



N° d'ordre : 158 /OS/ 19
N° de Série : 05 / GM / 19

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Construction Mécanique

Comportement mécanique et vibro-acoustique des matériaux cellulaires

Par

Boukhatem Mourad

Soutenue le : 13 /10 /2019

Devant le jury :

Président :

Mr BOUCHOUCHA Ali

Prof. Université de Frères Mentouri Constantine 1

Rapporteur :

Mr BENMANSOUR Toufik

Prof. Université de Frères Mentouri Constantine 1

Co-Rapporteur :

Mr VALLE Valéry

Prof. Université de Poitiers

Examineurs :

Mr MERABET Abderrezak

M.C.A. Université de Frères Mentouri Constantine 1

Mr BEY Kamel

Prof. Université de Badji Mokhtar Annaba

Mr LAOUAR Lakhdar

Prof. Université de Badji Mokhtar Annaba

ABSTRACT

Cellular materials constitute a privileged class of composite materials due to the specificity that their physical properties depend both on their constituent material and on the spatial arrangement of this material within a millimetric scale architecture such that metal foams and honeycombs. Auxetic materials, more particularly, have in addition a negative Poisson's ratio. All these properties vary a lot depending on the architecture of the considered cellular materials, i.e. the morphology. The unit cell forming the network has a symmetry with respect to the axes x_1 and x_2 ; each member consists of two small horizontal links of length h , a large link of length H and a link of length ℓ , forming an angle θ with the direction of the straight links. The numerical simulations carried out showed a strong dependence between the geometrical parameters of the cell and the mechanical properties of the cellular solid. Dependence confirmed by experimental results. The vibro-acoustic study of the structure made it possible to determine the absorption and transmission loss coefficients by the structure of the cellular material. The periodic character, and in both directions x_1 and x_2 , made it possible to simplify the problem to one dimension and by using the conditions of Floquet-Bloch the problem was reduced to the study of a single cell-unit. We have also explored the influence of the angle of incidence of the propagation wave on the reflection, absorption and transmission coefficients and by the same has shown the criticality of the angle $\theta = 50^\circ$, angle that allows zero transmission, maximum reflection and absorption.

Key words: cell structure, image correlation, marker tracking technique, homogenization, periodic materials, Floquet-Bloch condition, transfer matrix, pass band, stop band.

RÉSUMÉ

Les matériaux cellulaires constituent une classe privilégiée des matériaux composites de par la spécificité que leurs propriétés physiques dépendent à la fois de leur matériau constitutif ainsi que de l'agencement spatial de ce matériau au sein d'une architecture à l'échelle millimétrique tel que les mousses métalliques et les nids-d'abeilles. Les matériaux auxétiques, plus particulièrement, ont en plus un coefficient de Poisson négatif. Toutes ces propriétés varient beaucoup en fonction de l'architecture des matériaux cellulaires considérés, c'est à dire de la morphologie. La cellule unitaire formant le réseau présente une symétrie par rapport aux axes x_1 et x_2 ; chaque membre est constitué de deux petits liens horizontaux de longueur h , un grand lien de longueur H et d'un lien de longueur ℓ , formant un angle θ avec la direction des liens droites. Les simulations numériques menées ont montré une forte dépendance entre les paramètres géométriques de la cellule et les propriétés mécaniques du solide cellulaire. Dépendance confirmée par les résultats expérimentaux. L'étude vibro-acoustique de la structure a permis de déterminer les coefficients d'absorption et de perte de transmission par la structure du matériau cellulaire. Le caractère périodique, et dans les deux directions x_1 et x_2 , a permis de simplifier le problème à une seule dimension et en utilisant les conditions de Floquet-Bloch le problème s'est réduit à l'étude d'une seule cellule-unité. Nous avons exploré aussi l'influence de l'angle d'incidence de l'onde de propagation sur les coefficients de réflexion, d'absorption et de transmission et par la même a permis de montrer la criticité de l'angle $\theta = 50^\circ$, angle qui permet une transmission nulle, une réflexion et absorption maximales.

Mots clés : structure cellulaire, corrélation d'images, technique de suivi de marqueur, homogénéisation, matrice de transfert, bande passante, bande d'arrêt.

ملخص

تشكل المواد الخلوية فئة مميزة من المواد المركبة نظرًا لخصوصية أن خواصها الفيزيائية تعتمد على كل من المواد المكونة لها وعلى الترتيب المكاني لهذه المواد داخل بنية مقياس المليمترية مثل الرغاوي المعدنية و شهد العسل. المواد الإكسيتية (Matériaux Auxétiques) ، على الأخص ، لها نسبة بويسون (coefficient de Poisson) سالبة. تختلف كل هذه الخصائص كثيرًا اعتمادًا على بنية المواد الخلوية التي يتم اعتبارها ، أي التشكل. تحتوي خلية الوحدة المكونة للشبكة على تناظر فيما يتعلق بالمحورين x_1 و x_2 ؛ يتكون كل عضو من رابطتين أفقيين صغيرين بطول h ، وصلة كبيرة بطول H ورابط بطول l ، لتشكيل زاوية θ مع اتجاه الروابط المستقيمة. أظهرت المحاكاة العددية المنفذة اعتمادًا قويًا بين المعلمات الهندسية للخلية والخصائص الميكانيكية للمادة الصلبة الخلوية. الأمر الذي يؤكد بأعتماد نتائج التجارب المنفذة. مكنت الدراسة الإهتزازية-الصوتية للهيكل من تحديد معاملات الامتصاص وفقدان الإرسال بواسطة بنية المادة الخلوية. أتاح الطابع الدوري ، وفي كلا الاتجاهين x_1 و x_2 ، تبسيط المشكلة إلى بعد واحد وباستخدام شروط Floquet-Bloch تم تقليل المشكلة إلى دراسة وحدة خلية واحدة. لقد استكشفنا أيضًا تأثير زاوية حدوث موجة الانتشار على معاملات الانعكاس والامتصاص والانتقال ، وبنفس الطريقة أظهرنا خطورة الزاوية 50° ، زاوية تسمح بنقل صفر امتصاص و انعكاس أقصى.

الكلمات المفتاحية: بنية الخلية ، ارتباط الصورة ، تقنية تتبع العلامات ، التجانس ، المواد الدورية ، شرط Floquet-Bloch ، مصفوفة النقل ، شريط المرور ، شريط الإيقاف.

Remerciements

En préambule, je souhaite rendre grâce à Dieu, le clément et miséricordieux de m'avoir donné la force, le courage et la patience de mener à bien ce modeste travail.

Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur Mr BENMANSOUR Toufik, Professeur à l'Université Mentouri-Constantine 1, et son Co-encadreur Mr VALLE Valéry Professeur à l'Université de Poitiers, de m'avoir suivi tout au long de la réalisation de cette thèse. Aussi, je les remercie pour la confiance qu'ils ont placée en moi, pour leur disponibilité permanente, pour leur patience et leurs conseils. Je remercie Mr A. BOUCHOUCHA, Professeur à l'Université Mentouri-Constantine 1, d'avoir accepté de présider le jury.

Je remercie

*Mr. A. MERABET, Professeur à l'Université Mentouri-Constantine 1
Mr. K. BEY, Professeur à l'Université BADJI MOKHTAR-Annaba, et Mr.
L. LAOUAR, Professeur à l'Université BADJI MOKHTAR-Annaba,
d'avoir accepté de faire parti du jury ainsi que pour leur participation à
l'évaluation du présent travail.*

Enfin, mes remerciements vont également à tous ceux et celles qui de près ou de loin m'ont apporté aide et encouragement. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

Mourad

Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail
A mes très chers parents
A ma femme et mes enfants
A mes très chers frères et sœurs
A tous mes professeurs
Et à tous mes amis*

Mourad

Sommaire

ABSTRACT	1
RESUME	2
ملخص	3
Remerciements	4
Dédicace	5
Nomenclature	10
Liste des figures	12
Liste des tableaux	17
Introduction générale	19
Chapitre I : Revue bibliographique sur les matériaux cellulaires	20
1.Introduction	22
2. Structure et comportement mécanique :	22
3. Déformations des matériaux cellulaires :	26
4.Propriétés et applications	27
5. Matériaux Auxétiques, avantages, applications	32
5.1. Coefficient de Poisson :	34
5.2. Différents types de matériaux auxétiques	35
5.2.1 Nid d'abeilles auxétique	35
5.2.1.1. Structures ré-entrantes	35
5.2.1.2. Unités rotatives	35
5.2.1.3. Côtes manquantes	36
5.2.1 .4. Structures chirales	37
5.3. Applications	38
7. Conclusion	39
Chapitre II : Etude Analytique et Numérique des matériaux cellulaires	40
1. Introduction	41
1. Modélisation géométrique :	41
2.1 Caractéristiques géométriques de la cellule à liens ré-entrants:	43
3. Modèle analytique :	49
3.1. Sollicitation en compression dans les directions x_1 et x_2 :	49

3.2 Sollicitation en cisaillement	52
4.Résultats et discussion :	53
4.1. Effet de la variation de l'angle d'inclinaison θ	53
4.1.1 Pour différentes valeurs de $\gamma = t/\ell$	53
4.1.2 Pour différentes valeurs de α	55
4.1.3 Pour différentes valeurs de β	57
4. 2. Effet de la variation de γ	59
4.2.1. Pour différentes valeurs de θ	59
4.2.2. Pour différentes valeurs de β	61
4.2.3. Pour différentes valeurs de α	63
4.3 Effet de la variation de β	65
4.3.1 Différentes valeurs de θ	65
4.3.2 Pour différentes valeurs de α	67
4.3.3 Pour différentes valeurs de γ	69
4.4 Effet de la variation de α	71
4.4.1 Pour différentes valeurs de θ	71
4.4.2 Pour différentes valeurs de β	75
4.4.3 Pour différentes valeurs de γ	79
5. Modélisation numérique :	77
5.1 Homogénéisation	78
5.2. Cas de la cellule à liens ré-entrants	80
5.2.1 Volume élémentaire représentatif (V.E.R)	80
5.2.2 Conditions aux limites et méthodes de calcul par éléments finis	80
5.2.3 Organigramme d'homogénéisation numérique	82
5.2.4 Calcul des modules de Young E_I	83
5.2.5. Calcul des modules de cisaillements G_{ij}	83
5.2.6. Résultats des simulations et validation	84
5.3. Cas de la cellule du Cladode de cactus	88
5.3.1 Cellule irrégulière, Diagramme de Voronoï : définitions et algorithmes	88
5.3.1.1 Diagramme de Voronoï	89
5.3.1.2 Triangulation de Delaunay	90
5.3.2. Nouvelle cellule de Voronoï	91
5.3.3 Cellule modèle	93

5..3.4 Approche numérique	94
6. Conclusion	99
Chapitre III : Caractérisation expérimentale d'un matériau cellulaire	100
1. Introduction	101
2. Caractérisation de la structure alvéolaire	104
2.1. Identification des propriétés de la structure	104
2.2. Technique expérimentale, principe de la méthode du suivi du marqueur	106
3. Interprétation des résultats :	108
3.1 influences des paramètres géométriques sur les propriétés de la structure	116
3.2. Influence de la variation de l'angle θ	118
3.3. Effet du rapport de forme $\alpha = H/\ell$	122
3.4. Effet du petit rapport $\beta = h/\ell$	125
4. Conclusion	129
Chapitre IV : Comportement vibro-acoustique des matériaux cellulaires	131
1. Introduction	132
2. Principes de base de la transmission acoustique	137
2.1. Propagation d'énergie	138
2.2. Atténuation du faisceau d'onde	138
3. Réflexion, réfraction et transmission	138
4. Méthode de la matrice de transfert	140
4.1 Matrice de transfert d'une couche d'air	142
4.2 Matrice de transfert d'une plaque élastique	143
4.3 Matrice de transfert d'un matériau poreux	144
4.4 Matrice de transfert totale	145
4.5 Calcul des paramètres de la structure entière	145
5. Simulation en vibro-acoustique d'un matériau cellulaire	149
5.1 Description du domaine de simulation acoustique	151
5.2 Description de l'élément FLUID220	152
5.3 Description de l'élément SOLID186	152
5.4. Maillage	153
6 Résultats et interprétations	154

6.1. Effet de l'angle de l'incidence	155
7. Conclusion	160
Conclusion et recommandations	153
Références bibliographiques	156

NOMENCLATURE

V.E.R.	Volume élémentaire représentatif [SN^*]
E_C	Connectivité d'arête [SU^*]
θ	Angle d'inclinaison du lien oblique [$^\circ$]
H	Longueur du grand clinquant des cellules [mm]
h	Longueur du petit clinquant des cellules [mm]
ℓ	Longueur du lien oblique des cellules [mm]
t	Épaisseur des cellules [mm]
b	Hauteur des parois des cellules [mm]
$\alpha = H/\ell = 2$	Rapport de l'aspect de la cellule, [SN^*]
$\beta = h/\ell = 1$	Rapport du petit lien, [SU^*]
$\gamma = t/\ell = 0.1$	Rapport de l'épaisseur, [SU^*]
V	nombre de sommets par cellule, [SU^*]
F	nombre de cellules, [SU^*]
\check{L}_1	plus grande dimension de cellule principale [mm]
\check{L}_2	plus petite dimension de cellule principale [mm]
$R = \check{L}_1/\check{L}_2$	rapport d'anisotropie de forme, [SU^*]
Ψ	Porosité de la structure, [SU^*]
ρ^*	Densité du volume total de la structure, [kg/m^3]
ρ_s	Densité du matériau de base, [kg/m^3]
$\rho_r = \rho^*/\rho_s$	Densité relative de la structure, [SU^*]
E_s	Module de Young du matériau de base, [MPa]
E_1, E_2	Modules de Young dans le plan de la structure, [MPa]
ν_{12}	Coefficient de Poisson dans le plan de la structure, [SU^*]
G	Module de cisaillement de la structure, [MPa]
[S]	Matrice de souplesse, [m/N]
[C]	Matrice de rigidité, [N/m]
F_i	force des réactions des nœuds, [N]
σ_1	Contrainte macroscopique suivant x_1 , [MPa]
σ_2	Contrainte macroscopique suivant x_2 , [MPa]
τ	Contrainte macroscopique de cisaillement, [MPa]
δ	Flèche des parois de la cellule, [mm]
ϕ	Rotation des parois de la cellule, [$^\circ$]
U_0	densité d'énergie de déformation élastique, [J/m ³]
U	énergie de déformation interne totale [J]
ε_1	Déformation de la structure suivant x_1 , [SU^*]
ε_2	Déformation de la structure suivant x_2 , [SU^*]
u_s	Flèche due au cisaillement, [mm]
γ_{12}	Déformation de cisaillement, [SU^*]
U_x	Déplacement imposé suivant x_1 , [mm]
U_y	Déplacement imposé suivant x_2 , [mm]
$w(x, y, t)$	Déplacement transversal, [mm]
$\phi(x, y)$	Fonction de forme, [SU^*]
ω_0	Fréquence naturelle, [Hz]
κ	Fréquence spatiale, [cyc / m]
$\eta = \omega/\omega_0$	Rapport de fréquence, [SU^*]
$\mu = qh$	Vecteur d'onde de Bloch, [SU^*]
$\theta = m_2/m_1$	Rapport de masse, [SU^*]

L_S
 W_S

Longueur de la plaque, [mm]
Longueur de la plaque, [mm]

Liste des figures

Figure I-1 : Exemples pour les trois types de solides cellulaires [2] : (a) un arrangement en deux dimensions de cellules prismatiques (nid d'abeilles hexagonal) ; (b) une mousse à cellules ouvertes ; (c) une mousse à cellules fermées.

23

Figure I-2 : Courbes de contrainte-déformation pour matériaux cellulaires : (a) et (b) matériaux cellulaires élastomères, (c) et (d) élastoplastiques et (e) et (f) élastiques fragiles [04]

24

Figure I-3 : Ordre de grandeur de quelques propriétés de matériaux cellulaires (mousse) et denses (BULK) à base de polymères, de métaux ou de céramiques [01].

25

Figure I-4 : Coefficient de conductivité thermique

30

Figure I-5 : Energie absorbée par une mousse fermée lors d'une compression : a) Contrainte-déformation (compression pour une mousse) ; (b) Energie absorbée, par unité de volume, en fonction de la contrainte appliquée.

31

Figure I-6 : a) Matériau conventionnel anti-clastique (en forme de selle), b) matériau auxétique synclastique (en forme de dôme).

32

Figure I-7 : Mécanisme de déformation d'une structure non-auxétique (nid d'abeille).

33

Figure I-8 : Mécanisme de déformation d'une structure auxétique (ré-entrant).

33

Figure I-9 : Définition géométrique d'une structures hexagonale ré-entrant : (a) $\theta = 30^\circ$, structure auxétique (b) Mécanisme ré-entrant

35

Figure I-10 : Géométrie qui crée un mécanisme permettant d'obtenir un coefficient de poisson négatif : Mécanisme d'enroulement.

35

Figure I-11 : Géométrie d'une structure auxétique à cote manquante.

36

Figure I-12 : Structure hexachirale.

36

Figure II-1: Paquets 2D de cellules formant un réseau : a) tessellation secondaire, b) VER, de tessellation secondaire, c) VER, de la tessellation primaire, d) lien ré-entrant parallèle à la direction verticale des cellules, e) lien ré-entrant parallèle à la direction horizontale des cellules

42

Figure II-2 : Tessellation du solide cellulaire

43

Figure II-3 : Modèle de cellule unitaire et ses caractéristiques géométriques : a) Cellule unitaire 2D, b) Cellule unitaire 3D, c) **génération de la structure.**

43

Figure II-4 : Densité relative en fonction du rapport de l'épaisseur γ pour t et ℓ variables

45

Figure II-5 : Densité relative ρ_r fonction du rapport du petit clinquant β .

46

Figure II-6 : Densité relative en fonction du rapport de l'aspect α pour ℓ et H variables.	46
Figure II-7 : Densité relative ρ_r en fonction de l'angle θ	47
Figure II-8: Déformation de la cellule par la flexion des parois cellulaires, donnant une extension ou compression, linéaire élastique, du réseau cellulaire : a) Configuration non déformée avec dimensions du V.E.R., b) Quart symétrique du V.E.R. ; illustration exagérée de la rotation ϕ et de la flèche δ , c) et d) Flexion causée par la sollicitation, dans les directions x_1 et x_2	50
Figure II-9 : Déformation de la cellule par flexion et rotation des parois cellulaires, donnant un cisaillement linéaire élastique du réseau cellulaire : a) V.E.R. non déformé, b) et c) Efforts, moments, déplacements et rotations causés par une sollicitation en cisaillement.	52
Figure II-10 : Effet de la variation de l'angle d'inclinaison θ pour différentes valeurs de γ	54
Figure II-11 : Effet de la variation de l'angle d'inclinaison θ pour différentes valeurs de α	56
Figure II-12 : Effet de la variation de l'angle d'inclinaison θ pour différentes valeurs de β	58
Figure II-13 : Effet de la variation de γ pour différentes valeurs de θ	60
Figure II-14 : Effet de la variation de γ pour différentes valeurs de β	62
Figure II-15 : Effet de la variation de γ pour différentes valeurs de α	64
Figure II-16 : Effet de la variation de β pour différentes valeurs de θ	66
Figure II-17 : Effet de la variation de β pour différentes valeurs de α	68
Figure II-18 : Effet de la variation de β pour différentes valeurs de γ	70
Figure II-19 : Effet de la variation de α pour différentes valeurs de θ	72
Figure II-20 : Effet de la variation de α pour différentes valeurs de β	74
Figure II-21 : Effet de la variation de α pour différentes valeurs de γ	76
Figure II-22 : V.E.R. constitué de 12 cellules	77
Figure II-23 : Eléments choisis pour la simulation : a) Géométrie de l'élément Plane 82, b) Géométrie de l'élément Plane 182.	77
Figure II-24 : Homogénéisation d'un milieu hétérogène	78
Figure II-25 : V.E.R. constitué de 12 cellules	80
Figure II-26 : Conditions aux limites pour une simulation de traction dans le plan (x_1, x_2) : a) selon l'axe x_1 , b) selon l'axe x_2	81
Figure II-27 : Contour des déplacements maximaux à l'issue de la simulation en traction : a) Structure déformée, b) Structure déformée + non- déformée	86
Figure II-28 : Distribution des contraintes lors de la simulation en traction : a) Contraintes de traction σ_{xx} , b) Contrainte de cisaillement τ_{xy} .	87

Figure II-29 Distribution des déformations élastiques : Déformation longitudinales, b) Déformation de cisaillement	87
Figure II-30 : Contour des déplacements maximaux à l'issue de la simulation en cisaillement : a) Structure déformée, b) Structure déformée + non- déformée	88
Figure II-31 : a) Diagramme de voronoï d'un ensemble de point plan, b) Superposition d'un diagramme de Voronoï (en rouge) et de sa triangulation de Delaunay (en noir)	89
Figure II-32 : Principe de perturbation	90
Figure II-33 : a) Diagramme Voronoï utilisé pour construire la cellule Voronoï classique [13], b) triangulation de Delaunay	91
Figure II-34 : Chaque triangle dans une triangulation Delaunay à un cercle circonscrit vide	91
Figure II-35 : a) Coordonnées des coins de la nouvelle cellule irrégulière Voronoï dans le plan xy, b) Diagramme de la nouvelle cellule présentée dans ce travail.	92
Figure II-36 : (a) Cellules obtenues par le diagramme du présent travail, (b) Cellules obtenues par le diagramme de Voronoï classique	93
Figure II-37 : a), triangulation de Delaunay, (b) Diagramme de la nouvelle cellule présentée dans ce travail	94
Figure II-38 : a) Cladode, b) Sommets des cellules hexagonales du cladode, c) Génération de la structure du cladode dans ANSYS	95
Figure II-39 : Génération de la structure ; a) Modèle dans Matlab, b) Zoom sur la zone encadrée, c) Diagramme de la cellule modèle présentée.	95
Figure II-40 : a) Rectangle délimitant le V.E.R, b) V.E.R. sous ANSYS	96
Figure II-41 : Grand axe y et petit axe x de la cellule	98
Figure II-42 : Variation du volume élémentaire en fonction du facteur R	98
Figure II-43 : Variation de la densité relative en fonction du facteur R.	98
Figure II-44 : Variation des modules de Young E_1 et E_2 en fonction du facteur R	105
Figure III-1 : Eprouvettes tachetées, obtenues par découpage LASER, a) modèle d'éprouvette, b) Eprouvette d'essai de traction, c) Eprouvette d'essai de cisaillement	106
Figure III-2 : Mesure et acquisition de donnée : a) Dispositif de mesure et acquisition, b) mesure de champ de déplacement 2D	107
Figure III-3 : Eprouvettes tachetées, éprouvette de cisaillement pour le paramètre $\theta = 60^\circ$	109

Figure III-4 : Courbe Typique Charge–Déplacement pour une structure composée de cellule modèle110	
Figure III-5 : courbes d’essai de traction, a) Courbe de contrainte-déformation (traction) pour une structure élastique fragile, b) Courbe de contrainte-déformation (traction) pour une structure générée par des cellule modèle à lien ré-entrant ($\theta = 45^\circ$, $\ell = h = L/2 = 3 \text{ mm.}$)	111
Figure III-6 : modification dans la géométrie après essai de traction, a) Etat non-déformé (couleur grise) et configurations déformées (couleur noire) sous traction uniaxiale, b) Rotation du lien Internodal, c) liens partagés des deux configurations centers, d) Zoom sur la zone cible (région tachetée), e) cellule horizontale des deux configurations centrées, f) cellule verticale des deux configurations centrées	112
Figure III-7 : Comportement en cisaillement jusqu’à rupture de la structure	113
Figure III-8 : Partie linéaire élastique de la courbe de cisaillement	115
Figure III-9 : Modes de déformation correspondant à chaque régime de comportement en traction: (a) Eprouvette en PMMA non-chargé, (b) Flexion des parois des cellules Durant le chargement en régime linéaire-élastique, (c) entaille d’une paroi faible d’une cellule, (d) Rupture de la cellule	116
Figure III-10 : Modification de la géométrie après un essai de cisaillement, a) Zoom sur la cible (région tachetée), b) Mesure des positions non déformées (couleur grise) et déformée (couleur noire) sous traction uniaxiale	117
Figure III-11 : Variations des modules de Young relatif E^*/E_s et de cisaillement G^*/E_s et G_{cal}/E_s en fonction des angles θ	119
Figure III-12 : Variation du rapport E^*/G^* en fonction de l’angle θ	120
Figure III-13 : Effet de l’angle θ sur le coefficient de Poisson ν_{12}	122
Figure III-14 : Courbes contraintes de traction-déformation longitudinale pour différents angles θ	123
Figure III-15 : Effet du rapport de l’aspect α sur le module de Young relative E^*/E_s , les modules de cisaillement G^*/E_s et G_{calc}/E_s	124
Figure III-16 : Effet du rapport de l’aspect α sur E^*/G^*	124
Figure III-17 : Effet du rapport de l’aspect α sur le coefficient de Poisson	125
Figure III-18 : Contrainte de traction-Déformation élastique pour différents rapports de l’aspect α	126
Figure III-19 : Effet du ratio β sur le module de Young relatif et le module de Coulomb relatif	126
Figure III-20 : Effet du rapport β sur E^*/G^* rapport	127
Figure III-21 : Effet du rapport $\beta = h/\ell$ sur le coefficient de Poisson	128

Figure III-22 : Contrainte de traction-Déformation élastique pour différents rapports β	134
Figure III-23 : Variation du module E1 en fonction de l'angle θ	129
Figure IV-01 : Représentation d'une onde acoustique.	138
Figure IV-2 : Onde progressive sinusoidale ; a) en fonction du temps, b) en fonction de l'espace.	138
Figure IV-3 : Onde incidente frappant une interface entre deux milieux.	140
Figure IV-04 : Représentation d'un système mécanique par une boîte noire	142
Figure IV-05 : Schéma d'un système passif à grandes dimensions latérales.	143
Figure IV-06 : Modèle d'une couche d'air.	144
Figure IV-07 : Modèle d'une plaque solide élastique.	144
Figure IV-8 : Modèle d'une couche poreuse (matériau poreux).	145
Figure IV-09 : Modèle d'interface air-plaque.	146
Figure IV- 10 : Modélisation du domaine vibro-acoustique : a) Figure 1. Une plaque infinie avec un réseau doublement périodique de vides carrés, b) Cellule élémentaire 2D, c) Cellule unité 1D.	147
Figure IV-11 : Discrétisation d'un milieu périodique continu.	147
Figure. IV-12 : Fréquence spatiale en fonction de la fréquence temporelle dans un milieu discret.	148
Figure. IV-13 : Fréquence spatiale en fonction de la fréquence.	149
Figure IV-14 : Bande de fréquence à transmission complète.	149
Figure IV-15 : Evolution du vecteur d'onde de Bloch en fonction de l'épaisseur de la paroi solide.	150
Figure IV-16 : Modélisation du domaine vibro-acoustique.	151
Figure IV-17 : Modélisation du domaine de simulation vibro-acoustique.	152
Figure IV-18 : Géométrie de l'élément FLUID220.	153
Figure. IV-19 : Géométrie de l'élément SOLID186.	154
Figure IV-20 : Maillage du domaine de simulation.	154
Figure IV21 : Contour du vecteur déplacement total (partie imaginaire).	155
Figure IV-22 : Contour de pression : a) partie réelle, b) partie imaginaire.	155
Figure IV-23 : Effet de la fréquence sur : a) l'amplitude de déplacement, b) l'amplitude de pression.	156

Figure IV-24 : Effet de la variation de l'angle d'incidence sur le coefficient de réflexion.	156
Figure IV-26 : Effet de la variation de l'angle d'incidence sur le coefficient de transmission.	157
Figure IV-27 : Effet de l'angle d'incidence sur la puissance acoustique à la sortie du port.	158
Figure IV-28 : Effet de l'angle d'incidence sur la puissance acoustique au port d'entrée.	159
Figure IV-29 : Amplitude de déplacement en fonction de l'angle d'incidence.	159
Figure IV-30 : Amplitude de la pression de l'onde en fonction de l'angle d'incidence.	160
Figure A-1 : Plantes de cactus : a) Cactus Sauaro (<i>Carnegiea gigantea</i>), b) Figue de Barbarie (genre <i>Opuntia</i>)	38
Figure A-2 : Différents types de plantes de cactus [63]	43
Figure A-3 : Fruits de plante de cactus	45
Figure A-4 : Gros plan de cladodes	46
Figure A-5 : Cladode dénudé, noter la structure hexagonale sous-jacente.	46

Liste des tableaux

Tableau I.1	Relations entre propriétés et densité relative pour matériaux cellulaires.	23
Tableau I.2	Formes géométriques tri-dimensionnelles simples utilisées pour générer et étudier les matériaux cellulaires 3D.	27
Tableau II.1	Caractéristiques géométriques, physiques et mécaniques de la nouvelle cellule.	44
Tableau II-2	Variation de la configuration de la structure en fonction du rapport $R=x / y$.	97
Tableau III.1	Propriétés du PMMA	105
Tableau III.2	Caractérisation de la structure cellule modèle : $h = \ell = \frac{H}{2} = 3mm, \theta = 45^\circ$	107
Tableau III.3	Valeurs du paramètre θ° dans les essais de traction et cisaillement	118
Tableau III.4	Valeurs du paramètre H mm lors des essais de traction et cisaillement	118
Tableau III.5	Valeurs du paramètre h mm lors des essais de traction et cisaillement	118

Introduction générale

La porosité est un défaut dans de nombreux matériaux, entraînant une défaillance prématurée des céramiques incomplètement frittées ou des pièces moulées en métal mal alimentées. Il y a diverses raisons pour lesquelles on peut vouloir introduire des pores dans un matériau. La première consiste à créer un matériau léger et doux : la mousse de polyuréthane est un exemple courant utilisé dans les applications nécessitant un faible module ou une compressibilité élevée : meubles, chaussures de sport, par exemple. Une autre application est l'isolation thermique. La première raison est prise en considération dans ce travail. Les matériaux cellulaires ont attiré l'attention des chercheurs depuis de nombreuses années. Ces matériaux présentent des combinaisons de propriétés intéressantes et sont de plus en plus intégrés dans les produits manufacturés. En plus de leurs propriétés mécaniques spécifiques importantes, ils présentent en effet des propriétés supplémentaires d'absorption des vibrations, de thermo-isolation, qui permettent de remplir plusieurs fonctions simultanément. Toutes ces propriétés varient beaucoup selon l'architecture des matériaux considérés, à savoir la morphologie. Pour bien prédire ces propriétés, il est donc nécessaire d'analyser correctement cette architecture.

• Objectif de l'étude

Plusieurs modèles géométriques de matériaux cellulaires dont la cellule à lien ré-entrant en forme de croix que nous allons caractériser. Dans un second temps nous allons explorer d'autres propriétés que ce type de cellules peut avoir ou développer sous certaines dispositions, entres autres ; l'étouffement de vibrations et l'absorption des ondes acoustiques.

Dans la première étude, notre effort s'est concentré sur l'éclaircissement de l'effet des paramètres géométriques de la cellule tel que l'angle d'inclinaison du lien ré-entrant, les longueurs des liens : petit, grand et incliné. L'étude a permis d'évaluer l'importance de l'influence de ces paramètres sur les propriétés mécaniques de la structure.

La deuxième étude porte sur la modélisation numérique de ces structures et de leurs comportements lors de simulations d'essais mécaniques.

• Organisation du mémoire

La thèse rapportant le travail accompli dans le cadre de ce Doctorat en Sciences est constituée de 4 chapitres et d'une conclusion générale.

Le premier chapitre contient les résultats d'une recherche bibliographique très poussée énumérant les différents types de matériaux cellulaires et relatant l'état de l'art actualisé en matière de recherches sur cette catégorie incontournable de matériaux.

Les premières sections du **deuxième chapitre** développent une étude analytique et numérique d'une structure cellulaire générée par la nouvelle cellule composée de deux liens verticaux ré-entrants et deux liens horizontaux re-sortants. Dans le reste des sections suivra une simulation de cette cellule à liens ré-entrant puis une deuxième simulation sur une structure générée par une cellule approchant la cellule du cladode de cactus. Ces simulations ont un but de caractérisation de ces structures.

Le troisième chapitre est l'objet d'une étude expérimentale afin destiné, dans un premier temps à valider les résultats numériques, puis à déterminer les propriétés mécaniques de la structure cellulaire générée par une cellule à liens ré-entrants. Enfin, nous explorons l'influence des paramètres géométriques θ , β et α sur les propriétés mécaniques.

Le quatrième chapitre nous explorons le comportement vibro-acoustique, puis estimons les principaux paramètres acoustiques de la structure.

Enfin, la thèse est clôturée par les conclusions générales tirées de cette étude et les perspectives pour la suite du travail.

Chapitre I

Revue bibliographique sur les matériaux cellulaires

1 Introduction

Depuis des décennies les matériaux composites et plus particulièrement les matériaux cellulaires, dont la porosité excède 70 % du volume, captivent l'attention des chercheurs à cause de leurs propriétés importantes, en vue de concevoir de nouvelles structures. Cette classe spéciale de matériaux composites est celle dans laquelle un matériau est combiné avec un espace de pore vide. En effet, bien que la porosité soit un défaut dans de nombreux matériaux, entraînant une défaillance prématurée des céramiques incomplètement frittées ou des pièces moulées mal alimentées en métal, par exemple, elle est parfois recherchée. Il y a diverses raisons pour lesquelles on peut vouloir introduire des pores dans un matériau. La première consiste à créer un matériau léger et doux. La deuxième est l'isolation thermique et acoustique [1]. De tels matériaux cellulaires existent dans la nature comme le bois, les os spongieux et le liège. Il existe également de nombreux matériaux cellulaires artificiels, sous forme de matériaux du type nid d'abeille et de mousses fabriqués à partir d'une large gamme de matériaux polymères, métaux, céramiques et verres [1,2].

Les matériaux cellulaires sont actuellement largement utilisés dans les panneaux sandwich légers. La séparation de deux faces fortes et rigides avec un noyau léger crée une structure résistante à la flexion ou au flambement. Ils constituent un excellent choix pour l'isolation en raison du faible pourcentage en volume de solides et de la taille généralement petite de leurs cellules. En raison de leur faible poids et de leur capacité à subir de grandes déformations à faible charge, ils sont utilisés par l'industrie de l'emballage pour protéger les matériaux des impacts [3,4]. Ce chapitre résume la structure et le comportement mécanique des matériaux cellulaires, et plus spécialement les matériaux auxétiques.

2. Structure et comportement mécanique :

La propriété la plus importante, des matériaux cellulaires, est la densité relative, qui est définie comme étant le rapport de la densité de la structure à celui de la densité du matériau solide à partir duquel elle est fabriquée.

La structure est générée par des cellules qui s'étendent sous l'une des trois formes suivantes : nid d'abeilles 2D (figure I-1a), mousse ouverte 3D (figure I-1b) ou mousse fermée 3D (figure I-1c). La mousse est dite ouverte (fermée) si les faces des cellules sont vides (recouvertes par le matériau solide).

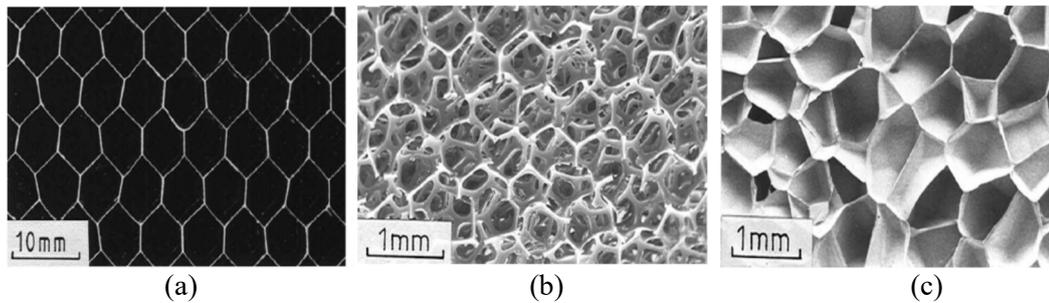


Fig. I-1 : Exemples pour les trois types de solides cellulaires [2] :

- (a) un arrangement en deux dimensions de cellules prismatiques (nid d'abeilles hexagonal) ;
 (b) une mousse à cellules ouvertes ; (c) une mousse à cellules fermées.

Les cellules présentent, souvent, des propriétés mécaniques anisotropes. Le tableau-01 affiche les relations entre les propriétés mécaniques et la densité relative des matériaux cellulaires ; les constantes de proportionnalité sont différentes pour chaque propriété et chaque cas (mousses, nids d'abeille). E_s , σ_{ys} et σ_{fs} sont le module de Young, limite d'écoulement et charge de rupture, respectivement, du matériau du solide constituant les murs des cellules.

Tableau 1 : Relations entre propriétés et densité relative pour matériaux cellulaires [1].

Propriété	Mousse cellule ouverte	Nids d'abeille
E	$C(\rho/\rho_s)^2 E_s$	$C(\rho/\rho_s)^3 E_s$
ν	C	C
G	$C(\rho/\rho_s)^2 E_s$	$C(\rho/\rho_s)^3 E_s$
$\sigma_{\text{él}}$	$C(\rho/\rho_s)^2 E_s$	$C(\rho/\rho_s)^3 E_s$
σ_{pl}	$C(\rho/\rho_s)^{3/2} \sigma_{ys}$	$C(\rho/\rho_s)^2 \sigma_{ys}$
σ_{cr}	$C(\rho/\rho_s)^{3/2} \sigma_{fs}$	$C(\rho/\rho_s)^2 \sigma_{fs}$
K_{Ic}	$C(\rho/\rho_s)^{3/2} \sigma_{fs} \sqrt{\pi l}$	$C(\rho/\rho_s)^2 \sigma_{fs} \sqrt{\pi l}$

Les mécanismes de déformation, dans les structures cellulaires, se subdivisent en trois régimes de comportement distincts. À des charges relativement faibles, le matériau est élastique linéaire. Au fur et à mesure qu'on s'approche du niveau de charge critique, les cellules commencent à s'effondrer par flambage élastique, déformation plastique ou rupture fragile, en fonction de la nature des propriétés de la paroi cellulaire.

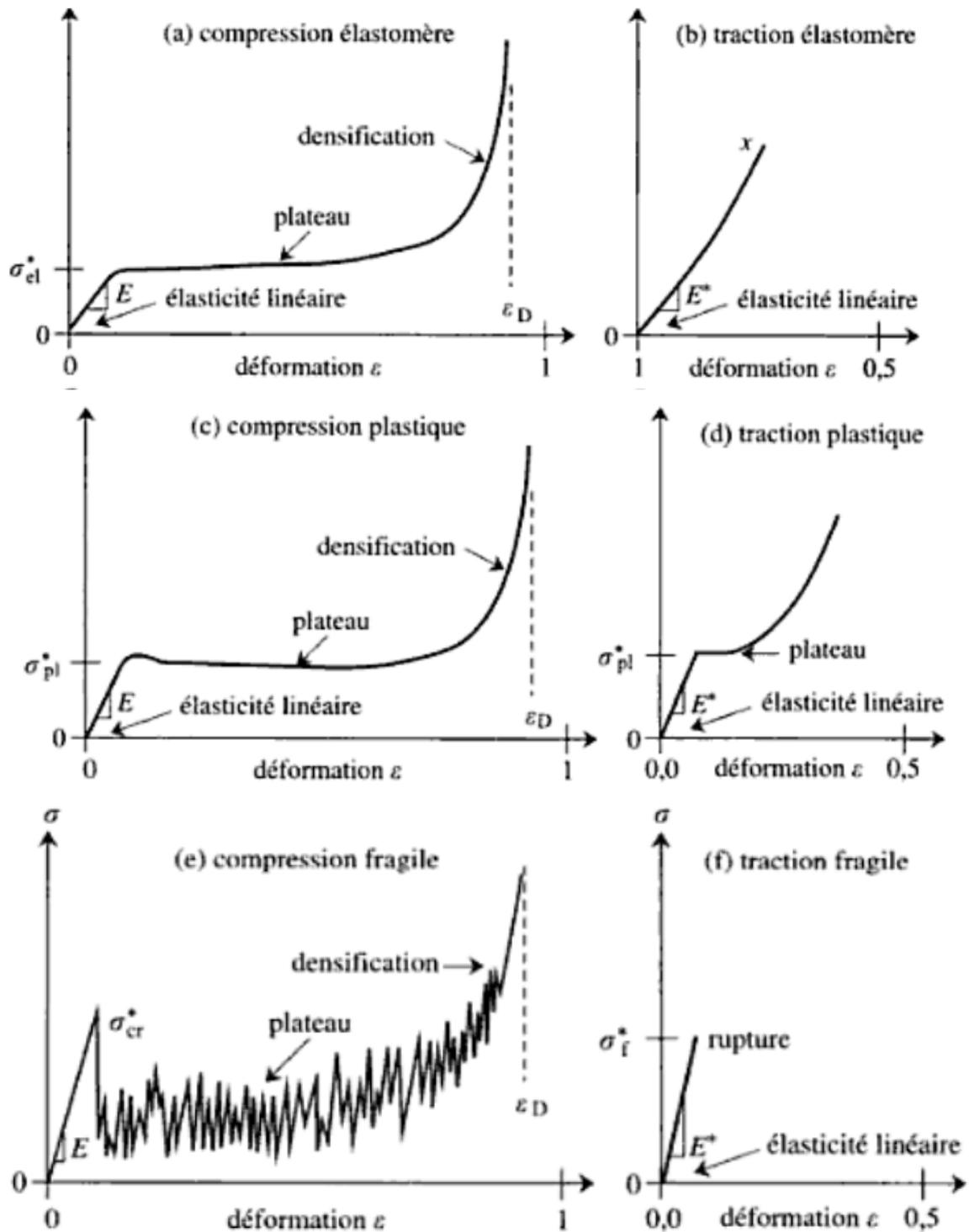


Fig. I-2 : Courbes de contrainte-déformation pour matériaux cellulaires : (a) et (b) matériaux cellulaires élastomères, (c) et (d) élastoplastiques et (e) et (f) élastiques fragiles [1,2].

Ensuite, les cellules s'effondrent à une charge pratiquement constante, produisant un palier (de la contrainte) approximativement horizontal. Une fois tous les interstices de la cellule sont remplis par les clinquant effondrés, mécanisme appelé densification, une augmentation exponentielle de la charge, pour une déformation relativement minimale, apparaît dans la courbe de comportement constituant le troisième régime.

Les matériaux poreux sont souvent des composites en ce sens que des pores sont délibérément introduits dans le matériau de base. En outre, ils sont conçus de manière à contrôler la taille et la forme des pores.

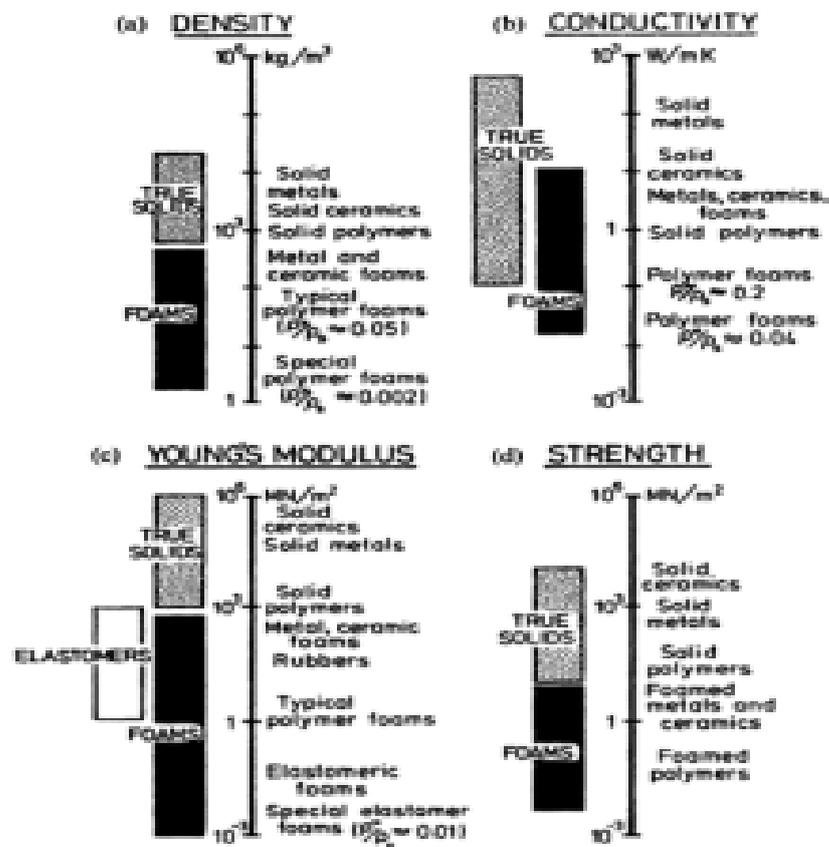


Fig. I-3 : Ordre de grandeur de quelques propriétés de matériaux cellulaires (mousse) et denses (BULK) à base de polymères, de métaux ou de céramiques [01].

La littérature est pleine de discussion sur la relation entre la porosité et les propriétés physiques [01-04], en mettant l'accent sur les matériaux céramiques. Certaines propriétés physiques dépendent de la porosité P , définie comme le volume des pores relatif au volume total de l'échantillon. Cette dépendance est typiquement linéaire pour les faibles porosités, jusqu'à une valeur critique P_c de la porosité. Ceci est valable par exemple pour le module de Young ou la conductivité thermique. La figure I-3 indique la gamme des valeurs possibles pour quelques propriétés physiques des matériaux. L'intervalle de variation de ces propriétés est élargi de plusieurs ordres de grandeurs. Ceci est vrai par exemple pour la densité, la conductivité ou le module de Young.

3 Déformations des matériaux cellulaires :

a) nids d'abeilles

La littérature est abondante de travaux de recherche tant analytiques que numériques validés, en grande majorité, par l'expérience [1,3,5]. Il y est établi que la densité relative des nids d'abeille varie comme :

$$\rho/\rho_c = \frac{2}{\sqrt{3}}(t/\ell) \quad (6)$$

et les modules de Young et de cisaillement, dans le plan, sont liés à la densité relative par les relations :

$$\frac{E_1}{E_s} = \frac{E_2}{E_s} = \frac{3}{2} (\rho/\rho_s)^3 \quad (7)$$

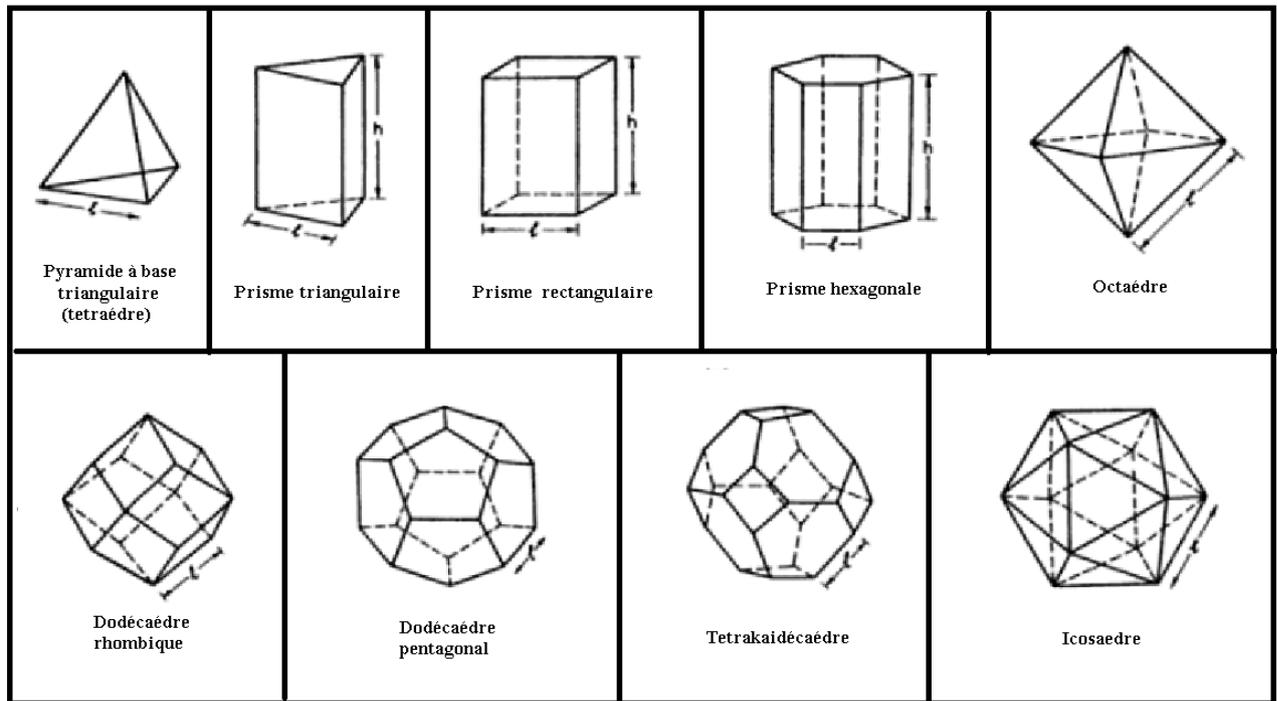
$$\frac{G_{12}}{E_s} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{t}{\ell}\right)^3 = \frac{3}{8} \left(\frac{\rho}{\rho_s}\right)^3 \quad (8)$$

qui obéit à la relation $G = E/[2(1 + \nu)]$ pour les solides isotropes. Tout cela est correct pour une faible densité relative ($\frac{t}{\ell} \leq \frac{1}{4}$) et une déformation suffisamment petite pour que les changements de la géométrie soient négligeables.

b) Mousses :

Dans les mousses réelles, la forme des cellules est très complexe [5]. Pour modéliser leur comportement en déformation, on a recours à des formes simplifiées, comme l'illustre le tableau I.2. Les mousses à cellule ouverte, la plus simple est un réseau de cubes avec des arêtes à section carrée, ce qui permet une analyse simple des propriétés mécaniques. En calculant la flèche, linéaire élastique, des poutres on peut ressortir le module de Young. Le flambage élastique des arêtes des cellules nous permet de calculer la contrainte d'effondrement élastique, $\sigma_{él}$, celle de l'effondrement plastique σ_{pl} , est déterminée par la formation d'une zone plastique aux coins des cellules [2,5]. Dans le cas des mousses fragiles, la résistance σ_{cr} est atteinte quand la contrainte maximale dans les poutres dépasse le module de rupture σ_{fs} .

Tableau I-2 : Formes géométriques tri-dimensionnelles simples utilisées pour générer et étudier les matériaux cellulaires 3D [5]:



4. Propriétés et applications :

Outre la légèreté, une conséquence de la basse densité de ces matériaux est l'énorme diminution de la conductivité thermique et, dans le cas des métaux, électriques, élargissant les perspectives d'applications au domaine de l'isolation thermique ou même en tant que matières non inflammables. Des exemples de produits sont les toitures plates et façades qui sont faits en verre cellulaire (composé majoritairement de verre recyclé ($\pm 60\%$) et de matières minérales comme l'oxyde de fer, l'oxyde de manganèse, le feldspath et le sulfate de sodium. Tous assemblés dans un fourneau de fonderie. Et lors de la fusion, du CO_2 est libéré sous forme de gaz, ce qui crée un grand nombre de petites bulles dans le mélange). Ce qui constitue des applications pour la construction d'échangeurs de chaleur légers mais efficaces. Les propriétés électromagnétiques des mousses métalliques peuvent en l'occurrence être utilisées pour construire des objets atténuant les ondes électromagnétiques. Par ailleurs, les ondes sonores sont elles aussi fortement absorbées par les mousses, ce qui rend évidemment possibles des applications dans le domaine de l'isolation acoustique [5,6].

a) Propriétés électriques

Lorsque la densité relative, d'une mousse ou d'un nid d'abeilles fait avec un matériau conducteur de résistivité r_s , diminue elle voit sa résistivité électrique r^* clairement augmenter [5-8]. Si la densité relative d'une mousse à cellules cubiques fermées de taille l et d'épaisseur de paroi t et :

$$\frac{\rho}{\rho_c} = 1 - \left(1 - \frac{t}{\ell}\right)^3 = \frac{3t}{\ell} \quad (9)$$

Si l'on imagine maintenant une coupe horizontale de cette structure, on voit que le courant peut être transporté par les parois dont la section relative est $1 - \left(1 - \frac{t}{\ell}\right)^2$. Par conséquent, on peut écrire la conductivité, propriété inverse de la résistivité, relative pour une mousse à cellules fermées [5,6]

$$\frac{r_s}{r^*} = 1 - \left(1 - \frac{t}{\ell}\right)^2 = \frac{2t}{\ell} = \frac{2}{3} \frac{\rho}{\rho_s} \quad (10)$$

Pour une mousse à cellules ouvertes

$$\frac{r_s}{r^*} = \left(\frac{t}{\ell}\right)^2 = \frac{1}{3} \frac{\rho}{\rho_s} \quad (11)$$

Donc pour les mousses ouvertes et fermées, la résistivité électrique est donc inversement proportionnelle à la densité, mais leurs coefficients sont différents. En conséquence, la résistivité dépend de la densité et de la géométrie des pores. Ceci devient encore plus évident lorsqu'on calcule la résistivité d'une structure en nids d'abeilles qui s'avère anisotrope. En effet, on trouve pour la direction hors plan (c'est-à-dire parallèle à l'axe des tubes hexagonaux).

$$\frac{R_s}{R^*} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{t}{\ell}\right) = \frac{\rho}{\rho_s} \quad (12)$$

Et pour la conductivité dans le plan

$$\frac{R_s}{R^*} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{t}{\ell}\right) = \frac{1}{3} \frac{\rho}{\rho_s} \quad (13)$$

Certains types de mousses polymériques ont des propriétés diélectriques qui sont intéressantes pour les applications liées à la transmission et l'absorption de micro-ondes. La constante diélectrique est proportionnelle à la densité relative, puisque plus les espaces vides (ou remplis de gaz) sont plus importants plus les propriétés diélectriques sont plus pointues.

$$\varepsilon^* = 1 + (\varepsilon_s - 1)\rho/\rho_s \quad (14)$$

b) Isolation thermique

Les matériaux cellulaires sont d'excellents isolants thermiques de par le fort pourcentage de vide existant en leur sein. Leur coefficient de la conductivité thermique λ est défini par la couche (isolante mince) du vide, est calculée par :

$$q = \frac{\lambda \Delta T}{B} \quad (15)$$

où q est le flux d'énergie calorifique, B l'épaisseur de la couche isolante et ΔT la différence de température entre les deux côtes de la couche.

En conséquence, l'isolation thermique constitue l'une des applications prépondérantes des matériaux cellulaires, en particulier, les mousses à cellules fermées où le mode de convection n'intervient pas. Le transfert de chaleur, dans ces mousses est dû, principalement, à la conduction, au travers des murs des cellules et donc c'est une fonction de la densité de la mousse $\frac{\rho}{\rho_s}$. Le rayonnement et qui constitue l'énergie émise sur une face de la couche et qui sera réabsorbée par l'autre. Cette énergie est donnée par la loi de Stephan-Boltzmann :

$$Q = q_0 ((T + \Delta T)^4 - T^4) = 4q_0 T^3 \Delta T \quad (16)$$

où q_0 est une constante.

En tenant compte de ces deux modes de transfert de chaleur, à savoir : la conduction et le rayonnement, le coefficient de transport thermique, de la couche isolante, s'écrit :

$$\lambda^* = \lambda_s \frac{\rho}{\rho_s} + \lambda_g \frac{1-\rho}{\rho_s} + q_0 T^3 B e^{-KB \frac{\rho}{\rho_s}} \quad (17)$$

Les deux premiers termes décrivent le transport par conduction, respectivement dans les parois et dans le gaz remplissant les cellules, et le troisième décrit le transport par rayonnement, λ_g est la conductivité du gaz dans les pores et λ_s correspond à 2/3 de la conductivité du matériau massif [5,6,7].

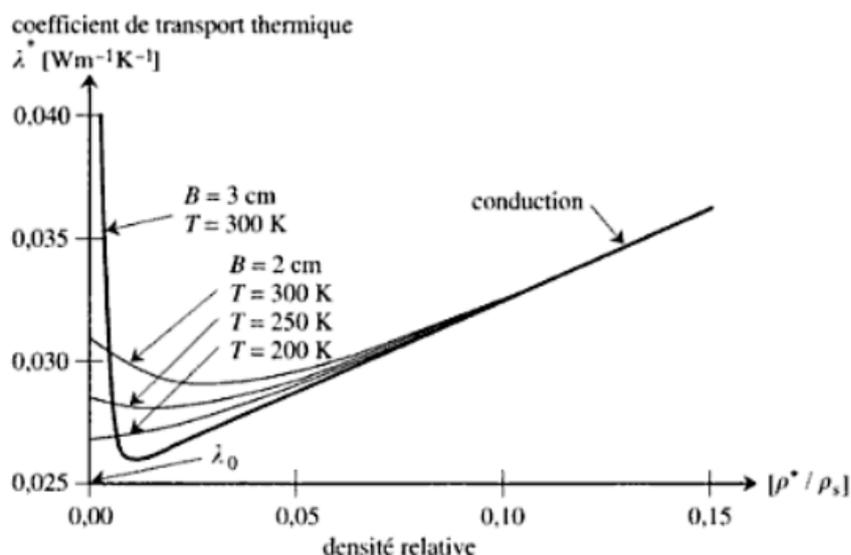


Fig. I-4 : Coefficient de conductivité thermique calculé à partir de l'équation (17) [5,6].

La figure I-4 trace la variation du coefficient λ^* en fonction de la densité relative, pour des températures T différentes et deux épaisseurs B d'une couche isolante, et il ressort, principalement de cette figure que la conduction dans les mousses isolantes n'est fonction ni

de l'épaisseur de la couche, ni de la température (à condition que λ_s et λ_g ne varient pas trop avec la température). On relève, aussi, que ces courbes possèdent un minimum, traduisant l'existence d'une densité optimale à l'isolation thermique.

Il est à noter, aussi, que puisque λ^* dépend aussi de λ_g , (coefficient de conduction du gaz enfermé dans les pores) il est plus efficace de remplacer l'air par un gaz à faible λ_g , par exemple les hydrofluorocarbures (HFC)[7-10].

c) Absorption vibro-acoustique

Les matériaux cellulaires sont d'excellents absorbeurs de vibrations et d'ondes sonores. Les vibrations sont fortement atténuées aussi par la matière molle elle-même (tels que les tissus ou les mousses de polymère). Pour le cas des ondes sonores, elles sont atténuées à la surface d'une structure à porosité ouverte par les effets de viscosité agissant sur l'aire vibrant à l'intérieur des pores [4,5,6,10]. Cette propriété sera, quelques peu approfondis dans le chapitre IV.

d) Emballages

Comme conséquence à leur propriété d'absorption de l'énergie, les mousses fermées constituent un excellent candidat pour leur utilisation comme emballages.

Cette propriété est mise en évidence par la considération de la courbe contrainte-déformation affichée dans la figure I.7 (a) : la mousse se déforme de manière élastique (module de Young E) jusqu'à la limite σ_{pl} . après ce palier, la déformation continue sans augmentation de la contrainte qui reste égale à σ_{pl} . La dernière partie du graphe, qui commence à partir de la déformation ε_D , les cellules de la mousse s'effondrent et la mousse suit le comportement du matériau dont elles sont faites les parois (module de Young E_s). L'énergie absorbée, pendant les trois phases, s'écrit [5-10]:

$$W(\varepsilon) = \left\{ \begin{array}{ll} E^* \frac{\varepsilon^2}{2} & \text{Pour } \varepsilon \leq \frac{\sigma_{pl}^*}{E^*} \\ \sigma_{pl}^* \frac{2\varepsilon - \sigma_{pl}^*/E^*}{2} = W_1(\varepsilon) & \text{Pour } \frac{\sigma_{pl}^*}{E^*} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_D \\ W_1 + E_s \frac{(\varepsilon - \varepsilon_D)^2}{2} & \text{Pour } \varepsilon_D \leq \varepsilon \end{array} \right\} \quad (18)$$

La figure I.5b trace l'allure de W en fonction de σ . Il en ressort, notamment, que lorsque la contrainte de compression atteint σ_{pl} , la mousse absorbe une quantité d'énergie par unité de volume [5-10].

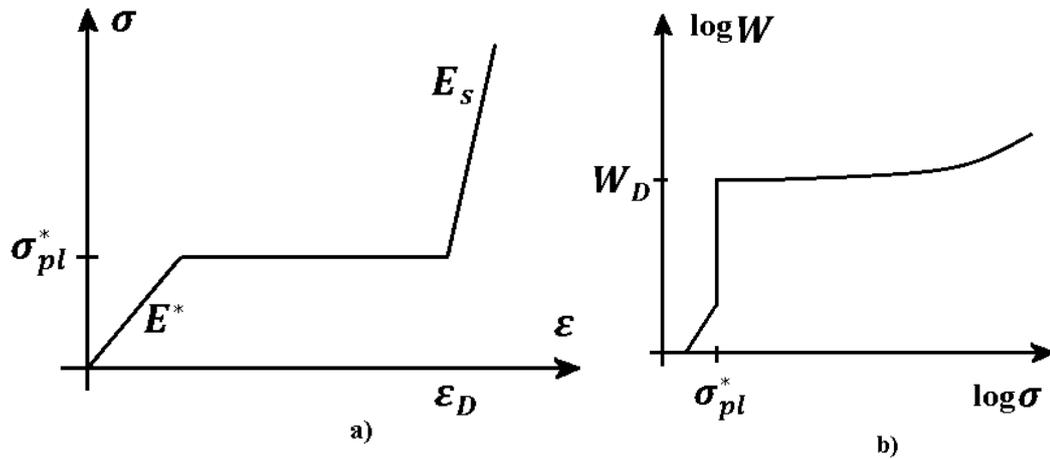


Fig. I-5 : Energie absorbée par une mousse fermée lors d'une compression inspirée de [6]: a) Contrainte-déformation (compression pour une mousse) ; (b) Energie absorbée, par unité de volume, en fonction de la contrainte appliquée.

En conséquence, une couche protectrice faite en mousses possède deux régimes de travail. Tant que les efforts de compression restent faibles, la couche a un module de Young de E , elle est donc relativement souple. Lors d'un impact, l'énergie absorbée est de l'ordre de W_D . Pour une couche protectrice d'épaisseur B et de surface A , cela signifie que l'emballage peut protéger d'un impact se produisant avec une vitesse inférieure à v_m , donnée par la relation [7 -10]:

$$W_D = \frac{mv_m^2}{2AB} \quad (19)$$

m étant la masse de l'objet à protéger. La contrainte maximale subie par l'objet au moment de l'impact sera de l'ordre de σ_{pl} , indépendamment de la vitesse d'impact aussi longtemps que celle-ci reste inférieure à v_m . Ainsi, la décélération maximale subie par l'objet sera :

$$a_m = A \frac{\sigma_{pl}^*}{m} \quad (20)$$

Les deux paramètres W_D et σ_{pl} peuvent donc être utilisés pour optimiser la couche protectrice nécessaire [7,10].

5. Matériaux Auxétiques, avantages, applications :

Le terme 'auxetic' est dérivé du mot 'auxetikos' qui signifie : 'il a tendance à augmenter'.

Les matériaux auxétiques, qui sont une sous classe des matériaux cellulaires, présentent la particularité d'avoir un coefficient de Poisson négatif, c'est-à-dire qu'ils peuvent se dilater dans toutes les directions lorsqu'une charge uniaxiale est appliquée et affichent une

courbure synclastique, qui est une courbure en forme de dôme (figure I-6b) lorsque la charge de flexion est appliquée , alors qu'un matériau conventionnel présente une courbure anticlastique, qui est une courbure en forme de selle (figure I-6a) lorsqu'il est soumis à un moment de flexion hors-plan [1,5,6,11].

Comme on le sait, la plupart des matériaux se contractent dans le sens transversal lorsqu'ils sont tirés dans le sens longitudinal ou se dilatent dans le sens transversal lorsqu'ils sont comprimés dans le sens longitudinal, cela signifie qu'ils ont un coefficient de Poisson positif (figure I-4).

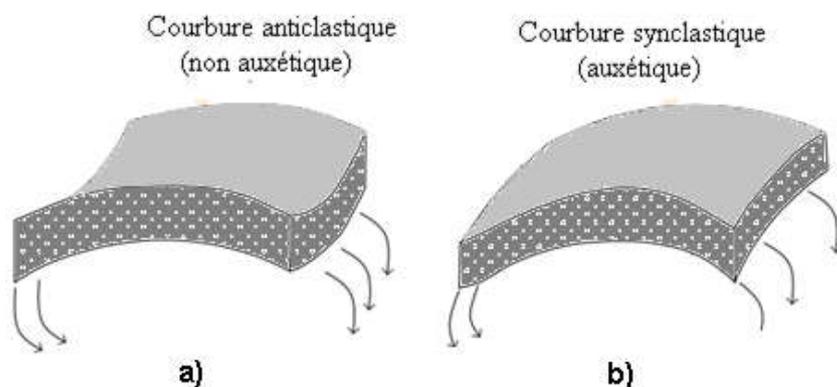


Fig.I-6 : (a) Matériau conventionnel anti-clastique (en forme de selle) et (b) matériau auxétique synclastique (en forme de dôme)[11].

Cependant, les matériaux avec un rapport de poisson négatif peuvent être définis comme étant auxétique, car ils se dilatent dans la direction transversale lorsqu'ils sont chargés dans la direction longitudinale (figure I-7).

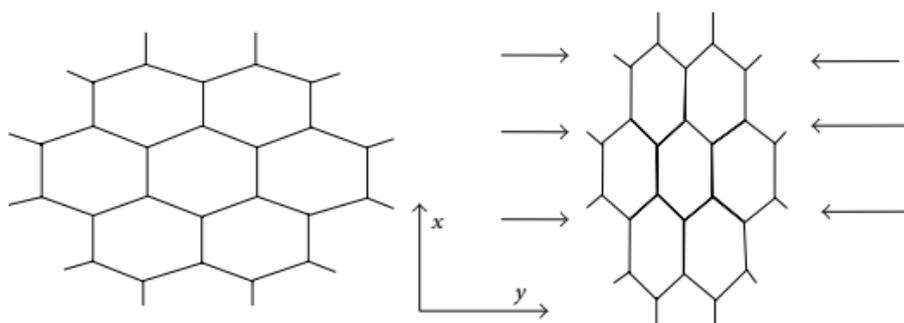


Fig. I-7 : Mécanisme de déformation d'une structure non-auxétique (nid d'abeille) [11]

Les matériaux auxétiques ont de nombreux avantages tels qu'une rigidité relative élevée, une résistance relative élevée et un poids léger, un module de cisaillement plus élevé [10 ,11].

