



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE



Ministère de l'enseignement supérieur et de
la recherche scientifique
Université Frères Mentouri Constantine
Faculté des Sciences de la Technologie
Département Génie Mécanique

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة الأخوة منتوري قسنطينة 1
كلية علوم التكنولوجيا
قسمالهندسة الميكانيكية

No d'ordre : 11. /Doct/2020
Série : 01 ./GM/2020

THÈSE

Pour l'obtention du diplôme de :
Doctorat en Sciences

Spécialité: Génie Mécanique

Option: Construction mécanique

Présentée par: Mr. CHORFI Sofiane

Thème:

**ANALYSE ET MODÉLISATION DES
FISSURATIONS DANS LES PLAQUES
TROUÉES SOUS L'EFFET DES
CONDITIONS EXTÉRIEURES**

Soutenue publiquement le : 27/01/2021

Devant le Jury composé de:

Président	BOUCHOUCHA Ali	Prof.	Université des Frères Mentouri Constantine
Rapporteur	NECIB Brahim	Prof.	Université des Frères Mentouri Constantine
Examineurs	BENISSAAD Smail	Prof.	Université des Frères Mentouri Constantine
	BOUCHELAGHEM Abdelaziz	Prof.	Université Badji Mokhtar Annaba
	MEKHILEF Slim	MCA.	Université Badji Mokhtar Annaba

Année Universitaire : 2020-2021

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A la mémoire de mes parents,

A ma femme Amel,

Ames enfants:

Abdelrahim, Djomana, et Yasmine,

A mes frères et à mes Sœurs,

Et à toute ma famille et à tous mes amis...

Sofiane CHORFI

Remerciements

J'exprime toute ma reconnaissance et ma gratitude envers **Monsieur NECIB Brahim**, Ph. D en Aéronautique, Professeur et Directeur de Recherche au Département de Génie Mécanique, Université Frères Mentouri Constantine 1 ; pour m'avoir accueilli au sein de son équipe de recherche et pour m'avoir orienté, dirigé et encouragé dans ce travail de doctorat. Je le remercie vivement pour ses conseils, ses orientations et ses directions tout le long de la réalisation de ces travaux et durant la rédaction de cette thèse.

Je tiens à remercier vivement **Monsieur BOUCHOUCHA Ali**, Professeur au Département de Génie Mécanique, Université Frères Mentouri Constantine 1, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette soutenance de cette thèse.

J'adresse mes vifs remerciements à **Monsieur BENISSAAD Smail**, Professeur au Département de Génie Mécanique, Université Frères Mentouri Constantine 1 ; ainsi que **Messieurs BOUCHELAGHEM Abdelaziz et MEKHILEF Slimane**, Professeurs au Département de Génie Mécanique de l'Université de Annaba, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être membres de jury de cette thèse et pour les corrections qu'ils y ont apportées.

Que tous les enseignants qui ont contribué à ma formation à l'École Doctorale de Mécanique trouvent ici ma profonde gratitude et mes sincères remerciements.

Enfin, mes sincères remerciements s'adressent à tous les enseignants de l'université de Mentouri Constantine 1, et plus particulièrement à l'ISTA ou j'ai fait quelques essais expérimentaux, à tous les membres du département de génie mécanique, et à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Résumé

Analyse et modélisation des fissurations dans les plaques trouées sous l'effet des conditions extérieures

Le problème de fissurations dans les structures continues telles que les plaques, les poutres, les barres, les treillis ou les coques est souvent très apparent au voisinage des trous de rivetages, d'entailles ou d'autres congés de raccordement. En fait, les plaques trouées assemblées par rivetage ou boulonnées ont une grande importance dans les domaines d'applications de la mécanique, l'aéronautique, l'aérospatial et le génie civil et peuvent être l'objet de fissurations considérables autour de leurs trous, et diminuer leur durée de vie ou même provoquer leur rupture totale ou leur désastre. La présence de ces trous conduit à un affaiblissement de la structure sous l'effet de concentrations de contraintes ou de déformations locales qui peuvent engendrer un amorçage de fissure. Ces concentrations de contraintes sont souvent inévitable dû à l'effet des conditions extérieures telles que : les forces, les contraintes, les changements de températures, l'humidité et d'autres. Il est donc nécessaire de connaître ces facteurs d'intensité de contraintes associés à chaque géométrie de la plaque, afin d'analyser son état de contraintes et de déformation ainsi que ses modes de fissurations qui peuvent être suivant les modes I, II et III ou mode mixte. L'analyse de la propagation des fissures dans les structures en plaques industrielles conduit à évaluer leur durée de vie avant leur rupture brutale.

Notre travail, consiste à l'analyse statique et dynamique de la propagation des fissurations autour des trous circulaires, elliptiques et d'autres formes dans les plaques 2D (bidimensionnel) minces d'aluminium sous l'effet des forces appliquées externes. La position d'amorçage du trou est définie par un point sur le bord du trou et l'angle d'inclinaison par rapport à l'axe orthonormé (X, Y) dont le centre est le centre du trou. Ainsi que l'inclinaison du chargement (charge en mode mixte). En conséquence, une stratégie de calcul est mise en œuvre sur la base de la méthode des éléments finis «quart de point spécial» impliquant l'approche BEM et XFEM utilisant logiciel ANSYS et ABAQUS. Les résultats obtenus sont permis de définir les modes de fissurations dans les trous des plaques. Les valeurs du facteur d'intensités de contraintes correspondants à chaque mode de fissuration sous l'effet des conditions extérieures telle que le chargement en mode I ou en mode mixte ont été déterminées pour les différentes méthodes de calcul utilisées et de bonnes concordances avec les résultats analytiques ont été remarquées. Les résultats numériques sont comparés aux résultats expérimentaux et de bons résultats ont été observés. Ces concentrations de contraintes sont trouvées au voisinage des trous qui engendrent une zone plastique influe sur le chemin de propagation de la fissure, ce qui est conseillé de distancier le perçage des trous dans les plaques afin d'éviter leurs ruptures faciles et d'augmenter leur durée de vie.

Mots clés : *Plaques trouées, trous circulaires et elliptiques, fissuration, facteurs d'intensités de contraintes, modes de rupture, méthodes numériques, conditions extérieures.*

Abstract

Analysis and modelling of cracks in the holed plates under the effect of external conditions

The problem of cracks in continuous structures such as plates, beams, bars, trellis or hulls is often very apparent around riveting holes, notches or other connecting leaves. In fact, the holed plates assembled by riveting or bolted are of great importance in the fields of applications of mechanics, aeronautics, aerospace and civil engineering and they can be the object of considerable cracking around their holes. The presence of these cracks leads to a weakening of the structure as a result of concentrations of local stresses or deformations that can decrease their lifespan or even cause their total rupture or their disaster. These stress concentrators are often unavoidable due to the effect of external conditions such as: forces, stresses, temperature changes, humidity and others. It is therefore necessary to know these stress intensity factors associated with each geometrical plate, in order to analyse its state of stress and strain state as well as its cracking modes which can be according to modes I, II and III or mixed mode. The analysis of the propagation of cracks in industrial plate structures leads to evaluating their lifespan before their sudden rupture.

In our work consists of the static and dynamic analysis of the propagation cracks around circular, elliptical holes and other shapes in thin 2D (two-dimensional) aluminum plates under the effect of external applied forces. The starting position of the hole is defined by a point on the edge of the hole and the angle of inclination with respect to the orthonormal axis (X, Y) whose center is the center of the hole. As well as the inclination of the load (mixed mode). Consequently, a calculation strategy is implemented based on the “special quarter point” finite element method involving the BEM and XFEM approach using ANSYS and ABAQUS software. The results obtained are allowed to define the modes of cracking in the holes of the plates. The values of the factor of stress intensities corresponding to each mode of cracking under the effect of external conditions such as the loading in mode I or in mixed mode were determined for the various calculation methods used and good agreement with the results. Analytical have been noticed. The numerical results are compared with the experimental results and good results have been observed. These stress concentrations are found in the vicinity of the holes which generate a plastic zone influencing the propagation path of the crack, which is advisable to distance the drilling of holes in the plates in order to avoid their easy ruptures and to increase their lifetime.

Keywords: *Holed plates, circular and elliptical holes, cracking, intensity stress factors, breaking modes, numerical methods, external conditions.*

ملخص

تحليل ونمذجة الشقوق في الا لواح المثقوبة تحت تأثير الظروف الخارجية

إن مشكلة التكسير في الهياكل المستمرة مثل الصفائح، الجوائز، القضبان، الجملون أو هياكل غالبا ما يكون واضحا جدا في محيط ثقب التثبيت، نكات (فتحات) أو تقريبا آخر من الاتصال. في الواقع، فإن الصفائح المثقوبة التي تجميعها من خلال التثبيت أو البراغي هي ذات أهمية كبيرة في مجالات تطبيقات الميكانيكا، والطيران، والفضاء والهندسة المدنية، وأنها يمكن أن تكون موضوع تشققات معتبرة حول الثقب. يؤدي وجود هذه الشقوق إلى إضعاف الهياكل نتيجة تركيزات الإجهاد أو التشوهات المحلية التي يمكن أن تقلل من عمرها أو حتى تسبب تمزقها الكلي. هذه التركيزات للإجهاد غالبا ما لا يمكن تجنبها بسبب تأثير الظروف الخارجية مثل: القوات، والضغط، وتغيرات درجة الحرارة والرطوبة وغيرها. و لذلك فمن الضروري أن نعرف هذه العوامل شدة الإجهاد المرتبطة كل لوحة هندسية، من أجل تحليل حالته من الإجهاد والتشوه، فضلا عن نوع وسائط تكسير التي يمكن أن تكون في الوضع الأول والثاني والثالث أو الوضع المختلط.

في عملنا، تم النظر في تحليل لانتشار الشقوق حول الثقوب الدائرية، ببيضاوية وأشكال أخرى من ثقب في الصفائح ذات الأبعاد اللانهائية في حالات الساكنة وديناميكية. وتجرى الدراسة في سياق الاضطرابات الصغيرة لبيئة أو وسط متماثل ذي سلوك مرن خطي. تعتمد طرق الحساب المستخدمة على نمذجة العناصر المحددة الثلاثية مقارنة بالأساليب الرقمية الأخرى مثل عناصر الحدود (BEM) والعناصر المحدودة الممتدة (XFEM). سمحت لنا النتائج التي تم الحصول عليها بتحديد أوضاع التشقق في اللوحات حول الثقوب، والتي هي من النوع الأول والثاني والوضع المختلط. وقد تم تحديد قيم عوامل تركيزات شدة الإجهاد المقابلة لكل وضع تكسير بسبب الظروف الخارجية لمختلف الطرق المستخدمة في الحساب وتطابق جيد مع النتائج التحليلية تلك التي لوحظت. ولقد تم العثور على هذه العوامل الإجهاد التركيز لتكون مهمة جدا في محيط الثقوب التي سوف يكون من المستحسن أن نكبر المسافة بين الثقوب في الصفائح من أجل تجنب الكسر أو التمزق السهل وزيادة عمرها.

الكلمات الرئيسية: الألواح مثقوبة، ثقب دائرية، ثقب ببيضاوية الشكل، تكسير، عوامل شدة الإجهاد، طرق التكسير، أساليب حسابية، ظروف خارجية.

Table des Matières

Dédicaces	i
Remerciements	ii
Résumé	iii
Abstract	iv
ملخص	v
Table des Matières	vi
Liste des Figures	x
Liste des Tableaux	xiv
Liste des Symboles.....	xv
Introduction Générale.....	1
Chapitre I Recherches bibliographiques et applications des plaques trouées dans l'engineering... 5	
I.1. Introduction	6
I.2. Mécanique linéaire de la rupture.....	6
I.2.1. Modes fondamentaux de la rupture	6
I.2.2. Critères d'amorçage de la propagation	7
I.2.2.1. Origine des fissures.....	7
I.2.2.2. Mode I pur	8
I.2.2.3. Mode mixte	8
I.2.3. Propagation des fissures	9
I.2.4. Loi de propagation de fissures.....	10
I.2.5. Bifurcation de la fissure.....	11
I.2.5.1. Critères de bifurcation en milieu élastique linéaire	12
I.2.5.2. Critères de bifurcation en milieu élasto-plastique	12
I.3. Effet des chargements extérieurs	13
I.3.1. Sollicitation en mode I.....	13
I.3.2. Sollicitation en mode mixte.....	13
I.4. État de l'art des méthodes numérique.....	13
I.4.1. Méthode des éléments finis	13
I.4.2. Méthodes des éléments frontières (Boundary Element Method - BEM)	14
I.4.3. Méthode sans maillage	14
I.4.4. Méthode des éléments finis étendue (XFEM)	14
I.4.5. Evolution de l'interface de discontinuité dans le temps.....	16
I.5. Application des plaques trouées dans le domaine de l'engineering	16
I.5.1. La construction mécanique et la charpente métallique.....	16
I.5.2. Les structures aéronautiques et l'aérospatiale	17
I.5.3. Les structure en génie civil	17

I.5.4. La biomécanique et la robotique	17
I.6. Conclusion	18
Chapitre II Étude des contraintes autour des trous dans les plaques bidimensionnelles.....	23
II.1. Introduction	24
II.2. Étude du comportement des plaques trouées sous l'effet des forces extérieures.....	25
II.2.1. Comportement des plaques ayant un trou circulaire	25
II.2.1.1. Champs de contrainte	25
II.2.1.2. Facteur de concentration de contrainte	27
II.2.1.3. Champs de déformations et de déplacement	27
II.2.2. Comportement des plaques ayant un trou elliptique	29
II.2.2.1. Contrainte au bord du trou elliptique	29
II.3. Conception pour diminuer la concentration de contraintes	32
II.4. Facteur de concentration de contrainte autour des trous dans la plaque.....	34
II.4.1. Plaque infinie ayant un trou central	34
II.4.2. Plaque de largeur finie ayant un trou central	36
II.4.3. Plaque de largeur finie ayant un trou circulaire excentrique.....	38
II.4.4. Plaque de largeur infinie ayant deux trous circulaires égaux.....	39
II.4.5. Plaque de largeur infinie ayant une rangée de trous circulaires.....	40
II.4.6. Plaque infinie ayant un trou elliptique	42
II.4.7. Plaque de largeur finie ayant un trou elliptique	43
II.4.8. Plaque de largeur finie ayant un trou elliptique excentré.....	44
II.4.9. Plaque de largeur infinie ayant une rangée infinie des trous elliptiques.....	45
II.4.10. Trou circulaire portant un lobe semi-circulaire avec une largeur finie.....	46
II.4.11. Trou rectangulaire avec des coins arrondis avec une largeur infinie	46
II.5. Facteur de concentration dans les entailles au bord des plaques	47
II.5.1. Une seule entaille en forme de U au bord de la plaque semi-infinie	47
II.5.2. Deux entailles en forme de U au bord de la plaque de largeur finie.....	48
II.5.3. Une seule entaille en forme de U au bord de la plaque finie	49
II.5.4. Des entailles multiples semi-circulaires opposées avec une largeur finie	51
II.5.5. Une seule entaille en forme de V au bord de la plaque de largeur finie	51
II.5.6. Deux entailles en forme de V opposées au bord de plaque de largeur finie	52
II.6. Conclusion	53
Chapitre III Analyse des fissures dans les plaques planes	55
III.1. Introduction	56
III.2. Mise en équations des fissures	57
III.2.1. Champ de contraintes et de déformations en tête de la fissure	57
III.2.2. Etude des facteurs d'intensité de contrainte et le taux de la restitution d'énergie ...	61
III.2.2.1. Mode I	61
III.2.2.2. Mode II.....	62
III.2.2.3. Mode III	63
III.2.2.4. Mode mixte	63
III.3. Equations de la propagation par l'expansion de Williams.....	65
III.3.1. Fonction d'Airy en coordonnées polaires	65

III.3.2. Facteurs d'intensité de contrainte	68
III.3.3. Contraintes principales dans les plaques	69
III.4. Etude des zones endommagées en tête de la fissure	70
III.4.1. Définition des zones endommagées.....	70
III.4.2. Estimation de la zone plastique en tête de la fissure.....	71
III.4.3. Correction de la zone plastique d'Irwin	72
III.4.4. L'étendue de la zone plastique d'après Dugdale	74
III.4.5. Comparaison des corrections de la zone plastique	75
III.5. Formes de la zone plastique	75
III.5.1. Critère de Von Mises	75
III.5.2. Critère de Tresca	76
III.6. Modélisation du Facteur d'Intensité de Contraintes FIC.....	77
III.6.1. Régression du facteur d'intensité par l'analyse ANOVA.....	78
III.6.2. Résultats de la modélisation	80
III.7. Facteur d'Intensité de contraintes pour Différentes formes de fissures	82
III.7.1. Fissure centrale dans une plaque de largeur infinie	82
III.7.1.1. Traction axiale et incliné.....	82
III.7.1.2. Traction concentrée une distance b de l'axe.....	83
III.7.2. Fissure centrale dans une plaque de largeur finie.....	83
III.7.3. Fissure au bord de la plaque	84
III.7.3.1. Traction au bord de la plaque.....	84
III.7.3.2. Traction a une distance b du front de fissure au bord de la plaque.....	84
III.7.3.3. Traction axiale.....	85
III.7.3.4. Flexion de trois points.....	85
III.7.4. Rangée de plusieurs fissures à l'intérieur de la plaque de largeur infini.....	86
III.7.5. Rangée de plusieurs fissures au bord de la plaque de largeur infinie	86
III.8. Conclusion	87
Chapitre IV Analyse numériques de la propagation des fissures dans les plaques trouées	90
IV.1. Introduction à l'application des méthodes numériques.....	91
IV.2. Hypothèses générales de l'analyse numérique	92
IV.3. Schématisation du processus d'élaboration de calcul.....	93
IV.4. Modélisation numérique.....	93
IV.4.1. Élément de discrétisation de fissure (élément Quart de Point).....	94
IV.4.2. Modélisation de la fissure.....	95
IV.4.3. Évaluation du facteur d'intensité de contrainte.....	96
IV.4.4. Angle de propagation des fissures	98
IV.5. Analyse numérique des plaques trouées.....	99
IV.5.1. Analyse statique.....	99
IV.5.2. Analyse dynamique par fatigue	99
IV.5.3. Matériaux utilisés	101
IV.5.4. Effet du Maillage sur la contrainte maximale appliquée sur la plaque.....	101
IV.5.5. Effet de la géométrie du trou de la plaque.....	102
IV.5.6. Effet des conditions extérieures.....	103

IV.5.6.1. Effet de l'amplitude de chargement	104
IV.5.6.2. Effet de la température.....	104
IV.6. Conclusion	106
Chapitre V Résultats obtenus et discussions	110
V.1. Modélisation de la propagation des fissures.....	111
V.2. Influence de la position et l'angle d'amorçage des fissures	112
V.2.1. Effet du chargement statique en mode I	112
V.2.1.1. Géométrie de la plaque.....	112
V.2.1.2. Discussion des résultats obtenus en mode I.....	113
V.2.2. Effet du chargement statique en mode mixte.....	117
V.2.2.1. Présentation du problème en mode mixte	117
V.2.2.2. Géométrie de la plaque et conditions aux limites de chargements	118
V.2.2.3. Résultats numériques obtenus en mode mixte	119
V.2.2.4. Discussions des résultats obtenus en mode mixte.....	125
V.3. Effet du chargement dynamique par fatigue.....	130
V.3.1. Effet du Maillage dans la fissure au tour du trou de la plaque	130
V.3.2. Chemin de propagation de la fissure sous l'effet de la position du trou	132
V.3.2.1. Plaques trouées avec une pré-fissure à ses bords.....	132
V.3.2.2. Plaques trouées avec deux pré-fissurées à ses bords.....	133
V.3.2.3. Plaques trouées avec deux pré-fissures au bord de la plaque et du trou	135
V.4. Conclusion	136
Conclusion générale et Perspectives	138
Conclusion générale	139
Perspective	141

Liste des Figures

Fig. I.1	Différents modes de rupture	6
Fig. I.2	Mécanismes de formation des stries (étapes a à f)	8
Fig. I.3	Les Trois phases de propagation de la fissure	9
Fig. I.4	Méthodes sans maillage, représentation des nœuds et de leur zone d'influence	13
Fig. I.5	Fissure conforme au nœud avec le concept	14
Fig. I.6	Applications en Mécanique	15
Fig. I.7	Applications en Aéronautique	16
Fig. I.8	Applications en Génie civil	16
Fig. I.9	Applications en biomécanique et robotique	19
Fig. II.1	Plaque ayant un trou circulaire soumise à une contrainte de traction (σ^∞)	25
Fig. II.2	Plaque ayant un trou elliptique et soumise à une sollicitation de traction	28
Fig. II.3	Facteur de concentration effectif en fonction de l'indice de sensibilité	31
Fig. II.4	Rapport de facteur (K_f/K_t) en fonction de la résistance à la rupture	31
Fig. II.5	Réduction de l'effet de la concentration de contraintes des encoches et des trous	32
Fig. II.6	Le guidage des lignes de contrainte au moyen d'entaille	32
Fig. II.7	Diminution de la concentration de contraintes par enlèvement de matière	33
Fig. II.8	Variation de K_t pour une plaque trouée sous l'effet des contraintes normales dans le plan	34
Fig. II.9	Variation de K_t sous l'effet de flexion transversale en fonction de l'épaisseur t	34
Fig. II.10	Variation de K_t sous l'effet de traction en fonction de (d/D)	35
Fig. II.11	Variation de K_t sous l'effet de flexion dans un plan en fonction de (d/D)	36
Fig. II.12	Variation de K_t sous l'effet de flexion transversale en fonction du (d/D)	36
Fig. II.13	Variation de K_t sous l'effet de traction axiale en fonction du rapport $(d/2c)$	37
Fig. II.14	Variation de K_t sous l'effet de flexion dans un plan en fonction du $(d/2c)$	38
Fig. II.15	Variation de K_t sous l'effet de contrainte normale en fonction du d/L	39
Fig. II.16	Variation de K_t pour un rangé de trou sous l'effet de contrainte normal en fonction de (d/L)	40
Fig. II.17	Variation de K_t sous l'effet de flexion transversale en fonction du rapport d/L	41
Fig. II.18	Variation de K_t pour un trou elliptique sous l'effet des contraintes planes en fonction du rapport a/b	41
Fig. II.19	Variation de K_t pour un trou elliptique sous l'effet de flexion transversale en fonction du rapport a/b	42
Fig. II.20	Variation de K_t autour d'un trou elliptique sous l'effet de traction axial et flexion plane en fonction de $2a/D$	43
Fig. II.21	Variation de K_t pour un trou elliptique sous l'effet de traction axiale en fonction du rapport a/c	44
Fig. II.22	Variation de K_t pour un rangé de trou elliptique en fonction $2a/L$ et du $2a/b$	44
Fig. II.23	Variation de K_t pour un trou portant un lobe sous l'effet de traction axiale en fonction du rapport $2a/D$	45
Fig. II.24.	Variation de K_t pour un trou rectangulaire sous l'effet de traction axiale en fonction du rapport a/b	46

Fig. II.25	Variation de K_t sous l'effet de traction axiale (une seule entaille)	46
Fig. II.26	Variation de K_t sous l'effet de traction axiale (deux entailles en U)	47
Fig. II.27	Variation de K_t sous l'effet de flexion dans un plan (deux entailles en U)	47
Fig. II.28	Variation de K_t sous l'effet de flexion transversale (deux entailles en U)	48
Fig. II.29	Variation de K_t sous l'effet d'une force traction axiale (une entaille en U)	49
Fig. II.30	Variation de K_t sous l'effet de flexion dans un plan (deux entailles en U)	49
Fig. II.31	Variation de K_t sous l'effet de traction axiale (entailles opposées en U)	50
Fig. II.32	Variation de K_t en fonction de l'angle α sous l'effet de flexion transversale (entailles en V)	51
Fig. II.33	Variation de K_t sous l'effet de traction axiale (deux entailles en V)	52
Fig. III.1	Repère locale en voisinage du front de Fissure dans un milieu continu	55
Fig. III.2	Champ de contrainte dans la tête de fissure (le cas du mode I)	56
Fig. III.3	Champ de contrainte de la fissure dans les coordonnées polaires	65
Fig. III.4	Décomposition de la zone fissurée	67
Fig. III.5	Plaque infini subit à une charge F	67
Fig. III.6	Plaque infini subit à une contrainte σ	67
Fig. III.7	Les contraintes principales dans le cercle de Mohr	68
Fig. III.8	Zone endommagée en tête de la fissure	69
Fig. III.9	Décalage de la contrainte en présence de la zone plastique	70
Fig. III.10	Estimation de la zone ou du rayon plastique r_p^*	71
Fig. III.11	Estimation de la longueur effective de la fissure d'IRWIN	72
Fig. III.12	Correction de la zone plastique d'IRWIN	73
Fig. III.13	Comparaison des corrections de zone plastique	74
Fig. III.14	Forme de la zone plastique pour le critère de Von Mises	75
Fig. III.15	Critère de TRESCA et leur zone plastique	76
Fig. III.16	Fissure émanant d'un trou elliptique et sa fissure équivalente	76
Fig. III.17	Facteur d'intensité K_I sans dimension d'une fissure émanant d'une cavité ellipsoïdale	77
Fig. III.18	Erreurs du Facteur d'intensité de Contraintes sans dimension(%)	80
Fig. III.19	Tracés de surface de réponse (3D) et de courbes de niveau illustrant L'influence de la géométrie du trous de la plaque (b/a) et la longueur de la fissure adimensionnée sur le facteur d'intensité de contrainte adimensionné	81
Fig. III.20	FIC, pour une fissure centrale dans une plaque infinie sous des contraintes axiales et inclinées	81
Fig. III.21	FIC, Effet de charges dans trois modes dans la fissure centrale dans une plaque infinie	82
Fig. III.22	FIC, Fissure centrale dans une plaque de largeur finie sous l'effet des contraintes axiales	82
Fig. III.23	FIC de la Fissure au bord de plaque de largeur infinie sous l'effet de la charge de traction	83
Fig. III.24	FIC de la fissure au bord de la plaque, l'effet de charge de traction a une distance b de la fissure	83
Fig. III.25	Fissure au bord de plaque de largeur infinie sous l'effet des contraintes axiales	84
Fig. III.26	Fissure au bord de plaque de largeur finie sous l'effet de flexion de trois points	84

Fig. III.27	FIC, Ranger des fissures dans une plaque sous l'effet de contrainte de traction axiale	85
Fig. III.28	Plusieurs fissures étagées au bord de plaque infinie sous l'effet de contrainte de traction	85
Fig. IV.1	Schématisation du processus d'élaboration du modèle	92
Fig. IV.2	Construction d'un élément singulier quart de point quadrilatéral Barsoum	93
Fig. IV.3	Construction d'un élément singulier quart de point triangulaire Anderson	94
Fig. IV.4	Maillage de la fissure et la configuration d'intégration presque singulière	94
Fig. IV.5	Description de la technique d'extrapolation	95
Fig. IV.6	Types de discrétisation en bout de fissure	96
Fig. IV.7	Technique d'extension virtuelle du fond de fissure	97
Fig. IV.8	La contrainte σ_{\max} pour différentes maillages	101
Fig. IV.9	Variation des contraintes en fonction du rapport a/b	101
Fig. IV.10	Contrainte équivalent en fonction de la géométrie du trou	102
Fig. IV.11	Distribution des contraintes et des déformations suivant le patch horizontal	102
Fig. IV.12	Facteur d'intensité de contrainte pour différentes amplitudes de chargements	103
Fig. IV.13	Le FIC pour des différentes grandeurs de température	104
Fig. V.1	Organigramme de la simulation de propagation des fissures dans la plaque trouée	110
Fig. V.2a	Machine d'essai de traction électronique 100KN	111
Fig. V.2b	Géométrie de la plaque en traction axiale incluant une fissure A, B	111
Fig. V.3	Distribution des contraintes de Von mises pour différents angles de fissures	112
Fig. V.4	Répartition des contraintes selon le patch horizontal pour une fissure à 0° (point A)	113
Fig. V.5	Variation des contraintes en fonction de la longueur pour une fissure à 0° (point A)	113
Fig. V.6	Variation des contraintes en fonction de l'angle d'amorçage (points A)	113
Fig. V.7	Variation des contraintes en fonction de l'angle d'amorçage (point B)	113
Fig. V.8	Variation de la contrainte en fonction de l'angle de propagation, point A à 0°	114
Fig. V.9	Variation de la contrainte en fonction de l'angle de propagation, point à 45°	114
Fig. V.10	Variation du facteur K en fonction de l'angle de propagation de la fissure (A, 0°)	115
Fig. V.11	Variation du facteur K en fonction de l'angle de propagation de la fissure à 45°	115
Fig. V.12	Variation du FIC en fonction de la longueur de la fissure (A à 0°)	115
Fig. V.13	% Erreurs de différentes méthodes en fonction de la longueur de fissure	115
Fig. V.14	Représentation de la machine d'essai de traction incliné avec éprouvette	116
Fig. V.15	Demi-plaque chargée en traction incliné à différents angles avec pré-fissure suivant (x)	117
Fig. V.16	Propriété d'interaction de surface et conditions aux limites	118
Fig. V.17	Affichage de STATU XFEM des Endommagés	118
Fig. V.18	Affichage de modélisation d'une fissure	119
Fig. V.19	Contraintes de Von Mises à un angle de fissuration $\alpha=0^\circ$	119
Fig. V.20	Contraintes de Von Mises à un angle de fissuration $\alpha=30^\circ$	120
Fig. V.21	Contraintes de Von Mises à un angle de fissuration $\alpha=45^\circ$	120
Fig. V.22	Contraintes de Von Mises à un angle de fissuration $\alpha=60^\circ$	120
Fig. V.23	Contraintes de Von Mises à un angle de fissuration $\alpha=90^\circ$	120
Fig. V.24	PSILSM à un angle $\alpha=0^\circ$	121
Fig. V.25	PSILSM à un angle $\alpha=30^\circ$	121

Fig. V.26	PSILSM à un angle $\alpha=45^\circ$	121
Fig. V.27	PSILSM à un angle $\alpha=60^\circ$	121
Fig. V.28	PSILSM à un angle $\alpha=90^\circ$	121
Fig. V.29	Statut XFEM à un angle $\alpha=0^\circ$	122
Fig. V.30	Statut XFEM à un angle $\alpha=30^\circ$	122
Fig. V.31	Statut XFEM à un angle $\alpha=45^\circ$	122
Fig. V.32	Statut XFEM à un angle $\alpha=60^\circ$	122
Fig. V.33	Statut XFEM à un angle $\alpha=90^\circ$	122
Fig. V.34	PHILSM à un angle $\alpha=0^\circ$	123
Fig. V.35	PHILSM à un angle $\alpha=30^\circ$	123
Fig. V.36	PHILSM à un angle $\alpha=45^\circ$	123
Fig. V.37	PHILSM à un angle $\alpha=60^\circ$	123
Fig. V.38	PHILSM à un angle $\alpha=90^\circ$	123
Fig. V.39	Facteur d'intensité de contraintes sous l'effet de chargement incliné	124
Fig. V.40	Angle de propagation de fissure sous l'effet de la charge de traction inclinée	124
Fig. V.41	Angle de fissuration sous l'effet d'un chargement à un angle 0°	126
Fig. V.42	Angle de fissuration sous l'effet d'un chargement à un angle 30°	126
Fig. V.43	Angle de fissuration sous l'effet d'un chargement à un angle 60°	127
Fig. V.44	Angle de fissuration sous l'effet d'un chargement à un angle 90°	127
Fig. V.45	Le FIC en fonction de la longueur de fissure pour différents angles de chargement	128
Fig. V.46	Erreur des différentes méthodes numériques en fonction de la longueur de la fissure	128
Fig. V.47	Géométrie de la plaque avec deux types de maillages	129
Fig. V.48	Contraintes de Von Mises et chemin de propagation de fissure, mode I et maillage simple	129
Fig. V.49	Statut XFEM et chemin de propagation de la fissure en mode I pour un maillage simple	130
Fig. V.50	Contraintes de Von Mises et chemin de propagation de fissure en mode I et maillage fin	130
Fig. V.51	Statut XFEM et chemin de propagation de la fissure en mode I pour un maillage fin	131
Fig. V.52	Géométrie des deux plaques trouées et pré-fissurées au bord	131
Fig. V.53	Contraintes de Von Mises et chemin de propagation de la fissure au voisinage du trou	132
Fig. V.54	Contraintes de Von Mises et chemin de propagation de la fissure loin du trou	132
Fig. V.55	Géométrie de plaque trouée ayant deux fissures aux bords	133
Fig. V.56	Chemin de propagation des deux fissures initiées du bord de la plaque trouée	133
Fig. V.57	Géométrie de la plaque ayant deux fissures	134
Fig. V.58	Influence de la distance entre deux bouts de fissures sur la direction de propagation	134

Liste des Tableaux

Tableau II.1	Indice de sensibilités référentielles (q)	30
Tableau IV.1	Amplitude tabulé pour les conditions de chargement par fatigue	99
Tableau IV.2	Caractéristique du matériau "Aluminium 7075-T6"	100
Tableau IV.3	Composition chimique de la plaque d'aluminium 7075-T6	100
Tableau V.1	Facteurs d'intensités de contrainte utilisant les méthodes BEM et XFEM	114
Tableau V.2	Chargements en mode mixte pour les différents angles de fissurations α	117
Tableau V.3	Angles de bifurcation de fissure et les taux de mixité pour différents α	125
Tableau V.4	Angles de fissuration d'éprouvette en alliage d'aluminium sous une charge statique à un angle de chargement de 30°	126
Tableau V.5	Résultat des angles de fissuration de l'éprouvette en alliage d'aluminium sous une charge statique à un angle de chargement 30°	127
Tableau V.6	Résultat des angles de fissuration de l'éprouvette en alliage d'aluminium sous une charge statique à un angle de chargement 30°	128

Liste des Symboles

FEA	Analyse par éléments finis
BEM	La méthode d'éléments de frontière
X-FEM	Méthode des éléments finis étendues
MLR	Mécanique linéaire de la rupture
CTOD	Déplacement d'ouverture de la pointe de fissure
FIC	Facteur d'Intensité de contraintes
ANOVA	L'analyse de la variance
MSR	Méthodologie de la surface de réponse
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Les Contraintes de traction suivant X, Y, et Z respectivement
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Les Contraintes de cisaillement suivant XY, XZ, et YZ respectivement
σ_{rr}	Contraintes radia
$\sigma_{\theta\theta}$	Contraintes tangentiel
$\sigma_{r\theta}$	Contraintes de cisaillement
σ_{max}	Contraintes maximale.
$\sigma^\infty, \sigma_{nom}$	Contraintes nominale loin du trou
$\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$	Contraintes dans les coordonnées polaires
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Les contraintes principales
σ_A, σ_B	Contraintes dans les point A, et B
σ'	Contraintes au bord du trou elliptique
$\sigma'_{min}, \sigma'_{max}$	Contraintes minimale et maximale au bord de trou elliptique
σ_D, σ'_D	Contrainte d'endurance d'une pièce non entaillée ou entaillée respectivement.
σ_r	Contrainte à la rupture
$\sigma_{th}, \Delta T$	Contrainte thermique induite, et écart de température imposé
$\sigma_{éc}$	Contrainte correspondant au seuil d'endommagement (limite d'écoulement).
$\sigma_{ij}^{(1)}$	Contraintes appliquées au front de la fissure
φ	Coefficient de dilatation thermique
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation suivant X, Y, et Z
ε_{rr}	Déformation radial
$\varepsilon_{\theta\theta}$	Déformation tangentiel
$\varepsilon_{r\theta}$	Déformation de cisaillement
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$	Les déformations suivant les directions xz, yz, et xy.
ε_{max}	Déformation maximale
ε_{nom}	Déformation nominale
U, V, W	Déplacement suivant X, Y, et Z
u_n, v_n	Les déplacements nodaux dans les nœuds A_1, A_2, B_1, B_2 respectivement
K_t	Facteur de concentration de contraintes théorique
K_f	Facteur effectif de concentration de contraintes, une sollicitation dynamique

q	l'indice de sensibilité à l'entaille
K_{Ic}	Ténacité en mode I
K_I, K_{II}, K_{III}	Facteur d'Intensité de contrainte en mode I, II, et III respectivement
K_{tA}, K_{tB}	Facteur de concentration de contrainte dans les points A, B
γ	Paramètre de l'ellipse
K_{max}	La valeur maximale du Facteur d'Intensité de contrainte
K_{min}	La valeur minimale du Facteur d'Intensité de contrainte
ΔK	Variation du facteur d'intensité de contrainte
$\Delta K_{\acute{e}q}$	Facteur d'intensité de contrainte équivalent
K_ϵ	Facteur de concentration de déformation effectif
K_σ	Facteur concentration de contrainte effective
$K_I^*(\theta), K_{II}^*(\theta)$	Facteurs d'intensité de contraintes pour l'extrémité de la branche secondaire
K^*	Facteur d'intensité des contraintes circonférentielles maximum
F_1, K_1	Les valeurs du facteur d'intensités de contraintes sans dimension
G	Taux de restitution d'énergie
G_c	Taux de restitution d'énergie critique (ténacité)
θ	L'angle de bifurcation
θ_c	L'angle critique
α	L'angle d'inclinaison de chargement en mode mixte
β	Angle d'inclinaison
M^e, M^p, M^p_c	La mixité élastique, et le taux de mixité, et taux de mixité critique
S	Densité d'énergie de déformation
a_{ij}	Fonctions de l'angle polaire θ ,
E	Module d'Young
ν	Coefficient de Poisson
E	Module de Young, ou module d'élasticité longitudinal
E^*	Est le module de Young effectif
E_{tip} et ν_{tip}	Module de Young et le Coef. de poison dans le point du front de fissure
κ	Constante de Kolosov
C, m	Deux constantes intrinsèques au matériau
$a*b$	Dimension du trou elliptique
OXY	L'origine dans le centre du trou
$(0, r, \theta)$	Système de coordonnées polaire
(e_r, e_θ)	Unité des coordonnées polaires
$\psi(r, \theta)$	Fonction d'Airy
k_ϵ	Le facteur de concentration de contrainte efficace
$D, d, t,$	Largeur de la plaque, diamètre du trou, et épaisseur de la plaque respectivement
P	Effort de traction
m_1, m_2, m	Moment de flexion
c, e	Distance trous excentrique dans une plaque
L	Distance entre deux trou dans un rangé de trou, ou longueur du coté singulier
R, r	Rayon du trou et du lobe respectivement

t	Épaisseurs de la plaque
h	Largeur de l'entaille en U
b / a	Rapport de géométrie du trou elliptique de la plaque
c / a	La longueur de la fissure adimensionné
b_0, b_i et b_{ij}	Coefficients de régression
$F(x,y)$	Fonction de contrainte
$Z(z)$	Solutions de forme complexe
f_{ij}^{I-III}	Fonctions angulaires connues pour chaque mode
c	Longueur de la fissure
r_p^*	La dimension de la zone plastique ou la correction de la zone plastique d'Irwin
r_{pc}^*	Le rayon de correction de la zone plastique
c, a_{eff}, δ	La longueur réelle, la longueur effective, une correction respectivement.
h_t, h_s	La taille des éléments en bout de fissure et au début
u_x, u_y	Déplacement en front de fissure
$\lambda, F(\theta)$	Un scalaire, fonction continue dérivable de θ respectivement
$A(\theta)$ et $B(r)$	Fonctions d'intégration.

Introduction Générale

Les plaques trouées ont une grande application dans les domaines de l'ingénierie moderne tels que la construction mécanique, les structures aéronautiques, l'aérospatiale, la biomécanique, le génie civil et d'autres domaines dont leurs structures sont assemblées ou rivetées par boulons, rivés ou autres congés de raccordement. Sous l'effet des charges et des contraintes extérieures ces plaques peuvent être l'objet de fissurations considérables spécialement autour des trous de leur fixation. La présence de ces fissures conduit à un affaiblissement de la structure sous l'effet de concentrations de contraintes ou de déformations locales qui peuvent diminuer leur durée de vie ou même provoquer leur rupture totale ou leur désastre. Ces concentrateurs de contraintes sont souvent inévitable dû à l'effet des conditions extérieures tels que : les forces, les contraintes, les changements de températures, l'humidité et d'autres. Il est donc nécessaire de connaître ces facteurs d'intensité de concentration de contraintes associés à chaque géométrie de la plaque, afin d'analyser son état de contrainte et de déformation ainsi que son type de mode de fissuration qui peut être suivant le mode I, le mode II, le mode III ou le mode mixte.

De nos jours, l'étude des phénomènes de traction, de cisaillement et de flexion sur ces plaques conduit à un affaiblissement qui se produit en raison de la présence des contraintes locales ou des concentrations des contraintes au niveau de ces trous. Il est donc conseillé d'éviter autant que possible, le perçage qui augmente la probabilité de la présence des fissures. Cependant, lorsque la présence de ces intensités de contraintes est inévitable, il est nécessaire de connaître le facteur de concentration de contrainte associé à chaque géométrie afin de dimensionner ces structures ou ces plaques. Cela permet d'éviter leur désastre et d'augmenter leur durée de vie; chose qui a été considérée dans notre problème.

Par ailleurs et durant le fonctionnement ou les vibrations des machines ou des structures, c'est-à-dire lorsqu'elles sont exposées à des contraintes dynamiques, ce qui peut engendrer d'avantage la formation et la propagation des fissures. Ce phénomène conduit à la fatigue de la structure et ne peut être diminué que par le contrôle et l'analyse des différents paramètres, tels que l'amortissement, la viscosité ou autres. D'après la courbe des expériences sur des éprouvettes on peut identifier la résistance à la fatigue tout en tenant compte du nombre de cycles avant que l'échantillon ne casse et en se fixant une limite de 10^8 cycles sur l'éprouvette [1-2]. Dans la pratique, la complexité de la forme de

structure et les effets extérieures tel que l'humidité et la température diminuent la résistance à la fatigue. Donc le niveau de contrainte peut être varié pendant le fonctionnement de ces matériaux. Ces contraintes élevées peuvent engendrer une petite fissure qui peut se propager même si le niveau des contraintes est inférieur à la limite d'endurance originale à cause de l'effet croissant de la contrainte. A l'échelle microscopique, tout matériau présente un défaut. Puisque ces conditions favorisent l'apparition de concentrations de contraintes, il faut souvent considérer la possibilité d'amorçage de fissure ainsi que sa propagation lors du calcul d'une structure. Pour cette raison, les concepteurs de structures ou tout élément soumis à des charges cycliques doivent non seulement prendre en compte la possibilité de fissuration, mais aussi estimer la vitesse de propagation de la fissure, pour s'assurer que ces fissures n'atteignent pas la longueur critique. Cette brève explication permet de mieux comprendre pourquoi la formation de fissures due à la fatigue est possible dans les composants de la machine. La présence des trous d'assemblage. Qui nuisent la durée de vie de ces systèmes mécaniques. D'autres parts des outils de calcul permettent maintenant de représenter l'avancée dynamique d'une fissure, les résultats numériques doivent être comparés à des résultats expérimentaux pour s'assurer que les lois introduites sont physiquement fondées [3-4].

En effet, la propagation des fissures dans les plaques trouées joue un rôle très important dans le domaine de la recherche et dans l'engineering afin d'éviter la propagation des fissures et la destruction totale des structures. Dans notre cas, l'étude du comportement des plaques trouées et fissurées sous les efforts de traction simple ou incliné a été examinée. L'influence de la position et de l'angle d'initiation de l'amorçage de la fissure autour du trou en utilisant les approximations numériques telles que la méthode des éléments finis, la méthode des éléments frontière, et la méthode des éléments étendus a été aussi considérée. Ce travail présente une contribution à l'analyse et modélisation des fissurations dans les plaques trouées sous l'effet des conditions extérieures. L'analyse est réalisée sous le code de calcul ANSYS avec le langage de conception paramétrique (APDL), en utilisant des modèles mathématiques et la faire l'introduire en macro. Des facteurs principaux ont été considérés : l'effet du trou dans la plaque, l'effet de l'inclinaison du chargement, la position et l'angle de l'amorçage de la fissure autour des trous la position d'amorçage du trou. Une stratégie de calcul a été mise en œuvre en se basant sur la méthode des éléments finis "de point quart spécial" et impliquant l'approche BEM et XFEM.

Les résultats obtenus ont permis de définir les modes de fissurations dans les plaques autour des trous et qui sont du type mode I, II et mode mixte. Les valeurs de concentrations d'intensités de contraintes correspondants à chaque mode de fissuration sous l'effet des conditions extérieures ont été déterminées pour les différentes méthodes de calcul utilisées et de bonnes concordances avec les résultats analytiques ont été remarquées. Ces facteurs de concentration de contraintes sont trouvées très importantes au voisinage des trous ce qui est conseillé de distancier le perçage des trous dans les plaques afin d'éviter leurs ruptures faciles et d'augmenter leur durée de vie. Il est donc bon d'éviter, autant que possible, le perçage ou l'usinage de défauts ou de parties fonctionnelles de ce type.

Cette thèse est constituée de cinq chapitres, une introduction générale, une conclusion générale et des perspectives.

Le premier chapitre est réservé à une recherche bibliographique sur la propagation des fissures dans des corps bi et tri dimensionnels et une introduction générale à l'application des plaques trouées dans l'engineering. Aussi les différentes méthodes de résolutions théoriques et numériques sont présentées.

Le deuxième chapitre présente une étude des contraintes autour des trous dans les plaques bidimensionnelles. Les concentrations de contraintes autours des trous circulaires et elliptiques, caractérisées par un facteur de concentration de contraintes sont déterminés pour les différentes géométries des trous et d'entailles sous l'effet des différents types de conditions aux limites et de chargements.

Dans le troisième chapitre, on considère l'effet des fissures sur les trous dans les plaques. Une mise en équations de la propagation des fissures, le facteur d'intensité de contraintes et le taux de restitutions d'énergie pour les différents modes de ruptures a été présentée. On a traité également l'influence de la tête de la fissure sur la géométrie des zones endommagées suivant les différents critères de Von Mises et de Tresca. Les facteurs d'intensité de contraintes pour les différentes positions de fissures dans les plaques et sous l'effet des différents types de chargement ont été trouvés.

Le quatrième chapitre présente l'analyse numérique de la propagation des fissures, et l'influence de la géométrie des trous, ainsi que la position de l'angle d'amorçage de la fissure autours des trous dans les plaques. La bifurcation des fissures sous l'effet des chargements purs et mixtes avec chargements inclinés et leurs chemins de propagation

selon leur entourage à proximité du trou ou d'une autre fissure ont été étudié. En plus, ce chapitre présente une analyse expérimentale statique par déplacement qui consiste en des tractions simples uni axiales des plaques trouées. Les résultats ont été comparés avec ceux du numériques.

Le chapitre cinq présente les résultats obtenus et les discussions pour les différentes méthodes utilisées à savoir : l'expérimentale, utilisant les différents méthodes numériques les méthodes des éléments finis (MEF), les éléments de frontières (BEM) et les éléments étendus (XFEM). Les résultats trouvés sont à l'état statique et dynamique pour différents angles d'amorçages et différentes charges extérieures. Aussi, les chemins de propagations de fissures pour différentes distances de pré fissures près et loin de trous ont été étudiés. Les résultats obtenus sont discutés et comparés pour les différents modèles de calculs. Il a été noté que la méthode des XFEM donne les résultats les plus convergents comparativement aux autres modèles et aux analyses théoriques et expérimentaux. L'angle de transition entre l'effet de traction et de cisaillement pour le chargement en mode mixte, ainsi la mixité des modes dans le changement de la position et l'angle de fissuration autour des trous de plaques sont déterminés et identifiés.

Et enfin, une conclusion générale et des perspectives de ce travail sont présentées.

Chapitre I

Recherches bibliographiques et
applications des plaques
trouées dans l'engineering

I.1. Introduction

Les plaques trouées ont une grande application dans les domaines de l'ingénierie moderne tels que la construction mécanique, les structures aéronautiques, l'aérospatiale, la biomécanique, le génie civil et d'autres domaines dont leurs structures sont assemblées ou rivetées par boulons, rivés ou autres congés de raccordement. Sous l'effet des charges et des contraintes extérieures ces plaques peuvent être l'objet de fissurations considérables spécialement autour des trous de leur fixation. La présence de ces fissures conduit à un affaiblissement de la structure sous l'effet de concentrations de contraintes ou de déformations locales qui peuvent diminuer leur durée de vie ou même provoquer leur rupture totale ou leur désastre.

Ce chapitre est consacré à une présentation générale à la propagation des fissures dans des corps bi et tri dimensionnels ainsi que leurs différentes méthodes de résolutions théoriques, numériques et expérimentale. Une introduction générale à l'application des plaques trouées dans l'engineering est présentée. L'état des lieux qui y est dressé ici n'est pas exhaustif, mais permet de situer les développements de recherches réalisés dans ce domaine. En effet, les notions essentielles de mécanique de la rupture et les principaux modèles de propagation de fissure rencontrés dans la littérature sont présentées en premier lieu. Puis l'influence et l'effet de chargement sur les modes de rupture caractéristiques dans ce domaine. Aussi un aperçu des différentes méthodes numériques fréquemment utilisées pour modéliser et analyser les propagations de fissures. Et enfin les différents domaines d'applications des plaques trouées dans de l'engineering.

I.2. Mécanique linéaire de la rupture

I.2.1. Modes fondamentaux de la rupture

Les champs de contraintes au voisinage des fronts de fissures jouent un rôle important sur la propagation des fissures. Ces contraintes dépendent de la longueur de la fissure, des forces appliquées et de la configuration géométrique. Les formes des discontinuités du champ de déplacement à travers les surfaces sont alors définies par les trois différents modes de rupture présentés sur la Figure I.1. Le cas réel est une superposition de ces trois modes, d'où on parle alors du mode mixte. Le mode I est supposé positif et il est toujours présent (ouverture). Donc on ne considérera que les lèvres de la fissure comme étant libres d'effort.

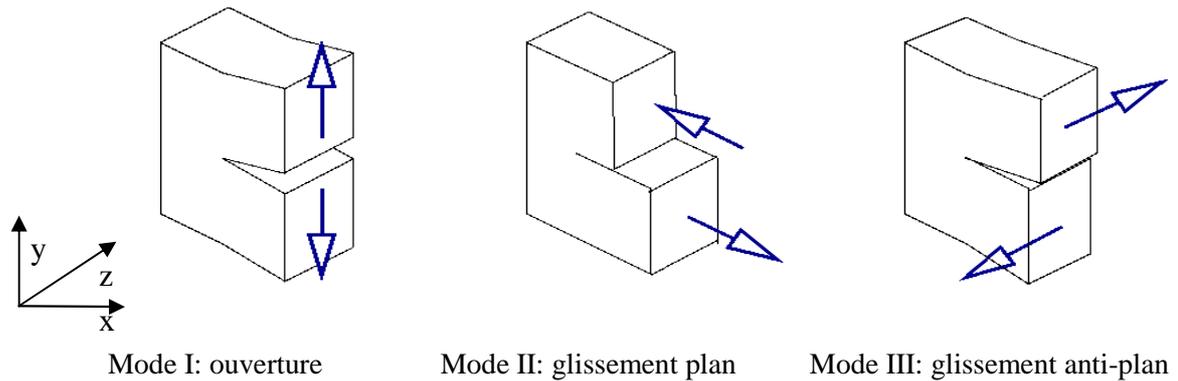


Fig. I.1 : Différents modes de ruptures

Les formes de discontinuité du champ de déplacements à travers une surface définissent trois modes de rupture (Fig. I.1) [5] :

- **Mode I**: un déplacement unique suivant y correspond à un problème plan particulier, désigné par le mode I. Ce mode est, le plus souvent, le plus dangereux. Il s'apparente au déplacement produit par une dislocation rectiligne coin parallèle au front de la fissure.
- **Mode II**: il est engendré par un cisaillement dans le plan de la fissure et parallèle à l'axe x. Il s'apparente au déplacement produit par une dislocation rectiligne coin parallèle au front de la fissure.
- **Mode III** : il est produit par un cisaillement anti plan, situé dans le plan (x, z) de la fissure parallèle à l'axe z. Il s'apparente au déplacement produit par une dislocation vis parallèle au front de la fissure. Ce dernière mode est résolu par une représentation 3D anti-plane, tandis que les deux précédents sont résolus par une analyse 2D en contrainte ou en déformation plane.

I.2.2. Critères d'amorçage de la propagation

I.2.2.1. Origine des fissures

Les fissures s'initient surtout à la surface des pièces puisque les dislocations y sont plus mobiles qu'au cœur de la pièce. La surface est un site préférentiel pour la génération des dislocations et est beaucoup plus influencée par l'environnement. Étant donné que les atomes de surface ne sont pas complètement entourés par d'autres atomes, ils possèdent plus d'énergie que les atomes présents à l'intérieur et sont moins fortement liés. Étant donné cette énergie plus élevée, les atomes de surface diffusent plus facilement que les atomes à l'intérieur du cristal [6]. L'initiation de fissure est influencée par les petits défauts

près du point d'origine de la fissure, les arêtes, les pores où les inclusions présentes dans les pièces. La nature, la taille, la quantité, et la répartition des inclusions sont des facteurs qui peuvent influencer la formation de microfissures qui entraîneront la rupture [7]. La fissure est, par principe, décrite explicitement. Cependant, deux difficultés majeures se posent : La première concerne la nature singulière du champ de déplacements et des contraintes imposant un maillage très fin autour de la pointe de fissure. La seconde difficulté réside dans la description géométrique de la fissure et de son trajet lors de la simulation de la propagation. Ainsi, nous distinguons deux grandes familles de méthodes selon la nature du chargement : celles simulant la fissure droite en mode d'ouverture et celles traitant des fissures inclinées en mode mixte.

I.2.2.2. Mode I pur

Afin de prévoir si il va y avoir ou non développement d'une fissure en mode I pur dans un matériau, on définit la ténacité K_{Ic} , comme un paramètre matériau caractérisant la résistance à la propagation brutale de fissures. On peut mesurer la ténacité par l'énergie requise pour entraîner la rupture (Essai Charpy, flexion trois points, etc...). Ainsi, en mode I pur, si K_I représente l'intensité du chargement.

I.2.2.3. Mode mixte

Un critère d'amorçage et de propagation en mode mixte doit comporter deux éléments:

- Il doit prédire l'intensité du chargement nécessaire pour amorcer la rupture,
- Il doit prédire l'angle avec lequel la fissure va propager.

La détermination d'un tel critère quasi-statique est un sujet encore délicat aujourd'hui. Dans son ouvrage, Leblond [8] présente une classification intéressante des différents critères et discute de leur pertinence vis à vis d'exigences de régularités géométriques. Si les différents critères sont à peu près équivalents dans la direction prédite, ils ne sont pas tous aussi pertinents du point de vue de la justesse de la modélisation mécanique. On peut par exemple citer les travaux de Leguillon [9] qui présente un critère quasi-statique mixte en énergie et en contraintes pour l'amorçage de fissure en mode I pur (étendu au cas d'un amorçage en mode mixte dans Yosibash et al. [10]). Le critère doit être étendu à la propagation dynamique de fissure. De plus, dans une approche de comparaisons de résultats numériques et expérimentaux, notre critère doit pouvoir lisser des disparités matériaux lors des essais. Nous décidons donc d'adopter le critère le plus simple possible même si ce n'est pas le plus cohérent d'un point de vue strictement modélisation mécanique.

