1995).

III.2 Application d'un cas réel pour comprendre l'effet de la vitesse de roulement de la charge sans inertie sur le comportement de la poutre

Cet exemple examine le comportement dynamique d'une poutre mince simplement appuyée sous l'effet de passage de charges modélisées comme force mobile avec vitesse constante, la poutre étant initialement au repos. Nous étudions l'influence de la variation du rapport de la vitesse alpha (α) à mi-portée pour le cas d'une force mobile (l'inertie de la masse mobile est négligée), où le cas $\alpha = 0$ représente le cas de la poutre statique ($V = 0$).

III.2.1 Déplacements et facteur d'amplification dynamique

Les données utilisées dans cet exemple sont les mêmes que celles de Foda A. et Abduljabbar Z. (1998) qui concernent une poutre simplement appuyée modélisant la structure.
Les caractéristiques de la poutre et de la charge sont les suivantes:

$L = 50m$, $m_l = 4.8.10^3 kg/m$, $A = 0.2083m^2$, $I = 1.042m^4$, $E = 3.34.10^{10} N/m^2$, $m_p = 50000kg$, $F = -m.g$ qui est la force mobile.

Le paramètre de vitesse α est défini comme suit : $\alpha = \frac{v \cdot L}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{m}{EI}}$.

La vitesse critique est donnée par : $v_{cri} = \frac{\pi}{L} \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}} = 169.101\,\mathrm{m/s}$.

Le déplacement statique est de $u_{sta} = 0.0367m$.

Les valeurs de α sont représentées sur le tableau III.6.

Tableau III-6 Valeurs de V et α.

	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4	Cas 5
V (m/s)	0	8.64	21.15	42.3	63.45
T (s)	-	5.7870	2.3641	1.1820	0.7880
α	0	0.05	0.125	0.25	0.375

L'augmentation de α augmente l'amplification dynamique de la poutre, comme illustré sur la figure III.17. Dans tous les cas, les vibrations sont centrées autour du cas statique 1, ce qui corobore les observations Foda A. et Abduljabbar Z. (1998).

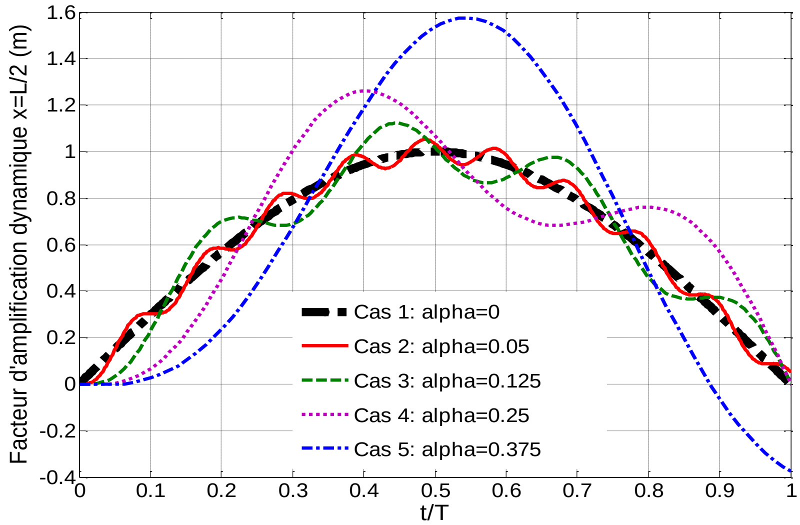


Figure III-17 Facteur d'amplification dynamique maximal $x = L/2$ pour : $\alpha = 0$, 0.05, 0.125, 0.25 et 0.375.

Les figure III.18 et III.19 présentent la flèche dynamique et le facteur d'amplification dynamique respectivement de la poutre pour le cas de force mobile pour les vitesses suivantes : $V = 25m/s$ ($T = 2s$), $V = 50m/s$ ($T = 1s$) et $V = 100m/s$ ($T = 0.5s$). L'augmentation de V entraîne une augmentation du déplacement maximal ainsi que du facteur d'amplification dynamique de la poutre.

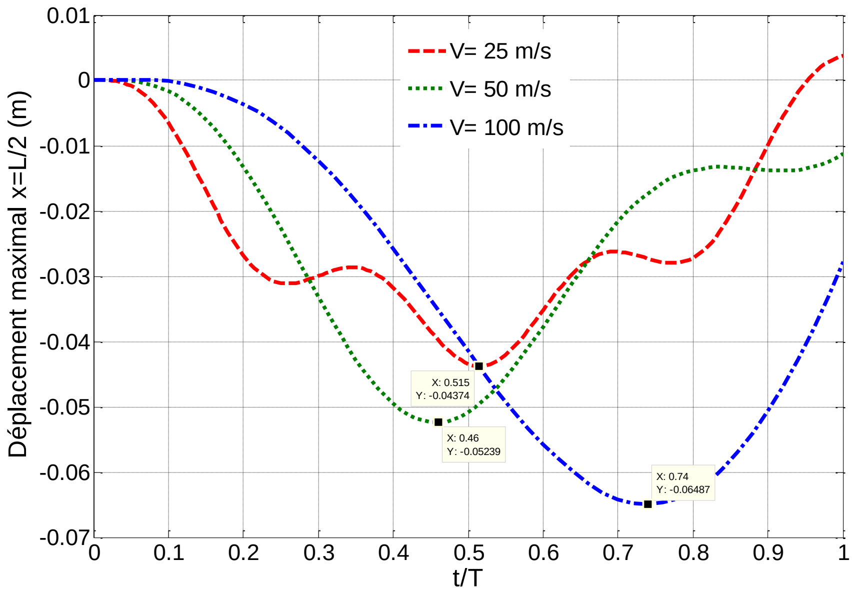


Figure III-18 Déplacement maximal pour la poutre simplement appuyée traversée par force mobile pour $V = 25$, 50 et $100m/s$.

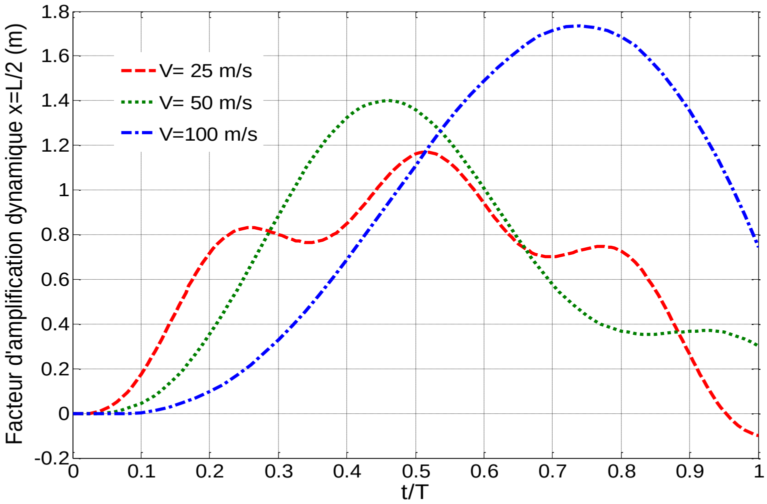


Figure III-19 Facteur d'amplification dynamique pour la poutre simplement appuyée traversée par force mobile pour $v = 25$, 50 et $100 m/s$.

III.2.2 Comparaison des résultats

Nous présentons une comparaison avec les résultats de (Foda A. et Abduljabbar Z., 1998) concernant le facteur d'amplification dynamique maximal pour $\alpha = 0.125$ illustré sur la figure III.20 et pour $\alpha = 0.375$ sur la figure III.21, pour ce qui est du déplacement maximal, le cas pour $v = 25 m/s$ est présenté sur la figure III.22 et pour $v = 50 m/s$ sur la figure III.23, les résultats de (Foda A. et Abduljabbar Z., 1998) pour le facteur d'amplification dynamique pour $\alpha = 0.125$ et $\alpha = 0.375$ sont mentionnés dans le tableau III.8, et le déplacement maximal pour $v = 25 m/s$ et $v = 50 m/s$ sur le tableau III.9.

Sur les figures III.20, III.21 et III.22 et dans le tableau III.7, nous présentons une comparaison entre les résultats obtenus par la méthode analytique et ceux de Foda A. et Abduljabbar Z. (1998).

Tableau III-7 Déplacement maximal pour $V = 25$, 50 et $100 m/s$.

	$V = 25 m/s$	$V = 50 m/s$	$V = 100 m/s$
u_{sta}	0.0374	0.0374	0.0374
Déplacement maximal analytique	0.04374	0.05239	0.06487
Position de F pour $dep_{\max}$ (u/L)	0.515	0.46	0.74
Déplacement maximal (Foda A. et Abduljabbar Z., 1998)	0.041	0.051	0.063
Position de F pour dép$_{Foda}$max (u/L)	0.52	0.47	0.73

Tableau III-8 Facteur d'amplification dynamique (Foda A. et Abduljabbar Z., 1998) pour $\alpha = 0.125$ et $\alpha = 0.375$.

t/T	$\alpha = 0.125$	$\alpha = 0.375$
0	0	0
0.1	0.167	0.0625
0.2	0.688	0.188
0.3	0.688	0.625
0.4	1.05	1.15
0.5	1	1.55
0.6	0.89	1.5
0.7	0.91	1.15
0.8	0.45	0.563
0.9	0.4	0
1	0	0.333

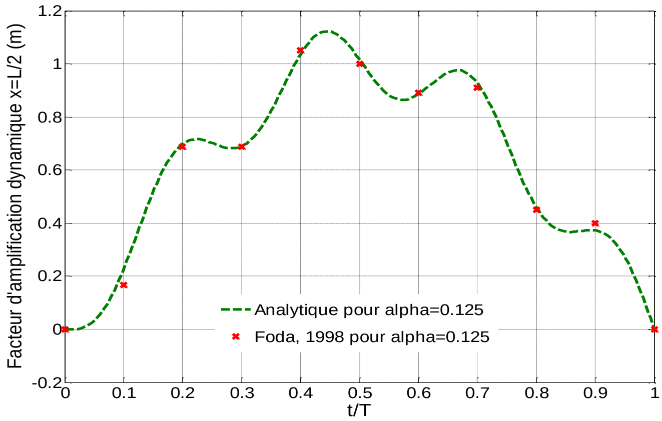


Figure III-20 Le facteur d'amplification dynamique pour une poutre simplement appuyée traversée par force mobile pour α= 0.125.

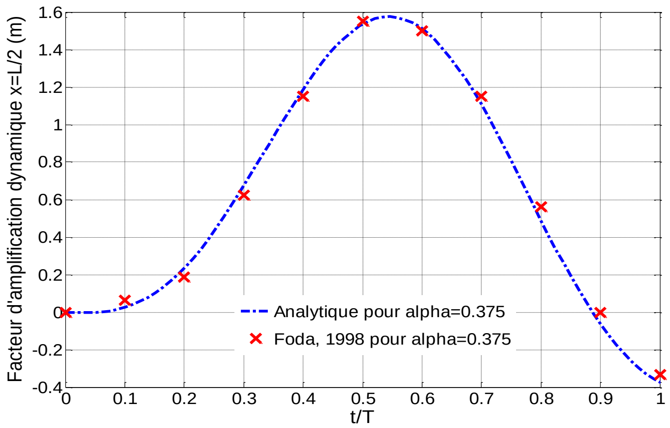


Figure III-21 Le facteur d'amplification dynamique pour une poutre simplement appuyée traversée par force mobile pour α= 0.375.

Tableau III-9 Déplacement maximal (Foda A. et Abduljabbar Z., 1998) pour $v = 25m/s$ et $v = 50m/s$.

t/T	$v = 25m/s$	$v = 50m/s$
0	-0	0
0.1	-0.008	-0.002
0.2	-0.026	-0.012
0.3	-0.03	-0.032
0.4	-0.031	-0.048
0.5	-0.041	-0.05
0.6	-0.032	-0.036
0.7	-0.025	-0.022
0.8	-0.027	-0.013
0.9	-0.01	-0.013
1	0.005	-0.011

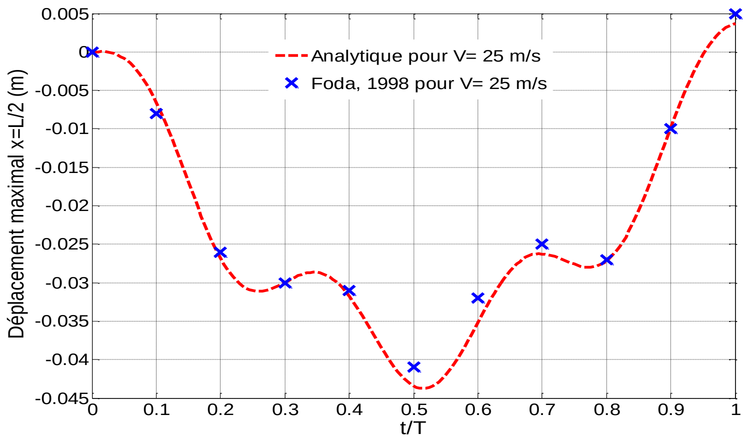


Figure III-22 Déplacement maximal pour une poutre simplement appuyée traversée par force mobile pour $v = 25m/s$.

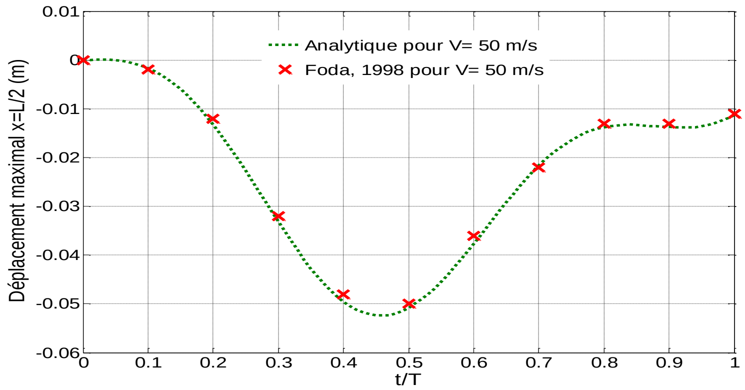


Figure III-23 Déplacement maximal pour une poutre simplement appuyée traversée par force mobile pour $v = 50m/s$.

On ne peut pas utiliser cette modélisation pour les cas où l'on considère l'effet de l'inertie de la charge mobile, car ce paramètre n'a pas été pris en considération dans cette partie.

Pour les cas où le rapport de la vitesse est $\alpha =$ 0, 0.05, 0.125, 0.25 et 0.375, les résultats sont très favorables parce qu'ils représentent les cas de faibles vitesses et ils sont très proches de ceux obtenus par Foda A. et Abduljabbar Z. (1998).

Dans le cas de $\alpha = 0.25$ (tableau III.10), on remarque que $FAD_{max} = 1.123$ est pris à la position de la charge $x/L = 0.4484$. En revanche pour le deuxième cas $\alpha = 0.375$ tableau III.10, on remarque que $FAD_{max} = 1.575$ est pris à la position de la charge $x/L = 0.5457$, les mêmes résultats sont observées par Foda A. et Abduljabbar Z. (1998).

Tableau III-10 Facteur d'amplification dynamique.

	$\alpha = 0.25$		$\alpha = 0.375$	
	Analytique	(Foda A. et Abduljabbar Z., 1998)	Analytique	(Foda A. et Abduljabbar Z., 1998)
FAD_{max}	1.123	1.2497	1.575	1.5608
x/L	0.4484	0.4	0.5457	0.544

L'augmentation de la valeur de la vitesse de la charge mobile (le rapport de vitesse α) entraîne une augmentation de la flèche et du facteur d'amplification dynamique (tableau III.11).

Pour une variation du rapport de la vitesse de $\alpha = 0$ ($FAD_{max} = 1$) à la valeur $\alpha = 0.05$ ($FAD_{max} = 1.049$), cela présente une augmentation de l'amplification dynamique de 4.9%.

Une variation de $\alpha = 0.25$ à $\alpha = 0.375$ présente une augmentation de l'amplification dynamique égale à 24.9%.

Tableau III-11 Valeurs du FAD_{max} pour différentes valeurs de α.

α	FAD_{max}	x/L
0	1	0.5
0.05	1.052	0.4873
0.125	1.123	0.4484
0.25	1.261	0.4061
0.375	1.575	0.5457

III.2.3 Analyse des résultats

L'analyse basée sur le facteur d'amplification dynamique pour montrer l'effet de la variation de la vitesse sur le comportement dynamique de la poutre nous a permis de tirer les remarques suivantes :

1- L'augmentation de l'amplification dynamique : L'augmentation de α accroît l'amplification dynamique de la poutre. La vibration, pour tous les cas, tourne autour du cas statique, comme l'ont a également observé dans Foda A. et Abduljabbar Z. (1998).

2- L'augmentation en valeur de vitesse de la charge mobile (le rapport de vitesse α) entraîne directement une augmentation de la flèche et du facteur d'amplification dynamique.

Pour les rapports de la vitesse $\alpha = 0$, 0.05, 0.125, 0.25 et 0.375, les résultats sont très favorables car ils représentent les cas des petites vitesses et ils sont très proches à ceux de (Foda A. et Abduljabbar Z., 1998).

3- L'effet de l'inertie : Pour les cas où l'on prend en considération l'inertie de la charge mobile (la masse de la charge est comparable à celle de la poutre), l'augmentation de l'amplification dynamique est plus importante que pour le cas de la force mobile (lorsqu'on néglige l'inertie de la charge mobile) (Foda A. et Abduljabbar Z., 1998).

4- La comparaison des deux aspects (force ou masse mobile) montre que la réponse dynamique n'est pas comparable et surtout pour les cas des grandes vitesses. Lorsque le rapport des vitesses est petit $\alpha < 0.5$ et plus il diminue, les deux aspects se rapprochent et l'effet de l'inertie de la masse devient négligeable.

III.3 Poutre sollicitée par force harmonique mobile

Dans cet exemple nous allons étudier le comportement dynamique d'une poutre mince non amortie sur appuis simples, sous les sollicitations de forces mobiles (constantes et harmoniques) à vitesse constante (figure III.1).

$$y_j(t) = \frac{F}{2}\sqrt{\frac{2}{m_l \cdot L}}\left[\frac{\cos\left(\left(\Omega_f - \Omega_j\right)\cdot t\right) - \cos\left(\omega_j \cdot t\right)}{\omega_j^2 - \left(\Omega_f - \Omega_j\right)^2} - \frac{\cos\left(\left(\Omega_f + \Omega_j\right)\cdot t\right) - \cos\left(\omega_j \cdot t\right)}{\omega_j^2 - \left(\Omega_f + \Omega_j\right)^2}\right]$$

$F(t) = F\sin\left(\Omega_f t\right)$ et : $w_j(t) = \phi_j(t).y_j(t)$ avec $\Omega_j = \dfrac{j\pi v}{L}$.

$$w_j(t) = \frac{F}{m_l \cdot L}\left(\sin\frac{j\pi x}{L}\right)\left[\frac{\cos\left(\left(\Omega_f - \Omega_j\right)\cdot t\right) - \cos\left(\omega_j \cdot t\right)}{\omega_j^2 - \left(\Omega_f - \Omega_j\right)^2} - \frac{\cos\left(\left(\Omega_f + \Omega_j\right)\cdot t\right) - \cos\left(\omega_j \cdot t\right)}{\omega_j^2 - \left(\Omega_f + \Omega_j\right)^2}\right]$$

Les données utilisées dans cet exemple sont les mêmes de (Chang, D. et Lee, H., 1994) pour une poutre simplement appuyée comme suit :

$L = 25m$, $m_l = 1.192.10^3 kg/m$, $A = 2.384m^2$, $I = 2.222m^4$, $E = 2.5.10^{10} N/m^2$

$m_p = 149000kg$, $\alpha_m = m/m_p = 0.2$, $g = 9.81m/s^2$, $F = -m.g$ pour la force constante mobile et $\Omega_f = 50rad/s$ pour la force harmonique mobile.

III.3.1 Effet du modèle de la charge mobile par force constante ou harmonique

Les différentes vitesses de passage utilisées pour l'étude comparative sont : $V = 20$, 60 et $100m/s$. Les fréquences pour les quatre premiers modes de vibration, avec: $V = 20m/s$ et $\alpha_m = 0.2$ (α_m est le rapport entre la masse du véhicule et celle du pont) sont : $\omega 1 = 107.7\, rad/s$, $\omega 2 = 430.8\, rad/s$, $\omega 3 = 969.2\, rad/s$ et $\omega 4 = 1723.1\, rad/s$.

Les quatre premiers modes de vibration sont représentés sur la figure III.24.

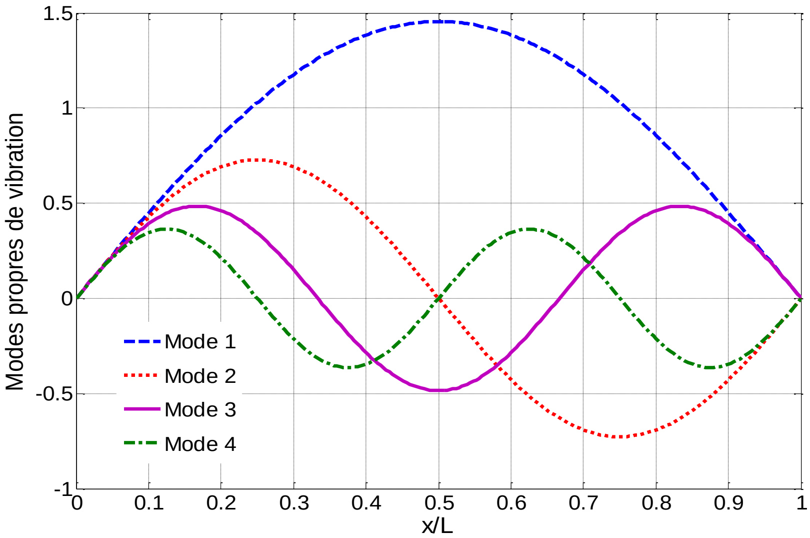


Figure III-24 Modes propres de vibrations pour $V = 20m/s$ et $\alpha_m = 0.2$.

Nous allons étudier plusieurs cas d'études présentés dans le tableau III.12.

Tableau III-12 Cas d'études pour la force harmonique.

	V (m/s)	T (s)	$F_{constante}$ (N)	$F_{harmonique} = f \cdot \sin(\Omega_f \cdot t)$	
				f (N)	$\Omega_f (rad/s)$
Cas 1	20	1.25	292338	1300	50
Cas 2	60	0.417	292338	1200	50
Cas 3	100	0.25	292338	1400	50

Le déplacement maximal pour la force harmonique et pour la force constante, qui donnent presque la même amplification pour les trois cas d'études : $V = 20$, 60 et $100 m/s$ est représenté sur les figures III.25, III.26 et III.27 respectivement.

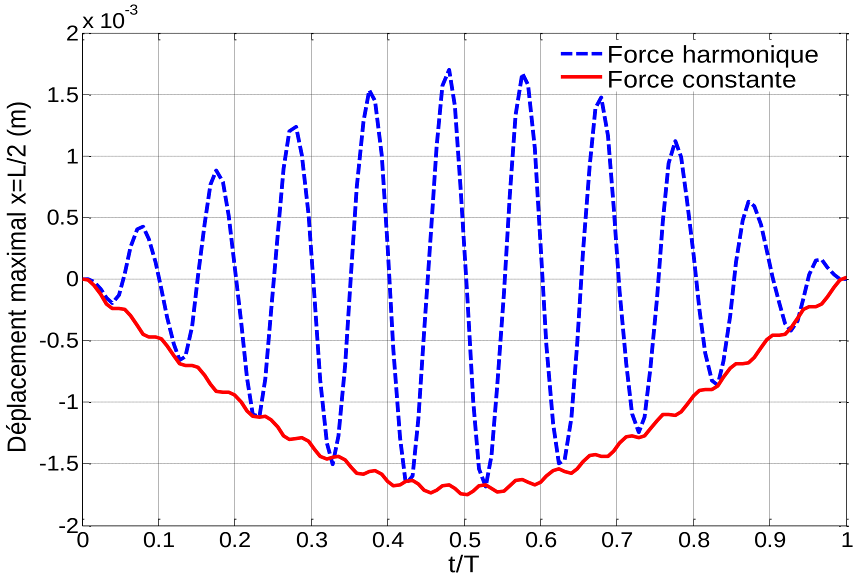


Figure III-25 Déplacement maximal pour le cas de la force constante et harmonique pour $V = 20 m/s$ et $\Omega_f = 50 rad/s$.

Pour le cas où $v = 20 m/s$ et $\Omega_f = 50 rad/s$ (Figure III.25), et pour une force constante de $F_{constante} = -292338 N$, nous avons atteint une force harmonique de $F_{harmonique} = f \sin(\Omega_f t)$ avec $f = -1300 N$ et $\Omega_f = 50 rad/s$, et pour obtenir la même amplification en termes de déplacement de la poutre.

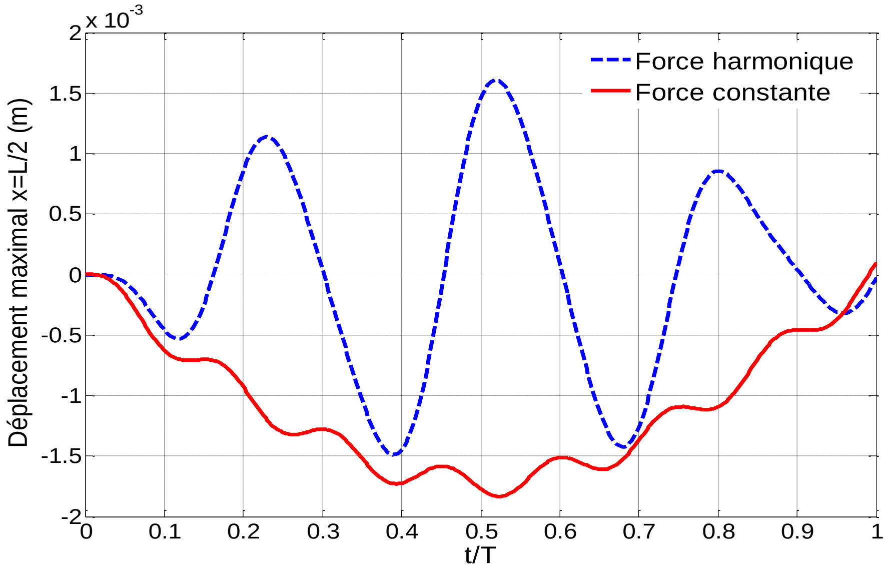


Figure III-26 Déplacement maximal pour le cas de la force constante et harmonique pour $V = 60 m/s$ et $\Omega_f = 50 rad/s$.

Pour le cas où $v = 60m/s$ et $\Omega_f = 50rad/s$: (Figure III.26) et pour une force constante de $F_{constante} = -292338N$, nous avons atteint une force harmonique de $F_{harmonique} = f\sin(\Omega_f t)$ avec $f = -1200N$ et $\Omega_f = 50rad/s$ pour obtenir le même déplacement maximal de la poutre.

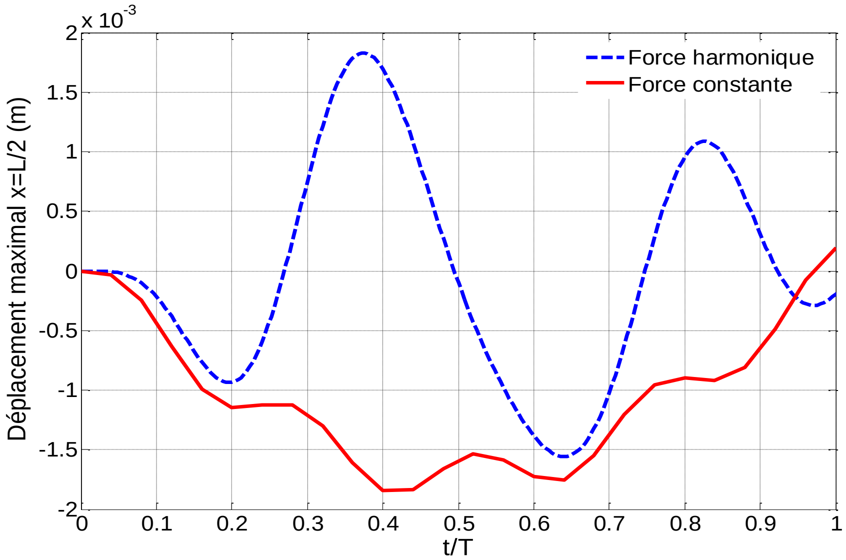


Figure III-27 Déplacement maximal pour le cas de la force constante et harmonique pour $V = 100m/s$ et $\Omega_f = 50rad/s$.

Pour le cas où $v = 100m/s$ et $\Omega_f = 50rad/s$: (Figure III.27) et pour une force constante de $F_{constante} = -292338N$, nous avons atteint une force harmonique de $F_{harmonique} = f\sin(\Omega_f t)$ avec $f = -1400N$ et $\Omega_f = 50rad/s$, ceci pour avoir presque le même comportement de la poutre.

Nous remarquons aussi que plus la vitesse de la charge augmente, plus le nombre d'ondulations augmente, que ce soit pour le modèle force constante ou harmonique, comme le montrent les figures III.25, III.26 et III.27.

III.3.2 Déplacement et FAD Pour le cas de la force constante mobile

Nous allons présenter une étude basée sur le facteur d'amplification dynamique. Les figures III.28 et III.29, montrent le déplacement à $x = L/2$ et le facteur d'amplification dynamique pour les données suivantes :

$\alpha_m = m/m_p = 29800/149000 = 0.2$, $F = -mg = -292.338kn$ et $m_l = 1.192.10^3 kg/m$.

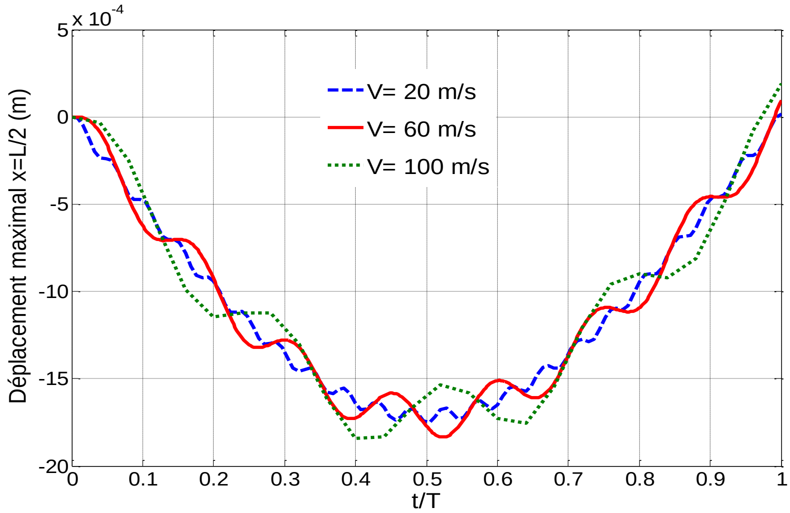


Figure III-28 Déplacement maximal pour la force constante avec $F = -292338N$.

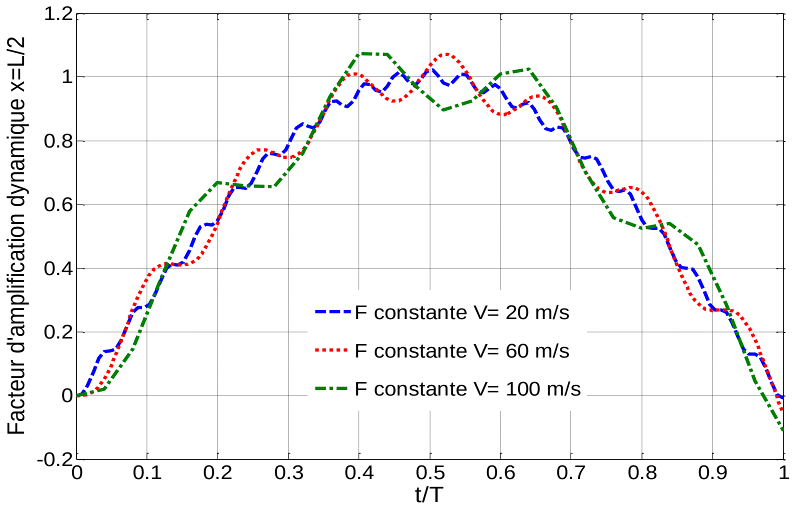


Figure III-29 Facteur d'amplification dynamique pour la force constante avec F=-292338N.

Pour le cas de la force constante mobile (Figure III.28), et pour un $\alpha_m = m/m_p = 0.2$, qui représente le rapport entre le poids du véhicule et celui de la poutre, le facteur d'amplification dynamique est représenté sur le tableau III.13.

Lorsque le modèle adopté pour la charge mobile est celui de la force harmonique, nous remarquons que la vitesse de la charge mobile n'a pas vraiment un effet remarquable ni en termes de déplacement figures III.28 et III.29, ni en termes d'amplification dynamique tableau III.13.

Tableau III-13 FAD pour différentes vitesses.

	$V\ (m/s)$	$T\ (s)$	FAD
Cas 1	20	1.25	1.022
Cas 2	60	0.417	1.07
Cas 3	100	0.25	1.074

III.3.3 Effet de l'amplitude de la force harmonique

Nous prenons le cas de la charge harmonique pour le paramètre $\Omega_f = 50 rad/s$ en variant l'amplitude pour voir son effet couplé à la vitesse de roulement sur la flèche dynamique,

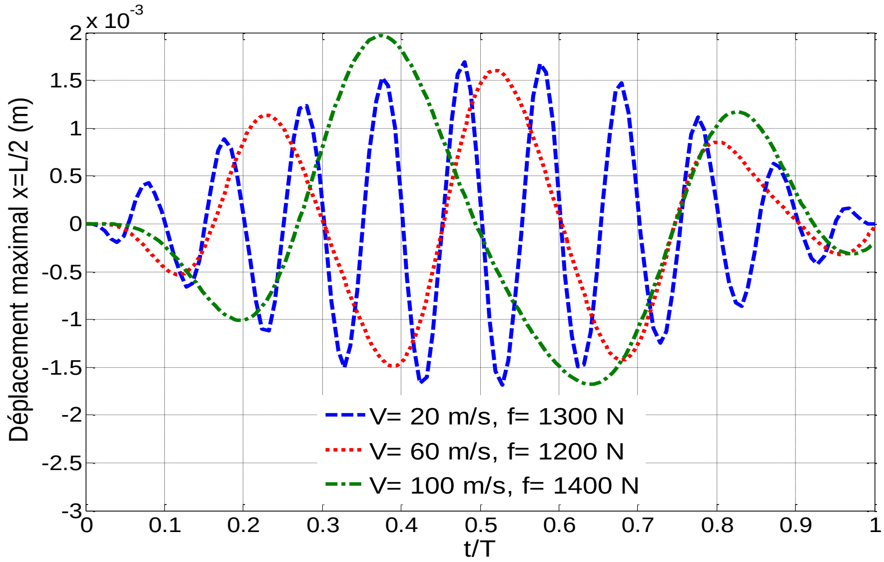


Figure III-30 Déplacement maximal pour la force harmonique avec $\Omega_f = 50 rad/s$.

L'augmentation de la vitesse diminue le nombre de cycles d'ondulation (figure II-31), surtout avec l'augmentation de la valeur de l'amplitude de la charge mobile (figure III.30).

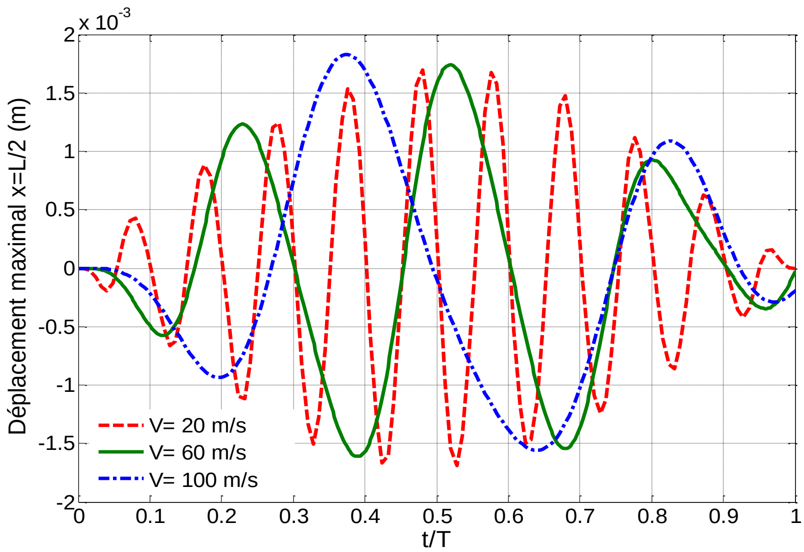


Figure III-31 La flèche dynamique pour la force harmonique avec $\Omega_f = 50 rad/s$ et

$$F = 1300N.$$

Dans les mêmes conditions et pour une vitesse constante, la variation de l'amplitude n'a aucun effet sur le nombre de cycles d'ondulation figure III.32.

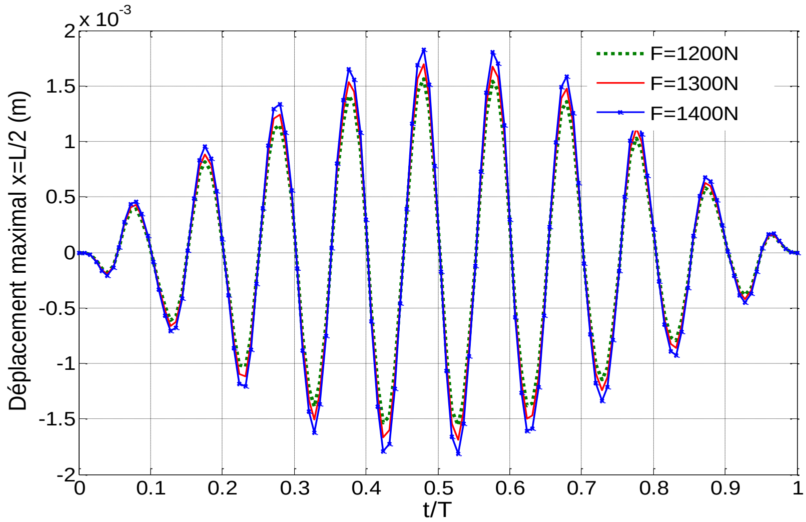


Figure III-32 La flèche dynamique pour la force harmonique avec $\Omega_f = 50 rad/s$ et $V = 20m/s$.

Nous remarquons aussi que la valeur de la flèche dynamique de la poutre sollicitée par une force harmonique augmente avec l'augmentation de la valeur de l'amplitude de la force harmonique f (Figure III.32).

III.3.4 Analyse des résultats

Nous remarquons, à partir des résultats obtenus par les deux modèles de la charge par force mobile constante ou harmonique, que plus la vitesse de la charge augmente, plus le nombre de cycles d'ondulation dans la vibration diminue, que ce soit pour le modèle de force constante ou harmonique.

La flèche de la poutre sollicitée par force harmonique mobile augmente en augmente avec l'augmentation de la valeur de l'amplitude de la force harmonique f.

Lorsque le modèle adopté pour la charge mobile est celui de la force harmonique, nous remarquons que la vitesse de la charge mobile n'a pas vraiment un effet remarquable, ni en termes de déplacement, ni en termes d'amplification dynamique.

les résultats montrent aussi que le facteur d'amplification dynamique augmente avec l'accroissement de la vitesse du passage du véhicule sur la poutre. Cette amplification est de 4.7% de la vitesse $V = 20m/s$ à la vitesse $V = 60m/s$, et de 0.4% de la vitesse $V = 60m/s$ à la vitesse $V = 100m/s$, et finalement de 5.1% de la vitesse $V = 20m/s$ à la vitesse $V = 100m/s$.

Nous avons remarqué qu'il existe un certain décalage du maximum de la flèche du milieu de la poutre, dû principalement à l'effet d'entraînement de la force par la vitesse. Même remarque constatée pour la charge constante mobile.

III.4 Poutre sollicitée par convoi de forces mobiles

Pour une poutre sous convoi de n_c forces identiques, on utilise le principe de superposition des solutions d'une seule force avec un décalage dans le temps pour obtenir la solution d'un convoi de n forces identiques. Pour des raisons de simplicité d'écriture, on omet l'indice j des modes. La poutre est considérée initialement au repos.

La solution à chaque instant t est présentée en chapitre 2 et est comme suit : (Henchi K., 1995)

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n_c} y^k + \beta^k$$

Tel que y^k représente la réponse forcée due à la force k. Elle est donnée par :

$$\sum_{k=1}^{n_c} y^k = \sum_{k=1}^{n_c} \frac{1}{\omega} \int_0^{t_k} F_k(t_k)\phi(\bar{x}_k)\sin(\omega(t_k - \tau))d\tau \text{ , } 0 \le \bar{x}_k = \bar{x}_1 - \sum_{l=1}^{k-1} a_l \le L$$

β^k Représente la réponse des vibrations libres due à la force k est donnée par:

$$\sum_{k=1}^{n_c} \beta^k = \sum_{k=1}^{n_c} y(\tau_k)\cos\omega(t_k - \tau_k) + \frac{\dot{y}(\tau_k)}{\omega_d}\sin\omega(t_k - \tau_k)$$

Avec : $\tau_k = \left(\sum_{l=1}^{k} a_{l-1} + L\right)/v$ et $\bar{x}_k = \bar{x}_1 - \sum_{l=1}^{k-1} a_l \ge L$

Donc la solution à chaque instant t est la somme des solutions $\sum_{k=1}^{n_c} y^k$ et $\sum_{k=1}^{n_c} \beta^k$.

Dans cet exemple, nous avons étudié la flèche dynamique au centre d'une poutre mince non amortie sur appuis simples et sollicitée par des convois de : une, deux (figure III.33) et trois forces (figure III.36) à vitesse constante, en variant l'espacement ' a ' entre ces forces.

Le calcul du FAD est réalisé par le calcul de la flèche statique sous l'effet de la résultante du convoi.

Les données utilisées dans cet exemple sont :

$L = 24.384\,m$, $m_l = 9.576.102\,kg/m$, $A = 0,594\,m^2$, $I = 2,95.10\text{-}3\,m^4$, $E = 19.10^{11}\,N/m^2$, ,

$g = 9.81 m/s^2$, $F = -m.g$ et $V = 22.35 m/s$.

III.4.1 Convoi de deux forces

Pour le cas du convoi de deux forces (figure III.33), le déplacement maximal statique est calculé comme suit : $u_{sta} = (\mathrm{F1} + F2) \cdot \mathrm{L}^3 / 48 \cdot EI$

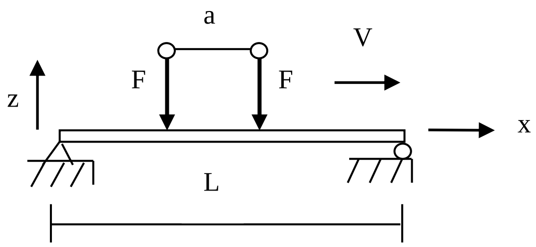


Figure III-33 Poutre sur appuis simples soumise à un convoi de deux forces mobiles.

Nous commençons par le comportement de la poutre pour un espacement entre les charges $a = L/2$.

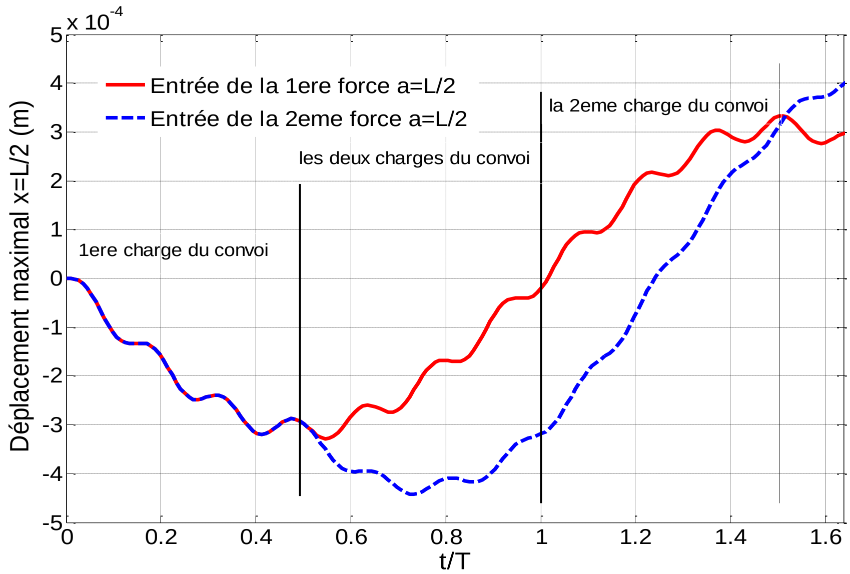


Figure III-34 Déplacement maximal de la poutre sollicitée par convoi de 2 forces pour $a = L/2$.

Le déplacement maximal de la poutre est présenté sur la figure III.34. Du temps $t = 0$ jusqu'au temps $t = T/2$, la poutre est soumise uniquement à la première charge du convoi.

Du temps $t = T/2$ au temps $t = T$, les deux charges sont sur la poutre.

Du temps $t = T$ au temps $t = 1.5.T$, la poutre est soumise uniquement à l'effet de la deuxième charge du convoi (sortie de la première charge).

Le facteur d'amplification dynamique figure III.35 est calculé à partir du déplacement (figure III.35) et suit les mêmes marges expliquées pour le déplacement.

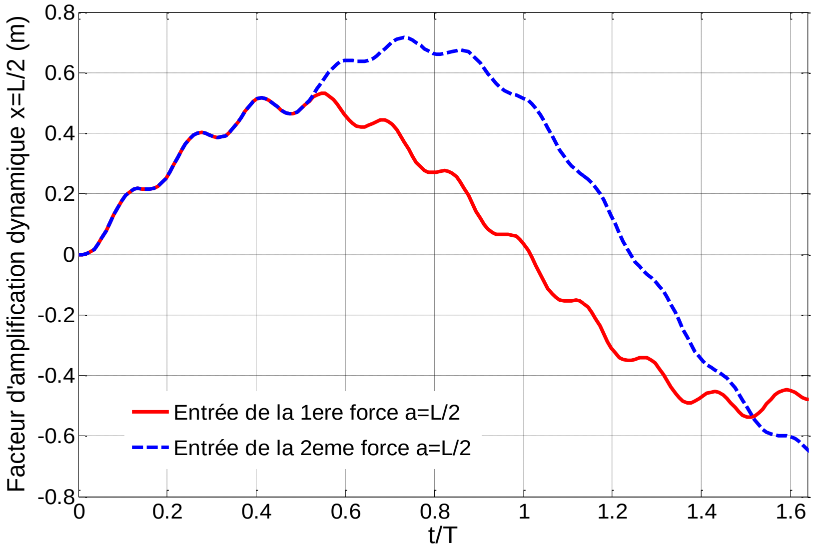


Figure III-35 Facteur d'amplification dynamique maximal de la poutre sollicitée par convoi de 2 forces pour $a = L/2$.

III.4.2 Convoi de 3 forces

Le même principe d'entrée et de sortie de charges selon l'espacement entres les charges expliqué pour le convoi de deux forces s'applique pour le convoi de trois forces (figure III.36).

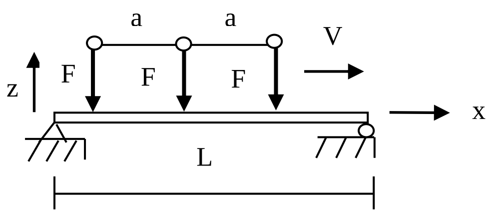


Figure III-36 Poutre sur appuis simples soumise à un convoi de trois forces.

Le déplacement maximal statique de la poutre sous l'effet d'un convoi de trois forces est calculé comme suit :

$u_{sta} = (\mathrm{F1} + \mathrm{F2} + \mathrm{F3}) \cdot \mathrm{L}^3 / 48 \cdot EI$.

Nous allons présenter quatre cas d'espacement des charges du convoi : $a = L/8$, $L/4$, $L/2$ et $1.03.L$.

III.4.2.1 Espacement a=L/8

Le déplacement maximal de la poutre pour $a = L/8$ est présenté sur la figure III.37 suivant le principe d'entrée et de sortie de charges expliqué pour le convoi de deux charges.

Pour cet espacement $a = L/8$, les trois charges peuvent être en même temps sur la poutre (figures III.37 et III.38).

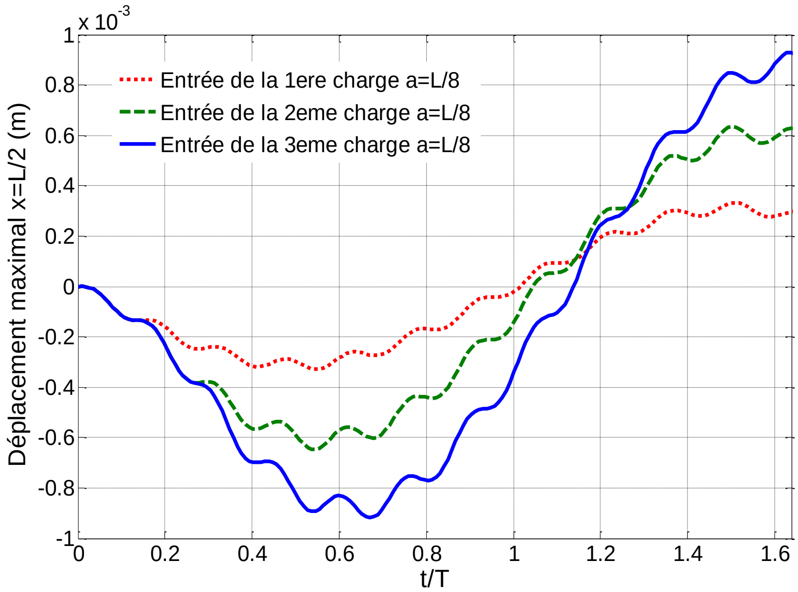


Figure III-37 Déplacement maximal de la poutre sollicitée par convoi de 3 forces pour $a = L/8$.

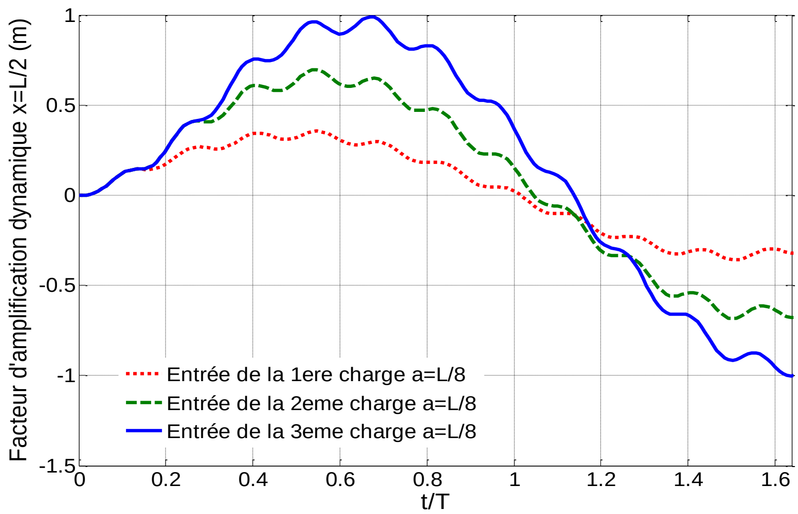


Figure III-38 Facteur d'amplification dynamique maximal de la poutre sollicitée par convoi de 3 forces pour $a = L/8$.

III.4.2.2 Espacement a=L/4

Le déplacement maximal et le facteur d'amplification dynamique de la poutre pour $a = L/4$ sont présentés sur la figure III.39 et III.40.

Les charges du convoi peuvent être aussi, pour cet espacement, en même temps sur la poutre (figure III.39).

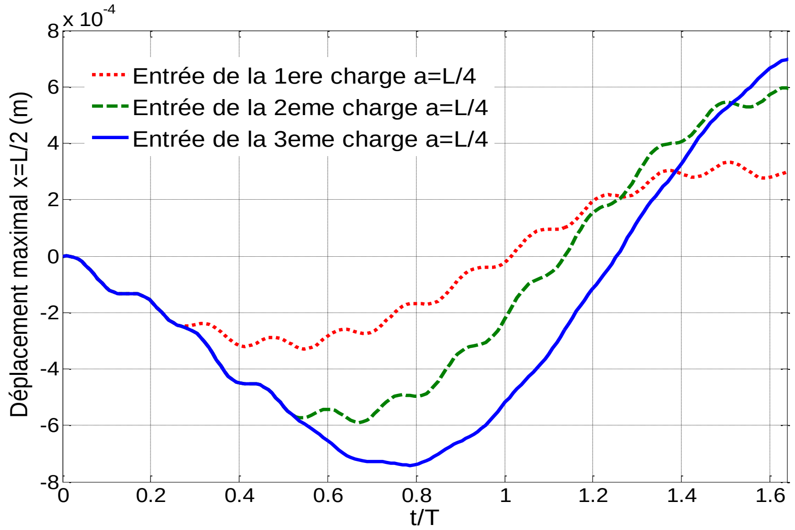


Figure III-39 Déplacement maximal de la poutre sollicitée par convoi de 3 forces pour $a = L/4$.

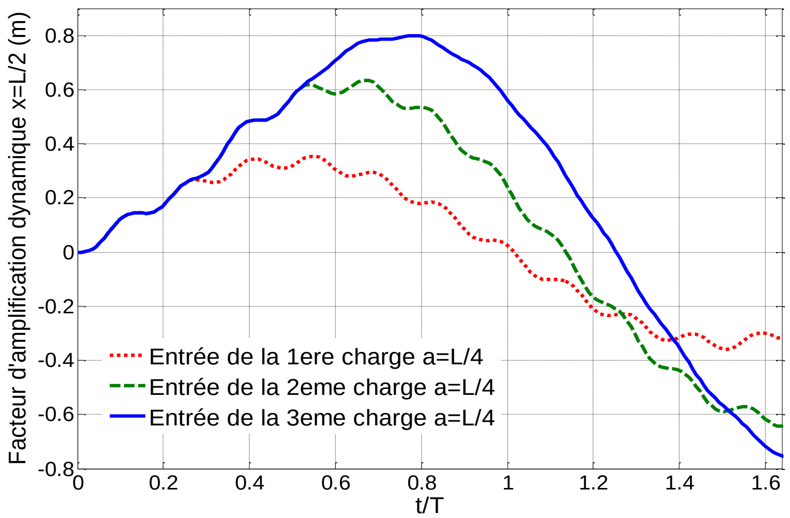


Figure III-40 Facteur d'amplification dynamique maximal de la poutre sollicitée par convoi de 3 forces pour $a = L/4$.

III.4.2.3 Espacement a=L/2

Le déplacement maximal de la poutre sous un convoi est conditionné par l'espacement entre les charges. Pour le cas de l'espacement $a = L/2$, la longueur de la poutre ne suffit pas pour recevoir les trois charges en même temps. Le déplacement maximal de la poutre avec temps d'entrée et desortie de charges est expliqué sur la figure III.41. Le facteur d'amplification dynamique qui résulte de la même pratique d'entrée ou de sortie de charge est représenté sur la figure III.42.

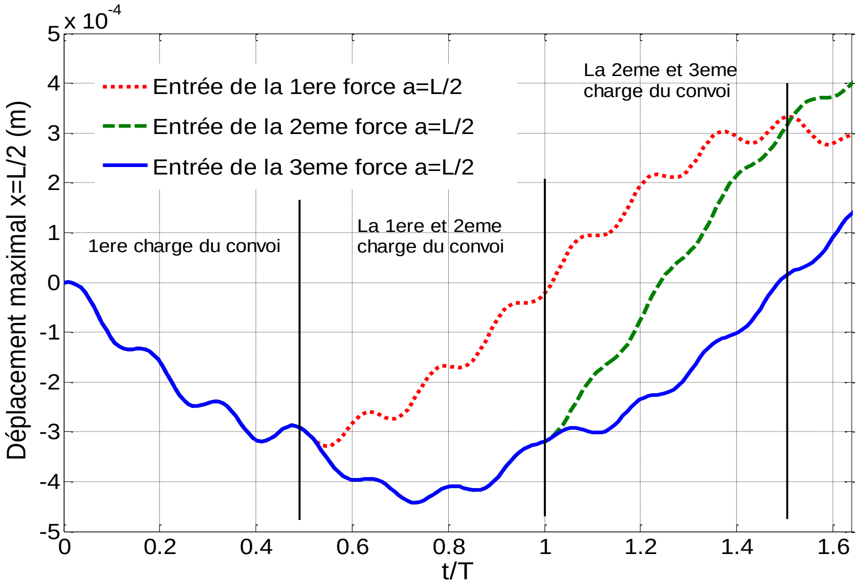


Figure III-41 Déplacement maximal de la poutre sollicitée par convoi de 3 forces pour $a = L/2$.

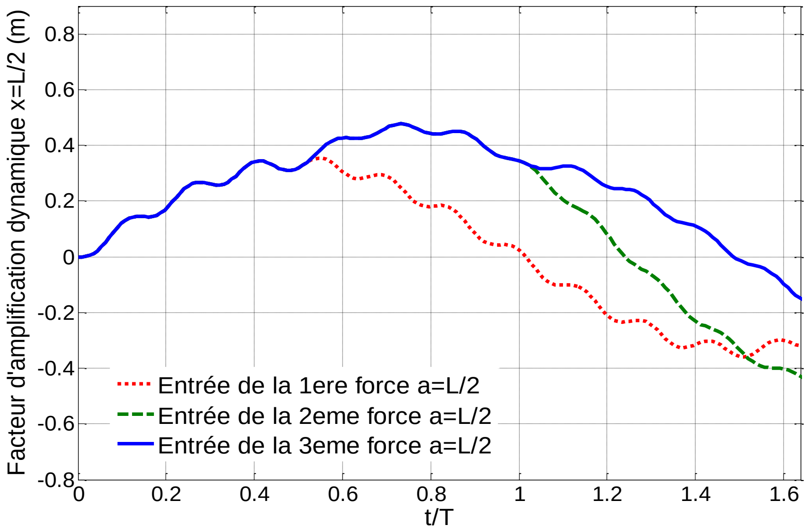


Figure III-42 Facteur d'amplification dynamique maximal de la poutre sollicitée par convoi de 3 forces pour $a = L/2$.

III.4.2.4 Espacement a=1.03.L

Poue cet epacement, les trois charges ne peuvent pas être en même temps sur la poutre, la figure III.43 montre l'évolution de la flèche de la poutre pour ce cas. La figure III.44 montre le facteur d'amplification dynamique pour le même cas.

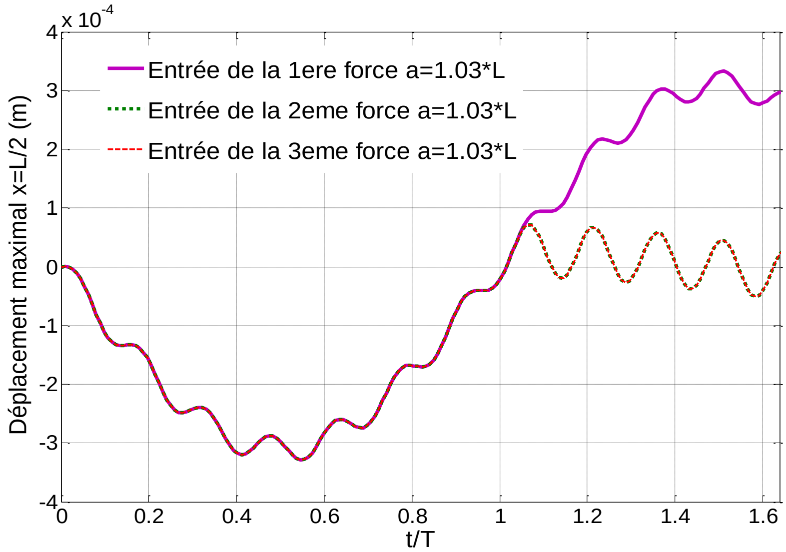


Figure III-43 La réponse dynamique maximale de la poutre sollicitée par convoi de 3 forces pour $a = 1.03.L$.

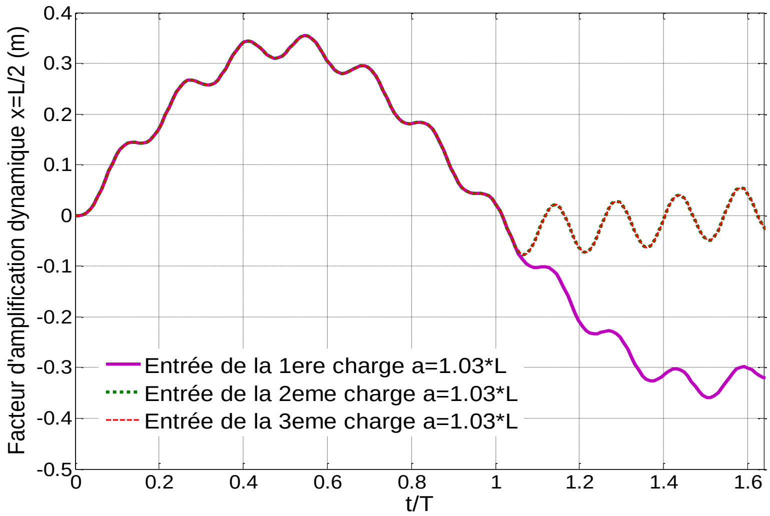


Figure III-44 Facteur d'amplification dynamique maximal de la poutre sollicitée par convoi de 3 forces pour $a = 1.03.L$.

III.4.3 Effet d'espacement « a » entre les charges du convoi sur le comportement de la poutre

Nous présentons dans cette partie l'effet de l'espacement entre les charges du convoi sur le comportement de la poutre, pour un convoi de 3 forces et pour différents cas d'espacement : $a = L/8$, $a = L/4$, $a = L/2$ et $a = 1.03.L$.

La figure III.45 illustre l'influence de l'espacement entre les forces d'un convoi mobile de vitesse constante sur le déplacement maximal de la poutre. L'augmentation de l'espacement entre les forces cause directement une amplification de la flèche dynamique et la valeur maximale est décalée de la position $L/2$.

On remarque que le déplacement augmente en diminuant l'espacement entre les forces du convoi (tableau III.14 et figure III.45). L'amplification en déplacement maximal du cas de $a = L/2$, est de 34.18 % par rapport à celui de d'espacement $a = L/2$ (cas identique d'une seule charge). Nous remarquons que le déplacement maximal diminue avec l'augmentation d'espacement entre les charges du convoi. Si cet espacement permet l'application de toutes les charges du convoi en même temps sur la poutre, le cas $a = 1.03.L$ revient au cas d'une seule charge, car l'espacement entre les charges ne permet que l'application d'une seule charge sur la poutre.

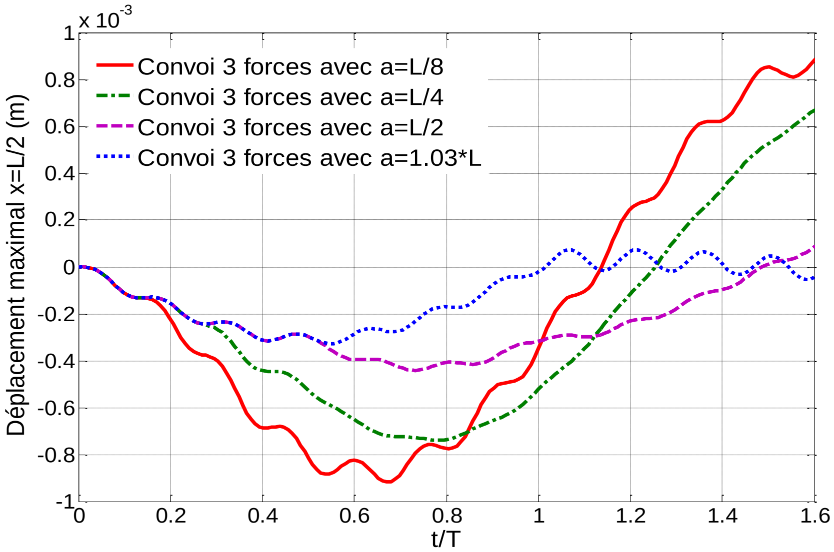


Figure III-45 Facteur d'amplification maximal de la poutre sollicitée par convoi de 3 forces pour $a = L/8$, $a = L/4$, $a = L/2$ et $a = 1.03.L$.

Tableau III-14 Déplacement maximal de la poutre pour le cas d'un convoi de trois forces pour différents espacements $a = L/8$, $a = L/4$, $a = L/2$ et $a = 1.03.L$.

	$a = L/8$	$a = L/4$	$a = L/2$	$a = 1.03.L$
Déplacement maximal (m)	0.0009176	0.0007392	0.0004412	0.0003288
période T (s)	0.6705	0.7778	0.7331	0.5453

L'effet d'espacement est le même que pour l'amplification dynamique : il diminue avec l'augmentation de l'espacement entre les charges (figures III.46 et III.47 et tableau III.15).