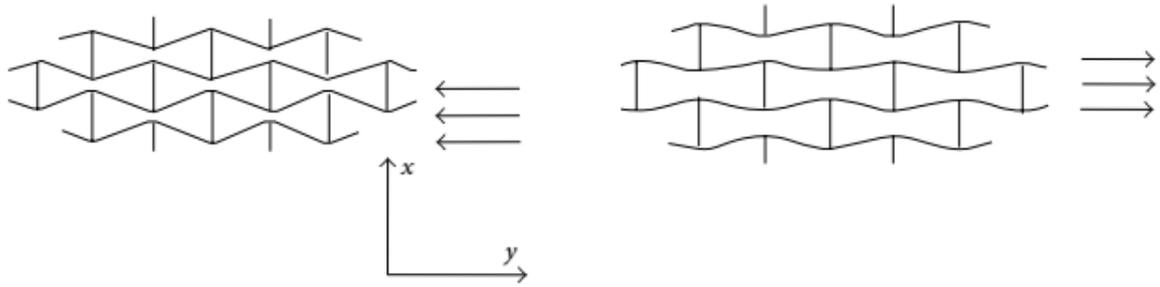


Fig. I-8 : Mécanisme de déformation d'une structure auxétique (ré-entrante)[11]

Ces avantages les rendent d'excellents candidats pour des applications dans l'ingénierie, telles que l'automobile et l'aérospatiale. La propriété de courbure synclastique, qu'ont ces matériaux leur confère une meilleure aptitude au formage. En outre, ces matériaux ont un rapport résistance/poids élevé ce qui contribue grandement à la réduction de la consommation d'énergie l'amélioration des performances. Cependant, ces matériaux auxétiques présentent l'inconvénient d'être difficiles à fabriquer [10-20].

5.1. Coefficient de Poisson :

Défini comme le rapport entre la contrainte de contraction transversale et la contrainte d'extension longitudinale par rapport à la direction de la force d'étirement appliquée. Les matériaux normaux ont un rapport de poisson positif. Le coefficient de poisson peut varier entre -1 et 0,5 en fonction de la densité atomique du matériau. Par exemple, l'or a un coefficient de poisson de 0,42, mais des matériaux moins denses, comme les aciers, dont le coefficient de Poisson est de 0,3. De plus, la valeur typique du coefficient de Poisson pour la céramique, le verre et les semi-conducteurs varie entre 0,25 et 0,42 [6,7,20-30].

Le coefficient de poisson peut varier entre -1 et 0,5 selon la théorie de l'élasticité linéaire isotrope. Lorsque la microstructure d'un matériau est modifiée pour réduire le coefficient de poisson et que le module de Young n'est pas modifié, son module de cisaillement et son module de charge peuvent être modifiés. Par conséquent, la plupart des matériaux montrent une résistance au changement de volume plutôt qu'au changement de forme. Cela signifie que le module de déformation volumique K des matériaux est plus que le module de cisaillement. Les relations entre module de cisaillement, module volumique, et coefficient de poisson sont données par : [31,33]

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (21)$$

et

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (22)$$

5.2. Différents types de matériaux auxétiques :

Les matériaux auxétiques se subdivisent en : Nids d'abeilles auxétiques, sous-ensembles spéciaux de mousses, polymères microporeux auxétiques et composites à fibres longues [14-47].

5.2.1 Nid d'abeilles auxétique :

Ces structures, à leur tour, se subdivisent en quatre types principaux : Structures ré-entrantes, unités rotatives, côtes manquantes et structures chirales.

5.2.1.1. Structures ré-entrantes: Dans le mécanisme ré-entrant, la déformation dans un sens provoque une flexion symétrique et opposée des poutres orientées dans le second sens.

On parle de structures ré-entrante lorsque l'angle tête des poutres b_2 et b_3 par rapport à l'horizontale est négatif (figures I.12 (a)).

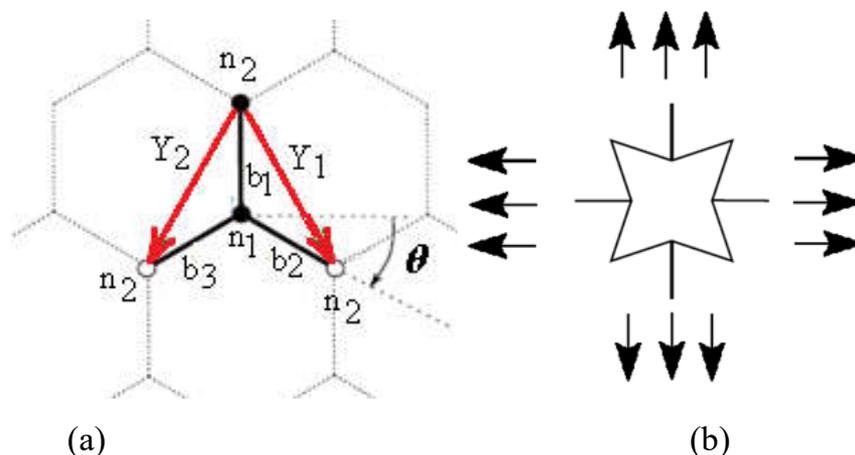


Fig. I-9 : Définition géométrique d'une structures hexagonale ré-entrante :
(a) $\theta = 30^\circ$, structure auxétique (b) Mécanisme ré-entrant.

Les structures en nid d'abeilles 2D ré-entrantes, suggérées par Almgren en 1985, ont été développés à l'aide de calculs analytiques de divers mécanismes de déformation [68]. Les structures auxétique 2D ré-entrantes ont des propriétés mécaniques orthotropes. Les structures en nid d'abeille 3D ré-entrantes, suggérées par Evans et. al en 1994, ont des rapports de Poisson négatifs dans les trois directions principales.

5.2.1.2. Unités rotatives :

Ce type de structure a été développé pour produire le comportement auxétique dans les mousses [54] et les polymères en réseau hypothétiques à nanostructures [55] en assemblant les triangles rigides ou semi-rigides [56], carrés, rectangles et tétraèdres à certains sommets [57]. Les sommets peuvent être articulés ou reliés par des ressorts. Les effets auxétiques

proviennent de la rotation des triangles, carrés, rectangles et tétraèdre [58] lorsqu'ils sont chargés.

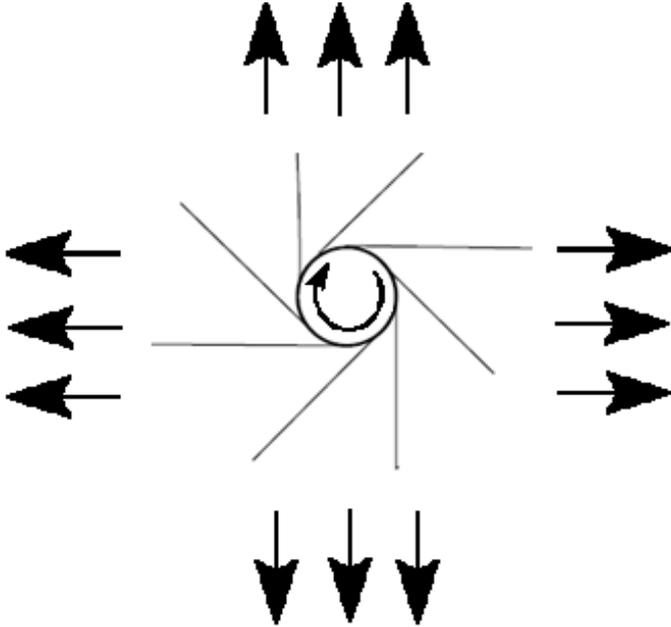


Fig.I-10 : Géométrie qui crée un mécanisme permettant d’obtenir un coefficient de poisson négatif : Mécanisme d’enroulement.

5.2.1.3. Côtes manquantes :

Un modèle de côtes manquantes a été proposé par Smith et al. [59] pour la modélisation des propriétés élastiques des mousses auxétiques. Le modèle de côtes manquantes est appelé ainsi car sa microstructure idéalisée est dérivée du modèle intact (ce qui est classique) et le retrait de certaines nervures conduit à la version coupée ou au modèle de côtes manquantes qui est Auxétique (Voir Fig. I-11), Smith et al. (2000) ont obtenu les coefficients de Poisson suivants :

$$v_{21} = \frac{1}{v_{12}} = \text{tg}^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tag{23}$$

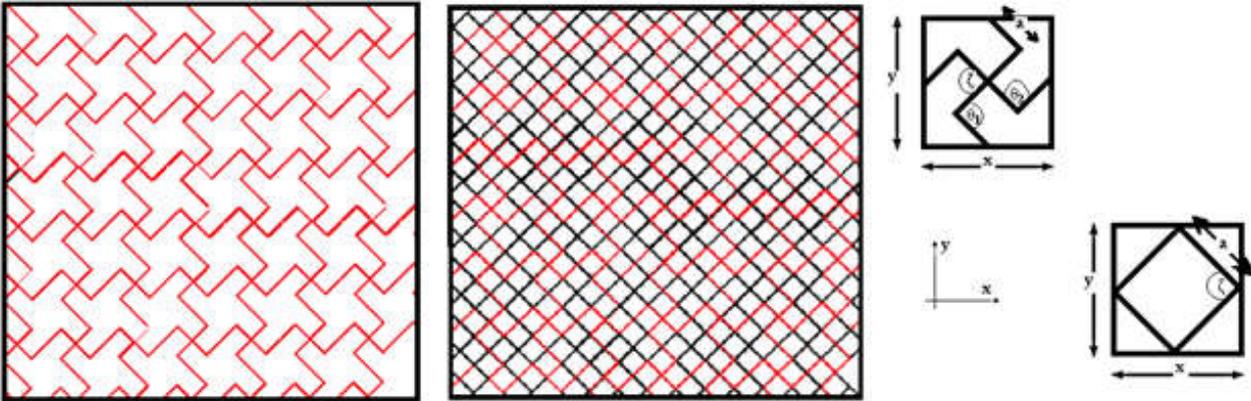


Fig.I-11 : Géométrie d’une structure auxétique à cote manquant.

5.2.1.4. Structures chirales :

Cette structure a été suggérée par Wojcichowski, se basant sur la rotation des disques et les n interactions de puissance inverses du plus proche voisin. Elles sont constituées par la connexion de ligaments droits (côtes) aux nœuds centraux. Les nœuds centraux peuvent être des cercles ou d'autres formes géométriques [48-59].

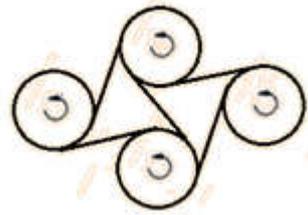


Fig. I-12 : Structure hexachirale [1].

La géométrie chirale 2D des structures est liée au mécanisme d'enroulement, c'est-à-dire que ces structures ne peuvent être superposées à leur image dans un miroir. Dans la référence [19] on trouve une modélisation par un mécanisme similaire à l'enroulement ce qui se produit dans les mousses auxétiques, ce mécanisme s'appelle 'rotation de liaisons rigide' (voir figure I.12).

Les structures hexa-chirales ont fait l'objet de plusieurs travaux et articles associés [20]. Par exemple, dans la référence [26] un certain nombre d'échantillons des structures à coefficients de poisson négatif ont été obtenus par prototypage rapide dans de la poudre de Nylon (Duraform), puis une comparaison des résultats est faite entre l'expérimentation sur ces échantillons et une analyse EF.

Dans la structure hexachiral, le mécanisme qui permet l'obtention d'un coefficient de Poisson négatif est différent de la structure hexagonale ré-entrante; c'est un mécanisme d'enroulement d'une sous-géométrie au sien de la cellule élémentaire qui produit un coefficient de poisson négatif. Cette structure est composée d'éléments circulaires de rayon identique r liés entre eux par des ligaments étroits de longueur identique L . ces ligaments sont disposés tangentiellement aux éléments circulaires à 60° les uns des autres.

5.3. Applications :

Les applications des matériaux auxétiques sont multiples. A titre d'exemple, les filtres intelligents ou la taille des pores du filtre fabriqué à partir de matériaux auxétiques peut être contrôlée. La taille des pores s'agrandit ou se rétrécit lorsqu'elle est tirée ou comprimée. Par conséquent, le filtre peut être ajusté pour différentes plages [60].

Les solides cellulaires à structure en nid d'abeille peuvent être utilisés comme matériau de base en sandwich dans différentes applications d'ingénierie, telles que les structures légères pour l'automobile et les systèmes biomédicaux [61]. Les matériaux auxétiques ont été utilisés pour diverses applications d'ingénierie. Aussi, les structures auxétiques chirales sont utilisées dans les conceptions de structures aérodynamiques composites de Airoidi et al. [62].

Comme mentionné ci-dessus, les composites auxétiques présentent une résistance au cisaillement plus élevée, ce qui en fait l'un des matériaux les plus importants pour l'industrie aérospatiale. En outre, les métaux sont assez lourds que les composites auxétique et les composites auxétique ont un rapport résistance/poids supérieur à celui des métaux. On sait que l'impact de certains objets tels que les oiseaux provoquent des accidents tragiques. La résistance aux chocs doit être augmentée pour prévenir ce type d'accident. Les moteurs sont montés sur les ailes des avions commerciaux. Les bruits élevés générés peuvent affecter les passagers. Des structures sandwich composites auxétiques peuvent être utilisées pour réduire le bruit. De plus, les matériaux auxétiques peuvent être utilisés pour la protection thermique dans les applications aérospatiales telles que les aubes pour turbomachines d'aéronefs [63]

Les propriétés attendues de ces matériaux auxétiques sont diverses. Un grand nombre de brevets ont été déposés montrant leur intérêt. On s'attend à ce que les matériaux à coefficient de Poisson négatif aient un pouvoir d'absorption d'énergie supérieur et une meilleure résistance à la rupture que leurs homologues standards, ce qui pourrait être utile pour des matériaux d'emballage ou des matériaux d'absorption de chocs. D'après [14], les matériaux auxétique devraient être difficiles à cisailier, mais faciles à déformer volumétriquement, en quelque sorte des anti caoutchoucs. Ces matériaux devraient entraîner des comportements mécaniques peu habituels lors d'une mise en forme par déformation ; une plaque épaisse que l'on fléchit aurait une déformation en forme de coque (et non en forme de selle de cheval comme la plupart des matériaux standard). On pense les utiliser également pour la fabrication de nouveaux actionneurs, prothèses et mousses ayant un pouvoir d'absorption acoustique supérieur [64]. Bien qu'il ne s'agisse pas à proprement parler de structures, on commercialise à l'heure actuelle des fibres auxétiques qui gonflent lorsqu'on les met sous traction.

7. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons exposé les différents types de matériaux cellulaires, et plus particulièrement les matériaux auxétiques, et avons développé leurs caractéristiques géométriques et leurs propriétés physiques.

Chapitre II

Etude analytique et numérique des matériaux cellulaires

2. Introduction :

Les matériaux cellulaires ont déjà fait l'objet de plusieurs études ; on trouve dans [68] une étude réalisée par Scarpa et al. sur la résistance au flambement des structures hexachiraux. Une autre étude, théorique et expérimentale, des structures hexachiral faite par D. Prall and R.S. Lakes dans [69]. Yang et al ont fait une étude par EF micro-polaire des structures hexagonales réentrant [70]. Bezazi et al ont calculés les coefficients de Poisson et les modules de Young dans le plan d'un nouveau nid d'abeille centre symétrique ré-entrent par une étude EF et analytique [71]. Blumenfeld a étudié les mécanismes de déformation des structures qu'il qualifie à la fois d'auxétiques et isostatiques ; il propose une formulation mathématique de ce comportement et différentes géométries possibles [72]. Gonella and Ruzzene ont obtenu les propriétés mécaniques des structures hexagonales ré-entrants par une technique d'homogénéisation basée sur des équations aux différences finis [73]. Ils se sont intéressés particulièrement au problème du calcul de la vitesse de propagation d'une onde basse fréquence dans de telles structures auxétiques. Alderson et al. ont fait une étude à la fois expérimentale et par EF d'une série de structures chiraux et d'autres appelés antichiraux [74]. Les antichiraux sont des structures formées de structures chirales associées en paires opposées [48-52,62].

3. Modélisation géométrique :

Les matériaux dont la forme de base est le nid d'abeille ont été produits sous différentes formes et développés pour une large gamme d'applications. Ils utilisent généralement une forme de cellule hexagonale pour une efficacité optimale, une fabrication relativement simple et une solution idéale pour la construction de panneaux sandwich plats. Le réseau de notre structure est généré par une cellule en forme de croix (figure II-2-c) donnant un réseau dont les cellules sont reliées les unes aux autres par quatre nœuds et qui présentent une symétrie par rapport aux axes 1 et 2. La cellule unitaire est constituée de quatre membres principaux. Chaque membre est formé de cinq clinquants : trois droits : un de longueur H , deux de longueur h et deux inclinés de longueur ℓ , formant un angle θ avec la direction des lignes des membres principaux.

La dénomination de cellule de lien ré-entrant provient du fait que chaque cellule a deux liens parallèles, appelées liens ré-entrants (liens rouges dans les figures II-1 (d) et (e)). Ce lien est formé de trois petits brins dont deux sont inclinés. Cette configuration donne un

caractère auxétique (coefficient de Poisson négatif) à la structure. Les couleurs rouge et noir sont utilisées dans les figures 1 et 2 pour illustrer le fait que ce réseau secondaire est en réalité constitué de deux réseaux primaires identiques d'architecture beaucoup plus simple. Ces deux réseaux sont imbriqués l'un dans l'autre de manière à placer les sommets de l'un au centre des cellules de l'autre (fig. II-1).

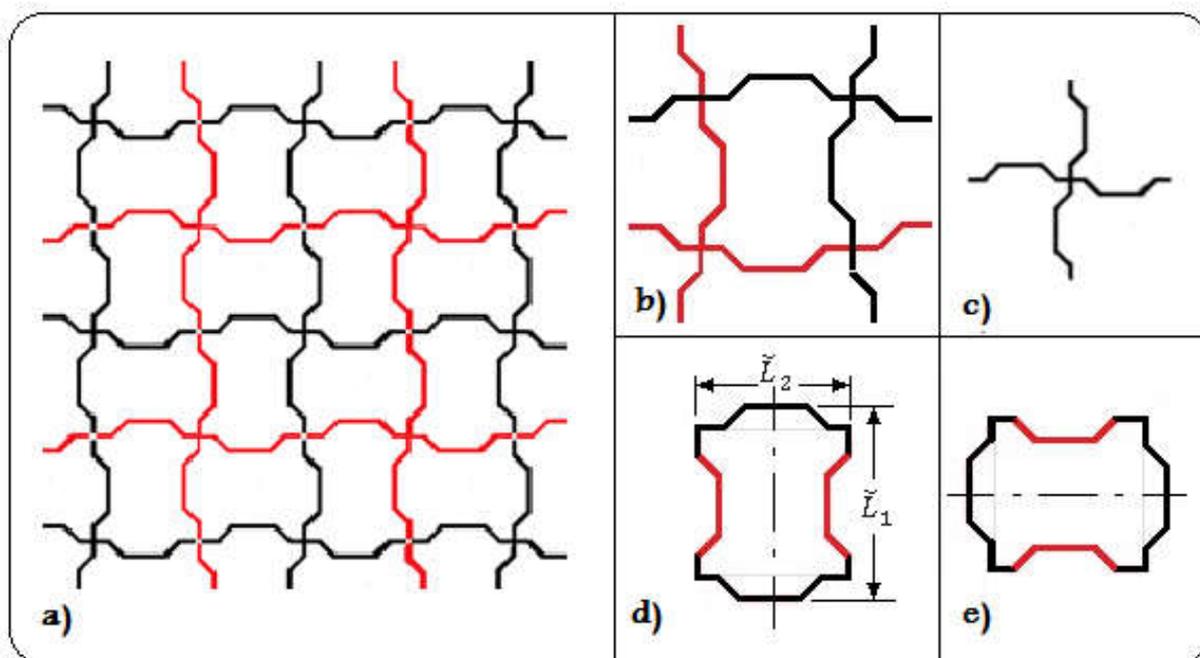


Fig.II-1 : Paquets 2D de cellules formant un réseau : a) tessellation secondaire, b) VER, de tessellation secondaire, c) VER, de la tessellation primaire, d) lien ré-entrant parallèle à la direction verticale des cellules, e) lien ré-entrant parallèle à la direction horizontale des cellules.

Afin de générer cette structure, deux scénarios s'offrent à nous : le premier consiste à considérer le réseau primaire comme étant le même réseau identique généré par un volume élémentaire représentatif (V.E.R.) de la tessellation primaire (figure II-1 (c)) reliés entre eux par les extrémités de leurs bords. Un deuxième réseau primaire identique vient s'enchevêtrer dans le premier (figure II-2) de la façon citée précédemment. La seconde façon est de considérer, plus simplement, que la structure est générée par un volume élémentaire représentatif constitué de quatre cellules ; Deux cellules disposées verticalement et deux autres disposées horizontalement (fig. II-1 (a)). La génération de la structure est obtenue par la répétition, dans les directions x_1 et x_2 , de ce V.E.R. Cette modélisation n'est pas sans avantages, car c'est cet agencement côte à côte des cellules verticales et horizontales, simultanément et dans les deux directions x_1 et x_2 , qui donnera une orthotropie plane à la structure alvéolaire. Un troisième scénario révèle une cellule unitaire (fig. II-3b) comme étant

le maillon générant notre structure cellulaire. C'est principalement autour de ce modèle que notre étude évoluera.

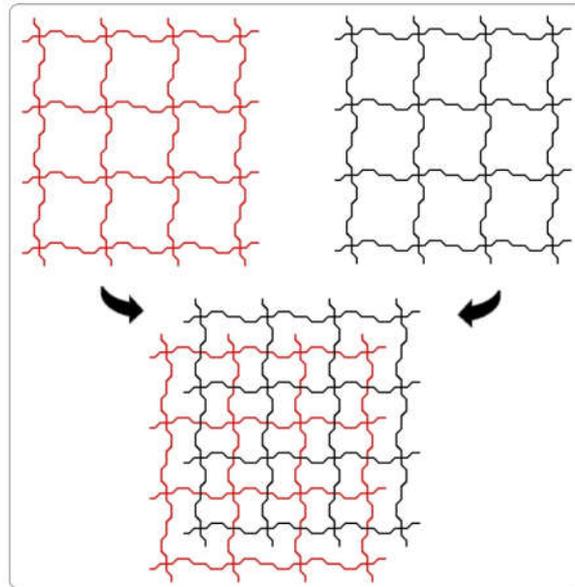


Fig.II-2 : Tessellation du solide cellulaire.

2.1 Caractéristiques géométriques de la cellule à liens ré-entrants :

Les cellules unitaires, empacétées pour remplir un plan en deux dimensions, constituent la structure alvéolaire étudiée (fig. II-3 (a)). Cette dernière est composée de sommets formés par l'intersection des arêtes constituant les cellules. Le nombre d'arêtes qui se rencontrent à un sommet s'appelle la connectivité d'arête et est désigné par E_C . (Généralement trois dans un nid d'abeille et quatre dans une mousse, mais il peut avoir d'autres valeurs).

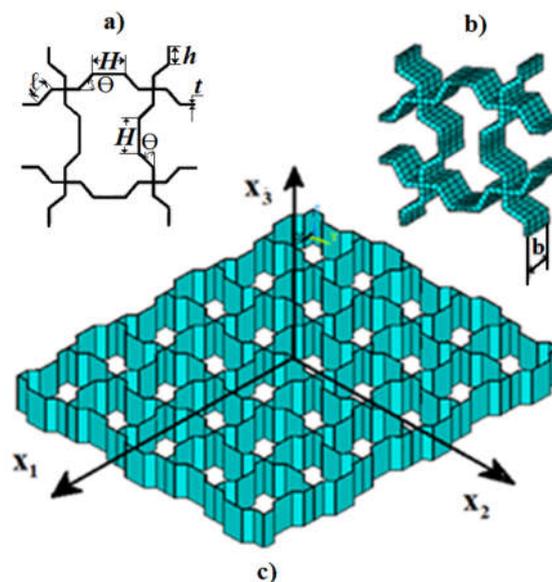


Fig. II-3 : Modèle de cellule unitaire et ses caractéristiques géométriques :
a) Cellule unitaire 2D, b) Cellule unitaire 3D, c) génération de la structure.

La nouvelle cellule présentée ici à six paramètres caractéristiques : θ définit l'angle d'inclinaison du lien de longueur ℓ , H : longueur du grand clinquant, h : longueur du petit clinquant, t : épaisseur, b : hauteur des parois des cellules (fig. II-3).

Les propriétés dépendent également de la manière dont les cellules de l'unité sont ordonnées dans la structure en réseau, donnant des structures avec une connectivité de bord différente. Le nombre d'arêtes qui se rencontrent au sommet est la connectivité d'arête, $E_c = 4$, et le nombre de sommets par cellule, $V = 4$. Ces chiffres sont liés au nombre de faces selon la loi d'Euler [6,75] :

$$F - E_c + V = 1 \quad (1)$$

où F est le nombre de cellules. La cellule à lien ré-entrant est une cellule à quatre côtés ($F = 1$, $E_c = 4$, $V = 4$) (Fig. II-3 (b) et (c)) qui a été dessinée par des liens qui forment les bords de la cellule. Les liens se rejoignent aux sommets, quatre bords de cellule se rejoignant à chaque sommet, ce qui donne une connectivité au bord de quatre.

La forme de la cellule est l'un des paramètres les plus importants pour les propriétés de la structure ; les cellules à lien ré-entrant sont légèrement allongées dans le sens longitudinal et présentent la plus grande dimension de cellule principale, \check{L}_1 de 14,83 mm et la plus petite dimension de cellule principale, \check{L}_2 de 14,12 mm, donnant le rapport d'anisotropie de forme, $R = \check{L}_1 / \check{L}_2$ de 1,05 rendant notre structure transversalement isotrope (cas particulier de l'orthotropie).

Tableau II.1: Caractéristiques géométriques, physiques et mécaniques de la nouvelle cellule.

Nomenclature			
$\theta = 45^\circ$	Angle interne de la cellule (angle d'inclinaison du lien incliné)	ρ^*	Densité du volume total de la structure,
$H = 2\ell = 2h = 6\text{mm}$,	Longueurs des murs de la cellule,	ρ_s	Densité du matériau de base,
$t = 0.3 \text{ mm}$	Épaisseur de la cellule unitaire,	$\rho_r = \rho^* / \rho_s$	Densité relative de la structure,
$b = 3\text{mm}$	Hauteur du mur de la cellule,	E_s	Module de Young du matériau de base,
$\alpha = H/\ell = 2$	Rapport de l'aspect de la cellule,	E_1, E_2	Modules de Young dans le plan de la structure,
$\beta = h/\ell = 1$	Rapport du petit lien,	ν_{12}	Coefficient de Poisson dans le plan de la structure,
$\gamma = t/\ell = 0.1$	Rapport de l'épaisseur,		

De plus, les propriétés dépendent de la direction, de sorte que notre structure alvéolaire est un cas particulier de structure orthotrope en raison de la disposition alternée et périodique de cellules verticales et horizontales dans les directions 1 et 2, ce qui donnera une orthotropie dans le plan (équivalence entre 1 et 2 directions) à la structure. Le tableau II-1 résume la désignation des caractéristiques géométriques et mécaniques de la nouvelle cellule.

La plupart des propriétés des solides cellulaires dépendent de la façon dont le solide est distribué dans les cellules. La densité relative est, alors, la caractéristique structurelle la plus importante d'un solide cellulaire [6,76] :

$$\rho_r = \rho^* / \rho_s \quad (2)$$

où ρ^* est la densité de la structure, ρ_s la densité de matériau de base. La propriété complémentaire de la densité relative est la porosité qui est la fraction de l'espace poreux dans la structure, donnée par :

$$\Psi = 1 - \rho_r \quad (3)$$

Toutes les parois cellulaires, de la structure objet de l'étude, ont la même épaisseur, ce qui donne une répartition égale de la matière dans toute la structure alvéolaire. Dans ce cas, la densité relative est exprimée avec une simple fonction de l'épaisseur t et du rapport d'épaisseur $\gamma = t/\ell$. Pour des paramètres géométriques variants, la densité relative devient une fonction de : h, ℓ, H et θ et α, β , et γ des paramètres géométriques de la cellule et de leurs rapports, respectivement. La géométrie relativement simple, de la structure, nous mène aux expressions de la densité relative :

$$\rho_r = \frac{\rho^*}{\rho_s} = \frac{V_s}{V^*} = 4\gamma \frac{(\gamma + 2\alpha + 4(\beta + 1))}{(2\alpha + \beta + \cos\theta)^2} \quad (4)$$

où $\gamma = t/\ell$, $\alpha = H/\ell$ et $\beta = h/\ell$,

ce qui rend la densité relative explicitement exprimée en fonction de γ , α et β , représentant: le rapport, ou ratio, d'épaisseur, le rapport du grand lien et le rapport d'aspect, respectivement.

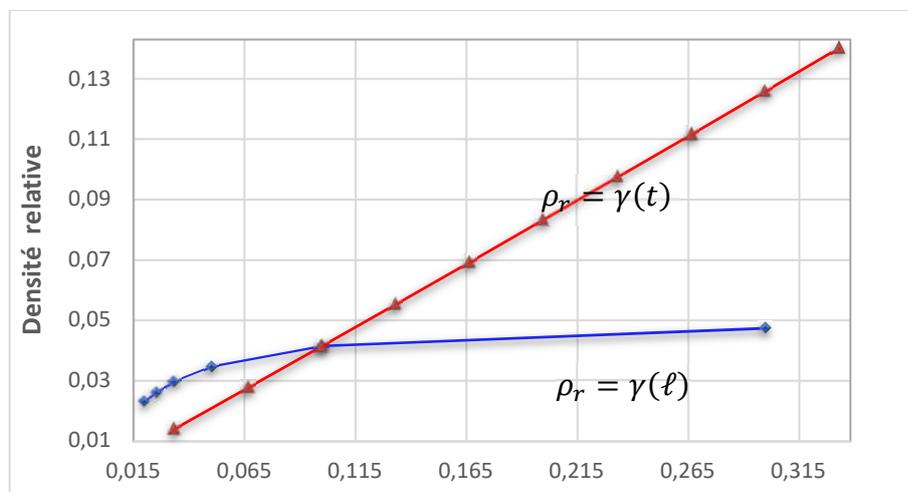


Fig. II-4 : Densité relative en fonction du rapport de l'épaisseur γ pour t et ℓ variables.

Et pour $h = \ell = \frac{H}{2} = 3\text{mm}$ et $\theta = 45^\circ$, donnant : $\alpha = H/\ell = 2, \beta = 1$ et $\gamma = t/\ell = 0$ la densité relative sera réduite à :

$$\rho_r = \frac{\rho^*}{\rho_s} = 0,707388 \quad (5)$$

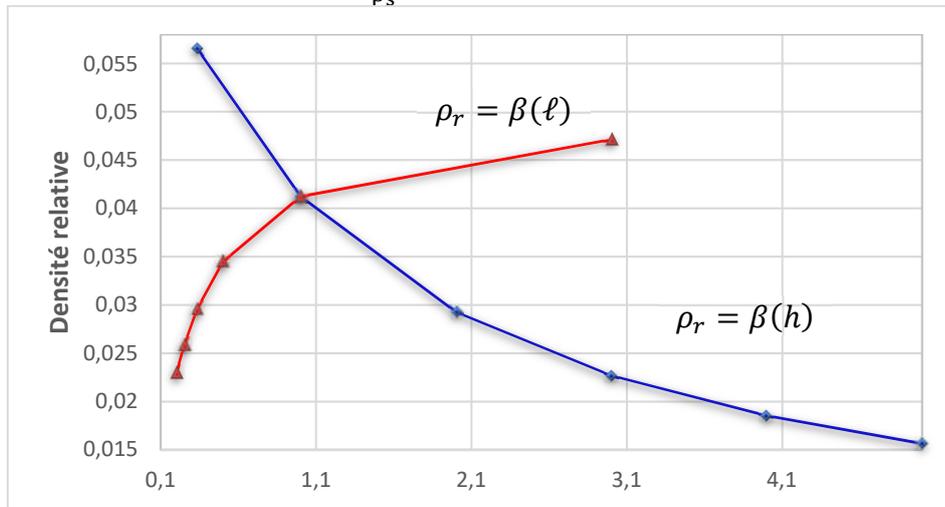


Fig. II-5 : Densité relative ρ_r fonction du rapport du petit clinquant β .

Les dépendances entre la densité relative et les différents rapports de géométrie α , β et θ sont illustrées dans les figures II-4 à 7. La figure II-4 affiche la courbe de variation de la densité relative en fonction du rapport d'épaisseur $\gamma = t/\ell$, la courbe bleue montre que l'augmentation de γ a été obtenue en faisant varier ℓ , la rouge indique la variation de la densité relative par rapport au rapport d'épaisseur γ , mais obtenu, en ce temps, en faisant varier l'épaisseur t et en maintenant ℓ fixe. Les deux courbes montrent une proportionnalité entre ρ_r et γ .

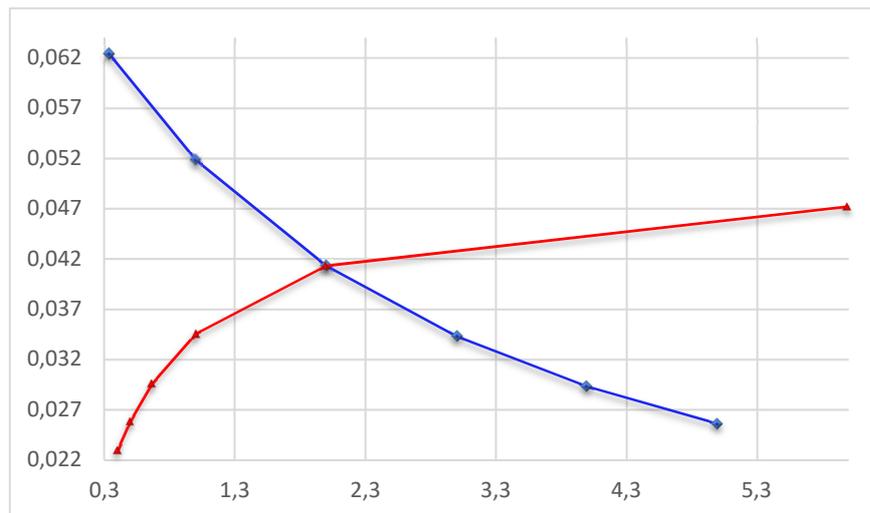


Fig. II-6 : Densité relative en fonction du rapport de l'aspect α pour ℓ et H variables.

La figure II-5 affiche la variation de la densité relative en fonction du ratio du petit clinquant β . La courbe rouge obtenue, qui montre l'augmentation de ρ_r avec β , a été obtenue en diminuant ℓ et en maintenant h fixe, en raison de la diminution du volume de la cellule

lorsque ℓ diminue. Inversement, la partie bleue de la courbe, obtenue en faisant varier h et en maintenant ℓ fixe, affiche une diminution de ρ_r provoquée par l'augmentation de volume lorsque h augmente.

La figure II-6 affiche la courbe de variation de la densité relative en fonction du rapport de forme $\alpha = H/\ell$, la courbe bleue montre que l'augmentation de α a été obtenue en faisant varier ℓ et en maintenant H fixe, la courbe rouge indique la variation de la densité relative par rapport au ratio d'épaisseur γ , mais obtenu, dans ce temps, en augmentant la longueur du grand lien H et en maintenant ℓ fixe. Les deux courbes montrent une diminution de ρ_r en augmentant α . La courbe, dans la figure II-7, affiche une valeur constante de la densité relative lors de l'augmentation de l'angle d'inclinaison θ jusqu'à 60° et une augmentation exponentielle entre 60° et 90° , en raison du $\sin\theta$ qui devient plus significatif sur 60° . Nous notons également que pour $\theta = 45^\circ$, la densité relative est d'environ 0,04.

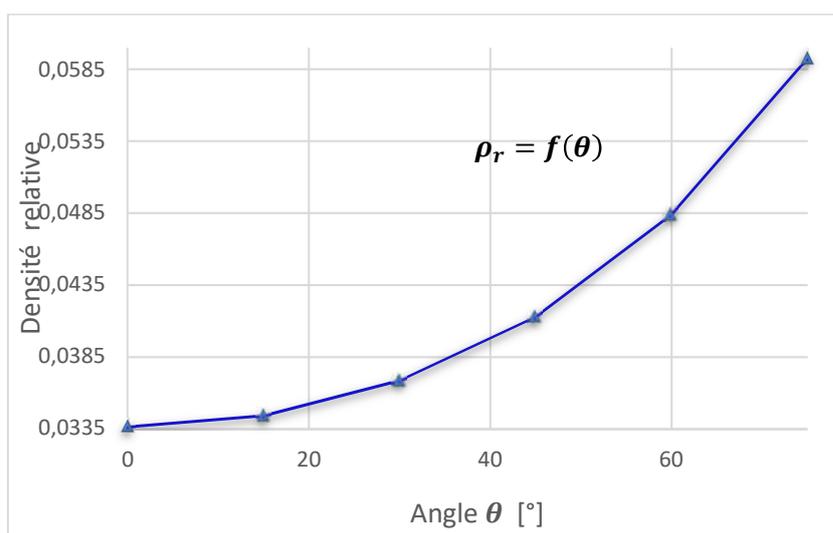


Fig. II-7 : Densité relative ρ_r en fonction de l'angle θ .

La symétrie, de la cellule, par rapport aux trois plans (relativement à sa géométrie et à la répartition de la matière) rend la structure orthotrope. D'autres part, le nid d'abeille est généré par un arrangement, simultané de cellules horizontale et verticale, et de manière périodique suivant les directions x_1 et x_2 , en vue d'obtenir une distribution homogène de la matière dans le plan. Ce qui donne à la structure son caractère d'isotropie transversale. Pour un matériau transversalement isotrope nous définissons les matrices de souplesse et de rigidité dans un système de coordonnées x_1 , x_2 et x_3 , choisis de sorte à avoir l'axe x_3 perpendiculaire au plan d'isotropie [77-84].

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \quad (6)$$

La matrice de rigidité est obtenue par l'inversion de la matrice de souplesse. Les éléments de la matrice de rigidité sont :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Dans les deux matrices ci-dessus, des 12 éléments non-nuls seulement 5 sont indépendants. Donc, pour un matériau, à isotropie transversale, nous avons [6,76,80]:

$$\begin{array}{l} \text{isotropie} \\ \text{transversale:} \end{array} \quad \begin{array}{l} E_1, E_3, G_{13}, \nu_{12} = \nu_{21}, E_1 = E_2, G_{23} = G_{13}, \nu_{23} = \nu_{13}, G_{12} = \\ \nu_{13} \quad \frac{E_1}{2(1+\nu_{12})} \end{array} \quad (8)$$

Ce qui donne une matrice de souplesse, pour un matériau transversalement isotrope, exprimée en termes de constantes d'ingénieur :

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_1} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{31}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{12})}{E_1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Pour identifier les propriétés élastiques, dans le plan, de la structure doublement périodique nous devons effectuer un essai de traction ou de compression et un essai de cisaillement. L'essai de compression pour déterminer : $E_1 = E_2$ et $\nu_{12} = \nu_{21}$ et l'essai de cisaillement pour obtenir G_{12} .

3. Modèle analytique :

En général, quand un nid d'abeille, sollicité dans la direction x_1 ou x_2 , se déforme de façon linéaire élastique, les murs de la cellule fléchissent. La réponse est, convenablement, décrite par quatre modules : deux modules de Young, E_1 et E_2 , un module de cisaillement G_{12} et un des deux rapports de poisson ; ν_{12} ou ν_{21} . Tout le long de cette modélisation nous suivrons la procédure donnée par L. Gibson dans [6]. Les modules de Young E_1 et E_2 et les coefficients de Poisson ν_{12} ou ν_{21} sont liés par la relation réciproque :

$$E_1\nu_{21} = E_2\nu_{12} \quad (10)$$

3.1. Sollicitation en compression dans les directions x_1 et x_2 :

Lors du chargement, soit dans la direction x_1 (ou x_2), les efforts sont transmis par les nœuds. Ainsi, les membres horizontaux sont sollicités en flexion et les membres verticaux sont entraînés en rotation (les membres verticaux sont sollicités en flexion et les membres horizontaux sont entraînés en rotation) (figure II-8(c)-(d)). En conséquence, les mêmes mécanismes de déformations se produisent lors du chargement dans les deux directions. De ce fait nous allons générer, en détail, seulement les expressions donnant les propriétés mécaniques obtenues lors du chargement dans la direction x_1 .

La symétrie de la géométrie nous permet de ne considérer que le huitième du V.E.R. (fig. II-8(a)-(b)). Le moment M tendant à fléchir la paroi de la cellule (que nous traitons comme étant une poutre de longueur, ℓ , d'épaisseur, t , de profondeur, b , et de module de Young, E_s) est [6,68,85-87] :

$$M = \frac{P\ell\sin\theta}{3} \quad (11)$$

$$\text{où } P = \sigma_1(2H + (\ell\cos\theta + 4h)b).$$

En choisissant la convention qui stipule qu'un moment dirigé vers le bas est négatif, la distribution du moment fléchissant le long des parois de la cellule s'écrit :

$$\begin{aligned} M(x) &= M & 0 \leq x \leq h \\ M(x) &= M - \frac{P}{3}x\sin\theta & 0 \leq x \leq \ell \\ M(x) &= M - \frac{P}{3}\ell\sin\theta & 0 \leq x \leq H/2 \end{aligned}$$

La densité d'énergie de déformation élastique U_0 , pour un élément cartésien dans un état général de stress, est [78]:

$$U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}) \quad (12)$$

Par conséquent, l'expression générale de l'énergie de déformation interne totale dans un corps linéairement élastique est :

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz \quad (13)$$

En mécanique du solide, on considère une classe moins générale de problèmes, et l'équation. 12 se simplifie à :

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz \quad (14)$$

suffisante pour déterminer l'énergie de déformation dans des barres chargées axialement comme dans les poutres pliées et cisillées.

Pour les matériaux élastiques linéaires et pour les contraintes uniaxiales, $\varepsilon_x = \sigma_x/E$ et pour le cisaillement pur, $\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$. Ainsi, l'équation 14 peut être réécrite sous la forme suivante [6,78] :

$$U = \iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dx dy dz + \iiint_V \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dx dy dz \quad (15)$$

ou :

$$U = \iiint_V \frac{E \varepsilon_x^2}{2} dx dy dz + \iiint_V \frac{G \gamma_{xy}^2}{2} dx dy dz \quad (16)$$

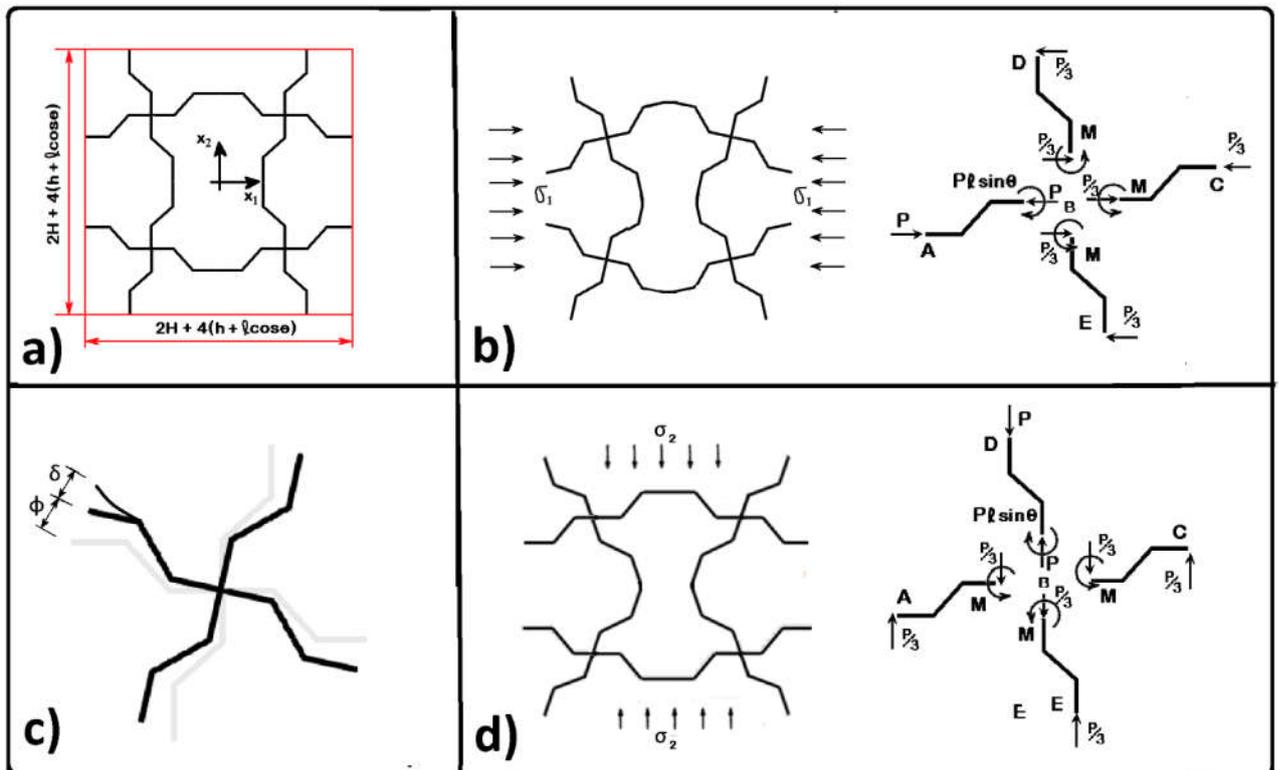


Fig. II-8: Déformation de la cellule par la flexion des parois cellulaires, donnant une extension ou compression, linéaire élastique, du réseau cellulaire : a) Configuration non déformée avec dimensions du V.E.R., b) Quart symétrique du V.E.R. ; illustration exagérée de la rotation ϕ et de la flèche δ , c) et d) Flexion causée par la sollicitation, dans les directions x_1 et x_2 .

Ces équations peuvent être réécrites pour les solutions rencontrées en mécanique des solides. De cette manière, les intégrales triples sont réduites à des intégrales simples.

En flexion pure, L'énergie de déformation élastique d'une poutre autour de l'un de ses axes principaux se réduit à une intégrale le long de la longueur de poutre L, c'est-à-dire :

$$U = \iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \int_L \frac{M^2}{2EI} dx \quad (17)$$

qui est l'expression de l'énergie de déformation pour les poutres en flexion, où M est le moment de flexion, et I est le moment d'inertie pour la section transversale. L'énergie de déformation totale du système U peut être réécrite comme suit [88-90] :

$$U = \frac{1}{2EI} \left[\int_0^H M^2 dx + \int_0^\ell \left(M - \frac{P}{3} x \sin\theta \right)^2 dx + \int_0^h \left(M - \frac{P}{3} \ell \sin\theta \right)^2 dx \right] \quad (18)$$

Qui s'écrit après intégration :

$$U = \frac{M^2 \ell}{6EI} (h/\ell + 1) = \frac{M^2 \ell}{6EI} (3\beta + 1) \quad (19)$$

En remplaçant le moment M par sa valeur, U s'écrit :

$$U = \frac{P^2 \ell^3 \sin\theta}{54EI} (3\beta + 1) \quad (20)$$

le théorème de Castigliano nous permet d'obtenir la flèche (en flexion pure) qui peut être déterminée par :

$$\delta = \frac{dU}{dP} = \frac{P \ell^3 \sin\theta}{27EI} (3\beta + 1) \quad (21)$$

où I est le deuxième moment d'inertie de la paroi de la cellule ($I = bt^3/12$ pour une paroi d'épaisseur uniforme t). La déformation ε_1 est donnée par:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\delta \sin\theta}{H/2+h+\ell \cos\theta} = \frac{2P \ell^2 (\sin\theta)^2}{27EI} \cdot \frac{3\beta+1}{\alpha+2(\beta+\cos\theta)} \quad (22)$$

L étant, bien sur, la longueur initiale, dans la direction de la sollicitation, du huitième du V.E.R. Les modules de Young $E_1 = \sigma_1/\varepsilon_1 = E_2 = \sigma_2/\varepsilon_2$, rapportés au module de Young du solide constituant la structure cellulaire, valent :

$$\frac{E_1}{E_s} = \frac{E_2}{E_s} = 1,125 \left(\frac{t}{\ell} \right)^3 \cdot \frac{\alpha+2(\beta+\cos\theta)}{[\alpha+2(\beta+\cos\theta+\sin\theta)](3\beta+1)\sin^2(\theta)} \quad (23)$$

Cette déformation transversale, s'écrit :

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta \cos\theta}{\ell \sin\theta} = \frac{P \ell^2 \cos\theta}{27EI} (3\beta + 1) \quad (24)$$

La variation du rapport $\gamma = t/\ell$ n'a aucune incidence sur la valeur du coefficient de Poisson ν_{12} . Ce coefficient de Poisson est calculé par :

$$\nu_{12} = \nu_{21} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\frac{1}{4} \frac{[\alpha+2(\beta+\cos\theta)]}{\sin\theta[\sin\theta+(\alpha+2(\beta+\cos\theta))]} \quad (25)$$

3.2 Sollicitation en cisaillement :

En raison de la symétrie, il n'y a pas de mouvement relatif entre les points A, B, C, D et E lorsque le nid d'abeilles est cisailé ; la flèche de cisaillement est entièrement due à la flexion de la poutre BD et à sa rotation (d'un angle ϕ) autour du point B. Les efforts sont représentés sur la figure II-09 [6].

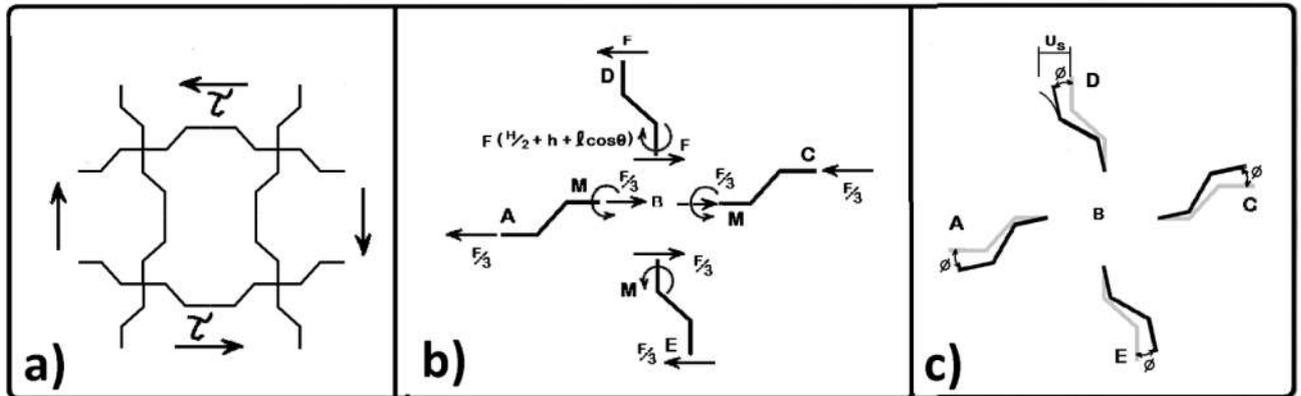


Fig. II-09: Déformation de la cellule par flexion et rotation des parois cellulaires, donnant un cisaillement linéaire élastique du réseau cellulaire : a) V.E.R. non déformé, b) et c) Efforts, moments, déplacements et rotations causés par une sollicitation en cisaillement.

La somme des moments en B donne le moment appliqué aux membres AB, BC et BE :

$$M = \frac{F\ell}{6} (\alpha + 2(\beta + \cos\theta)) \quad (26)$$

En utilisant le résultat standard : $\delta = \frac{P\ell^3}{27EI} (3\alpha + 1) = \frac{M\ell^2}{9EI} (3\alpha + 1)$. L'angle de la rotation est :

$$\phi = \frac{\delta}{H/2 + h + \ell \cos\theta} = \frac{2M\ell}{9EI} \frac{(3\alpha + 1)}{(\alpha + 2(\beta + \cos\theta))} \quad (27)$$

La flèche due au cisaillement u_s du point D par rapport au point B est :

$$u_s = \phi(H/2 + h + \ell \cos\theta) + \frac{F\ell^2}{18EI} (\sin\theta)^2 (1 + 2h)$$

$$u_s = \frac{F\ell^2}{18EI} [3(\sin\theta)^2 (1 + 2\beta) + (3\alpha + 1)[\alpha + 2(\beta + \cos\theta)]] \quad (28)$$

La déformation de cisaillement γ est donnée par :

$$\gamma = \frac{2u_s}{(H + 2(h + \ell \cos\theta))} \quad (29)$$

$$= \frac{F\ell^2}{27EI} \frac{[3(\sin\theta)^2 (1 + 2\beta) + (3\alpha + 1)[\alpha + 2(\beta + \cos\theta)]]}{\alpha + 2(\beta + \cos\theta)} \quad (30)$$

la contrainte de cisaillement, appliquées aux extrémités de l'éprouvette, est :

$$\tau = F/b(H + 2(h + \ell \cos\theta)) \quad (31)$$

donnant le module de cisaillement $G_{12} = \tau/\gamma$ ou :

$$\frac{G_{12}}{E_s} = 2,25 \left(\frac{t}{\ell}\right)^3 \frac{1}{3(\sin\theta)^2 (1 + 2\beta) + (3\alpha + 1)[\alpha + 2(\beta + \cos\theta)]} \quad (32)$$

4. Résultats et discussion :

4.1. Effet de la variation de l'angle d'inclinaison θ

Dans cette section nous allons explorer la dépendance qui existe entre l'angle d'inclinaison θ d'une part et les paramètres γ rapport de forme, β le rapport du petit clinquant et α rapport du grand clinquant :

4.1.1 Pour différentes valeurs de $\gamma = t/\ell$

Les figures II-10a, b et c affichent les évolutions des, respectivement, modules d'élasticité de Young E_1, E_2 ($E_1 = E_2$), de cisaillement G_{12} et du coefficient de Poisson ν_{12} en fonction de l'angle d'inclinaison du clinquant incliné, et ce pour différentes valeurs de γ allant de :0,0333 à 0,3333. Et les figures II-10 d, e et f affichent les évolutions de ces mêmes trois grandeurs mais en fonction de la densité relative.

La figure II-10a, symbolisant la dépendance du module de Young relatif E_1/E_s de l'angle θ , affiche une allure descendante au fur et à mesure que l'angle d'inclinaison θ augmente. Cette courbe descendante est d'autant plus aigüe au fur et à mesure que le rapport $\gamma = t/\ell$ est plus grand. C'est-à-dire que l'angle θ augmente, la cellule est de plus en plus ouverte et ceci se répercute sur son module d'élasticité.

La figure II-10b, symbolisant la dépendance du module de cisaillement relatif G_{12}/E_s de l'angle θ , affiche plutôt une courbe constante en fonction que l'angle d'inclinaison θ augmente. Cette courbe constante, traduisant l'indépendance de ce module de l'angle θ , s'élève en niveaux supérieurs au fur et à mesure que le rapport $\gamma = t/\ell$ est plus grand. C'est-à-dire que l'angle θ augmente sans influencer la valeur du module de cisaillement. Mais cette valeur est différente et à chaque fois plus grande pour des valeurs de γ plus grands.

Dans la figure II-10c qui dessinent la dépendance du coefficient de Poisson en fonction de l'angle θ pour différentes valeurs de γ , nous n'avons porté qu'une seule courbe traçant cette évolution, et ce à cause du fait que le changement de γ n'a montré aucune répercussion sur le coefficient de Poisson ν_{12} . Notons cependant, que l'intervalle de toutes les valeurs se trouve dans le cadran négatifs, confirmant, encore une fois, le caractère auxétique de cette cellule.

Les trois figures II-10 d, e et f montrent les dépendances de ces mêmes trois paramètres mais en fonction de la densité relative. La figure II-10d montre, notamment que pour les trois valeurs du rapport $\gamma = 0,0333, 0,06667$ et $0,1$, le module de Young relatif E_1/E_s est constant au fur et à mesure que la densité relative augmente. A partir de la valeur de $\gamma = 0,1333$ E_1 affiche une diminution pour ρ_r croissant, et cette proportionnalité inverse se confirme au fur et à mesure que γ augmente. Cependant, il est à relever qu'à chaque fin d'intervalle de variation de ρ_r pour γ constant, E_1/E_s tend vers une valeur constante. La figure II-10-e affiche une constance pour chaque intervalle de densité relative ρ_r mais de valeur de niveau de plus en plus supérieur au fur et à mesure que γ évolue.

Enfin, la figure II-10f, affiche une très grande sensibilité du coefficient de Poisson au moindre changement de ρ_r . La variation de γ n'a aucune incidence sur cette sensibilité. Cependant, il est à noter que ces intervalles de variations présentent à leur fins une tendance du coefficient de Poisson à prendre une valeur constante.

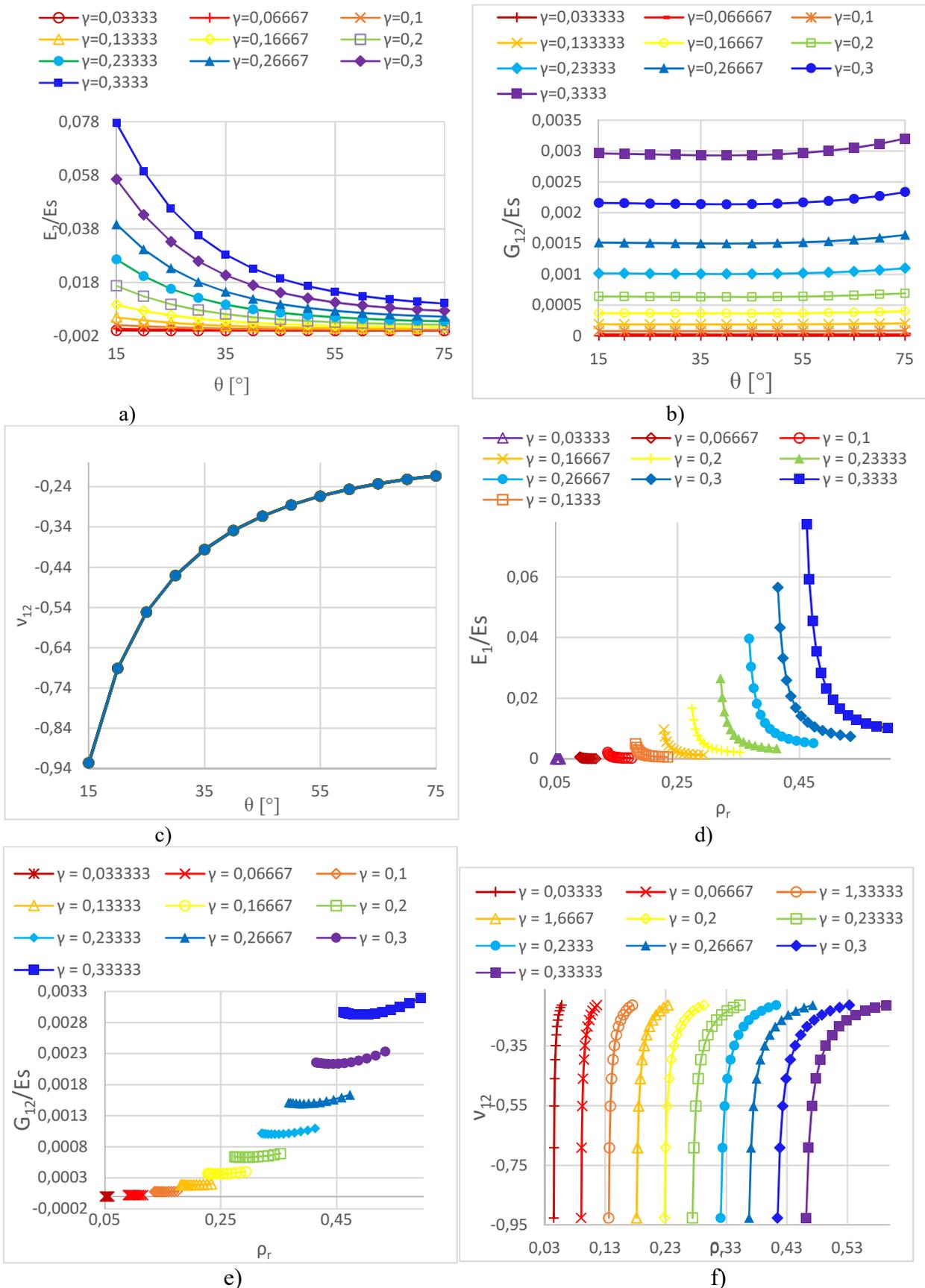


Fig. II-10 : Effet de la variation de l'angle d'inclinaison θ pour différentes valeurs de γ : a) Sur E_1 et E_2 , b) sur G_{12} , c) Sur v_{12} , d) , e) f) traçes de l'évolution de E_1 et E_2 , de G_{12} et de v_{12} en fonction de la densité relative.

4.1.2 Pour différentes valeurs de α

Les figures II-11 a, b et c affichent les évolutions des, respectivement, modules d'élasticité de Young E_1, E_2 ($E_1 = E_2$), de cisaillement G_{12} et du coefficient de Poisson ν_{12} en fonction de l'angle θ formé par le clinquant incliné et la direction des liens droits, et ce pour des valeurs de α allant de 0,333 à 6. Les figures II-11 d, e et f montrent les évolutions de ces mêmes trois grandeurs mais en fonction de la densité relative.

La figure II-11a, symbolisant la dépendance du module de Young relatif E_1/E_S de l'angle θ , affiche une allure descendante au fur et à mesure que l'angle d'inclinaison θ augmente. Cette courbe descendante se redresse de plus en plus au fur et à mesure que le rapport α augmente. C'est-à-dire que quand l'angle θ augmente la cellule est de plus en plus ouverte et ceci se répercute sur son module d'élasticité.

La figure II-11b, symbolisant la dépendance du module de cisaillement relatif G_{12}/E_S sur l'angle θ , affiche une légère courbe de proportionnalité avec l'angle d'inclinaison θ qui a tendance à s'atténuer puis à inverser de tendance pour les valeurs de $\alpha = 0,333$ et 1. Donc on en conclut que tant que α est supérieur ou égal à 2 à 6, ce qui veut dire que H soit égal à $2 \times \ell$ jusqu'à $6 \times \ell$, le module cisaillement augmente proportionnellement avec l'angle θ , et pour les valeurs de α valant 1 ou 0,333 le module de cisaillement est inversement proportionnel à l'angle θ .

Dans la figure II-11c qui dessinent la dépendance du coefficient de Poisson en fonction de l'angle θ pour différentes valeurs de α , la même tendance est observée et donc les mêmes remarques que celles formulées à l'encontre de la figure II-1c s'applique ici, à la seule différence que le bouquet des courbes s'ouvre un peu plus, signifiant que le coefficient de Poisson ν_{12} n'est pas totalement insensible à la variation de α . Notons aussi, que le caractère auxétique de cette cellule est confirmé.

Les trois figures II-11 d, e et f affichent les dépendances de ces mêmes trois paramètres mais en fonction de la densité relative. La figure II-11d montre, notamment que les quatre premières courbes (rapport $\alpha = 3,4,5$ et 6) sont des verticales ; traduisant une baisse du module de Young E_1 , à densité relative constante, pour un angle θ qui augmente. L'effet de la densité relative commence à se faire sentir à partir de la valeur de $\alpha = 2$ et moins ou les nouvelles verticales sont rallongées par des paliers horizontaux donnant un module de Young E_1 qui tend à prendre une valeur constante.

La figure II-11e affiche des courbes, de G_{12}/E_S en fonction de densité relative ρ_r , qui changent d'allure : de la proportionnalité à la proportionnalité inverse, au fur et à mesure que la valeur du rapport α diminuent

Enfin, la figure II-11f, affiche des courbes du coefficient de Poisson qui ont les mêmes tendances que celles vues plus haut, cependant qui ont de plus en plus tendance à se resserrer pour devenir des droites verticales au fur et à mesure que les valeurs du rapport α augmentent,

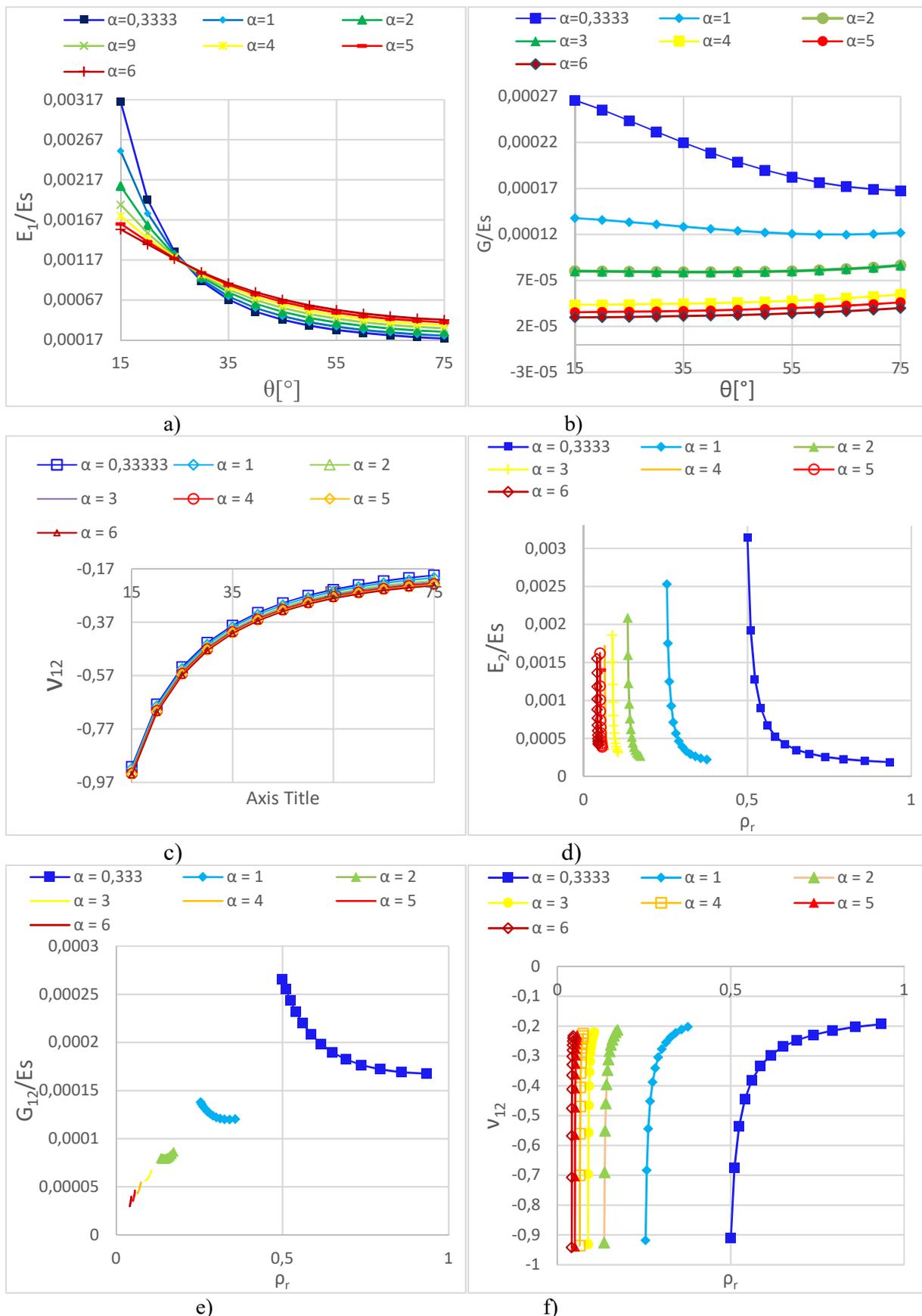


fig. II-11 : Effet de la variation de l'angle d'inclinaison θ pour différentes valeurs de α : a) Sur E_1 et E_2 , b) sur G_{12} , c) Sur v_{12} , d), e) f) tracés de l'évolution de E_1 et E_2 , de G_{12} et de v_{12} en fonction de la densité relative.