I.2.3. Propagation des fissures

Il y a deux phases principales de propagation de fissures. Lors de la première phase, les fissures croissent en contraintes planes alors que lors de la deuxième phase, elles croissent en déformations planes [7]. C'est pendant cette deuxième phase que la fissure passe de la dimension microscopique à la dimension macroscopique. La période de propagation de fissures est la plus longue lors d'un essai de fatigue et peut durer jusqu'à plus de 90% de la vie de la pièce soumise à des contraintes cycliques. La rupture peut se produire de manière ductile ou fragile. La rupture fragile débute par une déformation plastique qui implique un empilement des dislocations le long des plans de glissement. Il y a ensuite une augmentation de la contrainte de cisaillement appliquée qui entraîne la formation de microfissures. L'énergie de déformation ainsi accumulée peut entraîner la rupture complète du matériau sans qu'il n'y ait plus de mouvement des dislocations (clivage) [11]. Lorsqu'il y a rupture ductile, le matériau subit quant à lui une plus grosse déformation plastique avant la rupture. La présence de stries de fatigue sur un faciès de rupture permet de s'assurer qu'il s'agit d'une rupture par fatigue. La largeur des stries due à la propagation de la fissure [12] influe sur la singularité de contraintes. Ce mécanisme est illustré à la Fig. I.2. Au début de l'essai, le bout de la fissure est très pointu (Fig. I.2a). Lorsque le chargement est appliqué, les entailles en bout de fissure orientent les plans de glissement à 45° par rapport à la direction de la fissure. (Fig. I.2b) À mesure que la fissure s'élargit (Fig. I.2c), elle croît également en longueur par déformation plastique (Fig. I.2d). Lorsque le chargement est renversé, la direction de glissement change. Il y a donc création d'une nouvelle extrémité à cette fissure (Fig. I.2e).

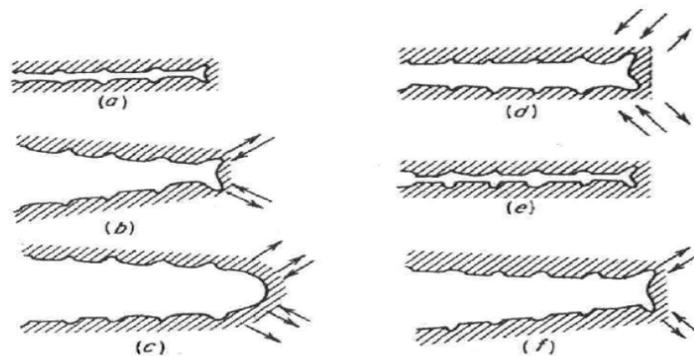


Fig. I.2: Mécanismes de formation des stries (étapes a à f).

L'application d'un chargement cyclique (d'amplitude constante ou variable) à une pièce se traduit par l'apparition d'un dommage qui comprend à trois phases (voir Fig. I.3) :

- **Phase I: amorçage:** si le chargement est en dessous d'un certain seuil, la fissure ne se propage pas au niveau macroscopique. On réalise dans ce cas l'essai de détermination du seuil de propagation de fissure. La grandeur considérée est en quelque sorte l'équivalent de la limite de fatigue déterminée sur éprouvette lisse;
- **Phase II: propagation:** la fissure se propage « le plus souvent » dans un plan perpendiculaire à la direction de l'effort appliqué. L'essai de mesure de vitesse de propagation de fissure se rapporte principalement au régime correspondant au phase II;
- **Phase III : rupture:** il correspond au cas de chargements élevés pour lesquels une déchirure se produit dans le matériau. Les vitesses de propagation très élevées observées dans ce domaine conduisent rapidement à la rupture de la pièce. Les mesures de vitesses relatives à ce domaine ne sont mises en œuvre que dans le cas de problèmes bien spécifiques.

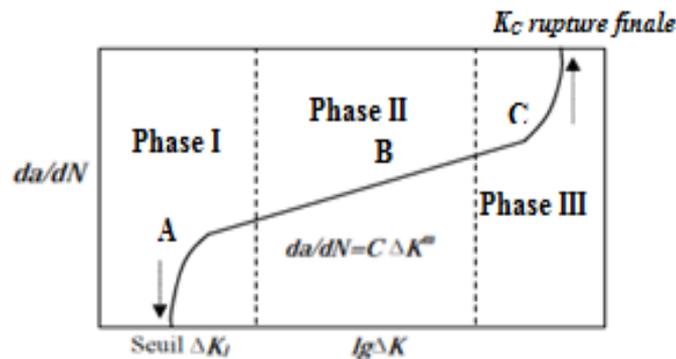


Fig. I.3: Les Trois phases de propagation de la fissure

Où : da/dN est la vitesse de propagation de fissure.

C, m : deux constantes intrinsèques au matériau.

ΔK : la variation du facteur d'intensité de contrainte

I.2.4. Loi de propagation de fissures

A partir des concepts de la mécanique de la rupture, Paris et al.[13] se sont livrés à l'analyse suivante : les contraintes au voisinage d'une fissure, au cours d'un cycle de fatigue, sont connues dès que l'on connaît les valeurs minimale K_{\min} et maximale K_{\max} du facteur d'intensité de contrainte K au cours de ce cycle; on peut en conclure que tout phénomène se produisant dans la zone du voisinage de la pointe d'une fissure est contrôlé par ces deux paramètres, en particulier la vitesse de fissuration, et on doit avoir:

$$\frac{da}{dN} = C(K_{\min}, K_{\max}) = f(\Delta K, R_S) \quad (I.1)$$

Avec: $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}, \quad R_S = K_{\min}/K_{\max}$

En première approximation, on considère une fissure qui se propage sous l'effet d'un programme de charge simple pour lequel R_s est constant, et l'expérience montre que pour la majorité des matériaux métalliques, la loi peut s'écrire sous la forme d'une loi de puissance:

$$\frac{da}{dN} = C. \Delta K^m \quad (I.2)$$

Cette loi est communément appelée la loi de Paris. Elle est d'un intérêt pratique considérable pour l'ingénieur : tout essai de fissuration donne lieu à un dépouillement qui permet d'obtenir la loi de Paris du matériau. Cette relation n'est applicable que dans les cas où les conditions de la mécanique linéaire de la rupture sont respectées. Elle concerne la phase II de la fissuration. Parmi les paramètres agissant sur la fissuration, la plupart n'ont pas ou peu d'influence. Les paramètres ayant le plus d'influence sont notamment le module d'Young et la corrosion pourvu que la fréquence de la sollicitation soit faible. Les mécanismes de la fermeture de fissure ont été attribués à la fermeture induite par plasticité, qui est provoquée par des déformations plastiques résiduelles dans une fissure en se propageant [14]. Le facteur d'intensité de contraintes, K à une variation effective, K_{eff} [15,16] due à la fermeture de la fissure, nous pouvons réécrire la loi de Paris comme suit :

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_{\text{eff}})^m \quad \text{avec} \quad \Delta K_{\text{eff}} = K_{\max} - K_R \quad (I.3)$$

Où K_R (R pour restriction) est le point à partir duquel K contribue à la propagation de la fissure. Cette définition est utilisée pour le moment pour éviter toute discussion concernant la représentation physique de ce paramètre. Nous pouvons donc l'utiliser a priori.

I.2.5. Bifurcation de la fissure

Des nombreux critères de bifurcation de fissures ont été proposés. Tous ces critères ont été établis en considérant un chargement quasi-statique, et la plupart se place en milieu élastique linéaire. De tels critères ne peuvent pas caractériser le phénomène de bifurcation sous chargement de fatigue du fait, en partie, de l'écrouissage de la zone plastique ayant lieu au voisinage de la pointe de fissure.

I.2.5.1. Critères de bifurcation en milieu élastique linéaire

Nous retenons quatre critères de bifurcation qui sont :

- ***Critère de la contrainte circonférentielle maximale***

La bifurcation s'amorce à l'extrémité de la fissure dans la direction de L'angle de bifurcation des contraintes circonférentielle maximale θ [17], cela se traduit par :

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{4} \left(\frac{K_I}{K_{II}} \right) \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \quad (\text{I.4})$$

- ***Critère du taux de restitution d'énergie***

La direction recherchée est celle qui rend maximale le taux de restitution d'énergie pour un accroissement Δa [18].

- ***Critère du minimum de densité d'énergie de déformation***

Selon ce critère, la fissure se propage dans la direction le long de laquelle le facteur de la densité d'énergie de déformation $S(\theta)$. La direction de propagation de fissure est définie alors comme suit:

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} > 0 \quad (\text{I.5})$$

- ***Critère CTOD***

La propagation de fissure se produit dans la direction qui correspond au maximum de la composante d'ouverture ou au maximum de la composante du déplacement de cisaillement mesuré à une distance donnée derrière la pointe de fissure, au moment de la rupture.

I.2.5.2. Critères de bifurcation en milieu élasto-plastique

La bifurcation de la fissure dépend alors, non seulement de l'angle du chargement mais aussi des caractéristiques mécaniques du matériau. La compétition entre la rupture par clivage et la rupture par cisaillement détermine la résistance d'une structure fissurée. Il est à noter que même si la fissure est soumise au chargement en mode I pur, il existe une transition entre rupture par clivage et rupture par cisaillement. Si la fissure se propage par clivage, le critère du maximum de contrainte circonférentielle est utilisé pour évaluer l'angle de bifurcation ; sinon, le critère de bandes de glissement est adopté [19].

I.3. Effet des chargements extérieurs

I.3.1. Sollicitation en mode I

Dans le cas des fissures sollicitées en mode I, le trajet de fissure est entièrement connu puisque rectiligne.

I.3.2. Sollicitation en mode mixte

Dans le cas d'une fissure sollicitée en mode mixte le trajet est quelconque et la plupart du temps complexe.

- **Chargement statique**

Lorsque la fissure est soumise à un chargement statique, de nombreuses études se sont concentrées dans le domaine élastique où existent plusieurs critères de bifurcation, tels que le critère contrainte circonférentielle maximale [17] ; le critère de taux de restitution d'énergie maximale [20]; le critère de densité d'énergie de déformation minimale [21]; le critère de l'intégrale [22] et le critère du facteur d'intensité de contraintes [23] etc. pour prévoir la fissuration.

- **Chargement de fatigue**

Lorsqu'une fissure est soumise à un chargement de fatigue, la vitesse de propagation et la durée de vie en fatigue sont deux éléments déterminants pour le dimensionnement de ces pièces.

I.4. État de l'art des méthodes numérique

De nombreuses méthodes numériques sont appliquées à la propagation de fissure. Pour toutes ces méthodes, il est nécessaire de pouvoir définir correctement les conditions aux limites en terme de chargement afin d'obtenir des résultats fidèles à la réalité.

I.4.1. Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis [24] est déjà très utilisée en mécanique. Elle a donc été naturellement étudiée pour simuler et résoudre les problèmes de fissuration. Parmi les références les plus récentes, Mueller and Maugin [25] ont étudié le cas de propagation 2D. Le principal inconvénient est que la fissure doit être explicitement décrite par le maillage.

I.4.2. Méthodes des éléments frontières (Boundary Element Method - BEM)

Cette méthode [26] est basée sur les calculs aux frontières du domaine. Elle exprime le problème de référence de façon intégrale. Elle suppose que l'on connaisse à ce type de problème des solutions analytiques qui correspondent à des conditions aux limites, en effet seules les frontières du domaine sont représentées dans la méthode. Par conséquent, la représentation de l'évolution de la fissure est naturelle. Seul le bord (et les lèvres de la fissure) sont discrétisés, ce qui constitue le principal avantage de la méthode. Elle n'est applicable que sur des cas simples, car l'introduction de non linéarités suppose la connaissance de la discrétisation du volume. Pan, Chien et autres [27,28] a présenté une analyse de la méthode d'éléments de frontière (BEM) appliquée à la mécanique élastique linéaire de rupture, en solides bidimensionnels.

I.4.3. Méthode sans maillage

Ces méthodes sans maillage ne raisonnent plus sur un découpage de la géométrie en éléments, mais sur une représentation du volume par une densité de nœuds. Ces derniers sont munis de fonctions poids non nulles sur une zone d'influence qui peut contenir d'autres nœuds comme cela est représenté sur la Fig. I.4 [29].

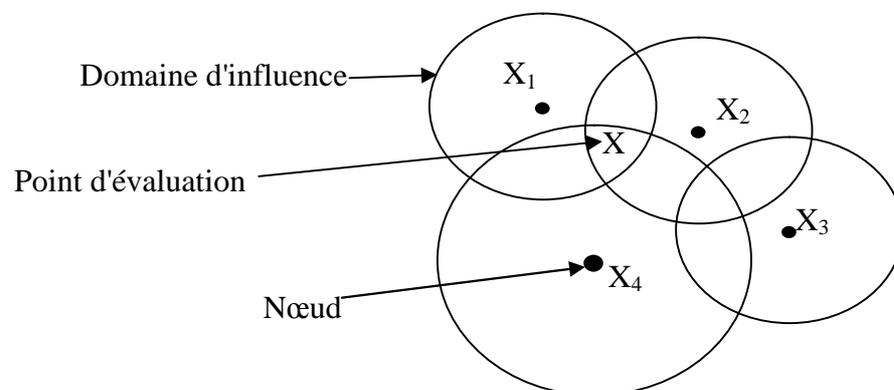


Fig. I.4 : Méthodes sans maillage, représentation des nœuds et de leur zone d'influence

I.4.4. Méthode des éléments finis étendue (XFEM)

La méthode XFEM [30-32] est une simple extension de la méthode des éléments finis. Elle autorise un maillage indépendant de la géométrie du problème. Frontières, trous, fissures deviennent des entités que l'on peut insérer, déplacer, propager, sans avoir à modifier le maillage. Cette méthode, basée sur une partition de l'unité Babuska et Melenk [33], consiste à enrichir une approximation classique éléments finis avec différentes

fonctions qui représente bien la discontinuité et la singularité d'une fissure dans un milieu matériel. Les avantages de cette méthode pour la simulation numérique de la rupture dynamique ont maintenant fait l'objet de nombreuses publications. Elle a été successivement utilisée pour la propagation de fissure en 2D Prabel et al. [34], Menouillard et al. [35], et Yannick Jan [36] (Fig. I.5), ou avec zone cohésive Moës et Belytschko[37].

Il est aussi possible de prendre en compte la présence de forces de cohésion lors de l'ouverture d'une interface XFEM. La cohésion est modélisée par la loi cohésive déjà existante en méthode des éléments finis classiques [38]. L'utilisation de la méthode XFEM bien que récente a connu un vif succès pour plusieurs cas de propagation de fissure.

On peut utiliser XFEM pour:

- Représenter une fissure (discontinuité des déplacements),
- Représenter un trou ou un vide,
- Représenter l'interface entre deux matériaux (discontinuités des contraintes).

En mécanique de la rupture, une fissure comporte deux lèvres et un fond de fissure. Les lèvres sont initialement confondues, sinon, on parle d'entaille. Le champ de déplacement (ou de température) est discontinu au travers des lèvres de la fissure, et le champ de contrainte est singulier en fond de fissure. Il est possible de définir une fissure [39] grâce à deux fonctions level sets et de la faire propager. La situation où la fissure est conforme au nœud est résumée ci dessous:

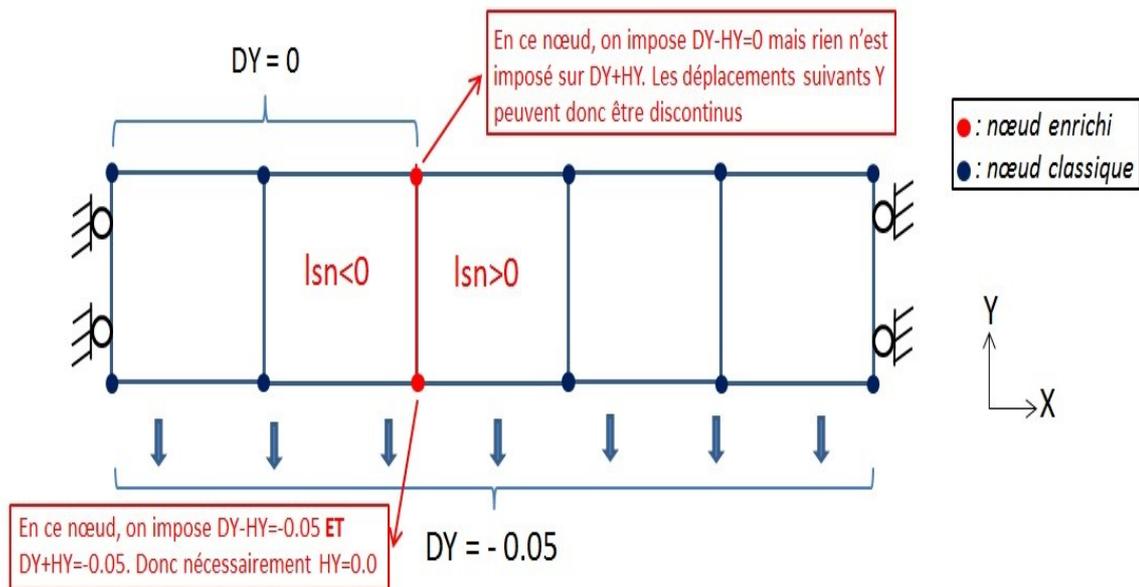


Fig. I.5 : fissure conforme au nœud avec le concept

I.4.5. Evolution de l'interface de discontinuité dans le temps

L'interface de discontinuité et son évolution dans le temps sont à traiter aussi. Deux possibilités sont alors proposées : mailler la fissure et sa progression avec des segments, ou alors utiliser des fonctions de niveau (aussi appelées "level-set") qui permettent de localiser la fissure. L'utilisation de fonctions de niveau pour l'évolution de fissure dans l'espace est notamment décrite dans les références suivantes [40-44].

I.5. Application des plaques trouées dans le domaine de l'engineering

Les plaques, les poutres, les barres ou les coques trouées ont de nombreuses applications pratiques dans les domaines de l'engineering spécialement en mécanique, en aéronautique, en génie civil, en biomécanique et en robotique [45-47]. Ces domaines sont souvent composés des structures ou des machines montées et assemblées entre elles à travers des trous par des boulons ou des rivets. Ces applications se résument essentiellement en :

I.5.1. La construction mécanique et la charpente métallique

Les châssis et les carrosseries de véhicules, les structures discrètes et la charpente métallique (Fig. I.6).

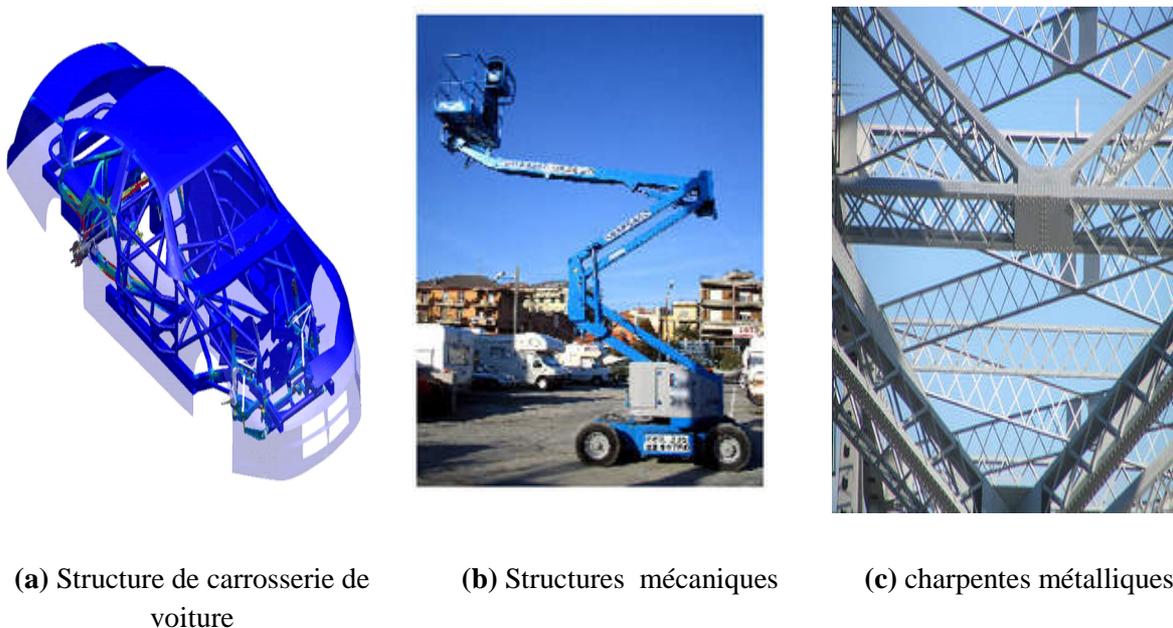
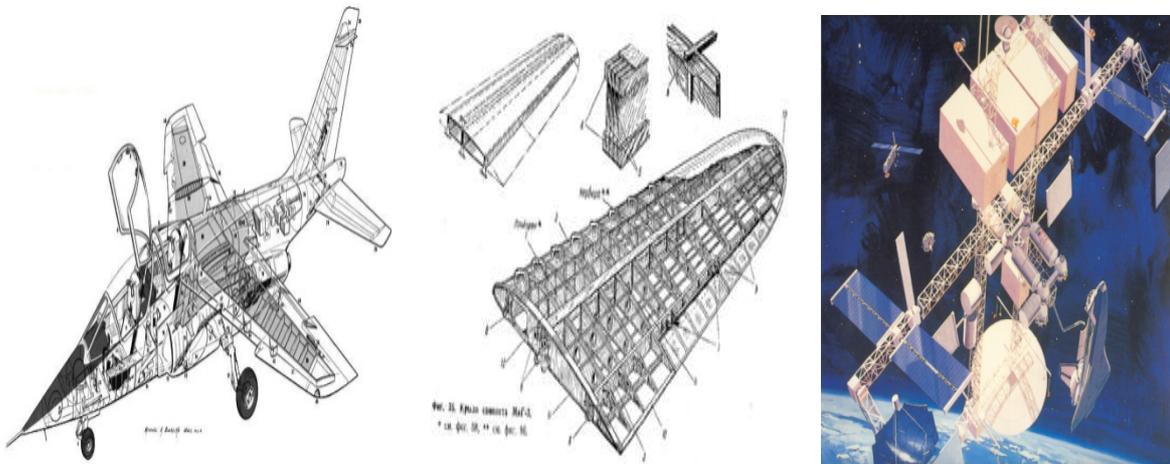


Fig. I.6 : Applications en Mécanique

I.5.2. Les structures aéronautiques et l'aérospatiale

Structures internes d'avions, d'ailes et les structures spatiales (Fig. I.7).



(a) Structures interne d'avion

(b) Structures d'ailes d'avions

(c) structures spatiales

Fig. I.7 : Applications en Aéronautique

I.5.3. Les structures en génie civil

Différentes formes de structures de ponts et des bâtiments (Fig. I.8).



(a) Pont en structures discrètes

(b) Pont en arc

(c) Construction de bâtiments

Fig. I.8 : Applications en Génie civil

I.5.4. La biomécanique et la robotique

L'analyse des contraintes à l'intérieur de vaisseaux sanguins est très important car ces contraintes peuvent provoquer des fissurations internes aux capillaires dû à des super tensions ce qui peut même engendrer un arrêt total du cœur ou du corps humain. Aussi les robots ont un rôle très positives dans ce domaine et ce, afin d'aider les malades et les

handicapés pour arriver à leur but. Dans ce contexte, plusieurs cas peuvent être considérés (Fig. I.9).



Fig. I.9 : Applications en biomécanique et robotique

I.6. Conclusion

En conclusion, les plaques trouées ont de grandes applications dans les domaines de la mécanique et autres. Elles peuvent être soumises à des fissures sous l'effet des contraintes extérieures. Leur analyse est souvent réalisée utilisant les méthodes des éléments finis en se basant sur la méthode analytique, la méthode des éléments finis triangulaire "du point de quart spécial" tout en impliquant les éléments de frontière avec l'approche BEM et XFEM. Dans ce contexte l'importance des méthodes des éléments finis et leurs états de l'art ont été introduites.

Références

- [1] C. Lalannee, *Domage par Fatigue*, Vibration et chocs mécanique, Paris, 1999.
- [2] M. Miner, *Cumulative damage in fatigue*, Journal of Applied Mechanics, 67, A159–A164, 1945.
- [3] D. Grégoire, *Initiation, propagation, arrêt et redémarrage de fissures sous impact*, 19^{ème} Congrès français de mécanique, S16, France 2009.
- [4] Q. Longchamp, *Analyse expérimentale et numérique de l'écoulement dans le canal d'entrée d'un modèle de turbine bulbe*, Québec, Canada, 2014.
- [5] BA Danh LE, *Modélisation discrète en mécanique de la rupture des matériaux fragiles*, l'université de Strasbourg, 2013.
- [6] F. V. Lene, *Physical Metallurgy Fundamentals*, ASM International, Course 15 Lesson 2, 1989, 23 p.
- [7] C. Bathias, J. -P. Baille, *La fatigue des matériaux et des structures*, Les presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1980, 547 p.
- [8] J. -B. Leblond, *Mécanique de la rupture fragile et ductile*, Lavoisier, 2003
- [9] D. Leguillon, *Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch*, European Journal of Mechanics/A Solids 21 (1), 61-72. 2002.
- [10] Z. Yosibash, E. Priel, D. Leguillon, *A failure criterion for brittle elastic materials under mixed-mode loading*, International Journal of Fracture 141 (1), 291-312. 2006.
- [11] V. Kerlins, A. Phillips, *Modes of Fractures*, ASM Handbook vol. 12: Fractography, ASM International, USA, 2002, 537 p.
- [12] G. E. Dieter, *Mechanical Metallurgy*, Third Edition, McGraw-Hill, USA, 1986, 751p.
- [13] P.C. Paris, F. A. Erdogan, *A critical analysis of crack propagation*, laws Transactions of the American society of Mechanical Engineers-Series D, 1963, 85, 4, pp528-534.
- [14] J. Qian, A. Fatemi, *Mixed mode fatigue crack growth: a literature survey*, Engineering Fracture Mechanics, 1996, 55, 6, pp 969-990.
- [15] G. Marci, *The K_{eff} concept: A unique and complete description of fatigue crack propagation*, Engineering Fracture Mechanics, 1996, 55, 1, pp 95-114.

- [16] I. R. Wallhead, L. Edwards, *A study of crack closure using the optical method of caustics and consequences for the use of K_{eff} as a fatigue crack driving force*, Engineering Fracture Mechanics, 1998, 60, 3, pp 291-302.
- [17] F. Erdogan and G. C. Sih, *on the crack extension in plates under plane loading and transverse shear*, Transaction of the ASME. J. Basic Eng, 1963, 85, pp 519-527,
- [18] A. A. Griffith, *The phenomena of ruptures and flow in solids*, Phil. Trans. Roy. Soc. of London, 1920, A221, pp 163-197.
- [19] Li J., X. B. Zhang, N. Recho, *J-Mp based criteria for bifurcation assessment of a crack in Elastic-plastic materials under mixed mode I-II loading*, Engineering Fracture Mechanics 2004, 71, pp 329-343.
- [20] K. Palaniswamy, W. G. Knauss, *On the problem of crack extension in brittle solids under general loading*, In: Memat-Nasser S. (Ed.), Mechanics Today, 1978, 4, Pergamon Press, pp 87-148.
- [21] G. C. Sih, *Strain energy density factor applied to mixed mode problem*, International Journal of Fracture, 1974, 10, pp 305-321.
- [22] P. Pauliska, R. H. Richard, P. Kiekmann, *The behaviour of cracks in elastic-plastic materials under plane normal and shear loading*, International Journal of Fracture, 1993, 62, pp 43-54.
- [23] B. Cotterell and J. R. Rice, *slightly curved or kinked cracks*. Int. J. Fractures, 16, 155-169, 1980.
- [24] T. Belytschko, W. Liu, B. Moran, *Nonlinear finite elements for continua and structures*, New York: Wiley, 2000. 650p.
- [25] R. Mueller, G. A. Maugin, *on material forces and finite element discretizations*. Computational Mechanics 29, 52-60. 2002.
- [26] M. Aliabadi, *The boundary element method*, Applications in Solids and Structures. Chichester : Wiley, 2002. 580p.
- [27] Ernian Pan, *General boundary element analysis of 2D linear elastic fracture mechanics*, Inter. J. Fract. 1997, Vol. 88, pp. 41–59.

- [28] C. C. Chien, H. Rajiyah and S. N. Atluri, *On the evaluation of hyper-singular integrals arising in the boundary element method for linear elasticity*, Computational mechanics 1991, Vol. 8, pp. 57-70.
- [29] Organ Dj, *Numerical solutions to dynamic fracture problems using the element free Galerkin method*, PhD thesis, Chicago: Northwestern University, 1996.
- [30] S. Geniaut, P. Massin, N. Moës, *extended Finite Element Method*, Documentation de Référence de Code Aster n° [R7.02.12], 2007.
- [31] Q. Zeng, Z. Liu, D. Xu, H. Wang, Z. Zhuang, *Modeling arbitrary crack propagation in coupled shell/solid structures with X-FEM*, International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2016; 106(12):1018-40.
- [32] T. Belytschko, R. Gracie, G. Ventura, *A review of extended/generalized finite element methods for material modeling*, Modeling and Simulation in Materials Science and Engineering. 2009; 17(4):043001.
- [33] I. Babuška, J. Melenk, *The Partition of Unity Method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 40, 1997, p. 727-758.
- [34] B. Prabel, A. Combescure, A. Gravouil, S. Marie, *Level set X-FEM non-matching meshes: Application to dynamic crack propagation in elastic-plastic media*, International journal for numerical methods in engineering 69 (8), 1553-1569. 2006.
- [35] T. Menouillard, J. Réthoré, A. Combescure, H. Bung, *Efficient explicit time stepping for the eXtended Finite Element Method (X-FEM)*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 68 (9), 911-939. 2006.
- [36] JAN. YANNICK, *Modélisation de la propagation de fissure sur des structures minces, soumises à des sollicitations intenses et rapides, par la méthode X-FEM*, Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2016.
- [37] N. Moës, T. Belytschko, *Extended finite element method for cohesive crack growth*, Engineering Fracture Mechanics 69 (7), 813-833. 2002.
- [38] J. Laverne, *Utilisation des modèles de zones cohésive*, Fascicule u2.05 : Mécanique de la rupture et de l'endommagement, 2011.
- [39] S. Geniaut, *Notice d'utilisation de la méthode X-FEM*, Fascicule u2.05.02 : Mécanique de la rupture et de l'endommagement, 2013.

- [40] G. Ventura, J. X. Xu, T. Belytschko, *A vector level set method and new discontinuity approximations for crack growth by EFG*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 54 (6), 923-944. 2002.
- [41] N. Moës, A. Gravouil, T. Belytschko, *Non-planar 3D crack growth with the extended finite element and level sets - Part 1: Mechanical model*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 53, 2002, p. 2549–2568.
- [42] A. Gravouil, N. Moës, T. Belytschko, *Non-planar 3D crack growth with the extended finite element and level sets - Part 2 : Level set update*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 54, 2002, p. 2569–2586.
- [43] N. Sukumar, N. Moes, B. Moran, T. Belytschko, *Extended finite element method for three-dimensional crack modelling*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, vol. 48, p. 1549-1570.
- [44] G. Ventura, E. Budyn, T. Belytschko, *Vector level sets for description of propagating cracks in finite elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, vol. 58, p.1571–1592.
- [45] J. Rezaeepazhand, M. Jafari, *Stress concentration in metallic plates with special shaped cutout*, International Journal of Mechanical Sciences, vol. 52, no. 1, 2010, pp. 96-102.
- [46] P.M.G.P. Moreira, S. D. Pastrama and P.M.S.T. De Castro, *Comparative Three Dimensional Fracture Analyses of Cracked Plates*, U.P.B. Sci. Bull., Series D, vol.69, no. 1 69, 2007, pp.43-58.
- [47] L. Ozola, *Savienojumi ar perforetam zobotam metala plaksnem. In: Koka buvkonstrukciju aplese UN konstruešana II: 1. Un 5*, Eirokodeksa pielietošana buvprojektešana. Latvia, Jelgava: Latvia University of Agriculture, p. 89–91. 2011.

Chapitre II

Étude des contraintes
autour des trous dans les
plaques bidimensionnelles

II.1. Introduction

La présence des trous dans les plaques de milieu continu isotropes, anisotropes ou discrets ont une grande importance dans le domaine des structures de technologies modernes de la construction mécanique, l'aéronautique et le génie civil compte tenu de leur utilisation pour l'assemblage des différentes structures par rivetage, par vis ou par boulons. Les analyses mathématiques théoriques et numériques montrent que dans un élément structural chargé, près des changements dans la section, des distributions de contrainte se produisent dans lesquelles la contrainte maximale atteint des valeurs beaucoup plus grandes que la contrainte moyenne sur la section. Cette augmentation de la contrainte maximale à proximité des trous, des rainures, des encoches, des coins aigus, et d'autres changements de section est appelée concentration de contrainte [1]. Il convient donc d'éviter, autant que possible, le forage qui augmente la probabilité de présence de fissures [2]. La variation de section qui provoque la concentration de contrainte est appelée élévateur de contrainte. Bien qu'une collection beaucoup plus grande est fournie par Pilkey [1]. Cependant, ces trous conduisent à l'affaiblissement de la structure durant leur fonctionnement en raison des concentrations de contrainte. En conséquence, dans ce chapitre on va étudier les différentes géométries des trous dans les plaques et leur relation avec les contraintes et le facteur de concentration de contrainte qui conduit à l'amorçage des fissures autour des trous dans les plaques sous l'effet de différentes charges extérieures, joue un rôle important pour éviter la destruction totale de ces structures et l'augmentation de leur durée de vie. A Santos et M. Tolga ont déterminé les facteurs de concentration de contraintes à l'aide d'un logiciel par éléments finis; parmi les résultats les plus remarquables se trouve la validation du logiciel ANSYS pour la détermination des facteurs de concentration dans des plaques plates avec un trou central soumis à une charge axiale [2,3].

En fait, les problèmes correspondant aux déformations d'extension des plaques classiques sont bien connus. C'est précisément les problèmes généralisés des contraintes planes d'élasticité linéaire, où les domaines non bornés contenant des trous circulaires et chargés en tension de champ lointain tel que celui de Sokolnikoff [4] qui sont plus ou moins compliqués. Cependant la théorie des contraintes planes généralisées ne tient pas compte des effets de déformation transversaux. Ainsi et dans le contexte des problèmes dynamiques de plaques, Kane et Mindlin [5] ont proposé un ensemble d'équations pour les mouvements d'extension qui incluent l'effet de la déformation transversale normale.

Dans ce contexte, ils ont indiqué l'importance de cet effet en tenant compte des vibrations extensionnelles à hautes fréquences des plaques. Par ailleurs, le problème de la concentration des contraintes dans une théorie d'extension des plaques comptabilisé pour la déformation transversale ne semble pas avoir été étudié. Le but de ce chapitre est l'étude du problème des facteurs d'intensités de concentration de contraintes dans les plaques trouées ou entaillées en utilisant la théorie d'élasticité linéaire. Les plaques sont considérées de dimensions finies et infinies, et les trous sont de formes circulaires et elliptiques. Ainsi que l'effet des entailles de formes « U » et « V » ont été considérées.

II.2. Étude du comportement des plaques trouées sous l'effet des forces extérieures

L'étude théorique des plaques trouées en matériaux isotropes est considérée comme une étude préliminaire de l'étude d'un matériau. Plusieurs travaux de recherche ont traité le cas des plaques isotropes rectangulaires munies de trou circulaire et sollicitées en traction simple par [6-9]. Les contraintes ne sont pas homogènes au voisinage du trou et que ce champ de contraintes peut être considéré homogène loin du trou. Le facteur de concentration de contraintes K_t est défini par le rapport de la contrainte maximale σ_{\max} et la contrainte nominale loin du trou σ_{∞} (Fig. II.1).

II.2.1. Comportement des plaques ayant un trou circulaire

II.2.1.1. Champs de contrainte

La présence du trou circulaire sur le comportement mécanique des plaques isotropes avec la sollicitation de traction. Afin d'analyser le phénomène de concentration des contraintes par la détermination de la distribution du facteur de concentration des contraintes autour et loin du trou circulaire on applique la théorie d'élasticité plane et on utilise les contraintes d'Airy. Dans notre cas on considère une plaque ayant un trou circulaire centré de rayon R et soumise à ses deux extrémités à un état de traction simple statique (Fig. II.1). L'origine OXY est dans le centre du trou et les directions sont parallèles aux champs de forces. Les dimensions de la plaque sont supposées suffisamment grandes par rapport au rayon du trou et les forces volumiques sont négligeables. On considère l'hypothèse de l'état de contraintes planes. L'état de contrainte loin du trou n'est pas affecté par la présence du trou et peut donc être assimilé à l'état homogène suivant:

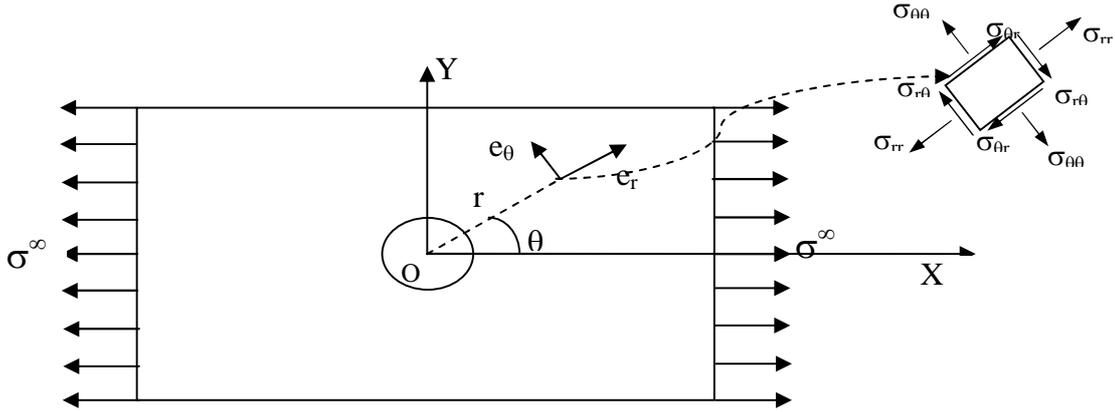


Fig. II.1 : Plaque ayant un trou circulaire soumise à une contrainte de traction (σ^∞)

Un système de coordonnées polaire $(0, r, \theta)$ est adopté, O étant le centre du trou, l'angle θ étant mesuré par rapport l'axe X ; où : contraintes tangentielle $\sigma_{\theta\theta}$, contrainte radiale σ_{rr} , contrainte de cisaillement $\sigma_{r\theta}$ [6]. Si les forces de volume de la plaque sont négligeable et pour une fonction $\varphi(r, \theta)$ dite la fonction d'Airy, le champ de contraintes σ_{ij} en coordonnées polaires est donné par :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{3R^4}{r^4} - \frac{4R^2}{r^2}\right) \cos(2\theta) \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{3R^4}{r^4}\right) \cos(2\theta) \\ \sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{4} \left(1 - \frac{3R^4}{r^4} + \frac{2R^2}{r^2}\right) \sin(2\theta) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

La fonction de contraintes sera donc :

$$\varphi(r, \theta) = -\frac{\sigma^\infty}{2} R^2 \log r + \frac{\sigma^\infty}{4} r^2 + \frac{\sigma^\infty}{4} \left(-r^2 + 2R^2 - \frac{R^4}{r^2}\right) \cos(2\theta) \quad (\text{II.2})$$

Le champ des contraintes trouvé indique que les contraintes ne sont pas homogènes au voisinage du trou et que ce champ de contraintes peut être considéré homogène que loin du trou de la plaque trouée en sollicitation de traction à ses extrémités.

En effet, loin du trou ($r \rightarrow \infty$) c'est-à-dire ($1/r \rightarrow 0$), le champ de contrainte sera:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 + \cos(2\theta)) \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 - \cos(2\theta)) \\ \sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{2} \sin(2\theta) \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

La décroissance rapide en $1/r^2$ du champ de contraintes assure que ces hétérogénéités se développent seulement au voisinage du trou [28].

II.2.1.2. Facteur de concentration de contrainte

Le facteur de concentration de contraintes (K_t) est défini par le rapport de la contrainte maximale et la contrainte nominale σ^∞ appliquée loin du trou, c'est-à-dire :

$$K_t = \frac{\sigma^{\max}}{\sigma^\infty} \quad (\text{II.4})$$

En particulier, au bord du trou ($r = R$) :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r = R) = 0 \\ \sigma_{\theta\theta}(r = R, \theta) = \sigma^\infty(1 - 2\cos(2\theta)) \\ \sigma_{r\theta}(r = R, \theta) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

Dans ce cas le facteur de concentration sera donné par :

$$K_t = \frac{\sigma_{\theta\theta}(r=R)}{\sigma^\infty} = 1 - 2 \cos(2\theta) \quad (\text{II.6})$$

Pour cela on distingue alors deux situations :

- Situation de traction : la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale dans l'emplacement au bord du trou en $\theta = \pm \pi/2$ et vaut trois fois la contrainte appliquée. Le facteur de concentration de contraintes vaut donc 3 et la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ est minimale dans l'emplacement au bord du trou en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ où elle vaut $-\sigma^\infty$.
- Situation de compression : la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale dans l'emplacement au bord du trou en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ et vaut $|\sigma^\infty|$, et le facteur de concentration de contraintes prend la valeur 1.

II.2.1.3. Champs de déformations et de déplacement

Le champ de déformation bidimensionnel peut être déduit du champ des contraintes. On peut trouver alors les déplacements u_r et u_θ qui lui sont associés. Les déformations sont liées aux contraintes par les lois de l'élasticité linéaire isotrope.

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}) \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}) \\ \varepsilon_{zz} = -\frac{1}{E}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \\ \varepsilon_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{r\theta} \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Où E est le module de Young et ν Coefficient de Poisson du matériau. En substituant les relations (II.1) dans les expressions précédentes on obtient le champ de déformations suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{\sigma^\infty}{2E} \left(1 - \nu + (1 + \nu) \left(\left(1 + \frac{3R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta - \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{4R^2}{r^2} \cos 2\theta \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2E} \left(1 - \nu + (1 + \nu) \left(\frac{R^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right) + \nu \frac{4R^2}{r^2} \cos 2\theta \right) \\ \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu\sigma^\infty}{E} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta \right) \\ \varepsilon_{r\theta} = -(1 + \nu) \frac{\sigma^\infty}{2E} \left(1 - \frac{3R^4}{r^4} + \frac{2R^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

Le déplacement radial u_r et circonférentiel u_θ sont déterminés par l'intégration du champ des déformations :

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\ \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} \right) \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

D'où :

$$\begin{cases} u_r = \frac{\sigma^\infty}{2E} \left((1 - \nu)r + (1 + \nu) \left(\frac{R^2}{r} + \left(r + \frac{R^4}{r^3} \right) \cos 2\theta \right) + \frac{4R^2}{r^2} \cos 2\theta \right) + A(\theta) \\ u_\theta = -\frac{\sigma^\infty}{2E} \left((1 + \nu) \left(1 + \frac{3R^4}{r^4} \right) r + (1 - \nu) \frac{2R^2}{r} \right) \sin 2\theta - \int_0^\theta A(\theta) d\theta + B(r) \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

Avec, $A(\theta)$ et $B(r)$ sont des fonctions d'intégration en fonction de (θ) et de (r) . Leurs déterminations nécessitent la substitution de la 3^{ème} relation de l'expression (II.9), ce qui fournit une équation différentielle comportant des fonctions inconnues:

$$A'(\theta) + rB'(r) + \int_0^\theta A(\theta) d(\theta) - B(r) = 0 \quad (\text{II.11})$$

La relation ci-dessus (II.11) est satisfaite par le couple de fonctions $A(\theta) = 0$ et $B(r) = 0$. Le champ de déplacements sera donc donné par:

$$\begin{cases} u_r = \frac{\sigma^\infty}{2E} \left((1 - \nu)r + (1 + \nu) \left(\frac{R^2}{r} + \left(r + \frac{R^4}{r^3} \right) \cos 2\theta \right) + \frac{4R^2}{r^2} \cos 2\theta \right) \\ u_\theta = -\frac{\sigma^\infty}{2E} \left((1 + \nu) \left(1 + \frac{3R^4}{r^4} \right) r + (1 - \nu) \frac{2R^2}{r} \right) \sin 2\theta \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

L'équation du trou déformé initialement circulaire, en fonction de la charge appliquée, peut être déterminée en utilisant les expressions des déplacements u_r et u_θ au bord du trou c'est-à-dire :

$$\begin{cases} u_r(r = R) = \frac{\sigma^\infty}{E} R(1 + 2 \cos 2\theta) \\ u_\theta(r = R) = -\frac{\sigma^\infty}{E} 2R \sin 2\theta \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

II.2.2. Comportement des plaques ayant un trou elliptique

Dans ce cas, le champ des forces appliqué est orienté à angle β par rapport au système de coordonnées (OXY). Les dimensions de la plaque sont supposées suffisamment grandes par rapport aux dimensions du trou qui est supposé elliptique et caractérisé par les dimensions paramétriques a et b qui sont les demi grand et petit axes elliptiques du trou respectivement (voir Fig. II.2). La plaque est soumise à ces deux extrémités à un état de traction pure σ^∞ à ses bords selon la direction de l'angle β par rapport à l'axe X.

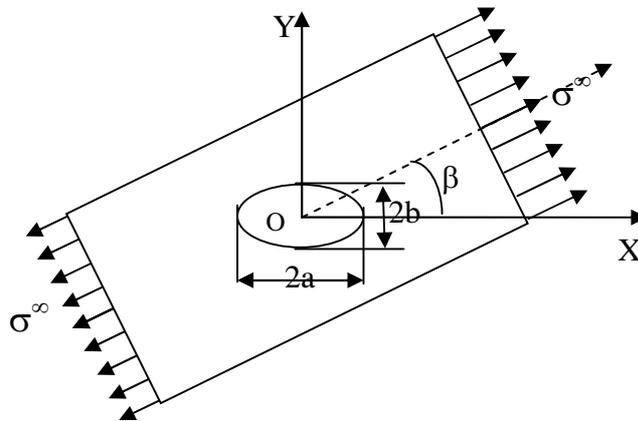


Fig. II.2 : Plaque ayant un trou elliptique et soumise à une sollicitation de traction

II.2.2.1. Contrainte au bord du trou elliptique

La position initiale des points du bord du trou elliptique est donnée par :

$$\begin{cases} X_1 = a \cos \theta \\ X_2 = b \sin \theta \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

On admet que la contrainte σ' au bord de l'ellipse en un point (X_1, X_2) caractérisé par l'angle θ est donné par la relation suivante $[\sigma']$:

$$\sigma' = \sigma^\infty \frac{1-\gamma^2+2\gamma \cos 2\beta-2 \cos 2(\theta-\beta)}{1-2\gamma \cos 2\theta+\gamma^2} \quad (\text{II.15})$$

Où γ est le paramètre de l'ellipse ; $0 \leq \gamma \leq 1$, avec $\gamma = \frac{a-b}{a+b}$

- Si la sollicitation est parallèle au grand axe de l'ellipse $\beta=0$, l'équation devient:

$$\sigma' = \sigma^\infty \frac{1-\gamma^2+2\gamma-2 \cos 2\theta}{1-2\gamma \cos 2\theta+\gamma^2} \quad (\text{II.16})$$

Les contraintes maximale et minimale au bord du trou elliptique seront alors :

$$\begin{cases} \sigma'_{\min} = \sigma'(\theta=0) = -\sigma^\infty \\ \sigma'_{\max} = \sigma'(\theta = \pi/2) = \frac{3-\gamma}{1+\gamma} \sigma^\infty = \left(1 + \frac{2b}{a}\right) \sigma^\infty \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

La contrainte maximale se trouve au bord du trou en position ($\theta = \pi/2, 3\pi/2$), et sa valeur minimale en position ($\theta = 0, \pi$) ; et le facteur de concentration de contraintes est :

$$K_t = \frac{3-\gamma}{1+\gamma} = 1 + \frac{2b}{a} \quad (\text{II.18})$$

- Si la sollicitation de traction perpendiculaire au grand axe de l'ellipse $\beta= \pi/2$; l'équation (II.15) devient:

$$\sigma' = \sigma^\infty \frac{1-\gamma^2-2\gamma+2 \cos 2\theta}{1-2\gamma \cos 2\theta+\gamma^2} \quad (\text{II.19})$$

Les contraintes maximales, et minimales au bord du trou seront donc :

$$\begin{cases} \sigma'_{\min} = \sigma'(\theta=\frac{\pi}{2}) = -\sigma^\infty \\ \sigma'_{\max} = \sigma'(\theta = 0) = \frac{3+\gamma}{1-\gamma} \sigma^\infty = \left(1 + \frac{2a}{b}\right) \sigma^\infty \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

La contrainte est donc maximale au bord du trou dans l'emplacement ($\theta = 0, \pi$), et minimale dans l'emplacement ($\theta = \pi/2, 3\pi/2$). Donc le facteur de concentration de contraintes est :

$$K_t = \frac{\sigma'_{\max}}{\sigma^\infty} = \frac{3+\gamma}{1-\gamma} = 1 + \frac{2a}{b} \quad (\text{II.21})$$

Le facteur de concentration des contraintes dans le premier cas se trouve dans l'emplacement de $\theta = \pi/2$ est moins sévère et reste inférieur à 3. La situation la plus pénalisante est donc celle d'une plaque sollicitée perpendiculairement au grand axe de l'ellipse [6]. Ce qui correspond à une concentration de contraintes très sévère.

Pour les sollicitations dynamiques, il existe un facteur effectif de concentration de contraintes K_f qui est défini comme suit :

$$K_f = \frac{\sigma_D}{\sigma'_D} \quad (\text{II.22})$$

Où : σ_D , et σ'_D sont respectivement la limite d'endurance d'une pièce non entaillée et entaillée. La relation entre le facteur théorique K_t et le facteur effectif K_f est donnée par l'indice de sensibilité à l'entaille (q) qui est défini comme suit:

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \quad (\text{II.23})$$

Les valeurs référentielles pour l'indice de sensibilité q sont données dans le tableau II.1 [10] :

Tableau II.1: Indice de sensibilités référentielles (q)

Matériaux	Indice q
Aciers de construction A37 à A70	0,4 ...0,8
Aciers d'amélioration	0,6...0,9
Aciers à ressort	0,9.....1,0
Aciers légers	0,3.....0,6

En général, cet indice de sensibilité n'influe pas sur le facteur effectif de concentration de contrainte pour une valeur de facteur théorique $K_t \leq 1$ (Fig. II.3), mais pour des valeurs $K_t > 1$, on observe qu'il y a une croissance du facteur effectif K_f en fonction de l'indice de sensibilité. L'indice de sensibilité à l'entaille d'un matériau n'est pas connu, mais le facteur théorique K_t est supposé connu. Pour cela, la figure II.4 est utilisée pour la détermination du facteur de concentration effectif K_f [10].

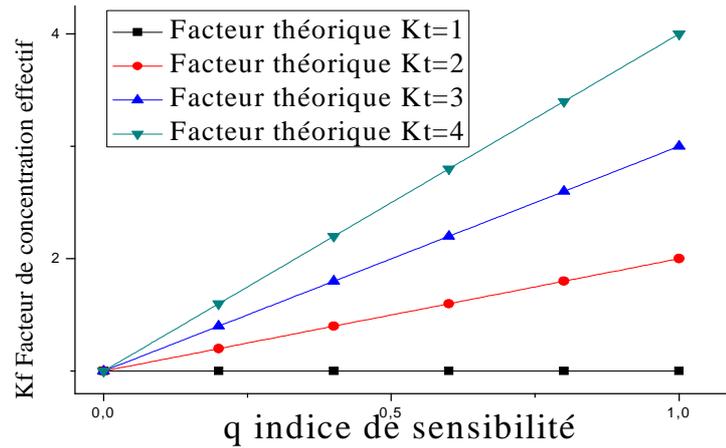


Fig. II.3: Facteur de concentration effectif en fonction de l'indice de sensibilité

Le facteur K_f est le facteur de concentration de contrainte effectif (Fig. II.4), tel que déterminé par l'étude expérimentale de l'échantillon [11]. Sous une charge statique, les valeurs de sensibilité à l'entaille sont recommandées [12], $q = 0$ pour les matériaux ductiles et entre 0,15 et 0,25 pour les métaux durs et cassants.

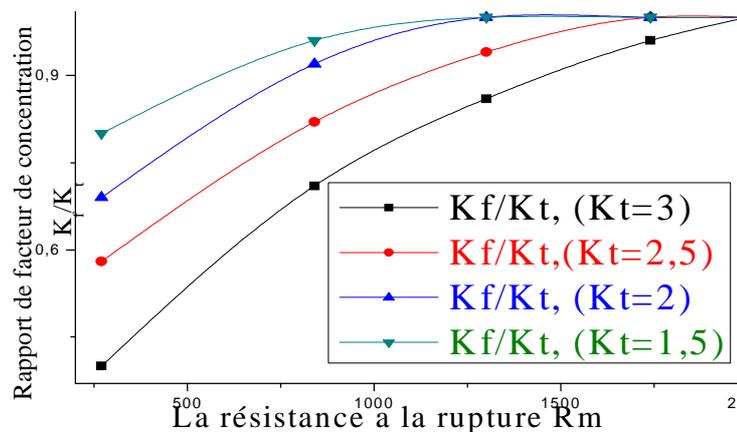


Fig. II.4: Rapport de facteur (K_f/K_t) en fonction de la résistance à la rupture

II.3. Conception pour diminuer la concentration de contraintes

Une discussion qualitative des techniques pour éviter les effets néfastes de la concentration de contrainte est donnée par Layer [13]. En règle générale, la force doit être transmise d'un point à l'autre aussi facilement que possible. Les lignes reliant le trajet de transmission de force sont parfois appelées le flux de force (contrainte), bien que l'on puisse se demander si le flux de force a une définition scientifiquement fondée. Les transitions nettes dans la direction du flux de force doivent être éliminées en

adoucissant les contours et en arrondissant les entailles. Lorsque les facteurs de contrainte sont requis par les exigences fonctionnelles, les éleveurs doivent être placés dans des régions de faible contrainte nominale si possible.

Des formes d'entailles et de trous dans l'ordre dans lequel ils provoquent la concentration des contraintes. On a des trous et des entailles qui sont agencées dans l'ordre de leur effet sur la concentration de contrainte diminuent lorsque vous déplacez de gauche à droite et de haut comme montré sur la Fig. II.3 ci-dessous.

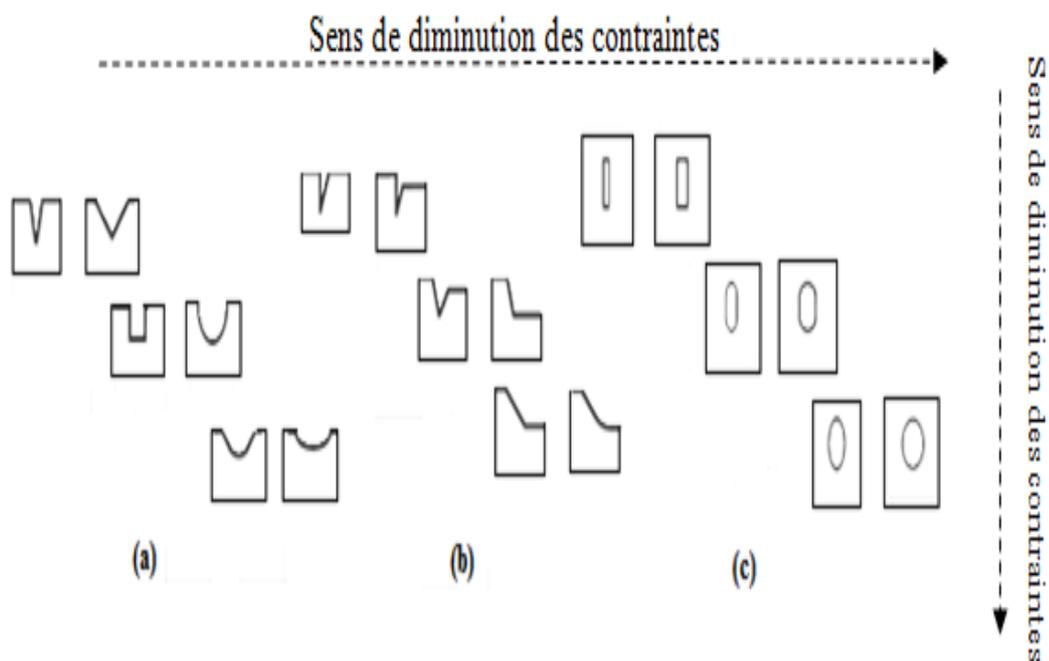


Fig. II.5 : Réduction de l'effet de la concentration de contraintes des encoches et des trous

Le guidage des lignes est une méthode utile pour réduire les effets néfastes d'entaille qui ne peuvent pas être évitées. Ceux-ci sont appelés entailles de soulagement ou d'atténuation de la concentration de contraintes par enlèvement de matière (Fig. II.6) et qui est un processus parfois relativement facile à usiner et à réaliser [14].