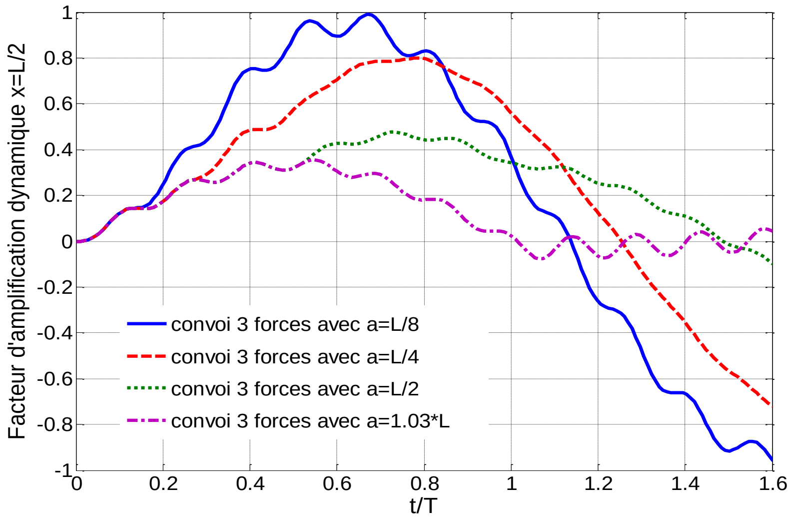


Figure III-46 Facteur d'amplification maximal de la poutre sollicitée par convoi de 3 forces pour $a = L/8$, $a = L/4$, $a = L/2$ et $a = 1.03.L$.

Tableau III-15 Facteur d'amplification dynamique maximal de la poutre pour le cas d'un convoi de trois forces pour différents espacements $a = L/8$, $a = L/4$, $a = L/2$ et $a = 1.03.L$.

	$a = L/8$	$a = L/4$	$a = L/2$	$a = 1.03.L$
FAD_{max}	0.9899	0.798	0.477	0.3546
période T (s)	0.6705	0.7957	0.7331	0.5453

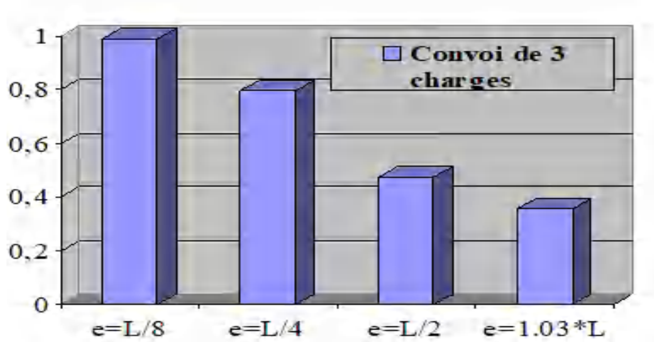


Figure III-47 Facteur d'amplification dynamique maximal de la poutre sollicitée par convoi de 3 forces pour $a = L/8$, $a = L/4$, $a = L/2$ et $a = 1.03.L$.

III.4.4 Effet du nombre de charges dans le convoi sur le comportement dynamique de la poutre

Nous étudions l'effet de nombre de charges dans le convoi sur le comportement de la poutre pour deux espacements $a = L/4$ et $a = L/2$ afin de montrer l'effet de la possibilité de la présence des deux ou trois charges sur la poutre. L'étude est faite pour le cas d'une, deux et trois charges dans le convoi.

III.4.4.1 Pour l'espacement a=L/4

L'espacement $a = L/4$ permet la présence des trois charges à la fois sur la poutre et le déplacement maximal augmente en augmentant le nombre de charges dans le convoi (figure III.48 et tableau III.16).

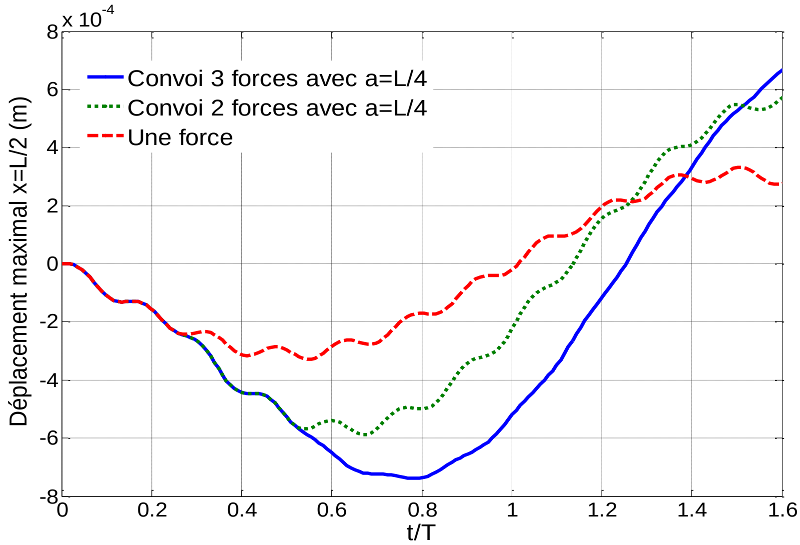


Figure III-48 Déplacement maximal de la poutre sollicitée par convoi d'une, deux et trois forces pour $a = L/4$.

Tableau III-16 Déplacement maximal de la poutre sollicitée par convoi d'une, deux et trois forces pour $a = L/4$.

	Une force	Convoi de deux forces	Convoi de trois forces
Déplacement maximal (m)	0.0003288	0.0005888	0.0007393
Période T (s)	0.9899	0.6705	0.7867

Le même effet est remarqué pour l'amplification dynamique (figure III-49). Elle diminue par l'augmentation du nombre de charges dans le convoi à condition que l'espacement permette la présence des trois charges à la fois sur la poutre, comme expliqué auparavant.

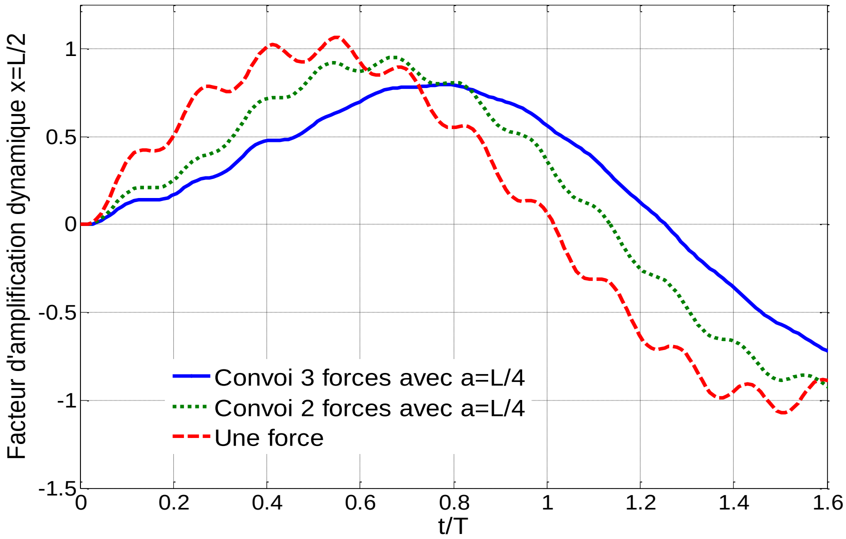


Figure III-49 Facteur d'amplification dynamique maximal de la poutre sollicitée par convoi d'une, deux et trois forces pour $a = L/4$.

Tableau III-17 Facteur d'amplification dynamique maximal de la poutre sollicitée par convoi d'une, deux et trois forces pour $a = L/4$.

	Une force	Convoi de deux forces	Convoi de trois forces
FAD_{max}	1.063	0.952	0.797
Période T (s)	0.5453	0.6705	0.7867

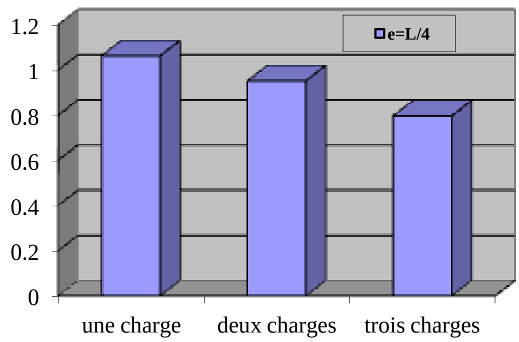


Figure III-50 Facteur d'amplification dynamique maximal de la poutre sollicitée par convoi d'une, deux et trois forces pour $a = L/4$.

III.4.4.2 Pour l'espacement a=L/2

L'espacement $a = L/2$ entre les charges du convoi, qu'il soit formé de deux ou trois charges, ne permet pas la présence des charges à la fois sur la poutre. Le déplacement maximal sous trois charges revient à celui de deux charges (figure III.51). Le déplacement maximal augmente en augmentant le nombre de charge dans le convoi, même pour ce cas d'espacement (les déplacements maximaux, des deux cas, deux et trois charges sont égaux).

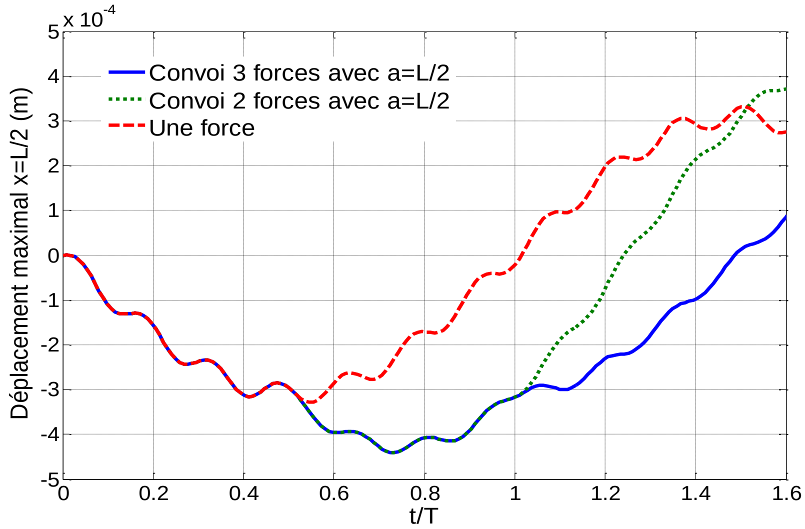


Figure III-51 Déplacement maximal de la poutre sollicitée par convoi de 3, 2 et une force pour $a = L/2$.

L'effet du nombre de charges dans le convoi est inversé sur l'amplification dynamique, qui diminue avec l'augmentation du nombre de charges dans le convoi (figure III.52). Cette diminution du facteur d'amplification dynamique est justifiée puisque une seule charge sur la poutre provoque un certain effet de poinçonnement. L'augmentation du nombre de charge dans le convoi provoque directement une diminution de cet effet, malgré l'augmentation de la valeur de la résultante due aux charges du convoi.

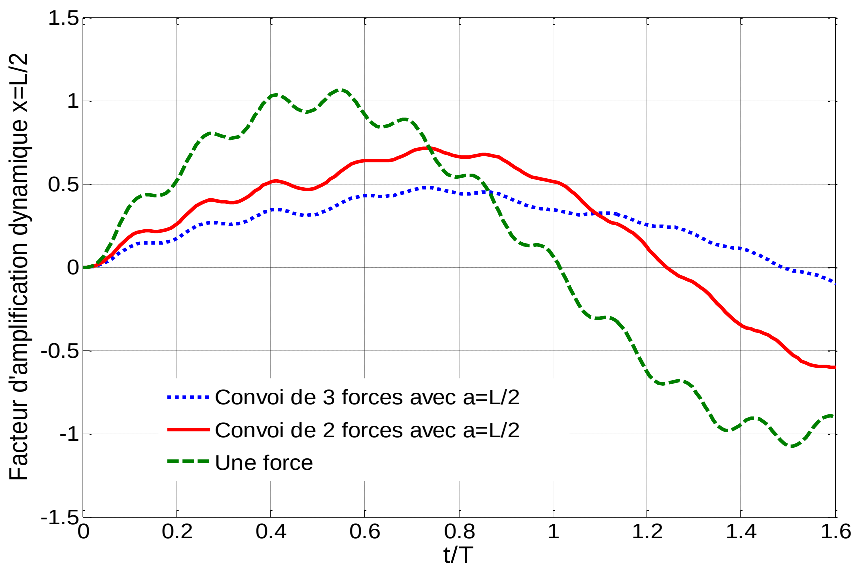


Figure III-52 La réponse dynamique (FAD) au centre de la poutre sollicitée par convoi de 3, 2 et une force pour $a = L/2$.

III.4.5 Analyse de résultats

La réponse de la poutre sollicitée par un convoi est obtenue par superposition des réponses des forces qui forment le convoi mais avec un décalage dans le temps.

Pour le cas d'un convoi de 3 forces et pour $a = L/2$, il est claire que pour un temps qui correspond à $t < a/v$, il n'y a que présence de la première force du convoi sur la poutre.

Après cette valeur $t < a/v$, la deuxième charge du convoi rentre jusqu'au temps $t < (a+a)/v$, après cette valeur, les trois forces du convoi agissent au même temps sur la poutre, le même principe de superposition de solution est appliqué pour les autres cas.

Si le nombre de forces dans le convoi augmente, cela provoque une amplification du déplacement maximal en raison de la valeur de la résultante des charges du convoi qui augmente. Nous remarquons aussi que le facteur d'amplification dynamique diminue en augmentant le nombre de charges dans le convoi, même remarque donnée par (Henchi K., 1995).

Nous n'avons pas pris en considération la vibration libre de la poutre due, en premier lieu, à la sortie de la première force du convoi (il reste les deux dernières forces), puis à la sortie des deux premières forces (il reste la troisième), et finalement la vibration libre due au convoi des trois forces après qu'ils quittent complètement la poutre.

III.4.5.1 Confrontation avec le travail de Henchi K. (1995)

Nous présentons dans le tableau III.18, les résultats de l'étude analytique et ceux du même cas tirés du travail de Henchi K. (1995).

Tableau III-18 Facteur d'amplification dynamique à $x = L/2$ pour un convoi de 3 forces pour $a = L/8$.

x/L	Déplacement maximal $x = L/2$	(Henchi K., 1995)
0	0	0
0.2	0.71	0.5
0.4	2.26	2.25
0.6	2.68	2.75
0.8	2.49	2.35
1	1.1	1.2
1.2	-0.78	-0.3
1.4	-2	0.25
1.6	-2.86	-0.25

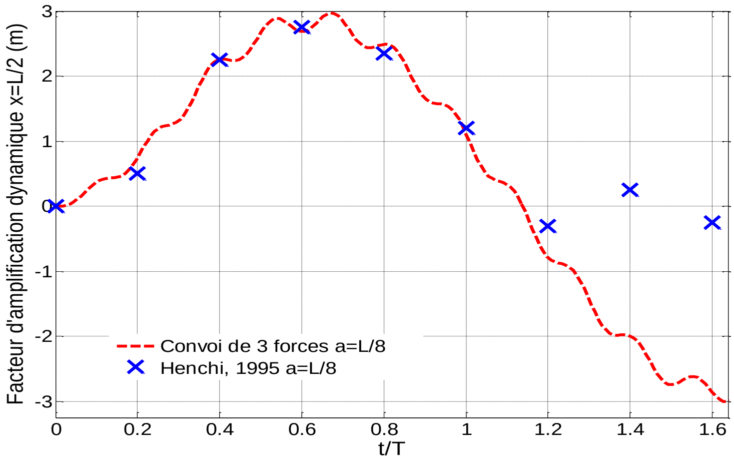


Figure III-53 Facteur d'amplification dynamique $x = L/2$ pour un convoi de 3 forces pour $a = L/8$.

Tableau III-19 Facteur d'amplification dynamique $x = L/2$ pour un convoi de 3 forces pour $a = L/4$.

x/L	Déplacement maximal $x = L/2$	(Henchi K., 1995)
0	0	0
0.2	0.5	0.5
0.4	1.35	1.46
0.6	1.8	2.11
0.8	2.6	2.4
1	1.6	1.68
1.2	0.9	0.39
1.4	0.25	-1.03
1.6	-0.2	-2.16

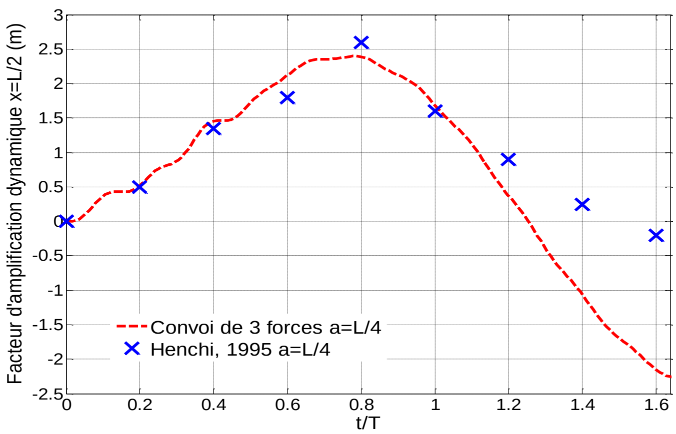


Figure III-54 Facteur d'amplification dynamique $x = L/2$ pour un convoi de 3 forces pour $a = L/4$.

Les résultats de cette étude sont très poches à ceux de (Henchi K., 1995) figure III.53 (tableau III.18) pour le cas du convoi de trois charges espacés de L/8 et figure III.54 (tableau III.19) pour le cas du convoi de trois charges espacés de $a = L/4$.

III.5 Application de la méthode des éléments finis

La discrétisation de la poutre idéalisant la structure pont en 10 éléments est présenté sur la figure III.55.

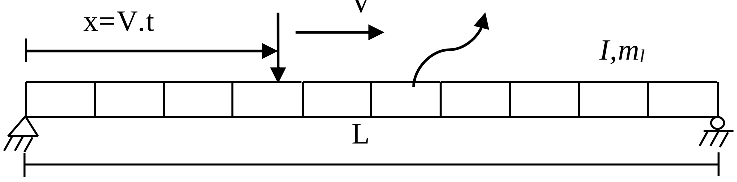


Figure III-55 Modélisation en éléments finis de la structure pont par une poutre Euler-Bernoulli sous l'effet d'une force mobile.

Nous considérons une seule travée du pont comme une poutre simplement appuyée (poutre d'Euler-Bernoulli) soumise à l'action d'une force mobile (résultante du chargement BC) et nous utilisons la résolution par la méthode des élément finis présenté en chapitre 2 en considérant les caractéristiques de la structure suivantes :

$L = 26.625\,\mathrm{m}$: qui est la longueur de poutre, $\mathrm{A} = 0.8 \times 2.23\mathrm{m}^2$: représente la section transversale uniforme, $\mathrm{E} = 36.10^6\, kn/m^2$: le module d'élasticité du béton, $\mathrm{I} = 0.7393\,\mathrm{m}^4$: le moment d'inertie, $\rho = 2.5\mathrm{kn/m}^3$: la masse volumique, $\mathrm{m_l} = 4.46.10^2\ \mathrm{kg/m}$: la masse de la poutre par unité de longueur et $\mathrm{F} = 300\mathrm{kn}$: La valeur de la force mobile.

Le programme en EF utilisé est écris en langage de Matlab développé par Serdar H., (2005).

III.5.1 Type de charges vis-à-vis des règlements (Les surcharges routières)

Plusieurs types de chargement qui sont définis par le D.T.R. Selon le fascicule 61 concernant cette étude, le chargement BC est celui pris en considération (figure III.56).

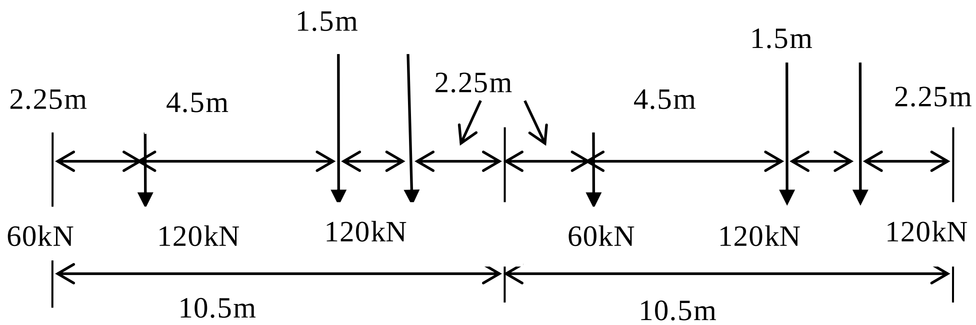


Figure III-56 Modèle convoi BC Longitudinale.

III.5.2 Etude de la modélisation de la charge mobile par résultante

Le système représenté sur la figure III.56 (Système BC) est modélisé par une charge unique représentant la somme des charges appliquées au centre de gravité du véhicule (figure III.57).

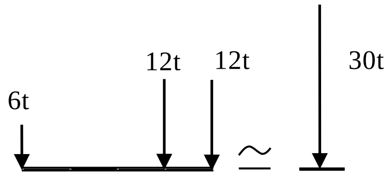


Figure III-57 Modélisation du véhicule BC par résultante.

III.5.3 Déplacement sur la poutre

Nous avons analysé différentes positions spatiales (figures III.58 et III.59) de la structure pour une vitesse de $V = 10 m/s$. Nous observons que l'amplitude de la réponse dynamique décroit quand la position spatiale du nœud est proche de l'appui (nœuds 2, 3, 9 et 10). Le déplacement transversal est maximal au centre de la poutre, au nœud 6. Pour cette raison, nous nous somme intéressés dès le début à l'étude du déplacement maximal à $x = L/2$.

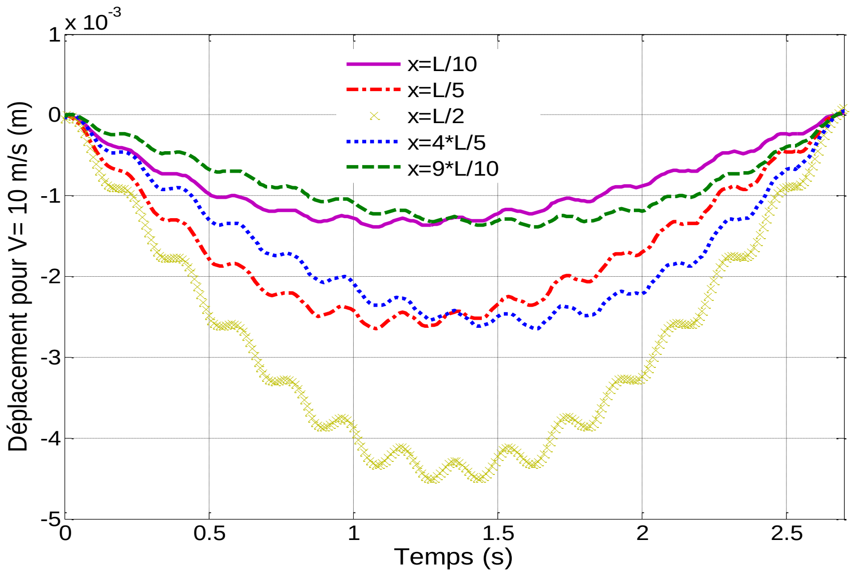


Figure III-58 Déplacement transversal par EF des nœuds 2, 3, 6, 9 et 10 pour la vitesse de $V = 10 m/s$.

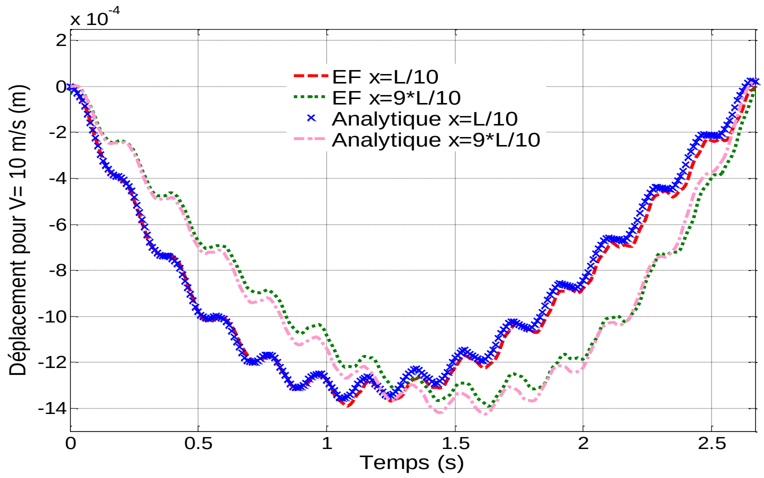


Figure III-59 Déplacements pour $x = L/10$ et $x = 9.L/10$.

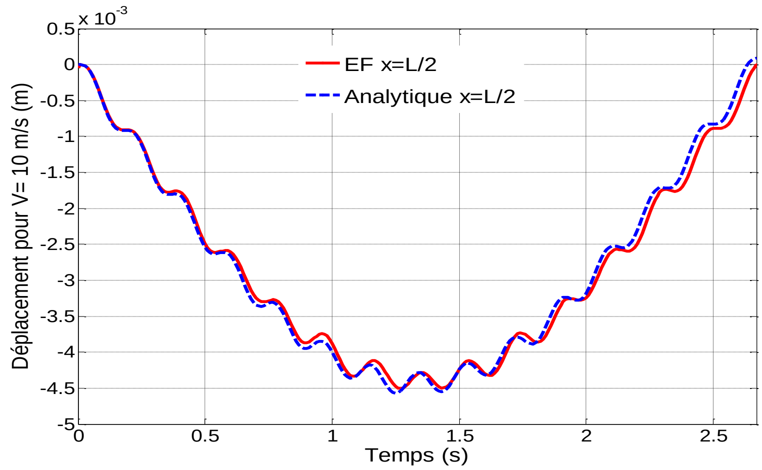


Figure III-60 Déplacement maximal $x = L/2$ par la méthode analytique et EF pour $V = 10 m/s$.

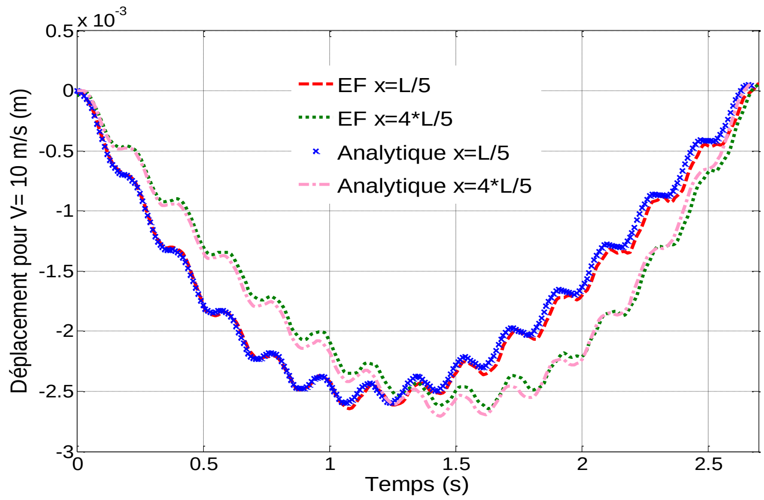


Figure III-61 Déplacements pour $x = L/5$ et $x = 4.L/5$ par la méthode analytique et EF pour $V = 10 m/s$.

Tableau III-20 Déplacement maximal en fonction de la position x de la force sur la poutre pour $V = 10 m/s$.

$x\ (m)$	EF	Analytique
$x = L/10$	0.001386	0.001353
$x = L/5$	0.002647	0.002597
$x = L/2$	0.004506	0.004566
$x = 4.L/5$	0.002645	0.002694
$x = 9.L/10$	0.00139	0.001422

La figure III.62 illustre la réponse dynamique de la structure de la poutre en fonction de différentes vitesses. Cette vibration est perpétuée car le système considéré n'est pas amortie et dépend aussi de la vitesse de la charge mobile.

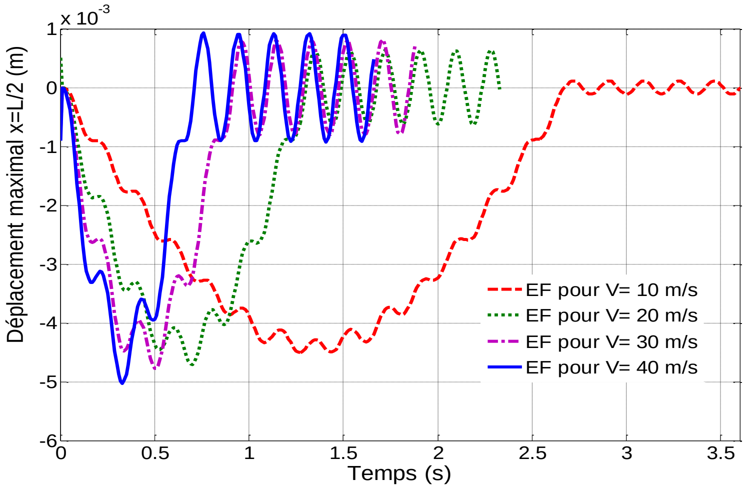


Figure III-62 Evolution de la réponse dynamique en EF au centre de la poutre pour $V = 10 m/s$, $20 m/s$, $30 m/s$ et $40 m/s$.

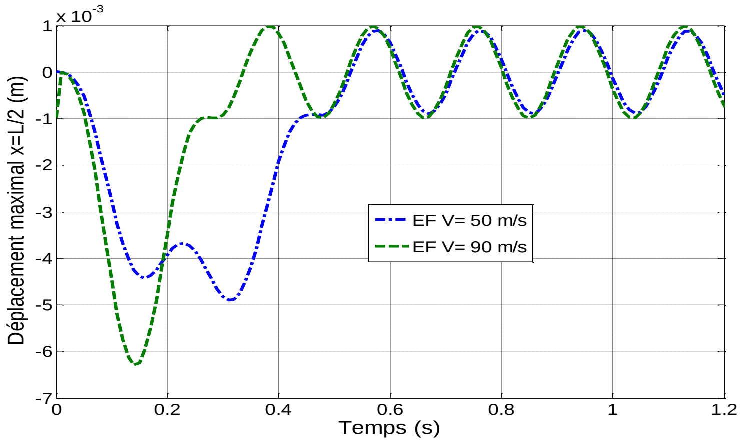


Figure III-63 Evolution de la réponse dynamique en EF au centre de la poutre pour $V = 50 m/s$ et $90 m/s$.

III.6 Etude du modèle réel en 3D

III.6.1 Présentation du modèle

Le pont route que nous allons modéliser est réalisé par l'agence national de l'autoroute Est-Ouest (lot unique Est O.A. 59.3, passage supérieur AU PK. 59+877.458, plan d'ensemble-tablier). Les données du pont sont les mêmes que celles prises dans (Messai O. et Guerda B., 2013). Le pont est de deux travées de 26.625 m, sa longueur totale est de 53,248 m, le tablier est en poutre multiples (7 poutres principales en BP), sa dalle a une largeur de 10,22 m et d'épaisseur de 0.20 m. La chaussée est constituée de deux voies de circulation chacune de largeur égale à 3,5 m, les appuis composés de deux culées et une pile (figures III.64, III.65 et III.66).

Avec :

$C1 = 0.175\text{m}$, $C2 = 0.50\text{m}$, et $C3 = 1.537\text{m}$ ce qui donne une largeur totale $\text{L} = 10.22m$.

$\text{B1} = 1\text{m}$, $\text{B2} = 0.55\text{m}$, $\text{B3} = 0.22\text{m}$, $\text{B4} = 0.15\text{m}$, $\text{D1} = 1.3\text{m}$, $\text{D2} = 0.11\text{m}$, $\text{D3} = 0.033\text{m}$, $\text{D4} = 0.1\text{m}$, $\text{D5} = 0.25\text{m}$ et $\text{D6} = 0.25\text{m}$.

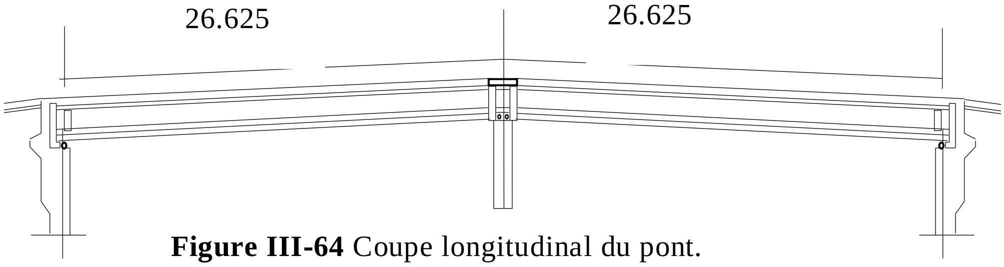


Figure III-64 Coupe longitudinal du pont.

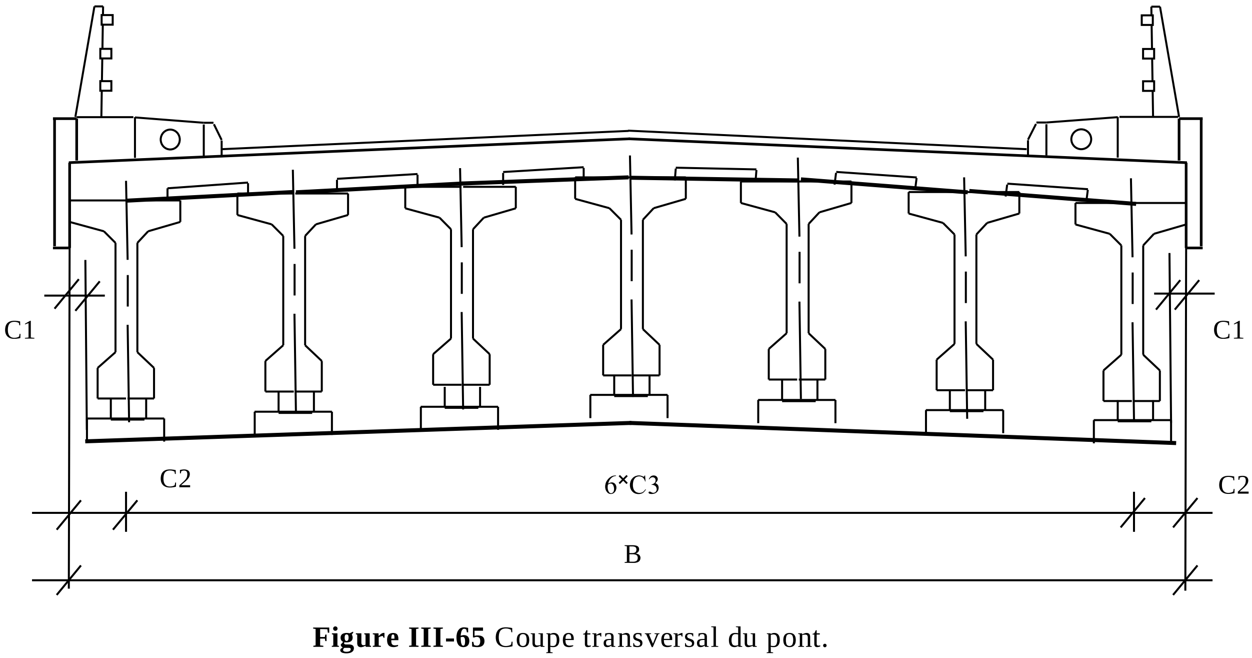


Figure III-65 Coupe transversal du pont.

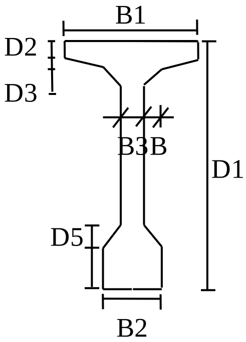


Figure III-66 Caractéristiques géométriques des poutres.

Concernant le béton, il est défini par la résistance à la compression à 28 jours notée F_{c28}.

Pour les culées et piles elle est de $27MPa$, pour la dalle et les poutres, elle est de $35MPa$, le poids volumique du béton armé est de $2.5kn/m^3$, le module d'Young instantané du béton est $E = 3.6 \cdot 10^7 kn/m^2$.

III.6.2 Présentation de l'enveloppe Min-Max sur le tablier

Nous allons utiliser la charge d'un camion Bc réel puis la modéliser par résultante sur l'axe du pont. Les résultats pour la charge résultante sont présentés sur la figure III.67 et pour Le camion BC sur la figure III.68.

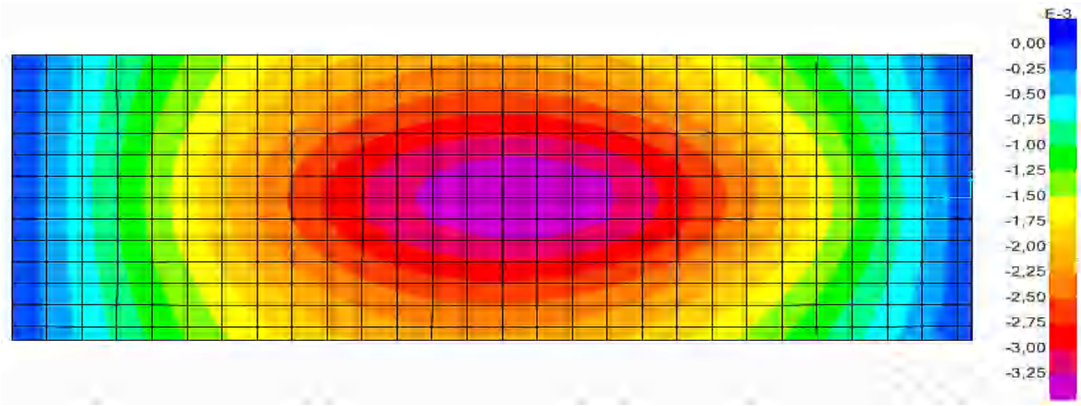


Figure III-67 Enveloppe (Min-Max) pour une charge résultante sur l'axe du pont.

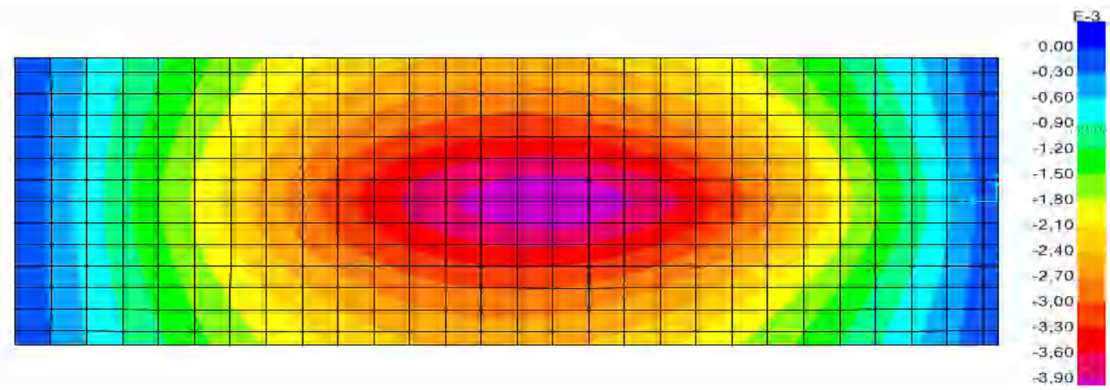


Figure III-68 Enveloppe (Min-Max) pour un camion BC réel sur l'axe du pont.

Comme illustré sur la figure III.68, l'effet sur le tablier du pont est plus important pour le cas d'une charge résultante que pour celui d'une charge répartie (camion BC) figure III.67.

III.6.3 Etude de l'effet de la position de la charge mobile sur le tablier (sur axe puis décaler à 2m)

Nous allons étudier deux positions de charges : la première directement sur axe du tablier et la deuxième décalée de 2 m. On remarque que l'effet dynamique est plus important lorsque la force est décalée de l'axe du pont, cet effet est plus remarquable avec l'augmentation de la vitesse (tableau III.21 et figure III.69).

Tableau III-21 Facteur d'amplification dynamique maximal pour le cas de la force resultante sur axe du pont et à 2 m de l'axe pour différentes vitesses.

v (m/s)	FAD pour F sur axe	FAD pour F à 2 m de l'axe	v (m/s)	FAD pour F sur axe	FAD pour F à 2 m de l'axe
5	1.00590406	1.00135554	110	1.33554736	1.63574748
10	1.01205412	1.00484121	120	1.31242312	1.69209915
20	1.06912669	1.04182804	130	1.29126691	1.70584818
30	1.10897909	1.0817196	140	1.28388684	1.73683191
40	1.04920049	1.08191325	150	1.30848708	1.7383811
50	1.10701107	1.06893881	160	1.25608856	1.71165763
60	1.19876999	1.20836561	170	1.25264453	1.69810225
70	1.28831488	1.36309063	180	1.23345633	1.67912471
80	1.30430504	1.47811774	190	1.18917589	1.66924864
90	1.31488315	1.54434547	200	1.18450185	1.64039504
100	1.32324723	1.58326878			

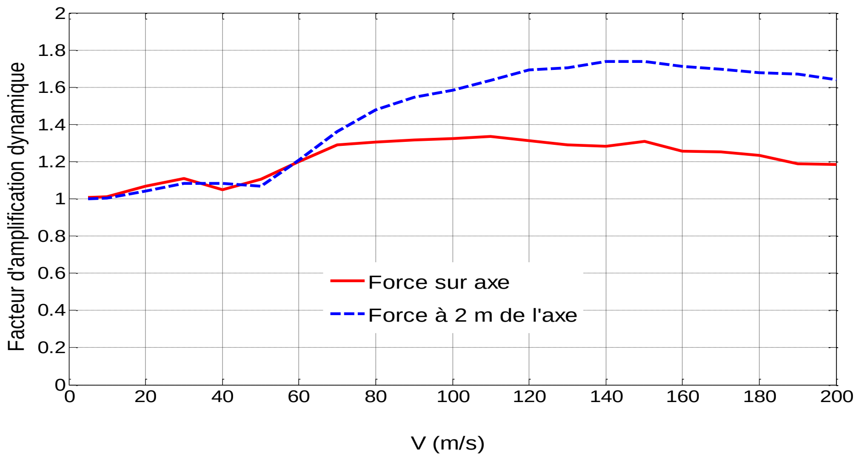


Figure III-69 Facteur d'amplification dynamique maximal pour le cas de la force resultante sur axe du pont et à 2 m de l'axe pour différentes vitesses.

III.6.4 Etude de l'effet du modèle de la charge mobile sur le comportement dynamique du pont

La modélisation de la source mobile est un paramètre très significatif qui influe sur la réponse dynamique de la structure pont. Pour cela, nous avons modélisé cette source réelle BC par une résultante.

On remarque que le déplacement pour le cas de la force résultante est plus important que celui de la charge BC. Nous remarquons aussi que l'amplitude maximale de la réponse des deux modèles est décalée par rapport au temps $T/2$ (figures III.70 et III.71).

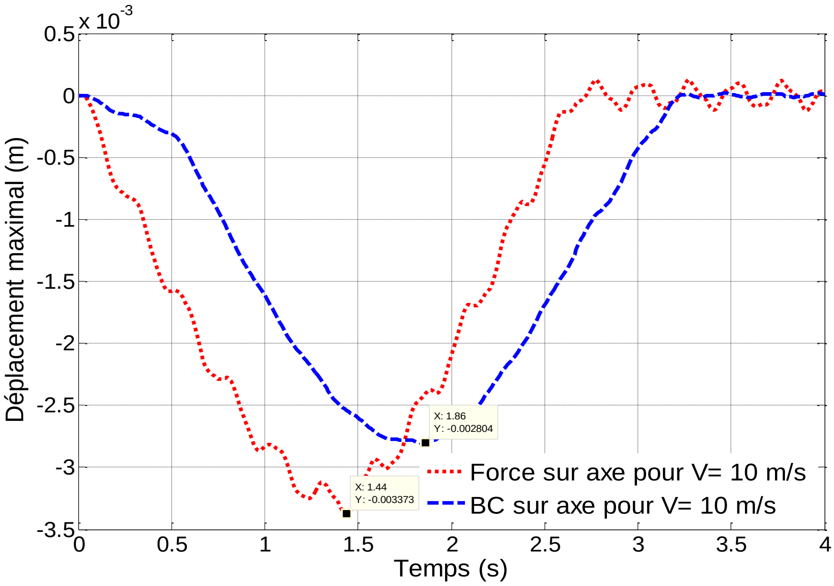


Figure III-70 Déplacement maximal pour les deux types de modélisation du chargement (résultante et BC) sur l'axe du pont $V = 10m/s$ m/s à $L/2$.

Tableau III-22 Déplacement maximal pour les deux types de modélisation du chargement (résultante et BC) sur l'axe du pont $V = 10m/s$.

	force	BC
Déplacement Maximal (m)	-0,003373	-0,002804
Temps t (s)	1.44	1.86

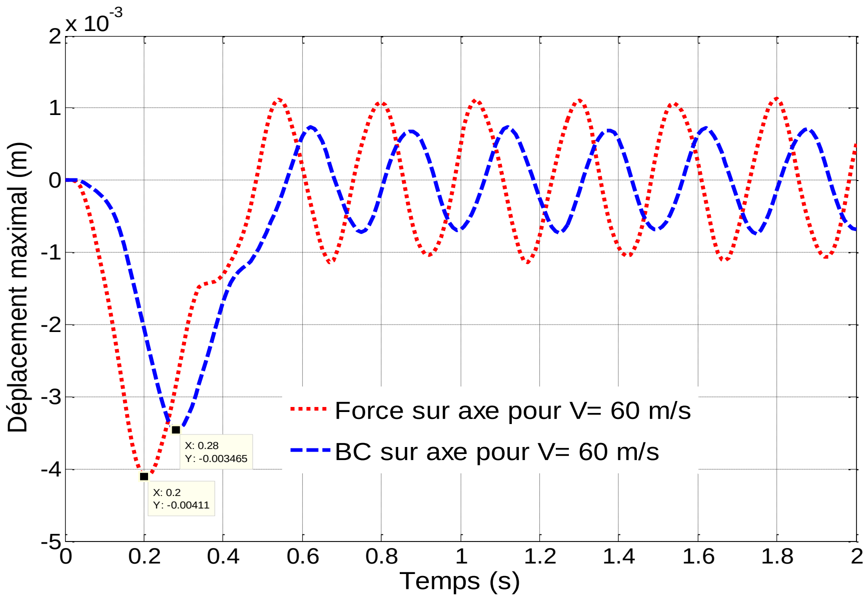


Figure III-71 Déplacement maximal pour les deux types de modélisation du chargement (résultante et BC) sur l'axe du pont $V = 60m/s$ à $L/2$.

Tableau III-23 Déplacement maximal pour les deux types de modélisation du chargement (résultante et BC) sur l'axe du pont $V = 60m/s$.

	force	BC
Déplacement Maximal (m)	-0,00411	-0,003465
Temps t (s)	0.2	0.28

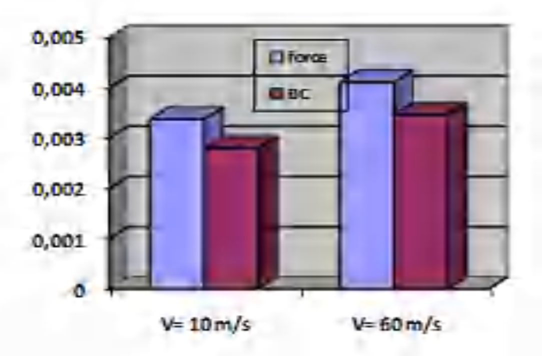


Figure III-72 Déplacement maximal pour les deux types de modélisation du chargement (résultante et BC) sur l'axe du pont pour $V = 10m/s$ et $V = 60m/s$.

Nous remarquons que l'augmentation de la vitesse de la charge mobile pour les deux types de modélisation par résultante ou par charge BC provoque une augmentation du déplacement et aussi une augmentation du décalage entre les résultats des deux modèles (tableaux III.22 et III.23 et la figure III.72).

III.6.5 Etude de l'effet de la position de la charge mobile par rapport à l'axe sur le comportement dynamique du pont

III.6.5.1 Cas de la force mobile

Les figures III.73 et III.74 présentent les déplacements pour les deux types de modélisation de la charge mobile par résultante et par charge BC pour deux positions sur le pont : la première sur l'axe du pont puis décalée à 2 m de l'axe, pour deux vitesses : $V = 10m/s$ et $V = 20m/s$.

Pour le cas de la charge résultante, la position qui donne un déplacement maximal minimal est celle sur l'axe du pont, le décalage de 2 m de l'axe donne un déplacement maximal plus important. Le déplacement maximal augmente avec l'accroissement de la vitesse de roulement (figures III.73 et III.74).

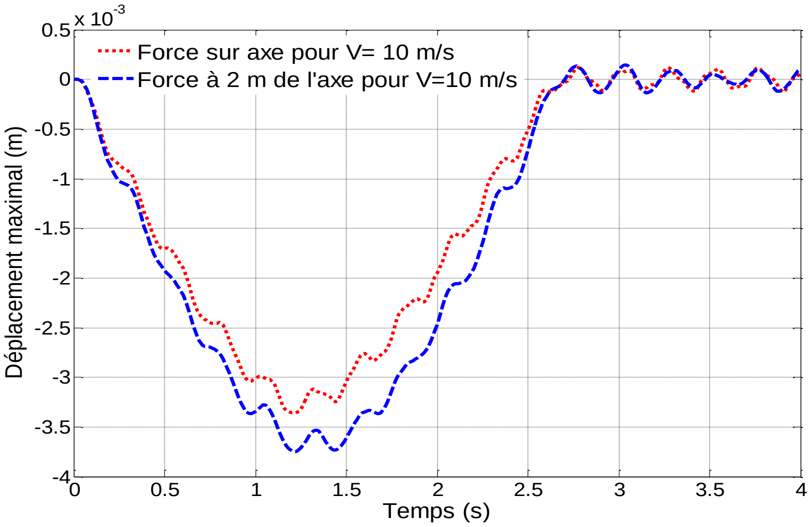


Figure III-73 Déplacement maximal pour le modèle de la force mobile sur axe du pont puis à 2 m de l'axe pour $V = 10m/s$ à $L/2$.

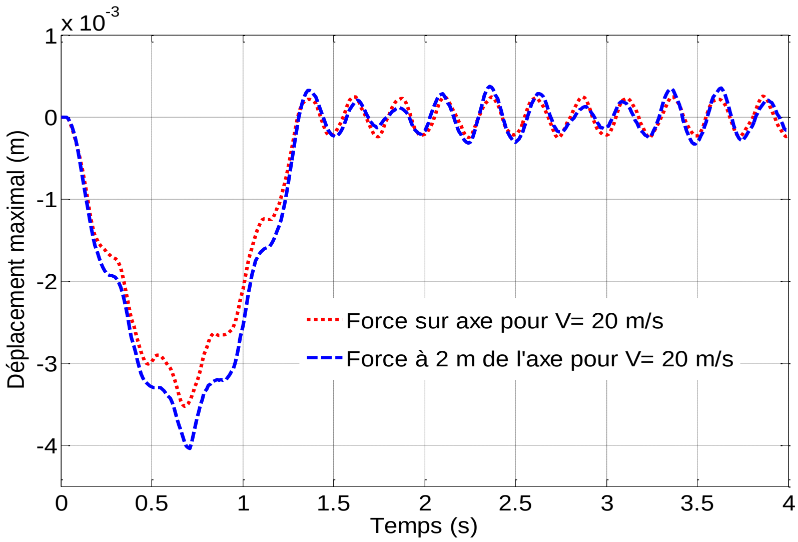


Figure III-74 Déplacement maximal pour le modèle de la force mobile sur axe du pont puis à 2 m de l'axe pour $V = 20m/s$ à $L/2$.

III.6.5.2 Cas de la charge BC mobile

Nous confirmons que lorsque les charges mobiles sont décalées de l'axe du pont, cela induit une augmentation des déplacements correspondants en les comparant avec le cas des charges sur axe du pont (figures III.73 et III.74 pour la charge résultante et figures III.75 et III.76 pour la charge BC). Cela est dû principalement aux bords libre des deux cotés du pont, et à la diminution des rigidités en s'éloignant de l'axe du pont.

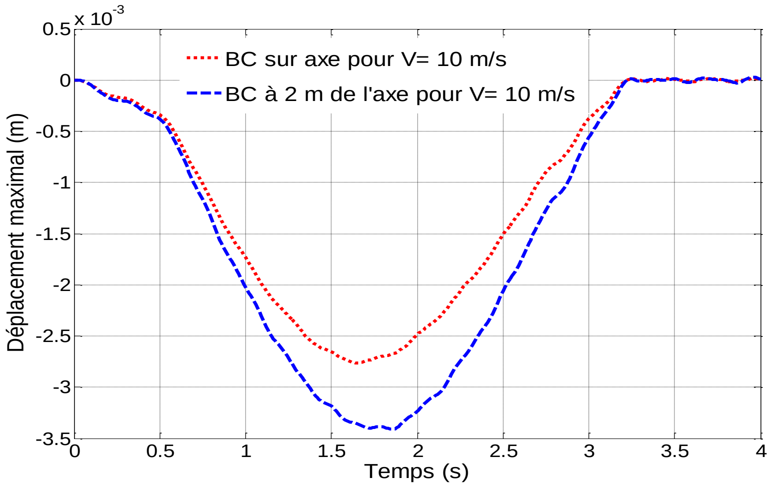


Figure III-75 Déplacement maximal pour le modèle BC sur axe du pont puis à 2 m de l'axe pour $V = 10m/s$ à $L/2$.

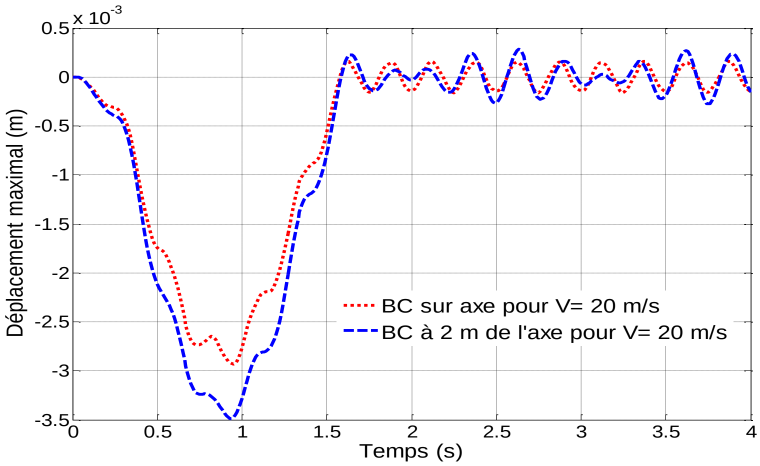


Figure III-76 Déplacement maximal pour le modèle BC sur axe du pont puis à 2 m de l'axe pour $V = 20m/s$ à $L/2$.

III.6.5.3 Effet de la position par rapport à l'axe sur le comportement dynamique du pont

L'effet de la position par rapport à l'axe est mieux représenté sur le tableau III.24 et la figure III.77 en ce qui concerne le modèle de la charge résultante et sur le tableau III.25 et la figure III.78 pour le cas du chargement BC pour les deux vitesses de roulement de $10m/s$ et $20m/s$.

Tableau III-24 Déplacement maximal pour une force mobile sur axe du pont puis à 2 m de l'axe pour $V = 10m/s$ et $V = 20m/s$.

	BC sur axe du pont		BC à 2 m de l'axe du pont	
	$dep_{max}(m)$	$t(s)$	$dep_{max}(m)$	$t(s)$
$V = 10m/s$	-0,003353	1.23	-0,003751	1.22
$V = 20m/s$	-0,003524	0.68	0,004042	0.71

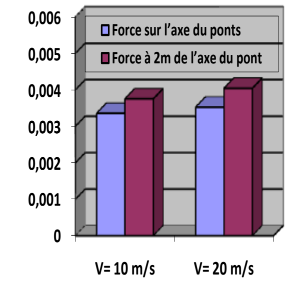


Figure III-77 Déplacement maximal pour force mobile sur l'axe du pont puis à 2 m de l'axe pour $V = 10m/s$ et $V = 20m/s$.

Tableau III-25 Déplacement maximal pour la charge BC sur l'axe du pont puis à 2 m de l'axe pour $V = 10m/s$ m/s et $V = 20m/s$.

	BC sur axe du pont		BC à 2 m de l'axe du pont	
	$dep_{max}(m)$	$t(s)$	$dep_{max}(m)$	$t(s)$
$V = 10m/s$	-0,002764	1.65	-0,003399	1.73
$V = 20m/s$	-0,002929	0.95	-0,003487	0.94

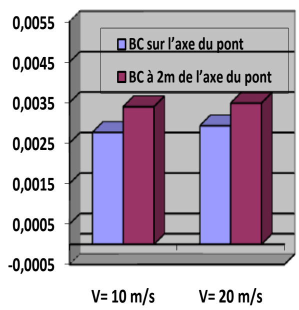


Figure III-78 Déplacement maximal pour la charge BC sur l'axe du pont puis à 2 m de l'axe pour $V = 10m/s$ et $V = 20m/s$.

III.6.5.4 Etude de l'effet de la vitesse de la charge mobile sur le comportement dynamique du pont

En augmentant la vitesse de la charge mobile, on remarque une augmentation de l'amplitude de la réponse dynamique et cela pour la vibration forcée et pour la vibration libre (après la sortie des charges) (figure III.79).

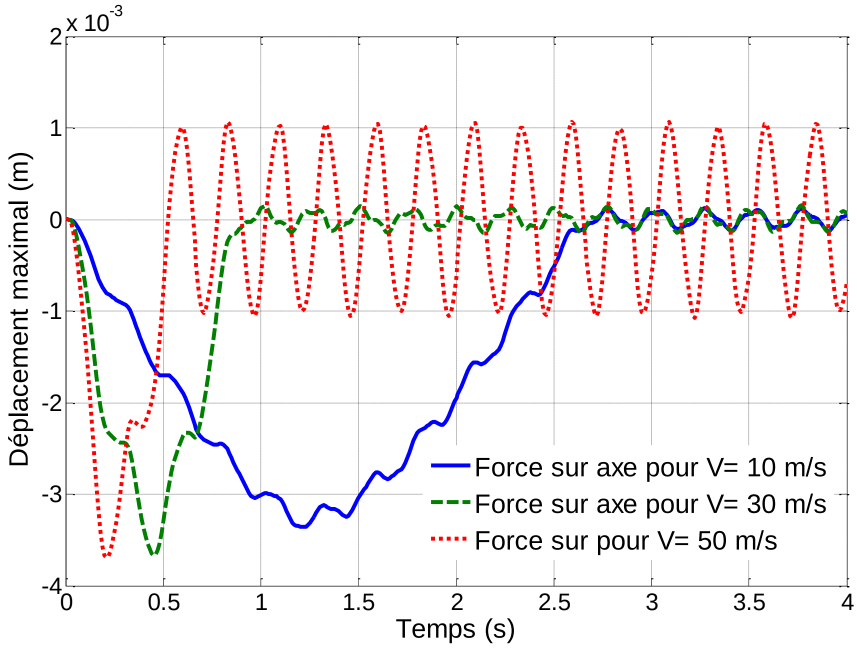


Figure III-79 Déplacement pour le modèle de la force mobile sur axe du pont pour $V = 10m/s$, $V = 30m/s$ et $V = 50m/s$ à $L/2$.

III.6.5.5 Etude du comportement dynamique du pont sous convoi de deux charges mobiles

la théorie de calcul des déplacements sur la structure du pont lors du passage d'un convoi de charges avec une vitesse constante $10m/s$ se fait par la superposition des déplacements induits par chaque charge du convoi séparément, mais en respectant le temps d'entrée et de sortie de chaque charge sur le pont. Cela est bien expliqué sur la figure III.80. Nous avons le déplacement maximal induit par la première charge du convoi qui rentre sur le pont au temps $t = 0$, puis le déplacement maximal du pont mais , cette fois sous le passage d'une seule charge, après un décalage dans le temps de 1.33 s qui correspond à une distance de $L/2$ (espacement entre les deux charges). En superposant les deux déplacements, on obtient le deplacement maximal du pont sous l'effet de passage d'un convoi de deux charges espacées de $e = L/2$ figure III.80.

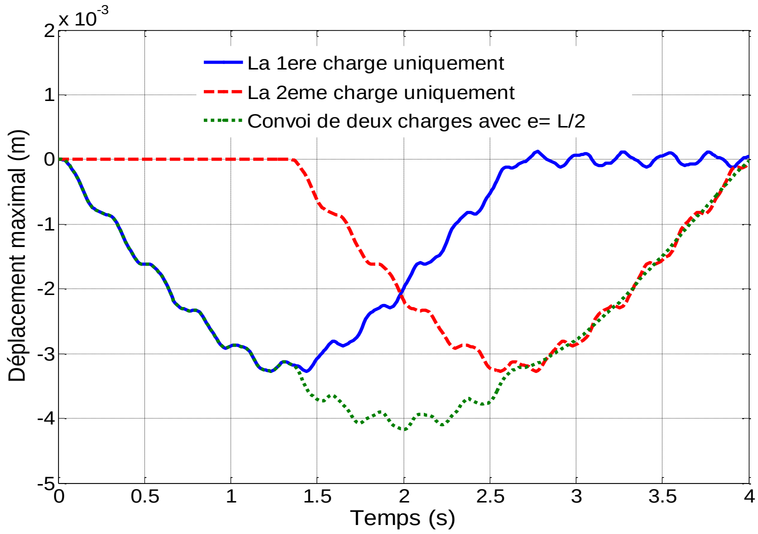


Figure III-80 Déplacement maximal du pont pour un espacement entre les deux forces du convoi $e = L/2$ et pour $V = 10m/s$.

Comme dans le cas de l'étude analytique, les deux charges du convoi peuvent être appliquées au même temps sur le pont selon l'espacement entre les charges. Les mêmes remarques concernant le déplacement maximal, ce qui signifie qu'en diminuant l'espacement entre les charges du convoi, cela provoque une augmentation du déplacement maximal figure III.81.

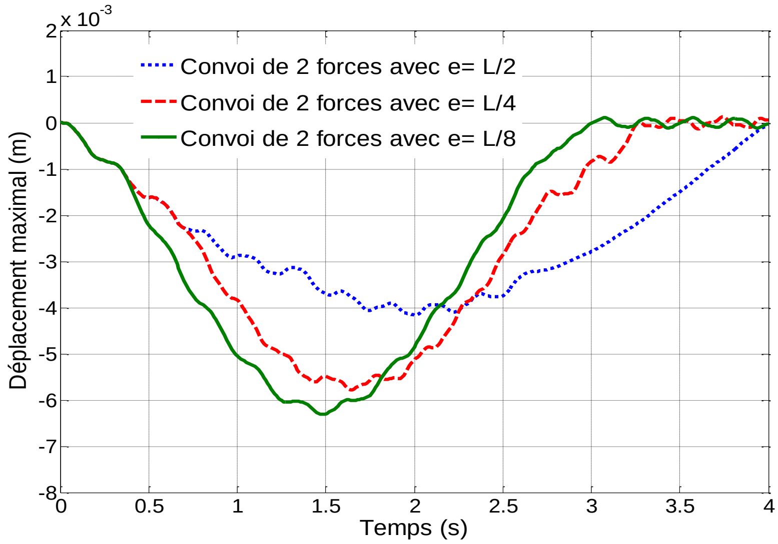


Figure III-81 Déplacement maximal du pont pour un espacement entre les deux forces du convoi $e = L/2$, $e = L/4$ et $e = L/8$ et pour $V = 10m/s$.

Concernant l'espacement e= L entre les charges d'un convoi formé de deux forces mobiles (figure III.82), le comportement est identique à celui d'une charge mais répété en un temps double, qui est le temps nécessaire pour le passage d'une seule charge sur le pont $t = 2.T$. Avec $T = L/V$ lors de la sortie de la première charge, la deuxième charge du convoi est sur le pont.

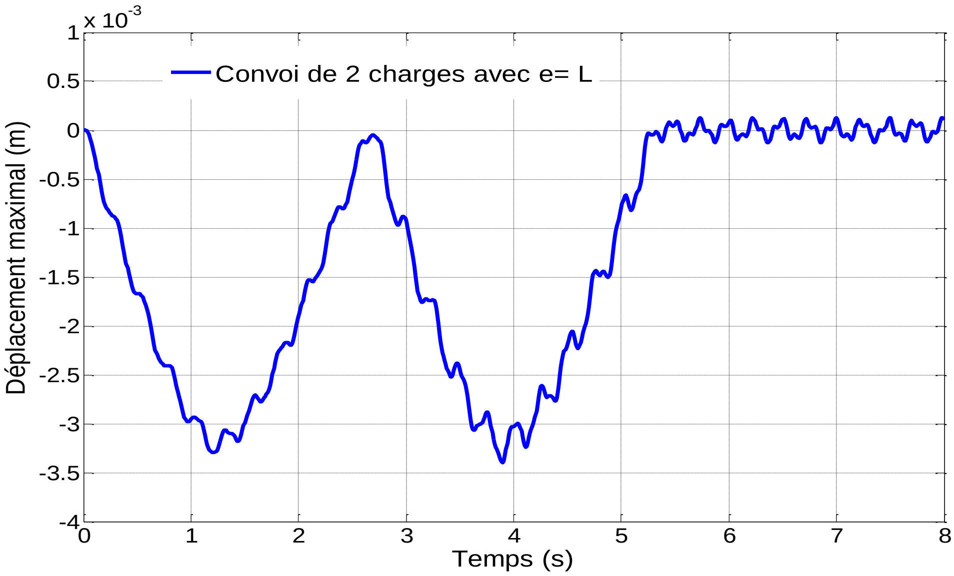


Figure III-82 Déplacement maximal du pont pour un espacement entre les deux forces du convoi $e = L$ et pour $V = 10m/s$.