4.1.3 Pour différentes valeurs de β

Les figures II-12a, b et c affichent les évolutions des, modules d'élasticité de Young E_1, E_2 ($E_1 = E_2$), de cisaillement G_{12} et du coefficient de Poisson ν_{12} , respectivement, en fonction de l'angle d'inclinaison θ du clinquant incliné, et ce pour différentes valeurs de β qui varie de :0,333 à 6. Les figures II-12d, e et f montrent les évolutions de ces mêmes trois grandeurs mais en fonction de la densité relative, et ce pour différentes valeurs de β .

La figure II-12a, affichant la dépendance du module de Young relatif E_1/E_S de l'angle θ , montre des allures descendantes, mais à des niveaux de plus en plus bas au fur et à mesure que les valeurs de β augmentent.

La figure II-12b, symbolisant la dépendance du module de cisaillement relatif G_{12}/E_S de l'angle θ , affiche, pour les grandes valeurs de β , des courbes constantes en fonction que l'angle d'inclinaison θ augmente. Cette courbe constante traduit l'insensibilité du module de cisaillement au changement de l'angle θ . Cette constance devient une proportionnalité pour les valeurs de β de 1 et 0,333. C'est-à-dire que l'augmentation de l'angle θ est sans influence sur le module de cisaillement. Mais cette valeur est différente et à chaque fois plus grande pour des valeurs de β variant de 6 à 2. Mais pour des valeurs de β de 1 et 0.333 les courbes affichent de proportionnalité entre G_{12} et θ .

La figure II-12c affiche les courbes de variations du coefficient de Poisson en fonction de l'angle θ pour différentes valeurs de β , et qui ont la même tendance vue dans les courbes du coefficient de Poisson précédentes.

Les trois figures II-12 d, e et f affichent les dépendances de ces mêmes trois paramètres mais en fonction de la densité relative. La figure II-12d affiche des courbes qui ont les mêmes allures que celles de la figure II-11d, à une différence près que les courbes de II-11d sont sur le même palier (débutant par un niveau de $E_1/E_S = 0.0002$ jusqu'à 0.003) alors que celles de la figure II-12d chaque courbe se trouve à son niveau avec sa propre plage de variation de E_1/E_S qui commence par la valeur de 0.0001 jusqu'à 0.002.

Les figures II-12e et f affichent les mêmes tendances observées dans les figures II-11e et f, donc les mêmes remarques seront formulées, traduisant les mêmes effets de variation de β que celle de α .

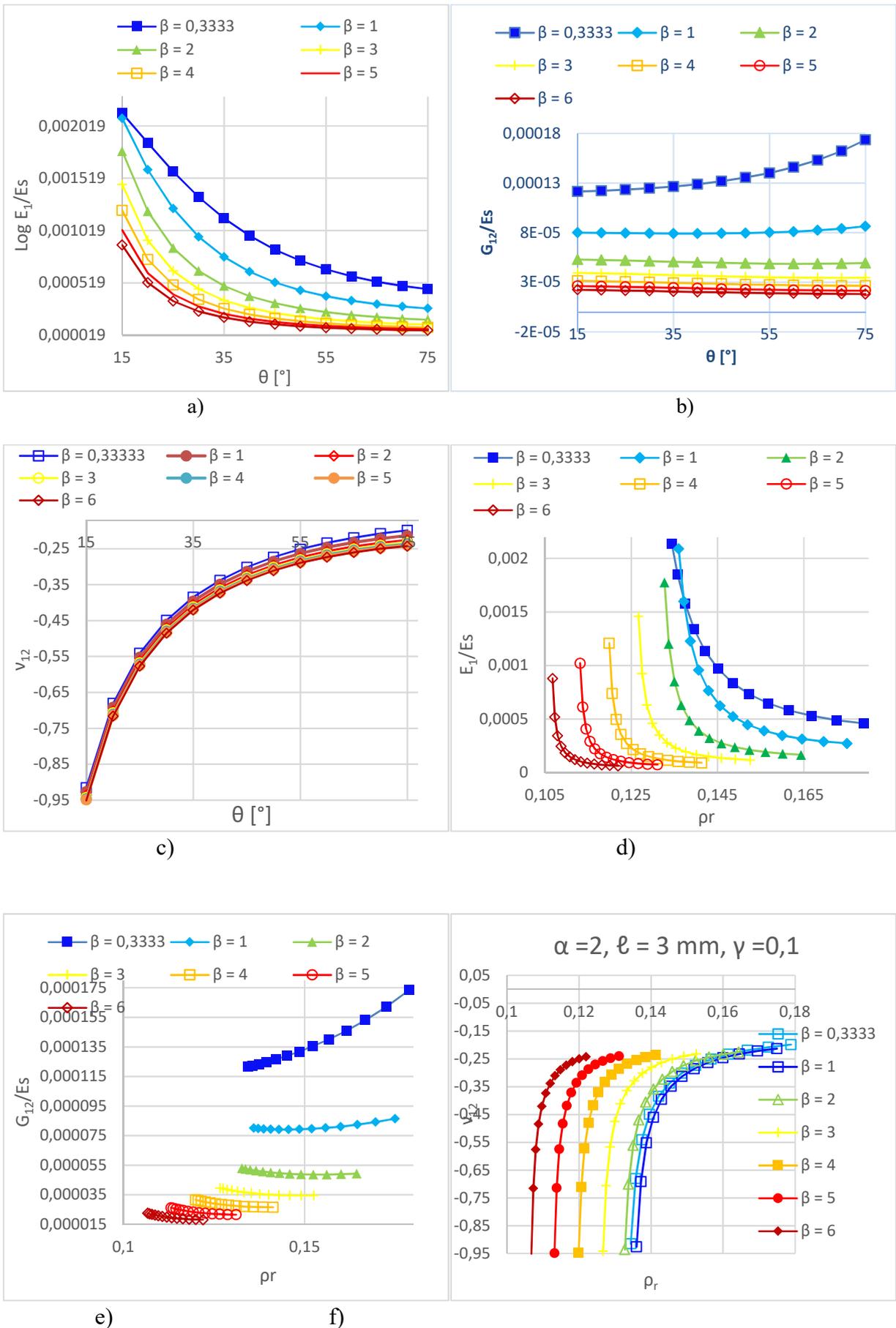


Fig. II-12 : Effet de la variation de l'angle d'inclinaison θ pour différentes valeurs de β : a) Sur E_1 et E_2 , b) sur G_{12} , c) Sur ν_{12} , d) , e) f) tracés de l'évolution de E_1 et E_2 , de G_{12} et de ν_{12} en fonction de ρ_r .

6.2. Effet de la variation de γ

6.2.1. Pour différentes valeurs de θ

Les figures II-13a, b et c affichent les évolutions des modules d'élasticité de Young E_1 , de cisaillement G_{12} et du coefficient de Poisson ν_{12} , respectivement, en fonction du rapport d'épaisseur γ , et ce pour différentes valeurs de θ allant de 15° à 75° . Les figures II-1 d, e et f affichent les évolutions de ces mêmes trois grandeurs mais en fonction de la densité relative.

La figure II-13a, présentant des courbes symbolisant la dépendance entre le module de Young relatif E_1/E_s et l'angle γ , affichent des allures ascendantes au fur et à mesure que le rapport γ augmente. La pente des courbes s'accroît de plus en plus au fur et à mesure que l'angle θ diminue. C'est-à-dire que quand θ diminue la cellule est de plus en plus rigide.

La figure II-13b, symbolisant la dépendance entre le module de cisaillement relatif G_{12}/E_s et le rapport d'épaisseur γ , présente des courbes ascendantes avec l'augmentation θ . L'éventail dans lequel se trouve l'ensemble de ces courbes est très restreint impliquant une influence insignifiante de la variation de θ sur l'évolution de G_{12} en fonction de γ .

Dans la figure II-13c qui dessinent la dépendance du coefficient de Poisson en fonction de γ pour différentes valeurs de l'angle θ , affiche des courbes constantes en fonction de γ au fur et à mesure que γ augmente. Ces droites traduisent l'absence d'influence de la variation du rapport γ sur le coefficient de Poisson. Cependant, ces droites se trouvent à des paliers de plus en plus élevés au fur et à mesure que l'angle θ augmente.

Les trois figures II-13 d, e et f affichent les dépendances de ces mêmes trois paramètres mais en fonction de la densité relative. La figure II-13d affichant la variation de E_1/E_s en fonction de la densité relative, présente les mêmes tendances des courbes de variation du module de Young relatif E_1/E_s que celle rencontrées à la figure II-13a, au fur et à mesure que la densité relative augmente.

La figure II-13e narrant l'évolution de G_{12}/E_s en fonction de la densité relative, affiche un éventail assez large de courbes à tendance de croissance en fonction de ρ_r et devient de plus en plus aigue avec la diminution de θ .

Enfin, la figure II-13f, affiche des droites horizontales, symbolisant une valeur constante du coefficient de Poisson, lors de la variation de ρ_r . Ces droites, cependant, s'étalent sur des intervalles de plus en plus larges et gravitent à des niveaux de plus en plus importants avec l'augmentation de θ .

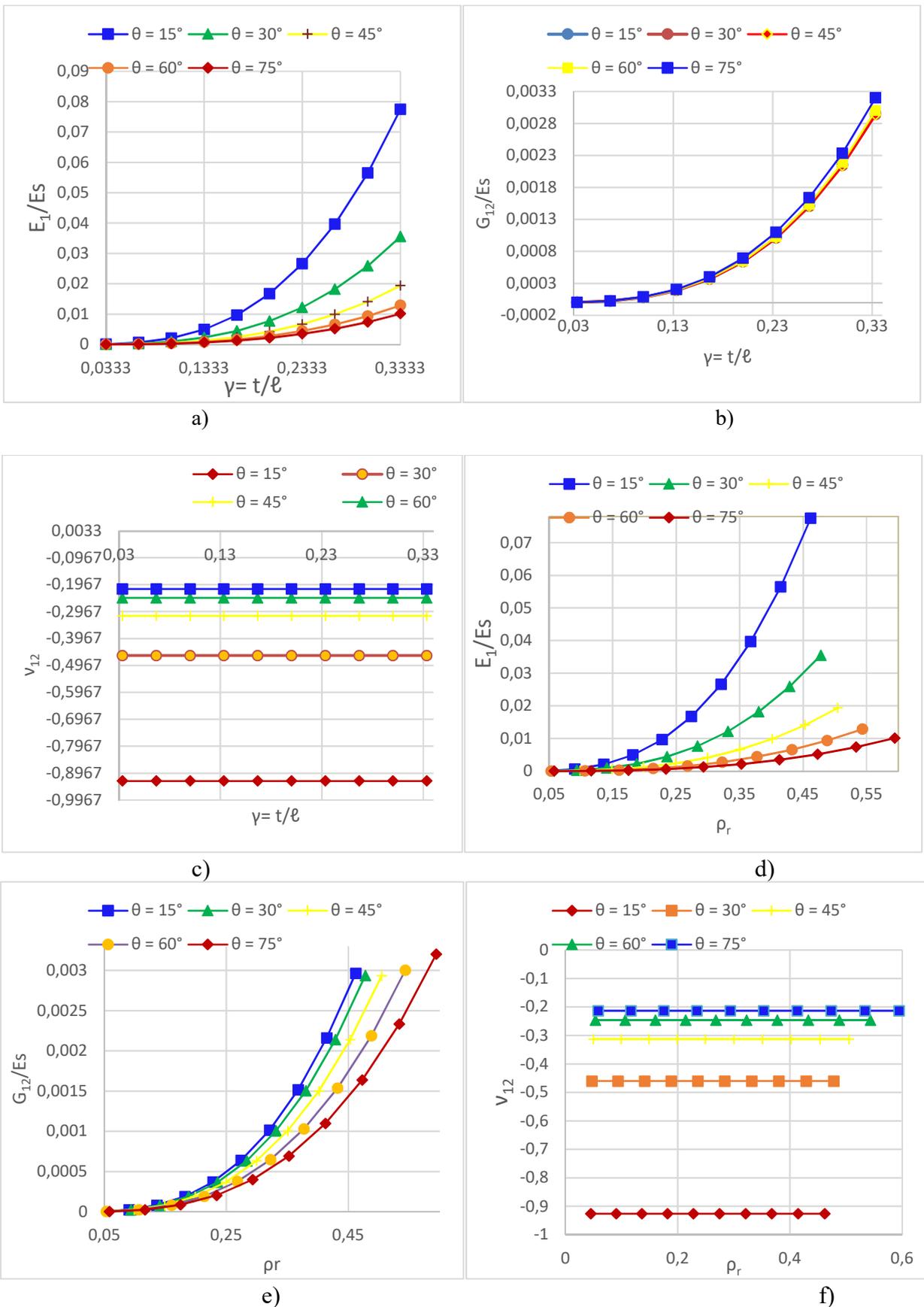


Fig.II-13 : Effet de la variation de γ pour différentes valeurs de θ : a) Sur E_1 et E_2 , b) sur G_{12} , c) Sur v_{12} , d) , e) f) tracés de l'évolution de E_1 et E_2 , de G_{12} et de v_{12} en fonction de ρ_r .

6.2.2. Pour différentes valeurs de β

Les figures II-14a, b et c affichent les évolutions des modules d'élasticité de Young E_1 , de cisaillement G_{12} et du coefficient de Poisson ν_{12} , respectivement, en fonction de l'angle d'inclinaison du clinquant oblique, et ce pour différentes valeurs de β allant de :0,333 à 6. Les figures II-14 d, e et f affichent les évolutions de ces mêmes trois grandeurs mais en fonction de la densité relative.

La figure II-14a, présentant des courbes symbolisant la dépendance entre le module de Young relatif E_1/E_s et le rapport d'épaisseur γ , affichent des allures ascendantes au fur et à mesure que le rapport γ augmente. La pente des courbes s'accroît de plus en plus au fur et à mesure que l'angle β diminue. C'est-à-dire que quand β diminue la cellule est de plus en plus rigide.

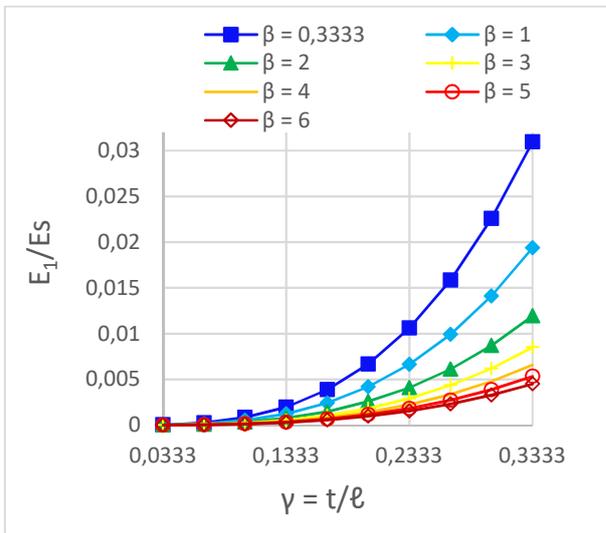
La figure II-14b, symbolisant la dépendance du module de cisaillement relatif G_{12}/E_s de l'angle γ , affiche les mêmes tendances d'ascendance que la figure II-14a, cependant à des valeurs de G_{12}/E_s de l'ordre du dixième de celles du module de Young relatif E_1/E_s .

Dans la figure II-14c qui dessinent la dépendance du coefficient de Poisson en fonction de γ pour différentes valeurs du rapport β , affiche des courbes constantes en fonction que γ augmente. Ces droites traduisant l'absence d'influence de la variation du rapport γ sur le coefficient de Poisson. Cependant, ces droites se trouvent à des paliers de plus en plus élevés au fur et à mesure que le rapport β diminue.

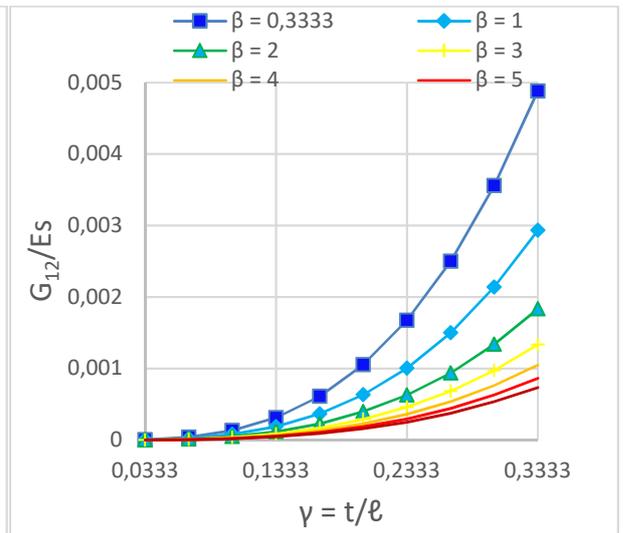
Les trois figures II-14 d, e et f affichent les dépendances de ces mêmes trois paramètres mais en fonction de la densité relative ρ_r . La figure II-14d affichent des courbes à la tendance semblable à celles de la figure II-14a et pour les valeurs du rapport β .

La figure II-14e figurant l'évolution de G_{12}/E_s par rapport à la densité relative ρ_r suscitent les mêmes observations et donc les mêmes remarques que celles avancées pour la figure II-14d.

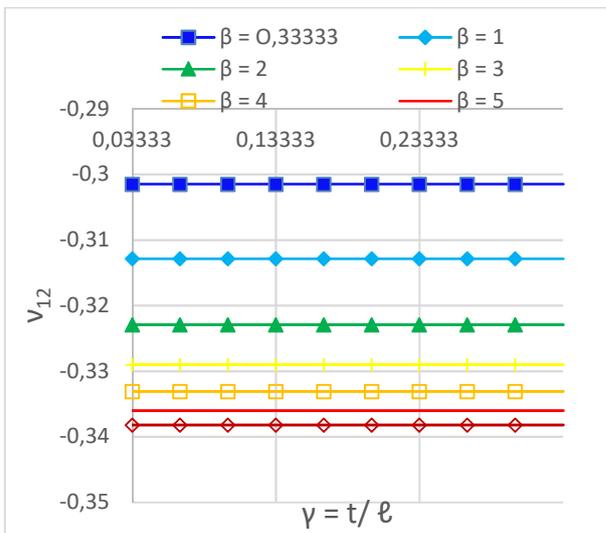
Enfin, la figure II-14f, affiche des droites horizontales, symbolisant une valeur constante du coefficient de Poisson, lors de la variation de ρ_r . Ces droites, cependant, s'étalent sur des intervalles de plus en plus larges et gravitent à des niveaux de plus en plus importants avec la diminution de β .



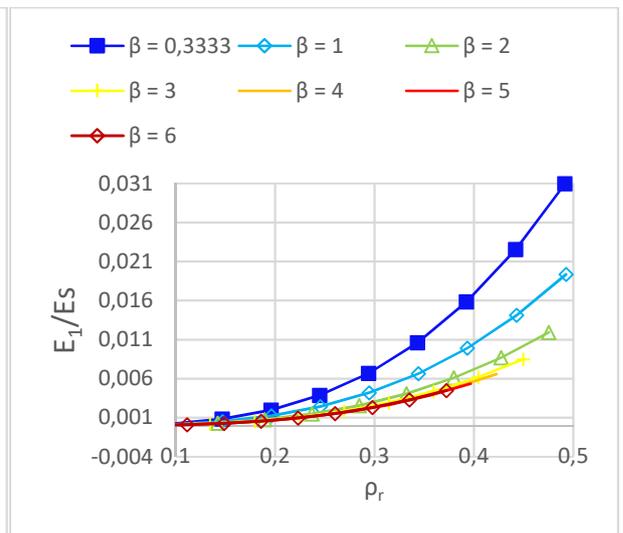
a)



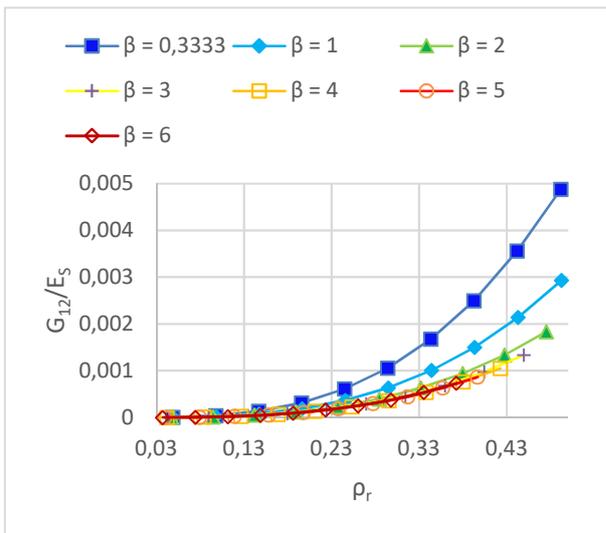
b)



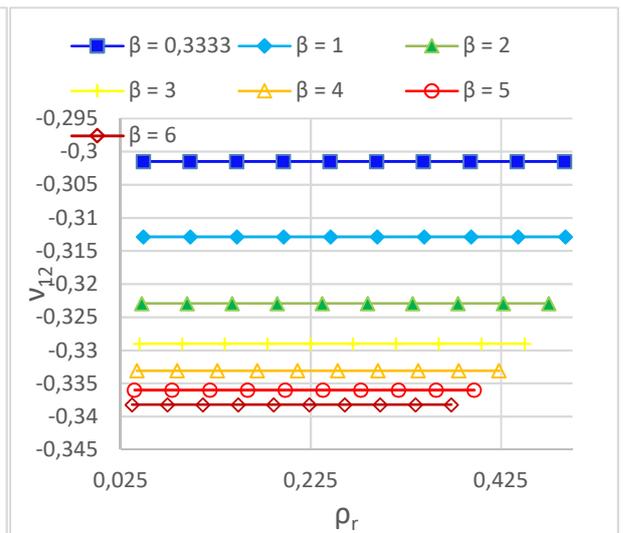
b)



d)



e)



f)

Fig.II-14 : Effet de la variation de γ pour différentes valeurs de β : a) Sur E_1 et E_2 , b) sur G_{12} , c) Sur v_{12} , d) , e) f) tracés de l'évolution de E_1 et E_2 , de G_{12} et de v_{12} en fonction de ρ_r .

4.2.3. Pour différentes valeurs de α

Les figures II-15a, b et c affichent les évolutions des modules d'élasticité de Young E_1 , de cisaillement G_{12} et du coefficient de Poisson ν_{12} , respectivement, en fonction du rapport γ , et ce pour différentes valeurs de α allant de :0,333 à 6. Les figures II-6 d, e et f affichent les évolutions de ces mêmes trois grandeurs mais en fonction de la densité relative.

La figure II-15a, symbolisant la dépendance entre le module de Young relatif E_1/E_s et le rapport γ , affiche une allure de croissance du module de Young relatif E_1/E_s . Et cette courbe voit sa pente s'accroître au fur et à mesure que le rapport α augmente.

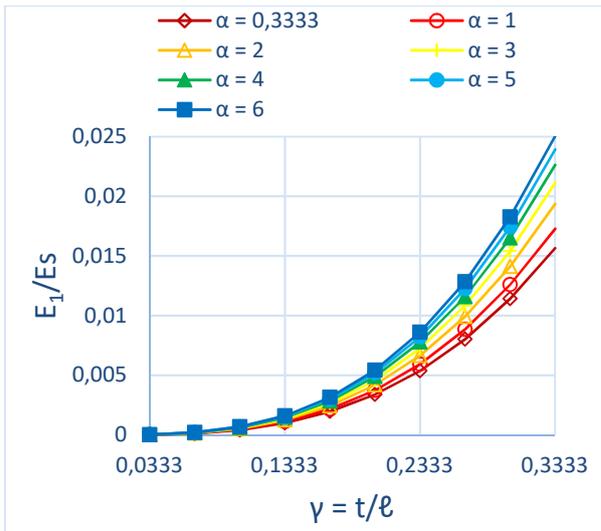
La figure II-15b, symbolisant la dépendance entre le module de cisaillement relatif G_{12}/E_s et le rapport γ , affiche des courbes de plus en plus ascendantes pour des valeurs du rapport α diminue. Cet éventail de courbes est beaucoup plus large que ceux vus dans les courbes précédentes, indiquant une sensibilité plus importante au changement des valeurs du rapport α .

Dans la figure II-15c qui dessinent la dépendance du coefficient de Poisson en fonction de γ pour différentes valeurs du rapport α , affiche des courbes constantes en fonction de γ . Ces droites traduisent l'absence d'influence de la variation du rapport γ sur le coefficient de Poisson. Cependant, ces droites se trouvent à des paliers de plus en plus élevés au fur et à mesure que le rapport α diminue

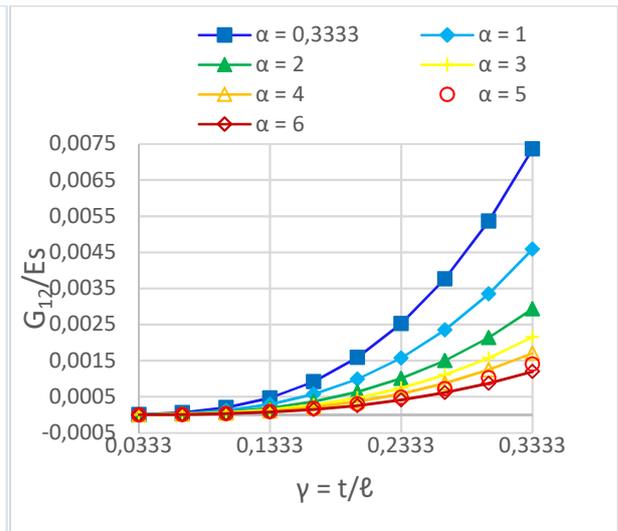
Les trois figures II-15 d, e et f affichent les dépendances de ces mêmes trois paramètres mais en fonction de la densité relative. La figure II-15d affichent, exactement, l'inverse des tendances observées dans les courbes de la figure II-10f, à savoir, au début un palier à E_1/E_s constant, puis la deuxième partie de la courbe, et à partir d'un point, présente une très grande sensibilité au moindre changement de ρ_r . Et au fur et à mesure que α augmente cette sensibilité s'accroît.

La figure II-15-e affiche des courbes, pour chaque intervalle de densité relative ρ_r , ayant la même tendance que celles des figures II-d, cependant, les valeurs de G_{12}/E_s atteintes sont contraires à celles de la figure suscitée.

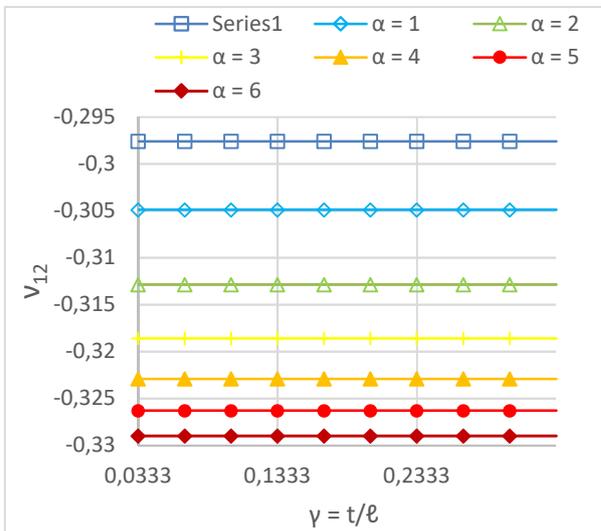
Enfin, la figure II-15f, affiche des droites horizontales, symbolisant une valeur constante du coefficient de Poisson, lors de la variation de ρ_r . Ces droites, cependant, s'étalent sur des intervalles de plus en plus larges et gravitent à des niveaux de plus en plus importants avec la diminution de α .



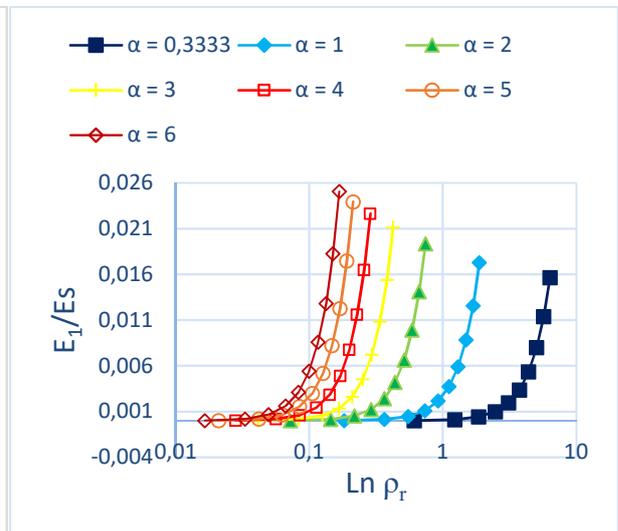
a)



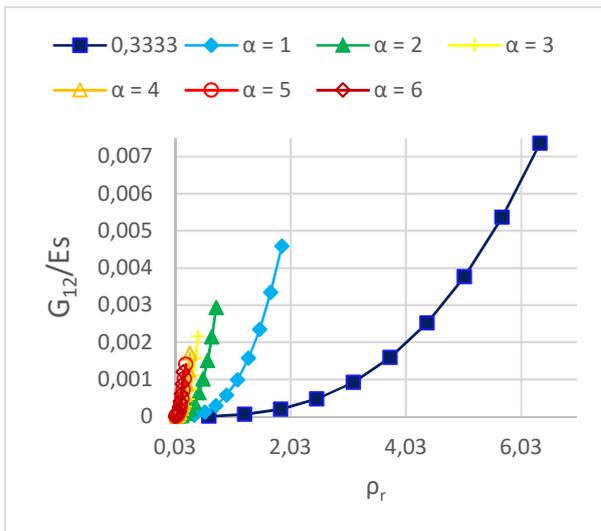
b)



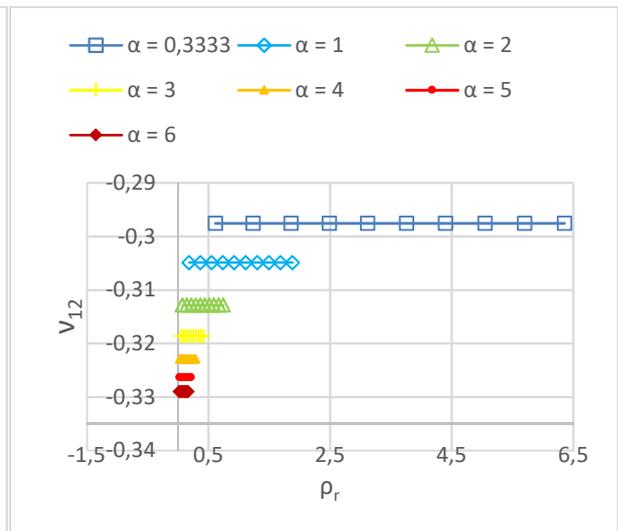
c)



d)



e)



f)

Fig.II-15 : Effet de la variation de γ pour différentes valeurs de α : a) Sur E_1 et E_2 , b) sur G_{12} , c) Sur ν_{12} , d), e) f) tracés de l'évolution de E_1 et E_2 , de G_{12} et de ν_{12} en fonction de ρ_r .

6.3. Effet de la variation de β

6.3.1. Différentes valeurs de θ

Les figures II-16a, b et c affichent les évolutions des modules d'élasticité de Young E_1 , de cisaillement G_{12} et du coefficient de Poisson ν_{12} , respectivement, en fonction de β pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison du clinquant incliné θ allant de 15° à 75° . Et les figures II-16 d, e et f affichent les évolutions de ces mêmes trois grandeurs mais en fonction de la densité relative.

La figure II-16a, montre des courbes symbolisant la dépendance entre le module de Young relatif E_1/E_s et le rapport β , affichant des allures descendantes au fur et à mesure que le rapport β augmente. Ces courbes descendantes se superposent chacune à un palier supérieur au fur et à mesure que l'angle θ diminue. C'est-à-dire que l'angle θ augmente la cellule est de plus en plus ouverte et ceci se répercute sur son module d'élasticité.

La figure II-16b, dont les courbes symbolisent la dépendance du module de cisaillement relatif G_{12}/E_s du rapport β et affichent des courbes descendantes en fonction que le rapport β augmente. Ces courbes deviennent de plus en plus aigües au fur et mesure que θ , est plus grand.

Dans la figure II-16c qui dessinent la dépendance du coefficient de Poisson en fonction de β pour différentes valeurs de l'angle θ , affiche des courbes constantes en fonction que θ augmente. Ces droites légèrement inclinées traduisent le peu d'influence qu'exerce la variation du rapport β sur le coefficient de Poisson. Cependant, ces droites se trouvent à des paliers de plus en plus élevés au fur et à mesure que l'angle θ augmente.

Les trois figures II-16 d, e et f affichent les dépendances de ces mêmes trois paramètres mais en fonction de la densité relative. La figure II-16d présentent des courbes qui affichent des tendances semblables à celles des courbes de la figure II-13-e, narrant l'évolution de G_{12}/E_s en fonction de la densité relative, mais en plus accentué, indiquant une forte influence de la variation de la densité relative sur les modules d'élasticité relatifs. Cette influence s'accroît au fur et mesure que l'angle θ diminue.

La figure II-16-e montre des courbes affichant la dépendance entre le module de cisaillement G_{12}/E_s et la densité relative ρ_r qui est de plus en plus accentuée pour des rapport α de plus en plus petit.

Enfin, la figure II-16f, affiche des droites horizontales, symbolisant une valeur constante du coefficient de Poisson, lors de la variation de ρ_r . Ces droites, cependant, s'étalent sur des

intervalles de plus en plus larges et gravitent à des niveaux de plus en plus importants avec l'augmentation de θ

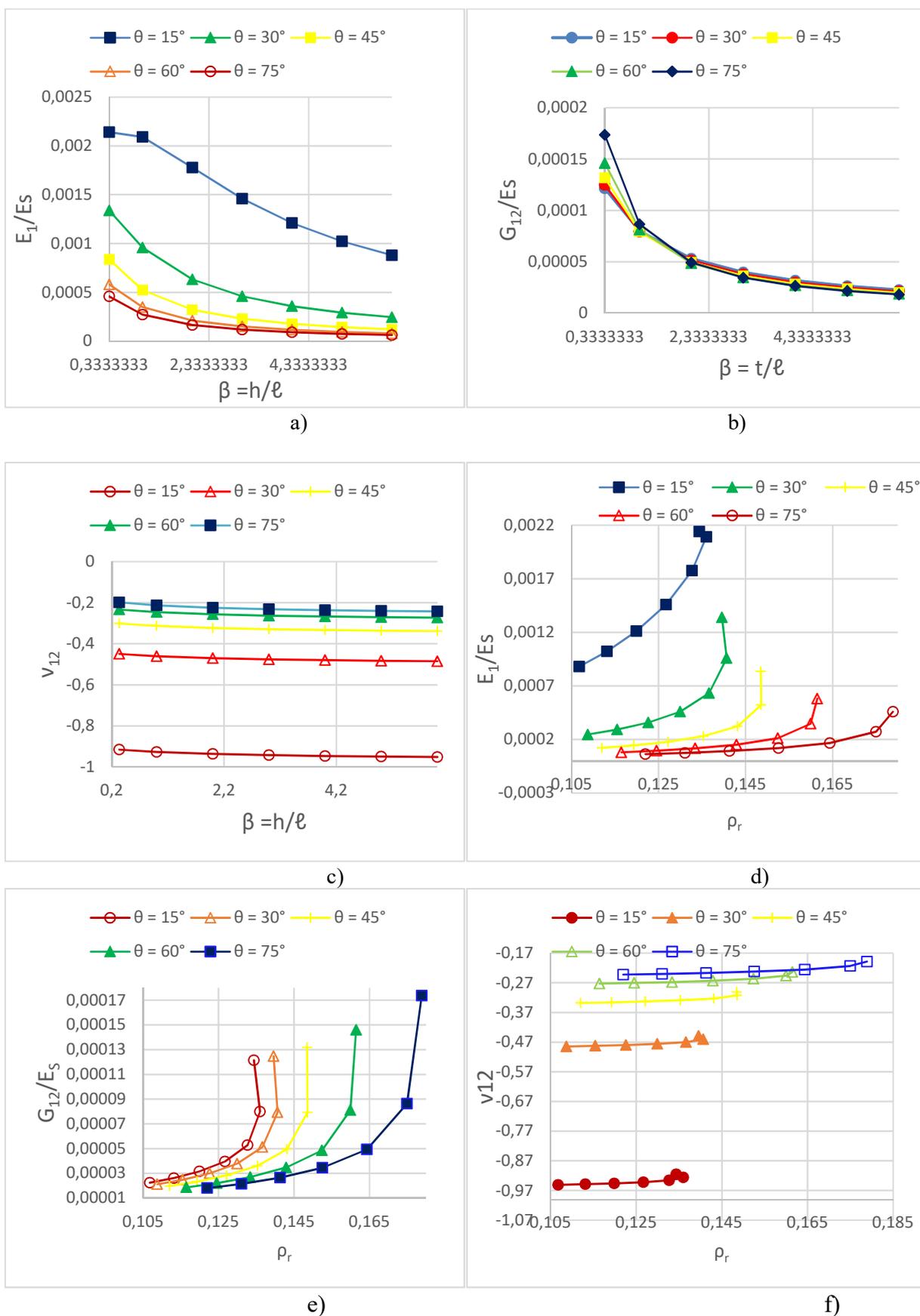


Fig.II-16 : Effet de la variation de β pour différentes valeurs de θ : a) Sur E_1 et E_2 , b) sur G_{12} , c) Sur v_{12} , d), e) f) tracés de l'évolution de E_1 et E_2 , de G_{12} et de v_{12} en fonction de ρ_r

6.3.2. Pour différentes valeurs de α

Les figures II-17a, b et c affichent les évolutions des modules d'élasticité de Young relatif E_1/E_S , de cisaillement relatif G_{12}/E_S et du coefficient de Poisson ν_{12} , respectivement, en fonction du rapport β pour différentes valeurs de α . Et les figures II-17 d, e et f affichent les évolutions de ces mêmes trois grandeurs mais en fonction de la densité relative.

La figure II-17a, affichant les courbes symbolisant la dépendance entre le module de Young relatif E_1/E_S et le rapport β , affiche des allures descendantes en fonction du rapport β . Ces courbes descendantes se superposent à des niveaux de plus en plus élevés au fur et à mesure que le rapport α est plus grand.

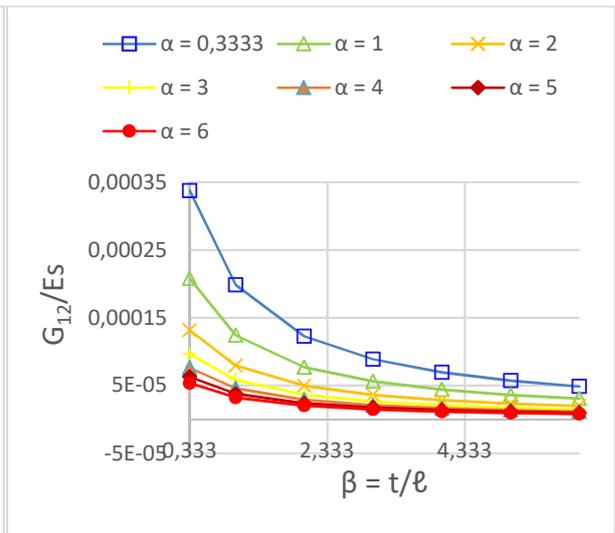
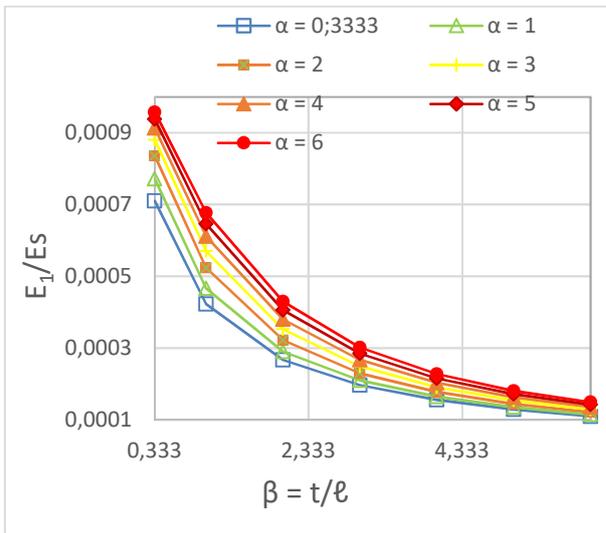
La figure II-17b, montrant des courbes symbolisant la dépendance entre le module de cisaillement relatif G_{12}/E_S et le rapport β et affichent des allures descendantes superposées en des niveaux de plus en plus importants au fur et à mesure que le rapport de α diminue.

Dans la figure II-17c, les courbes, affichant la dépendance entre le coefficient de Poisson et le rapport β pour différentes valeurs de α , affichent des allures semblables à celles de la figure II-17b, et dont la pente augmente au fur et à mesure que α diminue.

Les trois figures II-17 d, e et f affichent les dépendances de ces mêmes trois paramètres mais en fonction de la densité relative. La figure II-17d montre, notamment, pour les quatre plus grandes valeurs du rapport $\alpha = 3,4,5,6$, que les courbes du module de Young relatif E_1/E_S en fonction de la densité relative sont des verticales, alors que pour les trois petites valeurs de $\alpha = 2,1,0.333$ ces courbes prennent de plus en plus des allures de proportionnalité avec l'augmentation de la densité relative.

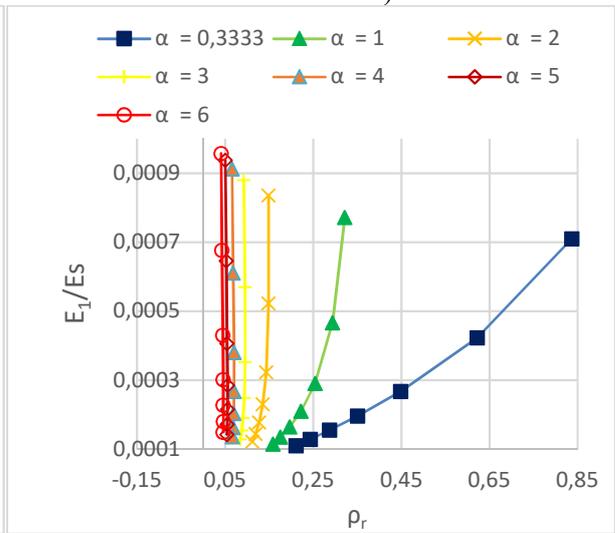
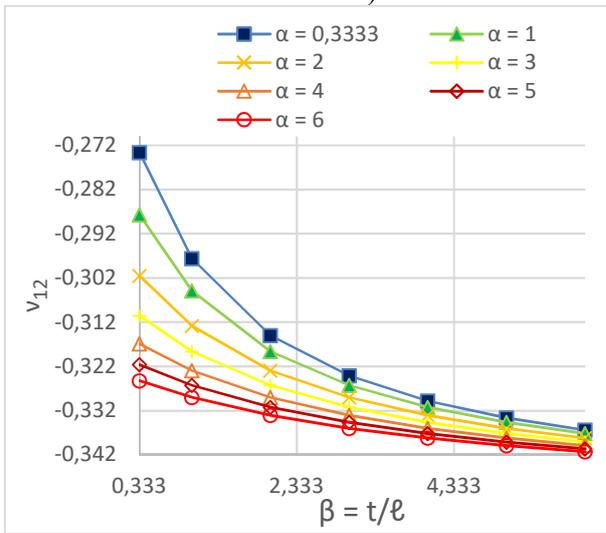
La figure II-17-e affiche des courbes, pour chaque intervalle de densité relative ρ_r , ayant la même tendance que celles des figures II-15-e, cependant, les valeurs de G_{12}/E_S atteintes sont de plus en plus grandes et les courbes de plus en plus allongées au fur et à mesure que α devient petit.

Enfin, la figure II-17f, présente des courbes de variation du coefficient de Poisson en fonction de la densité relative ρ_r pour différentes valeurs de α et ayant les mêmes tendances que celles affichées par celles de la figure II-17-e.



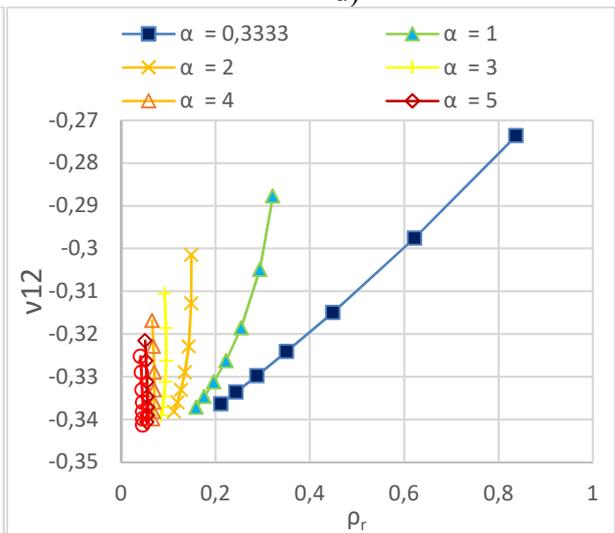
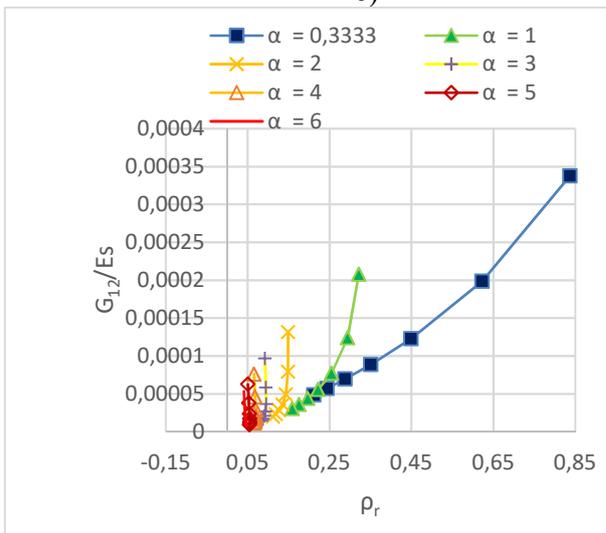
a)

b)



c)

d)



e)

f)

Fig.II-17 : Effet de la variation de β pour différentes valeurs de α : a) Sur E_1 et E_2 , b) sur G_{12} , c) Sur v_{12} , d), e) f) tracés de l'évolution de E_1 et E_2 , de G_{12} et de v_{12} en fonction de ρ_r .

6.3.3. Pour différentes valeurs de γ

Les figures II-18a, b et c affichent les évolutions des modules d'élasticité de Young relatif, de cisaillement relatif et du coefficient de Poisson, respectivement, en fonction du rapport β , et ce pour différentes valeurs de γ allant de :0,0333 à 0,3333. Les figures II-18 d, e et f affichent les évolutions de ces mêmes trois grandeurs mais en fonction de la densité relative.

La figure II-18a affiche des courbes symbolisant la dépendance entre le module de Young relatif E_1/E_s et le rapport β pour différentes valeurs de γ présentant des allures descendantes au fur et à mesure que le rapport β augmente. Ces courbes descendantes sont d'autant plus aigües au fur et à mesure que le rapport $\gamma = t/\ell$ est plus grand.

La figure II-18b, symbolisant la dépendance entre le module de cisaillement relatif G_{12}/E_s et le rapport β , affiche des courbes semblables à celles affichées dans la figure II-18a. Aussi, ces courbes descendantes sont d'autant plus aigües au fur et à mesure que le rapport $\gamma = t/\ell$ est plus grand.

Dans la figure II-18c se dessinent des courbes de proportionnalité inverse entre le coefficient de Poisson et le rapport β pour différentes valeurs de γ , nous n'avons porté qu'une seule courbe traçant cette évolution, et ce à cause du fait que le changement de γ n'a montré aucun effet sur le coefficient de Poisson ν_{12} . Notons cependant, que l'intervalle de toutes les valeurs se trouve dans le cadran négatifs, confirmant, encore une fois, le caractère auxétique de cette cellule. Les trois figures II-18 d, e et f affichent les dépendances de ces mêmes trois paramètres mais en fonction de la densité relative. La figure II-18d montrant des courbes du module de Young relatif E_1/E_s fonction de la densité relative qui affichent des tendances allant de la constance à la proportionnalité au fur et à mesure que γ augmente.

La figure II-18-e montrant des courbes traçant la variation du module de cisaillement relatif G_{12}/E_s fonction de la densité relative, les allures sont semblables à celles de la figure II-18d, à la différence de l'ordre de grandeur des valeurs qui sont de l'ordre du dixième de celles des modules de Young.

Enfin, la figure II-18f, affiche une très grande sensibilité du coefficient de Poisson au moindre changement de ρ_r . Et cette sensibilité est plus pointue avec la diminution des valeurs du rapport γ .

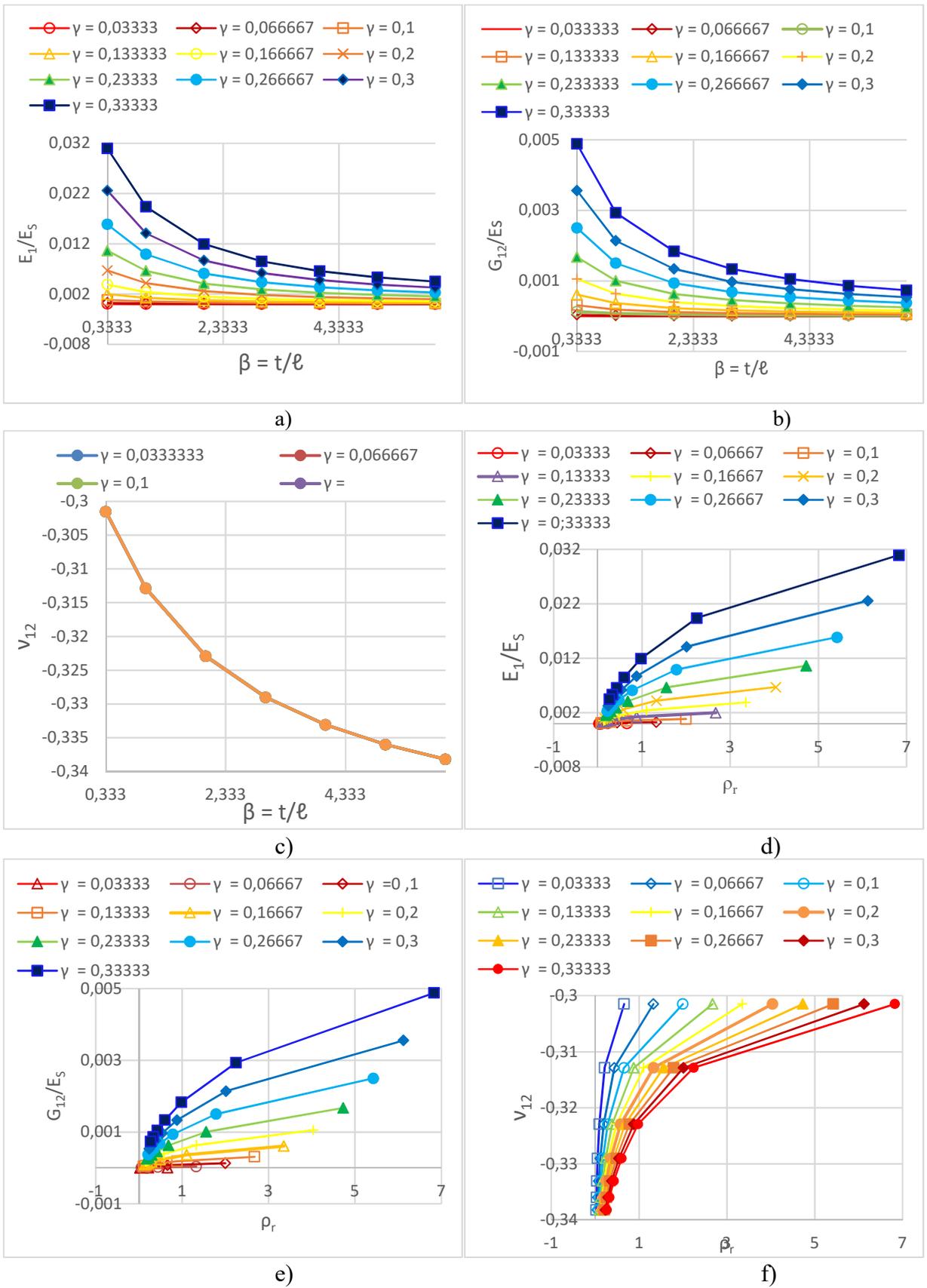


Fig.II-18 : Effet de la variation de β pour différentes valeurs de γ : a) Sur E_1 et E_2 , b) sur G_{12} , c) Sur v_{12} , d), e) f) tracés de l'évolution de E_1 et E_2 , de G_{12} et de v_{12} en fonction de ρ_r .

6.4. Effet de la variation de α

6.4.1. Pour différentes valeurs de θ :

Les figures II-19a, b et c affichent les évolutions des modules d'élasticité de Young relatif, de cisaillement et du coefficient de Poisson, respectivement, en fonction du rapport α pour différentes valeurs de θ . Les figures II-19 d, e et f affichent les évolutions de ces mêmes trois grandeurs mais en fonction de la densité relative.

La figure II-19a, montrant de courbes symbolisant la dépendance du module de Young relatif E_1/E_s du rapport α pour différentes valeurs de θ , et affichant des allures variant de la proportionnalité jusqu'à la proportionnalité inverse et ceux au fur et à mesure que θ diminue.

La figure II-19b, montrant des courbes symbolisant la dépendance entre le module de cisaillement relatif G_{12}/E_s et le rapport α et ceux pour différentes valeurs de l'angle θ , affichant des tendances de proportionnalité inverse et qui s'accroît avec la diminution de l'angle d'inclinaison θ .

La figure II-19c présente des droites qui affichent la dépendance du coefficient de Poisson en fonction de rapport α et pour différentes valeurs de l'angle θ , et de tendance semblable à celle des courbes de la figure II-13c. Il ressort de ces droites que le coefficient de poisson n'est pas affecté par la variation du rapport α . Il est à relever aussi les différents paliers de ces droites qui sont de plus en plus élevés avec l'augmentation de l'angle θ .

Les trois figures II-19 d, e et f affichent les dépendances de ces mêmes trois paramètres mais en fonction de la densité relative. La figure II-19d montre des courbes de variation de E_1/E_s en fonction de la densité relative ρ_r présentant des tendances inverses à celles présentes dans les courbes de la figure II-19a, c'est-à-dire, des allures variant de la proportionnalité jusqu'à la proportionnalité inverse et ceux au fur et à mesure que θ augmente.

Aussi, la figure II-19-e affiche des courbes proportionnelles à l'augmentation de la densité relative ρ_r . La pente de la courbe de proportionnalité s'accroît avec la diminution de l'angle θ . Enfin, la figure II-19f affiche des droites horizontales, symbolisant une valeur constante du coefficient de Poisson, lors de la variation de ρ_r . Ces droites, cependant, s'étalent sur des intervalles de plus en plus larges et gravitent à des niveaux de plus en plus importants avec l'augmentation de l'angle θ .

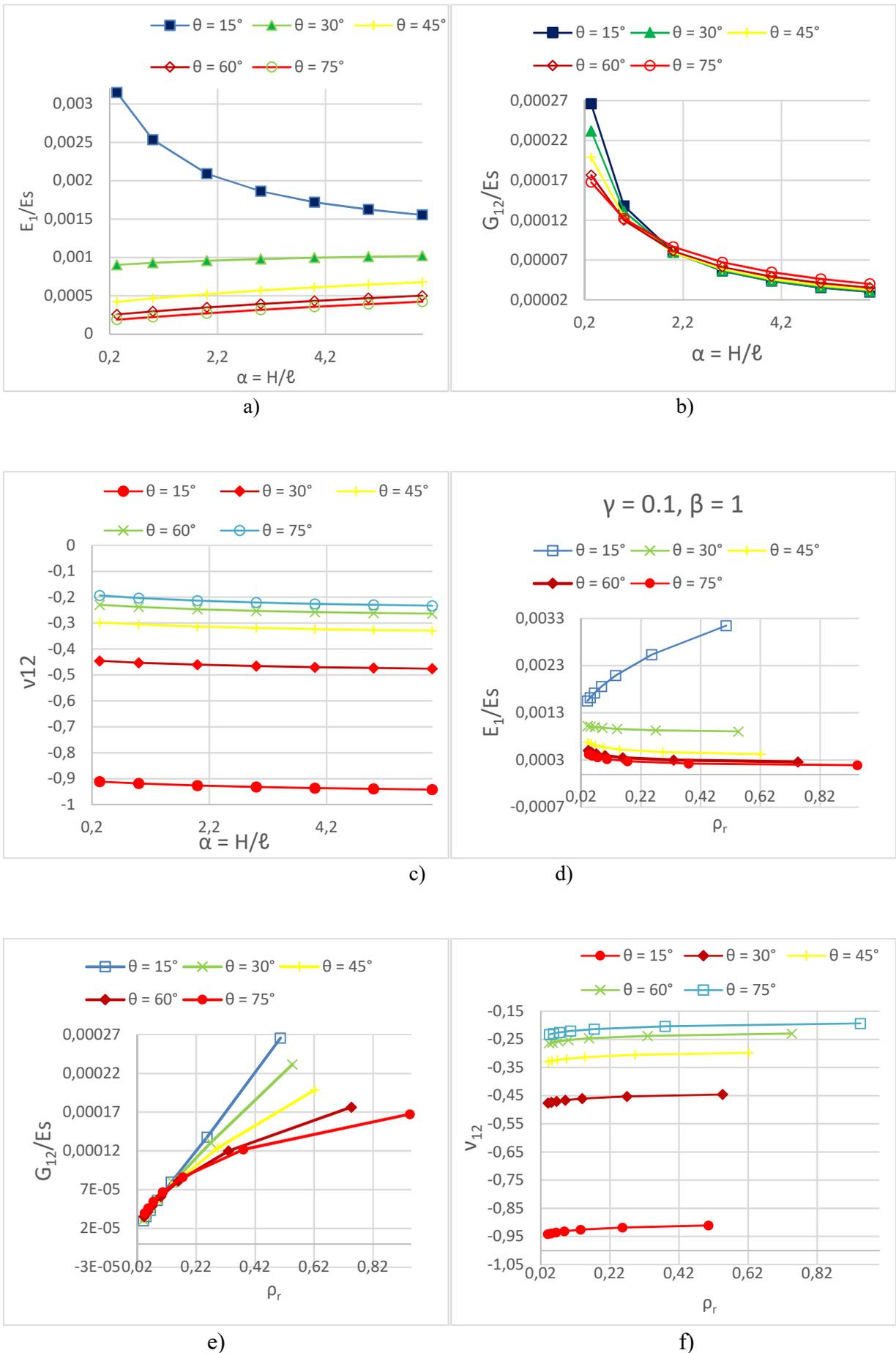


Fig. II-19 : Effet de la variation de α pour différentes valeurs de θ : a) Sur E_1 et E_2 , b) sur G_{12} , c) Sur v_{12} , d), e) f) tracés de l'évolution de E_1 et E_2 , de G_{12} et de v_{12} en fonction de ρ_r .

6.4.2. Pour différentes valeurs de β :

Les figures II-20a, b et c affichent les évolutions des modules d'élasticité de Young relatif E_1/E_s , de cisaillement relatif G_{12}/E_s et du coefficient de Poisson ν_{12} , respectivement, en fonction du rapport du grand clinquant α , et ce pour différentes valeurs de β allant de :0,333 à 6. Et les figures II-20d, e et f affichent les évolutions de ces mêmes trois grandeurs mais en fonction de la densité relative.

La figure II-20a présente des courbes symbolisant la dépendance entre le module de Young relatif E_1/E_s et le rapport du grand clinquant α , affichant des allures ascendantes en fonction du rapport du grand clinquant α . Ces courbes sont disposées en niveaux croissant au fur et à mesure que le rapport β est plus petit. En exemple le niveau le plus bas se situe aux environs de $E_1/E_s=0,0001$ alors que celui le plus élevé se situe à peu près à $E_1/E_s= 0,0009$ soit à près de neuf longueurs du premier.

La figure II-20b affiche des courbes symbolisant la dépendance entre le module de cisaillement relatif G_{12}/E_s et le rapport du grand clinquant α , et qui présentent des allures descendantes au fur et à mesure que le rapport α augmente. Ces courbes descendantes sont d'autant plus aigües au fur et à mesure que le rapport β est plus petit.

La figure II-20c affiche des courbes qui montrent la dépendance entre le coefficient de Poisson et le rapport α pour différentes valeurs de β et qui présentent des allures descendantes au fur et à mesure que α augmente. Ces courbes descendantes sont d'autant plus aigües au fur et à mesure que le rapport β devient plus petit.

Les trois figures II-20 d, e et f affichent les dépendances de ces mêmes trois paramètres mais en fonction de la densité relative. Les courbes de la figure II-20d affiche des tendances du module de Young relatif E_1/E_s inversement proportionnel à la densité relative. Ces courbes sont de plus en plus allongées et s'élèvent à des niveaux de plus en plus élevés avec la diminution du rapport β .

Les tendances des courbes de la figure II-20-e, qui sont analogue à celles de la figure II-18.e, affichent une croissance du module de cisaillement G_{12}/E_s en fonction de la densité relative ρ_r , croissance qui s'accroît au fur et à mesure que β diminue.

Enfin, la figure II-20f, affichent des courbes qui présentent l'évolution du coefficient de Poisson en fonction de ρ_r et pour différentes valeurs de β . L'allure de ces courbes est semblable à celle des courbes de la figure II-20-e, cependant l'éventail de ces courbes est beaucoup plus large. Enfin, nous remarquons que pour les grandes valeurs β les courbes ont tendance à se transformer en des droites horizontales, signifiant que le coefficient de Poisson, pour ces valeurs, est de moins en moins sensible à la variation de la densité relative.

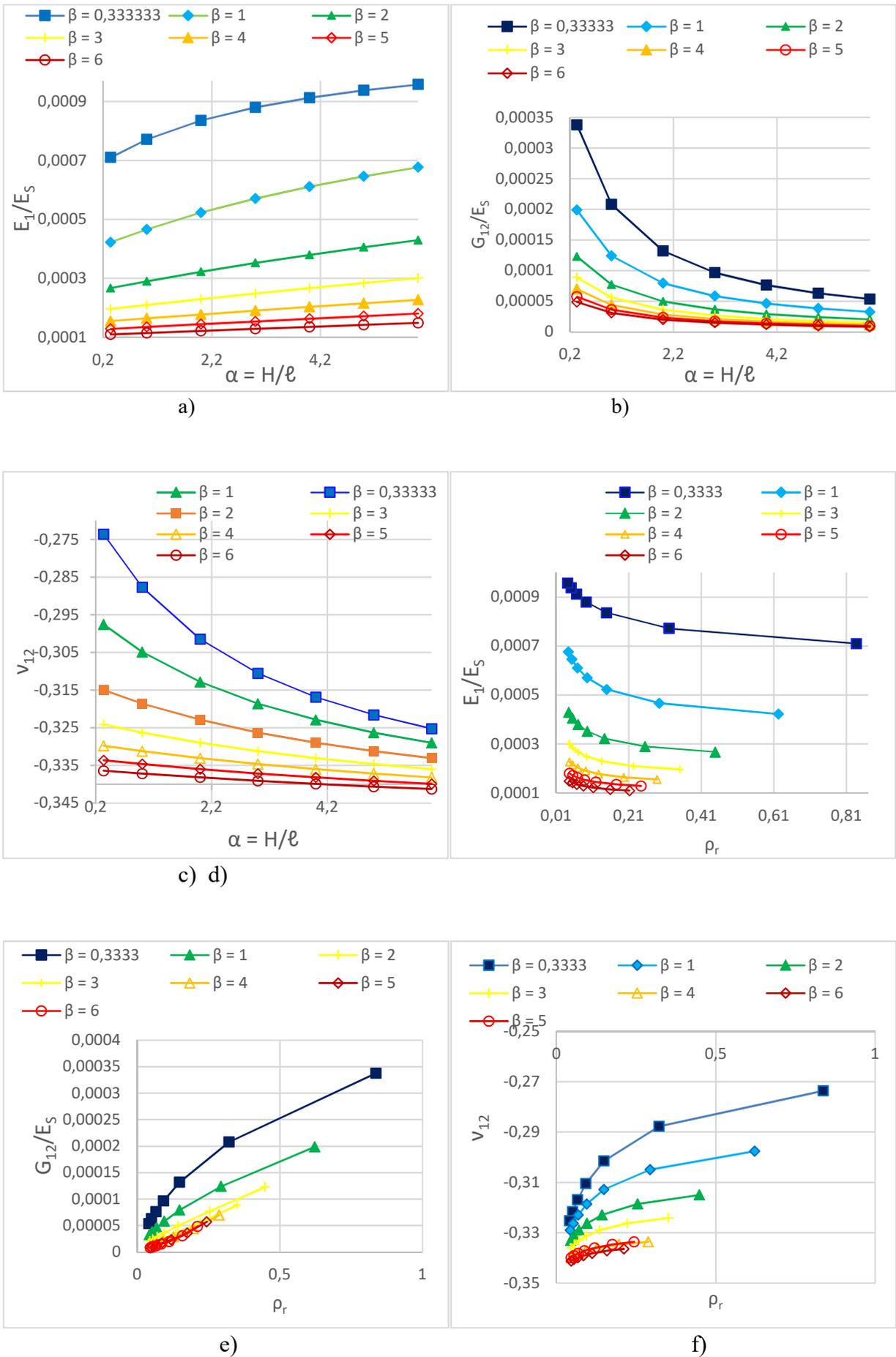


Fig. II-20 : Effet de la variation de α pour différentes valeurs de β : a) Sur E_1 et E_2 , b) sur G_{12} , c) Sur v_{12} , d), e) f) tracés de l'évolution de E_1 et E_2 , de G_{12} et de v_{12} en fonction de ρ_r .