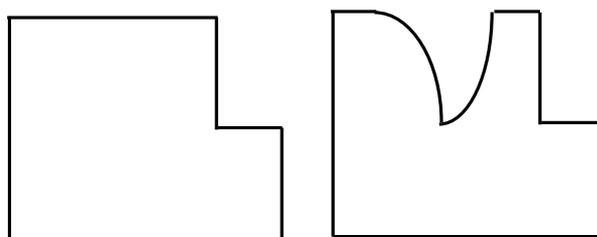


Fig. II.6 : Le guidage des lignes de contrainte au moyen d'entaille

Dans la figure II.7, on suppose que dans le cas (a), une entaille droite de ce type se produit ; et dans les cas (b) et (c), l'encoche est retenue et la concentration de contrainte se réduit.

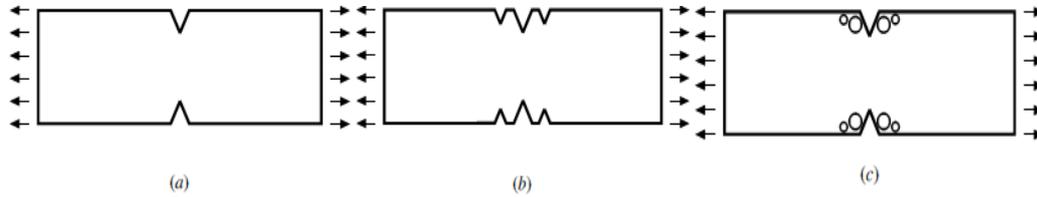


Fig. II.7 : Diminution de la concentration de contraintes par enlèvement de matière

II.4. Facteur de concentration de contrainte autour des trous dans la plaque

II.4.1. Plaque infinie ayant un trou central

Une plaque infinie comprenant un trou circulaire central de diamètre $d=15\text{mm}$ et d'une épaisseur $t=5\text{mm}$, soumise à des contraintes normales dans un plan.

a) Effet de traction

Deux cas de tractions peuvent être rencontrés:

- Le premier cas consiste en une traction de sollicitation uni axiale suivant X, avec : $\sigma_1 \neq 0$ et $\sigma_2 = 0$ (Fig. II.8a), et on trouve les contraintes au bord des trous aux points A et B, ainsi que leurs facteurs d'intensité de contraintes respectives (K_t) comme suit :

$$\sigma_A = 3\sigma_1, \text{ et un facteur d'intensité de contrainte : } K_{tA} = 3 \text{ au point A.}$$

$$\sigma_B = -\sigma, \text{ et un facteur d'intensité de contrainte : } K_{tB} = -1 \text{ au pont B.}$$

- Le deuxième cas consiste en traction de sollicitation bi axiale suivant X et Y avec $\sigma_1 \neq 0$ et $\sigma_2 \neq 0$ (Fig. II.8 b) et similairement on trouve :

$$\text{Pour } \sigma_2 = \sigma_1 \text{ (traction)} \Rightarrow \sigma_A = \sigma_B = 2\sigma_1 \text{ et } K_{tA} = K_{tB} = 2 ;$$

$$\text{Pour } \sigma_2 = -\sigma_1 \text{ (cisaillement)} \Rightarrow \sigma_A = -\sigma_B = 4\sigma_1, \text{ et } K_{tA} = K_{tB} = 4;$$

$$\text{Et pour } -1 \leq \sigma_2/\sigma_1 \leq 1 \Rightarrow K_t = 3 - \sigma_2/\sigma_1.$$

Les différentes valeurs des facteurs de concentration de contrainte obtenues peuvent être comparé avec ceux obtenus théoriquement comme présentés sur la Figure II.8 c en fonction des rapports contraintes de traction (σ_1/σ_2) pour les différents cas.

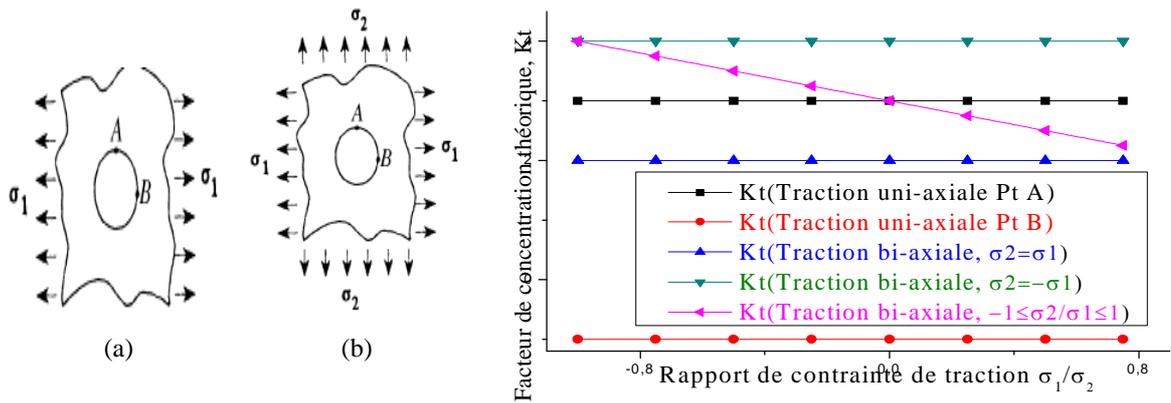


Fig. II.8 : Variation de K_t pour une plaque trouée sous l'effet des contraintes normales dans le plan

b) Effet de flexion transversale ou de moment de torsion

La même plaque est considérée mais sous une flexion transversale et ayant une contrainte: $\sigma = 6m/t^2$ avec un coefficient de Poisson : $\nu = 0,3$ et une contrainte maximale : $\sigma_{\max} = K_t \cdot \sigma_1$ et des moments de flexions m_i (voir Figure II.9). Cette flexion engendre:

- Pour une flexion simple, où: $m_1 = m$, $m_2 = 0$ et pour $0 \leq d/t \leq 7 \Rightarrow \sigma_{\max} = \sigma_A$
- Pour une flexion cylindrique, où: $m_1 = m$, $m_2 = \nu m$, et pour $0 \leq d/t \leq 7 \Rightarrow \sigma_{\max} = \sigma_A$
- Pour une flexion iso tropique et dans le cas où $m_1 = m_2 = m$; $\sigma_{\max} = \sigma_A \Rightarrow K_t = 2$
- Pour une torsion, le cas où $m_1 = m$, et $m_2 = -m$, et pour $0 \leq d/t \leq 7 \Rightarrow \sigma_{\max} = \sigma_A$

Nous observons qu'il y a une diminution du facteur d'intensité de contrainte K_t en fonction de l'épaisseur pour tous les cas, sauf le cas de la flexion iso tropique il est constant $K_t = 2$ (Fig. II.9)

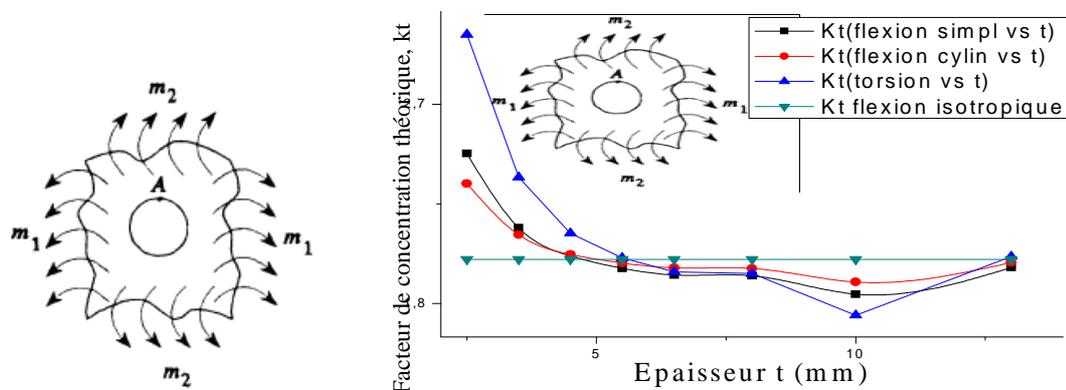


Fig. II.9 : Variation de K_t sous l'effet de flexion transversale en fonction de l'épaisseur t

II.4.2. Plaque de largeur finie ayant un trou central

Dans ce cas une plaque de largeur finie égale à D , comprenant un trou circulaire de diamètre $d = 15\text{mm}$ et d'une épaisseur $t = 5\text{mm}$.

a) Effet de Traction

Pour le rapport des diamètres (d/D) variant entre : $0 \leq d/D \leq 1$ et une contrainte normale : $P = \sigma_{\text{nom}} \cdot [t (D-d)]$;

On trouve que la contrainte maximale est : $\sigma_{\text{max}} = K_t \cdot \sigma_{\text{nom}}$.

Et le coefficient de contrainte K_t prend une allure décroissante en fonction du rapport d/D comme présenté sur la figure II. 10.

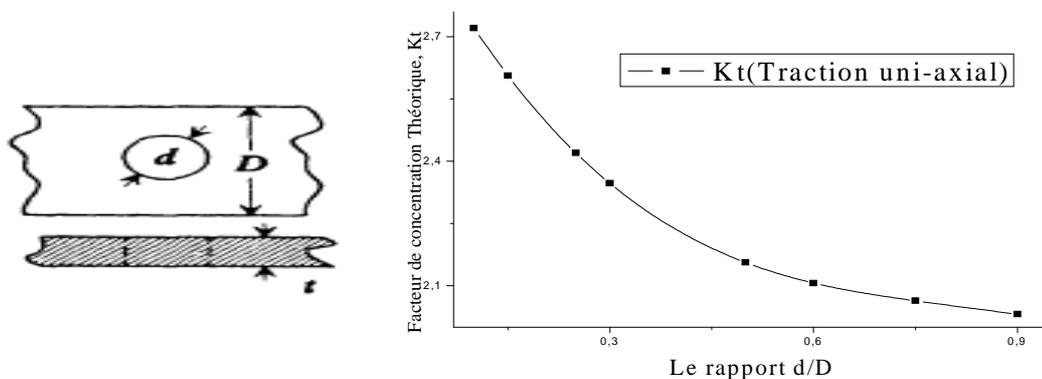


Fig. II.10 : Variation de K_t sous l'effet de traction en fonction de (d/D)

b) Effet de Flexion dans un plan

La flexion plane comme présentée sur la figure II.11, engendre deux types de contraintes au bord du trou et au bord de la plaque A et B respectivement :

i) Contrainte au bord du trou au point A :

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_A = K_t \cdot \sigma_{\text{nom}} ; \sigma_{\text{nom}} = 6 \frac{m \cdot d}{[(D^3 - d^3)t]}$$

ii) Contrainte au bord de la plaque au point B:

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_B = K_t \cdot \sigma_{\text{nom}} ; \sigma_{\text{nom}} = \frac{m \cdot D}{[(D^3 - d^3)t]}$$

Et le facteur d'intensité de contrainte K_t en fonction du rapport (d/D) est représenté sur la figure II.11. Il est à noter que ce facteur de concentration est presque constant pour une flexion au bord du trou ; mais il augmente suivant une droite en fonction de (d/D) loin du trou c'est-à-dire au bord de la plaque.

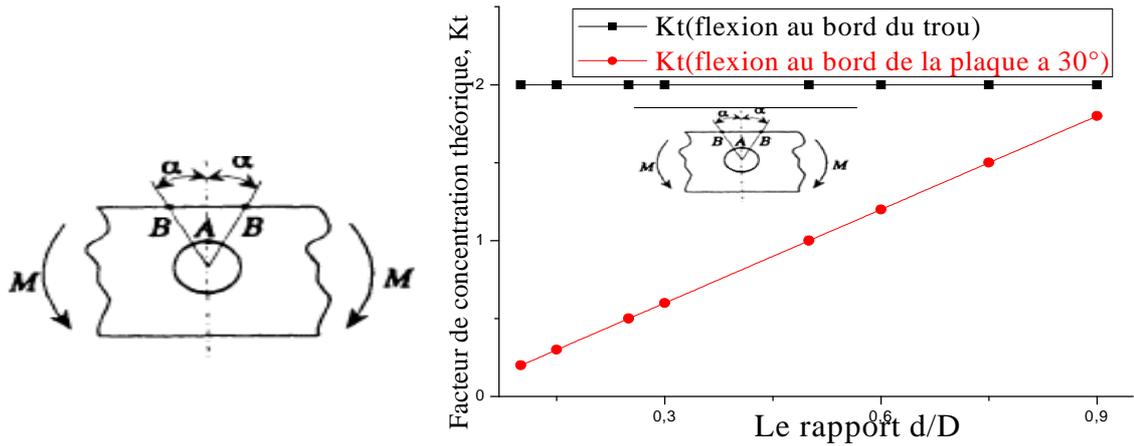


Fig. II.11 : Variation de Kt sous l'effet de flexion dans un plan en fonction de (d/D)

c) Effet de la flexion transversale :

Sous l'effet d'une flexion transversale comme présenté sur la figure II.12 et pour les contraintes donnée par :

$$\sigma = 6m/t^2 \quad ; \quad \sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \cdot \sigma_{\text{nom}} \quad ; \quad \text{et} \quad \sigma_{\text{nom}} = 6 \frac{m \cdot D}{[(D-d)t^2]}$$

On rencontre deux types de flexions :

i) Flexion simple :

$$\text{Pour } m_1 = m \ ; \ m_2 = 0 \ ; \ \nu = 0.3 \ ; \ 1 \leq d/t \leq 7 \ \text{et} \ 0 \leq d/D \leq 0,3$$

ii) Une flexion cylindrique :

$$\text{Pour } m_1 = m \ ; \ m_2 = \nu \cdot m \ ; \ \nu = 0.3 \ ; \ 1 \leq d/t \leq 7 \ \text{et} \ 0 \leq d/D \leq 0,3$$

Le facteur d'intensité de contrainte (K_t) prend la même allure mais avec un petit décalage. Il décroît jusqu'au point qui coïncide avec le point d'abscisse du rapport ($d/D=0,5$) ; puis il croit paraboliquement (Fig. II.12).

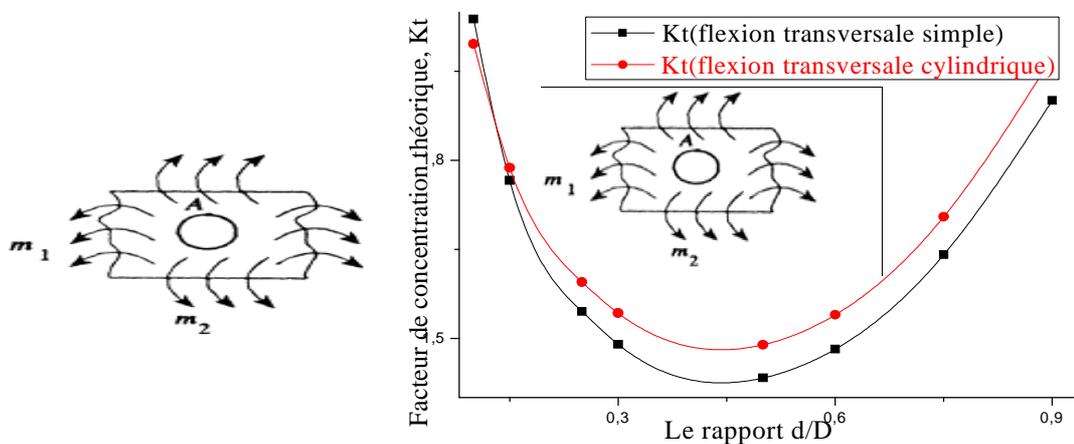


Fig. II.12 : Variation de Kt sous l'effet de flexion transversale en fonction du (d/D)

II.4.3. Plaque de largeur finie ayant un trou circulaire excentrique

La plaque de largeur finie ayant un trou circulaire excentrique de diamètre $d = 15\text{mm}$ et d'une épaisseur $t = 5\text{mm}$ est représentée sur la figure II.13. Même chose, la plaque peut être soumise à des tractions axiales ou des flexions dans le plan.

a) Effet de la traction axiale

Pour une sollicitation de traction axiale, les contraintes normale et maximale dans la section AB de la plaque, ainsi que leur relation avec le facteur d'intensité de contraintes sont données par :

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{\sigma \sqrt{1 - (d/2c)^2}}{1 - (d/2c)} \frac{1 - c/D}{1 - (c/d) \left[2 - \sqrt{1 - (d/2c)^2} \right]} ; \quad \text{ou} \quad \sigma_{\text{max}} = \sigma_B = K_t \sigma_{\text{nom}}$$

En conséquence, le facteur de concentration de contrainte K_t en fonction du rapport $(d/2c)$ est représenté sur la figure II.13.

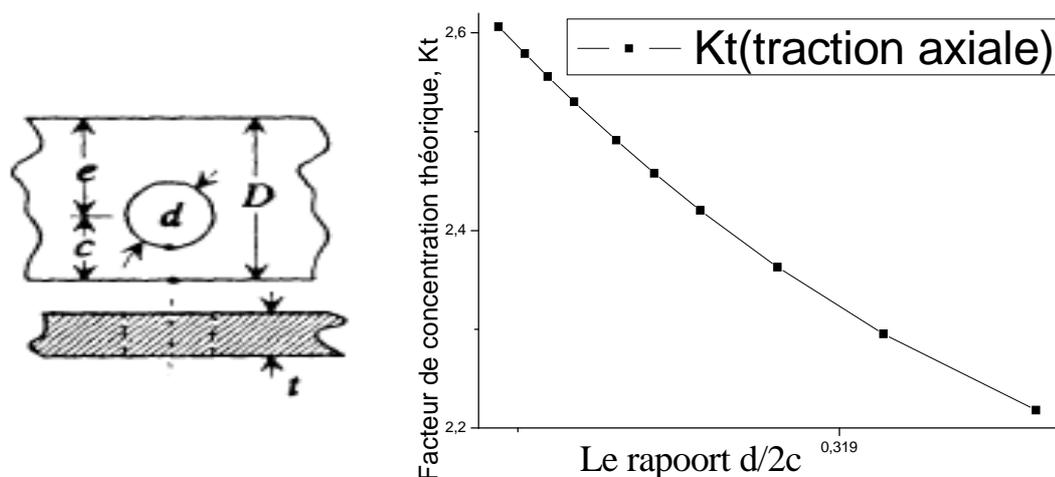


Fig. II.13 : Variation de K_t sous l'effet de traction axiale en fonction du rapport $(d/2c)$

On peut observer que le facteur de concentration de contrainte K_t , décroît en fonction de ce rapport $(d/2c)$.

a) Effet de la flexion dans un plan

La flexion de la plaque dans un plan (Fig. II.14), engendre une flexion au bord de la plaque et au bord du trou, on a:

$$\sigma_B = K_{tB} \times \sigma_{\text{nom}} \quad ; \quad \sigma_{\text{nom}} = 6M/(D^2.t) \quad ; \quad \sigma_{\text{max}} = \max(\sigma_A, \sigma_B)$$

Le facteur théorique K_t prend deux cas de courbes, pour K_{tA} au bord de la plaque est presque une droite, mais le facteur K_{tB} au bord de trou augmente en fonction de $d/2c$, ou il prend la même valeur dans le point $d/2c = 0,3$.

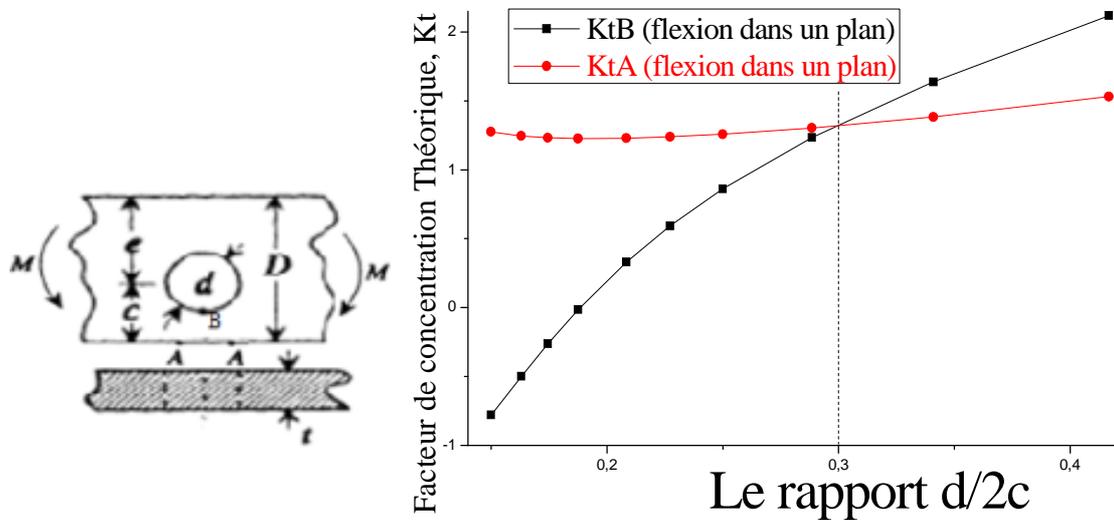


Fig. II.14: Variation de K_t sous l'effet de flexion dans un plan en fonction du $(d/2c)$

II.4.4. Plaque de largeur infinie ayant deux trous circulaires égaux

Une plaque de largeur infinie comprend deux trous circulaires de diamètre $d = 15\text{mm}$ à une distance L entre les deux centres des trous et d'une épaisseur $t = 5\text{mm}$, comme présentée sur la figure II.15 ; et la plaque est soumise à une seule **contrainte normale dans un plan**. Pour ce type de sollicitation, on rencontre deux cas de traction :

a) **Traction uni-axiale parallèle aux rangées de trous**

$$\text{C'est-à-dire : } \sigma_2 = \sigma \text{ et } \sigma_1 = 0$$

b) **Traction bi-axiale (traction dans les deux directions)**

$$\text{C'est-à-dire : } \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$$

Et dans les cas on a : $\sigma_{\max} = \sigma_B = K_t \cdot \sigma_{\text{nom}}$ et $\sigma_{\text{nom}} = \frac{\sigma \sqrt{1 - (\frac{d}{L})^2}}{1 - (\frac{d}{L})^2}$, pour $0 \leq d/L \leq 1$.

Le facteur d'intensité de contrainte théorique K_t est représenté sur la figure II.15. Il décroît en fonction du rapport (d/L) pour les deux cas de tractions ; mais dans le cas de la traction bi-axiale, il prend des valeurs petites par rapport au K_t uni-axiale (Fig. II.15).

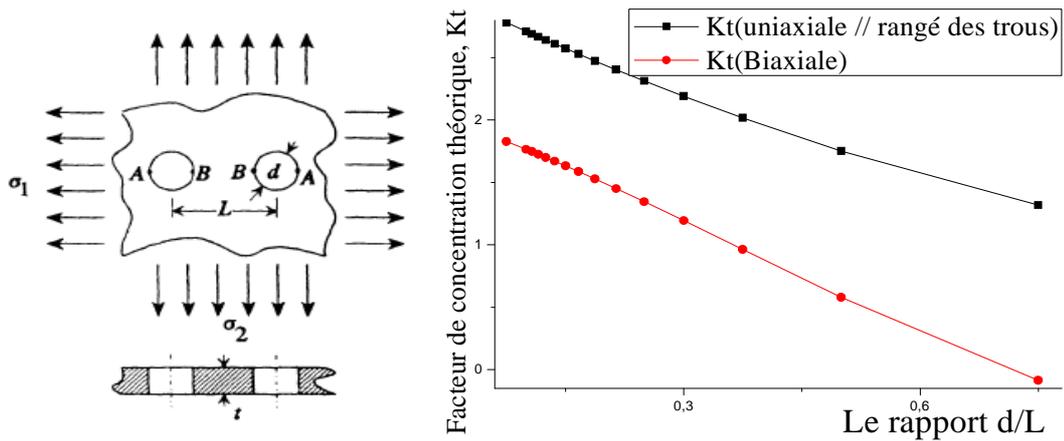


Fig. II.15: Variation de K_t sous l'effet de contrainte normale en fonction du d/L

II.4.5. Plaque de largeur infinie ayant une rangée de trous circulaires

Une plaque de largeur infinie comprenant une rangée de plusieurs trous circulaires de diamètre $d=15\text{mm}$ d'une distance L entre les centres des trous et d'épaisseur $t = 5\text{mm}$.

a) Effet de la contrainte normale dans un plan

La sollicitation dans un plan figuré dans la Fig. II.16, induit trois cas de traction :

i) Traction axiale normale dans la rangée des trous

$$\text{Où : } \sigma_2 = \sigma; \sigma_1 = 0 \text{ pour } 0 \leq d/L \leq 1 \quad \text{et } \sigma_{\max} = \sigma_B = K_t \cdot \sigma.$$

ii) Traction uni axiale parallèle à la rangée des trous

$$\text{Où : } \sigma_2 = 0; \sigma_1 = \sigma; \text{ donc : } \sigma_{\text{nom}} = \frac{\sigma}{1 - \left(\frac{d}{L}\right)} \quad \text{et } \sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \times \sigma_{\text{nom}}$$

iii) Traction bi axiale

$$\text{Où : } \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma, \quad \sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \times \sigma_{\text{nom}} \quad \text{et pour } 0 \leq d/L \leq 1; \quad \sigma_{\text{nom}} = \frac{\sigma}{1 - \left(\frac{d}{L}\right)}$$

D'après la figure II.16, on remarque que le facteur de concentration de contrainte K_t augmente en fonction du rapport (d/L) pour le cas d'une traction axiale normale dans la rangée des trous, mais il diminue pour le cas d'une traction parallèle à la rangée des trous. Tandis que pour l'effet de traction bi-axiale, il diminue légèrement et reste presque stable en fonction de d/L (Fig. II.16).

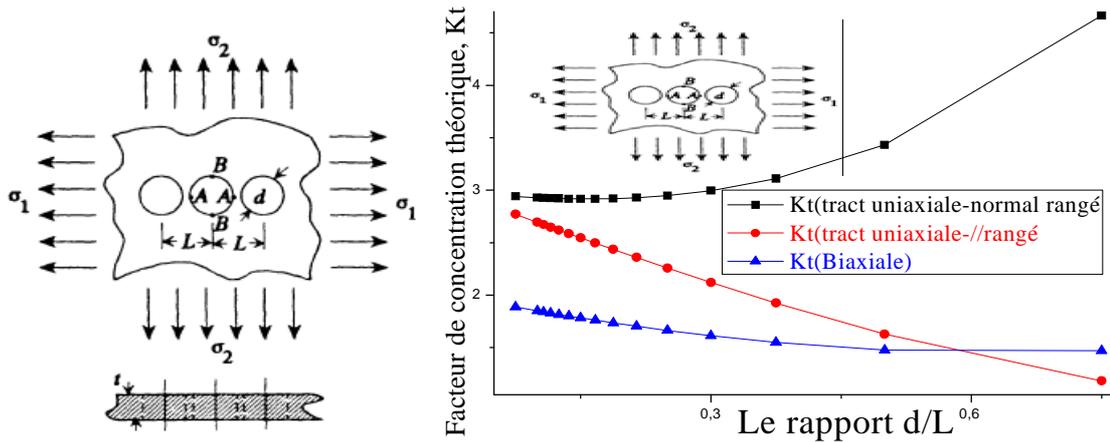


Fig. II.16: Variation de K_t pour une rangée de trou sous l'effet de contrainte normal en fonction de (d/L)

b) Effet de la flexion transversale

Sous l'effet d'une flexion transversale de la même plaque et comme illustrée sur la Figure II.17, on peut rencontrer les types de flexions suivants :

i) Une flexion sur l'axe X

Où on a : $\sigma_{nom} = 6m/t^2$, et $\sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nom}$ et on peut avoir deux cas :

- Une flexion simple avec : $m_1 = 0$; $m_2 = m$; donc le facteur de contrainte est : $K_t = K_{tx1}$
- Une flexion cylindrique: $m_1 = \nu \cdot m$; $m_2 = m$; avec $\nu = 0,3$; donc le facteur est : $K_t = K_{tx2}$.

ii) Une flexion sur l'axe Y

Où : $\sigma_{nom} = \frac{6m}{(t^2 - (\frac{d}{L}))}$; $\sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nom}$, et on peut avoir aussi deux cas :

- Une flexion simple avec : $m_1 = m$; $m_2 = 0$ donc le facteur de contrainte est : $K_t = K_{ty1}$.
- Une flexion cylindrique: $m_1 = m$, $m_2 = \nu \cdot m$; avec $\nu=0.3$ donc le facteur de contrainte est : $K_t = K_{ty2}$.

Les résultats obtenus sont représentés sur la Fig. II.17 et les quatre cas des facteurs de contraintes K_t diminuent en fonction du rapport (d/L) , mais on remarque que K_{tX} est supérieur à K_{tY} ; c'est-à-dire : $(K_{tX} > K_{tY})$.

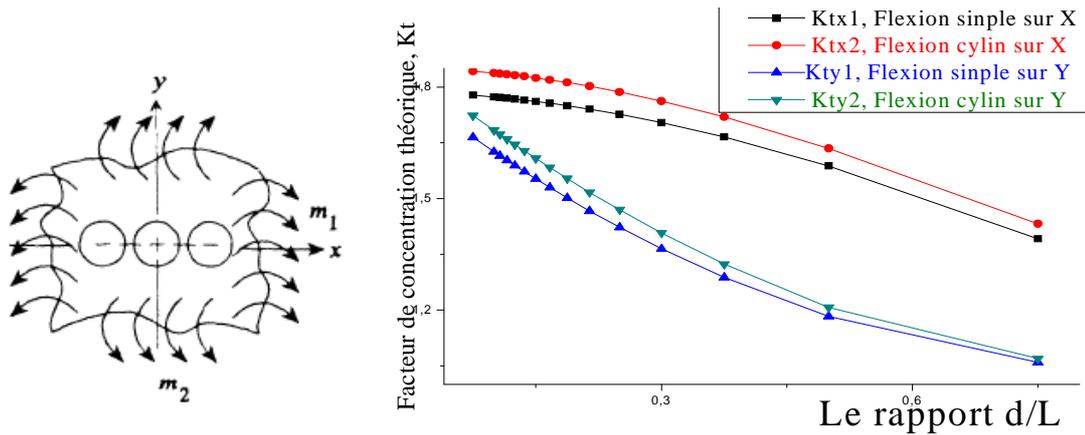


Fig. II.17: Variation de Kt sous l'effet de flexion transversale en fonction du rapport d/L

II.4.6. Plaque infinie ayant un trou elliptique

Une plaque de largeur infinie comprend un trou elliptique de dimension $2a \times 2b$ avec un rapport $r = a/b$ et une épaisseur $t = 5\text{mm}$ est considérée (Fig. II.18).

a) Effet d'une contrainte normale dans un plan

L'effet de tractions normales dans le plan de la plaque est considéré et les contraintes dans les deux points A et B sont différentes et données par :

$$\text{Pour : } -1 \leq \sigma_2/\sigma_1 \text{ et } 0,25 \leq a/b \leq 4, \text{ on a : } \sigma_A = K_{tA} \times \sigma_1 \text{ et } \sigma_B = K_{tB} \times \sigma_1$$

On observe que l'allure du facteur K_{tA} au point A pour les cas d'excitation $\sigma_1 \neq \sigma_2$ et $\sigma_1 = \sigma_2$ (pour le cas isotrope) a la même diminution en fonction du rapport (a/b) ; mais le cas du point B, le facteur K_{tB} a une augmentation en fonction de (a/b) .

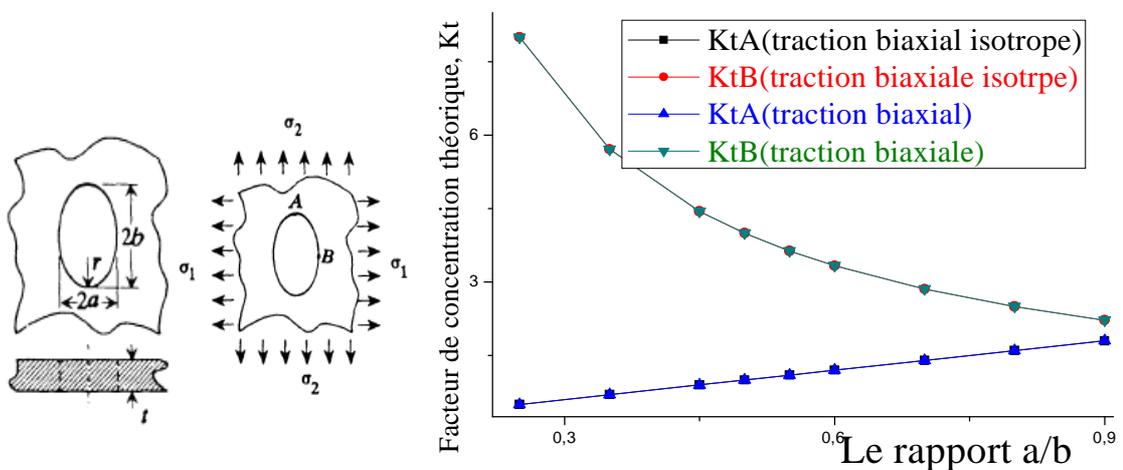


Fig. II.18 : Variation de Kt pour un trou elliptique sous l'effet des contraintes planes en fonction du rapport a/b

b) Effet de la flexion transversale

Sous l'effet d'une flexion transversale (Fig. II.19), on peut avoir trois cas de flexion:

- Une flexion simple avec : ($m_1 = m$ et $m_2 = 0$)
- Une flexion cylindrique avec : ($m_1 = m$ et $m_2 = \nu \cdot m$)
- Une flexion isotrope avec : ($m_1 = m_2 = m$)

Avec : $2a/t > 5$; $\nu = 0.3$; $0,2 \leq a/b \leq 5$ où : $\sigma = 6m/t^2$ et : $\sigma_{max} = K_t \times \sigma$.

Le facteur de contrainte K_t évolue en fonction du rapport (a/b) suivant une droite pour les cas de flexion simple et cylindrique, mais il reste constant pour la flexion isotropique (Fig. II.19).

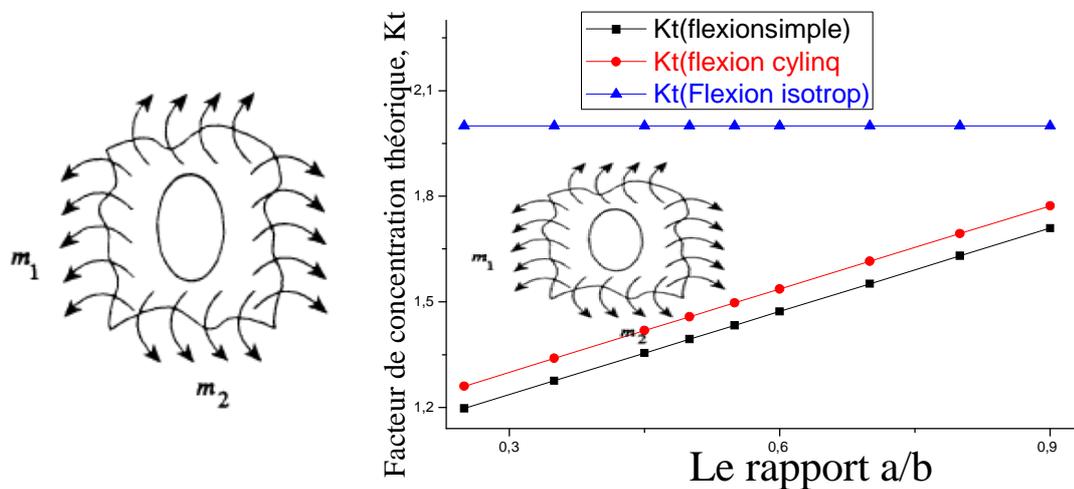


Fig. II.19 : Variation de K_t pour un trou elliptique sous l'effet de flexion transversale en fonction du rapport a/b

II.4.7. Plaque de largeur finie ayant un trou elliptique

Pour une plaque de largeur finie D , comprenant un trou elliptique central de dimension $2a \times 2b$ avec un rapport $r = a/b$ et une épaisseur $t = 5\text{mm}$ (voir Fig. II.20).

a) Effet d'une traction axiale

Sous l'effet d'une traction axiale, on a les contraintes :

$$\sigma_{nom} = \frac{\sigma}{1 - \left(\frac{2a}{D}\right)^2}; \text{ donc : } \sigma_{max} = \sigma_A = K_t \times \sigma_{nom}$$

b) Effet d'une flexion dans un plan

Pour une sollicitation de flexion dans un plan, on a:

$$\sigma_{nom} = \frac{12m.a}{(D^3 - 8a^3)t} \quad ; \quad \text{donc : } \sigma_{max} = \sigma_A = K_t \times \sigma_{nom}$$

Le facteur de contrainte théorique K_t est représenté sur la Figure II.20. Il décroît légèrement suivant une droite en fonction du rapport $(2a/D)$ pour les deux cas de sollicitations, mais les valeurs de K_t du traction axiale sont supérieures à celles de la flexion dans un plan.

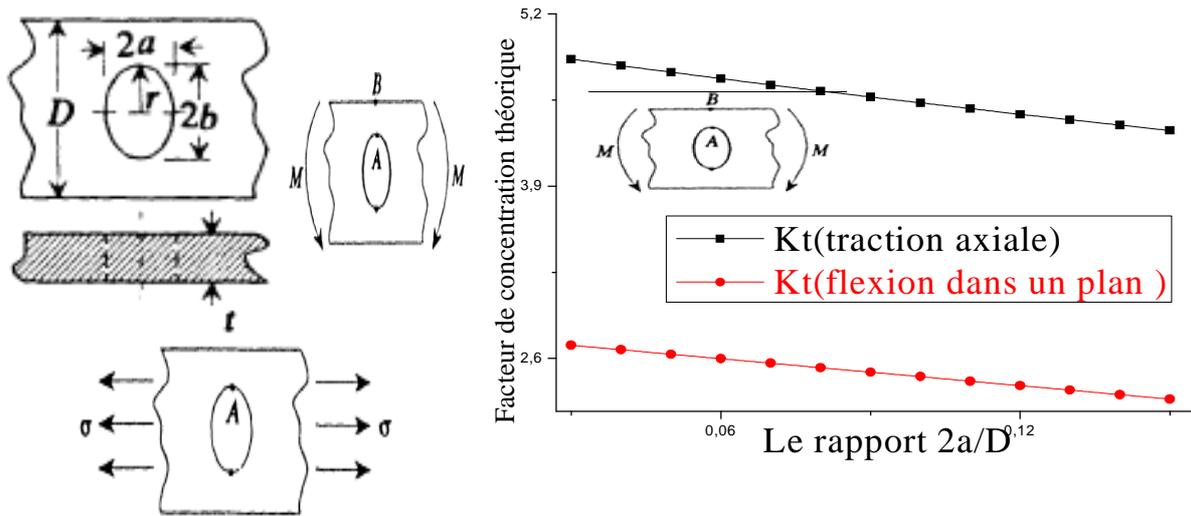


Fig. II. 20 : Variation de K_t autour d'un trou elliptique sous l'effet de traction axiale et flexion plane en fonction de $2a/D$

II.4.8. Plaque de largeur finie ayant un trou elliptique excentré

Une plaque de largeur finie D , comprend un trou elliptique excentré de dimension $2a \times 2b$ avec un rapport $r = a/b$ et une épaisseur $t = 5\text{mm}$, (Fig. II.21).

- Effet de traction axiale

Sous l'effet d'une contrainte de traction axiale σ (Fig. II.21), les contraintes dans la section AB est donnée par :

$$\sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nom} \quad , \quad \text{avec} \quad \sigma_{nom} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{c}\right)^2}}{1 - \left(\frac{a}{c}\right)} \times \frac{1 - \left(\frac{c}{D}\right)}{1 - \left(\frac{c}{D}\right) \left[2 - \sqrt{1 - \left(\frac{a}{c}\right)^2}\right]}$$

Pour : $1,0 \leq a/b \leq 8,0$, et $0 \leq a/c \leq 1$

Le facteur de contrainte K_t décroît sous l'effet de traction axiale en fonction du rapport a/c (Fig. II.21).

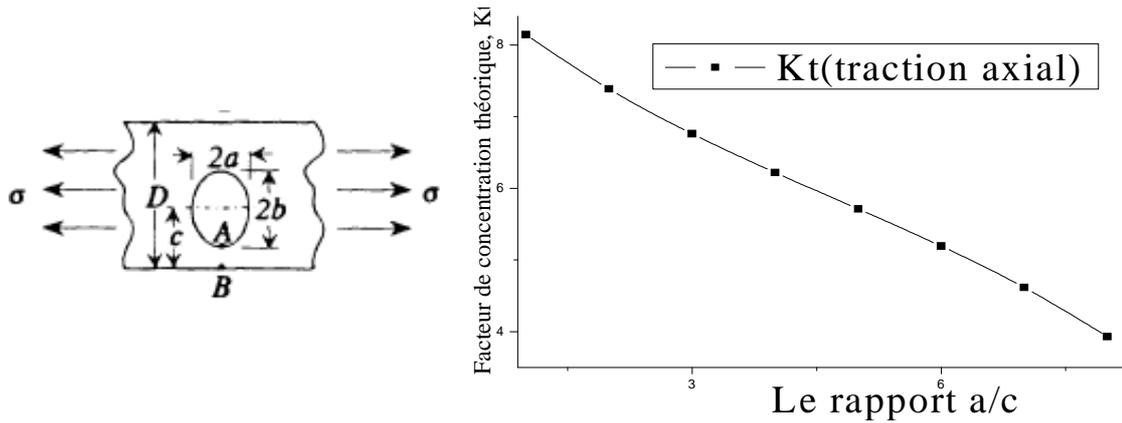


Fig. II.21: Variation de K_t pour un trou elliptique sous l'effet de traction axiale en fonction du rapport a/c

II.4.9. Plaque de largeur infinie ayant une rangée infinie des trous elliptiques

Une plaque de largeur infinie, avec une rangée des trous elliptiques de dimension $2a \times 2b$ avec un rapport $r = a/b$, avec une distance L entre chaque 2 trous, et $t = 5\text{mm}$.

- Effet d'une traction uni axiale

Les contraintes sous l'effet de traction uni-axiale (Fig. II.22), est:

$$\sigma_{nom} = \frac{\sigma}{1 - \left(\frac{2a}{L}\right)} \text{ et } \sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nom} \text{ avec : } 0 \leq 2a/L \leq 0,7, \quad \text{et } 1 \leq a/b \leq 10$$

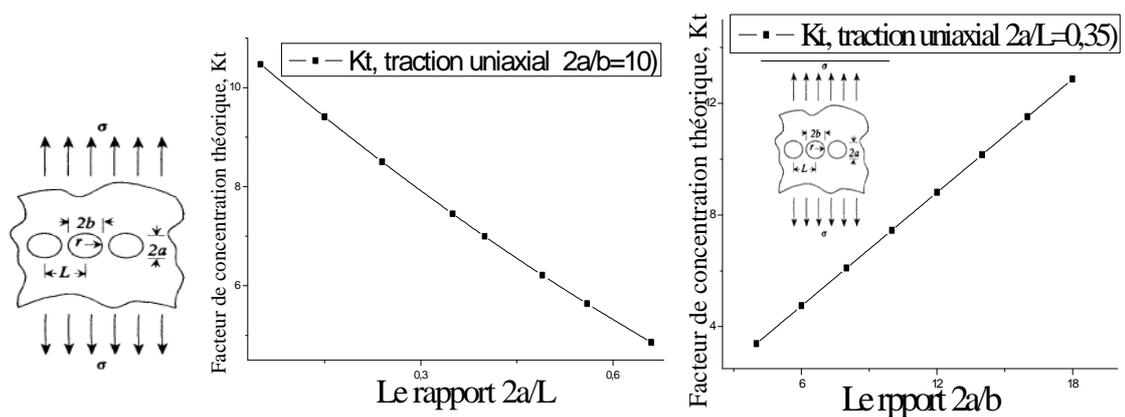


Fig. II.22 : Variation de K_t pour un rangé de trou elliptique en fonction $2a/L$ et du $2a/b$

Le facteur de concentration K_t , décroît en fonction de $2a/L$ avec la valeur de $2a/b = 10$, mais il croît en fonction de $2a/b$ avec la valeur de $2a/L = 0,35$ (Fig. II.22).

II.4.10. Trou circulaire portant un lobe semi-circulaire avec une largeur finie

Un trou circulaire de rayon R portant un lobe semi-circulaire de rayon r dans une plaque de largeur finie D=15mm, et une épaisseur t = 5mm (Fig. II.23).

- Effet d'une traction axiale

Les contraintes sous l'effet de traction uni-axiale (Fig. II.23) est:

$$\sigma_{nom} = \frac{\sigma}{1 - \left(\frac{2b}{D}\right)} \Rightarrow \sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nom} \quad ;$$

avec: $0 \leq 2b/D \leq 1$; et $0,2 \leq r/R \leq 4,0$.

Le facteur de concentration K_t , sous l'effet de traction pour une plaque trouée portant un lobe semi-circulaire en général décroît en fonction $2b/D$, mais prend des valeurs inférieure à celles de la plaque infiniment large (Fig. II.23).

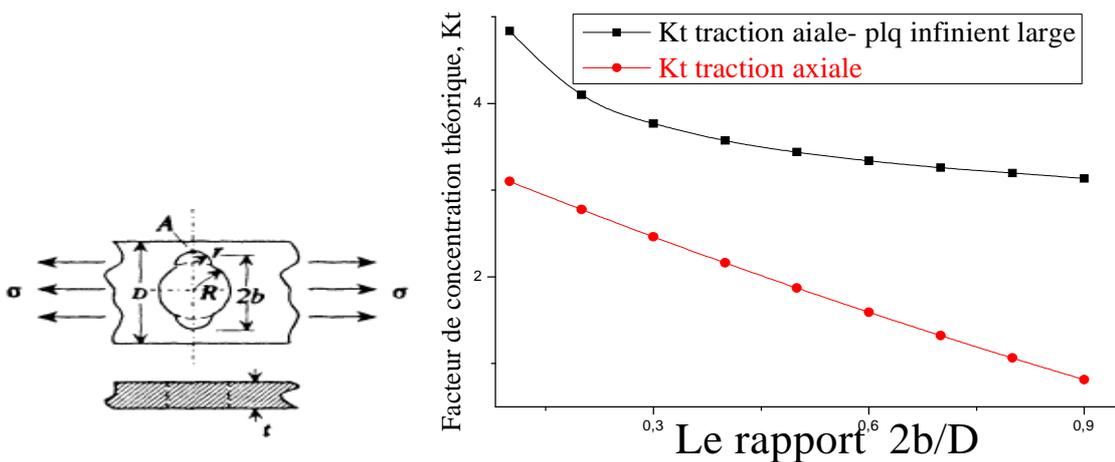


Fig. II.23 : Variation de K_t pour un trou portant un lobe sous l'effet de traction axiale en fonction du rapport $2a/D$

II.4.11. Trou rectangulaire avec des coins arrondis avec une largeur infinie

Trous rectangulaire de rayon R portant des coins arrondis de rayon r dans une plaque de largeur finie D=15mm, et d'une épaisseur t=5mm (Fig. II.24).

- Effet d'une traction uni-axiale

Sous l'effet de traction axiale σ (Fig. II.24), On a: $\sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nom}$.

Le facteur de contrainte K_t , évolue en fonction du rapport des dimensions du rectangle (a/b).

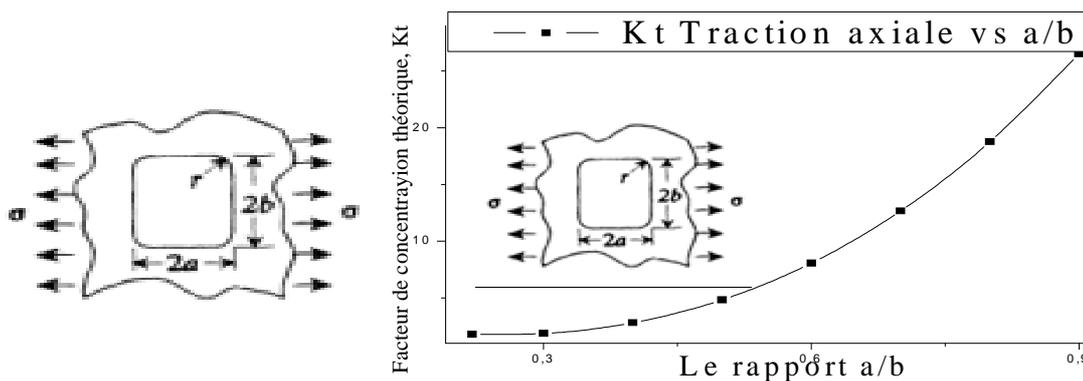


Fig. II.24 : Variation de K_t pour un trou rectangulaire sous l'effet de traction axiale en fonction du rapport a/b

II.5. Facteur de concentration dans les entailles au bord des plaques

II.5.1. Une seule entaille en forme de U au bord de la plaque semi-infinie

Une entaille en forme de U de rayon r est considérée au bord de la plaque semi-infinie, et d'une épaisseur $t = 5\text{mm}$ (Fig. II.25).

a) Traction uni-axiale

Sous l'effet de traction uni-axiale σ , on a:

$$\sigma_{\max} = K_t \times \sigma_{\text{nom}} ; \text{ pour } 1 \leq h/r \leq 361$$

b) Flexion transversale

Sous l'effet de flexion transversale, on considère seulement une seule entaille elliptique (Fig. II.25) et on a:

$$\sigma = m/t^2, \text{ pour } 0 \leq h/r \leq 7, \nu = 3 \text{ et } \sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \times \sigma \text{ et quand } h/t \rightarrow \infty.$$

Le facteur de contrainte K_t , évolue en fonction de h/r sous l'effet de charge extérieure soit traction axiale ou flexion transversale, mais l'évolution pour la traction axiale est importante.

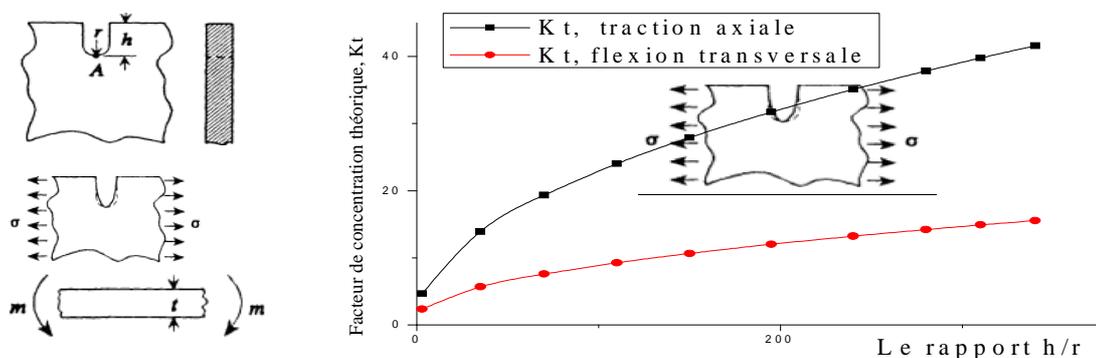


Fig. II.25: Variation de K_t sous l'effet de traction axiale (une seule entaille)

II.5.2. Deux entailles en forme de U au bord de la plaque de largeur finie

Deux entailles en forme de U de rayon r dans le bord de la plaque de largeur finie D , et d'une épaisseur $t = 5\text{mm}$ (Fig. II.26).

a) Effet d'une traction axiale

Sous l'effet de charge de traction axiale P (Fig. II.26), on a :

$$\sigma_{max} = \sigma_A = K_t \sigma_{nom}, \quad \sigma_{nom} = \frac{P}{td} \quad \text{avec:} \quad 0.1 \leq h/r \leq 2.0$$

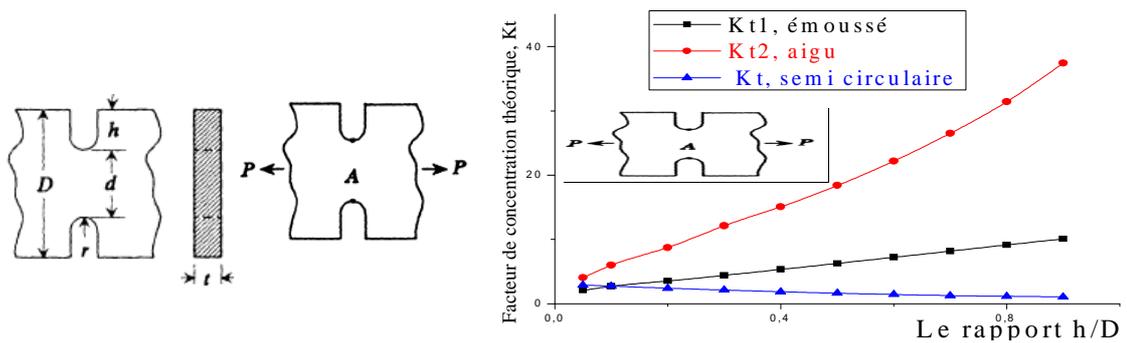


Fig. II.26: Variation de K_t sous l'effet de traction axiale (deux entailles en U)

Sous l'effet de charge de traction, pour l'entaille aigu le facteur K_{t1} (Fig. II.26), l'évolution est importante par rapport à K_{t2} de l'entaille émoussée, ainsi que pour le cas de l'entaille semi-circulaire ($h/r = 1$), on observe une légère diminution du facteur.

b) Effet d'une flexion dans un plan

Sous l'effet de la flexion plane (Fig. II.27), les contraintes maximales est :

$$\sigma_{max} = \sigma_A = K_t \sigma_{nom}, \quad \text{avec:} \quad \sigma_{nom} = \frac{6M}{d^2t},$$

Le facteur de concentration de contraintes est :

$$K_t = K_{t2}, \quad \text{pour } 0.1 \leq h/r \leq 2; \quad \text{et} \quad K_t = K_{t1}, \quad \text{pour } 2 \leq h/r \leq 50.$$

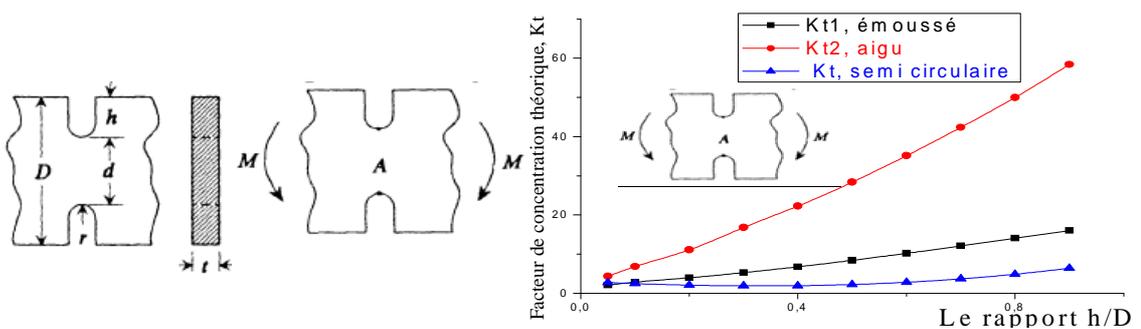


Fig. II.27 : Variation de K_t sous l'effet de flexion dans un plan (deux entailles en U)

Le Facteur K_t , évolue en fonction du rapport h/D sous l'effet de flexion dans un plan, pour l'entaille aiguë le facteur K_{t1} (Fig. II.27), l'évolution est importante par rapport à K_{t2} de l'entaille éoussée, ainsi pour le cas de l'entaille semi-circulaire ($h/r = 1$), on observe que le facteur augmente légèrement en fonction de h/D .

c) Effet d'une flexion transversale

Sous l'effet de flexion transversale (Fig. II.28), seulement une seule entaille elliptique, les contraintes maximales est :

$$\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \sigma_{\text{nom}}, \quad \text{avec:} \quad \sigma_{\text{nom}} = \frac{6M}{t^2d}$$

Le facteur de concentration de contraintes est :

$$K_t = K_{t1}, \quad \text{pour } 0.1 \leq h/r \leq 2.0 \quad ; \quad \text{et} \quad K_t = K_{t2}, \quad \text{pour } 2.0 \leq h/r \leq 50.0 \quad ;$$

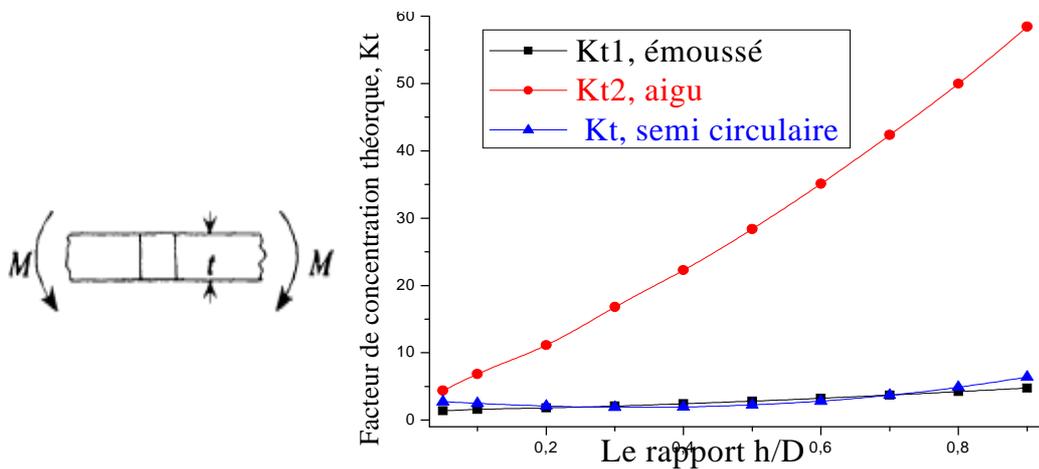


Fig. II.28 : Variation de K_t sous l'effet de flexion transversale (deux entailles en U)

Le Facteur K_t , évolue en fonction du rapport h/D sous l'effet de flexion transversale, pour l'entaille aiguë le facteur K_{t2} , voir la Fig. II.28, mais pour l'entaille éoussée est K_{t1} , ainsi que pour l'entaille semi-circulaire K_t ($h/r = 1$), il y a une légère évolution presque stable.