III.7 Comparaison des trois modèles : analytique, EF et réel en 3D

Le passage du modèle réel (tablier du pont en deux dimensions) au modèle poutre unidimensionnel est déjà expliqué auparavant.

III.7.1 Modèle analytique et EF

Nous représentons sur la figure III.83 le déplacement maximal par la méthode analytique et par la méthode des EF pour une vitesse de $10m/s$. Les résultats de la réponse dynamique de la structure en fonction du temps sont très satisfaisants.

La figure III.84 illustre le déplacement maximal par les deux méthodes mais pour une vitesse $V = 60m/s$. Les résultats des deux méthodes (analytique et éléments finis) sont comparables.

Nous observons une amplification de la réponse dynamique de la vitesse $V = 60m/s$ par rapport à la réponse dynamique obtenue à une vitesse de $V = 10m/s$ (figures III.83 et III.84).

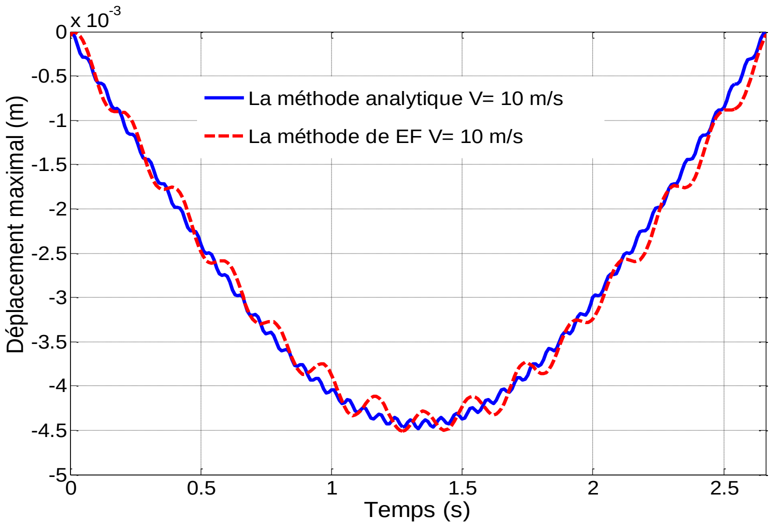


Figure III-83 Déplacement maximal au centre de la poutre par la méthode analytique et EF pour $V = 10m/s$.

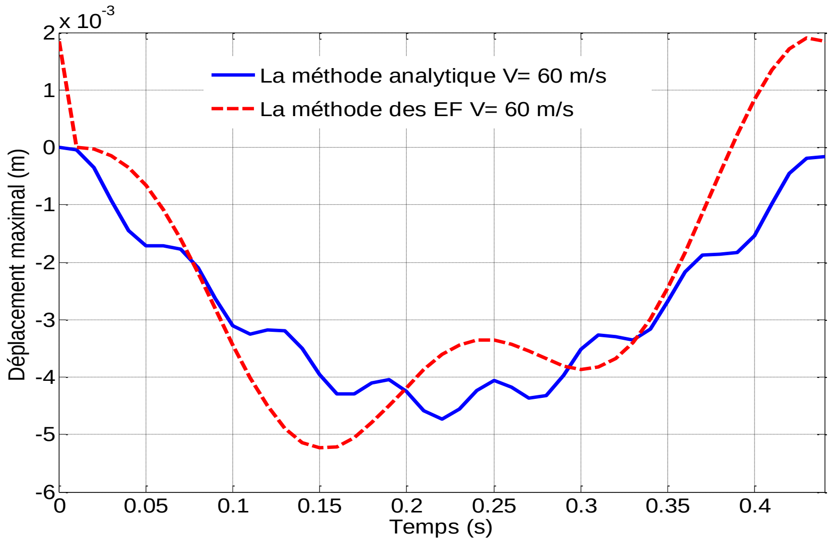


Figure III-84 Déplacement maximal au centre de la poutre par la méthode analytique et EF pour $V = 60m/s$.

III.7.2 Confrontation du modèle unidimensionnel « méthode analytique et méthode des éléments finis » au modèle réel 3D

III.7.2.1 Pour le cas des charges mobiles

Nous observons que le modèle unidimensionnelle (analytique et EF) donne des amplitudes du déplacement maximal plus importantes que le modèle réel en 3D, en raison de la non prise en considération des rigidités D_y et D_{xy} qui participent réellement au comportement de la structure du pont comme mentionné déjà auparavant. Malgré cela, les résultats des trois modèles sont satisfaisants (tableau III.26 et figure III.85).

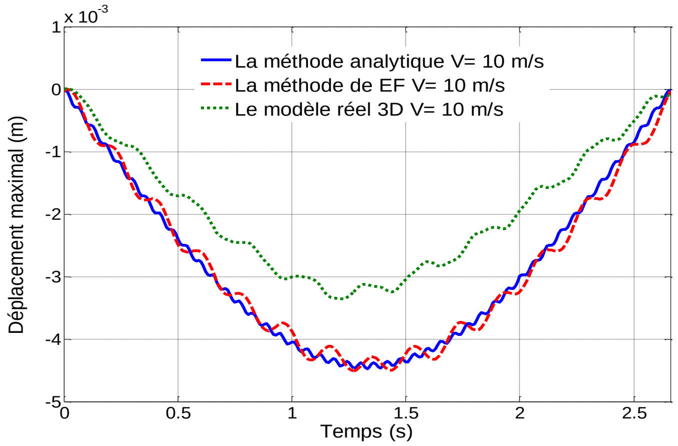


Figure III-85 Déplacement maximal par la méthode analytique, EF et modèle réel 3D pour $V = 10 m/s$.

Tableau III-26 Facteur d'amplification dynamique maximal par la méthode analytique, EF et pour le modèle réel en 3D pour différentes vitesses.

V (m/s)	Méthode analytique	EF	Modèle 3D	V (m/s)	Méthode analytique	EF	Modèle 3D
10	1.018	1.02409091	0.76363636	100	1.07272727	1.43068182	1.10227273
20	1.0264	1.06954545	0.80090909	110	1.09977273	1.67022727	1.09272727
30	1.03863636	1.08522727	0.83431818	120	1.14113636	1.67022727	1.07090909
40	1.04840909	1.14227273	0.76409091	130	1.16772727	1.67022727	1.04227273
50	1.05931818	1.11227273	0.83931818	140	1.17931818	1.67022727	1.01181818
60	1.07659091	1.19022727	0.94522727	150	1.17522727	1.67022727	0.97159091
70	1.05590909	1.19022727	1.01227273	160	1.15659091	1.67022727	0.90863636
80	1.05590909	1.43068182	1.06272727	170	1.12363636	1.67022727	0.92386364
90	1.10568182	1.43068182	1.08204545				

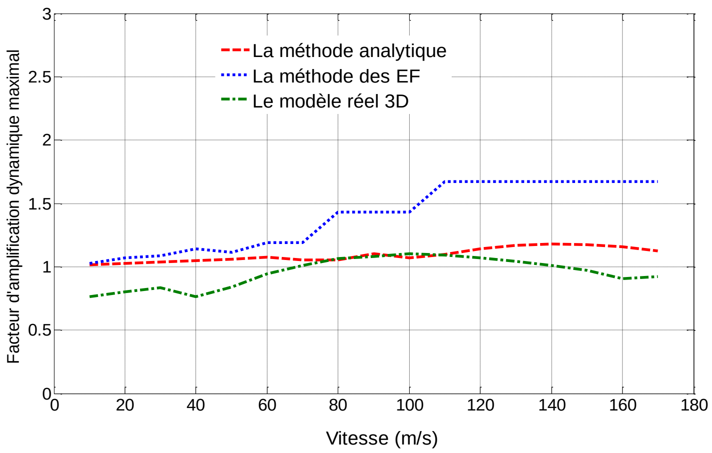


Figure III-86 Facteur d'amplification dynamique maximal pour charge résultante sur axe par la méthode analytique, la méthode des éléments finis et modèle réel 3D pour différentes vitesses.

Concernant le facteur d'amplification dynamique, à noter que pour des petites vitesses (de $10m/s$ jusqu'à $70m/s$), la variation pour les deux modèles analytique et EF coïncide mais diverge de plus en plus en augmentant la vitesse de passage (figure III.86). Cette variation n'est pas significative pour les trois types de modélisations pour de petites vitesses.

Le FAD augmente pour le modèle éléments finis et diminue pour le modèle réel en 3D pour des grandes vitesses, et cela à cause des rigidités D_y et D_{xy} prises en compte pour ce modèle. Pour des vitesses plus importantes, le modèle analytique converge avec le modèle 3D.

Pour le modèle analytique, le facteur d'amplification dynamique reste stable quelle que soit la vitesse.

III.7.2.2 Pour le cas des convois de charges mobiles

Pour le cas des poutres sollicitées par convoi de deux charges mobile, les résultats tirés des deux modèles analytique et réel 3D sont très proche et satisfaisants, et cela sur toute la longueur du pont. Sur la figure III.87, nous présentons le déplacement maximal par la méthode analytique et du modèle réel 3D pour une vitesse constante V= 10 m/s et pour le convoi de deux forces espacées de $L/2$.

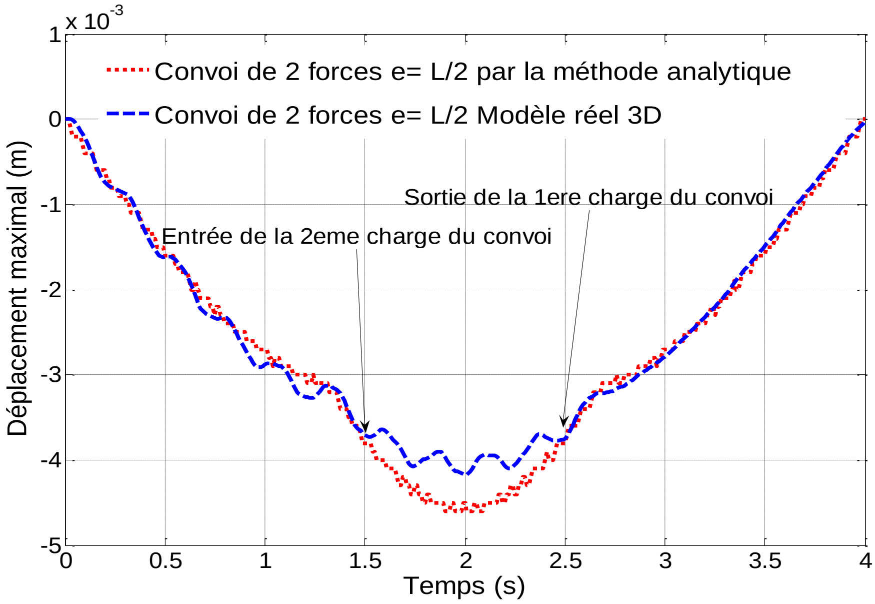


Figure III-87 Facteur d'amplification dynamique maximal par la méthode analytique et du modèle réel 3D pour un convoi de deux charges espacées de $e = L/2$ et pour $V = 10m/s$.

La variation du facteur d'amplification dynamique maximal pour différentes vitesses varient de $V = 10m/s$ à $170m/s$ est représentée sur le tableau III.27 et la figure III.88. Une concordance presque à 100 % entre les deux méthodes analytique et réel en 3D pour de moyennes vitesses qui varient de $80m/s$ à $110m/s$ (figure III.88).

Tableau III-27 Facteur d'amplification dynamique maximal pour un convoi de deux forces avec $e = L/2$ par la méthode analytique et pour le modèle réel en 3D pour différentes vitesses.

V (m/s)	Méthode analytique	Modèle 3D	V (m/s)	Méthode analytique	Modèle 3D
10	1.018	0.76363636	100	1.07272727	1.10227273
20	1.0264	0.80090909	110	1.09977273	1.09272727
30	1.03863636	0.83431818	120	1.14113636	1.07090909
40	1.04840909	0.76409091	130	1.16772727	1.04227273
50	1.05931818	0.83931818	140	1.17931818	1.01181818
60	1.07659091	0.94522727	150	1.17522727	0.97159091
70	1.05590909	1.01227273	160	1.15659091	0.90863636
80	1.05590909	1.06272727	170	1.12363636	0.92386364
90	1.10568182	1.08204545			

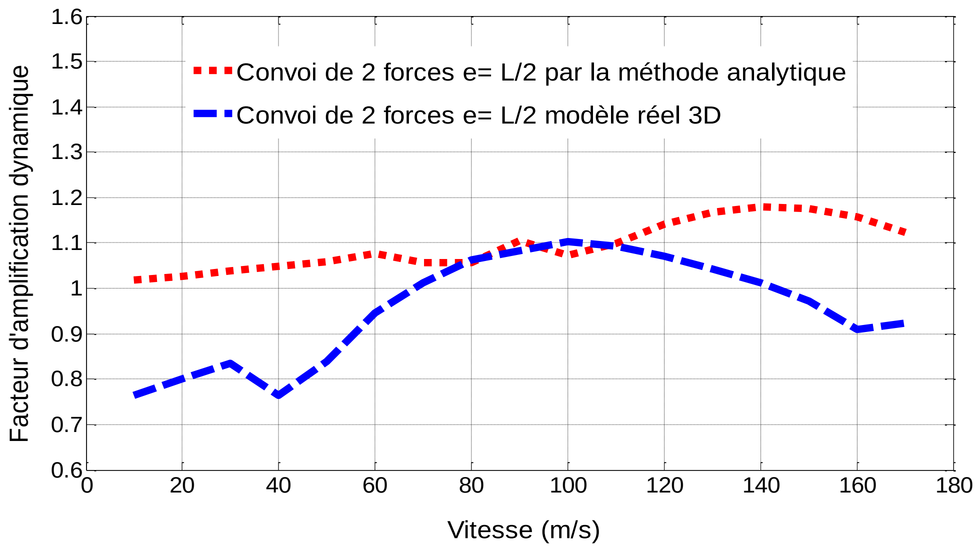


Figure III-88 Facteur d'amplification dynamique maximal pour convoi de deux charges espacées de $e = L/2$ par la méthode analytique et du modèle réel 3D pour différentes vitesses.

III.8 Conclusion partielle

Ce chapitre explore diverses méthodes de calcul conditionnées par le choix du modèle de pont adopté. Deux méthodes principales pour la modélisation unidimensionnelle des ponts, considérés comme poutres simplement appuyées des deux côtés et sollicités par des charges mobiles avec vitesse sont présentées en détail.

Dans la première partie, l'effet de l'inertie de la charge est examiné, soulignant que cet effet se néglige pour les petites vitesses. Le modèle de la charge, qu'il s'agisse d'une force constante ou

harmonique, est également pris en compte. Le chapitre explore l'impact du passage de convois de charges, examinant le nombre de charges et leur espacement, et utilise une méthode analytique de superposition modale pour évaluer la vibration globale du système.
L'utilisation d'un programme basé sur la méthode des éléments finis (EF), est introduit pour confronter les résultats analytiques et tridimensionnels. Les résultats obtenus par la méthode des éléments finis concordent parfaitement avec la méthode analytique, bien que l'amplification dynamique devienne plus importante avec l'augmentation de la vitesse pour la première, tandis qu'elle reste stable pour la seconde.
La différence entre les résultats des modèles unidimensionnels et tridimensionnels s'explique par la prise en compte des rigidités dans les directions longitudinale et transversale dans le modèle tridimensionnel. L'impact du choix du modèle de la force mobile ou de la charge réelle (BC) est souligné, montrant une différence significative entre les modèles analytique et tridimensionnel, avec un effet plus marqué sur le tablier du pont pour le cas de la force résultante.
L'importance de la position de la charge sur le tablier est notée, avec un déplacement maximal augmentant lorsque la charge est décalée de l'axe du pont. Enfin, l'analyse d'un convoi de charges met en évidence que l'amplification dynamique diminue avec le nombre de charges dans le convoi, en raison de l'effet de poinçonnement observé pour une charge unique.
Malgré les résultats satisfaisants de la comparaison analytique avec le modèle 3D, des déséquilibres temporaires sont notés lors de l'entrée de la deuxième charge. Le chapitre souligne la nécessité de modèles plus universels, capables de traiter diverses conditions d'appui, objectif qui sera abordé dans le prochain chapitre.

Chapitre IV Vibration des poutres sollicitées par charges mobiles appuyées sur support élastiques verticaux

Introduction

Ce chapitre est dédié à la présentation de la méthode de la fonction de Green et à son application pour l'étude du comportement dynamique d'une structure spécifique : une poutre appuyée des deux côtés sur des supports élastiques, soumise à une charge constante d'intensité P et dotée d'une vitesse V. Dans ce contexte, nous introduisons un premier modèle de supports constitués uniquement de ressorts dans la direction verticale, permettant d'explorer divers cas d'appuis tels que l'appui simple, l'appui double ou l'articulation. La variation de la rigidité du ressort d'appui de 0 à l'infini catégorise le comportement de l'appui. La méthode de la fonction de Green nous fournit une solution à ce problème en présentant deux fonctions, l'une à gauche et l'autre à droite du point d'application de la charge. Ces fonctions décrivent les déplacements sur la poutre et sur les appuis par la multiplication de la fonction par la charge mobile. Aucun travail antérieur n'a traité de manière exhaustive les supports élastiques, ils présentent la théorie en utilisant la fonction de Green mais n'incluent pas les formules théoriques de solution pour les supports sous forme de ressorts. Notre contribution personnelle dans ce chapitre réside à la présentation d'une solution générale dans deux domaines en fonction de la position de la charge sur la poutre, fournissant le déplacement en travée ou sur appuis pour le premier modèle. Le développement de cette solution a conduit à une forme simplifiée en fonction du temps, applicable le long de la poutre comme sur appuis. Une étude détaillée au niveau des appuis a abouti à des formules temporelles encore plus simples, permettant de déterminer directement les déplacements au niveau des appuis en connaissant uniquement les valeurs de la rigidité de la poutre, de la raideur du ressort et de la charge mobile, quel que soit l'emplacement de la charge sur la poutre.

SOMMAIRE

IV.1 Etude analytique des poutres sollicitées par charges mobiles appuyées sur support élastiques verticaux

Les conditions aux limites de la structure poutre sont idéalisées par des ressorts de raideur k qui s'opposent aux déplacements verticaux. La flexibilité EI de la poutre est couplée aux raideurs verticales des appuis k (figure IV.1). La déformation dynamique est une fonction de ce couplage.

L'équation différentielle qui régit le comportement dynamique du modèle poutre Euler-Bernoulli sur appuis élastique sous l'effet d'une charge mobile est donnée par (Mehri B., 2009):

$$EI \cdot \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + m_l \cdot \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = F(x,t) \tag{4.1}$$

Avec $y(x,t)$ représente la flèche de la poutre, x la position sur la poutre, EI est la rigidité de la poutre, E est le module de Young , I l'inertie de la poutre, m_l est la masse de la poutre par unité de longueur, L la longueur de la poutre, P la charge mobile et finalement v la vitesse de la charge mobile.

$$F(x,t) = P \cdot \delta(x-u) \tag{4.2}$$

Avec P est l'amplitude de la force appliquée et δ est la fonction de Dirac. u représente la position de la force sur la poutre.

La fonction de Green dynamique solutionne le système d'équation 4.1, on peut écrire :

$$y(x,t) = Gr(x,u) \cdot P \tag{4.3}$$

Avec $y(x,t)$ est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} - s^4 \cdot y(x) = \delta(x-u) \tag{4.4}$$

Et :

$$s = \left(\omega^2 . m / EI\right)^{1/4} \tag{4.5}$$

s est le paramètre de fréquence et ω est la fréquence de circulation qui traduit l'effet de l'inertie de la masse, avec :

$$\omega = \pi v / L \tag{4.6}$$

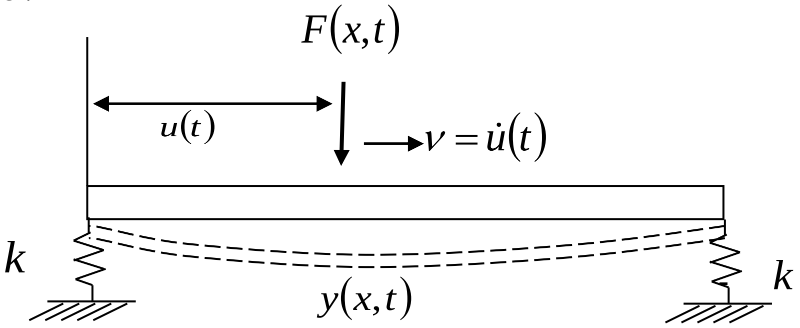


Figure IV-1 Modèle de poutre traversée par charge mobile appuyée sur supports élastique dans la direction vertical.

La solution de l'équation 4.4 peut être écrite sur cette forme (Mehri B., 2009):

$$Gr(x,u)=\begin{cases} C_1\cdot\cos(sx)+C_2\cdot\sin(sx)+C_3\cdot\cosh(sx)+C_4\cdot\sinh(sx) \\ 0\le x\le u \\ \\ C_5\cdot\cos(sx)+C_6\cdot\sin(sx)+C_7\cdot\cosh(sx)+C_8\cdot\sinh(sx) \\ x\le u\le L \end{cases} \tag{4.7}$$

Pour la résolution de ce modèle de poutre sur appuis élastiques sous charges mobiles, la fonction de Green est utilisée en considérant quatre conditions aux limites, trois conditions de continuités et une condition d'effort tranchant.

IV.1.1 Présentation des formes de solution particulières basées sur la fonction de Green

Deux études très importantes et très efficaces ont été menées pour démontrer l'efficacité de la méthode de la fonction de Green pour obtenir le déplacement le long de la poutre avec différents types d'appuis. La première est celle de Mehri B. (2009), qui a présenté la forme de la fonction de Green dans le cas de la poutre encastré- simplement appuyée comme suit :

$$Gr(x,u)=\frac{1}{2\cdot EI\cdot S^3\cdot\theta}\begin{cases} C_1\cdot\cos(s\cdot x)+C_2\cdot\sin(s\cdot x)+C_3\cdot\cosh(s\cdot x)+C_4\cdot\sinh(s\cdot x) \\ 0\le x\le u \\ \\ C_5\cdot\cos(s\cdot x)+C_6\cdot\sin(s\cdot x)+C_7\cdot\cosh(s\cdot x)+C_8\cdot\sinh(s\cdot x) \\ x\le u\le L \end{cases} \tag{4.8}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
C_1 &= a_1\cdot\sinh(s\cdot L)-a_2\cdot\sin(s\cdot L)\\
C_2 &= a_2\cdot\cos(s\cdot L)-a_1\cdot\cosh(s\cdot L)\\
C_3 &= a_2\cdot\sin(s\cdot L)-a_1\cdot\sinh(s\cdot L)\\
C_4 &= a_1\cdot\cosh(s\cdot L)-a_2\cdot\cos(s\cdot L)\\
C_5 &= -\sin(s\cdot L)\cdot(a_3\cdot\sinh(s\cdot L)+a_4\cdot\cosh(s\cdot L))\\
C_6 &= \cos(s\cdot L)\cdot(a_3\cdot\sinh(s\cdot L)+a_4\cdot\cosh(s\cdot L))\\
C_7 &= \sinh(s\cdot L)\cdot(a_3\cdot\sin(s\cdot L)+a_4\cdot\cos(s\cdot L))\\
C_8 &= -\cosh(s\cdot L)\cdot(a_3\cdot\sin(s\cdot L)+a_4\cdot\cos(s\cdot L))
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Et :

$$a_1=\sin(s\cdot(u-L))$$

$$a_2=\sinh(s\cdot(u-L))$$

$a_3 = \cos(s \cdot u) - \cosh(s \cdot u)$

$a_4 = \sinh(s \cdot u) - \sin(s \cdot u)$

$\theta = \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) - \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L)$

(4.10)

La deuxième étude est celle de Foda A. et Abduljabbar Z. (1998). Ils ont présenté la fonction de Green mais dans le cas de la poutre encastré sur les deux coté et aussi pour le cas de la poutre en porte à faux comme suit :

$$Gr(x,u) = \frac{1}{2 \cdot EI \cdot q^3 \cdot \Delta} \begin{cases} g(x,u), 0 \le x \le u \\ g(u,x), x \le u \le L \end{cases}$$

(4.11)

Avec :

$$g(x,u) = D_1 \cdot (\cos(q \cdot x) - \cosh(q \cdot x)) + D_2 \cdot (\sin(q \cdot x) - \sinh(q \cdot x)) \tag{4.12}$$

Pour la poutre fixée sur les deux cotés :

$\Delta = 2 \cdot (1 - \cos(q \cdot L) \cdot \cosh(q \cdot L))$

$D_1 = (\cos(q \cdot L) - \cosh(q \cdot L)) \cdot (\sin z - \sinh z) - (\sin(q \cdot L) - \sinh(q \cdot L)) \cdot (\cos z - \cosh z)$

$D_2 = (\sin(q \cdot L) + \sinh(q \cdot L)) \cdot (\sin z - \sinh z) + (\cos(q \cdot L) - \cosh(q \cdot L)) \cdot (\cos z - \cosh z)$

Avec $z = q \cdot (L - u)$

(4.13)

Par contre pour la poutre en porte à faux :

$\Delta = 2 \cdot (1 + \cos(q \cdot L) \cdot \cosh(q \cdot L))$

$D_1 = (\cos(q \cdot L) + \cosh(q \cdot L)) \cdot (\sin z + \sinh z) - (\sin(q \cdot L) + \sinh(q \cdot L)) \cdot (\cos z + \cosh z)$

$D_2 = (\sin(qL) - \sinh(qL)) \cdot (\sin z + \sinh z) + (\cos(qL) + \cosh(qL)) \cdot (\cos z + \cosh z)$

(4.14)

Les variables : $C1$, $C2$, $C3$, $C4$, $C5$, $C6$, $C7$ et $C8$ sont évaluées en respectant les conditions présentées dans le travail de Stakgold I. (1967) repris dans le travail de Mehri B. (2009), qui sont :

Les conditions de continuités des déplacements, des rotations (pentes) et des moments suivantes :

$$Gr(u_{droite}, u) = Gr(u_{gauche}, u) \tag{4.15}$$

$$Gr'(u_{droite}, u) = Gr'(u_{gauche}, u) \tag{4.16}$$

$$Gr''(u_{droite}, u) = Gr''(u_{gauche}, u) \tag{4.17}$$

La condition de discontinuité de l'effort tranchant de magnitude unitaire pour $x = u$ est comme suit :

$$EI\cdot[Gr'''(u_{droite},u)-Gr'''(u_{gauche},u)]=1 \tag{4.18}$$

Avec le prime est l'indication de la dérivation par rapport à x.

Deux conditions aux limites aux deux extrémités de la poutre en fonction du type de support sont les suivantes :

$$Gr''(0,u)=0 \tag{4.19}$$

$$Gr''(L,u)=0 \tag{4.20}$$

$$Gr'''(0,u)=k\cdot Gr(0,u) \tag{4.21}$$

$$Gr'''(L,u)=k\cdot Gr(L,u) \tag{4.22}$$

L'utilisation des équations 4.15 jusqu'à 4.22 permet d'écrire le système suivant :

$$\begin{bmatrix}
-s^2 & 0 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -s^2\cdot\cos(s\cdot L) & -s^2\cdot\sin(s\cdot L) & s^2\cdot\cosh(s\cdot L) & s^2\cdot\sinh(s\cdot L) \\
-k & -s^3 & -k & s^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & s^3\cdot\sin(s\cdot L)-k\cdot\cos(s\cdot L) & -s^3\cdot\cos(s\cdot L)-k\cdot\sin(s\cdot L) & s^3\cdot\sinh(s\cdot L)-k\cdot\cosh(s\cdot L) & s^3\cdot\cosh(s\cdot L)-k\cdot\sinh(s\cdot L) \\
\cos(s\cdot u) & \sin(s\cdot u) & \cosh(s\cdot u) & \sinh(s\cdot u) & -\cos(s\cdot u) & -\sin(s\cdot u) & -\cosh(s\cdot u) & -\sinh(s\cdot u) \\
-s\cdot\sin(s\cdot u) & s\cdot\cos(s\cdot u) & s\cdot\sinh(s\cdot u) & s\cdot\cosh(s\cdot u) & s\cdot\sin(s\cdot u) & -s\cdot\cos(s\cdot u) & -s\cdot\sinh(s\cdot u) & -s\cdot\cosh(s\cdot u) \\
-s^2\cdot\cos(s\cdot u) & -s^2\cdot\sin(s\cdot u) & s^2\cdot\cosh(s\cdot u) & s^2\cdot\sinh(s\cdot u) & s^2\cdot\cos(s\cdot u) & s^2\cdot\sin(s\cdot u) & -s^2\cdot\cosh(s\cdot u) & -s^2\cdot\sinh(s\cdot u) \\
-s^3\cdot\sin(s\cdot u) & s^3\cdot\cos(s\cdot u) & -s^3\cdot\sinh(s\cdot u) & -s^3\cdot\cosh(s\cdot u) & s^3\cdot\sin(s\cdot u) & -s^3\cdot\cos(s\cdot u) & s^3\cdot\sinh(s\cdot u) & s^3\cdot\cosh(s\cdot u)
\end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/EI \end{Bmatrix} \tag{4.23}$$

Les variables C1 jusqu'à C8 sont obtenues par la résolution du système d'équation 4.23 qui est un système d'équation linéaire par la méthode de Gauss sydel.

IV.1.2 Algorithme de résolution

Pour résoudre ce système de huit équations à huit inconnues, nous présentons l'algorithme à suivre. Nous utilisons le logiciel mathématique Maple, qui donne une forme compliquée de solution pour les valeurs $C1$ jusqu'à $C8$, le schéma de l'algorithme est présenté en annexe 2-A.

IV.1.3 Développement analytique de la solution pour les poutres sur appuis élastiques verticaux

La solution du système présenté en équation 4.23 permet d'obtenir les variables $C1$ jusqu'à $C8$ sous la forme générale suivante :

La variable $C1$:

$$C_1 = (-(1/4)\cdot(s^3\cdot\sinh(s\cdot u) - s^3\cdot\sin(s\cdot u) - s^3\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)$$
$$+2\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot k\cdot\sinh(s\cdot L) + s^3\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)$$
$$-2\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot k\cdot\cosh(s\cdot L) - 2\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot k\cdot\sinh(s\cdot L)$$
$$+s^3\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u) + 2\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot k\cdot\sinh(s\cdot L)$$
$$+s^3\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L) - s^3\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)$$
$$+s^3\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L) + s^3\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)$$
$$-s^3\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u))$$
$$/(EI\cdot(2\cdot\sin(s\cdot L)\cdot k^2\cdot\sinh(s\cdot L) + s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L) - s^6)));$$

(4.24)

La variable $C2$:

$$C_2 = (-(1/4)\cdot(-s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u) + 2\cdot s^3\cdot k\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)$$
$$-s^6\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u) - 2\cdot k\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot s^3$$
$$-2\cdot s^3\cdot k\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u) + s^6\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)$$
$$+s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u) - s^6\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)$$
$$-2\cdot s^3\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot k\cdot\sinh(s\cdot L) + 4\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot k^2\cdot\sinh(s\cdot L)$$
$$-s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L) - 4\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot k^2\cdot\sinh(s\cdot L)$$
$$-2\cdot s^3\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot k\cdot\sinh(s\cdot L) + s^6\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)$$
$$-s^6\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot L) - s^6\cdot\cosh(s\cdot u) + s^6\cdot\cos(s\cdot u))$$
$$/(s^3\cdot EI\cdot(2\cdot\sin(s\cdot L)\cdot k^2\cdot\sinh(s\cdot L) + s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L) - s^6)));$$

(4.25)

La variable $C3$:

$$C_3 = (-(1/4)\cdot(s^3\cdot\sinh(s\cdot u) - s^3\cdot\sin(s\cdot u) - s^3\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)$$
$$+2\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot k\cdot\sinh(s\cdot L) + s^3\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)$$
$$-2\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot k\cdot\cosh(s\cdot L) - 2\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot k\cdot\sinh(s\cdot L)$$
$$+s^3\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u) + 2\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot k\cdot\sinh(s\cdot L)$$
$$+s^3\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L) - s^3\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)$$
$$+s^3\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L) + s^3\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)$$
$$-s^3\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u))$$
$$/(EI\cdot(2\cdot\sin(s\cdot L)\cdot k^2\cdot\sinh(s\cdot L) + s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L) - s^6)));$$

(4.26)

La variable $C4$:

$$C_4 = ((1/4)\cdot(-s^6\cdot\cos(s\cdot u) + s^6\cdot\cosh(s\cdot u) + 2\cdot k\cdot s^3\cdot\sin(s\cdot u)$$
$$-s^6\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u) + s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)$$
$$-2\cdot k\cdot s^3\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L) + s^6\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)$$
$$+2\cdot k\cdot s^3\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L) + s^6\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)$$
$$-s^6\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u) - s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)$$
$$+2\cdot s^3\cdot k\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L) + 4\cdot k^2\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)$$
$$+s^6\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot L) - 2\cdot s^3\cdot k\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)$$
$$-4\cdot k^2\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L) + s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)$$
$$/(s^3\cdot EI\cdot(2\cdot\sin(s\cdot L)\cdot k^2\cdot\sinh(s\cdot L) + s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L) - s^6)))$$

(4.27)

La variable $C5$:

$$C_5 = (-(1/4)\cdot(-s^6\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)+2\cdot s^3\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot k\cdot\sinh(s\cdot L)$$
$$-4\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot k^2\cdot\sinh(s\cdot L)+s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)$$
$$+s^6\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^3\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot k\cdot\sinh(s\cdot L)$$
$$-s^6\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot L)-s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)$$
$$-2\cdot s^3\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot k\cdot\cosh(s\cdot L)+s^6\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)$$
$$-s^6\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)+s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)$$
$$+2\cdot s^3\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot k\cdot\sinh(s\cdot L)+s^6\cdot\sinh(s\cdot u)+s^6\cdot\sin(s\cdot u)$$
$$/(s^3\cdot EI\cdot(2\cdot\sin(s\cdot L)\cdot k^2\cdot\sinh(s\cdot L)+s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^6)));$$

(4.28)

La variable $C6$:

$$C_6 = (-(1/4)\cdot(-s^6\cdot\cosh(s\cdot u)+s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)$$
$$-s^6\cdot\cos(s\cdot u)+s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)$$
$$+s^6\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)-s^6\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot L)$$
$$-s^6\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)$$
$$+2\cdot s^3\cdot k\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)-s^6\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)$$
$$-2\cdot s^3\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot k\cdot\sinh(s\cdot L)+s^6\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\cos(s*u)$$
$$+4\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot k^2\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^3\cdot k\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)$$
$$-2\cdot s^3\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot k\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot k\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot s^3)$$
$$/(s^3\cdot EI\cdot(2\cdot\sin(s\cdot L)\cdot k^2\cdot\sinh(s\cdot L)+s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^6)))$$

(4.29)

La variable $C7$:

$$C_7 = ((1/4)\cdot(-s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^6\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot L)$$
$$-s^6\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^3\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot k\cdot\sinh(s\cdot L)$$
$$+2\cdot s^3\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot k\cdot\sinh(s\cdot L)+s^6\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)$$
$$+2\cdot s^3\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot k\cdot\cosh(s\cdot L)-s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)$$
$$-s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)+s^6\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)$$
$$-s^6\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)-2\cdot s^3\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot k\cdot\sinh(s\cdot L)$$
$$-4\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot k^2\cdot\sinh(s\cdot L)+s^6\cdot\sin(s\cdot u)+s^6\cdot\sinh(s\cdot u))$$
$$/(s^3\cdot EI\cdot(2\cdot\sin(s\cdot L)\cdot k^2\cdot\sinh(s\cdot L)+s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^6)))$$

(4.30)

La variable $C8$:

$$C_8 = ((1/4)\cdot(s^6\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^6\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)$$
$$+s^6\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot L)+2\cdot\sin(s\cdot u)\cdot k\cdot s^3$$
$$-2\cdot k\cdot s^3\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot k\cdot s^3\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)$$
$$-2\cdot s^3\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot k\cdot\sinh(s\cdot L)+s^6\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)$$
$$+2\cdot s^3\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot k\cdot\cosh(s\cdot L)+s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)$$
$$+s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)-s^6\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)$$
$$+4\cdot\sin(s\cdot L)\cdot k^2\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^6\cdot\cosh(s\cdot u)$$
$$+s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^6\cdot\cos(s\cdot u))$$
$$/(s^3\cdot EI\cdot(2\cdot\sin(s\cdot L)\cdot k^2\cdot\sinh(s\cdot L)+s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^6)));$$

(4.31)

La forme des variables de $C1$ jusqu'à $C8$ est compliquée et nécessite d'avantage de raffinement pour simplifier leurs utilisation ultérieure.

IV.1.4 Présentation de la nouvelle forme de solution

Le développement de la fonction de Green à gauche et à droite en introduisant les valeurs de $C1$ jusqu'à $C8$ présentées en équations (4.24) jusqu'à (4.31), donne une nouvelle forme de solution avec une écriture générale suivante:

$$Grn(x,u) = \begin{cases} Gng, 0 \le x \le u \\ \\ Gnd, x \le u \le L \end{cases} \tag{4.32}$$

IV.1.4.1 La nouvelle fonction de Green à gauche

$$\begin{aligned} \mathrm{Gng} = {} & (1/(4 \cdot s^3 \cdot \mathrm{EI} \cdot \mathrm{D})) \cdot \\ & (\mathrm{fac1g} + \mathrm{fac2g} + \mathrm{fac3g} + \mathrm{fac4g} + \mathrm{fac5g} + \mathrm{fac6g} + \mathrm{fac7g} + \mathrm{fac8g} + \mathrm{fac9g} \\ & + \mathrm{fac10g} + \mathrm{fac11g} + \mathrm{fac12g} + \mathrm{fac13g} + \mathrm{fac14g} + \mathrm{fac15g} + \mathrm{fac16g}) \end{aligned} \tag{4.33}$$

Avec :

$$\mathrm{fac1g} = (2 \cdot k \cdot s^3 \cdot \cos(s \cdot L) - s^6 \cdot \sin(s \cdot L)) \cdot \sinh(s \cdot L) \cdot \sin(s \cdot (x+u)) \tag{4.34.1}$$

$$\mathrm{fac2g} = -(2 \cdot k \cdot s^3 \cdot \sin(s \cdot L) + s^6 \cdot \cos(s \cdot L)) \cdot \sinh(s \cdot L) \cdot \cos(s \cdot (x+u)) \tag{4.34.2}$$

$$\mathrm{fac3g} = -(2 \cdot k \cdot s^3 \cdot \sinh(s \cdot L) - s^6 \cdot \cosh(s \cdot L)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot (x+u)) \tag{4.34.3}$$

$$\mathrm{fac4g} = (2 \cdot k \cdot s^3 \cdot \cosh(s \cdot L) - s^6 \cdot \sinh(s \cdot L)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot (x+u)) \tag{4.34.4}$$

$$\mathrm{fac5g} = (2 \cdot k \cdot s^3 \cdot \sin(s \cdot x) - s^6 \cdot \cos(s \cdot x)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot (L-u)) \tag{4.34.5}$$

$$\mathrm{fac6g} = -(2 \cdot k \cdot s^3 \cdot \cos(s \cdot x) + s^6 \cdot \sin(s \cdot x)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot (L-u)) \tag{4.34.6}$$

$$\mathrm{fac7g} = (2 \cdot k \cdot s^3 \cdot \sin(s \cdot (L-u)) + s^6 \cdot \cos(s \cdot (L-u))) \cdot \sinh(s \cdot x) \cdot \cosh(s \cdot L) \tag{4.34.7}$$

$$\mathrm{fac8g} = -(2 \cdot k \cdot s^3 \cdot \sin(s \cdot (L-u)) + s^6 \cdot \cos(s \cdot (L-u))) \cdot \cosh(s \cdot x) \cdot \sinh(s \cdot L) \tag{4.34.8}$$

$$\mathrm{fac9g} = -(s^6 \cdot (\sinh(s \cdot x) \cdot \cosh(s \cdot (L-u)) + \cosh(s \cdot x) \cdot \sinh(s \cdot (L-u)))) \cdot \cos(s \cdot L) \tag{4.34.9}$$

$$\mathrm{fac10g} = (s^6 \cdot (\cos(s \cdot x) \cdot \sin(s \cdot (L-u)) + \sin(s \cdot x) \cdot \cos(s \cdot (L-u)))) \cdot \cosh(s \cdot L) \tag{4.34.10}$$

$$\mathrm{fac11g} = (s^6 \cdot (\cos(s \cdot x) \cdot \sin(s \cdot L) - \sin(s \cdot x) \cdot \cos(s \cdot L))) \cdot \cosh(s \cdot (L-u)) \tag{4.34.11}$$

$$\mathrm{fac12g} = (s^6 \cdot (\cosh(s \cdot x) \cdot \cosh(s \cdot L) - \sinh(s \cdot x) \cdot \sinh(s \cdot L))) \cdot \sin(s \cdot (L-u)) \tag{4.34.12}$$

$$\mathrm{fac13g} = s^6 \cdot (\sin(s \cdot x) \cdot \cosh(s \cdot u) + \cosh(s \cdot x) \cdot \sin(s \cdot u) - \cos(s \cdot x) \cdot \sinh(s \cdot u) - \sinh(s \cdot x) \cdot \cos(s \cdot u)) \tag{4.34.13}$$

$$\mathrm{fac14g} = 2 \cdot s^3 \cdot k \cdot (\sin(s \cdot x) \cdot \sinh(s \cdot u) + \sinh(s \cdot x) \cdot \sin(s \cdot u)) \tag{4.34.14}$$

$$fac15g = 4 \cdot k^2 \cdot (\sin(s \cdot x) \cdot \sinh(s \cdot L) \cdot \sin(s \cdot (L - u)) - \sinh(s \cdot x) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot (L - u))) \quad (4.34.15)$$

$$fac16g = -s^6 \cdot (\sin(s \cdot (x - u) - \sinh(s \cdot (x - u)) \quad (4.34.16)$$

IV.1.4.2 La nouvelle fonction de Green à droite

$$Gnd = (1/(4 \cdot s^3 \cdot EI \cdot D)) \cdot (fac1d + fac2d + fac3d + fac4d + fac5d + fac6d + fac7d + fac8d + fac9d + fac10d + fac11d + fac12d + fac13d + fac14d + fac15d + fac16d) \quad (4.35)$$

Avec :

$$fac1d = (2 \cdot k \cdot s^3 \cdot \cos(s \cdot L) - s^6 \cdot \sin(s \cdot L)) \cdot \sinh(s \cdot L) \cdot \sin(s \cdot (x + u)) \quad (4.36.1)$$

$$fac2d = -(2 \cdot k \cdot s^3 \cdot \sin(s \cdot L) + s^6 \cdot \cos(s \cdot L)) \cdot \sinh(s \cdot L) \cdot \cos(s \cdot (x + u)) \quad (4.36.2)$$

$$fac3d = -(2 \cdot k \cdot s^3 \cdot \sinh(s \cdot L) - s^6 \cdot \cosh(s \cdot L)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot (x + u)) \quad (4.36.3)$$

$$fac4d = (2 \cdot k \cdot s^3 \cdot \cosh(s \cdot L) - s^6 \cdot \sinh(s \cdot L)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot (x + u)) \quad (4.36.4)$$

$$fac5d = (2 \cdot k \cdot s^3 \cdot \sin(s \cdot x) - s^6 \cdot \cos(s \cdot x)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot (L - u)) \quad (4.36.5)$$

$$fac6d = -(2 \cdot k \cdot s^3 \cdot \cos(s \cdot x) + s^6 \cdot \sin(s \cdot x)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot (L - u)) \quad (4.36.6)$$

$$fac7d = (2 \cdot k \cdot s^3 \cdot \sin(s \cdot (L - u)) + s^6 \cdot \cos(s \cdot (L - u))) \cdot \sinh(s \cdot x) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (4.36.7)$$

$$fac8d = -(2 \cdot k \cdot s^3 \cdot \sin(s \cdot (L - u)) + s^6 \cdot \cos(s \cdot (L - u))) \cdot \cosh(s \cdot x) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (4.36.8)$$

$$fac9d = (s^6 \cdot (\sinh(s \cdot x) \cdot \cosh(s \cdot (L + u)) - \cosh(s \cdot x) \cdot \sinh(s \cdot (L + u)))) \cdot \cos(s \cdot L) \quad (4.36.9)$$

$$fac10d = (s^6 \cdot (\cos(s \cdot x) \cdot \sin(s \cdot (L + u)) - \sin(s \cdot x) \cdot \cos(s \cdot (L + u)))) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (4.36.10)$$

$$fac11d = (s^6 \cdot (\cos(s \cdot x) \cdot \sin(s \cdot L) - \sin(s \cdot x) \cdot \cos(s \cdot (L)))) \cdot \cosh(s \cdot (L - u)) \quad (4.36.11)$$

$$fac12d = (s^6 \cdot (\cosh(s \cdot x) \cdot \cosh(s \cdot L) - \sinh(s \cdot x) \cdot \sinh(s \cdot L))) \cdot \sin(s \cdot (L - u)) \quad (4.36.12)$$

$$fac13d = s^6 \cdot (\sin(s \cdot x) \cdot \cosh(s \cdot u) + \cosh(s \cdot x) \cdot \sin(s \cdot u) - \cos(s \cdot x) \cdot \sinh(s \cdot u) - \sinh(s \cdot x) \cdot \cos(s \cdot u)) \quad (4.36.13)$$

$$fac14d = 2 \cdot s^3 \cdot k \cdot (\sin(s \cdot x) \cdot \sinh(s \cdot u) + \sinh(s \cdot x) \cdot \sin(s \cdot u)) \quad (4.36.14)$$

$$fac15d = 4 \cdot k^2 \cdot (\sin(s \cdot u) \cdot \sinh(s \cdot L) \cdot \sin(s \cdot (L - x)) - \sinh(s \cdot u) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot (L - x))) \quad (4.36.15)$$

$$fac16d = s^6 \cdot (\sin(s \cdot (x - u)) - \sinh(s \cdot (x - u))) \quad (4.36.16)$$

Avec :

$$D = 2 \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \cdot k^2 + s^6 \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) - s^6 \quad (4.37)$$

La simplification de l'écriture globale avec un premier traitement analytique en utilisant les relations trigonométriques et en faisant sortir les termes en commun donne les formes suivantes :

$$\begin{aligned} C_1 = &-((1/(4 \cdot EI \cdot D)) \cdot ((s^3 \cdot \cos(s \cdot L) + 2 \cdot k \cdot \sin(s \cdot L)) \cdot \sinh(s \cdot (L - u)) \\ &- (s^3 \cdot \cosh(s \cdot L) - 2 \cdot k \cdot \sinh(s \cdot L)) \cdot \sin(s \cdot (L - u)) \\ &+ s^3 \cdot (\sinh(s \cdot L) \cdot \cos(s \cdot (L - u)) - \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot (L - u)) \\ &+ s^3 \cdot (\sinh(s \cdot u) - \sin(s \cdot u)))) \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$C_2 = -((1/(4\cdot s^3\cdot EI\cdot D))\cdot(((s^3\cdot \sinh(s\cdot L) - 4\cdot k^2\cdot \sinh(s\cdot L))\cdot \sin(s\cdot(L-u)))$$
$$+((s^6\cdot \sin(s\cdot L) - 2\cdot s^3\cdot k\cdot \cos(s\cdot L))\cdot \sinh(s\cdot(L-u)))$$
$$-((s^6\cdot \cosh(s\cdot L) + 2\cdot s^3\cdot k\cdot \sinh(s\cdot L))\cdot \cos(s\cdot(L-u)))$$
$$+((s^6\cdot \cos(s\cdot L))\cdot \cosh(s\cdot(L-u))) + (s^6\cdot(\cos(s\cdot u) - \cosh(s\cdot u)))$$
$$-(s^3\cdot 2\cdot k\cdot \sinh(s\cdot u))))$$

(4.39)

$$C_3 = -((1/(4\cdot EI\cdot D))\cdot((2\cdot k\cdot \sinh(s\cdot L) - s^3\cdot \cosh(s\cdot L))\cdot \sin(s\cdot(L-u))$$
$$+(2\cdot k\cdot \sin(s\cdot L) + s^3\cdot \cos(s\cdot L))\cdot \sinh(s\cdot(L-u))$$
$$+s^3\cdot(\sinh(s\cdot L)\cdot \cos(s\cdot(L-u)) - \sin(s\cdot L)\cdot \cosh(s\cdot(L-u)))$$
$$+s^3\cdot(\sinh(s\cdot u) - \sin(s\cdot u))))$$

(4.40)

$$C_4 = ((1/(4\cdot s^3\cdot EI\cdot D))\cdot(((2\cdot k\cdot s^3\cdot \cosh(s\cdot L) - s^6\cdot \sinh(s\cdot L))\cdot \sin(s\cdot(L - x1(t))))$$
$$-((4\cdot k^2\cdot \sin(s\cdot L) + s^6\cdot \sin(s\cdot L))\cdot \sinh(s\cdot(L-u)))$$
$$-((2\cdot s^3\cdot k\cdot \sin(s\cdot L) + s^6\cdot \cos(s\cdot L))\cdot \cosh(s\cdot(L-u)))$$
$$+((s^6\cdot \cosh(s\cdot L))\cdot \cos(s\cdot(L-u))) + (s^6\cdot(\cosh(s\cdot u)$$
$$-\cos(s\cdot u))) + (s^3\cdot 2\cdot k\cdot \sin(s\cdot u))))$$

(4.41)

$$C_5 = -((1/(4\cdot s^3\cdot EI\cdot D))\cdot((2\cdot s^3\cdot k\cdot \sin(s\cdot L) + s^6\cdot \cos(s\cdot L))\cdot \sinh(s\cdot(L-u))$$
$$-(s^6\cdot \cos(s\cdot L)\cdot \cosh(s\cdot(L-u))) + (2\cdot k\cdot s^3\cdot \sinh(s\cdot L)\cdot \sin(s\cdot(L-u)))$$
$$+(s^6\cdot \sinh(s\cdot L)\cdot \cos(s\cdot(L-u))) - (s^6\cdot \cosh(s\cdot L)\cdot \sin(s\cdot(L+u)))$$
$$-(4\cdot k^2\cdot \sin(s\cdot L)\cdot \sinh(s\cdot L)\cdot \sin(s\cdot u)) + (s^6\cdot(\sinh(s\cdot u) + \sin(s\cdot u)))))$$

(4.42)

$$C_6 = -((1/(4\cdot s^3\cdot EI\cdot D))\cdot((s^6\cdot \sin(s\cdot L) - 2\cdot s^3\cdot k\cdot \cos(s\cdot L))\cdot \sinh(s\cdot(L-u))$$
$$+(s^6\cdot \cosh(s\cdot L)\cdot \cos(s\cdot(L+u))) + (s^6\cdot \cos(s\cdot L)\cdot \cosh(s\cdot(L-u)))$$
$$-(2\cdot k\cdot s^3\cdot \sinh(s\cdot L)\cdot \cos(s\cdot(L-u))) + (s^6\cdot \sinh(s\cdot L)\cdot \sin(s\cdot(L-u)))$$
$$+(4\cdot k^2\cdot \cos(s\cdot L)\cdot \sinh(s\cdot L)\cdot \sin(s\cdot u)) - (s^6\cdot(\cos(s\cdot u) + \cosh(s\cdot u)))$$
$$-(2\cdot k\cdot s^3\cdot \sinh(s\cdot u))))$$

(4.43)

$$C_7 = ((1/(4\cdot s^3\cdot EI\cdot D))\cdot((s^6\cdot \cosh(s\cdot L) - 2\cdot s^3\cdot k\cdot \sinh(s\cdot L))\cdot \sin(s\cdot(L-u))$$
$$-(s^6\cdot \sinh(s\cdot L)\cdot \cos(s\cdot(L-u))) - (2\cdot k\cdot s^3\cdot \sin(s\cdot L)\cdot \sinh(s\cdot(L-u)))$$
$$-(s^6\cdot \cos(s\cdot L)\cdot \sinh(s\cdot(L+u))) + (s^6\cdot \sin(s\cdot L)\cdot \cosh(s\cdot(L-u)))$$
$$-(4\cdot k^2\cdot \sin(s\cdot L)\cdot \sinh(s\cdot L)\cdot \sinh(s\cdot u)) + (s^6\cdot(\sin(s\cdot u) + \sinh(s\cdot u)))))$$

(4.44)

$$C_8 = ((1/(4\cdot s^3\cdot EI\cdot D))\cdot((2\cdot s^3\cdot k\cdot \cosh(s\cdot L) - s^6\cdot \sinh(s\cdot L))\cdot \sin(s\cdot(L-u))$$
$$+(s^6\cdot \cosh(s\cdot L)\cdot \cos(s\cdot(L-u))) - (s^6\cdot \sin(s\cdot L)\cdot \sinh(s\cdot(L-u)))$$
$$+(2\cdot k\cdot s^3\cdot \sinh(s\cdot L)\cdot \cosh(s\cdot(L-u))) + (s^6\cdot \cos(s\cdot L)\cdot \cosh(s\cdot(L+u)))$$
$$+(4\cdot k^2\cdot \sin(s\cdot L)\cdot \cosh(s\cdot L)\cdot \sinh(s\cdot u)) - (s^6\cdot(\cos(s\cdot u) + \cosh(s\cdot u)))$$
$$+(2\cdot k\cdot s^3\cdot \sin(s\cdot u))))$$

(4.45)

IV.1.5 Formulation d'une solution simplifiée

En essayant de comprendre le comportement en travée et sur appuis avec plusieurs valeurs de EI et de k, nous avons remarqué que le déplacement d'appuis change avec le même rapport de changement de la raideur d'appuis k, c'est à dire si en divise k par une valeur, le déplacement d'appuis se divise en conséquence par la même valeur.

Cette remarque nous à poussé à étudier en détail la formule globale mais précisément au niveau des appuis (à $x=0$ et à $x=L$).

En substituant $x=0$ (le point analysé est l'appui gauche) et $u=0$ (la charge est aussi sur appui gauche), nous trouvons le déplacement de l'appui gauche au temps $t=0$ comme suit :

$$y_{appg}(x=0,u=0)=\frac{-p\cdot(2\cdot k\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^3\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^3\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L))}{EI\cdot(2\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot k^2+s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^6)} \quad (4.46)$$

Nous négligeons les termes à s^6 dans le dénominateur et s^3 dans le numérateur, la forme de l'écriture devient plus simple tout en conservant le même comportement que ce soit en travée ou sur appui, comme donné par la solution globale équation 4.33. Le déplacement sur appui gauche devient alors:

$$y_{appg}(x=0,u=0)=\frac{-p}{EI\cdot k} \quad (4.47)$$

Ce rapport donne directement le déplacement sur appui gauche sans passer par aucun développement ni analytique, ni numérique, il suffit de connaitre uniquement la raideur du ressort gauche, la rigidité de la poutre et la valeur de la charge mobile.

Il est à noter que ce rapport (équation 4.47) ne respecte pas l'unité du déplacement qui est le mètre, mais il donne le même comportement que celui de la formule sans simplification.

Le déplacement sur appui gauche n'est pas fonction de la vitesse de roulement de la charge mobile. Selon cette formule, le déplacement est proportionnel à la charge et inversement proportionnel à la rigidité de la poutre et à la raideur des ressorts.

En adoptant la même simplification pour la réécriture des restes des variables, les nouvelles formes de c1 jusqu'à c8 deviennent alors comme suit :

$$C1=-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot(L-u))+\sinh(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot(L-u))}{EI\cdot k\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)} \quad (4.48)$$

$$C2=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(s\cdot(L-u))}{s^3\cdot EI\cdot\sin(s\cdot L)} \quad (4.49)$$

$$C3=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot(L-u))+\sinh(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot(L-u))}{EI\cdot k\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)} \quad (4.50)$$

$$C4=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sinh(s\cdot(L-u))}{s^3\cdot EI\cdot\sinh(s\cdot L)} \quad (4.51)$$

Une étape importante pour configurer la validité des simplifications, en introduisant ces nouvelles formes simplifiées dans le programme Matlab, nous vérifions que cette simplification n'influence pas le comportement que ce soit en travée ou sur appuis, ces vérifications devraient confirmer la validité des simplifications effectuées.

La fonction de Green finale à gauche en travée devient alors comme suit (la simplification des termes à s^3 n'est pas effectuée en travée car elle donne une valeur de zéro au dénominateur) équations 4.33 et 4.35:

$$
\begin{aligned}
&Grgs(x,u) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\mathrm{EI}\cdot \mathrm{k}\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \mathrm{s}^3}\cdot \\
&(\cos(\mathrm{s}\cdot \mathrm{x})\cdot \mathrm{s}^3\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot(\mathrm{L}-\mathrm{u})) + \cos(\mathrm{s}\cdot \mathrm{x})\cdot \mathrm{s}^3\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot(\mathrm{L}-\mathrm{u})) \\
&-2\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot(\mathrm{L}-\mathrm{u}))\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{x})\cdot \mathrm{k}\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L}) + \cosh(\mathrm{s}\cdot(\mathrm{L}-\mathrm{u}))\cdot \mathrm{s}^3\ \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot(\mathrm{L}-\mathrm{u})) \\
&+\cosh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{x})\cdot \mathrm{s}^3\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot(\mathrm{L}-\mathrm{u})) + 2\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot(\mathrm{L}-\mathrm{u}))\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{x})\cdot \mathrm{k}\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L}))
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

Concernant l'appui de droite, nous utilisons la fonction de Green mais cette fois ci à droite avec $x = L$, la forme obtenue est la suivante :

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Gr}_{\mathrm{ad}} = -\frac{1}{4\cdot \mathrm{s}^3\cdot \mathrm{EI}\cdot(2\cdot k^2\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L}) + \mathrm{s}^6\cdot \cos(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \cosh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L}) - \mathrm{s}^6)))}\cdot \\
&(\sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})^2\cdot \mathrm{s}^6\cdot \cos(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u})\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L}) - \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})^2\cdot \mathrm{s}^6\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u})\cdot \cosh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L}) \\
&-2\cdot \cos(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})^2\cdot \mathrm{s}^3\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u})\cdot \mathrm{k}\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L}) + \cos(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})^2\cdot \mathrm{s}^6\cdot \cos(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u})\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L}) \\
&\cos(\mathrm{s} * \mathrm{L})^2\cdot \mathrm{s}^6\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \cosh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u}) + 2\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})^2\cdot \mathrm{k}\cdot \mathrm{s}^3\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u}) \\
&-2\cdot \cosh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})^2\cdot \mathrm{s}^3\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u})\cdot \mathrm{k} + \cosh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})^2\cdot \mathrm{s}^6\cdot \cos(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u}) \\
&+\cos(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \mathrm{s}^6\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u}) - \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \mathrm{s}^6\cdot \cosh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u}) - \cosh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \mathrm{s}^6\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u}) \\
&-\cos(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})^2\cdot \mathrm{s}^6\cdot \cosh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u}) - \cosh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})^2\cdot \mathrm{s}^6\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \cosh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u}) \\
&+\cos(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \mathrm{s}^6\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u}) + \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})^2\cdot \mathrm{s}^6\cdot \cosh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u})\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L}) \\
&-\sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})^2\cdot \mathrm{s}^6\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u})\cdot \cos(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L}) - 2\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})^2\cdot \mathrm{s}^3\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u})\cdot \mathrm{k}\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L}) \\
&+\cosh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})^2\cdot \mathrm{s}^6\cdot \cos(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u}) - \cosh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})^2\cdot \mathrm{s}^6\cdot \cos(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u})\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L}) \\
&-\sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})^2\cdot \mathrm{s}^6\cdot \cos(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u}) + \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \mathrm{s}^6\cdot \cos(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u}) \\
&-2\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \mathrm{k}\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u})\cdot \mathrm{s}^3 - 2\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u})\cdot \mathrm{k}\cdot \mathrm{s}^3 \\
&-\sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \mathrm{s}^6\cdot \cos(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u}) - \cosh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \mathrm{s}^6\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u}) + \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \mathrm{s}^6\cdot \cosh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u}) \\
&+\sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})^2\cdot \mathrm{s}^6\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \cos(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u}) + \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})^2\cdot \mathrm{s}^6\cdot \cosh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u})\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L}) \\
&-\cos(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})^2\cdot \mathrm{s}^6\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u})\cdot \cosh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L}) - \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})^2\cdot \mathrm{s}^6\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u})\cdot \cosh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L}))
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

Nous ne pouvons pas effectuer les mêmes simplifications adoptées pour les termes à s^3 ni de s^6 quand on est à droite, car la fonction de Green à droite change. L'écriture finale reste en fonction de ces termes. La forme générale de la fonction de Green de l'appui droit en fonction du temps est alors la suivante :

$$
\begin{aligned}
&GrdSup(x = L, u) = -\frac{1}{2\cdot EI\cdot(2\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \mathrm{k}^2\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L}) - \mathrm{s}^2 + \mathrm{s}^6\cdot \cos(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \cosh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L}))}\cdot \\
&(-2\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u})\cdot \mathrm{k} + \mathrm{s}^3\cdot \cos(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u}) - \mathrm{s}^3\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \cos(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u}) \\
&+\mathrm{s}^3\cdot \cos(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u}) - \mathrm{s}^3\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \cosh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u}) - \mathrm{s}^3\cdot \cosh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u}) \\
&+\mathrm{s}^3\cdot \cos(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u})\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L}) - 2\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u})\cdot \mathrm{k}\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L}) - \mathrm{s}^3\cdot \sin(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u})\cdot \cosh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L}) \\
&+\mathrm{s}^3\cdot \sinh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{L})\cdot \cosh(\mathrm{s}\cdot \mathrm{u}))
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

La fonction de Green sur l'appui de droite quant la charge est sur appui $t=T$ $(u=L)$ donne :

$$GrSupd(x=L,u=L)=-\frac{(-4\cdot\sin(s\cdot L)\cdot k\cdot\sinh(s\cdot L)+2\cdot s^3\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^3\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L))}{2\cdot EI\cdot(2\cdot\sin(s\cdot L)\cdot k^2\cdot\sinh(s\cdot L)+s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^6)} \tag{4.55}$$

La multiplication de l'équation 4.55 par la charge mobile P, nous donne le déplacement sur l'appui de droite, nous obtenons ainsi la forme suivante:

$$y_{appd}(x=L,u)=GrSupd(x=L,u)\cdot p \tag{4.56}$$

Cette forme donne par la suite l'écriture finale du déplacement de l'appui de droite quand la charge est sur l'appui :

$$ySappd(x=L,u=L)=\frac{4\cdot\sin(s\cdot L)\cdot k\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^3\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+2\cdot s^3\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)}{2\cdot EI\cdot(2\cdot\sin(s\cdot L)\cdot k^2\cdot\sinh(s\cdot L)+s^6\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^6)}\cdot p \tag{4.57}$$

IV.1.6 Présentation d'une solution temporelle personnalisée pour déplacements au niveau d'appuis

Le déplacement sur l'appui suit une forme linéaire. Pour l'appui de gauche, il commence par le déplacement maximal $dep_{appg}(x=0,u=0)=p/(EI\cdot k)$, jusqu'au $dep_{appg}(x=L,u=L)=0$, inversé pour l'appui de droite, où il commence par un deplacement nul au temps $t=0$ et atteint le maximum au temps $t=T$.

Nous allons proposer une formule qui donne directement la valeur du déplacement des appuis à n'importe quelle position de la charge sur la poutre (c'est à dire à n'importe quel instant t) sans passer par aucun dévellopement analytique ou numérique.

IV.1.6.1 Pour l'appui à gauche

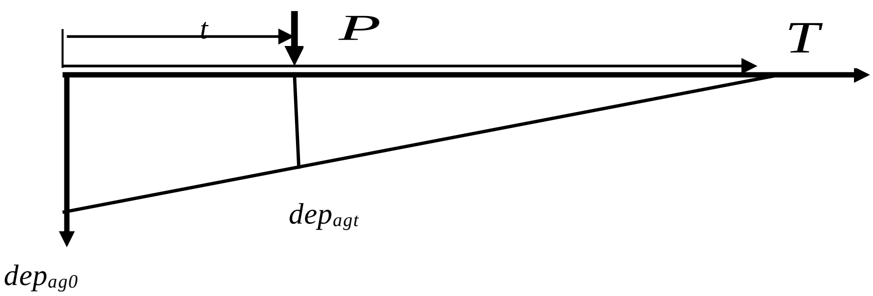


Figure IV-2 Déplacement de l'appui gauche en fonction du temps.

Nous allons utiliser le théorème de Thalès pour les comportements linéaires, le déplacement au temps t est alors comme suit (figure IV.2) :

$$\frac{dep_{agt}}{dep_{ag0}}=\frac{T-t}{T}$$

Ce qui donne : $dep_{agt} = \left(1 - \frac{t}{T}\right) \cdot dep_{ag0}$.

C.-à-d. : $dep_{agt} = \left(1 - \frac{t}{T}\right) \cdot \left(\frac{p}{EI \cdot k}\right)$, nous avons : $T = L / v$.

