



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université des frères Mentouri-Constantine 1
Faculté des Sciences de la Technologie
Département de Génie Mécanique

N° d'ordre :24/Ds/2023

Série :01/GMec/2023

Thèse

Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat en-Sciences

en Génie Mécanique

Spécialité : Energétique

Thème

**STABILITÉ DE LA CONVECTION
DANS UNE CAVITÉ**

Présenté par :

Djoubair DEBBAH

Soutenu publiquement le : 25/04/2023

Devant le jury composé de :

Président :	Mr. S. BENISSAAD	Professeur	Université Mentouri-Constantine 1
Rapporteur :	Mr. O. KHOLAI	Professeur	Université Mentouri-Constantine 1
Examineurs :	Mr. Z. NEMOUCHI.	Professeur	Université Mentouri-Constantine 1
	Mr.F.M. OUDINA	Professeur	Université du 20 Aout 1955 SKIKDA
	Mr. F. BERRAHIL	MCA	C. Universitaire Abdelhafid Boussouf Mila

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents

A ma très chère Femme.

A mes très chères filles Belkis et Hibet Errahmane

A mes frères et sœurs

A tous mes amis et mes collègues

Remerciements

En préambule, je souhaite rendre grâce à Dieu, le clément et miséricordieux de m'avoir donné la force, le courage et la patience de mener à bien ce modeste travail.

*Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur **Mr. Kholai Omar**, Professeur à l'Université Mentouri-Constantine, de m'avoir suivi et dirigé tout au long de la réalisation de cette thèse. Aussi, je le remercie pour la confiance qu'il a placée en moi, pour sa disponibilité permanente, pour sa patience et ses conseils.*

- *Je remercie **Mr S. Benissaad**, Professeur à l'Université Mentouri-Constantine, d'avoir accepté de présider le jury.*
- *Je remercie **Mr Z. Nemouchi**, Professeur à l'Université Mentouri-Constantine, pour sa participation à l'évaluation du présent travail.*
- *Je remercie **Mr F.M. Oudina**, Professeur à l'Université de 20 Aout 1955 Skikda, pour sa participation à l'évaluation du présent travail.*
- *Je remercie **Mr F. Berrahil**, Maitre de conférences au Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf Mila, pour sa participation à l'évaluation du présent travail.*

Enfin, mes remerciements vont également à tous ceux et celles qui de près ou de loin m'ont apporté aide et encouragement, Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

DEBBAH Djoubair

Table des matières

Liste des figures	v
Liste des tableaux	ix
Nomenclature	x
Abstract	xii
Résumé	xiii
ملخص	xiv
Introduction Générale.....	1
Chapitre 1 Revue Bibliographiques	4
1.1 Introduction.....	4
1.2 Instabilités de la convection naturelle dans une cavité carrée (2d).....	5
1.3 Instabilité de la convection dans une enceinte cubique (3d).....	21
1.4 CONCLUSION	25
Chapitre 2 Modélisation Mathématique	29
2.1 Introduction.....	29
2.2 Description du problème et formulation mathématique.....	29
2.2.1 Définition du problème	29
2.2.2 Hypothèses simplificatrices	31
2.2.3 Formulation mathématique	32
2.2.3.1 Equation de conservation de la masse	32
2.2.3.2 Equations de la quantité de mouvement	33
2.2.3.3 Equation d'énergie.....	30
2.2.4 Conditions initiales et aux limites.....	31
2.2.4.1 Les conditions initiales	31
2.2.4.2 Les conditions aux limites	31
2.3 Formulation adimensionnelle.....	32
2.3.1 Equations de conservation	32
2.3.2 Nombres adimensionnels caractérisant le problème.....	34
2.3.3 Conditions initiales et aux limites.....	35
2.3.4 Transfert de chaleur et de masse.....	39
2.4 Conclusion	40
Chapitre 3 Formulation Numérique	41
3.1 Introduction.....	41
3.2 Discrétisation de l'équation générale de transport.....	41

3.3	Schémas numériques	49
3.4	Discrétisation de l'équation de continuité.....	51
3.4.1	Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant X	51
3.4.2	Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant Y	51
3.4.3	Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant Z.....	55
3.5	Discrétisation de l'équation l'énergie	61
3.6	Equation de pression	62
3.7	Méthode de résolution (Algorithme de Tomas).....	66
3.8	Critère de convergence.....	68
3.9	Conclusion	68
Chapitre 4 Résultats et Discussion		72
4.1	Introduction	72
4.2	Effet du maillage dans le cas bidimensionnel	72
4.3	Choix du maillage dans le cas tridimensionnel.....	76
4.4	Validation du code numérique	75
4.5	Effet de Ra sur les champs thermique et dynamique	79
4.5.1	Premier cas : Bas - Bas	79
4.5.2	Deuxième cas : Centre – Centre.....	100
4.5.3	Troisième cas : Haute - Haute.....	119
Conclusion Générale et perspectives.....		135
Bibliographie.....		139

Liste des figures

Figure. 1.1 : Évolution temporelle de la vitesse radiale sans dimension u pour $c = 1$, $e = 0.2$ et $Ra_{cr} = 9 \times 10^{10}$ au point de mesure S3. Lignes de courant sans dimension W et isothermes sans dimension T tracées à différents moments sans dimension (t_a , t_b , t_c) [21].....	7
Figure 1.2 : Exemples de modèles de flux calculés. (a) Flux symétrique constant. $Gr=1.4 \times 10^5$, $A=2$. (b) Instantané d'un écoulement oscillatoire non symétrique. $Gr=1.5 \times 10^5$, $A=2$. (c) Instantané d'un écoulement oscillatoire non symétrique. $Gr=5.71 \times 10^5$, $A=2.8$	9
Figure 1.3 : Variation de la température moyenne adimensionnelle sur l'axe vertical de la cavité en fonction de temps adimensionnel pour $Ra=10^4$ et $D/L=xh/L=0.5$ [42].....	12
Figure 1.4 : Angle critique pour la bifurcation vers un écoulement instable tracé en fonction de Ra [43].....	13
Figure 1.5 : (a) Configuration physique. (b) Maillage par éléments finis comprenant 28×28 éléments bi-quadratiques [49].....	16
Figure.1.6 : Lignes de courant sans dimension (w) et isothermes (h) de différents types de structures d'écoulement symétriques à $Ra = 106$ et $Pr = 0,026$: (a) Type 0(s)-a ; (b) Type 1(s) : [Type 1(s)-a, Type 1(s)-b, Type 1(s)-c] ; (c) Type 11(s) ; (d) Type 2(s) : [Type 2(s)-a, Type 2(s)-b] ; et (e) Type 3(s) : [Type 3(s)-a, Type 3(s)-b, Type 3(s)-c]. Ici, les lignes de courant colorées en bleu et rouge indiquent respectivement les circulations dans le sens antihoraire (w positif) et dans le sens horaire (w négatif). Les flèches rouges montrent les cellules inversées [49].....	16
Figure.1.7 : Champ de température moyenne dans le temps pour le cas de référence et pour les deux fréquences de transfert de chaleur maximal, $\Delta\theta=0.1$; la zone de perturbation est affichée (en haut à gauche de la cavité) [51].....	18
Figure 1.8 : S : régime stationnaire, P : régime périodique, QP2 : régime quasi-périodique à deux fréquences incommensurables. QP3 : régime quasi-périodique à trois fréquences incommensurables, NP : régime non périodique [57].....	20
Figure 1.9 : Les isothermes sur les plans de symétrie pour $10^3 \leq Ra \leq 10^6$.[58].....	21
Figure 1.10 : Champ de température moyenné dans le temps pour: (a) $Ra = 1.5 \times 10^9$; (b) $Ra = 1.0 \times 10^{10}$ [65].....	24
Figure 2.1 : Configuration géométrique bidimensionnelle du problème étudié	30
Figure 2.2 : Configuration géométrique tridimensionnelle du problème étudié	31
Figure 3.1 : Volume de contrôle entouré par les nœuds voisin.....	39
Figure 3.2 : Maillage décalé suivant les trois plans	40
Figure 3.3 : Maillage décalé sur le plans X-Y.....	40
Figure 3.4 : Maillage décalé sur le plans Y-Z.....	41
Figure 3.5 : Maillage décalé sur le plans X-Z.....	41
Figure 3.6 : Maillage décalé suivant la direction X : projection suivant le plan X-Y.....	52
Figure 3.7 : Maillage décalé suivant la direction X : projection suivant le plan X-Z.....	50
Figure 3.8 : Maillage décalé suivant la direction Y : projection suivant le plan (Y-X).....	52

Figure 3.9 : Maillage décalé suivant la direction Y : projection suivant le plan(Y-Z)	53
Figure 3.10 : Maillage décalé suivant la direction Z : projection suivant le plan (Z-X).....	55
Figure 3.11 : Maillage décalé suivant la direction Z : projection suivant le plan (Z-Y).....	596
Figure 3.12 : Organigramme de l’algorithme SIMPLE	65
Figure 3.13 : Organigramme de l’algorithme SIMPLER	66
Figure 0.1 : Variation de la composante de la vitesse dans la direction x pour différentes maillage.....	70
Figure 4.2 : Comparaison des isothermes (à droite) et contours de la fonction de courant (à gauche) pour $Re=10^3$, $Gr=10^2$ ($Ri=0.0001$)	71
Figure 4.3 : Comparaison du Nusselt local calculé sur la source de chaleur (axe des abscisses) avec les données expérimentales.....	71
Figure 4.4 : Comparaison des lignes de courant, isothermes, la vitesse horizontale et verticale calculé avec les données expérimentales de De Vahl	72
Figure 4.5 : Schéma de la distribution du maillage dans la cavité.....	74
Figure 4.6 : Le nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de nœuds.....	75
Figure 4.7 : Les lignes de courant pour différentes valeurs de Ra.....	82
Figure 4.8 : Les isothermes pour différentes valeurs de Ra.....	812
Figure 4.9 : Evolution temporelle de la température calculée au centre de la cavité pour différentes valeurs de Ra	83
Figure 4.10 : Evolution temporelle de la vitesse U calculée au centre de la cavité pour différentes valeurs de Ra	84
Figure 4.11 : Evolution temporelle de la vitesse V calculée au centre de la cavité pour différentes valeurs de Ra	84
Figure 4.12 : Distributions des nombres de Nusselt locales calculée le long des parties chauffées à (a) : $X=0$, (b) : $X=1$ et (c) : $Y=0$ pour différentes nombres de Rayleigh	86
Figure 4.13 : Variation temporelle de la température pour $Ra=7 \times 10^4$	87
Figure 4.14 : Portrait de phase d’un point limite pour $Ra=7 \times 10^4$	87
Figure 4.15 : Variation temporelle de la température pour $Ra=3 \times 10^5$	88
Figure 4.16 : (a) Portrait de phase d’un cycle limite, (b) Spectre de fréquence de Fourier de la température à $Ra=3 \times 10^5$	88
Figure 4.17 : Variation temporelle de la température pour $Ra=3 \times 10^6$	89
Figure 4.18 : (a) Portrait de phase d’un cycle limite, (b) Spectre de fréquence de Fourier de la température à $Ra=3 \times 10^6$	89
Figure 4.19 : Variation du carrée de l’amplitude de la vitesse U au point (0.5, 0.5) en fonction du nombre de Rayleigh.....	90
Figure 4.20 : Variation temporelle de la température pour $Ra=8 \times 10^6$	91
Figure 4.21 : (a) Portrait de phase du chaos, (b) Spectre de fréquence de Fourier de la température à $Ra=8 \times 10^6$	91