6.4.3. Pour différentes valeurs de γ :

Les figures II-21a, b et c affichent les évolutions des modules d'élasticité de Young E_1 , de cisaillement G_{12} et du coefficient de Poisson ν_{12} , respectivement, en fonction de l'angle d'inclinaison θ , et ce pour différentes valeurs de γ allant de :0,0333 à 0,3333. Les figures II-21 d, e et f affichent les évolutions de ces mêmes trois grandeurs mais en fonction de ρ_r .

La figure II-21a affiche des courbes symbolisant la dépendance entre le module de Young relatif E_1/E_s et le rapport α , et qui présentent des allures légèrement ascendantes, reflétant une dépendance insignifiante de ce rapport α . Ces courbes se trouvent à des niveaux superposés au fur et à mesure que le rapport $\gamma = t/\ell$ augmente.

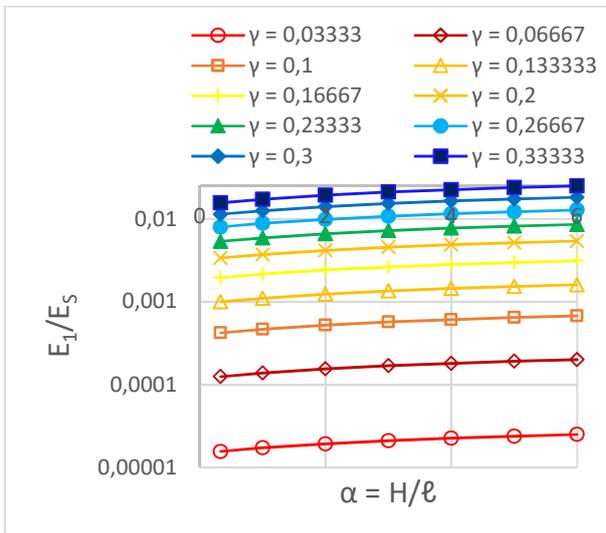
La figure II-21b, affichant des courbes symbolisant la dépendance du module de cisaillement relatif G_{12}/E_s par rapport à α et ce pour différentes valeurs de γ , affiche plutôt des courbes à tendances identiques à celles des courbes de la figure II-18 b, à savoir des courbes descendantes au fur et à mesure que α augmente et à des valeurs de plus en plus basses avec γ diminuant.

La figure II-21c affiche des courbes qui dessinent la dépendance du coefficient de Poisson en fonction du rapport α pour différentes valeurs de γ , nous n'avons porté qu'une seule courbe traçant cette évolution, et ce à cause du fait que le changement de γ n'a montré aucune répercussion sur le coefficient de Poisson ν_{12} . Notons cependant, que l'intervalle de toutes les valeurs se trouve dans le cadran négatifs, confirmant, encore une fois, le caractère auxétique de cette cellule. Notons, aussi, que l'allure de ces courbes est semblable à celle dans la figure II-18c.

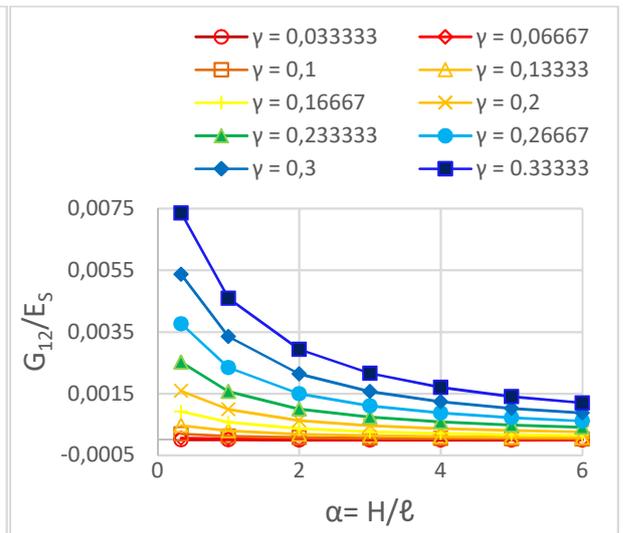
Les trois figures II-21 d, e et f affichent les dépendances de ces mêmes trois paramètres mais en fonction de la densité relative. La figure II-21d affiche des courbes semblables à celles de la figure II-20d montrant des modules de Young relatif E_1/E_s inversement proportionnel à la densité relative. Ces courbes sont de plus en plus allongées et s'élèvent à des niveaux de plus en plus élevés avec l'augmentation du rapport γ .

La figure II-21-e affiche des courbes traçant l'évolution du module de cisaillement relatif G_{12}/E_s en fonction de la densité relative ρ_r pour différentes valeurs du rapport γ . Ces courbes sont semblables à celles de figure II-20-e.

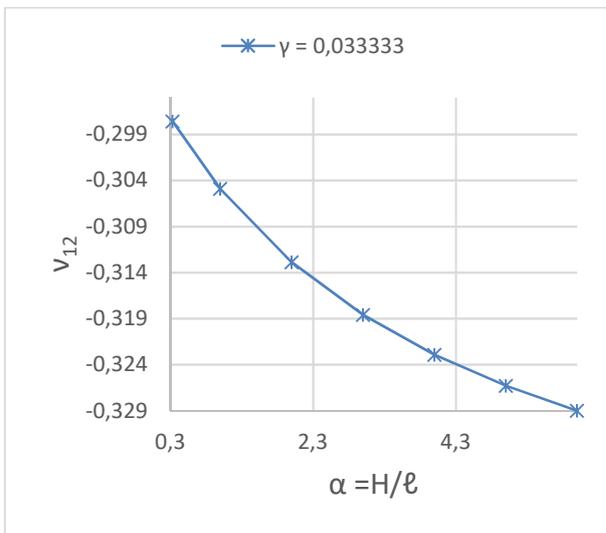
Enfin, la figure II-21f est semblable à la Fig.II-18 de par l'allure de ses courbes qui affichent une très grande sensibilité du coefficient de Poisson au moindre changement de ρ_r . La variation de γ n'a aucune incidence sur cette sensibilité.



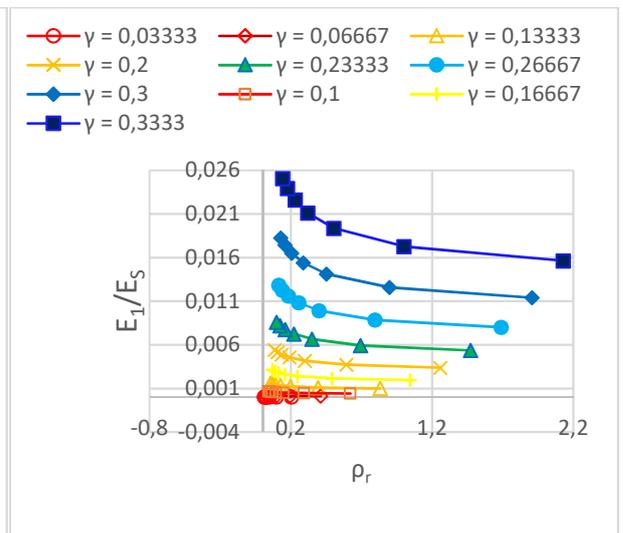
a)



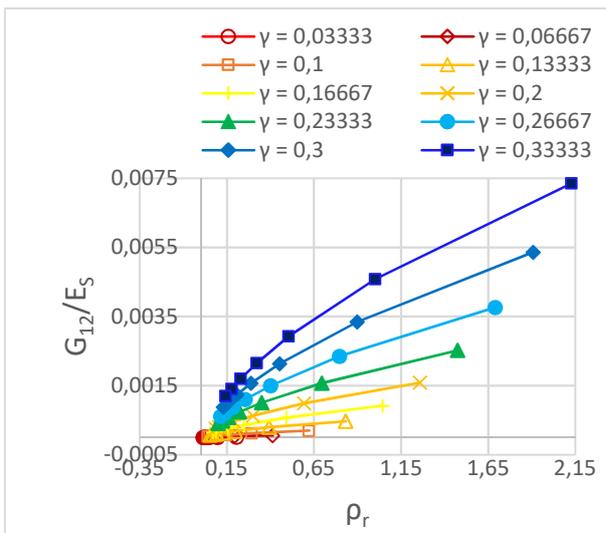
b)



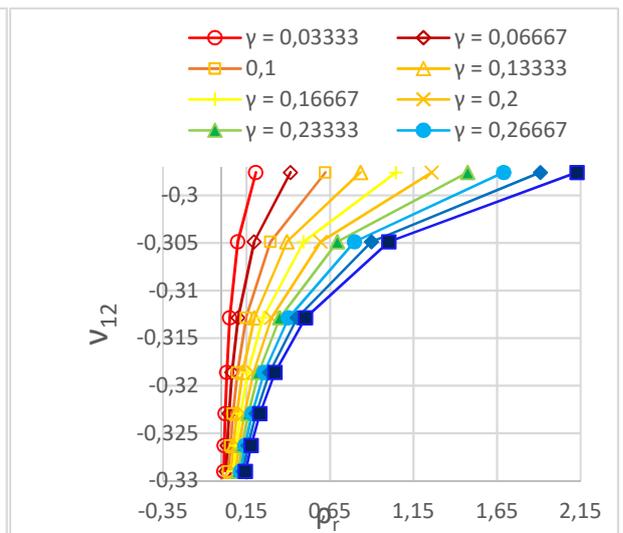
b)



d)



e)



f)

Fig. II-21 : Effet de la variation de α pour différentes valeurs de γ : a) Sur E_1 et E_2 , b) sur G_{12} , c) Sur v_{12} , d), e) f) tracés de l'évolution de E_1 et E_2 , de G_{12} et de v_{12} en fonction de ρ_r .

7. Modélisation numérique :

Le code d'analyse par éléments finis ANSYS est utilisé dans cette investigation. Des modèles 2D en nid d'abeilles sont établis pour simuler le comportement du solide cellulaire, comme illustré à la Fig.II-22. Nous avons choisi un V.E.R. constitué de 12 cellules ; disposés par quatre sur trois rangées et ce pour simuler les éprouvettes utilisées lors des essais et ceci est motivé par un souci de comparaison et pour un but de validation de nos modèles mathématique et numérique.

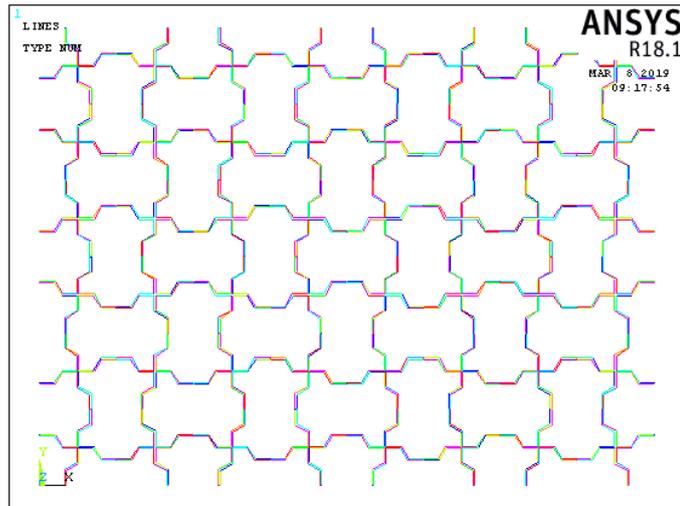


Fig. II-22 : V.E.R. constitué de 12 cellules.

Les liens de la cellule élémentaire sont maillés par des éléments plans (élément plane82 et élément plan182 disponibles dans la bibliothèque d'ANSYS).

L'élément PLANE82 fournit des résultats précis pour les maillages automatiques mixtes (quadrilatère-triangulaire) et peut tolérer des formes irrégulières sans perte autant de précision. Les éléments à huit nœuds ont des formes de déplacement compatibles et sont bien adaptés au modèle des limites courbes.

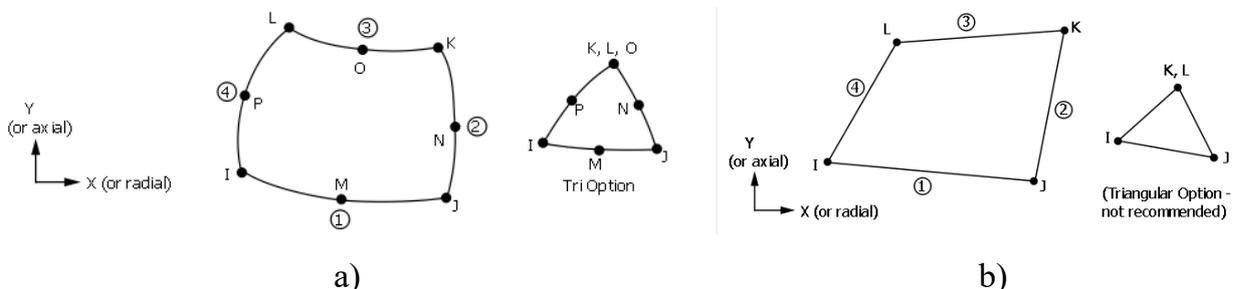


Fig. II-23 : Eléments choisis pour la simulation : a) Géométrie de l'élément Plane 82, b) Géométrie de l'élément Plane 182.

L'élément à 8 nœuds ayant deux degrés de liberté chacun : des translations dans les directions x_1 et x_2 . L'élément peut être utilisé en tant qu'élément plan ou en tant qu'élément axisymétrique.

L'élément PLANE182 est utilisé pour modéliser des structures solides 2D. Il peut être utilisé en tant qu'élément plan (contrainte plane, déformation plane ou déformation plane généralisée) ou en tant qu'élément axisymétrique avec ou sans torsion. Dans la plupart des cas, l'élément est défini par quatre nœuds avec deux degrés de liberté à chacun : les translations dans les directions x_1 et x_2 . Pour l'option axisymétrique avec torsion, elle est toujours définie par quatre nœuds, mais avec trois degrés de liberté à chaque nœud : translations dans les directions x_1 et x_2 et rotation dans la direction nodale x_2 . Un préalable à toutes simulations des matériaux cellulaires est l'homogénéisation de la structure, afin de déterminer ses propriétés effectives [91].

Notre modèle est constitué de 20509 éléments et de 30936 nœuds. Dans un premier temps, nous devons dégager les propriétés mécaniques effectives de la structure, ce qui s'effectue par une homogénéisation de la structure. Par un souci de simplicité, nous avons opté pour l'homogénéisation numérique de notre structure alvéolaire.

5.1 Homogénéisation :

C'est le concept de rendre homogène un matériau hétérogène. La procédure consiste à descendre à une échelle intermédiaire entre le macroscopique et le microscopique, dans laquelle toutes les composantes hétérogènes du matériau sont représentées une seule fois. Ce volume, qui se répète dans tous le matériau, est défini comme étant le : Volume Élémentaire Représentatif. Le concept d'homogénéité d'un milieu est déduit du modèle de la continuité de la matière, hypothèse introduite par l'ingénieur et impliquant un concept de moyenne statistique, dans lequel la constitution réelle du matériau est idéalisée en considérant le matériau comme étant continu [92,93].

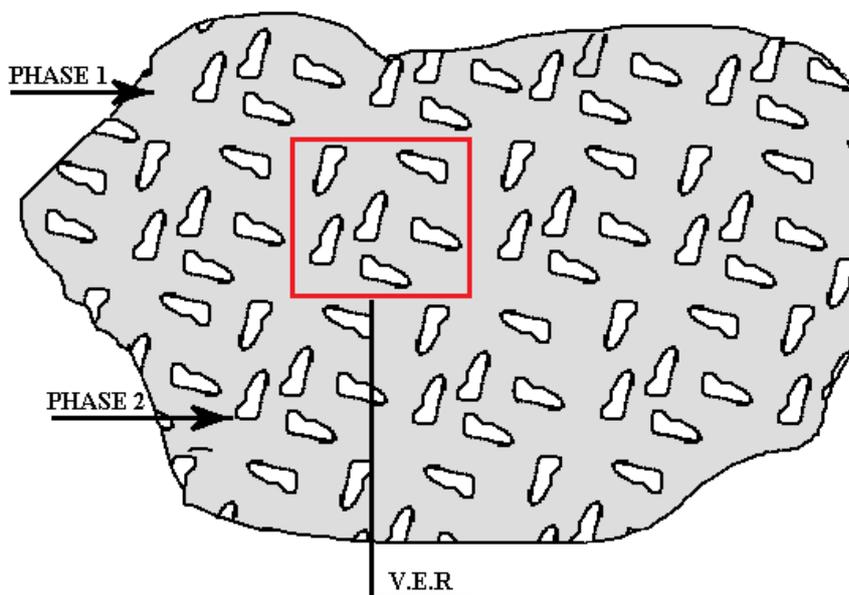


Fig. II-24 : Homogénéisation d'un milieu hétérogène.

La figure II-24 présente un milieu hétérogène composé d'une phase 2 dispersée dans une phase 1, chaque phase étant supposée homogène et isotrope. Il est clair que le volume encadré par un carré rouge, dans cette figure, se répète dans tout le milieu et constitue le V.E.R. qui n'est autre qu'un échantillon représentatif et dont la dimension est caractéristique de l'hétérogénéité et à laquelle les propriétés du matériau peuvent être approchées avec une précision acceptable. On parle alors d'homogénéité macroscopique.

Pour exprimer ces propriétés effectives du matériau, déterminées sur un V.E.R., on impose des conditions de contraintes et déformations à la frontière de ce V.E.R., la contrainte moyenne sur le volume est définie par [92,93] :

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{V} \int_V \sigma_i(x_k) dV, \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (33)$$

$$\bar{\varepsilon}_i = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_i(x_k) dV, \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (34)$$

σ_i et ε_i éléments des matrices contrainte et déformation au point x_k et dV l'élément entourant le point x_k . Les constantes de rigidité et de souplesse sont données par :

$$\bar{\sigma}_i = C_{ij} \bar{\varepsilon}_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (35)$$

et

$$\bar{\varepsilon}_i = S_{ij} \bar{\sigma}_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (36)$$

Donc, il faut calculer la contrainte et la déformation moyennes sur le volume représentatif à l'aide de (33) et (34) puis en déduire les constantes de rigidité et de souplesse grâce à (35) et (36). Les matrices de rigidité et de souplesse sont données par (6) et (7), les constantes d'ingénieur correspondantes sont données par (9) [92,93].

Il existe plusieurs techniques analytiques d'homogénéisation basées sur la méthode des déformations principales équivalentes. Dans notre quête des constantes élastiques effectives de notre structure objet de cette étude, nous avons opté pour l'homogénéisation numérique appliquée à l'échelle d'un volume élémentaire représentatif de la structure afin de comparer les résultats numériques avec ceux obtenus analytiquement et puis ceux expérimentaux.

En 2D, quatre simulations sont nécessaires pour déterminer les quatre constantes E_1 , E_2 , G_{12} et ν_{12} : deux simulations en traction simple, chacune permettra de calculer un module d'élasticité et deux coefficients de Poisson. Deux simulations de cisaillement : Une pour

chaque module de cisaillement. Il est important de bien définir les propriétés mécaniques d'un nid d'abeille liées à ses caractéristiques géométriques.

5.2. Cas de la cellule à liens ré-entrants :

5.2.1 Volume élémentaire représentatif (V.E.R) :

Le V.E.R est nécessaire pour des raisons de temps de calcul et de puissance de calcul disponible, de réduire les modèles et donc d'utiliser les symétries du modèle. Dans le cas des structures en réseau cellulaire, le nombre de modèles pouvant être créés est grand. Le choix du V.E.R est dicté par le souci de comparaison et de vérification de nos résultats. Les caractéristiques géométriques, de la structure à simuler sont les suivantes : $l = h = H/2 = 3$ mm, $t = 0,3$ mm et $b = 3$ mm. Le matériau de base des cellules est le PMMA de caractéristiques mécaniques moyennes : $E_s = 2850$ MPa, $G_s = 1960$ MPa, $\nu = 0,375$.

5.2.2 Conditions aux limites et méthodes de calcul par éléments finis :

Comme cité précédemment, le modèle de simulation de de la structure (figure II-25), effectuées sur le code de calcul des structures ANSYS, prend en compte 12 cellules maillées avec des éléments PLANE182 à 4 nœuds et 2 degrés de liberté par nœud. Le maillage choisi permet de ne pas alourdir le calcul tout en gardant une bonne précision sur les résultats [91-93].

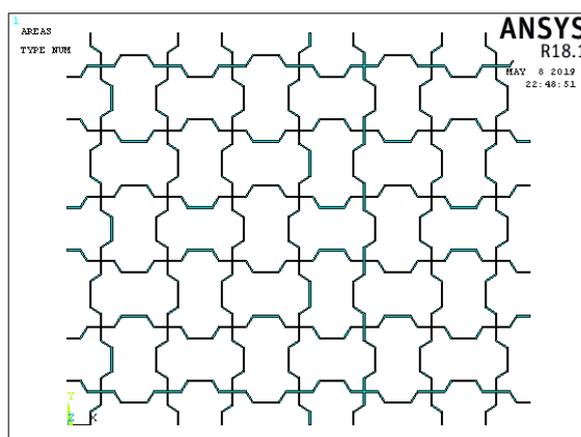


Fig. II-25 : V.E.R. constitué de 12 cellules.

Chaque ligament de longueur $h = 3$ mm contient 40 éléments, 20 suivant la longueur et 20 suivant l'épaisseur [2].

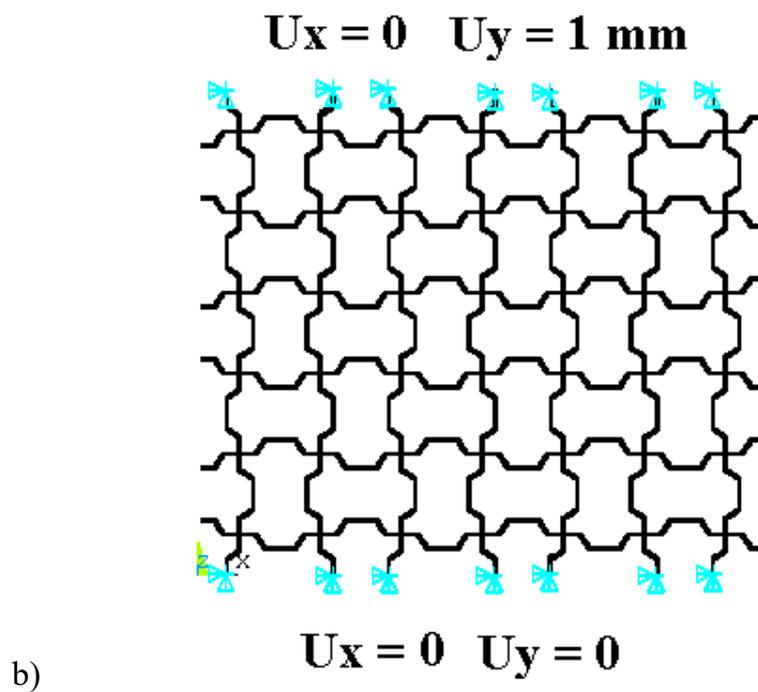
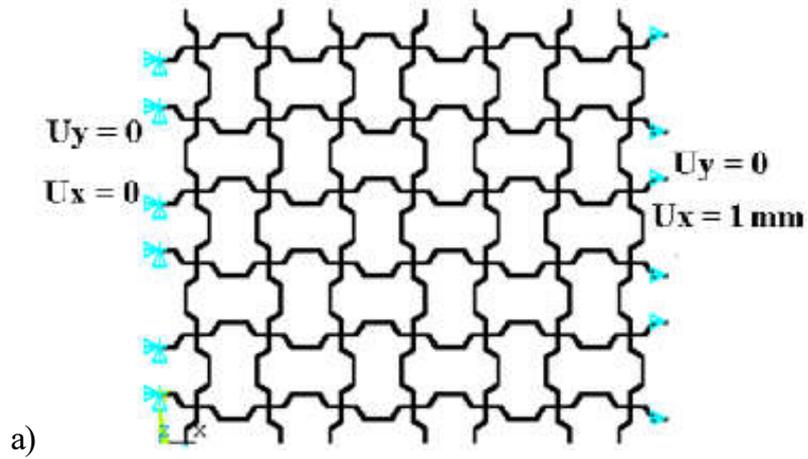
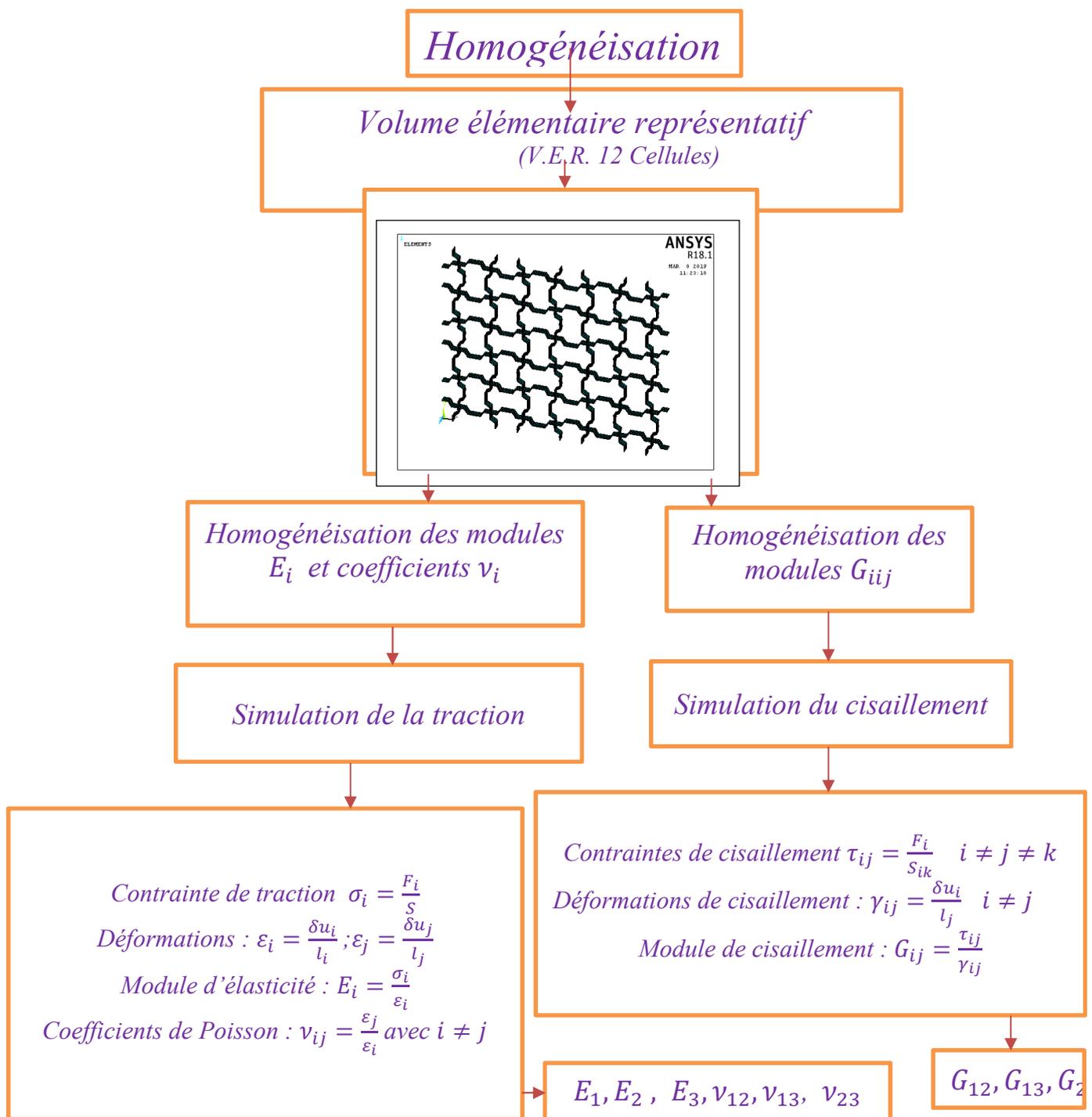


Fig. II-26 : Conditions aux limites pour une simulation de traction dans le plan (x_1, x_2) :a) selon l'axe x_1 , b) selon l'axe x_2 .

5.2.3 Organigramme d'homogénéisation numérique :

L'organigramme ci-dessous résume les différentes étapes à suivre pour mener à bien une opération d'homogénéisation numérique, destinée à dégager les paramètres mécaniques effectifs d'une structure.



Pour calculer les différents modules, un déplacement est imposé sur une face du V.E.R dans une direction donnée. Les symétries sont prises en compte au niveau des conditions aux limites. La simulation d'une sollicitation de traction suivant une direction i ($i = x_1, x_2$) permet de déterminer les deux modules de d'élasticité E_1 et E_2 et les deux coefficients de Poisson (ν_{12} et ν_{21}).

Les simulations des sollicitations en cisaillement suivant le plan (x_1, x_2) (deux simulations) permet de déterminer les deux modules de cisaillement G_{12} et G_{21} .

Cette méthode basée sur les efforts aux liaisons à partir d'un déplacement imposé permet, par l'utilisation des lois de comportement, de déduire les constants élastiques (Fig. II-25).

5.2.4 Calcul des modules de Young E_i

Deux simulations en traction permettent de déterminer les modules d'élasticité et les coefficients de Poisson. Dans le cas d'une traction uni-axiale, les modules d'élasticité sont pour $i = x_1, x_2$:

$$E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \quad (33)$$

où la contrainte de traction est déduite à partir des efforts de liaisons:

$$\sigma_i = \frac{F_i}{S} \quad (34)$$

F_i est la force des réactions des nœuds du V.E.R. suivant la direction i (déduite à partir de la variation du déplacement δu_i imposé). S est la surface perpendiculaire au déplacement imposé δu_i . Les déformations, sont :

$$\varepsilon_i = \frac{\delta u_i}{l_i} \quad (35)$$

$$\varepsilon_j = \frac{\delta u_j}{l_j} \quad i \neq j \text{ et } i, j = x_1, x_2 \quad (36)$$

δu_i est le déplacement (imposé) dans la direction i et l_i la longueur du V.E.R avant la déformation dans la même direction de chargement. δu_j est obtenu par calcul du déplacement des nœuds de l'extrémité du V.E.R dans la direction j (transversale) et l_j la longueur avant la déformation du V.E.R.

Les coefficients de Poisson sont déterminés par la relation suivante :

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \quad (37)$$

5.2.5. Calcul des modules de cisaillements G_{ij}

De même, la détermination des modules de cisaillements G_{ij} nécessite l'utilisation des lois de comportement élastique. Les simulations de cisaillement sont indispensables à la détermination de G_{ij} , en bloquant les déplacements d'une face et en appliquant un cisaillement sur la face opposée (Figure II.7). La loi de comportement dans le cas d'une sollicitation de cisaillement est [2]:

$$G_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{\gamma_{ij}} \quad (38)$$

$$i \neq j \text{ et } i, j = x_1, x_2$$

Pour la contrainte de cisaillement :

$$\tau_{ij} = \frac{F_i}{S_{iK}} \quad (39)$$

$$i \neq j \neq k \text{ et } i, j = x_1, x_2 \text{ et } k = x_3$$

Et la déformation de cisaillement :

$$\gamma_{ij} = \tan\left(\frac{\delta u_i}{l_j}\right) \quad i \neq j \quad (40)$$

F_i est la réaction des forces aux nœuds.

5.2.6. Résultats des simulations et validation :

a) Modules de Young E_1, E_2

Les simulations en traction ont abouti à des modules de Young relatifs, suivant les directions : longitudinale et transversale, égaux : $E_1/E_s = E_2/E_s = 3.393264523 \cdot 10^{-4}$. En multipliant ces valeurs par le module d'élasticité E_s du PMMA, matériau utilisé lors des manipulations expérimentales, qui est de 2850 MPa, nous obtenons les valeurs des modules de Young de la structure alvéolaire selon les directions x_1 et x_2 :

$$E_1 = E_2 = 2850 \times 3.393264523 \cdot 10^{-4} = 0.967 \text{ MPa}$$

Le module de Young, de la structure, obtenu de la pente de la partie linéaire de la courbe de traction $\sigma - \varepsilon$ est de : $E_{\text{pente}} = 3.8016 \text{ MPa}$.

Le module de Young, de la structure, obtenu en utilisant l'énergie de déformation est de :

$$E_{\text{énergie}} = 4.112 \text{ MPa}.$$

Le rapport $E_{\text{pente}}/E_{\text{énergie}} = 3.8016/4.112 = 0.92$

le rapport $E_{\text{énergie}}/E_{\text{pente}} = 4.112/3.8016 = 1.081$

En prenant comme référence la valeur du module d'élasticité obtenu par le procédé énergétique, l'erreur commise, entre les deux méthodes de calcul, est de :

$$e = 4.112 - 3.8016 = 0.3104.$$

L'erreur relative est de :

$$e_r = (4.112 - 3.8016) / 4.112 = 0.3104 / 4.112 = 0,076.$$

Le pourcentage d'erreur est de :

$$e_p = e_r \times 100\% = 7.6\%.$$

En prenant comme référence la valeur du module d'élasticité obtenu par la pente de la partie linéaire élastique de la courbe $\sigma - \varepsilon$, l'erreur relative est de :

$$e_r = (4.112 - 3.8016) / 3.8016 = 0.3104 / 3.8016 = 0,082.$$

Le pourcentage d'erreur est de :

$$e_p = e_r \times 100\% = 8,2\%.$$

b) Coefficients de Poisson ν_{21}, ν_{12}

La valeur du coefficient de Poisson obtenue par la simulation numérique est de : $\nu_{21} = \nu_{12} = -0.283558067 \approx -0.284$

Celle obtenue expérimentalement est de : $\nu_{21} = -0.27$; constituant une différence de à peu près 0,014

et une erreur relative de : $e_r = \frac{0.283558067 - 0.27}{0,284} \approx \frac{0,014}{0,284} \approx 0,049$;

donc un pourcentage d'erreur de : $e_p \approx 4,9\%$

c) Module de cisaillement G_{12} , G_{21} :

Enfin, le module de cisaillement donné par la formule : $G = E/2(1 + \nu)$, à partir de données expérimentales est de : $G_{\text{exp-calc}} = \frac{3.8016}{2(1-0.27)} = 2.604 \text{ MPa}$

Le module de cisaillement donné par la pente de la courbe expérimentale est de : $G_{\text{exp-pente}} = 0.420 \text{ MPa}$, et qui est de 6.2 fois moins importante que celui obtenu par la formule.

Le module de cisaillement donné par la simulation numérique est de $G_{\text{numérique}} = 0.672 \text{ MPa}$

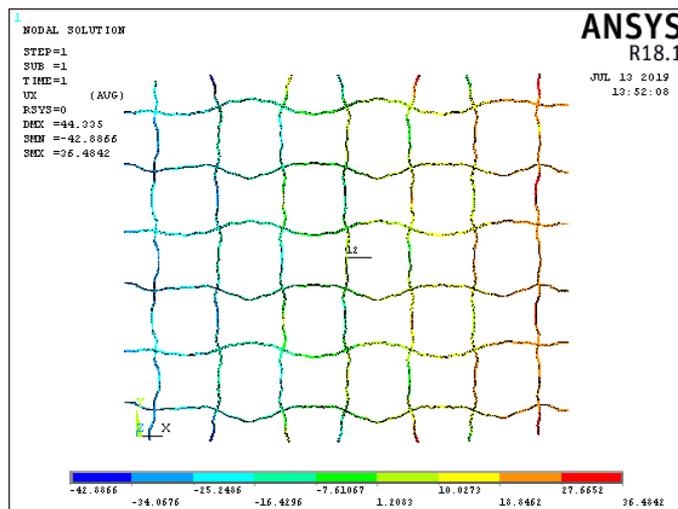
La différence entre ces différentes valeurs donne :

$$G_{\text{numérique}} - G_{\text{exp-pente}} = 0.672 - 0.420 = 0.252$$

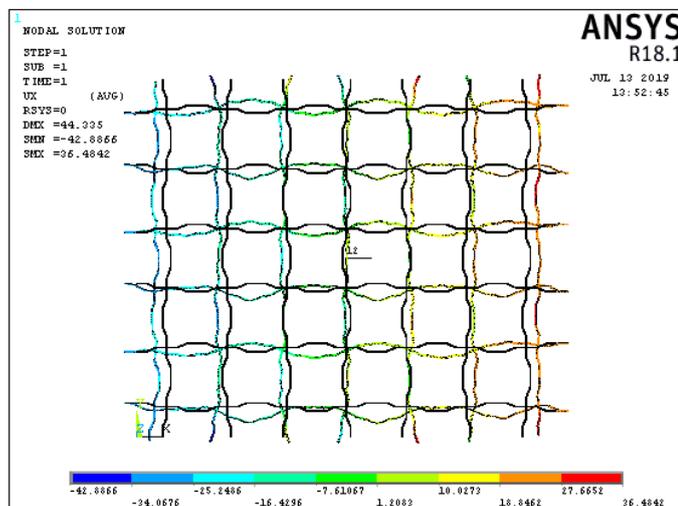
Donnant une erreur rapportée à la valeur 0.672 de : $e_r = 0.252/0.672 = 0.375$ et donc un pourcentage d'erreur de : $e_p = 100e_r\% = 37.5\%$.

d) Résultats et discussion :

La figure II-27 affiche la distribution des déplacements donnée par la simulation en traction. La figure II-27(a) affiche des zones en rouge qui symbolisent les déplacements maximaux dans le sens des x positifs,.



a)

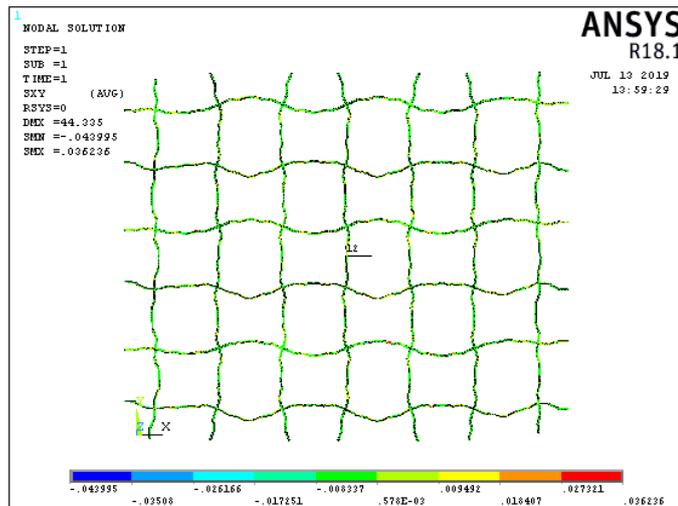
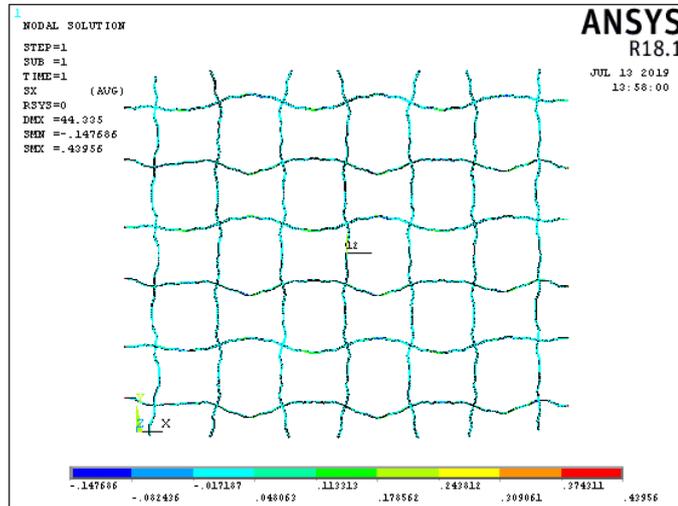


b)

Fig. II-27 : Contour des déplacements maximaux à l'issue de la simulation en traction :

a) Structure déformée, b) Structure déformée + non- déformée.

La figure II-27(b) qui affiche la superposition de la configuration déformée et non-déformée de la structure. Cette superposition montre que les déplacements des liens raccordés entre eux, aux sommets des cellules, s'est résumé en leurs rotation rigide par rapport à ces mêmes sommets.



a)

b)

Fig. II-28 : Distribution des contraintes lors de la simulation en traction :
a) Contraintes de traction σ_{xx} , b) Contrainte de cisaillement τ_{xy} .

La figure II-28 affiche la distribution des contraintes, dans la structure, résultant de la simulation en traction. La figure II-28(a) affiche les contraintes de traction et (b) les contraintes de cisaillement. Les deux figures réfléchissent un état de contraintes, pratiquement nul et ce parce que le déplacement imposé, lors de la simulation vaut : $u_x = 1$ mm, valeur insuffisante pour contraindre la structure.

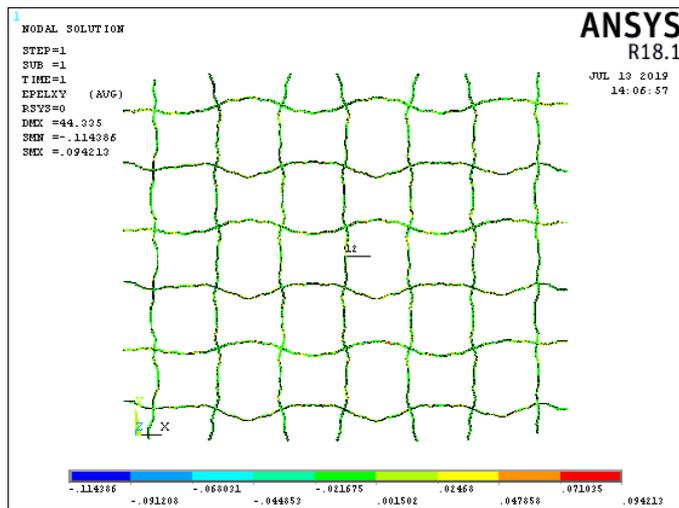
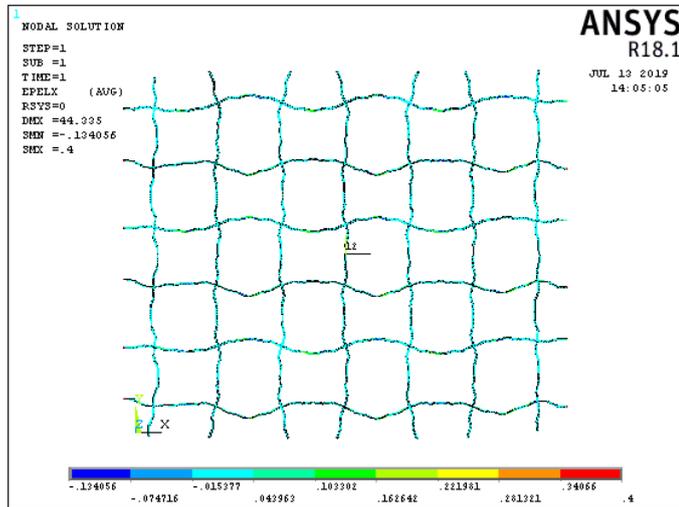
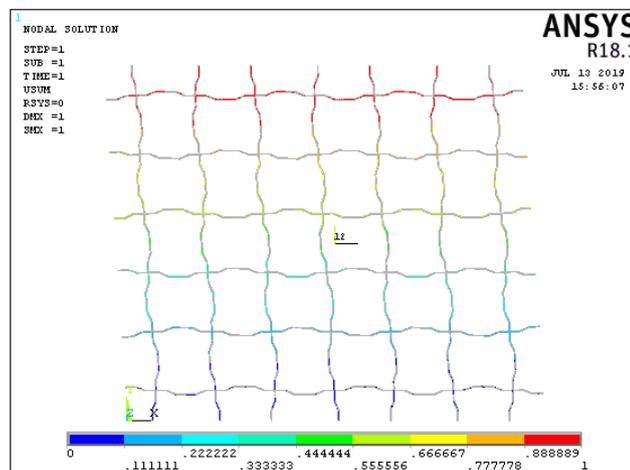
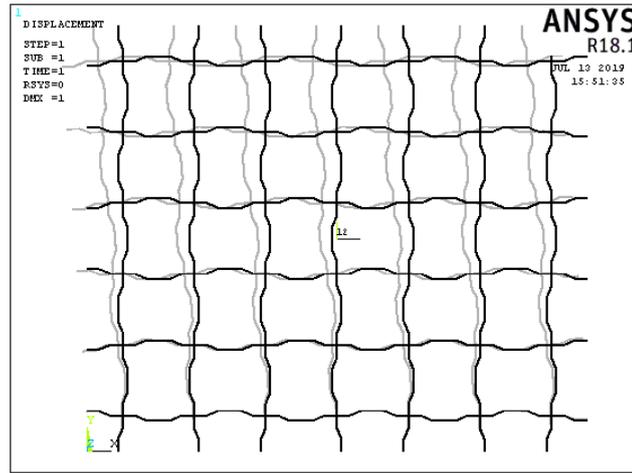


Fig. II-29 : Distribution des déformations élastiques :
 a) Déformation longitudinales, b) Déformation de cisaillement.

Même remarque pour les figures II-29(a) et (b) qui montre, respectivement, les distributions des déformations suite à une contrainte de traction et suite à une contrainte de cisaillement.





a)

b)

Fig. II-30 : Contour des déplacements maximaux à l'issue de la simulation en cisaillement : a) Structure déformée, b) Structure déformée + non- déformée.

La figure II-30 affiche les contours des déplacements donnés par la simulation en cisaillement. La figure II-30(a) montre, notamment, que les déplacements maximaux, dans la direction du chargement, se trouvent à l'extrémité supérieure de la structure, où est appliquée la charge de cisaillement. En contrepartie, l'extrémité inférieure de la structure, où l'on a imposé un encastrement de la structure, affiche un déplacement nul. La figure II-30(b), affichant la configuration de la structure avant déformation superposée à sa configuration déformée, confirme ce qui a été dit pour la figure II-30(a).

5.3. Cas de la cellule du Cladode de cactus :

La cellule, dont est composée la structure de la raquette de cactus, est irrégulière à cause des orientations aléatoires de ses cotés. L'approximation de cette géométrie ne peut se faire que par une géométrie irrégulière telle que celle de voronoï. Dans ce travail, nous avons opté pour la nouvelle cellule irrégulière introduite par Bezzazi et Bouakba [] parce que le facteur k qu'elle introduit va nous permettre d'adapter au mieux cette cellule à celle du cladode, et donc d'approcher l'architecture du nid d'abeille de la raquette avec une bonne précision. Le comportement mécanique de la cellule modifiée proposée, est obtenu par la technique d'homogénéisation numérique en utilisant le code de calcul de structures ANSYS. Les ligaments de la cellule proposée sont considérés comme étant des poutres de Timochenko. [12]. Dans ce qui suit, nous exposons, brièvement, les caractéristiques de ces deux cellules. Ensuite, nous finirons par celles de la cellule de cactus.

5.3.1 Cellule irrégulière, Diagramme de Voronoï : définitions et algorithmes

Les diagrammes de Voronoï comptent parmi les géométries complexes les plus anciennes qui ont été étudiées ; ce sont des polyèdres complexes qui associent chaque point de l'espace au site le plus proche dans un ensemble fixe de sites, par exemple en indiquant pour chaque point de la ville le bureau de poste le plus proche, comme illustré à la figure II-31. Les diagrammes

de Voronoï apparaissent dans l'étude de phénomènes naturels tels que la formation de cristaux, la météorologie, etc. Ils sont les duals combinatoires naturels des sous-divisions de Delaunay.

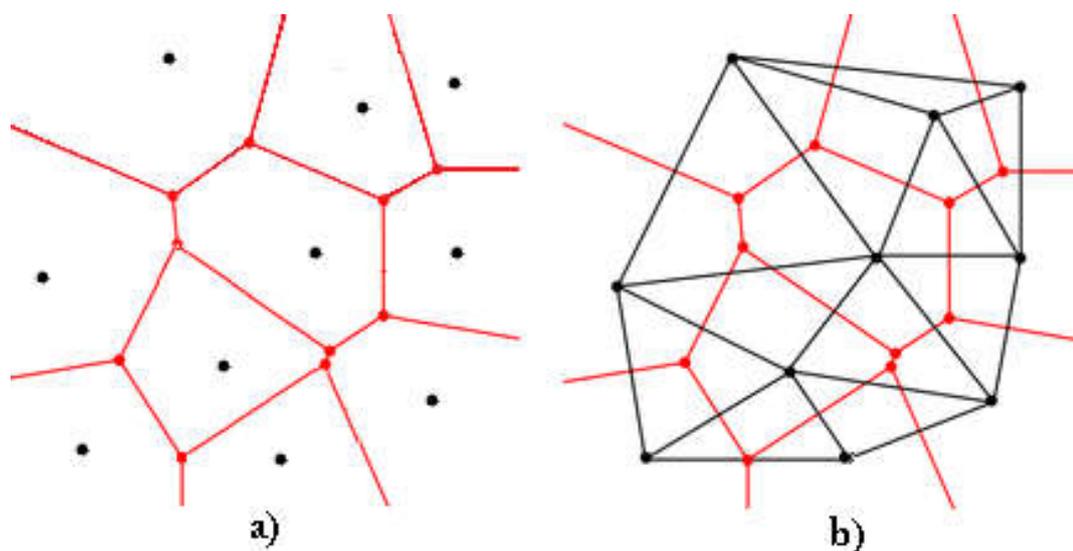


Fig. II-31 : a) Diagramme de voronoï d'un ensemble de point plan, b) Superposition d'un [diagramme de Voronoï](#) (en rouge) et de sa triangulation de Delaunay (en noir).

5.3.1.1 Diagramme de Voronoï :

Soit S un ensemble fini de points, appelés sites, dans \mathbb{R}^d . La cellule de Voronoï V_u d'un site u de coordonnées (x, y) et appartenant à S qui est l'ensemble des points de \mathbb{R}^d qui sont au moins aussi proches de u que de tout autre site de S . Ce qui se traduit math, par :

$$V_u = \{p \in \mathbb{R}^d : w \in S, d(u, p) \leq d(w, p)\}$$

et on dit que u est le site générateur de V_u .

Définition (diagramme de Voronoï) : Le diagramme de Voronoï de S , noté $\text{Vor } S$, est le polyèdre complexe contenant la cellule de Voronoï de chaque site $u \in S$ et toutes les faces des cellules de Voronoï. [94].

En clair, cette cellule est obtenue par la soustraction des segments perpendiculaires à la base de chaque triangle formé par les trois points adjacents dans un champ de points placés, dans le plan (x,y) , par la perturbation ou le déplacement des coordonnées (x_1, x_2) des coins d'une cellule hexagonale régulière dans le plan, vers les nouveaux coordonnées (x_1', x_2') et basé sur le polynôme suivant. [95] :

$$x_1' = x_1 + b \cos \theta$$

$$x_2' = x_2 + b \sin \theta$$

Le polynôme montre la relation entre les coordonnées finale (x_1', x_2') et les coordonnées (x_1, x_2) de la cellule hexagonale régulière ; où θ est l'angle de rotation des ligaments le choix de cet angle est fait au hasard.

b est une valeur faite au hasard soit positif ou le négatif.

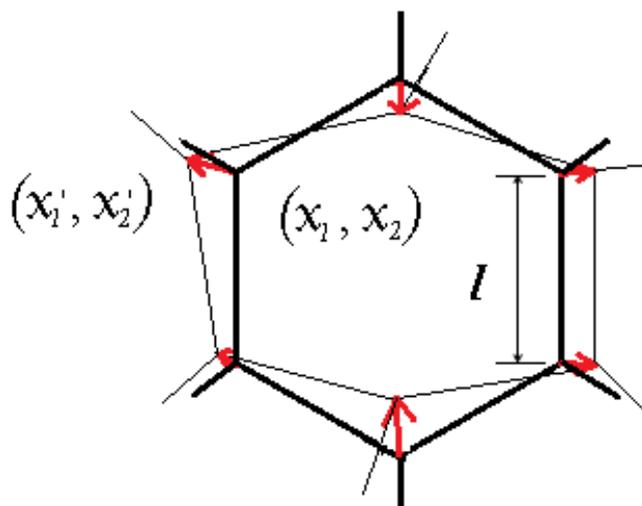
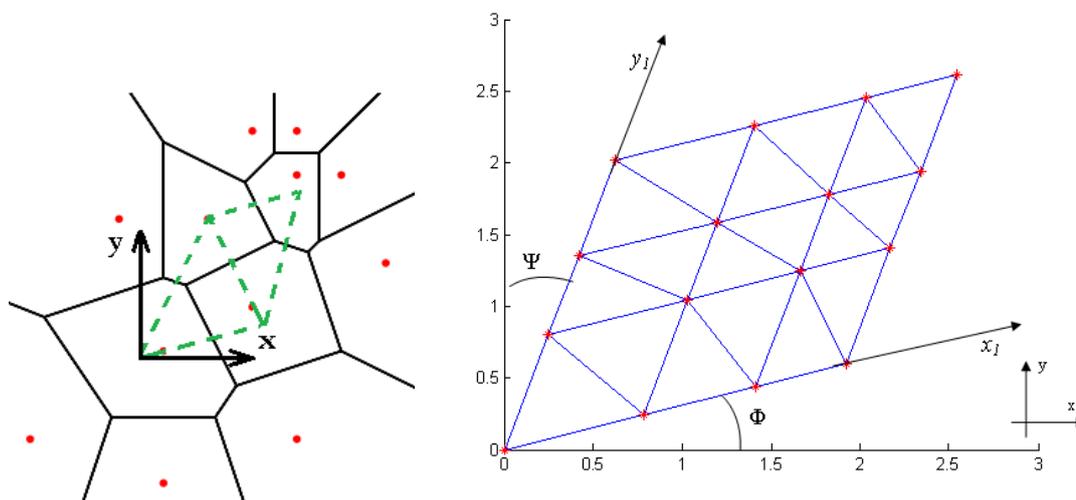


Fig.II-32 : Principe de perturbation.

La figure II-31 montre le principe de perturbation des coins d'une cellule hexagonale régulière pour obtenir une cellule Voronoï [ZHU-01].

Il existe un certain nombre de méthodes pour calculer les diagrammes de Voronoï. La méthode la plus directe pour obtenir un algorithme qui génère le diagramme de voronoï est le graphique qui s'appelle : triangulation de Delaunay.

La figure II-33b montre la triangulation de Delaunay associée au diagramme de Voronoï antérieur d'un ensemble de dix points. Notons, cependant, qu'avant de calculer une triangulation de Delaunay, il convient de veiller à ce que tous les sommets de Voronoï aient été calculés. [96.]



a)

b)

Fig. II-33 : a) Diagramme Voronoï utilisé pour construire la cellule Voronoï classique [13], b) triangulation de Delaunay.

5.3.1.2 Triangulation de Delaunay

Boris Nikolaevich [Delaunay un mathématicien russe \(1890-1980\)](#) a introduit la [triangulation](#) qui porte son nom en 1934 ; qui se résume en : un ensemble de points finis S et caractérisée par la propriété du cercle circonscrit vide: aucun point de S ne se trouve à l'intérieur du cercle circonscrivant un triangle : le triangle est Delaunay(figure II-33).

Dans la triangulation de Delaunay les deux triangles voisins construisent un losange, du point de vue matriciel ce losange correspond à une case (i,j). Le modèle mathématique ci-dessous calcule les centres de deux triangles voisins de la même case (i,j) comme le montre les figures II-35a et b.

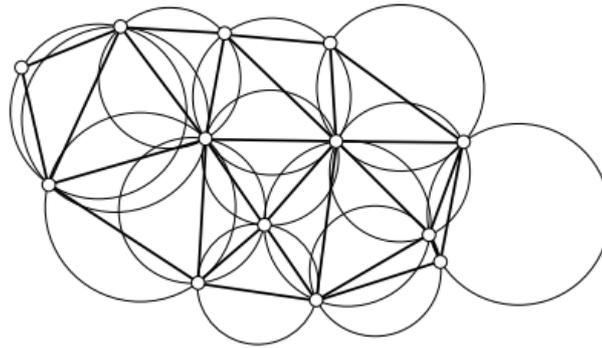


Fig. II-34 : Chaque triangle dans une triangulation Delaunay à un cercle circonscrit vide.

Ces centres formeront les sommets de l'hexagone qui matérialise la cellule irrégulière.

Les coordonnées de ces centres s'obtiennent par :

$$x_{\Delta_{\text{inf}}}(i, j) = \frac{d(i, j) - b(i, j)}{a(i, j) - c(i, j)}$$

$$y_{\Delta_{\text{inf}}}(i, j) = a(i, j)x_{\Delta_{\text{inf}}}(i, j) + b(i, j)$$

II .1

$$x_{\Delta_{\text{sup}}}(i, j) = \frac{h(i, j) - f(i, j)}{e(i, j) - g(i, j)}$$

$$y_{\Delta_{\text{sup}}}(i, j) = e(i, j)x_{\Delta_{\text{sup}}}(i, j) + h(i, j)$$

ou : $x_{\Delta_{\text{inf}}}$, $y_{\Delta_{\text{inf}}}$ et $x_{\Delta_{\text{sup}}}$ et $y_{\Delta_{\text{sup}}}$ représentent respectivement les coordonnées du centre du triangle inférieur et supérieur dans le plan (x,y) pour la même case (i,j).

Les matrices $a(i,j)$ qui sera touchée par la modification est calculées comme suit :

$$a(i,j) = \frac{(x_i - x_{i+1})\sin\Phi + \frac{1}{2}(y_{j+1} - y_j)\cos\psi}{(x_i - x_{i+1})\cos\Phi + \frac{1}{2}(y_{j+1} - y_j)\sin\psi} \quad \text{II-2}$$

Les matrices $b(i,j)$, $c(i,j)$, $d(i,j)$, $e(i,j)$, $f(i,j)$, $h(i,j)$, et $g(i,j)$ sont calculées comme dans [09].

5.3.2. Nouvelle cellule de Voronoï :

La nouvelle cellule Voronoï, qui a été proposée par Bouakba et al., est basée sur l'utilisation des droites en rouge sur la figure II-34b. Les coordonnées des coins de la nouvelle cellule sont déterminées par le même modèle mathématique présenté plus haut, seulement dans ce cas, on introduit un coefficient k et la première partie de l'équation II.2 doit être transformé en [9]:

$$a(i,j) = \frac{(x_i - x_{i+1})\sin\Phi + k(y_{j+1} - y_j)\cos\psi}{(x_i - x_{i+1})\cos\Phi + k(y_{j+1} - y_j)\sin\psi} \quad \text{II.3}$$

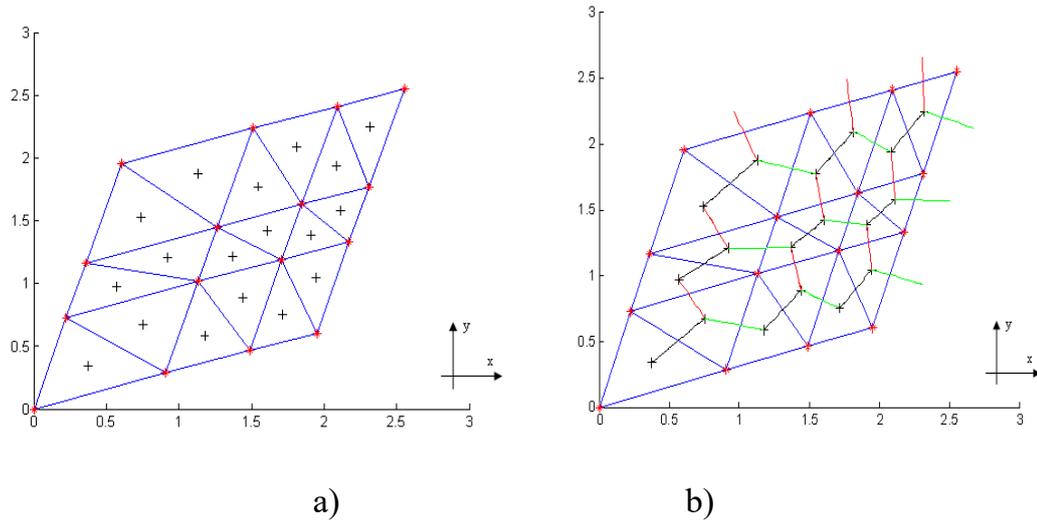


Fig.II-35 : a) Coordonnées des coins de la nouvelle cellule irrégulière Voronoï dans le plan xy, b) Diagramme de la nouvelle cellule présentée dans ce travail[09].

Donc la quantité $a(i; j)$ devient dépendante du facteur k , où ce facteur est utilisé pour modifier la position du centre de gravité du triangle inférieur dans le diagramme proposé. Le diagramme de la nouvelle cellule est conçu selon la séquence suivante :

- Le centre de triangle inférieur de la case (i,j) est raccordé avec le centre de triangle supérieur de la même case (i,j) ;
- Le centre de triangle supérieur de la case (i,j) est raccordé avec le centre de triangle inférieur de la case $(i,j+1)$.
- Le centre de triangle supérieur de la case (i,j) est raccordé avec le centre de triangle inférieur de la case $(i+1,j)$ comme le montre la figure II.36b.

La figure II-36 montre clairement que la nouvelle cellule est différente par rapport à la cellule Voronoï classique, sachant que les deux digrammes utilisent le même champ des points.

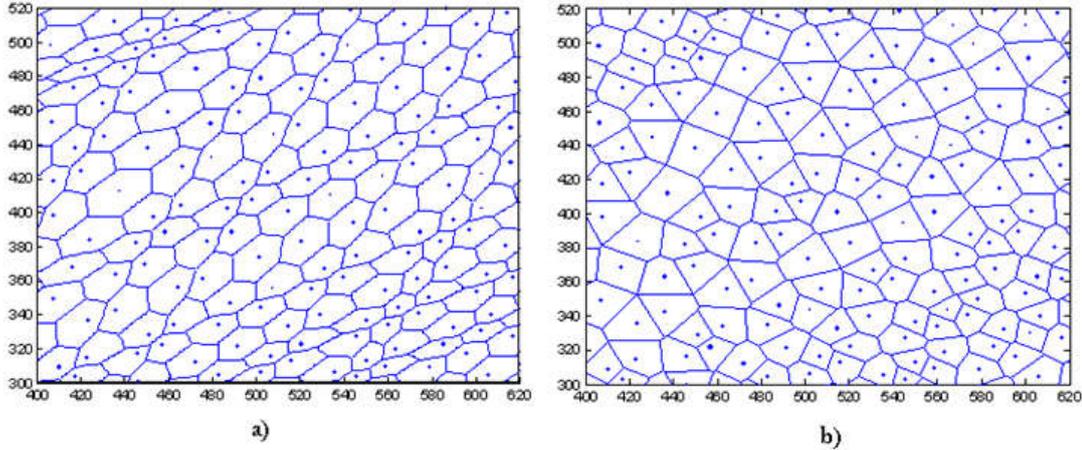


Fig. II-36 : (a) Cellules obtenues par le diagramme du présent travail, (b) Cellules obtenues par le diagramme de Voronoï classique [09].

5.3.3 Cellule modèle :

Dans le présent travail, nous avons repris ce modèle ou nous avons remplacé la valeur du coefficient k par deux autres coefficients k_1 et k_2 , valant, respectivement $1/4$ et $3/4$ et ce pour avoir l'expression des droites affichées en vert dans la figure II-36 tentant d'approcher au mieux la géométrie du cladode, les équations du modèle mathématique sont réécrit de la sorte que :

$$\begin{aligned}
 a(i,j) &= \frac{(x_i - x_{i+1})\sin\Phi + k_1(y_{j+1} - y_j)\cos\psi}{(x_i - x_{i+1})\cos\Phi + k_2(y_{j+1} - y_j)\sin\psi} \\
 b(i,j) &= x_{i+1}\sin\Phi + y_j\cos\psi - a(i,j)(x_{i+1}\cos\Phi + y_j\sin\psi) \\
 c(i,j) &= \frac{(y_j - y_{j+1})\cos\psi + k_2(x_{i+1} - x_i)\sin\Phi}{(y_j - y_{j+1})\sin\psi + k_1(x_{i+1} - x_i)\cos\Phi} \\
 d(i,j) &= y_{j+1}\cos\psi + x_i\sin\Phi - c(i,j)(y_{j+1}\sin\psi + x_i\cos\Phi); \\
 e(i,j) &= \frac{(y_{j+1} - y_j)\cos\psi + k_1(x_i - x_{i+1})\sin\Phi}{(y_{j+1} - y_j)\sin\psi + k_2(x_i - x_{i+1})\cos\Phi} \\
 f(i,j) &= x_{i+1}\sin\Phi + y_j\cos\psi - e(i,j)(x_{i+1}\cos\Phi + y_j\sin\psi); \\
 g(i,j) &= \frac{(x_{i+1} - x_i)\sin\Phi + k_2(y_j - y_{j+1})\cos\psi}{(x_{i+1} - x_i)\cos\Phi + k_1(y_j - y_{j+1})\sin\psi} \\
 h(i,j) &= y_{j+1}\cos\psi + x_i\sin\Phi - g(i,j)(y_{j+1}\sin\psi + x_i\cos\Phi) \\
 x_1(i,j) &= \frac{d(i,j) - b(i,j)}{a(i,j) - c(i,j)} \\
 y_1 &= a(i,j)x_1(i,j) + b(i,j) \\
 x_2(i,j) &= \frac{h(i,j) - f(i,j)}{e(i,j) - g(i,j)} \\
 y_2 &= e(i,j)x_2(i,j) + f(i,j)
 \end{aligned} \tag{II-3}$$

Ces équations construisent la cellule de cactus à partir des droites en rouge sur la figure II-36b. Dans le but d'implémenter ce modèle nous avons fait les hypothèses simplificatrices suivantes :

- 1- Les points sont placés de façon aléatoire dans le plan (x, y) .
- 2- Chaque ligne de ces points doit être parallèle à un axe similaire dans le plan quelconque x_1, y_1 (Figure II-35a).