Ce qui donne la forme qui donne le déplacement de l'appui gauche à n'importe quel instant t comme suit :

$$dep_{agt} = \left(1 - \frac{v \cdot t}{L}\right) \cdot \left(\frac{p}{EI \cdot k}\right) \tag{4.58}$$

Posons : $$\vartheta_t = \frac{v \cdot t}{L} \tag{4.59}$$

Nous aurons finalement :

$$dep_{agt} = (1 - \vartheta_t) \cdot \left(\frac{p}{EI \cdot k}\right) = \frac{(1 - \vartheta_t) \cdot p}{EI \cdot k} \tag{4.60}$$

IV.1.6.2 Pour l'appui de droite

Malgré une tentative de simplification du coté droit, il n'était pas possible d'adopter la même procédure de simplification en utilisant la fonction de Green du coté droit pour atteindre une formule simplifiée en négligeant les termes de s^6 et s^3 de l'équation 4.57, car ces simplifications ne donnent pas la même solution obtenue par la fonction globale du coté gauche. Cependant, si nous utilisons la fonction de Green du coté gauche sur l'appui droit en appliquant la condition de continuité de déplacement, cela nous donne exactement la même forme simplifiée que sur l'appui gauche présenté dans l'équation 4.52 (symétrie du comportement des deux appuis mais à l'opposé), ainsi, nous pouvons utiliser directement la formule simplifiée pour le calcul du déplacement pour l'appui gauche et droit de manière identique.

Comme expliqué précedement, le déplacement de l'appui de droite est linéaire et opposé à celui de l'appui gauche, commençant par zéro à l'instant $t = 0$ jusqu'à atteindre la valeur maximale à l'instant $t = T$. Cela est détérminé par la formule développée complète sans aucune simplification, et cette valeur correspond à $\frac{p}{EI \cdot k}$ en comparant les valeurs numériquement et par la condition de symétrie de la fonction de Green.

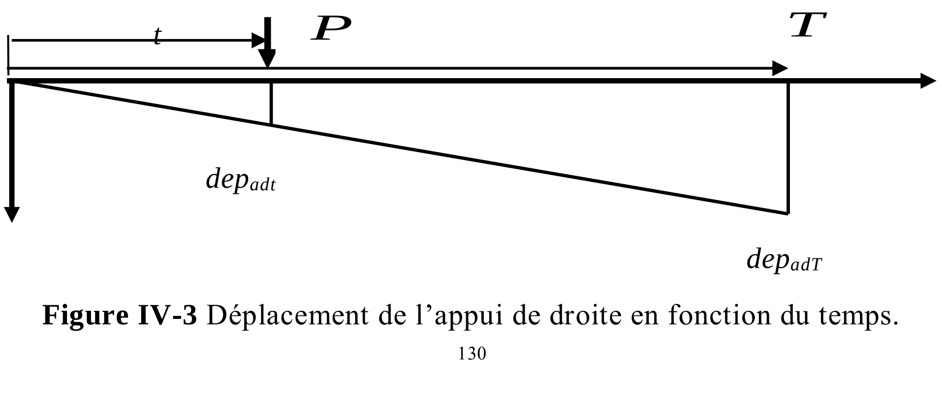


Figure IV-3 Déplacement de l'appui de droite en fonction du temps.

Nous allons alors utiliser le théorème de Thalès pour l'appui de droite, le déplacement au temps t est alors comme suit (figure IV.3) : $\frac{dep_{adt}}{dep_{adT}} = \frac{t}{T}$

Ce qui donne : $dep_{adt} = \frac{t}{T} \cdot dep_T$, avec : $dep_{adT} = p/(EI \cdot k)$ et $T = L/v$

Nous aurons :

$$dep_{adt} = \frac{v \cdot t}{L} \cdot \frac{p}{EI \cdot k} \tag{4.61}$$

En utilisant l'équation 4.59, nous obtenons la forme simplifiée qui donne le déplacement de l'appui droit à n'importe quel instant t comme suit :

$$dep_{adt} = \frac{p \cdot \vartheta_t}{EI \cdot k} \tag{4.62}$$

D'après cette formule, nous remarquons que le déplacement est en relation proportionnelle avec la charge P et sa vitesse de roulement, et inversement proportionnel à la rigidité de la poutre EI, aux raideurs d'appuis k et à la longueur de la poutre L.

IV.2 Analyse des résultats obtenus

Cette analyse porte essentiellement sur l'évolution des déplacements dynamiques à n'importe quel point sur la poutre en fonction du temps, en prenant en considération les conditions aux limites de la poutre (la poutre est appuyée sur ressorts verticaux), la rigidité flexionnelle de la poutre EI, la raideur d'appuis k et la vitesse de roulement de la charge v, en variant un paramètre tout en maintenant les autres constants.

Nous présentons dans cette partie une étude paramétrique avec les données de Mehri B. (2009) telles qu'elles sont présentées dans le tableau IV.1.

Tableau IV-1 Données du problème (Mehri B., 2009).

L (m)	v (m/s)	m (kn)	EI (kn.m^2)	P (kn)	k (kn/m)
6	0.6	0.8333	$140{,}625 \cdot P$	1	10

IV.2.1 Présentation des formes des variables et de la nouvelle solution

Les formes graphiques de la fonction de Green sont détaillées pour le cas d'une poutre appuyée sur des ressort verticaux des deux côtés de raideur k.

Nous exposons les graphiques des variables C1, C2, C3 et C4, des variables C5, C6, C7 et C8, pour la fonction générale, la nouvelle fonction et la fonction simplifiée pour prouver que tous les développements et simplifications n'affectent ni les paramètres de la fonction de Green (C1 à C8), ni la fonction de Green elle-même. Ensuite, nous présentons la fonction de Green à gauche et à droite en fonction du point d'application de la charge. Nous présentons deux cas, lorsque la charge est appliquée au milieu de la poutre, appliquée à une distance $u = L/2$, puis lorsqu'elle est décalée du milieu, appliquée à une distance u.

Les données de l'exemple sont présentées dans le tableau IV.1.

IV.2.1.1 Les fonctions C1, C2, C3 et C4 à gauche

Les formules générales, les nouvelles formes ou les formules simplifiées produisent exactement la même forme pour les variables C1, C2, C3 et C4, comme le montre la figure IV.4.

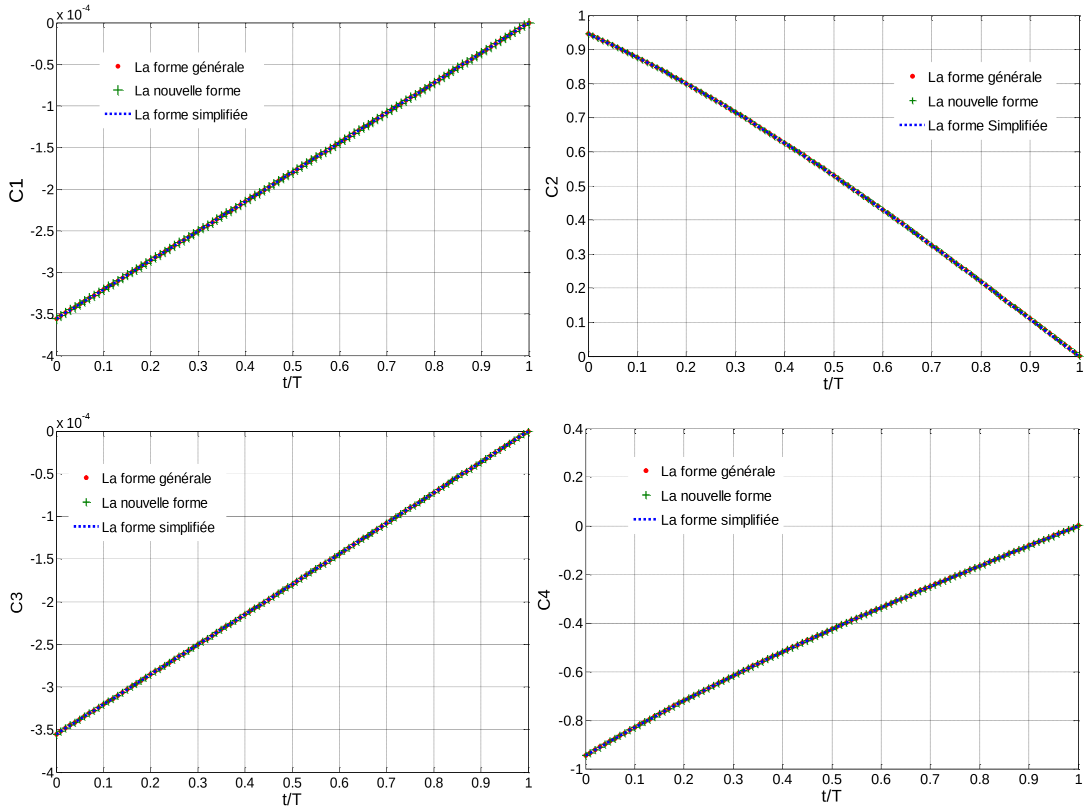


Figure IV-4 Formes des variables $C1$, $C2$, $C3$ et $C4$ pour la forme générale, la nouvelle forme et la forme simplifiée.

IV.2.1.2 Les fonctions C5, C6, C7 et C8 à droite

De même, les formules générales, les nouvelles formes ou les formules simplifiées donnent exactement la même forme pour les variables C5, C6, C7 et C8, comme illustré dans la figure IV.5.

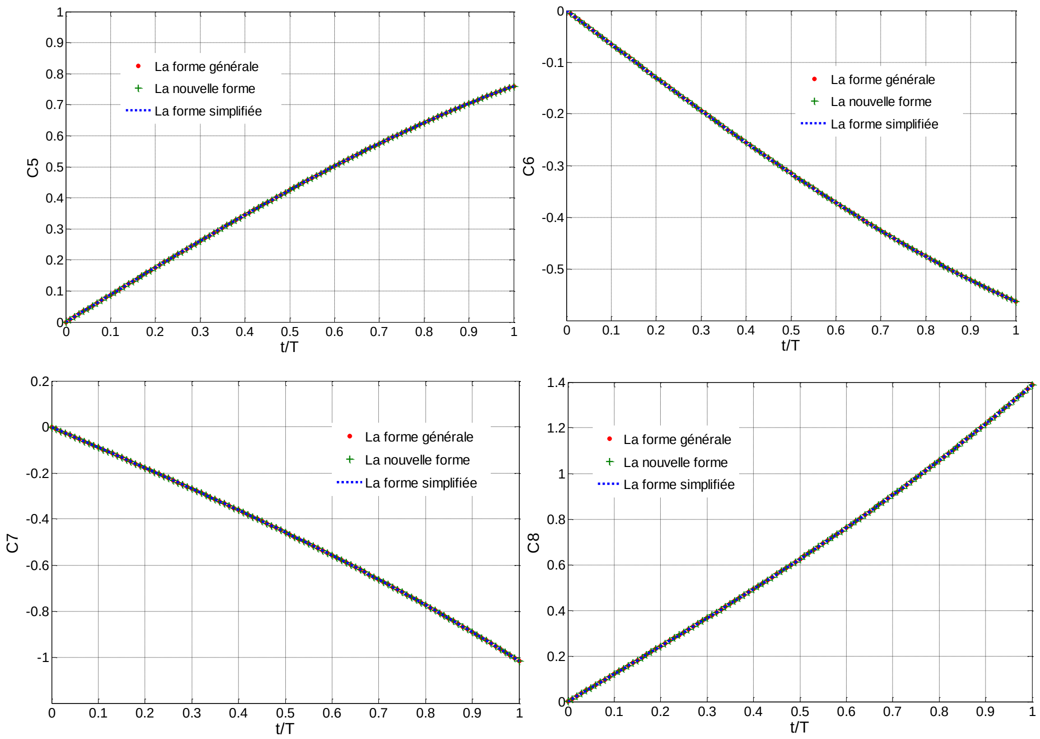


Figure IV-5 Formes des variables $C5$, $C6$, $C7$ et $C8$ pour la forme générale, la nouvelle forme et la forme simplifiée.

IV.2.1.3 La forme complète des valeurs C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7 et C8

Il y a une symétrie des variables à gauche par rapport à l'axe des abscisses, où C1 correspond à C3 et C2 correspond à C4. De même, il y a une symétrie des variables à droite par rapport à l'axe des abscisses, où C5 correspond à C6 et C7 correspond à C8, comme indiqué dans la figure IV.6.

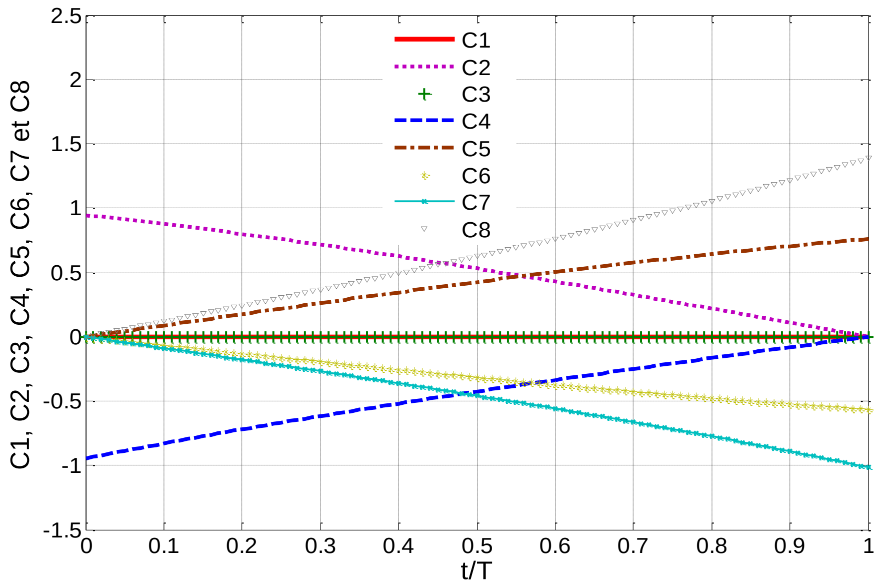
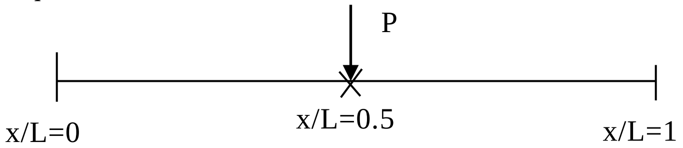


Figure IV-6 Formes des variables C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7 et C8 pour la nouvelle forme simplifiée.

IV.2.1.4 La nouvelle fonction à gauche et à droite pour P appliquée à mi travée

Nous présentons les deux fonctions à gauche et à droite sur toute la longueur de la poutre, il est à noter que l'application de la fonction à gauche ne peut être prise en considération que dans l'intervalle de x=0 à L/2. Pour le reste de la longueur, c'est la fonction à droite qui est appliquée.

D'après le principe d'Hamilton, la fonction de Green à gauche doit être symétrique à la fonction à droite pour des conditions d'appuis symétriques, ce qui est le cas pour toutes les formules présentées figure IV.7. Sur cette même figure, nous remarquons de plus que malgré la réécriture et la simplification de quelques valeurs, les formules donnent exactement la même forme.



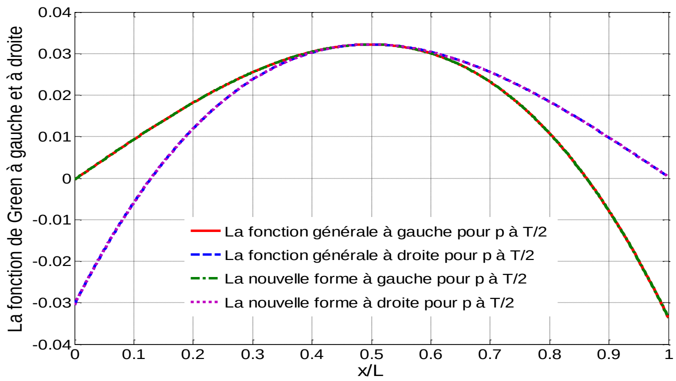


Figure IV-7 La nouvelle fonction à gauche et à droite pour la forme générale et la nouvelle forme pour P appliqué au milieu de la poutre $u = L/2$.

En ce qui concerne la forme simplifié, elle existe uniquement à gauche. Pour cette raison nous n'avons pas pu présenter la forme simplifiée sur la figure IV.7. Cette fonction simplifiée est représenté avec la fonction générale et la nouvelle forme sur la figure IV.8.

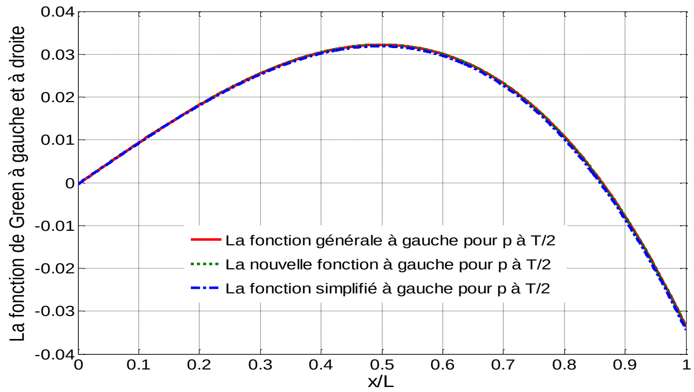


Figure IV-8 Les fonctions à gauche pour la forme générale, la nouvelle forme et forme simplifiée pour P appliquée au milieu de la poutre à $u = L/2$.

IV.2.1.5 La fonction de Green à gauche pour P appliquée à t=T/4 et à droite pour P appliquée à t=3.T/4

D'après le principe d'Hamilton, la fonction de Green doit être symétrique si elle est appliquée à des positions symétriques sur une poutre avec des conditions d'appuis symétriques.

Lorsque la charge est appliquée au milieu de la poutre, les fonctions à gauche et à droite sont complètement symétriques (figure IV.7). La même remarque lorsque la charge est appliquée sur n'importe quel point le long de la poutre. Par exemple, la fonction de Green à gauche pour la charge P appliquée à $u = L/4$ est complètement symétrique à la fonction de Green à droite pour la charge P appliquée à $u = 3 \cdot L/4$ figure IV.9.

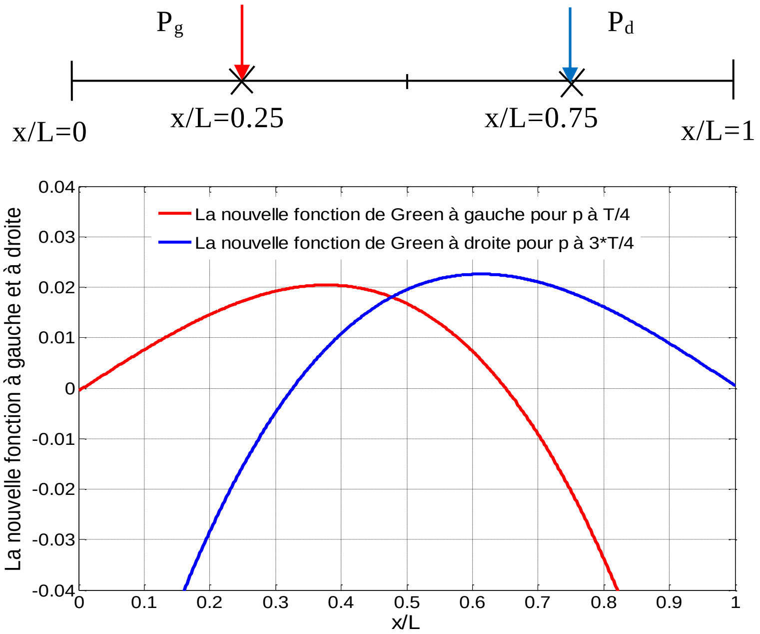


Figure IV-9 La nouvelle fonction à gauche pour P appliquée à $t = T/4$ et à droite pour P appliquée à $t = 3 \cdot T/4$.

IV.2.2 Validation des résultats

IV.2.2.1 Validation par rapport à la méthode analytique

La validation des nouvelles formules simplifiées va être effectuée par rapport aux formules analytiques de la méthode modale et à celle du calcul statique.

Pour l'étude analytique, le développement des équations est présenté dans le travail de Henchi K. (1995) et détaillée dans le chapitre 2, la solution est comme suit :

$$y_j(t) = \sqrt{\frac{2}{m_l L}} \left(\frac{F}{\omega_j^2 - \Omega_j^2} \right) \left(\sin(\Omega_j t) - \left(\frac{\Omega_j}{\omega_j} \right) \sin(\omega_j t) \right)$$

Avec : $\Omega_j = \dfrac{j \pi v}{L}$

Et :

$$w_j(t) = \phi_j(t).y_j(t)$$

$$w_j(t) = \frac{2F}{m_l L} \frac{1}{\left(\omega_j^2 - \Omega_j^2\right)} \left(\sin\left(\Omega_j t\right) - \left(\frac{\Omega_j}{\omega_j}\right) \sin\left(\omega_j t\right) \right) \sin \frac{j\pi x}{L} \quad , \quad 0 \leq t \leq \frac{L}{v}$$

En prenant le même exemple de Mehri B. (2009) et en introduisant les mêmes données dans le programme écrit en fonction de Green sur appuis élastiques de raideur $k = 10kn/m$, nous obtenons une parfaite concordance des résultats avec ceux de la méthode analytique dans le cas de la poutre simplement appuyée sur les deux cotés, comme présenté sur la figure IV.10.

Le déplacement maximal statique dans ce cas est de : $u_{st} = 0.032m$.

Les résultats donnés par la solution simplifiée sont très proches de ceux de la méthode analytique et statique comme indiqué sur les figures IV.10 et IV.11, et présentent un écart et une amplification dynamique plus faible par rapport à la méthode statique, selon les résultats mentionnés dans le tableau IV.2.

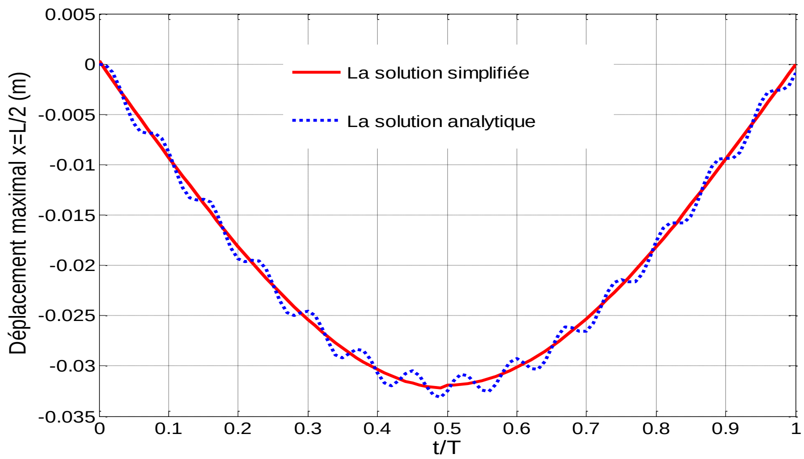


Figure IV-10 Déplacement maximal obtenu par la méthode analytique et celui de la fonction simplifiée.

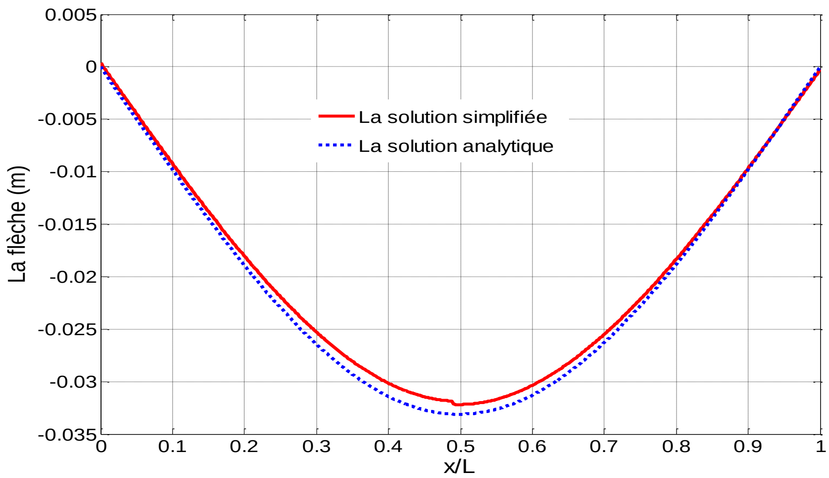


Figure IV-11 Flèche maximale obtenue par la méthode analytique et celui de la nouvelle fonction simplifiée.

Tableau IV-2 Flèches pour la méthode analytique et par la solution simplifiée.

	Fléche théorique (m)	Fléche Dynamique (m)	Ecart Δ (m)	FAD
La méthode analytique	0.032	0.03311	0.0011	1.0347
La solution simplifiée avec $k=10kn/m$	0.032	0.03218	0.00018	1.0056

IV.2.2.2 Validation par rapport aux résultats numériques

Nous allons prendre l'exemple de Foda A. et Abduljabbar Z. (1998) qui ont utilisé la fonction de Green pour une poutre simplement appuyée, ils ont présenté le déplacement maximal à $x=L/2$ pour plusieurs vitesses de la charge comme suit : $v=25m/s$, $50m/s$ et $100m/s$ 100 m/s. Les données du problème sont les mêmes de (Michaltos et all., 1996) comme suit :

$L=50m$, $E=3.34\cdot 10^{10}kn/m^2$, $I=1.042m^4$, $m_l=4800kn/m$ et $m=500000kn$.

Nous présentons sur la figure IV.12 et dans le tableau IV.3 le déplacement maximal par les deux méthodes : l'analytique et celle utilisant la nouvelle fonction de Green.

La vitesse critique pour l'exemple de Foda A. et Abduljabbar Z. (1998) est la suivante :

$v_{cri}=\dfrac{\pi}{L}\cdot\sqrt{\dfrac{EI}{m}}$ ce qui donne : $v_{cri}=23.9145m/s$.

Nous utilisons des vitesses de 50 et $100m/s$ pour la validation des résultats.

- Pour $v=25m/s$ et $k=10kn/m$.

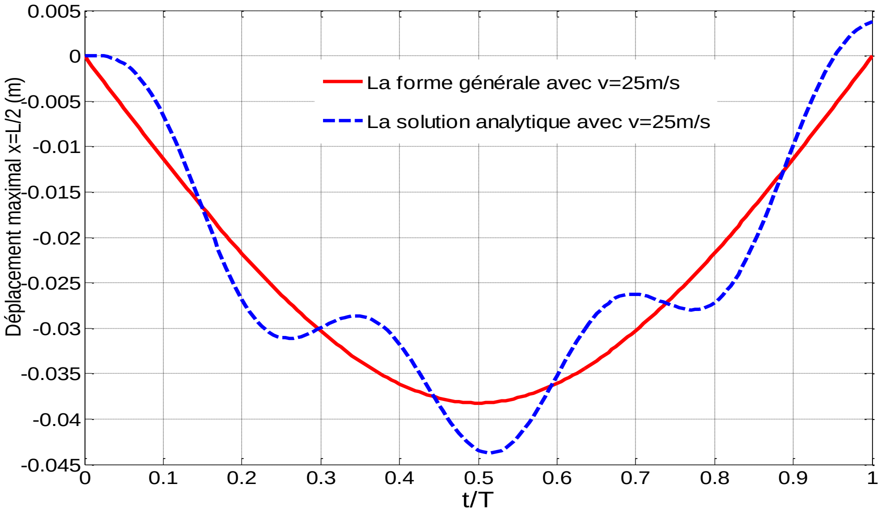


Figure IV-12 Déplacement maximal pour $v=25m/s$.

Le déplacement statique dans ce cas est de $u_{st}=0.0374m$, ce qui donne une amplification dynamique de 1.0218 pour la forme générale et de 1.1614 pour la solution analytique.

Ces résultats montrent que cette disposition des ressorts diminue les effets dynamiques induits par la charge roulante sur la poutre, comme le montre la figure IV.13.

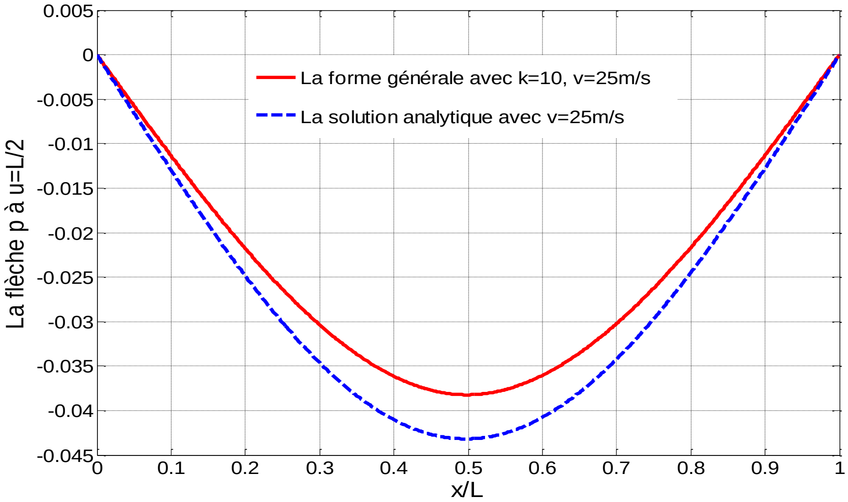


Figure IV-13 La flèche de la poutre par la nouvelle forme et par la méthode analytique pour $v = 25 m/s$ et P à $u = L/2$.

Tableau IV-3 Déplacement maximal (m) pour $v = 25 m/s$.

x/L	La forme générale	La forme analytique	(Foda A. et Abduljabbar Z., 1998)
0	$7.415.10^{-7}$	0	0
0.1	-0.01134	-0.006565	-0.007
0.2	-0.02176	-0.02679	-0.026
0.3	-0.03032	-0.02996	-0.03
0.4	-0.03612	-0.03175	-0.03
0.5	-0.03823	-0.04345	-0.042
0.6	-0.03608	-0.03522	-0.032
0.7	-0.03027	-0.02627	-0.027
0.8	-0.02171	-0.02715	-0.01
0.9	-0.01131	-0.009884	-0.012
1	$-7.358.10^{-7}$	0.003746	0.007

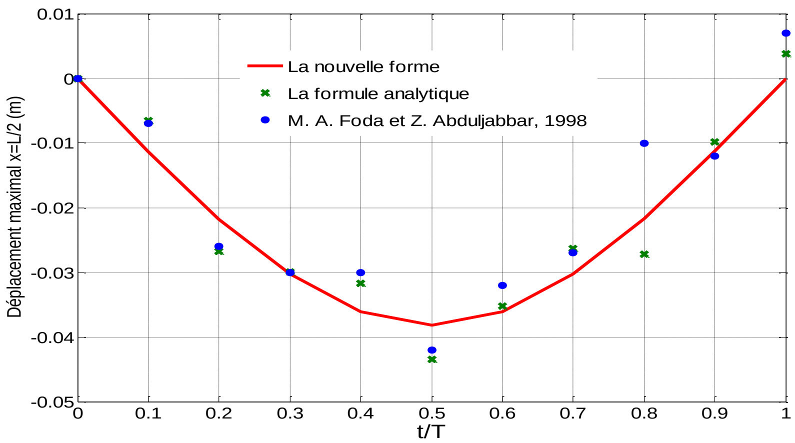


Figure IV-14 Déplacement maximal par la nouvelle formule, la méthode analytique et ceux de (Foda A. et Abduljabbar Z., 1998) pour $v = 25 m/s$.

La forme des déplacements, telle que présentée par Foda A. et Abduljabbar Z. (1998) ainsi que dans l'approche analytique, suit une forme ondulatoire. Ainsi, certains points se positionnent en dessus et d'autres en dessous du déplacement maximal par rapport à la nouvelle méthode comme illustré sur les figures IV.12 et IV.14.

Les résultats de la forme générale sont très proches de ceux obtenus par la méthode analytique et par Foda A. et Abduljabbar Z. (1998).

Tableau IV-4 Effet dynamique des trois méthodes pour $k = 10kn/m$ et $v = 25$, 50 et $100m/s$.

	FAD par la forme générale	FAD par la solution analytique	FAD (Foda A. et Abduljabbar Z., 1998)
$v = 25m/s$	1.0218	1.1614	1.1226
$v = 50m/s$	1.0943	1.3581	1.3632
$v = 100m/s$	1.5283	1.7152	1.6304

Ce résultat montre que la disposition des ressorts diminue les effets dynamiques dus à la charge roulante sur la poutre, tandis que l'amplification dynamique augmente avec l'augmentation de la vitesse de roulement. Cela est observé pour les trois méthodes de calcul, comme indiqué dans le tableau IV.4 et sur la figure IV.15.

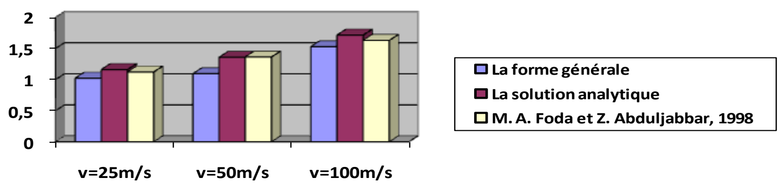


Figure IV-15 Effet dynamique des trois méthodes pour $k = 10kn/m$ et $v = 25$, 50 et $100m/s$.

IV.2.3 Déplacement maximal de la poutre

Comme expliqué dans la partie théorique, tous les développements et simplifications pris en compte doivent fournir la même solution en travée et sur appuis proche de la solution générale. Nous présentons sur la figure IV.16 la solution générale, la nouvelle solution après réécriture et développement, ainsi que la solution simplifiée. D'après la nouvelle formule qui donne le déplacement en travée ou sur appuis (les nouvelles formules ou les formules simplifiées), le déplacement en travée ou sur appuis est inversement proportionnel à la rigidité de la poutre EI ainsi qu'à la raideur des ressorts k . Autrement dit, l'augmentation de EI ou k diminue les déplacements en travée et sur appuis, tandis que, la diminution de EI et k augmente les déplacements en travée et sur appuis.

Le déplacement statique en travée se calcul par la formule considérant la poutre simplement appuyée, pour des raisons à justifier plus tard. L'utilisation de la formule générale ou la nouvelle formule simplifiée en travée donne pratiquement les mêmes résultats comme le montre la figure IV.16.

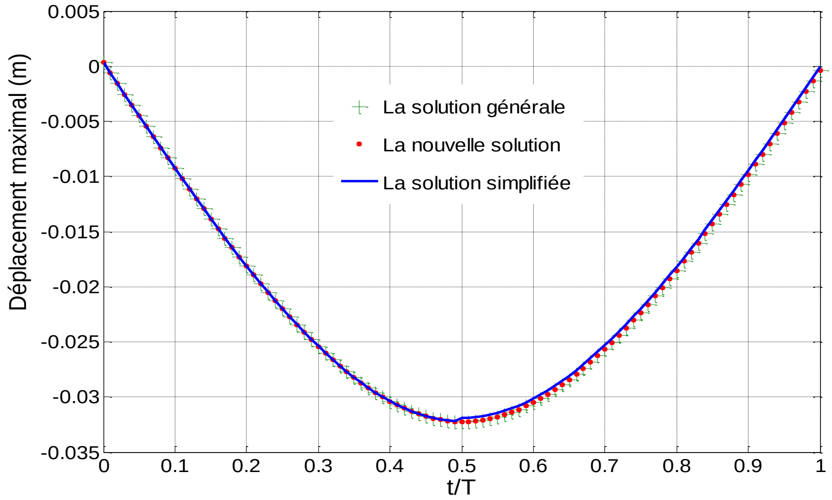


Figure IV-16 Déplacement maximal à x=L/2.

L'utilisation de la formule générale, de la nouvelle formule, ou de la formule simplifiée ou temporelle pour l'appui gauche et de droite donne pratiquement les mêmes résultats, comme présenté dans le tableau IV.5.

Tableau IV-5 Déplacement maximal pour les deux appuis.

	Déplacement de l'appui gauche (m) pour $t=0$	Déplacement de l'appui à droite (m) pour $t=T$
La solution générale y	$-7.1103.10^{-4}$	$7.1119.10^{-4}$
La nouvelle solution y_n	$-7.1103.10^{-4}$	$7.1123.10^{-4}$
La formule simplifiée y_{ns}	$-7.1111.10^{-4}$	$7.1123.10^{-4}$
La formule temporelle y_t	$-7.111.10^{-4}$	$-7.111.10^{-4}$

IV.2.4 Explication du comportement de la poutre et des appuis

Au temps $t=0$, l'appui gauche subit un effort de compression maximal d'intensité P, lorsque la charge se déplace, elle s'éloigne de l'appui gauche, pour cela l'intensité de l'effort de compression diminue jusqu'à atteindre une valeur négligeable à $x=L$ (la charge s'applique complètement sur l'appui droit à ce moment) comme illustré sur la figure IV.18.

Au temps $t=0$, malgré que la charge est complètement appliquée sur l'appui gauche, la poutre et l'appui de droite (figure IV.17) vont s'entraîner avec le ressort qui va se comprimer et créer un effort de flexion sur la poutre et de traction sur l'appui droit. Par conséquent, bien que ces efforts soient très petits, ils sont remarqués en zone où la charge est appliquée très proche de l'appui gauche et juste au début du trafic (a un temps t très petit), comme illustré sur la figure IV.21.

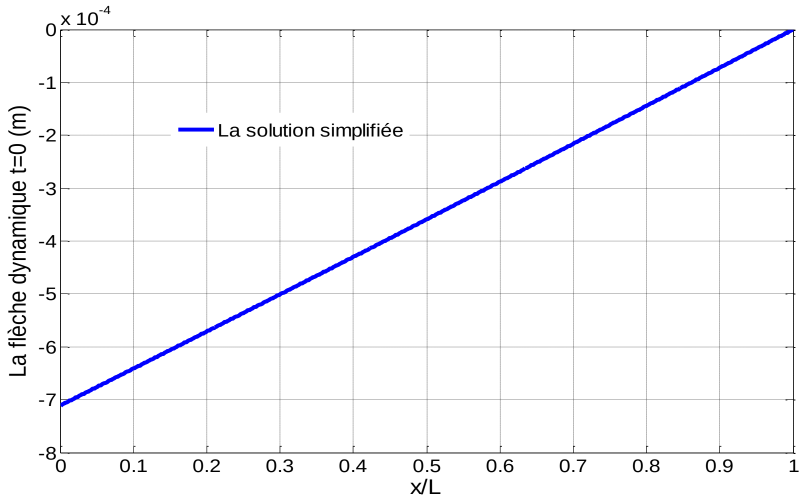


Figure IV-17 La flèche dynamique de la poutre quand la charge est sur appui gauche $t=0$.

Quand la charge P s'éloigne de l'appui gauche, elle se rapproche de l'appui de droite, qui subit par conséquent un effort de compression d'intensité croissante, jusqu'à ce qu'il atteigne une valeur maximale de compression, notée P, au temps $t=T$ (lorsque la charge est sur l'appui de droite). Le comportement de l'appui de droite est l'inverse de celui de l'appui de gauche, comme illustré sur la figure IV.18.

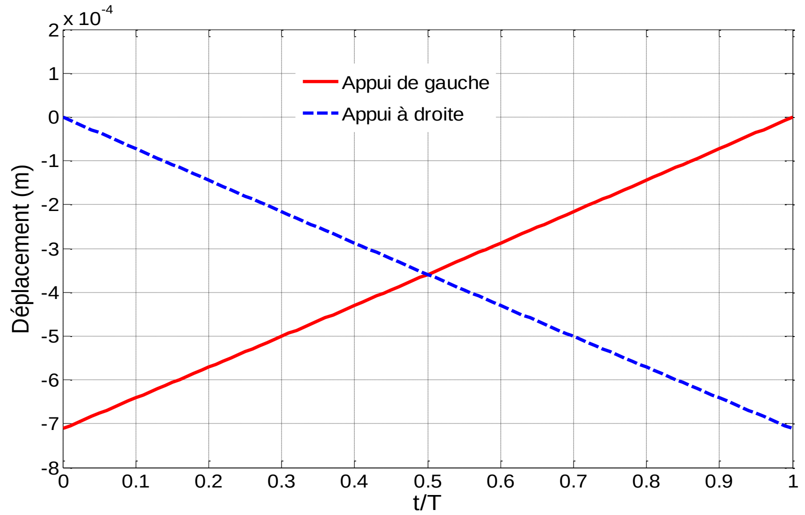


Figure IV-18 Le déplacement aux niveaux d'appuis.

Au temps $t=T/2$ (lorsque la charge est appliquée à mi travée), les deux ressorts sont comprimés, le ressort gauche tend à revenir à sa position initiale tandis que le ressort de l'appui de droite tend à s'allonger pour atteindre le déplacement maximal, comme illustré sur la figure IV.19, avec un zoom sur la figure IV.20.

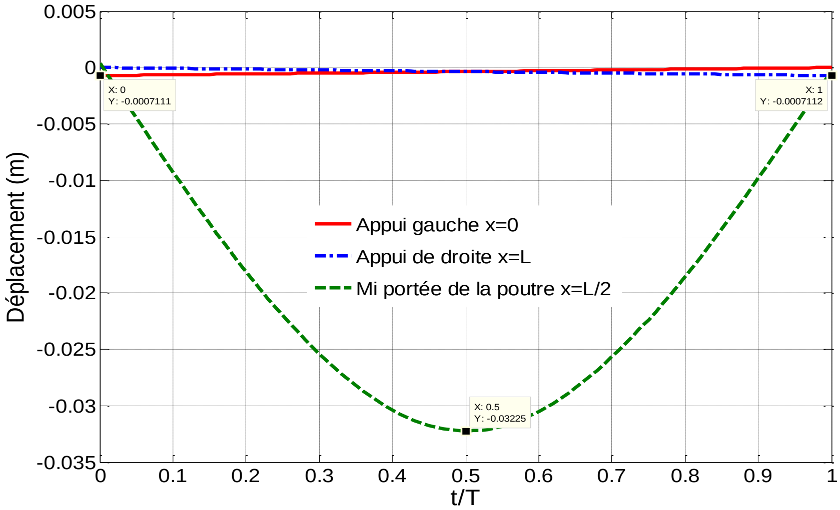


Figure IV-19 Le déplacement aux niveaux des appuis $x=0$ et $x=L$, et du point de mi-portée de la poutre $x=L/2$.

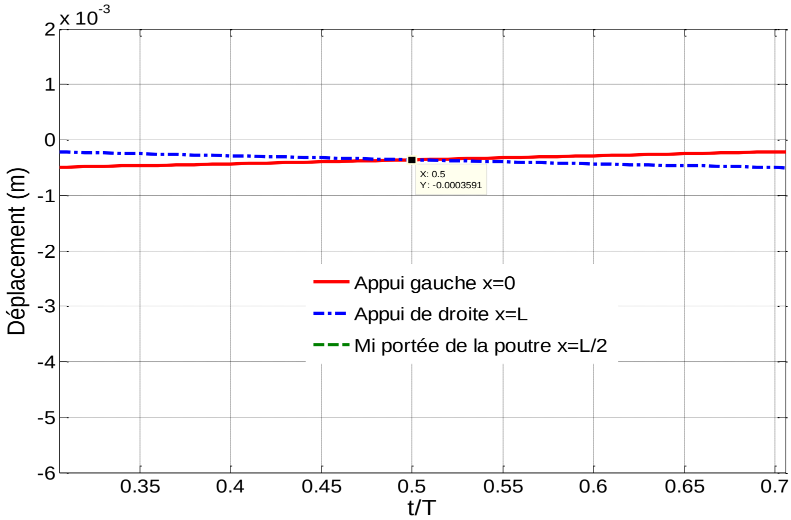


Figure IV-20 Zoom sur le comportement des appuis à $x=0$ et $x=L$ au temps $t=T/2$.

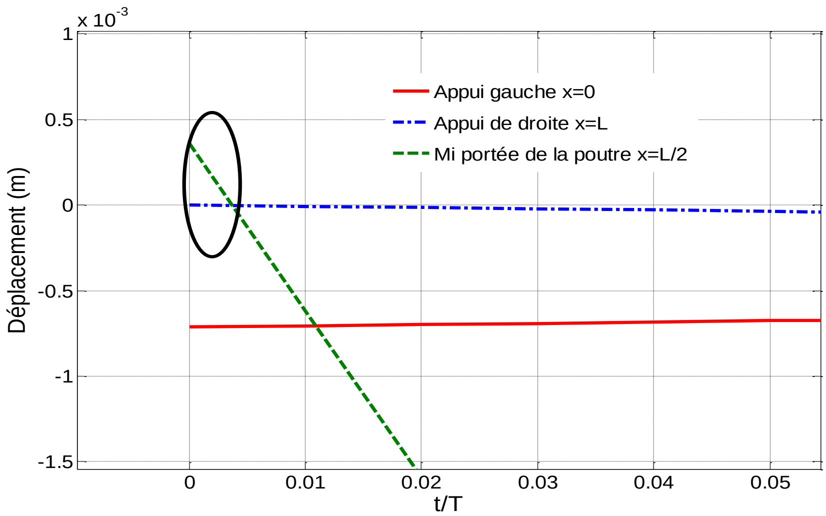


Figure IV-21 Zoom sur le comportement des appuis et du point $x=L/2$ au temps $t=0$

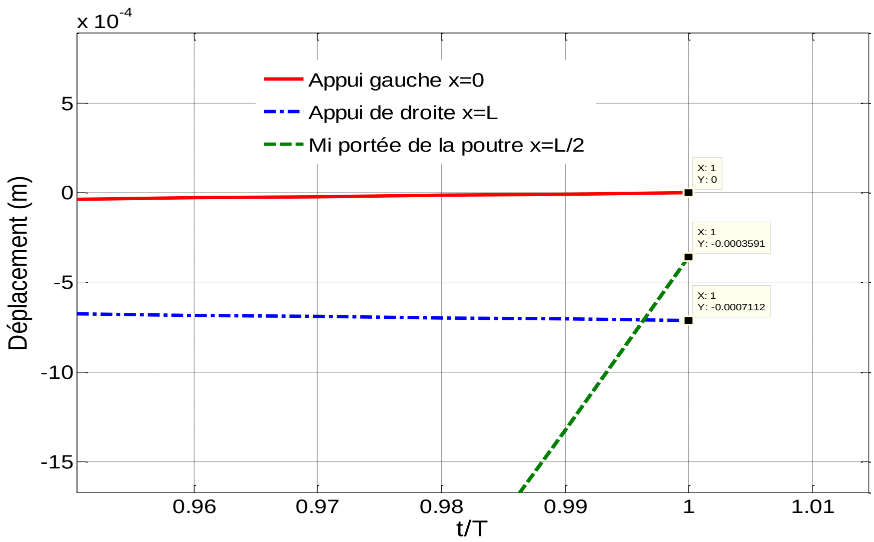


Figure IV-22 Zoom sur le comportement des appuis et du point $x = L/2$ au temps $t = T$ et moins.

Concernant la poutre, elle est soumise à une force P qui se déplace à vitesse constante. Nous allons examiner le point médian ($x = L/2$) pour le déplacement maximal. Dans le cas où la poutre est simplement appuyée, ce point ne subit aucun déplacement au temps $t = 0$, cependant, étant donné qu'elle est supportée par des ressorts verticaux des deux côtés dans cette étude, la poutre suit le comportement du ressort même lorsque la charge est appliquée sur l'appui au temps $t = 0$. Ce comportement persiste jusqu'à ce que la charge atteigne une position où l'effort de traction induit par flexion de la poutre sous l'effet du ressort s'annule (figures IV.19 et IV.21). A ce moment, les efforts redeviennent des efforts de compression à mesure que la charge mobile se rapproche du point de mi travée au temps $t = T/2$. Lorsque la charge se rapproche de l'appui de droite qui va commencer à se comprimer au temps $t = T$, l'effort sur l'appui gauche, qui reste un effort de compression, devient négligeable. Cela entraîne une legère compression au centre de la poutre et un raccourcissement maximal du ressort de l'appui de droite, comme illustré sur les figures IV.19 et IV.22.

Tableau IV-6 Déplacements d'appuis et déplacement maximal en travée.

	Déplacement appui gauche $x = 0$	Mi travée de la poutre $x = L/2$	Déplacement appui de droite $x = L$
$t = 0$	$-7.11.10^{-4}$	$3.603.10^{-4}$	$4.194.10^{-8}$
$t = T/2$	$-3.52.10^{-4}$	$3.225.10^{-2}$	$-3.52.10^{-4}$
$t = T$	$-4.194.10^{-8}$	$-3.579.10^{-4}$	$-7.112.10^{-4}$

Le déplacement statique maximal de la poutre est : $u_{st} = 0{,}032m$.

Le déplacement maximal de l'appui gauche est : $dep_{ag} = P/(EI \cdot k) = 7.1111.10^{-4}m$.

IV.2.5 Effet de la rigidité de la poutre sur le comportement en travée et sur appuis

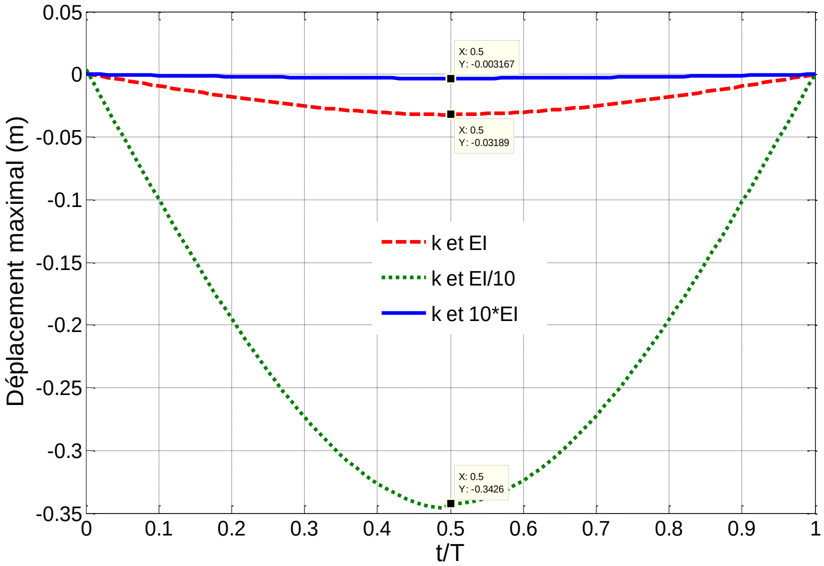


Figure IV-23 Déplacement maximal à $x = L/2$ pour k et EI , $EI/10$ et $10 \cdot EI$.

L'augmentation de la rigidité de la poutre EI diminue directement le déplacement maximal. Cette diminution est proportionnelle à l'augmentation de la rigidité de la poutre EI , inversement, la diminution de la rigidité de la poutre EI augmente par conséquent le déplacement maximal, comme le montre la figure IV.23.

Comme illustré sur la dite figure, une augmentation de la rigidité de la poutre EI par un facteur de 10 ou plus tend à annuler le déplacement maximal de la poutre, ce qui considère la poutre comme rigide.

La flèche statique de la poutre pour les conditions d'appuis simplement appuyée ss-ss est : $y_{stss} = \dfrac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$

L'amplification dynamique est calculée par le rapport entre la flèche dynamique et statique comme suit : $FAD = \dfrac{y_{dyn}}{y_{st}}$

Tableau IV-7 Effet de la rigidité de la poutre sur le déplacement maximal.

	Déplacement statique (m)	Déplacement dynamique par la solution simplifiée (m)	L'ecart Δ (m)	FAD
Cas 1 : k , $EI/10$	0.32	0.3426	+0.0226	1.0706
Cas 2 : k , EI	0.032	0.03189	-0.00011	0.9966
Cas 3 : k , EI	0.0032	0.003167	-0.000033	0.9897

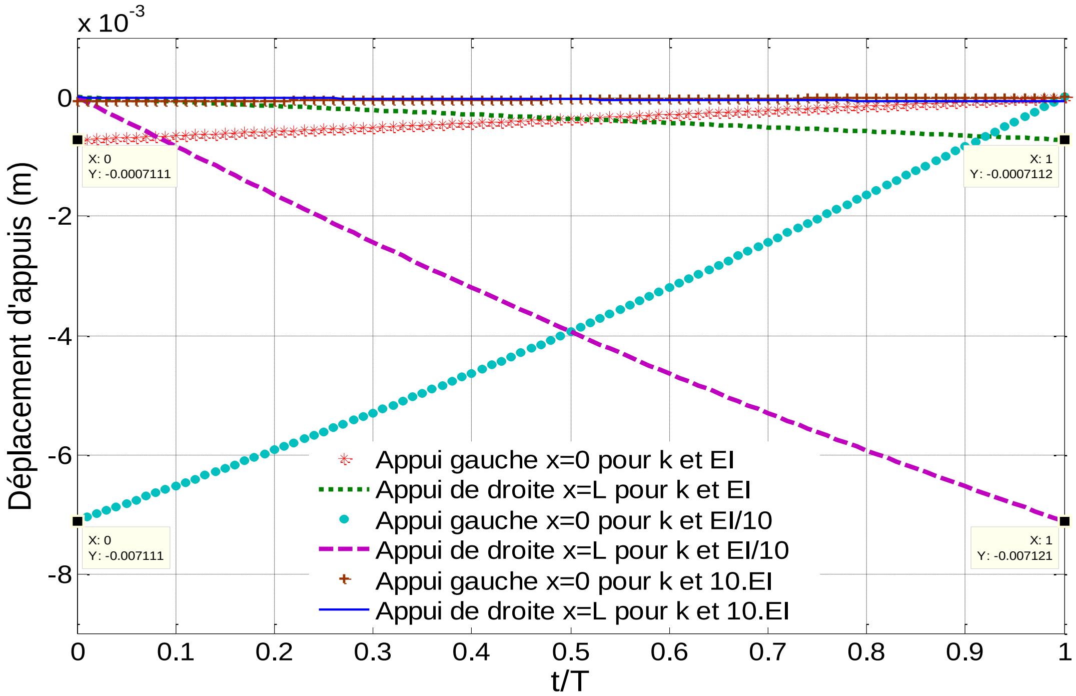


Figure IV-24 Déplacements d'appuis pour k et EI , $EI/10$ et $10 \cdot EI$.

En diminuant la rigidité de la poutre EI par un facteur de 10, les déplacements des ressorts augmentent également par le même facteur de 10, comme le prouve également la formule développée. La perte de rigidité de la poutre EI diminue le couplage de rigidité au niveau de l'appui gauche, et la même remarque s'applique à l'appui de droite, comme illustré sur la figure IV.24. L'augmentation de la rigidité de la poutre EI augmente par conséquent la rigidité au niveau des appuis, ce qui entraîne la diminution des déplacements à ce niveau ce qui donne des appuis rigides aux déplacements verticaux, comme le montrent la nouvelle formule et la figure IV.24.

Tableau IV-8 Effet de la rigidité de la poutre sur le déplacement d'appuis.

	Déplacement de l'appui gauche (m)	Déplacement de l'appui à droite (m)
Cas 1 : k , $EI/10$	0.007111	0.007121
Cas 2 : k , EI	0.0007111	0.0007121
Cas 3 : k, 10.EI	≈0	≈0

IV.2.6 Effet de la raideur des ressorts sur le comportement de la poutre en travée et sur appuis

La raideur du ressort a un effet remarquable sur la poutre lorsque la charge est proche des appuis (les positions aux temps $t = 0$ et $t = T$). Cependant, cet effet devient négligable à mesure que l'on se rapproche du point où le déplacement est maximal au temps $t = T/2$ (figure IV.25).

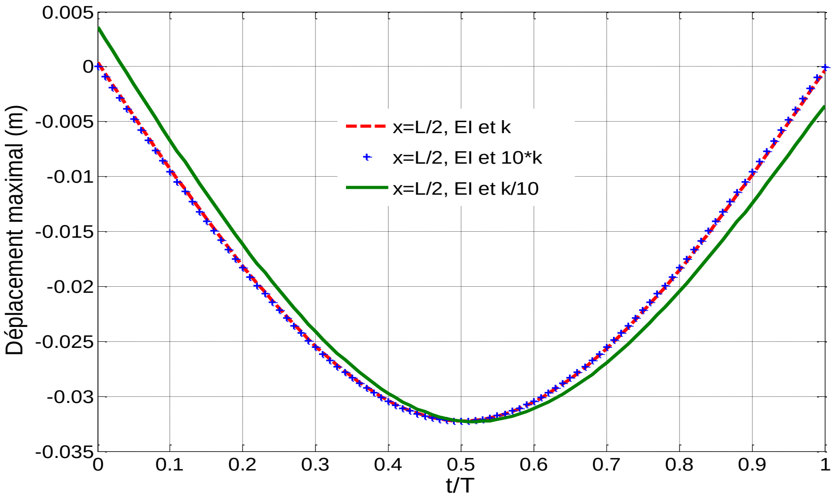


Figure IV-25 Déplacement maximal en travée $x = L/2$ pour k, $10 \cdot k$ et $k/10$.

Pour les cas de raideurs k et $10 \cdot k$, on peut dire que le point à mi travée ne subit aucun déplacement pour $t = 0$ (lorsque la charge est appliquée sur appui et k d'une valeur considérable), comme illustré dans la figure IV.26. Cependant, lorsque la charge roule en se rapprochant du milieu de la poutre $t = T/2$, son effet devient plus important, entraînant un déplacement maximal considérable sur la poutre.

Dans le cas de petites raideurs d'appuis, c'est la poutre qui subit la totalité des déformations (faible couplage entre la rigidité de la poutre et la raideur des appuis). Les appuis sont alors considérés comme rigides aux déplacements verticaux (figures IV.26 et IV.27).

Au temps $t = T$ (lorsque la charge quitte la poutre), le point $x = L/2$ subit un déplacement qui tend à s'annuler, surtout pour des raideurs d'appuis négligeables (comme la raideur $k/10$ dans l'exemple), comme le montre les figures IV.25 et IV.28. Le comportement est similaire à celui d'une poutre simplement appuyée.

Le déplacement maximal de l'appui gauche est : $dep_{ag} = p/(EI \cdot k) = 0.0071m$.

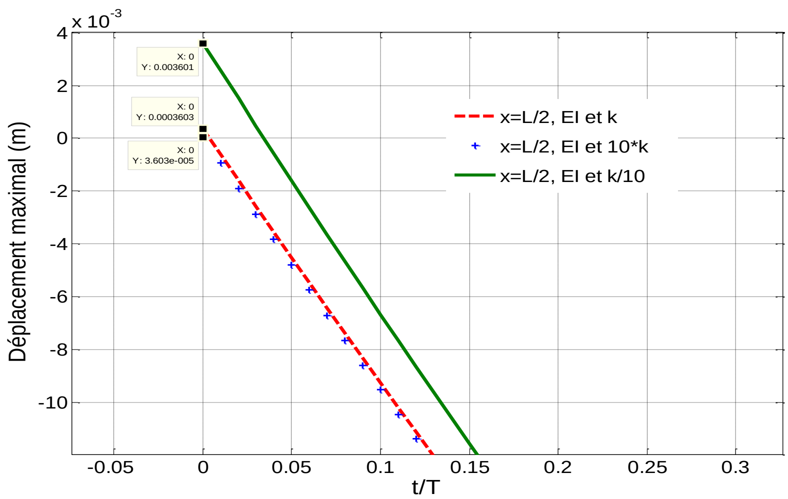


Figure IV-26 Zoom sur le déplacement maximal en travée $x = L/2$ au temps $t = 0$.

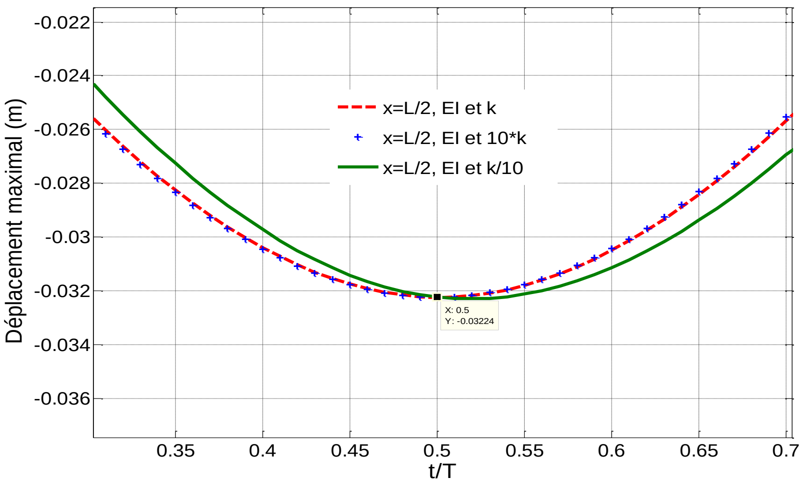


Figure IV-27 Zoom sur le déplacement maximal en travée au temps $t = T/2$.

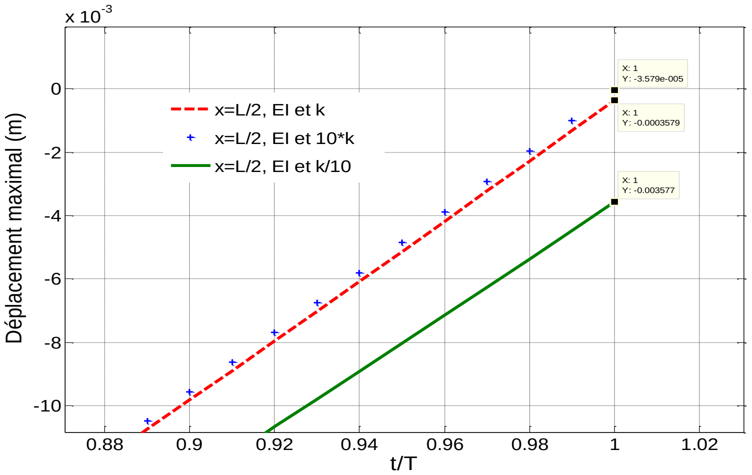


Figure IV-28 Zoom sur le déplacement en travée $x = L/2$ au temps $t = T$.

Tableau IV-9 Effet de k sur le comportement en travée $x = L/2$ en terme de déplacement maximal.

	$t \approx 0$ La charge appliquée le plus loin possible du point analysé à gauche	$t = T/2$ La charge sur le point analysé	Le déplacement maximal statique	$t \approx T$ La charge appliquée le plus loin possible du point analysé à droite
Pour $10 \cdot k$	0.00003603	0.03224	0.032	0.00003579
Pour k	0.0003603	0.03224	0.032	0.0003579
Pour $k/10$	0.003601	0.03224	0.032	0.003577

Inversement au comportement du point $x = L/2$ influencé par les raideurs d'appuis qui à donner des déplacement importants à mi travée pour t=T/2 et qui tend à s'annuler pour les cas de charges proches des appuis (pour $t = 0$ et $t = T$), les appuis subissent des déplacements importants lorsque la charge est la plus proche possible des points de calcul (déplacement maximal de l'appuis gauche pour $t = 0$, c'est-à-dire lorsque la charge est appliquée sur l'appui gauche, tandis que le déplacement est maximal pour l'appui de droite lorsque $t = T$, c'est-à-dire lorsque la charge est appliquée sur l'appui de droite). Ce déplacement est influencé par la valeur de la raideur du ressort de l'appui : plus la raideur est grande (le cas $10 \cdot k$ dans l'exemple), plus le déplacement diminue, et plus la raideur diminue (cas $k/10$ dans l'exemple), plus le déplacement des appuis est important. Le comportement des appuis est présenté sur la figure IV.29.

Pour le cas de la raideur $10 \cdot k$, les déplacements des appuis de gauche et de droit sont presque nuls, ce qui considère ces appuis comme rigides aux déplacements verticaux.

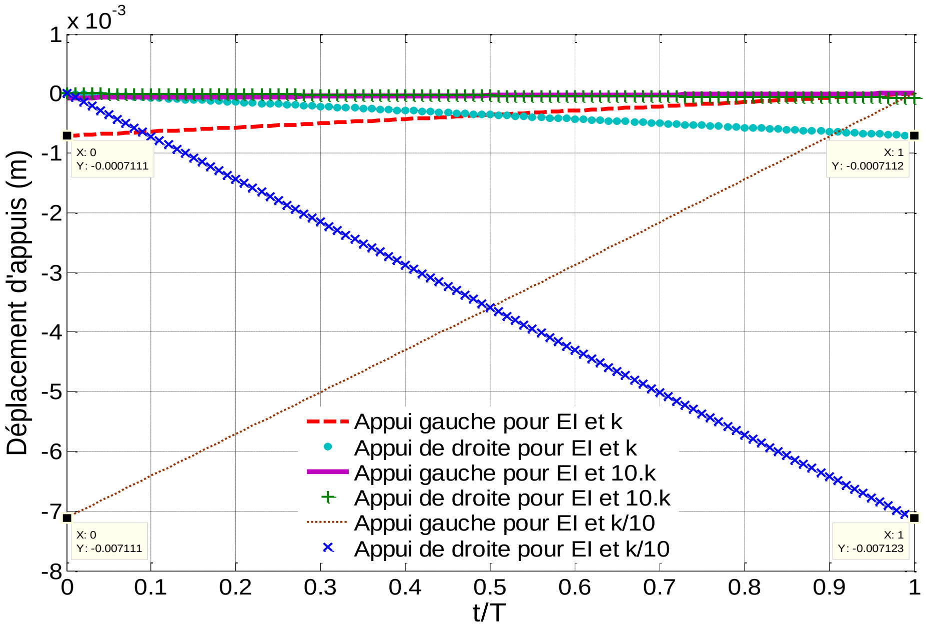


Figure IV-29 Déplacement d'appuis avec EI pour k, $10 \cdot k$ et $k/10$.