Figure 4.22 : Evolution temporelle des Isothermes pondant une période d'oscillation dans le cas bidimensionnelle a $Ra_C=3\times 10^6$	92
Figure 4.23 : Evolution temporelle des lignes de courant pondant une période d'oscillation dans le cas bidimensionnelle a $Ra_{Cr}=3\times 10^6$	90
Figure 4.24 : Champs thermique Cas 3D- dans différents plans et pour différentes nombres de Rayleigh.....	95
Figure 4.25 : Champs dynamique Cas 3D- dans différents plans et pour différentes nombres de Rayleigh.....	99
Figure 4.26 : Les iso-surfaces de la température dans différents plans et pour différentes nombres de Rayleigh	101
Figure 4.27 :Les lignes de courant pour différentes valeurs de Ra	102
Figure 4.28 : Les isothermes pour différentes valeurs de Ra	103
Figure 4.29 : Evolution temporelle de la Température calculée au centre de la cavité pour différentes valeurs de Rayleigh	105
Figure 4.30 : Evolution temporelle de la vitesse U calculée au centre de la cavité pour différentes valeurs de Rayleigh	105
Figure 4.31 : Evolution temporelle de la vitesse V calculée au centre de la cavité pour différentes valeurs de Rayleigh	108
Figure 4.32 : Distributions des nombres de Nusselt locales calculée le long des parties chauffées à (a) : X=0, (b) : X=1 et (c) : Y=0 pour différentes nombres de Rayleigh.....	109
Figure 4.33 : Evolution temporelle des Isothermes pondant une période d'oscillation a $Ra_{Cr}=3.9\times 10^5$	110
Figure 4.34 : Evolution temporelle des lignes de courant pondant une période d'oscillation a $Ra_{Cr}=3.9\times 10^5$	111
Figure 4.35 : Champs thermique dans différent plans et pour différentes valeurs de Rayleigh .	114
Figure 4.36 : Champs dynamique dans différent plans et pour différentes valeurs de Rayleigh	116
Figure 4.37 : Les iso-surfaces de la température dans différent plans et pour différentes valeurs de Rayleigh.....	118
Figure 4.38 : Les lignes de courant pour différentes valeurs de Ra	121
Figure 4.39 :Les isothermes pour différentes valeurs de Ra	120
Figure 4.40 : Evolution temporelle de la Température calculée au centre de la cavité	122
Figure 4.41 : Evolution temporelle de la vitesse U calculée au centre de la cavité	123
Figure 4.42 : Evolution temporelle de la vitesse V calculée au centre de la cavité	123
Figure 4.43 : Distributions des nombres de Nusselt locales calculée le long des parties chauffées à (a) : X=0, (b) : X=1 et (c) : Y=0 pour différentes nombres de Rayleigh.....	124
Figure 4.44 : Evolution temporelle des Isothermes pondant une période d'oscillation a $Ra_{Cr}=3\times 10^5$	125
Figure 4.45 : Evolution temporelle des lignes de courant pondant une période d'oscillation a $Ra_{Cr}=3\times 10^5$	126

Figure 4.46 : Champs thermique Cas 3D- dans différent plans et pour différentes valeurs de Rayleigh.....	128
Figure 4.47 : Champs dynamique Cas 3D- dans différent plans et pour différentes valeurs de Rayleigh.....	130
Figure 4.48 : Les iso-surfaces de la température dans différent plans et pour différentes valeurs de Rayleigh.....	132
Figure 4.49 : Distributions des nombres de Nusselt moyennes calculées au centre de la cavité en fonction du nombre de Rayleigh pour les trois cas	134

Liste des tableaux

Tableau 3.1 : Identification des termes des équations de transport sous forme adimensionnelle.	44
Tableau 4.1 : Résultat du test de maillage.....	70
Tableau 4.2 : Comparaison des résultats numériques actuels avec la solution De Vahl	71
Tableau 4.3 : Nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de nœuds.....	74
Tableau 4.4 : Comparaison du nombre de Nusselt moyen de la présente étude avec Iwatsu et Hyun.....	75

Nomenclature

b	Terme source dans le système d'équations algébriques discrétisées	
C_p	Chaleur spécifique du fluide à pression constante	J. kg ⁻¹ .K ⁻¹
D	Diffusivité massique	m ² .s ⁻¹
g	Accélération de la pesanteur	m.s ⁻²
h	Coefficient de transfert convectif	W.m ⁻² .K ⁻¹
k	Conductivité thermique	W.m ⁻¹ .K ⁻¹
l	Longueur de la partie chauffée	m
L	Côté de la cavité	m
Nu_1	Nombre de Nusselt moyen de la paroi mobile x=0	
Nu_2	Nombre de Nusselt moyen de la paroi mobile x=1	
Nu_{moy}	Nombre de Nusselt moyen de la partie chauffée y=0	
p	Pression	Pa
P	Pression modifiée adimensionnelle $P = \frac{pL^2}{\rho\alpha^2}$	
Pr	Nombre de Prandtl	
Ra	Nombre de Rayleigh	
Re	Nombre de Reynolds	
Ri	Nombre de Richardson	
S	Terme de source de l'équation de discrétisation	
T	Température	K
t	Temps	s
u	Composante de la vitesse selon la direction x	m.s ⁻¹
U	Composante de la vitesse adimensionnelle selon la direction X	
v	Composante de la vitesse selon la direction y	m.s ⁻¹
V	Composante de la vitesse adimensionnelle selon la direction Y	
V_0	Vitesse des parois latérales	m.s ⁻¹
w	Composante de la vitesse selon la direction z	m.s ⁻¹
W	Composante de la vitesse adimensionnelle selon la direction Z	
x	Coordonnée horizontale	m
X	Coordonnée horizontale adimensionnelle	
y	Coordonnée verticale	m
Y	Coordonnée verticale adimensionnelle	
z	Coordonnée frontale	m

Z	Coordonnée frontale adimensionnelle
$A_V=H / L$	Rapport d'aspect vertical
$A_H=H / L$	Rapport d'aspect horizontal
$A_T=H / D$	Rapport d'aspect transversal

Symboles grecques

α	diffusivité thermique	$m^2.s^{-1}$
β	Coefficient d'expansion thermique	K^{-1}
Γ	Coefficient de diffusion	$m^2.s^{-1}$
θ	température adimensionnelle	
τ	Temps adimensionnelle	
μ	Viscosité dynamique du fluide	$kg/m.s$
ν	Viscosité cinématique	$m^2.s^{-1}$
ρ	Masse volumique	$kg.m^{-3}$
\emptyset	Variable dépendante généralisée (u, v, w, T, ...)	
Δt	incrément de temps	s
$\Delta \tau$	incrément de temps adimensionnel	

Indices

c	Chaude
f	Froide
i	Indice d'un point du maillage suivant X
IL	Nombre de nœuds total dans la direction horizontale
j	Indice d'un point du maillage suivant Y
JL	Nombre de nœuds total dans la direction verticale
k	Indice d'un point du maillage suivant Z
KL	Nombre de nœuds total dans la direction frontale
Loc	Locale
moy	Moyen
P	Fait référence au nœud P d'un volume fini typique
nb	Désigne les nœuds voisins à P
n, s, e, w, b, t	Fait référence aux faces d'un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest, frontale et dorsale
N, S, E, W, B, T	Fait référence aux nœuds entourant un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest, frontale et dorsale

Abstract

The main objective of this study is to investigate the stability of natural convection in a symmetrically heated square cavity filled with air, in both 2D and 3D simulations. The study uses air as the fluid, with a Prandtl number of 0.71. The location of heated parts on the side walls is varied, with three cases considered: bottom-bottom, center-center, and high-high. The Rayleigh number is also varied between 10^3 and 9×10^6 , with symmetric and asymmetric flow regimes investigated. The critical Rayleigh number at which a transition from a stationary flow to an oscillatory flow occurs is determined.

In the 2D simulations, the effect of the symmetrically placed heated parts on the two opposite side walls is investigated and the results are presented in terms of streamlines, isotherms, and flow variables such as velocity and temperature profiles, as well as the FFT of temperature. The results showed that for Rayleigh numbers lower than the critical value, the flow inside the cavity remains stationary and symmetrical. However, beyond this critical value, the flow symmetry is broken and a first Hopf time-dependent periodic flow pattern occurs.

In the 3D simulations, the results are presented in terms of isotherms, streamlines, and isosurfaces of the temperature, for different Rayleigh numbers and for the three configurations (low-low, center-center, and high-high) in three different planes along the Z direction. The results showed the effect of the third dimension, the Rayleigh number, and the position of the heated parts on the aerothermal topology of the air flow in the cubic cavity.

Keywords: Natural convection, critical Rayleigh number, finite volume method, FFT, Hopf type bifurcation, transient regime

Résumé

L'objectif principal de cette étude est d'étudier la stabilité de la convection naturelle dans une cavité carrée chauffée symétriquement remplie d'air, à la fois en simulation 2D et 3D. L'étude utilise de l'air comme fluide, avec un nombre de Prandtl de 0,71. L'emplacement des parties chauffées sur les parois latérales est varié, avec trois cas considérés: bas-bas, centre-centre et haut-haut. Le nombre de Rayleigh est également varié entre 10^3 et 9×10^6 , avec des régimes d'écoulement symétriques et asymétriques étudiés. Le nombre de Rayleigh critique auquel une transition d'un écoulement stationnaire à un écoulement oscillatoire se produit est déterminé.

Dans les simulations 2D, l'effet des parties chauffées placées symétriquement sur les deux parois latérales opposées est étudié et les résultats sont présentés en termes de lignes de courant, d'isothermes et de variables d'écoulement telles que les profils de vitesse et de température, ainsi que la FFT de la température. Les résultats ont montré que pour des nombres de Rayleigh inférieurs à la valeur critique, l'écoulement à l'intérieur de la cavité reste stationnaire et symétrique. Cependant, au-delà de cette valeur critique, la symétrie de l'écoulement est rompue et un premier motif de flux périodique dépendant du temps de Hopf se produit.

Dans les simulations 3D, les résultats sont présentés en termes d'isothermes, de lignes de courant et d'isosurfaces de température, pour différents nombres de Rayleigh et pour les trois configurations (bas-bas, centre-centre et haut-haut) dans trois plans différents le long de la direction Z. Les résultats ont montré l'effet de la troisième dimension, du nombre de Rayleigh et de la position des parties chauffées sur la topologie aérothermique de l'écoulement d'air dans la cavité cubique.

Mots clés : Convection naturelle, Nombre de Rayleigh critique, méthode de volumes finies, FFT, bifurcation de Hopf, régime transitoire.

ملخص

في هذه الدراسة ، تم فحص ثبات الحمل الحراري الطبيعي في تجويف مربع مسخن بشكل متماثل مملوء بالهواء في ثنائية وثلاثية الأبعاد. يتم إجراء المحاكاة العددية مع الهواء كسائل ، $Pr = 0.71$ النتائج في شكل ملامح السرعة ودرجة الحرارة ، والانسايبية ، وخطوط متساوية الحرارة ، لحالات مختلفة من موقع مصادر الحرارة على الجدران الجانبية (الحالة 1: السفلي- السفلي ، الحالة 2: المركز - المركز والحالة الثالثة: مرتفع - مرتفع) ، ولعددي رايلي محصورين 10^3 و 9×10^6 ، بما في ذلك التدفق المتماثل (المستقر) وغير المتماثل (المتذبذب) من أجل الوصول إلى الفوضى ، سيتم عرض ومناقشة عتبة كل انتقال وتحديداتها بواسطة رقم رايلي الحرج وطوبولوجيا التدفق وجميع هذه التشعبات. الهدف من هذه الدراسة هو تحديد عدد رايلي الحرج الذي يحدث فيه الانتقال من التدفق الثابت إلى التدفق المتذبذب. تم دراسة تأثير مصادر الحرارة الموضوعة بشكل متماثل على الجدارين الجانبيين المتقابلين بالإضافة إلى المصدر على الجدار السفلي. يتم عرض النتائج للحالة ثنائية الأبعاد من حيث الانسايبية ، متساوي الحرارة ومتغيرات التدفق ، بما في ذلك ملفات تعريف السرعة ودرجة الحرارة وطيف درجة حرارة فورييه. أظهرت النتائج التي تم الحصول عليها في ثنائية الأبعاد ، وللتكوينات الثلاثة ، أنه بالنسبة لأرقام رايلي الأقل من Ra_{cr} ، يظل التدفق داخل التجويف ثابتاً وأنماط متماثلة تماماً. بينما يتجاوز هذه القيمة الحرجة ، يتشعب النظام حيث يتم كسر تناسق التدفق ويحدث نمط تدفق دوري يعتمد على الوقت لهويف. في الحالة ثلاثية الأبعاد ، يتم عرض النتائج في متساوي الحرارة ، وخطوط الانسايبية وأسطح لدرجة الحرارة ، في ثلاث مستويات مختلفة على طول اتجاه Z ($Z = 0.25$ ؛ 0.5 و 0.75) لأرقام رايلي المختلفة وللتكوينات الثلاثة أيضاً (منخفض - منخفض ؛ مركز-مركز - مرتفع - مرتفع). أظهرت النتائج التي تم الحصول عليها تأثير الاتجاه الثالث ورقم رايلي وموضع الأجزاء الساخنة على الهيكل الحراري الجوي لتدفق الهواء في التجويف المكعب.

الكلمات المفتاحية: الحمل الحراري الطبيعي ، رقم رايلي الحرج ، طريقة الحجم المحدود ، FFT ، التشعب من نوع هوبف ، النظام العابر.

INTRODUCTION GENERALE

Les deux dernières décennies ont connu une augmentation rapide des activités de recherche dans le domaine de la convection naturelle et mixte. C'est un sujet qui présente un intérêt à la fois fondamental et pratique. La plupart des travaux de recherche ont été motivés par des applications industrielles ayant des enjeux économiques importants. Dans le cas du refroidissement de composants électroniques, la convection naturelle est loin d'être la méthode la plus efficace, mais elle présente de nombreux avantages tels qu'un coût faible, une grande fiabilité et une nécessité de maintenance minime. Cependant, la convection naturelle dans une cavité contenant une ou plusieurs sources de chaleur est un phénomène qui semble simple en apparence, mais qui est en réalité très complexe.