II.5.3. Une seule entaille en forme de U au bord de la plaque finie

Une seule entaille en forme de U de rayon r dans le bord de la plaque de largeur finie D , et d'une épaisseur $t = 5\text{mm}$ (Fig. II.29).

a) Effet d'une traction axiale

Sous l'effet de la charge de traction axiale P (Fig. II.29), les contraintes nominales et maximales sont:

$$\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \cdot \sigma_{\text{nom}}, \quad \text{avec } \sigma_{\text{nom}} = \frac{P}{td}; \quad \text{Pour } 0.1 \leq h/r \leq 2.0$$

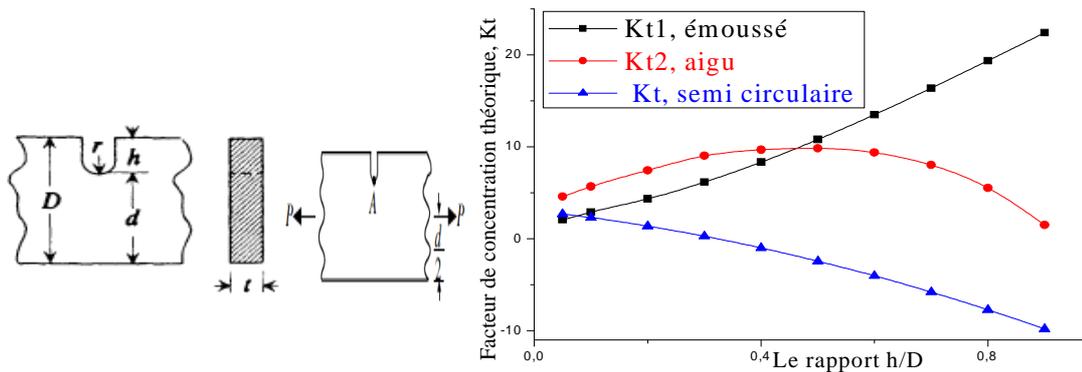


Fig. II.29 : Variation de K_t sous l'effet d'une force traction axiale (une entaille en U)

D'après la Fig. II.29, le Facteur K_{t1} pour l'entaille évolue émoissée en fonction du rapport h/D sous l'effet de traction, le Facteur K_{t2} pour l'entaille aiguë augmente puis il diminue en fonction de h/D . et le facteur K_t de l'entaille semi-circulaire ($h/r=1$), on observe une décroissance en fonction de h/D .

b) Effet d'une flexion dans un plan

L'effet de flexion plane (Fig. II.30), à une seule entaille elliptique le facteur K_t :

$$K_t = K_{t1}, \quad \text{avec: } 0.1 \leq h/r \leq 2.0 ;$$

$$K_t = K_{t2} \quad \text{avec } 2.0 \leq h/r \leq 50.0$$

Pour les contraintes on a : $\sigma_{\max} = \sigma_A = K_t \sigma_{\text{nom}}, \quad \sigma_{\text{nom}} = \frac{6M}{d^2t}$

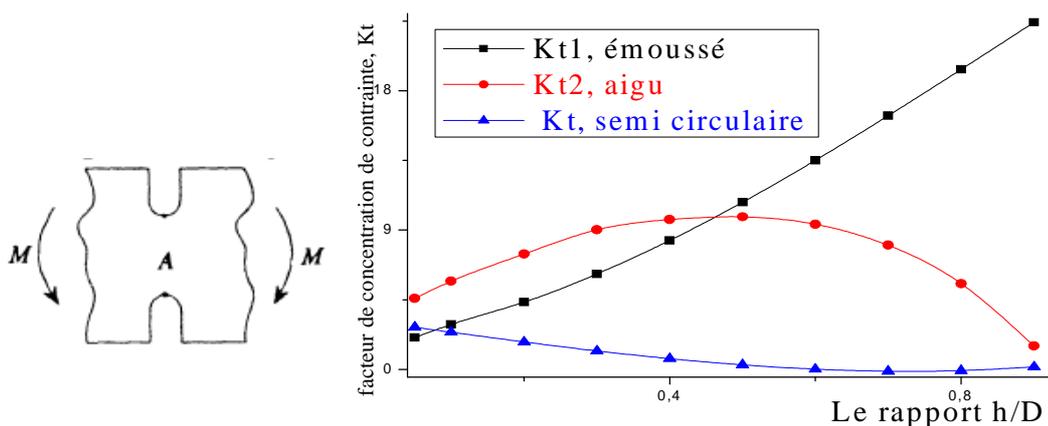


Fig. II.30: Variation de K_t sous l'effet de flexion dans un plan (deux entailles en U)

Les facteurs K_{t1} , K_{t2} (Fig. II.30), prennent la même allure que celle de la Fig. II.29 pour l'entaille aiguë et émoissée, mais pour l'entaille semi-circulaire, K_t ($h/r = 1$), on observe une légère diminution presque stable.

II.5.4. Des entailles multiples semi-circulaires opposées avec une largeur finie

Plusieurs entailles semi-circulaire opposées de rayon r aux bords de plaque de largeur finie D , et d'une épaisseur $t = 5\text{mm}$ (Fig. II.31).

- Effet d'une traction axiale:

Le facteur K_t sous l'effet de charge de traction axiale P (Fig. II.31):

$$K_t = \frac{\sigma_A}{\sigma_{nom}} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}}, \text{ avec } \sigma_{nom} = \frac{P}{td}$$

Pour : $2r/D \leq 0.4$; et $0 \leq 2r/L \leq 1$

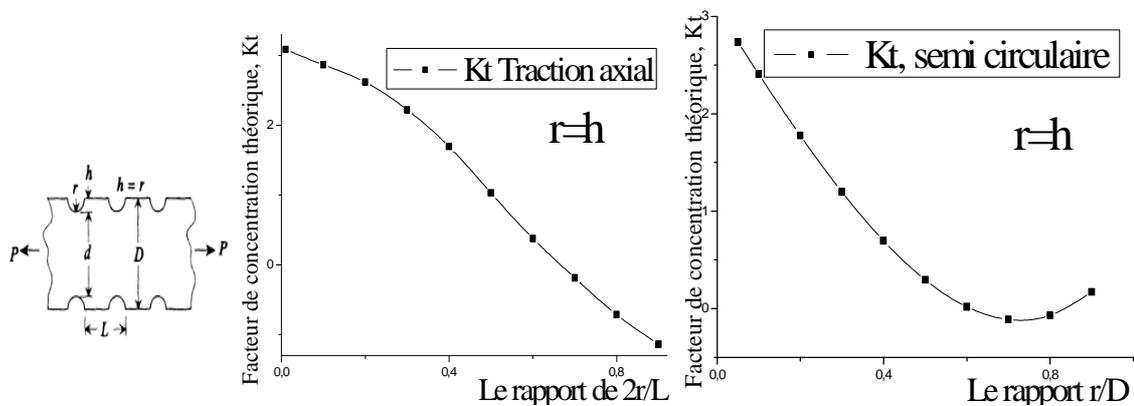


Fig. II.31 : Variation de K_t sous l'effet de traction axiale (entailles opposées en U)

On observe que le facteur de concentration K_t pour une plaque de largeur finie ayant plusieurs entailles voir la Fig. II.31, diminue en fonction du rapport $2r/L$ et du r/D .

II.5.5. Une seule entaille en forme de V au bord de la plaque de largeur finie

Une seule entailles en V de rayon r et d'un angle α aux bords de plaque de largeur finie D , et d'une épaisseur $t = 5\text{mm}$. (Fig. II.32).

- Effet d'une flexion transversale

Sous l'effet de flexion transversale, (Fig. II.32).

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} = \frac{\sigma_A}{\sigma_{nom}}, \text{ et } \sigma_{nom} = \frac{6M}{td^2};$$

Pour : $90^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ$ et $0,5 \leq h/r \leq 4,0$

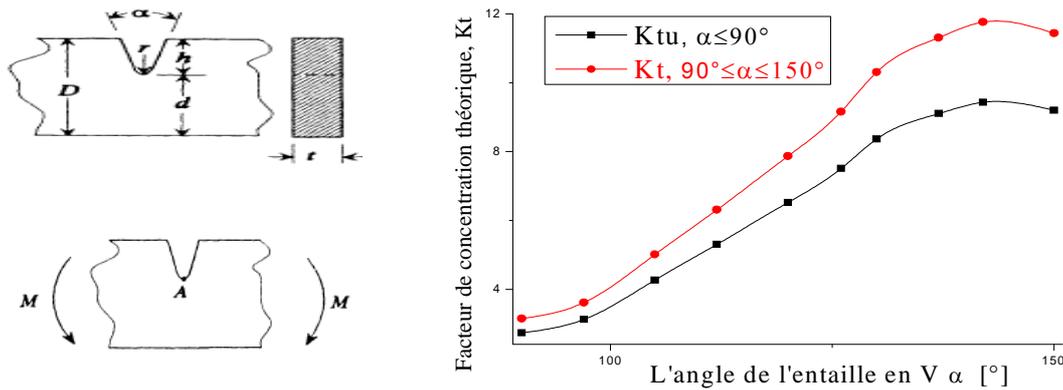


Fig. II.32: Variation de K_t en fonction de l'angle α sous l'effet de flexion transversale (entailles en V)

On observe que le facteur K_t pour une plaque de largeur finie ayant une entaille en V d'après la Fig. II.32, évolue en fonction de l'angle α , ainsi que la valeur du facteur K pour $\alpha \geq 90^\circ$ est supérieure à celle du facteur en $\alpha \leq 90^\circ$ (facteur $K_t = K_{tu}$, la forme U).

II.5.6. Deux entailles en forme de V opposées au bord de plaque de largeur finie

Deux entailles en V de rayon r et d'un angle α aux bords de la plaque de largeur finie D , et d'une épaisseur $t = 5\text{mm}$ (Fig. II.33).

- Effet d'une traction axiale P

Sous l'effet de flexion transversale, le facteur K_t de l'entaille V est :

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} = \frac{\sigma_A}{\sigma_{\text{nom}}}, \quad \sigma_{\text{nom}} = \frac{P}{td}$$

- Pour $\alpha < 90^\circ$, et $2h/D = 0,398 \Rightarrow K_t = K_{tu1}$;
- Pour $\alpha < 60^\circ$, et $2h/D = 0,667 \Rightarrow K_t = K_{tu2}$;
- Pour l'angle d'entaille : $90^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ$ et $2h/D = 0,398$ donc le facteur de contrainte est : $1,6 \leq K_t = K_{t1} \leq 3,5$;
- Pour l'angle α de l'entaille : $60^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ$, $2h/D = 0,667$ donc le facteur de contrainte est : $1,6 \leq K_t = K_{t2} \leq 2,8$.

On observe que le facteur de concentration K_t pour une plaque de largeur finie ayant deux entailles en V d'après la Fig. II.33, sous l'effet de traction axiale évolue en fonction de l'angle α pour les deux cas K_{t1} , et K_{t2} . alors que pour les valeurs de $\alpha \leq 60^\circ$ et $\leq 90^\circ$ le facteur $K_t = K_{tu1}$, K_{tu2} est presque stable.

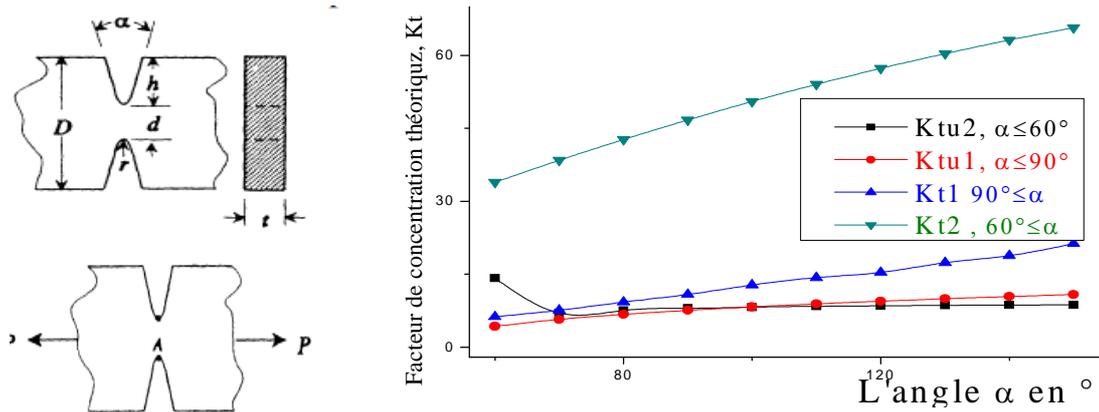


Fig. II.33 : Variation de K_t sous l'effet de traction axiale (deux entailles en V)

II.6. Conclusion

Les résultats de calcul obtenus pour les coefficients d'intensités de contraintes pour les différents types des plaques considérées portant de différentes géométries de trou, donnent des distributions normales de contraintes attendues. Cette étude montre que:

- La présence des trous circulaire dans les plaques va conduire a la distribution normale de contrainte maximale et augmente avec la réduction de la géométrie du trou circulaire vert un trou elliptique.
- L'influence de la direction et le type de sollicitation par rapport aux plaques portant un trou elliptique ou rectangulaire, ou un trou avec un lobe semi-circulaire, et la plaque qui comprend une rangée de plusieurs trous.
- L'augmentation du facteur de concentration de contrainte avec la réduction de la géométrie des trous et également du rapport diamètre / largeur de la plaque.

En général, les résultats de simulation montrent que la répartition des contraintes augmente dans ces zones qui affaiblissent la structure et tendre vers l'amorçage de la fissure.

Références

- [1] W. D. Pilkey, *Peterson's Stress Concentration Factors*, Wiley, New York, 1997.
- [2] A Santos. *Determination of stress concentration factors on flat plates of structural steel*, 2nd International Meeting for Researchers in Materials and Plasma Technology. Journal of Physics: Conference Series 466, 2013.
- [3] M. Tolga Ozkan and al. *Determination of the stress concentration factor K_t in a rectangular plate with a hole under tensile stress using different methods*, Fracture Mechanics and Modeling, Materials Testing September 30, 2016.
- [4] I. S. Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity*, 2nd ed; Krieger, Malabar, FL. 1956.
- [5] T. R. Kane, and R. D. Mindlin, *High-Frequency Extensional Vibrations of Plates*, ASME Journal Of Applied Mechanics, Vol. 23, pp. 277-283. 1956.
- [6] Samuel Forest, Michel Amestoy et al, *Mécanique des milieux continus*, École des mines, Paris, 2009-2010.
- [7] Laurent Baillet, *Concentration de contraintes autour d'un trou circulaire Fonction d'Airy*, Élasticité /UFR Mécanique / UJF Grenoble.
- [8] Walter D. Pilkey, Deborah F. Pilkey, *Stress Concentration factors*, 3eme edition TA417.6.P43, 2007.
- [9] L. Chevalier, A. Eddhahak, Y. Maalej, *Concentration de contraintes : différentes Techniques de mesures*, (Première partie), Revue Technologie, n°133, 2004.
- [10] H. Roloff, W. Matek, *Maschinenelemente Vieweg verlag*, 13 Auflag (1994).
- [11] AFNOR, *Mécanique Normes générales*, Recueil des normes françaises (1988).
- [12] V. L. Maleev, and J. B. Hartman, *Machine Design, 3rd ed.*, International Textbook Co., Scranton, PA, 1954.
- [13] A. Leyer, *Maschinenkonstruktionslehre*, Birkh'ouser Verlag, Basel, Switzerland: English language edition. *Machine Design*, Blackie & Son, London, 1974.
- [14] W. D. Pilkey, Peterson's, *Stress Concentration Factors*, Wiley, New York, 1997.

Chapitre III

Analyse des fissures dans les
plaques planes

III.1. Introduction

Ce chapitre présente les principes de base de la mécanique de la rupture nécessaires pour aborder la fissuration dans les plaques trouées. En générale, ces trous peuvent être circulaires, elliptiques ou d'autres formes d'entailles et sont très petits, ils peuvent être considérés comme de fissures. La Figure III.1 montre la présentation d'une fissure dans une plaque de dimensions infinies et sous l'effet d'un simple essai de traction. Comme a présenté dans le chapitre précédent la présence des différentes géométries des trous dans les plaques et leur effet qui engendre des concentrations des contraintes qui aboutissent à un amorçage de fissure utilisant la mécanique de la rupture au point de fissuration. Dans la zone singulière, le champ de contraintes présente une singularité d'ordre ($r^{-1/2}$) à la pointe de fissure. L'intensité de la singularité est caractérisée par les paramètres appelés facteurs d'intensité de contraintes, notés par (K_I , K_{II} et K_{III}) pour chacun des modes élémentaires.

A l'aide de la théorie d'élasticité, Irwin [1-2] a montré que, en déformation ou en contrainte plane, les déplacements et les contraintes peuvent être exprimés en fonction des facteurs d'intensité de contraintes (K) qui est généralement exprimé sous la forme :

$$K = f(\sigma\sqrt{\pi \cdot c})$$

Où c : est la longueur de fissure et σ est la contrainte appliquée. Le terme f caractérise les effets de largeur, de forme de la fissure, et la position le long du front de fissure. Menouillard [3] a montré la façon de calculer les nouveaux champs asymptotiques et certains résultats intéressants ont été explicités.

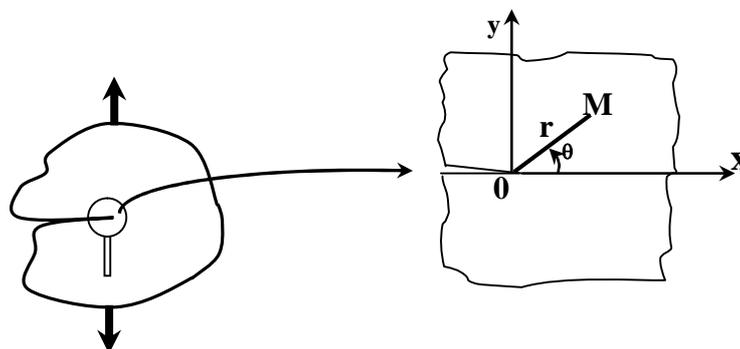


Fig. III.1 : Repère locale en voisinage du front de Fissure dans un milieu continu

III.2. Mise en équations des fissures

III.2.1. Champ de contraintes et de déformations en tête de la fissure

Au cours de la seconde guerre mondiale, George R. Irwin [1] s'est intéressé à la fracture du blindage en acier lors de la pénétration par les munitions. Ici on s'intéresse aux champs de contrainte et de déplacement dans un milieu 2Dinfini qui possède une fissure de longueur $2c$ et qui est soumis tour à tour aux 3 sollicitations des modes fondamentaux à l'infini en l'absence de force de volume(Fig.III.2).

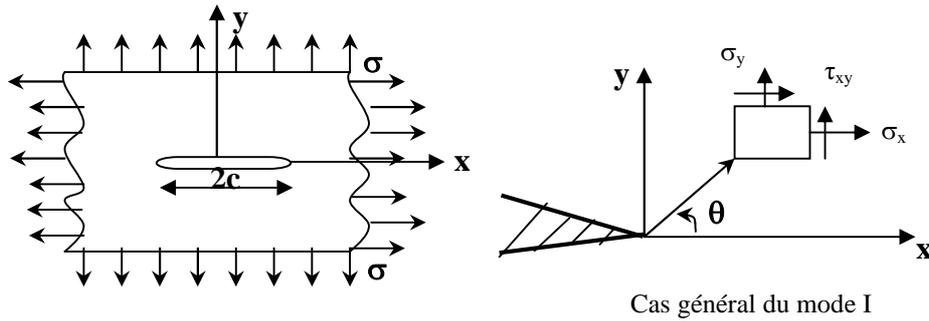


Fig. III.2 : Champ de contrainte dans la tête de fissure (le cas du mode I)

Par rapport au système de coordonnées (X, Y, Z) et en chaque point (x, y, z) , les contraintes sont définies par : $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$; et les équations d'équilibre sont données par :

$$\sigma_{ij} = 0 = \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Et si les déplacements respectives sont u, v et w , les déformations sont données par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} & ; & \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y} & ; & \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial W}{\partial z} & ; & \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Dans le cas des contraintes planes on a: $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

Tandis que dans le cas des déformations planes on a : $\varepsilon_z = 0$, avec : $\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$

Pour les plaques planes bidimensionnelles en 2D, les systèmes d'équations ci-dessus deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (III.3)$$

Et: $\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} ; \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} ; \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}$ (III.4)

Ces équations doivent vérifier les équations d'équilibre tout en introduisant une fonction de contrainte (fonction d'Airy) $F(x,y)$ ou $\phi(x, y)$ où les contraintes seront données par :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} ; \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} ; \tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (III.5)$$

Sachant que la relation contrainte-déformation pour un matériau isotrope est donnée :

$$\begin{cases} E \cdot \varepsilon_x = \sigma_x - \nu \sigma_y \\ E \cdot \varepsilon_y = \sigma_y - \nu \sigma_x \\ \mu \cdot \gamma_{xy} = \tau_{xy} \end{cases} \quad (III.6)$$

Où: $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Avec E , μ , et ν sont respectivement le module d'élasticité longitudinal, le module de cisaillement, et le coefficient de poisson.

En dérivant les déplacements dans l'équation (III.2), on obtient la condition de compatibilité des déformations suivante:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (III.7)$$

En remplaçant (III.5) et (III.6) dans (III.7) on obtient l'équation de compatibilité en fonction de la fonction d'Airy comme suit:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (III.8)$$

Ou bien: $\nabla^2 \nabla^2 F = 0$ avec $\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$ (III.9)

Donc la fonction de contraintes $F(x, y)$ doit être bi harmonique ; et pour les milieux plans en élasticité linéaire, il faut que cette fonction satisfait l'équation (III.9). De même, les

contraintes calculées à partir de l'équation (III.5) doivent satisfaire les conditions aux limites du milieu ou de la plaque.

En général, pour résoudre l'équation (III.8), on fait appel à des solutions de formes complexes :

$$Z(z) = \text{Re } Z + i \cdot \text{Im } Z \quad \text{avec: } Z = x + i \cdot y$$

La fonction $Z(z)$ doit être analytique c'est à dire qu'elle satisfait aux conditions de Cauchy-Riemann [4-5] c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Re } Z}{\partial x} &= \frac{\partial \text{Im } Z}{\partial y} = \text{Re } \frac{dZ}{dz} \\ \frac{\partial \text{Im } Z}{\partial x} &= -\frac{\partial \text{Re } Z}{\partial y} = \text{Im } \frac{dZ}{dz} \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Pour le mode I de rupture, Westergaard [6] a proposé la fonction suivante :

$$F = \text{Re } \bar{Z} + y \cdot \text{Im } \bar{Z} \quad (\text{III.11})$$

$$\text{Où : } \bar{Z} = \frac{d\bar{Z}}{dz} ; \quad \bar{Z} = \frac{dZ}{dz} \quad (\text{III.12})$$

Pour les conditions de l'équation (III.10), on a :

$$\nabla^2 \text{Re } Z = \nabla^2 \text{Im } Z = 0 \quad (\text{III.13})$$

Cela montre que l'équation (II.9) satisfait automatiquement l'équation de compatibilité (III.9). Ainsi, en utilisant les équations (III.5), les contraintes peuvent être données par :

$$\begin{cases} \sigma_x = \text{Re } Z - y \cdot \text{Im } Z \\ \sigma_y = \text{Re } Z + y \cdot \text{Im } Z \\ \tau_{xy} = -y \cdot \text{Re } Z \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

Aussi il faut trouver une fonction $Z(z)$ qui satisfait aussi les conditions aux limites pour le milieu considéré. Dans le cas d'une plaque infinie (Fig. III.2), Westergaard [6] a aussi proposé la fonction de contrainte de la forme suivante :

$$Z = \frac{\sigma \cdot z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad \text{avec: } z = x + i \cdot y \quad (\text{III.15})$$

La fonction Z est analytique sauf sur le domaine : $(-a \leq x \leq a \text{ et } y = 0)$.

Lorsque z tend vers ∞ on aura : $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, et $\tau_{xy} = 0$.

Et sur la surface de la fissure on a : $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$.

Il serait plus judicieux de changer la variable z en $(z+a)$ c'est-à-dire le changement de l'origine du centre vers la tête de fissure. En général, Z prend la forme :

$$Z = \frac{f(z)}{\sqrt{z}} \quad (\text{III.16})$$

Où $f(z)$ doit être réelle et constante à l'origine de la tête de fissure notée par K_I , ainsi:

$$Z_{z \rightarrow 0} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi z}} \quad (\text{III.17})$$

Pour une formulation théorique de la fracture qui continue de trouver une large application, Irwin a montré que le champ de contrainte $\sigma(r,\theta)$ au voisinage d'une fissure infiniment vive pouvait être décrit mathématiquement en changeant en coordonnées polaires ($z = r.e^{i\theta}$).

Les contraintes peuvent être alors calculées utilisant les équations (III.14) et (III.17), et on obtient:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \begin{cases} \text{En contraintes planes} & \sigma_z = 0 \\ \text{En déformation planes} & \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

Et le paramètre K est appelé « facteur d'intensité des contraintes ».

Dans l'hypothèse d'un matériau élastique, les contraintes sont infinies au front de la fissure. En s'appuyant sur les travaux de pionnier de Griffith [7], Irwin [2], a montré plus précisément que les contraintes au voisinage du front de fissure prennent la forme:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta) \quad (\text{III.19})$$

Où r et θ sont les coordonnées polaires centrées sur la pointe de la fissure, K_{I-III} sont les facteurs d'intensité de contraintes pour les trois modes fondamentaux de la rupture, et f_{ij}^{I-III} sont des fonctions angulaires de contraintes connues pour chaque mode et chaque type de contrainte $\sigma_{ij}^{(1)}$ appliquées au front de la fissure.

III.2.2. Etude des facteurs d'intensité de contrainte et le taux de la restitution d'énergie

Le facteur d'intensité de contrainte joue un rôle important en fonction du taux de la restitution de l'énergie pour les différents modes de rupture.

III.2.2.1. Mode I

Le mode I est un mode d'ouverture et d'après les formules précédentes on peut écrire:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{III.20})$$

Ce mode est fonction de l'amplitude de la singularité en $1/\sqrt{r}$ noté par K_I et qui vaut dans le cas présent pour une fissure de longueur $2c$ et pour un corps infini soumis à une traction σ :

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi c} \quad (\text{III.21})$$

Où nous avons utilisé le module de cisaillement μ . De la même manière, en état plan de contrainte, le déplacement au front de la fissure est donné par:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{2}{1+\nu} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{III.22})$$

Aussi, il est élégant de regrouper les expressions du champ de déplacement en front de fissure en états plans de déformation et de contrainte (III.21) en une seule expression:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

En introduisant la constante de Kolosov, définie par:

$$\begin{cases} \kappa = 3 - 4\nu & \text{en état plan de déformation} \\ \kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{en état plan de contrainte} \end{cases}$$

Et grâce aux expressions des contraintes et déplacements en front de fissure, il est possible de calculer l'énergie de déformation en front de fissure et le taux de restitution de cette énergie quand la fissure croît d'un petit incrément. Après développements, nous obtenons la relation importante entre le taux de restitution d'énergie et le facteur d'intensité de contrainte comme:

$$G_I = \frac{K_I^2}{E^*} \quad (\text{III.24})$$

Où : E^* est le module de Young effectif donné par :

$E^* = E/(1-\nu^2)$, pour un état plan de déformation;

$E^* = E$, pour un état plan de contrainte.

III.2.2.2. Mode II

En générale, le mode II est un mode de glissement ou cisaillement pur. Les contraintes dans le milieu élastique bidimensionnel possédant une fissure de longueur $2a$ soumis à un cisaillement pur sont obtenues à partir d'une fonction de contrainte d'Airy comme pour le mode I. Dans ce cas, nous cherchons la solution en liant la fonction d'Airy à une fonction de Westergaard [6] pour les conditions aux limites suivantes:

Pour : $-c < x < c$, $\tau_{xy} = 0$; et à l'infinie de la plaque: $\tau_{xy} = \tau_0$)

Au voisinage du front de la fissure, le champ de contrainte est exprimé par:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

Alors que le champ de déplacement vaut:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(-\kappa + 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{III.26})$$

Pour le cas où la fissure est de longueur $2c$ et dans un corps de dimension infini soumis à un cisaillement τ_0 , le facteur d'intensité de contrainte du mode II vaut donc:

$$K_{II} \tau_0 \sqrt{\pi c} \quad (\text{III.27})$$

D'une manière similaire au mode d'ouverture, nous obtenons la relation suivante entre le taux de la restitution d'énergie et le facteur d'intensité de contrainte comme:

$$G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E^*} \quad (III.28)$$

III.2.2.3. Mode III

Le mode III est un mode de déchirement, contrairement aux deux premiers modes, il n'est pas un problème d'un état plan de contrainte. Les déplacements se font exclusivement selon l'axe z de la plaque où : $u_x = u_y = 0$ et $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$. Au voisinage du front de la fissure, le champ de contrainte vaut donc:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \text{ et } : \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (III.29)$$

Alors que le champ de déplacement vaut:

$$u_z = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (III.30)$$

Dans le cas de la fissure de longueur $2a$ dans un corps infini soumis à un cisaillement τ_0 , le facteur d'intensité de contrainte du mode III vaut:

$$K_{III} = \tau_0 \sqrt{\pi C} \quad (III.31)$$

De manière similaire au mode d'ouverture, nous obtenons la relation suivante entre le taux de restitution d'énergie et le facteur d'intensité de contrainte donnée par:

$$G_{III} = \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (III.32)$$

III.2.2.4. Mode mixte

En général dans le cas d'un chargement combiné et en élasticité linéaire, les champs de déplacements (III.23), (III.26) et (III.30) d'une part et les champs de contrainte (III.20), (III.25) et (III.29) d'autre part s'additionnent. Par ailleurs, les taux de restitution d'énergie des 3 modes s'additionnent aussi et devient:

$$G = \frac{K_I^2}{E^*} + \frac{K_{II}^2}{E^*} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (III.33)$$

D'après le critère développé par Erdogan and Sih [8] et repris en dynamique par Maigre and Rittel [9], Le phénomène de rupture est ainsi supposé piloté par l'intensité de la contrainte circonférentielle au voisinage du front de fissure, évaluée en définissant le facteur d'intensité des contraintes circonférentielles $K_{\theta\theta}$.

Les lois de propagation sont écrites dans le contexte macroscopique global des facteurs d'intensités des contraintes [2] étendu au cadre élasto-dynamique par Bui [10] et Freund [11] sont choisies en accord avec Kanninen and Popelar [12] et Ravi-Chandar [13]. Dans le cadre de la rupture dynamique fragile, on considère toujours le phénomène de rupture piloté par l'intensité des contraintes circonférentielles au voisinage du front $k_{\theta\theta}$ et on définit le facteur d'intensité des contraintes circonférentielles maximum K^* ainsi que l'angle polaire correspondant θ^* par :

$$K^* = \max_{\theta \in]-\pi, \pi[} k_{\theta\theta} = \max(\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{\theta\theta}) = k_{\theta^*} \quad (\text{III.34})$$

Où (r, θ) sont les coordonnées locales défini à la Fig. III.1. Si on se place dans le repère local en pointe de fissure défini sur la Fig. I.3, le tenseur des contraintes devient:

$$\sigma^{\text{loc}} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} = R^T \sigma R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

On obtient en cordonnée polaire le système d'équation suivant:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left(5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left(3 \cos \frac{3\theta}{2} - 5 \cos \frac{\theta}{2} \right) \\ \sigma_{r\theta} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left(3 \cos \frac{3\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left(3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left(3 \sin \frac{3\theta}{2} + 3 \cos \frac{\theta}{2} \right) \end{cases} \quad (\text{III.35})$$

On a donc trouvé θ^* , tel que:

$$\sigma_{\theta\theta}(\theta^*) = \max(\sigma_{\theta\theta}) \Rightarrow \partial \sigma_{\theta\theta}(\theta^*) / \partial \theta = 0, \text{ à la fin on trouve}$$

$$\theta^* = 2 \arctan \left(\frac{1}{4} \left[\frac{K_I}{K_{II}} - \text{sign}(K_{II}) \sqrt{8 + \left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2} \right] \right) \quad (\text{III.36})$$

On remarque qu'au voisinage du front, d'après l'équation d'équilibre statique en coordonnée polaire :

$$\sigma_{r\theta}(\theta^*) = 0$$

Il n'y a donc pas de cisaillement dans la direction θ^* . Un critère en cisaillement nul est ainsi parfaitement équivalent à un critère en contrainte de traction maximale dans le cas statique. On calcule ensuite K^* correspondant à un facteur d'intensité des contraintes équivalent en mode I dans la direction θ^* à l'aide des équations III.34 et III.35

$$K^* = \cos^3 \frac{\theta}{2} \langle K_I \rangle - \frac{3}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta^* K_{II} \quad (\text{III.37})$$

Où : $\langle K_I \rangle$ partie positive de K_I (pas d'effet de re-fermeture), le critère devient alors:

$$\begin{cases} K^* < K_{Ic} \rightarrow \text{Pas de propagation} \\ K^* = K_{Ic}, \theta^* = \theta_c \rightarrow \text{propagation stable} \\ K^* > K_{Ic}, \theta^* = \theta_c \rightarrow \text{Propagation instable} \end{cases}$$

Où : K_{Ic} est la ténacité et θ_c l'angle critique d'amorçage

III.3. Equations de la propagation par l'expansion de Williams

III.3.1. Fonction d'Airy en coordonnées polaires

La résolution de la propagation des fissures peut être aussi obtenue utilisant l'expansion de Williams [17]. Cette résolution considère une fonction d'Airy $\psi(r,\theta)$ en coordonnée polaire, écrite sous forme d'une série polynomiale qui tient compte de la singularité en tête de fissure et satisfait aux conditions aux limites en charge. Cette fonction est donnée en découplant les parties de r et de θ séparément, c'est-à-dire :

$$\psi(r, \theta) = r^{\lambda+1} \cdot F(\theta) \quad (\text{III.38})$$

Où λ est un scalaire et $F(\theta)$ est une fonction continue dérivable de θ . En remplaçant l'équation (III.38) dans l'équation de compatibilité (III.8) écrite en fonction de ψ en milieu plan et en coordonnées polaires, on obtient :

$$r^{\lambda-3} \left\{ \frac{d^4 F(\theta)}{d\theta^4} + [(\lambda-1)^2 + (\lambda+1)^2] \frac{d^2 F(\theta)}{d\theta^2} + [(\lambda-1)^2 \cdot (\lambda+1)^2] F(\theta) \right\} = 0 \quad (\text{III.39})$$

Lorsque $r \neq 0$, la résolution de l'équation différentielle peuvent être donnée sous la forme :

$$F(\theta) = A \cdot \cos(\lambda+1)\theta + B \cdot \sin(\lambda+1)\theta + C \cdot \cos(\lambda-1)\theta + D \cdot \sin(\lambda-1)\theta \quad (\text{III.40})$$

Les constantes A, B, C et D sont définies à partir des conditions aux limites en charge à la surface des lèvres de la fissure. Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\text{pour } \theta = \pi, \text{ et } \theta = -\pi \Rightarrow \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0$$

Ainsi on déduit le champ de contraintes $(\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta})$ illustré dans la Fig. III.3, [14] par :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \\ \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \end{cases} = r^{(\lambda-1)} \begin{bmatrix} \frac{d^2 F(\theta)}{d\theta^2} + (\lambda + 1)F(\theta) \\ \lambda(\lambda + 1)F(\theta) \\ -\lambda \cdot \frac{dF(\theta)}{d\theta} \end{bmatrix} \quad (\text{III.41})$$

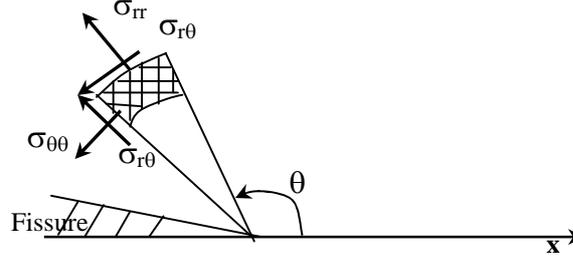


Fig. III.3 : Champ de contrainte de la fissure dans les coordonnées polaires

En remplaçant l'équation (III.39) dans l'équation (III.40) et compte tenu des conditions aux limites, on obtient quatre (4) équations avec 4 inconnues A, B, C et D. Pour que le système ait une solution, il faut que déterminant de la matrice soit égal à zéro. En conséquence, on doit avoir :

$$\sin \lambda \cdot \alpha = \pm \lambda \cdot \sin \alpha \quad (\text{III.42})$$

Où α est l'angle entre les lèvres de la fissure. Dans notre cas, $\alpha=2\pi$ et pour satisfaire l'équation (III.42), il faut que :

$$\sin 2\pi\lambda = 0, \text{ d'ou } \lambda = \frac{n}{2}, \text{ avec } n : \text{ positif} \quad (\text{III.43})$$

Tout en appliquant les conditions aux limites :

$$\sigma_{\theta\theta}(\theta = \pm\pi) = 0 \Rightarrow B = -D, \quad \text{et } \sigma_{r\theta}(\theta = \pm\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow A(\lambda + 1) = -C(\lambda - 1)$$

En remplaçant les équations ci-dessus dans l'équation (III.40), et l'équation (III.38), on obtient :

$$\psi(r, \theta) = r^{\frac{n}{2}+1} \left\{ C \left[\sin\left(\frac{n}{2} - 1\right)\theta - \frac{n-2}{n+2} \sin\left(\frac{n}{2} + 1\right)\theta \right] + D \left[\cos\left(\frac{n}{2} - 1\right)\theta - \cos\left(\frac{n}{2} + 1\right)\theta \right] \right\} \quad (\text{III.44})$$

Puis dans (III.41), on obtient et pour $n = 1$:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{cases} = \frac{1}{4\sqrt{r}} \begin{cases} \left[C \left(5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) - D \left(5 \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] \\ \left[C \left(3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) - 3D \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] \\ \left[C \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) + D \left(\cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right] \end{cases} \quad (\text{III.45})$$

Le choix de $n=1$ nous permet de comparer avec la résolution de Westergaard [6]. Les relations entre $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33})$ et $(\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta})$ seront donc données par :

$$\begin{cases} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{cases} = \begin{cases} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{cases} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (\text{III.46})$$

Ces équations sont similaires aux équations des déformations principales en coordonnées polaires. Lorsque $\theta=0$ au front de fissure et on déduit, compte tenu des équations (III.19) et (III.45) on obtient :

$$\sigma_{11}|_{\theta=0} = \sigma_{rr}|_{\theta=0} \quad ; \quad \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} = \frac{C}{\sqrt{r}} \Rightarrow C = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}$$

De même, on démontre en mode II de fissuration que $D=K_{II} \cdot (2\pi)^{-1/2}$; les équations (III.46) s'écrivent alors comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{22} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_{12} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

Pour un état plan de contraintes : $\sigma_{33}=0$.

Et pour un état plan de déformation : $\sigma_{33}=\nu \cdot (\sigma_{11}+\sigma_{22})$.

En utilisant la loi de Hooke, on obtient le champ de déformation, et par intégration des équations de la cinématique, on obtient le champ de déplacements (u et v) comme:

$$\begin{cases} U = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\chi - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\chi + 3) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ V = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\chi + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] - \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\chi - 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \text{avec } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{cases} \chi = 3 - 4\nu \text{ déformation plane} \\ \chi = \frac{3-\nu}{1+\nu} \text{ contrainte plane} \end{cases} \end{cases} \quad (\text{III.48})$$

III.3.2. Facteurs d'intensité de contrainte

Le facteur d'intensité de contraintes K est le même que celui que produirait l'application d'une contrainte sur les lèvres de la fissure ou qui s'y exercerait en son absence (dans le cas des conditions de charges imposées), voir la Fig. III.4:

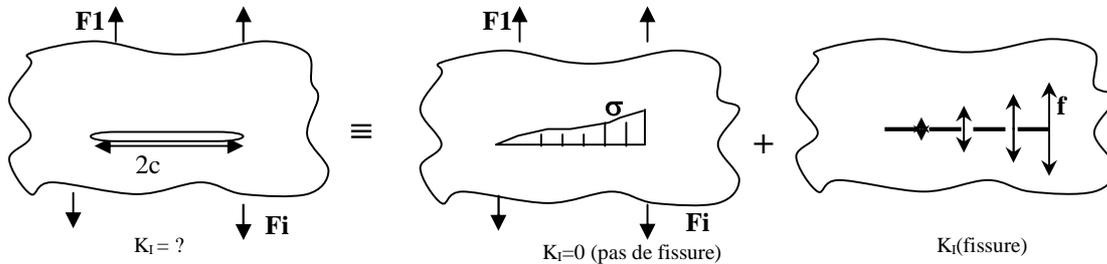


Fig. III.4 : Décomposition de la zone fissurée

Pour une pièce non fissurée, le champ de contrainte est simple à déterminer, mais pour une pièce fissurée, il est possible de calculer les facteurs d'intensité de contrainte par sommation de ceux qui sont produits par des charges élémentaires, c'est-à-dire :

$$K_I = \int_{-c}^c \frac{\sigma(x_1).dx_1}{\sqrt{\pi c}} \left(\frac{c+x_1}{c-x_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (III.49)$$

Pour un cas particuliers, on considère une plaque de dimensions infinies avec une charge ponctuelle F (voir Fig. III.5), l'intensité de contrainte serait donné par :

$$K_I = \frac{F}{\sqrt{\pi c}} \left(\frac{c+b}{c-b} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (III.50)$$

La plaque infinie avec une contrainte constante (σ) appliquées sur les lèvres de la fissure (Fig. III.6), le facteur d'intensité de contraintes devient:

$$K_I = \int_{-c}^c \frac{\sigma(x_1).dx_1}{\sqrt{\pi c}} \left(\frac{c+x_1}{c-x_1} \right)^{\frac{1}{2}} = \sigma\sqrt{\pi c} \quad (III.51)$$

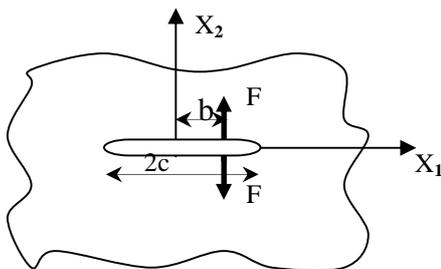


Fig. III.5: Plaque infini subit à une charge F

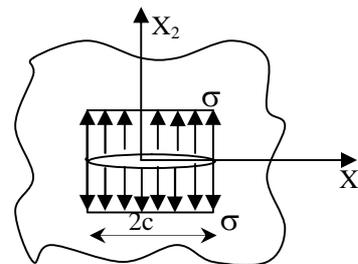


Fig. III.6 : Plaque infini subit à une contrainte σ

III.3.3. Contraintes principales dans les plaques

L'analyse des contraintes principales dans une plaque fissurée peut se réduire à la détermination du facteur d'intensité des contraintes K selon son mode de fissuration (mode I, II et III). Le Mode I est le plus important pour les applications pratiques, alors que les deux autres modes (II et III) sont la combinaison des différents modes qui peuvent se produire.

Pour : $\theta = 0$, donc la contrainte de cisaillement $\tau_{xy} = 0$. Cela veut dire que pour $\theta = 0$ (Fig. III.7), les contraintes σ_x et σ_y sont les contraintes principales données par : σ_1 et σ_2 , et $\sigma_3 = \sigma_z$ et elles sont déduites à n'importe quel point utilisant le cercle de Mohr [15] par :

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (\text{III.52})$$

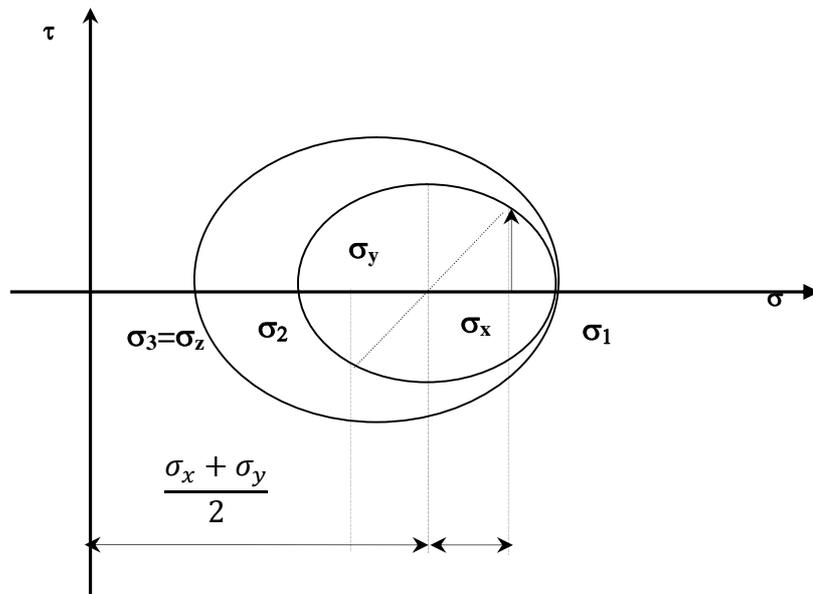


Fig. III.7 : Les contraintes principales dans le cercle de Mohr

En remplaçant cette équation dans l'équation (III.19), on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{cases} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{cases} 1 + \sin \frac{\theta}{2} \\ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \\ 2\nu \text{ ou } 0 \end{cases} \quad (\text{III.53})$$

Pour le cas en coordonnées polaires, il convient d'exprimer ces contraintes en $(\sigma_r, \sigma_\theta$ et $\tau_{r\theta})$

$$\begin{cases} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{cases} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{cases} 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ 1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (\text{III.54})$$

Avec ces expressions de contraintes, les critères de rendement pourraient être utilisés tout en utilisant le critère de Von Mises. Nous obtiendrons ainsi la contrainte équivalente σ_e , donnée par:

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.55})$$

III.4. Etude des zones endommagées en tête de la fissure

III.4.1. Définition des zones endommagées

Les solutions précédentes des équations pour un corps élastique, conduisent à des contraintes qui augmentent indéfiniment quand on se rapproche de la tête de fissure. En réalité, des mécanismes d'endommagement entrent en jeu, et la contrainte passe par un maximum, puis décroît pour s'annuler en tête de fissure (voir la Figure III.8).

Au-delà de la zone endommagée de taille r_d (très petite), on peut supposer que la contrainte varie comme $r^{-1/2}$ [16].

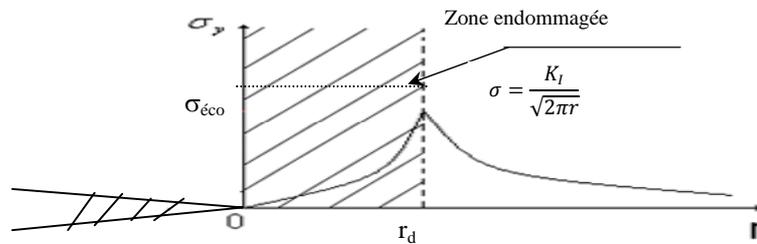


Fig. III.8 : Zone endommagée en tête de la fissure

Si $\sigma_{éc}$: est la Contrainte correspondante au seuil d'endommagement (qui est la limite de décollement) ; dans la zone endommagée pour $(0 \leq r \leq r_d)$, on peut écrire l'hypothèse [15] :

$$\frac{\sigma}{\sigma_{éc}} = \left(\frac{r}{r_d}\right)^\alpha \quad (\text{III.56})$$

Alors que s'il n'y avait pas de zone endommagée, la contrainte serait donnée par :

$$\sigma = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (\text{III.57})$$

La présence de la zone plastique nécessite un décalage de la contrainte dans la zone élastique (Fig. III.9), de façon à rétablir l'équilibre [16], donc:

$$\int_0^{\infty} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr = \int_0^{r_d} \left(\frac{r}{r_d}\right)^{\alpha} dr + \int_{r_d}^{\infty} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr \quad (\text{III.58})$$

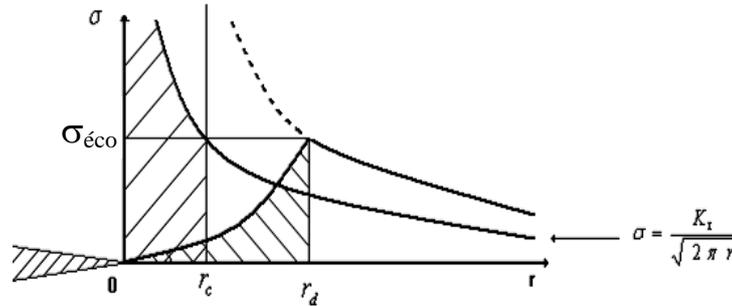


Fig. III.9 : Décalage de la contrainte en présence de la zone plastique

D'après l'équation (III.57), on peut avoir pour $r = r_c$, $\sigma_{éco} = \sigma(r = r_c)$, d'où:

$$r_c = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{éco}}\right)^2 \quad (\text{III.59})$$

Pour cet équilibre, il faut que :

$$\int_0^{r_c} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr = \int_0^{r_d} \left(\frac{r}{r_d}\right)^{\alpha} dr \Rightarrow \frac{K_I^2}{\pi \sigma_{éco}} = \frac{\sigma_{éco} \cdot r_d}{\alpha + 1} \quad \text{d'où:} \quad r_d = \frac{\alpha + 1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{éco}}\right)^2 \quad (\text{III.60})$$

Cela revient à considérer que la fissure se comporte comme une fissure dans un corps parfaitement élastique dont l'extrémité est située à une distance $(r_d - r_c)$ de celle de la fissure réelle :

Où :

$$r_d - r_c = \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{éco}}\right)^2$$

III.4.2. Estimation de la zone plastique en tête de la fissure

Comme il a été signalé auparavant et au voisinage de l'extrémité (à la tête de fissure), les contraintes augmentent au point de provoquer la déformation plastique du matériau ou, s'il est fragile, une Zone endommagée micro fissurée. Ces zones plastiques pourront être examinées dans les cas des contraintes et des déformations planes [16]. Tout en supposant que : r_p^* est la dimension de la zone plastique à la tête de la fissure (voir Fig. III.10) et d'après l'équation III.53, on peut avoir :

Pour : $r \leq r_p^*$, et avec : $\sigma_y \geq \sigma_{\acute{e}co}$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_p^*}} = \sigma_{\acute{e}c}, \quad \text{et } K_I = \sigma \cdot (\pi \cdot a)^{1/2} \quad ; \quad \text{donc :}$$

$$r_p^* = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{\acute{e}c}} \right)^2 = \frac{\sigma^2 a}{2\sigma_{\acute{e}c}^2} \quad (\text{III.61})$$

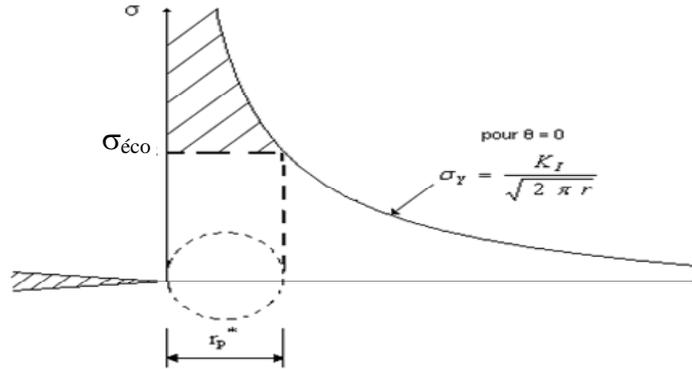


Fig. III.10 : Estimation de la zone ou du rayon plastique r_p^*

Cette estimation de la zone plastique montre un déséquilibre des forces en tête de fissure matérialisé par la surface hachurée dans la figure ci-dessus. Irwin [2] a expliqué que la zone plastique fait que la fissure se comporte comme si elle était plus longue que sa valeur réelle. Comme conséquence de la plasticité en tête de fissure, les déplacements sont plus grands et la rigidité est plus faible que dans le cas élastique. En d'autres termes, la plaque se comporte comme si elle contenait une fissure élastique fictive de longueur un peu plus grande, donc :

$$a_{eff} = a + \delta \quad (\text{III.62})$$

Où : a_{eff} est la longueur effective, a est la longueur réelle, et δ est une correction.

III.4.3. Correction de la zone plastique d'Irwin

La fissure est maintenant supposée avoir une longueur $(a+\delta)$ [2], au lieu de sa longueur réelle (a), voir la figure III.11.