Tableau IV-10 Comportements d'appuis influencés par la raideur des ressorts.

	L'appui gauche pour $t = 0$	L'appui de droite pour $t = T$
Cas 1 : EI, $10 \cdot k$	≈ 0	≈ 0
Cas 2 : EI, k	0.0007111	0.007112
Cas 3 : EI, $k/10$	0.007111	0.007123

En augmentant la raideur des appuis par un facteur de 10, cela diminue directement le déplacement sur l'appui. Un faible changement de la raideur donne directement un changement significatif du déplacement des appuis. En revanche, en travée, même une augmentation de la raideur par 10 fois ne change pas vraiment le comportement de la poutre en travée, qui reste celui d'une poutre simplement appuyée, et la valeur du déplacement maximal en travée est proche à celle de la formule analytique (figure IV.30). Autrement dit, ce modèle d'appuis, conçu uniquement avec des ressorts dans la direction verticale ne peut bloquer que les déplacements verticaux, ce qui donne un comportement en travée de la poutre similaire à celui d'une poutre simplement appuyée.

La flèche statique dans ce cas est de : $u_{st} = 0.032m$ (cas de la poutre simplement appuyée).

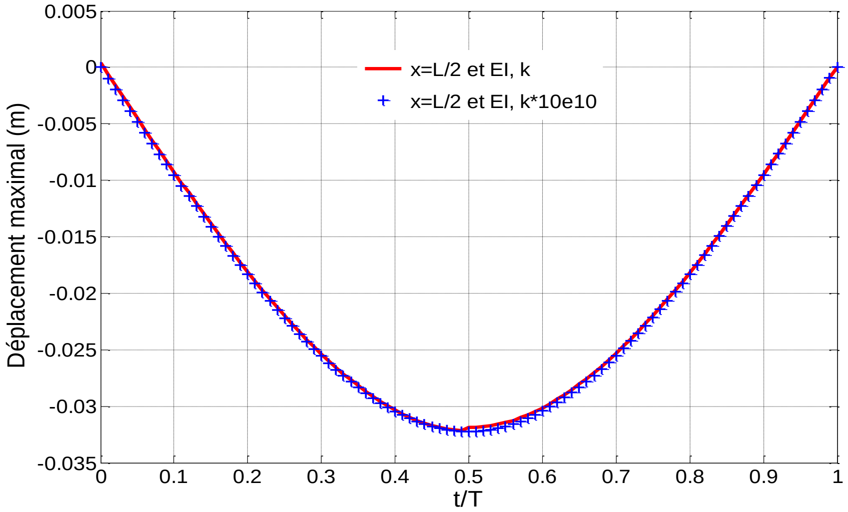


Figure IV-30 Déplacement maximal en travée à $x = L/2$ pour EI, k et pour EI, $k \cdot 10^{10}$.

IV.2.7 Effet de R (rapport de la rigidité de la poutre EI à la raideur des ressorts k) sur le comportement de la poutre

Nous prenons les données de (Mehri B., 2009), mais cette fois ci avec des valeurs différentes de EI avec $R = EI/k$ et $k = 10kn/m$.

L'augmentation de R due à l'augmentation de la rigidité de la poutre EI provoque une diminution du déplacement maximal en travée à $x = L/2$, jusqu'à arriver à une valeur de R (ou de la rigidité de la poutre EI) qui annule le déplacement maximal ainsi que tous les déplacements en travée, la poutre est considérée dans ce cas infiniment rigide, comme illustré sur la figure IV.31.

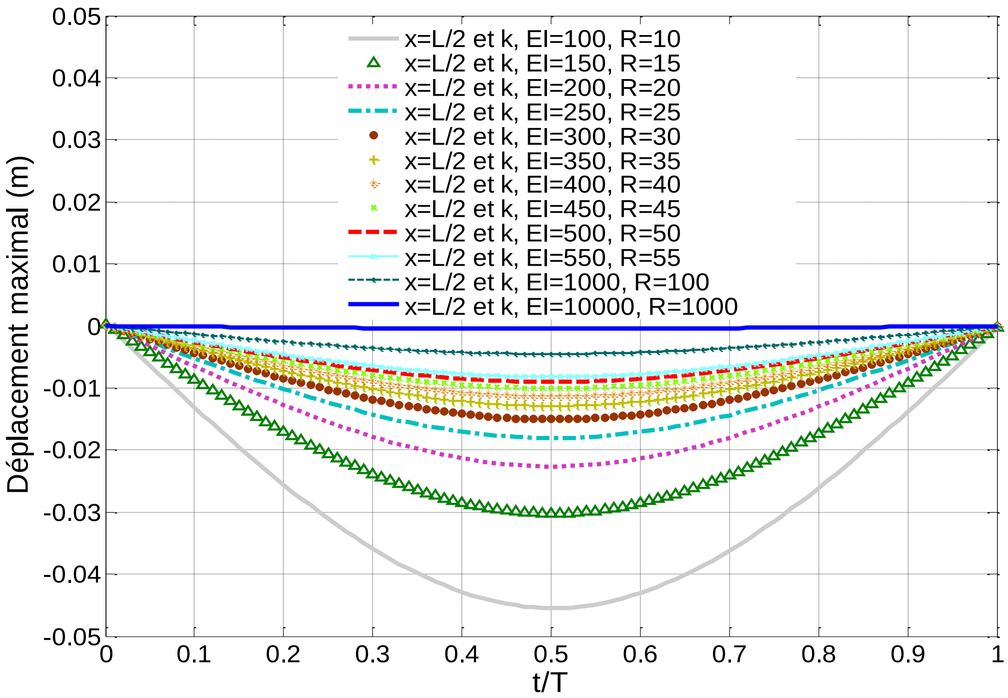


Figure IV-31 Comportement en travée à $x = L/2$ pour $k = 10kn/m$ et R.

Tableau IV-111 Valeurs des déplacements à $x = L/2$ pour $k = 10kn/m$.

$EI(kn/m^3, k(kn/m)$	R (m^3)	Déplacement maximal (m) $x = L/2$	Déplacement statique maximal (m)	Ecart Δ (m)	FAD
$EI = 100,\ k = 10$	10	0.04549	0.045	0.00049	1.0109
$EI = 150,\ k = 10$	15	0.03022	0.03	0.00022	1.0073
$EI = 200,\ k = 10$	20	0.02262	0.0225	0.00012	1.0053
$EI = 250,\ k = 10$	25	0.01808	0.018	0.00008	1.0044
$EI = 300,\ k = 10$	30	0.01505	0.015	0.00005	1.0033
$EI = 350,\ k = 10$	35	0.0129	0.0129	0	1
$EI = 400,\ k = 10$	40	0.01128	0.0113	0.00002	0.9982
$EI = 450,\ k = 10$	45	0.01002	0.01	0.00002	1.002
$EI = 500,\ k = 10$	50	0.009019	0.009	0.000019	1.0021
$EI = 550,\ k = 10$	55	0.008197	0.0082	0.000003	0.9996
$EI = 1000,\ k = 10$	100	0.004505	0.0045	0.000005	1.0011
$EI = 10000, k = 10$	1000	0.00045	0.00045	0	1

Suivant les résultats mentionnés dans le tableau IV.11 et la figure IV.32, l'écart entre le déplacement maximal dynamique et statique diminue avec l'augmentation de la rigidité de la poutre R. Cela conduit à une solution dynamique identique à celle de la statique.

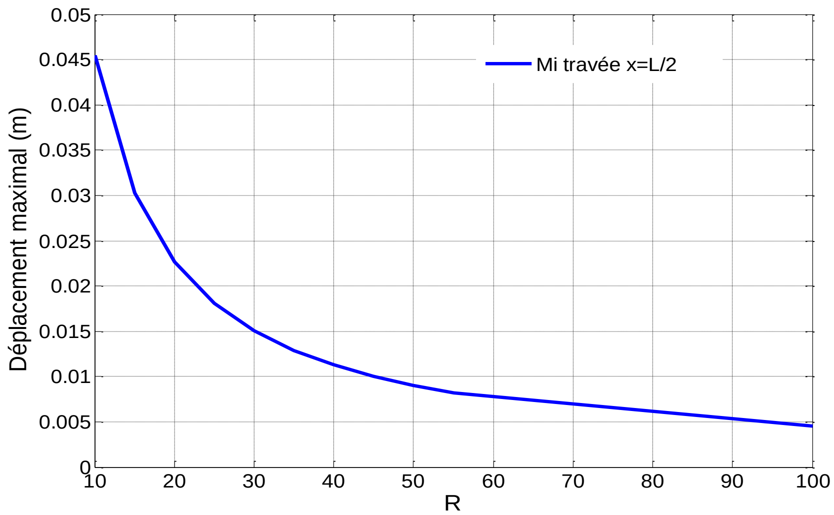


Figure IV-32 Effet du rapport R sur le déplacement maximal de la poutre.

La rigidité de la poutre influence sur le déplacement des appuis comme le montre la figure IV.33 et le tableau IV.12. L'augmentation de R est principalement due à l'augmentation de EI, diminue les déplacements aux niveaux d'appuis. Une valeur de $EI = 1000kn.m^2$ peut annuler complètement les déplacements d'appuis gauche et droite, car elle donne un déplacement très petit aux extrémités, considéré comme nul à $t = 0$ pour l'appui à gauche et à $t = T$ pour l'appui de droite (figure IV-33 et tableau IV-12).

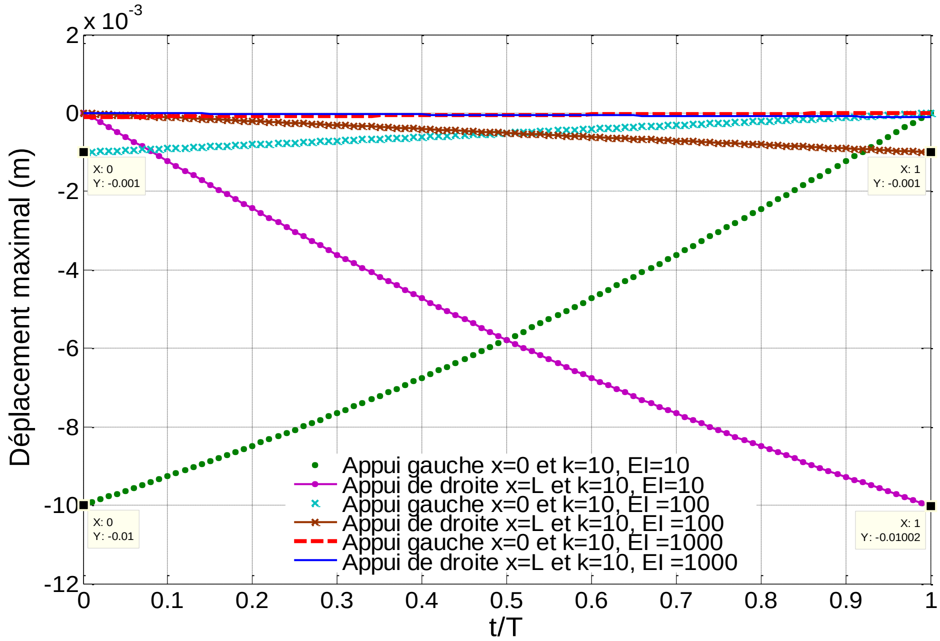


Figure IV-33 Déplacement de l'appui gauche à $x=0$ et de l'appui de droite à $x=L$ pour $k=10kn/m$, $EI=10{,}100$ et $1000kn\cdot m^2$.

Tableau IV-12 Valeurs des déplacements d'appuis pour $k=10kn/m$ et $EI=10{,}100$ et $1000kn\cdot m^2$ et R.

$EI(kn\cdot m^2)$ $k(kn/m)$	R (m3)	Déplacement maximal de l'appui à gauche (m) $x=0$, $t=0$	Déplacement maximal de l'appui à droite (m) $x=L$, $t=T$
$EI=10, k=10$	1	0.01	0.01002
$EI=100, k=10$	10	0.001	0.001
$EI=1000, k=10$	100	0.0001≈0	0.0001≈0

Remarque

Concernant l'allure de la courbe du déplacement en travée et pour quelques données de poutres et des ressorts, on remarque parfois une brisure dans la courbe représentative des déplacements parfois inaperçue, parfois remarquable. Dans la plupart des cas on s'intéresse au déplacement maximal à mi travée de la poutre à $x=L/2$. Cette brisure est justifiée par le passage de la charge P du point situé à gauche à droite du point de calcul sur la poutre, c.-à-d. le changement de la fonction qui calcul le déplacement, passant de la fonction de Green appliquée dans un domaine à un autre selon la position de la charge u par rapport au point de calcul sur la poutre x.

Par exemple pour le calcul du déplacement maximal à $x=L/2$, on commence par le chargement. Pour tous les temps $t<T/2$, le point de calcul x ce trouve à droite de la charge P et la fonction utilisée est celle de la fonction de Green à droite. Si on fait le calcul pour tous les pas de temps $t>T/2$, le point de calcul x se trouve à gauche du point d'application de la charge et la fonction utilisée cette fois ci devient celle de la fonction de Green à gauche. C'est ce passage de droite à gauche du point d'application de la charge qui peut donner des brisures dans l'allure de la courbe des déplacements en travée, surtout si la fonction de Green à gauche et à droite ne donnent pas une parfaite symétrie au point de calcul.

IV.2.8 Comportement des appuis

Pour les données de (Mehri B., 2009), nous avons :

$L = 6m$ et $v = 0{,}6m/s$ ce qui donne : $T = 10s$ et $\vartheta_t = \dfrac{0.6*5}{6} = 0.5$

IV.2.8.1 Comportement de l'appui gauche

Si l'on calcule le déplacement de l'appui lorsque la charge est au centre de la poutre en utilisant la nouvelle formule temporelle (équation 4.58), nous obtenons :

$$dep_{agt}(t = T/2) = \left(1 - \frac{T/2}{T}\right) \cdot \left(\frac{-p}{EI \cdot k}\right)$$

Ce qui donne :

$$dep_{agt}(t = T/2) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{-1}{140.625 \cdot 10}\right)$$

$$dep_{agt}(t = T/2) = \left(\frac{-0.5}{1406.25}\right)$$

Ce qui donne une valeur de déplacement d'appui gauche égale à : $dep_{agt}(t = T/2) = 3.56.10^{-4}m$.

Ou bien par l'équation 4.60:

$$dep_{agt}(t = T/2) = (1 - \vartheta_t) \cdot \left(\frac{-p}{EI \cdot k}\right) = (1 - 0.5) \cdot \left(\frac{-1}{140.625 \cdot 10}\right) = \frac{-0.5}{1406.25} = 3.56.10^{-4}\,m$$

La nouvelle formule par la fonction de Green donne un déplacement égale à : $dep_{agtn}(t = T/2) = 3.6620.10^{-4}m$.

Le déplacement de l'appui gauche selon les deux nouvelles formules est présenté sur la figure IV.34 pour les données de Mehri B. (2009). Les deux formules donnent presque des résultats identiques.

Nous utilisons la nouvelle formule fonction du temps suivante pour le calcul du déplacement linéaire de l'appui gauche : $dep_{adt} = \dfrac{p}{EI \cdot k} \cdot (1 - (t/T))$ et la formule générale développée pour le calcul du déplacement de la nouvelle formule toujours sur le même appui gauche.

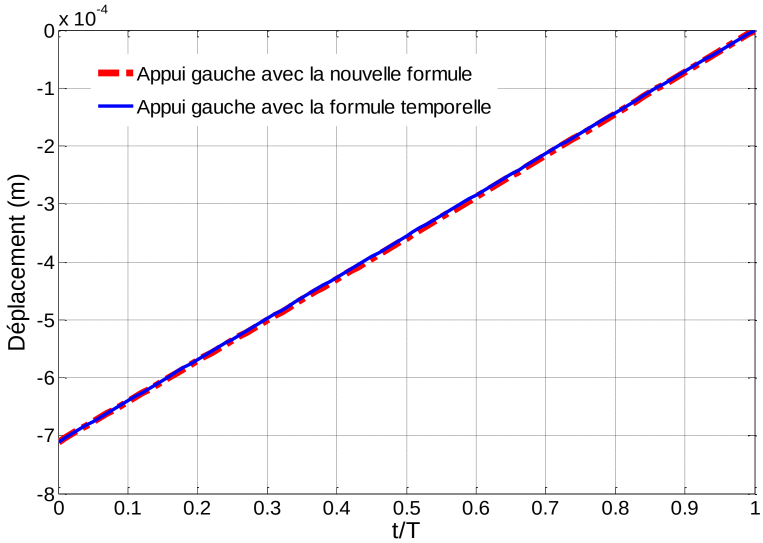


Figure IV-34 Déplacement de l'appui gauche par la nouvelle formule et par la formule temporelle.

IV.2.8.2 Comportement de l'appui de droite

Si on calcul le déplacement de l'appui de droite lorsque la charge est au centre de la poutre en utilisant la nouvelle formule temporelle (équation 4.61), nous obtenons :

$$dep_{adt}(t = T/2) = \frac{0.6 \cdot 5}{6} \cdot \frac{-1}{1406.25 \cdot 10} = \frac{-0.5}{1406.25} = 3.56.10^{-4}\,m$$

Ou bien par la deuxième formule équation 4.62 :

$$dep_{adt}(t = T/2) = \frac{p \cdot \vartheta_t}{EI \cdot k} = \frac{-1 \cdot 0.5}{140.625 \cdot 10} = 3.56 \cdot 10^{-4}\,m$$

Lorsque la charge est appliquée au milieu de la poutre, c'est-à-dire à $u = L/2$ au temps $t = T/2$, le déplacement de l'appui gauche égale au déplacement de l'appui droit.

La nouvelle formule par la fonction de Green donne un déplacement égal à : 3.56.10-4 m.

Nous utilisons la nouvelle formule fonction du temps suivante pour le calcul des nouveaux déplacements de l'appui droit : $dep_{adt} = \frac{v \cdot p}{L \cdot EI \cdot k} \cdot t$ et la formule générale développée pour le calcul du déplacement toujours sur le même appui droit.

Les déplacements de l'appui gauche par les deux nouvelles formules sont présentés sur la figure IV.35 pour les données de Mehri B. (2009), les déplacements par les deux formules sont en parfaite concordance.

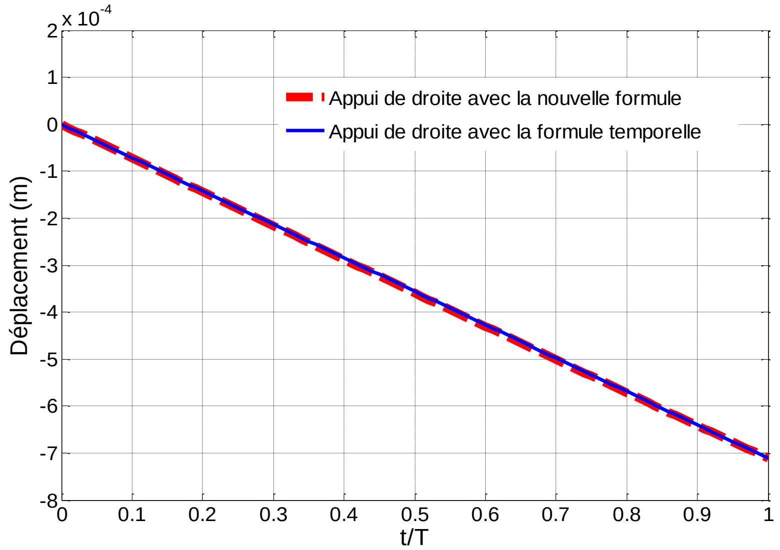


Figure IV-35 Déplacement de l'appui de droite par la nouvelle formule et la formule temporelle.

IV.2.9 Effet de la vitesse

Pour observer l'effet de la vitesse de roulement sur le comportement de la poutre en travée et sur appuis, pour les données de (Mehri B., 2009), nous allons étudier plusieurs vitesses de roulement. Prenons la vitesse 0.6 m/s comme référence, les rapports des vitesses étudiées sont de 0.2, 1, 5 et 10 par rapport à cette vitesse.

La vitesse critique est de : $v_{cri} = \frac{\pi}{L} \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}}$, pour cet exemple elle est de : $v_{cri} = 6.7983\,\text{m/s}$.

IV.2.9.1 Effet de la vitesse en travée

Le comportement en travée de la poutre sur des ressorts de raideur $k = 10kn/m$ pour de petites vitesses est proche de celui d'une poutre simplement appuyée et l'amplification dynamique est très faible. En augmentant la vitesse de roulement de la charge, nous remarquons que l'amplification dynamique augmente, et le comportement s'éloigne de celui d'une poutre simplement appuyée sur les deux côtés. Cela signifie que pour v très faible, la flèche maximale ce rapproche à la flèche statique comme le montre le tableau IV.13 et la figure IV.36.

Tableau IV-13 Effet de la vitesse de la charge mobile sur le déplacement maximal de la poutre.

Vitesse v (m/s)	Rapport v/v_{ref}	Période T (s)	Déplacement maximal (m)	Déplacement statique u_{st} (m)	FAD
0.12	0.2	50	0.03201	0.032	1.0003
0.6	1	10	0.03225	0.032	1.0078
3	5	2	0.03961	0.032	1.2378
6	10	1	0.1422	0.032	4.4437

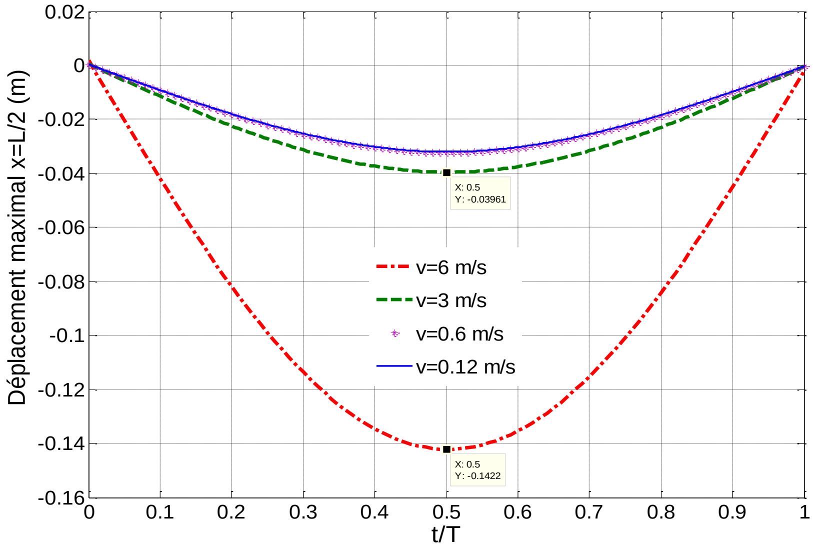


Figure IV-36 Déplacement maximal de la poutre pour $k = 10kn/m$ et $v = 6$, 3, 0.6 et 0.12 m/s.

IV.2.9.2 Effet de la vitesse aux niveaux des appuis

La poutre est supportée sur des ressorts de raideur $k = 10kn/m$, nous remarquons que le comportement des appuis n'est linéaire que pour le cas de petites vitesses, c.-à-d. les formules développées temporellement pour le calcul des déplacements des appuis ne sont applicables que pour le cas de petites vitesses.

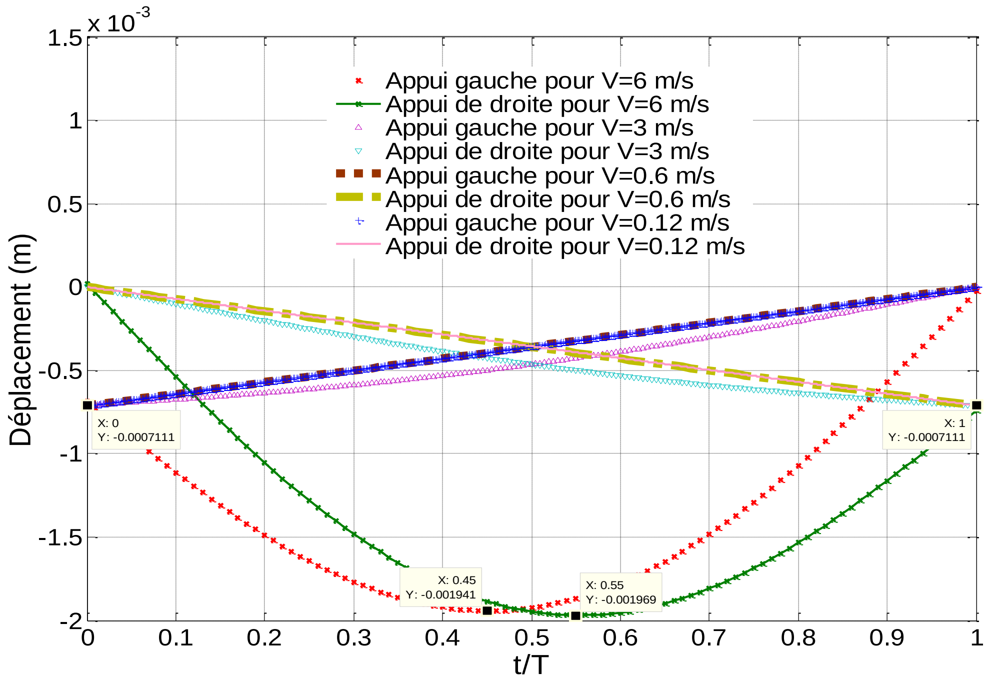


Figure IV-37 Déplacement des appuis pour $k = 10kn/m$ et $v = 6$, 3, 0.6 et 0.12 m/s.

Tableau IV-14 Effet de la vitesse de la charge mobile sur le déplacement des appuis avec $k = 10kn/m$.

Vitesse v (m/s)	Rapport v/v_{ref}	Période T (s)	Déplacement de l'appui gauche (m) $t=0$	Déplacement max de l'appui gauche (m) $t=0.46s$	Déplacement de l'appui de droite (m) $t=T$	Déplacement max de l'appui de droite (m) $t=0.55s$
0.12	0.2	50	0.0007111	-	0.0007111	-
0.6	1	10	0.0007111	-	0.0007111	-
3	5	2	0.0007111	-	0.0007111	-
6	10	1	0.0007111	0.001941	0.0007111	0.001969

IV.3 Conclusion partielle

L'utilisation de la fonction de Green nous a permis d'élaborer une nouvelle formulation pour le calcul des déplacements d'une poutre appuyée sur des supports élastiques formés de ressorts verticaux. La solution prend la forme de deux équations, chacune correspondant à un domaine de calcul en fonction de la position de la charge mobile : un premier domaine à gauche et un deuxième à droite, aboutissant à deux expressions pour le déplacement sur la poutre.

En analysant les formules présentées, il est évident que plusieurs facteurs combinés influent sur le comportement vibratoire de la poutre lorsqu'elle est appuyée sur des supports élastiques. Ces facteurs comprennent les raideurs des appuis, la rigidité de la poutre, sa longueur, la valeur de la charge mobile et sa vitesse. La raideur des appuis est conjuguée avec la rigidité de la poutre, comme le démontrent les formules développées et temporelles sur les appuis. Ce couplage génère une influence mutuelle significative, notamment l'impact marqué de la rigidité de la poutre sur les déplacements des appuis. De plus, les raideurs des ressorts exercent un effet sur le déplacement maximal de la poutre, surtout lorsque la charge est située près des appuis, un effet qui diminue jusqu'à disparaître en se rapprochant du point de mi-portée de la poutre.

Le placement stratégique des ressorts sur les appuis réduit l'amplification dynamique par rapport à une poutre sur appuis simples dans des situations similaires. Cependant, la théorie présentée dans ce chapitre, basée sur la position des ressorts dans une direction verticale, ne peut remplacer que certains types d'appuis sans rotations. Quelle que soit la valeur de la raideur des ressorts, la flèche maximale obtenue reste comparable uniquement à la flèche statique d'une poutre simplement appuyée sur les deux côtés. Cette conclusion est étayée par l'analyse des résultats spécifiques à ce modèle. Ainsi, il devient impératif de développer un deuxième modèle plus général englobant tous les cas d'appuis, y compris le modèle présenté, en introduisant des ressorts horizontaux en plus des ressorts verticaux déjà présents dans le premier modèle. Cette perspective constituera le sujet du prochain chapitre.

Chapitre V Vibration des poutres sollicitées par charges mobiles appuyées sur support élastiques dans les deux directions

Introduction

Ce chapitre se consacre à l'introduction d'un modèle plus général que celui étudié dans le chapitre IV, visant à remplacer des appuis plus complexes qui limitent la rotation. Le système d'appuis présenté dans le chapitre IV ne peut pas entraver toutes les sollicitations auxquelles la poutre est exposée. Nous présentons cette fois ci une formulation en utilisant la méthode de la fonction de Green pour le cas d'une poutre sur des supports élastiques dans les deux directions, en tenant compte des raideurs élastiques verticales et horizontales des appuis, agissant à la fois contre la flexion et le déplacement vertical. L'étude est menée sur l'influence des rigidités des ressorts d'appuis combinées à la rigidité flexionnelle de la poutre, en prenant en considération tous les paramètres susceptibles d'influencer la vibration de la poutre. Les formules analytiques du modèle de la poutre sur des ressorts élastiques dans les deux directions doivent converger vers celles du modèle à deux ressorts étudié dans le chapitre IV, avec la suppression des ressorts horizontaux par annulation de leurs raideurs respectives. L'analyse du comportement de ce nouveau modèle repose sur l'utilisation de formules développées, mettant particulièrement l'accent sur l'étude du déplacement le long de la poutre et identifiant les principaux facteurs influençant le comportement dynamique. Le couplage entre la raideur des ressorts et la rigidité de la poutre, traité en détail dans le chapitre IV, se révèle plus significatif avec deux ressorts verticaux qu'avec quatre ressorts dans les deux directions. Pour d'avantage de précision, nous démontrons que le modèle à quatre ressorts converge à celui de deux ressorts par annulation des ressorts supplémentaires en partie analyse de résultats comme déjà prouvé analytiquement.

SOMMAIRE

V.1 Vibration des poutres sous charges mobiles appuyées sur supports élastiques en deux directions

Les conditions aux limites de la structure poutre sont idéalisées par des ressorts ktg, ktd, $k\lg$ et kld figure V.1.

Les rigidités des appuis ktg et ktd s'opposent à la rotation de la poutre et les rigidités $k\lg$ et kld influencent le déplacement vertical.

La flexibilité de la poutre EI est couplée aux rigidités horizontales et verticales des appuis ktg, ktd, $k\lg$ et kld, la déformation dynamique est en fonction de couplage.

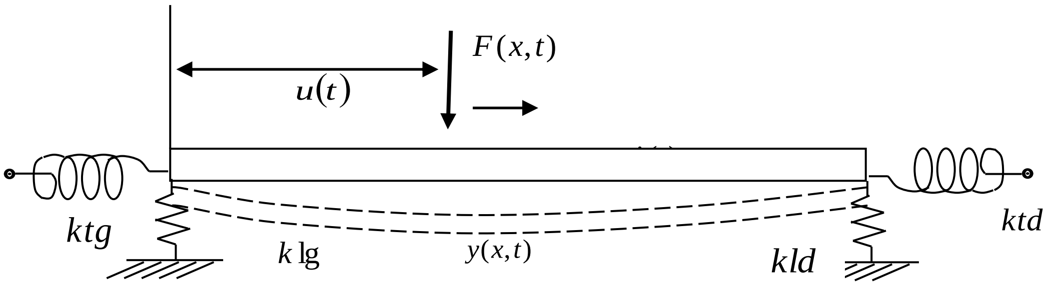


Figure V-1 Poutre appuyée sur ressorts des deux cotés.

Les huit conditions utilisées pour l'évaluation des valeurs de $C1$ jusqu'à $C8$ pour le système de la figure V.1 deviennent dans ce cas comme suit :

$$Gr(u_{droite},u)=Gr(u_{gauche},u) \tag{5.1}$$

$$Gr'(u_{droite},u)=Gr'(u_{gauche},u) \tag{5.2}$$

$$Gr''(u_{droite},u)=Gr''(u_{gauche},u) \tag{5.3}$$

$$EI[Gr'''(u_{droite},u)-Gr'''(u_{gauche},u)]=1 \tag{5.4}$$

$$Gr''(0,u)=ktg\cdot Gr'(0,u) \tag{5.5}$$

$$Gr''(L,u)=ktd\cdot Gr'(L,u) \tag{5.6}$$

$$Gr'''(0,u)=k\lg\cdot Gr(0,u) \tag{5.7}$$

$$Gr'''(L,u)=kld\cdot Gr(L,u) \tag{5.8}$$

L'utilisation des équations 5.1 jusqu'à 5.8 permet d'écrire le système suivant :

$$
\begin{bmatrix}
-s^2 & -s\cdot ktg & s^2 & -s\cdot ktg & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \begin{matrix}-s^2\cdot a\\ +s\cdot ktd\cdot b\end{matrix} & \begin{matrix}-s^2\cdot b\\ -s\cdot ktd\cdot a\end{matrix} & \begin{matrix}s^2\cdot ah\\ -s\cdot ktd\cdot bh\end{matrix} & \begin{matrix}s^2\cdot bh\\ -s\cdot ktd\cdot ah\end{matrix} \\
-k\lg & -s^3 & -k\lg & s^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \begin{matrix}s^3\cdot b\\ -kld\cdot a\end{matrix} & \begin{matrix}-s^3\cdot a\\ -kld\cdot b\end{matrix} & \begin{matrix}s^3\cdot bh\\ -kld\cdot ah\end{matrix} & \begin{matrix}s^3\cdot ah\\ -kld\cdot bh\end{matrix} \\
-\cos(s\cdot u) & -\sin(s\cdot u) & -\cosh(s\cdot u) & -\sinh(s\cdot u) & \cos(s\cdot u) & \sin(s\cdot u) & \cosh(s\cdot u) & \sinh(s\cdot u) \\
s\cdot\sin(s\cdot u) & -s\cdot\cos(s\cdot u) & -s\cdot\sinh(s\cdot u) & -s\cdot\cosh(s\cdot u) & -s\cdot\sin(s\cdot u) & s\cdot\cos(s\cdot u) & s\cdot\sinh(s\cdot u) & s\cdot\cosh(s\cdot u) \\
s^2\cdot\cos(s\cdot u) & s^2\cdot\sin(s\cdot u) & -s^2\cdot\cosh(s\cdot u) & -s^2\cdot\sinh(s\cdot u) & -s^2\cdot\cos(s\cdot u) & -s^2\cdot\sin(s\cdot u) & s^2\cdot\cosh(s\cdot u) & s^2\cdot\sinh(s\cdot u) \\
-s^3\cdot\sin(s\cdot u) & s^3\cdot\cos(s\cdot u) & -s^3\cdot\sinh(s\cdot u) & -s^3\cdot\cosh(s\cdot u) & s^3\cdot\sin(s\cdot u) & -s^3\cdot\cos(s\cdot u) & s^3\cdot\sinh(s\cdot u) & s^3\cdot\cosh(s\cdot u)
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{Bmatrix} C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4\\ C_5\\ C_6\\ C_7\\ C_8 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1/EI \end{Bmatrix}
\qquad (5.9)
$$

Les variables $C1$ jusqu'à $C8$ sont obtenues par la résolution du système d'équation 5.9 qui est un système d'équation linéaire par la méthode de Gauss sydel.

V.1.1 Algorithme de résolution

Pour résoudre ce système de 8 équations à 8 inconnues qui sont $C1$ jusqu'à $C8$, nous avons développé un algorithme, avec l'implémentation de ce dernier dans le logiciel mathématique Maple, ceci pour trouver une forme (préliminaire) de ces 8 variables (voir annexe 2-B).

La forme obtenue de ces 8 variables étais très compliqué au point que c'est presque impossible de présenter la solution sous forme de vecteur car elle est affichée sur plusieurs pages, après séparation de ces 8 variables et la simplification de la forme de chacune de ces variables séparées dans un programme écris en Maple, on présente les formes les plus raffinées possibles dans la partie qui suit.

V.1.2 Développement analytique de la solution pour les poutres appuyées ressorts en deux directions

Les variables $C1$ jusqu'à $C8$ sont présentées comme suit :

La forme de $C1$:

$$
\begin{aligned}
C1 = \frac{1}{4}\cdot\Big(& -2\cdot s^7\cdot ktg\cdot\cosh(s\cdot u)+s^4\cdot ktg\cdot klg\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+2\cdot s^7\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s\cdot klg\cdot ktg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+s^4\cdot ktg\cdot klg\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+2\cdot s^5\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cosh(s\cdot L)\\
&+2\cdot s^3\cdot ktg\cdot klg\cdot ktd\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+ktg\cdot klg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot L)\\
&-ktg\cdot klg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-s^8\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^8\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^8\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot L)\\
&+s^8\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^4\cdot ktg\cdot klg\cdot\sinh(s\cdot u)+s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)-s^8\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-s^8\cdot\cos(s\cdot L)\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot u)+s^8\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^4\cdot klg\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot u)\\
&-s^8\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^8\cdot\sinh(s\cdot u)+s^8\cdot\sin(s\cdot u)-ktg\cdot klg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u\cdot)\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+ktg\cdot klg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^4\cdot ktg\cdot klg\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot L)\\
&-s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot L)+s^4\cdot kld\cdot ktd\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cosh(s\cdot L)\\
&-s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^4\cdot ktg\cdot klg\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s^5\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\sinh(s\cdot L)-2\cdot s\cdot ktg\cdot klg\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s^7\cdot ktd\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^3\cdot klg\cdot ktg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+2\cdot s^3\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)+ktg\cdot klg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)-s^4\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-s^4\cdot ktg\cdot klg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^4\cdot ktg\cdot klg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&-ktg\cdot klg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^4\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&-ktg\cdot klg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+2\cdot s^3\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+ktg\cdot klg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s^3\cdot ktg\cdot klg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+2\cdot s^7\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s^3\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+4\cdot s^4\cdot ktg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s^7\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+klg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot u)\\
&+2\cdot s^5\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^7\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+4\cdot s^6\cdot ktg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-4\cdot s^4\cdot ktg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s^3\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s^7\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+2\cdot s\cdot ktg\cdot klg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^7\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+4\cdot s^6\cdot ktg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+2\cdot s^7\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s\cdot ktg\cdot klg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^3\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&-s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^4\cdot ktg\cdot klg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-ktg\cdot klg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^4\cdot ktg\cdot klg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\ \Big)\\
&/\Big(\ s^3\cdot E\cdot I\cdot\big(\ s^8\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^8+s^4\cdot ktd\cdot kld+s^4\cdot ktg\cdot klg-ktg\cdot klg\cdot ktd\cdot kld\\
&-s^5\cdot klg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^5\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^7\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+s^7\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^5\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^7\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&-s^7\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^5\cdot klg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s\cdot klg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&-s\cdot klg\cdot kld\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s^4\cdot klg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+s\cdot klg\cdot ktg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+ktg\cdot klg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s^6\cdot ktg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^3\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s^4\cdot ktg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s\cdot ktg\cdot klg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+s^3\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^3\cdot ktg\cdot klg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+s^4\cdot ktg\cdot klg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^4\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+2\cdot s^2\cdot klg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^3\cdot klg\cdot ktg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\ \big)\Big)
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

La forme de $C2$:

$$
\begin{aligned}
C2 = -\frac{1}{4}\cdot(\ & 2\cdot s^5\cdot k\lg\cdot\sinh(s\cdot u)+s^4\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+s^4\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^4\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+2\cdot s^5\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+2\cdot s^7\cdot ktd\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-s^4\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+2\cdot s^3\cdot k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+s^4\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^4\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&-k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s\cdot ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s^3\cdot ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s^7\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s^5\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)+2\cdot s^5\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s^5\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s^5\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&-4\cdot s^2\cdot k\lg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-4\cdot s^4\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+4\cdot s^2\cdot k\lg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^4\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s^5\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s^5\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s^3\cdot k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^7\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+2\cdot s\cdot k\lg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-4\cdot s^4\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^4\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)\\
&-2\cdot s^3\cdot k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\\
&+ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+2\cdot s^5\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^7\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^8\cdot\cosh(s\cdot u)\\
&-s^8\cdot\cos(s\cdot u)-s^8\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^8\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&-s^8\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^8\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\\
&+s^8\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)+s^4\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\cosh(s\cdot u)\\
&-s^8\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^8\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+s^4\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot u)+s^8\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\ )/(\ s^3\cdot E\cdot I\cdot(\ -s^8\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^8\\
&-s^4\cdot k\lg\cdot ktg-s^4\cdot ktd\cdot kld+k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld+2\cdot s^4\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s^2\cdot k\lg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-s\cdot k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+s^3\cdot k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-s\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s\cdot ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+2\cdot s^6\cdot ktg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^3\cdot ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-s^3\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s^4\cdot ktg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-s^3\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^5\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^5\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-s^5\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^5\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^7\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&-s^7\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot L)\cosh(s\cdot L)-s^7\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^7\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\ ))
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

La forme de $C3$:

$$
\begin{aligned}
C3 = -\frac{1}{4}\cdot\Big(& -2\cdot s^7\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot u)-s^8\cdot\sinh(s\cdot u)+s^8\cdot\sin(s\cdot u)+2\cdot s^7\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& -s^8\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^8\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^8\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +s^8\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot u)+s^8\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +s^8\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\sinh(s\cdot u)+s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)+s^4\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot u)\\
& -s^8\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot L)-s^8\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^4\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cosh(s\cdot L)+ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s^5\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -2\cdot s^3\cdot ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s^3\cdot ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s\cdot ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s^7\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^4\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+2\cdot s\cdot ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s^5\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)\\
& +ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^4\cdot kld\cdot ktd\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot u)\\
& +s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot L)-ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s^7\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s^7\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s^5\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -2\cdot s^7\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot L)\\
& -2\cdot s^3\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+4\cdot s^6\cdot ktg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s^3\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^3\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s^3\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)-2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+2\cdot s^3\cdot k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s^3\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot L)\\
& -2\cdot s^3\cdot ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-4\cdot s^4\cdot ktg\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& -4\cdot s^6\cdot ktg\cdot ktd\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+2\cdot s^7\cdot ktg\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s\cdot ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -2\cdot s^5\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+4\cdot s^4\cdot ktg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s^7\cdot ktg\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s^7\cdot ktd\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\ \Big)\\
& /\Big(\ s^3\cdot E\cdot I\cdot\big(\ -s^8\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^8-s^4\cdot k\lg\cdot ktg-s^4\cdot ktd\cdot kld+k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\\
& +s^7\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^5\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^5\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& -s^7\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^7\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^5\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +s^7\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^5\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +s^3\cdot ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s\cdot ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^4\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& -s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^3\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s^6\cdot ktg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s\cdot k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^3\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s^4\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s^4\cdot ktg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& -2\cdot s^2\cdot k\lg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^3\cdot k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\ \big)\Big)
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

La forme de $C4$:

$$
\begin{aligned}
C4 = -\frac{1}{4}\cdot\big(& -2\cdot s^5\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot u)+s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)+s^8\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -s^8\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^8\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^8\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +s^4\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\cosh(s\cdot u)+s^8\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^4\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot u)+s^8\cdot\cos(s\cdot u)\\
& +s^4\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^8\cdot\cosh(s\cdot u)-2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot L)\\
& -2\cdot s^3\cdot ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s^7\cdot ktd\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& -2\cdot s\cdot ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^5\cdot k\lg\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^5\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& -2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s^5\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +s^4\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^4\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^4\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -s^4\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^4\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& -k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -4\cdot s^2\cdot k\lg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s^5\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\sinh(s\cdot L)\\
& +4\cdot s^4\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+2\cdot s\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s^3\cdot k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+2\cdot s^5\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s^7\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s^5\cdot k\lg\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot L)-4\cdot s^4\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +4\cdot s^2\cdot k\lg\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +s^4\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^8\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)\\
& -s^8\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^8\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)\\
& -ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^4\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot u)-s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\\
& +2\cdot s^7\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^3k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s^5\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& -2\cdot s^5\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s^7\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& /\big(\ s^3\cdot E\cdot I\cdot(\ s^8\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^8+s^4\cdot ktd\cdot kld+s^4\cdot k\lg\cdot ktg-k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\\
& +s^5\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^7\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^7\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -s^5\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^7\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^5\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +s^7\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^5\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s\cdot k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& -s^3\cdot k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s\cdot ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^3\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -s^3\cdot ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^3\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -s\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s^2\cdot k\lg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^4\cdot ktg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& -2\cdot s^6\cdot ktg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^4\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\ )\big)
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

La forme de $C5$:

$$
\begin{aligned}
C5 = \frac{1}{4}\cdot (\ & 2\cdot s^7\cdot ktg\cdot\cosh(s\cdot u)+2\cdot s^5\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^8\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& -s^8\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^8\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^8\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +s^8\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot L)+s^8\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)\\
& +s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\sinh(s\cdot u)-s^8\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^8\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& -s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot u)+s^8\cdot\sin(s\cdot u)+s^8\cdot\sinh(s\cdot u)-2\cdot s^3\cdot ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& -2\cdot s^3\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -2\cdot s^7\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s^7\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -2\cdot s^5\cdot kld\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s^5\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& -ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^4\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^4\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+4\cdot s^4\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s\cdot ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+2\cdot s^3\cdot k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -4\cdot s^6\cdot ktg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+4\cdot s^4\cdot ktg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s^3\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-4\cdot s^2\cdot k\lg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s^5\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s^7\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)-s^4\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot u)\\
& +2\cdot s^7\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot L)+k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot u)-2\cdot s^3\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\\
& +ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot L)\\
& -ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^4\cdot kld\cdot ktd\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s^7\cdot ktd\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^5\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& -2\cdot s^3\cdot ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+2\cdot s^5\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s\cdot ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s^3\cdot k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& -2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^7\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& -s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^4\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -s^4\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot L)\ )\\
& /(\ s^3\cdot E\cdot I\cdot(\ s^8-s^4\cdot ktg\cdot k\lg-s^4\cdot ktd\cdot kld-s\cdot k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\\
& +s^7\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^5\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^7\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -s^7\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^7\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^5\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +s^5\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^5\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -s^3\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s^4\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s\cdot k\lg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^4\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& -2\cdot s^2\cdot k\lg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+2\cdot s^4\cdot ktg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s^6\cdot ktg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -s^4\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s\cdot ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^3\cdot k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -s^3\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^3\cdot ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^8\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\ ))
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

La forme de $C6$:

$$
\begin{aligned}
&C6=\frac{1}{4}\cdot\big(\ 2\cdot s^{7}\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+4\cdot s^{2}\cdot k\lg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&-k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)-2\cdot s^{5}\cdot k\lg\cdot\sinh(s\cdot u)+s^{8}\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+s^{8}\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^{8}\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^{8}\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+s^{4}\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)+s^{4}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot u)+s^{4}\cdot ktd\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)+s^{8}\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-s^{8}\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^{8}\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^{8}\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-s^{8}\cdot\cos(s\cdot u)-s^{8}\cdot\cosh(s\cdot u)+ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+s^{4}\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^{4}\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+s^{4}\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\\
&-s^{4}\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+s^{4}\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^{4}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^{4}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&-s^{4}\cdot kld\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s^{3}\cdot ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s^{5}\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+2\cdot s^{3}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s^{5}\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s^{5}\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+2\cdot s^{3}\cdot ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s^{7}\cdot ktd\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s\cdot ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+2\cdot s^{5}\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^{4}\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^{4}\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&-s^{4}\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+2\cdot s^{3}\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+4\cdot s^{4}\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s^{5}\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+2\cdot s\cdot ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^{3}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s^{7}\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)-s^{4}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\cosh(s\cdot u)\\
&-4\cdot s^{4}\cdot ktg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s^{3}\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s^{5}\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s^{7}\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+2\cdot s^{7}\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+s^{4}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+s^{4}\cdot kld\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^{4}\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-s^{4}\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s^{7}\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&-4\cdot s^{6}\cdot ktg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\ \big)/\big(\ s^{3}\cdot E\cdot I\cdot\big(\ -s^{8}\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^{8}-s^{4}\cdot ktd\cdot kld\\
&-s^{4}\cdot k\lg\cdot ktg+k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld-s^{7}\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^{7}\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+s^{7}\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^{5}\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^{5}\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+s^{5}\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^{5}\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+2\cdot s^{4}\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+s^{3}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&-s^{3}\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^{3}\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+s^{3}\cdot ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-s\cdot k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+s\cdot ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^{2}\cdot k\lg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&-s^{4}\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s^{4}\cdot ktg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+2\cdot s^{6}\cdot ktg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^{4}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^{7}\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\ \big)\big)
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

La forme de $C7$:

$$
\begin{aligned}
C7 = -\frac{1}{4}\cdot\Big(& -2\cdot s^{7}\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot u)-s^{4}\cdot kld\cdot ktd\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s^{3}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s^{5}\cdot k\lg\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot L)+2\cdot s^{7}\cdot ktd\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s^{7}\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s^{3}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+2\cdot s^{5}\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +s^{4}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +s^{4}\cdot ktd\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot L)-s^{4}\cdot ktd\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -s^{4}\cdot ktd\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^{4}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -s^{4}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^{4}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -2\cdot s^{5}\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^{5}\cdot k\lg\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot L)\\
& -2\cdot s^{7}\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +4\cdot s^{4}\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+4\cdot s^{6}\cdot ktg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& -2\cdot s^{7}\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +4\cdot s^{4}\cdot ktg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^{3}\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^{3}\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& -4\cdot s^{2}\cdot k\lg\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)-k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot u)\\
& -s^{4}\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^{4}\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^{8\cdot}\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^{4}\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot u)\\
& +s^{4}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot u)+s^{8}\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^{4}\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& -s^{4}\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s^{3}\cdot ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +s^{4}\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^{4}\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -2\cdot s\cdot ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +s^{4}\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^{4}\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+2\cdot s^{3}\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot s^{3}\cdot\cos(s\cdot u)-s^{4}\cdot ktd\cdot kld\cdot\sinh(s\cdot u)\\
& +2\cdot s^{7}\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s\cdot ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s^{7}\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s^{5}\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^{4}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\sinh(s\cdot u)\\
& -2\cdot s^{3}\cdot ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s^{5}\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^{8}\cdot\sin(s\cdot u)+s^{8}\cdot\sinh(s\cdot u)\\
& +s^{8}\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^{8}\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^{8}\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -s^{8}\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot L)-s^{8}\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^{8}\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\ \Big)\\
& /\Big(\ s^{3}\cdot E\cdot I\cdot\big(\ -s^{8}\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^{8}-s^{4}\cdot k\lg\cdot ktg-s^{4}\cdot ktd\cdot kld+s^{7}\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -s^{5}\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^{7}\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^{7}\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& +k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld+s^{7}\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^{5}\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^{5}\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& -k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s^{4}\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& -s^{3}\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^{3}\cdot ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
& -s^{4}\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s^{4}\cdot ktg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s\cdot ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& +2\cdot s^{6}\cdot ktg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^{4}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^{3}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -s\cdot k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s^{2}\cdot k\lg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^{5}\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
& -s\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^{3}\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\ \big)\Big)
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

La forme de $C8$:

$$
\begin{aligned}
C8=-\frac{1}{4}\cdot\Big(& -s^{8}\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^{8}\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^{8}\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-s^{8}\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^{4}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\cosh(s\cdot u)+s^{4}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot u)-s^{4}\cdot ktd\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\\
&-s^{4}\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)-s^{8}\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^{8}\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s^{5}\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot u)+s^{8}\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^{8}\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s^{3}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^{7}\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+s^{4}\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-4\cdot s^{2}\cdot k\lg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+4\cdot s^{4}\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+2\cdot s^{3}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s^{3}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^{4}\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-s^{4}\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^{4}\cdot kld\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+s^{4}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^{4}\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-s^{4}\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^{4}\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s^{7}\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^{4}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)+k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\\
&+2\cdot s^{5}\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+s^{4}\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^{4}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^{4}\cdot kld\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-s^{4}\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s^{5}\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+2\cdot s^{7}\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^{5}\cdot kld\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+2\cdot s^{7}\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+2\cdot s^{5}\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)+2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot u)\\
&+ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+2\cdot s^{7}\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^{5}\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+4\cdot s^{6}\cdot ktg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+4\cdot s^{4}\cdot ktg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s^{3}\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)-2\cdot s^{3}\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-2\cdot s\cdot ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+2\cdot s^{7}\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^{4}\cdot ktg\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+2\cdot s\cdot k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^{4}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot u)\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+2\cdot s^{5}\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-s^{4}\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot u)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^{8}\cdot\cosh(s\cdot u)+s^{8}\cdot\cos(s\cdot u)\ \Big)\\
/\Big(\ & s^{3}\cdot E\cdot I\cdot\big(\ s^{8}\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^{8}-s^{7}\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^{7}\cdot ktg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+s^{5}\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^{4}\cdot k\lg\cdot ktg+s^{4}\cdot ktd\cdot kld-k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld-2\cdot s^{4}\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+s\cdot k\lg\cdot ktd\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s\cdot k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^{4}\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&-s^{3}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^{3}\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s\cdot ktg\cdot k\lg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+k\lg\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s^{4}\cdot ktg\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)+s^{7}\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&-s^{5}\cdot kld\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^{5}\cdot k\lg\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s^{7}\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+2\cdot s^{2}\cdot k\lg\cdot kld\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)+s^{3}\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)-s^{3}\cdot ktg\cdot k\lg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)\\
&+s^{4}\cdot k\lg\cdot ktg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-s\cdot k\lg\cdot kld\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L)-2\cdot s^{6}\cdot ktg\cdot ktd\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\\
&+s^{5}\cdot k\lg\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L)\ \big)\Big)
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

L'écriture est la même que celle du fichier de résultat tiré du logiciel de calcul mathématique Maple.

V.1.3 Démarche analytique de simplification de l'écriture analytique de la solution

V.1.3.1 Première simplification

Nous allons travailler sur les valeurs de $C1$ jusqu'à $C8$ séparément, sans prendre en considération le dénominateur. Le premier développement consiste à réécrire ces valeurs en séparant les termes $\cos(s\cdot u)$, $\sin(s\cdot u)$, $\cosh(s\cdot u)$ et $\sinh(s\cdot u)$.

Les termes de la fonction de Green à gauche $C1$ jusqu'à $C4$ sont les suivants :

$$C1 = \frac{1}{4\cdot s^3\cdot EI.DC}\cdot\begin{bmatrix}(fac1C1+fac2C1+fac3C1+fac4C1)\cdot\cos(s.u)\\+(fac5C1+fac6C1+fac7C1+fac8C1+fac9C1)\cdot\sin(s.u)\\+(fac10C1+fac11C1+fac12C1+fac13C1+fac14C1)\cdot\cosh(s.u)\\+(fac15C1+fac16C1+fac17C1+fac18C1+fac19C1)\cdot\sinh(s.u)\end{bmatrix} \tag{5.18}$$

Avec :

$$fac1C1 = (2\cdot(s^7 * (ktd - ktg) + s^3\cdot(ktg\cdot ktd\cdot(klg - kld)))\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L) \tag{5.19.1}$$

$$fac2C1 = (2\cdot(s^7\cdot(ktg) - s^5\cdot(kld) + s^3\cdot(ktg\cdot kld\cdot ktd) - s\cdot(ktg\cdot klg\cdot kld)))\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L) \tag{5.19.2}$$

$$fac3C1 = (-(s^8 - s^6\cdot(4\cdot ktg\cdot ktd) + s^4\cdot(ktg\cdot klg + kld\cdot ktd) + (ktd\cdot kld\cdot klg\cdot ktg)))\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L) \tag{5.19.3}$$

$$fac4C1 = (s^8 + s^4\cdot(ktd\cdot kld + ktg\cdot klg - 4\cdot ktg\cdot kld) + (kld\cdot ktd\cdot klg\cdot ktg))\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L) \tag{5.19.4}$$

$$fac5C1 = (-(s^8 + s^4\cdot(kld\cdot ktd + ktg\cdot klg - 4\cdot ktg\cdot kld) + (ktg\cdot klg\cdot kld\cdot ktd)))\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L) \tag{5.19.5}$$

$$fac6C1 = (-(s^8 - s^6\cdot(4\cdot ktg\cdot ktd) + s^4\cdot(ktg\cdot klg + ktd\cdot kld) + (ktd\cdot kld\cdot klg\cdot ktg)))\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L) \tag{5.19.6}$$

$$fac7C1 = (-2\cdot(s^7\cdot ktg - s^4\cdot kld + s^3\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd - s\cdot ktg\cdot klg\cdot kld))\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L) \tag{5.19.7}$$

$$fac8C1 = (2\cdot(s^7\cdot(ktd - ktg) + s^3\cdot(ktg\cdot ktd\cdot(klg - kld))))\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L) \tag{5.19.8}$$

$$fac9C1 = (s^8 - s^4\cdot(ktd\cdot kld + klg\cdot ktg) + (ktd\cdot kld\cdot klg\cdot ktg)) \tag{5.19.9}$$

$$fac10C1 = (2\cdot(s^7\cdot ktd - s^3\cdot klg\cdot ktg\cdot ktd))\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L) \tag{5.19.10}$$

$$fac11C1 = (-2\cdot(s^5\cdot kld - s\cdot klg\cdot ktg\cdot kld))\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L) \tag{5.19.11}$$

$$fac12C1 = (-(s^8 + s^4\cdot(ktd\cdot kld - ktg\cdot klg) - (ktd\cdot kld\cdot klg\cdot ktg)))\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L) \tag{5.19.12}$$

$$fac13C1 = (s^8 + s^4\cdot(ktd\cdot kld - ktg\cdot klg) - (kld\cdot ktd\cdot klg\cdot ktg))\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L) \tag{5.19.13}$$

$$fac14C1 = (-2\cdot(s^7\cdot ktg - s^3\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld)) \tag{5.19.14}$$

$$fac15C1 = (s^8 + s^4\cdot(kld\cdot ktd - ktg\cdot klg) - (ktg\cdot klg\cdot ktd\cdot kld))\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L) \tag{5.19.15}$$

$$fac16C1 = (-(s^8 + s^4\cdot(ktd\cdot kld - ktg\cdot klg) - (ktg\cdot klg\cdot ktd\cdot kld)))\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L) \tag{5.19.16}$$

$$fac17C1 = (-2\cdot(s^7\cdot ktd - s^3\cdot(ktg\cdot klg\cdot ktd)))\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L) \tag{5.19.17}$$

$$fac18C1 = (2 \cdot (s^5 \cdot kld - s \cdot (ktg \cdot klg \cdot kld))) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \tag{5.19.18}$$

$$fac19C1 = (2 \cdot (s^5 \cdot kld - s \cdot (ktg \cdot klg \cdot kld))) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \tag{5.19.19}$$

$$C2 = -\frac{1}{4 \cdot s^3 \cdot EI.DC} \cdot \begin{bmatrix} (fac1C2 + fac2C2 + fac3C2 + fac4C2 + fac5C2) \cdot \cos(s.u) \\ +(fac6C2 + fac7C2 + fac8C2 + fac9C2) \cdot \sin(s.u) \\ +(fac10C2 + fac11C2 + fac12C2 + fac13C2 + fac14C2) \cdot \cosh(s.u) \\ +(fac15C2 + fac16C2 + fac17C2 + fac18C2 + fac19C2) \cdot \sinh(s.u) \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

Avec :

$$fac1C2 = (s^8 + s^4 \cdot (ktd \cdot kld + ktg \cdot klg - 4 \cdot klg \cdot ktd) + (ktg \cdot klg \cdot kld \cdot ktd)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \tag{5.21.1}$$

$$fac2C1 = (2 \cdot (s^7 \cdot (ktg) - s^5 \cdot (kld) + s^3 \cdot (ktg \cdot kld \cdot ktd) - s \cdot (ktg \cdot klg \cdot kld))) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \tag{5.21.2}$$

$$fac3C2 = (-2 \cdot (s^7 \cdot ktd - s^5 \cdot klg + s^3 \cdot klg \cdot ktg \cdot ktd - s \cdot (klg \cdot kld \cdot ktd))) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \tag{5.21.3}$$

$$fac4C2 = (2 \cdot (s^5 \cdot (kld - klg) + s \cdot (klg \cdot kld \cdot (ktg - ktd)))) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \tag{5.21.4}$$

$$fac5C2 = (-(s^8 - s^4 \cdot (ktd \cdot kld + klg \cdot ktg) + (klg \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld))) \tag{5.21.5}$$

$$fac6C2 = (2 \cdot (s^5 \cdot (klg - kld) + s \cdot (klg \cdot kld \cdot (ktd - ktg)))) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \tag{5.21.6}$$

$$fac7C2 = (-2 \cdot (s^7 \cdot ktd - s^5 \cdot klg + s^3 \cdot klg \cdot ktg \cdot ktd - s \cdot klg \cdot ktd \cdot kld)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \tag{5.21.7}$$

$$fac8C2 = (s^8 + s^4 \cdot (kld \cdot ktd + ktg \cdot klg) - s^2 \cdot (4 \cdot klg \cdot kld) + (ktg \cdot klg \cdot ktd \cdot kld)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \tag{5.21.8}$$

$$fac9C2 = (s^8 + s^4 \cdot (ktg \cdot klg + ktd \cdot kld - 4 \cdot klg \cdot ktd) + (ktg \cdot klg \cdot kld \cdot ktd)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \tag{5.21.9}$$

$$fac10C2 = (-(s^8 + s^4 \cdot (kld \cdot ktd - klg \cdot ktg) - (klg \cdot ktg \cdot kld \cdot ktd))) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \tag{5.21.10}$$

$$fac11C2 = (-(s^8 + s^4 \cdot (ktd \cdot kld - klg \cdot ktg) - (klg \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld))) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \tag{5.21.11}$$

$$fac12C2 = (2 \cdot (s^5 \cdot kld - s \cdot ktg \cdot klg \cdot kld)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \tag{5.21.12}$$

$$fac13C2 = (2 \cdot (s^7 \cdot ktd - s^3 \cdot ktg \cdot klg \cdot ktd)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \tag{5.21.13}$$

$$fac14C2 = (s^8 + s^4 \cdot (klg \cdot ktg - ktd \cdot kld) - (klg \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld)) \tag{5.21.14}$$

$$fac15C2 = (-2 \cdot (s^5 \cdot kld - s \cdot klg \cdot ktg \cdot kld)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \tag{5.21.15}$$

$$fac16C2 = (-2 \cdot (s^7 \cdot ktd - s^3 \cdot klg \cdot ktg \cdot ktd)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \tag{5.21.16}$$

$$fac17C2 = (s^8 + s^4 \cdot (kld \cdot ktd - klg \cdot ktg) - (klg \cdot ktg \cdot kld \cdot ktd)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \tag{5.21.17}$$

$$fac18C2 = (s^8 + s^4 \cdot (ktd \cdot kld - klg \cdot ktg) - (klg \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \tag{5.21.18}$$

$$fac19C2 = (2 \cdot (s^5 \cdot klg - s \cdot klg \cdot ktd \cdot kld)) \tag{5.21.19}$$

$$C3 = -\frac{1}{4 \cdot s^3 \cdot EI.DC} \cdot \begin{bmatrix} (fac1C3 + fac2C3 + fac3C3 + fac4C3 + fac5C3) \cdot \cos(s.u) \\ +(fac6C3 + fac7C3 + fac8C3 + fac9C3 + fac10C3) \cdot \sin(s.u) \\ +(fac11C3 + fac12C3 + fac13C3 + fac14C3) \cdot \cosh(s.u) \\ +(fac15C3 + fac16C3 + fac17C3 + fac18C3 + fac19C3) \cdot \sinh(s.u) \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