Les écoulements induits par la flottabilité sont courants dans la nature ainsi que dans des configurations industrielles, et l'étude de leurs nombreuses configurations spécifiques a fait et continue de faire l'objet de recherches intensives. Parmi ces nombreuses configurations, la cavité isotherme à chauffage différentiel est devenue l'un des problèmes les plus classiques de la littérature sur le transfert de chaleur. La détermination de la structure de l'écoulement, le transfert de chaleur correspondant, la perte de stabilité et la transition vers la turbulence ont été étudiés depuis plus de 60 ans maintenant. Un problème spécifique qui a résisté à des années d'investigation est la transition vers l'instabilité dans une cavité remplie d'air, chauffée de manière différentielle avec une ou plusieurs sources de chaleur à ses frontières verticales et horizontales.

La convection est un mode de transfert de chaleur qui se produit uniquement au sein de milieux fluides. Elle apparaît lorsque le fluide (gaz ou liquide) est en mouvement et présente des inhomogénéités spatiales de température, de concentration d'espèces chimiques, de changement de phase, de tension superficielle et de nombreux autres effets. On parle de convection naturelle lorsque les mouvements de circulation sont provoqués exclusivement par des forces agissant au sein du fluide. Ces forces sont le plus souvent les forces de flottabilité ou la poussée d'Archimède. Étant donné que le mouvement est induit par la présence de la gravité, les écoulements de convection naturelle possèdent une direction privilégiée liée à la direction de la

pesanteur. Dans notre environnement, proche ou lointain, nous pouvons observer ces mouvements convectifs naturels à différentes échelles, tels que l'air chaud qui monte au-dessus d'un radiateur, la formation des nuages, les courants océaniques, le mouvement du magma sous la croûte terrestre, etc. Tous ces mouvements fluides ont pour origine des mouvements de convection naturelle.

La convection naturelle en milieu confiné se divise en deux grandes familles de problèmes donnant lieu à des comportements dynamiques et thermiques fondamentalement différents :

- La cavité aux parois verticales différentiellement chauffées (CDC),
- Le problème de Rayleigh-Bénard (RB), qui est le cas d'une cavité chauffée par le bas et refroidie par le haut.

Notre problème étudié dans cette thèse est la combinaison de ces deux types de configurations en un seul problème, avec une cavité chauffée partiellement par le bas et les parois verticales par deux sources de chaleur placées symétriquement en trois positions.

La configuration qui sera présentée par la suite et sur laquelle l'étude sera basée, fait apparaître en deux configurations 2D et 3D, il s'agit, pour le cas bidimensionnel, d'une cavité carrée avec une longueur de paroi latérale L dont la paroi supérieure est adiabatique, tandis que les parois latérales sont maintenues à une température constante (T_f). Deux parties chauffées de longueur égale à un quatrième de celle de la cavité L ayant une température constante (T_c) est placées, symétriquement en trois positions : en bas des parois verticales pour la 1^{ère} configuration (Bas-Bas), et au centre des parois verticales pour le 2^{ème} cas (Centre-Centre) et en haut pour la dernière configuration (Haute-Haute). Une partie chaude de longueur égale à la moitié de celle de la cavité L est placée au centre de la paroi inférieure. Pour le cas tridimensionnel, nous considérons un fluide ($Pr=0.71$) dans un cube chauffé de manière symétrique où les parties chauffées (sous forme des bandes) sont maintenues à la température T_C tandis que les parties froides sont maintenues à la température T_f .

Les équations gouvernantes sont résolues par la méthode des volumes finis et l'analyse est effectuée pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh Ra , comprises entre 10^3 et 9×10^6 .

Il est bien connu que lorsque le nombre de Rayleigh dépasse une valeur critique, les écoulements de convection naturelle deviennent instationnaires. Leur complexité croît avec le nombre de Rayleigh jusqu'à atteindre le régime turbulent, où les variations spatiales et temporelles de la

température et de la vitesse sont chaotiques. L'objectif de la présente étude est de déterminer le nombre de Rayleigh critique dans lequel se produit une transition d'un écoulement stationnaire à un écoulement oscillatoire. L'effet de trois parties chauffées a été étudié, dont deux sont placées symétriquement sur les parois latérales opposées et la troisième sur la paroi inférieure.

Contenu du manuscrit

L'étude que nous développons porte sur la convection naturelle, de l'air ($Pr=0.71$) dans une cavité carrée (2D)/ cubique (3D) chauffé par le bas par une partie chaude, et latéralement par deux parties chaudes symétriquement placées sur les parois dans trois différentes positions ; le fluide de travail considéré est l'air.

La démarche que nous proposons s'appuie sur une étude numérique bidimensionnelle et tridimensionnelle. L'objectif principal de la présente étude est l'étude de la stabilité d'écoulement de l'air par convection naturelle dans une cavité carrée (en 2D) et cubique (en 3D) avec des parois chauffées partiellement mais symétriquement par 3 parties chauffées positionné en 3 cas.

Le premier chapitre est une revue de la littérature sur la convection naturelle de l'air dans des cavités chauffées différemment.

Le deuxième chapitre est consacré à la modélisation mathématique du problème de convection naturelle dans une cavité carrée ou cubique chauffée par le bas et latéralement par deux parties chauffées symétriques placées sur les parois verticales en trois positions. Les hypothèses simplificatrices, les équations mathématiques, les conditions initiales et aux limites, ainsi que la méthode de résolution seront décrites.

Le troisième chapitre présente la formulation numérique du problème étudié, avec la discrétisation de l'équation générale de transport, l'équation de continuité et l'équation de l'énergie.

Le quatrième chapitre présente les résultats obtenus par simulation en 2D et en 3D, avec une comparaison entre les trois cas.

Le dernier chapitre est une conclusion générale qui résume les résultats obtenus et les perspectives futures de recherche dans ce domaine.

Chapitre 1

REVUE BIBLIOGRAPHIQUES

1.1 Introduction

Effectivement, la convection naturelle est un sujet de recherche important en transfert de chaleur en raison de ses nombreuses applications pratiques. Elle est présente dans de nombreux domaines tels que l'industrie, l'électronique, l'aérospatiale, l'environnement, etc. De nombreuses études ont été menées pour comprendre les mécanismes de la convection naturelle et pour optimiser les processus de transfert de chaleur associés. En particulier, les recherches portent sur l'optimisation de la conception des enceintes et des canaux afin d'améliorer le refroidissement des équipements, de réduire les pertes d'énergie et d'augmenter l'efficacité des systèmes de chauffage solaire passif.

Cependant, la grande majorité des publications sur la convection naturelle dans les cavités traite de géométries 2-D, principalement des cavités formées par deux surfaces verticales parallèles maintenues à des températures uniformes différentes ou à des flux de chaleur uniformes et avec des parois supérieure et inférieure adiabatiques ou à température constante. Bien que ces études traitent une classe importante de problèmes ayant des applications pratiques significatives, les complexités présentes dans de nombreux problèmes réels sont négligées en ignorant la troisième dimension. Récemment, avec le développement de méthodes numériques très précises et stables pour la résolution des équations de Navier-Stokes en 3D, le moment est venu de se concentrer sur l'analyse en 3D. Cela nous permet bien sûr de déterminer les limites de validité des solutions 2-D, qui ont été largement étudiées au cours des dernières décennies.

L'étude de la littérature a été divisée en deux sections : La stabilité de la convection en configuration I, c'est-à-dire une cavité bidimensionnelle (2d), et la deuxième configuration une enceinte cubique (3d).

1.2 Instabilités de la convection naturelle dans une cavité bidimensionnel (2d)

Dans la littérature, des études sur le transfert de chaleur par convection naturelle ont indiqué que le transfert de chaleur se produit dans une enceinte en raison des différences de température à travers les murs.

Le passage à l'instationnarité apparaît à partir d'un nombre de Rayleigh critique Ra_{cr} . Cette valeur critique (Ra_{cr}) dépend entre autres de la nature du fluide, du rapport de forme de la cavité et des conditions aux limites. L'écoulement passe par différents états au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh augmente. D'abord laminaire et stationnaire, il se complexifie avec l'apparition de structures secondaires. L'écoulement devient alors instationnaire. Lorsque le nombre de Rayleigh augmente encore, l'écoulement rentre dans un état de transition vers la turbulence.

Les premières bifurcations vers une instabilité ont été mises en évidence par **Briggs et al. [1]**. Leurs origines ont été discutées entre autres par **Le Quéré [2]** en fonction des différentes conditions aux limites imposées au niveau des parois horizontales. Pour un rapport de forme de l'ordre de 4 (cas de la cavité de 4 m), les couches limites présentent une bifurcation de Hopf sur-critique, caractérisée par le développement d'onde de Tollmien-Schlichting au sein des couches limites. En revanche, pour des rapports de forme inférieurs, les premières instationnarités sont dues à des instabilités thermiques dites de Kelvin-Helmholtz au niveau des jets le long des parois horizontales dans le cas de parois conductrices. Pour des parois adiabatiques, les oscillations de vitesse seraient dues aux ressauts hydrauliques lors de l'impact des couches limites verticales sur les parois horizontales. On constate d'autres types d'instabilités pour des cavités carrées (rapport de forme 1) à plus basses fréquences que celles mentionnées précédemment, dues au déplacement d'ondes de gravité dans le cœur de la cavité. Ces instabilités ont été étudiées numériquement [3, 4] et expérimentalement [5, 6], leurs fréquences peuvent être calculées avec la fréquence de Brünt-Väisälä, caractéristique des ondes de gravité.

Rahman et al.[7] ont étudié le problème de la convection naturelle dans une cavité à quatre côtés avec la présence de génération de chaleur en utilisant une technique numérique. Un réchauffeur partiel a été positionné à plusieurs endroits sur la paroi droite de la cavité, tandis que la paroi gauche a été maintenue à une température plus basse. Les résultats ont montré que le débit et le taux de transfert de chaleur dépendent fortement de la longueur et de l'emplacement du réchauffeur ainsi que du paramètre de génération de chaleur.

D'autres chercheurs comme **Corcione [8]**, **Basak [9]**, **El Moutaouakil et al. [10]** et **Aswatha et al.[11]**, ont étudié le problème de la convection naturelle dans une cavité carrée sous différentes conditions aux limites thermiques appliquées. Divers articles publiés qui comprenaient l'étude de la convection naturelle transitoire dans des enceintes rectangulaires ou carrées dans lesquelles différentes approches expérimentales et numériques ont été adoptées et décrites en détail [12]. Un fait important pour les écoulements de convection naturelle dans des enceintes rectangulaires est que la couche limite thermique adjacente aux parois verticales reste stable et fournit un écoulement parfaitement symétrique à de petits nombres de Rayleigh. Cependant, à des nombres de Rayleigh suffisamment grands, la couche limite thermique distingue les ondes progressives en raison de l'instabilité convective [13].

Saury et al. [14] étudient expérimentalement les phénomènes d'instabilité qui apparaissent en convection naturelle dans des cavités remplies d'air à parois actives isothermes chauffées différentiellement, les autres parois étant adiabatiques. La cavité est inclinée d'un angle variant entre 0° (chauffage par le bas) et 180° (chauffage par le haut). Les mesures instantanées permettent de localiser les régions présentant des fluctuations de température maximales lorsque l'écart de température entre les parois actives augmente. Afin de déterminer les voies du chaos, **Kieno et al. [15]** étudié numériquement le problème de la convection naturelle dans une enceinte inclinée sur le plan horizontal. Cette enceinte est chauffée sur deux côtés opposés et refroidie sur les deux autres côtés. L'impact du nombre de Rayleigh et de l'angle d'inclinaison est examiné en détail. L'analyse confirme également la bifurcation de l'attracteur d'un point limite à un cycle limite via une bifurcation de Hopf surcritique pour un nombre de Rayleigh compris entre $1,95 \times 10^6$ et $1,96 \times 10^6$.

Benouaguet et al. [18] ont réalisé numériquement la convection naturelle transitoire dans une cavité carrée avec deux côtés adiabatiques horizontaux et des parois verticales composées de deux régions de même taille maintenues à des températures différentes. Pour des nombres de Rayleigh suffisamment petits, les résultats montrent que l'écoulement est caractérisé par quatre cellules avec des axes symétriques horizontaux et verticaux. Une première transition d'une solution stable à un flux oscillatoire a pu être caractérisée à Ra allant de $2,5 \times 10^5$ à $2,51 \times 10^5$ et la deuxième bifurcation sous-harmonique qui évolue vers un flux chaotique a pu être obtenue lorsque le nombre de Rayleigh a encore augmenté ($Ra > 2,51 \times 10^5$). Plus tard, **Xu et Saha [19]** et **Kolsi et al. [20]** ont étudié numériquement la transition d'un état stable à un écoulement transitoire dans une cavité remplie d'air. Différentes valeurs du nombre de Rayleigh allant de 10^5

à 10^9 ont été étudiées et les résultats ont montré que la transition d'un état stable à un flux périodique se produit lorsque le nombre de Rayleigh augmente.