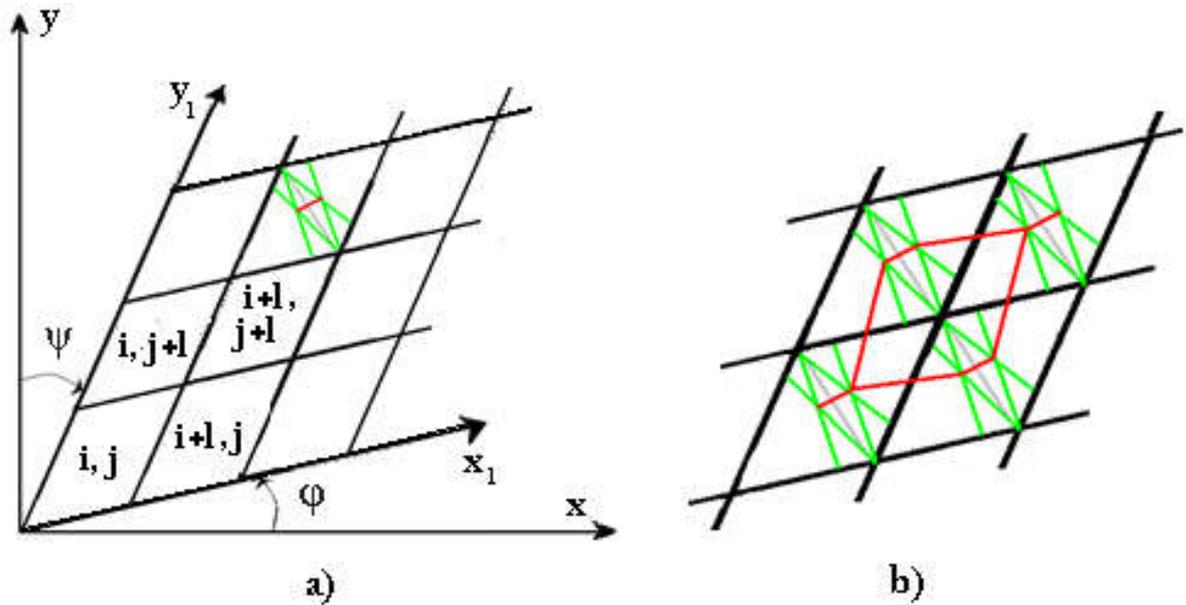


Fig. II-37 : a), triangulation de Delaunay, (b) Diagramme de la nouvelle cellule présentée dans ce travail.

5.3.4 Approche numérique :

La modélisation de la structure réelle du cladode (figure II-38a) n'a pas été sans présenter énormément de difficultés et ce à cause de la complexité des formes et des irrégularités majeures dans les lignes (fig-II-38b et c) qui nécessitent une mémoire de CPU extrêmement importante et, plus loin lors des simulations, un temps de calcul extrêmement long, ceci nous a décidé à opter pour l'approximation de l'architecture réelle du cladode par celle générée par la cellule modèle proposée, d'autant plus que les deux structures sont fortement aléatoires.

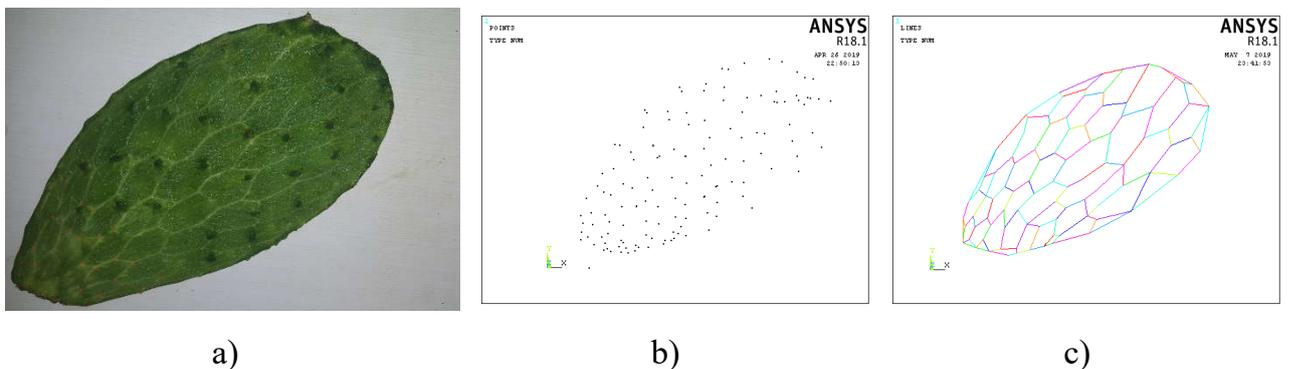


fig. II-38 : a) Cladode, b) Sommets des cellules hexagonales du cladode, c) Génération de la structure du cladode dans ANSYS.

Les structures nids d'abeilles, composées de la cellule modèle proposée, sont générées dans MATLAB (figure II-38a), puis exporté vers le code de calcul des structures ANSYS.

La totalité de la structure est maillée en 2D par l'élément PLANE 82 d'une section rectangulaire et une épaisseur uniforme $t = 1$ mm, cet élément possède trois degrés de liberté : deux degrés de translation selon les axes x et y , et une rotation dans le plan autour de l'axe z . L'étude de la convergence permet de diviser en cinq éléments les ligaments de chaque cellule.

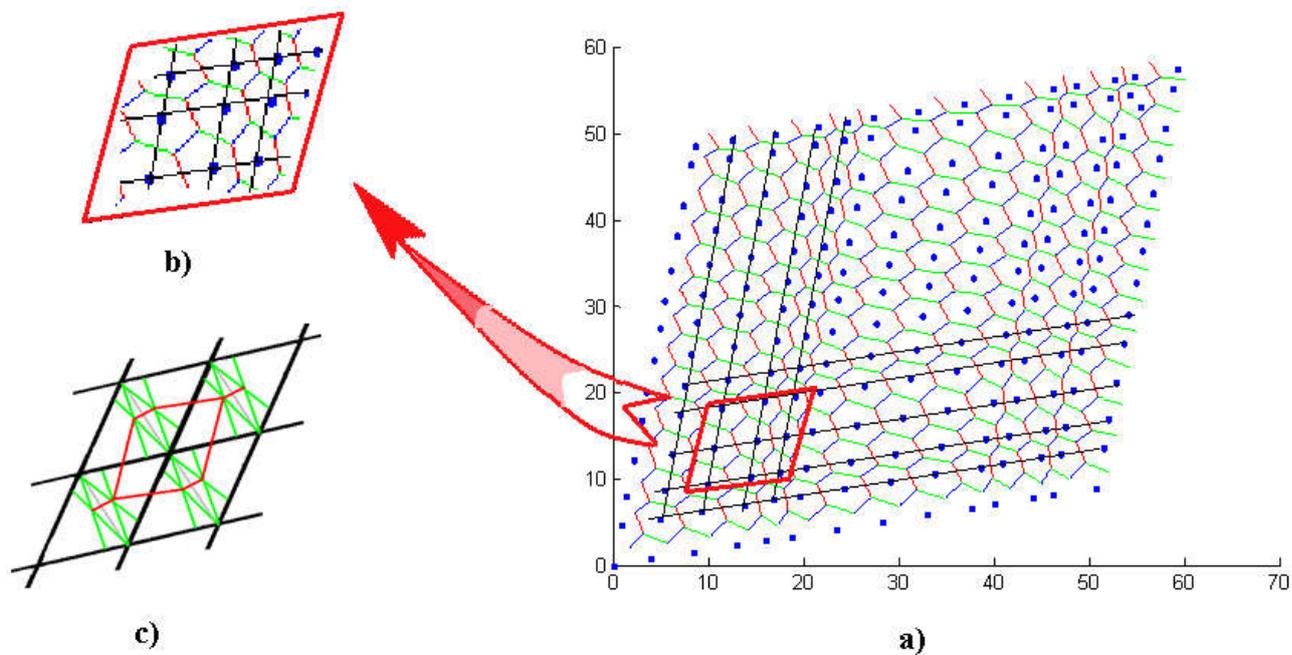


Fig.II-39 : Génération de la structure ; a) Modèle dans Matlab, b) Zoom sur la zone encadrée,

c) Diagramme de la cellule modèle présentée.

Dans le plan de la structure, trois simulations ont été nécessaires pour déterminer les cinq constantes élastiques [6] :

- Deux simulations de traction simple, permettant chacune de calculer un module d'élasticité et un coefficient de Poisson (E_1 , E_2 , ν_{12} et ν_{21});
- Une simulation de cisaillement dans le plan (x , y) afin de déterminer le module de cisaillement (G_{12}).

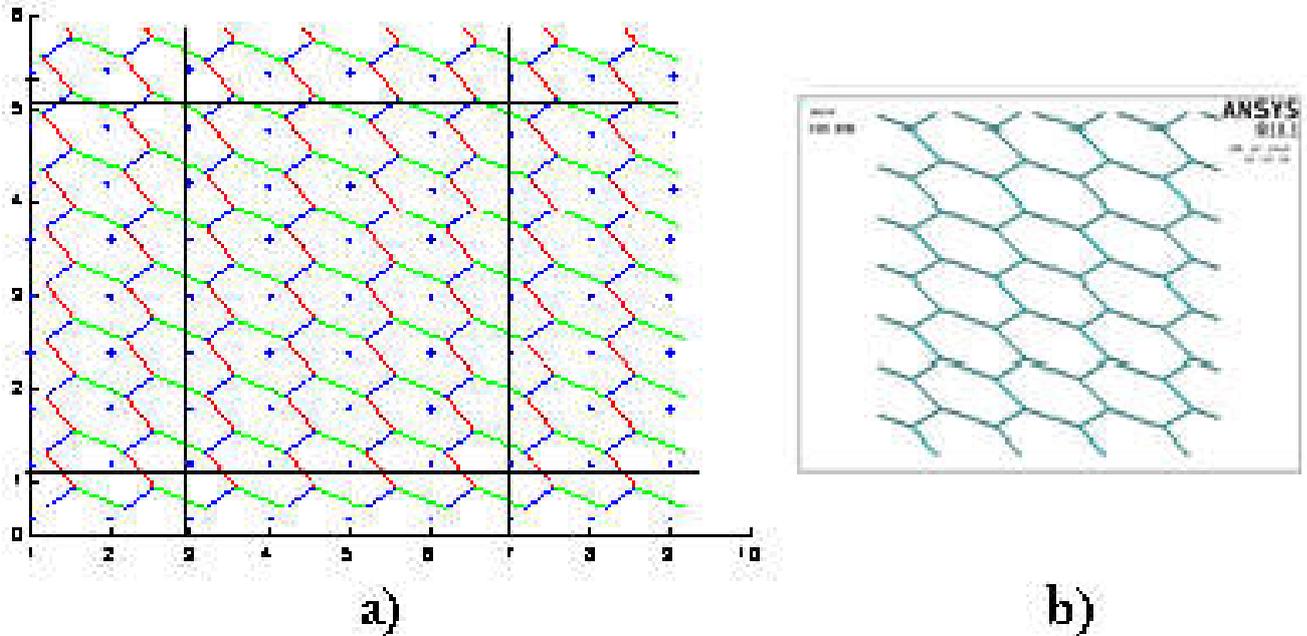
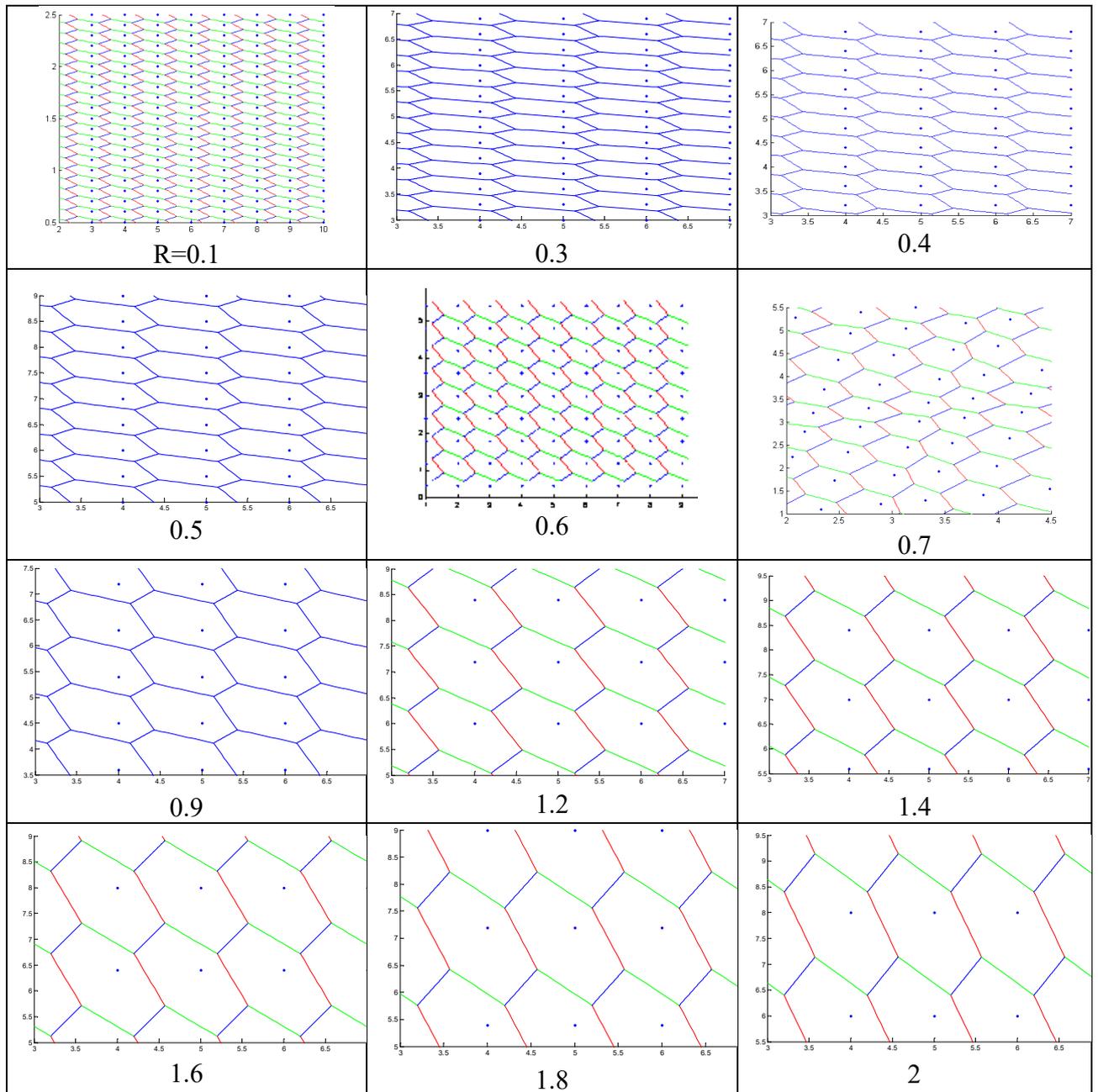


Fig.II-40 : a) Rectangle délimitant le V.E.R, b) V.E.R. sous ANSYS.

La figure II-40a montre la structure modélisant l'architecture du cladode. Dans cette structure nous avons choisi un V.E.R. échantillon représentatif, échantillon sur lequel sera effectué une homogénéisation numérique (figure II-40b).

En choisissant le nombre des cellules de la structure selon les directions x et y , et les valeurs des angles φ et ϕ qui définissent les angles que font les axes x_1 et y_1 par rapport, respectivement, x et y et qui déterminent le degré d'ouverture de la structure (figure II-329a) et par conséquent le degré d'élanement des cellules que nous avons qualifié par le rapport $R = x/y$ entre la plus petite dimension de la cellule, que nous appellerons à l'occasion x , sur celle la plus grande, que nous appellerons y , (figure II-40).

Tableau II-2 : Variation de la configuration de la structure en fonction du rapport $R=x / y$.



La tableau II-2 affiche l'effet de la variation du rapport R sur la configuration du V.E.R. en gardant les mêmes dimensions de ce dernier, sur la densité relative de la structure et ses propriétés mécaniques. Les différentes valeurs de $R=0.1$ jusqu'à 2 et les différentes configurations correspondantes sont classés dans ce tableau, affichant une diminution du nombre de cellules au fur et à mesure que le rapport R augmente, donc on s'attend à une diminution de la densité relative de la structure.

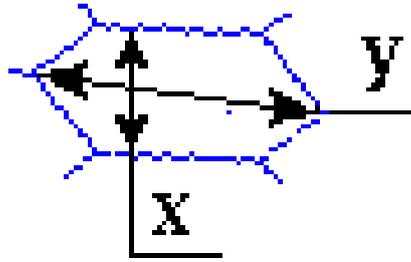


Fig. II-41 : Grand axe y et petit axe x de la cellule.

Puis à l'aide d'une macro, rédigé en APDL (Ansys Parametric Design Language), nous transformons les points géométriques dans MATLAB en keypoints dans ANSYS. Ensuite nous joignons chaque deux keypoints par une ligne, après les 6 lignes formant un hexagone sont transformés en une aire à l'aide d'une fonction appropriée dans ANSYS. Dans un second temps, nous dessinons un rectangle délimitant le V.E.R. Ces coordonnées sont transférées dans ANSYS. Après les manipulations standards de saisie des données, nous obtenons un modèle maillé sur lequel seront effectuées toutes les simulations (figure II-36).

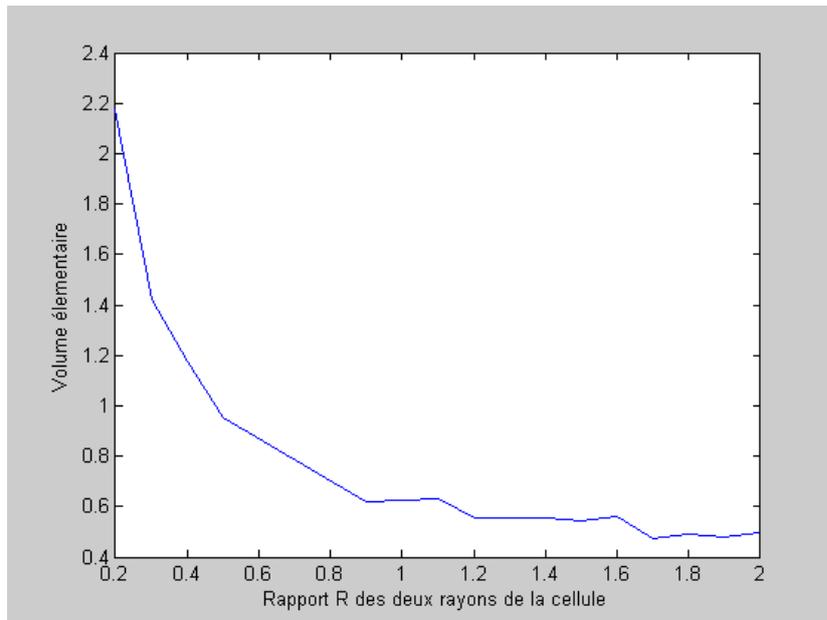


Fig. II-42 : Variation du volume élémentaire en fonction du facteur R.

Les résultats affichés dans les figures II-42 à 44 montrent la variation du volume élémentaire, densité relative, modules de Young dans les directions 1 et 2 en fonction du facteur R qui symbolise le rapport du grand rayon de la cellule sur le petit rayon ($R = y/x$). La figure II-42 affiche une proportionnalité inverse entre le rapport R et le volume élémentaire V.E.R.

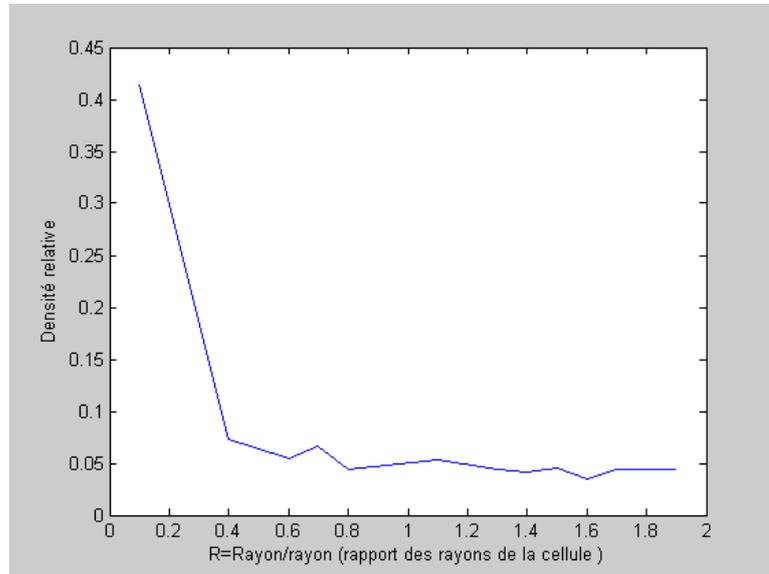


Fig. II-43 : Variation de la densité relative en fonction du facteur R.

La figure II-43 affiche, tout aussi, une proportionnalité inverse entre R et la densité relative de la structure. Cependant, le graphe de cette figure montre une diminution très brutale, dans sa première partie, de la densité relative pour se stabiliser et devenir une diminution moins aigue aux alentours de R=0.4.

La figure II-44 présente deux graphes l'un en rouge et l'autre en bleu, désignant, respectivement, la variation du module de Young, suivant la direction x_1 ; E_1 , et du module de Young, suivant la direction x_2 ; E_2 . Dans le premier graphe, la diminution de E_1 est brutale, jusqu'à la valeur de $R = 0.4$ pour ensuite devenir une diminution lente au fur et à mesure que R augmente. Pour ce qui est de E_2 , le graphe affiche une diminution jusqu'à la même valeur de $R = 0.4$ pour enclencher une croissance avec R augmentant.

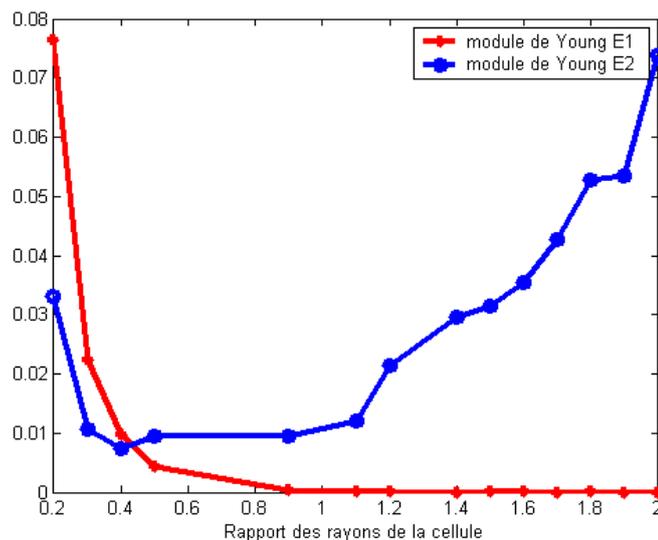


Fig. II-44 : Variation des modules de Young E_1 et E_2 en fonction du facteur R.

8. Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons réalisé, dans un premier temps, une modélisation géométrique d'une structure générée par une nouvelle cellule disposée, périodiquement et alternativement, horizontalement et verticalement. Nous avons, ensuite, dégagé les principales propriétés mécaniques, dans le plan, de la structure, à savoir ; les modules de Young E_1 et E_2 , les coefficients de Poissons ν_{12} et ν_{21} et enfin le module de Coulomb G . Ensuite nous avons tracé les différentes dépendances entre ces propriétés mécaniques et les paramètres géométriques de la cellule, à savoir ; l'angle d'inclinaison θ , les longueurs H , h et ℓ , du grand, petit et clinquant incliné, respectivement.

Dans la deuxième partie de ce chapitre nous avons simulé des essais de traction et de cisaillement sur ladite structure, puis dégagé les paramètres effectifs du solide cellulaire.

Enfin, nous avons modélisé la structure cellulaire interne de la raquette d'une plante de cactus, sur laquelle nous avons effectué des simulations en traction et cisaillement, pour pouvoir ressortir les propriétés effectives de cette structure.

Les résultats, qui se dégagent de ces analyses numériques, montrent que les propriétés mécaniques de la structure alvéolaire, générée par la nouvelle cellule, dépendent fortement des paramètres géométriques.

Chapitre III

Caractérisation expérimentale d'un matériau cellulaire

1. Introduction :

Aujourd'hui, les matériaux cellulaires sont utilisés dans divers secteurs, tels que l'automobile, les transports et l'aérospatiale. Un solide cellulaire est un solide constitué d'un réseau interconnecté de liens solides ou de plaques formant les arêtes et les faces de cellules. Cette classe de matériaux présente de nombreuses propriétés bénéfiques telles qu'une énorme rigidité spécifique à la flexion, une résistance et une capacité de supporter de grandes charges statiques et cycliques pendant de longues périodes. Ces propriétés structurelles sont utilisées non seulement dans les panneaux sandwich mais aussi plus généralement dans les applications où le poids est critique, comme les voitures, les avions et les bateaux. Toutes ces propriétés dépendent de deux critères : une performance mécanique accrue et une minimisation de la masse. Ces matériaux ont la spécificité que leurs propriétés physiques dépendent à la fois de leur matériau constitutif et de la disposition spatiale de ce matériau dans une architecture à l'échelle millimétrique. Cela fait de leur densité relative la caractéristique structurelle la plus importante qui relie la densité de la mousse (ou le nid d'abeille en 2D) et celle du solide dont elle est composée [98].

Les mousses métalliques et les nids d'abeilles sont des exemples canoniques de matériaux cellulaires. Cependant, pour être intégré dans la production de pièces industrielles, le comportement de ces matériaux doit être facilement calculable. Contrairement aux méthodes de mesure classiques, extensomètres, jauges de contrainte et autres donnant des valeurs moyennes pour des mesures ponctuelles, la méthode optique donne accès aux valeurs des mesures du champ total à la surface observée matériaux de structure. Parmi les méthodes utilisées, les méthodes de corrélation d'images numériques et de suivi de marques sont les plus utilisées. Le premier nécessite une surface plane continue et ne peut pas être utilisé dans notre cas. La seconde est bien adaptée dans le cas d'une étude de matériaux cellulaires car elle peut être utilisée avec des structures discontinues ou complexes [99].

Une partie particulière des matériaux cellulaires sont les matériaux auxétiques qui présentent un coefficient de Poisson négatif, conçus à partir des années 80. On s'attendait à ce que ces matériaux améliorent les propriétés mécaniques telles que le module de cisaillement, l'amortissement acoustique. De plus, ils offrent une meilleure résistance aux chocs. Les spécialistes ont conclu que les matériaux auxétiques pouvait donc être utilisé dans des applications à la fois fonctionnelles et structurelles [97-99].

Dans un examen des matériaux auxétiques, WEI YANG & al [102] présentent une description et un classement détaillés des matériaux auxétiques. Dans leur travail, ils font

valoir que la plupart des matériaux de structure doivent obligatoirement avoir un G supérieur à K . Changer la microstructure d'un matériau de manière à ce que E reste constant mais que ν change, nous pouvons modifier les valeurs de K et G . Par exemple, en diminuant ν à -1 , un module de cisaillement très élevé par rapport au module d'élasticité globale (bulk modulus) a été obtenu.

Dans un autre examen des applications des structures auxiliaires, Mir & al. [22] montrent que de nombreux matériaux auxétiques ont été trouvés, fabriqués et synthétisés, lesquels diffèrent par leur structure, leur échelle et leur mécanisme de déformation et ont des applications dans le domaine biomédical.

Plusieurs chercheurs ont utilisé des approches numériques pour mieux comprendre et prédire les propriétés des structures alvéolaires [70,93,98]. Récemment, Chen et al. [106] ont calculé les propriétés élastiques de la topologie anti-tétra-chirale en utilisant un correcteur d'image numérique D.I.C et des résultats comparés avec les résultats théoriques et les résultats d'analyse par éléments finis. Dans une autre étude, Khan et al. [107] ont étudié les propriétés de broyage dans le noyau en nid d'abeille dans le plan et hors du plan en utilisant une corrélation d'image numérique.

Dans une analyse analytique et numérique, Lira & al. Décrivent les propriétés de cisaillement transversal d'une nouvelle structure en nid d'abeille centrosymétrique évaluée à l'aide de modèles d'éléments finis. Elle montre que la structure cellulaire présente une géométrie permettant des déformations auxétiques dans le plan et cette topologie multiple pour la conception de nids d'abeilles pour des applications multifonctionnelles [27].

Une autre étude analytique et par éléments finis est réalisée par Zi-Xing Lu & al. [81] pour calculer le coefficient de Poisson dans le plan et le module de Young d'un nouveau concept de la structure composée de cellules soumises à une charge uniaxiale. Les résultats obtenus par l'analyse et l'analyse EF montrent que l'ajout d'une côte étroite dans la cellule unitaire de la configuration en nid d'abeille ré-entrante améliore le module de Young de la structure cellulaire. Les résultats montrent également une relation linéaire évidente entre le module de Young et le coefficient de Poisson de la conception proposée, l'épaisseur des nervures ajoutées changeant.

Soulignant les nouvelles propriétés vibratoires et acoustiques des matériaux cellulaires auxétiques, Tian-Xue Ma & al. [106] montrent, dans une analyse numérique, que pour les PC (cristaux phononiques) sont plus sensibles aux variations des rapports de Poisson et que

l'utilisation du coefficient de Poisson négatif fournit un moyen de réglage des bandes interdites. Dans une étude analytique de cellules unitaires chirales, Mousanezhad & al. [107] ont constaté que la chiralité et la hiérarchie affectaient de manière cruciale les propriétés mécaniques dans le plan de ces structures et que les structures hiérarchiques étaient plus rigides et avaient un coefficient de Poisson plus élevé que leurs homologues conjugués pour des valeurs similaires du rapport, et ils expliquaient que cela était dû au mécanisme de déformation observé dans les structures alvéolaires chirales et anti-chirales auxétiques.

D'autres chercheurs ont exposé dans nombre de leurs travaux les processus de fabrication des matériaux auxétiques ainsi que leur caractérisation. Toutes ces études ont été réalisées dans le but de mieux comprendre la capacité d'utiliser des cellules en nid d'abeille dans des panneaux sandwich, de prédire les propriétés mécaniques et à concevoir de nouveaux matériaux cellulaires à faible densité et haute rigidité. Tout d'abord, nous déterminons les propriétés dans le plan d'un nid d'abeilles (fig.1 (a)) générées par des cellules carrées modifiées avec un lien ré-entrant normal et les effets de la variation des paramètres géométriques sur les caractéristiques de la structure. Pour ce faire, des tests de traction et de cisaillement uniaxiaux sont effectués. Deuxièmement, nous avons analysé les interactions entre comportement et géométrie de la nouvelle structure afin d'améliorer la description géométrique des matériaux cellulaires étudiés et d'optimiser cette géométrie. L'effet des paramètres géométriques des cellules sur les propriétés de la structure a été mis en évidence par la réalisation d'une série de tests impliquant la variation d'un paramètre et le maintien des autres. Tout au long de ce chapitre, nous utiliserons le nom de cellule de lien ré-entrant pour désigner cette nouvelle cellule.

Dans ce chapitre nous entamons une étude expérimentale d'une structure cellulaire en vue d'obtenir ses caractéristiques mécaniques dans le plan.

2. Caractérisation de la structure alvéolaire :

Afin de caractériser la nouvelle structure proposée dans ce travail, nous suivons la procédure présentée dans le tableau de caractérisation des structures présenté par L. Gibson dans [6]. Le matériau de la structure étudiée est un polyméthacrylate de méthyle, souvent abrégé en PMMA, et est un polymère thermoplastique transparent, pour application mécanique qui sont utilisés à l'état vitreux, obtenu par polyaddition dont le monomère est le méthacrylate de méthyle (MMA). Le tableau 1 donne les propriétés de la matrice utilisée [108]. La structure alvéolaire proposée (fig. 1a) est composée de cellules à lien ré-entrant illustrées à la fig. 1 (b) - (e).

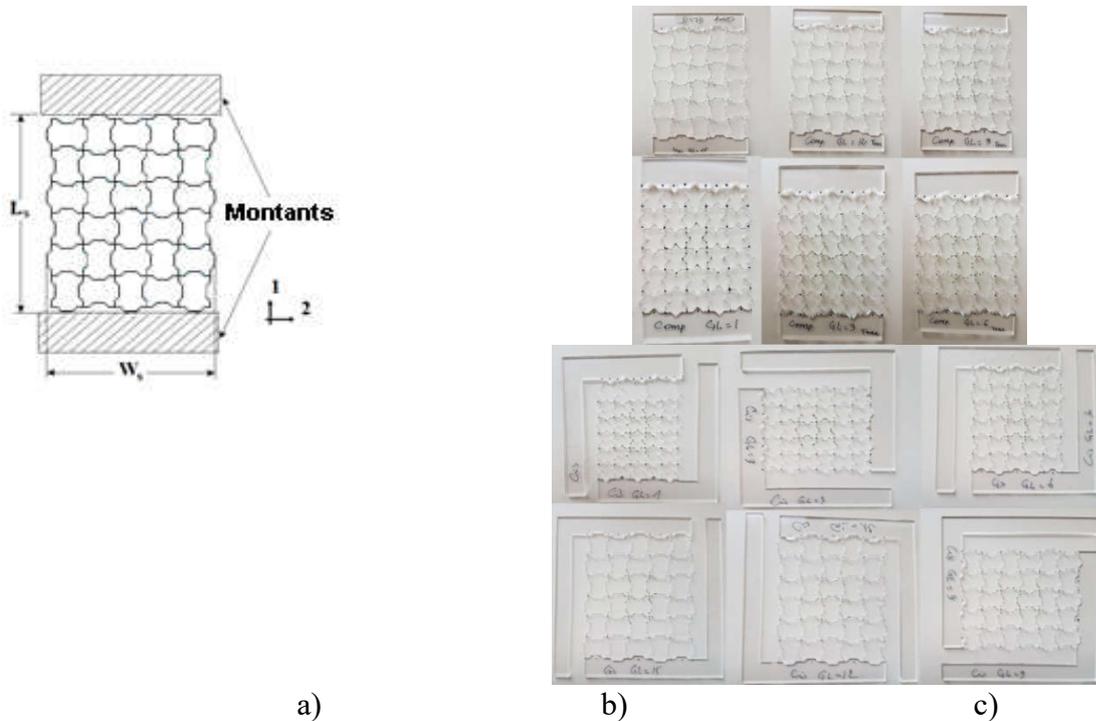
Tableau III-1. Propriétés du PMMA [108].

Propriété	Valeur	Unité
Densité	1.19	g/cm^3
Module de Young	2850 [2400 à 3300]	MPa
Coefficient de Poisson dans le plan x-y	0.375 [0.35 – 0.4,]	
Contrainte maximale de traction (à la rupture)	77	MPa

2.1. Identification des propriétés de la structure

Les éprouvettes utilisées dans les essais de traction consistent en une toile de trente cellules distribuées de sorte à avoir cinq cellules dans la direction transversale et six cellules longitudinalement dans le but de s'assurer de l'homogénéité de la distribution de la charge sur la surface normale à la contrainte (Fig.III-1a). Inversement, les éprouvettes utilisées dans les essais de cisaillement sont choisis de sorte à avoir cinq cellules arrangées dans la direction de la contrainte et six dans la direction qui lui est normale (Fig.III-1 (b)).

Ce choix est motivé par le souci d'être dans l'intervalle garantissant la validité de l'hypothèse de la continuité matérielle et la sensibilité de l'appareillage de mesure (les gauges de la machine d'essai sensibles au millième du Newton). Le matériau cellulaire peut être traité comme un milieu continu à condition que la dimension de la cellule doit être petite comparé à celle de l'éprouvette.



a) b) c)
 Fig.III-1: Eprouvettes tachetées, obtenues par découpage LASER, a) modèle d'éprouvette, b) Eprouvette d'essai de traction, c) Eprouvette d'essai de cisaillement.

Les éprouvettes d'essai ont été exécutées par un logiciel CAD et ont été obtenues par découpage LASER (la technique de prototypage rapide). Toutes les éprouvettes d'essai ont une épaisseur t similaire et une hauteur b des murs des cellules égale à 0.3 mm et 3 mm respectivement. Dans le but d'identifier le matériau cellulaire nous avons opté pour la géométrie du modèle de la cellule présenté dans la Fig.II-3 et dont les dimensions ont été données plus haut.

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous avons tentés de tracer les multiples influences des caractéristiques géométriques de la cellule à lien ré-entrant sur la densité relative ρ_r , et les propriétés mécaniques dans le plan E^* , G^* et ν^* nommément le module de Young, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson de la structure, respectivement [6].

Les paramètres géométriques choisis sont : θ ; angle d'inclinaison du lien ré-entrant, H ; longueur du grand clinquant, h ; longueur du petit clinquant et ℓ ; longueur du clinquant ré-entrant. En raison de la variation de ces paramètres, les dimensions de l'éprouvette sont également variables et sont données par :

$$L_s = 6(H + 2(h + \ell \cos\theta)) = 6\ell(H/\ell + 2(h/\ell + \cos\theta)) = 6\ell(\alpha + 2(\beta + \cos\theta)) \quad (8)$$

$$W_s = 5(H + 2(h + \ell \cos\theta)) = 5\ell(H/\ell + 2(h/\ell + \cos\theta)) = 5\ell(\alpha + 2(\beta + \cos\theta)) \quad (9)$$

où L_s : longueur de l'éprouvette, W_s : largeur de l'éprouvette, α et β sont, respectivement, le rapport de l'aspect de la cellule et le rapport du petit clinquant (Fig.III-1 (a)).

Les Fig.III-1(a), (b) et (c) désignant le schéma de l'éprouvette, éprouvette de d'essai de traction et éprouvette d'essai de cisaillement de la structure, respectivement. Les éprouvettes des essais de traction ont été rallongées de tenants de forme plate et ont pour but de faciliter leur fixation sur la machine d'essais. Pour le cas des éprouvettes de cisaillement, ces prolongements plats ont été muni de bras en équerre en vue de donner la possibilité de tester



l'éprouvette en cisaillement tout en chargeant axialement. Durant ces essais, nous formulons l'hypothèse que la déformation des supports est négligeable comparé à la déformation des éprouvettes.

Fig.III-2 Mesure et acquisition de donnée :a) Dispositif de mesure et acquisition, b) mesure de champ de déplacement 2D.

Tableau III-2 : Caractérisation de la structure [1] (cellule modèle : $h = \ell = \frac{H}{2} = 3\text{mm}$, $\theta = 45^\circ$).

Matériau	P.M.M.A. (Polymethyl Methacrylate)
Densité (g/cm^3)	1.19
Connectivité des arêtes, E_c	4
Forme de la Cellule	Carré
Plus grande dimension principale de la cellule, \checkmark L_1 (mm)	14,83
Plus petite dimension principale de la cellule, \checkmark L_2 (mm)	14,12
Rapport d'anisotropie de forme, $R = \checkmark L_1 / \checkmark L_2$	1.05
Epaisseur des murs de la cellule t (mm)	0.3
Densité relative, $\rho_r = \rho^* / \rho_s$	0.04
Autres caractéristiques spécifiques,	Disposition des cellules horizontales et verticale, alternativement et périodiquement, dans les directions 1 et 2,

2.2. Technique expérimentale, principe de la méthode du suivi du marqueur :

L'appareillage d'essai (Fig.III-2) consiste en une machine de traction d'une capacité de 5 kN, pilotée par microordinateur en plus d'un système d'acquisition et de traitement d'images connecté à une caméra digitale. Cette méthode consiste à marquer l'éprouvette par une série de taches de peinture, arrangés sur la surface de la structure objet de l'étude, avant l'essai. Une camera ([CCD ou CMOS](#)) enregistre les images digitales des marques à chaque configuration de l'éprouvette. Le traitement des images est effectué par le logiciel DEFTAC développé par l'institut Pprime de l'Université de Poitiers.

Dans chaque image, les coordonnées des marques sont obtenues par le calcul du centre géométrique par l'intensité du niveau de gris. En faisant la différence de deux positions entre deux configurations, il est possible de calculer le déplacement de chaque tache et de déterminer le mouvement et la déformation de l'éprouvette. Le calcul est effectué automatiquement soit en temps réel durant l'essai ou après l'acquisition des images. Le suivi de 4 tâches est nécessaire pour obtenir les composantes planes du gradient de transformation. L'étude de 2 tâches donne seulement le gradient dans la direction des tâches. Cette méthode de suivi des taches 2D est développée par le logiciel Deftac [109-110].

Cette technique permet des mesures sur la surface sans contact. On peut obtenir des champs de déplacements de 0.01 μm à plusieurs dizaines de millimètre (en se référant au système d'observation utilisé pour obtenir les images digitales) et les déformations de 0.1% à plusieurs centaines de % [109,110]. La plage mesurée est :

$$\begin{cases} u(x, y) \\ v(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

où $u(x, y)$ est la composante du champ de déplacement plan de la surface z_0 dans la direction de l'axe x , $v(x, y)$ est la composante du champ de déplacement plan de la surface z_0 dans la direction de l'axe y . Le tenseur gradient de déformation (transformation linéaire tangente) peut être exprimée par :

$$\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{I}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \quad (2)$$

et:

$$\bar{\bar{F}} = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & \times \\ F_{yx} & F_{yy} & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} \quad (3)$$

où; \bar{I} et $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}$ sont les tenseurs identité et gradient de déplacement respectivement.

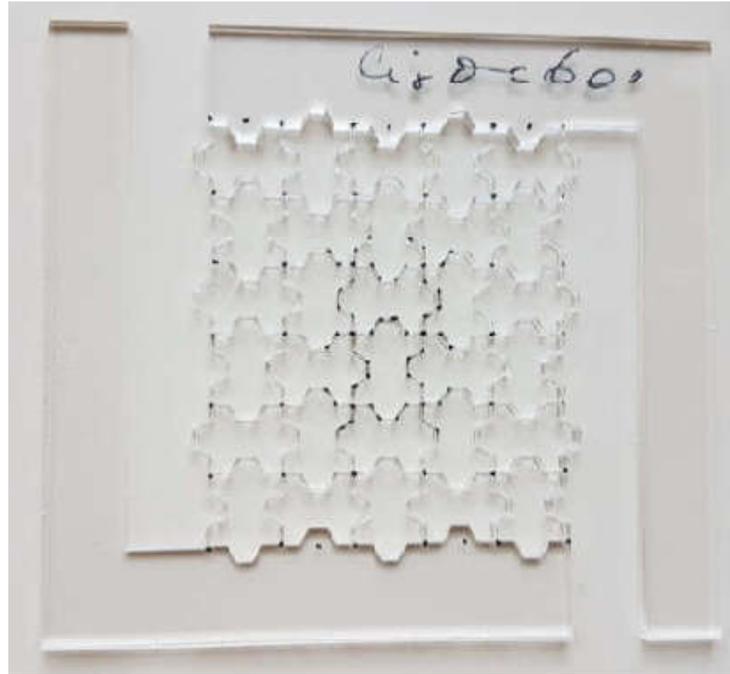


Fig.III-3 Eprouvettes tachetées, éprouvette de cisaillement pour le paramètre $\theta = 60^\circ$.

La figure III-3 montre un spécimen d'éprouvette utilisée dans les essais de cisaillement de la structure générée par des cellules de paramètre $\theta = 60^\circ$. Les marques ont été disposées dans les sommets des cellules et plus précisément aux extrémités des clinquants et au milieu de ces clinquants [109,110].

3. Interprétation des résultats :

La courbe typique charge-déplacement pour la structure composée de cellule de modèle dont les paramètres sont $H= 2h = 2\ell$ et $\theta = 45^\circ$, est affichée dans la figure 4. La structure sujette à une charge de traction a un comportement similaire à celles trouvées dans la littérature. Le module de Young est calculé par :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (4)$$

où ε est la déformation calculée par:

$$\varepsilon = \frac{u}{L} \quad (5)$$

où u : est la composante, dans la direction x , du champ de déplacement plan de la surface z_0 , et L : longueur initiale entre deux marques. La contrainte est calculée par :

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (6)$$

où F est la charge en N; et S : section de l'éprouvette utilisée dans l'essai. La figure 5-a trace la courbe de déformation en traction au-delà de la zone de rupture. Cette courbe est divisée en deux parties obtenues suite à deux mécanismes de déformation différents qui ont fait leur apparition lors de l'essai de traction. Le premier est un régime linéaire élastique causé par la flexion des murs des cellules et la *rotation des clinquants vers l'axe de traction (donnant des déformations plus larges et une augmentation de la rigidité de la structure)*.

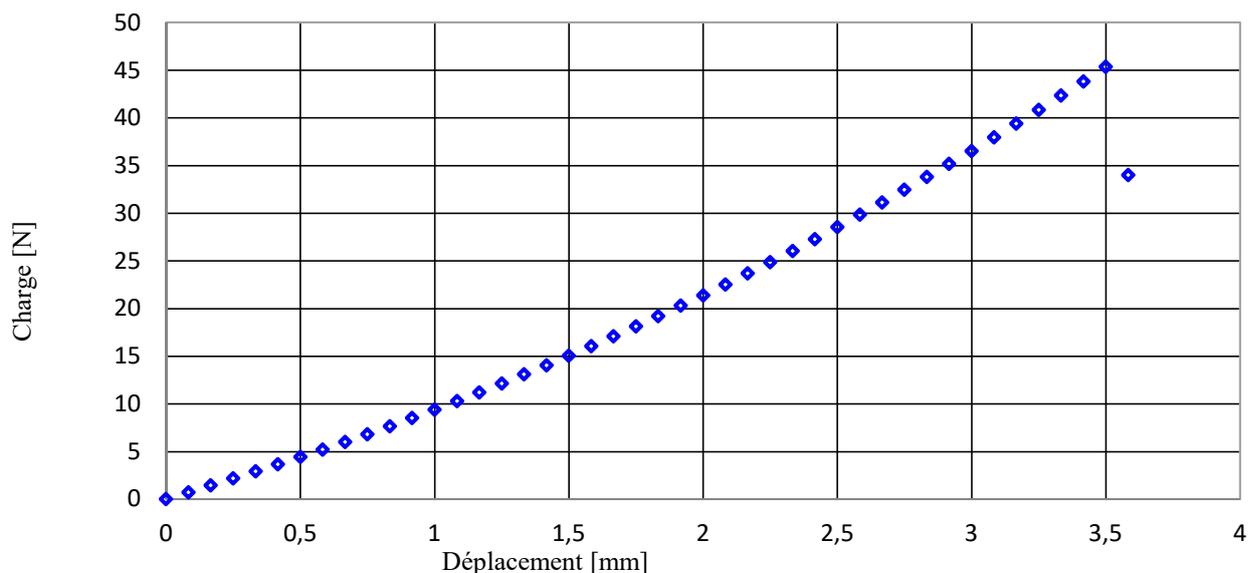
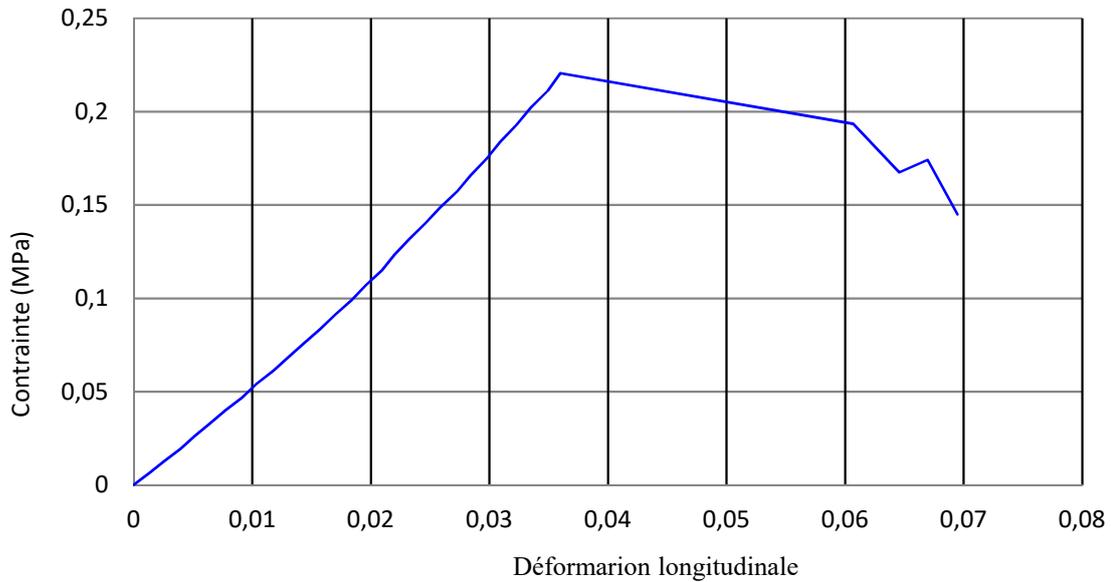
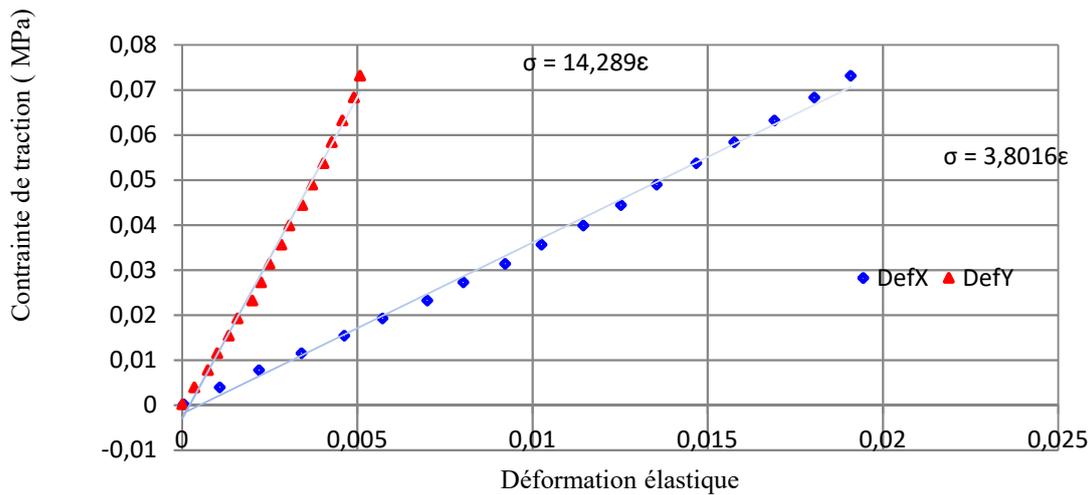


Fig.III-4 : Courbe Typique Charge-Déplacement pour une structure composée de cellule modèle.

La partie en dents de scie de la courbe est due aux premières ruptures fragiles locales causé par une entaille dans les murs des cellules et qui se propage en catastrophe, donnant une rupture fragile rapide. Le PMMA dont la structure est faite est un polymère rigide fragile. Alors les murs des cellules se désintègre par ruine fragile.



a)



b)

Fig.III-5 courbes d'essai de traction, a) Courbe de contrainte-déformation (traction) pour une structure élastique fragile, b) Courbe de contrainte-déformation (traction) pour une structure générée par des cellule modèle à lien ré-entrant ($\theta = 45^\circ$, $\ell = h = L/2 = 3 \text{ mm}$.)

Le point maximal atteint désignant la résistance à la rupture $\sigma_{fs} = 0.221 \text{ MPa}$. Après ce point, nous notons une chute dans la charge avec une augmentation relativement large dans la déformation, ce qui révèle la première rupture locale causé par une entaille d'un lien faible (fig.III-9 c), et donc donne le signal du début de la ruine de la structure. Comme conséquence, la rupture des autres liens suit et est généralisée (fig.III-9 (d)). Gibson & al postule que la relation entre la résistance à la rupture et la densité relative pour les mousses élastiques, en première approximation, est de la forme de [1,24] :

$$\frac{\sigma_{el}^*}{E_s} = C_4 \left(\frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^2 \quad (7)$$

Appliquant cette expression à nos données nous mène à une constante $C_4 = 0.057 \approx 0.05$ ce qui s'approche de la valeur prédite par Gibson dans [1].

La figure III-5-b montre deux courbes ; la première (marques bleus) trace la section linéaire élastique de la courbe contrainte-déformation longitudinale (direction 1), cette courbe est caractéristique du comportement du matériau cellulaire. La pente de la courbe nous donne un module d'Young effectif de la structure égal à : $E = 3800 \text{ kPa}$ et un module d'Young relatif de : $E_r = E/E_s = 1,3 \cdot 10^{-3}$.

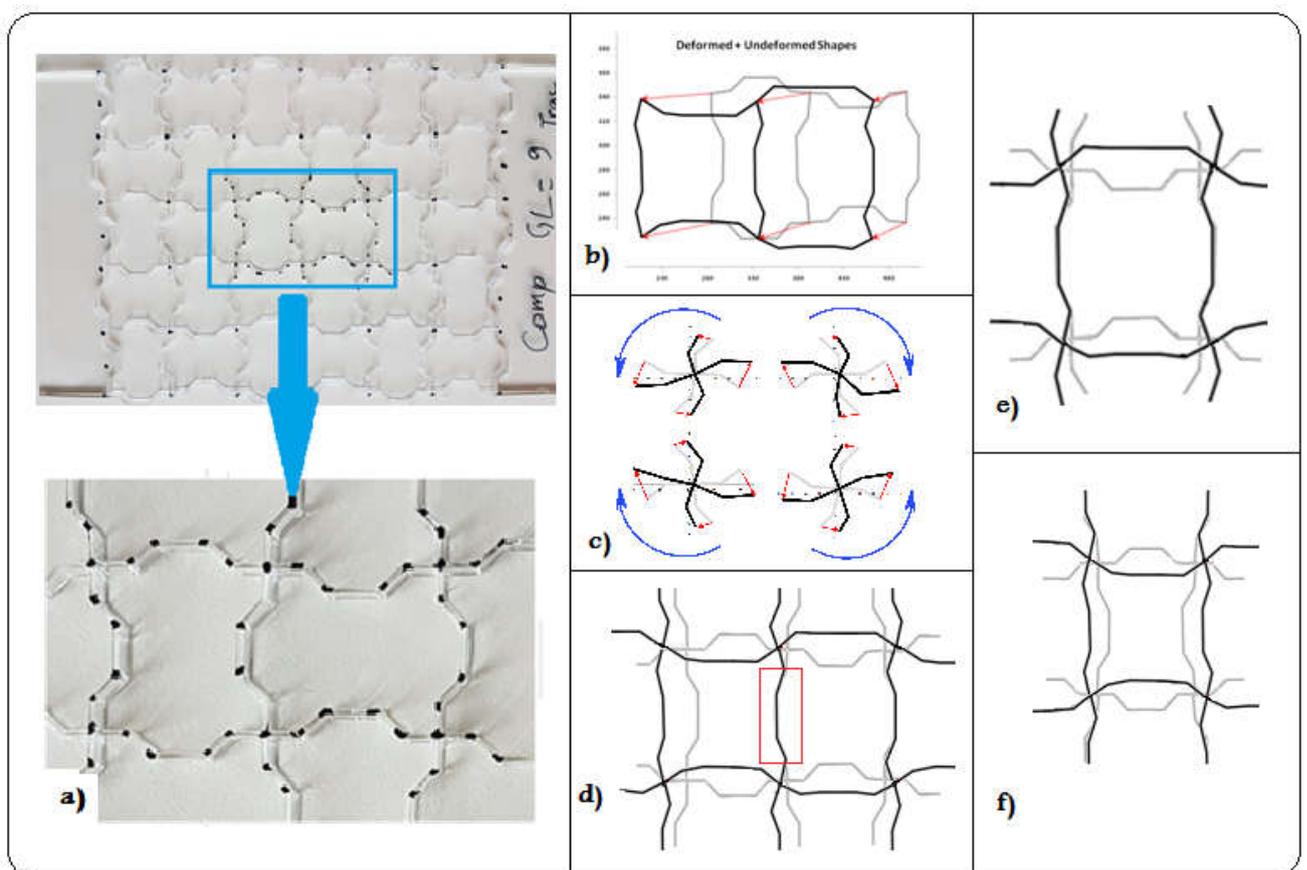


Fig.III-6 : modification dans la géométrie après essai de traction, a) Etat non-déformé (couleur grise) et configurations déformées (couleur noire) sous traction uniaxiale, b) Rotation du lien Internodal, c) liens partagés des deux configurations centres, d) Zoom sur la zone cible (région tachetée), e) cellule horizontale des deux configurations centrées, f) cellule verticale des deux configurations centrées.

Et l'expression liant le module d'Young relative et la densité relative de 0.04 est [6] :

$$\frac{E^*}{E_s} = C_1 \left(\frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^2 \quad (8)$$

donnant $C_1 = 0.955 \cong 1$ est prédite par L. GIBSON dans [6], où C_1 inclue toutes les constantes géométriques de proportionnalité et impliquant que l'augmentation *de la densité relative accentue le module Young relatif*. La seconde courbe (marques vertes) trace la déformation dans la direction 2 durant l'essai de traction. Le coefficient de Poisson obtenu est: $\nu_{12}^* = \nu_{21}^* = -0.27$, confirmant le caractère auxétique de la structure.

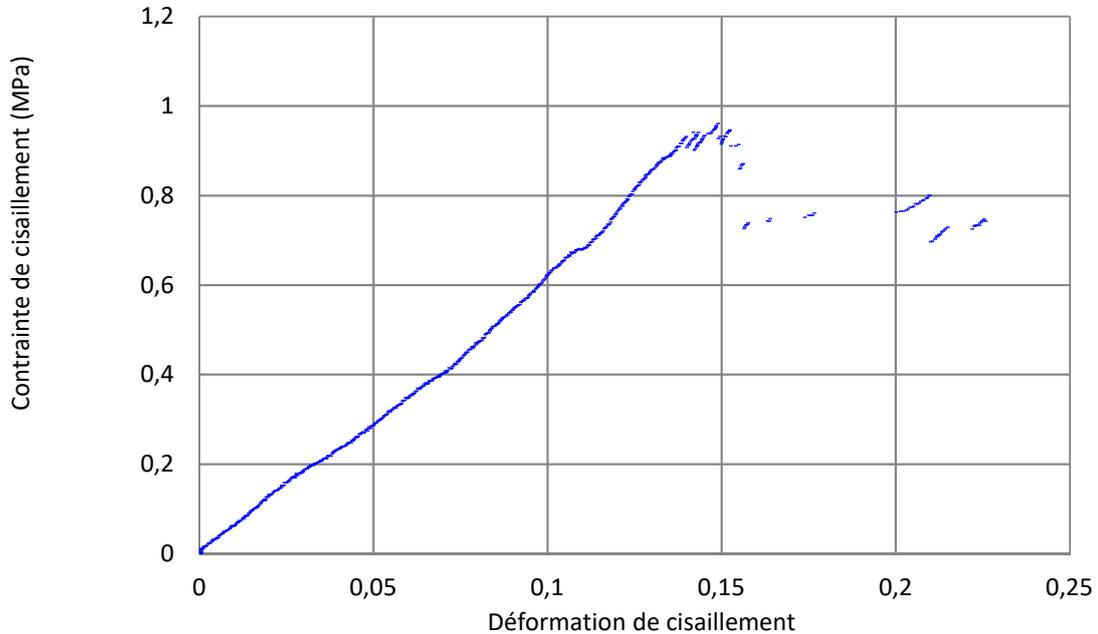


Fig. III-7 Comportement en cisaillement jusqu'à rupture de la structure.

Durant l'essai de traction, nous avons estimé utile de prendre deux cellules adjacentes dans la région centrale de l'éprouvette : une cellule verticale et une cellule horizontale, et zoomant dessus (Fig. III-7 (a)). Les figures III-6 (a)-(d) ont été obtenues en traçant les coordonnées des points formant les deux cellules centrales des deux configurations ; déformée et non-déformée de l'éprouvette. Les figures III-6 (c), e et f montrent que, durant l'essai de traction, ces deux cellules ont des comportements opposés. Les deux murs horizontaux des cellules horizontales, qui avait à l'origine une forme concave, fléchissent et tendent à avoir une forme convexe, alors que les deux murs verticaux des deux mêmes cellules horizontales et qui étaient à l'origine convexes, fléchissent et tendent d'assumer une forme concave.

Le comportement de la cellule vertical est totalement à l'opposé. Ceci pour dire que les murs horizontaux (verticaux) des cellules, initialement convexes (concaves) tendent, durant l'essai de traction, de prendre une forme concave (convexe). Cet inter-changement de forme entre les cellules adjacentes et leurs murs correspondants est dû à la rotation des quatre petits clinquants de longueur ℓ par rapport au nœud (le sommet les joignant) de la cellule. Cette rotation rigide de ces petits clinquants apparait plus nette dans la figure III-6 d [6].

Après une inspection plus minutieuse, on a remarqué qu'en réalité, les petits clinquants, connectés au nœud supérieur gauche de la cellule, tournent dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre. Alors que les petits clinquants, connectés au nœud supérieur droit de la même cellule, tournent dans le sens des aiguilles d'une montre. Cependant, les petits clinquants, connectés au nœud inférieur gauche (droit) de cette même cellule, tournent dans le sens (contraire) aux aiguilles d'une montre par rapport à ce même nœud. Les deux sens opposés de rotation, par rapport aux nœuds délimitant les murs horizontaux (murs verticaux de la cellule) de la cellule dans la figure 10-c, causant la flexion de ces deux cloisons de la cellule et deviennent convexes (concaves).

Cette grande rotation n'est pas entièrement rigide, parce que l'angle de rotation est de l'ordre de 45° pour les cloisons concave et 30° pour les liens des parois convexes de la cellule, impliquant une déformation angulaire (rotation rigide + déformation angulaire) et que les parois qui étaient convexes ne redeviennent pas réellement concaves, mais restent dans une position intermédiaire. Cette différence dans les angles permet ce gonflement des parois des cellules horizontales et qui n'est pas compensé dans la même mesure par la flexion des parois des cellules verticales. Ceci est confirmé par les figs. III-6 d, e et f, où nous avons placés les centres des cellules déformées et non déformées dans une même origine [6,9].

En positionnant les cellules déformées et non-déformées de sorte que la paroi commune des deux cellules horizontale et verticale (dans la même configuration) sont superposées (cadre rouge dans la figure III-6 d), il est évident que durant l'essai de traction la cellule horizontale (droite) a subi une déformation importante dans la direction 2 (gonflement) alors que sa longueur (horizontale) est restée pratiquement intacte (fig. III-6 e), en raison de la rotation des nœuds qui ont absorbé toute l'énergie de déformation dans la direction 1.

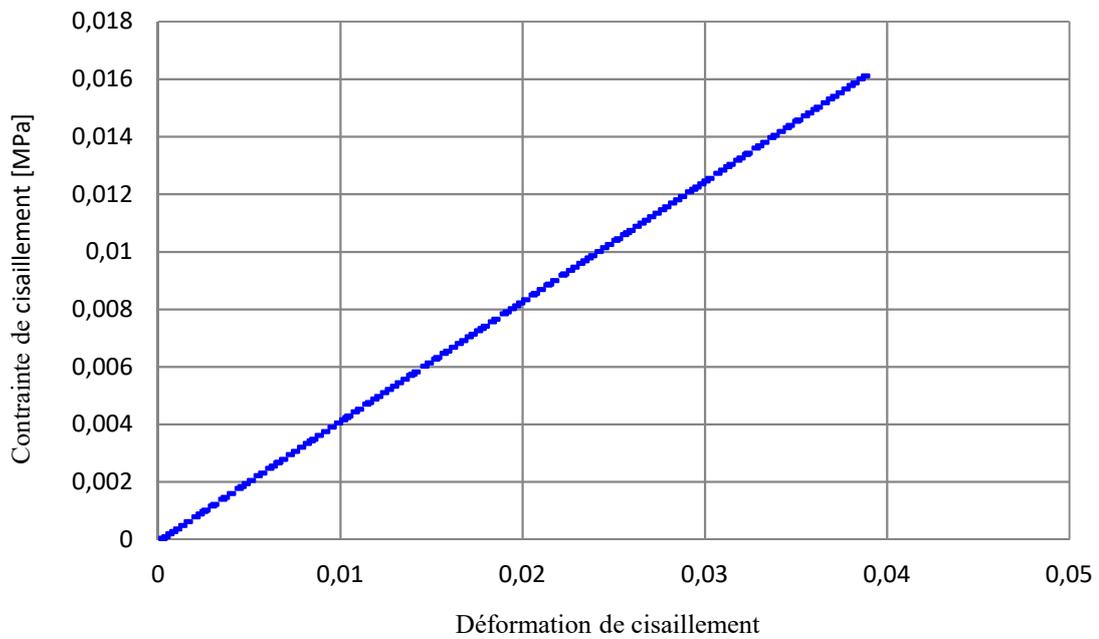


Fig. III-8 : Partie linéaire élastique de la courbe de cisaillement.