Avec :

$$fac1C3 = (2 \cdot (s^7 \cdot ktd - s^3 \cdot ktg \cdot klg \cdot ktd)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \tag{5.23.1}$$

$$fac2C3 = (-2 \cdot (s^5 \cdot kld - s \cdot ktg \cdot klg \cdot kld)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \tag{5.23.2}$$

$$fac3C3 = (-(s^8 + s^4 \cdot (kld \cdot ktd - ktg \cdot klg) - (ktg \cdot klg \cdot kld \cdot ktd))) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.23.3)$$

$$fac4C3 = (s^8 + s^4 \cdot (ktd \cdot kld - ktg \cdot klg) - (ktg \cdot klg \cdot ktd \cdot kld)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.23.4)$$

$$fac5C3 = (-2 \cdot (s^7 \cdot ktg - s^3 \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld)) \quad (5.23.5)$$

$$fac6C3 = (-(s^8 + s^4 \cdot (kld \cdot ktd - ktg \cdot klg) - (ktg \cdot klg \cdot kld \cdot ktd))) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.23.6)$$

$$fac7C3 = (-(s^8 + s^4 \cdot (ktd \cdot kld - ktg \cdot klg) - (ktg \cdot klg \cdot ktd \cdot kld))) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.23.7)$$

$$fac8C3 = (2 \cdot (s^5 \cdot kld - s \cdot ktg \cdot klg \cdot kld)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.23.8)$$

$$fac9C3 = (2 \cdot (s^7 \cdot ktd - s^3 \cdot ktg \cdot klg \cdot ktd)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.23.9)$$

$$fac10C3 = (s^8 + s^4 \cdot (klg \cdot ktg - ktd \cdot kld) - (klg \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld)) \quad (5.23.10)$$

$$fac11C3 = (2 \cdot (s^7 \cdot (ktd - ktg) + s^3 \cdot (ktg \cdot ktd \cdot (klg - kld)))) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.23.11)$$

$$fac12C3 = (-(2 \cdot (s^7 \cdot ktg + s^5 \cdot kld + s^3 \cdot ktg \cdot kld \cdot ktd + s \cdot klg \cdot ktg \cdot kld))) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.23.12)$$

$$fac13C3 = (-(s^8 + s^4 \cdot (ktg \cdot klg + ktd \cdot kld - 4 \cdot ktg \cdot kld) + (ktg \cdot klg \cdot kld \cdot ktd))) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.23.13)$$

$$fac14C3 = (s^8 + s^6 \cdot (4 \cdot ktg \cdot ktd) + s^4 \cdot (ktd \cdot kld + ktg \cdot klg) + (ktg \cdot klg \cdot ktd \cdot kld)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.23.14)$$

$$fac15C3 = (s^8 + s^4 \cdot (kld \cdot ktd + ktg \cdot klg - 4 \cdot ktg \cdot kld) + (ktg \cdot klg \cdot ktd \cdot kld)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.23.15)$$

$$fac16C3 = (-(s^8 + s^6 \cdot (4 \cdot ktg \cdot ktd) + s^4 \cdot (ktd \cdot kld + ktg \cdot klg) + (ktg \cdot klg \cdot ktd \cdot kld))) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.23.16)$$

$$fac17C3 = (2 \cdot (s^7 \cdot (ktg - ktd) + s^3 \cdot (ktg \cdot ktd \cdot (kld - klg)))) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.23.17)$$

$$fac18C3 = (2 \cdot (s^7 \cdot ktg + s^5 \cdot kld + s^3 \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld + s \cdot ktg \cdot klg \cdot kld)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.23.18)$$

$$fac19C3 = (-(s^8 - s^4 \cdot (ktg \cdot klg + ktd \cdot kld) + (ktg \cdot klg \cdot ktd \cdot kld))) \quad (5.23.19)$$

$$C4 = \frac{1}{4 \cdot s^3 \cdot EI.DC} \cdot \begin{bmatrix} (fac1C4 + fac2C4 + fac3C4 + fac4C4 + fac5C4) \cdot \cos(s.u) \\ +(fac6C4 + fac7C4 + fac8C4 + fac9C4 + fac10C4) \cdot \sin(s.u) \\ +(fac11C4 + fac12C4 + fac13C4 + fac14C4 + fac15C5) \cdot \cosh(s.u) \\ +(fac16C4 + fac17C4 + fac18C4 + fac19C4) \cdot \sinh(s.u) \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Avec :

$$fac1C4 = (s^8 + s^4 \cdot (ktd \cdot kld - ktg \cdot klg) - (ktg \cdot klg \cdot kld \cdot ktd)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.25.1)$$

$$fac2C4 = (-(s^8 + s^4 \cdot (kld \cdot ktd - ktg \cdot klg) - (ktg \cdot klg \cdot ktd \cdot kld))) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.25.2)$$

$$fac3C4 = (-2 \cdot (s^7 \cdot ktd - s^3 \cdot klg \cdot ktg \cdot ktd)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.25.3)$$

$$fac4C4 = (2 \cdot (s^5 \cdot kld - s \cdot klg \cdot ktg \cdot kld)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.25.4)$$

$$fac5C4 = (-(s^8 + s^4 \cdot (klg \cdot ktg - ktd \cdot kld) - (klg \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld))) \quad (5.25.5)$$

$$fac6C4 = (-2 \cdot (s^5 \cdot kld - s \cdot klg \cdot ktg \cdot kld)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.25.6)$$

$$fac7C4 = (-2 \cdot (s^7 \cdot ktd - s^3 \cdot klg \cdot ktg \cdot ktd)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.25.7)$$

$$fac8C4 = (s^8 + s^4 \cdot (kld \cdot ktd - ktg \cdot klg) - (ktg \cdot klg \cdot ktd \cdot kld)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.25.8)$$

$$fac9C4 = (s^8 + s^4 \cdot (ktd \cdot kld - ktg \cdot klg) - (ktg \cdot klg \cdot kld \cdot ktd)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.25.9)$$

$$fac10C4 = (2 \cdot (s^5 \cdot klg - s \cdot klg \cdot ktd \cdot kld)) \quad (5.25.10)$$

$$fac11C4 = (-(s^8 + s^4 \cdot (klg \cdot ktg + kld \cdot ktd - 4 \cdot klg \cdot ktd) + (klg \cdot ktg \cdot kld \cdot ktd))) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.25.11)$$

$$fac12C4 = (-(s^8 + s^4 \cdot (klg \cdot ktg + ktd \cdot kld) + s^2 \cdot (4 \cdot klg \cdot kld) + (klg \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld))) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.25.12)$$

$$fac13C4 = (-2 \cdot (s^5 \cdot (klg - kld) + s \cdot (klg \cdot kld \cdot (ktd - ktg)))) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.25.13)$$

$$fac14nC4 = (2 \cdot (s^7 \cdot ktd + s^5 \cdot klg + s^3 \cdot ktg \cdot klg \cdot ktd + s \cdot klg \cdot ktd \cdot kld)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.25.14)$$

$$fac15C4 = (s^8 - s^4 \cdot (ktd \cdot kld + klg \cdot ktg) + (klg \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld)) \quad (5.25.15)$$

$$fac16C4 = (-2 \cdot (s^5 \cdot (kld - klg) + s \cdot (klg \cdot kld \cdot (ktg - ktd)))) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.25.16)$$

$$fac17C4 = (-2 \cdot (s^7 \cdot ktd + s^5 \cdot klg + s^3 \cdot klg \cdot ktg \cdot ktd + s \cdot klg \cdot kld \cdot ktd)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.25.17)$$

$$fac18C4 = (s^8 + s^4 \cdot (klg \cdot ktg + kld \cdot ktd - 4 \cdot klg \cdot ktd) + (klg \cdot ktg \cdot kld \cdot ktd)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.25.18)$$

$$fac19C4 = (s^8 + s^4 \cdot (ktd \cdot kld + klg \cdot ktg) + s^2 \cdot (4 \cdot klg \cdot kld) + (klg \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.25.19)$$

Les termes de la fonction de Green à droite $C5$ jusqu'à $C8$ sont les suivants :

$$C5 = -\frac{1}{4 \cdot s^3 \cdot EI.DC} \cdot \begin{bmatrix} (fac1C5 + fac2C5 + fac3C5 + fac4C5) \cdot \cos(s.u) \\ + (fac5C5 + fac6C5 + fac7C5 + fac8C5 + fac9C5) \cdot \sin(s.u) \\ + (fac10C5 + fac11C5 + fac12C5 + fac13C5 + fac14C5) \cdot \cosh(s.u) \\ + (fac15C5 + fac16C5 + fac17C5 + fac18C5 + fac19C5) \cdot \sinh(s.u) \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Avec :

$$fac1C5 = (-2 \cdot (s^7 \cdot (ktg - ktd) + s^3 \cdot (ktg \cdot ktd \cdot (kld - klg)))) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.27.1)$$

$$fac2C5 = (2 \cdot (s^7 \cdot ktg - s^5 \cdot kld + s^3 \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld - s \cdot ktg \cdot klg \cdot kld)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.27.2)$$

$$fac3C5 = (-(s^8 - s^6 \cdot (4 \cdot ktg \cdot ktd) + s^4 \cdot (ktg \cdot klg + ktd \cdot kld) + ktg \cdot klg \cdot ktd \cdot kld)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.27.3)$$

$$fac4C5 = (s^8 + s^4 \cdot (ktg \cdot klg + kld \cdot ktd - 4 \cdot ktg \cdot kld) + (ktg \cdot klg \cdot kld \cdot ktd)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.27.4)$$

$$fac5C5 = (s^8 + s^4 \cdot (ktg \cdot klg + kld \cdot ktd - 4 \cdot klg \cdot ktd) + (ktg \cdot klg \cdot kld \cdot ktd)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.27.5)$$

$$fac6C5 = (-(s^8 + s^4 \cdot (ktg \cdot klg + ktd \cdot kld) - s^2 \cdot (4 \cdot klg \cdot kld) + (ktg \cdot klg \cdot ktd \cdot kld))) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.27.6)$$

$$fac7C5 = (-2 \cdot (s^7 \cdot ktd - s^5 \cdot klg + s^3 \cdot klg \cdot ktg \cdot ktd - s \cdot klg \cdot ktd \cdot kld)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.27.7)$$

$$fac8nC5 = (-2 \cdot (s^5 \cdot (klg - kld) + s \cdot (klg \cdot kld \cdot (ktd - ktg)))) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.27.8)$$

$$fac9C5 = (-(s^8 - s^4 \cdot (klg \cdot ktg + ktd \cdot kld) + (klg \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld))) \quad (5.27.9)$$

$$fac10C5 = (2 \cdot (s^7 \cdot ktd - s^3 \cdot klg \cdot ktg \cdot ktd)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.27.10)$$

$$fac11C5 = (-2 \cdot (s^5 \cdot kld - s \cdot klg \cdot ktg \cdot kld)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.27.11)$$

$$fac12C5 = (-(s^8 + s^4 \cdot (ktd \cdot kld - ktg \cdot klg) - (ktg \cdot klg \cdot kld \cdot ktd))) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.27.12)$$

$$fac13C5 = (s^8 + s^4 \cdot (ktd \cdot kld - ktg \cdot klg) - (ktg \cdot klg \cdot ktd \cdot kld)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.27.13)$$

$$fac14C5 = (-2 \cdot (s^7 \cdot ktg - s^3 \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld)) \quad (5.27.14)$$

$$fac15C5 = (s^8 + s^4 \cdot (kld \cdot ktd - ktg \cdot klg) - (ktg \cdot klg \cdot ktd \cdot kld)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.27.15)$$

$$fac16C5 = (-(s^8 + s^4 \cdot (ktd \cdot kld - ktg \cdot klg) - (ktg \cdot klg \cdot ktd \cdot kld))) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.27.16)$$

$$fac17C5 = (-2 \cdot (s^7 \cdot ktd - s^3 \cdot ktg \cdot klg \cdot ktd)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.27.17)$$

$$fac18C5 = (2\cdot(s^5\cdot kld - s\cdot ktg\cdot klg\cdot kld))\cdot \sin(s\cdot L)\cdot \cosh(s\cdot L) \tag{5.27.18}$$

$$fac19C5 = (-(s^8 + s^4\cdot(ktg\cdot klg - ktd\cdot kld) - (ktg\cdot klg\cdot ktd\cdot kld))) \tag{5.27.19}$$

$$C6 = -\frac{1}{4\cdot s^3\cdot EI.DC}\cdot\begin{bmatrix}(fac1C6 + fac2C6 + fac3C6 + fac4C6 + fac5C6)\cdot\cos(s.u)\\ +(fac6C6 + fac7C6 + fac8C6 + fac9C6)\cdot\sin(s.u)\\ +(fac10C6 + fac11C6 + fac12C6 + fac13C6 + fac14C6)\cdot\cosh(s.u)\\ +(fac15C6 + fac16C6 + fac17C6 + fac18C6 + fac19C6)\cdot\sinh(s.u)\end{bmatrix} \tag{5.28}$$

$$fac1C6 = (-(s^8 + s^4\cdot(ktg\cdot klg + ktd\cdot kld - 4\cdot ktg\cdot kld) + (ktg\cdot klg\cdot kld\cdot ktd)))\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L) \tag{5.29.1}$$

$$fac2C6 = (-(s^8 - s^6\cdot(4\cdot ktg\cdot ktd) + s^4\cdot(kld\cdot ktd + ktg\cdot klg) + (ktg\cdot klg\cdot ktd\cdot kld)))\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L) \tag{5.29.2}$$

$$fac3C6 = (-2\cdot(s^7\cdot ktg - s^5\cdot kld + s^3\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd - s\cdot ktg\cdot klg\cdot kld))\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L) \tag{5.29.3}$$

$$fac4C6 = (-2\cdot(s^7\cdot(ktg - ktd) + s^3\cdot(ktg\cdot ktd\cdot(kld - klg))))\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L) \tag{5.29.4}$$

$$fac5C6 = (s^8 + s^4\cdot(ktd\cdot kld + klg\cdot ktg) + (klg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld)) \tag{5.29.5}$$

$$fac6C6 = (-2\cdot(s^5\cdot(kld - klg) + s\cdot(klg\cdot kld\cdot(ktg - ktd))))\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L) \tag{5.29.6}$$

$$fac7C6 = (-2\cdot(s^7\cdot ktd - s^5\cdot klg + s^3\cdot klg\cdot ktg\cdot ktd - s\cdot klg\cdot ktd\cdot kld))\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L) \tag{5.29.7}$$

$$fac8C6 = (s^8 + s^4\cdot(kld\cdot ktd + ktg\cdot klg) - s^2\cdot(4\cdot klg\cdot kld) + (ktg\cdot klg\cdot ktd\cdot kld))\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L) \tag{5.29.8}$$

$$fac9C6 = (s^8 + s^4\cdot(ktd\cdot kld + ktg\cdot klg - 4\cdot klg\cdot ktd) + (ktg\cdot klg\cdot kld\cdot ktd))\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L) \tag{5.29.9}$$

$$fac10C6 = (-(s^8 + s^4\cdot(ktd\cdot kld - klg\cdot ktg) - (klg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld)))\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L) \tag{5.29.10}$$

$$fac11C6 = (-(s^8 + s^4\cdot(kld\cdot ktd - klg\cdot ktg) - (klg\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd)))\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L) \tag{5.29.11}$$

$$fac12C6 = (2\cdot(s^5\cdot kld - s\cdot ktg\cdot klg\cdot kld))\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L) \tag{5.29.12}$$

$$fac13C6 = (2\cdot(s^7\cdot ktd - s^3\cdot ktg\cdot klg\cdot ktd))\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L) \tag{5.29.13}$$

$$fac14C6 = (s^8 + s^4\cdot(klg\cdot ktg - ktd\cdot kld) - (klg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld)) \tag{5.29.14}$$

$$fac15C6 = (-2\cdot(s^5\cdot kld - s\cdot klg\cdot ktg\cdot kld))\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L) \tag{5.29.15}$$

$$fac16C6 = (-2\cdot(s^7\cdot ktd - s^3\cdot klg\cdot ktg\cdot ktd))\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L) \tag{5.29.16}$$

$$fac17C6 = (s^8 + s^4\cdot(ktd\cdot kld - klg\cdot ktg) - (klg\cdot ktg\cdot ktd\cdot kld))\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L) \tag{5.29.17}$$

$$fac18C6 = (s^8 + s^4\cdot(kld\cdot ktd - klg\cdot ktg) - (klg\cdot ktg\cdot kld\cdot ktd))\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L) \tag{5.29.18}$$

$$fac19C6 = (2\cdot(s^5\cdot klg - s\cdot klg\cdot ktd\cdot kld)) \tag{5.29.19}$$

$$C7 = -\frac{1}{4\cdot s^3\cdot EI.DC}\cdot\begin{bmatrix}(fac1C7 + fac2C7 + vfac3C7 + fac4C7 + fac5C7)\cdot\cos(s.u)\\ +(fac6C7 + fac7C7 + fac8C7 + fac9C7 + fac10C7)\cdot\sin(s.u)\\ +(fac11C7 + fac12C7 + fac13C7 + fac14C7)\cdot\cosh(s.u)\\ +(fac15C7 + fac16C7 + fac17C7 + fac18C7 + fac19C7)\cdot\sinh(s.u)\end{bmatrix} \tag{5.30}$$

Avec :

$$fac1C7 = (2\cdot(s^7\cdot ktd - s^3\cdot ktg\cdot klg\cdot ktd))\cdot\cos(s\cdot L)\cdot\cosh(s\cdot L) \tag{5.31.1}$$

$$fac2C7 = (-2\cdot(s^5\cdot kld - s\cdot ktg\cdot klg\cdot kld))\cdot\sin(s\cdot L)\cdot\sinh(s\cdot L) \tag{5.31.2}$$

$$fac3C7 = (-(s^8 + s^4 \cdot (kld \cdot ktd - ktg \cdot klg) - (ktg \cdot klg \cdot kld \cdot ktd))) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.31.3)$$

$$fac4C7 = (s^8 + s^4 \cdot (ktd \cdot kld - ktg \cdot klg) - (ktg \cdot klg \cdot ktd \cdot kld)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.31.4)$$

$$fac5C7 = (-2 \cdot (s^7 \cdot ktg + s^3 \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld)) \quad (5.31.5)$$

$$fac6C7 = (-(s^8 + s^4 \cdot (kld \cdot ktd - ktg \cdot klg) - (ktg \cdot klg \cdot kld \cdot ktd))) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.31.6)$$

$$fac7C7 = (-(s^8 + s^4 \cdot (ktd \cdot kld - ktg \cdot klg) - (ktg \cdot klg \cdot ktd \cdot kld))) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.31.7)$$

$$fac8C7 = (2 \cdot (s^5 \cdot kld - s \cdot ktg \cdot klg \cdot kld)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.31.8)$$

$$fac9C7 = (2 \cdot (s^7 \cdot ktd - s^3 \cdot ktg \cdot klg \cdot ktd)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.31.9)$$

$$fac10C7 = (s^8 + s^4 \cdot (klg \cdot ktg - ktd \cdot kld) - (klg \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld)) \quad (5.31.10)$$

$$fac11C7 = (2 \cdot (s^7 \cdot (ktd - ktg) + s^3 \cdot (ktg \cdot ktd \cdot (klg - kld)))) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.31.11)$$

$$fac12C7 = (-2 \cdot (s^7 \cdot ktg + s^5 \cdot kld + s^3 \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld + s \cdot klg \cdot ktg \cdot kld)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.31.12)$$

$$fac13C7 = (-(s^8 + s^4 \cdot (ktd \cdot kld + klg \cdot ktg - 4 \cdot ktg \cdot kld) + (klg \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld))) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.31.13)$$

$$fac14C7 = (s^8 + s^6 \cdot (4 \cdot ktg \cdot ktd) + s^4 \cdot (klg \cdot ktg + ktd \cdot kld) + (klg \cdot ktg \cdot kld \cdot ktd)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.31.14)$$

$$fac15C7 = (-(s^8 + s^4 \cdot (kld \cdot ktd + klg \cdot ktg - 4 \cdot klg \cdot ktd) + (klg \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld))) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.31.15)$$

$$fac16C7 = (-(s^8 + s^4 \cdot (ktd \cdot kld + klg \cdot ktg) + s^2 \cdot (4 \cdot klg \cdot kld) + (klg \cdot ktg \cdot kld \cdot ktd))) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.31.16)$$

$$fac17C7 = (2 \cdot (s^5 \cdot (kld - klg) + s \cdot (klg \cdot kld \cdot (ktg - ktd)))) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.31.17)$$

$$fac18C7 = (2 \cdot (s^7 \cdot ktd + s^5 \cdot klg + s^3 \cdot klg \cdot ktg \cdot ktd + s \cdot klg \cdot ktd \cdot kld)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.31.18)$$

$$fac19C7 = (s^8 - s^4 \cdot (ktd \cdot kld + klg \cdot ktg) + (klg \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld)) \quad (5.31.19)$$

$$C8 = \frac{1}{4 \cdot s^3 \cdot EI.DC} \cdot \begin{bmatrix} (fac1C8 + fac2C8 + fac3C8 + fac4C8 + fac5C8) \cdot \cos(s.u) \\ + (fac6C8 + fac7C8 + fac8C8 + fac9C1 + fac10C8) \cdot \sin(s.u) \\ + (fac11C8 + fac12C8 + fac13C8 + fac14C8 + fac15C8) \cdot \cosh(s.u) \\ + (fac16C8 + fac17C8 + fac18C8 + fac19C8) \cdot \sinh(s.u) \end{bmatrix}$$

(5.32)

Avec :

$$fac1C8 = (s^8 + s^4 \cdot (ktd \cdot kld - ktg \cdot klg) - ktg \cdot klg \cdot kld \cdot ktd) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.33.1)$$

$$fac2C8 = (-(s^8 + s^4 \cdot (kld \cdot ktd - ktg \cdot klg) - (ktg \cdot klg \cdot ktd \cdot kld))) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.33.2)$$

$$fac3C8 = (-2 \cdot (s^7 \cdot ktd - s^3 \cdot klg \cdot ktg \cdot ktd)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.33.3)$$

$$fac4C8 = (2 \cdot (s^5 \cdot kld - s \cdot klg \cdot ktg \cdot kld)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.33.4)$$

$$fac5C8 = (-(s^8 + s^4 \cdot (klg \cdot ktg - ktd \cdot kld) - (klg \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld))) \quad (5.33.5)$$

$$fac6C8 = (-2 \cdot (s^5 \cdot kld - s \cdot klg \cdot ktg \cdot kld)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.33.6)$$

$$fac7C8 = (-2 \cdot (s^7 \cdot ktd - s^3 \cdot klg \cdot ktg \cdot ktd)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.33.7)$$

$$fac8C8 = (s^8 + s^4 \cdot (kld \cdot ktd - ktg \cdot klg) - (ktg \cdot klg \cdot ktd \cdot kld)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.33.8)$$

$$fac9C8 = (s^8 + s^4 \cdot (ktd \cdot kld - ktg \cdot klg) - (ktg \cdot klg \cdot kld \cdot ktd)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.33.9)$$

$$fac10C8 = (2 \cdot (s^5 \cdot klg + s \cdot klg \cdot ktd \cdot kld)) \quad (5.33.10)$$

$$fac11C8 = (s^8 + s^4 \cdot (ktd \cdot kld + klg \cdot ktg - 4 \cdot ktg \cdot kld) + (klg \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.33.11)$$

$$fac12C8 = (-(s^8 + s^6 \cdot (4 \cdot ktg \cdot ktd) + s^4 \cdot (kld \cdot ktd + klg \cdot ktg) + (klg \cdot ktg \cdot kld \cdot ktd))) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.33.12)$$

$$fac13C8 = (-2 \cdot (s^7 \cdot (ktd - ktg) + s^3 \cdot (ktg \cdot ktd \cdot (klg - kld)))) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.33.13)$$

$$fac14C8 = (2 \cdot (s^7 \cdot ktg + s^5 \cdot kld + s^3 \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld + s \cdot ktg \cdot klg \cdot kld)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.33.14)$$

$$fac15C8 = (-(s^8 - s^4 \cdot (klg \cdot ktg + ktd \cdot kld) + (klg \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld))) \quad (5.33.15)$$

$$fac16C8 = (-2 \cdot (s^5 \cdot (kld - klg) + s \cdot (klg \cdot kld \cdot (ktg - ktd)))) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.33.16)$$

$$fac17C8 = (-2 \cdot (s^7 \cdot ktd + s^5 \cdot klg + s^3 \cdot klg \cdot ktg \cdot ktd + s \cdot klg \cdot ktd \cdot kld)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.33.17)$$

$$fac18C8 = (s^8 + s^4 \cdot (klg \cdot ktg + ktd \cdot kld - 4 \cdot klg \cdot ktd) + (klg \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.33.18)$$

$$fac19C8 = (s^8 + s^4 \cdot (klg \cdot ktg + kld \cdot ktd) + s^2 \cdot (4 \cdot klg \cdot kld) + (klg \cdot ktg \cdot kld \cdot ktd)) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.33.19)$$

et :

$$DC = k1dc + k2dc + k3dc + k4dc + k5dc \quad (5.34)$$

Avec :

$$k1dc = (s^8 + s^4 \cdot (kld \cdot ktd + klg \cdot ktg - 2 \cdot (ktd \cdot klg + kld \cdot ktg)) + (kld \cdot ktd \cdot klg \cdot ktg)) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.35.1)$$

$$k2dc = (-2 \cdot (s^6 \cdot (ktg \cdot ktd) - s^2 \cdot (klg \cdot kld))) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.35.2)$$

$$k3dc = (s^7 \cdot (ktg - ktd) + s^5 \cdot (klg - kld) + s^3 \cdot (ktg \cdot ktd \cdot (kld - klg)) + s \cdot (klg \cdot kld \cdot (ktd - ktg))) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \quad (5.35.3)$$

$$k4dc = (s^7 \cdot (ktg - ktd) + s^5 \cdot (kld - klg) + s^3 \cdot (ktg \cdot ktd \cdot (kld - klg)) + s \cdot (klg \cdot kld \cdot (ktg - ktd))) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) \quad (5.35.4)$$

$$k5dc = (-(s^8 - s^4 \cdot (ktd \cdot kld + ktg \cdot klg) + (ktd \cdot kld \cdot klg \cdot ktg))) \quad (5.35.5)$$

V.1.3.2 Deuxième simplification

L'écriture de la fonction de Green à gauche et à droite est comme suit :

$$Gr_g(x,u) = \frac{1}{4 \cdot S^3 \cdot EI \cdot DC} \cdot (C_1 \cos(sx) + C_2 \sin(sx) + C_3 \cosh(sx) + C_4 \sinh(sx)), 0 \le x \le u \quad (5.36)$$

$$Gr_d(x,u) = \frac{1}{4 \cdot S^3 \cdot EI \cdot DC} \cdot (C_5 \cos(sx) + C_6 \sin(sx) + C_7 \cosh(sx) + C_8 \sinh(sx)), x \le u \le L \quad (5.37)$$

En utilisant les transformations trigonométriques placé en annexe C et posons les différents termes de raideurs de $\kappa 1$ jusqu'au $\kappa 25$ comme suit:

$$\kappa 1 = s^7 \cdot (ktd - ktg) + s^3 \cdot (ktg \cdot ktd \cdot (klg - kld)) \quad (5.38)$$

$$\kappa 2 = s^8 - 4 \cdot s^6 \cdot ktg \cdot ktd + s^4 \cdot (ktg \cdot klg + kld \cdot ktd) + ktg \cdot klg \cdot kld \cdot ktd \quad (5.39)$$

$$\kappa 3 = s^8 + s^4 \cdot (kld \cdot ktd + ktg \cdot klg - 4 \cdot ktg \cdot kld) + ktg \cdot klg \cdot kld \cdot ktd \quad (5.40)$$

$$\kappa 4 = s^8 \cdot ktg - s^5 \cdot kld + s^3 \cdot ktg \cdot kld \cdot ktd - s \cdot ktg \cdot klg \cdot kld \quad (5.41)$$

$$\kappa 5 = s^7 \cdot ktd - s^3 \cdot ktg \cdot klg \cdot ktd \quad (5.42)$$

$$\kappa 6 = s^8 + s^4 \cdot (ktd \cdot kld - ktg \cdot klg) - ktg \cdot klg \cdot ktd \cdot kld \quad (5.43)$$

$$\kappa 7 = s^5 \cdot kld - s \cdot klg \cdot ktg \cdot kld \quad (5.44)$$

$$\kappa 8 = s^8 - s^4 \cdot (ktd \cdot kld + klg \cdot ktg) + klg \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld \quad (5.45)$$

$$\kappa 9 = s^7 \cdot ktg - s^3 \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld \quad (5.46)$$

$$\kappa 10 = s^8 + s^4 \cdot (ktg \cdot klg - ktd \cdot kld) - ktg \cdot klg \cdot ktd \cdot kld \quad (5.47)$$

$$\kappa 11 = s^8 + s^4 \cdot (ktg \cdot klg + ktd \cdot kld - 4 \cdot klg \cdot ktd) + ktg \cdot klg \cdot kld \cdot ktd \quad (5.48)$$

$$\kappa 12 = s^7 \cdot ktd - s^5 \cdot klg + s^3 \cdot klg \cdot ktg \cdot ktd - s \cdot klg \cdot kld \cdot ktd \quad (5.49)$$

$$\kappa 13 = s^5 \cdot (kld - klg) + s \cdot (klg \cdot kld \cdot (ktg - ktd)) \quad (5.50)$$

$$\kappa 14 = s^8 + s^4 \cdot (kld \cdot ktd + ktg \cdot klg) - 4 \cdot s^2 \cdot klg \cdot kld + ktg \cdot klg \cdot ktd \cdot kld \quad (5.51)$$

$$\kappa 15 = s^5 \cdot klg - s \cdot klg \cdot ktd \cdot kld \quad (5.52)$$

$$\kappa 16 = s^8 + 4 \cdot s^6 \cdot ktg \cdot ktd + s^4 \cdot (ktd \cdot kld + ktg \cdot klg) + ktg \cdot klg \cdot ktd \cdot kld \quad (5.53)$$

$$\kappa 17 = s^7 \cdot ktg + s^5 \cdot kld + s^3 \cdot ktg \cdot kld \cdot ktd + s \cdot klg \cdot ktg \cdot kld \quad (5.54)$$

$$\kappa 18 = s^8 + s^4 \cdot (klg \cdot ktg - ktd \cdot kld) - klg \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld \quad (5.55)$$

$$\kappa 19 = s^7 \cdot ktd + s^5 \cdot klg + s^3 \cdot klg \cdot ktg \cdot ktd + s \cdot klg \cdot kld \cdot ktd \quad (5.56)$$

$$\kappa 20 = s^8 + s^4 \cdot (klg \cdot ktg + ktd \cdot kld) + 4 \cdot s^2 \cdot klg \cdot kld + klg \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld \quad (5.57)$$

$$\kappa 21 = s^8 + s^4 \cdot (ktd \cdot kld + klg \cdot ktg) + klg \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld \quad (5.58)$$

$$\kappa 22 = s^7 \cdot ktg + s^3 \cdot ktg \cdot ktd \cdot kld \quad (5.59) \quad \kappa 23 = s^5 \cdot klg + s \cdot klg \cdot ktd \cdot kld \quad (5.60)$$

$$\kappa 24 = s^8 + s^4 \cdot (ktg \cdot klg + kld \cdot ktd - 2 \cdot (klg \cdot ktd + ktg \cdot kld)) + ktg \cdot klg \cdot klg \cdot ktd \quad (5.61)$$

$$\kappa 25 = s^6 \cdot ktg \cdot ktd - s^2 \cdot klg \cdot kld \quad (5.62)$$

Nous obtenons une écriture des variables de la fonction de Green comme suit :

La variable C1 :

$$\begin{aligned} C_1 &= (2 \cdot k1 \cdot ah - k2 \cdot bh) \cdot \cos(s \cdot (u - L)) - (k3 \cdot ah + 2 \cdot k4 \cdot bh) \cdot \sin(s \cdot (u - L)) \\ &+ (2 \cdot k5 \cdot a + k6 \cdot b) \cdot \cosh(s \cdot (u - L)) + (k6 \cdot a + 2 \cdot k7 \cdot b) \cdot \sinh(s \cdot (u - L)) \\ &+ k8 \cdot \sin(s \cdot u) - 2 \cdot k9 \cdot \cosh(s \cdot u) - k10 \cdot \sinh(s \cdot u) \end{aligned} \quad (5.63)$$

La variable C2 :

$$\begin{aligned} C_2 &= (k11 \cdot ah - 2 \cdot k12 \cdot bh) \cdot \cos(s \cdot (u - L)) - (2 \cdot k13 \cdot ah - k14 \cdot bh) \cdot \sin(s \cdot (u - L)) \\ &- (k6 \cdot a - 2 \cdot k5 \cdot b) \cdot \cosh(s \cdot (u - L)) - (2 \cdot k7 \cdot a - k6 \cdot b) \cdot \sinh(s \cdot (u - L)) \\ &- k8 \cdot \cos(s \cdot u) + k10 \cdot \cosh(s \cdot u) + 2 \cdot k15 \cdot \sinh(s \cdot u) \end{aligned} \quad (5.64)$$

La variable C3 :

$$\begin{aligned} C_3 &= (2 \cdot k5 \cdot ah - k6 \cdot bh) \cdot \cos(s \cdot (u - L)) - (k6 \cdot ah - 2 \cdot k7 \cdot bh) \cdot \sin(s \cdot (u - L)) \\ &+ (2 \cdot k1 \cdot a + k16 \cdot b) \cdot \cosh(s \cdot (u - L)) + (k3 \cdot a + 2 \cdot k17 \cdot b) \cdot \sinh(s \cdot (u - L)) \\ &- 2 \cdot k9 \cdot \cos(s \cdot u) + k18 \cdot \sin(s \cdot u) - k8 \cdot \sinh(s \cdot u) \end{aligned} \quad (5.65)$$

La variable $C4$:

$$C_4 = (\mathrm{k6} \cdot ah - 2 \cdot \mathrm{k5} \cdot bh) \cdot \cos(\mathrm{s} \cdot (\mathrm{u} - \mathrm{L})) - (2 \cdot \mathrm{k7} \cdot ah - \mathrm{k6} \cdot bh) \cdot \sin(\mathrm{s} \cdot (\mathrm{u} - \mathrm{L}))$$
$$- (\mathrm{k11} \cdot a - 2 \cdot \mathrm{k19} \cdot b) \cdot \cosh(\mathrm{s} \cdot (\mathrm{u} - \mathrm{L})) - (2 \cdot \mathrm{k13} \cdot a - \mathrm{k20} \cdot b) \cdot \sinh(\mathrm{s} \cdot (\mathrm{u} - \mathrm{L}))$$
$$- \mathrm{k18} \cdot \cos(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) + 2 \cdot \mathrm{k15} \cdot \sin(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) + \mathrm{k8} \cdot \cosh(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u})$$

(5.66)

La variable $C5$:

$$C_5 = (2 \cdot \mathrm{k5} \cdot a + \mathrm{k6} \cdot b) \cdot \cosh(\mathrm{s} \cdot (\mathrm{u} - \mathrm{L})) + (\mathrm{k6} \cdot a + 2 \cdot \mathrm{k7} \cdot b) \cdot \sinh(\mathrm{s} \cdot (\mathrm{u} - \mathrm{L})$$
$$+ (2 \cdot (\mathrm{k1} \cdot a \cdot \cos(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) + \mathrm{k13} \cdot b \cdot \sin(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u})) + (\mathrm{k3} \cdot b \cdot \cos(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) + \mathrm{k11} \cdot a \cdot \sin(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}))) \cdot ah$$
$$- (\mathrm{k2} \cdot a \cdot \cos(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) + \mathrm{k14} \cdot b \cdot \sin(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) - 2 \cdot (\mathrm{k4} \cdot b \cdot \cos(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) - \mathrm{k12} \cdot a \cdot \sin(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}))) \cdot bh$$
$$- \mathrm{k8} \cdot \sin(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) - 2 \cdot \mathrm{k9} \cdot \cosh(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) - \mathrm{k18} \cdot \sinh(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u})$$

(5.67)

La variable $C6$:

$$C_6 = (-\mathrm{k6} \cdot a + 2 \cdot \mathrm{k5} \cdot b) \cdot \cosh(\mathrm{s} \cdot (\mathrm{u} - \mathrm{L})) - (2 \cdot \mathrm{k7} \cdot a - \mathrm{k6} \cdot b) \cdot \sinh(\mathrm{s} \cdot (\mathrm{u} - \mathrm{L})$$
$$- (\mathrm{k3} \cdot a \cdot \cos(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) - \mathrm{k11} \cdot b \cdot \sin(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) + 2 \cdot (\mathrm{k13} \cdot a \cdot \sin(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) - \mathrm{k1} \cdot b \cdot \cos(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}))) \cdot ah$$
$$- (\mathrm{k2} \cdot b \cdot \cos(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) - \mathrm{k14} \cdot a \cdot \sin(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) + 2 \cdot (\mathrm{k4} \cdot a \cdot \cos(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) + \mathrm{k12} \cdot b \cdot \sin(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}))) \cdot bh$$
$$+ \mathrm{k21} \cdot \cos(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) + \mathrm{k10} \cdot \cosh(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) + 2 \cdot \mathrm{k15} \cdot \sinh(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u})$$

(5.68)

La variable $C7$:

$$C_7 = (2 \cdot \mathrm{k5} \cdot ah - \mathrm{k6} \cdot bh) \cdot \cos(\mathrm{s} \cdot (\mathrm{u} - \mathrm{L})) - (\mathrm{k6} \cdot ah - 2 \cdot \mathrm{k7} \cdot bh) \cdot \sin(\mathrm{s} \cdot (\mathrm{u} - \mathrm{L})$$
$$+ (2 \cdot (\mathrm{k1} \cdot ah \cdot \cosh(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) + \mathrm{k13} \cdot bh \cdot \sinh(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u})) - (\mathrm{k3} \cdot bh \cdot \cosh(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) + \mathrm{k11} \cdot ah \cdot \sinh(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}))) \cdot a$$
$$+ (\mathrm{k16} \cdot ah \cdot \cosh(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) - \mathrm{k20} \cdot bh \cdot \sinh(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) - 2 \cdot (\mathrm{k17} \cdot bh \cdot \cosh(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) - \mathrm{k19} \cdot ah \cdot \sinh(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}))) \cdot b$$
$$- 2 \cdot \mathrm{k22} \cdot \cos(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) + \mathrm{k18} \cdot \sin(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) + \mathrm{k8} \cdot \sinh(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u})$$

(5.69)

La variable $C8$:

$$C_8 = (\mathrm{k6} \cdot ah - 2 \cdot \mathrm{k5} \cdot bh) \cdot \cos(\mathrm{s} \cdot (\mathrm{u} - \mathrm{L})) + (\mathrm{k6} \cdot bh - 2 \cdot \mathrm{k7} \cdot ah) \cdot \sin(\mathrm{s} \cdot (\mathrm{u} - \mathrm{L})$$
$$+ (\mathrm{k3} \cdot ah \cdot \cosh(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) + \mathrm{k11} \cdot bh \cdot \sinh(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) - 2 \cdot (\mathrm{k1} \cdot bh \cdot \cosh(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) + \mathrm{k13} \cdot ah \cdot \sinh(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}))) \cdot a$$
$$+ (2 \cdot (\mathrm{k17} \cdot ah \cdot \cosh(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) - \mathrm{k19} \cdot bh \cdot \sinh(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u})) - (\mathrm{k16} \cdot bh \cdot \cosh(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) - \mathrm{k20} \cdot ah \cdot \sinh(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}))) \cdot b$$
$$- \mathrm{k10} \cdot \cos(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) + 2 \cdot \mathrm{k23} \cdot \sin(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u}) - k8 \cdot \cosh(\mathrm{s} \cdot \mathrm{u})$$

(5.70)

Et :

$$Dc = k24 \cdot a \cdot ah - 2 \cdot k25 \cdot b.bh - (k1 + k13) \cdot a \cdot bh + (k13 - k1) \cdot b \cdot ah - k8 \quad (5.71)$$

Avec :

$$a = \cos(s \cdot L) \quad (5.72)$$

$$ah = \cosh(s \cdot L) \quad (5.73)$$

$$b = \sin(s \cdot L) \quad (5.74)$$

$$bh = \sinh(s \cdot L) \quad (5.75)$$

V.2 Vérification des formules pour la poutre sur des ressorts dans les deux directions par rapport à ceux de la poutre sur ressorts verticaux

Nous allons confronter le modèle 2 de la poutre sur des ressorts verticaux et horizontaux au modèle 1 de la poutre sur ressorts verticaux uniquement présenté en chapitre IV, en mettant :

$ktg = ktd = 0$ et $ktg = ktd = k$ avec la simplification des termes en s^8 qui ne change pas la solution.

Cette simplification rend les termes de $C1$ jusqu'à $C4$ du modèle de la poutre de la figure 5.1 sur des ressorts dans les deux directions (représenté en équations 5.63 jusqu'à 5.66) comme suit :

$$\begin{aligned} C1 = {} & \frac{1}{4 \cdot EI \cdot k \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L)} \cdot (-\sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot u) \cdot \sinh(s \cdot L) \\ & + \sinh(s \cdot u) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) - \cos(s \cdot u) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \\ & + \cos(s \cdot L) \cdot \sin(s \cdot u) \cdot \sinh(s \cdot L)) \end{aligned} \tag{5.76}$$

$$\begin{aligned} C2 = {} & -\frac{1}{4 \cdot s^3 \cdot EI \cdot k \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L)} \cdot (2 \cdot k \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sin(s \cdot u) \cdot \sinh(s \cdot L) \\ & - 2 \cdot k \cdot \cos(s \cdot u) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) - \sinh(s \cdot u) \cdot s^3 + s^3 \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot u) \cdot \cosh(s \cdot L) \\ & - s^3 \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \cos(s \cdot u) \cdot \sinh(s \cdot L) - s^3 \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sin(s \cdot u) \cdot \sinh(s \cdot L) \\ & - s^3 \cdot \cosh(s \cdot u) \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L)) \end{aligned} \tag{5.77}$$

$$\begin{aligned} C3 = {} & \frac{1}{4 \cdot EI \cdot k \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L)} \cdot (-\sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot u) \cdot \sinh(s \cdot L) \\ & + \sinh(s \cdot u) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) - \cos(s \cdot u) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \\ & + \cos(s \cdot L) \cdot \sin(s \cdot u) \cdot \sinh(s \cdot L)) \end{aligned} \tag{5.78}$$

$$\begin{aligned} C4 = {} & -\frac{1}{4 \cdot s^3 \cdot EI \cdot k \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L)} \cdot (s^3 \cdot \cos(s \cdot L) \cdot \sin(s \cdot u) \cdot \cosh(s \cdot L) \\ & - s^3 \cdot \cos(s \cdot u) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) + s^3 \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot u) \cdot \sinh(s \cdot L) \\ & - \sin(s \cdot u) \cdot s^3 - 2 \cdot k \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot u) \cdot \cosh(s \cdot L) \\ & - s^3 \cdot \cosh(s \cdot u) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \cosh(s \cdot L) + 2 \cdot k \cdot \cosh(s \cdot u) \cdot \sin(s \cdot L) \cdot \sinh(s \cdot L) \end{aligned} \tag{5.79}$$

La fonction de Green à gauche équation 4.7 devient comme suit :

$$\begin{aligned}
Gg(x,u) = &-\frac{1}{4\cdot s^3\cdot EI\cdot k\cdot \sin(s\cdot L)\cdot \sinh(s * L)}\cdot(\cos(s\cdot x)\cdot s^3\cdot \sin(s\cdot L)\cdot \cosh(s\cdot u)\cdot \sinh(s\cdot L)\\
&-\cos(s\cdot x)\cdot s^3\cdot \sinh(s\cdot u)\cdot \sin(s\cdot L)\cdot \cosh(s\cdot L)+\cos(s\cdot x)\cdot s^3\cdot \cos(s\cdot u)\cdot \sin(s\cdot L)\cdot \sinh(s\cdot L)\\
&-\cos(s\cdot x)\cdot s^3\cdot \cos(s\cdot L)\cdot \sin(s\cdot u)\cdot \sinh(s\cdot L)+2\cdot \sin(s\cdot x)\cdot k\cdot \cos(s\cdot L)\cdot \sin(s\cdot u)\cdot \sinh(s\cdot L)\\
&-2\cdot \sin(s\cdot x)\cdot k\cdot \cos(s\cdot u)\cdot \sin(s\cdot L)\cdot \sinh(s\cdot L)-\sin(s\cdot x)\cdot \sinh(s\cdot u)\cdot s^3\\
&+\sin(s\cdot x)\cdot s^3\cdot \cos(s\cdot L)\cdot \sinh(s\cdot u)\cdot \cosh(s\cdot L)-\sin(s\cdot x)\cdot s^3\cdot \cos(s\cdot L)\cdot \cos(s\cdot u)\cdot \sinh(s\cdot L)\\
&-\sin(s\cdot x)\cdot \sin(s\cdot L)\cdot \sinh(s\cdot L)\cdot \sin(s\cdot u)\cdot s^3-\sin(s\cdot x)\cdot s^3\cdot \cosh(s\cdot u)\cdot \cos(s\cdot L)\cdot \sinh(s\cdot L)\\
&+\cosh(s\cdot x)\cdot s^3\cdot \sin(s\cdot L)\cdot \cosh(s\cdot u)\cdot \sinh(s\cdot L)-\cosh(s\cdot x)\cdot s^3\cdot \sinh(s\cdot u)\cdot \sin(s\cdot L)\cdot \cosh(s\cdot L)\\
&+\cosh(s\cdot x)\cdot s^3\cdot \cos(s\cdot u)\cdot \sin(s\cdot L)\cdot \sinh(s\cdot L)-\cosh(s\cdot x)\cdot s^3\cdot \cos(s\cdot L)\cdot \sin(s\cdot u)\cdot \sinh(s\cdot L)\\
&+\sinh(s\cdot x)\cdot s^3\cdot \cos(s\cdot L)\cdot \sin(s\cdot u)\cdot \cosh(s\cdot L)-\sinh(s\cdot x)\cdot s^3\cdot \cos(s\cdot u)\cdot \sin(s\cdot L)\cdot \cosh(s\cdot L)\\
&+\sinh(s\cdot x)\cdot s^3\cdot \sin(s\cdot L)\cdot \sinh(s\cdot u)\cdot \sinh(s\cdot L)-\sinh(s\cdot x)\cdot \sin(s\cdot u)\cdot s^3\\
&-2\cdot \sinh(s\cdot x)\cdot k\cdot \sin(s\cdot L)\cdot \sinh(s\cdot u)\cdot \cosh(s\cdot L)-\sinh(s\cdot x)\cdot s^3\cdot \cosh(s\cdot u)\cdot \sin(s\cdot L)\cdot \cosh(s\cdot L)\\
&+2\cdot \sinh(s\cdot x)\cdot k\cdot \cosh(s\cdot u)\cdot \sin(s\cdot L)\cdot \sinh(s\cdot L))
\end{aligned} \tag{5.80}$$

Cette fonction donne pratiquement le même comportement que celui du modèle sur ressorts verticaux.

La fonction de Green de l’appui gauche lorsque la charge P est appliquée au temps $t=0$ (la charge sur l’appui gauche) est calculée en substituant $x=0$ et $u=0$ dans l’équation 5.80, nous aurons :

$$Gappg(x=0, u=0) = -\frac{1}{EI\cdot k} \tag{5.81}$$

En utilisant l’équation 2.154 pour le calcul du déplacement de l’appui gauche au temps $t=0$, nous obtenons :

$$yappg(x=0, u=0) = -\frac{p}{EI\cdot k} \tag{5.82}$$

Cette solution est identique à celle obtenue pour le cas de la poutre appuyée uniquement sur des ressorts verticaux du modèle 1 présenté en chapitre IV équation 4.47.

Une confrontation des deux modèles en travée va être réalisée par la suite dans la partie analyse des résultats pour le même exemple de poutre.

V.3 Analyse des résultats obtenus

Cette analyse porte essentiellement sur l’évolution du facteur d’amplification dynamique FAD qui relie la flèche dynamique et statique équation 2.94 en fonction des conditions aux limites de la poutre, sa rigidité flexionnelle EI, les raideurs des ressorts d’appuis et la vitesse de roulement de la charge v en variant un paramètre et en figeant les autres.

$$y_{dyn} = FAD\cdot y_{sta}$$

On présente dans cette partie une étude paramétrique avec les données de la poutre présentées dans le tableau V.1.

Tableau V-1 Données du problème (Mehri B., 2009).

$L\,(\mathrm{m})$	$v\ (m/s)$	$m\ (kn)$	EI	$P\,(kn)$	$ktg = ktd = k\lg = kld\ \ (kn/m)$
6	0.6	0.8333	$140.625 \cdot \mathrm{P}$	1	10

V.3.1 Présentation des formes des variables et de la nouvelle solution

Nous allons présenter dans cette partie les formes graphiques de la fonction de Green en détail pour le cas général d'une poutre appuyée sur des ressorts pour les deux cotés. Deux cas d'études vont être illustrés présentant les formes graphiques des variables $C1$, $C2$, $C3$, $C4$, plus les variables $C5$, $C6$, $C7$, $C8$ et toutes les variables de $C1$à $C8$, puis la forme graphique de la fonction de Green calculée à gauche et à droite du point d'application de la charge lorsque la charge est apliquée à mi-travée de la poutre puis décalée du milieu.

Les données de l'exemple sont les mêmes que celles de (Mehri B., 2009) présentées sur le tableau V.1.

V.3.1.1 Formes des variables C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7 et C8

En ce qui concerne la forme des variables pour la poutre en configuration c-c, comme illustré dans la figure V.2, la symétrie par rapport à l'axe des abscisses est remarquée pour C1 avec C3, ainsi que pour C2 avec C4. Cependant, on ne peut pas projeter la même remarque sur C5 avec C6 et C7 avec C8, car en se rapprochant du temps t=T, il existe une asymétrie. Certaines entre elles présentent une même allure mais avec un décalage par rapport à l'horizontal, par exemple C2 avec C6 et C4 avec C8.

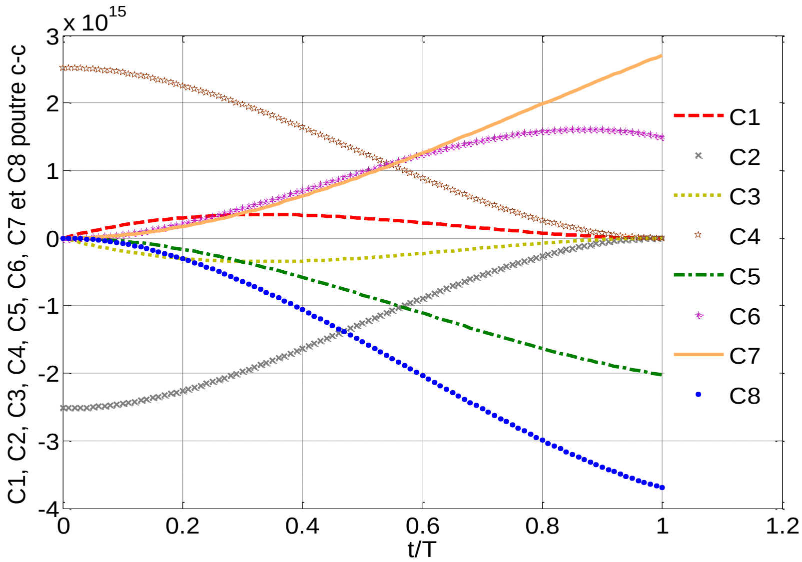


Figure V-2 Formes des variables $C1$, $C2$, $C3$, $C4$, $C5$, $C6$, $C7$ et $C8$ pour la poutre c-c.

En analysant la forme des variables pour la poutre en cinfiguration ss-ss, comme illustré dans la figure V.3, les mêmes remaques que pour la poutre c-c sont reprises. La symétrie par rapport à l'axe des abscisses est remarquée pour C1 avec C3. Cependant, on ne peut pas projeter la même remarque sur C2 avec C4, C5 avec C6 et C7 avec C8, car en ce rapprochant du temps t=0 ou de t=T, il existe une asymétrie. Certaines entre elles présentent une même allure mais avec un décalage par rapport à l'horizontal, par exemple C2 avec C7.

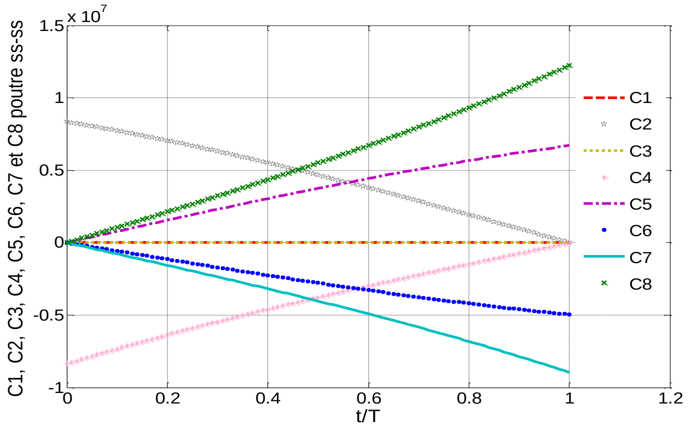


Figure V-3 Formes des variables $C1$, $C2$, $C3$, $C4$, $C5$, $C6$, $C7$ et $C8$ pour la poutre ss-ss.

V.3.1.2 La nouvelle fonction à gauche et à droite pour la charge P au centre de la poutre

D'après le principe d'Hamilton, la fonction de Green doit être symétrique. Lorsque la charge est appliquée au milieu de la poutre, les fonctions de Green à gauche et à droite sont complètement symétriques, comme illustré dans les figures V.4 et V.5.

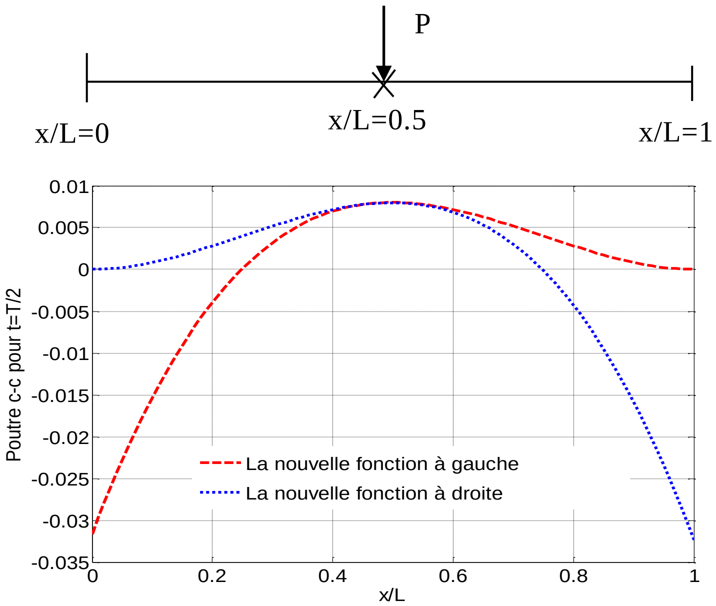


Figure V-4 La nouvelle fonction à gauche et à droite pour P appliquée à $L/2$ pour la poutre c-c.

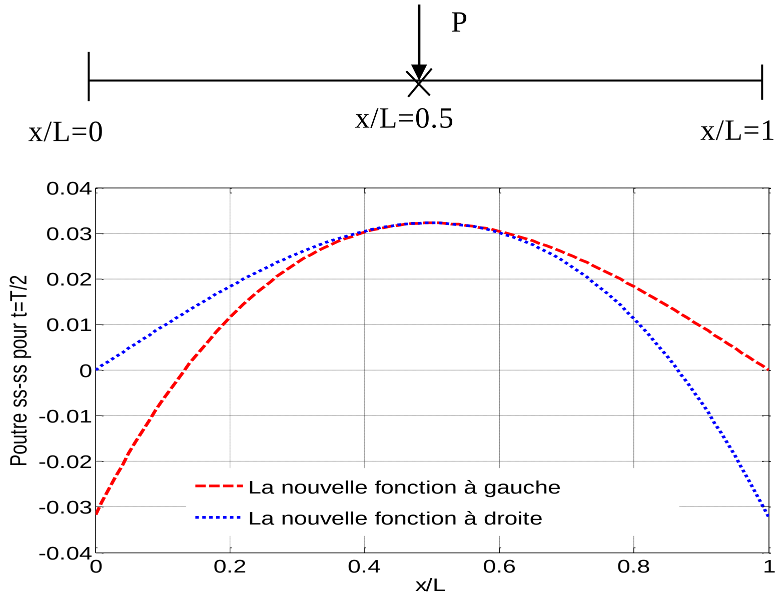


Figure V-5 La nouvelle fonction à gauche et à droite pour P appliquée à $L/2$ pour la poutre ss-ss.

V.3.1.3 La nouvelle fonction à gauche pour P à L/4 et à droite pour P à 3.L/4

La même remarque concernant le principe d'Hamilton qui s'applique lorsque la charge est appliquée sur n'importe quel point le long de la poutre, comme illustré dans les figures V.6 et V.7, à titre d'exemple, si la charge est appliquée à $L/4$, cela donne une fonction de Green à gauche symétrique à la fonction de Green à droite pour le cas de la charge appliquée a $3 \cdot L/4$.

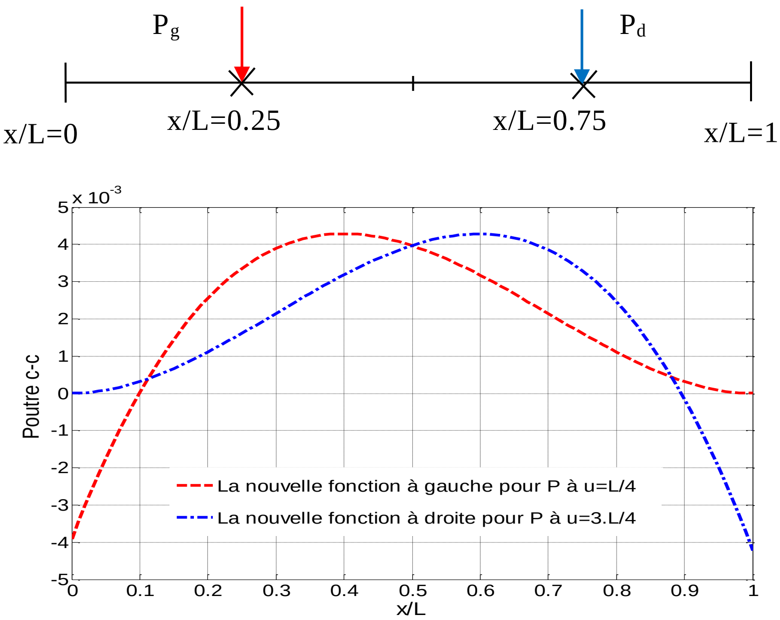


Figure V-6 La nouvelle fonction à gauche pour P appliquée à $L/4$ et à droite pour P appliquée à $3 \cdot L/4$ cas de poutre c-c.

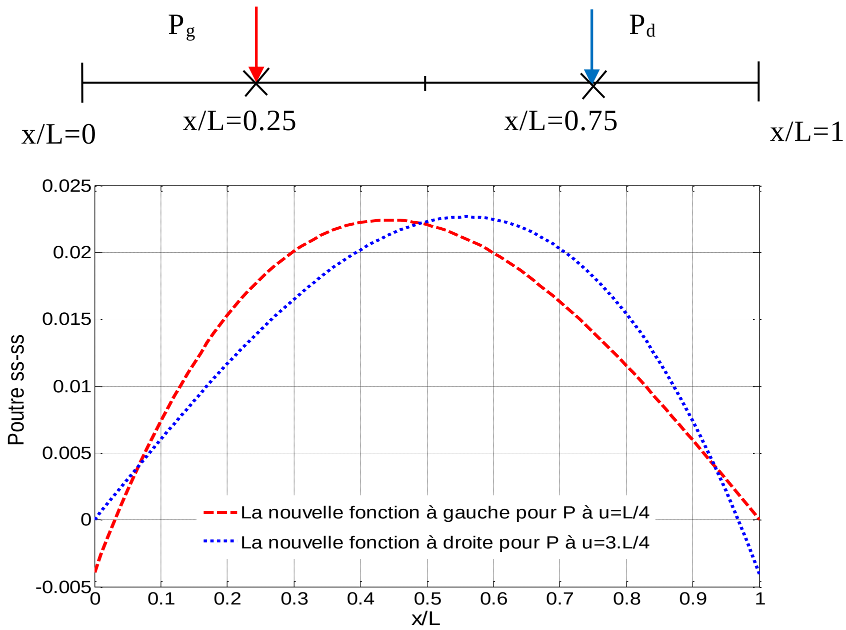


Figure V-7 La nouvelle fonction à gauche pour P appliquée à $L/4$ et à droite pour P appliquée à $3 \cdot L/4$ cas de poutre ss-ss.

V.3.2 Validation des résultats

La validation de cette méthode est présentée par rapport à plusieurs études, la première est réalisée par rapport à la méthode analytique. La deuxième est comparée à une étude présentée par (Mehri B., 2009). La troisième est basée sur une comparaison avec le calcul statique et un cas d'étude réel 3D. Cette dernière étude est établie par l'Agence Nationale de l'Auto route Est-Ouest de l'Algérie.

La flèche statique de la poutre pour les conditions aux limites simplement appuyées SS-SS et encastrées C-C sont : $y_{stss} = \dfrac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$; $y_{stcc} = \dfrac{P \cdot L^3}{192 \cdot E \cdot I}$

$y_{stss} = 0.032m$ et $y_{stcc} = 0.008m$

V.3.2.1 Validation par rapport à l'étude analytique

Pour l'étude analytique, le développement des équations est présenté dans le travail de (Henchi K., 1995) et repris en détail en chapitre 2 équations 2.63 et 2.37, la solution est comme suit :

$$y_j(t) = \sqrt{\frac{2}{m_l L}} \left(\frac{F}{\omega_j^2 - \Omega_j^2} \right) \left(\sin(\Omega_j t) - \left(\frac{\Omega_j}{\omega_j} \right) \sin(\omega_j t) \right)$$

Avec :

$$\Omega_j = \frac{j \pi v}{L}$$

Et :

$$w_j(t) = \phi_j(t).y_j(t)$$

Ce qui donne :

$$w_j(t) = \frac{2F}{m_l L}\frac{1}{(\omega_j^2 - \Omega_j^2)}\left(\sin(\Omega_j t) - \left(\frac{\Omega_j}{\omega_j}\right)\sin(\omega_j t)\right)\sin\frac{j\pi x}{L}\ ,\quad 0 \le t \le \frac{L}{v}$$

En prenant le même exemple que celui de (Mehri B., 2009) et en introduisant les mêmes données dans le programme écrit en fonction de Green sur appuis élastiques, nous obtenons une parfaite concordance des résultats avec ceux de la méthode analytique, comme présenté sur la figure V.8.

Avec : $ktg = ktd = 0$ et $k\lg = kld = 10^3 kn/m$.

Les résultats donnés par la nouvelle fonction sont très proches de ceux de la méthode analytique et statique. Ils permettant un écart et une amplification dynamique plus petite par rapport à la méthode statique, selon les résultats mentionnés dans le tableau V.2.

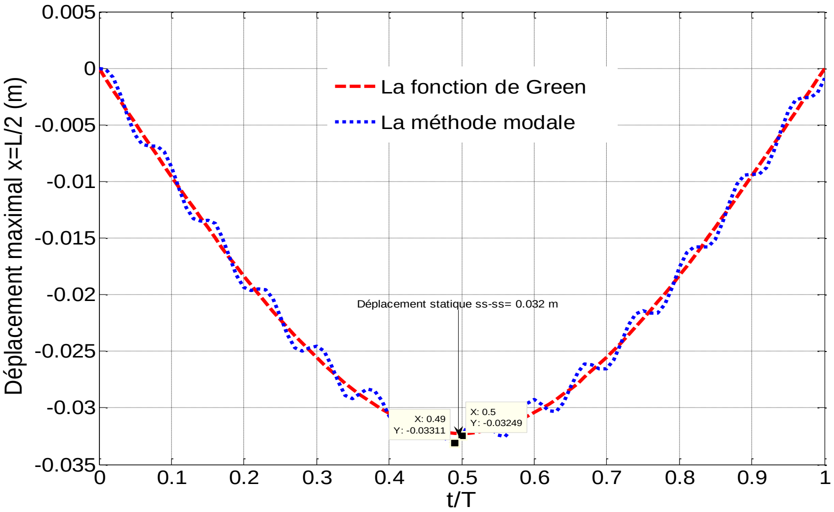


Figure V-8 Déplacement maximal obtenu par la méthode modale et par la nouvelle fonction $ktg = ktd = 0$ et $k\lg = kld = 10^3 kn/m$.

Tableau V-2 Flèches pour la méthode modale et par la fonction de Green pour $ktg = ktd = 0$ et $k\lg = kld = 10^3 kn/m$.

	Déplacement statique (m)	Déplacement maximal (m)	Ecart Δ (m)	FAD
La méthode analytique	0.032	0.03311	0.0011	1.0347
La nouvelle méthode (par la fonction de Green)	0.032	0.03249	0.00049	1.0153

V.3.2.2 Validation des résultats obtenus pour le modèle à ressorts en deux directions avec (Mehri B., 2009)

Comme illustré sur la figure V.9, il y'a une parfaite concordance entre les résultats de la nouvelle formulation obtenus par la fonction de Green pour le cas général des supports élastiques avec ceux obtenus par la même méthode pour la poutre encastrée-encastrée C-C présentés par (Mehri B., 2009), surtout en se rapprochant du point d'application de la charge.

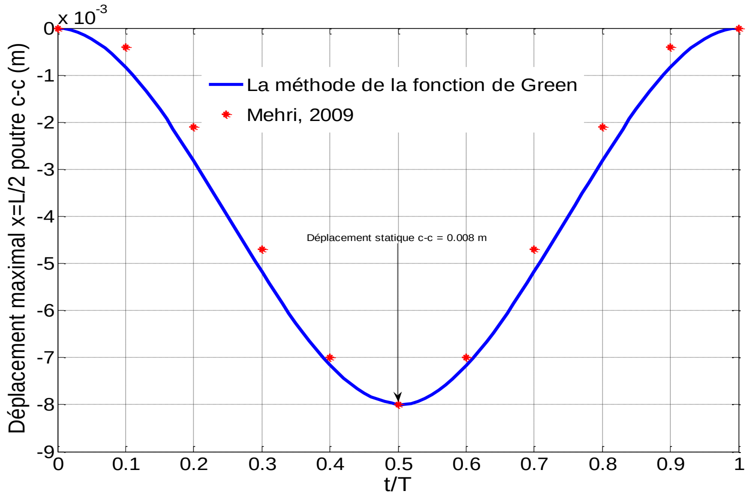


Figure V-9 Déplacement maximal pour la poutre c-c par la nouvelle méthode et par (Mehri B., 2009).