Une étude numérique de la stabilité du transfert de chaleur par convection naturelle dans un annulaire cylindrique avec une source de chaleur discrète isoflux de différentes longueurs est réalisée par [21]. Les parties non chauffées adiabatiques et la source de chaleur discrète sont montées sur la paroi interne. Les parois supérieure et inférieure sont adiabatiques, tandis que la paroi externe est maintenue à une température plus basse. Les équations régissant le problème sont résolues numériquement à l'aide d'une méthode des volumes finis. L'algorithme SIMPLER est utilisé pour le couplage pression-vitesse dans l'équation de la quantité de mouvement. Les résultats numériques pour différents paramètres du problème sont discutés en termes de lignes de courant, d'isothermes et du nombre de Nusselt dans l'annulaire. Les résultats montrent que l'augmentation du rapport de longueur de la source de chaleur diminue le nombre de Rayleigh critique. Nous pouvons contrôler la stabilité de l'écoulement et le taux de transfert de chaleur en faisant varier la longueur de la source de chaleur.

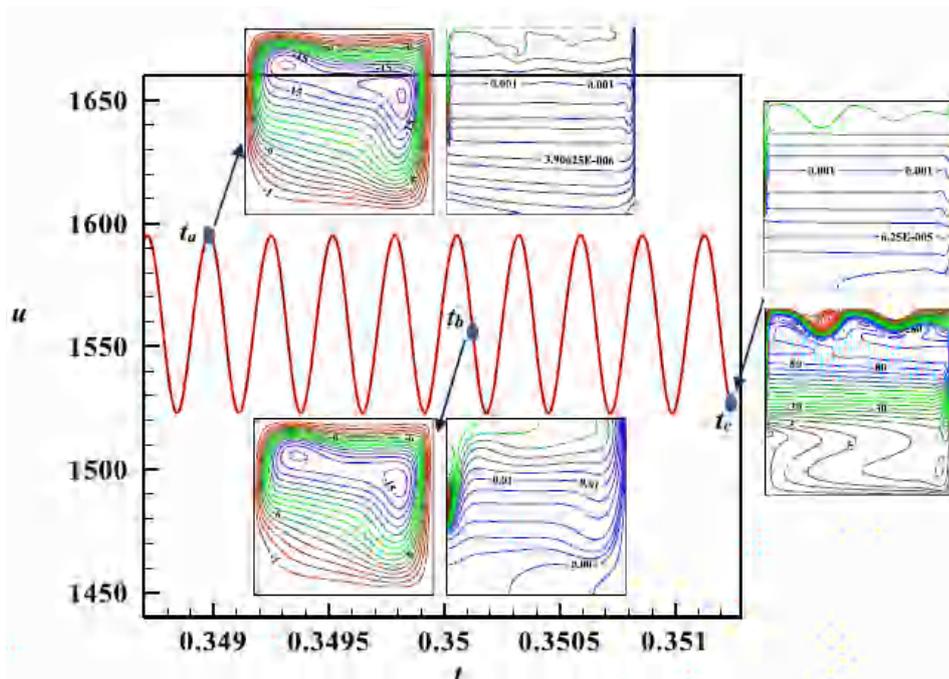


Figure. 1.1 : Évolution temporelle de la vitesse radiale sans dimension u pour $c = 1$, $e = 0.2$ et $Ra_{cr} = 9 \times 10^{10}$ au point de mesure S3. Lignes de courant sans dimension W et isothermes sans dimension T tracées à différents moments sans dimension (t_a , t_b , t_c) [21].

L'évolution temporelle de l'écoulement peut être stationnaire ou instationnaire en fonction des caractéristiques de stabilité de l'écoulement, de la valeur du nombre de Rayleigh et de la longueur de la source.

Une partie détaillée de l'évolution temporelle périodique de la vitesse radiale au point de mesure S3 de l'enceinte est présentée dans la Figure 11 pour $e = 0.2$. Les graphiques des lignes de courant correspondent à des emplacements caractéristiques dans la période de la série temporelle de la vitesse.

Zhao et Tian [22] ont proposé une méthode de précision d'ordre supérieur pour la solution du problème de convection de nature dépendant du temps dans une enceinte carrée avec des parois horizontales adiabatiques et des parois verticales chauffées de manière différentielle pour la large gamme de nombres de Rayleigh ($10^3 < Ra < 10^{10}$). Un schéma compact au vent de troisième ordre optimisé (Opt-UCD3) et un schéma compact de Padé symétrique de quatrième ordre utilisés pour approximer les termes convectifs non linéaires et les termes visqueux, respectivement. Les résultats ont montré qu'une première bifurcation de Hopf au régime d'écoulement périodique pouvait être obtenue à $Ra_{c1} = 1,82 \times 10^8$, puis subissait une deuxième bifurcation au régime d'écoulement quasi-périodique pouvait être obtenue à un nombre de Rayleigh critique $2,25 \times 10^8 < Ra_{c2} < 2,35 \times 10^8$ et passe finalement à turbulent par une autre bifurcation. L'effet de différentes conditions aux limites convectives pour un coefficient de transfert de chaleur convectif allant de 1 (W/m²K) à 10 000 (W/m²K) au niveau de la paroi inférieure sont étudiées [18].

La convection naturelle dans une cavité carrée avec un échauffement localisé par le bas et un refroidissement symétrique par les côtés a été étudiée par **NorAzwadi Che Sidik [23]**, qui utilisant le modèle de Boltzmann à double fonction de distribution thermique à différences finies. L'évolution de l'équation de Boltzmann du réseau a été discrétisée à l'aide du schéma amont aux différences finies de précision du troisième ordre. Le modèle d'écoulement, y compris les tourbillons et la couche limite thermique, est clairement visible. Les résultats obtenus démontrent que cette approche est une procédure très efficace pour étudier l'écoulement et le transfert de chaleur dans un écoulement de cavité à chauffage différentiel.

Dans une étude similaire, les effets du nombre de Rayleigh et de la longueur de la source de chaleur isotherme non dimensionnelle sur l'écoulement du fluide et le transfert de chaleur sont déterminés par **O. Aydin et al. [24]**. Les champs d'écoulement et de température sont symétriques sur la mi-longueur de l'enceinte en raison de la symétrie des conditions aux limites dans la direction verticale. Pour un Ra faible, le transfert de chaleur est dominé par la conduction à travers la couche de fluide. Pour un Ra élevé, le processus est principalement un processus de convection, et l'effet de la conduction disparaît.

Le transfert de chaleur et de quantité de mouvement par convection naturelle dans des enceintes carrées remplies d'air avec des parois opposées chauffées de manière différentielle, inclinées par rapport au vecteur de gravité, a été étudié numériquement [25], pour des valeurs du nombre de Rayleigh Ra comprises entre 10^4 et 10^6 , et pour des valeurs de l'angle d'inclinaison de la cavité dans la plage entre 0° et 360° .

La méthode de Boltzmann sur réseau s'est avéré un outil précieux dans l'étude de la convection naturelle dans une cavité carrée inclinée à deux dimensions. Les résultats numériques de ce type de problème, y compris l'hystérésis, sont présentés par **Huelsz et al.** [26].

La multiplicité, la stabilité et les bifurcations de la convection naturelle stationnaire à faible nombre de Prandtl dans une cavité rectangulaire bidimensionnelle avec des parois verticales partiellement et symétriquement chauffées sont étudiées numériquement par **Erenburg et al.** [27].

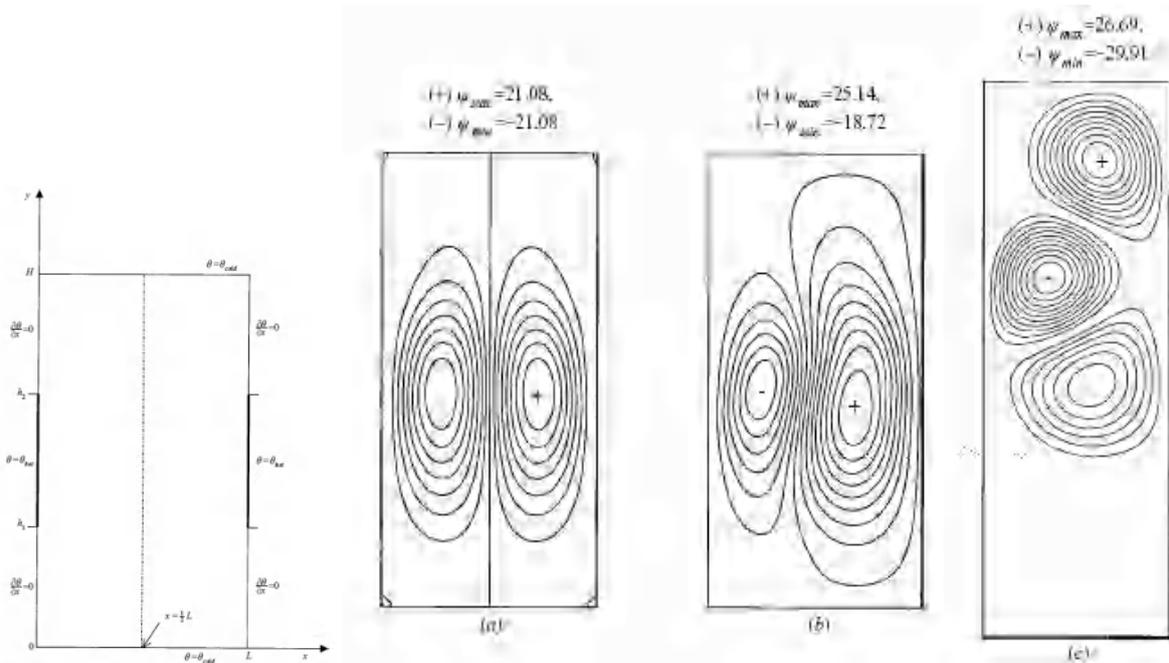


Figure 1.2 : Exemples de modèles de flux calculés. (a) Flux symétrique constant. $Gr=1.4 \times 10^5$, $A=2$. (b) Instantané d'un écoulement oscillatoire non symétrique. $Gr=1.5 \times 10^5$, $A=2$. (c) Instantané d'un écoulement oscillatoire non symétrique. $Gr=5.71 \times 10^5$, $A=2.8$ [27].

Une analyse de stabilité linéaire par rapport aux perturbations bidimensionnelles, une approximation faiblement non linéaire d'états légèrement supercritiques et la technique de continuité de chemin d'arc sont mises en œuvre. Les brisures de symétrie et les bifurcations de Hopf de l'écoulement sont étudiées pour un rapport d'aspect (hauteur/longueur) variant de 1 à 6. Les résultats montrent qu'avec l'augmentation du nombre de Grashof, l'écoulement subit une série de bifurcations tournantes. Le repliement des branches de solution conduit à une multiplicité d'états stationnaires (et, éventuellement, oscillatoires) qui atteint parfois plus d'une

douzaine de solutions stationnaires distinctes. Ils ont constaté que l'apparition de la multiplicité compliquée s'explique par le développement des régions stratifiées de manière stable et instable, où l'amortissement et les mécanismes d'instabilité de Rayleigh-Bénard entrent en compétition avec la force de flottabilité primaire localisée près des parties chauffées des limites verticales. L'étude est réalisée pour un fluide de faible nombre de Prandtl avec $Pr=0,021$. Il est montré que les phénomènes observés se produisent également à des nombres de Prandtl plus grands, ce qui est illustré pour $Pr=10$.

La structure de l'écoulement d'air et le transfert de chaleur par convection naturelle dans une cavité différentiellement chauffée, ayant un très grand rapport de forme A , ont été largement étudiés à cause de leur importance dans plusieurs domaines d'application. Ainsi il a été démontré qu'en augmentant le nombre de Rayleigh Ra , on passe du régime de conduction au régime de couches limites et qu'à partir d'une valeur critique Ra_{cr} , d'un écoulement laminaire monocellulaire à un écoulement multicellulaire au sein de la cavité.

Plusieurs travaux se sont penchés sur l'étude du régime multicellulaire dans une cavité verticale allongée bidimensionnelle afin de déterminer Ra_{cr} et d'analyser, numériquement ou expérimentalement, l'écoulement secondaire et le transfert de chaleur en fonction de A , Ra et du nombre de Prandtl Pr .

La convection naturelle à l'intérieur d'enceintes rectangulaires remplies d'air chauffées par le bas et refroidies par le haut, les parties inférieures des deux parois latérales étant maintenues à la même température que la paroi d'extrémité inférieure et les parties supérieures restantes des parois latérales maintenues à la même température de la haut du mur d'extrémité, a été étudiée numériquement [28], pour différentes valeurs du rapport d'aspect hauteur sur largeur de l'enceinte, les fractions chauffées des deux parois latérales et le nombre de Rayleigh de l'enceinte. Le principal résultat phénoménologique obtenu est que lorsque les parties chauffées des deux parois latérales sont de longueur différente, ce qui se produit dans la majorité des situations étudiées, une solution à l'état d'équilibre est atteint, avec un modèle d'écoulement de base à trois cellules, qui dans certains cas dégénère en une structure de flux à deux cellules ou à une seule cellule. En revanche, lorsque les fractions chauffées des parois latérales sont les mêmes, la solution asymptotique peut être soit stationnaire, avec un champ d'écoulement constitué de deux paires de cellules de roulis superposées, soit périodique, ce qui se produit généralement pour des géométries carrées ou modérément élancées et relativement élevées. Nombres de Rayleigh, avec un schéma de flux composé essentiellement d'une cellule primaire et de deux cellules secondaires pulsant autour du centre de l'enceinte.