L'observation n'est pas la même que celle de la cellule qui était initialement verticale (à gauche), ou il a été observé que la cellule s'est rétractée vers la direction 2 pendant l'augmentation de sa largeur (horizontale). Cependant, cette augmentation est petite par rapport au gonflement qui se produit dans la direction 2 et en conséquence ne la compense pas (la figure III-6 f). Ceci confirme, encore une fois, le caractère aulétique de cette structure. La figure III-7 montre le comportement de cisaillement de la courbe contrainte-déformation de la structure composée de la cellule modèle ($L = 2h = 2\ell$ et $\theta = 45^\circ$). Le module de cisaillement est calculé par :

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \quad (9)$$

où γ est la déformation en cisaillement mesurée et τ la contrainte de cisaillement obtenue par:

$$\tau = \frac{F}{S} \quad (10)$$

où F : est la charge, S : section de la structure parallèle à la direction de la charge. La figure III-7 montre la courbe totale jusqu'au point de rupture du matériau de la cellule, du comportement en cisaillement du matériau. La déformation en cisaillement est causée par la flexion et la rotation de la paroi de la cellule, donnant un cisaillement linéaire de la structure en nid d'abeille.

La figure III-8 montre une courbe qui trace la partie linéaire-élastique de la courbe contrainte-déformation de l'essai de cisaillement, cette courbe parfaitement linéaire est caractéristique du comportement mécanique sous chargement en cisaillement du matériau cellulaire. Donnant la contrainte de cisaillement comme fonction de la déformation en cisaillement, et qui a la forme de la loi linéaire-élastique de cisaillement (équivalente à la loi de Hooke en traction). La pente de la courbe nous donne le module de Coulomb de la structure égale à : $G_{12} = 420$ kPa.

La contrainte de cisaillement a été obtenue en divisant la charge par la section de la surface, parallèle à la direction de la charge, de l'éprouvette) et un module de Coulomb relatif de: $G_{12}^* = G_{12}/E_S = 15.10^{-5}$, le module de cisaillement relative est égal au module de cisaillement divisé par le module de Young du matériau de la structure [6,9].

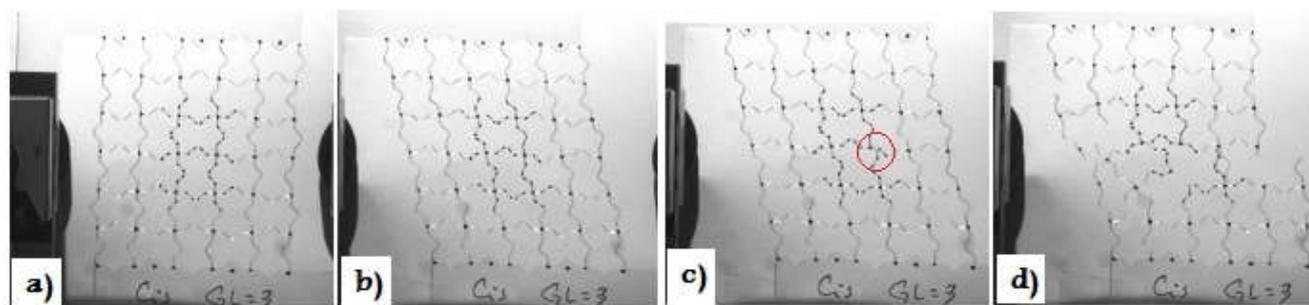


Fig. III-9 : Modes de déformation correspondant à chaque régime de comportement en traction : (a) Eprouvette en PMMA non-chargé, (b) Flexion des parois des cellules Durant le chargement en régime linéaire-élastique, (c) entaille d'une paroi faible d'une cellule, (d) Rupture de la cellule.

La figure III-9 affiche des photos montrant les modes de déformation correspondant à chaque régime de comportement en phase de chargement en cisaillement sur des éprouvettes, destinées aux essais de cisaillement, en PMMA. La figure III-9 (a) montre les configurations avant chargement de l'éprouvette. La figure III-9 b montre la flexion de la paroi de la cellule durant le chargement en régime linéaire-élastique, alors une entaille initiale germe dans la paroi la plus faible de la cellule (figure III-9 -c, cercles rouges). La dernière photo de la figure III-9 montre la propagation en catastrophe de la fissure et la rupture de la structure.

Comme dans le cas de l'essai de traction, nous avons zoomé dans la région centrale, de l'éprouvette, formée par deux cellules adjacentes marquées par des tâches : une cellule verticale et une cellule horizontale (fig.III-10 a). La superposition des configurations non

déformée et déformée nous mène, parfaitement, à l'essai de cisaillement conventionnel dans la figure III-10 b.

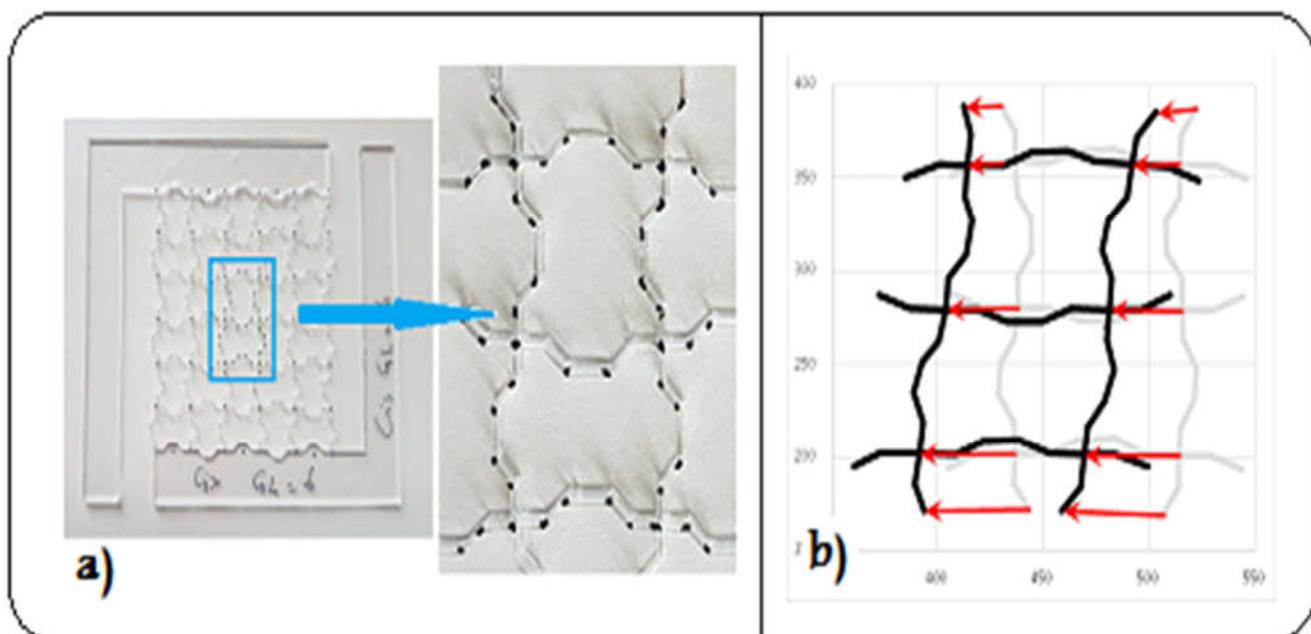


Fig. III-10 : Modification de la géométrie après un essai de cisaillement, a) Zoom sur la cible (région tachetée), b) Mesure des positions non déformées (couleur grise) et déformée (couleur noire) sous traction uniaxiale.

3.1 influences des paramètres géométriques sur les propriétés de la structure :

Dans le but de démontrer les effets des paramètres géométriques de la nouvelle cellule sur les propriétés physiques et mécaniques de la structure nous avons effectué les séries d'essais ci-dessous :

- Essais de traction, dans lesquels nous avons choisi les valeurs des paramètres suivant les diagrammes donnés dans les Tableaux 4, 5 and 6 ;
- Essais de cisaillement dans lesquels nous avons fait varier les mêmes paramètres géométriques de la nouvelle cellule nommément θ , H et h suivant les diagrammes donnés dans les Tableaux 3,4 et 5.

Tableau III-3 : Valeurs du paramètre θ (°) lors des essais de traction et cisaillement.

$H = \ell = h = 3mm$	θ (°)
Eprouvette d'essai n°01	15°
Eprouvette d'essai n°02	30°

Eprouvette d'essai n°03	45°
Eprouvette d'essai n°04	60°
Eprouvette d'essai n°05	75°

Tableau III-4 : Valeurs du paramètre $H(mm)$ lors des essais de traction et cisaillement.

$\theta = 45^\circ, \ell = h = 3mm$	$H(mm)$
Eprouvette d'essai n°11	0
Eprouvette d'essai n°12	3
Eprouvette d'essai n°13	6
Eprouvette d'essai n°14	9
Eprouvette d'essai n°15	12
Eprouvette d'essai n°16	15

Tableau III-5 : Valeurs du paramètre $h(mm)$ lors des essais de traction et cisaillement.

$\theta = 45^\circ, H = \ell = 3mm$	$h(mm)$
Eprouvette d'essai n°21	0
Eprouvette d'essai n°22	3
Eprouvette d'essai n°23	6
Eprouvette d'essai n°24	9
Eprouvette d'essai n°25	12

Dans les séries de tests où on fait varier θ , la plage choisie est de 15° à 75° (Tableau 3). Les valeurs de 0° et 90° mènent à la cellule carrée. Dans ces tests, nous avons gardés les trois autres paramètres, H, ℓ et h égaux à 6,3 et 3 mm, respectivement, comme indiqué dans le Tableau 3. La seconde série de tests supporte la variation du paramètre H , longueur du grand clinquant. L'intervalle choisi est 0 à 15 mm, c'est à dire de 0 à 5 fois la longueur du clinquant ré-entrant (Tableau 4). Aussi, durant cette seconde série de tests, nous avons gardés les trois autres paramètres, θ, h et ℓ fixes. Nous avons choisi la même plage de variation pour la troisième série de tests, faisant varier le paramètre h (Tableau 5).

Nous mettons ici en exergue le fait que dans toutes les courbes concernées, les valeurs du module de Young relatif E^*/E_s sont marqués en bleu, toutes les valeurs du module de Coulomb relatif G^*/E_s en rouge, la troisième série concernant les valeurs du module Coulomb relatif, calculé par la formule : $G = E/2(1 + \nu)$, sont marqués en vert.

3.2. Influence de la variation de l'angle θ :

La figure 11 montre les courbes tracées en fonction de l'angle θ interne de la cellule, qui est l'angle d'inclinaison du clinquant ré-entrant, et affichent les variations de trois modules ; le

module de Young, le module de Coulomb mesuré et le module de Coulomb calculé. L'intervalle de variation de θ est de 15° à 75° . Les valeurs extrêmes de $\theta = 0^\circ$ et 90° n'apporte aucune information nouvelle [40-52].

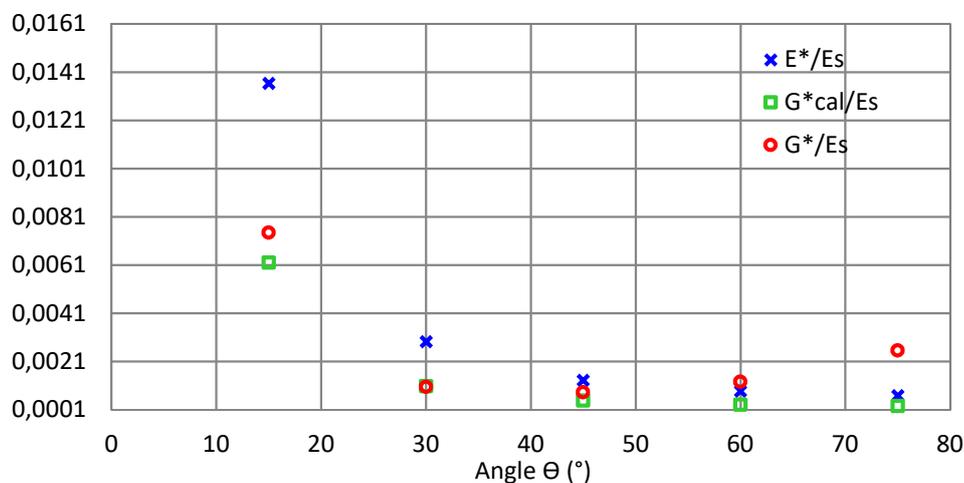


Fig.III-11 : Variations des modules de Young relatif E^*/E_s et de cisaillement G^*/E_s et G^*_{cal}/E_s en fonction des angles θ .

La première courbe affiche la variation du module de Young relatif E^*/E_s comme fonction de l'angle θ et reflète le fait que pour des angles plus droits, la structure devient de plus en plus ouverte et perd, en conséquence, en rigidité (ou gagne en flexibilité). Pour la seconde courbe, montrant la variation du module de Coulomb relatif calculé (G^*_{cal}/E_s), cette courbe suit celle de E^*/E_s et montre le même comportement parce que ces deux quantités sont reliées par $G^*_{cal} = E^*/2(1 + \nu^*)$.

Ces deux courbes ont des tendances de fonctions puissances ayant un exposant négatif, alors que la courbe, correspondant aux variations du module de Coulomb mesuré G^* comme fonction de θ , montre une tendance d'une fonction polynomiale avec un minimum autour de l'angle $\theta = 45^\circ$ (angle caractéristique du clinquant ré-entrant de la cellule modèle) et puisque notre structure possède un arrangement doublement périodique et une symétrie par rapport aux axes 1 et 2: la perte de résistance au cisaillement, quand θ augmente de 15° à 45° , est compensée durant l'augmentation de θ de 45° à 75° (fig.15).

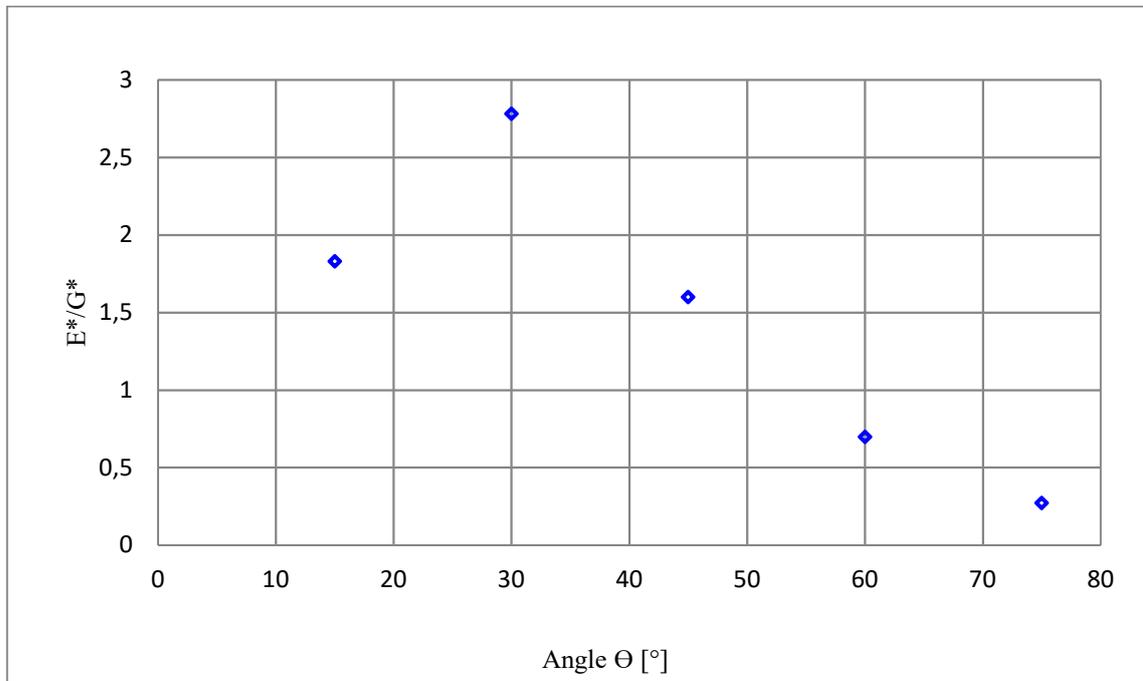


Fig.III-12 : Variation du rapport E^*/G^* en fonction de l'angle θ .

Ce résultat important illustre la conservation de la résistance minimale de la structure quel que soit la valeur de l'angle d'inclinaison du lien ré-entrant, ce qui mène à un module de cisaillement minimal autour de $\theta = 45^\circ$ et pour les valeurs de θ des deux côtés de la droite $\theta = 45^\circ$, de la courbe, résultant à un module de cisaillement symétrique dans le plan 1-2.

$$G_{12} = G_{21} \quad (11)$$

Les relations qui lient l'angle θ au module d'Young E , module de cisaillement G et le module de cisaillement calculé G_{cal} , sont : $\theta \propto E^{0.53}$, $\alpha \propto G_{cal}^{0.5}$ et $G \propto \theta^2$ respectivement.

Notons que, pour $H = 2\ell = 2h = 6mm$ et à $\theta = 45^\circ$, le module de Young relatif $E^*/E_s = 0.0013$ qui est, approximativement, égal au module de Coulomb relatif à $\theta = 60^\circ$, dont la valeur est $G^*/E_s = 0.00126$.

Mais pour $\theta = 60^\circ$, la structure perd presque un tiers de sa rigidité et devient plus flexible avec un module de Young relatif de $E^*/E_s = 0.00088$, ce qui correspond à peu près au module de Coulomb relatif à $\theta = 45^\circ$, dont la valeur est $G^*/E_s = 0.00083$, ce qui signifie qu'à ces deux valeurs d'angle, la structure alterne les deux valeurs de ses deux propriétés et qu'à $\theta = 45^\circ$, la structure est plus rigide avec: $(E^*/E_s)_{\theta=45^\circ} = 0.0013 > (E^*/E_s)_{\theta=60^\circ} = 0.00088$, avec: $(E^*/E_s)_{\theta=45^\circ} = 1,48(E^*/E_s)_{\theta=60^\circ}$, et à: $\theta = 60^\circ$, la structure est plus

résistante au cisaillement avec: $(G^*/E_s)_{\theta=45^\circ} = 0.00083 > (G^*/E_s)_{\theta=60^\circ} = 0.00126$ avec :
 $(G^*/E_s)_{\theta=60^\circ} = 1.52(G^*/E_s)_{\theta=45^\circ}$.

La figure III-12 montre la variation d'un rapport que nous avons exploré, à savoir le rapport entre le module relatif de Young et celui du module de cisaillement relatif, et cette variation est relative à θ , à l'angle d'inclinaison du lien ré-entrant. Ce rapport donne :

$$E^*/E_s / G^*/E_s = (E^*/G^*)$$

qui est une quantité sans dimension montrant la proportion de variation d'une quantité par rapport à la seconde lorsque θ varie. La courbe d'évolution de ce rapport est affichée à la fig. III-12, montrant une valeur maximale de $E^* = 2.78 G^*$ à $\theta = 30^\circ$; et la valeur minimale est d'environ $E^* = 0.27 G^*$ et est d'environ $\theta = 75^\circ$. Cette dernière valeur est dix fois moins que la valeur maximale, soulignant l'effet de l'angle d'inclinaison θ sur les propriétés mécaniques.

La figure III-13, qui relie la variation du coefficient de Poisson à l'angle θ et qui affiche une forme parabolique avec une valeur absolue maximale du coefficient de Poisson (qui, en réalité, est une valeur minimale pour le coefficient de Poisson) autour de l'angle $\theta = 60^\circ$; s'explique par le fait que cette géométrie confère à la structure son caractère le plus auxétique. En dehors de cette limite, d'autres phénomènes deviennent dominants et prennent le dessus pour régir le comportement mécanique de la structure. En dessous de cette limite de $\theta = 60^\circ$, la cellule horizontale perd progressivement sa concavité et par conséquent est moins capable de se plier, d'où la diminution du coefficient de Poisson absolu (en valeur absolue et par conséquent la structure perd une partie de son caractère auxétique). Au-dessus de $\theta = 60^\circ$, le lien ré-entrant devient, avec un θ accru, de plus en plus, parallèle au petit lien et, par conséquent, les deux sont de plus en plus résistants et moins aptes à la rotation. Par conséquent, il y a moins de gonflement, donc un coefficient de Poisson moins important en valeur absolue.

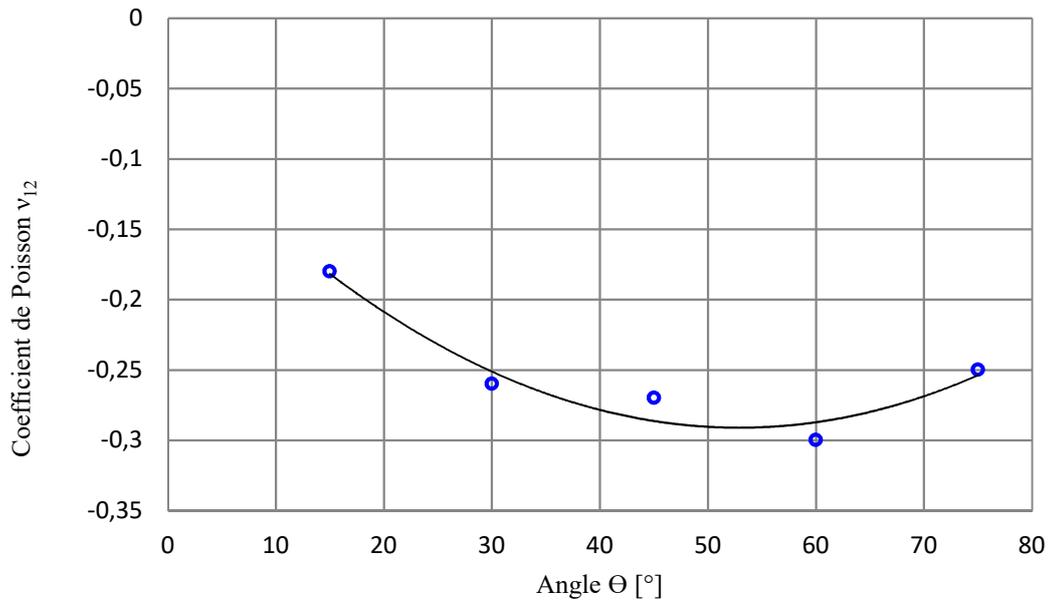


Fig. III-13 : Effet de l'angle θ sur le coefficient de Poisson ν_{12} .

La figure III-14 montre les courbes comportement $\sigma - \varepsilon$ pour différentes valeurs de θ . Nous remarquons que la structure devient plus rigide pour θ décroissant. La forme de la cellule à lien ré-entrant étudiée dans ce travail se situe entre les deux formes extrêmes : la forme carrée et la forme hexagonale, combinant la rigidité de la cellule carrée avec la flexibilité de la cellule hexagonale. La forme hexagonale est moins rigide car elle se déforme par flexion, tandis que la forme carrée se déforme par une déformation axiale, à la fois en traction et en compression, et est donc moins flexible (plus rigide).

Aussi, si l'on regarde de près, toutes ces courbes nous remarquons qu'elles ne sont pas vraiment droites, ce qui nous ramène au fait que, lors de l'essai, la première partie de la déformation de l'échantillon est due, principalement à la flexion des liens ré-entrant s ainsi que la rotation des liens droits, ce qui nécessite une sollicitation relativement faible. D'autre part, la deuxième partie des courbes de déformation est due aux allongements axiaux des clinquants, ce qui explique une pente plus rectifiée des courbes, ce qui indique qu'à ce stade les incréments de déformation nécessiteront une contrainte plus importante.

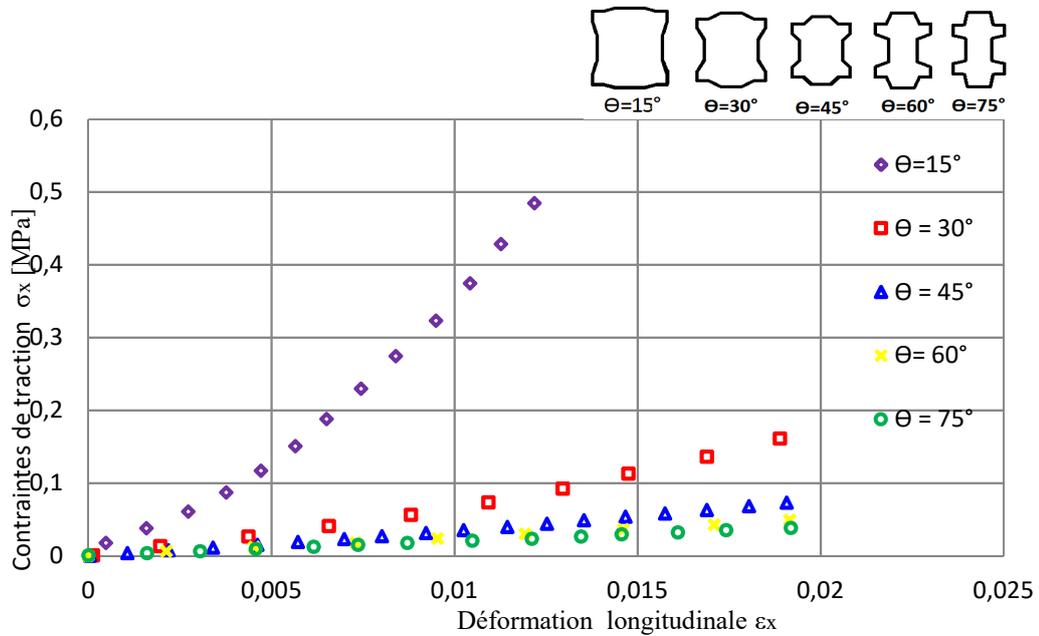


Fig.III-14 : Courbes contraintes de traction-déformation longitudinale pour différents angles θ .

Enfin, on remarque que la courbe contrainte-déformation pour la valeur de $\theta = 15^\circ$ est beaucoup plus ‘corrigée’ que celle du reste des valeurs de θ , ce qui s'explique par le fait qu'à cet angle, la forme de la cellule est beaucoup plus proche du carré où les déformations sont obtenues par allongement axial des clinquants parallèle à la direction de la sollicitation. Par contre, les autres courbes sont obtenues pour des angles d'inclinaison beaucoup plus importants, et on se rapproche donc de plus en plus de la forme hexagonale où prédominent les mécanismes de déformation par la flexion du lien.

3.3. Effet du rapport de forme $\alpha = H/\ell$:

La figure III-15 ci-dessous montre trois courbes illustrant la variation du module de Young, du module de cisaillement (module de Coulomb) et du module de cisaillement calculé par rapport au rapport de longueur (rapport entre le gros clinquant H et le petit clinquant ; $\alpha = H/\ell$). La plage de variation du paramètre α va de 0 à 5.

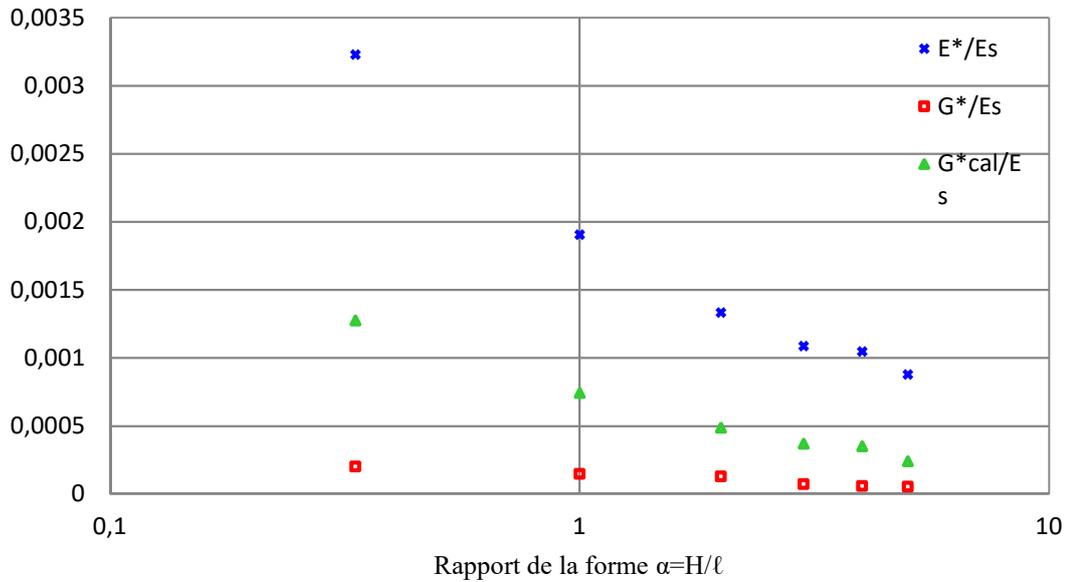


Fig.III-15 : Effet du rapport de l'aspect α sur le module de Young relative E^*/E_s , les modules de cisaillement G^*/E_s et G^*_{cal}/E_s .

Les trois courbes indiquent une tendance inversement proportionnelle à l'augmentation de α , ce qui signifie que l'augmentation de la valeur de H par rapport à l rend la structure plus flexible. À première vue, les trois courbes n'ont pas la même pente.

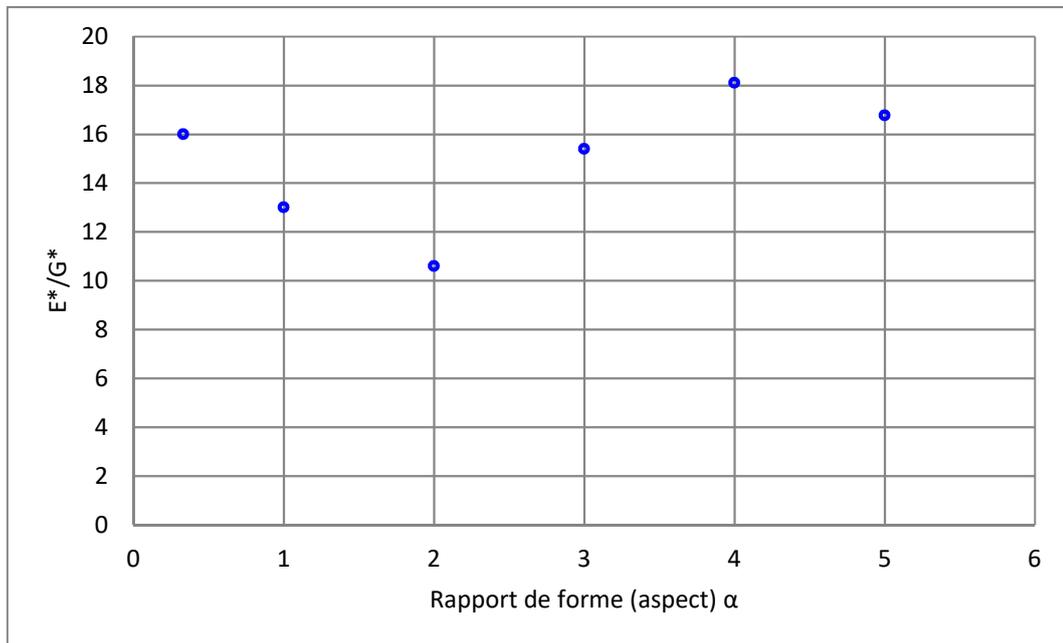


Fig.III-16 : Effet du rapport de l'aspect α sur E^*/G^* .

Et dans cet esprit, nous avons exploré la relation entre les deux courbes extrêmes, à savoir le rapport entre le module relatif de Young et celui du module de cisaillement relative (E^*/G^*), comme nous l'avons fait dans le paragraphe précédent. Cela donne une quantité sans dimension montrant la proportion de variation de (E^*/G^*) par rapport à α .

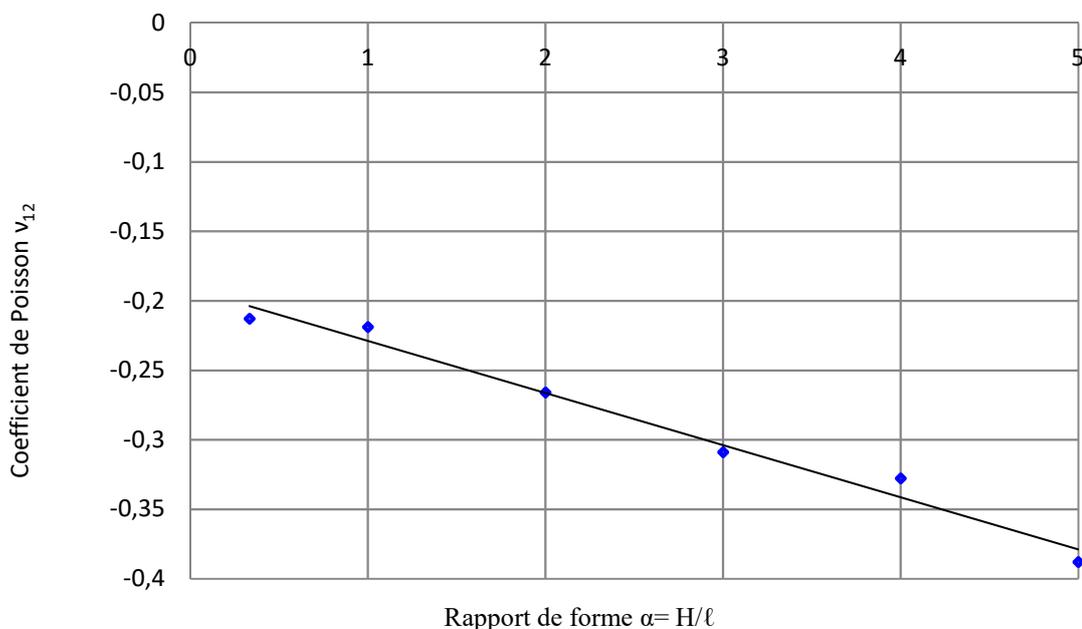


Fig.III-17 : Effet du rapport de l'aspect α sur le coefficient de Poisson.

La courbe d'évolution de ce rapport par rapport à α est illustrée à la fig.III-16, illustrant une sorte de sinusoïde dont l'amplitude maximale est $E^* = 18 G^*$ et se situe autour de $\alpha = 4$; et le minimum est $E^* = 10 G^*$ et se situe autour de $\alpha = 2$. L'amplitude moyenne a pour valeur $E^* = 14 G^*$ et est égale à $\alpha \approx 2$, ce qui signifie que doubler α implique que la valeur de E est celle de G multipliée par un facteur de $3/2$.

La Fig. III-17 trace le coefficient de Poisson en fonction du rapport de forme le rapport α . La courbe montre une diminution linéaire du coefficient de Poisson proportionnelle au rapport α . L'augmentation du rapport α signifie que le gros lien H devient de plus en plus important par rapport au lien ré-entrant, ce qui donne de plus en plus de flexibilité à la cellule. L'augmentation de la valeur absolue du coefficient de Poisson confirme la nature auxétique de cette cellule puisqu'on a tendance à avoir un coefficient de Poisson de plus en plus négatif.

La figure III-18 montre la variation du comportement de la structure pour différentes valeurs du paramètre α . Les courbes montrent que la structure devient moins rigide pour des valeurs croissantes de α , ce qui lui confère la qualité la plus importante. Les courbes montrent également que pour des charges équivalentes, des déformations plus importantes sont observées.

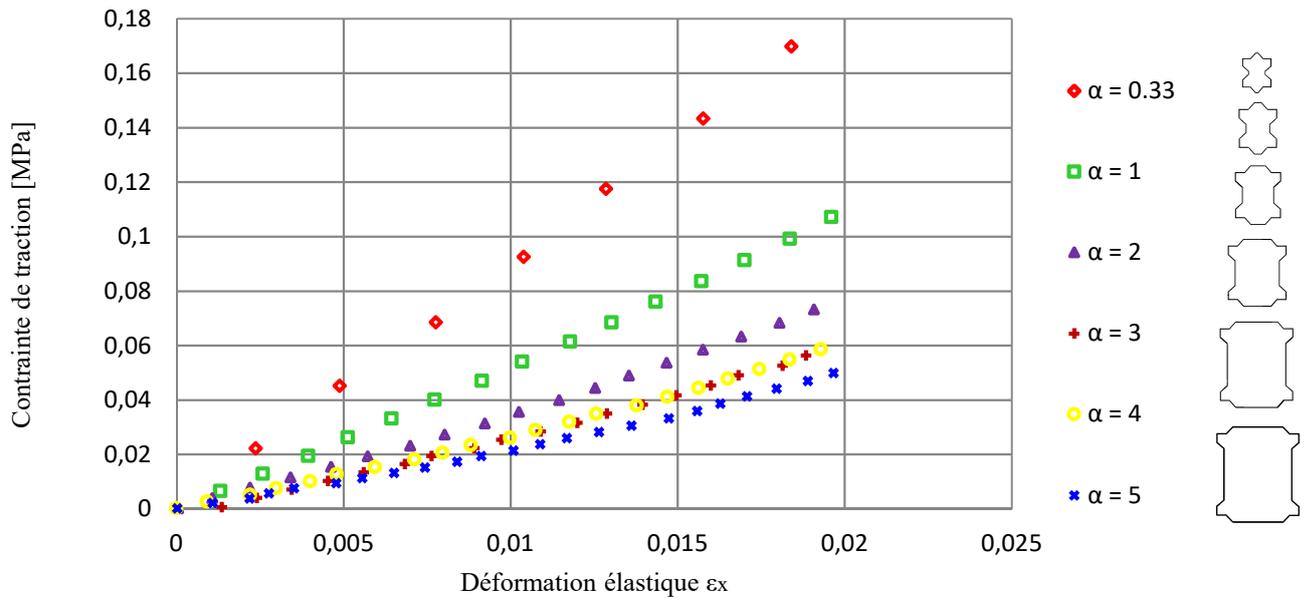


Fig.III-18 : Contrainte de traction-Déformation élastique pour différents rapports de l'aspect α .

3.4. Effet du petit rapport $\beta = h/\ell$

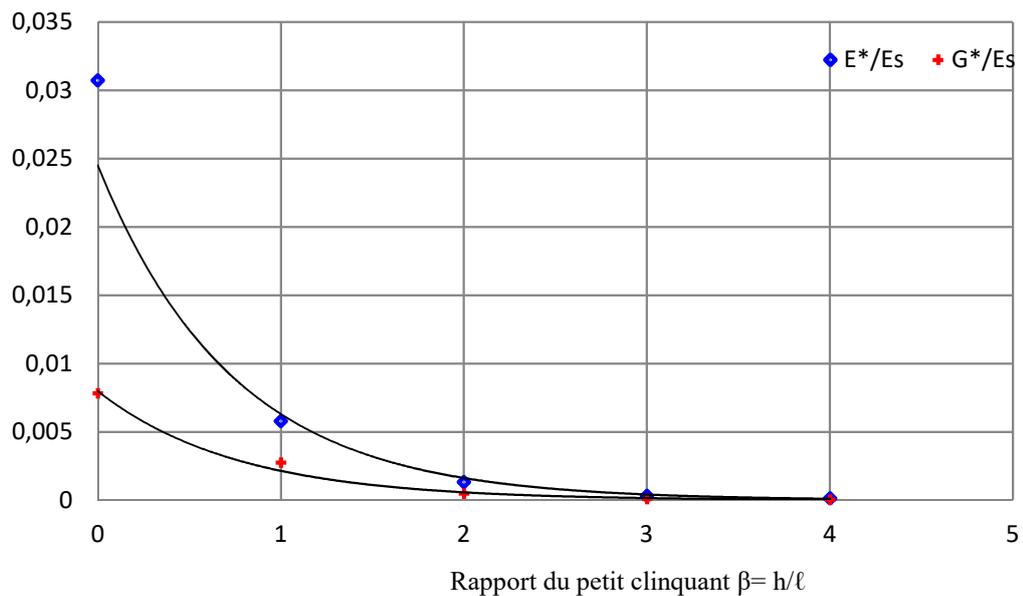


Fig.III-19 : Effet du ratio $\beta = h/\ell$ sur le module de Young relatif et le module de Coulomb relatif. La figure III-19 affiche deux courbes ; la première trace la variation du module de Young relatif E^*/E_s , la seconde retrace la variation du module de Coulomb relative G^*/E_s , par rapport au faible rapport β (rapport de la longueur h , du petit lien, à celle du clinquant réentrant ; $\beta = h/\ell$).

L'intervalle de variation du paramètre β est compris entre $0.1 (\approx 0)$ à 4, avec un pas de 1. Les deux courbes indiquent une tendance inversement proportionnelle à l'augmentation de β ,

et les valeurs de E^*/E_s et G^*/E_s tendent de plus en plus, vers zéro pour les valeurs β supérieures ou égales à 3.

Ces courbes rapportent le passage de la forme cellulaire de la forme carrée relativement rigide au module de Young relatif de 0,03 et au module de Coulomb relatif de 0,0075 à la forme hexagonale flexible avec un module de Young relatif de 0,00015 et un module de Coulomb relatif de 7,55E-05. Là encore, l'augmentation de la valeur h par rapport à ℓ rend la structure plus flexible.

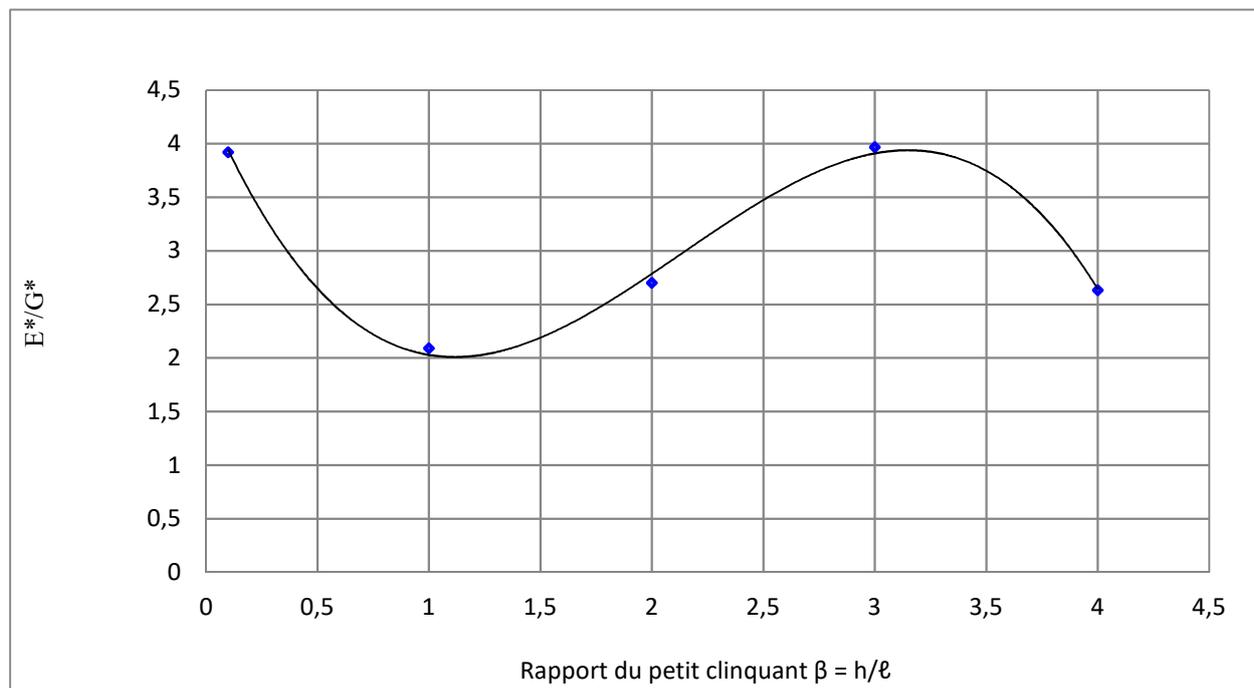


Fig.III-20 : Effet du rapport β sur E^*/G^* rapport.

Et comme nous l'avons fait dans les deux sections précédentes, nous avons exploré l'évolution du rapport E^*/G^* par rapport au faible rapport de lien β . La courbe obtenue est illustrée à la figure III-20 et affiche à nouveau une sorte de sinusoïde dont l'amplitude maximale est $E^* = 3,966G^*$ et se situe autour de $\beta = 3$, et la valeur minimale est $E^* = 2,09G^*$ et est autour de $\beta = 1$. L'amplitude moyenne a la valeur $E^* = 3,028G^*$ et est à $\beta \approx 2$.

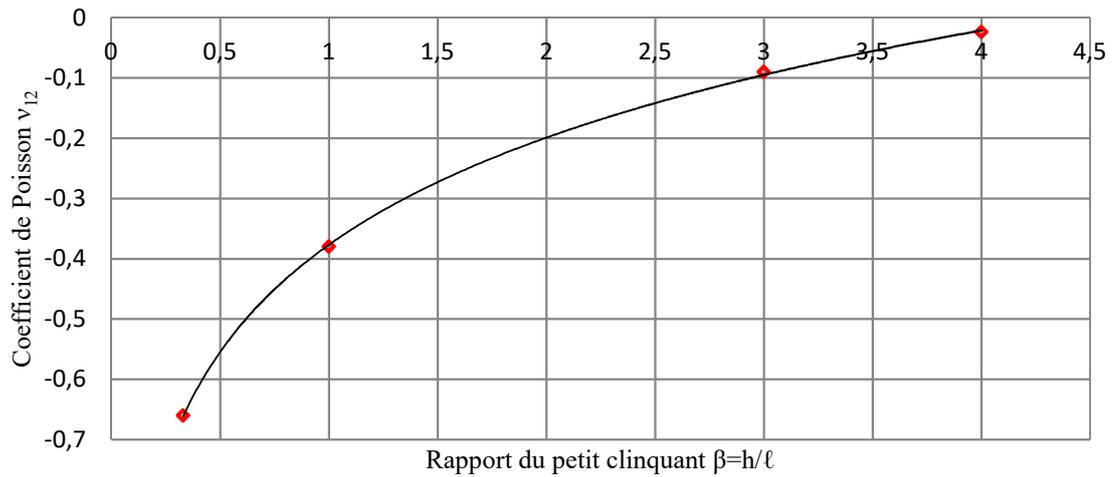


Fig.III-21 : Effet du rapport $\beta = h/\ell$ sur le coefficient de Poisson.

La figure III-21 affiche une courbe montrant le coefficient de Poisson par rapport au petit rapport β . La dispersion large dans les données du coefficient de Poisson reflète, en partie, la variabilité de ν , des structures, dont la géométrie des cellules sont différentes, où la forme des cellules peut changer ν de 0,5 à -0,7 et, en partie, la difficulté inhérente à mesurer cette propriété.

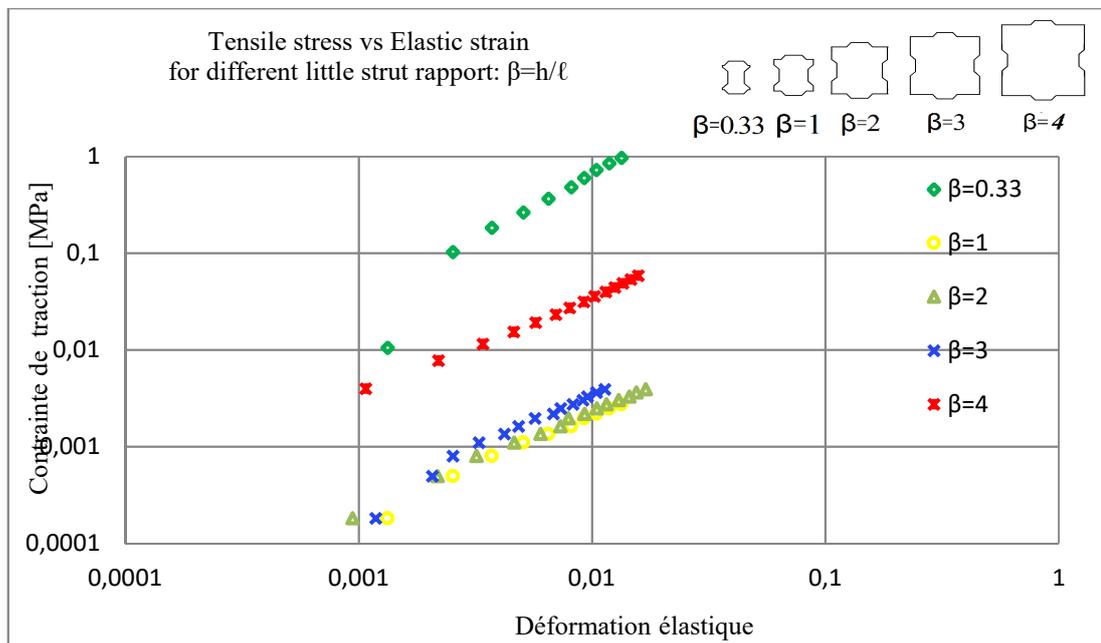


Fig.III-22 : Contrainte de traction-Déformation élastique pour différents rapports du petit clinquant $\beta = h/\ell$.

La figure 26 montre la courbe traçant la contrainte de traction en fonction de la déformation élastique relative et montre que, pour des rapports β élevés, les intensités de la contrainte deviennent plus petites.

La même observation a été faite à propos de la courbe de contrainte-déformation pour différents angles θ sur les figures 18 et 22 dans les courbes de contrainte-déformation pour différents angles θ et différents rapports de longueur α . Pour $\beta = 0.33$, c'est-à-dire que

pour une petite longueur h , la structure se déforme par déformation axiale, et nécessite une contrainte de traction plus élevée pour une déformation équivalente à celle d'un rapport β supérieur.

Pour des valeurs de β de plus en plus grandes, on a donc une forme de cellule approchant l'hexagone, où le mécanisme de déformation de structure composée de telles cellules est dominé par la flexion des liens ré-entrant s , ce qui donne une structure moins rigide. Il est clair que nous sommes, plutôt, en micro-sollicitation ; les valeurs en jeu dépassent rarement le MPa [55-57].

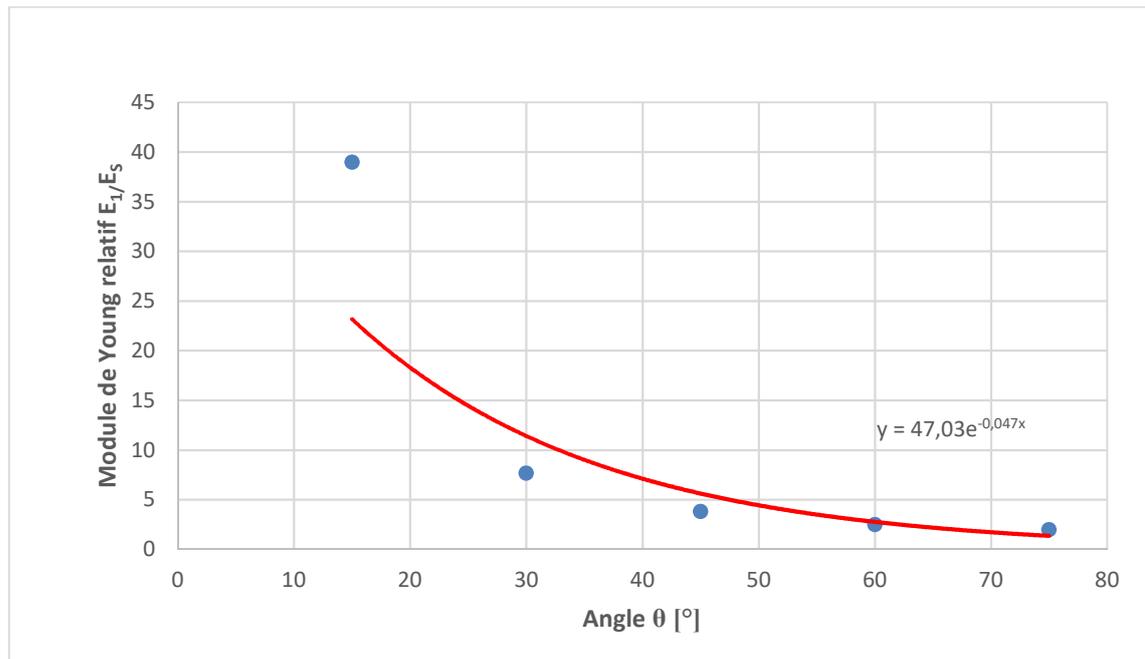


Fig.III-23 : Variation du module E_1/E_s en fonction de l'angle θ .

Les tests de caractérisation de la structure composée par la cellule modèle de paramètres $h = \ell = H/2$ et $\theta = 45^\circ$ permettent d'obtenir un module de Young dans les directions 1 et 2 équivalentes à :

$E_1^* = E_2^* = 3800$ kPa la résistance à la rupture en traction étant de; $\sigma_{fs}=221$ kPa et un coefficient de Poisson de $\nu_{12}^* = \nu_{21}^* = -0.27$. Le module de Coulomb est d'environ : $G_{12}^* = G_{21}^* = 420$ kPa où la résistance à la rupture sous contrainte de cisaillement est de $\tau_{fs} = 939$ kPa, soit plus de quatre fois la résistance à la rupture en traction, ce qui indique que cette structure est plus apte à résister au cisaillement qu'à la sollicitation en traction.

La figure III-23 trace la variation du module de Young E_1 en fonction de l'angle θ .

4. Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons réalisé une étude expérimentale afin de déterminer les propriétés mécaniques de la structure cellulaire générée par une cellule à liens re-rentants. Les résultats montrent que la densité relative de la structure et les paramètres géométriques, de la cellule ;

θ, β et α ont une forte influence sur les propriétés mécaniques de la structure. Ces résultats dégagent, notamment, que :

- Les tests de caractérisation de la structure composée de la cellule modèle avec les paramètres $\ell = h = H/2$ et $\theta = 45^\circ$ donnent les modules d'Young dans les directions 1 et 2 équivalents de :

$E_1^* = E_2^* = 3800 \text{ kPa}$, la résistance à la rupture sous charge de traction de $\sigma_{fs} = 221 \text{ kPa}$ et un coefficient de Poisson de $\nu_{12}^* = \nu_{21}^* = -0.27$. Le module de Coulomb concerne : $G_{12}^* = G_{21}^* = 420 \text{ kPa}$ où la résistance à la rupture en cisaillement est de $\tau_{fs} = 939 \text{ kPa}$ qui est plus de quatre fois supérieure à la résistance à la rupture en traction, ce qui indique que cette structure est plus apte à résister au cisaillement qu'elle aux contraintes de traction.

L'étude des effets des paramètres géométriques sur les propriétés mécaniques a notamment pour résultat :

- Le caractère auxétique de la structure devient plus prononcé à partir du 45° angle et atteint sa valeur maximale à 60° .
- En raison à la fois de la disposition périodique et de l'architecture symétrique de la cellule de lien ré-entrant par rapport aux axes x et y , la perte de résistance au cisaillement lorsque θ augmente de 15° à 45° est compensé lors de l'augmentation de θ de 45° à 75° . Et par conséquent, conserve une résistance minimale au cisaillement quelle que soit la valeur de l'angle d'inclinaison du lien ré-entrant.
 - Pour $H = 2\ell = 2h = 6 \text{ mm}$ et pour $\theta = 60^\circ$, la structure devient plus flexible avec un module de Young relatif de $(E/E_s)_{\theta=60^\circ} = 0.0008807 < (E^*/E_s)_{\theta=45^\circ} = 0.0013$, et $(E^*/E_s)_{\theta=45^\circ} = 1,48(E^*/E_s)_{\theta=60^\circ}$;
 - la structure est plus résistante au cisaillement avec $(G^*/E_s)_{\theta=45^\circ} = 0.00082807 > (G^*/E_s)_{\theta=60^\circ} = 0.00126281$ lequel est : $(G^*/E_s)_{\theta=60^\circ} = 1.52(G^*/E_s)_{\theta=45^\circ}$;
- La structure devient de plus en plus rigide et moins auxétique lorsque α diminue ;
- L'augmentation de β engendre la diminution de E^*/E_s , G^*/E_s , et la perte du caractère auxétique ;
- Tout cela nous amène à conclure que le paramètre qui influence le plus les propriétés mécaniques de la structure est bien l'angle d'inclinaison du lien ré-entrant, de sorte que la forme de la cellule étudiée dans ce travail varie du carré à l'hexagone, passant de la rigidité de la cellule carrée à la flexibilité de la cellule hexagonale.

Chapitre IV

Comportement vibro-acoustique des matériaux cellulaires

1. Introduction, état de l'art :

Les matériaux cellulaires sont considérés comme des structures ayant une répétitivité spatiale et sont modélisés comme milieu périodique. Ces derniers sont bien connus pour la possibilité de présenter des effets de bande interdite et de bande passante. La littérature sur la propagation des ondes dans les milieux périodiques est très fournie en raison de son énorme potentiel d'application en acoustique, permettant la production d'absorbeurs acoustiques inférieurs à la longueur d'onde, une invisibilité acoustique, des miroirs acoustiques parfaits et des lentilles acoustiques et permettant de nouveaux degrés de liberté dans le contrôle du champ acoustique. Malgré l'énorme croissance de la recherche sur les matériaux acoustiques au cours de la dernière décennie, le potentiel des technologies basées sur les matériaux cellulaires n'a toujours pas été pleinement exploré et son utilisation en est encore à ses débuts [111-113].

Dans leur investigation pour l'analyse des vibrations de structures quasi-périodiques, S. Timorian & al. ont étudié les plages de fréquences correspondant aux bandes interdites, en utilisant une analyse spectrale de structures infinies. Les faisceaux de Fibonacci présentent des bandes multi-arrêts de faibles largeurs dans différentes gammes de fréquences, alors que les structures périodiques et celles basées sur des cellules super-unités n'ont qu'une fréquence de bande d'arrêt avec une extension de fréquence plus grande [114].

Dans leur article intitulé : "Mechanics and band gaps in hierarchical auxetic rectangular perforated composite metamaterials", K. Billon & al. décrivent un métamatériau composite à topologie hiérarchique constitué de tessellations de perforations présentant un comportement auxétique (coefficient de Poisson négatif) sur lequel ils effectuent une analyse de la structure hiérarchique en évaluant l'ordre fractal des topologies associées aux composites perforés et étudient les caractéristiques de propagation des ondes de ces réseaux hiérarchiques particuliers en utilisant une approche d'[onde de Bloch](#) appliquée aux géométries détaillées en éléments finis des configurations de cellules unitaires. Ils en déduisent que le niveau de hiérarchie crée de nouvelles bandes interdites avec de grandes largeurs relatives et qu'il déplace également les mêmes bandes interdites vers les basses fréquences, et établissent une corrélation entre les propriétés mécaniques et les caractéristiques de dispersion du métamatériau perforé auxétiques [115].

Dans une publication intitulée : « propagation des ondes et caractéristiques d'écart de bande des structures chirales », Stefano Gonella & al. ont étudiés la propagation des ondes planes dans un réseau chiral en appliquant le théorème de Bloch et ont estimés et analysés les relations de dispersion bidimensionnelles pour illustrer les propriétés particulières des

configurations chirales et étudier le comportement directionnel de la propagation des ondes pour divers paramètres géométriques.[116]

Velasco & al. ont étudiés les ondes élastiques transversales et sagittales par la technique des matrices de transfert et la méthode de correspondance de la fonction de Green surfacique. Des structures générées par les séquences des nombres de fibonacci, thue-morse (est une [suite binaire.](#)), et ruddin-shapiro (Chaque terme de la suite de Rudin-Shapiro est égal à 1 ou à -1.). Les résultats ont montré des similarités entre les suites de Fibonacci et Thue-Morse et qui ne sont pas présente dans celles de Ruddin-Shapiro [117].

Velasco et zarate ont étudié les ondes élastiques transversales se propageant dans des cristaux hexagonaux de la classe 6 mm formant des super-réseaux de Fibonacci. Celles-ci sont formées par des répétitions de plaques CdS et ZnO dans des blocs constitutifs A et B suivant la séquence de Fibonacci. Ils ont étudié l'influence de l'ordre croissant des générations de Fibonacci sur la relation de dispersion des modes élastiques transversaux. Et ont trouvé que le spectre de Fibonacci est clairement visible même pour les générations de Fibonacci d'ordre inférieur et n'est pratiquement pas modifié par le couplage piézoélectrique lorsque les interfaces sont métallisées [118].

Dans un autre article intitulé : ' Application des coefficients de temps de phase et de transmission à l'étude des ondes élastiques transversales dans des systèmes quasi-périodiques avec des défauts plans'' Velasco et al. en étudiant les ondes élastiques transversales dans les structures quasi-périodiques au moyen des temps de phase transmission/réflexion et des coefficients de transmission/réflexion pour les systèmes multicouches ont démontré comment la présence de défauts plans dans les séquences de Fibonacci et Rudin – Shapiro quasi-périodiques modifie fortement les temps de phase et le coefficient de transmission. [119].

Dans un travail intitulé : '' Floquet–Bloch decomposition for the computation of dispersion of two-dimensional periodic, damped mechanical systems'', M. Collet et al. ont utilisé le théorème de Floquet – Bloch pour calculer les propriétés de dispersion de structures périodiques et pour estimer leurs modes d'onde et leurs vitesses de groupe. [120].

Dans une récente recherche publiée sous le titre : ''Review of Acoustic Metamaterials in Aeronautics'', Giorgio Palma et al. ont passé en revue les métamatériaux, composites artificiels dont l'échelle est inférieure à la longueur d'onde et ou l'indice de réfraction est nul, ou même négatif des métamatériaux offre des possibilités de contrôle des motifs acoustiques et du son à des échelles inférieures à la longueur d'onde. Concluant que les principaux concepts mentionnés ci-dessus pourraient très bien fournir un moyen de développer des dispositifs permettant d'atténuer l'impact du bruit de l'aviation civile sur la communauté [121].

Xiangdong Zhang et al., dans leur article intitulé : ‘‘Réfraction négative des ondes acoustiques dans les cristaux phononiques à deux dimensions’’ ont démontré la réfraction négative des ondes acoustiques dans les cristaux phononiques à deux dimensions ; à la fois par l'analyse et par une simulation numérique exacte. Les méthodes pour obtenir ce comportement ont été discutées et ont conçu une micro-superlentille pour les ondes acoustiques. Pour déduire, à la fin, que les dispositifs de réfraction à base de cristaux phononiques se comportent de la même manière que les systèmes optiques [122].

Ding & al. dans un article intitulé : ‘Two-dimensional acoustic metamaterial with negative modulus’’, ont conçu un métamatériau acoustique bidimensionnel avec un réseau périodique de SHS à sphères creuses divisées et ont étudié ses comportements de transmission dans le système de tubes à impédance. Les résultats ont montré que le métamatériau acoustique présentait un creux de transmission et une phase inverse proches de 5 kHz, ce qui indiquait la résonance locale de la SHS. La méthode des éléments finis et les résultats de la simulation du modèle résonant ont également confirmé la résonance locale et la réponse négative dans le métamatériau acoustique, ce qui concordait bien avec les résultats de l'expérience. Ce métamatériau est capable de réaliser facilement le métamatériau acoustique double négatif en formant des "atomes" acoustiques avec une densité de masse négative dans la matrice [123].

Dans un autre article intitulé : ‘‘Métamatériaux à indice acoustique négatif’’, L. Fok et X. Zhang ont utilisé des résonateurs de Helmholtz sous-longueurs d'onde périodiques pour mettre au point des métamatériaux acoustiques pouvant atteindre des propriétés acoustiques négatives non disponibles dans la nature. Les propriétés effectives extraites des simulations à ondes pleines de notre métamatériau montrent que les composantes réelles négatives du module de masse et de la densité apparaissent simultanément, ce qui donne une composante réelle négative de l'indice acoustique. Les mesures expérimentales qu'ils ont effectué sur un échantillon de ce métamatériau confirment que les composantes réelles de l'indice acoustique atteignent des valeurs négatives, mais que la densité ne devient pas négative e, identifiant les causes principales de ceci tout en présentant des solutions potentielles [124].

Suxia Yang & al., dans un article intitulé : ‘Focalisation du son dans un cristal phononique 3D’ ont présenté une étude à la fois expérimentale et théorique des phénomènes de focalisation de phonons dans une bande passante au-dessus de la bande interdite complète

dans un cristal phononique 3D. Ils ont constaté que la propagation des ondes dépendait beaucoup de la fréquence et de l'angle d'incidence de l'onde [125].

Bigoni et al. ont présenté le concept d'interface structurale possédant une largeur finie et reliant des milieux continus puis ont mis en évidence les effets de filtrage et de focalisation pour ondes élastiques, différenciant ce modèle des interfaces classiques d'épaisseur nulle [126].

Brun et al. (2010) ont publié un article intitulé : 'Achieving control of in-plane elastic waves' ou ils ont utilisé le concept d'interface structurale pour concevoir un métamatériau d'ondes élastiques conduisant à des phénomènes de réfraction négative. [127]. Dans un autre article, Brun et al ont analysé, avec un modèle mathématique la réponse dynamique d'un pont allongé supporté par des piliers élastiques en le considérant comme une structure périodique et estimer les fréquences propres dans la gamme des basses fréquences pour les ondes de Bloch – Floquet dans une structure périodique infinie [128].

Giorgio Carta & al. ont décrit le comportement dynamique de milieux multi structurés allongés excités par des ondes harmoniques en flexion. Ou ils se sont intéressés à la conception de milieux continus microstructures, présentant un fort couplage entre le mouvement macroscopique et certains degrés de liberté internes, qui peuvent être électriques ou, plus généralement, liés à des micro- mouvements [129].

Wei et Petyt ont proposé une méthode d'analyse des structures périodiques finies, constituées de poutres, en utilisant les relations de couplage [130].

Banerjee et al. ont présenté une revue bibliographique sur la propagation des ondes dans un milieu structuré et ont montré que les ondes contenant certaines bandes de fréquences peuvent se propager (transmission) ou être atténuées (bandes d'atténuation). Bien que le milieu continu soit souvent modélisé comme une chaîne de structures périodiques discrètes par un modèle équivalent de masse-ressort, cette structure de bande pour un milieu continu et son milieu discret équivalent ne sont pas identiques, Ces caractéristiques de bande dépendent des propriétés des unités, pour moduler, filtrer, atténuer les fréquences indésirables des ondes qui se propagent [113].

Ce chapitre vise à analyser la principale caractéristique acoustique d'un matériau à structure périodique, dont la plupart des matériaux cellulaires en font partie. Cette caractéristique est le filtrage de fréquence, appelée aussi diagramme de bande. Ce diagramme

de dispersion représente la variation de la fréquence en fonction du nombre d'onde et décrit la nature de la propagation des ondes dans un milieu élastique. Nous utiliserons la méthode de matrice de transfert pour traiter de manière générale la réponse acoustique des matériaux cellulaires.