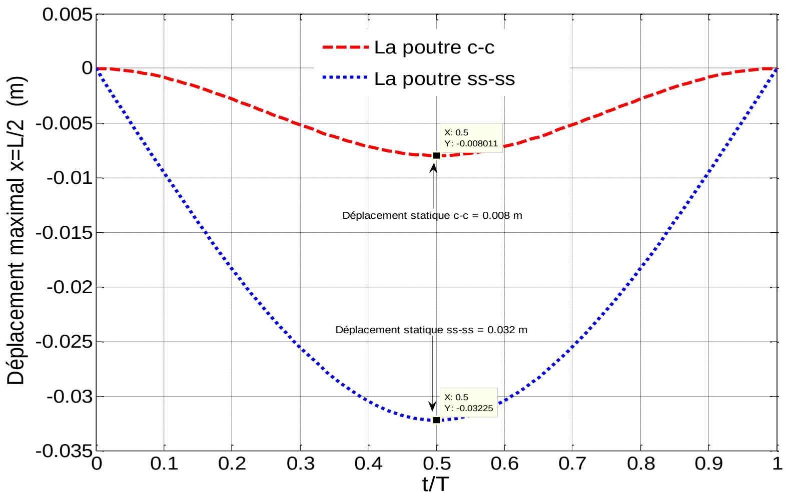


Figure V-10 Déplacement maximal pour les deux types de poutres c-c et ss- ss.

Le déplacement aux extrémités (pour appuis élastiques) dans les deux cas de la poutre c-c ou ss-ss est nul, comme présenté sur la figure V.10.

La forme de la courbe est différente selon le type d'appui, et le déplacement en travée augmente en passant de la poutre C-C à la poutre SS- SS comme présenté dans le tableau V.3.

Tableau V-3 Ecart Δ et FAD pour la poutre c-c et ss- ss.

	y_{sta} (m)	y_{dyn} (m)	Ecart Δ (m)	FAD
Cas 1 : poutre c-c	0.008	0.008011	0.000011	1.0014
Cas 2 : poutre ss- ss	0.032	0.03225	0.00025	1.0078

V.3.2.3 Comparaison des résultats avec un cas réel

Le travail de Tan G. et al. (2019) nous a été très utile pour comprendre la réponse dynamique dans l'ensemble du processus d'essai de chargement d'un pont simplement soutenu. Ensuite, nous avons adopté l'exemple de l'A.N.A. avec les données du problème présentées dans le tableau V.4.

La charge roulante prise en considération dans cette étude est celle de 9 camions de 28 tonnes d'après le rapport de l'A.N.A. La méthode de calcul de la valeur de la raideur des ressorts est donnée dans le même document et le même type de ressort est pris pour les deux appuis :

$ktg = ktd = k\lg = kld = k$.

Tableau V-4 Données du problème.

L (m)	V (m/s)	m_l (N/m)	E (N/m2)	I (m4)	P (N)	k (N/m)
32	8.33	$6.067.10^3$	36.10^9	$917.55.10^{-3}$	2520000	$556882.56.10^3$

En comparant les résultats d'une étude effectuée par le logiciel Robot V20.1, réalisée par l'Agence Nationale de l'Auto route Est-Ouest en Algérie, dans le cadre de la construction d'un projet réel d'un pont, avec les résultats du programme de la nouvelle méthode écrit en langage de Matlab, nous constatons une très bonne concordance des résultats. Une concordance similaire des résultats a été observée par rapport à ceux obtenus par la méthode statique. Les résultats sont présentés sur le tableau V.4 et la figure V.11.

L'écart des résultats donné par la méthode de la fonction de Green est de 0.12 pour mille par rapport à la méthode statique, ce qui est considérablement satisfaisant.

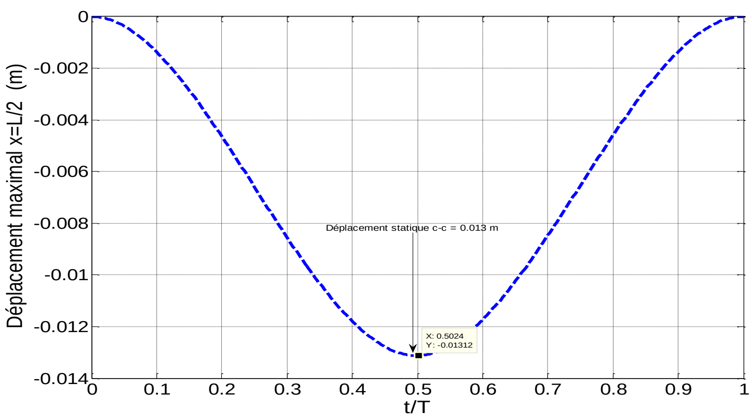


Figure V-11 Déplacement maximal de la poutre c-c par la nouvelle méthode.

Tableau V-5 Flèches théorique, réel et obtenue par la méthode de la fonction de Green.

	Flèche (m)
La flèche théorique $y_{théc-c}$	0.013
Mesuré (réel par le Logiciel Robot V20.1) y_r	0.01302
Nouvelle méthode (par la fonction Green) y_{Gr}	0.01312
Ecart $\Delta 1 = y_r - y_{théc-c}$	-0.00002
Ecart $\Delta 2 = y_{Gr} - y_{théc-c}$	0.00012

V.3.3 Effet de type d'appuis sur la vibration des poutres

L'analyse de la variation des raideurs ktg, ktd, $k\lg$ et kld (figure V.1) mène vers des solutions d'appuis connues : simplement appuyée, encastrée ou dans le cas échéant, appui élastique.

Pour les données du tableau V.1, nous avons :

Le facteur d'amplification dynamique est calculé comme suit : $FAD = \frac{y_{dyn}}{y_{st}}$

Champaney L. (2010) a présenté différents seuils de rigidités d'appuis. Il propose la valeur $k = 10^3 kn/m$ comme valeur seuil qui mène à la même solution qu'un encastrement. Par contre, une faible valeur de k reflète le comportement d'un appui simple. Au delà de ce seuil, le comportement dynamique de la structure n'est plus influencé (figure V.12).

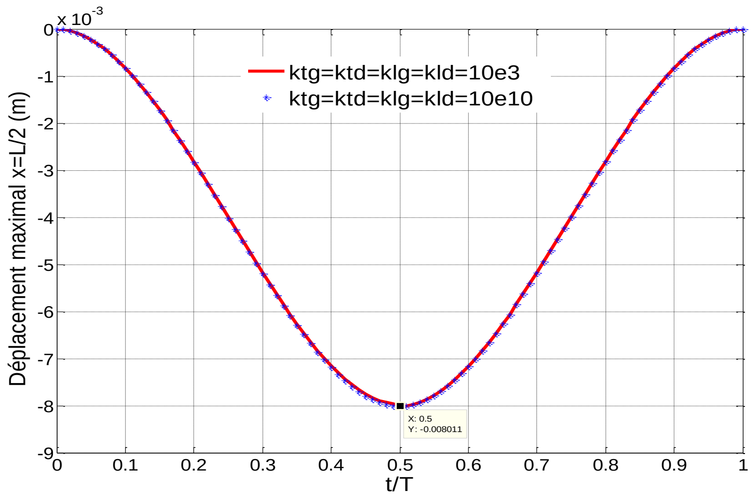


Figure V-12 Déplacement maximal pour deux cas de $ktg = ktd = k\lg = kld = 10^3 kn/m$ puis $10^{10} kn/m$.

Les raideurs ktg et ktd (figure V.1) peuvent, selon leurs valeurs, annuler les rotations au niveau des appuis gauche et de droite. Leur évolution de zéro vers une valeur définie permet de caractériser l'appui soit comme un encastrement ou appui simple.

En considérant les raideurs $ktg = ktd = 0$, les conditions aux limites du modèle 2 (figure V.1) sont modifiées et correspondent au modèle 1 de la figure IV.1 (appui simple). Le déplacement maximal de la poutre calculé pour les deux modèles est identique, comme représenté sur la figure V.13.

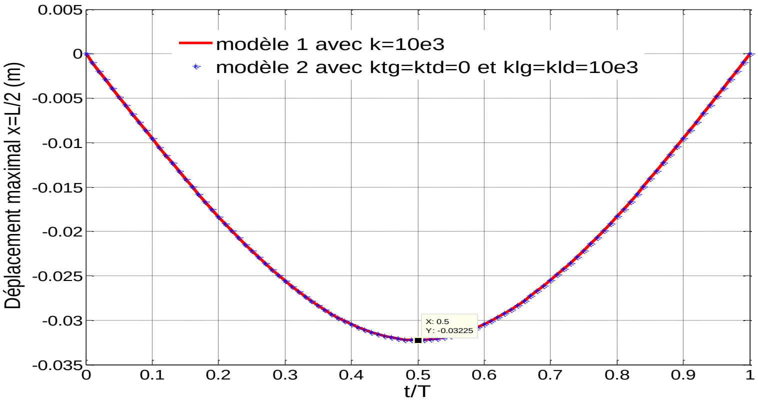


Figure V-13 Déplacement maximal de la poutre par les deux modèles.

Dans le cas où les raideurs $ktg = ktd = 0$, (les conditions aux limites donnent des déplacements de poutre comme simplement appuyée), les ressorts $k\lg$ et kld ne peuvent bloquer alors que les déplacements verticaux, comme illustré dans la figure V.14, cas 1 et 2. Cette observation est similaire à celle concernant le premier modèle mentionnée dans le chapitre 4.

Les résultats illustrés sur la figure V.14 montrent que pour des valeurs $ktg = ktd = k\lg = kld$ égale à $10^3 kn/m$, la rotation est nulle et la courbe régissant le comportement vibratoire montre l'effet d'un encastrement dans le cas 1, et le déplacement maximal est celui d'une poutre encastrée sur les deux cotés.

Le cas 2 de la figure V.14 considère une diminution des raideurs $k\lg$ et kld, $k\lg = ktd = 100 kn/m$, l'analyse de comportement vibratoire permet de constater que l'encastrement est toujours présent, mais avec un déplacement vertical (figures V.15 et V.16).

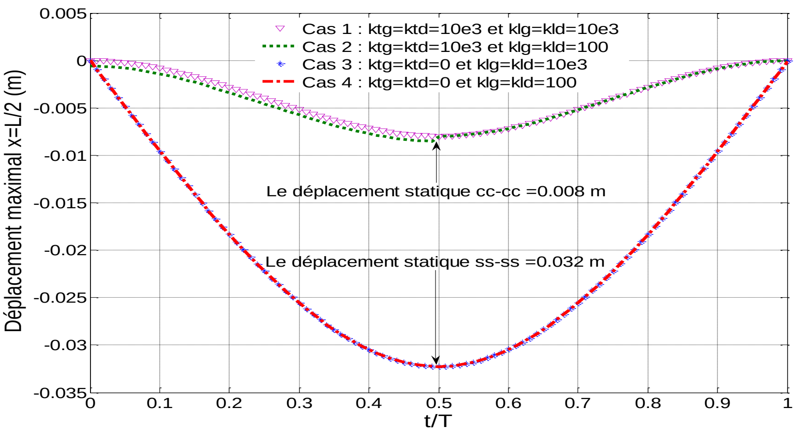


Figure V-14 Le déplacement maximal de la poutre pour différents cas de raideurs de ressorts d'appuis.

Pour le cas 4 de la figure V.14, les raideurs ktg et ktd sont nulles, ce qui signifie que l'appui est libre à se déplacer selon la raideur des ressorts $k\lg$ et kld , contrairement au cas 2 de la figure V.15.

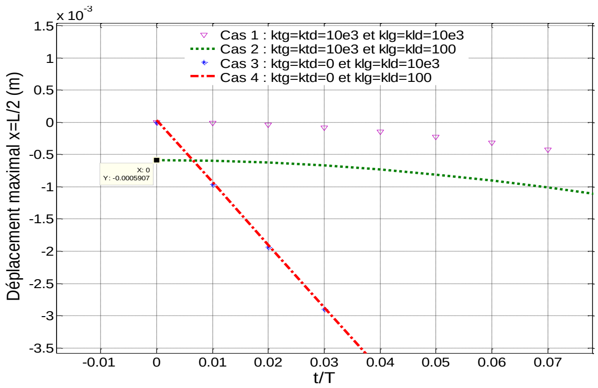


Figure V-15 Zoom sur le déplacement maximal de la poutre pour différents cas de rigidités d'appuis pour $t = 0$.

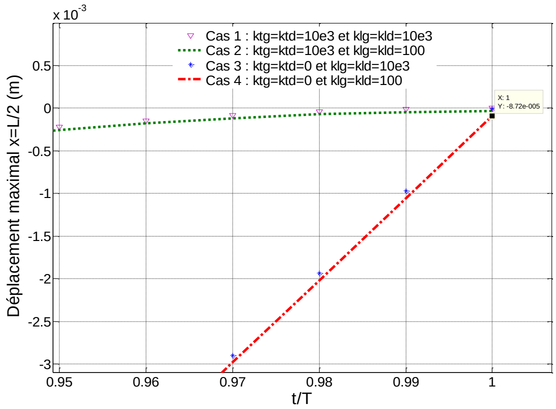


Figure V-16 Zoom sur le déplacement maximal de la poutre pour différents cas de rigidités d'appuis pour $t = T$.

L'ajout des ressorts ktg et ktd combinés avec $k\lg$ et kld diminue les effets dynamiques dus au chargement, comme le montre le résultat sur le tableau V.6 pour le cas1.

Tableau V-6 Facteur d'amplification dynamique.

	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4
$ktg\ (kn/m)$	10^3	10^3	0	0
$ktd\ (kn/m)$	10^3	10^3	0	0
$k\lg\ (kn/m)$	10^3	100	10^3	100
$kld\ (kn/m)$	10^3	100	10^3	100
$y_{st}\ (m)$	0.008	0.008	0.032	0.032
$y_{dyn}\ (m)$	0.008011	0.008515	0.03225	0.03228
$Ecart\ \Delta(m)$	0.000011	0.000515	0.00025	0.00028
FAD	1.0014	1.0644	1.0078	1.0088

Quand les raideurs $k\lg$ et kld sont importantes (cas 1 et cas 3), le déplacement maximal lorsque la charge est sur l'appui est nul, comme illustré dans les figures V.15 et V.16.

Le comportement de la poutre en travée n'est pas influencé par les valeurs des raideurs verticales des appuis $k\lg$ et kld , comme déjà remarqué déjà constaté pour le premier modèle de ressorts verticaux uniquement. Seulement les raideurs horizontales ktg et ktd donnent un effet sur le comportement dynamique en travée.

D'après les résultats présentés dans le tableau V.6 et sur la figure V.17, nous remarquons que l'amplification dynamique pour le cas 2 est plus importante car la présence des ressorts horizontaux s'oppose à la rotation, surtout avec des valeurs $k\lg = kld$ faible égale à 100N/m. Cela influence la stabilité ainsi la vibration de la poutre et conduit par conséquent à une amplification plus importante.

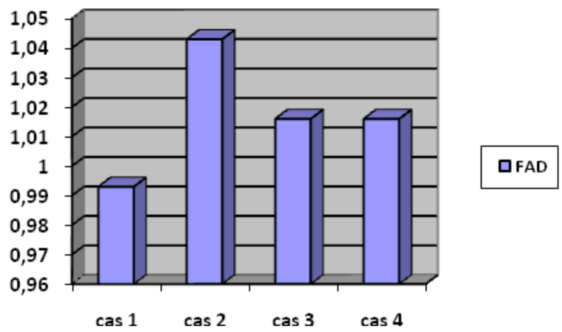


Figure V-17 Facteur d'amplification dynamique pour différents cas de raideurs de ressorts (tableau V.6).

V.3.4 Effet de *EI* (*L* et *k* appui constants)

Dans le cas où les rigidités des appuis sont faibles, la poutre ce comporte comme simplement appuyée, comme le prouvent les résultats présentés dans le tableau V.7.

L'augmentation de la rigidité de la poutre EI diminue le déplacement maximal, comme illustré dans la figure V.18 mais augmente l'amplification dynamique, comme indique le tableau V.7 et la figure V.21.

Plus précisément, d'autres paramètres ce combinent pour donner à la fin un tel comportement. Par exemple, la rigidité de la poutre influence complètement le comportement dynamique que nous observons sous forme de déplacement, comme le montre la figure V.18. L'augmentation de la rigidité de la poutre (cas 4 de la figure V.18) diminue le déplacement maximal, tandis que et au contraire, la diminution de la rigidité de la poutre (cas 1 sur la même figure) augmente le déplacement maximal de la poutre.

Concernant l'amplification dynamique, elle est proportionnelle à la rigidité de la poutre comme illustré sur la figure V.21.

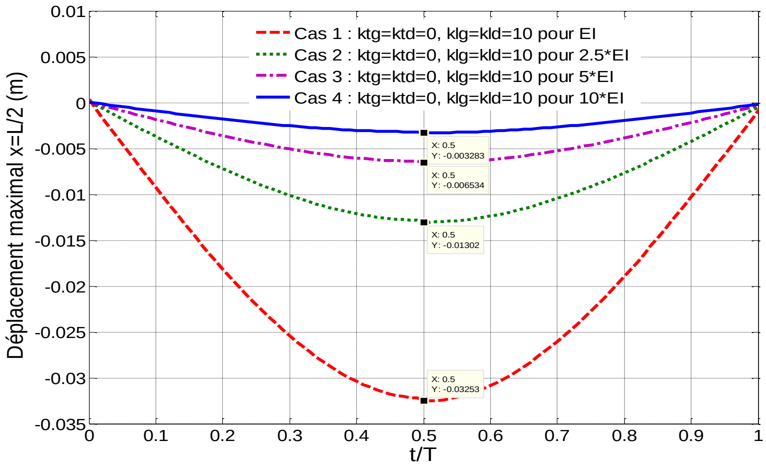


Figure V-18 Déplacement maximal pour différentes rigidités de la poutre EI, $2.5.EI$, $5.EI$ et $10.EI$.

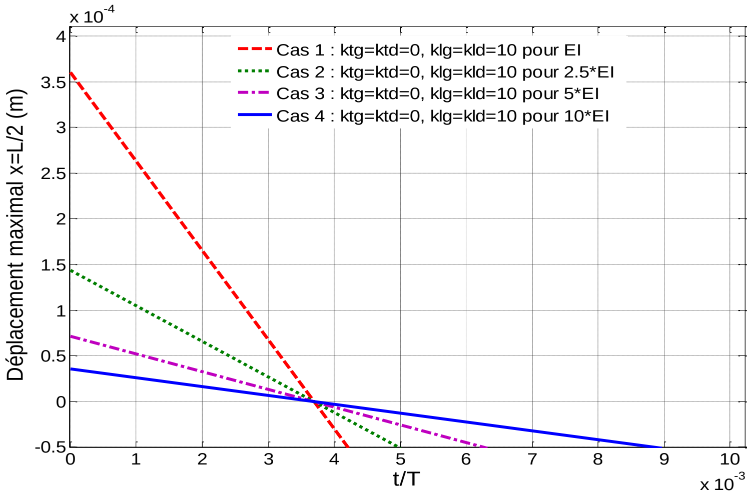


Figure V-19 Zoom sur le déplacement maximal de la poutre pour différents cas de rigidités de la poutre EI, $2.5.EI$, $5.EI$ et $10.EI$ pour $t = 0$.

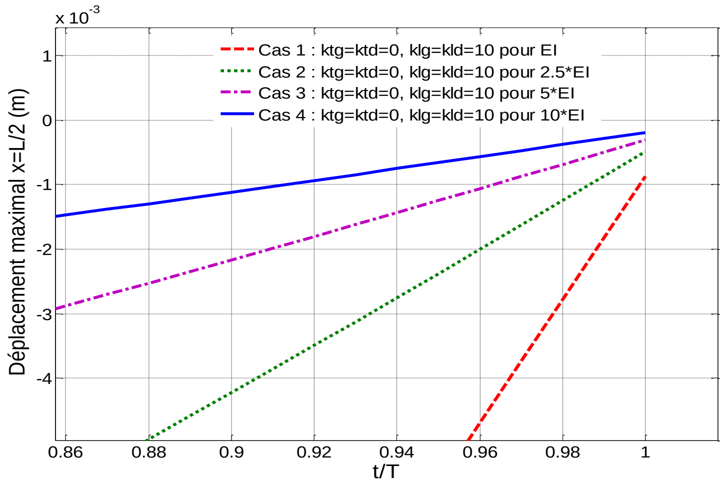


Figure V-20 Zoom sur le déplacement maximal de la poutre pour différents cas de rigidités de la poutre EI, $2.5.EI$, $5.EI$ et $10.EI$ pour $t = T$.

Tableau V-7 Déplacement maximal de la poutre pour de faibles rigidités d'appuis pour EI, $2.5.EI$, $5.EI$ et $10.EI$.

	Rigidité de la poutre	y_{stac-c} (m)	$y_{stass-ss}$ (m)	$y_{dyn\max}$ (m)	*Ecart* Δ (m)	*FAD*
Cas 1	EI	0.008	0.032	0.03253	0.000253	1.0166
Cas 2	$2.5.EI$	0.0032	0.0128	0.01302	0.00022	1.0172
Cas 3	$5.EI$	0.0016	0.0064	0.006534	0.000134	1.0209
Cas 4	$10.EI$	0.0008	0.0032	0.003283	0.000083	1.0259

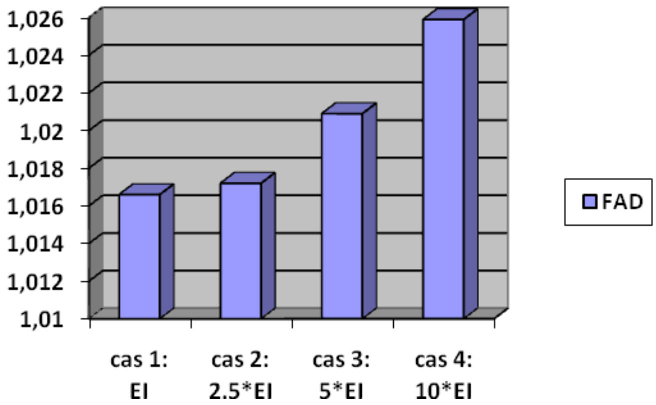


Figure V-21 Facteur d'amplification dynamique en fonction des rigidités de la poutre (Tableau V.7).

Dans ce cas d'étude, pour le début du chargement (figure V.19), le point à mi-portée de la poutre va subir une petite contre flèche. Au-delà de ce point, la poutre fléchit jusqu'à la sortie de la charge, un comportement similaire à celui observé pour le modèle 1 étudié dans le chapitre 4 des ressorts verticaux uniquement.

Ce comportement est lié à la présence du ressort qui ce comprime pour les positions de la charge prés de l'appui, entrainant la poutre avec les appuis.

En augmentant la rigidité de la poutre (cas 4 de la figure V.19), l'effet du déplacement de l'appui sur le point à mi-portée diminue, le déplacement maximal en travée de la poutre devient nul (l'appui devient simple ou un encastrement), puis la poutre fléchit comme une poutre ss- ss ou c-c.

Pour le reste des positions de charges jusqu'au temps $t = T$, la poutre reste fléchie (figure V.20).

L'augmentation de la rigidité de la poutre a le même effet sur les appuis ou en travée (figure V.22). L'augmentation de EI diminue le déplacement des appuis (figures V.22 et V.23).

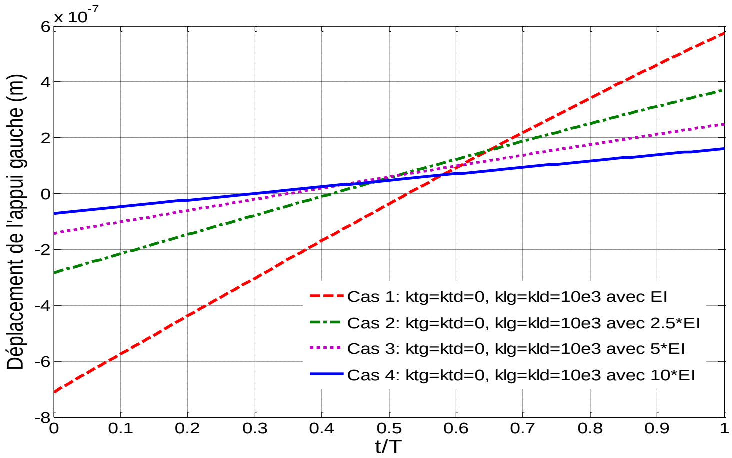


Figure V-22 Déplacement de l'appui gauche pour $ktg = ktd = 0$ et $k\lg = kld = 10^3 kn/m$ pour EI, $2.5.EI$, $5.EI$ et $10.EI$.

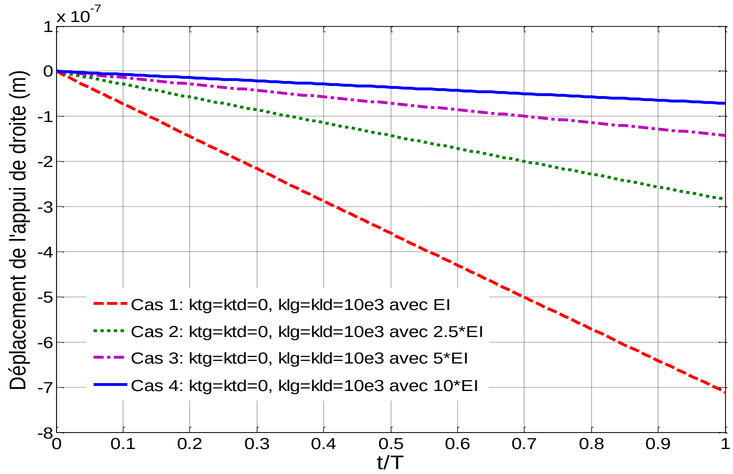


Figure V-23 Déplacement de l'appui gauche pour $ktg = ktd = 0$ et $k\lg = kld = 10^3 kn/m$ pour EI, $2.5.EI$, $5.EI$ et $10.EI$.

V.3.5 Effet de k appuis sur le comportement dynamique de la poutre

Nous allons présenter le comportement de la poutre avec trois conditions d'appuis. Les premières conditions donnent le comportement de la poutre ss- ss, puis c-c et enfin sur des supports élastiques.

V.3.5.1 Pour la poutre ss- ss sur supports élastiques

Pour un comportement de la poutre comme simplement appuyée en travée avec $ktg = ktd = 0$ (figure V.24), les appuis « gauche et de droite » ne vont pas ce déplacer de la même façon (figures V.25 et V.26).

Lorsque la charge est sur l'appui gauche, cela donne un déplacement maximal de cet appui et un déplacement nul de l'appui de droite, en revanche, lorsque la charge arrive à l'extrémité droite de la poutre, le déplacement de l'appui de droite devient maximal (figure V.24), tandis que par contre l'appui de gauche se dilate (figures V.25 et V.26).

L'appui gauche change de comportement de la compression à la dilatation après que la charge dépasse le point de mi-travée de la poutre (figure V.25).

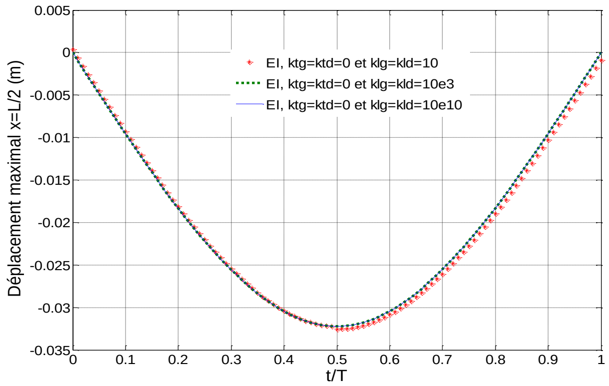


Figure V-24 Déplacement maximal pour $ktg = ktd = 0$ et $klg = kld = 10$, 100 et $10^3 kn/m$.

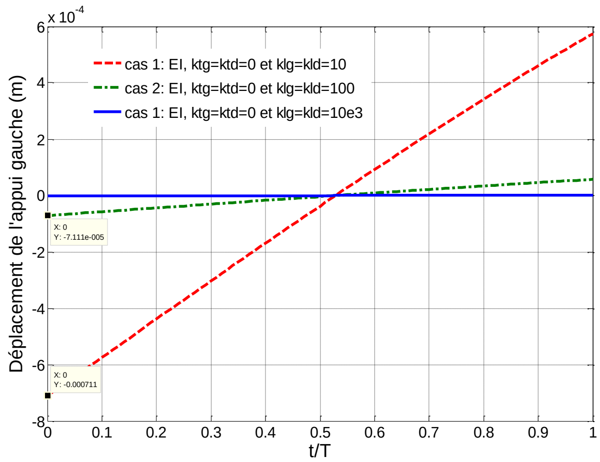


Figure V-25 Déplacement de l'appui gauche pour $ktg = ktd = 0$ et $klg = kld = 10$, 100 et $10^3 kn/m$.

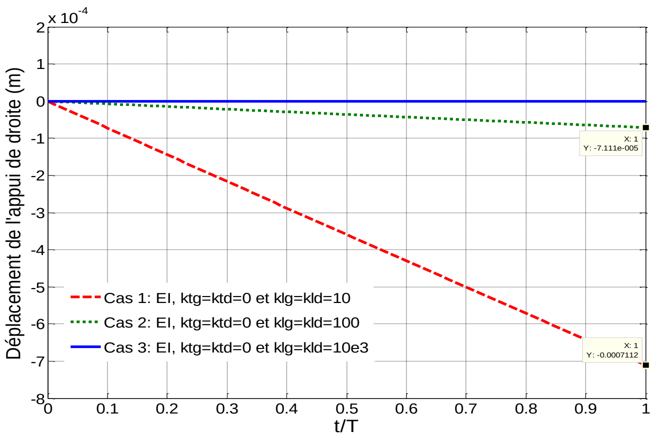


Figure V-26 Déplacement de l'appui de droite pour $ktg = ktd = 0$ et $klg = kld = 10$, 100 et $10^3 kn/m$.

V.3.5.2 Pour la poutre c-c sur supports élastiques

Nous allons donner des valeurs aux rigidités d'appuis ktg et ktd qui considèrent l'appui comme élastique ou c-c.

Contrairement au comportement de l'appui gauche pour la poutre ss- ss qui change de comportement, pour le cas c-c (figure V.27), il reste en compression pour toutes les positions de la charge, et le déplacement maximal de l'appui gauche avec instabilité est détecté juste au début du chargement.

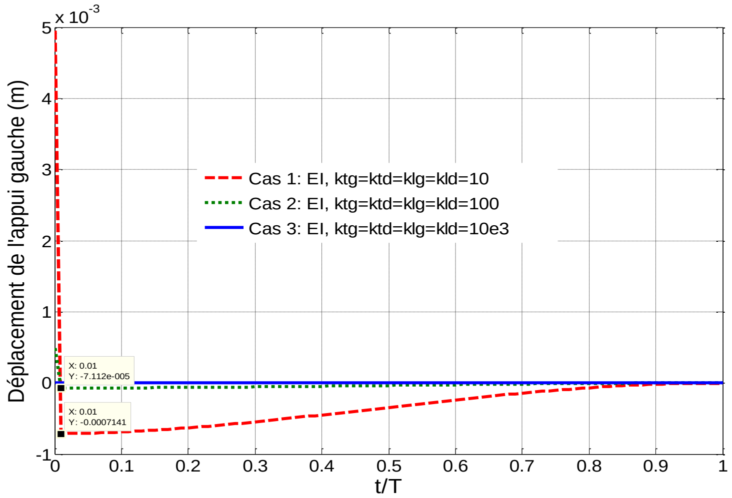


Figure V-27 Déplacement de l'appui gauche pour $ktg = ktd = klg = kld = 10$, 100, $10^3 kn/m$.

Pour l'appui de droite, au temps $t = 0$, l'appui reste au repos, sauf pour le cas de faibles raideurs (cas 1 figure V.28) qui donne un allongement dans les premiers instants de chargement. Le déplacement maximal est remarqué à la fin du chargement $t = T$ pour tous les cas de raideurs.

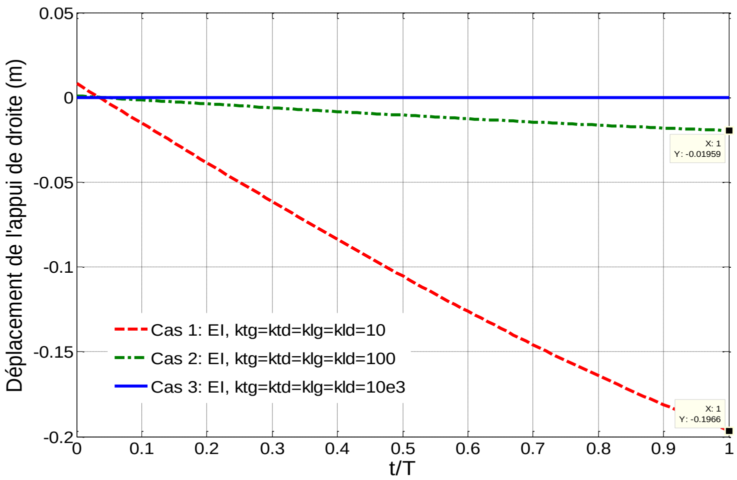


Figure V-28 Déplacement de l'appui de droite pour $ktg = ktd = klg = kld = 10$, 100, $10^3 kn/m$.

Une comparaison concernant le comportement de l'appui gauche pour les deux cas de poutres ss- ss et c-c est présentée sur la figure V.29.

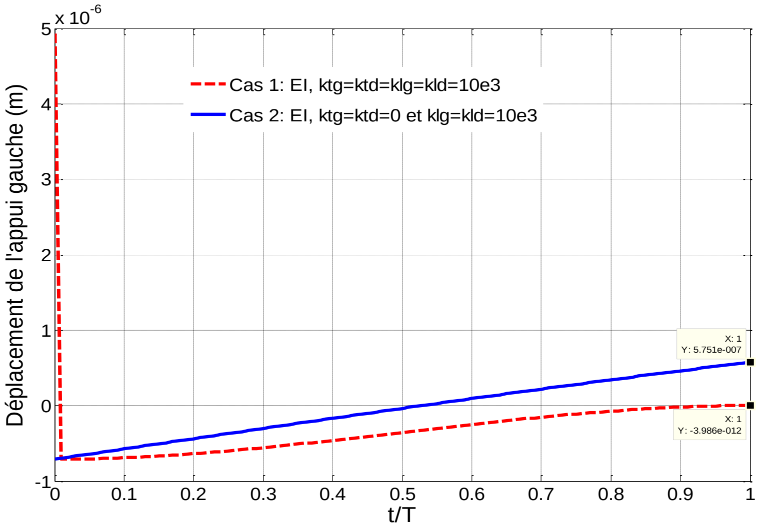


Figure V-29 Déplacement d'appui gauche pour les deux types de poutres ss- ss et c-c.

Pour l'appui gauche et pour la première position de la charge loin de l'appui, sa rigidité diminue considérée maximale à $x=0$, et le ressort horizontal commence à se relâcher et à travailler pour le reste des positions de la charge (figure V.29). Pour cela, nous remarquons cette augmentation brusque du déplacement au niveau de l'appui gauche (figures V.27 et V.29).

Le déplacement sur appui gauche pour le cas 2 similaire à celui d'une poutre appuyée sur deux ressorts verticaux (figure V-29).

V.3.6 Effet de la vitesse de roulement sur la vibration de la poutre

Nous allons étudier l'effet de l'augmentation de la vitesse de la charge roulante sur le déplacement maximal pour deux types de poutres encastrées sur les deux cotés, ainsi que pour des poutres simplement appuyées sur les deux cotés.

Pour la poutre c-c : $ktg = ktd = k\lg = kld = 10^3 kn/m$.

Pour la poutre ss - ss : $ktg = ktd = 0$, $k\lg = kld = 10^3 kn/m$.

La vitesse critique est donnée par :

$v_{cr} = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{EI}{m}}$, dans ce cas d'étude elle est de $v_{cr} = 6.7983 m/s$, à ne pas dépasser la vitesse critique.

Les trois vitesses de roulements prises en compte sont : $V = 0.6 m/s$, $5.V$ et $10.V$.

V.3.6.1 Pour la poutre c-c sur supports élastiques

La première poutre étudiée est la poutre encastrée sur les deux cotés (figure V.30).

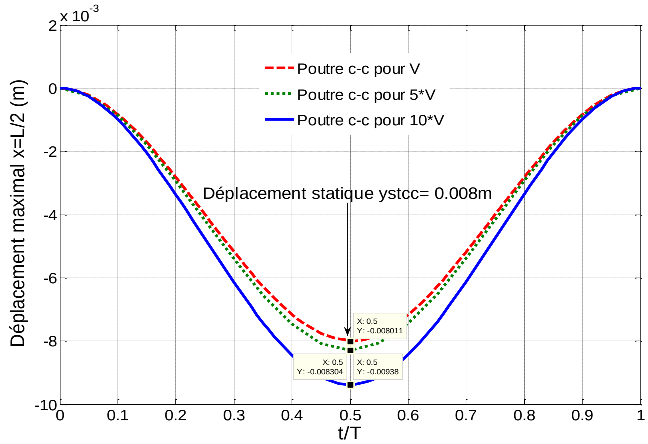


Figure V-30 Déplacement maximal pour la poutre c-c pour $V = 0.6m/s$, $5.V$ et $10.V$.

Tableau V-8 Ecart Δ et FAD pour la poutre c-c pour $V = 0.6m/s$, $5.V$ et $10.V$.

	Vitesse (m/s)		y_{stac-c} (m)	y_{dyn} (m)	Ecart Δ (m)	FAD
	V	valeur				
cas 1: poutre c-c	V	0.6	0.008	0.008011	0.000011	1.0014
cas 2: poutre c-c	$5.V$	3	0.008	0.008304	0.000304	1.038
cas 3: poutre c-c	$10.V$	6	0.008	0.00938	0.00138	1.1725

D'après les résultats présentés dans le tableau V.8 et sur la figure V.30, nous remarquons qu'en augmentant la vitesse de roulement, le déplacement maximal augmente, et en se rapprochant de la vitesse critique, l'amplification dynamique devient plus importante.

La même remarque est constatée pour le premier modèle des ressorts dans la direction verticale présenté dans le chapitre 3.

V.3.6.2 Pour la poutre ss – ss sur supports élastiques

La deuxième poutre étudié est la poutre encastré sur les deux cotés figure V.31.

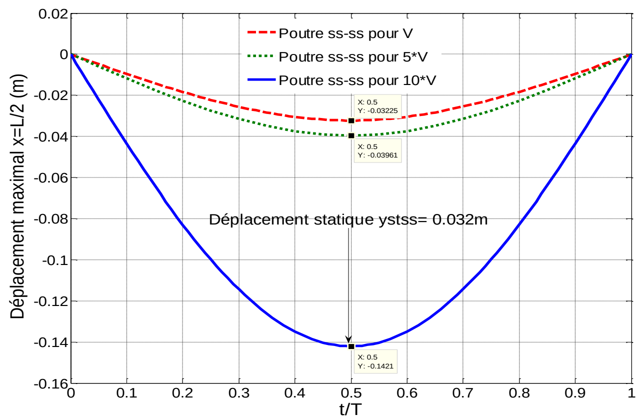


Figure V-31 Déplacement maximal pour la poutre simplement appuyée sur les deux cotés pour $V = 0.6m/s$, $5.V$ et $10.V$.

Tableau V-9 Ecart Δ et FAD pour la poutre simplement appuyée sur les deux cotés pour $V = 0.6 m/s$, $5.V$ et $10.V$.

	Vitesse (m/s)		y_{stac-c} (m)	y_{dyn} (m)	Ecart Δ (m)	FAD
	V	valeur				
cas 1: poutre ss- ss	V	0.6	0.032	0.03225	0.00025	1.0078
cas 2: poutre ss- ss	$5.V$	3	0.032	0.03961	0.0076	1.2378
cas 3: poutre ss- ss	$10.V$	6	0.032	0.1421	0.1101	4.4406

Dans le cas de la poutre simplement appuyée, l'amplification dynamique (tableau V.9 et figure V.32) est beaucoup plus importante par rapport au cas de la poutre encastrée sur les deux cotés, surtout en se rapprochant de la vitesse critique. Pour la vitesse $10.V$ (le cas 3 sur le tableau V.9), elle est presque quatre fois plus importante que pour le cas de petite vitesse (cas 1 sur le tableau V.9).

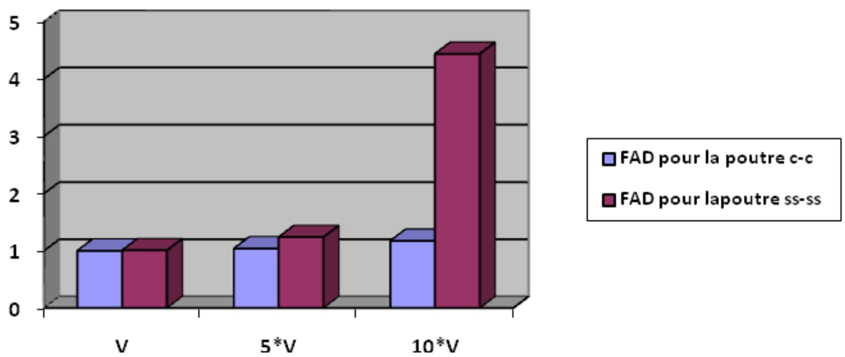


Figure V-32 Facteur d'amplification dynamique pour la poutre c-c et ss - ss pour $V = 0.6 m/s$, $5.V$ et $10.V$.

V.3.7 Etude de l'effet de L sur le comportement dynamique de la poutre

Nous allons examiner l'effet de la longueur de la poutre sur le déplacement maximal. Les longueurs utilisées sont : L, $1.5.L$ et $2.L$.

La rigidité de la poutre par unité de longueur est la suivante : $EI / L = 23.4375 kn.m$.

V.3.7.1 Pour la poutre c-c sur ressort élastiques

L'effet de la longueur de la poutre c-c est présenté sur la figure V.33. Il est évident qu'en augmentant la longueur de la poutre, le déplacement maximal augmente, tout en restant toujours dans le comportement de poutres comme encastrées sur les deux cotés (selon la forme des courbes près des appuis et les valeurs des fléches maximales).

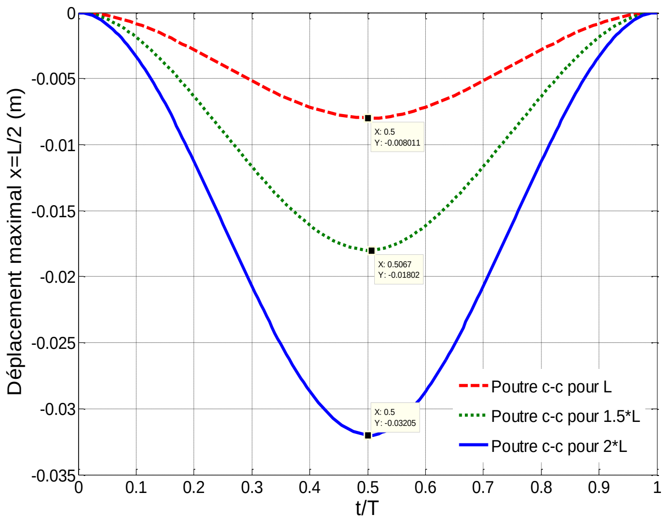


Figure V-33 Déplacement maximal de la poutre c-c pour différentes longueurs L, $1.5.L$ et $2.L$.

Tableau V-10 Facteur d'amplification dynamique pour la poutre c-c pour L, $1.5.L$ et $2.L$.

	Cas 1	Cas 2	Cas 3
$ktg = ktd = k\lg = kld \ \ (N/m)$	10^3	10^3	10^3
$L = 6m$	L	$1.5.L$	$2.L$
$EI \ \ (N.m^2)$	140.625	210.9375	281.25
y_{sta} (m)	0.008	0.018	0.032
y_{dyn} (m)	0.008011	0.01802	0.03205
Ecart Δ (m)	0.000011	0.00002	0.03205
FAD	1.0014	1.0011	1.0016

La longueur de la poutre affecte considérablement l'effet dynamique sur la poutre, mais en revanche, cela n'à pas un effet remarquable sur l'amplification dynamique (tableau V.10).

V.3.7.2 Pour la poutre ss- ss sur supports élastiques

Nous allons présenter l'effet de la longueur pour la poutre simplement appuyée ss- ss.

L'effet de la longueur de la poutre ss- ss est présenté sur la figure V.34. L'augmentation de la longueur de la poutre augmente le déplacement maximal à mi-portée, tout en restant dans le cas du comportement de la poutre comme simplement appuyée sur les deux cotés (selon la forme des courbes près des appuis et les valeurs des fléches maximales).

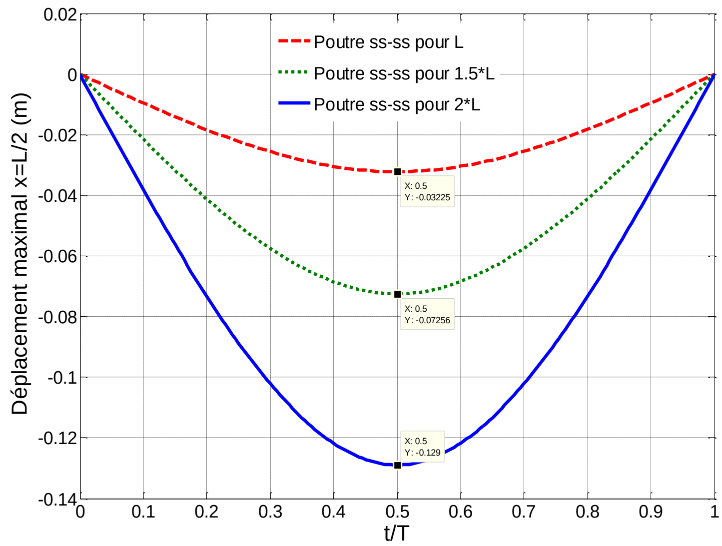


Figure V-34 Déplacement maximal de la poutre ss-ss pour L, $1.5.L$ et $2.L$.

Tableau V-11 Facteur d'amplification dynamique pour la poutre ss- ss pour L, $1.5.L$ et $2.L$.

	Cas 1	Cas 2	Cas 3
	$ktg = ktd = 0$, $k\lg = kld = 10^3 N/m$	$ktg = ktd = 0$, $k\lg = kld = 10^3 N/m$	$ktg = ktd = 0$, $k\lg = kld = 10^3 N/m$
$L = 6m$	L	$1.5.L$	$2.L$
EI ($N.m^2$)	140.625	210.9375	281.25
y_{sta} (m)	0.032	0.072	0.128
y_{dyn} (m)	0.03225	0.07256	0.129
Ecart Δ (m)	0.00025	0.00056	0.001
FAD	1.0078	1.0078	1.0078

La même remarque concernant l'effet de la longueur L sur l'effet dynamique pour le cas de la poutre c-c est observée pour le cas de la poutre ss- ss. La longueur de la pour affecte considérablement l'effet dynamique sur la poutre, mais cela n'influence pas vraiment l'amplification dynamique (tableau V.11).

Par contre le type d'appuis (modèle adopté) influe considérablement sur l'amplification dynamique. Les ressorts horizontaux (modèle c-c) diminuent remarquablement le facteur d'amplification dynamique (figure V.35).

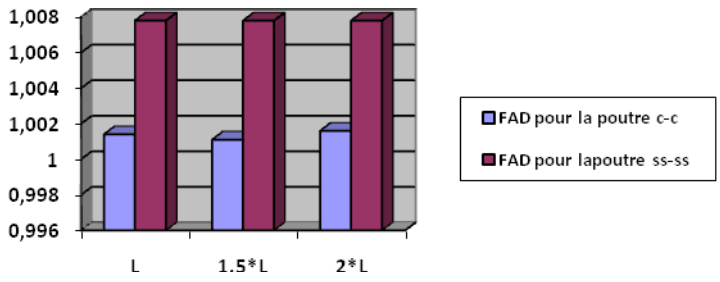


Figure V-35 Facteur d'amplification dynamique pour la poutre c-c et ss- ss pour L, $1.5.L$ et $2.L$.

V.3.8 Etude du couplage des rigidités d'appuis avec ceux de la poutre

Posons R le rapport de la rigidité de la poutre à la raideur du ressort comme suit : $R = EI / k$

Dans le cas où $ktg = ktd = 0$, nous remarquons que le comportement de la poutre en travée se rapproche d'avantage lorsque la charge se rapproche du milieu de la poutre. L'influence de la variation des valeurs de $k\lg$ et kld sur le déplacement maximal est plus importante lorsque la charge est dans la zone des appuis, comme illustré sur la figure V.36. La même remarque a été constatée pour le modèle 1 de la poutre sur ressorts verticaux.

Lorsque la charge est sur les appuis, nous remarquons que des petites valeurs de raideurs $k\lg = kld = 10kn / m$ (cas 1) donnent un déplacement maximal plus important en travée que des valeurs de raideur plus importantes, comme illustré sur la figure V.37 (cas 2) pour le début du chargement et sur la figure V.38 pour la fin du chargement.

Nous utilisons les mêmes données que celles de (Mehri B., 2009) pour les figures qui suivent.

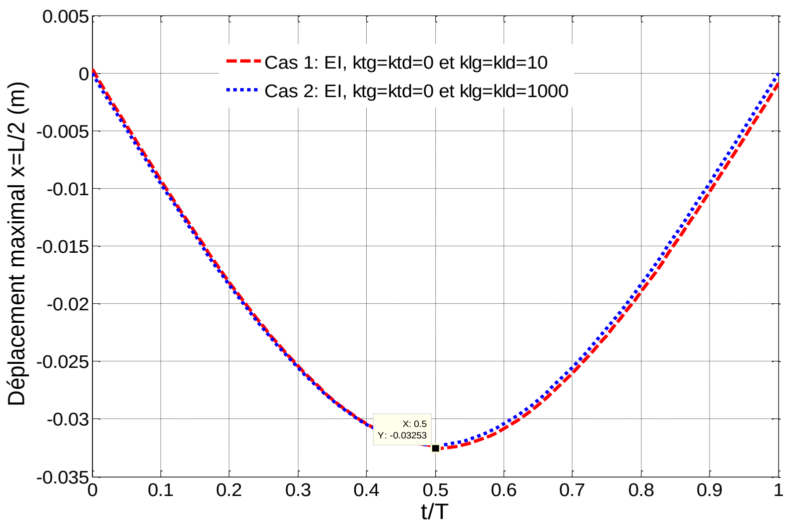


Figure V-36 Déplacement maximal pour différents cas.

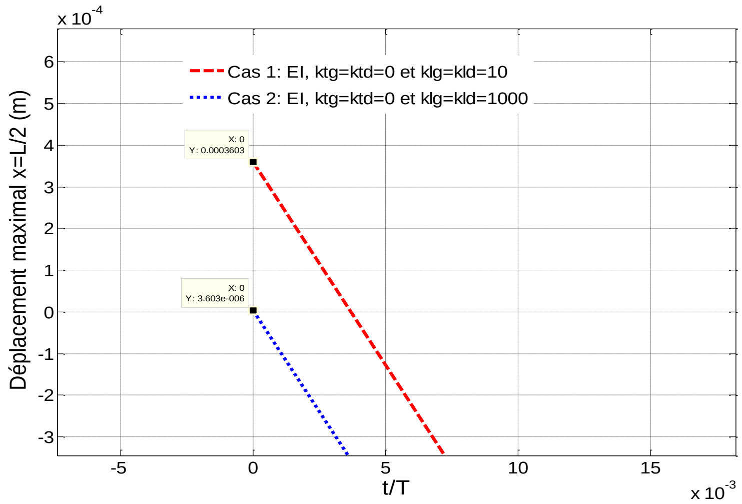


Figure V-37 Zoom sur le déplacement maximal pour $t = 0$.

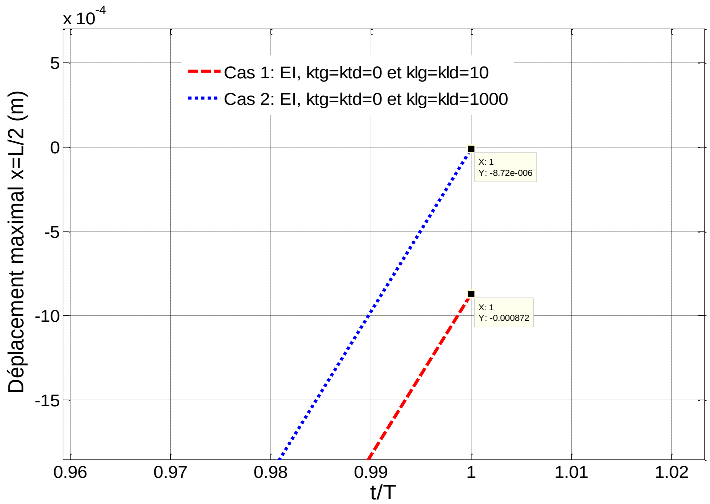


Figure V-38 Zoom sur le déplacement maximal pour $t = T$.

Tableau V-12 Effet des rigidités et raideurs sur le comportement en travée en fonction de la position de la charge.

	Cas 1	Cas 2
$ktg = ktd\ (N/m)$	0	0
$k\lg = kld\ (N/m)$	10	1000
y_{sta} (m)	0.032	0.032
y_{dyn} max (m) à $x = L/2$ et $t = T/2$	0.03253	0.03225
FAD	1.0166	1.0078
y_{dyn} (m)pour $x = L/2$ et $t = 0$	0.0003603	$3.603.10^{-6}$
y_{dyn} (m)pour $x = L/2$ et $t = T$	0.000872	$8.72.10^{-6}$

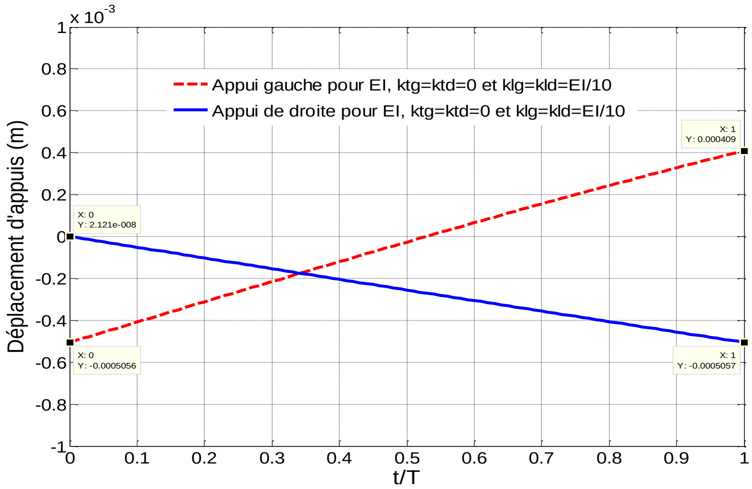


Figure V-39 Déplacements des appuis pour EI , $ktg = ktd = 0$ et $k\lg = kld = EI/10$.

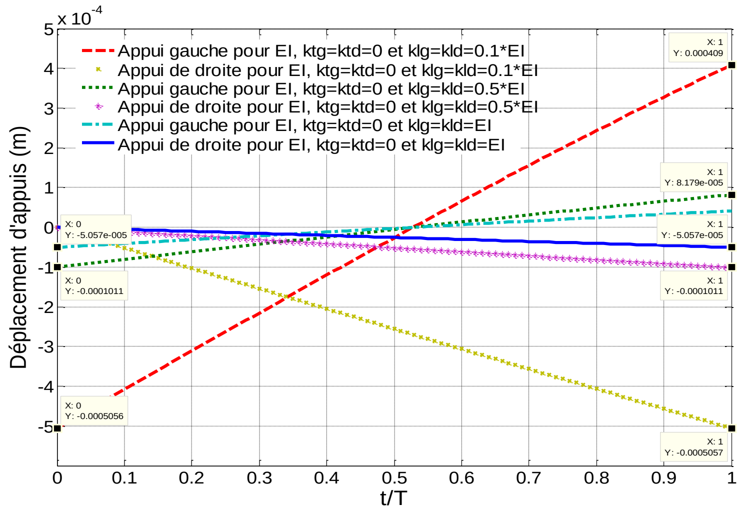


Figure V-40 Déplacements des appuis pour EI , $ktg = ktd = 0$ et $k\lg = kld = 0.1.EI$, $0.5.EI$ et EI .

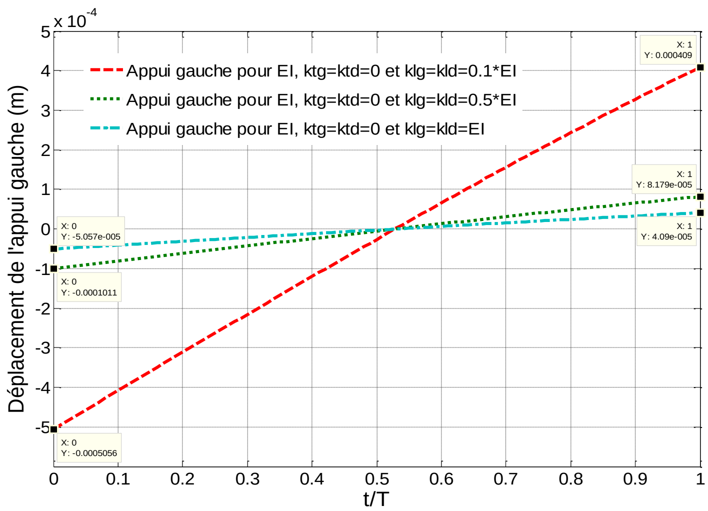


Figure V-41 Déplacements de l'appui gauche pour EI , $ktg = ktd = 0$ et $k\lg = kld = 0.1.EI$, $0.5.EI$ et EI .

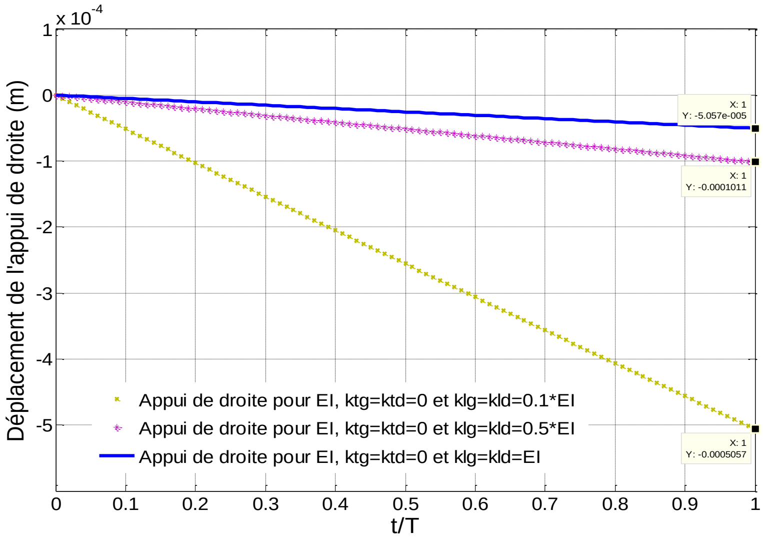


Figure V-42 Déplacements de l'appui de droite pour EI, $ktg = ktd = 0$ et $k\lg = kld = 0.1.EI$, $0.5.EI$ et EI.

Le déplacement d'appui droit au temps $t = T$ est égale au déplacement de l'appui gauche au temps $t = 0$ (figures V.39, V.40, V.41 et V.42).

Pour bien illustrer l'effet du couplage de la rigidité de la poutre avec les raideurs des ressorts, nous utiliserons les données de (Mehri B., 2009), $EI = 140.625\,\text{kn.m}^2$, avec des rigidités d'appuis varies de $0.1.EI$ jusqu'à EI avec $ktg = ktd = 0$, ce qui donne des rapports de la rigidité de la poutre à la raideur des ressorts $R = EI/k$ variant de 10 à 1.

Le comportement de l'appui gauche en fonction de R est présenté sur la figure V.43 et dans le tableau V.13.

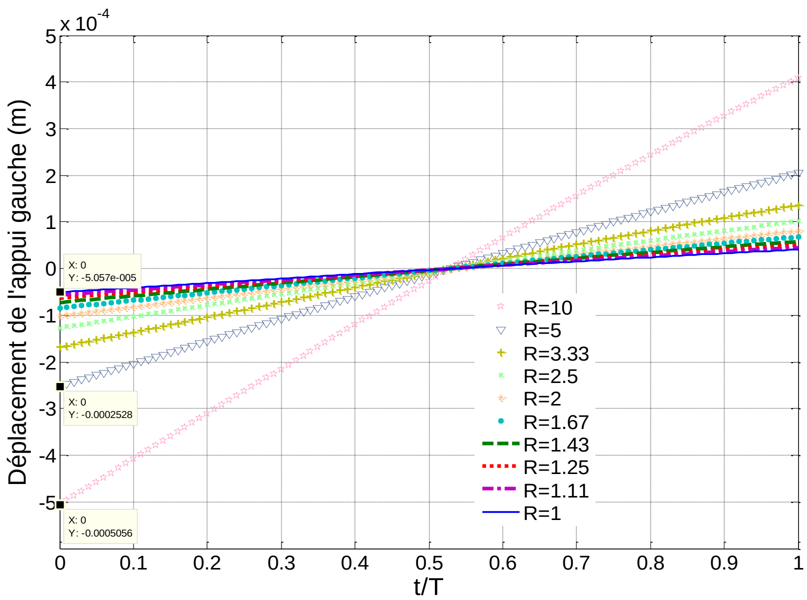


Figure V-43 Déplacements de l'appui gauche pour EI, $ktg = ktd = 0$ et $k\lg = kld = 0.1.EI$, $0.5.EI$ et EI.

Le comportement de l'appui de droite en fonction de R est présenté sur la figure V.44 et dans le tableau V.13.

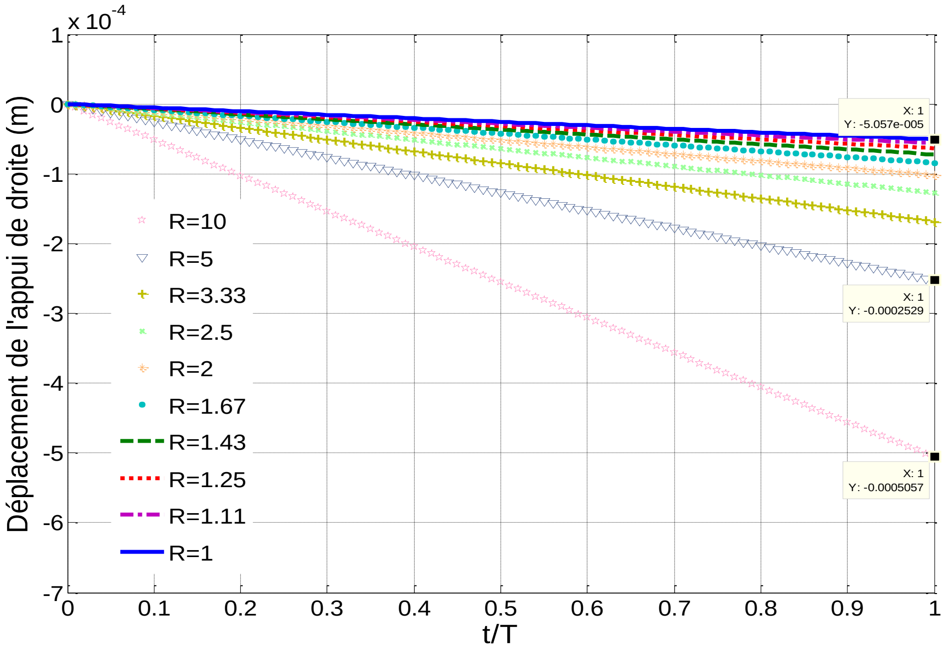


Figure V-44 Déplacements de l'appui de droite pour EI, $ktg = ktd = 0$ et $klg = kld = 0.1.EI$, $0.5.EI$ et EI.

L'augmentation de R diminue directement les déplacements des appuis qui sont complètement opposés. Pour l'appui gauche au temps $t = 0$ et l'appui de droite pour $t = T$ (figures V.43 et V.44 et le tableau V.13).

Tableau V-13 Effet de R sur le comportement d'appuis pour $ktg = ktd = 0$.