Un ensemble de simulations numériques directes complètes en deux et trois dimensions d'un écoulement entraîné par la flottabilité dans une cavité remplie d'air ($Pr = 0,71$) à chauffage différentiel de rapport d'aspect égale à 4 et de nombres de Rayleigh jusqu'à 10^{10} a été présenté par **F. X. Trias et al. [29]**. Des différences significatives sont observées entre les résultats bidimensionnels et tridimensionnels. Pour les simulations bidimensionnelles, les oscillations à la partie aval de la couche limite verticale sont nettement plus fortes, éjectant de grands tourbillons vers le cœur de la cavité. Dans les simulations tridimensionnelles, ces grands tourbillons ne persistent pas et leur énergie est rapidement transmise à des échelles de mouvement plus petites. Cela entraîne une réduction de l'effet de mélange à grande échelle dans les régions supérieure chaude et inférieure froide et, par conséquent, le noyau de la cavité reste presque immobile même pour le nombre de Rayleigh le plus élevé.

Patterson et Imberger [30] ont étudié théoriquement la transition de la convection naturelle instationnaire dans une cavité rectangulaire et ont trouvé que l'ensemble de l'écoulement de base pendant la transition comprend une couche limite verticale, une intrusion horizontale et l'écoulement dans le cœur.

Le passage à l'instabilité dans une cavité carrée à parois horizontales conductrices a été étudié par **Winters [31]** qui a obtenu un nombre critique $Ra_{cr}=2,109\times 10^6$. Plus tard, il a été confirmé par **Jones et Briggs [1]** par des expériences et des simulations numériques bidimensionnelles. **Le Quéré et Behnia [32]** puis **Gelfgat [33]**, ont rapporté la valeur de $Ra_{cr} \approx 1,82\times 10^8$, qui est presque deux ordres de grandeur supérieure à celle des frontières conductrices. Un nombre de Rayleigh critique du même ordre de grandeur $Ra_{cr} \approx 1,03\times 10^8$, correspondant à une bifurcation de Hopf primaire, a été trouvé par **Le Quéré [34]** lorsqu'il a étudié la convection dans une cavité à parois horizontales adiabatiques et rapport d'aspect hauteur sur largeur égal à 4. L'augmentation supplémentaire du nombre Ra a finalement entraîné un comportement chaotique qui a été observé au-delà de $Ra=2,3\times 10^8$. Une analyse instationnaire bidimensionnelle approfondie pour une cavité chauffée différentiellement avec un rapport hauteur/longueur de 8 a été réalisée par **Xin et Le Quéré [35]**. Il a été constaté qu'au-delà d'un nombre de Rayleigh critique égal à $Ra_{cr}=3,0619\times 10^5$, l'écoulement devient dépendant du temps (périodique, chaotique et éventuellement turbulent). Ce problème a également été défini comme un cas de référence avec l'essentiel des résultats résumés dans **[36]**. Les travaux expérimentaux de **Tian et Karayiannis [37]**, **[38]** et une étude numérique de **Salat et al. [39]**, complètent des

données précieuses concernant les écoulements supercritiques dans les cavités hautes carrées bidimensionnelles et tridimensionnelles.

La convection naturelle bidimensionnelle de l'air dans une cavité carrée avec différents emplacements de la partie chauffante a été simulée numériquement en utilisant la méthode des volumes finis. Une étude paramétrique a été entreprise [41] et les effets de la position des parties actives sur les parois latérales, du nombre de Rayleigh et de Prandtl sur le transfert de chaleur à l'intérieur de la cavité ont été étudiés. Les résultats montrent que, pour tous les nombres de Rayleigh considérés, le nombre de Nusselt moyen minimum s'est produit pour le cas où la source de chaleur située dans la partie inférieure des parois latérales (cas A), mais le nombre de Nusselt moyen maximum s'est produit pour le cas de la position supérieure.

Dans [42], la méthode des éléments finis a été utilisée pour étudier les effets de l'emplacement et de la taille du réchauffeur sur le transfert de chaleur par convection naturelle dans une cavité carrée 2D chauffée partiellement ou entièrement par le bas et refroidie par le haut. Le nombre de Rayleigh ($5 \times 10^2 \leq Ra \leq 5 \times 10^5$), la taille du réchauffeur ($0,1 \leq D/L \leq 1,0$) et l'emplacement du réchauffeur ($0,1 \leq x_h/L \leq 0,5$) ont été pris en compte. Les résultats numériques ont indiqué que le nombre moyen de Nusselt (Nu_m) augmente à mesure que la taille du réchauffeur diminue. De plus, lorsque x_h/L est inférieur à 0,4, Nu_m augmente à mesure que x_h/L augmente, et Nu_m diminue à nouveau pour une plus grande valeur de x_h/L . Cependant, cette tendance change lorsque Ra est inférieur à 10^4 , suggérant que Nu_m atteint sa valeur maximale dans la région proche du centre de la surface inférieure. Cette étude vise à mieux comprendre les comportements de la convection naturelle afin d'améliorer potentiellement le transfert de chaleur par convection naturelle interne.

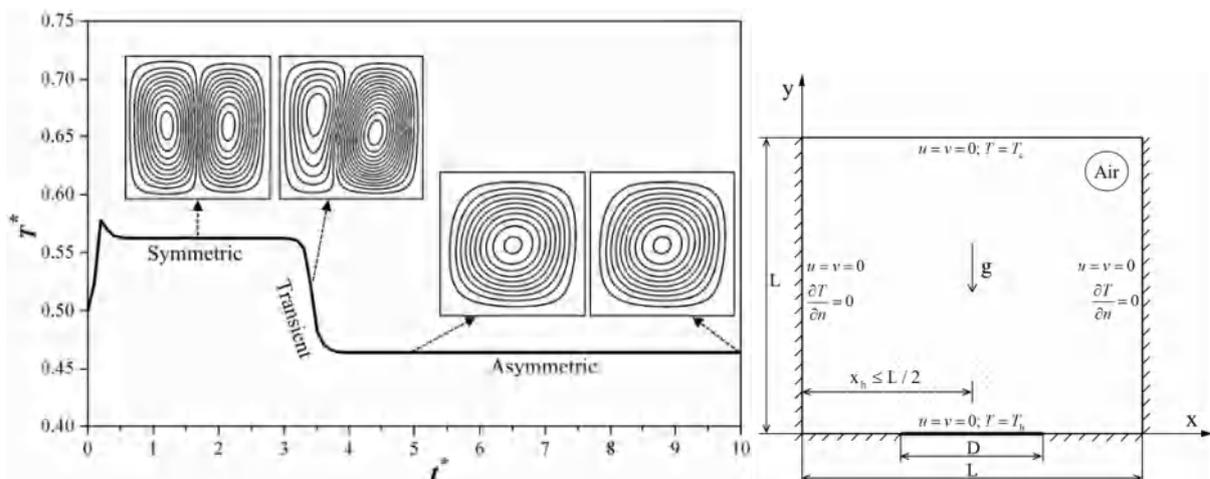


Figure 1.3 : Variation de la température moyenne adimensionnelle sur l'axe vertical de la cavité en fonction de temps adimensionnel pour $Ra=10^4$ et $D/L=xh/L=0.5$ [42]

Des solutions numériques bidimensionnelles ont été obtenues par **N. Williamson et al. [43]**, pour un écoulement de convection naturelle dans des cavités carrées inclinées avec des parois opposées différenciellement chauffées et refroidies, les autres parois étant adiabatiques. Avec la paroi chauffée à gauche et la paroi refroidie à droite, la cavité est inclinée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre de sorte que la paroi chauffée se trouve alors en dessous de la paroi refroidie. Premièrement, les couches limites de convection naturelle qui se forment sur les parois chauffées/refroidies se déversent sur des surfaces adiabatiques inclinées. La flottabilité du fluide entraîne un écoulement de panache attaché à ces emplacements plutôt que les intrusions horizontales diffuses dans la configuration non inclinée. Les panaches sont en général moins dissipatifs des ondes progressives que les intrusions. Les simulations de ce travail montrent que sur une large plage de nombres de Rayleigh, $Ra = 10^5$ - 10^8 , il existe un angle d'inclinaison critique pour chaque nombre de Rayleigh auquel la cavité subit une bifurcation vers un écoulement instable se manifestant par une oscillation monomode circulant dans la cavité. Aux angles inférieurs à l'angle critique, le flux de la cavité est stable et la dissipation dans le panache est suffisante pour isoler efficacement les deux couches limites. L'angle critique de la bifurcation dépend du nombre de Rayleigh, θ_c diminuant avec l'augmentation du nombre de Rayleigh pour $Ra > 7 \times 10^4$.

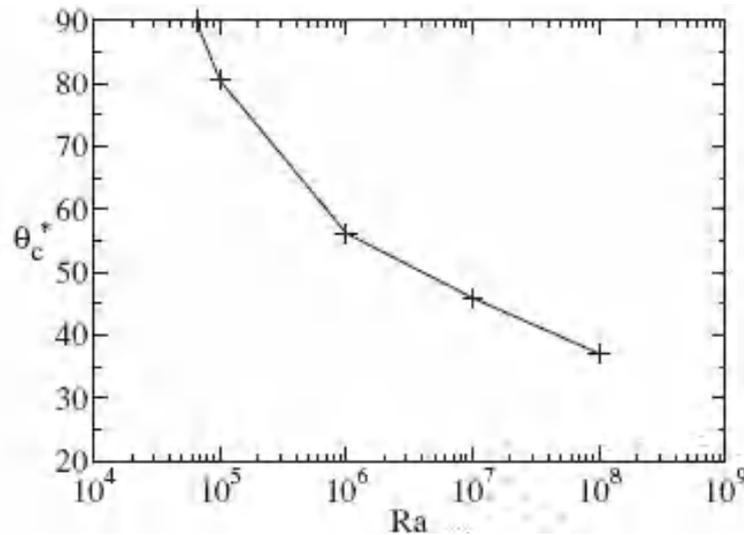


Figure 1.4 : Angle critique pour la bifurcation vers un écoulement instable tracé en fonction de Ra [43].

La convection naturelle dans des cavités rectangulaires remplies d'air inclinées par rapport à la gravité, de sorte que la paroi chauffée soit tournée vers le haut, a été étudiée numériquement [44] sous l'hypothèse d'un écoulement laminaire bidimensionnel, pour des rapports d'aspect hauteur/largeur de l'enceinte de 0,25 à 8, les nombres de Rayleigh basés sur la longueur des parois chauffées et refroidies de 10^2 à 10^7 , et les angles d'inclinaison de l'enceinte de 0° à 75° . Un code

de calcul basé sur l'algorithme SIMPLEC a été utilisé pour la résolution du système des équations régissant le transfert de masse, de quantité de mouvement et d'énergie, en supposant la condition initiale de fluide immobile à la température uniforme de la paroi refroidie jusqu'à l'obtention d'une solution en régime permanent. Il a été constaté que, à mesure que l'angle d'inclinaison augmente à partir de la position verticale, les performances de transfert de chaleur augmentent jusqu'à atteindre un pic à un angle d'inclinaison optimal, que, en principe, à moins que la valeur du nombre de Rayleigh ne soit celle correspondant au début de la convection ou juste plus haut, s'est avéré augmenter à mesure que le nombre de Rayleigh diminuait, ainsi que le rapport d'aspect de la cavité augmentait. Des équations de corrélation sans dimension ont été proposées pour évaluer l'angle d'inclinaison optimal et les performances de transfert de chaleur de l'enceinte.

L'étude menée par **M. Khatamifar et al. [45]**, examine numériquement le transfert de chaleur par convection naturelle transitoire dans une cavité chauffée de manière différentielle, avec une partition d'épaisseur finie et une conductivité thermique. Les paramètres étudiés incluent le nombre de Rayleigh (de 10^3 à 10^8), le rapport de conductivité thermique entre la partition et le fluide (de 0,1 à 1000) et l'épaisseur sans dimension de la partition (de 0,05 à 0,2). Les résultats indiquent que l'effet du rapport de conductivité thermique est significatif uniquement dans la plage de 0,1 à 10, tandis qu'il devient négligeable pour des valeurs très élevées. Les relations d'échelle établies pour la cavité sans partition sont également applicables à la cavité avec partition. L'effet de l'épaisseur de la partition sur le transfert de chaleur est principalement observé lorsque le rapport de conductivité thermique est faible.