Nous modélisons, en se basant sur les principes de propagation du son, les matrices de transfert élémentaires du : panneau solide élastique, la couche d'air, la couche poreuse (matériau poreux) et les interfaces entre chaque deux couches. Puis nous déduisons la matrice de transfert total de la structure de la cellule unitaire. Enfin, le coefficient d'absorption et la perte de transmission de la structure acoustique sont calculés et analysés à l'aide d'exemples numériques.

2. Principes de base de la transmission acoustique [131]

Dans cette partie du chapitre, nous présentons certaines caractéristiques de la transmission du son aérien à travers une paroi solide. La perturbation du milieu apportée par une source sonore perturbe à son tour d'autres régions proches du milieu, donnant naissance à un phénomène que l'on appelle onde.

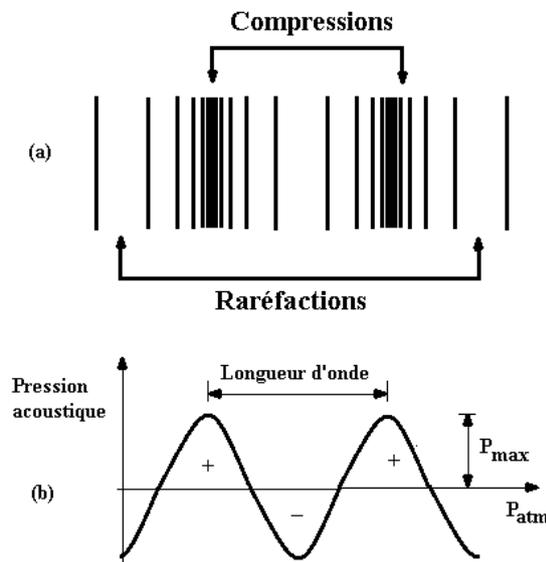


Fig. IV-01 : Représentation d'une onde acoustique.

Le milieu, qui peut être gazeux, liquide ou solide, détermine la vitesse de propagation. L'onde sonore est longitudinale (la déformation est parallèle à la direction de propagation) ; dans un gaz, des tranches d'air se déplacent autour d'une position d'équilibre (figure IV-01).

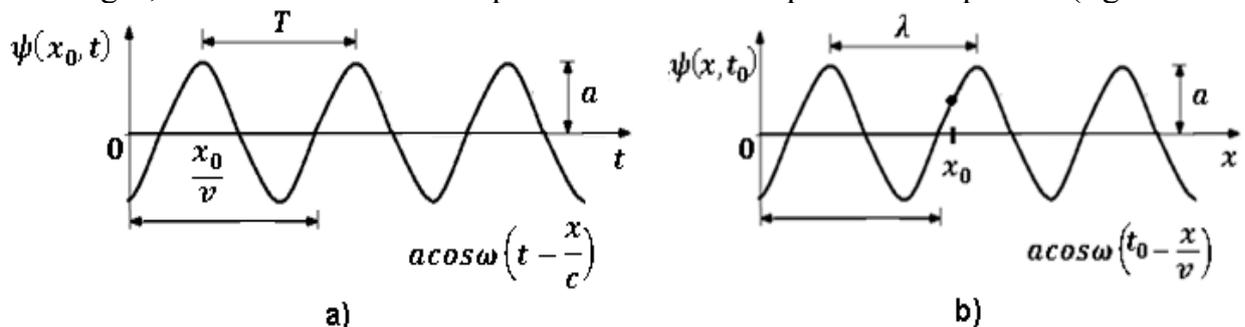


fig. IV-02 : Onde progressive sinusoïdale ; a) en fonction du temps, b) en fonction de l'espace.

Elle peut être décrite par un scalaire p , égal à la variation de pression p (autour de la valeur p_0) au passage de la perturbation. Cette perturbation est liée au déplacement de la tranche d'air par :

$$p = c\rho \frac{d\psi}{dt} \quad (1)$$

ou $\psi = a \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$ est le déplacement d'un point m éloigné à la distance x à l'instant t, le facteur $Z = c\rho$ est l'impédance du milieu et le rapport $k = \omega/c$ est appelé : nombre d'onde, le déplacement s'écrit : $\psi = a \cos(\omega t - kx)$.

2.1. Propagation d'énergie :

L'énergie produite au niveau de la source se propage dans l'espace sans transport de matière ; dans le cas d'une onde sphérique, la quantité d'énergie reçue (par un récepteur) diminue avec la distance à la source ; dans le cas d'une onde plane, cette quantité d'énergie reste, presque, fixe si le milieu est non dispersif. La densité d'énergie qui est la quantité d'énergie transportée par unité de volume dV vaut :

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \rho_0 a^2 \omega^2 \quad (2)$$

ce qui correspond à une intensité (puissance par unité de surface) :

$$I = \frac{dW}{Sdt} = c \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} c \rho_0 a^2 \omega^2 \quad (3)$$

L'évaluation de l'intensité acoustique s'effectue en utilisant des échelles logarithmiques et ceci en raison de la grande distribution de ces valeurs :

$$L - L_0 = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \quad (4)$$

L s'exprime en dB

2.2. Atténuation du faisceau d'onde :

Cette atténuation est due à l'interaction de l'onde avec la matière donnant une dissipation dans le milieu sous forme de chaleur et aussi due à la diffraction et la diffusion de l'onde. La décroissance de l'amplitude est exponentielle :

$$a = a_0 e^{-\alpha x} \quad (5)$$

l'intensité, proportionnelle au carré de l'amplitude, décroît sous forme :

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (6)$$

où $\mu = 2\alpha$ est le coefficient d'atténuation linéique, qui dépend du milieu et de la fréquence de l'onde. L'atténuation totale du faisceau est mesurée en décibel :

3. Réflexion, réfraction et transmission

Lorsqu'une onde sonore rencontre une interface entre deux milieux d'impédances différentes, il en résulte une onde réfléchie et une onde transmise (figure IV-03).

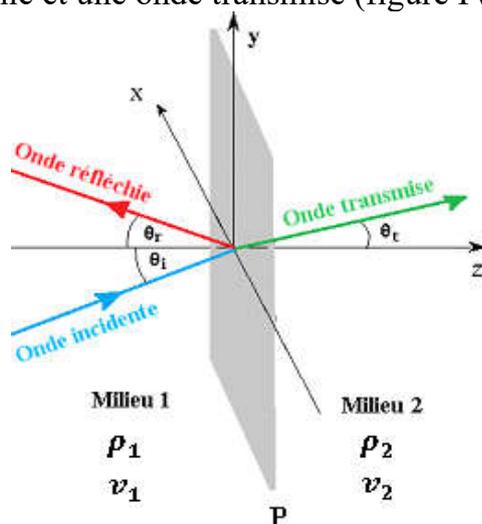


Fig. IV-03 : Onde incidente frappant une interface entre deux milieux.

Le coefficient de réflexion est défini comme étant le rapport de l'amplitude de l'onde réfléchie sur celle de l'onde incidente :

$$r = \frac{\psi_r(P)}{\psi_i(P)} \quad (7)$$

P étant l'interface séparant le milieu 1, de densité ρ_1 et vitesse de propagation v_1 du milieu 2, de densité ρ_2 et vitesse de propagation v_2

La condition de continuité du champ au niveau de l'interface P et à n'importe quel instant t va nous permettre de calculer ces coefficients :

$$\psi_i(P, t) + \psi_r(P, t) = \psi_t(P, t) \quad (8)$$

En remplaçant (7) dans (8) on obtient :

$$\begin{cases} r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_2 + Z_1} \\ \tau = \frac{2\sqrt{Z_1 Z_2}}{Z_2 + Z_1} \end{cases} \quad (9)$$

Dans la première relation rien n'empêche d'avoir $Z_2 > Z_1$ donc r peut être positif ou négatif et $|r| < 1$ t est toujours positif et inférieur à 1

Si r est négatif (l'onde arrive sur un milieu d'impédance plus forte (donc de vitesse de propagation plus petite), on a un changement de sens de l'onde au moment de la réflexion : changement de polarité.

Pour les intensités sonores, proportionnelles au carré des amplitudes les coefficients de réflexion et de transmission sont tels que :

$$R = \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_2 + Z_1)^2} \quad (10)$$

$$T = \frac{4Z_2 Z_1}{(Z_2 + Z_1)^2} \quad (11)$$

La conservation d'énergie implique que $R + T = 1$

Le coefficient de transmission τ peut s'écrire en fonction de la puissance d'une surface et est défini comme étant le rapport entre la puissance transmise W_t et la puissance incidente sur la surface W_i .

$$\tau = W_t / W_i \quad (12)$$

L'indice d'affaiblissement acoustique (parfois appelé perte de transmission, en anglais Transmission Loss) est défini en dB comme suit :

$$TL = 10 \log \left(\frac{1}{\tau} \right) \quad (13)$$

Avec p indiquant la pression et v la vitesse de la particule, la puissance acoustique est définie comme :

$$W = \frac{1}{2} \text{Real}(p^* v) = \frac{|p|^2}{2} \text{Real}\left(\frac{1}{Z_c}\right) \quad (14)$$

4. Méthode de la matrice de transfert :

La méthode de la matrice de transfert est une méthode utilisée en optique et en acoustique pour analyser la propagation des ondes électromagnétiques ou acoustiques à travers un milieu stratifié. [132]

La réflexion d'une onde à partir d'une seule interface entre deux milieux est décrite par les équations de Fresnel. Cependant, lorsqu'il y a plusieurs interfaces les réflexions elles-mêmes

sont également partiellement transmises, puis partiellement réfléchies. Selon la longueur exacte du trajet, ces réflexions peuvent interférer de manière destructive ou constructive. La réflexion globale d'une structure de couche est la somme d'un nombre infini de réflexions.

La méthode de la matrice de transfert est basée sur le fait que, selon les équations de Maxwell, il existe des conditions de continuité simples pour le champ électrique à travers les limites d'un milieu à l'autre. Si le champ est connu au début d'une couche, le champ à la fin de la couche peut être dérivé d'une simple opération de matrice. Un empilement de couches peut ensuite être représenté sous la forme d'une matrice système, qui est le produit des matrices de couches individuelles. La dernière étape du procédé consiste à reconvertir la matrice du système en coefficients de réflexion et de transmission.

L'idée est que tout système mécanique peut être considéré comme étant une boîte noire (figure IV-04), bornée par deux ports terminaux à ses extrémités et liant d'une manière linéaire les paramètres acoustiques de ses extrémités

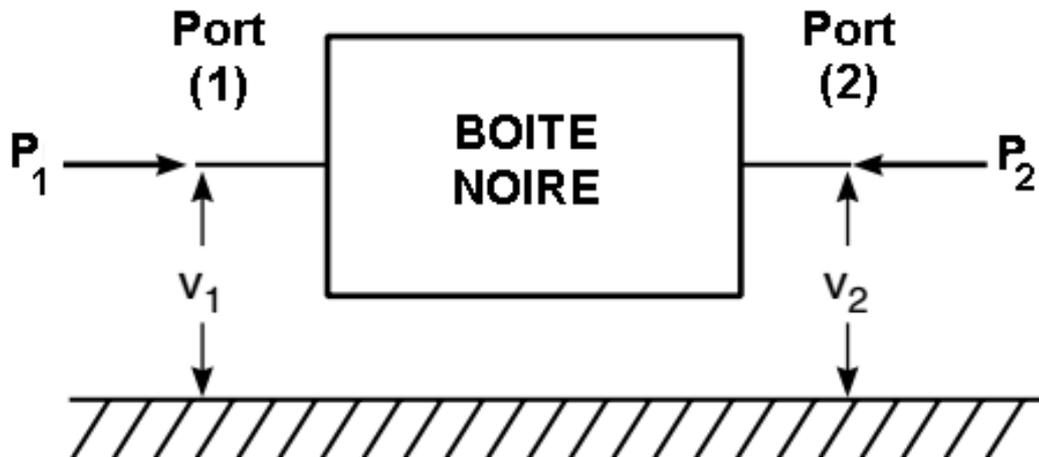


Fig.IV-04- : Représentation d'un système mécanique par une boîte noire.[133]

$$V_1 = TV_2 \quad (15)$$

ou V_1 représente le vecteur des paramètres acoustiques du port 1 qui se trouve à gauche de la boîte noire (ou à l'entrée du système mécanique) et s'exprime par :

$$V_1 = V_G = \begin{Bmatrix} P_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

V_2 représente le vecteur des paramètres acoustiques du port 2 qui se trouve à droite de la boîte noire (ou à la sortie du système mécanique) et s'exprime par : $V_2 = V_D = \begin{Bmatrix} P_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$ et T la matrice de transfert du système entre ses deux extrémités et s'exprime par :

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}.$$

En acoustique linéaire, le comportement acoustique de ce système peut être décrit complètement par sa matrice de diffusion D qui donne des relations linéaires entre le vecteur d'onde de pression entrante $\begin{Bmatrix} P_1^+ \\ P_2^- \end{Bmatrix}$ et le vecteur d'onde de pression sortante $\begin{Bmatrix} P_1^- \\ P_2^+ \end{Bmatrix}$:

$$\begin{Bmatrix} P_1^- \\ P_2^+ \end{Bmatrix} = D \begin{Bmatrix} P_1^+ \\ P_2^- \end{Bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (17)$$

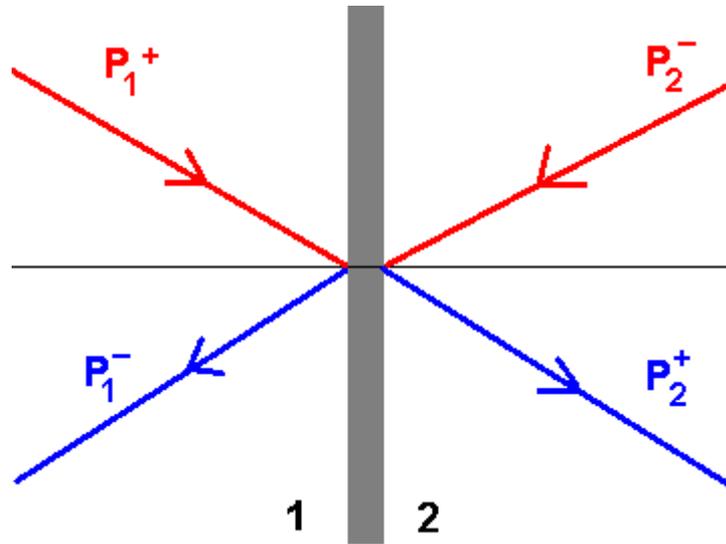


Fig. IV-05 : Schéma d'un système passif à grandes dimensions latérales.

La matrice d'impédance Z donne la relation entre la pression acoustique et la vitesse normale des particules des deux côtés de la structure, définie comme suit :

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{Z} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}, \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \quad (18)$$

la matrice inverse de la matrice d'impédance est la matrice admittance : $Z^{-1} = Y$ qui s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{Y} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}, \text{ avec } \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Ces quatre matrices son liées entre elles et contribuent toutes à la détermination des différents coefficients acoustiques (voir Annexe B).

La matrice de transfert totale de certains systèmes multicouches s'obtient par le produit des matrices de transfert de systèmes élémentaires tels que : la couche d'air, le matériau poreux, la plaque solide élastique et les matrices de transfert des interfaces entre deux milieux différents.

4.1 Matrice de transfert d'une couche d'air :

La figure IV-06 ; affiche une onde plane normale à une couche d'air d'épaisseur ℓ , les ondes acoustiques I et R au point 1 sont respectivement les ondes incidentes et réfléchies le long de la direction z . P_1, v_1 représentent la pression acoustique totale et la vitesse normale au point 1 ; P_2, v_2 représentent la pression acoustique totale et la vitesse normale au point 2.

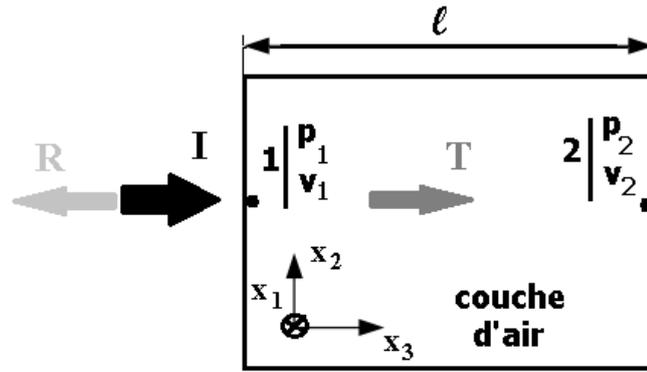


Fig. IV-06 : Modèle d'une couche d'air.

La matrice de transfert de la couche d'air est donc :

$$T_{air} = \begin{bmatrix} \cos k_0 \ell & jZ_0 \sin k_0 \ell \\ j \sin k_0 \ell / Z_0 & \cos k_0 \ell \end{bmatrix} \quad (20)$$

4.2 Matrice de transfert d'une plaque élastique :

Une onde plane normale transmet à travers une plaque élastique du point 1 au point 2, comme indiqué à la figure IV-07. P_1, v_1 représentent la pression acoustique totale et la vitesse normale au point 1 ; P_2, v_2 représentent la pression acoustique totale et la vitesse normale au point 2 ; Z_p, v_p représentent l'impédance et la vitesse normale de la plaque élastique.

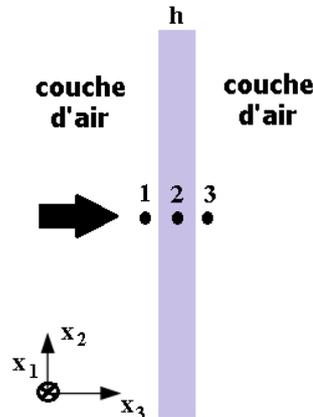


Fig. IV-07 : Modèle d'une plaque solide élastique.

La matrice de transfert de la plaque élastique s'écrit :

$$T_{pl} = \begin{bmatrix} 1 & Z_p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

4.3 Matrice de transfert d'un matériau poreux :

Une onde plane normale se transmet dans un matériau poreux d'épaisseur l , comme le montre le schéma de la Fig.IV-08.

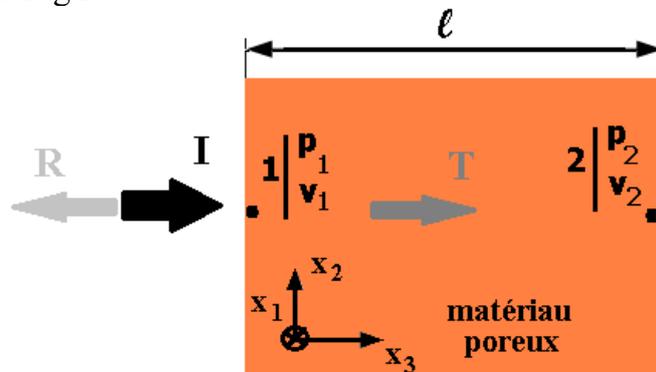


Fig. IV-08 : Modèle d'une couche poreuse (matériau poreux).

Supposons que le matériau poreux soit rigide, sa matrice de transfert peut être réécrite, en modifiant l'impédance de l'air Z_0 en impédance du matériau poreux Z_c , selon la théorie de Lafarge-Allard [113, 134].

$$T_{po} = \begin{bmatrix} \cos k_c \ell & jZ_c \sin k_c \ell \\ js \sin k_c \ell / Z_c & \cos k_c \ell \end{bmatrix} \quad (22)$$

Ici, Z_c , k_c sont respectivement l'impédance et le nombre d'onde du matériau poreux, détaillés comme suit. L'équation (22) est la matrice de transfert du matériau poreux. Ici, le matériau poreux est supposé se comporter comme un fluide équivalent visco-thermique et supposé avoir un cadre rigide en raison de son très haut module de densité ou d'élasticité. Dans cette situation, les ondes acoustiques ne peuvent se propager que dans l'air contenu dans les pores du matériau. En raison des effets thermiques et visqueux qui se produisent dans les pores du milieu, certaines ondes acoustiques sont diffusées sous forme de chaleur et l'énergie acoustique est ensuite absorbée. Pour obtenir l'impédance Z_c et le nombre d'ondes k_c du milieu poreux, la théorie de Lafarge-Allard requiert cinq paramètres intrinsèques invariants et indépendants (définis en annexe B [134,141]).

Les dépendances de fréquence effective et de module de déformation globale (bulk modulus) dans la théorie de Lafarge-Allard [134] sont exprimées comme suit :

$$\rho_e(\omega) = \alpha_\infty \rho_0 \left[1 + \frac{\sigma \phi}{j\omega \rho_0 \alpha_\infty} \left(1 + \frac{4j\alpha_\infty^2 \eta \rho_0 \omega}{\sigma^2 \Lambda^2 \phi^2} \right)^{1/2} \right] \quad (23)$$

$$K(\omega) = \frac{\gamma P_0}{\gamma - (\gamma - 1) \left[1 + \frac{8\eta}{j\omega \Lambda^2 Pr \rho_0} \left(1 + \frac{j\omega \Lambda^2 Pr \rho_0}{16\eta} \right)^{1/2} \right]^{-1}} \quad (24)$$

Ici, $Pr = 0.9660$ est le nombre de Prandtl obtenu par l'expression : $Pr = \nu / \alpha$, avec ν : viscosité cinématique (m^2/s) et $\alpha = \lambda / \rho c_p$, avec λ : conductivité thermique ($w/m.k$) et ρ : masse volumique en (kg/m^3) et c_p : capacité thermique massique à pression constante ($J/kg.k$) ou $Pr = \mu c_p / \lambda$, avec μ : viscosité dynamique (Pas) ou ($kg/m.s$), $\mu = \nu / \rho$ et γ le taux de chaleur spécifique. Par conséquent, dans le procédé à matrice diffusante, l'impédance Z_c et le nombre d'ondes k_c du matériau poreux est calculé par la masse volumique effective $\rho_e(\omega)$ et le module global $K(\omega)$, exprimé comme :

$$Z_c(\omega) = \sqrt{\rho_e(\omega) K(\omega)}, \quad k_c = \omega \sqrt{\frac{\rho_e(\omega)}{K(\omega)}} \quad (25)$$

4.4 Matrice de transfert totale :

La matrice de transfert totale des systèmes multicouches comme par exemple : couche d'air, matériau poreux et plaque élastique, est le produit des matrices élémentaires de chaque couche ; en considérant un cas simple 'air/plaque' (Fig.IV-08).

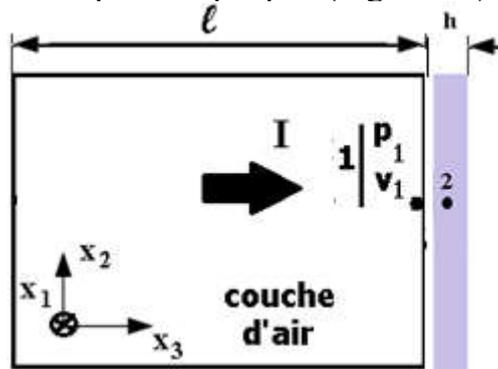


Fig. IV-09 : Modèle d'interface air-plaque.

La matrice de transfert totale s'écrit :

$$T_{totale} = T_{air} \cdot T_{pl} = \begin{bmatrix} \cos k_0 \ell & jZ_0 \sin k_0 \ell \\ js \sin k_0 \ell / Z_0 & \cos k_0 \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z_p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \cos k_0 \ell & Z_p \cos k_0 \ell \\ js \sin k_0 \ell / Z_0 & jZ_p \sin k_0 \ell / Z_0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

4.5 Calcul des paramètres de la structure entière :

Dans cette section nous allons dériver la matrice transfert pour toute la structure formée d'un très grand nombre d'unités cellulaires (figure IV-10). Cette figure schématise la simplification du problème de propagation en milieu continu périodique 2D en un problème de propagation en milieu continu périodique 1D et ce en application de la propriété de symétrie de la géométrie (figure IV-11).

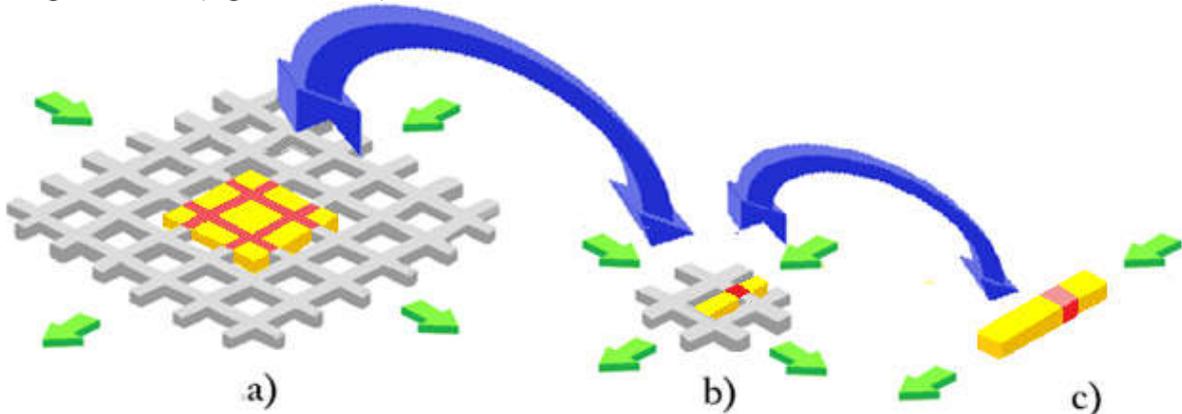


Fig. IV-10 : Modélisation du domaine vibro-acoustique : a) Figure 1. Une plaque infinie avec un réseau doublement périodique de vides carrés, b) Cellule élémentaire 2D, c) Cellule unité 1D.

Cette deuxième simplification consiste en la modélisation du système continu de la structure en un modèle discret , comme les schématise la figure IV-10.

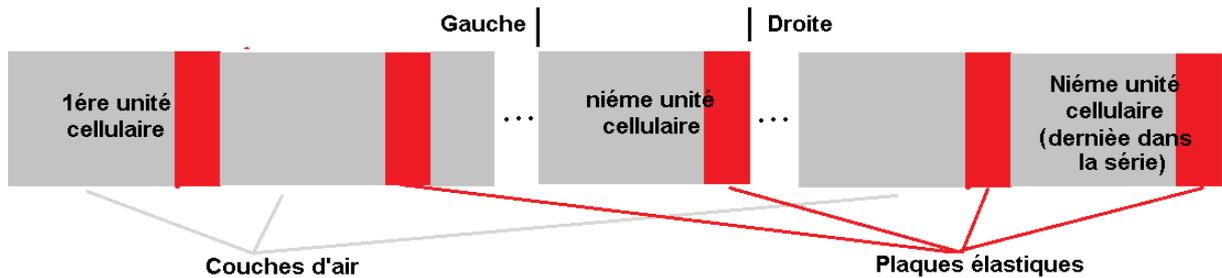


Fig. IV-11 : Discrétisation d'un milieu périodique continu.

La troisième simplification consiste à étudier une seule cellule de toute la structure et ceci par application du théorème de Floquet-Bloch.

Banerjee et al. estime la relation de dispersion, pour un milieu continu, en utilisant le théorème de Floquet [134], qui stipule que la relation entre le vecteur d'état de la gauche et de la droite peut être exprimée comme suit :

$$V_D = e^{iqh} V_G \quad (27)$$

où q est le vecteur d'onde de Bloch unidimensionnel et V_D et V_G vecteurs dont les composantes sont les paramètres acoustiques (pression $P_1 \equiv P_G$ et vitesse $v_1 \equiv v_G$) du milieu se trouvant à gauche de la cellule et les paramètres acoustiques (pression $P_2 \equiv P_D$ et vitesse $v_2 \equiv v_D$) du milieu se trouvant à droite de la cellule. L'équation (22) nous mènent au problème de valeur propre :

$$TV_1 = e^{iqh} V_1 \quad (28)$$

ou T est la matrice totale de la cellule unitaire.

$$[T - e^{iqh}I]V_1 = 0 \quad (29)$$

Pour V_1 arbitraire, le déterminant dans (29) doit impérativement s'annuler :

$$|T - e^{iqh}I| = 0 \quad (30)$$

Le calcul de ce déterminant mène à la relation de dispersion :

$$2\cos(qh) = 2\cos(\kappa h) \quad (31)$$

$$\text{ou } q = \pm\kappa + 2k\pi \quad (32)$$

pour toute valeur réelle de κ , q est réel. Ce qui implique que toutes ondes harmoniques de toute fréquence ou de tout nombre d'ondes peuvent être transmises à travers le milieu homogène continu. Donc, aucune bande d'atténuation de fréquence ne peut être observée pendant le passage des ondes dans le milieu continu. Donc aucun déphasage ne peut exister, dans le milieu continu, lors du passage des ondes. En conséquence, la relation de dispersion, pour le milieu continu peut s'écrire :

$$qh = \frac{\omega}{\omega_0} = \eta \quad (33)$$

où $\omega_0^2 = E/\rho h^2$ et μ représente le vecteur d'onde adimensionnel de Bloch ($\mu = qh$).

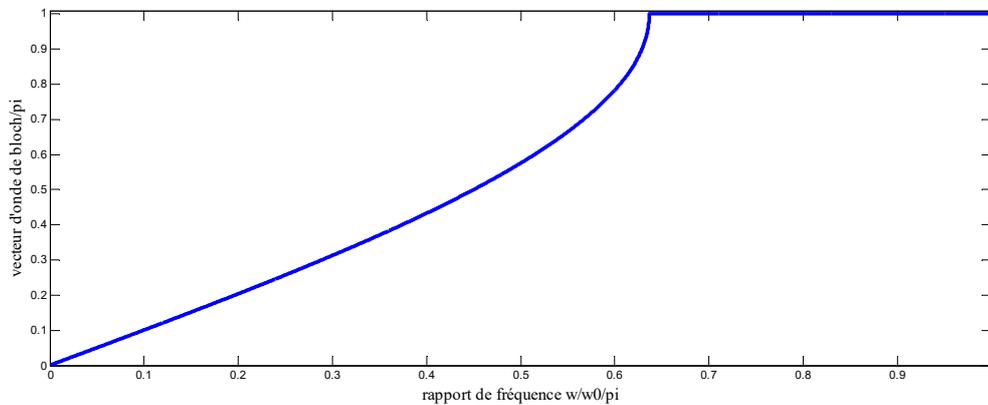


Fig.IV-12 : Fréquence spatiale en fonction de la fréquence temporelle dans un milieu discret.

La figure IV-12 affiche une courbe qui trace la variation du nombre d'onde adimensionnel en fonction de la fréquence temporelle adimensionnelle. Cette courbe, représente la transmission d'onde à travers un milieu discret, dans sa dernière partie présente un palier dont le nombre d'onde adimensionnel est 1, traduisant une transmission totale à cette bande de fréquence de $[0.64 - 1]\omega_0$ et qui est la passe-bande (bande passante).

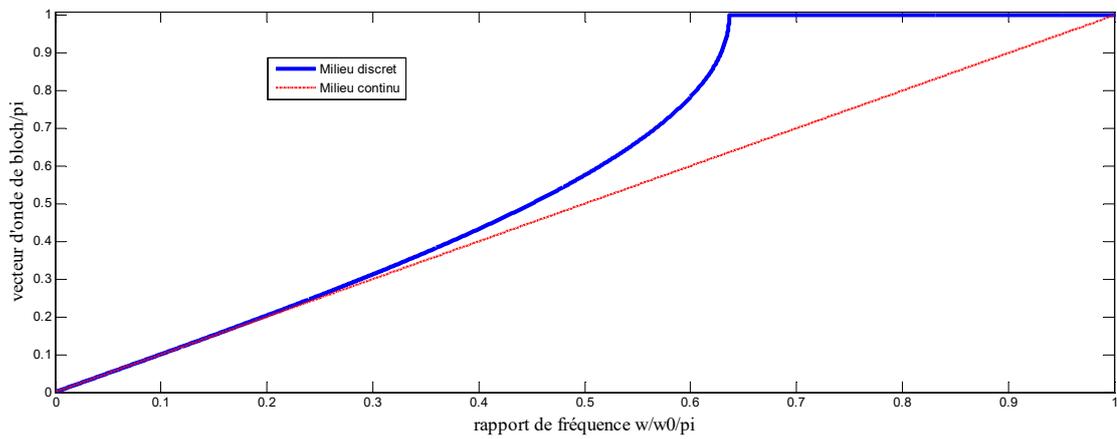


Fig.IV-13 : Fréquence spatiale en fonction de la fréquence temporelle dans un milieu : a) discret en bleu, b) continu en rouge.

La figure IV-13 affiche deux courbes qui trace la variation du nombre d'onde adimensionnelle en fonction de la fréquence temporelle adimensionnelle. La courbe, en bleu dans son dernier palier, représente la transmission d'onde à travers un milieu discret et la courbe, en rouge, qui représente la transmission d'onde à travers un milieu continu est une droite $\mu = \eta$.

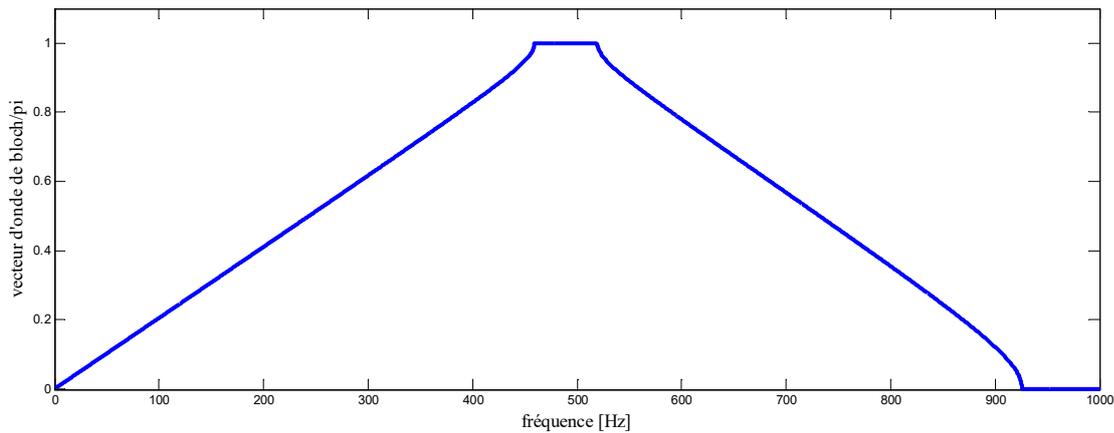


Fig.IV-14 : Bande de fréquence à transmission complète. (passe bande) et à transmission nulle (stop bande).

La figure IV-14 affiche des courbes traçant les dépendances entre la fréquence spatiale adimensionnelle et temporelle, présentant des bandes de fréquences, respectivement, PB (passe-bande), qui se situe entre les fréquences [450-520] Hertz et une bande interdite ou bande d'arrêt se situant entre les fréquences [920-1000] Hertz.

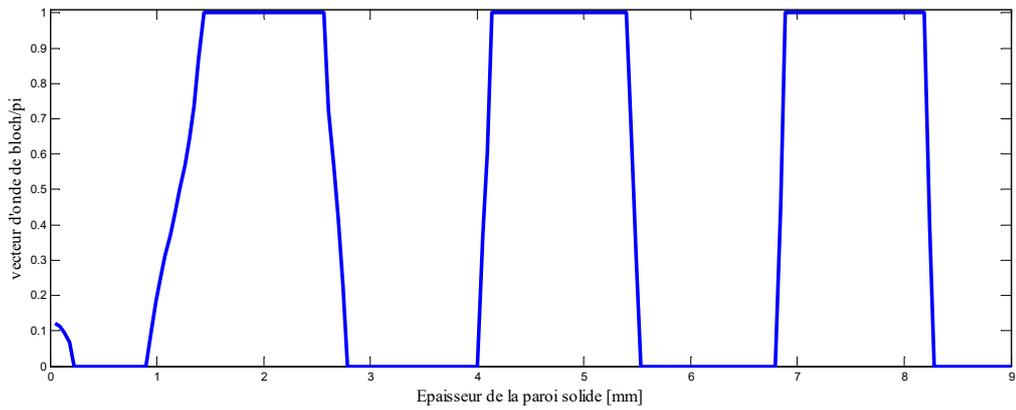


Fig.IV15 : Evolution du vecteur d'onde de Bloch en fonction de l'épaisseur de la paroi solide.

La figure IV-15 trace l'évolution du vecteur d'onde de Bloch en fonction de l'épaisseur de la paroi solide. La figure montre, notamment, l'apparition de paliers maximaux (passe-bandes) et autres nuls (stop-bandes) distribués périodiquement, le long de l'évolution de l'épaisseur de la paroi.

5. Simulation en vibro-acoustique d'un matériau cellulaire

Dans cette section nous considérons un matériau cellulaire constitué de cellules carrées munies aussi, en son centre, d'un vide de forme carré, présenté dans la figure IV-10. En raison de la distribution et l'arrangement de ses composants suivant un ordre répétitif, le matériau est considéré comme structure périodique. La simulation s'effectuera par le logiciel ANSYS®.

La structure est frappée par une onde plane avec une incidence oblique, avec perte de transmission. Dans cette simulation nous examinons le problème de perte de transmission par un panneau structural sous l'excitation d'une onde plane incidente avec un angle d'inclinaison. Le panneau est supposé être infini et sera tronqué grâce aux conditions aux limites de Floquet.

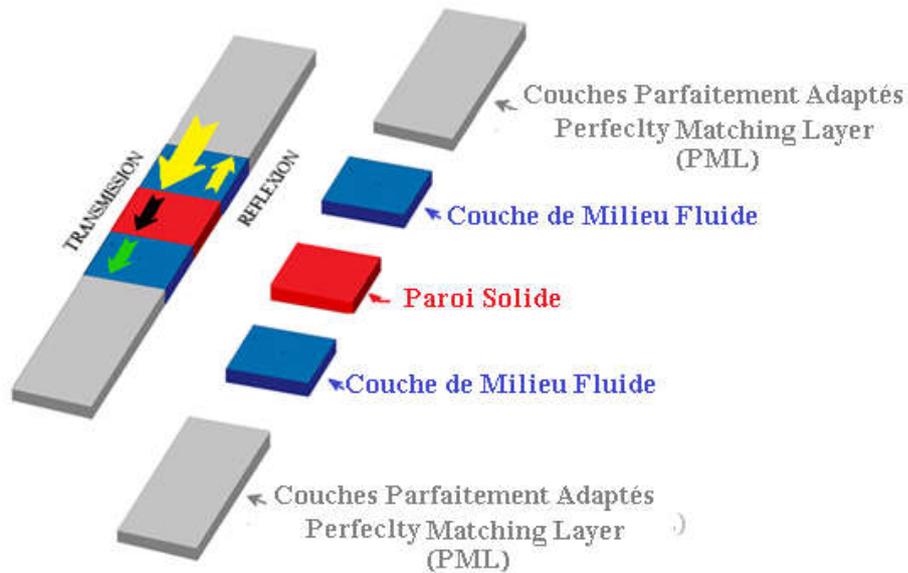


Fig. IV-16 : Modélisation du domaine vibro-acoustique.

Le treillis solide est supposé être fait en PMMA, les propriétés du matériau du panneau structural d'épaisseur $h = 0,05$ m sont les suivantes :

Modules d'élasticité = 2,85 GPa ;

Coefficient de Poisson = 0.375 ;

Masse volumique = 1920 kg / m³ ;

Le domaine acoustique est l'air avec une masse volumique de 1000 kg/m³ et une vitesse du son de 1498,6 m/s.

La perte de transmission du panneau sera estimée par l'élément FLUID220, disponible dans la bibliothèque d'ANSYS. L'interaction entre fluide et solide est prise en compte. Les ports d'onde du plan d'excitation et de sortie sont définis sur les surfaces intérieures. L'angle d'incidence θ (de l'axe + z vers l'axe x) varie de 0° à 88° dans le plan.

La condition de limite périodique de Floquet est appliquée sur les parois latérales des cellules dans la direction x. Le programme de simulation ANSYS calcule le déphasage sur les nœuds esclaves en fonction des angles d'incidence. Des couches à adaptation parfaite d'impédance (PML) tronquent le domaine dans la direction z.

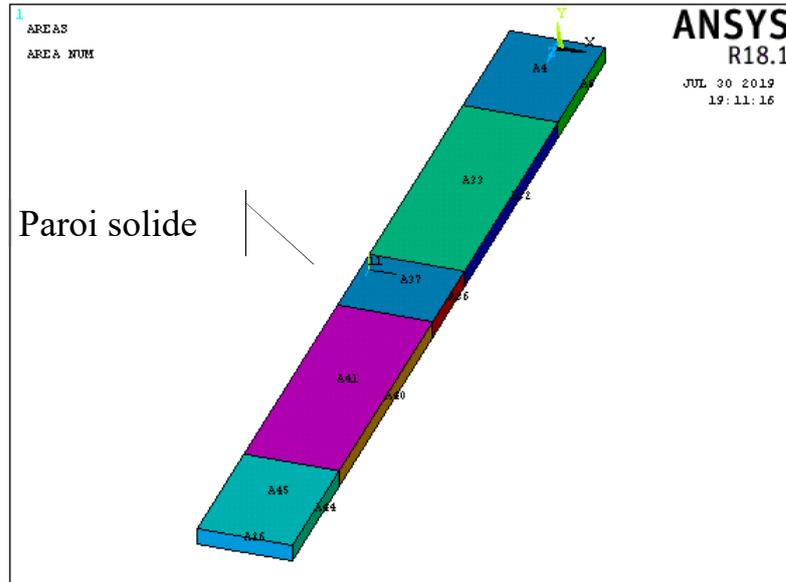


Fig. IV- 17 : Modélisation du domaine de simulation vibro-acoustique.

5.1. Description du domaine de simulation :

Le domaine acoustique est subdivisé en trois zones différentes, comme le montre la figure IV-16 :

1^{ère} zone : l'élément solide, représentant la fraction solide du matériau, objet de la simulation, et est maillé avec l'élément SOLID186 structural.

2^{ème} zone : l'élément fluide ; composée de deux régions : de part et d'autre de la paroi solide. Ces deux régions sont séparées par une interface fluide-solide FSI (Fluid-Structure Interaction).

3^{ème} zone : qui est une couche parfaitement adaptée (Perfectly Matching Layer), et ce nom lui a été désigné parce qu'elle modélise le champ lointain dans la simulation, comme si l'extérieur s'étendait à l'infini.

L'idée est d'introduire une couche extérieure au niveau d'une interface artificielle, de sorte que les ondes planes sortantes soient totalement absorbées avant d'atteindre la couche extérieure limite de troncature (figures IV-16). Les équations de la PML décrivent les ondes en décroissance, ce qui en théorie garantit qu'aucune réflexion ne se produit à l'interface pour un angle d'incidence arbitraire [138-140].

5.2 Description de l'élément FLUID220 :

L'élément FLUID220, affiché dans la figure IV-18, est un élément solide d'ordre supérieur tridimensionnel à 20 nœuds qui présente un comportement de pression quadratique. On

l'utilise pour modéliser le fluide et l'interface dans les problèmes d'interaction fluide-structure [91].

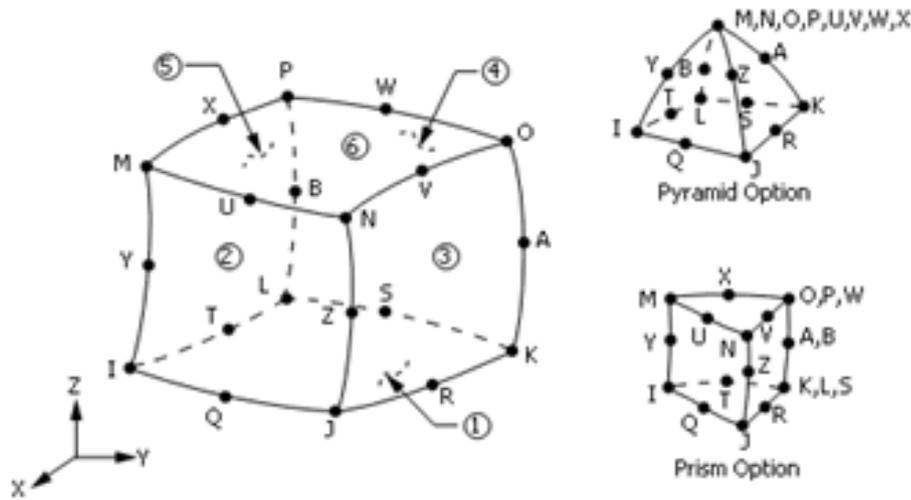


Fig. IV-18 : Géométrie de l'élément FLUID220 [91].

5.3 Description de l'élément SOLID186

L'élément SOLID186, affiché dans la figure IV-19, est un élément solide d'ordre supérieur 3-D à 20 nœuds qui présente un comportement de déplacement quadratique. L'élément est défini par 20 nœuds ayant trois degrés de liberté par nœud : des translations dans les directions nodales x, y et z. L'élément prend en charge la plasticité, l'hyperélasticité, le fluage, la rigidité sous contrainte, une déflexion importante et des capacités de déformation importantes. Il offre également une capacité de formulation mixte pour simuler les déformations de matériaux élastoplastiques presque incompressibles et de matériaux hyperélastiques totalement incompressibles [91].

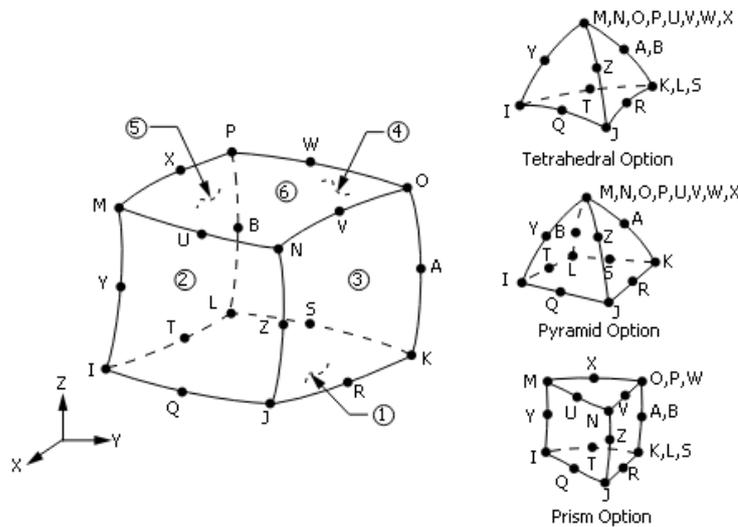


Fig. IV-19 : Géométrie de l'élément SOLID186 [91].

L'option : KEYOPT (15) = 1 définit l'élément pour les couches parfaitement adaptées (PML).

5.4. Maillage :

Le nombre total de nœuds est de 13896. Le nombre d'éléments total est de 2354 éléments qui se divisent en 1650 éléments couplé FLUID220 plus éléments FLUID220 option 1 (élément acoustique PML) en plus 704 éléments structural SOLID160. La fréquence de travail est 10000Hz, donnant une longueur d'onde $\lambda = c/freq = 0,14986 m$. La période spatiale (épaisseur de la paroi solide) est $h=0.0508 m$.

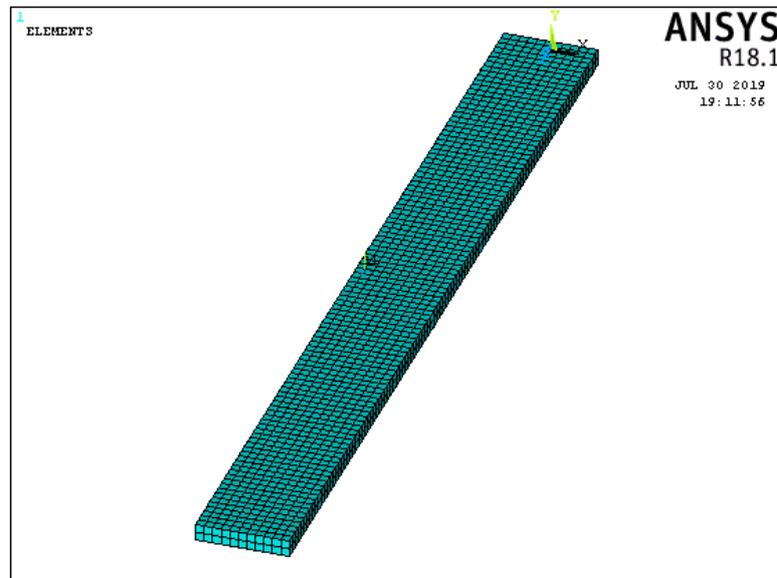


Fig. IV-20 : Maillage du domaine de simulation.

L'épaisseur d'une couche PML est : $\frac{\lambda}{2} = 0,07493 m$, la longueur de la subdivision utilisée dans le maillage est $\frac{\lambda}{32} = 0,004683125 m$. L'amplitude, de l'onde incidente de pression, est une amplitude unitaire figure IV-19.

6. Résultats et interprétations :

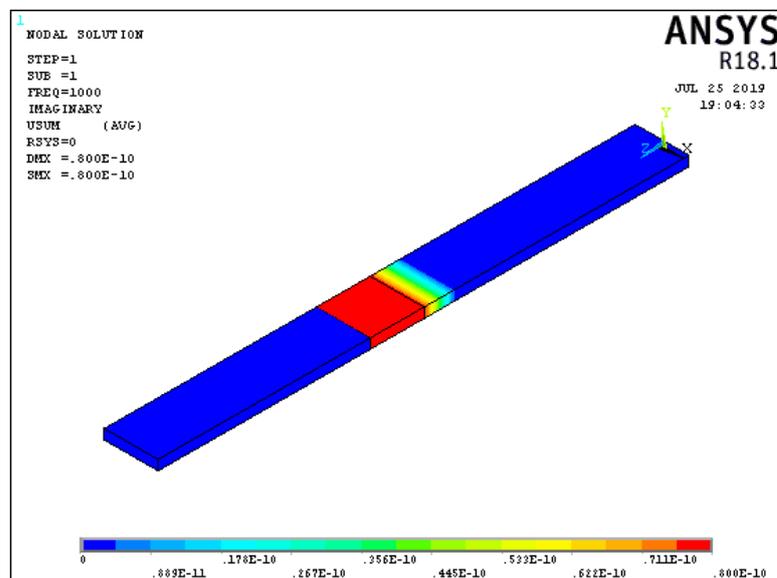


Fig. IV-21 : Contour du vecteur déplacement total (partie imaginaire).

La figure IV-21 dessinent les contours, de la partie imaginaire, du vecteur déplacement somme suivant la direction z. traduisant un déplacement est complexe, résultant de l'interface panneau solide-fluide (singularité ou hétérogénéité).

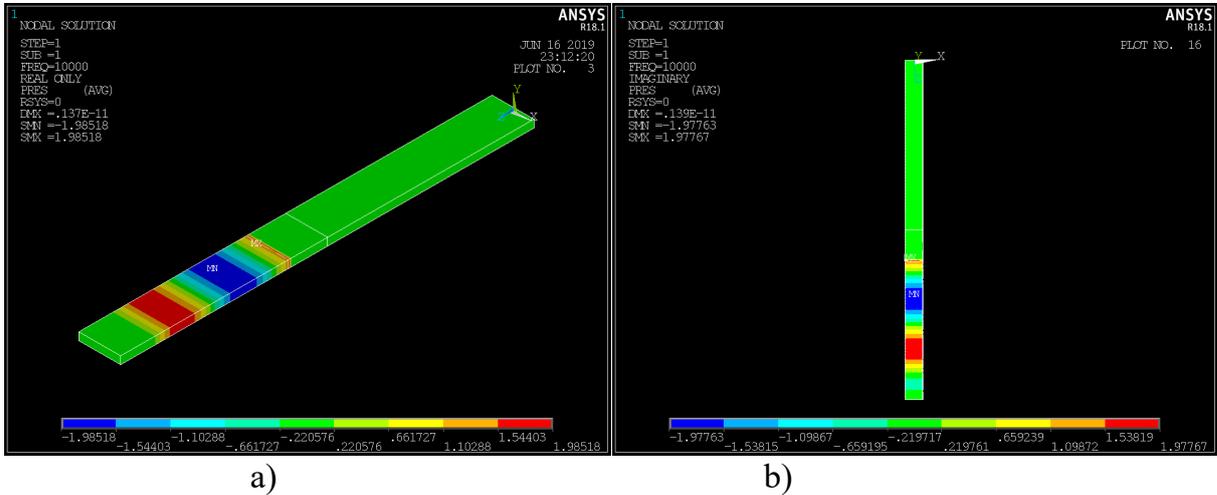


Fig. IV-22 : Contour de pression : a) partie réelle, b) partie imaginaire.

La figure IV-22 affiche les contours de la partie réelle et la partie imaginaire de la pression acoustique. Donc une pression complexe résultant de la singularité causée par l'interface.

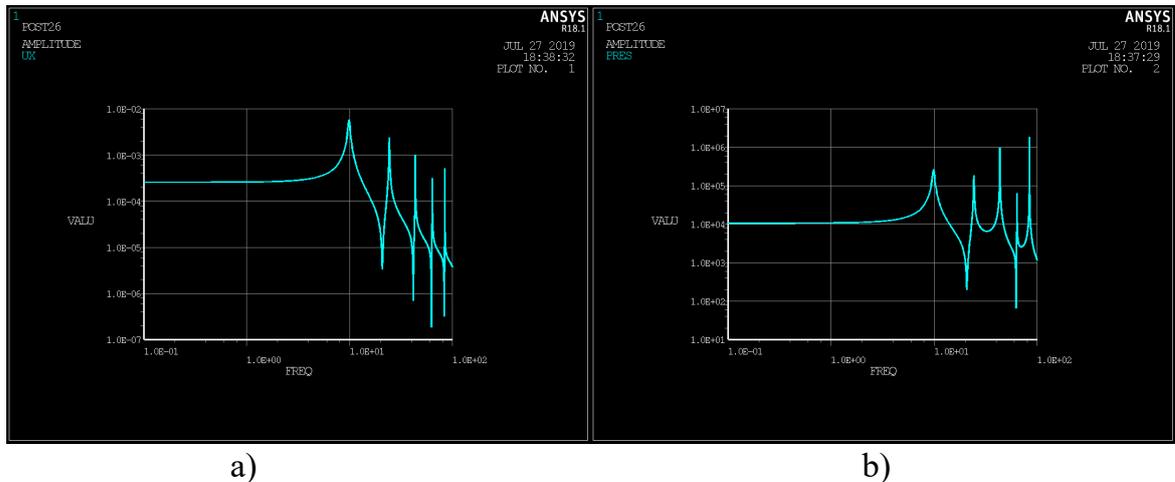


Fig. IV-23 : Effet de la fréquence sur : a) l'amplitude de déplacement, b) l'amplitude de pression.

La figure IV-23 qui trace l'évolution de l'amplitude de déplacement et de la pression acoustique en fonction de la pression affiche, dans la bande de 100Hz, les cinq premiers modes propres.

6.1. Effet de l'angle de l'incidence :

Lorsqu'une onde, qui voyage dans un milieu, rencontre une interface, séparant deux composantes de ce milieu (hétérogénéité, une autre phase ou une autre couche, c.à.d. une singularité), sous un angle d'incidence θ_i , angle formé avec le plan xz, se scinde en deux

autres ondes : une onde transmise au milieu 2, à travers l'interface, formant un angle θ_t , avec le plan xz, et une troisième onde réfléchie et formant, à son tour, un angle θ_r , avec le plan xz.

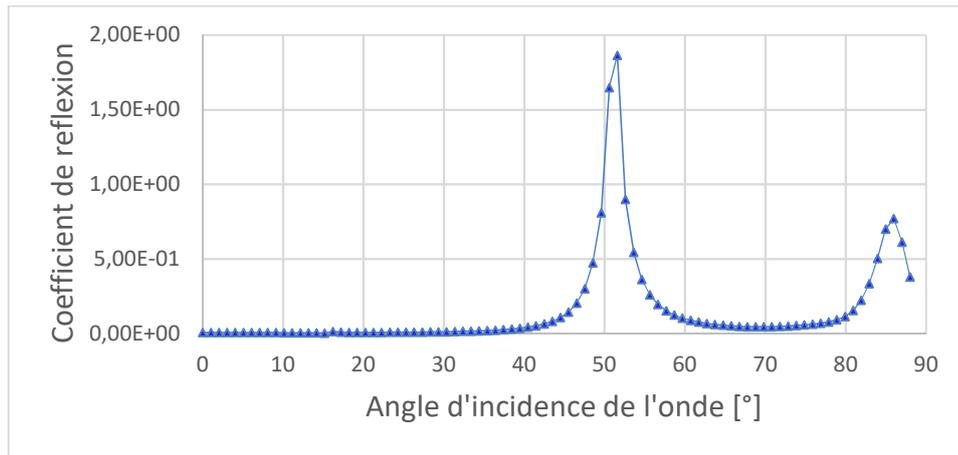


Fig. IV-24 : Effet de la variation de l'angle d'incidence sur le coefficient de réflexion.

La figure IV-24 trace la variation du coefficient de réflexion en fonction de l'angle d'incidence de l'onde. La réflexion est nulle pour des valeurs d'angle d'incidence de l'onde acoustique $\theta < 40^\circ$.

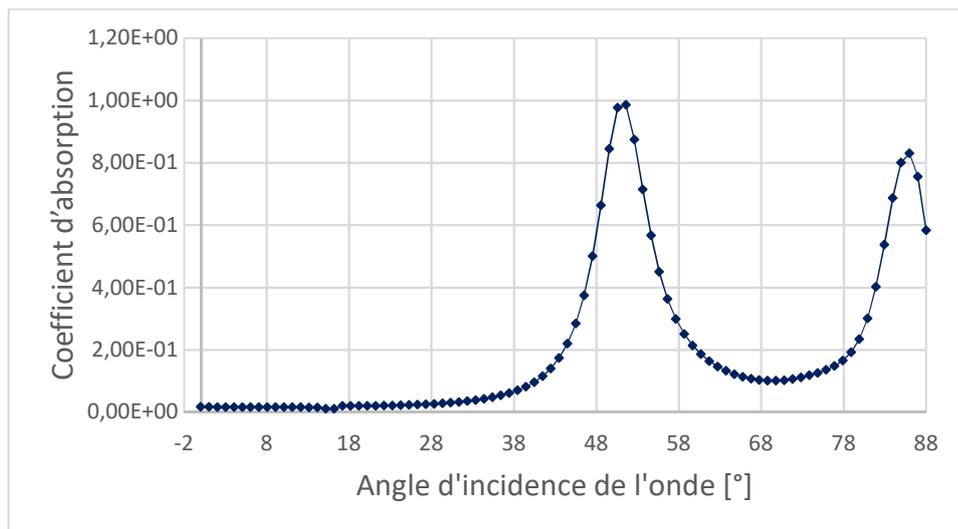


Fig. IV-25 : Effet de la variation de l'angle d'incidence sur le coefficient d'absorption.

Au-delà de cette valeur, la réflexion commence à prendre forme pour arriver un une réflexion maximale de valeur de 1.8 quand θ atteint 51° , pour rechuter d'une façon brutale, pour des valeurs d'angle supérieures à 51° , jusqu'à devenir nulle pour des valeurs de θ comprises entre, à peu près $63^\circ < \theta < 77^\circ$. Pour les angles $\theta > 77^\circ$ le niveau de réflexion recommence à croître une deuxième fois pour atteindre un nouveau pic, mais moins important que le premier, à la valeur d'angle $\theta = 86^\circ$ de valeur de 0.8.

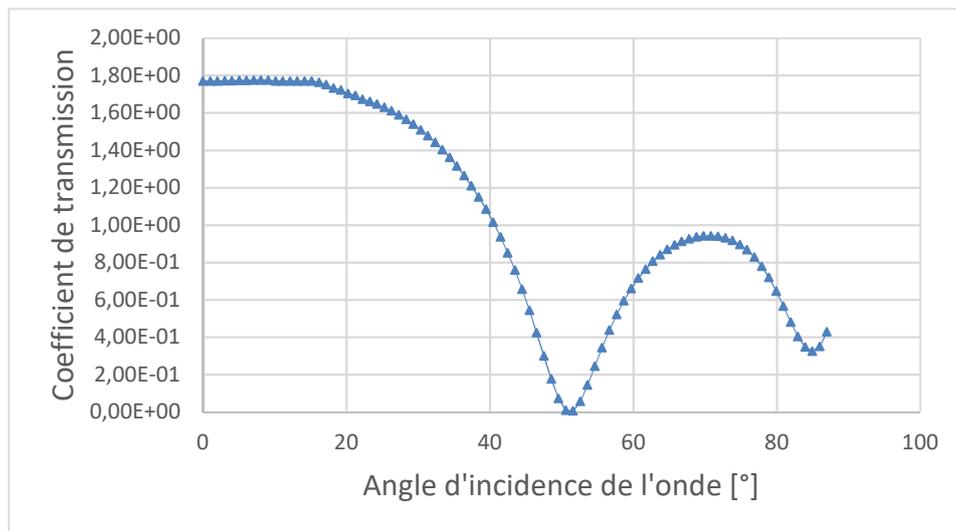


Fig. IV-26 : Effet de la variation de l'angle d'incidence sur le coefficient de transmission.

La figure IV-25 affiche la variation du coefficient d'absorption en fonction de l'angle d'incidence à la sortie de la paroi solide. L'absorption est minimale quand l'onde acoustique incidente frappe l'interface fluide-structure à $\theta < 40^\circ$. Lorsque θ atteint 45° l'absorption arrive à son maximum.

La figure IV-26 affiche la variation du coefficient de transmission acoustique en fonction de l'angle d'incidence. Cette courbe, comme attendu, est pratiquement l'opposée de la courbe de la réflexion. La transmission est maximale et a pour valeur $t = 1.8$ lorsque l'angle d'incidence de l'onde acoustique est compris entre : $0^\circ \leq \theta \leq 15^\circ$ et d'ici le coefficient de transmission décroît, en fonction de l'angle d'incidence, jusqu'à devenir nul quand θ atteint 50° . Puis t croît de nouveau pour les valeurs d'angle d'incidence de $\theta > 50^\circ$ pour arriver à un nouveau pic de valeur $t = 0.94$ à $\theta = 70^\circ$ pour décroître de nouveau pour des valeurs d'angle $\theta > 70^\circ$ jusqu'à $\theta = 84^\circ$ point du nouveau minimum local de valeur $t = 0.33$. Enfin une nouvelle reprise jusqu'à la valeur finale d'angle d'incidence de $\theta = 88^\circ$.

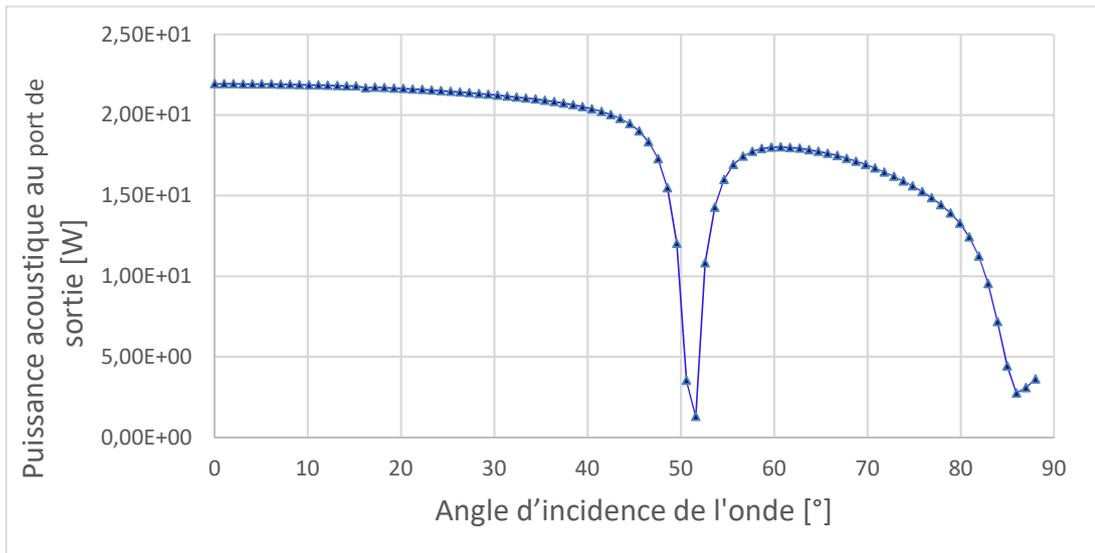


Fig. IV-27 : Effet de la variation de l'angle d'incidence sur la puissance acoustique à la sortie du port.

La figure IV-27 affiche la variation du niveau de la puissance acoustique en fonction de l'angle d'incidence au port de sortie (à la sortie de la paroi solide.) Le niveau de puissance acoustique est maximal et à peu près constants, pour l'angle d'incidence compris entre 0° à 45° pour dégringoler, ensuite à son plus bas niveau à la valeur d'angle de $\theta = 53^\circ$. Pour, ensuite, il reprend des niveaux élevés pour redevenir minimal à $\theta = 85^\circ$.

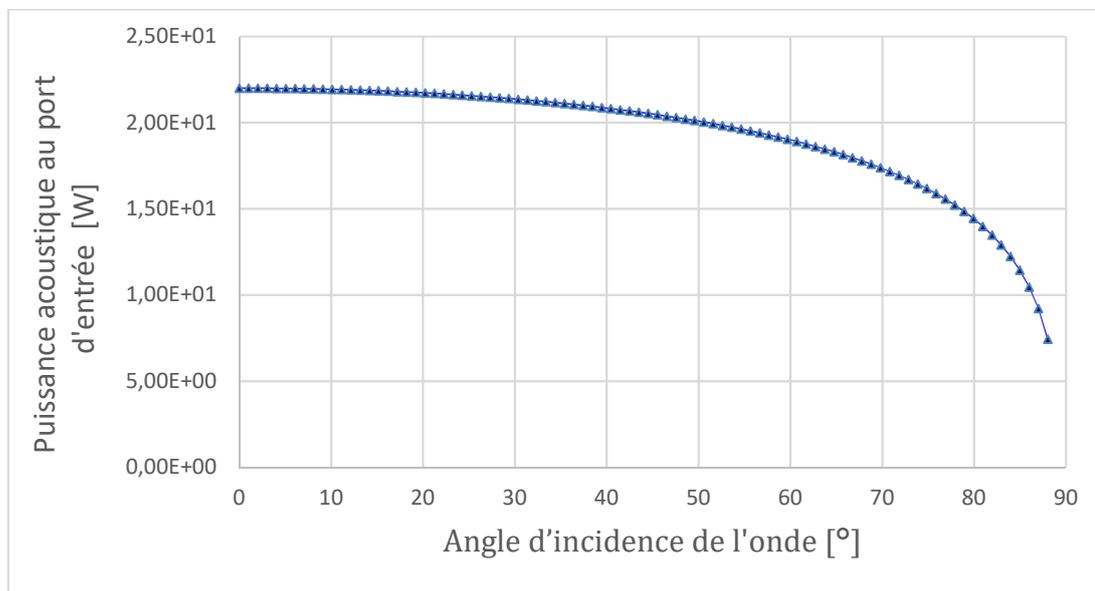


Fig. IV-28 : Effet de la variation de l'angle d'incidence sur la puissance acoustique au port d'entrée. La figure IV-28 affiche la variation du niveau de la puissance acoustique en fonction de l'angle d'incidence au port d'entrée (à l'entrée de la paroi solide.) Le niveau de la puissance acoustique transmis est maximal et est constant entre des valeurs d'angle d'incidence de 0° à 20° pour commencer à décroître au-delà de cette valeur d'angle. Et cette décroissance s'accélère lorsque la valeur d'angle atteint $\theta = 60^\circ$.