Rigidité de la poutre	$klg = kld$	R (m^3)	Déplacement maximal de l'appui gauche pour $t = 0$ (m)	Déplacement maximal de l'appui de droite pour $t = T$ (m)
EI	$10.EI$	0.1	0.0005056	0.0005057
EI	$5.EI$	0.2	0.0002528	0.0002529
EI	$3.33.EI$	0.3	0.0001686	0.0001686
EI	$2.5.EI$	0.4	0.0001264	0.0001264
EI	$2.EI$	0.5	0.0001011	0.0001011
EI	$1.67.EI$	0.6	0.00008428	0.00008428
EI	$1.43.EI$	0.7	0.00007224	0.00007224
EI	$1.25.EI$	0.8	0.00006321	0.00006321
EI	$1.11.EI$	0.9	0.00005619	0.00005619
EI	EI	1	0.00005057	0.00005057

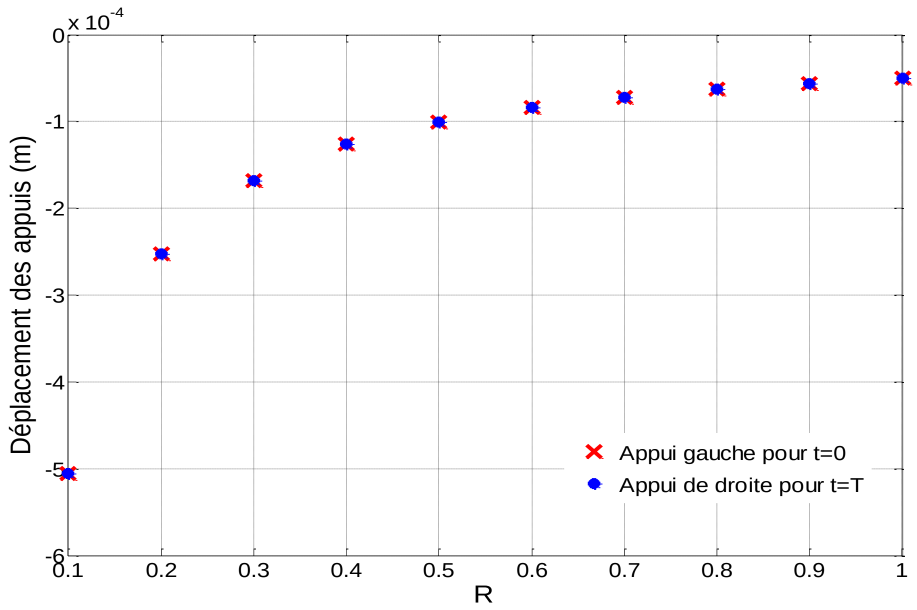


Figure V-45 Déplacements des appuis en fonction de R au temps $t=0$ pour l'appui gauche et au temps $t=T$ pour l'appui de droite.

Les résultats concernant qui concerne le déplacement maximal en travée sont présentés uniquement sur le tableau V.13, car les valeurs numériques de ce cas d'étude n'ont pas un effet remarquable sur les déplacements en travée (même remarque que pour la figure V.36).

L'augmentation des rigidités d'appuis diminue le déplacement maximal et l'amplification dynamique (tableau V.13), une remarque similaire est observée pour le modèle 1.

En ce qui concerne le comportement des appuis, le comportement de l'appui gauche (lorsque la charge est appliquée sur l'appui gauche) est opposé au déplacement de l'appui de droit lorsque la charge est à $x=L$ (tableau V.12 et la figure V.37).

Le rapport R a un effet similaire sur l'appui gauche et de droit, comme illustré sur la figure V.45.

V.3.9 Effet de R sur le comportement de la poutre

Nous allons utiliser les données de Mehri (Mehri B., 2009) mais cette fois ci avec des valeurs différentes de EI avec $k=10kn/m$.

Les résultats des figures V.46 et V-47, qui représentent l'effet du rapport des rigidités sur le comportement dynamique de la poutre en travée, sont présentés plus en détail dans le tableau V.14.

Le facteur d'amplification dynamique est plus important pour le cas de faibles raideurs d'appuis et, on conséquent, pour un rapport R plus important. C'est à dire que la présence des ressorts diminue l'amplification dynamique, une remarque similaire observée à celle pour le cas de poutre appuyée uniquement sur des ressorts verticaux (modèle 1).

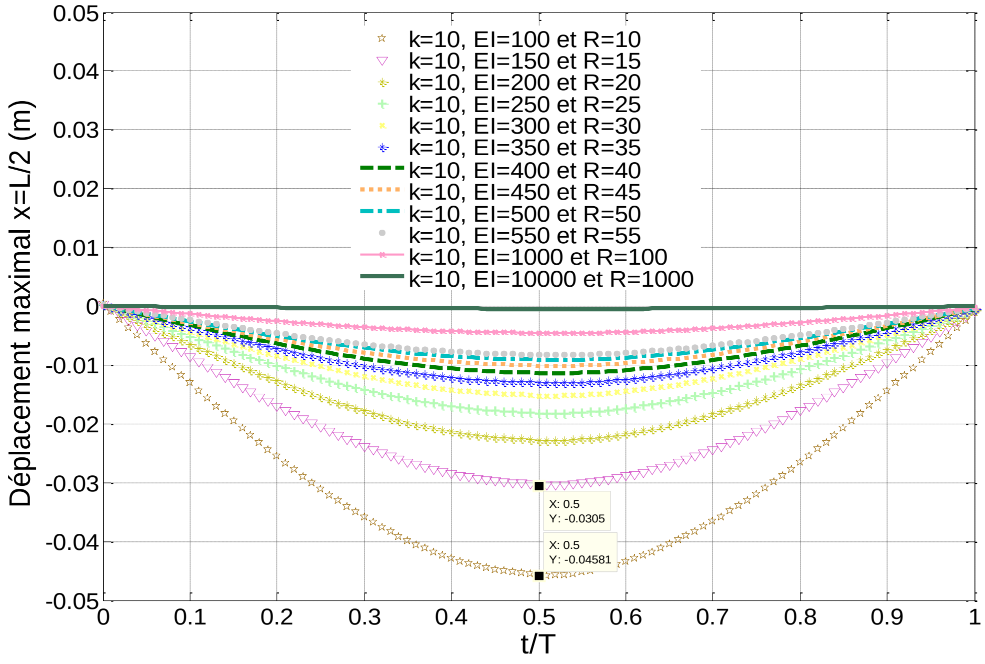


Figure V-46 Comportement en travée $x = L/2$ pour $k\lg = kld = 10kn/m$ et pour différentes valeurs de R.

L'augmentation de R, due principalement à l'augmentation de la rigidité de la poutre, diminue le déplacement maximal en travée à $x = L/2$, jusqu'à atteindre à une valeur de R ou de la rigidité de la poutre EI qui annule le déplacement maximal ainsi que tous les déplacements en travée. Dans ce cas, la poutre est considérée dans ce cas comme infiniment rigide, comme présenté sur les figures V.46 et V.47. La même remarque s'applique pour le modèle 1.

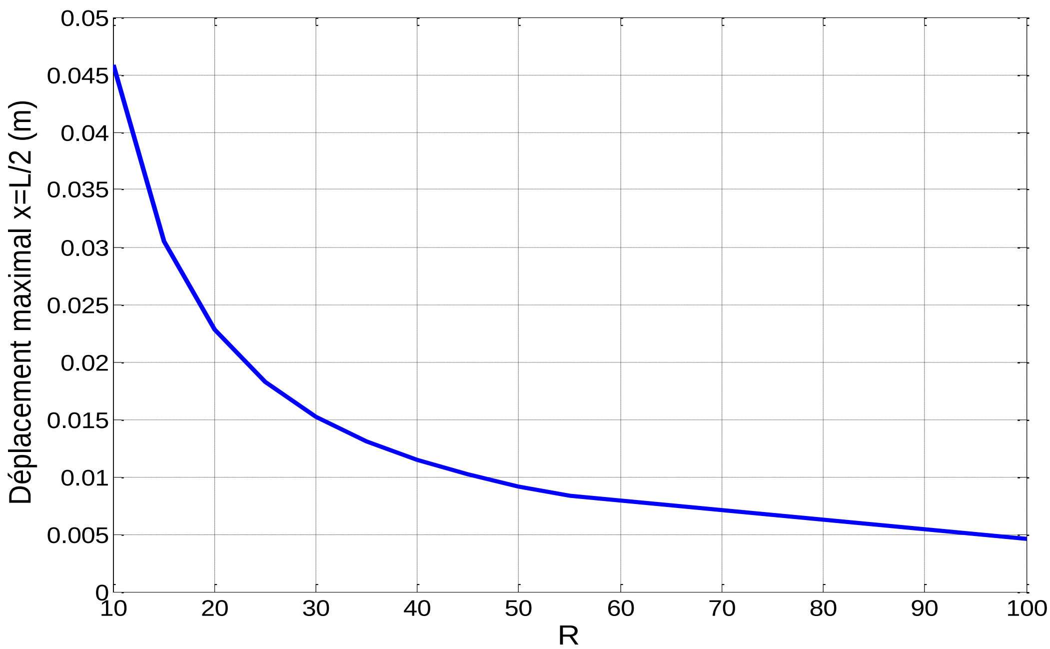


Figure V-47 Effet du rapport R sur le déplacement maximal.

Tableau V-14 Effet de R sur le déplacement maximal en travée $x = L/2$ pour $k = 10kn/m$.

$EI(kn.m^2)$)	$k(kn/m)$	R (m^3)	Déplacement maximal modèle 1 $x = L/2$ (m)	Déplacement maximal modèle 2 $x = L/2$ (m)	Déplacement statique (m)	FAD
100	10	10	0.04549	0.04581	0.045	3.054
150	10	15	0.03022	0.0305	0.03	1.0167
200	10	20	0.02262	0.02285	0.0225	1.0156
250	10	25	0.01808	0.0183	0.018	1.0167
300	10	30	0.01505	0.01526	0.015	1.0173
350	10	35	0.0129	0.01308	0.0129	1.0140
400	10	40	0.01128	0.01145	0.0113	1.0133
450	10	45	0.01002	0.01019	0.01	1.0190
500	10	50	0.009019	0.009171	0.009	1.0190
550	10	55	0.008197	0.008342	0.0082	1.0190
1000	10	100	0.004505	0.004605	0.0045	1.0233
10000	10	1000	0.00045	0.000471	0.00045	1.0467

La rigidité de la poutre influe sur le déplacement des appuis, comme le montre la figure V.48 et le tableau V.15. L'augmentation de R, due principalement à l'augmentation de EI, diminue directement les déplacements aux niveau des appuis. Une valeur de $EI = 10000 kn.m^2$ peut annuler complètement les déplacement des appuis gauche et droite, car elle entraîne des déplacements très petits aux extrémités, pour $t = 0$ pour l'appui gauche et pour $t = T$ pour l'appui de droite, rendant ainsi les déplacements négligables.

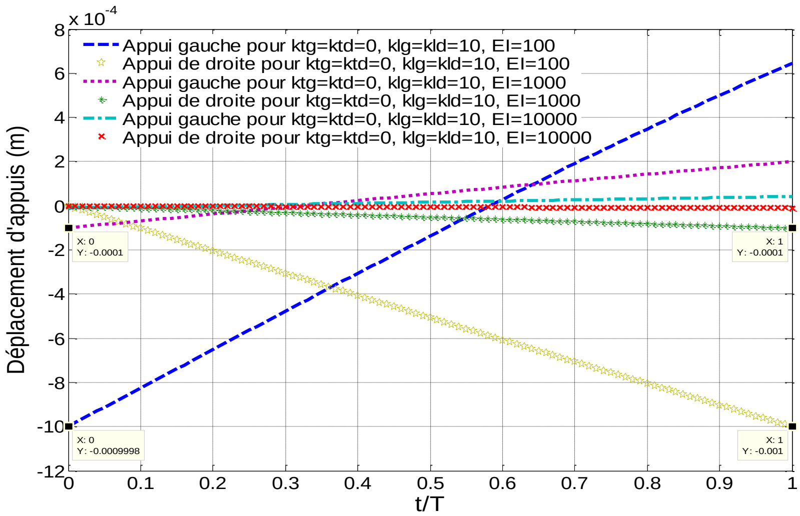


Figure V-48 Déplacement d'appui gauche à $x = 0$ et de l'appui de droite à $x = L$ pour $k = 10 kn/m$, $EI = 100$, 1000 et $10000 kn.m^2$.

Tableau V-15 Valeurs des déplacements d'appuis pour $k = 10kn/m$ et $EI = 100$, 1000 et $10000 kn.m^2$ et R.

$EI(kn.m^2)$	R (m^3)	Déplacement maximal de l'appui gauche (m) $x=0,\ t=0$	Déplacement maximal de l'appui à droite (m) $x=L,\ t=T$
100	10	0.0009998	0.001
1000	100	0.0001	0.0001
10000	1000	0.00001≈0	0.00001≈0

V.3.10 Poutre sur appuis non symétriques

Lorsque les quatre raideurs des ressorts d'appuis sont importantes, le comportement des appuis devient proche à celui d'une poutre encastrée sur les deux cotés, comme le montrent les résultats sur la figure V.49 pour une poutre c-c, et le déplacement maximal est alors celui d'une poutre encastrée sur les deux cotés.

$u_{stac-c} = 0.008$ m et $u_{stass-ss} = 0.032$ m .

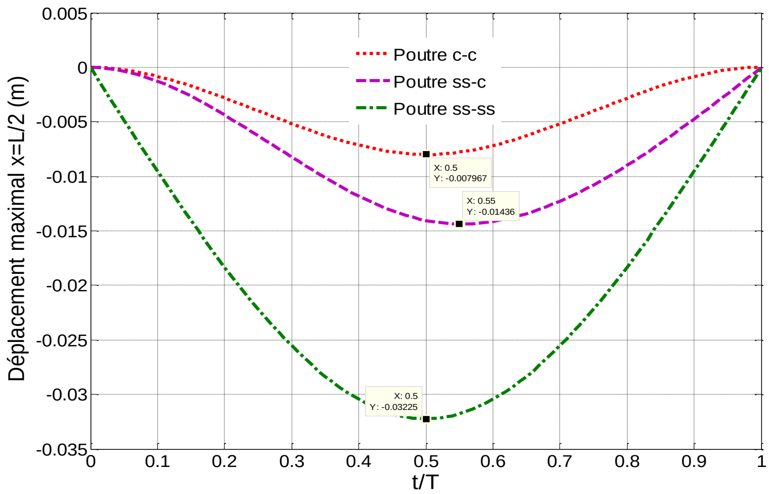


Figure V-49 Déplacement maximal de la poutre sur appuis non symétriques.

Lorsqu'un des appuis diminue de rigidité horizontale ($ktd = 0$ à titre d'exemple), le comportement devient celui d'une poutre encastrée sur un coté et simplement appuyée sur l'autre coté (encastrée à gauche et simplement appuyée à droite). C'est le cas représenté sur la figure V.49 poutre ss-c.

Dans le cas où les rigidités horizontales des deux appuis sont faibles par rapport aux rigidités verticales ($ktd = ktg = 0$), le comportement de la poutre et le déplacement maximal sont ceux d'une poutre simplement appuyée sur les deux cotés. C'est le cas représenté sur la figure V.49 pour une poutre ss- ss.

Le déplacement maximal se décale du milieu de la poutre vers le coté de l'appui le moins rigide pour le cas de raideurs non symétriques (le cas ss-c sur la figure V.49) contrairement au cas symétrique c-c et ss- ss où le déplacement maximal est remarqué à mi-travée de la poutre.

V.4 Conclusion partielle

Ce chapitre a introduit une nouvelle formulation pour le calcul des déplacements d'une poutre appuyée sur des supports élastiques dans les deux directions, en utilisant la méthode de la fonction de Green. Cette approche offre deux domaines de calcul en fonction de la position de la charge mobile, un à gauche et l'autre à droite, aboutissant ainsi à deux expressions de la fonction de déplacement. Ce modèle peut remplacer divers types d'appuis en variant les rigidités des ressorts de 0 à l'infini, incluant des configurations telles que l'encastrement, les appuis simples ou doubles, ainsi que l'extrémité libre, entre autres.

La forme de la solution est complexe et nécessite un affinement par un traitement détaillé des termes de puissance, comme adopté dans le chapitre IV pour le modèle à ressorts verticaux uniquement. En réduisant ce modèle, on obtient précisément les formes analytiques de solution présentées dans le chapitre IV.

L'application de cette nouvelle formulation pour le calcul des déplacements, analysée dans ce chapitre, a impliqué la variation de tous les paramètres influant sur le comportement de la poutre, que ce soit en travée ou sur appuis. Nous avons démontré qu'au-delà d'un seuil de raideur, les ressorts peuvent remplacer l'encastrement, et le comportement en travée devient celui d'une poutre encastrée. Pour des valeurs de raideur des ressorts moins élevées, le comportement de la poutre oscille entre simplement appuyée et encastrée.

Les résultats de cette analyse soulignent également que la rigidité de la poutre est combinée avec les raideurs des ressorts, et c'est ce couplage qui influe sur le comportement vibratoire de la poutre, y compris la vitesse de roulement, la longueur de la poutre, la valeur de la charge mobile, etc. Ce modèle converge vers le modèle à ressorts verticaux présenté dans le chapitre IV par annulation des ressorts supplémentaires. Les ressorts verticaux s'opposent principalement au déplacement vertical, tandis que les ressorts horizontaux agissent sur la rotation. Nous avons observé que les deux modèles présentent un comportement similaire, que ce soit en travée ou sur appuis, pour le même type d'appui.

Conclusion générale

L'étude présentée dans cette thèse a pour objectif de contribuer au domaine de la dynamique des structures en proposant de nouvelles approches pour le calcul dynamique des structures, en mettant particulièrement l'accent sur la modélisation des ponts et des véhicules mobiles, notamment au niveau des points d'appui. Ce défi ne pouvait être relevé efficacement par les méthodes analytiques classiques ou la méthode des éléments finis.

L'approche adoptée dans cette thèse a débuté par l'utilisation de la méthode analytique et de la méthode des éléments finis, ainsi que la modélisation en 3D, pour confronter trois modèles et expliquer le comportement d'une poutre sur appuis simples sous divers types de chargement, qu'il s'agisse de charges concentrées, réparties ou d'un convoi de charges.

Ensuite, la méthode de la fonction de Green a été exploitée pour présenter de nouvelles formules pour deux modèles plus généraux que les modèles d'appuis simples conventionnels. Ces formules offrent la possibilité de décrire le comportement dynamique en travée ou sur appuis en fonction du temps.

La première partie de l'étude s'est penchée sur l'effet de l'inertie de la charge mobile sur une poutre mince simplement appuyée. Il a été démontré que, pour de petites vitesses, les résultats des deux approches (tenant compte ou non de l'inertie de la charge) sont similaires, mais à mesure que le rapport des masses soit petit, l'inertie de la masse a un impact significatif sur le comportement dynamique. L'étude de la modélisation de la charge mobile a révélé son influence considérable sur le comportement dynamique des ponts. L'amplification maximale du déplacement a été observée avec une valeur plus petite dans le cas de la charge harmonique par rapport à la charge constante mobile. Les résultats ont montré que l'amplification dynamique augmente avec la vitesse de passage, en particulier pour le modèle de charge mobile harmonique.

Dans le cas d'un convoi de forces mobiles, la solution a été obtenue par la superposition des solutions de toutes les forces, avec un impact significatif de l'espacement entre les charges sur le comportement dynamique de la poutre ou du pont. Pour le cas unidimensionnel, le déplacement maximal n'est pas nécessairement au milieu de la poutre, ce qui met en évidence l'importance de l'étude dynamique par rapport à l'étude statique. Une analyse approfondie a été menée lorsque la charge n'est pas modélisée de manière réaliste dans le modèle unidimensionnel en éléments finis. L'amplitude de la réponse dynamique décroît lorsque la position spatiale du nœud est proche de l'appui, avec le déplacement transversal maximal au centre de la poutre. La suite de l'étude a porté sur des modèles unidimensionnels et tridimensionnels de poutres sollicitées par des convois de charges mobiles. Les résultats ont montré que, malgré certaines différences entre les modèles, ils étaient globalement satisfaisants. L'effet de la vitesse de roulement de la charge mobile a été étudié, montrant que l'amplification dynamique augmente avec l'augmentation de la vitesse de roulement.

En se penchant sur des modèles tridimensionnels, où les véhicules ne sont pas toujours positionnés sur l'axe du tablier des ponts, l'étude a révélé que l'effet sur le tablier du pont est plus important pour le cas d'une charge résultante que pour une charge répartie. L'amplification dynamique a été observée comme plus importante lorsque ces charges sont décalées de l'axe du pont, augmentant pour la vibration forcée ou libre avec l'augmentation de la vitesse de roulement.

La deuxième partie de l'étude été porté sur des modèles analytiques. La contribution personnelle réside dans le développement de nouvelles formulations en utilisant la fonction de Green pour deux modèles de poutres. Le premier modèle a remplacé les poutres simplement appuyées en introduisant deus ressorts élastiques verticaux aux appuis, tandis que le deuxième modèle remplace tous les types d'appuis simples ou encastrés, en introduisant quatre ressorts élastiques, deux verticaux et deux horizontaux, aux deux extrémités de la poutre. Ces formulations fournissent le déplacement dynamique de la poutre à n'importe quel point et pour n'importe quelle position de la charge. Ces nouvelles formules se simplifient pour les cas d'appuis en attribuant des raideurs aux ressorts varies de 0 à l'infini pour atteindre le type d'appui souhaité, tout en restant dans le cadre des appuis élastiques. Des formulations ont également été développées pour calculer le déplacement des appuis élastiques en fonction de la position de la charge sur la poutre.

Une contribution significative réside dans la proposition de formules pour déterminer le déplacement maximal au niveau des appuis élastiques. Il suffit de connaître la raideur du ressort de l'appui concerné, la rigidité de la poutre et la valeur de la charge mobile pour obtenir le déplacement maximal de l'appui. Ces formules ont permis d'étudier le comportement de la poutre sur plusieurs conditions d'appuis, une analyse qui n'était pas réalisable précédemment car les études se limitaient au comportement de la poutre sans prendre en compte les appuis élastiques sous l'effet des charges mobiles.

L'application des nouvelles formules a permis de comprendre le comportement des poutres en travée et sur appuis. Les conclusions tirées comprennent:

1. Pour le premier modèle de la poutre sur supports élastiques verticaux:

- Le déplacement de la poutre est symétrique lorsque la charge est appliquée au milieu de la poutre.
- L'appui gauche atteint un déplacement maximal au début du chargement, tandis que l'appui droit atteint le déplacement maximal à la fin du chargement.
- L'interaction entre la rigidité de la poutre et la raideur des appuis élastiques influence le comportement global de la structure.
- le déplacement maximal en travée est inversement proportionnel à la rigidité de la poutre.
- la perte de la rigidité de la poutre diminue le couplage de rigidité au niveau des appuis, et par conséquence son augmentation augmente la rigidité au niveau des appuis qui les rendent rigides aux déplacements verticaux.
- La raideur du ressort donne un effet remarquable sur la poutre pour des positions de charge proche des appuis.
- les appuis subissent des déplacements importants quand la charge est le plus proche possible des points de calcul.
- Le déplacement sur appui gauche n'est pas fonction de la vitesse de roulement de la charge mobile et il est proportionnel à la charge et inversement proportionnel à la rigidité de la poutre et à la raideur des ressorts.
- Le déplacement de l'appui droit est proportionnelle avec la charge mobile et de sa vitesse, et inversement proportionnel à la rigidité de la poutre, aux raideurs d'appuis et à la longueur de la poutre.
- Le modèle d'appui conçu uniquement par des ressorts dans la direction verticale peut remplacer uniquement les poutres simplement appuyées.
- Les déplacements en travée de la poutre peuvent s'annuler a partir d'une valeur précise de rigidité, elle est alors considérée dans ce cas comme infiniment rigide.
- La disposition des ressorts diminue les effets dynamiques dus à la charge roulante sur la poutre pour de petites vitesses.
- Les formules développées temporelle pour le calcul des déplacements des appuis ne sont applicables que pour le cas de petites vitesses.
- pour des grandes vitesses, l'amplification dynamique augmente et le comportement n'est plus celui d'une poutre simplement appuyée sur les deux cotés.

2. Pour le deuxième modèle de la poutre sur supports élastiques dans les deux directions:

- Ce modèle est plus général que le premier, car il inclut des ressorts verticaux et horizontaux.
- Les raideurs des ressorts influent sur le type d'appui, passant de l'appui élastique à l'appui encastré en ajustant les valeurs des raideurs.

- Il existe un seuil de rigidités d'appuis qui mène à la même solution qu'un encastrement, au delà de ce seuil, le comportement dynamique de la structure n'est plus influencé, par contre une valeur plus faible reflète le comportement d'un appui simple.

- Les raideurs du modèle 2 peuvent selon leurs valeurs annuler les rotations au niveau des appuis gauche et de droite. Leurs évolution de zéro vers une valeur définie permet de caractérisé l'appui soit comme un encastrement ou appui simple.

- Les conditions aux limites du modèle 2 peuvent ce modifier et tombe au modèle 1 par annulation des rigidités concernées.

- De faible valeur de raideurs verticales permet d'assurer l'encastrement mais en autorisant un certain déplacement vertical d'appuis.

- Le comportement de la poutre en travée n'est pas influencé par les ressorts verticaux des appuis, même remarque déjà constaté pour le premier modèle, c'est seulement les ressorts horizontaux qui affecte le comportement en travée.

- La rigidité de la poutre ce combine avec les ressorts d'appuis pour bloqué le déplacement vertical.

- Le déplacement maximal et l'amplification dynamique augmente avec la vitesse de roulement de la charge mobile, même remarque constatée pour le premier modèle.

- l'amplification dynamique pour la poutre simplement appuyée sur les deux cotés est beaucoup plus importante par rapport au cas de la poutre encastrée sur les deux cotés surtout en se rapprochant de la vitesse critique.

- La longueur de la poutre affecte considérablement l'effet dynamique mais ca n'à pas d'effet remarquable sur l'amplification dynamique.

- L'influence des raideurs d'appuis affecte le comportement en travée quand la charge est en zone d'appuis, même remarque constaté pour le modèle 1 de la poutre sur ressorts verticaux.

- La présence des ressorts diminue l'amplification dynamique, même remarque constaté pour le cas de poutre appuyée uniquement sur des ressorts verticaux modèle 1.

- L'augmentation du rapport de rigidités due principalement à l'augmentation de la rigidité de la poutre diminue le déplacement maximal, une valeur de ce rapport ou de la rigidité de la poutre peut annulée le déplacement maximal ainsi que tous les déplacements en travée, la poutre est considérée alors comme infiniment rigide. La même remarque est constatée pour le modèle 1.

- Lorsque un des appuis diminue de rigidité horizontale, le comportement devient celui d'une poutre encastrée sur un coté et simplement appuyée sur l'autre coté. Le déplacement maximal ce décale du point de mi-travée de la poutre vers le coté de l'appui le moins rigide contrairement au cas symétrique c-c et ss- ss où le déplacement maximal est remarqué à mi-travée de la poutre.

Enfin, cette thèse a apporté des contributions significatives au domaine de la dynamique des structures. Les nouvelles formulations et approches développées permettent de modéliser de manière plus précise le comportement dynamique des poutres soumises à des charges mobiles, ouvrant la voie à des analyses plus approfondies et des conceptions plus robustes dans le domaine de l'ingénierie des structures. Les conclusions tirées des différentes parties de l'étude offrent des insights précieux pour la compréhension du comportement dynamique des poutres sur supports élastiques.

Perspectives

Au-delà des résultats prometteurs de cette étude, des perspectives se dessinent également dans le domaine de la modélisation. La poursuite de ce travail pourrait être élargie par :

1. Proposer une correction du terme de la valeur de la rigidité dans le sens de la longueur de la poutre prise en compte dans les modèles unidimensionnels analytiques, par la fonction de Green ou les éléments finis, afin de tenir compte des effets des rigidités dans les autres directions non considérées. Cela permettrait d'obtenir des résultats plus proches du modèle réel tridimensionnel.

2. Étudier le cas de la poutre de Timoshenko sur supports élastiques en utilisant la méthode de la fonction de Green et la confronter avec le modèle de la poutre d'Euler-Bernoulli considéré dans cette étude pour des cas de chargements et de vitesses bien définies.

3. Développer des modèles en deux dimensions, tels que des plaques, en utilisant la même méthode de la fonction de Green pour tenir compte des effets des rigidités flexionnelles non prises en compte dans le modèle unidimensionnel.

4. Intégrer la fissuration dans le modèle de la poutre à étudier afin de se rapprocher des cas réels des structures altérées.

5. Élargir l'étude jusqu'à la vibration libre après la sortie des charges qui sollicitaient la poutre.

6. Effectuer une étude similaire mais pour le cas des poutres amorties afin de rendre l'étude plus générale.

BIBLIOGRAPHIE

- *A*-

Abu-Hilal, M. (2003). Forced vibration of Euler-Bernouli beams by means of dynamic Green functions. *Journal of sound and vibration 267*, 191-207.

Aguenini, N. (2008). *Etude des ponts à dalles isotropes et orthotropes soumises à des charges roulantes* [mémoire de magister, Université Saad Dahleb Blida].

Alsaif, K. et Foda, M. A. (2002). Vibration suppression of a beam structure by intermediate masses and springs. *Journal of Sound and vibration. 256(4)*, 629- 645. https://doi:10.1006/jsvi.5012.

Procédure d'épreuves et programmes de charges de l'ouvrage d'art OA. 314.1 (Section 2.3) Lot unique Est de l'Autoroute Est-Ouest. Agence Nationale des Autoroutes Est-Ouest (ANA) Ministère des Travaux Publics, Algérie. (2011). COJAAL *Consortium Japonais pour l'Autoroute Algérienne,* LE3-C7M-STR-0230-RPT-REF-3141.

Plan d'ensemble-tablier. Documents internes. *A. N. A. Agence nationale de l'autoroute Est-Ouest de l'Algérie,* lot unique Est O.A. 59.3, passage supérieur AU PK. 59+877.458,

- *B*-

Boua, B. (2012). Détermination de la déflexion d'un tablier de pont dalle sous charge roulante. *Nature and technologie. A- Sciences fondamentales et Engineering*, n° 08/Janvier, 41-49.

Broquet, C. (1999). *Comportement dynamique des dalles de roulement des ponts en béton sollicités par le trafic routier*. [Thèse de doctorat. École polytechnique fédérale de lausanne].

- *C*-

Champaney, L. (2010). Approximation de la fréquence fondamentale d'une structure par la méthode de Rayleigh. *ENS CACHAN*.

Chan, T. H. T. et Ashebo, D. B. (2006). Theoretical study of moving force identification on continuous bridges. *Journal of Sound and Vibration 295*, 870–883.

Chang, D. et Lee, H. (1994). Impact Factors for Simple-Span Highway Girder Bridges. *J. of Structural Eng. (ASCE). Vol 120, N°3*, 704-715.

Clough, R. H. et Penzien, J. (1993). *Dynamics of structural. McGraw Hill, New York*.

Conception, Calcul et Épreuves des ouvrages d'art. *D.T.R, Cahier des prescriptions communes, applicables aux marchés de travaux publics, relevant des services de l´équipement. Fascicule N° 61.*

- *D*-

Dimitrovová, Z. et Mazilu, T. (2024). Interaction of a Moving Mass on an Infinite Beam on a Three-Layer Viscoelastic Foundation at the Stability Limit—The Effect of Damping of Foundation Materials. *Materials 2024*, *17*, *279*. https://doi.org/10.3390/ma17020279.

Ding, H., Li, Y. et Chen, L. Q. (2018). Nonlinear vibration of a beam with asymmetric elastic Supports. *CrossMark. Nonlinear Dyn*. https://doi.org/10.1007/s11071-018-4705-0.

Ding, Y., Han, L. et You, J. (2019). An explicit closed-form solution for transverse and longitudinal vibration of beam with multi-directional elastic constraints under an arbitrary moving load. *Journal of vibroengineering, volume 21, issue 7*. 1772-1794.

Dos Santos, V.G.R.C., Pereira V.S. et Dos Santos, J.M.C. (2019). Dynamic Response of a Beam Excited by a Moving load at different velocities. *DINAME - Proceedings of the XVIII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, M.A. Savi, T.G. Ritto and W.M. Bessa (Editors), ABCM, Buzios, RJ, Brazil*, 10-15.

- *F*–

Feng, D., Sun, H. et Feng, M. Q. (2015). Simultaneous identification of bridge structural parameters and vehicle loads. *Journal of computers and structures, Elsevier*, *157*. 76–88.

Foda, A. et Abduljabbar, Z. (1998). A dynamic green function formulation for the response of a beam structure to moving mass. *Journal of sound and vibration, 210(3).* 295-306,

Fryba, L. (1996). *Dynamics of railways bridges*. [Institude of theoretical and applied mecanics, Academy of sciences of the Gzech Republic, Prague, Thomas Telford].

Fryba, L. (1972). *Vibration of solids and structures under moving loads*. [Noordhoff international publishing, Groningen, the Netherlands].

- *G*–

Garinei, A. (2006). Vibrations of simple beam-like modelled bridge under harmonic moving loads. *Internationnal journal of engineering science, Sciencedirect*, *44*. 778–787.

Geradin, M. et all. (1996). *Théorie des vibrations, application à la dynamique des structures.* [Masson, 2$^{\text{éme}}$ edition. 221 pages. ISBN :2-225-85173-5. Paris].

Ghannadiasl, A. et Mofid, M. (2023). Sensitivity analysis of vibration response of timoshenko beam to mass ratio and velocity of moving mass and boundary conditions: Semi-analytical approach. *Forces in Mechanics 11 (2023) 100205.* https://doi.org/10.1016/j.finmec.2023.100205.

- *H*–

Hamidi, S. A. et Danshjoo, F. (2010). Determination of impact factor for steel railway bridges considerring simultaneous effects of vehicle speed and axle distance to span length ratio. *Engineering structures, 32*. 1369-1376. Doi :10.1016/j.engstruct.2010.01.015.

Henchi, K. (1995). *Analyse dynamique des ponts par éléments finis sous la sollicitation des véhicules mobiles*. [Université de Compiègne, Compiègne, France], 243 pages.

Henchi, K. et Fafard, M. (1997). Dynamic behaviour of multi-span beams under moving loads. *Journal of Sound and vibration 199(1).* 33-50.

Hozhabrossadati, S. M., Sani, A. A., Mehri, B. et Mofid, M. (2015). Green's function for uniform Euler-Bernoulli beams at resonant condition : Introduction of Fredholm Alternative Theorem. *Applied Mathematcal Modelling 39.* 3366-3379.

Humar, J. L. et Kashif, A. H. (1995). Dynamic response analysis of slab-type bridges. *Journal of structural engineering.* 48-62.

Hwang, E.S. et Nowak, A.S. (1991). Simulation of dynamic load for bridges. *Journal of Structural Engineering, Vol. 117, No 5,* Ann Arbor. 1413-1434.

- *I*–

Inglis, C.E.A. (1934). *Mathematical Treatise on Railway Bridges.* [University Press, Cambridge].

- *J*–

Jaeger, L.G. et Baidar, B. (1985). *Bridge analysis simplified*. [Library of congress cataloging in publication Data ,II Title.TG300.B34 Printed in the United States of America].

- *K*–

Khadri, Y. (2009). *Comportement dynamique des ponts sous le passage d'un trafic*. [Thèse de doctorat, Université Badji Mokhtar, Annaba].

Kryloff, A.N. (1905). Uber die erzwungenen Schwingungen von gleichformigen elastischen Staben. *Mathematische Annalen, 6.* 211-234.

Kukla, S. et Posiadala, B. (1994). Free vibration of beams with elastically mounted masses. *Journal of sound and vibration. Vol. 175(4)*. 557–564.

Kukla, S. et Zamojska, I. (2007). Frequency analysis of axially loaded stepped beams by Green's function method. *Journal of sound and vibration 300*. 1034-1041.

- *L*–

Lassoued, R. (2007). *Modélisation analytique des structures unidimensionnelles et bidimensionnelles sous charges mobiles*. [Thèse de doctorat, Université de Marne la vallée].

Law, S. S. et Zhu, X. Q. (2004). Dynamic behavior of damaged concrete bridge structures under moving vehicular loads. *Engineering Structures. 26.* 1279–1293.

Law, S. S. et Zhu, X. Q. (2005). Bridge dynamic responses due to road surface roughness and braking of vehicle. *Journal of Sound and Vibration, 282.* 805–830.

Lee, H. P. (1996). Dynamic response of a beam with a moving mass. *Journal of sound and vibration, 191.* 289-294.

Lee, H. P. (1995). On the separation of a mass travelling on a beam with axial forces. *Mechanics research communications, Pergamon. Vol. 22, No. 4*. 371-376.

Li, X.Y., Zhao, X., Li, Y.H. (2014). Green's functions of the forced vibration of Timoshenko beams with damping effect. *Journal of sound and vibration, Vol. 333.* 1781–1795.

Lueschen, G. G. G. et Bergman, L. A. (1996). Green's functions for uniform Timoshenko beams. *Journal of sound and vibration 194(1)*. 93-102.

- M-

Martinez-Castro, A. E., Museros, P. et Castillo-Linares, A. (2006). Semi-analytic solution in the time domain for non-uniform multi-span Bernoulli–Euler beams traversed by moving loads. *Journal of Sound and Vibration 294*. 278–297.

Mehri, B., Davar, A. et Rahmani, O. (2009). Dynamic Green Function Solution of Beams under a moving loads with different boundary conditions. *Transaction B : Mechanical Engineering vol. 16. No. 3Sharif University of technology*. 273-279.

Messai, O. et Guerda, B. (2013). *Modélisation et étude du comportement dynamique du tablier de pont.* [Mémoire de de master, Université de Constantine].

Michaltos, G. T., Sopianopoulos, D. et Kounadis, A.N. (1996). The effect of a moving mass and other parameters on the dynamic response of a simply supported beam. *Journal of sound and vibration, Vol. 191*. 357-362.

Michaltos, G. T. (2002). Dynamic behaviour of a single-span beam Subjected to loads moving with variable speeds. *Journal of Sound and Vibration 258(2).* 359–372. doi:10.1006/jsvi.5141.

Molina-Villegas, J. C. et Ortega, J. E. B. (2023). Closed-form solution of Euler–Bernoulli frames in the frequency domain. *Engineering Analysis with Boundary Elements 155 (2023)*. 682–695. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2023.06.027.

Museros, P., Moliner, E. et Martinez-Rodrigo, M.D. (2013). Free vibrations of simply-supported beam bridges under moving loads: Maximum resonance, cancellation and resonant vertical acceleration. *Journal of Sound and Vibration*, *Vol. 332*. 326-345.

- O-

Obrien, E., Li, Y. et Gonzalez, A. (2006). Bridge roughness index as an indicator of bridge dynamic amplification. *Computers and Structures 84*. 759–769.

Ogunyebi, S. N., Oyedele, A. A., Obayomi A. A. (2023). Dynamic Motions of Beam-type Structural Element Subjected to a Harmonic Magnitude Partially Distributed Load at Uniform Velocity. *International Journal of Scientific and Research Publications, Volume 13, Issue 3.*

Ouchenane, M. et all. (2011). Vibration of bridges under the passage of vehicles simulated as moving loads. *Advanced Materials Research*, *Trans Tech Publications, Switzerland*, Vol. 324. 396-399. http://doi:10.4028/www.scientific.net/AMR.324.396.

Ouchenane, M. (2018). Study of the Vibratory Behavior of the Bridge under the Passage of Mobile Loads Convoys: Comparative Study between Uni-dimensional and Three-dimensional Modeling. *Civil Engineering Journal Vol. 4, No. 5.*

Ouchenane, M. et Lassoued R. (2022). Dynamic Green Function Solution of Beams under a moving loads with elastical supports. *Aceh International journal of science and technologie.*

- P–

Paganelli, A. (2014). *Dynamic Response of Structural Elements Undergoing Moving Loads and Thermal Strains Using Finite Elements*. [Thèse de master, University of Minnesota].

- R–

Rahimzadeh, R. F. F. (2008). Dynamic behavior and modal control of Euler-Bernouli beams under moving mass. *Journal of applied mathematics. Volume 1 number 1.* 293-304.

Rezaiguia, A. (2000). *Comportement dynamique d'un pont de chemin de fer lors du passage d'un convoi.* [Thèse de Magister, Université Mentouri Constantine].

Rockey Roy E. L. (1979). *Introduction à la méthode des éléments finis*. [Traduit de l'anglais par Claude Gomes. Paris].

- S–

Savin, E. 2001. Dynamic amplification factor and response spectrum for the evaluation of vibrations of beams under successive moving loads. *Journal of sound and vibration, 248(2)*. 267-288. Doi :10.1006. /jsvi.2001.3787.

Serdar, H. (2005). *Vibration analysis of systems Subjected to moving loads by using The finite element method.* [Thèse de master, Mechanical Engineering, Dokuzey lül university Graduate school of natural and applied Sciences, IZMIR].

Sheng, G.G. et Wang, X. (2017). The geometrically non linear responses of simply supported beams under moving loads. *Applied mathematical modelling*. 183-195. Doi :10.1016/j.apm.2017.03.064.

Simsek, M. et Kocaturk, T. (2009). Nonlinear dynamic analysis of an eccentrically prestressed damped beam under a concentrated moving harmonic load, ScienceDirect. *Journal of sound and vibration, 320.* 235-253.

Stakgold, I. (1967). *Boundary value Problems of Mathematical Phisics*. [Macmillan, London].

Sudheesh Kumar, C.P., Sujatha, C. et Shankar, K. (1). (2015). Vibration of simply supported beams under a single moving load: a detailed study of cancellation phenomenon. *International journal of machanical science.* DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2015.05.001.

Sudheesh Kumar, C.P., Sujatha, C. et Shankar, K. (2). (2015). Vibration of simply supported beams under a single moving load: a detailed study of cancellation phenomenon. *International journal of machanical science.* DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2015.05.001.

- T–

Tan, G., Kong, Q., Wu, C., Wang, S. et Ma, G. (2019). Analysis method of dynamic response in the whole process of the vehicle bump test of simply supported bridge. *Advances in Mechanical Engineering 2019, Vol. 11(4) 1–14.* DOI: 10.1177/1687814019843758.

Thomas, M. et Laville, F. (2007). Simulation des vibrations mécaniques par matlab, Simulink et Ansys, La méthode des élements finis appliquée aux barres et aux poutres. [Marc Thomas, Frédéric Laville Presses de l'Université du Québec].

- W–

Wang, Y. M. et Ko M. Y. (2014). The interaction dynamics of a vehicle traveling along a simply supported beam under variable velocity condition. *Acta Mech 225*. 3601–3616. DOI 10.1007/s00707-014-1163-8, springer.

- X–

Xu, M. et Cheng, D. (1994). A new approach to solving a type of vibration problem. *Journal of sound and vibration. Vol. 177(4)*. 565–571.

- Y–

Yang, Y. B., Liao, S. S. et Lin, B. H. (1995). Impact formulas for vehicles moving over simple and continuous beam. *Journal of structural engineering. Vol. 121. No. 11.*

Yang, Y. B. et Lin, C. W. (2004). Vehicle-bridge interaction dynamics and potential applications. *Journal of sound and vibration.* Doi :10.1016/j.jsv.2004.06.032.

Yau, J. D., Wu, Y.S. et Yang Y.B. (2001). Impact response of bridges with elastic Bearings to moving loads. *Journal of sound and vibration. Vol. 248(1)*. pp. 9-30.

Yau J. D. et Yang Y. B. (2005). Vertical accelerations of simple beams due to successive loads traveling at resonant speeds. Journal of sound and vibration, Elseiver, 289(1), 210-228.

- Z–

Zhu, D. Y., Zhang, Y. H. et Ouyang, H. (2015). A linear complementarity method for dynamic analysis of bridges under moving vehicles considering separation and surface roughness. *Computers and Structures, 154.* 135–144. http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2015.03.015.

ANNEXES

ANNEXE 1 : Développements d'intégrales et simplification trigonométriques

A. poutres sollicitées par une force constante mobile

$$y_j(t)=\frac{1}{\omega_j}\int_0^t P_j(\tau).\sin\left(\omega_j(t-\tau)\right)d\tau+\left(y_j(0)\cos(\omega_j t)+\frac{\dot{y}(0)}{\omega_{jd}}\sin(\omega_j t)\right)$$

$$y_j(t)=\frac{1}{\omega_j}\int_0^t P_j(\tau).\sin\left(\omega_j(t-\tau)\right)d\tau$$

$$=\frac{1}{\omega_j}\int_0^t \phi_j(\bar{x}).F.\sin\left(\omega_j(t-\tau)\right)d\tau$$

$$=\frac{1}{\omega_j}\int_0^t F\left(\sqrt{\frac{2}{m_l L}}.\sin\frac{j\pi v}{L}\tau\right).\sin\left(\omega_j(t-\tau)\right)d\tau$$

$$=\frac{F}{\omega_j}\sqrt{\frac{2}{m_l L}}\int_0^t \sin\left(\frac{j\pi v}{L}\tau\right).\sin\left(\omega_j(t-\tau)\right)d\tau$$

Nous avons la transformation géométrique suivante :

$$\sin\alpha.\sin\beta=\frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right\}$$

$$y_j(t)=\frac{F}{2\omega_j}\sqrt{\frac{2}{m_l L}}\int_0^t\left[\cos\left(\frac{j\pi v}{L}\tau-\omega_j(t-\tau)\right)-\cos\left(\frac{j\pi v}{L}\tau+\omega_j(t-\tau)\right)\right]d\tau$$

$$=\frac{F}{2\omega_j}\sqrt{\frac{2}{m_l L}}\int_0^t\left[\cos\left(\left(\frac{j\pi v}{L}+\omega_j\right)\tau-\omega_j\tau\right)-\cos\left(\left(\frac{j\pi v}{L}-\omega_j\right)\tau+\omega_j\tau\right)\right]d\tau$$

$$=\frac{F}{2\omega_j}\sqrt{\frac{2}{m_l L}}\left[\frac{1}{\frac{j\pi v}{L}+\omega_j}\sin\left(\left(\frac{j\pi v}{L}+\omega_j\right)\tau-\omega_j t\right)-\frac{1}{\frac{j\pi v}{L}-\omega_j}\sin\left(\left(\frac{j\pi v}{L}-\omega_j\right)\tau+\omega_j t\right)\right]_0^t$$

$$=\frac{F}{2\omega_j}\sqrt{\frac{2}{m_l L}}\left[\frac{1}{\frac{j\pi v}{L}+\omega_j}\left(\sin\left(\frac{j\pi v}{L}t\right)-\sin\left(-\omega_j t\right)\right)-\frac{1}{\frac{j\pi v}{L}-\omega_j}\left(\sin\left(\frac{j\pi v}{L}t\right)-\sin\left(\omega_j t\right)\right)\right]$$

Nous avons : $\sin\omega_j t=-\sin\left(-\omega_j t\right)$

$$y_j(t)=\frac{F}{2\omega_j}\sqrt{\frac{2}{m_l L}}\left[\frac{1}{\frac{j\pi v}{L}+\omega_j}\left(\sin\left(\frac{j\pi v}{L}t\right)+\sin\left(\omega_j t\right)\right)-\frac{1}{\frac{j\pi v}{L}-\omega_j}\left(\sin\left(\frac{j\pi v}{L}t\right)-\sin\left(\omega_j t\right)\right)\right]$$

$$=\frac{F}{2\omega_j}\sqrt{\frac{2}{m_l L}}\left[\left(\frac{1}{\frac{j\pi v}{L}+\omega_j}-\frac{1}{\frac{j\pi v}{L}-\omega_j}\right)\sin\left(\frac{j\pi v}{L}t\right)+\left(\frac{1}{\frac{j\pi v}{L}+\omega_j}+\frac{1}{\frac{j\pi v}{L}-\omega_j}\right)\sin\left(\omega_j t\right)\right]$$

$$=\frac{F}{2\omega_j}\sqrt{\frac{2}{m_l L}}\left[\left(\frac{\frac{j\pi v}{L}-\omega_j}{\left(\frac{j\pi v}{L}\right)^2-\omega_j^2}-\frac{\frac{j\pi v}{L}+\omega_j}{\left(\frac{j\pi v}{L}\right)^2-\omega_j^2}\right)\sin\left(\frac{j\pi v}{L}t\right)+\left(\frac{\frac{j\pi v}{L}-\omega_j}{\left(\frac{j\pi v}{L}\right)^2-\omega_j^2}+\frac{\frac{j\pi v}{L}+\omega_j}{\left(\frac{j\pi v}{L}\right)^2-\omega_j^2}\right)\sin\left(\omega_j t\right)\right]$$

$$=\frac{F}{\omega_j}\sqrt{\frac{2}{m_l L}}\left(\frac{1}{\omega_j^2-\left(\frac{j\pi v}{L}\right)^2}\right)\omega_j\left(\sin\left(\frac{j\pi v}{L}t\right)-\left(\frac{\frac{j\pi v}{L}}{\omega_j}\right)\sin(\omega_j t)\right)$$

$$=F\sqrt{\frac{2}{m_l L}}\left(\frac{1}{\omega_j^2-\left(\frac{j\pi v}{L}\right)^2}\right)\left(\sin\left(\frac{j\pi v}{L}t\right)-\left(\frac{\frac{j\pi v}{L}}{\omega_j}\right)\sin(\omega_j t)\right)$$

$$y_j(t)=\sqrt{\frac{2}{m_l L}}\left(\frac{F}{\omega_j^2-\Omega_j^2}\right)\left(\sin(\Omega_j t)-\left(\frac{\Omega_j}{\omega_j}\right)\sin(\omega_j t)\right) \qquad \text{avec : } \Omega_j=\frac{j\pi v}{L}$$

Et :

$$w_j(t)=\phi_j(t).y_j(t)$$

$$w_j(t)=\left(\sqrt{\frac{2}{m_l L}}\sin\frac{j\pi x}{L}\right)\left[\sqrt{\frac{2}{m_l L}}\left(\frac{F}{\omega_j^2-\Omega_j^2}\right)\left(\sin(\Omega_j t)-\left(\frac{\Omega_j}{\omega_j}\right)\sin(\omega_j t)\right)\right]$$

$$w_j(t)=\frac{2F}{m_l L}\frac{1}{(\omega_j^2-\Omega_j^2)}\left(\sin(\Omega_j t)-\left(\frac{\Omega_j}{\omega_j}\right)\sin(\omega_j t)\right)\sin\frac{j\pi x}{L} \quad 0\le t\le\frac{L}{v}$$

B. poutres sollicitées par une force harmonique (la force P(t) est Harmonique)

$$F(t)=F\sin(\Omega_f t) \quad \Rightarrow P_j(t)=F(t).\phi_j(\bar{x}) \text{ avec : } \bar{x}=vt$$

$$P_j(t)=F\sin(\Omega_f t).\sqrt{\frac{2}{m_l L}}\sin\Omega_j t \quad (2.42)$$

Nous avons la transformation géométrique suivante :

$$\sin a.\sin b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$$

$$P_j(t)=\frac{F}{2}\sqrt{\frac{2}{m_l L}}[\cos(\Omega_f-\Omega_j)t-\cos(\Omega_f+\Omega_j)t] \quad (2.43)$$

Pour cela nous avons :

$$y_j(t)=\frac{1}{\omega_j}\int_0^t P_j(\tau).\sin(\omega_j(t-\tau))d\tau$$

$$=\frac{1}{\omega_j}\int_0^t\frac{F}{2}\sqrt{\frac{2}{m_l L}}[\cos(\Omega_f-\Omega_j)\tau-\cos(\Omega_f+\Omega_j)\tau].\sin(\omega_j(t-\tau))d\tau$$

$$=\frac{F}{2\omega_j}\sqrt{\frac{2}{m_l L}}\int_0^t[\cos(\Omega_f-\Omega_j)\tau.\sin(\omega_j(t-\tau))-\cos(\Omega_f+\Omega_j)\tau.\sin(\omega_j(t-\tau))]d\tau$$

$$=\frac{F}{2\omega_j}\sqrt{\frac{2}{m_l L}}\int_0^t[\cos(\Omega_f-\Omega_j)\tau.\sin(\omega_j(t-\tau))-\cos(\Omega_f+\Omega_j)\tau.\sin(\omega_j(t-\tau))]d\tau$$

Nous avons la transformation géométrique suivante :

$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

*Nous mettant :

$$I = \int_0^t \cos(\Omega_f - \Omega_j)\tau.\sin(\omega_j(t-\tau))d\tau$$

$$= \int_0^t \frac{1}{2}\left[\sin((\Omega_f - \Omega_j)\tau + \omega_j(t-\tau)) + \sin(\omega_j(t-\tau) - (\Omega_f - \Omega_j)\tau)\right]d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \left[\sin((\Omega_f - (\Omega_j + \omega_j))\tau + \omega_j t) - \sin((\Omega_f - (\Omega_j - \omega_j))\tau - \omega_j t)\right]d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{(\Omega_f - (\Omega_j + \omega_j))}(\cos(\Omega_f - \Omega_j)t - \cos(\omega_j t)) + \frac{1}{(\Omega_f - (\Omega_j - \omega_j))}(\cos(\Omega_f - \Omega_j)t - \cos(-\omega_j t))\right]$$

Nous avons : $\cos(-\omega_j) = \cos(\omega_j)$

$$I = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{(\Omega_f - (\Omega_j + \omega_j))}(\cos(\Omega_f - \Omega_j)t - \cos(\omega_j t)) + \frac{1}{(\Omega_f - (\Omega_j - \omega_j))}(\cos(\Omega_f - \Omega_j)t - \cos(\omega_j t))\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{(\Omega_f - \Omega_j) + \omega_j}{(\Omega_f - \Omega_j)^2 - \omega_j^2}(\cos(\Omega_f - \Omega_j)t - \cos(\omega_j t)) + \frac{(\Omega_f - \Omega_j) - \omega_j}{(\Omega_f - \Omega_j)^2 - \omega_j^2}(\cos(\Omega_f - \Omega_j)t - \cos(\omega_j t))\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{-(\Omega_f - \Omega_j) - \omega_j + (\Omega_f - \Omega_j) - \omega_j}{(\Omega_f - \Omega_j)^2 - \omega_j^2}\right)(\cos(\Omega_f - \Omega_j)t - \cos(\omega_j t))\right]$$

$$= \left(\frac{-\omega_j}{(\Omega_f - \Omega_j)^2 - \omega_j^2}\right)(\cos(\Omega_f - \Omega_j)t - \cos(\omega_j t))$$

*et aussi :

$$II = \int_0^t \cos(\Omega_f + \Omega_j)\tau.\sin(\omega_j(t-\tau))d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \left[\sin((\Omega_f + \Omega_j)\tau + \omega_j(t-\tau)) + \sin(\omega_j(t-\tau) - (\Omega_f + \Omega_j)\tau)\right]d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{(\Omega_f + \Omega_j) - \omega_j}\cos((\Omega_f + \Omega_j - \omega_j)\tau + \omega_j t) + \frac{1}{(\Omega_f + \Omega_j) + \omega_j}\cos(\omega_j t - (\Omega_f + \Omega_j + \omega_j)\tau)\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{(\Omega_f + \Omega_j) - \omega_j}(\cos(\Omega_f + \Omega_j)t - \cos(\omega_j t)) + \frac{1}{(\Omega_f + \Omega_j) + \omega_j}(\cos(-(\Omega_f + \Omega_j))t - \cos(\omega_j t))\right]$$

Nous avons : $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{(\Omega_f + \Omega_j) - \omega_j}(\cos(\Omega_f + \Omega_j)t - \cos(\omega_j t)) + \frac{1}{(\Omega_f + \Omega_j) + \omega_j}(\cos(\Omega_f + \Omega_j)t - \cos(\omega_j t))\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{-\left(\left(\Omega_f+\Omega_j\right)+\omega_j\right)+\left(\left(\Omega_f+\Omega_j\right)-\omega_j\right)}{\left(\Omega_f+\Omega_j\right)^2-\omega_j^2}\right)\left(\cos\left(\Omega_f+\Omega_j\right)t-\cos\left(\omega_j t\right)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-2\omega_j}{\left(\Omega_f+\Omega_j\right)^2-\omega_j^2}\right)\left(\cos\left(\Omega_f+\Omega_j\right)t-\cos\left(\omega_j t\right)\right)$$

$$=\left(\frac{-\omega_j}{\left(\Omega_f+\Omega_j\right)^2-\omega_j^2}\right)\left(\cos\left(\Omega_f+\Omega_j\right)t-\cos\left(\omega_j t\right)\right)$$

Et finalement :

$$y_j(t)=\frac{F}{2\omega_j}\sqrt{\frac{2}{m_l L}}\left(I-II\right)$$

$$=\frac{F}{2\omega_j}\sqrt{\frac{2}{m_l L}}\left[\left(\frac{-\omega_j}{\left(\Omega_f-\Omega_j\right)^2-\omega_j^2}\right)\left(\cos\left(\Omega_f-\Omega_j\right)t-\cos\left(\omega_j t\right)\right)-\left(\frac{-\omega_j}{\left(\Omega_f+\Omega_j\right)^2-\omega_j^2}\right)\left(\cos\left(\Omega_f+\Omega_j\right)t-\cos\left(\omega_j t\right)\right)\right]$$

$$y_j(t)=\frac{F}{2}\sqrt{\frac{2}{m_l L}}\left[\frac{\cos\left(\Omega_f-\Omega_j\right)t-\cos\left(\omega_j t\right)}{\omega_j^2-\left(\Omega_f-\Omega_j\right)^2}-\frac{\cos\left(\Omega_f+\Omega_j\right)t-\cos\left(\omega_j t\right)}{\omega_j^2-\left(\Omega_f+\Omega_j\right)^2}\right]$$

Et :

$$w_j(t)=\phi_j(t).y_j(t)$$

$$w_j(t)=\left(\sqrt{\frac{2}{m_l L}}\sin\frac{j\pi x}{L}\right)\frac{F}{2}\sqrt{\frac{2}{m_l L}}\left[\frac{\cos\left(\Omega_f-\Omega_j\right)t-\cos\left(\omega_j t\right)}{\omega_j^2-\left(\Omega_f-\Omega_j\right)^2}-\frac{\cos\left(\Omega_f+\Omega_j\right)t-\cos\left(\omega_j t\right)}{\omega_j^2-\left(\Omega_f+\Omega_j\right)^2}\right]$$

$$w_j(t)=\frac{F}{m_l L}\left(\sin\frac{j\pi x}{L}\right)\left[\frac{\cos\left(\Omega_f-\Omega_j\right)t-\cos\left(\omega_j t\right)}{\omega_j^2-\left(\Omega_f-\Omega_j\right)^2}-\frac{\cos\left(\Omega_f+\Omega_j\right)t-\cos\left(\omega_j t\right)}{\omega_j^2-\left(\Omega_f+\Omega_j\right)^2}\right]$$

ANNEXE 2 : Algorithmes de résolution

A- Algorithme de résolution pour le modèle 1 du chapitre IV (figure IV-1)

```
> restart :
assume(u>0):assume(x>0):assume(ktg>0):assume(ktd>0):assume(klg>0):assume(kld>0):
assume(s>0): assume(L>0):assume (EI>0);assume (kt>0);assume (kl>0);
> Gg(x,u):=C1*cos(s*x)+C2*sin(s*x)+C3*cosh(s*x)+C4*sinh(s*x);
> Gg1(x,u):=diff(Gg(x,u),x);
> Gg2(x,u):=diff(Gg1(x,u),x);
> Gg3(x,u):=diff(Gg2(x,u),x);
> Gd(x,u):=C5*cos(s*x)+C6*sin(s*x)+C7*cosh(s*x)+C8*sinh(s*x);
> Gd1(x,u):=diff(Gd(x,u),x);
> Gd2(x,u):=diff(Gd1(x,u),x);
> Gd3(x,u):=diff(Gd2(x,u),x);
> E1:=simplify(subs(x = 0,(Gd2(x,u))));
> E2:=simplify(subs(x=L,(Gg2(x,u))));
> E3:=simplify(subs(x=0,(Gd3(x,u)-k*Gd(x,u))));
> E4:=simplify(subs(x=L,(Gg3(x,u)-k*Gg(x,u))));
> E5:= simplify(subs(x=u,(Gg(x,u)-Gd(x,u))));
> E6:=simplify(subs(x=u,(Gg1(x,u)-Gd1(x,u))));
> E7:=simplify(subs(x=u,(Gg2(x,u)-Gd2(x,u))));
> E8:=simplify(subs(x=u,(Gd3(x,u)-Gg3(x,u))));
>mat:=matrix(8,8,[-s^2,0,s^2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-s^2*cos(s*L),-
s^2*sin(s*L),s^2*cosh(s*L),s^2*sinh(s*L),-k,-s^3,-k,s^3,0,0,0,0,0,0,0,0,s^3*sin(s*L)-
k*cos(s*L),-s^3*cos(s*L)-k*sin(s*L),s^3*sinh(s*L)-k*cosh(s*L),s^3*cosh(s*L)-
k*sinh(s*L),cos(s*u),sin(s*u),cosh(s*u),sinh(s*u),-cos(s*u),-sin(s*u),-cosh(s*u),-sinh(s*u),-
s*sin(s*u),s*cos(s*u),s*sinh(s*u),s*cosh(s*u),s*sin(s*u),-s*cos(s*u),-s*sinh(s*u),-
s*cosh(s*u),-s^2*cos(s*u),-
s^2*sin(s*u),s^2*cosh(s*u),s^2*sinh(s*u),s^2*cos(s*u),s^2*sin(s*u),-s^2*cosh(s*u),-
s^2*sinh(s*u),-s^3*sin(s*u),s^3*cos(s*u),-s^3*sinh(s*u),-s^3*cosh(s*u),s^3*sin(s*u),-
s^3*cos(s*u),s^3*sinh(s*u),s^3*cosh(s*u)]);
> vecf:=matrix(8,1,[0,0,0,0,0,0,0,1/EI]);
>invermat :=evalm( ` &*`(1/mat)) ;
> C := evalm(` &*`(invermat,vecf))
```

B- Algorithme de résolution pour le modèle 2 du chapitre V (figure V-1)

```
> restart :
assume(u>0):assume(x>0):assume(ktg>0):assume(ktd>0):assume(klg>0):assume(kld>0):
assume(s>0): assume(L>0):assume (EI>0);assume (kt>0);assume (kl>0);
```

```
> Gg(x,u):=C1*cos(s*x)+C2*sin(s*x)+C3*cosh(s*x)+C4*sinh(s*x);
> Gg1(x,u):=diff(Gg(x,u),x);
> Gg2(x,u):=diff(Gg1(x,u),x);
> Gg3(x,u):=diff(Gg2(x,u),x);
> Gd(x,u):=C5*cos(s*x)+C6*sin(s*x)+C7*cosh(s*x)+C8*sinh(s*x);
> Gd1(x,u):=diff(Gd(x,u),x);
> Gd2(x,u):=diff(Gd1(x,u),x);
> Gd3(x,u):=diff(Gd2(x,u),x);
> E1:=simplify(subs(x = 0,(Gd2(x,u)-ktg*Gd1(x,u))));
> E2:=simplify(subs(x=L,(Gg2(x,u)-ktd*Gg1(x,u))));
> E3:=simplify(subs(x=0,(Gd3(x,u)-klg*Gd(x,u))));
> E4:=simplify(subs(x=L,(Gg3(x,u)-kld*Gg(x,u))));
> E5:= simplify(subs(x=u,(Gg(x,u)-Gd(x,u))));
> E6:=simplify(subs(x=u,(Gg1(x,u)-Gd1(x,u))));
> E7:=simplify(subs(x=u,(Gg2(x,u)-Gd2(x,u))));
> E8:=simplify(subs(x=u,(Gd3(x,u)-Gg3(x,u))));
>mat:=matrix(8,8,[0,0,0,0,-s^2,-s*ktg,s^2,-s*ktg,-(cos(s*L))*s^2+(sin(s*L))*s*ktd,-
(sin(s*L))*s^2-(cos(s*L))*s*ktd,(cosh(s*L))*s^2-(sinh(s*L))*s*ktd,(sinh(s*L))*s^2-
(cosh(s*L))*s*ktd,0,0,0,0,0,0,0,0,-klg,-s^3,-klg,s^3,(sin(s*L))*s^3-(cos(s*L))*kld,-
(cos(s*L))*s^3-(sin(s*L))*kld,(sinh(s*L))*s^3-(cosh(s*L))*kld,(cosh(s*L))*s^3-
(sinh(s*L))*kld,0,0,0,0,cos(s*u),sin(s*u),cosh(s*u),sinh(s*u),-cos(s*u),-sin(s*u),-cosh(s*u),-
sinh(s*u),-(sin(s*u))*s,(cos(s*u))*s,(sinh(s*u))*s,(cosh(s*u))*s,(sin(s*u))*s,-(cos(s*u))*s,-
(sinh(s*u))*s,-(cosh(s*u))*s,-(cos(s*u))*s^2,-
(sin(s*u))*s^2,(cosh(s*u))*s^2,(sinh(s*u))*s^2,(cos(s*u))*s^2,(sin(s*u))*s^2,-
(cosh(s*u))*s^2,-(sinh(s*u))*s^2,-(sin(s*u))*s^3,(cos(s*u))*s^3,-(sinh(s*u))*s^3,-
(cosh(s*u))*s^3,(sin(s*u))*s^3,-(cos(s*u))*s^3,(sinh(s*u))*s^3,(cosh(s*u))*s^3]);
> vecf:=matrix(8,1,[0,0,0,0,0,0,0,1/EI]);
>invermat :=evalm( `&*`(1/mat)) ;
>C := evalm(`&*`(invermat,vecf)) ;
```

ANNEXE 3 : Transformations trigonométriques utilisées

Les transformations trigonométriques utilisées sont :

$$\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B = \cos(A - B)$$

$$\cos A \cdot \sin B - \sin A \cdot \cos B = -\sin(A - B)$$

$$\cos A \cdot \sin B + \sin A \cdot \cos B = \sin(A + B)$$

$$\cosh A \cdot \cosh B - \sinh A \cdot \sinh B = \cosh(A - B)$$

$$\cosh A \cdot \sinh B - \sinh A \cdot \cosh B = -\sinh(A - B)$$

$$\cosh A \cdot \sinh B + \sinh A \cdot \cosh B = \sinh(A + B)$$

$$\cosh A \cdot \cosh B + \sinh A \cdot \sinh B = \cosh(A + B)$$