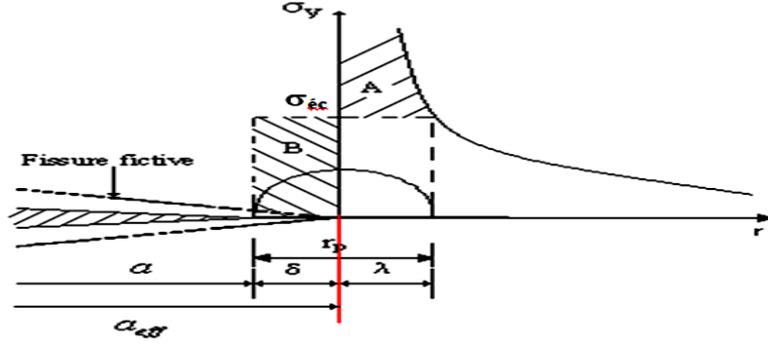


Fig. III.11 : Estimation de la longueur effective de la fissure d'IRWIN

C'est-à-dire une translation du champ de contraintes de « δ » avec la tête de la fissure fictive une contrainte limitée à $\sigma_{éc}$. De même, la contrainte sollicitant la partie δ est égale $\sigma_{éc}$. Par conséquent, δ doit être suffisamment grand pour équilibrer la charge perdue en éliminant l'aire A de la distribution élastique. Donc l'aire B doit être égale à l'aire A, on peut écrire donc:

$$K = \sigma \sqrt{(a + \delta)\pi} = \sigma_{éc} \sqrt{2\pi\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{\sigma^2 a}{2\sigma_{éc}^2} = r_p^* \quad , \text{ et } (\delta \lll a)$$

$$\text{Autrement : } \delta \cdot \sigma_{éc} = \left[\int_0^\lambda \sigma \sqrt{\frac{a+\delta}{2r}} dr \right] - \lambda \cdot \sigma_{éc}$$

$$\text{En posant : } \lambda = r_p^* \Rightarrow (\delta + r_p^*)\sigma_{éc} = \sigma \sqrt{2cr_p^*} \Rightarrow \delta = r_p^* ;$$

Donc :

$$r_p = \lambda + \delta = 2r_p^* = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{éc}} \right)^2 \quad (\text{III.63})$$

Ceci donne une zone plastique deux fois plus large que celle de la 1^{ère} estimation (r_p^*). Puisque $\delta = r_p^*$, la fissure se comporte comme si sa longueur était de $(a+r_p^*)$; et la quantité (r_p^*), s'appelle la correction de la zone plastique d'Irwin.

Supposant que la zone plastique a une forme circulaire, la situation peut être représentée par la Fig. III.12 [2], où la fissure effective s'étend jusqu'au centre de la zone plastique. Si une correction de la zone plastique est appliquée, une correction de facteur d'intensité des contraintes (K) s'avère nécessaire :

$$K = a\sigma \sqrt{\pi(a + r_p^*)} = c\sigma \sqrt{\pi \left(a + \frac{K^2}{2\pi\sigma_{éc}^2} \right)} \quad (\text{III.64})$$

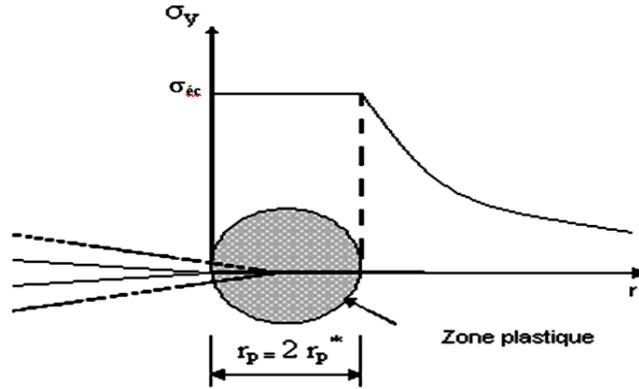


Fig. III.12 : Correction de la zone plastique d'IRWIN

Cette équation présente des difficultés car (K) doit être déterminé par itération. Inversement, si K est donné on peut trouver la contrainte non corrigée : $\sigma = K \times (\pi a)^{-1/2}$, qui permet la détermination de r_p^* puis corriger la contrainte par σ .

En pratique la correction de la zone plastique est rarement appliquée à "K". De même, la correction de la zone plastique à partir de l'équation (III.64) de r_p^* n'est pas convenable en déformation plane.

III.4.4. L'étendue de la zone plastique d'après Dugdale

Il considère une fissure effective avec une longueur plus importante que la longueur réelle. La taille δ de la zone plastique devient très grande lorsque la contrainte appliquée s'étend vers la limite d'élasticité $\sigma_{éc0}$ du matériau. A l'inverse, quand cette contrainte est faible à $\sigma_{éc0}$, un développement limité simple des membres de la relation donne :

$$\delta = \frac{\pi^2 \sigma^2 a}{8 \cdot \sigma_{éc}^2} = \frac{\pi}{8} \left(\frac{K_I}{\sigma_{éc}} \right)^2 \quad (\text{III.68})$$

Si on compare le coefficient $\pi/8 = 0,393$ de cette nouvelle relation au coefficient $1/\pi = 0,312$ de la formule III.63, les approches d'Irwin et de Dugdale [17] donnent des valeurs assez proches de la longueur δ . Elles sont presque identiques. En revanche, pour des valeurs $\sigma/\sigma_{éc0}$ élevées, la différence entre les résultats des deux méthodes devient importante. Le modèle de [17] conduit, après la correction de zone plastique, au FIC effectif suivant :

$$K_f = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi \sigma}{2 \sigma_{éc}}\right)}} \quad (\text{III.69})$$

Cette relation tend toutefois à surestimer la valeur du FIC. Pour solution, Burdekin et Stone [18] proposent une estimation plus raisonnable (toujours pour le même type de modèle) ; la nouvelle expression du K_f est ainsi formulée :

$$K_f = \sigma\sqrt{\pi a} \sqrt{-\frac{8}{\pi^2} \text{Log} \left(\cos \left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_{éc}} \right) \right)} \quad (\text{III.70})$$

III.4.5. Comparaison des corrections de la zone plastique

La comparaison des différentes corrections de zone plastique examinées précédemment avec l'analyse de MLR sans correction, est représentée, pour un état de contraintes planes, sur la Fig. III.13.

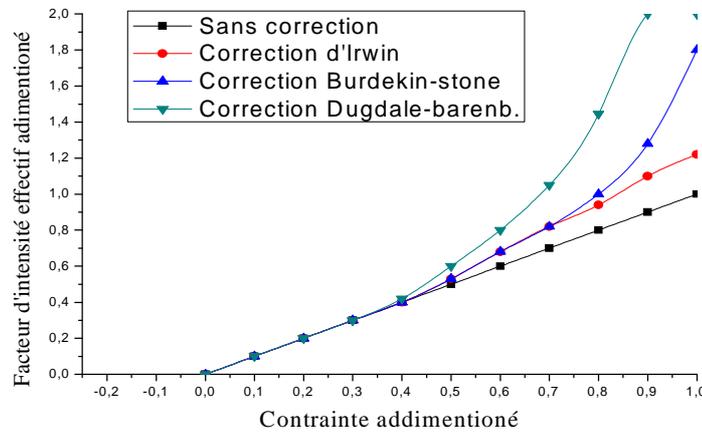


Fig. III.13 : Comparaison des corrections de zone plastique

Sur cette figure, le FIC K_f normalisé par $(\sigma_{éc}\sqrt{\pi a})$ est reporté en fonction de la contrainte normalisée, $(\sigma/\sigma_{éc})$. Tant que $(\sigma < 0,5.\sigma_{éc})$, les corrections apportées restent proches. Par contre, dès que la contrainte appliquée $(\sigma > 0,5.\sigma_{éc})$, les corrections sont significatives.

III.5. Formes de la zone plastique

Les modèles précédents donnent des estimations de la taille de la zone plastique en r_p et $\theta = 0$; notée par : $r_p(\theta)$. Pour déterminer $r_p(\theta)$ selon les valeurs de l'angle θ , les deux critères de plasticité les plus utilisés sont ceux de Von Mises et de Tresca [16].

III.5.1. Critère de Von Mises

La relation des contraintes principales : $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_E^2$, après calculs, la forme de la zone plastique $r_p(\theta)$ est, en mode I, donnée par :

$$r_p(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_E^2} \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 + 3 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) & \text{Contrainte plane} \\ \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left((1 - 2\nu)^2 + 3 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) & \text{Déformations planes} \end{cases} \quad (\text{III.71})$$

La forme de la zone plastique telle que prédite par le critère de Von-Mises (Fig. III.14), Cette zone plastique est plus petite en déformation plane qu'en contrainte plane.

Pour $\theta = 0$, la différence est de facteur 9, par conséquent, la correction de la zone plastique à partir de l'équation $r_p^* = \frac{\sigma^2 a}{2\sigma_{éc}^2}$ n'est pas adéquat en déformation plane.

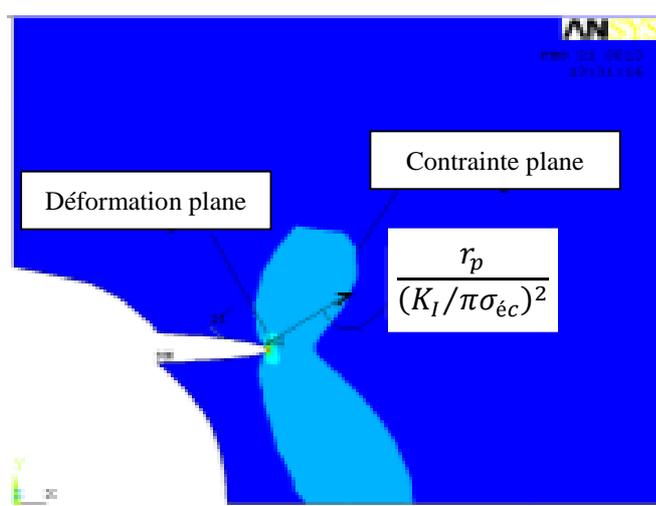


Fig. III.14: Forme de la zone plastique pour le critère de Von Mises

III.5.2. Critère de Tresca

Les contraintes planes ($\sigma_3=0$), on trouve :

$$r_p(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_E^2} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 \quad \text{pour } 0 < \theta < \pi \quad (\text{III.72})$$

Les déformations plane : $\sigma_3 = \nu \times (\sigma_1 + \sigma_2)$, et $\tau_{\max} = 0,5 \times (\sigma_1 - \sigma_2) = 0,5 \times (\sigma_1 - \sigma_3)$, donc :

$$\begin{cases} r_p(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_E^2} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - 2\nu + 3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 & \text{si : } 0 \leq \theta \leq 2\text{Arcsin}(1 - 2\nu) \\ r_p(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_E^2} \sin^2(\theta) & \text{pour } 2 \text{Arcsin}(1 - 2\nu) < \theta \leq \pi \end{cases} \quad (\text{III.73})$$

La forme de la zone plastique prédite par le critère de TRESCA ainsi les contraintes et les déformations planes sont illustrées sur la figure III.16.

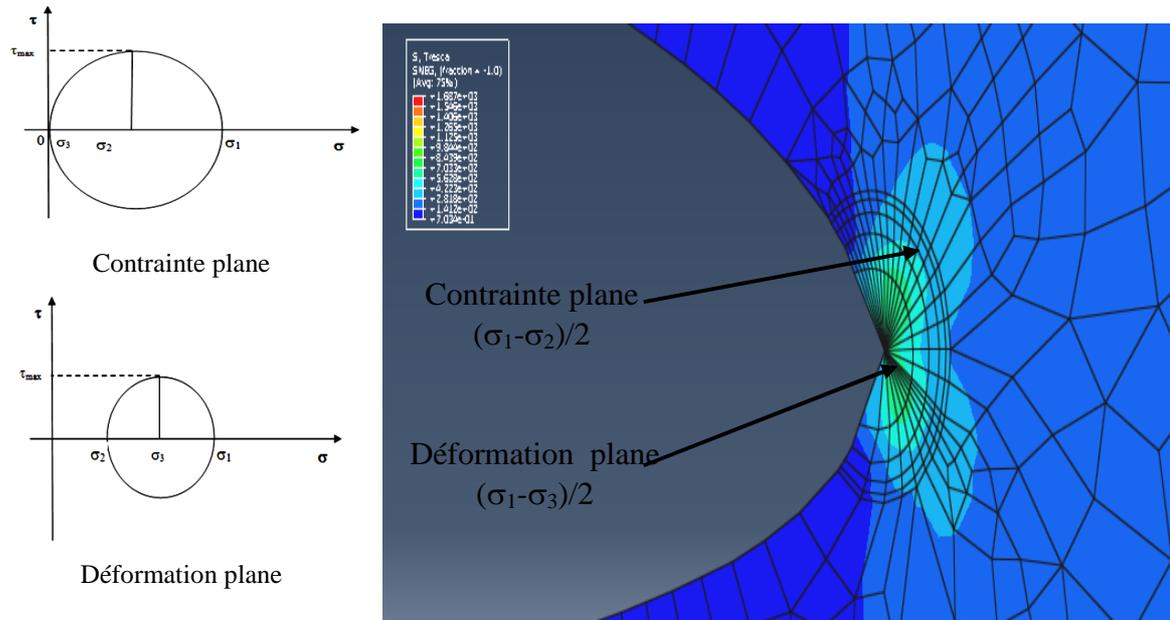


Fig. III.15: Critère de TRESCA et leur zone plastique

III.6. Modélisation du Facteur d'Intensité de Contraintes FIC

L'étude des facteurs d'intensité de contraintes pour les fissures provenant de trous et d'entailles est importante dans la discussion sur l'influence des entailles et des petits défauts sur la résistance à la fatigue. La Fig. III.16 a montré des fissures émanant des deux extrémités d'un trou elliptique. H. Nisitani [19] a trouvé expérimentalement le Facteur d'intensité de contraintes pour les fissures provenant d'un trou elliptique, qui est définis par:

$$K_I = F_1 \cdot \sigma_{nom} \sqrt{\pi(a + c)} \quad (III.74)$$

F_1 : les valeurs du facteur d'intensités de contraintes sans dimension [19].

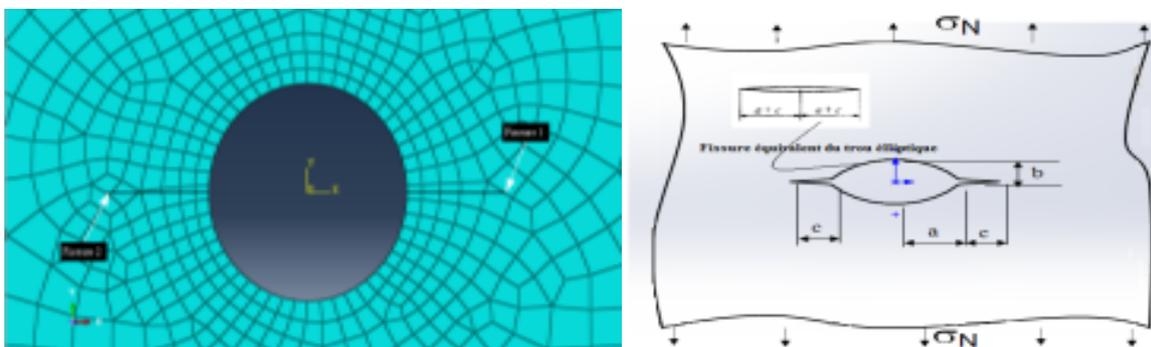


Fig. III.16 : Fissure émanant d'un trou elliptique et sa fissure équivalente

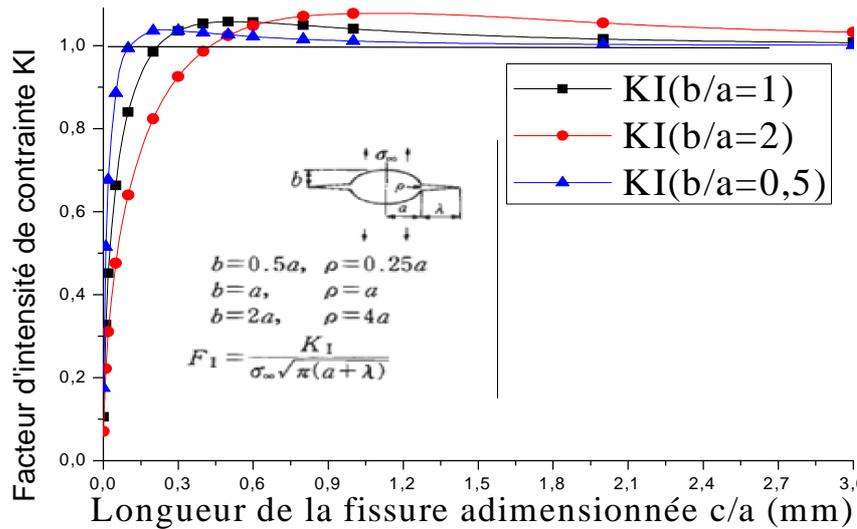


Fig. III.17: Facteur d'intensité K_I sans dimension d'une fissure émanant d'une cavité ellipsoïdale

D'après la Fig. III.17, L'erreur pour l'approximation est inférieure à $\pm 10\%$ pour $b/a < 1$ et $c/a > 0,15$. En raison de la preuve ci-dessus, une entaille avec une petite fissure à son extrémité peut être considérée comme une fissure. K_I est normalisé par le facteur d'intensité de contraintes pour une fissure de longueur $2(a+c)$ (voir la Fig. III.16). F_1 est appelé le facteur d'intensité de contrainte sans dimension ou facteur de correction pour le facteur d'intensité de contrainte. Si la longueur totale des fissures provenant d'un trou elliptique, comme indiqué à la Fig. III.16, est définie par : $2(a+c)$ et que sa valeur est égale à la longueur de la fissure $2(a+c)$. Les facteurs d'intensité de contraintes pour les deux problèmes sont approximativement égaux.

Seulement, ils se situent dans une marge d'erreur de $\pm 10\%$ pour $b/a < 1$, et $c/a > 0,2$.

III.6.1. Régression du facteur d'intensité par l'analyse ANOVA

La modélisation du facteur d'intensité de contraintes des plaques avec un trou elliptique sous l'effet de traction axiale, le facteur K_I caractérisant la fissure propagée en mode I c.-à-d., propagation horizontale. Plusieurs facteurs indépendants peuvent interagir et affecter au facteur d'intensité de contraintes.

La méthode classique consistant à étudier un seul facteur à la fois ne tient pas compte des effets combinés de plusieurs facteurs en cause. Cependant, la méthodologie de la surface de réponse (MSR) est une méthode d'optimisation qui permet de déterminer tous les facteurs ainsi que les interactions possibles entre différentes variables indépendantes, de manière à optimiser un ensemble de conditions expérimentales. [20–22]. MSR est appliquée pour ajuster et exploiter un modèle mathématique représentant la relation entre

les réponses (facteur adimensionné) et les variables (c'est-à-dire géométrie du trou et la longueur de la fissure) [23,24].

Les résultats de la détermination des modèles mathématiques des différents phénomènes étudiés (comportement mécanique). Ces modèles permettent d'exprimer la relation entre les paramètres des essais et les réponses technologiques étudiées (le rayon du trou et la longueur de la fissure). Pour faire une analyse de la variance (ANOVA) et pour déduire les constantes des différents modèles mathématiques ainsi que la présentation en 3D sous forme d'une surface de réponse (SR), nous avons utilisé un logiciel de statistique appelé : «Design-Expert». L'objectif de cette analyse est de déterminer les facteurs d'intensité de contrainte et les interactions qui ont un effet statistiquement significatif sur les paramètres étudiés. MSR conduit à une approximation appropriée de la vraie relation fonctionnelle entre les paramètres de conception Y et un ensemble de variables indépendantes. Un modèle de troisième ordre est utilisé dans la méthodologie de surface de réponse [25,26]:

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i X_i + \sum_{ij}^k b_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} X_i^2 + \sum_{j=1}^k b_{jj} X_j^2 + \sum_{ij}^k b_{ij} X_i^2 X_j + \sum_{ij}^k b_{ij} X_i X_j^2 + \sum_{i=1}^k b_{ii} X_i^3 + \varepsilon \quad (\text{III.75})$$

Où b_0 , b_i et b_{ij} représentent les coefficients de régression pour les termes d'interception, et d'interaction, respectivement; X_i et X_j représentent les variables indépendantes codées; et Y représente la réponse prévue. X_i est la valeur du $i^{\text{ème}}$ paramètre qui influe sur le facteur d'intensité de contraintes, ici en a deux paramètres $X_1 = b/a$, le rapport de la géométrie du trou de la plaque, et $X_2 = c/a$; la longueur de la fissure sans dimension. Les termes b_0 , $b_1 \dots b_k$ et b_{11}, \dots, b_{kk} représentent les coefficients de régression. Le résidu ε indique l'erreur expérimentale. La surface de réponse Y est fonction des paramètres (le rapport c/a de la longueur de la fissure sans dimension et le rapport b/a de la géométrie du trou). En remplaçant $X_1 = b/a$ et $X_2 = c/a$ dans l'équation 1. La relation entre la réponse et les paramètres est donnée donc par:

$$Y = b_0 + b_1 \left(\frac{b}{a}\right) + b_2 \left(\frac{c}{a}\right) + b_3 \left(\frac{b}{a}\right) \left(\frac{c}{a}\right) + b_4 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + b_5 \left(\frac{c}{a}\right)^2 + b_6 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(\frac{c}{a}\right) + b_7 \left(\frac{b}{a}\right) \left(\frac{c}{a}\right)^2 + b_8 \left(\frac{b}{a}\right)^3 + b_9 \left(\frac{c}{a}\right)^3 \quad (\text{III.76})$$

Où b_0, \dots, b_9 , sont les coefficients de régression associés au modèle. Une modélisation par régression cubique de la réponse K1 en fonction des paramètres ou variables b/a qui représente la géométrie du trou et c/a de la longueur de la fissure. Les modèles sont donnés en équations. III.77. Leurs coefficients de détermination (R^2) sont respectivement:

92,77 ; 94,56 ; 95,63 et 99,06 %.

III.6.2. Résultats de la modélisation

Dans notre étude on a modélisé les 84 essais expérimentaux dans une équation ou on a fait une régression de l'erreur en changeant le modèle mathématique suivant quatre étapes formalisées suivant les équations (III.76-79), tout en utilisant l'analyse d'ANOVA..

- Modélisation 1:

En utilisant trois (3) variables de b/a c.-à-d.: (0,01 ; 0,5 ; 1) et neuf (9) variables c/a, c.-à-d. : vingt-sept (27) essais, on obtient l'équation suivante avec un coefficient de détermination $R^2 = 92.77$:

$$\begin{aligned}
 KI(Y) = & 1,62357 - 0,24140 \left(\frac{b}{a}\right) + 1,75923 \left(\frac{c}{a}\right) + 0,66470 \left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) - 0,85007 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \\
 & - 0,61182 \left(\frac{c}{a}\right)^2 - 0,013649 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(\frac{c}{a}\right) - 0,11691 \left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 0,565723 \left(\frac{b}{a}\right)^3 + 0,074038 \left(\frac{c}{a}\right)^3
 \end{aligned}
 \tag{III.76}$$

- Modélisation 2:

Utilisant trois (3) variables de b/a c.-à-d.: (0,1 ; 0,3 ; 1) et douze (12) variables c/a, c.-à-d. : trente-six (36) essais, on obtient l'équation suivante avec un coefficient de détermination $R^2 = 94.56$:

$$\begin{aligned}
 KI(Y) = & 1,66047 - 0,43107 \left(\frac{b}{a}\right) + 1,61056 \left(\frac{c}{a}\right) + 0,52143 \left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) - 0,015283 \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 0,56749 \left(\frac{c}{a}\right)^2 \\
 & + 0,020440 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(\frac{c}{a}\right) - 0,092699 \left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 0,0000 \left(\frac{b}{a}\right)^3 + 0,071082 \left(\frac{c}{a}\right)^3
 \end{aligned}
 \tag{III.77}$$

- Modélisation 3:

Utilisant sept (7) Variables b/a c.-à-d.: (0,01; 0,02 ; 0,05 ; 0,1 ; 0,2 ; 0,5 ; 1), et douze (12) variables c/a a c.-à-d.: quatre vingt quatre (84) essais, on obtient l'équation suivante avec un coefficient de détermination $R^2 = 99.06$ % :

$$\begin{aligned}
 KI(Y) = & 1,69381 - 1,83957 \left(\frac{b}{a}\right) + 1,66225 \left(\frac{c}{a}\right) + 2,77417 \left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) + 1,37757 \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 0,72704 \left(\frac{c}{a}\right)^2 \\
 & - 1,20536 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(\frac{c}{a}\right) - 0,49191 \left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 0,44643 \left(\frac{b}{a}\right)^3 + 0,10022 \left(\frac{c}{a}\right)^3
 \end{aligned}
 \tag{III.78}$$

- Modélisation 4:

Utilisant sept (7) Variables b/a c.-à-d.: (0,01; 0,02 ; 0,05 ; 0,1 ; 0,2 ; 0,5 ; 1) et douze (12) variables c/a c.-à-d.: quatre-vingt quatre(84) essais, on obtient l'équation suivante avec un coefficient de détermination $R^2 = 99.06$ %:

$$\begin{aligned}
 K1(Y) = & 1,74552 + 0,14503\left(\frac{b}{a}\right) + 0,94879\left(\frac{c}{a}\right) - 0,11116\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) - 0,27267\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 0,17734\left(\frac{c}{a}\right)^2 \\
 & + 0,36597649\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{c}{a}\right) + 0,01607591\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 0,023523\left(\frac{b}{a}\right)^3 + 0,018412\left(\frac{c}{a}\right)^3
 \end{aligned}
 \tag{III.79}$$

D'après les 4 modélisations, on prend la modélisation 4 ayant un coefficient de détermination $R^2= 99,06\%$ avec une erreur moyen $=0,2147577$. Le %d'erreur du facteur d'intensité de contrainte est déterminé entre les résultats prévus et expérimentaux en fonction de la géométrie du trou de la plaque et la longueur de la fissure (Fig.III.18), c'est L'écart entre les données prévues et les données expérimentales, ce % erreur diminue en fonction de la longueur de la fissure mais il augmente suivant le rapport de la géométrie de trou. Par exemple le % erreur est minimal pour le rapport $b/a=0,01 < b/a=0,2 < b/a=1$, (Fig. III.18).

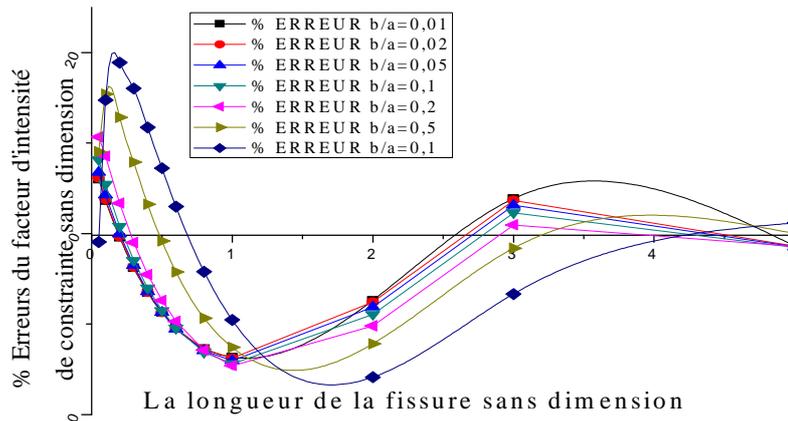


Fig. III.18 : Erreurs du Facteur d'intensité de Contraintes sans dimension(%)

La présentation en 3D et 2D de la surface de réponse et le contour sont montrées sur les figures III.19a et III.19b respectivement. Elles montrent que l'effet de la variation de la longueur de la fissure sans dimension sur le facteur d'intensité de contraintes est plus important que celui du rapport (b/a) de la géométrie de la plaque.

Elles illustrent d'une manière générale l'effet significatif des Deux paramètres sur L'augmentation du facteur d'intensité de contraintes et la longueur de la fissure, et une diminution du facteur d'intensité de contrainte en fonction de l'augmentation du rapport (b/a) de la géométrie de la plaque.

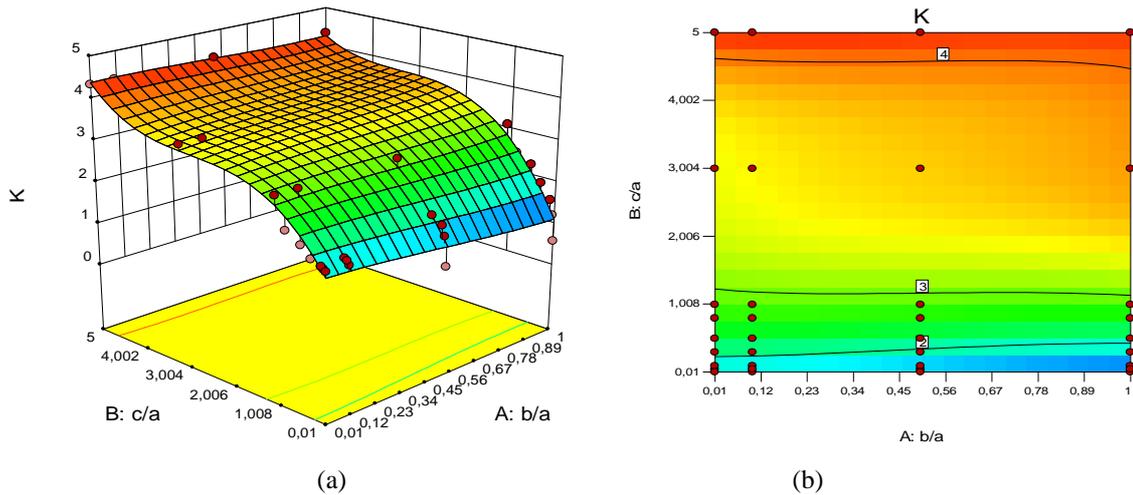


Fig. III.19 : Tracés de surface de réponse (3D) et de courbes de niveau illustrant L'influence de la géométrie du trous de la plaque (b/a) et la longueur de la fissure adimensionnée sur le facteur d'intensité de contrainte adimensionné

III.7. Facteur d'Intensité de contraintes pour Différentes formes de fissures

III.7.1. Fissure centrale dans une plaque de largeur infinie

III.7.1.1. Traction axiale et incliné

Soit une plaque de largeur infinie ayant une fissure d'une longueur $2a$ soumise à une contrainte uni-axiale homogène σ (Fig. III.20a), et une autre soumise à une traction incliné, σ de valeur : $\sigma = 120$ MPa.

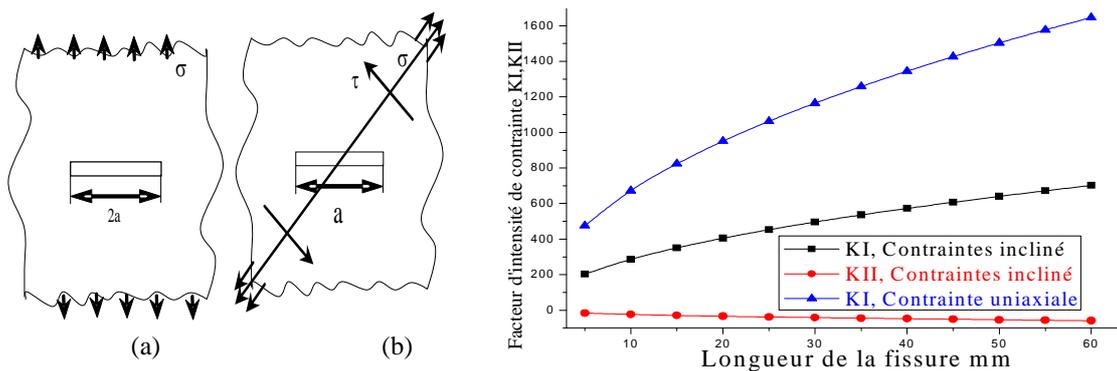


Fig. III.20 : FIC, pour une fissure centrale dans une plaque infinie sous des contraintes axiales et inclinées

On observe qu'il ya une évolution du facteur K en fonction de la longueur de fissure, mais pour charge en mode I le facteur prend des valeurs importante par rapport au chargement incliné, le facteur de cette dernière se décompose en deux facteur K_I , K_{II} , ou on observe que le facteur du mode I est supérieur a celui du mode II (Fig. III.20).

III.7.1.2. Traction concentrée une distance b de l'axe

Soit une fissure de longueur $2a$ dans une plaque infinie soumise à des charges de traction concentrées a une distance b de l'axe, et une charge de cisaillement (voir la Fig. III.21), On prend $P = 50$ KN et $a = 60$ mm et b varie.

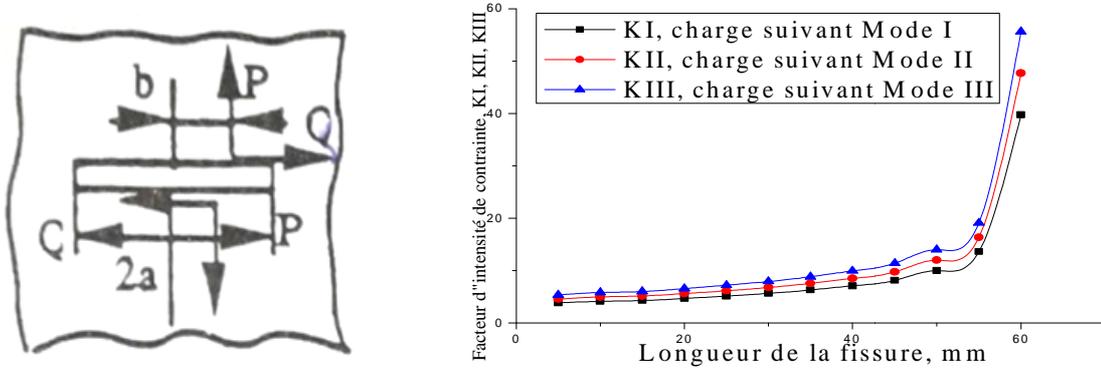


Fig. III.21 : FIC, Effet de charges dans trois modes dans la fissure centrale dans une plaque infinie

Les facteurs FIC K_I , K_{II} , K_{III} pour une traction concentrée dans les trois directions évoluent en fonction de la longueur de fissure.

III.7.2. Fissure centrale dans une plaque de largeur finie

- **Traction axiale :**

Soit une fissure de la longueur $2a$ dans une plaque finie de largeur $2b$ soumise à des contraintes uni-axiale homogène σ , (Fig. III.22).

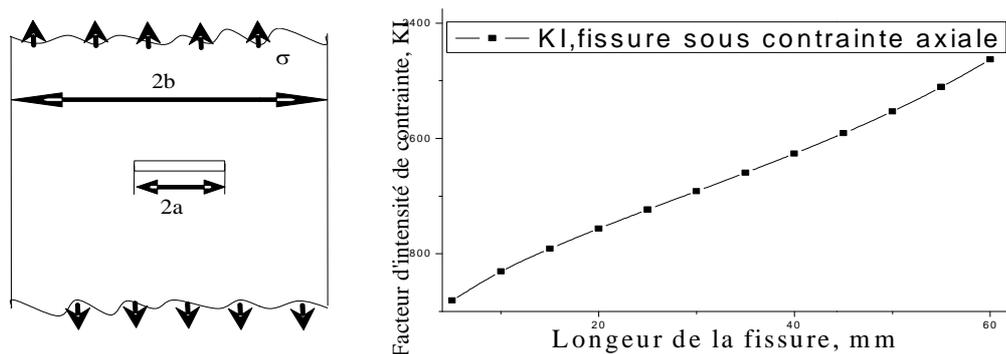


Fig. III.22 : FIC, Fissure centrale dans une plaque de largeur finie sous l'effet des contraintes axiales

Le facteur d'intensité FIC pour une fissure dans une plaque de largeur fini sous l'effet des contraintes de traction axiale, augmente en fonction de la longueur de fissure.

III.7.3. Fissure au bord de la plaque

III.7.3.1. Traction au bord de la plaque

Soit une fissure latérale de profondeur a dans une plaque semi-infinie soumise à une charge concentrée sur les bords, voir la Fig. III.23.

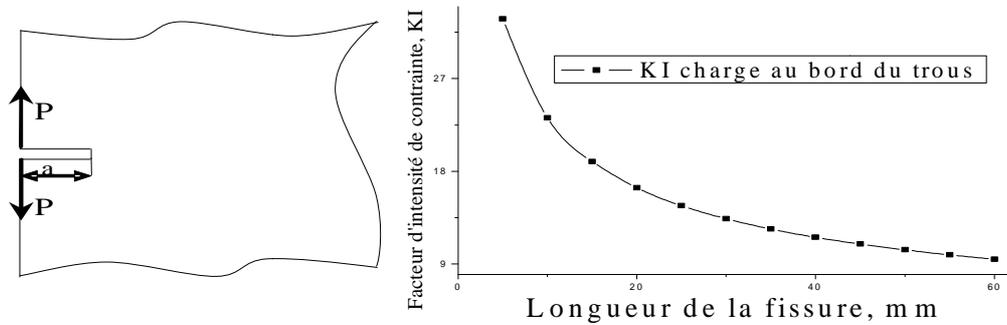


Fig. III.23: FIC de la Fissure au bord de plaque de largeur infinie sous l'effet de la charge de traction

Diminution du facteur d'intensité FIC (Fig. III.23), en fonction de la longueur de fissure, pour une fissure au bord de la plaque sous l'effet de traction axiale dans les lèvres de la fissure.

III.7.3.2. Traction a une distance b du front de fissure au bord de la plaque

Soit une fissure semi-infinie soumise à une charge concentrée P à une distance b de l'extrémité, voir la Fig. III.24.

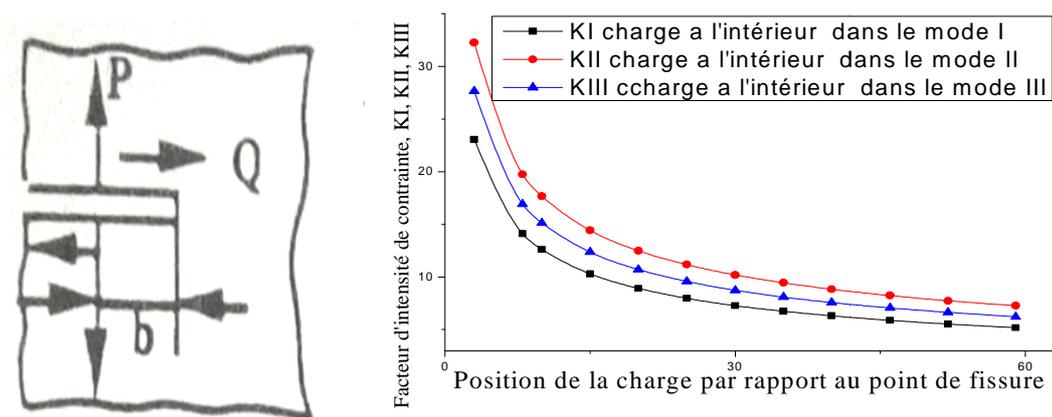


Fig. III.24 : FIC de la fissure au bord de la plaque, l'effet de charge de traction a une distance b de fissure

D'après la fig. III.24, plus on augmente la distance b entre le point de chargement dans les trois directions et le front de la fissure, les K_I , K_{II} , K_{III} des trois modes diminuent.

III.7.3.3. Traction axiale

Soit une plaque semi-infinie contenant une fissure au bord de la plaque portant des contraintes homogène σ de traction uni-axiale, voir la Fig. III.25.

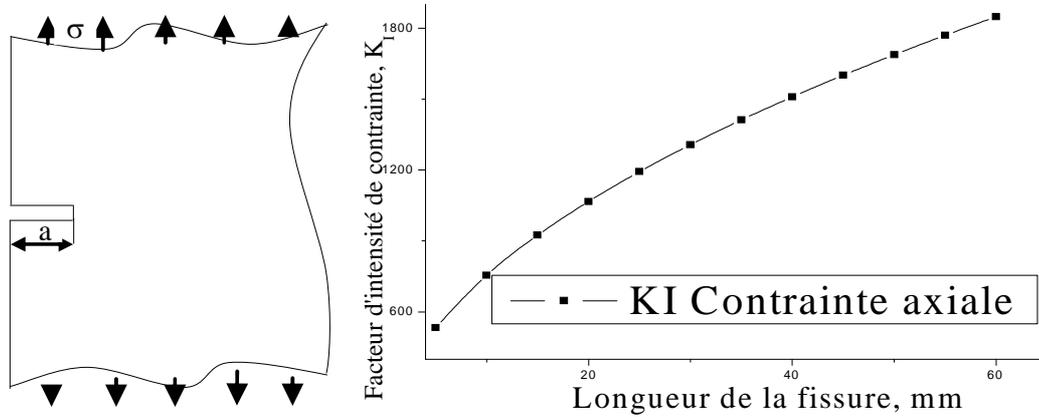


Fig. III.25 : Fissure au bord de plaque de largeur infinie sous l'effet des contraintes axiales

Une fissure au bord de la plaque sous l'effet des contraintes de traction axiale, il y a une augmentation du facteur FIC en fonction de la longueur de la fissure.

III.7.3.4. Flexion de trois points

Soit une fissure au bord de la plaque sollicitée par une flexion trois points, (Fig.III.26).

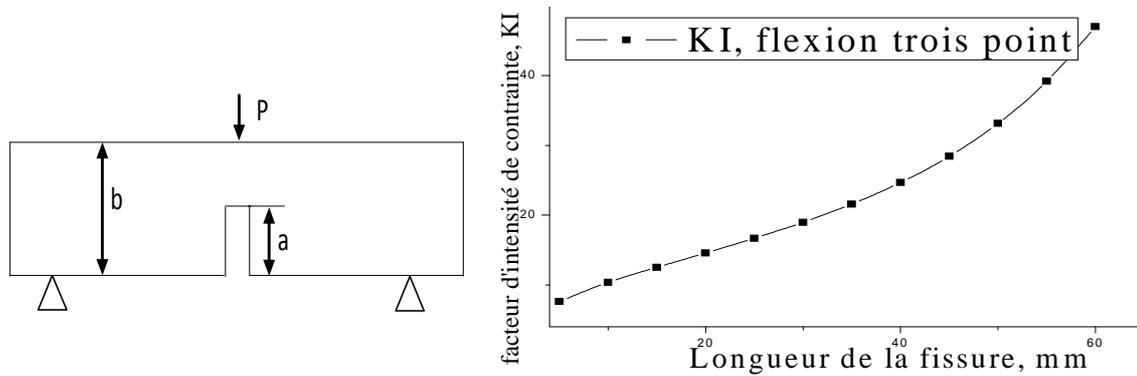


Fig. III.26 : Fissure au bord de plaque de largeur finie sous l'effet de flexion de trois points

Le FIC augmente en fonction de la longueur de la fissure dans une plaque portant une fissure au bord de la plaque.

III.7.4. Rangée de plusieurs fissures à l'intérieur de la plaque de largeur infini

- *Traction uni-axiale :*

Une rangée de fissure de longueur $2a$, a une distances entre eu de $2b$ dans une plaque infinie, soumise a une contrainte homogène de traction axiale σ , (Fig. III.27).

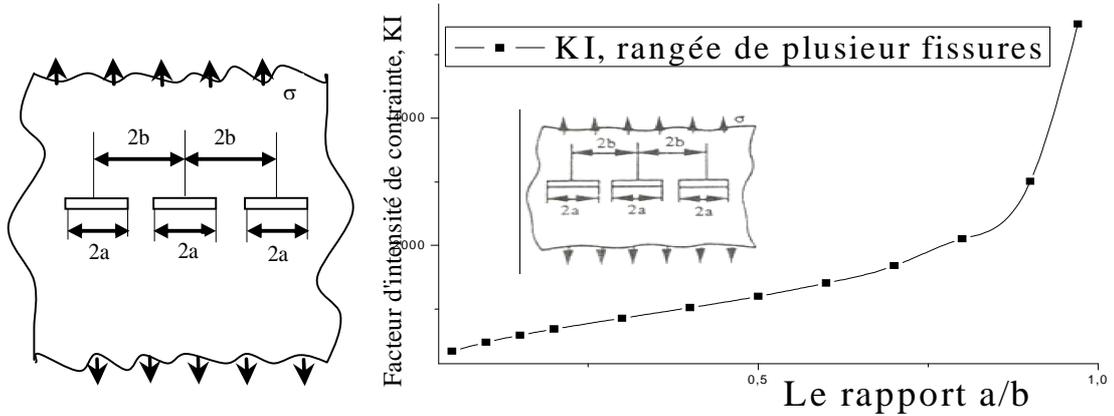


Fig. III.27 : FIC, Ranger des fissures dans une plaque sous l'effet de contrainte de traction axiale

Le facteur d'intensité de contrainte FIC augmente en fonction de la longueur de la fissure dans une plaque portant plusieurs fissures (Fig. III.27).

III.7.5. Rangée de plusieurs fissures au bord de la plaque de largeur infinie

- *Traction uni-axiale :*

Soit une fissures semi-infinies étagée au bord de la plaque a distantes de $2h$ dans une plaque infinie sous l'effet de traction axiale d'une contrainte, σ voir la Fig. III.28.

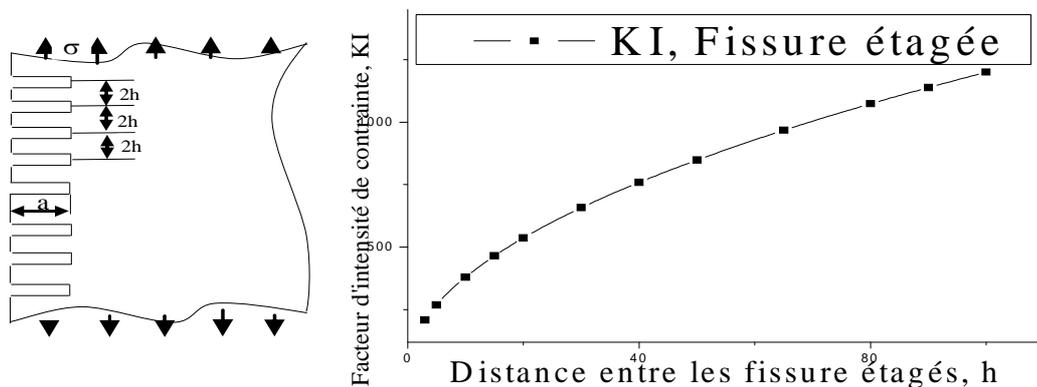


Fig. III.28 : Plusieurs fissures étagées au bord de plaque infinie sous l'effet de contrainte de traction

Le Facteur d'intensité FIC augmente en fonction de la longueur pour les cas des fissures étagée sa distance $2h$ au bord de la plaque est soumise par des contraintes de traction.

III.8. Conclusion

D'après les résultats obtenus pour les différentes plaques soumises à différents types de contraintes, il s'en sort que la distribution normale de contrainte maximale à la pointe de fissure d'un trou elliptique montre que la valeur des contours de contrainte normale maximale augmente avec la réduction de la géométrie de la fissure elliptique circulaire, à une fissure elliptique aiguë. La correction des zones plastiques devient importante pour les contraintes élevées, et la répartition normale des contraintes augmente à la pointe de la fissure avec une réduction de la géométrie des fissures. Cependant, le calcul du facteur d'intensité de contrainte dans les courbes représentées précédemment indique également une tendance similaire, à savoir que le facteur d'intensité de contrainte augmente avec la réduction du rapport diamètre/largeur. L'effet du rapport d/D sur le facteur de concentration des contraintes. Ainsi que le facteur d'intensité de contrainte (FIC) calculé augmente avec la réduction de la géométrie de la fissure et également du rapport diamètre/largeur de fissure. Il augmente avec les efforts, ainsi qu'avec la géométrie des trous des plaques.

Références

- [1] G.R. Irwin, *Fracture Dynamics. Fracturing of Metals*, ASM Cleveland, pp147-166, 1948.
- [2] G. R. Irwin, *Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing in a plate*, Journal of Applied Mechanics, 1957, vol. 24, p 361-364, 1957.
- [3] T. Menouillard, T. Elguedj, A. Combescure, *Mixed-mode stress intensity factors for graded materials*, International Journal of Solids and Structures, vol. 43, n° 7-8, p. 1946-1959, 2006.
- [4] Wells, Jr, R. O., *Function theory on differentiable manifolds, in Contn'butions to Analysis*, Academic Press, New York, 1974.
- [5] I. Robinson, and A. Trantman, *Cauchy-Riemann structures in optical geometry, in R. Rufini (ed.), Proc. Fourth Marcel Grossman Meeting on General Relativity*, Elsevier, Amsterdam, 1986.
- [6] H.M Werstergaard. *Bearing pressures and cracks*. Journal of Applied Mechanics, 6:49-53, 1939.
- [7] A. Griffith, *The Phenomena of Rupture and Flow in Solids*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, vol. 221, p. 163-198, 1921.
- [8] F. Erdogan, G. Sih, *on the crack extension in plates under plane loading and transverse shear*. Journal of Basic Engineering 85,519-527, 1963.
- [9] H. Maigre, D. Rittel, *Mixed-mode quantification for dynamic fracture initiation: Application to the compact compression specimen*. International Journal of Solids and Structures 30 (23), 3233-3244, 1993.
- [10] H. D. Bui, *Mécanique de la rupture fragile*. Masson, 1978.
- [11] L. B. Freund, *Dynamic fracture mechanics*, Cambridge University Press, 1990.
- [12] M. Kanninen, C. H. Popelar, *Advanced fracture mechanics*, Oxford University Press, 1985.
- [13] K. Ravi-Chandar, *Dynamic Fracture*, Elsevier, 2004.
- [14] L. Malíková. Williams Expansion Terms and their Importance for Accurate Stress Field Description in Specimens with a Crack. Transactions of the VŠB - Technical University of Ostrava Mechanical Series 59(2):109-114, 2013.
- [15] Mohr, Von Mises, tresca, RANKINE W. *A Manual of Applied Mechanics*, London: C. Griffin and company, 696p, 1870.

- [16] M. Moussaoui, *étude et modélisation de la résistance a la rupture sur des éprouvettes entaillées*, thèse de doctorat, 2015.
- [17] G. Barenblatt, *The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture*, Advances in Applied Mechanics, vol. 7, n° 2, p. 55-129, 1962.
- [18] F. M. Burdekin, J. Stone-, *Strain Analysis*, 1, 145, 1966.
- [19] H. Nisitani and M. Isida, *Simple Procedure for Calculating K_I of Notch with a Crack of Arbitrary Size and Its Application to Non-propagating Fatigue Crack*, Proc. Joint JSME-SESA Conf. Experimental Mechanics, Part I, pp. 150-155, 1982.
- [20] Cui, W., G. Mazza, B. D. Oomah, and C. G. Biliaderis, *Optimization of an aqueous extraction process for flaxseed gum by response surface methodology*, Food Sci. Technol. 27:363–369, 1994.
- [21] J. E. Cacace, , and G. Mazza, *Optimization of extraction of anthocyanins from black currants with aqueous ethanol*, J. Food Sci. 68:240–248, 2003.
- [22] Y. Wu, S. W. Cui, J. Tang, and X. Gu, *Optimization of extraction process of crude polysaccharides from boat-fruited sterculia seeds by response surface methodology*, Food Chem. 105:1599–1605, 2007.
- [23] Miao, Y. Z., Q. Lin, Y. Cao, G. H. He, D. R. Qiao, and Y. Cao, *Extraction of water-soluble polysaccharides (WSPS) from Chinese truffle and its application in frozen yogurt*, Carbohydr. Polym. 86:566–573, 2011.
- [24] H. Karazhiyan, S. M. Razavi, and G. O. Phillips, *Extraction optimization of a hydrocolloid extract from cress seed (*Lepidium sativum*) using response surface methodology*, Food Hydrocolloid 25:915–920, 2011.
- [25] H. Aouici, H. Bouchelaghem, MA. Yallese, M. Elbah, B. Fnides, *Machinability investigation in hard turning of AISI D3 cold work steel with ceramic tool using response surface methodology*, Int J Adv Manuf Technol 73:1775–1788, 2014.
- [26] W. Haijin, S. Jie, L. Jianfeng, L. Laixiao, L. Nan, *Evaluation of cutting force and cutting temperature in milling carbon fiber reinforced polymer composites*, Int J Adv Manuf Technol 82(9): 1517–1525, 2016.

Chapitre IV

Analyse numériques de la
propagation des fissures dans les
plaques trouées

IV.1. Introduction à l'application des méthodes numériques

Dans ce chapitre, l'étude est consacrée à la construction des outils numériques qui permettront l'analyse du phénomène de fissuration des plaques trouées. Donc, les choix qui seront faits dans cette section, auront des impacts significatifs sur la qualité du modèle. Tel que mentionné précédemment, la méthode BEM et XFEM seront adoptées pour le développement du modèle. Par contre, contrairement à la MEF, ces méthodes posent certains problèmes à la modélisation des lèvres des fissures dans un plan. La MEF sera tout de même utilisée, mais ça sera à titre d'outil de comparaison et de validation. De cette façon, il sera possible de juger facilement la précision, de l'efficacité, de la fiabilité et de la versatilité de méthode BEM et XFEM. L'application de la MEF sera réalisée avec le logiciel ANSYS v15.0 présentant un niveau de développement élevé et qui offre la possibilité d'automatiser la création de modèles par l'entremise de fichiers de commandes. Pour les méthodes BEM et XFEM, on utilise toujours le code numérique ANSYS APDL, après l'introduction des modèles numériques en macro, ainsi ABAQUS qui travaille sur la méthode XFEM, et d'autre programme en fortran, Matlab et Origine pour le calcul des modèles analytiques et le plot de zone et tracer les graphes. Les objectifs principaux ici sont de définir les lignes directrices d'une modélisation de base efficace, pour l'étude de la propagation des fissures dans les plaques minces isotropes trouées sous l'effet de traction, de l'initiation à la rupture. Plus spécifiquement, il s'agira, dans un premier temps, de développer un outil numérique permettant la modélisation de fissures ainsi que leur propagation. De par les avantages considérables rencontrés dans la méthode des éléments finis, la méthode des éléments frontières et les éléments étendus, l'application de ces méthodes constituera l'une des grandes tâches d'envergure dans ce travail malgré l'absence quasi totale des logiciels commerciaux utilisant ces méthodes. Suite à la réalisation de l'outil de modélisation et de calcul, il faudra caractériser en traction en phase d'initiation et de propagation à l'aide de concepts et de théories appropriées tels que la mécanique des solides, la mécanique de rupture, les lois d'endommagement, etc.

L'atteinte de ces objectifs généraux sous-entendent donc des effets secondaires tels que :

- Définir l'effet des trous dans les plaques
- Appliquer les méthodes BEM et XFEM et vérifier son efficacité;
- Définir une modélisation adéquate des trous et des fissures;
- Identifier la méthode de calcul des contraintes et FIC la plus appropriée;

- Déterminer les paramètres de discrétisation optimaux;
- Choisir la position et l'angle d'amorçage de fissure ou définir un critère d'initiation de fissure adéquat;
- l'influence des conditions extérieures telle que l'inclinaison du chargement en mode statique et dynamique sur la direction de propagation de la fissure;
- Choisir une loi de propagation appropriée.

De plus, l'ampleur du travail à réaliser ne permettra pas d'aborder la modélisation tridimensionnelle de la propagation des fissures. Néanmoins, le développement des idées et des concepts pour la modélisation en 2D qui se fera dans l'optique d'une transposition en cas du 3D. De cette façon, il sera possible d'analyser toutes les étapes du développement du modèle et de mettre en perspective les aspects de chacune d'elle par rapport à l'ensemble des fissures. Puisque l'objectif visé est le développement d'un outil d'analyse s'adressant à la caractérisation globale de la propagation des fissures dans les plaques trouées, l'approche de l'analyse sera plutôt d'ordre macroscopique. Bien que les caractéristiques hétérogènes de la microstructure des matériaux aient une influence certaine dans l'évolution des fissures, surtout à la nucléation et une approche phénoménologique générale considérant un milieu continu sera adopté [1]. Cela est plus approprié, puisque le but de la modélisation est d'étudier le comportement général de fissuration autour des trous des plaques et l'impact de certains facteurs d'intensité de contraintes.

IV.2. Hypothèses générales de l'analyse numérique

Avant de définir précisément les étapes d'élaboration du modèle et d'appliquer directement les techniques d'analyse numériques de traction des plaques trouées, certaines hypothèses de base doivent être établies afin de respecter le cadre de cette analyse [1]. Ces hypothèses se résument essentiellement en:

- Les effets de contraintes résiduelles à proximité de la région fissurée seront négligés;
- Les plaques seront supposées minces, isotropes et homogènes;
- Les effets de contact des lèvres des fissures seront négligés;
- Les effets dynamiques de la propagation des fissures seront aussi négligés et l'avancement de celle-ci sera traité de façon quasi stationnaire ;
- Aucun effet de plasticité ne sera modélisé, sans toutefois restreindre l'application de facteurs permettant de prendre en considération cet aspect.