Une étude numérique de convection naturelle a été réalisée **[46]** pour examiner différentes configurations d'enceintes. Les équations de conservation ont été résolues à l'aide de la méthode des volumes finis, en les transformant en fonctions vorticité-courant. Plusieurs configurations ont été étudiées sur une plage de nombres de Rayleigh variant de 10^3 à 10^6 , avec des parois chauffées, refroidies ou isolées. Les résultats sont présentés à l'aide de tracés de température et de champ de débit, ainsi que des nombres de Nusselt locaux (Nu) pour tous les cas. Les résultats montrent que le transfert de chaleur augmente en fonction du nombre de Rayleigh ; pour de faibles nombres de Rayleigh (Ra), la conduction domine le transfert de chaleur, tandis que l'effet de la convection augmente avec l'augmentation de Ra. Enfin, il a été constaté que la présence d'une paroi inclinée supprime le processus de convection.

Cette étude **[47]** examine les états stationnaires multiples de la convection naturelle des fluides dans une enceinte carrée avec des parois non-isothermes à la base, des parois latérales

isothermes et une paroi supérieure isolée thermiquement. Un schéma de calcul robuste est développé pour résoudre les équations stationnaires en fonction du nombre de Rayleigh pour deux nombres de Prandtl différents. Des méthodes numériques avancées sont utilisées pour obtenir les solutions, en initiant les branches de solutions à partir de différentes estimations initiales. L'étude montre qu'au-delà d'une valeur critique de Rayleigh, plusieurs états stationnaires sont observés, avec des structures d'écoulement et des taux de transfert de chaleur variés.

Solano et al. [48] propose une investigation numérique et une modélisation réduite de la convection naturelle dans une cavité avec des parois latérales chauffées de manière différentielle. L'effet des conditions limites conjuguées sur le transfert de chaleur et la circulation du flux naturel est examiné en variant les rapports d'aspect et les nombres de Rayleigh. Une validation de la cavité chauffée différemment révèle la nécessité d'une modification de la définition du nombre de Rayleigh pour concilier les résultats expérimentaux avec les corrélations existantes. L'analyse des structures d'écoulement dépendantes du temps révèle un mode instable associé à des cavités à plus faible rapport d'aspect. L'effet des conditions limites conjuguées est évalué en fonction du rapport entre les couches limites internes et externes, montrant que des nombres de Reynolds externes plus élevés favorisent le transfert de chaleur. Un modèle théorique réduit est proposé pour prédire le nombre de Nusselt pour les conditions limites conjuguées. Les résultats indiquent que les configurations d'écoulement en contre-courant offrent un transfert de chaleur plus élevé tandis que les configurations d'écoulement parallèle ont un effet déstabilisant. De plus, il est constaté que des rapports d'aspect intermédiaires permettent d'obtenir un transfert de chaleur élevé avec une consommation d'énergie réduite.

L'étude de **Bhattacharya et al. [49]** explore les multiples états stables de la convection naturelle des fluides dans une enceinte carrée avec des parois non-isothermes, isothermes et thermiquement isolées. Les chercheurs ont développé un schéma de calcul robuste basé sur les équations gouvernant les états stables pour déterminer ces états en fonction du nombre de Rayleigh (Ra) pour deux nombres de Prandtl (Pr) différents. Ils utilisent la méthode des éléments finis de Galerkin avec un solveur Newton-Raphson et initient les branches de solution en perturbant les conditions aux limites et les paramètres du processus.

Les résultats montrent que, au-delà d'une valeur critique de Ra dépendante de Pr , plusieurs états stables apparaissent. Pour $Pr = 0,026$, dix-neuf branches de solutions supplémentaires (six symétriques et treize asymétriques) sont obtenues, tandis que pour $Pr = 0,1$, quatre branches de solutions supplémentaires (deux symétriques et deux asymétriques) sont identifiées. Ces

branches de solutions sont associées à une grande variété de structures d'écoulement, rapportées pour la première fois, qui entraînent différents scénarios de chauffage à l'intérieur de l'enceinte. Les taux de transfert de chaleur varient de manière significative en fonction des structures d'écoulement, ce qui a des implications pratiques importantes pour la conception de processus de chauffage optimaux.

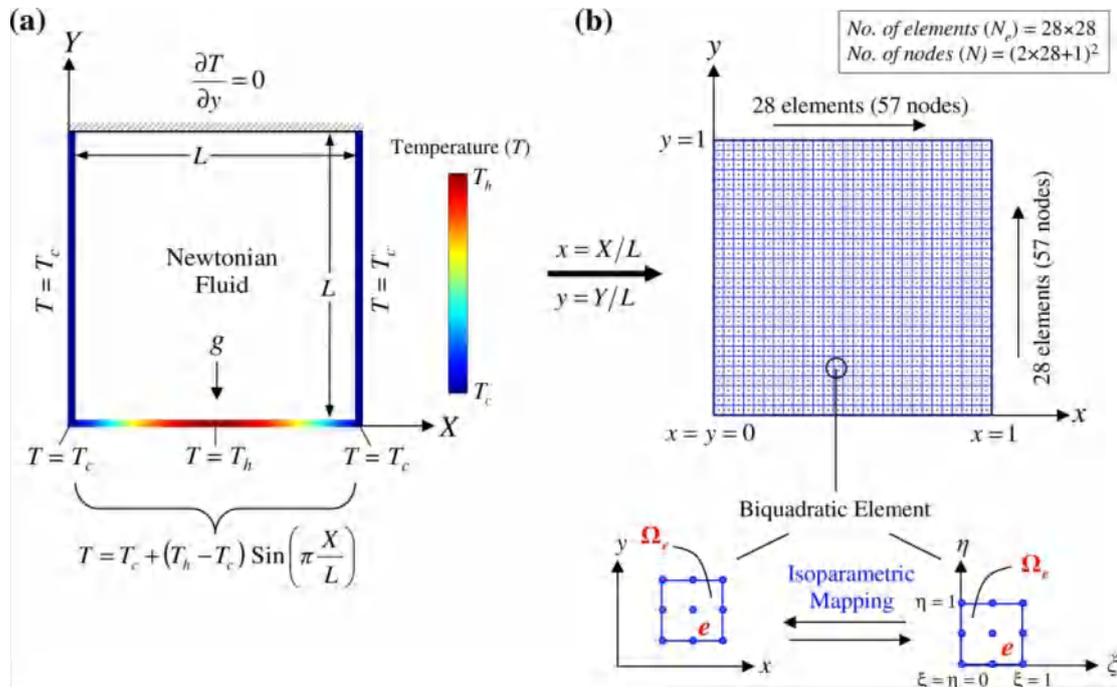
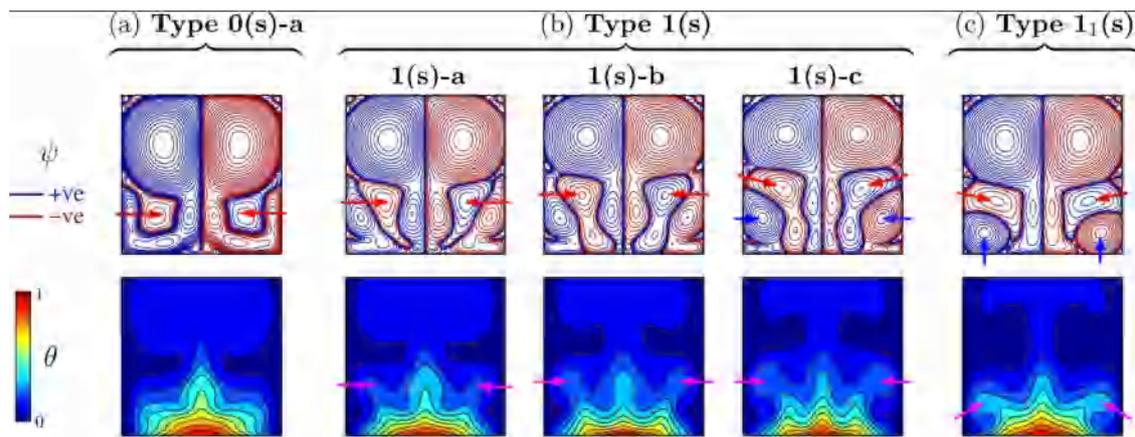


Figure 1.5 : (a) Configuration physique. (b) Maillage par éléments finis comprenant 28x28 éléments bi-quadratiques [49].



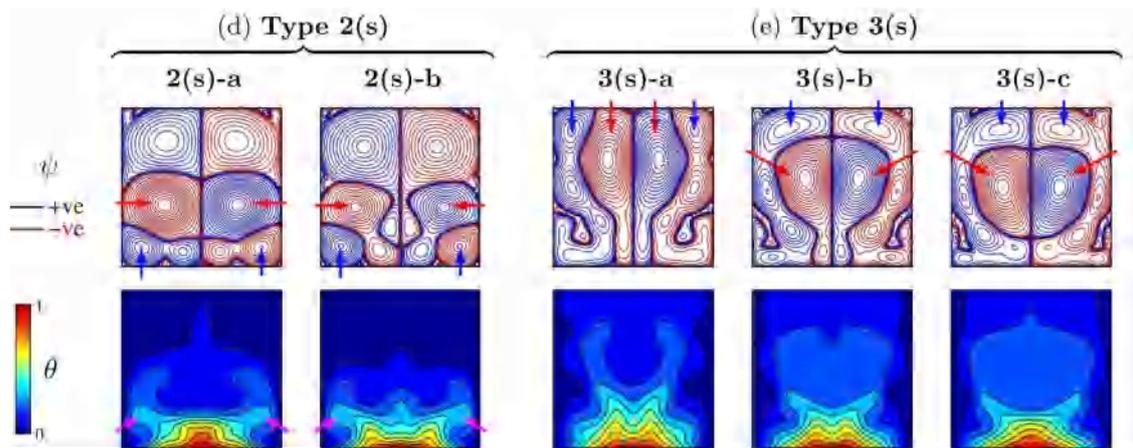


Figure.1.6 : Lignes de courant sans dimension (w) et isothermes (h) de différents types de structures d'écoulement symétriques à $Ra = 10^6$ et $Pr = 0,026$: (a) Type 0(s)-a ; (b) Type 1(s) : [Type 1(s)-a, Type 1(s)-b, Type 1(s)-c] ; (c) Type 11(s) ; (d) Type 2(s) : [Type 2(s)-a, Type 2(s)-b] ; et (e) Type 3(s) : [Type 3(s)-a, Type 3(s)-b, Type 3(s)-c]. Ici, les lignes de courant colorées en bleu et rouge indiquent respectivement les circulations dans le sens antihoraire (w positif) et dans le sens horaire (w négatif). Les flèches rouges montrent les cellules inversées [49].

Des expériences ont été menées [50] pour contrôler les écoulements de convection naturelle et le transfert de chaleur dans des cavités chauffées différemment remplies d'air. Un mécanisme de contrôle consistant en un tuyau mince introduit des perturbations thermiques via la paroi chaude. Les effets de ces perturbations ont été étudiés pour une valeur du nombre de Rayleigh juste supérieure au point de bifurcation. Les résultats montrent une diminution de 10 % du transfert de chaleur et des modifications du champ d'écoulement, notamment une amplification de l'instabilité aux frontières externes des couches limites et un déplacement de tourbillons secondaires. Ces observations sont expliquées par l'analyse détaillée des structures d'écoulement et des fluctuations de vitesse.

Une étude a été menée par **Chorin et al.** [51], sur un écoulement de convection naturelle dans une cavité chauffée différemment de forme bidimensionnelle, avec un rapport d'aspect de 4. Une perturbation thermique de faible amplitude a été introduite sur la paroi chaude, sur une zone représentant 10% de la surface totale. Cette perturbation comprend une composante périodique ajoutée à la température imposée sur la paroi chaude. L'objectif était de maximiser le transfert de chaleur global sans altérer la température moyenne des parois. Les résultats ont montré ce qui suit :

1. L'emplacement optimal pour maximiser le transfert de chaleur se situe en haut de la paroi chaude.

2. L'augmentation de la fréquence de la perturbation conduit à une augmentation de l'amplitude du transfert de chaleur instantané pour la paroi chaude, tandis que le transfert de chaleur diminue vers zéro pour la paroi froide.
3. Les augmentations maximales du transfert de chaleur moyen sont observées pour deux fréquences : la fréquence fondamentale des ondes de gravité internes, préalablement identifiée dans la littérature, et une fréquence très basse qui entraîne une augmentation plus importante du transfert de chaleur.
4. Ces augmentations du transfert de chaleur sont provoquées par la présence persistante d'une région de surtempérature sous la paroi supérieure, ce qui amplifie les transferts de chaleur à la partie supérieure de la paroi froide et modifie significativement les transferts de chaleur à la partie supérieure de la paroi chaude.

De plus, en raison de la nature temporelle de la perturbation thermique, l'écoulement présente une évolution temporelle. Une analyse détaillée des fréquences émergentes et des fluctuations de température a révélé ce qui suit :

1. La perturbation génère des ondes se déplaçant avec l'écoulement principal, observées dans la couche limite froide et près de la paroi inférieure.
2. Une analyse spectrale a montré que pour la perturbation à la fréquence des ondes de gravité internes, seules la fréquence fondamentale de ces ondes et les harmoniques correspondantes sont détectées dans l'écoulement. Cependant, pour la fréquence très basse, des ondes de Tollmien-Schlichting sont également détectées en plus des ondes de gravité, ce qui indique un régime d'écoulement instationnaire.