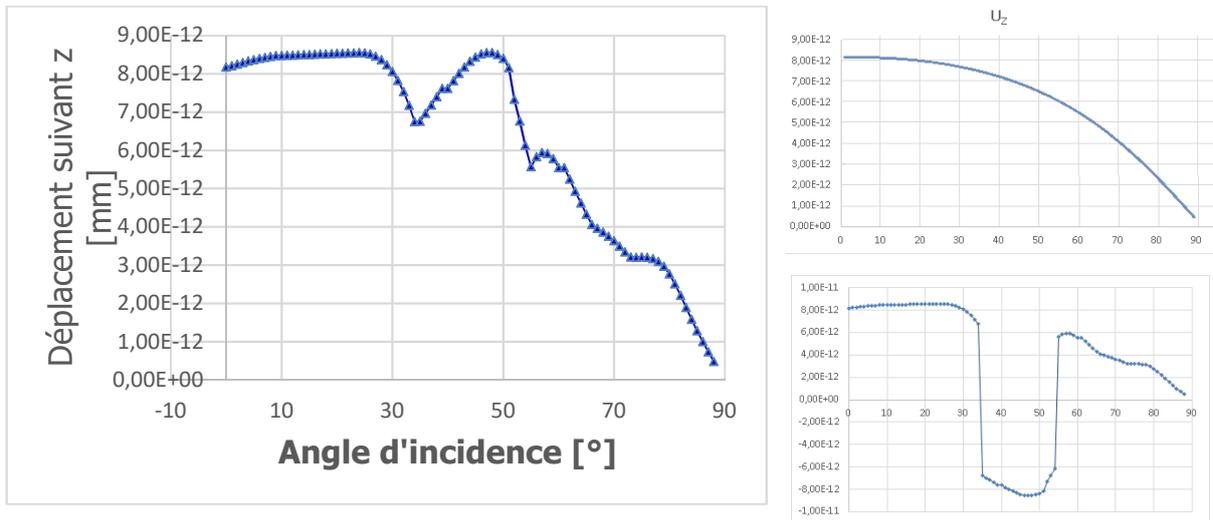
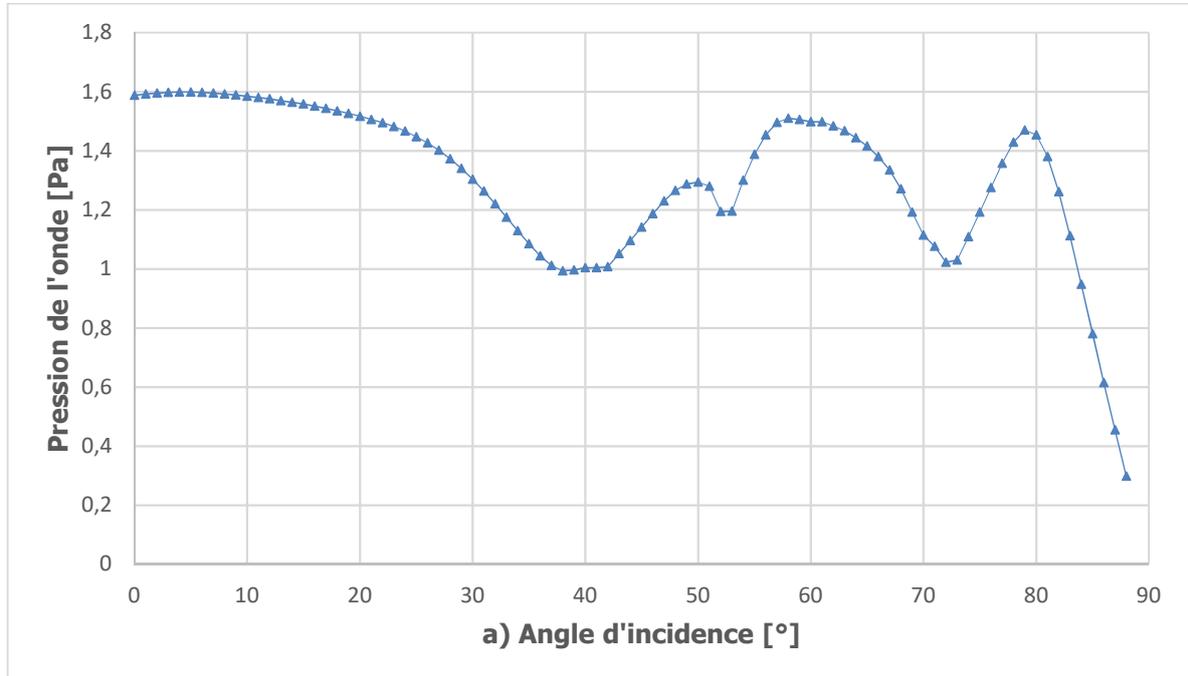


Fig. IV-29 : Amplitude de déplacement en fonction de l'angle d'incidence.

La figure IV-29 présente la variation de la valeur absolue de l'amplitude maximale du déplacement en fonction de l'angle de l'incidence. L'allure de cette courbe est fortement perturbée parce qu'elle est le résultat de deux effets simultanés, la première figure IV-29a, donnant une tendance décroissante traduisant la diminution de l'amplitude de déplacement avec la croissance de l'angle d'incidence, formé entre le vecteur d'onde et la normale à la surface de l'interface, croît. Le second, figure IV-29b, résultant du déplacement des particules vers les z +ve et -ve.



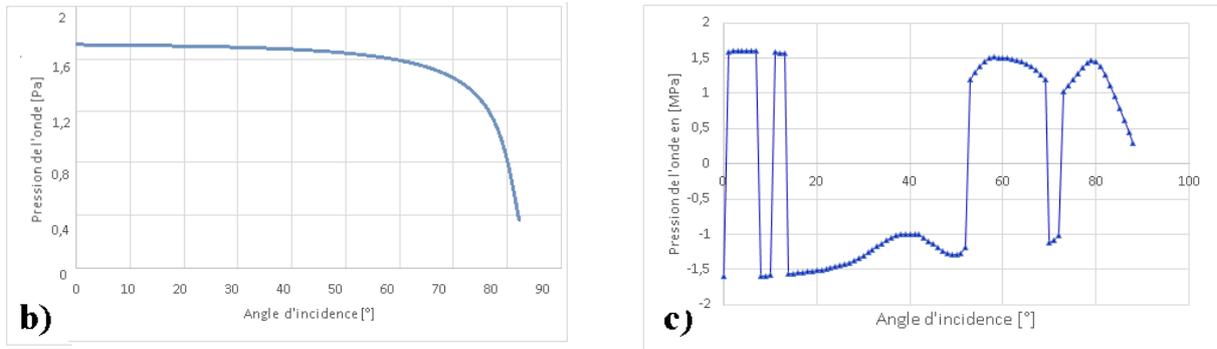


Fig. IV-30 : Amplitude de la pression de l'onde en fonction de l'angle d'incidence.

La figure IV-30 présente la variation de la valeur absolue de l'amplitude maximale de la pression acoustique en fonction de l'angle de l'incidence. L'allure de cette courbe est fortement perturbée parce qu'elle est le résultat de deux effets ; le premier, figure IV-30a, résulte d'une tendance décroissante traduisant la diminution de l'amplitude de la pression avec la croissance de l'angle d'incidence, formé entre le vecteur d'onde et la normale à la surface de l'interface, croît. Le deuxième, figure IV-30b, est une fluctuation de la pression entre compression et raréfaction.

7. Conclusion :

Dans ce chapitre, la méthode de la matrice de transfert a été utilisée dans l'analyse des caractéristiques acoustiques d'une structure cellulaire périodique. Premièrement, la définition de la matrice de transfert et de la matrice de diffusion de la structure acoustique est donnée. La matrice de transfert de la plaque élastique simplement supportée, la couche d'air, sont modélisés et ensuite déduits pour établir la matrice de transfert total de la structure et ce pour dégager les propriétés de filtrage acoustique. En effet, en utilisant la technique de la matrice de transfert nous avons décelé l'existence de bandes passante et interdite. Dans la seconde partie de ce chapitre nous avons calculé les coefficients d'absorption et la perte de transmission de la structure et analysé à l'aide d'exemples numériques dans une simulation vibro-acoustique sur un matériau cellulaire. Le caractère périodique, et dans les deux directions x_1 et x_2 , de cette structure nous a permis de simplifier le problème à une seule dimension et en utilisant les conditions de Floquet-Bloch le problème s'est réduit à une seule cellule-unité. Cette simulation a permis notamment, de mettre en évidence l'influence de l'angle d'incidence de l'onde de propagation sur les coefficients de réflexion, d'absorption et de transmission. Aussi, a permis de montrer la criticité de l'angle $\theta = 50^\circ$, angle qui permet une transmission nulle et une réflexion et absorption maximales.

Conclusions et Perspectives

Les matériaux cellulaires, en général, et ceux auxétiques en particulier, présentent des combinaisons intéressantes de propriétés et sont de plus en plus intégrés dans les produits manufacturés. Ces propriétés varient beaucoup en fonction de l'architecture des matériaux cellulaires considérés, c'est à dire la morphologie. L'objectif premier de ce travail a été l'analyse de ces architectures.

Dans les chapitres I et II de ce travail nous avons passé en revue les différents types de ces matériaux ainsi que l'état de l'art les concernant.

Par la suite, l'étude analytique, puis les simulations numériques ont dégagé une dépendance organique entre les propriétés mécaniques de ces structures et leur densité relative, ainsi que celle entre ces mêmes propriétés et la morphologie du solide cellulaire. Cette dépendance a été confirmée par l'étude expérimentale. Les résultats montrent, notamment, que ces propriétés dépendent fortement de la densité et également de l'angle que fait le lien incliné avec l'horizontale θ , les rapport β et α tels que :

- Les tests de caractérisation de la structure composée de la cellule modèle avec les paramètres $\ell = h = H/2$ et $\theta = 45^\circ$ donnent les modules d'Young dans les directions 1 et 2 équivalent de :

$E_1^* = E_2^* = 3800$ kPa , la résistance à la rupture sous charge de traction de ; $\sigma_{fs} = 221$ kPa et un coefficient de Poisson de $\nu_{12}^* = \nu_{21}^* = -0.27$. Le module de Coulomb concerne : $G_{12}^* = G_{21}^* = 420$ kPa où la résistance à la rupture en cisaillement est de $\tau_{fs} = 939$ kPa qui est plus de deux fois supérieure à la résistance à la rupture en traction, ce qui indique que cette structure est plus apte à résister au cisaillement qu'elle aux contraintes de traction.

L'étude des effets des paramètres géométriques sur les propriétés mécaniques a notamment pour résultat :

- Le caractère auxétique de la structure devient plus prononcé à partir du 45° angle et atteint sa valeur maximale à 60° .

• En raison à la fois de la disposition périodique et de l'architecture symétrique de la cellule de lien rentrant par rapport aux axes x_1 et x_2 , la perte de résistance au cisaillement lorsque θ augmente de 15° à 45° est compensé lors de l'augmentation de de 45° à 75° . Et par conséquent, conserve une résistance minimale au cisaillement quelle que soit la valeur de l'angle d'inclinaison du lien incliné.

- Pour $H = 2\ell = 2h = 6mm$ et pour $\theta = 60^\circ$, la structure devient plus flexible avec un module de Young relatif de $(E^*/E_s)_{\theta=60^\circ}, 0.0008807 < (E^*/E_s)_{\theta=45^\circ} = 0.0013$, et $(E^*/E_s)_{\theta=45^\circ} = 1,48(E^*/E_s)_{\theta=60^\circ}$ à $\theta = 45^\circ$, avec la structure est plus résistante au cisaillement avec $(G^*/E_s)_{\theta=45^\circ} = 0.00082807 > (G^*/E_s)_{\theta=60^\circ} = 0.00126281$ lequel est : $(G^*/E_s)_{\theta=60^\circ} = 1.52(G^*/E_s)_{\theta=45^\circ}$.
- La structure devient de plus en plus rigide et moins auxétique lorsqu'elle diminue α ;

- L'augmentation de β montre la diminution des propriétés mécaniques de $E^*/E_s, G^*/E_s$, et la perte du caractère auxétique ;
- Tout cela nous amène à conclure que le paramètre qui influence le plus les propriétés mécaniques de la structure est bien l'angle d'inclinaison du lien incliné, de sorte que la forme de la cellule étudiée dans ce travail varie du carré à l'hexagone, en combinant la rigidité de la cellule carrée avec la flexibilité de la cellule hexagonale. Des études supplémentaires sont nécessaires sur ces types de matériaux afin d'explorer les propriétés acoustiques et vibratoires compte tenu de leur structure favorisant un minimum de matériau.

L'étude vibro-acoustique a permis de sortir les fréquences et modes propres des plaques faites en solide cellulaire modélisé en plaque isotrope homogène équivalente. Cette étude a dégagé que la transmission du son provoquée par une excitation acoustique et d'absorption acoustique, si la plaque est perméable, peut subir sérieusement les effets d'une perméabilité modifiée. Aussi, les caractéristiques de l'affaiblissement de transmission changent avec le taux de perforation, correspondant au changement d'absorption acoustique.

Enfin, comme recommandations aux futurs doctorants, il serait d'un apport scientifique non négligeable de pouvoir explorer, numériquement et expérimentalement, l'influence de la variation des valeurs des paramètres géométriques de la cellule sur le comportement vibratoire et acoustique de ces structures cellulaires. Ceci peut être accompli dans le cadre d'une collaboration interuniversitaire en construisant des manipes en plexiglas ou autres polymères, servant de matériau de base pour la structure cellulaire.

Références bibliographiques

- [01] N.C. Hilyard, *Mechanics of cellular plastics*, Macmillan Pub Co, 1982.
- [02] N. Chan and K.E. Evans. Microscopic examination of the microstructure and deformation of conventional and auxetic foams. *Journal of Materials Science*, 32(21):5725–5736, 1997.
- [03] Jean-Philippe Bonnet, Frederic Topin, and Lounes Tadrist. Flow laws in metal foams: Compressibility and pore size effects. *Transport in Porous Media*, 73:233–254, 2008. 10.1007/s11242-007-9169-5.
- [04] Christain Janot ET Bernhard IIschner, *Matériaux émergents tome 19*, Press polytechniques et universitaires romandes, 2001.
- [05] K. Vafai. *Handbook of porous media*. CRC, 2005.
- [06] L.J. Gibson and M.F. Ashby. *Cellular solids: structure and properties*. Cambridge Univ Pr, 1997
- [07] LJ Gibson and MF Ashby. *Cellular solids: structure and properties*. Pergamon Press, Oxford, 1988.
- [08] C.P. Chen and R.S. Lakes. Analysis of the structure property relations of foam materials. *Cellular Polymers*, 14:186–202, 1995.
- [09] M. Bouakba, A. Bezazi, THESE DE DOCTORAT
- [10] Liu, Y., & Hu, H. (2010). A review on auxetic structures and polymeric materials. *Scientific Research and Essays*, 5(10), 1052-1063.
- [11] M. Bianchi, S. Frontoni, F. Scarpa, and C.W. Smith. Density change during the manufacturing process of pu-pe open cell auxetic foams. *Physica Status solidi (b)*, 248 (1):30–38, 2011.
- [12] F.A. Costa Oliveira, S. Dias, M. Fátima Vaz, and J. Cruz Fernandes. Behaviour of open-cell cordierite foams under compression. *Journal of the European Ceramic Society*, 26(1-2):179 – 186, 2006.
- [13] H. Zhu, J.F. Knott, and N.J. Mills. Analysis of the elastic properties of open-cell foams with tetrakaidecahedral cells. *Journal of the Mechanics and Physics of the Solids*, 45:319–343, 1997.
- [14] Lim, T.-C. (2014). *Auxetic materials and structures*: Springer.
- [15] F. Scarpa, J.A. Giacomini, A. Bezazi, and W.A. Bullough. Dynamic behavior and damping capacity of auxetic foam pads. *Smart Structures and Materials: Damping and Isolation*.
- [16] F. Cadamagnani, S. Frontoni, M. Bianchi, and F. Scarpa. Compressive uniaxial properties of auxetic open cell PU based foams. *Physica Status Solidi (b)*, 246(9):2118–2123, 2009.
- [17] J. Schwerdtfeger, F. Schury, M. Stingl, F. Wein, R. F. Singer, and C. Korner. Mechanical characterisation of a periodic auxetic structure produced by sebm. *Physica Status Solidi (b)*, 2011.
- [18] J.N. Grima and K.E. Evans. Auxetic behavior from rotating squares. *Journal of Materials Science Letters*, 19(17):1563–1565, 2000.

- [19] N. Gaspar, C.W. Smith, E.A. Miller, G.T. Seidler, and K.E. Evans. Quantitative analysis of the microscale of auxetic foams. *Physica Status Solidi (b)*, 242(3):550–560, 2005.
- [20] Liang, S., & Chen, H. (2006). Investigation on the square cell honeycomb structures under axial loading. *Compos. Struct.*, 72(4), 446-454.
- [21] Yang, W., Li, Z.-M., Shi, W., Xie, B.-H., & Yang, M.-B. (2004). Review on auxetic materials. *J. Mater. Sci.*, 39(10), 3269-3279
- [22] Mir, M., Ali, M. N., Sami, J., & Ansari, U. (2014). Review of mechanics and applications of auxetic structures. *Adv. Mater. Eng*, 2014.
- [23] Yang, W., Li, Z.-M., Shi, W., Xie, B.-H., & Yang, M.-B. (2004). Review on auxetic materials. *J. Mater. Sci.*, 39(10), 3269-3279.
- [24] Ciambella, J., Bezazi, A., Saccomandi, G., & Scarpa, F. (2015). Nonlinear elasticity of auxetic open cell foams modeled as continuum solids. *J. Appl. Phys.*, 117(18), 184902.
- [25] Körner, C., & Liebold-Ribeiro, Y. (2014). A systematic approach to identify cellular auxetic materials. *Smart Mater. Struct.*, 24(2), 025013.
- [26] Chen, L., Liu, C., Wang, J., Zhang, W., Hu, C., & Fan, S. (2009). Auxetic materials with large negative Poisson's ratios based on highly oriented carbon nanotube structures. *Appl. Phys. Lett.*, 94(25), 253111.
- [27] Lira, C., Innocenti, P., & Scarpa, F. (2009). Transverse elastic shear of auxetic multi re-entrant honeycombs. *Compos. Struct.*, 90(3), 314-322.
- [28] Grima, J. N., Gatt, R., Ravirala, N., Alderson, A., & Evans, K. E. (2006). Negative Poisson's ratios in cellular foam materials. *Mater. Sci. Eng., A*, 423(1-2), 214-218.
- [29] Neville, R., Monti, A., Hazra, K., Scarpa, F., Remillat, C., & Farrow, I. (2014). Transverse stiffness and strength of Kirigami zero- ν PEEK honeycombs. *Compos. Struct.*, 114, 30-40.
- [30] Grima, J. N., Attard, D., Gatt, R., & Cassar, R. N. (2009). A Novel Process for the Manufacture of Auxetic Foams and for Their re-Conversion to Conventional Form. *Adv. Eng. Mater.*, 11(7), 533-535.
- [31] Gatt, R., Attard, D., Manicaro, E., Chetcuti, E., & Grima, J. N. (2011). On the effect of heat and solvent exposure on the microstructure properties of auxetic foams: A preliminary study. *Phys. Status Solidi B*, 248(1), 39-44.
- [32] Bianchi, M., Scarpa, F., Banse, M., & Smith, C. (2011). Novel generation of auxetic open cell foams for curved and arbitrary shapes. *Acta Mater.*, 59(2), 686-691.
- [33] Alderson, K., Alderson, A., Ravirala, N., Simkins, V., & Davies, P. (2012). Manufacture and characterisation of thin flat and curved auxetic foam sheets. *Phys. Status Solidi B*, 249(7), 1315-1321.
- [34] Dirrenberger, J., Forest, S., & Jeulin, D. (2013). Effective elastic properties of auxetic microstructures: anisotropy and structural applications. *Int. J. Mech. Mater. Des.*, 9(1), 21-33.
- [35] Sun, Y., & Pugno, N. M. (2013). In plane stiffness of multifunctional hierarchical honeycombs with negative Poisson's ratio sub-structures. *Compos. Struct.*, 106, 681-689.

- [36] Dos Reis, F., & Ganghoffer, J. (2012). Equivalent mechanical properties of auxetic lattices from discrete homogenization. *Comput. Mater. Sci.*, 51(1), 314-321.
- [37] Evans, K. E., & Alderson, A. (2000). Auxetic materials: functional materials and structures from lateral thinking! *Adv. Mater.*, 12(9), 617-628.
- [38] Subramani, P., Rana, S., Ghiassi, B., Figueiro, R., Oliveira, D. V., Lourenco, P. B., & Xavier, J. (2016). Development and characterization of novel auxetic structures based on re-entrant hexagon design produced from braided composites. *Composites Part B*, 93, 132-142.
- [39] Ren, X., Shen, J., Ghaedizadeh, A., Tian, H., & Xie, Y. M. (2015). Experiments and parametric studies on 3D metallic auxetic metamaterials with tuneable mechanical properties. *Smart Mater. Struct.*, 24(9), 095016.
- [40] Gaspar, N., Ren, X., Smith, C. W., Grima, J., & Evans, K. E. (2005). Novel honeycombs with auxetic behaviour. *Acta Mater.*, 53(8), 2439-2445.
- [41] Chan, N., & Evans, K. (1997). Fabrication methods for auxetic foams. *J. Mater. Sci.*, 32(22), 5945-5953.
- [42] P. Subramani, Sohel Rana, Bahman Ghiassi, Raul Figueiro, Daniel V. Oliveira, Paulo B. Lourenco, Jose Xavier, Development and Characterization of Novel Auxetic Structures Based on Re-entrant Hexagon Design Produced from Braided Composites.
- [43] F. Dos Reis, J. F. Ganghofer, Equivalent mechanical properties of auxetic lattices from discrete homogenization, *Computational Materials Science* 51 (2012) 314–321, Elsevier
- [44] Wei Yang, Zhong-Ming Li, Wei Shi, Bang-Hu Xie, Ming-Bo Yang, Review on auxetic materials, *Journal Of Materials Science* 39 (2004)3269-3279.
- [45] A. Sparavigna, Phonons dispersions in auxetic lattices, *Journal of Physics: Conference Series* 92 (2007) 012100.
- [46] Xin Ren, Jianhu Shen, Arash Ghaedizadeh, Hongqi Tian and Yi Min Xie, Experiments and parametric studies on 3D metallic auxetic metamaterials with tuneable mechanical properties,
- [47] Carolin Körner and Yvonne Liebold-Ribeiro, A systematic approach to identify cellular auxetic materials, *Smart Materials and Structures*.
- [48] D. Prall and R.S. Lakes. Properties of a chiral honeycomb with a Poisson's ratio of -1 . *International Journal of Mechanical Sciences*, 39(3):305–314, 1997.
- [49] A. Alderson, K.L. Alderson, D. Attard, K.E. Evans, R. Gatt, J.N. Grima, W. Miller, N. Ravirala, C.W. Smith, and K. Zied. Elastic constants of 3-, 4- and 6-connected chiral and anti-chiral honeycombs subject to uniaxial in-plane loading. *Composites Science and Technology*, 70(7):1042 – 1048, 2010.
- [50] Mousanezhad, D., Haghpanah, B., Ghosh, R., Hamouda, A. M., Nayeb-Hashemi, H., & Vaziri, A. (2016). Elastic properties of chiral, anti-chiral, and hierarchical honeycombs: a simple energy-based approach. *Theor. Appl. Mech. Lett.*, 6(2), 81-96.
- [51] Chen, Y., Scarpa, F., Liu, Y., & Leng, J. (2013). Elasticity of anti-tetrachiral anisotropic lattices. *Int. J. Solids Struct.*, 50(6), 996-1004

- [52] Y.J. Chen, F. Scarpa, Y.J. Liu, J.S. Leng, Elasticity of anti-tetrachiral anisotropic lattices, *International Journal of Solids and Structures* 50 (2013) 996–1004.
- [53] Liu, Y., & Hu, H. (2010). A review on auxetic structures and polymeric materials. *Scientific Research and Essays*, 5(10), 1052-1063.
- [54] Grima, J. N., Jackson, R., Alderson, A., & Evans, K. E. (2000). Do zeolites have negative Poisson's ratios? *Advanced materials*, 12(24), 1912-1918.
- [55] Grima, J. N., Chetcuti, E., Manicaro, E., Attard, D., Camilleri, M., Gatt, R., & Evans, K. E. (2011). On the auxetic properties of generic rotating rigid triangles. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 468(2139), 810-830.
- [56] Grima, J. N., Zammit, V., Gatt, R., Alderson, A., & Evans, K. (2007). Auxetic behaviour from rotating semi-rigid units. *physica status solidi (b)*, 244(3), 866-882.
- [57] Grima, J. N., Manicaro, E., & Attard, D. (2010). Auxetic behaviour from connected different-sized squares and rectangles. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 467(2126), 439-458.
- [58] Alderson, A., & Evans, K. E. (2002). Molecular origin of auxetic behavior in tetrahedral framework silicates. *Physical review letters*, 89(22), 225503.
- [59] Smith, C. W., Grima, J., & Evans, K. (2000). A novel mechanism for generating auxetic behaviour in reticulated foams: missing rib foam model. *Acta Materialia*, 48(17), 4349-4356.
- [60] Seyedi, M., Kibret, B., Lai, D. T., & Faulkner, M. (2013). A survey on intrabody communications for body area network applications. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 60(8), 2067-2079.
- [61] Lorna J. Gibson and Michael F. Ashby, *Cellular solids, Structures and properties*-second edition, Cambridge Solid State Science Series.
- [62] Airoidi, A., Crespi, M., Quaranti, G., & Sala, G. (2012). Design of a morphing airfoil with composite chiral structure. *Journal of Aircraft*, 49(4), 1008-1019.
- [63] <https://www.wikidata.org>
- [64] Antoine Besse, « Nopal », sur Futura-Sciences, octobre 2018 (consulté le 7 octobre 2018).
- [65] Delphine Cartier, « Cladode », *Encyclopedia Universalis*, 24 février 2019. URL : <http://www.universalis.fr/encyclopedia/cladode/>
- [66] Bernard Boullard, *Dictionnaire : Plantes et Champignons*, D. Boeck, 1997 (ISBN 2909455998), p. 187 s.v. Cladode et 626 s.v. Phylloclade.
- [67] H. Nakayama, T. Yamaguchi et H. Tsukaya, « Acquisition and diversification of cladodes: leaf-like organs in the genus *Asparagus* », *The Plant Cell*, vol. 24, no 3, 2012
- [68] A. Bezazi, F. Scarpa, and C. Remilat. A novel centre symmetric honeycomb. *Composite structure*, 71:356-364, 2005
- [69] Prall, D., & Lakes, R. (1997). Properties of a chiral honeycomb with a Poisson's ratio of—1. *International Journal of Mechanical Sciences*, 39(3), 305-314.

- [70] D.U. Yang, S. Lee, F.Y. Huang: Geometric effects on micropolar elastic honeycomb structure with negative Poisson's ratio using the finite element method; *J Finite Elements in Analysis and Design*. 39 (2003)187–205.
- [71] Abderrezak Bezazi, Fabrizio Scarpa, Chrystel Remillat, A novel centre symmetric structure composite structure, *science direct, Composite Structures* 71 (2005) 356–364.
- [72] Blumenfeld, R. & Edwards, S.F. *J Supercond Nov Magn* (2012) 25: 565. <https://doi.org/10.1007/s10948-012-1464-x>
- [73] Gonella, S., & Ruzzene, M. (2008). Homogenization and equivalent in-plane properties of two-dimensional periodic lattices. *International Journal of Solids and Structures*, 45(10), 2897-2915.
- [74] Alderson, A., Alderson, K., Chirima, G., Ravirala, N., & Zied, K. (2010). The in-plane linear elastic constants and out-of-plane bending of 3-coordinated ligament and cylinder-ligament honeycombs. *Compos. Sci. Technol.*, 70(7), 1034-1041.
- [75] Silva, M. J., Hayes, W. C., & Gibson, L. J. (1995). The effects of non-periodic microstructure on the elastic properties of two-dimensional cellular solids. *Int. J. Mech. Sci.*, 37(11), 1161-1177.
- [76] Lakes, R. (1987). Foam structures with a negative Poisson's ratio. *Science*, 235, 1038-1041.
- [77] S. TIMOSHENKO, *Strength of materials part I*, D. VAN NOSTRAND COMPANY, Inc.
- [78] EGOR P. POPOV, *Engineering mechanics of solids*, PRENTICE HALL.
- [78] E. J. HEARN, *MECHANICS OF MATERIALS 1*, Butterworth-Heinemann.
- [79] Teik -Cheng Lim, *Materials and structures*, Engineering Materials, Springer.
- [80] David W.A. Rees, *Mechanics of Solids and Structures*, Imperial College Press.
- [81] Zi-Xing Lu, Xiang Li, Zhen-Yu Yang, Fan Xie, Novel structure with negative Poisson's ratio and enhanced Young's modulus, Institute of Solid Mechanics, Beihang University, Beijing 100191, PR China.
- [82] M. K. Khan, T. Baig, *Materials Science and Engineering A* 539:135–142 · March 2012.
- [83] David W.A. Rees, *Mechanics of Solids and Structures*, Imperial College Press.
- [84] L. P. Kollar, G. S. Springer; *MECHANICS OF composites structures*. Cambridge University Press, 2003.
- [85] Masters, I., & Evans, K. (1996). Models for the elastic deformation of honeycombs. *Compos. Struct.*, 35(4), 403-422.
- [86] Khan, M., Baig, T., & Mirza, S. (2012). Experimental investigation of in-plane and out-of-plane crushing of aluminum honeycomb. *Mater. Sci. Eng., A*, 539, 135-142.
- [87] Lu, Z.-X., Li, X., Yang, Z.-Y., & Xie, F. (2016). Novel structure with negative Poisson's ratio and enhanced Young's modulus. *Compos. Struct.*, 138, 243-252.
- [88] Lakes, R. (1993). Advances in negative Poisson's ratio materials, *Adv. Mater.*, 5(4), 293-296.

- [89] Lakes, R., & Elms, K. (1993). Indentability of conventional and negative Poisson's ratio foams. *J. Comps.. Mater.*, 27(12), 1193-1202.
- [90] Martz, E. O., Lakes, R. S., & Park, J. B. (1996). Hysteresis behaviour and specific damping capacity of negative Poisson's ratio foams. *Cell. Polym.*, 15(5), 349-364.
- [91] Theoretical references, Ansys® 18.1;
- [92] Berthelot, J.-M., & Ling, F. F. (1999). *Composite materials: mechanical behavior and structural analysis*: Springer.
- [93] EVER J. Barbero, *Finite Element Analysis Of Composite Materials Using ANSYS*, CRC Press Taylor & Francis Group.
- [94] Shewchuk, J., Dey, T. K., & Cheng, S.-W. (2016). *Delaunay mesh generation*: Chapman and Hall/CRC.
- [95] Howes, F. (1982). *Introduction to Perturbation Techniques (Ali Hasan Nayfeh)*: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [96] Jean Gallier, *Notes on Convex Sets, Polytopes, Polyhedra, Combinatorial Topology, Voronoi Diagrams and Delaunay Triangulations*, University of Pennsylvania Philadelphia, January 30, 2009
- [97] Yang, D., Lee, S., & Huang, F. (2003). Geometric effects on micropolar elastic honeycomb structure with negative Poisson's ratio using the finite element method. *Finite elements in analysis and design*, 39(3), 187-205.
- [98] T. Stolarski Y. Nakasone S. Yoshimoto, *ENGINEERING ANALYSIS WITH ANSYS SOFTWARE*, B.H. Butterworth-Heinemann is an imprint of Elsevier.
- [99] W. E. Warren and A. M. Kraynik. Linear elastic behavior of a low-density kelvin foam with open cells. *Journal of Applied Mechanics*, 64(4):787–794, 1997.
- [100] Hilyard, N., & Cunningham, A. (2012). *Low density cellular plastics: physical basis of behaviour*: Springer Science & Business Media.
- [101] Baughman, R. H., Shacklette, J. M., Zakhidov, A. A., & Stafström, S. (1998). Negative Poisson's ratios as a common feature of cubic metals. *Nature*, 392(6674), 362.
- [102] Yang, W., Li, Z.-M., Shi, W., Xie, B.-H., & Yang, M.-B. (2004). Review on auxetic materials. *Journal of materials science*, 39(10), 3269-3279.
- [103] Buyun Su, Zhiwei Zhou, Zhihua Wang, Zhiqiang Li, Xuefeng Shu ;Effect of defects on creep behavior of cellular materials, *ELSEVIER Material Letters*, Volume 136 , 1 December 2014, Pages 37-40.
- [104] Xu, K., Lai, G., Zha, Z., Pan, S., Chen, H., & Wang, Z. (2012). A highly anti-selective asymmetric Henry reaction catalyzed by a chiral copper complex: applications to the syntheses of (+)-spisulosine and a pyrroloisoquinoline derivative. *Chemistry—A European Journal*, 18(39), 12357-12362.
- [105] Khan, A. A., Aoki, S., Boyd, G., Burkhalter, R., Ejiri, S., Fukugita, M., . . . Kanaya, K. (2002). Light hadron spectroscopy with two flavors of dynamical quarks on the lattice. *Physical Review D*, 65(5), 054505.

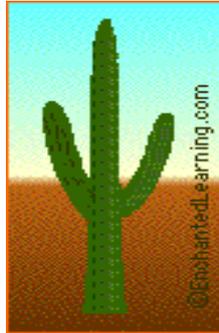
- [106] Ma, T.-X., Wang, Y.-S., Su, X.-X., & Wang, Y.-F. (2012). Elastic band structures of two-dimensional solid phononic crystal with negative Poisson's ratios. *Physica B: Condensed Matter*, 407(21), 4186-4192.
- [107] Mousanezhad, D., Haghpanah, B., Ghosh, R., Hamouda, A. M., Nayeb-Hashemi, H., & Vaziri, A. (2016). Elastic properties of chiral, anti-chiral, and hierarchical honeycombs: a simple energy-based approach. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 6(2), 81-96.
- [108] www.plastics.ulprospector.com, Acrylique (Acrylique) Propriétés types Generic Acrylic PMMA).
- [109] Rotinat, R., bi Tié, R., Valle, V., & Dupré, J. C. (2001). Three Optical Procedures for Local Large-Strain Measurement. *Strain*, 37(3), 89-98.
- [110] Bretagne, N., Valle, V., & Dupré, J. (2005). Development of the marks tracking technique for strain field and volume variation measurements. *NDT and E Int*, 38(4), 290-298.
- [111] Arenas, J. P., & Crocker, M. J. (2010). Recent trends in porous sound-absorbing materials. *Sound & vibration*, 44(7),12-18.
- [112] Manigold, A. (1996). Panel that absorbs acoustic energy at low, medium and high frequencies, particularly at frequencies ranging from 400 Hz to 5,000 Hz: Google Patents.
- [113] Banerjee, A., Das, R., & Calius, E. P. (2018). Waves in Structured Mediums or Metamaterials: A Review. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 1-30.
- [114] Safullah Timorian, Francesco Franco, Morvan Ouisse, Sergio Rosa, Noureddine Bouhaddi. Investigation for the analysis of the vibrations of quasiperiodic structures. *International Conference on Noise and Vibration engineering*, Sep 2018, Leuven, Belgium. fhal-02130079ff;
- [115] Billon, K., Zampetakis, I., Scarpa, F., Ouisse, M., Sadoulet-Reboul, E., Collet, M., . . . Hetherington, A. (2017). Mechanics and band gaps in hierarchical auxetic rectangular perforated composite metamaterials. *Composite structures*, 160, 1042-1050.
- [116] Spadoni, A., Gonella, S., Ruzzene, M., & Scarpa, F. (2007). Wave propagation and band-gap characteristics of chiral lattices. Paper presented at the ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference September.
- [117] Velasco, V., & Zárate, J. (2001). Elastic waves in quasiperiodic structures. *Progress in Surface Science*, 67(1-8), 383-402.
- [118] Zárate, J., Fernández-Alvarez, L., & Velasco, V. (1999). Transverse elastic waves in Fibonacci superlattices. *Superlattices and microstructures*, 25(3), 519-526.
- [119] Velasco, V., Pérez-Alvarez, R., & Garcia-Moliner, F. (2002). Some properties of the elastic waves in quasiregular heterostructures. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 14(24), 5933.
- [120] Collet, M., Ouisse, M., Ruzzene, M., & Ichchou, M. (2011). Floquet–Bloch decomposition for the computation of dispersion of two-dimensional periodic, damped mechanical systems. *International Journal of Solids and Structures*, 48(20), 2837-2848.
- [121] Palma, G., Mao, H., Burghignoli, L., Göransson, P., & Iemma, U. (2018). Acoustic metamaterials in aeronautics. *Applied Sciences*, 8(6), 971.

- [122] Zhang, X., & Liu, Z. (2004). Negative refraction of acoustic waves in two dimensional phononic crystals. *Applied Physics Letters*, 85(2), 341-343.
- [123] Ding, C., Hao, L., & Zhao, X. (2010). Two-dimensional acoustic metamaterial with negative modulus. *Journal of Applied Physics*, 108(7), 074911.
- [124] Fok, L., & Zhang, X. (2011). Negative acoustic index metamaterial. *Physical Review B*, 83(21), 214304.
- [125] Yang, S., Page, J. H., Liu, Z., Cowan, M. L., Chan, C. T., & Sheng, P. (2004). Focusing of sound in a 3D phononic crystal. *Physical review letters*, 93(2), 024301.
- [126] D. Bigoni, A.B. Movchan, Statics and dynamics of structural interfaces in elasticity, *International Journal of Solids and Structures* 39 (2002) 4843–4865.
- [127] Brun, M., Movchan, A. B., & Jones, I. S. (2013). Phononic band gap systems in structural mechanics: finite slender elastic structures and infinite periodic waveguides. *Journal of Vibration and Acoustics*, 135(4), 041013.
- [128] Brun, M., Guenneau, S., & Movchan, A. B. (2009). Achieving control of in-plane elastic waves. *Applied Physics Letters*, 94(6), 061903.
- [129] Del Vescovo, D., & Giorgio, I. (2014). Dynamic problems for metamaterials: review of existing models and ideas for further research. *International Journal of Engineering Science*, 80, 153-172.
- [130] Wei, J., & Petyt, M. (1997). A method of analyzing finite periodic structures, Part 1: Theory and examples. *Journal of sound and vibration*, 202(4), 555-569.
- [131] Jean-François Chêne, COURS DE PHYSIQUE DE LA SECTION DTS IMRT, LYCÉE GUY MOLLET D'ARRAS ;
- [132] Born, M.; Wolf, E., *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Oxford, Pergamon Press, 1964;
- [133] Allan G. Piersol, Thomas L. Paez, HARRIS' SHOCK AND VIBRATION HANDBOOK Sixth Edition, McGraw-Hill HANDBOOKS;
- [134] J. F. Allard and N. Atalla, *Propagation of Sound in Porous Media: Modelling Sound Absorbing Materials*, Second Edition, John Wiley & Sons, 2009;
- [133] Duan, Y., Luo, J., Wang, G., Hang, Z. H., Hou, B., Li, J., . . . Lai, Y. (2015). Theoretical requirements for broadband perfect absorption of acoustic waves by ultra-thin elastic meta-films. *Scientific reports*, 5, 12139.
- [134] Bloch, F. (1929). Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern. *Zeitschrift für physik*, 52(7-8), 555-600.
- [135] Brillouin L (2003) *Wave propagation in periodic structures: electric filters and crystal lattices*. Courier Corporation, North Chelmsford
- [136] Kittel C (2005) *Introduction to solid state physics*. Wiley, New York.

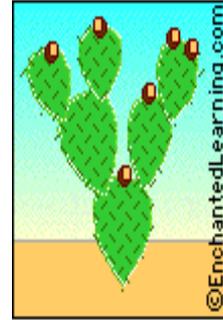
- [137] Esquivel-Sirvent, R., & Coccoletzi, G. (1994). Band structure for the propagation of elastic waves in superlattices. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 95(1), 86-90.
- [138] Djafari-Rouhani, B., Maradudin, A., & Wallis, R. (1984). Rayleigh waves on a superlattice stratified normal to the surface. *Physical Review B*, 29(12), 6454.
- [139] Aynaou, H., Velasco, V., Nougaoui, A., El Boudouti, E., Djafari-Rouhani, B., & Bria, D. (2003). Application of the phase time and transmission coefficients to the study of transverse elastic waves in quasiperiodic systems with planar defects. *Surface science*, 538(1-2), 101-112.
- [140] Ma, T.-X., Wang, Y.-S., Su, X.-X., & Wang, Y.-F. (2012). Elastic band structures of two-dimensional solid phononic crystal with negative Poisson's ratios. *Physica B*, 407(21), 4186-4192.
- [141] Ying Lu, DEVELOPPEMENT DE PANNEAUX HYBRIDES PASSIFS/ACTIFS POUR L'ACOUSTIQUE, THESE, ECOLE CENTRALE DE LYON, 2010.

Revue bibliographique sur les cactus

Le mot cactus vient du [grec ancien](#) *káktos*, désignant le [chardon](#). Il a été utilisé comme le nom du premier genre de ces plantes par [Carl von Linné](#), avant que de nombreux autres noms de genres en soient séparés. Quand le nom est latinisé, le pluriel est *cacti*. Cette forme est adoptée notamment en anglais. Le français, qui préfère ne pas utiliser les pluriels latins, dit « cactus » au pluriel comme au singulier [3,5].



a)



b)

Fig. I-13 : Plantes de cactus : a) Cactus Sauaro (*Carnegiea gigantea*),
b) Figue de Barbarie (genre *Opuntia*)[3].

Les Cactus, ou encore Cactacées (*Cactaceae*) forment une [famille](#) de [plantes à fleurs](#). Ce sont presque toutes des [plantes grasses](#) ou [plantes succulentes](#), c'est-à-dire des [plantes xérophytes](#) qui stockent dans leurs tissus des réserves de « suc » pour faire face aux longues périodes de sécheresse.

Il ne faut pas confondre cactus et [plante succulente](#) : toutes les plantes succulentes ne sont pas des cactus. Ce sont des familles de plantes qui ont adopté les mêmes méthodes de lutte contre les périodes de sécheresse, comme les [Asclepiadaceae](#) ou les [Crassulaceae](#).

Certaines plantes de ces autres familles, par convergence des formes d'espèces soumises aux mêmes contraintes, ressemblent fortement aux cactus. C'est le cas par exemple des [euphorbes](#) cactiformes comme [Euphorbia canariensis](#)[5].

Pour distinguer les vrais cactus des plantes qui leur ressemblent, il faut se reporter aux critères d'appartenance à la famille des *Cactaceae*. L'identification se fait par la présence d'[aréoles](#), et, comme plus généralement en botanique, par les fleurs et les fruits.

Contrairement aux croyances populaires, les cactus ne sont pas considérés comme étant des arbres. Les cactus couvrent un large éventail de formes et de tailles. On en trouve des sphériques, cylindriques, en forme de pilier, avec des feuilles pointues ou en forme de raquettes appelées [cladodes](#).

Les cactus poussent principalement dans les régions arides du globe, tel que les déserts. On les retrouve au Mexique, aux États-Unis ([désert des Mojaves](#)) ainsi que dans certaines régions du [Sahara](#) et d'Australie[3] .

1 Classification :

La famille des Cactaceae est une famille de plantes [dicotylédones](#) qui comprend environ 2500 espèces réparties en près de 90 [genres](#). Dans le langage courant, le mot cactus désigne souvent le [figuier de Barbarie](#) (*Opuntia ficus-indica*), plante naturalisée très commune sur les bords de la [Méditerranée](#)[4].

2 Critères de détermination [3,4] :

L'appartenance à la famille des Cactaceae se détermine par trois principaux critères :

- Les points végétatifs sont des [aréoles](#), c'est-à-dire des sortes de dépressions dans l'[épiderme](#), garnis de laine ou de duvet leur donnant l'aspect de petits coussins, d'où sont issus les segments ou rejets, les [fleurs](#) et les [feuilles](#) réduites que sont les [épines](#), les [glochides](#)

C'est le critère le plus employé par les amateurs, d'abord parce qu'il n'est pas nécessaire d'attendre la floraison et la fructification pour les observer, ensuite parce que, contrairement aux deux autres critères, les aréoles n'existent dans aucune autre famille de plantes.

- L'[ovaire](#) doit être infère, c'est-à-dire qu'il doit être situé sous les [pièces florales](#) (sauf chez quelques cactus très primitifs comme [Pereskia aculeata](#)).
- Le [fruit](#) doit être une baie à une seule loge, il n'existe pas de cloisons internes séparant les [graines](#) ou groupes de graines.
- Un critère d'exclusion est la présence de latex à la cassure, il permet d'éliminer les plantes du genre [euphorbe](#).

Les [agaves](#), les [Lithops](#), les [euphorbes](#) et les [Pachypodium](#) ne sont pas des cactus.

3 Morphologie [3,5]

On peut distinguer six formes différentes :

- arborescentes : comparables à un arbre avec des branches, telles que les [carnegiea](#) ;
- arbustives : idem, mais avec des tiges plus fines ;
- colonnaires : sans bras, telles que les espèces du genre [Cereus](#) ;

- globulaires, avec des formes sphériques, voire cylindriques ;
- épiphytes retombantes, pour les quelques espèces de cactus épiphytes ;
- grimpantes : pour un très petit nombre d'espèces ;
- à articles aplatis (ou [cladodes](#)) communément appelés "raquettes" telles que les espèces du genre [Opuntia](#).

Ce sont des [plantes herbacées](#) ou des [arbustes](#), généralement à forme végétative très particulière, avec la fonction [chlorophyllienne](#) transférée aux [tiges](#). Souvent [épineux](#), pérennes, le plus souvent [succulents](#), les cactus sont parfois [épiphytes](#) ou [grimpants](#). L'aspect actuel des cactus s'explique principalement par l'adaptation aux conditions de [sécheresse](#), à l'origine du développement de la fonction de stockage et de la réduction des surfaces d'évaporation.

La fonction de stockage s'est traduite par un épaississement de la tige, et, pour quelques espèces, par le développement de [racines](#) tubéreuses (*Pterocactus tuberosus* par exemple). Elle explique aussi l'apparition des côtes ou une disposition des mamelons en spirale, qui permettent, un peu comme sur un [accordéon](#), la dilatation et la rétraction du corps de la plante au gré des périodes de [pluies](#) et de [sécheresse](#), sans déchirure de l'[épiderme](#). La réduction des surfaces d'évaporation s'est traduite par un épaississement de l'[épiderme](#), parfois même recouvert d'une sorte de cire, une diminution du nombre de [stomates](#) ([pores](#) permettant la respiration), et surtout, chez beaucoup d'espèces, la disparition des feuilles (voir [évapotranspiration](#)).

Quant aux [épines](#), leur fonction est multiple : protection contre les [animaux](#), captation de la [rosée](#), protection de l'[épiderme](#) contre les ardeurs du [Soleil](#), le [vent](#) desséchant ou le [froid](#) d'altitude.

Les fleurs de cactus sont parfois de grande taille. Comme les épines et les branches, elles poussent sur les [aréoles](#). Beaucoup de cactus fleurissent la nuit. Leurs fleurs sont blanches ou très claires. Ils sont pollinisés par des papillons ou autres insectes nocturnes ou parfois par de petits animaux tels que les [chauves-souris](#). Les fruits de certaines espèces sont comestibles ([figuier de Barbarie](#)). Les cactus peuvent être regroupés en cinq grands types [morphologiques](#) :

- Cactus primitifs – Pas ou peu succulents. Ils ont gardé l'aspect d'[arbustes](#) classiques et leurs vraies [feuilles](#) : [Pereskia](#), [Pereskiaopsis](#), [Quiabentia](#).

- Oponces – Formés de segments épais en forme de raquettes (cladodes), parfois au sommet d'un tronc (Brasiliopuntia, Consolea...), de segments en forme de cylindres (Austrocylindropuntia, Cylindropuntia, Grusonia...) ou de petites boules plus ou moins allongées (Maihueiopsis, Tephrocactus...), ces cactus ont, pour la plupart, conservé des feuilles réduites et cylindriques, tombant rapidement.
- Cactus colonnaires – Formés de tiges épaisses et allongées, dressées à rampantes ou retombantes, leurs aréoles sont disposées le long de côtes (Escontria...).
- Cactus globuleux – Ils sont formés de tiges sphériques pouvant s'allonger, aux aréoles disposées sur des côtes (Astrophytum...) ou sur des mamelons en spirale (Mammillaria...). Chez les plus évolués, l'aréole s'est divisée, celle située à l'axile du mamelon produisant fleurs et rejets, celle au sommet du mamelon produisant les épines. Des formes intermédiaires de ce phénomène, appelé déhiscence sérielle, présentent un sillon reliant les deux parties de l'aréole en cours de division.
- Cactus épiphytes à tiges aplaties – Ces cactus poussant dans des zones plus humides ont réduit leur capacité de stockage et leurs tiges aplaties ressemblent aux feuilles qu'elles remplacent dans leur fonction chlorophyllienne (Schlumbergera, cactus-orchidées...)



Oponce



Cactus colonnaires

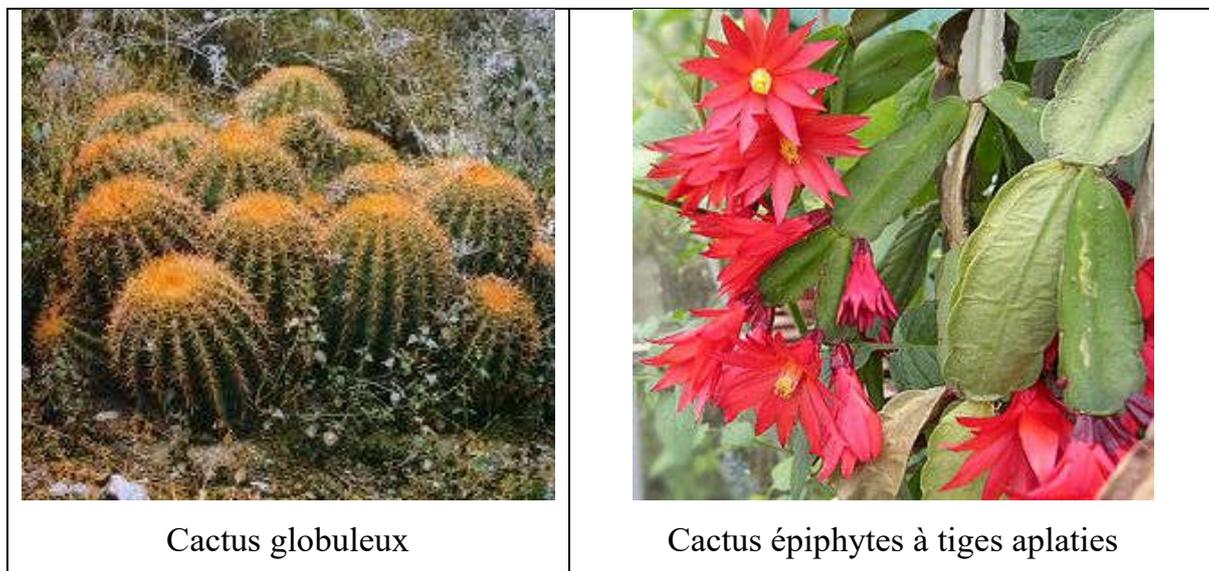


Fig. I-14 : Différents types de plantes de cactus [3].

4 Répartition et utilisation [3]:

La vallée de Tehuacán (Mexique) est l'un des plus riches sites de cactus dans le monde. Beaucoup d'autres cactus (et notamment les Opuntias) se sont acclimatés sur les autres continents après avoir été introduits par l'homme.

Le principal usage est de servir de plante d'ornement, en serre dans les régions tempérées, en extérieur dans les régions chaudes et sèches, notamment dans les régions frappées de restrictions d'arrosage comme certaines régions d'Australie.

Dans des régions pauvres (telles que certaines du Kenya), des espèces sont utilisées en tant que clôture pour éviter la divagation des animaux. Elles peuvent aussi éviter l'intrusion de voleurs et sécuriser une fenêtre si elles sont plantées en dessous. L'Opuntia a été importée en Australie au XIX^e siècle pour être utilisée en tant que haies naturelles et développer l'élevage des Cochenilles (parasite de la famille des Coccoidea comptant aujourd'hui huit mille cinq cents espèces et qui infeste à la fois le feuillage, les racines, les rameaux, les tiges ou encore les troncs.) en vue de produire un colorant rouge naturel. Ces cactus sont toutefois devenus envahissants et, comme ils ne sont pas consommés par les herbivores australiens, elle a rendu 40 000 km² de terres agricoles improductives¹. Pour limiter les effets négatifs de ces cactus, la mouche Cactoblastis cactorum, dont les larves se nourrissent des fruits des Opuntia, a été introduite dans les années 1920.

Les troncs de grands cactus morts sont parfois utilisés comme bois de construction. Leur structure ligneuse et l'air sec les rendent très solides.

Certains cactus peuvent servir de combustibles. Les épines de certaines espèces telles que Trichocereus pasasana atteignent 10 cm et servent d'aiguilles pour des dentelles ou du tricot.

5 Description de l'Opuntia []:

L'Opuntia est un nom qui a été attribué à une plante précédemment appelée «figuier d'Inde». Elle constitue un des principaux [genres](#) de la famille des [cactus](#) avec près de 250 [espèces](#). On trouve les Opuntias ou oponces du nord au sud du continent américain, sous presque tous les climats.

Ces plantes poussent avec des articles plats en forme de raquettes appelés [cladodes](#) et portent de grandes et fortes épines assurant un rôle défensif, mais aussi des petites épines minces comme des cheveux appelées [glochides](#). Ces petites épines barbées se détachent facilement et s'attachent dans la peau en l'irritant. Elles recouvrent aussi les fruits. Les Opuntia sont parfois appelés ' cactus raquettes ' en raison de la forme de leurs cladodes.



Fig. I-15 : Fruits de plante de cactus

6 Cladodes [4,5,,7]:

Les termes cladode et phylloclade sont formés à partir du grec ancien : klados « branche » ; -ode, -(eïdos) « forme, aspect » ; et phyllo, (fullon) « feuille ». Le cladode est un rameau court à croissance définie, formé d'un seul entrenœud, simulant parfaitement une feuille et pouvant être confondu avec elle. Le cladode représente une des adaptations de la [tige](#) les plus poussées aux fonctions de [nutrition](#), d'assimilation chlorophyllienne et de [respiration](#), fonctions dévolues habituellement aux feuilles.[7]



Fig.I-1 : Gros plan de cladodes.

On réserve le nom de phylloclades à des rameaux constitués de plusieurs entrenœuds aplatis. Dans certains cas, la tige principale et tous ses rameaux sont aplatis, comme chez les figuiers de Barbarie (Cactacées).

Les cladodes/phylloclades assurant la photosynthèse, les feuilles sont généralement absentes, discrètes ou très réduites, en forme d'écailles ou d'épines plus ou moins aplaties, parfois avec une durée de vie très brève.



Fig. I-1 : Cladode dénudé, noter la structure hexagonale sous-jacente.

Les cladodes larges et aplatis imitent parfaitement la forme d'une feuille. Les « vraies » feuilles, en forme de minuscules écailles ou épines situées aux extrémités des cladodes, ne sont pas photosynthétiques. La photo I-18 affiche la structure hexagonale sous-cutannée d'un cladode. Cette forme hexagonale de la structure est à l'origine de l'intérêt suscité par cette recherche.

Méthode de la matrice de transfert

1 La matrice de transfert de la couche d'air

La figure IV-04; affiche une onde plane normale à une couche d'air d'épaisseur ℓ , les ondes acoustiques I et R au point 1 sont respectivement les ondes incidentes et réfléchies le long de la direction z . P_1, v_1 représentent la pression acoustique totale et la vitesse normale au point 1 ; P_2, v_2 représentent la pression acoustique totale et la vitesse normale au point 2.

Lorsque l'onde acoustique transmet dans la couche d'air du point 1 au point 2, nous avons :

$$\begin{cases} P_1 = I + R \\ v_1 = \frac{1}{Z_0}(I - R) \end{cases} \quad (1)$$

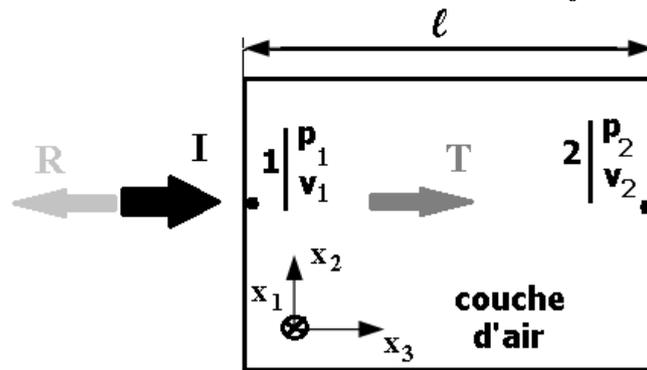


Fig. IV-04 : Modèle d'une couche d'air.

$$\begin{cases} P_2 = Ie^{-jk_0\ell} + Re^{jk_0\ell} \\ v_2 = \frac{1}{Z_0}(Ie^{-jk_0\ell} - Re^{jk_0\ell}) \end{cases} \quad (2)$$

Ici, $Z_0 = \rho_0 c_0$, $k_0 = \omega/c_0$, ρ_0, c_0 sont respectivement la densité et la vitesse du son de l'air. Après quelques manipulations mathématiques, l'éq. (2-54) peut être exprimé par :

$$\begin{cases} P_1 = P_2 \cos k_0 \ell + jZ_0 v_2 \sin k_0 \ell \\ v_1 = \frac{1}{Z_0}(jP_2 \sin k_0 \ell + Z_0 v_2 \cos k_0 \ell) \end{cases} \quad (3)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_0 \ell & jZ_0 \sin k_0 \ell \\ j \sin k_0 \ell / Z_0 & \cos k_0 \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

La matrice de transfert de la couche d'air est donc :

$$T_{air} = \begin{bmatrix} \cos k_0 \ell & jZ_0 \sin k_0 \ell \\ j \sin k_0 \ell / Z_0 & \cos k_0 \ell \end{bmatrix} \quad (5)$$

2 La matrice de transfert de matériau poreux

Une onde plane normale se transmet dans un matériau poreux d'épaisseur l , comme le montre la Fig.2-4.

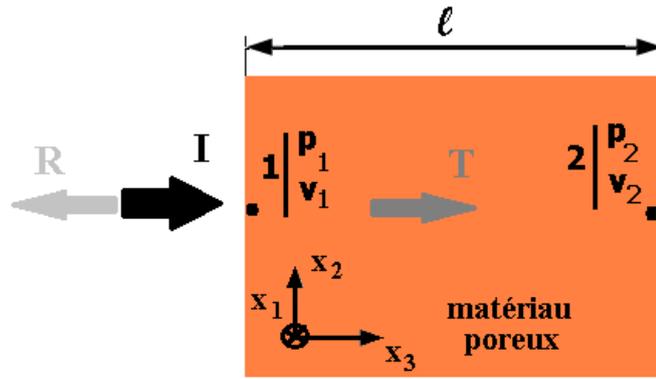


Fig. IV- : Modèle d'une couche poreuse (matériau poreux).

Supposons que le matériau poreux soit rigide, sa matrice de transfert peut être écrite sous la forme Eq. (2-59) en modifiant l'impédance de l'air Z_0 en impédance du matériau poreux Z_c , selon la théorie de Lafarge-Allard [130].

$$T_{po} = \begin{bmatrix} \cos k_c \ell & jZ_c \sin k_c \ell \\ jsin k_c \ell / Z_c & \cos k_c \ell \end{bmatrix} \quad (6)$$

Ici, Z_c , k_c sont respectivement l'impédance et le nombre d'onde du matériau poreux, détaillés comme suit. Éq. (2-59) est la matrice de transfert du matériau poreux.

Ici, le matériau poreux est supposé se comporter comme un fluide équivalent visco-thermique et supposé avoir un cadre rigide, soit en raison de son très haut module de densité ou d'élasticité, soit en raison de ses conditions de fonctionnement (lorsqu'il est placé sur une paroi rigide, par exemple). Dans cette situation, les ondes acoustiques ne peuvent se propager que dans l'air contenu dans les pores du matériau. En raison des effets thermiques et visqueux se produisant dans les pores du milieu, certaines ondes acoustiques sont diffusées sous forme de chaleur et l'énergie acoustique est ensuite absorbée. Pour obtenir l'impédance Z_c et le nombre d'ondes k_c du milieu poreux, la théorie de Lafarge-Allard requiert cinq paramètres intrinsèques invariants et indépendants, définis ci-dessous [xx].

Les dépendances de fréquence effective et de module de masse dans la théorie de Lafarge-Allard [130] sont exprimées comme suit :

$$\rho_e(\omega) = \alpha_\infty \rho_0 \left[1 + \frac{\sigma \phi}{j\omega \rho_0 \alpha_\infty} \left(1 + \frac{4j\alpha_\infty^2 \eta \rho_0 \omega}{\sigma^2 \Lambda^2 \phi^2} \right)^{1/2} \right] \quad (7)$$

$$K(\omega) = \frac{\gamma P_0}{\gamma - (\gamma - 1) \left[1 + \frac{8\eta}{j\omega \Lambda^2 Pr \rho_0} \left(1 + \frac{j\omega \Lambda^2 Pr \rho_0}{16\eta} \right)^{1/2} \right]^{-1}} \quad (8)$$

Ici, $Pr = 0.9660$ est le nombre de Prandtl obtenu par l'expression

$Pr = \nu / \alpha$, avec ν : viscosité cinématique (m^2/s) et $\alpha = \lambda / \rho c_p$, avec λ : conductivité thermique ($w/m.k$) et ρ : masse volumique en (kg/m^3) et c_p : capacité thermique massique à pression constante ($J/kg.k$) ou $Pr = \mu c_p / \lambda$, avec μ : viscosité dynamique (Pas) ou ($kg/m.s$), $\mu = \nu / \rho$ et γ le taux de chaleur spécifique. Par conséquent, dans le procédé à matrice diffusante, l'impédance Z_c et le nombre d'ondes k_c du

Le matériau poreux est calculé par la masse volumique effective $\rho_e(\omega)$ et le module global $K(\omega)$, exprimé comme :

$$Z_c(\omega) = \sqrt{\rho_e(\omega) K(\omega)}, \quad k_c = \omega \sqrt{\frac{\rho_e(\omega)}{K(\omega)}} \quad (9)$$

2.2.3 La matrice de transfert d'une plaque élastique

Une onde plane normale transmet à travers une plaque élastique du point 1 au point 2, comme indiqué à la Fig.2-5. P_1 , v_1 représentent la pression acoustique totale et la vitesse normale au point 1 ; P_2 , v_2 représentent la pression acoustique totale et la vitesse normale au point 2 ; Z_p , v_p représentent l'impédance et la vitesse normale de la plaque élastique.

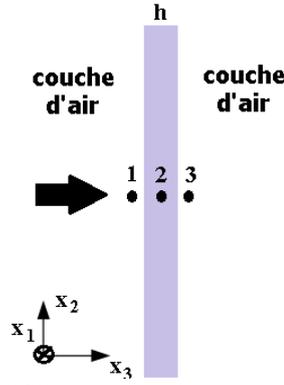


Fig. IV- : Modèle d'une plaque solide élastique.

Selon la seconde loi de Newton et la continuité de la vitesse normale à l'interface, nous pouvons obtenir les expressions suivantes

$$\begin{cases} P_1 - P_2 = Z_p v_p \\ v_p = v_1 = v_2 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \{P_1\} \\ \{v_1\} \end{cases} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} \{P_2\} \\ \{v_2\} \end{cases}$$

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

Les termes de la matrice de transfert sont liés aux termes de la matrice d'impédance par :

$$T_{11} = Z_{11}/Z_{21} \quad T_{12} = Z_{12} - Z_{22}/Z_{21}$$

$$T_{21} = 1/Z_{21} \quad T_{22} = -Z_{22}/Z_{21}$$

La matrice d'impédance : $\begin{cases} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{cases} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} \{v_1\} \\ \{v_2\} \end{cases}$, $Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$ la matrice inverse de la matrice d'impédance est la matrice admittance : $Z^{-1} = Y$ qui s'écrit : $\begin{cases} \{v_1\} \\ \{v_2\} \end{cases} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{cases}$

La matrice de diffusion : $\begin{cases} \{P_1^-\} \\ \{P_2^+\} \end{cases} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} \{P_1^+\} \\ \{P_2^-\} \end{cases}$

Ou

$$D_{12} = \frac{X^+W^- - W^+X^-}{X^+ + W^+} \quad D_{11} = \frac{X^+ - W^+}{X^+ + W^+} \quad D_{21} = \frac{2}{X^+ + W^+} \quad D_{22} = -\frac{X^- + W^-}{X^+ + W^+}$$

Ou :

$$X^\pm = T_{11} \pm Y T_{12} \quad \text{et} \quad W^\pm = \frac{T_{21}}{Y} \pm T_{22}$$

Ici, $Y = \frac{\cos \theta}{Z_0}$ est l'admittance ; $Z_0 = \rho_0 c_0$ est l'impédance caractéristique du milieu