Toutes ces hypothèses simplificatrices ont pour but de concentrer les efforts sur les objectifs principaux de l'étude de la propagation des fissures.

IV.3. Schématisation du processus d'élaboration de calcul

Afin d'atteindre les objectifs de la structure de ce travail, on doit suivre une schématisation du processus d'élaboration du modèle numérique comme présenté sur la figure ci-dessous (Fig. IV.1). Le tout débutera par la modélisation numérique générale, ensuite le traitement plus spécifique de la position et de l'angle d'amorçage de la fissure et leur angle de bifurcation sous l'effet du chargement en mode pur en mixte; puis la modélisation de la propagation tout au long de la construction du modèle tout en tenant compte de l'amplitude de chargement et la direction de la propagation de la fissuration. Ceci sera validé par une comparaison avec des résultats et des solutions déjà déterminés par différentes méthodes numériques et expérimentales. Enfin, il est plus approprié de prédire la direction de propagation de la fissure.

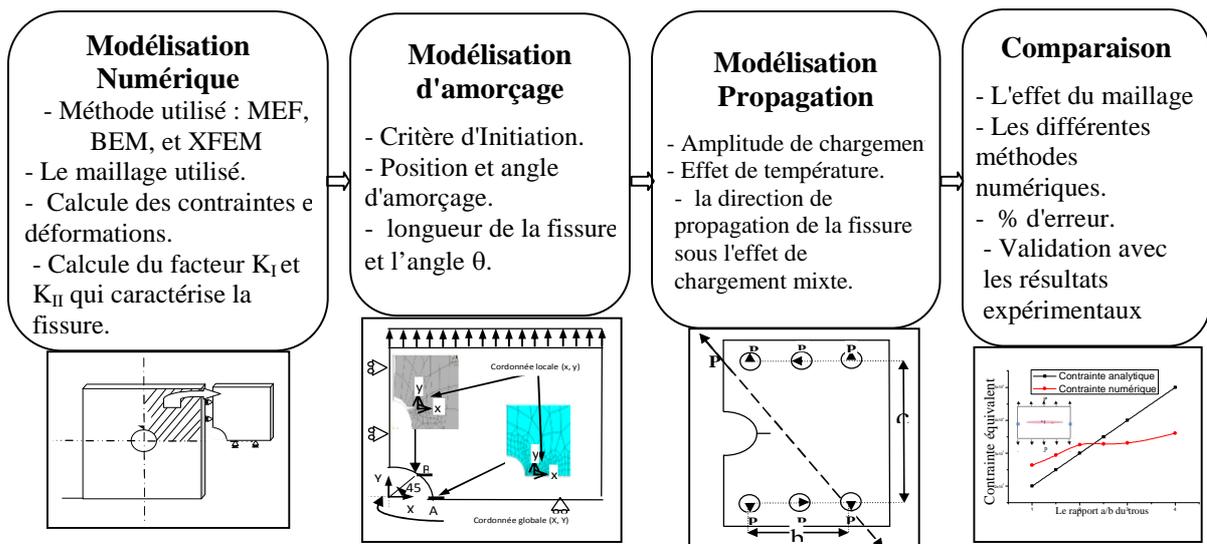


Fig. IV.1: Schématisation du processus d'élaboration du modèle

IV.4. Modélisation numérique

Dans ce contexte, plusieurs travaux de recherches contemporaines [1] ont su mettre en évidence l'importance des méthodes numériques dans l'élaboration d'un modèle visant l'analyse en propagation de fissures. Ce chapitre présente donc la mise en œuvre des outils d'analyse nécessaires à la modélisation du phénomène, basée sur l'utilisation de la méthode des éléments frontières (BEM), et la méthode des éléments fini étendue (XFEM). Brighenti a utilisé la méthode numérique et la méthode analytique pour étudier le phénomène de

propagation des fissures dans les plaques perforées sous charges externes [2-4]. Shariati et al. ont fait une étude numérique de la direction de propagation des fissures sous charge de compression axiale dans les matériaux élastiques-plastiques en considérant certains paramètres, tels que la longueur, l'angle de fissure et les conditions aux limites, les imperfections et les caractéristiques des différents matériaux des plaques [5].

En premier lieu, différents moyens de calculer des FIC seront présentés en détail, permettant ainsi une application plus appropriée des méthodes numériques. Ensuite, la modélisation par la méthode des éléments frontières sera traitée de façon exhaustive en s'attardant surtout sur le traitement des fissures où la méthode de séparation finie sera développée. Parallèlement, un modèle simple d'éléments finis sera élaboré, sans toutefois négliger la présentation de certains aspects techniques de la méthode pour fins de comparaison avec la méthode des éléments frontières. Enfin, les deux modèles seront comparés selon divers plans, surtout afin de valider l'application de la méthode des éléments frontière, mais aussi pour justifier l'adoption de cette méthode.

IV.4.1. Élément de discrétisation de fissure (élément Quart de Point)

Il faut donc définir des éléments spéciaux contenant le comportement singulier. À cet effet, quelques types d'éléments sont disponibles. Certains englobent totalement le bout de la fissure où le polynôme d'interpolation induit la singularité requise Byskovet d'autres [6], sont plutôt construits directement à partir des séries de Williams incluant K_I et K_{II} (Holston, [7]). Cependant, pour les deux cas, il y a incompatibilité à l'interface des éléments singuliers et réguliers, ce qui nuit à la convergence de la solution. De plus, l'implantation de ces types d'éléments peut être laborieuse. Par contre, Barsoum [8] a démontré qu'en déplaçant simplement le nœud central d'un élément iso paramétrique d'ordre 2 au quart de la longueur de son côté, près du bout de la fissure, il était possible de reproduire numériquement la singularité $r^{1/2}$. Pour les éléments quadrilatères, il existe deux techniques de transformation. La première consiste à déplacer les nœuds centraux de deux arêtes adjacentes vers le point de singularité comme montré à la Fig. IV.2.

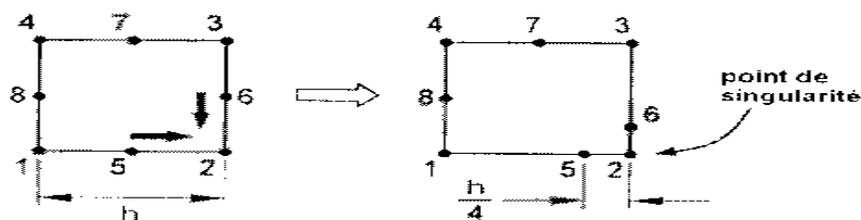


Fig. IV.2 Construction d'un élément singulier quart de point quadrilatéral Barsoum

Cependant, le champ de déplacements résultant de cette transformation, n'aura la singularité $r^{1/2}$ que sur les arêtes où les nœuds ont été déplacés (Anderson, [9]). Pour obtenir une variation des déplacements en $r^{1/2}$ sur tout l'élément, il faut le déformer de sorte à faire coïncider les 3 nœuds d'une même arête et ainsi former un triangle (Figure IV.3). Cela, est préférable pour le calcul des FIC nécessitant la solution à l'intérieur du domaine.

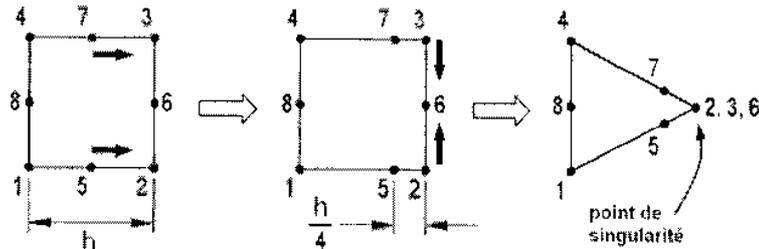


Fig. IV.3: Construction d'un élément singulier quart de point triangulaire Anderson

IV.4.2. Modélisation de la fissure

Dans le but de modéliser la fissure il faut définir une géométrie de base. Cruse (1972) [10] a proposé de représenter le bout de la fissure par une forme ellipsoïde pour minimiser la concentration de contrainte induite par la modélisation. La singularité de l'équation intégrale pour les points de collocation situés sur les lèvres de la fissure, lorsque l'élément d'intégration est sur la lèvre opposé .donc cette situation, illustré par la Fig. IV.4, engendre une singularité lorsque $\delta = r_{\min}$ tend vers 0.

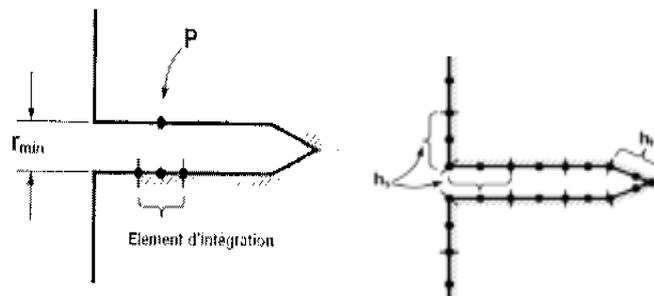


Fig. IV.4 : Maillage de la fissure et la configuration d'intégration presque singulière

La modélisation correspondante, établie une discrétisation appropriée assurant la convergence des résultats de façon efficace. Les paramètres étudiés sont la valeur de l'écartement δ et celle du rayon de l'ellipse α Ensuite, la taille des éléments en bout de fissure (h_t) et au début (h_s) ont aussi été analysées. Aussi, il a été jugé utile d'appliquer un raffinement du maillage près de la fissure. Donc, celui-ci a été généré de sorte que les éléments du contour extérieur reliés aux lèvres de la fissure aient une taille égale à h_s .

IV.4.3. Évaluation du facteur d'intensité de contrainte

Cette section présente en détail les techniques d'évaluation des FIC selon le principe d'extrapolation des déplacements et celui du taux de relâchement d'énergie potentielle appliqué par l'intégrale J. Ceci est peu commode lorsque l'objet du calcul des FIC est de prédire la propagation. Cette méthode a donc été rejetée. Ces méthodes ont été choisies soit pour leur facilité d'intégration, et leur précision [11]. L'évaluation des FIC par soustraction de la singularité sera aussi abordée, car de récents résultats ont montré l'efficacité de la méthode [12]. Dans le cas du singularité des contrainte, Le calcul du facteur d'intensité de contrainte "FIC" est également compliqué parce qu'il est une fonction de la position le long du front de fissure, de taille de fissure ainsi que sa forme, de type de chargement et de la géométrie de la structure. En cette étude, les éléments finis spéciaux au point quart proposés par Barsoum [13] sont employés pour obtenir une meilleure approximation du champ autour du point du front de fissure (Fig. IV.5), où le mi nœud latéral de l'élément relié au point du front déplacé à 1/4 de la longueur de cet élément. Des solutions de "FIC" peuvent être calculées en utilisant une technique d'extrapolation cinématique de déplacements [14] voir (la Fig. IV.5), cela implique la corrélation des déplacements d'éléments de frontière sur la surface de la fissure "Boundary Element Method" avec celles des valeurs théoriques de la formule d'Irwin. Les résultats de "FIC" sont calculés à deux endroits éloignés du bout de la fissure [15].

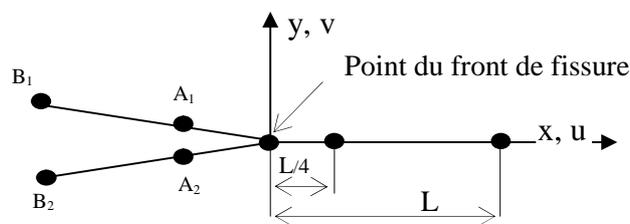


Fig. IV.5: Description de la technique d'extrapolation

Selon le choix de transformation, deux types de discrétisation en bout de fissure sont possibles. La première utilise les éléments de quart de point de forme quadratique (Fig. IV.6a) et permet le maintien de la structuration du maillage, mais limite à 4, le nombre d'éléments pouvant être reliés au bout de la fissure. La deuxième technique consiste à définir une "rosette" d'élément quart de point triangulaire ayant tous leurs nœuds de singularité liés au bout de fissure (Fig. IV.6b) de cette façon, un plus grand nombre d'élément peuvent être associés directement à la modélisation singulière.

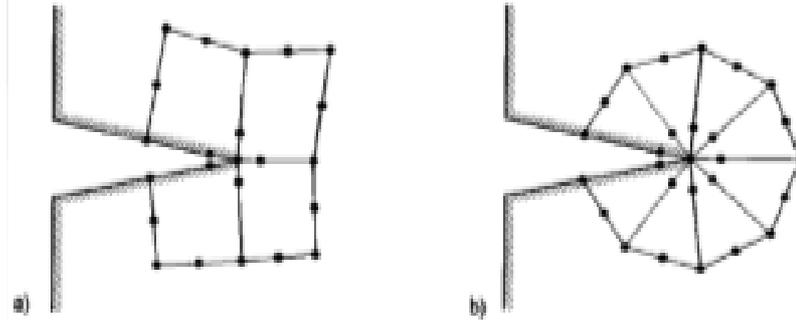


Fig. IV.6: Types de discrétisation en bout de fissure

$$\begin{cases} K_I = \frac{E_{tip}}{3(1+\nu_{tip})(1+k_{tip})} \sqrt{\frac{2\pi}{L} \left[4(\nu_{A_1} - \nu_{A_2}) - \frac{(\nu_{B_1} - \nu_{B_2})}{2} \right]} \\ K_{II} = \frac{E_{tip}}{3(1+\nu_{tip})(1+k_{tip})} \sqrt{\frac{2\pi}{L} \left[4(u_{A_1} - u_{A_2}) - \frac{(u_{B_1} - u_{B_2})}{2} \right]} \end{cases} \quad (IV.1)$$

D'où : E_{tip} et ν_{tip} ; sont le module de Young et le Coéf.de poison dans le point du front de fissure; u_n, ν_n ($n=A_1, A_2, B_1, B_2$) sont les déplacements nodales dans les nœuds A_1, A_2, B_1, B_2 respectivement dans les directions x, y; L : la longueur du coté singulier.

$$\begin{aligned} k_{tip} &= \frac{(3-\nu_{tip})}{(1+\nu_{tip})} && \text{Contrainte plane} \\ k_{tip} &= 3-4\nu_{tip} && \text{Déformation plane} \end{aligned} \quad (IV.2)$$

Les facteurs d'intensité de contrainte d'après Richard [16] donnent des solutions de K_I et K_{II} pour une fissure centrale, plane et normale aux faces latérales. Les facteurs d'intensité de contrainte pour des différents angles d'orientation de fissuration initiale de XFEM sont donnés par les expressions suivantes [17-18] :

$$\begin{aligned} K_I &= \sigma\sqrt{\pi c} \frac{\cos \alpha}{\left(1-\frac{c}{W}\right)} \sqrt{\frac{0,26+2,65\left(\frac{c}{W-c}\right)}{1+0,55\left(\frac{c}{W-c}\right)+0,08\left(\frac{c}{W-c}\right)^2}} \\ K_{II} &= \sigma\sqrt{\pi c} \frac{\sin \alpha}{\left(1-\frac{c}{W}\right)} \sqrt{\frac{-0,23+1,40\left(\frac{c}{W-c}\right)}{1+0,67\left(\frac{c}{W-c}\right)+2,08\left(\frac{c}{W-c}\right)^2}} \end{aligned} \quad (IV.3)$$

Le facteur K d'intensité de contrainte est calculé par éléments finis. La contrainte équivalente ΔK_{eq} facteur d'intensité est la combinaison de K_I et K_{II} , est [18-19]:

$$\Delta K_{eq} = [K_I^4 + 8K_{II}^4]^{0.25} \quad (IV.4)$$

IV.4.4. Angle de propagation des fissures

La direction d'avancement de la fissure se définit par le critère de la $\sigma_{\theta\theta}$ maximale, selon la plupart des études. Ce critère stipule que la propagation s'effectue dans la direction de la $\sigma_{\theta\theta}$ maximale d'un système de coordonnées centré en bout de fissure. D'après équation (I.9) [20], en posant $d\sigma_{\theta\theta}/d\theta = 0$, l'angle où $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale est obtenu équation (V.5).

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{-2K_{II}}{K_I + \sqrt{(K_I)^2 + 8(K_{II})^2}} \quad (IV.5)$$

Si on applique la technique d'extension virtuelle du fond de fissure (Fig. V.7) [21], pour le facteur d'intensité maximale K, il en résulte une procédure de calcul très efficace. L'angle correspondant de propagation des fissures est ici obtenu comme:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{2K_I K_{II}}{K_I^2 + K_{II}^2} \right) \quad (IV.6)$$

Par conséquent, Selon le critère de contrainte de cisaillement, l'angle critique θ_c définie la direction radiale de propagation peut être déterminé en posant $\sigma_{r\theta}=0$, donc:

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2\pi r} \cos(\theta/2) \left[\frac{1}{2} K_I \sin(\theta) + \frac{1}{2} K_{II} (3 \cos(\theta) - 1) \right] = 0 \quad (IV.7)$$

Ceci conduit à l'équation définissant l'angle de propagation de la fissure dans le système de coordonnées pointe de θ_c :

$$K_I \sin(\theta_c) + K_{II} (3 \cos(\theta_c) - 1) = 0 \quad (IV.8)$$

Résoudre cette équation donne:

$$\theta_c = 2 \arctan \frac{1}{4} \left(K_I/K_{II} \pm \sqrt{((K_I/K_{II})^2 + 8)} \right) \quad (IV.9)$$

Pour les différentes extensions virtuelles de fond de fissure, la méthode des éléments finis a été utilisée. Des éléments finis spéciaux (élément quart de point) de fond de fissure triangulaire avec des fonctions de forme modifiées [21] ont été utilisés autour du fond de fissure pour simuler la singularité de contrainte dans cette région. La procédure de calcul est basée sur des extensions de fissure incrémentielles, où la taille de l'incrément de fissure est prescrite à l'avance. Le facteur d'intensité de contrainte est déterminé autour d'un arc

englobant les directions possibles de propagation de la fissure (Fig. IV.7). La fissure est ensuite étendue dans la direction du facteur d'intensité de contrainte maximale.

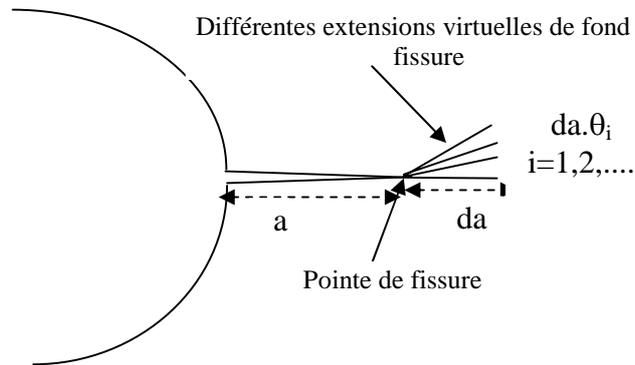


Fig. IV.7: Technique d'extension virtuelle du fond de fissure

IV.5. Analyse numérique des plaques trouées

IV.5.1. Analyse statique

L'analyse numérique à travers une configuration d'une procédure générale statique, Une procédure de contrainte statique est une procédure dans laquelle les effets d'inertie sont négligés. Dans l'analyse statique le nombre maximum d'incrément est 10^5 et la taille d'incrément initiale est 0,01, est minimal 10^{-8} , et maximal 1. La fraction d'énergie dissipée est $2 \cdot 10^{-5}$ et le rapport maxi de stabilisation de l'énergie de déformation est 0,05. L'analyse peut être linéaire ou non linéaire et ignore les effets de matériau dépendant du temps. Impliquant les approches BEM et XFEM, utilisons les logiciels ANSYS et ABAQUS [22-27]. Les objectifs de cette partie d'analyse sont :

- a) Effet du Maillage dans les plaques trouées.
- b) Effet de la géométrie du trou de la plaque.
- c) Effet des conditions extérieures, tel que l'amplitude de charge et la température.
- d) Effet de la position et de l'angle d'amorçages de la fissure.
- e) Effet du chargement incliné statique sur l'angle de bifurcation ou la direction de propagation de la fissure.

IV.5.2. Analyse dynamique par fatigue

Analyse dynamique par fatigue en cycle bas en utilisant l'approche cyclique directe dans le logiciel ABAQUS, qui se caractérise par des états de contrainte suffisamment élevés pour qu'une déformation non élastique se produise dans la plupart des cas; est une analyse

quasi-statique sur une structure soumise à un chargement cyclique sous-critique. la modélisation de la propagation d'une fissure discrète le long d'un chemin arbitraire dépendant de la solution sans remaillage dans le matériau en vrac basé sur les principes de la mécanique de la rupture élastique linéaire (XFEM) avec la méthode des éléments finis étendus, auquel cas l'apparition et la croissance de la fissure de fatigue sont caractérisé par le taux relatif de libération d'énergie de fracture; et l'utilisation de la technique d'extrapolation des dommages pour accélérer l'analyse de fatigue à bas cycle; et suppose un comportement géométriquement linéaire et des conditions de contact fixes dans chaque cycle de chargement. Nombre maximum d'incrément est 10^9 et la taille d'incrément 0,1, nombre maximum d'itérations est 200, et les nombres maximales de cycles est 5000. Les possibilités cyclique directes d'analyse fournissent une technique de modélisation informatisé efficace pour obtenir la réponse stabilisée d'une structure soumise au chargement périodique et sont idéalement adaptées à exécuter des calculs de fatigue de bas cycle sur une grande structure. Les possibilités emploient une combinaison de l'intégration de série de Fourier et de temps du comportement matériel non linéaire pour obtenir la réponse stabilisée de la structure directement. Le nombre de termes de Fourier initiale, maximum, et incrément est 11, 25, et 5 respectivement, les contrôles de solution générale personnalisés ne sont pas nécessaires dans la plupart des analyses non linéaires, cependant, si des non-linéarités extrêmes se produisent, des contrôles personnalisés peuvent être nécessaires pour obtenir une solution, par exemple d'après éditeur du contrôle générale de solution changé dans l'incrémentation du temps, ou on a I_0 c'est le nombre d'itérations d'équilibre (sans discontinuités sévères) après quoi on vérifie si les résidus augmentent en deux itérations consécutives. La valeur minimale est $I_0 = 3$. Par défaut $I_0 = 4$. Si vous avez basculé sur Analyse discontinue, $I_0 = 8$ et ne peut pas être modifié. Pour I_A , nombre maximum de réductions autorisées pour un incrément. I_A par défaut = 5, on peut prendre une valeur de $I_A=10$. Pour les conditions de chargement en a des charges concentré avec des amplitudes tabuler, sous la forme du tableau suivant :

Tableau IV.1: Amplitude tabulé pour les conditions de chargement par fatigue

Temps / fréquence	0	0,5	1
Amplitudes	0,1	1	0,1

Dans cette partie d'analyse dynamique les objectifs de travail sont:

- a) Effet du Maillage dans la fissure au tour du trou de la plaque

- b) Le chemin de propagation de la fissure par fatigue sous l'effet de la position de la fissure par rapport au trou de la plaque.

IV.5.3. Matériaux utilisés

Le matériau utilisé est un aluminium 7075-T6 qui présente une très haute résistance et qui est utilisé pour les pièces structurales très sollicitées (raccords, engrenages et arbres d'aéronefs, applications aérospatiales et de défense). Les calculs sont effectués sur la base des propriétés du matériau de la plaque d'aluminium comme présenté sur les tableaux IV.2 et IV.3

Tableau IV.2: Caractéristique du matériau "Aluminium 7075-T6"

Module de Young (E)	Coefficient de Poisson ν	Résistance à la traction.	Masse volumique	Limite d'élasticité
$7,19999 \cdot 10^9$	0,3	$5,7 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$	2810 Kg/m^3	$5,07 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$

La composition chimique est indiquée dans le tableau IV.3

Tableau IV.3: Composition chimique de la plaque d'aluminium 7075-T6

Composante	AL	Cr	Cu	Fe	Mg	Mn	Si	Ti	Zn
Wt. %	87.1 - 91.4	0.18 - 0.28	1.2 - 2	≤ 0.5	2.1 - 2.9	≤ 0.3	≤ 0.4	≤ 0.2	5.1 - 6.1

IV.5.4. Effet du Maillage sur la contrainte maximale appliquée sur la plaque

Un maillage raffiné est bien construit, et se compose d'éléments quadrangulaires près de la pointe de la fissure pour bien visualiser la propagation de cette dernière. D'après la géométrie de notre plaque, nous considérons que le facteur de concentration de contrainte exacte ou théorique est donné par $K_t = 2,17$ [28].

Si l'on considère la surface de la partie transversale $St = 0,002 \text{ mm}^2$, et la pression d'excitation $P = 1 \text{ Pa}$, la contrainte maximale est alors $\sigma_{\max} = 4.34 \text{ Pa}$.

Par ailleurs, les valeurs de la contrainte maximale sont calculées numériquement en utilisant deux types de maillages. Le premier moins raffiné (Fig.8a) a donné une valeur de $4,59 \text{ Pa}$, avec une erreur de 5,8%; le deuxième, plus raffiné (Fig. 8b), une valeur de $4,38 \text{ Pa}$, avec une erreur de 1%.

On peut dire que plus que le maillage est raffiné, plus les résultats de la contrainte maximale convergent vers les valeurs exactes.

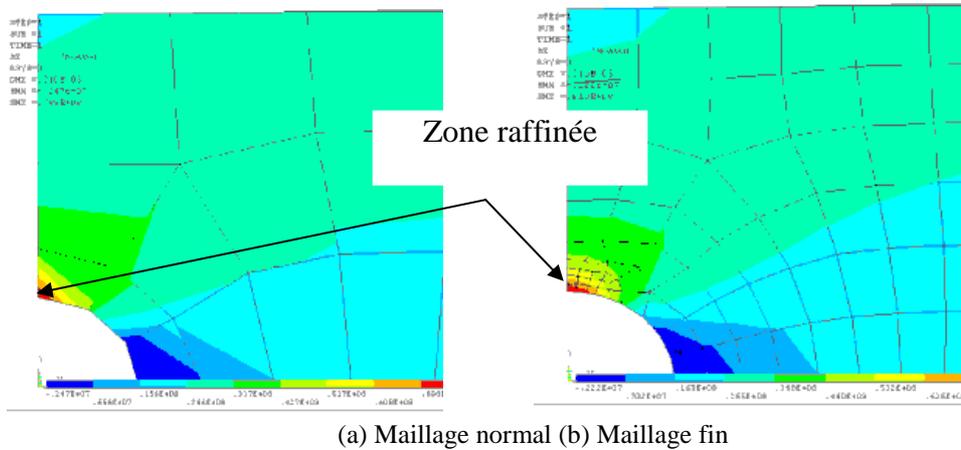


Fig. IV.8 : La contrainte σ_{\max} pour différents maillages

IV.5.5. Effet de la géométrie du trou de la plaque

Des efforts de traction uni-axiale en faisant varier le rapport a/b du trou de la plaque (Fig. IV.9) sont appliqués, puis on observe l'influence de cette variation sur les résultats en changeant le raffinement.

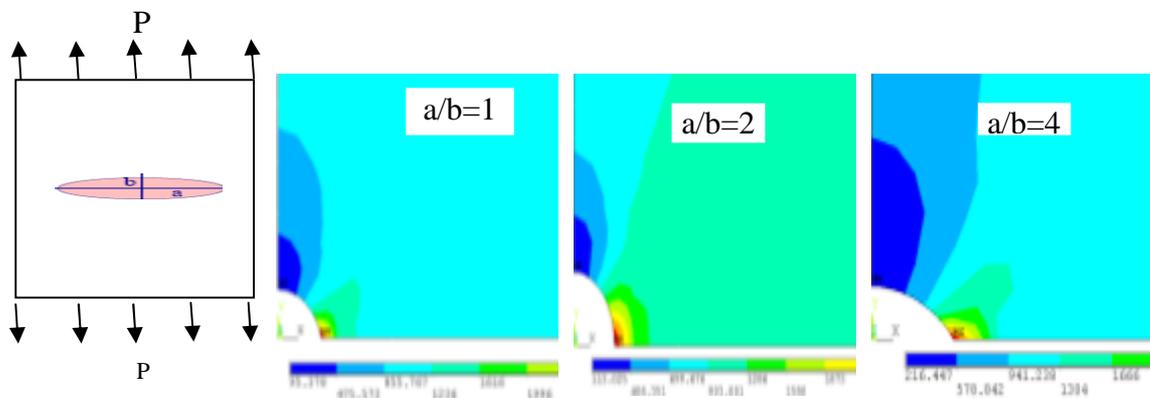


Fig. IV.9 : Variation des contraintes en fonction du rapport a/b

Il est clair de voir que tout en s'éloignant du bord de trou on remarque qu'il y a une diminution rapide de contrainte de traction σ_y jusqu'à ce qu'elle devienne constante. Pour la contrainte équivalente σ_{eq} (Fig. IV.10), il y a une augmentation du rapport a/b qui entraîne une évolution proche des contraintes numériques et analytiques. Quand a/b tend vers ∞ , les contraintes près du trou tendent aussi vers ∞ . Donc le trou se comporte comme la géométrie d'une fissure (Fig. IV.10).

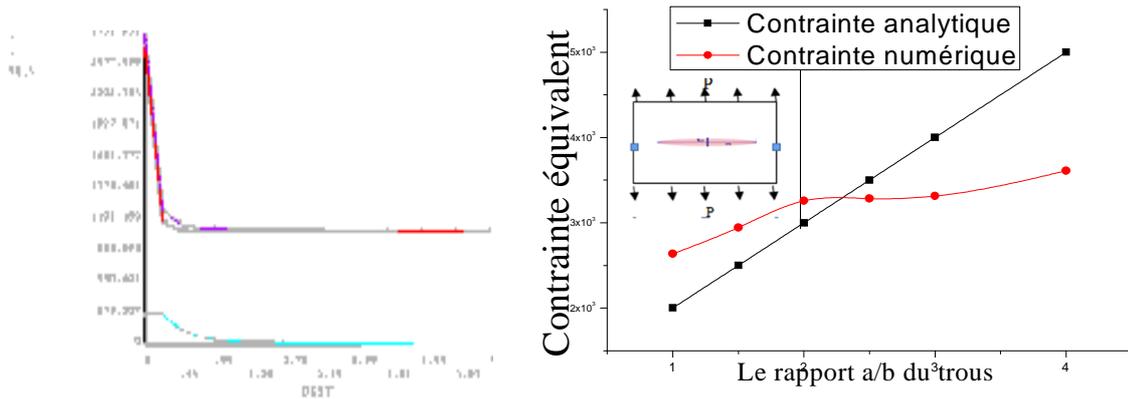


Fig. IV.10 : Contrainte équivalent en fonction de la géométrie du trou

D'après les résultats obtenus numériquement (Fig. IV.11), on observe que la distribution des contraintes suivant x et y sont maximum au sommet de la fissure puis décline et deviennent constantes selon le patch horizontal créer comme repère dans la plaque. Tandis que la distribution des déformations nodales varient inversement ; les déformations suivant y restent nulle. Par contre elles augment légèrement au voisinage du sommet de la fissure selon x puis elles diminuent progressivement en fonction du patch horizontal de la plaque.

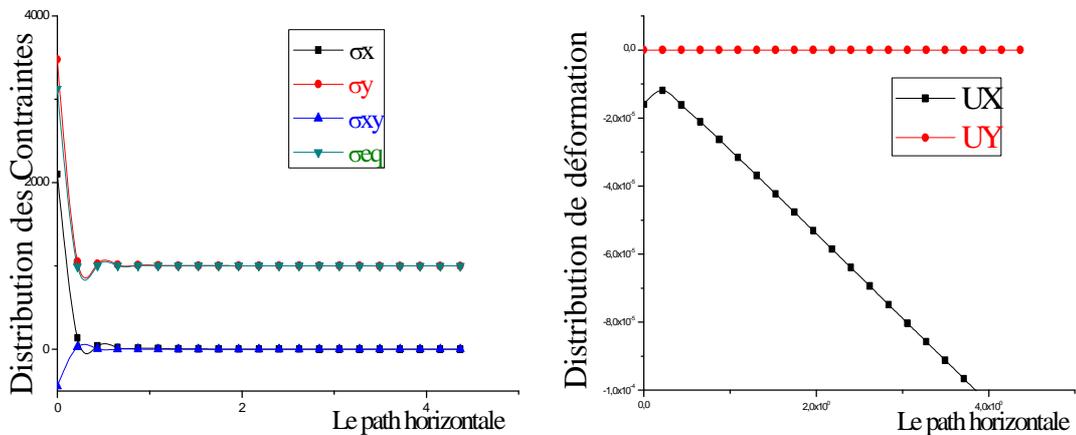


Fig. IV.11 : Distribution des contraintes et des déformations suivant le patch horizontal

IV.5.6. Effet des conditions extérieures

Le processus de croissance des fissures qui se produisent sous l'effet des conditions extérieures, telles que la variation de l'amplitude de chargement et le changement de température sont considérés dans cas. En effet, la propagation de fissures dans des plaques trouées joue un rôle important dans le domaine de la recherche et de l'ingénierie afin d'éviter la destruction et la fissuration totale des structures mécaniques, aéronautiques et de génie civil [29].

IV.5.6.1. Effet de l'amplitude de chargement

On considère des charges de traction appliquées dans la direction uni-axiale (y) avec différents amplitudes sur une plaque trouée ayant une pré-fissure puis on analyse la variation du facteur d'intensité de contrainte pour les différentes grandeurs des efforts de ces tractions. En transformant les coordonnées globales cartésiennes (OXY) dans le centre du trou de la plaque en coordonnées local dans le point du front de fissure et la direction de la propagation de cette fissure. Puis on détermine les facteurs de concentration de contrainte qui caractérise la fissure pour chaque amplitude de chargement (30N, 50N et 120N). D'après les résultats obtenus (Fig. IV.12), on observe qu'il y a une augmentation du seuil de propagation de fissure en fonction de l'amplitude du chargement.

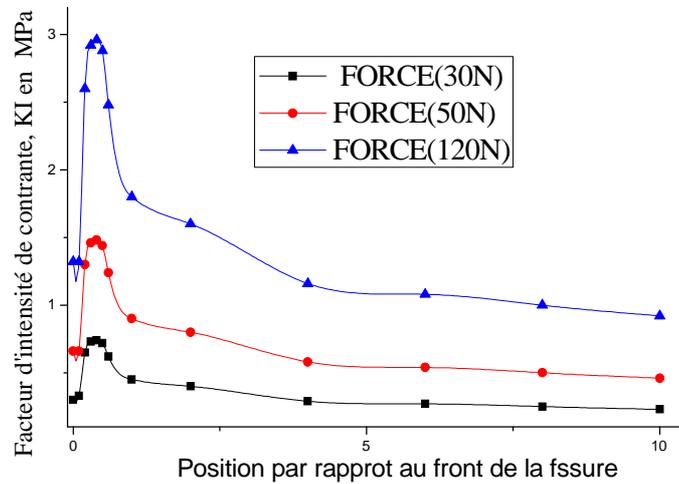


Fig. IV.12 : Facteur d'intensité de contrainte pour différentes amplitudes de chargements

IV.5.6.2. Effet de la température

En générale, plusieurs travaux scientifiques W.D. Kingery [29], s'intéresse à la fissuration d'un matériau continu, homogène et isotrope ayant un comportement élastique linéaire. L'objet ici est d'exprimer la contrainte thermique surfacique maximale en fonction de la différence de température imposée par le choc thermique. Elle postule que la pièce se fissure dès que cette contrainte dépasse la limite à la rupture du matériau. En plus de l'hypothèse précédente, relative au matériau, il est supposé que le champ des contraintes est bi-axial et uniforme, donné par la formule :

$$\sigma_{th} = \frac{E\phi\Delta T}{1-\nu} \quad (IV.10)$$

σ_{th} , et ΔT sont la contrainte thermique induite et l'écart de température imposé respectivement ; et E , ν , et ϕ sont le module d'Young, le coefficient de Poisson et le coefficient de dilatation thermique.

W.D. Kingery [30] définit ainsi le premier paramètre de résistance aux chocs thermiques, R , qui correspond à la différence de température critique au-delà de laquelle un choc thermique infiniment dur conduit à la fissuration du composant sollicité. En deçà de cette valeur aucun risque de fissuration n'existe quelles que soient les conditions de choc.

$$R = \frac{(1-\nu)\sigma_r}{E\phi} \quad (IV.11)$$

Où, σ_r : Contraintes à la rupture

Dans notre cas, en réalité les chocs thermiques réels ne sont jamais infiniment durs car les échanges thermiques sont régis par des lois continues et les propriétés thermiques mises en jeu ont des valeurs finies. Ainsi, les contraintes thermiques réellement induites sont inférieures à la valeur exprimée en (IV.7). Pour cela, on garde la même amplitude de traction mais on change la température de la plaque trouée, puis on analyse la variation du facteur d'intensité de contrainte pour différentes grandeurs d'excitation de température (125° , 175° et 225°) et les résultats sont présentés sur la Fig. IV.13.

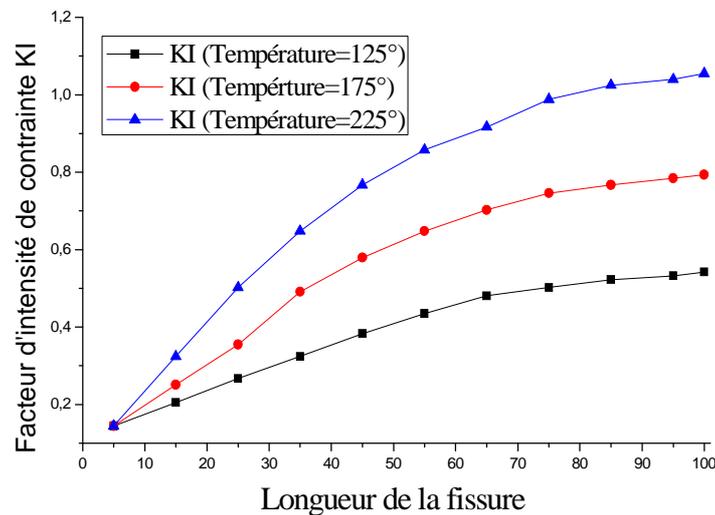


Fig. IV.13 : Le FIC pour des différentes grandeurs de température

Il est clair de voir dans cette figure que l'influence de la température sur le facteur d'intensité de contrainte devient importante pour les grandes longueurs de fissure élevée c'est-à-dire, il y a une proportionnalité hyperbolique entre K et la température (T).

IV.6. Conclusion

L'objectif de cette analyse numérique de la propagation des fissures dans les plaques planes trouées en utilisant les différentes méthodes des éléments finis tel que la méthode des éléments finis classique et la méthode des éléments finis étendue (XFEM), et la méthode des éléments frontières (BEM), est de déterminer l'influence de la présence des trous dans les plaques bidimensionnelles qui engendrent des concentrations de contraintes, ainsi voir l'effet de la position et l'angle d'amorçage de la fissure et leur chemin de propagation suivant les conditions de chargement (mode I, ou mode mixte), tout en utilisant l'élément de quart point et les contraintes ainsi que le facteur d'intensité des contraintes qui caractérisent ces fissures sont déterminés. Aussi l'effet de changement de températures a été considéré et il a été noté que l'augmentation de température influe beaucoup sur le facteur d'intensité de contrainte qui devient très important pour des grandes longueurs de propagation de fissures.

D'un point de vue général, pour la modélisation des plaques fissurées, il est indispensable d'utiliser les différentes approches numériques (MEF, XFEM, BEM) dans les parties statiques et dynamiques. Le premier expose les méthodes classiques (FEM), le deuxième qui présente les méthodes basées sur la partition de l'unité PU FEM qui conduit à la méthode des éléments finis étendus X-FEM très utilisée actuellement pour l'analyse de la fissuration. la troisième est la méthode des éléments frontières (BEM), est basé sur le calcul au frontière du domaine. D'autre part, une étude comparative avec les résultats expérimentaux pour voir la meilleure méthode numérique sera considérée.

Références

- [1] S. Lalonde, *Modélisation de la propagation des fissures dans les engrenages par la méthode des éléments frontières*, thèse de l'école de technologie supérieure, université de Québec, 2008.
- [2] R. Brighenti, *Numerical buckling analysis of compressed or tensioned cracked thin plates*, *Engineering Structure*, Vol. 27, No. 2, pp. 265-276, 2005.
- [3] R. Brighenti, *Buckling of cracked thin plates under tension or compression*, *Thin-Walled Structure*, Vol. 43, No. 2, pp. 209-224, 2005.
- [4] R. Brighenti, *Buckling sensitivity analysis of cracked thin plates under membrane tension or compression loading*, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 239, No. 6, p. 965-980, 2009.
- [5] M. Shariati and A. M. MajdSabetib, *A Numerical and Experimental study; Buckling and post-buckling of cracked plates under axial compression load*, *Journal of Computational and Applied research in Mechanical Engineering*, Vol. 4, No. 1, pp. 43-54, Autumn 2014.
- [6] E. Byskov, *Calculation of stress intensity factors using the finite element method with cracked elements*, vol. 6, n° 2, p. 159-67, 1970.
- [7] A. Holston, *Mixed mode crack tip finite element*, *International Journal of Fracture*, vol. 12, n° 6, p. 887-899, 1976.
- [8] Barsoum, S. Roshdy, *On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.10, n° 1,p. 25-37, 1976.
- [9] T. L. Anderson, *Fracture Mechanics Fundamentals and Applications*, 3rd Edition: CRC press, Taylor & Francis Group, 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300, Boca Raton, FL 33487-2742, 2005.
- [10] Cruse, A. Thomas, *Numerical evaluation of elastic stress intensity factors by the boundary-integral equation method*, In *The surface crack: physical problems and computational solutions*, sous la dir. de Swedlow, J. L. p. 153-170. New York: American Society of Mechanical Engineers, 1972.
- [11] Mukhopadhyay, N. K., S. K. Maiti et A. Kakodkar, *Review of SIF evaluation and modelling of singularities in BEM*, *Computational Mechanics*, vol. 25, n° 4, p. 358-375, 2000.

- [12] De Matos, P. F. P., P. M. G. P. Moreira, A. Portela and P. M. S. T. De Castro, *Dual boundary element analysis of cracked plates: Post-processing implementation of the singularity subtraction technique*, In Computational Mechanics in Portugal, Vol. 82, p. 1443-1449. Elsevier Ltd, Oxford, United Kingdom, 2004.
- [13] R. S. Barsoum. *On the use of isoparametric finite element in linear fracture mechanics*, International Journal for Numerical Methods in Engineering. 10 25-37, 1974.
- [14] Ryoji Yuuki and Sang-bong Cho, *efficient boundary element analysis of stress intensity factors for interface cracks in dissimilar materials*, Engin. Fract. Mechcs, Vol. 34, p.179-188, 1989.
- [15] S. Chorfi, B. Necib, *Analysis of the influence of the crack propagation angle in the thin aluminum plates Under the effects of the traction efforts*, journal U.P.B. Sci. Bull., Series D, Vol. 82, Iss.2, 2020.
- [16] HA. Richard, [Bruchvorhersagen bei berlagerter normal- und schubbeanspruchung von-risen](#), VDI Forschungsheft 631. Dusseldorf: VDI-Verlag; p. 1–60, 1985.
- [17] L.P. Borrego, F.V. Antunes, *Mixed-mode fatigue crack growth behavior in aluminum alloy*, International Journal of Fatigue 28618-626, 2006.
- [18] S. Chorfi, B. Necib, *Crack propagation analysis around the holes in the plates under the effect of external stresses using the finite element model*, ESIS Summer School, ECF21, June 20-24, 2016.
- [19] K. Tanaka, *Fatigue crack propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis*, Engng. Fract. Mech. 6:493–507, 1974.
- [20] F. Erdogan and G.C. Sih, *on the crack extension in plates under plane loading and transverse shear*, Transaction of the ASME. J. Basic Eng, 85, pp. 519-527, 1963.
- [21] T.K. Hellen, *On the method of virtual crack extension*. Int. J. Numer Meth Engng, 9, 187-207, 1975.
- [22] R .Branco, FV. Antunes, JD. Costa, *A review on 3D-FE adaptive remeshing techniques for crack growth modeling*, Engineering Fracture Mechanics. 141:170-95, 2015.
- [23] E. Santana, A. Portela, *Dual boundary element analysis of fatigue crack growth, interaction and linkup*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 64:176-95, 2016.

- [24] Q. Zeng, Z. Liu, D. Xu, H. Wang, Z. Zhuang, *Modeling arbitrary crack propagation in coupled shell/solid structures with X-FEM*, International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2016; 106(12):1018-40.
- [25] T. Belytschko, R. Gracie, G. Ventura, *A review of extended/generalized finite element methods for material modeling*, Modeling and Simulation in Materials Science and Engineering. 2009; 17(4):043001.
- [26] Abaqus Tutorial, *on Static stress/displacement analyses*, modeling a plate with a crack, 2014.
- [27] ANSYS, *Programmer's Manual for Mechanical APDL*, Release 15.0, 2014.
- [28] W.L. Roland, N. Perumal, and N.S. Kankanhalli, *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*, John Wiley & Sons Ltd, Southern Gate, Chichester, West Sussex PO19 8Q, England, 2004.
- [29] L. Khammar, *Thermo mechanical modeling of cracked brake disc*, Journal U.P.B. Sci. Bull., Series D, Vol. 80, Iss.1, 2018.
- [30] W.D. KINGERY, *Factors affecting thermal stress resistance of ceramics materials*, Journal of American Ceramic Society, 38 [1], p. 3 - 15, 1955.

Chapitre V

Résultats obtenus et discussions

V.1. Modélisation de la propagation des fissures

Le code APDL a été utilisé pour la mise en évidence du programme pour simuler la propagation des fissures en faisant l'incrément $i+1$ de la position soit le pas ou l'angle de propagation de la fissure de la plaque trouée (Fig. V.1) et l'intérêt du raffinement de maillage pour avoir des résultats proche de la réalité [1].

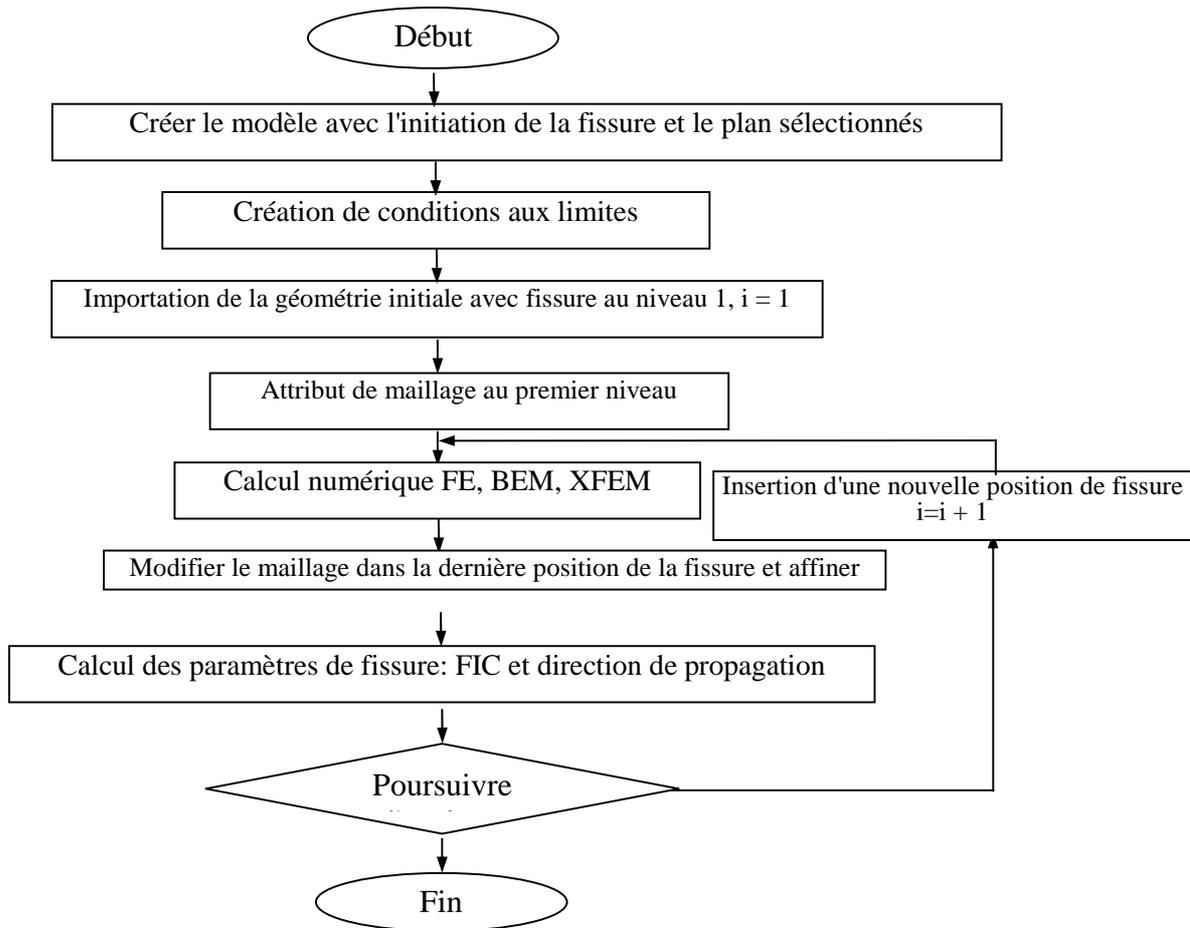


Fig. V.1 : Organigramme de la simulation de propagation des fissures dans la plaque trouée

Ainsi on peut introduire les formules du calcul du facteur d'intensités de contrainte de La fissure dans chaque orientation ou position de la plaque trouée. La figure illustre de l'organigramme du code préparé d'APDL basé sur la combinaison de l'approche par BEM et XFEM.

V.2. Influence de la position et l'angle d'amorçage des fissures

V.2.1. Effet du chargement statique en mode I

V.2.1.1. Géométrie de la plaque

La géométrie de l'éprouvette considérée est montrée dans la Fig. V.2, pour l'effet de la position et l'angle d'amorçages de la fissure. On réalise, par électroérosion, une fissure de longueur de 3mm. Les expériences ont été réalisées dans une machine d'essai mécanique de traction électronique (100KN) représentée sur la Fig. V.2a., Interfacée à un ordinateur pour le contrôle de la machine et l'acquisition de données. Tous les tests ont été menés à l'air et à température ambiante. Pour la méthode numérique, nous considérons une mince plaque d'aluminium perforée, dont l'épaisseur, la largeur et la longueur sont respectivement de 3mm, 35mm et 100mm, et un trou de 10 mm de diamètre. Dans notre étude, seulement un quart de la plaque est utilisé pour gagner du temps de travail (voir Fig. V.2b) [2].



Fig. V.2a : Machine d'essai de traction électronique 100KN

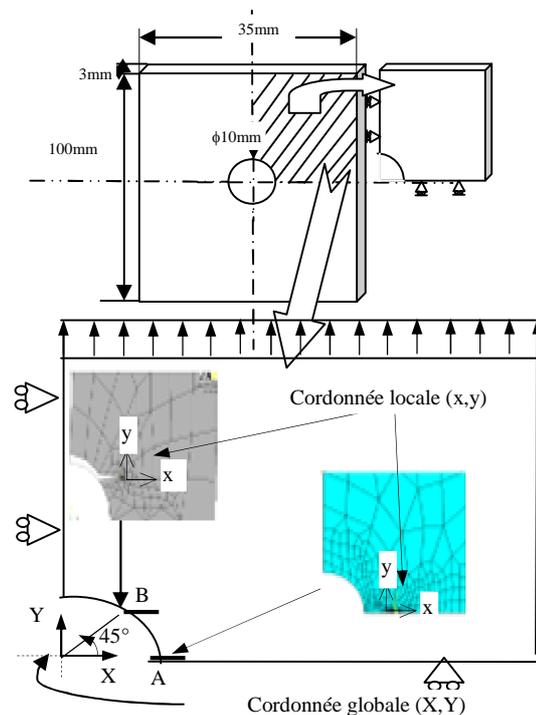


Fig. V.2b : Géométrie de la plaque en traction axiale incluant une fissure A, B

Dans ce cas, nous supposons que la charge de traction est appliquée le long de l'axe Y et que la fissure est initiée aux points A, B du bord du trou selon un angle de 0° , 45° respectivement par rapport à l'origine globale XY. Ensuite, nous analysons la variation de contraintes et le facteur d'intensité de contraintes en fonction de la longueur des fissures et

des différents angles d'orientation. L'origine du système de coordonnées global (XY) se trouve au centre du trou. Sous l'effet de traction, les extrémités de la plaque se déplacent uniquement le long des axes perpendiculaires. Cela indique les conditions de voyage appropriées à utiliser, comme indiqué ci-dessous. Nous utiliserons des méthodes numériques pour déterminer la contrainte dans le patch horizontal maximum de la plaque et comparer les résultats calculés avec la valeur maximale qui pourrait être calculée en utilisant les valeurs tabulées [3-4].

V.2.1.2. Discussion des résultats obtenus en mode I

Les résultats sont représentés dans les figures ci-dessous. La transformation des coordonnées globales cartésiennes (OXY) en coordonnées locales pour le suivi du point de fissure et la direction de propagation de la fissure aide à trouver les contraintes et les facteurs d'intensité des contraintes à chaque étape et orientation des fissures. Il y a plusieurs points d'initiation de fissure au bord du trou de plaque. Dans cette étude, nous considérons deux points émergents du trou, la position du premier point d'initiation de la fissure à 0° (point A) et le deuxième point à 45° (point B). Sur la base de l'analyse numérique réalisée, la contrainte équivalente de Von Mises a été obtenue pour les différentes positions (A, B) et les angles d'initiation de la fissure (0° , 30° , 45° , 60° , 90°), (Fig. V.3). Dans ces figures pour différents angles, on observe une zone plastique qui supporte la propagation de la fissure [5]. Les valeurs maximales enregistrées lors de ces simulations sont représentés par des singularités de contraintes en avant de la fissure et autour du point, et les résultats sont présentés dans les Fig. V.4-V.7.