Ces résultats démontrent que l'utilisation d'une perturbation de faible amplitude correctement positionnée, qui ne nécessite qu'une modification locale de la cavité, peut améliorer le transfert de chaleur global. De plus, l'oscillation à très basse fréquence peut engendrer un comportement instationnaire complexe de l'écoulement. Des études futures pourraient explorer l'influence de telles perturbations sur des cavités avec d'autres rapports d'aspect et en modifiant le nombre de Prandtl du fluide de travail.

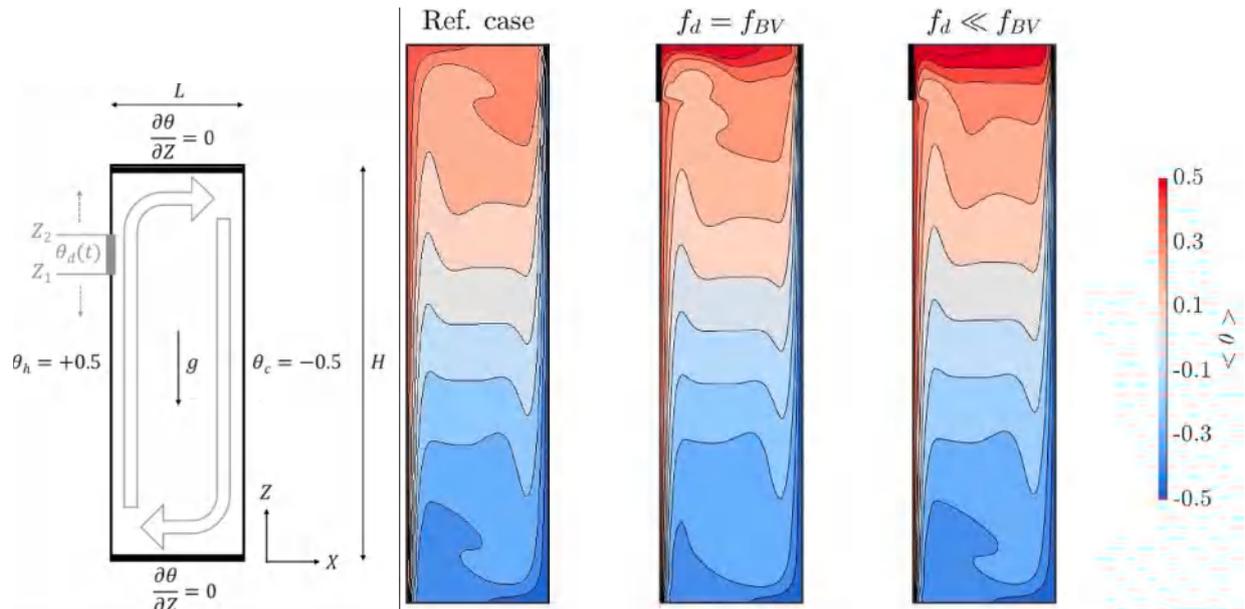


Figure.1.7 : Champ de température moyenne dans le temps pour le cas de référence et pour les deux fréquences de transfert de chaleur maximal, $\Delta\theta=0.1$; la zone de perturbation est affichée (en haut à gauche de la cavité) [51].

La convection naturelle oscillatoire entre deux cylindres concentriques est étudiée numériquement par **Oudina et al.** [52]. L'effet du nombre de Prandtl sur les caractéristiques de l'écoulement et du transfert de chaleur, en tenant compte des effets du champ magnétique, est étudié. Pour différentes valeurs de paramètres physiques, les nombres de Rayleigh critiques sont déterminés. Pour le terme de la flottabilité, l'approximation de Boussinesq est utilisée, et les solutions numériques sont obtenues à l'aide de la méthode des volumes finis. Pour ce type de nombre de Prandtl, les caractéristiques de l'écoulement et du transfert de chaleur sont uniques et indépendantes du nombre de Prandtl. Le diagramme de stabilité (Ra_{Cr} -Pr) met en évidence la dépendance de Ra_{Cr} en fonction des nombres de Prandtl et de différents nombres de Hartmann. L'importance de cette modélisation réside dans son application pratique pour stabiliser ou affaiblir les effets convectifs dans la conception de systèmes magnétiques.

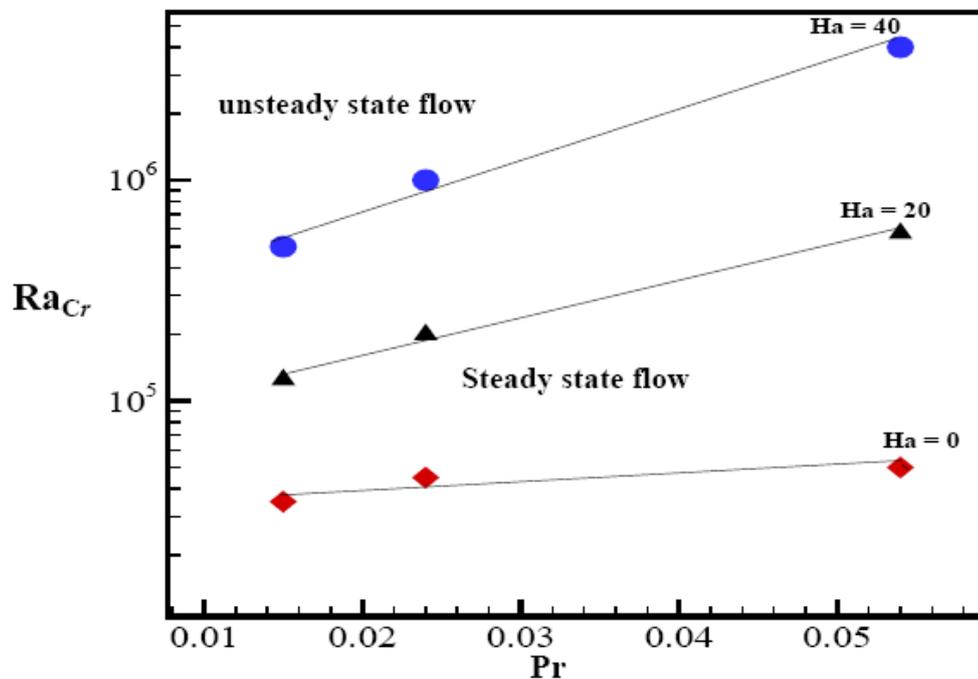


Figure 1.8 : Diagramme de stabilité Ra_{Cr} - Pr pour différentes valeurs de Ha [52].

La Figure 1.8 présente l'évolution du nombre de Rayleigh critique en fonction du nombre de Hartmann. Une augmentation du nombre de Hartmann entraîne une augmentation du nombre de Rayleigh critique pour les valeurs du nombre de Prandtl.

Une modélisation numérique de la convection naturelle sous l'influence d'un champ magnétique axial (B_z) ou radial (B_r) dans une configuration cylindrique remplie d'un fluide conducteur électriquement de faible nombre de Prandtl est étudiée [53]. La méthode des volumes finis est utilisée pour discrétiser les équations de continuité, de Navier-Stokes et d'énergie. Un programme informatique basé sur l'algorithme SIMPLER est développé. Les champs d'écoulement et de température sont représentés respectivement par la fonction de courant et les isothermes. Des diagrammes de stabilité sont établis en fonction des résultats numériques de cette étude. Ces diagrammes mettent en évidence la dépendance du nombre de Grashof critique, Gr_{cr} , avec l'augmentation du nombre de Hartmann, Ha . La stabilisation la plus forte des écoulements convectifs se produit lorsque le champ magnétique est appliqué dans la direction radiale. Cette étude confirme la possibilité de stabiliser l'écoulement d'un métal liquide par convection naturelle par l'application d'un champ magnétique radial.

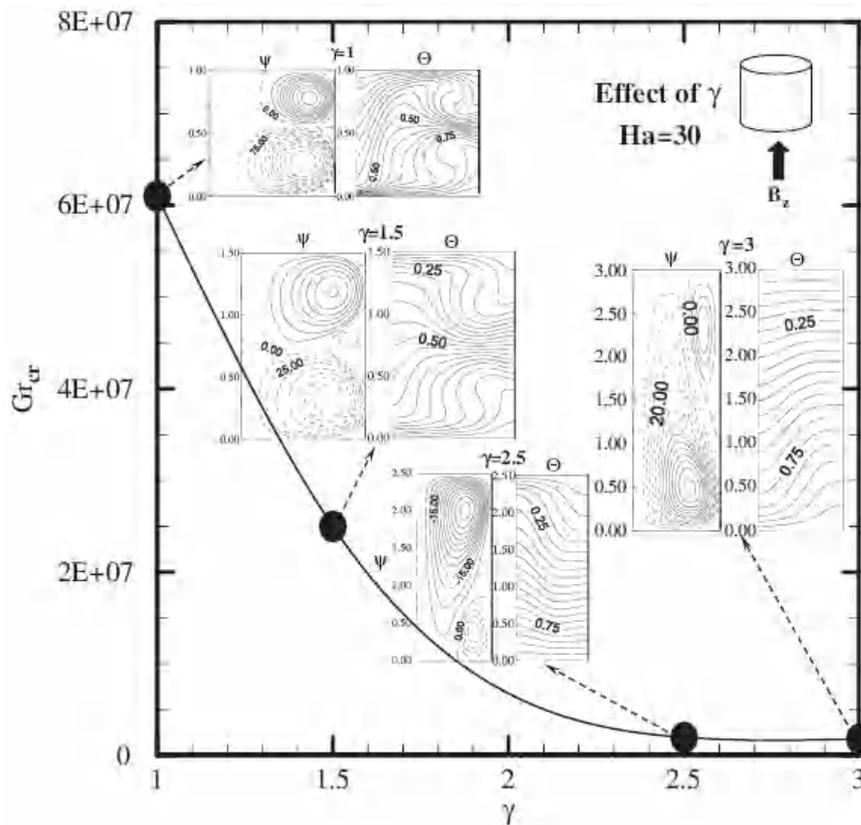


Figure 1.8 : L'effet du rapport d'aspect g sur le nombre de Grashof critique Gr_{cr} à $Ha=30$. Les lignes de courant sans dimension c et les isothermes sans dimension Y sont montrées à l'intérieur de la figure [53].

1.3 Instabilité de la convection dans une enceinte cubique (3d)

La convection naturelle transitoire dans des cavités cubiques, rectangulaires ou cylindriques a attiré de nombreux chercheurs en raison de ses implications dans un large éventail d'applications technologiques et de sa simplicité géométrique. Le problème de la convection naturelle a été étudié analytiquement par **Batchelor** [54]. Depuis lors, une grande attention a été portée à la convection naturelle dans les cavités. Les caractéristiques transitoires de la convection naturelle dans une cavité carrée avec des parois latérales chauffées différentiellement ont été analysées expérimentalement et numériquement par **Patterson et Armfield** [55]. Plusieurs caractéristiques ont été identifiées telles que la présence d'instabilité des ondes progressives, l'existence d'une divergence d'écoulement rapide dans la région de l'écoulement des intrusions et la présence d'oscillations à l'échelle de la cavité.

H. Jian et al. [56] utilise la méthode de Boltzmann sur réseau linéarisée (LLBM) pour effectuer une analyse de stabilité modale linéaire de la convection thermique. Elle se concentre sur le début de la convection de Rayleigh-Bénard dans des cavités rectangulaires et l'instabilité

de la convection naturelle bidimensionnelle (2D) et tridimensionnelle (3D) dans les cavités. La méthode de linéarisation de la fonction de distribution de probabilité d'équilibre locale est étendue pour résoudre les équations de Navier-Stokes linéaires et l'équation d'énergie linéaire. Une analyse multi-échelle est réalisée pour obtenir les équations de Navier-Stokes linéaires macroscopiques à partir des équations de Boltzmann discrètes. La méthode LLBM est validée en comparant les résultats avec une méthode spectrale. L'instabilité de l'écoulement est expliquée par une analyse de transfert d'énergie cinétique. L'étude montre que les mécanismes de flottabilité et inertiel influencent la stabilité de la convection en fonction du nombre de Prandtl.

Les études en 2D des écoulements dans des cavités chauffées de manière différentielle remplies d'air, ainsi que la stabilité de ces écoulements en 2D par rapport aux perturbations périodiques en 3D a été réalisée par **Xin et al.** [57]. Les méthodes numériques utilisées comprennent le code à pas de temps utilisant la méthode de collocation spectrale de Chebyshev et la méthode directe d'Uzawa pour le couplage vitesse-pression. Différentes techniques d'analyse ont été employées, telles que l'itération de Newton, la méthode d'Arnoldi et la méthode de continuation.