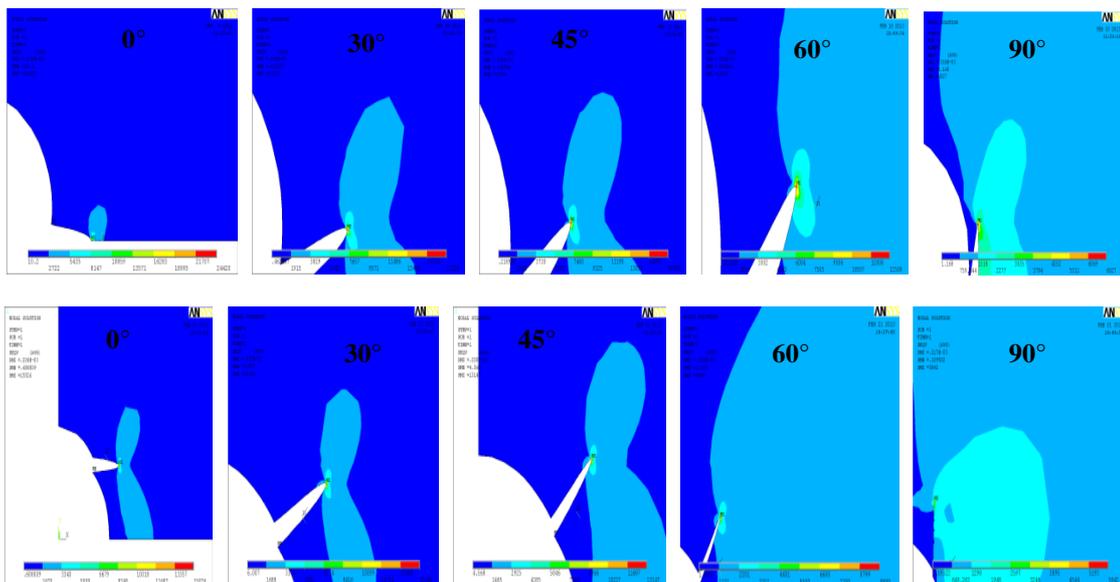


Fig. V.3 : Distribution des contraintes de Von mises pour différents angles de fissures

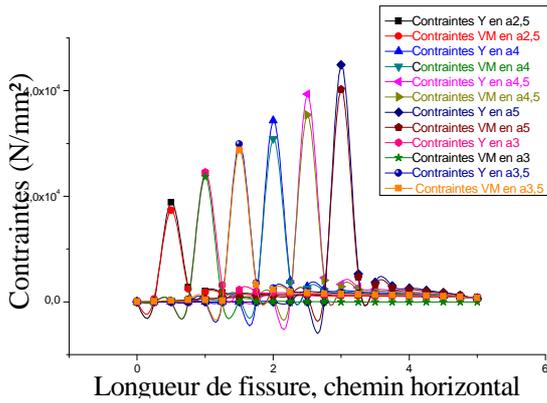


Fig. V.4 : Répartition des contraintes selon le patch horizontal pour une fissure à 0° (point A)

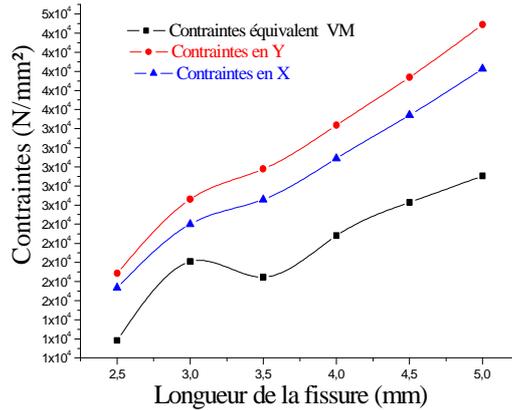


Fig. V.5 : Variation des contraintes en fonction de la longueur pour une fissure à 0° (point A)

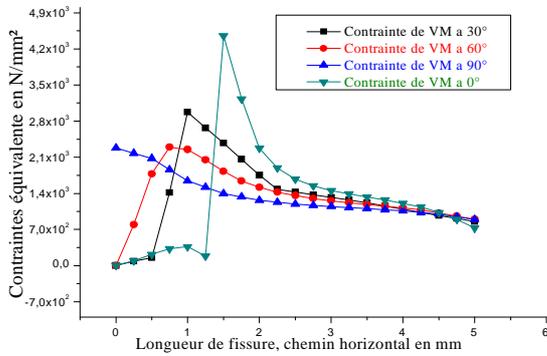


Fig. V.6 : Variation des contraintes en fonction de l'angle d'amorçage (points A)

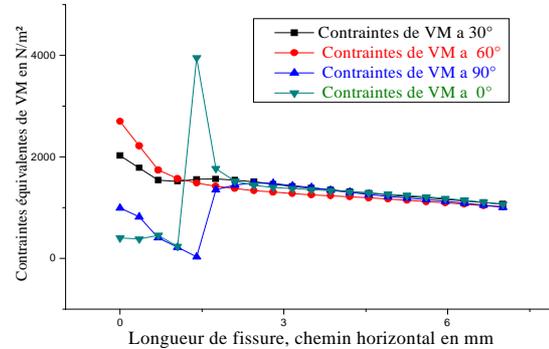


Fig. V.7 : Variation des contraintes en fonction de l'angle d'amorçage (point B)

D'après les Fig. V.4 et Fig. V.5, on remarque une augmentation de contrainte en fonction de la longueur de fissure ; alors qu'il y a une diminution de contrainte en fonction de l'angle de propagation (Fig. V.6 et V.7). Une singularité de contrainte est observée à chaque front de fissure (Fig. V.6) suite au patch horizontal et une augmentation de la contrainte en fonction de la longueur de la fissure (Fig. V.5, à une position de 0°). Il est à noter que les contraintes pour les angles de fissures (30°, 60° et 90°) sont représentées sur les figures 6 et 7 (Fig. V.6 et V.7).

Pour l'analyse des fissures émergentes des trous de plaques minces, deux cas ont été considérés: la position de l'angle d'initiation de la fissure et la longueur de propagation de la fissure. Les figures V.8 et V.9 présentent une diminution de la contrainte en faisant varier l'angle d'amorçage pour les deux positions d'amorçages de fissure (points A et B à 0° et 45° respectivement).

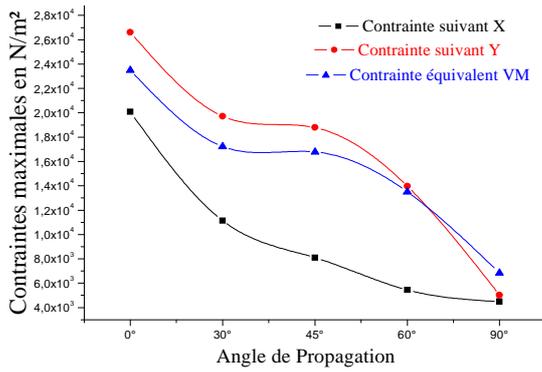


Fig. V.8 : Variation de la contrainte en fonction de l'angle de propagation, point A à 0°

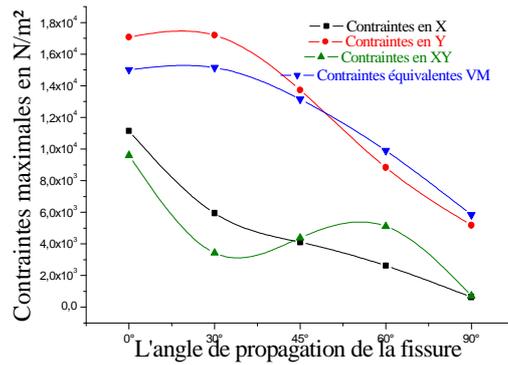


Fig. V.9 : Variation de la contrainte en fonction de l'angle de propagation, point à 45°

Les facteurs d'intensités de contraintes (FIC) qui caractérisent les fissures sont déterminés utilisant deux méthodes numériques XFEM et BEM. Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau suivant.

Tableau V.1: Facteurs d'intensités de contrainte utilisant les méthodes BEM et XFEM

Position d'amorçage de fissure		Selon la méthode BEM					Selon la méthode XFEM				
		Angle de propagation de la fissure.					Angle de propagation de la fissure.				
		0°	30°	45°	60°	90°	0°	30°	45°	60°	90°
0°	K _I	3409.8	2347.8	2001.6	1558.8	725.47	3676.2	2580.0	2199.6	1712.9	797.22
	K _{II}	0	449.26	808.97	1025.5	775.97	0	493.69	888.98	1126.9	852.72
45°	K _I	2171.6	1695.9	1212.6	602.53	259.26	2386.3	1863.7	1332.6	662.13	284.90
	K _{II}	117.21	754.54	1033.1	1027.5	622.54	128.80	829.16	1135.3	1129.1	684.11

Les résultats trouvés sont représentés dans les figures Fig. V.10 et V. Selon la Fig. V.10, pour l'approche expérimentale et les deux approches numériques; une fissure amorcée à 0°, on remarque le facteur d'intensité de contrainte K_I prend sa valeur maximale dans le sens de propagation de 0° puis il diminue progressivement jusqu'à atteindre sa valeur minimale à l'angle de 90°. Alors que le FIC(K_{II}) prend la valeur zéro à l'angle de 0°, il augmente pour s'approcher de la valeur maximale à 90°. Les contraintes de traction et de cisaillement autour de la pointe de la pré-fissure sont équivalentes à l'angle 72° dans les résultats expérimentaux, et égales à 78° ; 82,4° respectivement dans les résultats numériques des méthodes XFEM et BEM. Jusqu'à cette valeur, les contraintes de traction dominant et au-dessus de cette valeur, les contraintes de cisaillement deviennent plus dominant. Alors que pour une fissure amorcée à 45°, elle donne lieu à deux modes de rupture (mode I et mode II)(voir Fig. V.11), également appelés modes mixtes. En faisant varier l'angle de propagation, le FIC K_I à l'angle 0° est de valeur maximale, puis il diminue progressivement

jusqu'à l'angle 90°, tandis que le FIC K_{II} à 0° est de valeur minimale non nulle; il augmente ensuite jusqu'à l'angle de 90° et K_{II} devient supérieur à K_I . Les contraintes de traction et de cisaillement autour du point de la pré-fissure sont respectivement égales à l'angle 48°, 49° dans les résultats numériques XFEM et BEM.

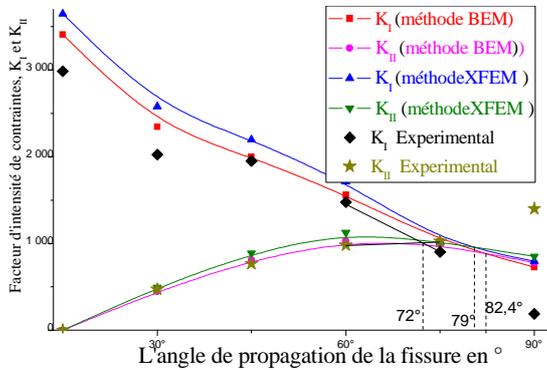


Fig. V.10: Variation du facteur K en fonction de l'angle de propagation de la fissure ($A, 0^\circ$)

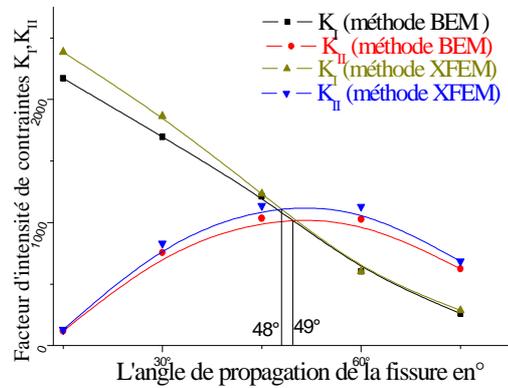


Fig. V.11 : Variation du facteur K en fonction de l'angle de propagation de la fissure à 45°

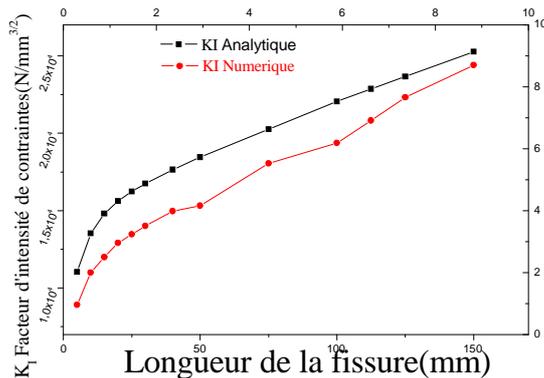


Fig. V.12 : Variation du FIC en fonction de la longueur de la fissure (A à 0°)

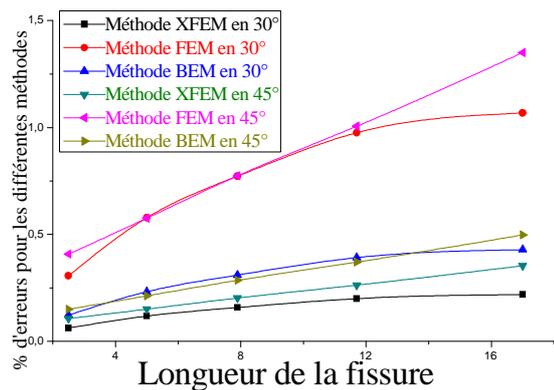


Fig. V.13 : % Erreurs de différentes méthodes en fonction de la longueur de fissure

Dans la Fig. V.12, le facteur d'intensité de contrainte (K) présente une augmentation en fonction de la longueur de la fissure pour l'approche analytique et numérique. L'évolution des pourcentages d'erreur des solutions numériques étudiées ont été calculés par rapport aux solutions du modèle exacte [6] et sont représentés sur la Fig. V.13. Une augmentation des erreurs est observée en fonction de la longueur de la fissure et le pourcentage d'erreurs est plus considérable pour la méthode des éléments finis par rapport aux méthodes BEM et XFEM.

V.2.2. Effet du chargement statique en mode mixte

V.2.2.1. Présentation du problème en mode mixte

Les charges des essais expérimentaux sont appliquées par des déplacements contrôlés et similairement les angles de chargement sont (0° , 30° , 45° , 60° , et 90°) par rapport à l'axe de la fissure initiale (Fig. V.15). L'angle 0° correspond au mode I pur, et 90° correspond au mode II pur. Les essais statiques sont effectués sur une machine de traction électronique 100KN qui est montrée par la Fig. V.14. Pour l'effet de l'inclinaison du chargement sous l'effet du charge statique, en va créer des graduant de degré sur le mandrin puisque il y a une possibilité de monter les éprouvettes en plaques sur les mors de ce mandrin (Fig. V.14). L'effet de l'angle de chargement sur le taux de croissance des fissures et de déformation d'angle est analysé. des solutions obtenues dans la mécanique de la rupture élastique linéaire pour les domaines de fissure sous l'effet des types de chargement différents qui peuvent être idéalisé comme étant en mode I, et en mode I, II (2D).

Pour le chargement inclinée, les combinaisons de chargement qui impliquent un mode mixte (mode I et II), le comportement de croissance de fissure est liée à la condition de charge.

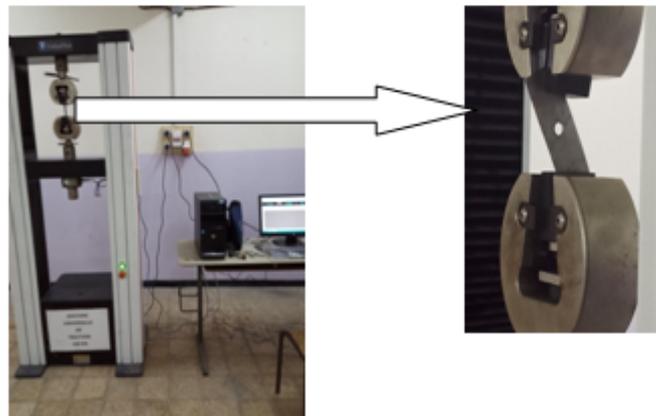


Fig. V.14 : Représentation de la machine d'essai de traction inclinée avec éprouvette

Pour la partie numérique, on applique une charge de traction orienté suivant des différents angles par rapport à l'origine de xy et on suppose une pré-fissure initié suivant l'axe x au bord du trou à un angle de 0° par rapport au repère global OXY. Puis on analyse la variation du FIC(K) pour des différents angles d'orientation de chargement suivant les deux directions à savoir $\alpha = 0^\circ$, 30° , 45° , 60° , et $\alpha = 90^\circ$.

V.2.2.2. Géométrie de la plaque et conditions aux limites de chargements

Vu la symétrie de la plaque et ses conditions aux limite une demi plaque seulement est considérée (Fig. V.15) dans l'intention d'éviter le mouvement du corps rigide, sans affecter la rigidité globale de l'échantillon. Le matériel a été supposé homogène, avec un comportement élastique linéaire. La charge appliquée est lié avec des charges ponctuelles selon les expressions [7] suivantes :

$$\begin{aligned}
 P_1 = -P_6 &= P \left(\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{c}{b} \sin \alpha \right) \\
 P_2 = P_5 &= P \sin \alpha \\
 P_3 = -P_4 &= P \left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{c}{b} \sin \alpha \right)
 \end{aligned}
 \tag{V.1}$$

Où : $P= 15\text{KN}$, $c=2b$, et α varie selon la direction de la fissure, les valeurs P_i sont les charges de traction de sollicitation sur la plaque données sur le Tableau V.2.

Tableau V.2 : Chargements en mode mixte pour les différents angles de fissurations α

Charge Angle	$P_1=-P_6$ en MPa	$P_2=-P_5$ en MPa	$P_3=-P_4$ en MPa
$\alpha=0^\circ$	7,5	0	7,5
$\alpha=30^\circ$	21,49	7,5	-8,505
$\alpha=45^\circ$	26,52	10,61	15,91
$\alpha=60^\circ$	29,73	12,99	-22,23
$\alpha=90^\circ$	30	15	-30

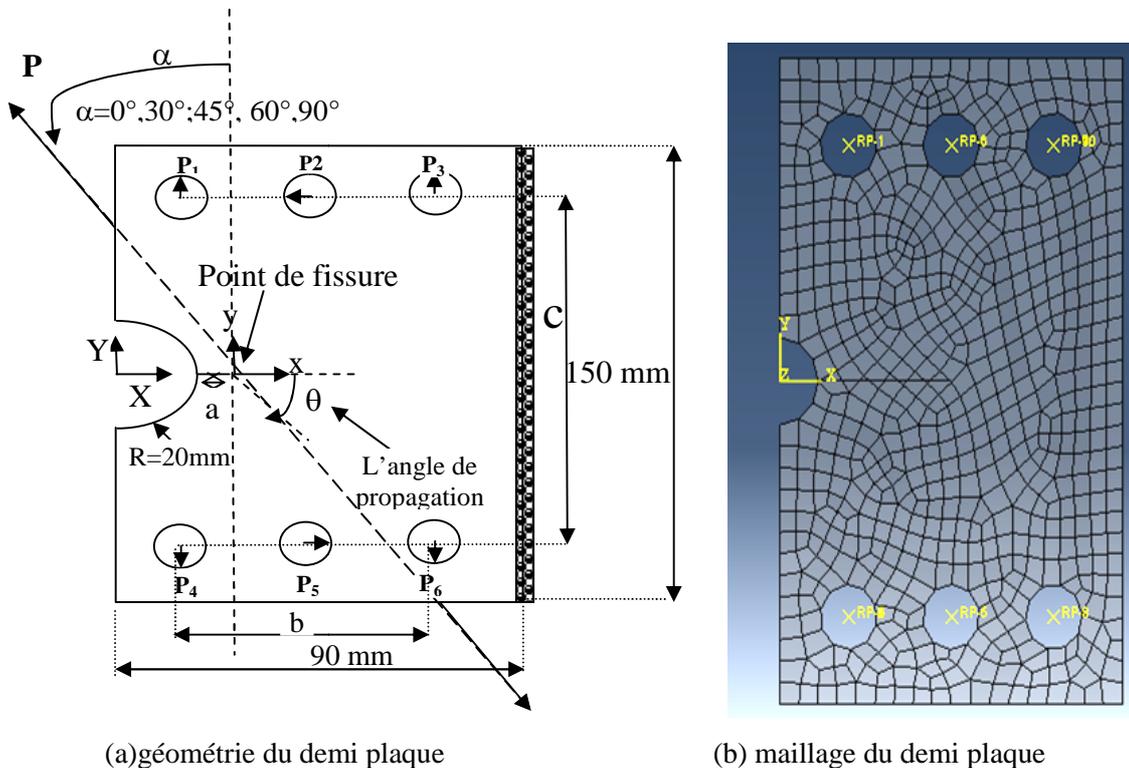


Fig. V.15: Demi-plaque chargée en traction incliné à différents angles avec pré-fissure suivant (x)

V.2.2.3. Résultats numériques obtenus en mode mixte

Les essais sont effectués sur des éprouvettes en alliage d'aluminium 7075-T6, avec des caractéristiques présentés dans les tableaux IV.2 et IV-3. On suppose que la valeur critique du taux de mixité $M^p_c = 0,75$ et les charges appliquées sont inclinées à différents angles α (30° , 45° , 60° , 90°). Une stratégie de calcul est mise en œuvre sur la base de la méthode des éléments finis utilisant la méthode du "quart de point spécial" impliquant les approches BEM et XFEM en utilisant les logiciels ANSYS et ABAQUS. Les résultats obtenus nous ont permis de définir le mode de propagation des fissures sous l'effet du chargement statique inclinée (mode mixte) et de calculer les valeurs de leurs facteurs d'intensité de contrainte correspondant à chaque mode. Le modèle proposé de propagation des fissures en mode mixte est vérifié.

Les résultats de la simulation numérique sont comparés aux résultats expérimentaux et de bons résultats ont été observés. Pour les propriétés d'interaction de surface régissent toutes les interactions de contact faisant référence à cette interaction de surface sont présentés sur la Fig. V.16. La variation de STATU XFEM au voisinage de la fissure dans la plaque trouée est présentée sur la Fig. V.17. Afin la générer la remontée de la fissure, la plaque a été soumise à des charges mentionnées dans le tableau V.2 (α varie de 0° à 90°).

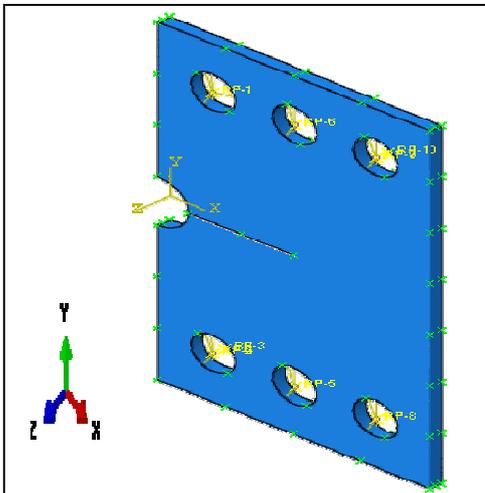


Fig. V.16 : Propriété d'interaction de surface et conditions aux limites

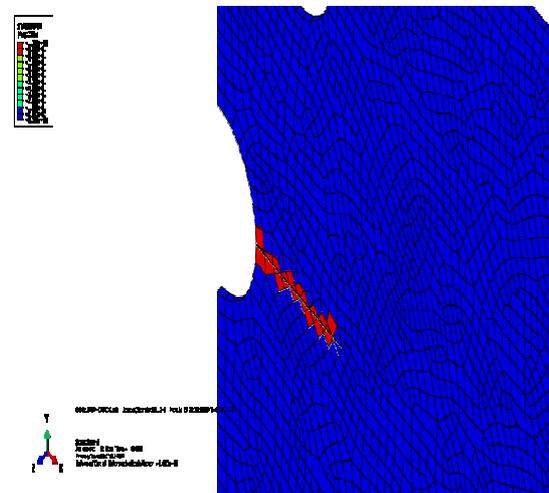
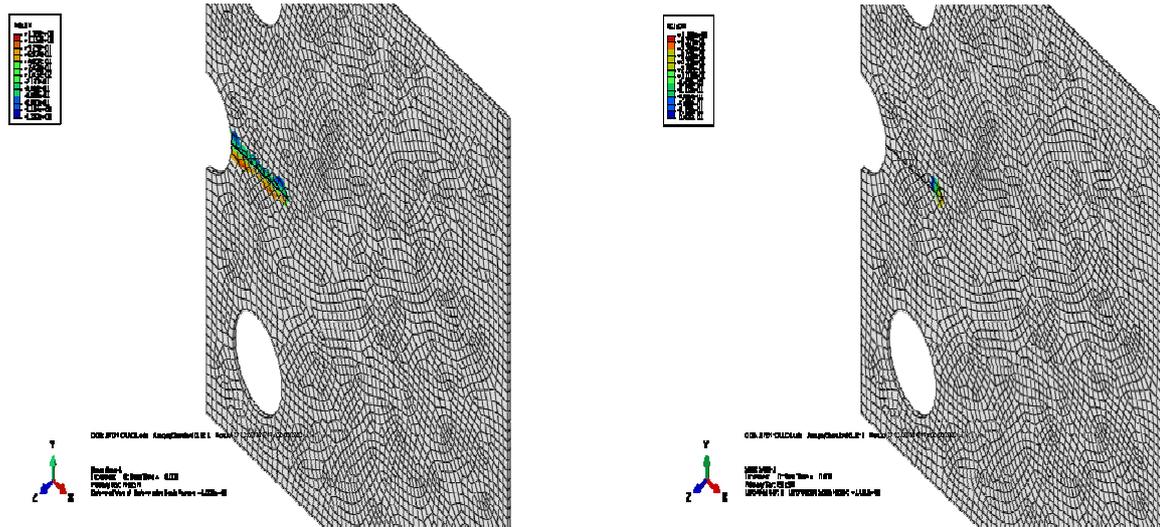


Fig. V.17 : Affichage de STATU XFEM des Endommagés

Ainsi la fonction de distance signée pour décrire la surface de la fissure (PHILSM) et la fonction de distance signée pour décrire le front de fissure initiale (PSILSM) peuvent être émis numériquement.

Le modèle numérique créé nécessite une sortie de champ pour la fonction de distance signée PHILSM. Lorsque on ouvre un fichier de base de données de sortie contenant les variables de sortie PHILSM, ABAQUS / CAE crée une vue coupée le long de la fissure XFEM (où la valeur de la fonction de distance signée est zéro). Par conséquent lorsqu'on affiche un tracé déformé ou de contour, les éléments fissurés dans la région enrichie sont visibles, comme illustré sur la Fig. V.18.



(a) Surface de fissure

(b) Front de fissure

Fig. V.18: Affichage de modélisation d'une fissure

Pour les résultats de la simulation numérique de la plaque trouée soumise à des charges mentionnées auparavant, la contrainte équivalente de Von Mises est obtenue pour les différents chargements F_i en mode mixte et présenté dans les Fig. V.19-V.23.

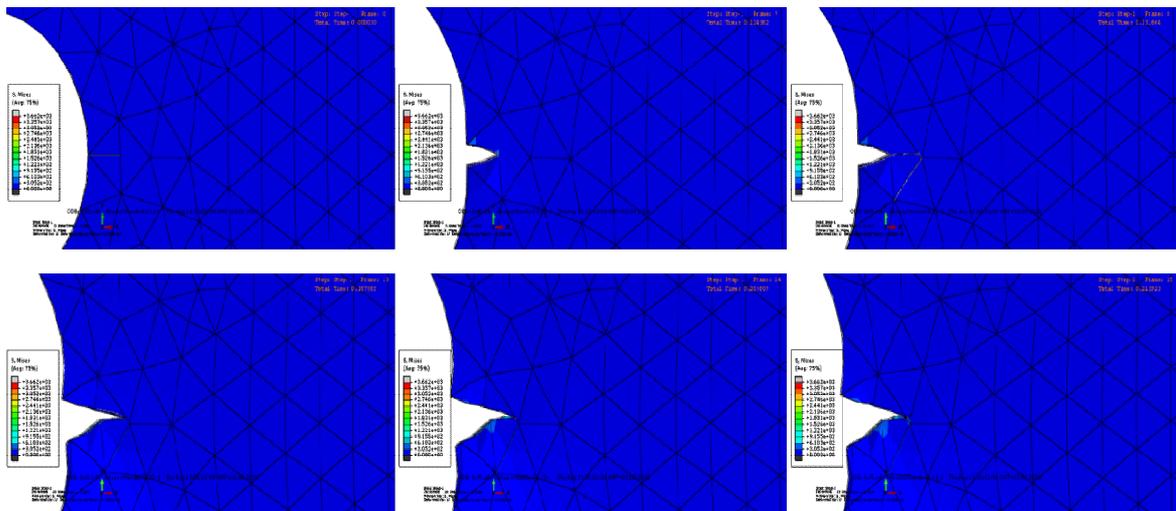


Fig. V.19 : Contraintes de Von Mises à un angle de fissuration $\alpha=0^\circ$

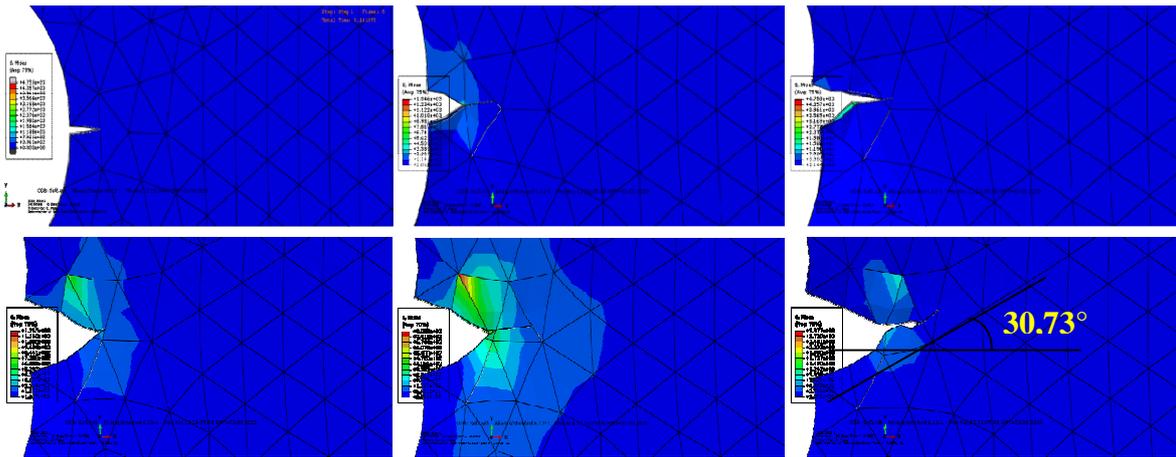


Fig. V.20 : Contraintes de Von Mises à un angle de fissuration $\alpha=30^\circ$

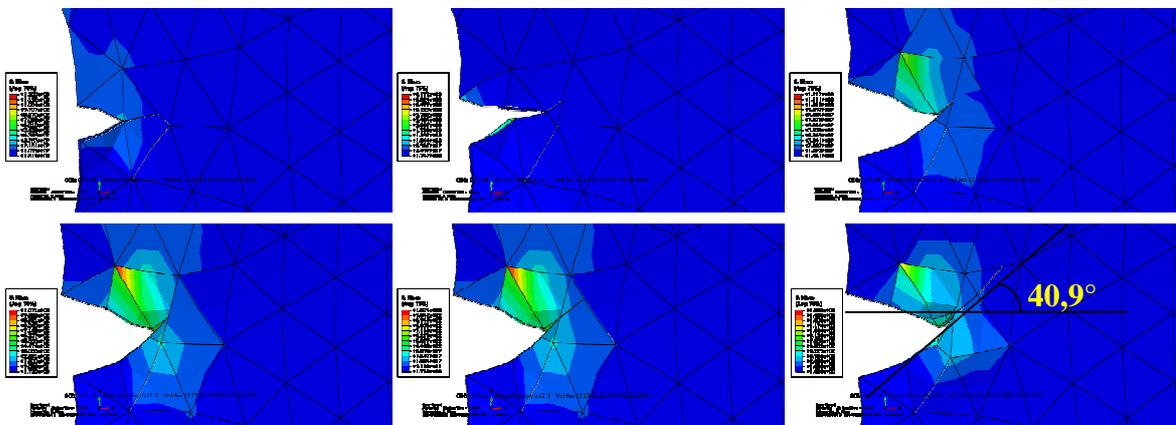


Fig. V.21 : Contraintes de Von Mises à un angle de fissuration $\alpha=45^\circ$

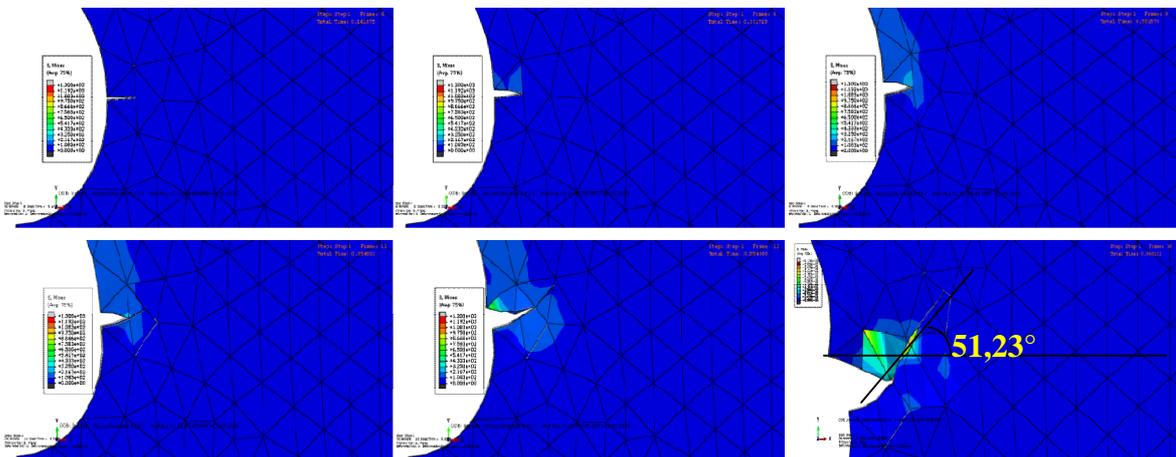


Fig. V.22 : Contraintes de Von Mises à un angle de fissuration $\alpha=60^\circ$

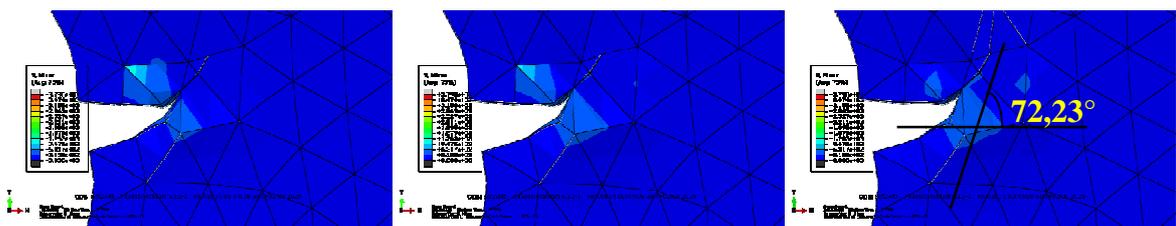


Fig. V.23 : Contraintes de Von Mises à un angle de fissuration $\alpha=90^\circ$

En conséquence, les fonctions de distance signée pour décrire le front de fissure initial(PSILSM) des plaques trouées sous l'effet de chargement statique en mode mixte peuvent être déterminées et illustrées sur les Fig. V.24-V.28.

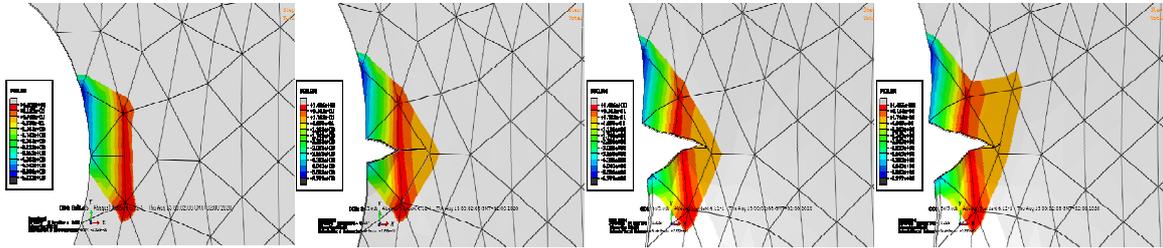


Fig. V.24 : PSILSM à un angle $\alpha=0^\circ$

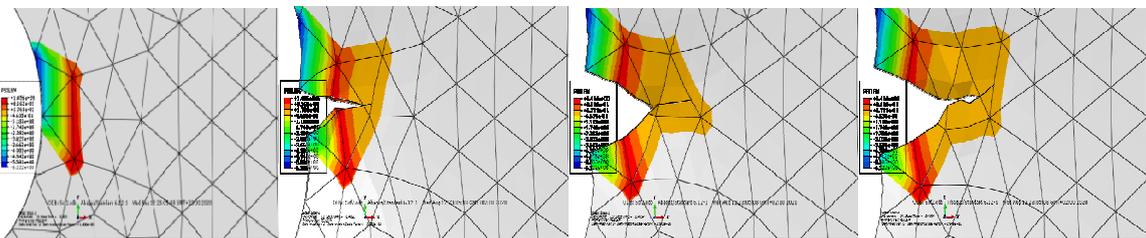


Fig. V.25 : PSILSM à un angle $\alpha=30^\circ$

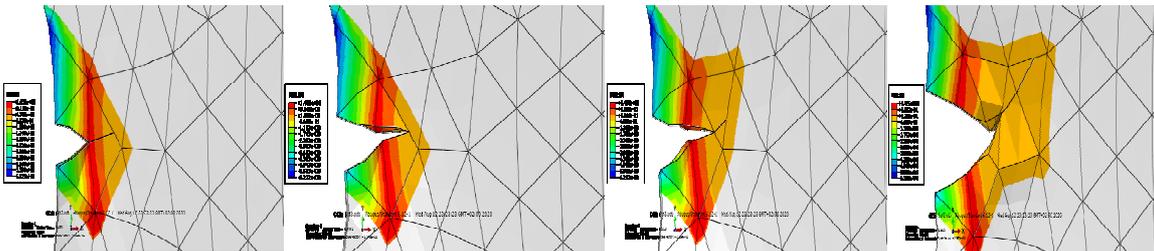


Fig. V.26 : PSILSM à un angle $\alpha=45^\circ$

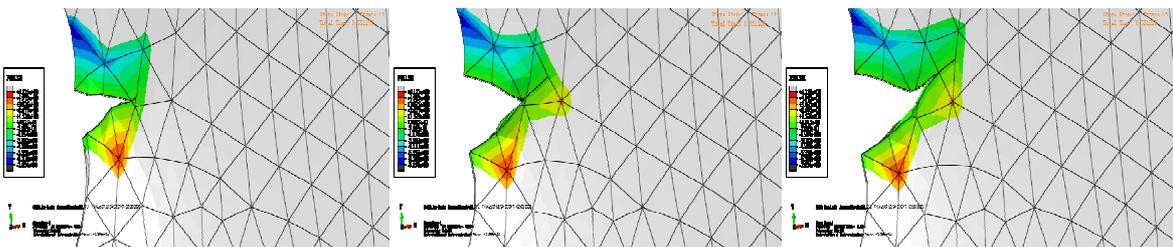


Fig. V.27 : PSILSM à un angle $\alpha=60^\circ$

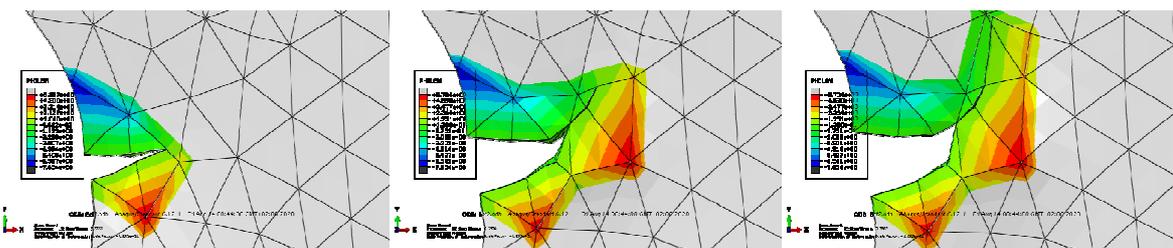


Fig. V.28 : PSILSM à un angle $\alpha=90^\circ$

Les variations des contraintes selon le Statut XFEM au voisinage de la fissure dans la plaque trouée sous l'effet des chargements statiques en mode mixte sont illustrées sur les Fig. V.29-V.33.

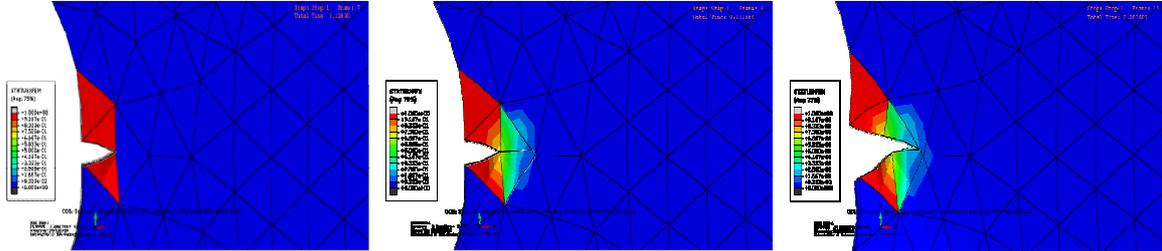


Fig. V.29 : Statut XFEM à un angle $\alpha=0^\circ$

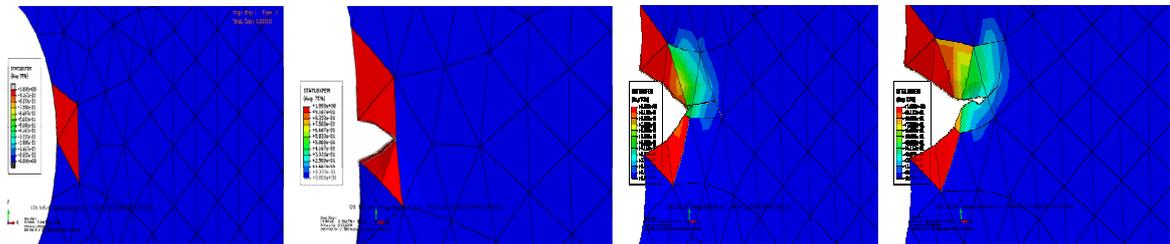


Fig. V.30 : Statut XFEM à un angle $\alpha=30^\circ$

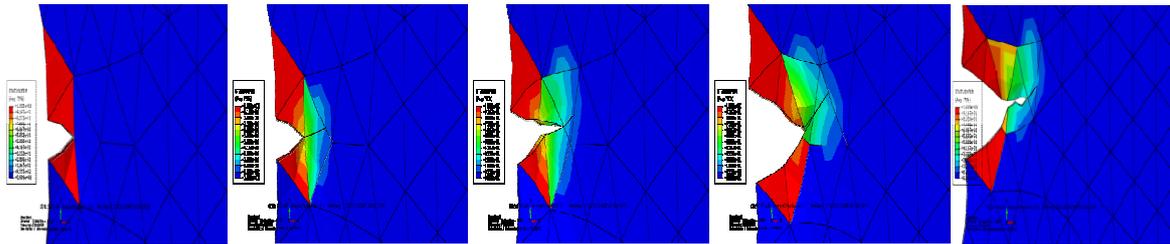


Fig. V.31 : Statut XFEM à un angle $\alpha=45^\circ$

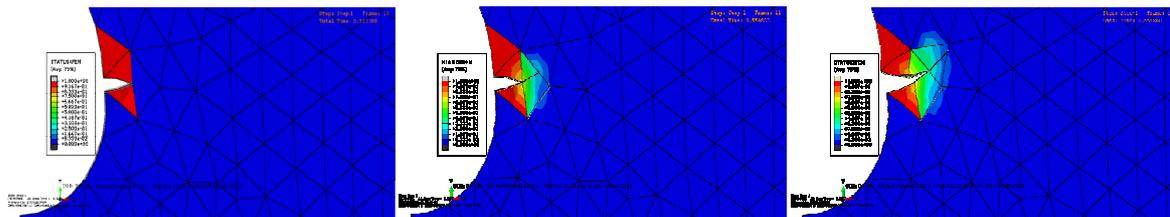


Fig. V.32 : Statut XFEM à un angle $\alpha=60^\circ$

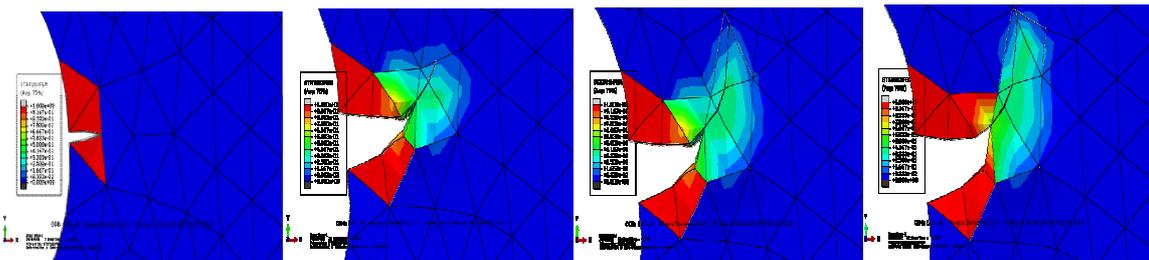


Fig. V.33 : Statut XFEM à un angle $\alpha=90^\circ$

Les fonctions de distance PHILSM signées pour décrire la surface de la fissure des plaques trouées sous l'effet de chargement statique en mode mixte sont illustrées dans les Fig. V.34-V.38.

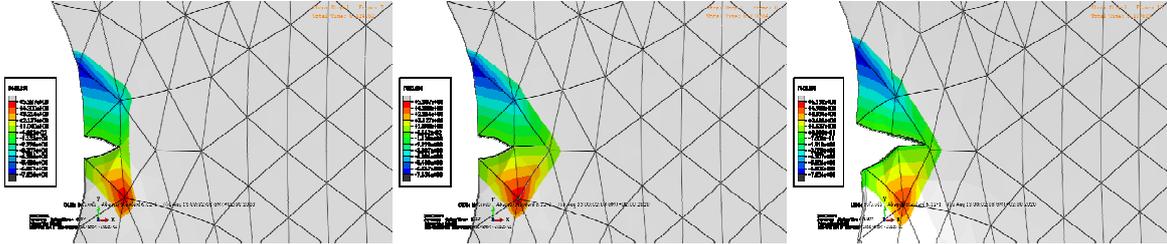


Fig. V.34 : PHILSM à un angle $\alpha=0^\circ$

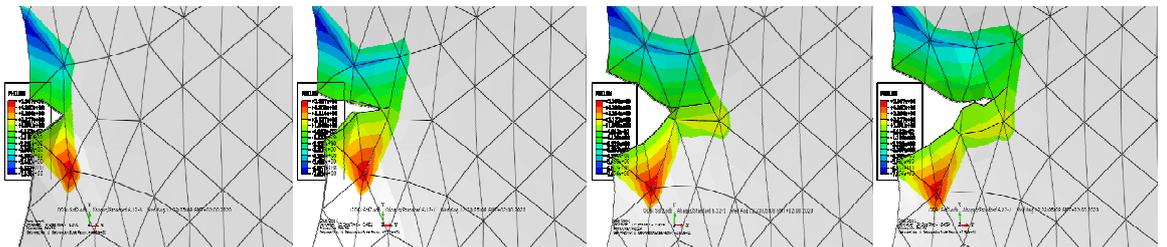


Fig. V.35 : PHILSM à un angle $\alpha=30^\circ$

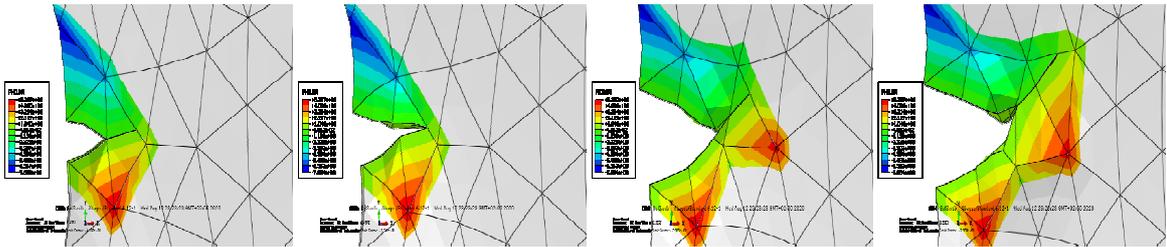


Fig. V.36 : PHILSM à un angle $\alpha=45^\circ$

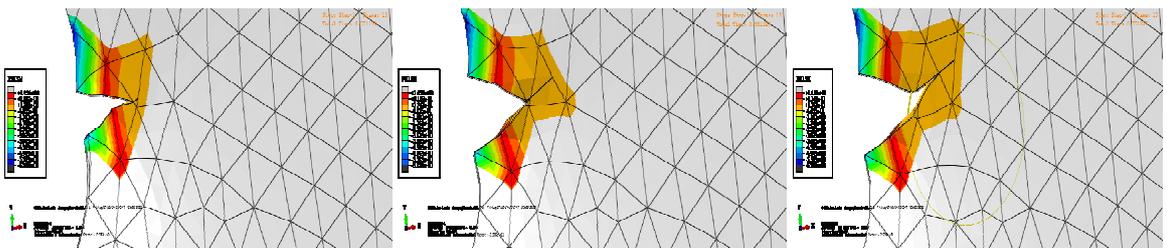


Fig. V.37 : PHILSM à un angle $\alpha=60^\circ$

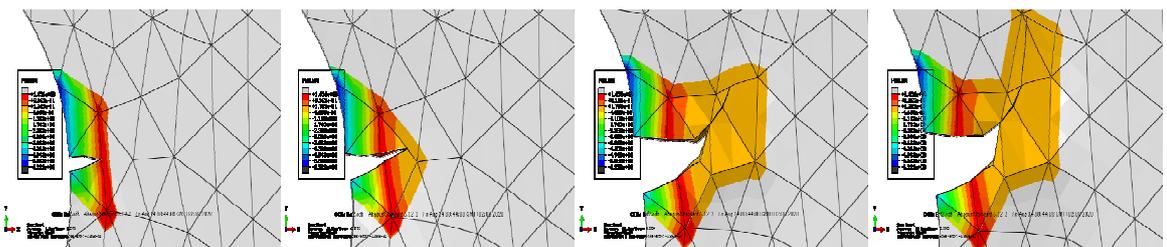


Fig. V.38 : PHILSM à un angle $\alpha=90^\circ$

Les Facteurs d'intensité de contraintes (FIC) K_I et K_{II} en fonction de l'angle de chargement α en mode mixte sont illustrés sur la Figure V.39.

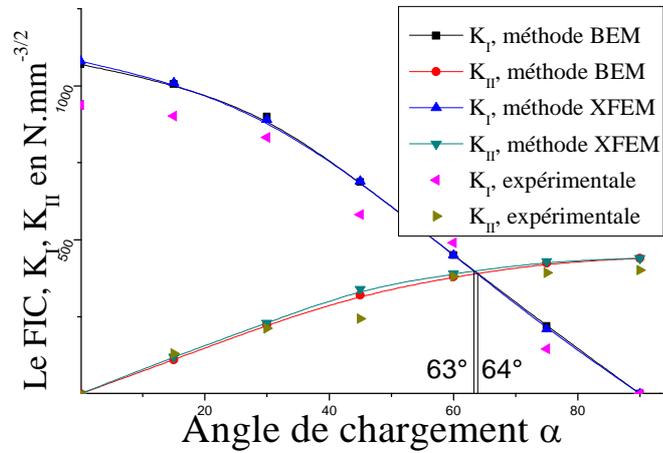


Fig. V.39 : Facteur d'intensité de contraintes sous l'effet de chargement incliné

V.2.2.4. Discussions des résultats obtenus

D'après les résultats obtenus, il est clair de voir que la fissure se propage à partir de 5mm de pré la fissure et de 20 mm du rayon du trou c'est-à-dire de 25mm, sous l'effet des chargements inclinés pour $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ et 90° . Au début de la propagation des fissures, les résultats des figures montrent un bon accord entre les résultats expérimentaux et numériques pour les différents angles de chargements.

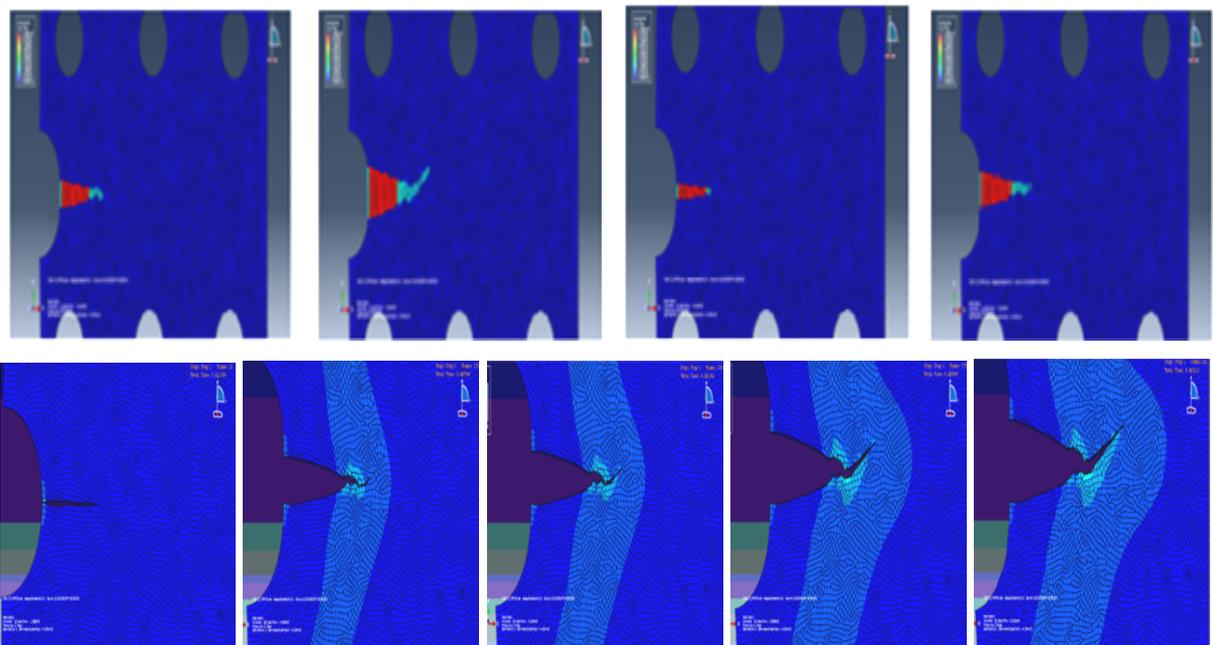


Fig. V.40 : Angle de propagation de fissure sous l'effet de la charge de traction inclinée

Les contraintes de traction autour de la pointe de front de la fissure dominant entre l'angle 0° et l'angle de charge $\alpha \approx 63^\circ,64^\circ$; respectivement pour les méthodes BEM et XFEM, mais au-dessus de cette valeur les contraintes de cisaillement dominant. Pour un chargement incliné statique, l'angle de bifurcation de la fissure sous l'effet du chargement incliné n'est pas constant. Sur la Fig. V.40 on observe que l'angle initial de propagation est différent des autres angles.

Les résultats présentés dans le tableau V.3 montrent les différentes mixités élastiques et plastiques ainsi que l'angle de bifurcation de la fissure statique sous l'effet de chargement mixte (chargement incliné) pour les différentes valeurs α .

Tableau V.3: Angles de bifurcation de fissure et les taux de mixité pour différents α

α en $^\circ$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
M^e	1	0,9593	0,8304	0,6817	0,5132	0,324	0
M^p	1	0,9282	0,8502	0,7515	0,6127	0,3569	0,003
θ°	0	20,72	30,73	40,9	51,23	-61,72	72,23

Il est clair de voir que sous l'effet de l'inclinaison du chargement de l'angle $\alpha = 0$ (mode I) à l'angle $\alpha=90^\circ$ (Mode II), il y a une diminution de la mixité élastique M^e et du taux de mixité M^p , ainsi il y a une évolution de l'angle de bifurcation de la fissure. On sait en milieu élasto-plastique, le taux de mixité M^p est utilisé pour décrire les champs singuliers de contraintes. Les critères de bifurcation peuvent être établis en se basant sur les champs de contraintes exprimés en termes de l'intégrale J du taux de mixité M^p .

Dans notre travail on a supposé que la valeur critique du taux de mixité est $M^p_c = 0,75$ (voir ci-dessus), donc:

- Si : $M^p > M^p_c \Rightarrow$ La rupture est par traction ou clivage ($K_I > K_{II}$)
- Si : $M^p < M^p_c \Rightarrow$ La rupture est par cisaillement ($K_I < K_{II}$)

a) Angle de chargement 0°

Pour un chargement statique ayant un angle d'inclinaison de $\alpha=0^\circ$, c.-à-d. une rupture par traction axial en mode I pure ($K_{II}=0$, cisaillement nulle) d'après la figure, la mixité élastique M^e et le taux de mixité $M^p = 1$, supérieur au taux de mixité critique $M^p_c = 0,75$, la rupture est par traction ($K_I > K_{II}$). L'angle de fissuration initiale égale à 0° (Fig. V.41).

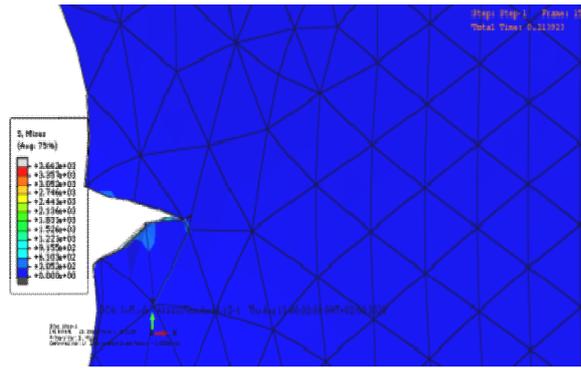


Fig. V.41: Angle de fissuration sous l'effet d'un chargement à un angle 0°

b) Angle de chargement 30°

Lorsque l'angle de chargement est égal à 30°, le taux de mixité $M^P = 0,85 > M^P_c = 0,75$; ceci correspond à la rupture par clivage ou traction ($K_I > K_{II}$, $K_{II} \neq 0$) et l'angle de fissuration est de 30,73° (Fig. V.42). En effet, l'angle de bifurcation semble suivre une petite partie de cisaillement, mais la direction de clivage est plus dominante.

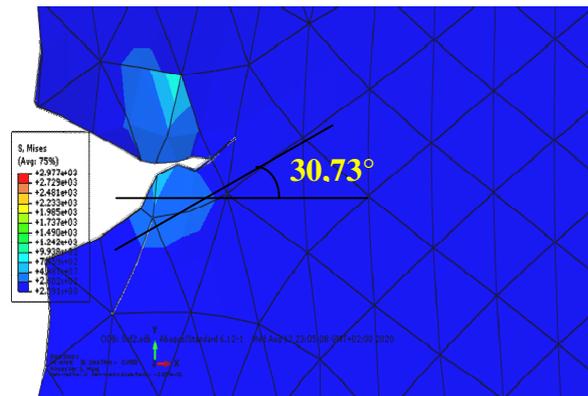


Fig. V.42 : Angle de fissuration sous l'effet d'un chargement a un angle 30°

Lorsque les angles de bifurcation varient avec la longueur de la fissure, l'angle initial de fissuration est de 30,73°, alors que l'angle final est égal à - 0,38° et les résultats sont donnés dans le Tableau V.4.

Tableau V.4 : Angles de fissuration d'éprouvette en alliage d'aluminium sous une charge statique à un angle de chargement de 30°

α=30° l'éprouvette en alliage d'aluminium					
a (mm)	5	7,4	10,4	14,2	19,5
θ°	30,73	-0,69	-0,8	-1,94	-0,38

c) Angle de chargement 60°

Lorsque l'angle de chargement est de 60°, le taux de mixité $M^P = 0,6127 < M^P_c = 0,75$, ceci correspond à la rupture par cisaillement ($K_I < K_{II}$), l'angle de fissuration est de 51,23° (voir la Fig. V.43), effet de cisaillement et important que celle de clivage ou traction, donc il y a une transition du clivage vers cisaillement.

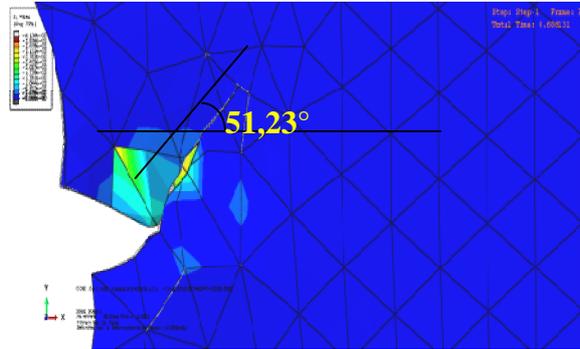


Fig. IV.43 : Angle de fissuration sous l'effet d'un chargement a un angle 60°

Les angles de bifurcation varient avec la longueur de la fissure (voir le tableau V.5), l'angle initial de fissuration est de 51,72°, alors que l'angle final est égal à -0,51.

Tableau V.5 : Résultat des angles de fissuration de l'éprouvette en alliage d'aluminium sous une charge statique à un angle de chargement 30°

α = 60° l'éprouvette en alliage d'aluminium					
a (mm)	5	7,4	10,4	14,2	19,5
θ°	51,72	-1,78	-1	-4,43	-0,51

d) Angle de chargement 90°

Lorsque l'angle de chargement est de 90°, le taux de mixité $M^P = 0,003 \approx 0 < M^P_c = 0,75$, ceci correspond à la rupture par cisaillement pure ($K_I \ll K_{II}$), l'angle de fissuration est de 72,37° (Fig. V.44), effet de cisaillement et très important que celle de clivage ou traction, donc il y a une rupture par cisaillement.

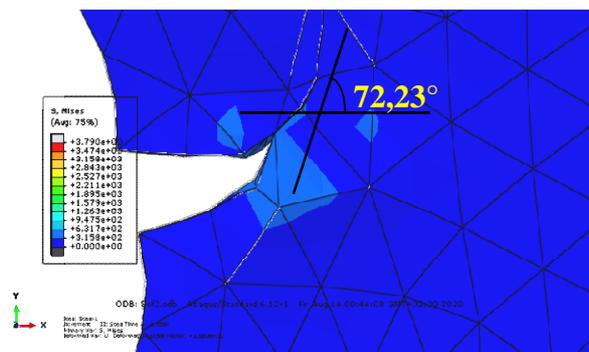


Fig. V.44 : Angle de fissuration sous l'effet d'un chargement a un angle 90°

Les angles de bifurcation varient avec la longueur de la fissure (voir le tableau V.6), l'angle initial de fissuration est de $72,37^\circ$, alors que l'angle final est égal à $-0,87^\circ$.

Tableau V.6 : Résultat des angles de fissuration de l'éprouvette en alliage d'aluminium sous une charge statique à un angle de chargement 30°

$\alpha = 90^\circ$ l'éprouvette en alliage d'aluminium					
a (mm)	5	7,4	10,4	14,2	19,5
θ°	72,37	-4,2	3,8°	-0,26	-0,87

La Fig. V.45 montre l'évolution des contraintes équivalentes en fonction de la longueur de fissure. Cette augmentation est importante à l'angle de 30° que celle de 45° . Tandis que l'évolution des pourcentages d'erreur des solutions numériques étudiées (Fig. V.46) est calculée par rapport aux expérimentales. Une augmentation des erreurs est observée en fonction de la longueur de la fissure et du pourcentage d'erreurs est considérable pour la méthode des BEM par rapport à la méthode XFEM.

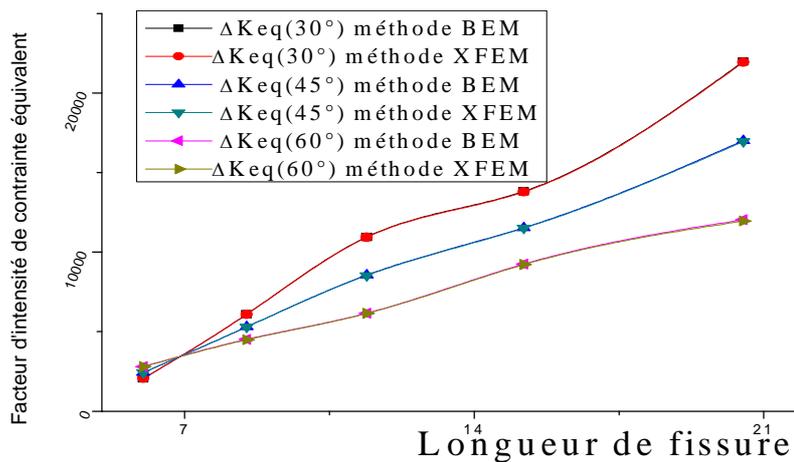


Fig. V.45 : Le FIC en fonction de la longueur de fissure pour différents angles de chargement

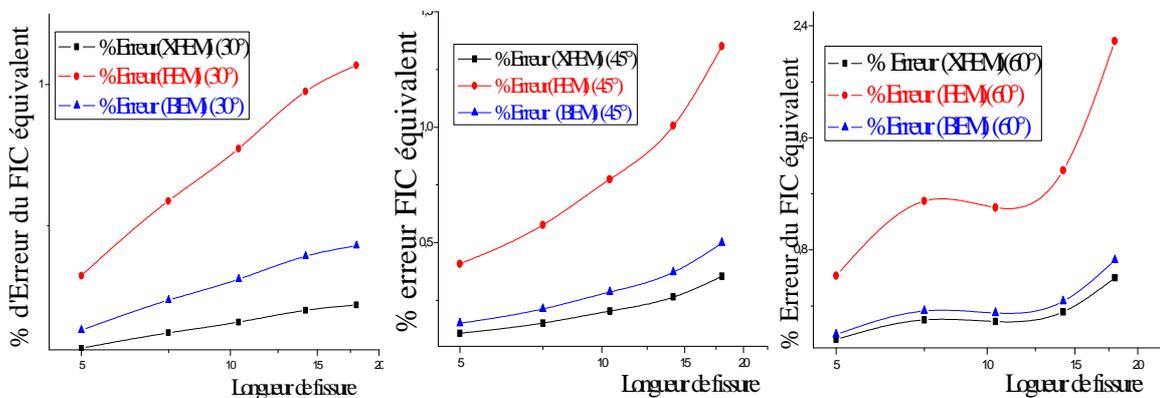
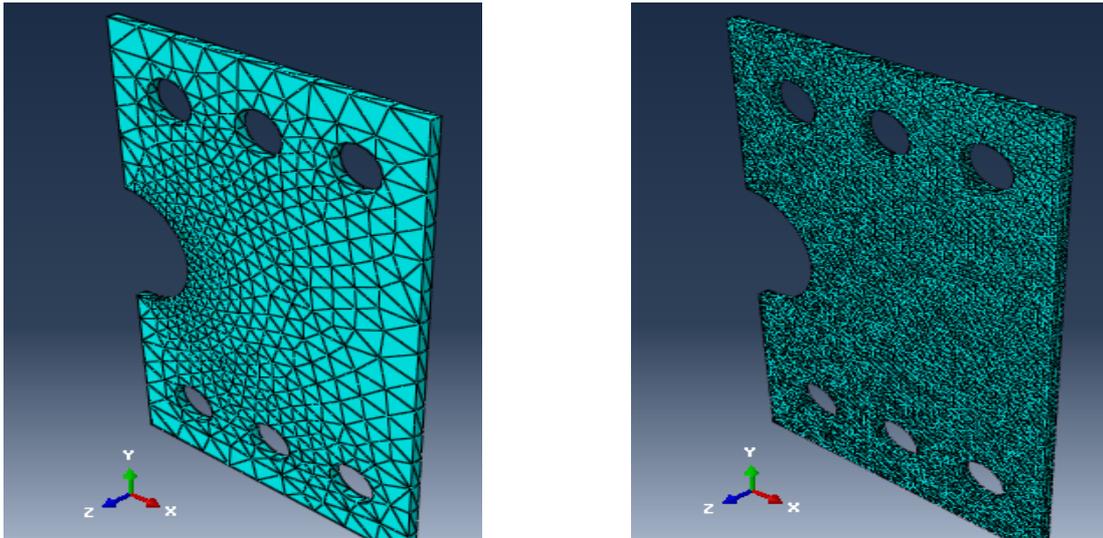


Fig. V.46 : Erreur des différentes méthodes numériques en fonction de la longueur de la fissure

V.3. Effet du chargement dynamique par fatigue

V.3.1. Effet du Maillage dans la fissure au tour du trou de la plaque

Les charges appliquées sont des forces de traction concentré axiale dans l'analyse de fatigue en cycle-bas en utilisant l'approche cyclique directe dans le logiciel ABAQUS, notre objectif c'est de voir l'effet de maillage sur la propagation de la fissure , le premier maillage c'est un maillage normale simple le deuxième est plus fin voir la Fig. V.47.



1ère Maillage avec 2608éléments

2ème Maillage avec 37111 éléments

Fig. V.47 : Géométrie de la plaque avec deux types de maillages

Pour le maillage simple, on observe que l'angle de propagation de la fissure presque 0° , d'après la Fig. V.48-49 pour les contraintes de Von Mises et le Statut XFEM , une seule fissure amorce et se propage le long de la plaque, par contre dans le deuxième maillage on a plusieurs fissures qui s'amorcent et se converge vert une seule fissure à la fin soit pour la contrainte de Von Mises (Fig. V.50) soit pour le Statut XFEM (Fig. V.51).

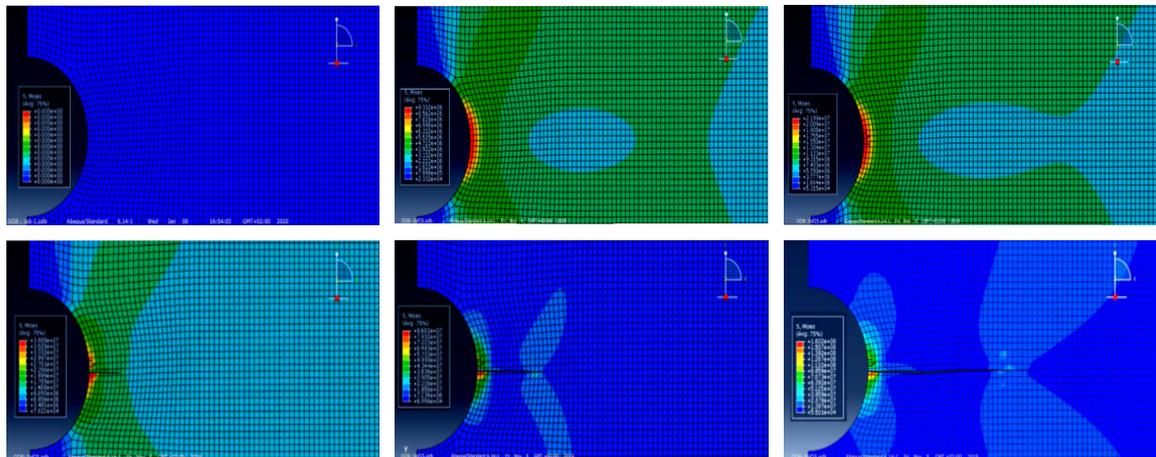


Fig. V.48: Contraintes de Von Mises et chemin de propagation de fissure, mode I et maillage simple

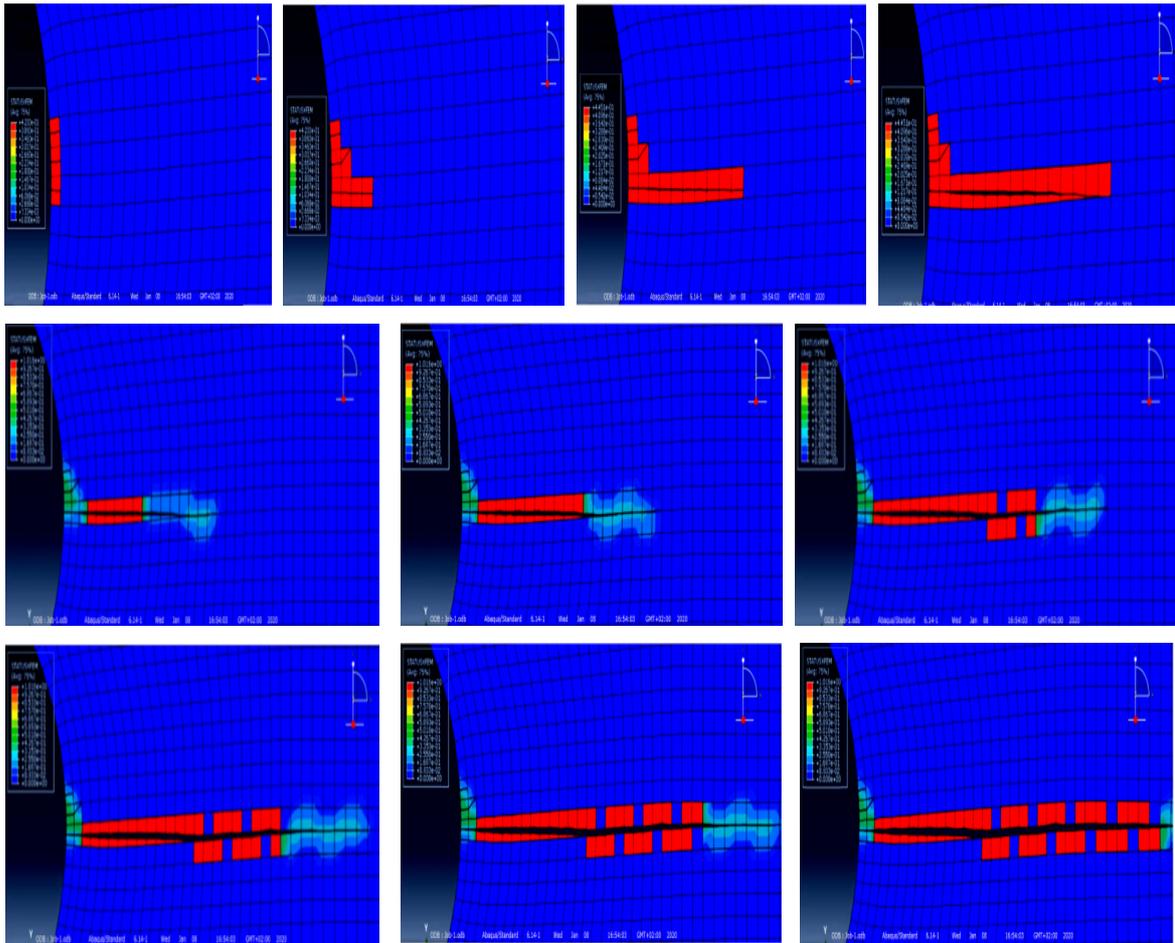


Fig. V.49: Statut XFEM et chemin de propagation de la fissure en mode I pour un maillage simple

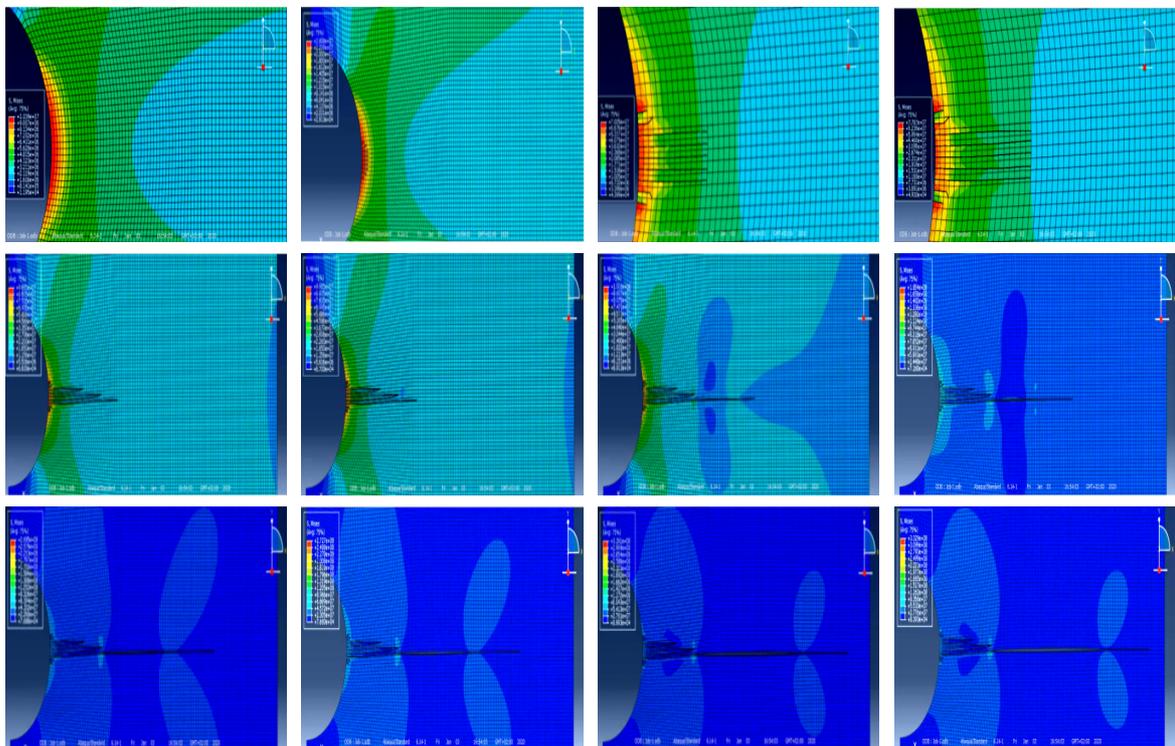


Fig. V.50: Contraintes de Von Mises et chemin de propagation de fissure en mode I et maillage fin

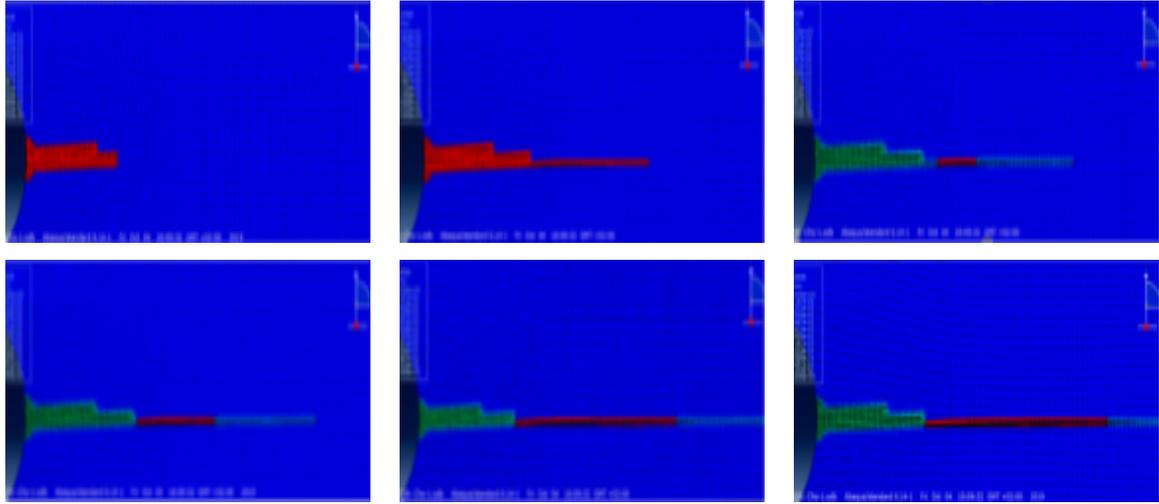


Fig. V.51 : Statut XFEM et chemin de propagation de la fissure en mode I pour un maillage fin

V.3.2. Chemin de propagation de la fissure sous l'effet de la position du trou

V.3.2.1. Plaques trouées avec une pré-fissure à ses bords

Nous avons considéré ici deux éprouvettes trouées et pré-fissurées en deux endroits (bord de la plaque), la première fissure a une distance de x_1 du trou et la deuxième a une distance de x_2 , les deux éprouvettes soumises à un essai de traction (voir Fig. V.52).

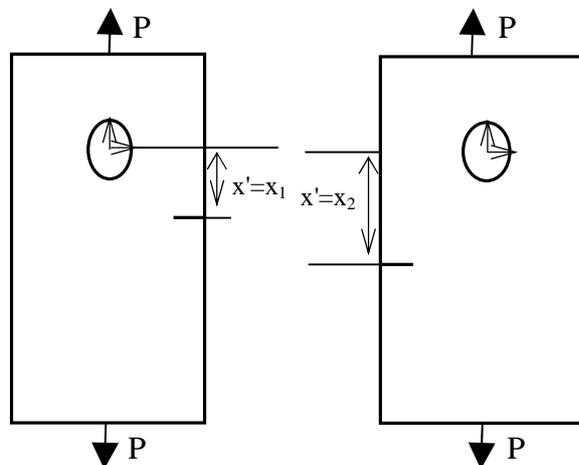


Fig. V.52 : Géométrie des deux plaques trouées et pré-fissurées au bord

Pour une fissure débouchant au bord de la plaque et près du trou de la plaque, on observe que la trajectoire de la fissure se propage vers le trou de la plaque, et la concentration de contraintes est dans le front de la fissure en rouge et la partie fissurée loin du front de fissure et en vert (soulagement de contraintes) voir la Fig. V.53.

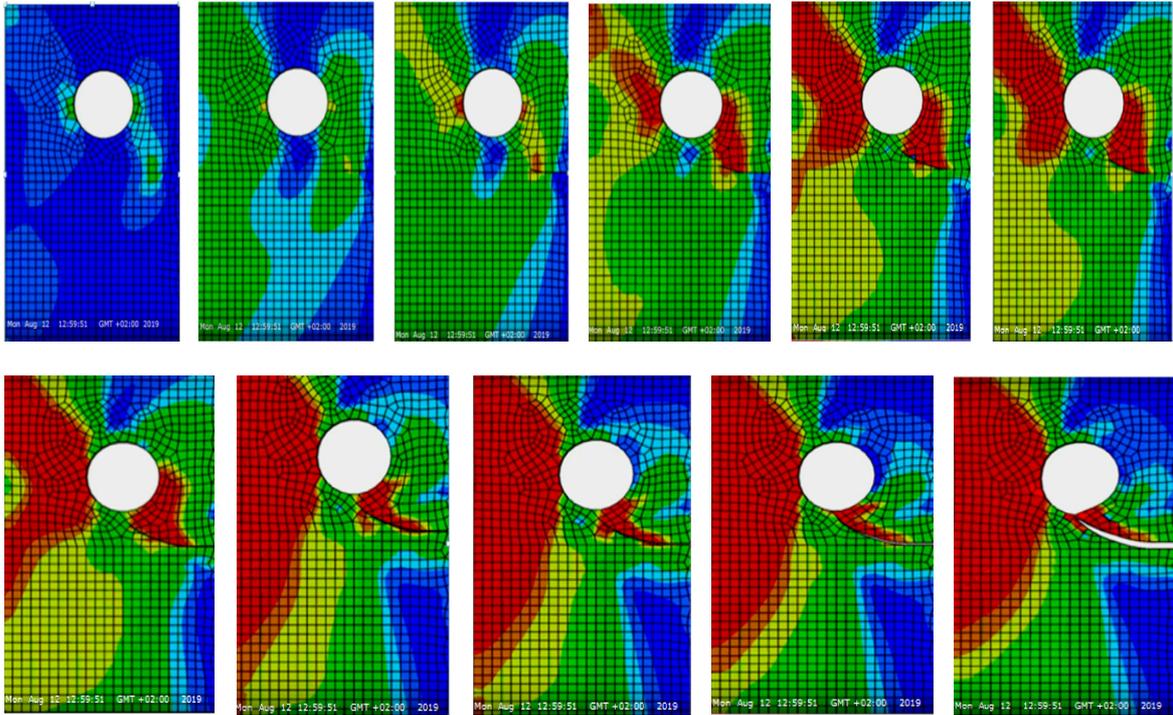


Fig. V.53: Contraintes de Von Mises et chemin de propagation de la fissure au voisinage du trou

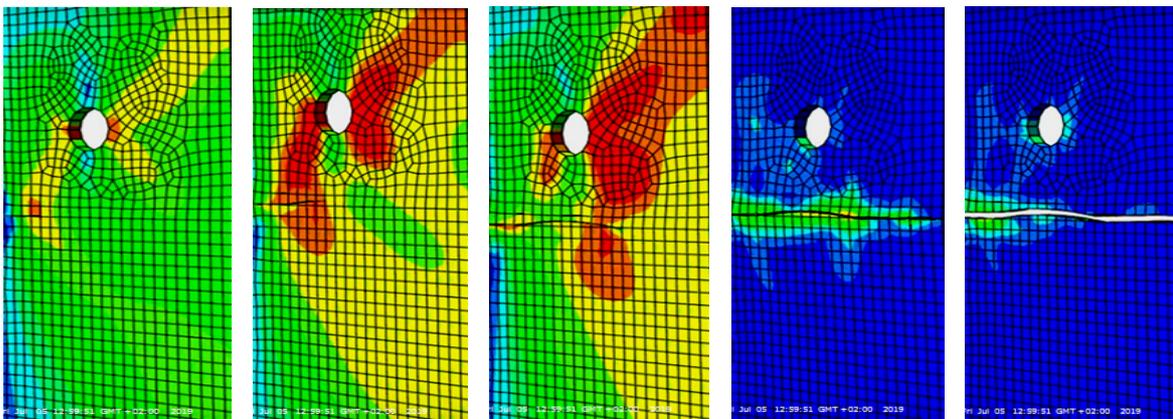


Fig. V.54 : Contraintes de Von Mises et chemin de propagation de la fissure loin du trou

V.3.2.2. Plaques trouées avec deux pré-fissurées à ses bords

Dans ce cas une éprouvette trouée, et pré-fissurée en deux endroits (bord de la plaque) ; la première fissure a une distance de x_1 près du trou et la deuxième a une distance de x_2 loin du trou , soumise à un essai de traction (Fig. V.55).

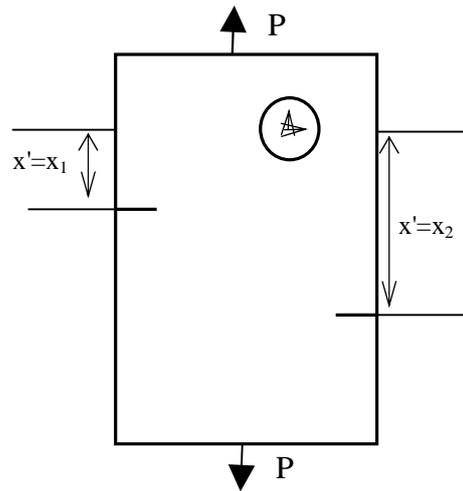


Fig. V.55 : Géométrie de plaque trouée ayant deux fissures aux bords

Pour le cas de deux fissures débouchantes au bord de la plaque la première pré du trou a une distance x_1 et la deuxième loin du trou de la plaque à une distance x_2 , la direction de propagation de la première se fait vers le trou de la plaque, la deuxième se propage a un angle horizontale loin du trou (Fig. V.56).

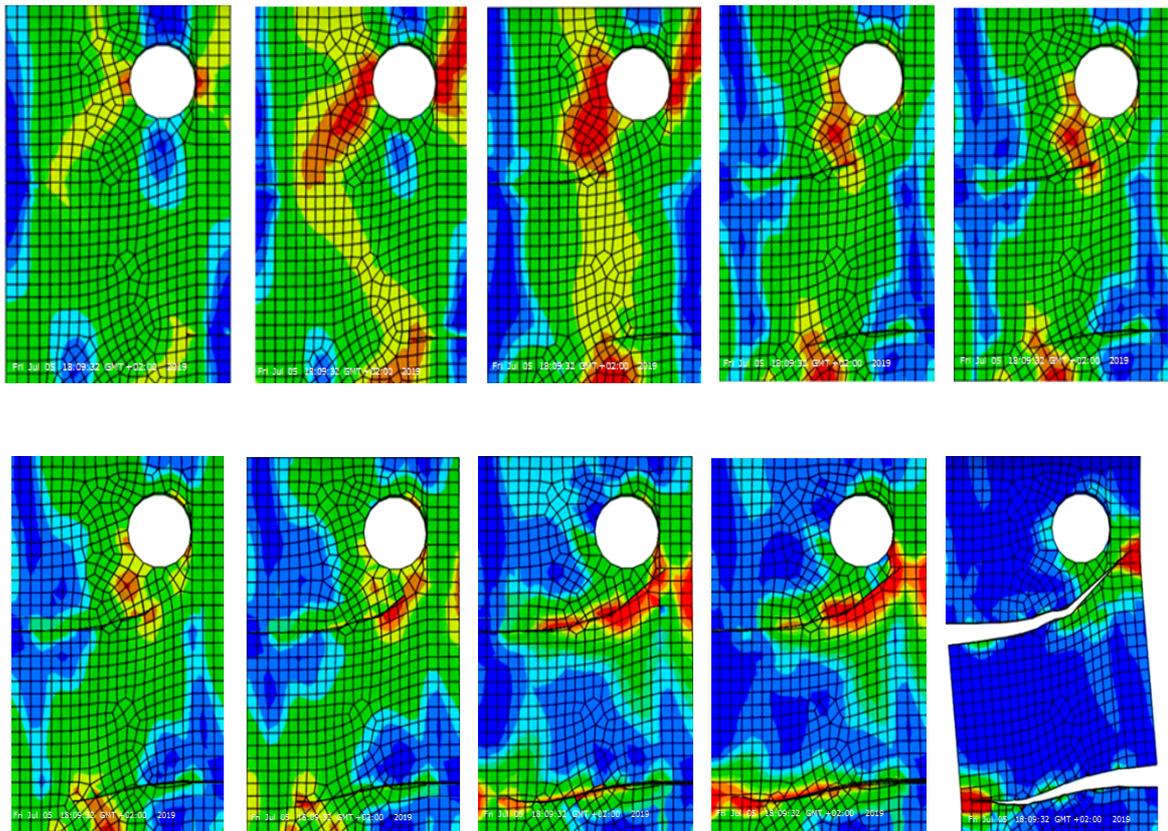


Fig. V.56 : Chemin de propagation des deux fissures initiée du bord de la plaque trouée

V.3.2.3. Plaques trouées avec deux pré-fissures au bord de la plaque et du trou

Considérons une plaque ayant deux fissures la première amorcée à travers le trou la deuxième et au bord de trous a une distance variable x' (Fig. IV.57), puis en analyse le chemin de propagation de la fissure suivant la distance x' .

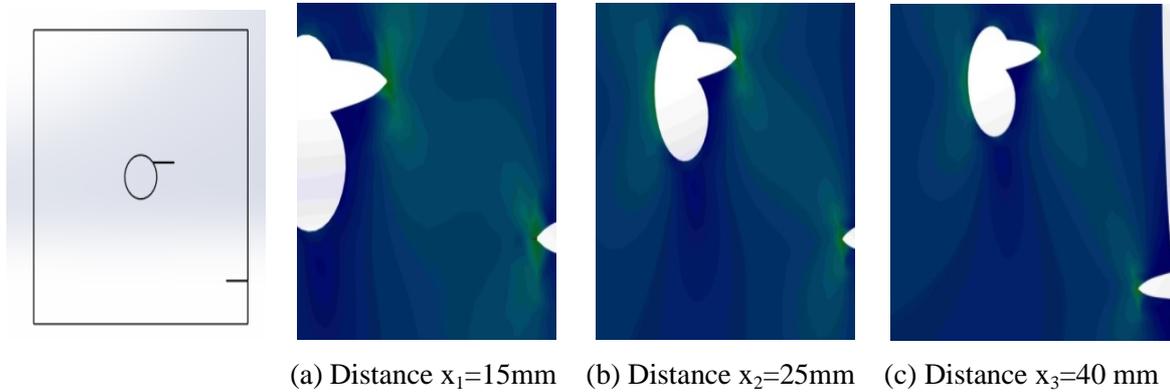


Fig. V.57 : Géométrie de la plaque ayant deux fissures

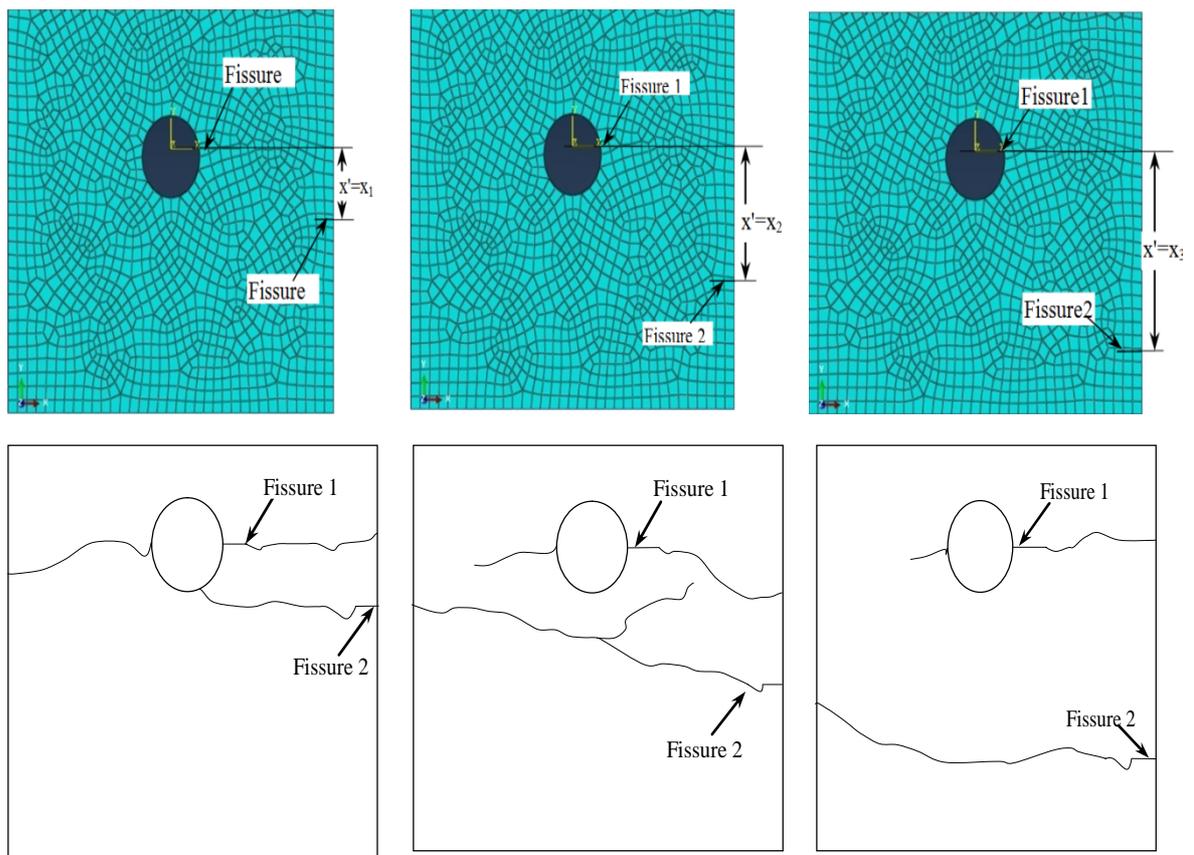


Fig. V.58 : Influence de la distance entre deux bouts de fissures sur la direction de propagation

Le chemin de propagation de la fissure sous l'influence de la distance entre deux bouts de fissures à la présence du trou dans la plaque sur la direction de propagation (Fig. V.58), la première fissure s'amorce du trou de la plaque et la deuxième a une distance x' . Le paramètre x' influe sur la direction de propagation de la fissure ainsi que la position du deuxième fissure par rapport au trou de la plaque. Une comparaison de la prédiction du chemin de propagation de la fissure (Fig. V.57-58), plus que la valeur de x' est petite plus que les deux fissures se rencontrent, vu la présence des deux zones plastique qui se rapprochent et qui facilite la propagation de fissures l'un vers l'autre.

V.4. Conclusion

La propagation d'une fissure est possible dans les trous des plaques, en présence d'une concentration de contraintes fragilisant la structure. Cette concentration tend vers un amorçage de fissure imprévisible et difficile à modéliser. Il faut donc créer le démarrage de la fissure manuellement. En effet, l'étude numérique réalisée sur l'influence de la position, de l'angle d'initiation autour du trou de la plaque mince d'aluminium et sur le comportement sous l'effet d'une simple charge de traction (mode I) ou inclinée (mode mixte). En considérant l'élément de traction quart de point singulier, de chaque côté de la fissure, on peut déduire qu'il faut choisir l'élément quart de point et le raffinement du maillage pour une meilleure convergence vers une solution exacte.

On note une proportionnalité entre la propagation de la fissure et le facteur d'intensité de contraintes. Les méthodes XFEM et BEM, selon une singularité d'approximation, ont montré de faibles niveaux d'erreur par rapport aux méthodes classiques d'éléments finis, qui ont montré des niveaux d'erreur plus élevés. Le XFEM permet de calculer une propagation avec un seul maillage, tandis que le BEM nécessite une discrétisation à la frontière de l'objet. Pour une bonne investigation, il est impératif de connaître le point de départ de la fissure et son angle de propagation qui est responsable du type de contraintes (traction ou cisaillement) autour du point de la pré-fissure, et leur mode (mode pur ou mixte). Ainsi que de voir la variation de l'angle bifurcation de la fissure suivant l'angle de chargement (chargement en mode mixte). La concentration des contraintes autour du trou d'une plaque engendre des zones plastiques, qui prédisent le chemin de propagation vers le trou ou vers une autre fissure. Aussi et pour des différentes fissures distantes l'une de l'autre, il serait clair de noter que plus que ces distances sont petites plus que les deux fissures se rencontrent, vu la présence des deux zones plastiques qui se rapprochent et qui facilite la propagation de fissures l'une vers l'autre.

Références

- [1] S. Chorfi, B. Necib, *Analysis of the influence of the crack propagation angle in the thin aluminum plates Under the effects of the traction efforts*, journal U.P.B. Sci. Bull., Series D, Vol. 82, Iss.2, 2020.
- [2] S. Chorfi, B. Necib, *Crack propagation analysis around the holes in the plates under the effect of external stresses using the finite element model*, ESIS Summer School, ECF21, June 20-24, 2016.
- [3] K.L. Lawrence, *ANSYS Tutorial, Release7.0*, Schroff Development Corporation Publications, 2006.
- [4] T.L. Anderson, *Fracture Mechanics Fundamentals and Applications*, 3rd Edition: CRC press, Taylor & Francis Group, 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300, Boca Raton, FL 33487-2742, 2005.
- [5] ML. Khammar, *Thermo mechanical modeling of cracked brake disc*, journal U.P.B. Sci. Bull., Series D, Vol. 80, Iss.1, 2018.
- [6] M. K. Kassir and G. C. Sih, *Three-dimensional stresses around elliptical cracks in transversely isotropy solids*, Engin. Fract. Mechcs. 1968, Vol.1, pp. 327-345.
- [7] HA. Richard, [*Bruchvorhersagen bei berlagerter normal- und schubbeanspruchung von risen*](#) VDI Forschungsheft631, Dusseldorf: VDI-Verlag; 1985. p. 1–60.

Conclusion générale et Perspectives

Conclusion générale

La propagation des fissures est un phénomène stochastique impossible à éviter dans les éléments des domaines de la technologie moderne. L'analyse de la propagation de ces fissures dans les corps isotropes ou orthotropes est donc nécessaire pour la conception et le dessin de ces éléments afin d'éviter leur rupture, leur détérioration et augmenté leur durée de vie. Ces analyses sont basées essentiellement sur des calculs théoriques, numériques ou expérimentaux. Notre travail est consacré à l'analyse de la propagation des fissures autour des trous dans les plaques minces bidimensionnelles sous l'effet des charges extérieures. Ces trous sont souvent inévitables pour permettre un assemblage résistant entre les corps, les plaques ou les structures bi ou tri dimensionnels. Dans notre cas, des analyses statiques, dynamiques et expérimentales sur la propagation des fissurations autour des trous circulaires et elliptiques dans les plaques minces en matériaux isotropes d'aluminium et d'alliage d'aluminium sous l'effet des conditions extérieures ont été considérés. L'analyse numérique a été réalisée en se basant sur les codes APDL basés sur la combinaison de l'approche par les méthodes des MEF, BEM et XFEM en utilisant les logiciels ANSYS et ABAQUS.

Dans notre travail, l'état de contraintes et de déformations à n'importe quels points de la plaque et particulièrement au voisinage du trou ont été déterminés théoriquement, numériquement tout et expérimentalement tout en déterminant les facteurs d'intensité de contrainte (FIC) sous l'effet des conditions extérieures ainsi que sous l'effet de changement de températures. Dans le cas de changement de température, cette dernière influe beaucoup sur le facteur d'intensité de contrainte qui devient très important pour des grandes longueurs de propagation de fissures.

L'analyse statique a été réalisé expérimentalement où les différents valeurs des facteurs d'intensités de contraintes (FIC) ont été déterminés pour les différents modes de ruptures à savoir: mode I, mode II et mode mixte et ce au bord des trous des plaques et non loin sous l'effet des forces et des conditions extérieures. Le FIC ainsi que les contraintes de Von mises ont été déterminés pour différentes positions et angles d'amorçages des fissurations (0° , 30° , 45° , 60° , 90°) expérimentalement et en utilisant les différentes méthodes numériques. Il a été noté que pour une fissure amorcée à 0° , le facteur d'intensité de contrainte K_I prend sa valeur maximale pour un angle de 0° puis il diminue progressivement jusqu'à atteindre sa valeur minimale à l'angle de 90° . Alors que K_{II} prend

la valeur zéro à l'angle de 0° , il augmente pour s'approcher de la valeur maximale à 90° . Aussi il été observé que la contrainte de Von Misses augmente en fonction de la longueur de fissure, alors qu'elle diminution en fonction de l'angle de propagation (α). Les contraintes de traction et de cisaillement autour de la pointe de la pré-fissure sont équivalentes à l'angle 72° pour les résultats expérimentaux, et égales à 78° et $82,4^\circ$ respectivement pour les résultats numériques des méthodes XFEM et BEM. La contrainte de traction dominant et au-dessus de cette valeur et la contrainte de cisaillement devient plus dominante. Alors pour une fissure amorcée à 45° , cela donne lieu à deux modes de ruptures (I et II) ainsi qu'à un autre mode dit mode mixte.

L'analyse dynamique a été aussi réalisée numériquement et les facteurs d'intensités de contraintes déterminés tout en utilisant des maillages dans la fissure au tour du trou de la plaque. Les charges appliquées sont des forces de traction concentré axialement dans en cycle-bas en utilisant l'approche cyclique directe du logiciel ABAQUS tout en considérant des maillages simples et des maillages fins. Il a été trouvé que le maillage fin donne des résultats plus convergents. Par ailleurs, la détermination du chemin de la propagation des fissures dans les plaques en fonction de la position du trou a été considérée. On remarque que le choix des distances de la position de l'amorçage de la fissure influe sur la direction de la propagation de la fissure pour le cas d'une ou des deux positions fissures par rapport au trou de la plaque. Une comparaison de la prédiction du chemin de propagation de la fissure est restreinte plus que la valeur des distances est petite plus que les deux fissures se rencontrent, vu la présence des deux zones plastique qui se rapprochent et qui facilite la propagation de fissures l'un vers l'autre.

Perspectives

En perspectives, l'état actuel des choses dans les domaines des nouvelles technologies de la mécanique, l'aéronautique, le génie civil et la biomécanique nécessite des analyses plus approfondies sur la propagation des fissures à différents états statiques, dynamiques ou fluides. Pour éviter ces ruptures ou ces désastres totales, d'importantes et adéquates conceptions et design de ces technologies sont nécessaire dans leurs états réels, à savoir continus, discrets, élastiques, plastiques ou composites. Généralement, ces structures sont souvent analysées à leur contrainte nominale qui ne dépasse pas la limite d'élasticité du matériau et soient à l'abri de la ruine ou de la rupture de type ductile ou de type fragile.

Cependant, elles peuvent survenir à une fissure soit préexistante ou créée par fatigue d'où des catastrophes brutales seraient inévitables. En conséquence, elles doivent être analysé précisément pour pouvoir éviter leur rupture et estimer d'une manière fiable leur durée de vie en tenant compte d'autres axes de recherche et de développements tels que:

- Définir précisément les pertes des performances de la structure au niveau des fissures durant son fonctionnement tout en développant des équations adéquates comme adapté dans le cas réel à l'état statique, dynamique ou aérodynamique ;

- S'intéresser davantage à la nature de la fissure tout en définissant leurs propriétés élastiques, plastiques ou résiduelles en introduisant les conditions aux limites réelles tels que les charges, la fatigue, l'humidité, les températures et autres ;

- Développer des modèles de calcul en tenant compte de l'état actuel de la structure et de ces conditions extérieures réelles qui doivent être décrites par des éprouvettes présentant leur état microstructural comme à l'état réel de la structure ;

- Utiliser des programmes de calcul numériques plus récents (2015-2018) surtout pour les structures complexes, afin de modéliser leur dégradation ou leur délaminage sur tout pour les matériaux orthotropes laminaires à l'interface de la fibre et/ou de la matrice ;

- Et enfin, éviter les modes de sollicitations extérieures brusques tels que les chocs, les crashes, les accidents ou les chutes provoquant des fissures de hautes amplitudes d'où la rupture totale de la structure.

"Analyse et modélisation des fissurations dans les plaques trouées sous l'effet des conditions extérieures"

Résumé: Le problème de fissurations dans les structures continues telles que les plaques, les poutres, les barres, les treillis ou les coques est souvent très apparent au voisinage des trous de rivetages, d'entailles ou d'autres congés de raccordement. En fait, les plaques trouées assemblées par rivetage ou boulonnées ont une grande importance dans les domaines d'applications de la mécanique, l'aéronautique, l'aérospatial et le génie civil et peuvent être l'objet de fissurations considérables autour de leurs trous, et diminuer leur durée de vie ou même provoquer leur rupture totale ou leur désastre. La présence de ces trous conduit à un affaiblissement de la structure sous l'effet de concentrations de contraintes ou de déformations locales qui peuvent engendrer une amorçage de fissure. Ces concentrations de contraintes sont souvent inévitable dû à l'effet des conditions extérieures telles que : les forces, les contraintes, les changements de températures, l'humidité et d'autres. Il est donc nécessaire de connaître ces facteurs d'intensité de contraintes associés à chaque géométrie de la plaque, afin d'analyser son état de contraintes et de déformation ainsi que ses modes de fissurations qui peuvent être suivant les modes I, II et III ou mode mixte. L'analyse de la propagation des fissures dans les structures en plaques industrielles conduit à évaluer leur durée de vie avant leur rupture brutale.

Notre travail, consiste à l'analyse statique et dynamique de la propagation des fissurations autour des trous circulaires, elliptiques et d'autres formes dans les plaques 2D (bidimensionnel) minces d'aluminium sous l'effet des forces appliquées externes. La position d'amorçage du trou est définie par un point sur le bord du trou et l'angle d'inclinaison par rapport à l'axe orthonormé (X, Y) dont le centre est le centre du trou. Ainsi que l'inclinaison du chargement (charge en mode mixte). En conséquence, une stratégie de calcul est mise en œuvre sur la base de la méthode des éléments finis «quart de point spécial» impliquant l'approche BEM et XFEM utilisant logiciel ANSYS et ABAQUS. Les résultats obtenus sont permis de définir les modes de fissurations dans les trous des plaques. Les valeurs du facteur d'intensité de contraintes correspondants à chaque mode de fissuration sous l'effet des conditions extérieures telle que le chargement en mode I ou en mode mixte ont été déterminées pour les différentes méthodes de calcul utilisées et de bonnes concordances avec les résultats analytiques ont été remarquées. Les résultats numériques sont comparés aux résultats expérimentaux et de bons résultats ont été observés. Ces concentrations de contraintes sont trouvées au voisinage des trous qui engendrent une zone plastique influe sur le chemin de propagation de la fissure, ce qui est conseillé de distancier le perçage des trous dans les plaques afin d'éviter leurs ruptures faciles et d'augmenter leur durée de vie.

Mots clés: Plaques trouées, trous circulaires, trous elliptiques, fissuration, facteurs d'intensités de contraintes, modes de rupture, méthodes numériques, conditions extérieures.

"Analysis and modelling of cracks in the holed plates under the effect of external conditions"

Abstract: The problem of cracks in continuous structures such as plates, beams, bars, trellis or hulls is often very apparent around riveting holes, notches or other connecting leaves. In fact, the holed plates assembled by riveting or bolted are of great importance in the fields of applications of mechanics, aeronautics, aerospace and civil engineering and they can be the object of considerable cracking around their holes. The presence of these cracks leads to a weakening of the structure as a result of concentrations of local stresses or deformations that can decrease their lifespan or even cause their total rupture or their disaster. These stress concentrators are often unavoidable due to the effect of external conditions such as: forces, stresses, temperature changes, humidity and others. It is therefore necessary to know these stress intensity factors associated with each geometrical plate, in order to analyse its state of stress and strain state as well as its cracking modes which can be according to modes I, II and III or mixed mode. The analysis of the propagation of cracks in industrial plate structures leads to evaluating their lifespan before their sudden rupture.

In our work consists of the static and dynamic analysis of the propagation cracks around circular, elliptical holes and other shapes in thin 2D (two-dimensional) aluminum plates under the effect of external applied forces. The starting position of the hole is defined by a point on the edge of the hole and the angle of inclination with respect to the orthonormal axis (X, Y) whose center is the center of the hole. As well as the inclination of the load (mixed mode). Consequently, a calculation strategy is implemented based on the "special quarter point" finite element method involving the BEM and XFEM approach using ANSYS and ABAQUS software. The results obtained are allowed to define the modes of cracking in the holes of the plates. The values of the factor of stress intensities corresponding to each mode of cracking under the effect of external conditions such as the loading in mode I or in mixed mode were determined for the various calculation methods used and good agreement with the results. Analytical have been noticed. The numerical results are compared with the experimental results and good results have been observed. These stress concentrations are found in the vicinity of the holes which generate a plastic zone influencing the propagation path of the crack, which is advisable to distance the drilling of holes in the plates in order to avoid their easy ruptures and to increase their lifetime.

Keywords: Holed plates, circular holes, elliptical holes, cracking, intensity stress factors, breaking modes, numerical methods, external conditions.

" تحليل و نمذجة الشقوق في الألواح المثقوبة تحت تأثير الظروف الخارجية "

ملخص: إن مشكلة التكسير في الهياكل المستمرة مثل الصفائح، الجوائز، القضبان، الجمولون أو هياكل غالبا ما يكون واضحا جدا في محيط ثقب التثبيت، نكات (فتحات) أو تقريب آخر من الاتصال في الواقع، فإن الصفائح المثقوبة التي تجميعها من خلال التثبيت أو البراغي هي ذات أهمية كبيرة في مجالات تطبيقات الميكانيكا، والطيران، والفضاء والهندسة المدنية، وأنها يمكن أن تكون موضوع تشققات معتبرة حول الثقوب يؤدي وجود هذه الشقوق إلى إضعاف الهياكل نتيجة تركيزات الإجهاد أو التشوهات المحلية التي يمكن أن تقلل من عمرها أو حتى تسبب تمزقها الكلي. هذه التركيزات للإجهاد غالبا ما لا يمكن تجنبها بسبب تأثير الظروف الخارجية مثل: القوات، والضغوط، وتغيرات درجة الحرارة والرطوبة وغيرها. ولذلك فمن الضروري أن نعرف هذه العوامل شدة الإجهاد المرتبطة كل لوحة هندسية، من أجل تحليل حالته من الإجهاد والتشوه، فضلا عن نوع وسائط تكسير التي يمكن أن تكون في الوضع الأول والثاني والثالث أو الوضع المختلط.

في عملنا، تم النظر في تحليل لانتشار الشقوق حول الثقوب الدائرية، بيضاوية وأشكال أخرى من ثقب في الصفائح ذات الأبعاد اللانهائية في حالات الساكنة وديناميكية. وتجرى الدراسة في سياق الاضطرابات الصغيرة لبيئة أو وسط متماثل ذي سلوك مرن خطي. تعتمد طرق الحساب المستخدمة على نمذجة العناصر المحددة الثلاثية مقارنة بالأساليب الرقمية الأخرى مثل عناصر الحدود (BEM) والعناصر المحدودة الممتدة (XFEM). سمحت لنا النتائج التي تم الحصول عليها بتحديد أوضاع التشقق في اللوحات حول الثقوب، والتي هي من النوع الأول والثاني والوضع المختلط. وقد تم تحديد قيم عوامل تركيزات شدة الإجهاد المقابلة لكل وضع تكسير بسبب الظروف الخارجية لمختلف الطرق المستخدمة في الحساب وتطابق جيد مع النتائج التحليلية تلك التي لوحظت. ولقد تم العثور على هذه العوامل الإجهاد التركيز لتكون مهمة جدا في محيط الثقوب التي سوف يكون من المستحسن أن نكبر المسافة بين الثقوب في الصفائح من أجل تجنب الكسر أو التمزق السهل وزيادة عمرها.

الكلمات الرئيسية: الألواح مثقوبة، ثقب دائرية، ثقب بيضاوية الشكل، تكسير، عوامل شدة الإجهاد، طرق التكسير، أساليب حسابية، ظروف خارجية.