Les cavités étudiées avaient des rapports d'aspect compris entre 1 et 7. Les résultats montrent que seul un rapport d'aspect de 7 présente une instabilité stationnaire en 3D, à des nombres de Rayleigh légèrement supérieurs à ceux de l'écoulement en 2D dépendant du temps. Pour les autres rapports d'aspect, l'instabilité en 3D se produit toujours avant l'écoulement en 2D dépendant du temps. Les modes instables en 3D sont stationnaires et antisymétriques par rapport au centre.

Les simulations non linéaires en 3D révèlent que les bifurcations en fourche correspondantes sont supercritiques et que l'instabilité en 3D conduit uniquement à un faible écoulement dans la troisième direction. Des simulations supplémentaires en 3D sont réalisées à des nombres de Rayleigh plus élevés afin d'étudier les effets du faible mouvement du fluide en 3D sur le début de l'écoulement dépendant du temps.

Les résultats indiquent que les structures d'écoulement en 3D sont responsables du début de l'écoulement dépendant du temps pour les rapports d'aspect 1, 2 et 3, tandis que pour les rapports d'aspect plus élevés, elles n'altèrent pas le scénario de transition observé dans les cas en 2D. De plus, les couches limites verticales deviennent instables aux ondes de déplacement.

Xu et Al. [13] ont visualisé les étapes de transition de la convection naturelle transitoire dans une cavité à chauffage latéral. Ils ont fourni une évolution détaillée de l'écoulement de coin dans la phase de développement de l'entraînement, et ils ont discuté du mécanisme de formation de la structure à double couche dans la phase quasi-stationnaire.

Sheu et Lin [58] ont mené une enquête numérique pour le problème de convection naturelle dans une cavité cubique sur une large gamme de nombres de Rayleigh par le diagramme de bifurcation simulé, le cycle limite, le spectre de puissance et le portrait de phase. Les résultats ont indiqué que pour une augmentation successive du nombre de Rayleigh, le flux prédit passe de la solution laminaire stable et symétrique à l'état asymétrique (bifurcation en fourche), puis à la bifurcation de Hopf supercritique. Au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh augmente encore, l'écoulement entraîné par la flottabilité étudié est devenu de plus en plus déstabilisé par une bifurcation quasi-périodique, puis par deux bifurcations prédites à doublement de fréquence. Puis une fréquence ultra-harmonique supplémentaire a montré sa présence avant le chaos.

Pour un nombre de Rayleigh variant entre 10^6 et 2×10^7 , des solutions numériques sont obtenues [59] pour la convection naturelle de l'air en régimes périodiques, quasi-périodiques et chaotiques dans une cavité carrée avec un sommet et un fond adiabatiques, et des parois d'extrémité non uniformément chauffées.

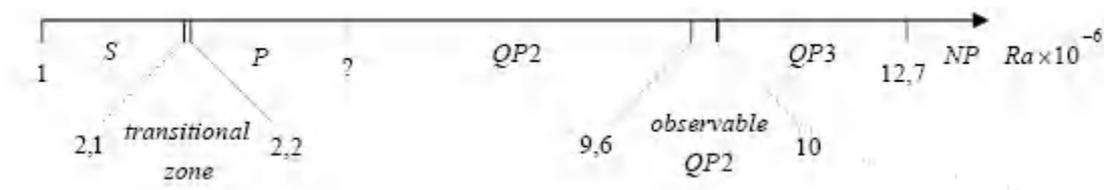


Figure 1.7 : *S* : régime stationnaire, *P* : régime périodique, *QP2* : régime quasi-périodique à deux fréquences incommensurables. *QP3* : régime quasi-périodique à trois fréquences incommensurables, *NP* : régime non périodique. [59]

Une étude numérique systématique de la convection naturelle tridimensionnelle de l'air dans une cavité cubique à chauffage différentiel avec un nombre de Rayleigh (Ra) jusqu'à 10^{10} est réalisée [60] utilisant le schéma gaz-cinétique unifié discret couplé récemment développé. Les résultats de cette étude montre que des couches limites de température et de vitesse sont développées adjacentes aux parois isothermes et deviennent plus minces à mesure que Ra augmente, alors qu'aucune couche limite apparente n'apparaît près des parois adiabatiques. Les tunnels d'écoulement se développent près du centre des parois isothermes et qu'ils se déplacent vers les coins de la cavité dans le joint des parois isothermes et adiabatiques à mesure que Ra

augmente, tandis que l'écoulement évolue de l'état stable à l'état dépendant du temps. Lorsque Ra approche de 10^9 , les mouvements d'écoulement deviennent complètement turbulents.

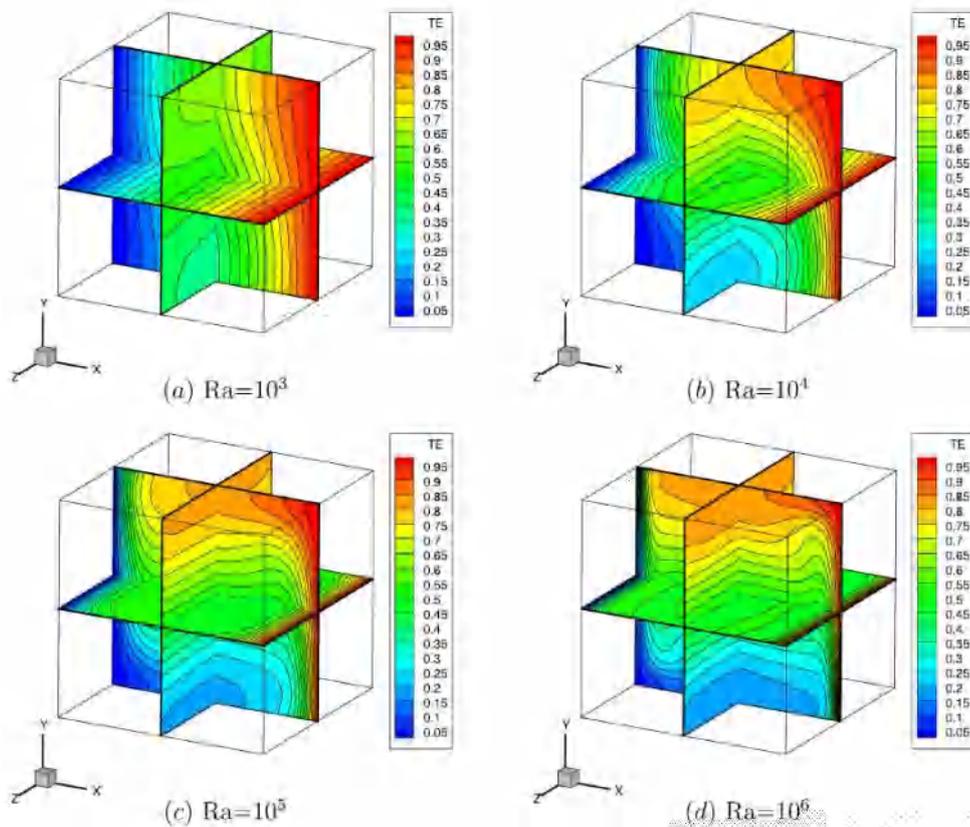


Figure 1.8 : Les isothermes sur les plans de symétrie pour $10^3 \leq Ra \leq 10^6$. [60]

Un ensemble de simulations numériques directes pour l'écoulement de convection naturelle dans une cavité cubique chauffée différentiellement est effectué [61], dans le but d'améliorer la compréhension de la transition d'écoulement à l'intérieur de la couche limite verticale adjacente aux parois isothermes et son influence sur le taux de transfert de chaleur. La gamme de nombres de Rayleigh considérée ($Ra = 1.5 \times 10^9$ à $Ra = 1.0 \times 10^{11}$) prolonge celles étudiées dans la littérature [58]. Pour spécifier l'emplacement de la transition, plusieurs statistiques sont mesurées. Des comportements différents discernables de l'écoulement en amont et de l'écoulement en aval sont observés dans les traces temporelles de la température et de la vitesse. Alors que la température et la vitesse restent essentiellement constantes en amont, des fluctuations sont observées en aval. Les spectres des traces temporelles de vitesse montrent également que les fluctuations de vitesse se sont propagées à des fréquences élevées dans la région du flux descendant. L'amont à l'intérieur de la couche limite reste laminaire jusqu'à un emplacement de transition, et les tourbillons commencent à s'éjecter en aval en produisant des écoulements quasi-périodiques ou turbulents.

La transition de la convection de flottabilité stationnaire à la convection oscillatoire de l'air dans une boîte cubique chauffée latéralement a été étudiée numériquement par **Gelfgat [62]**, par une intégration temporelle simple des équations de Boussinesq à l'aide d'une série de grilles de volumes finis graduellement raffinées. Les limites de cube horizontales et dans le sens de l'envergure sont supposées être soit parfaitement conductrices thermiquement, soit parfaitement isolées thermiquement, ce qui donne quatre ensembles différents de conditions aux limites thermiques. Les nombres critiques de Grashof sont obtenus par interpolation des taux de croissance/décroissance extraits numériquement de l'amplitude d'oscillation à zéro. Les régimes d'écoulement légèrement supercritiques sont décrits par des écoulements moyennés dans le temps, des instantanés et une distribution spatiale de l'amplitude d'oscillation. Les similitudes et dissemblances possibles avec les instabilités bidimensionnelles dans les cavités carrées chauffées latéralement sont discutées. La rupture des symétries et le caractère sous ou supercritique des bifurcations sont examinés. Trois transitions consécutives du régime stationnaire au régime oscillatoire, du régime oscillatoire au régime stationnaire, et enfin à l'écoulement oscillatoire, se retrouvent dans le cas de frontières horizontales et d'envergure parfaitement isolées.

La transition du laminaire au turbulente a été étudiée expérimentalement pour une cavité à chauffage différentiel de rapport d'aspect trois **[63]**. L'étude a été réalisée à l'aide de techniques non intrusives, à savoir l'interféromètre Mach Zehnder et la technique de visualisation basée sur la fumée. Grâce à des mesures de température en temps réel à l'intérieur de la cavité, les instabilités de l'écoulement ont été clairement identifiées. Une attention primordiale a été accordée à la compréhension du champ convectif aux quatre coins de la cavité où l'écoulement devrait d'abord devenir périodique. Pour les expériences réalisées pour une différence de température de 10°C entre les parois thermiquement actives, l'écoulement était dans la région de transition et les oscillations à deux fréquences ont été observées. Près des parois thermiquement actives, le fluide oscille principalement avec une seule fréquence tandis que l'amplitude correspondant à l'autre fréquence est assez faible. La dominance de cette instabilité dans la couche limite indique l'existence de l'instabilité bien connue de Tollmien-Schlichting. Il est important de noter que ce type d'instabilité est couramment observé dans les couches limites pour diverses configurations d'écoulement. Par contre, la deuxième instabilité est présente loin de la couche limite et correspond au saut hydraulique, qui est provoqué par l'écoulement frappant la paroi horizontale de la cavité. Le fluide qui se déplace verticalement le long des parois thermiquement actives heurte la paroi horizontale et provoque cette instabilité. De plus, il est conclu que lorsqu'il y a inclusion de plus de fréquences dans le flux en raison de l'augmentation

du nombre de Rayleigh, les instabilités provoquent une augmentation soudaine du transfert de chaleur sur les parois thermiquement actives.

Une étude numérique de la transition de la convection naturelle d'un écoulement permanent à un régime oscillatoire de fluides à faible nombre de Prandtl à l'intérieur de la configuration de Bridgman 3D a été réalisée par **A. Atia et al.**[64]. Les équations tridimensionnelles de Navier-Stokes et d'énergie, avec l'approximation de Boussinesq, ont été discrétisées au moyen d'une procédure de volumes finis qui emploie un schéma de différence centrées précis du second ordre pour traiter les flux diffusifs et convectifs. En convection naturelle, la force de flottabilité ne fait que conduire le flux et son intensité peut avoir un effet néfaste sur la croissance des cristaux, comme la strie. Naturellement, l'écoulement en régime permanent est obtenu pour un faible nombre de Rayleigh et montre une grande dépendance entre le nombre de Rayleigh, la structure de l'écoulement et le taux de transfert de chaleur. Une faible augmentation du nombre de Rayleigh nous guide pour déterminer le point critique auquel le flux 3D est devenu oscillatoire. Ce régime se manifeste par un signal sinusoïdal dans le temps et développé à chaque période de temps.

L'objectif principal des nouveaux travaux en cours est d'améliorer notre compréhension de la transition d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent à l'intérieur de la couche limite verticale dans une cavité cubique à chauffage différentiel avec des parois horizontales et latérales adiabatiques. Ces dernières années, la méthode cinétique (ou méthode CFD mésoscopique basée sur le modèle de l'équation de Boltzmann) s'est développée et est devenue un outil fiable pour les simulations d'écoulements thermiques [65].

Le mouvement convectif dans une cavité carrée tridimensionnelle et bidimensionnelle entraînée par un gradient de température est analysé par **S. Bawazeer et al.** [66]. La cavité est remplie d'un fluide à faible nombre de Prandtl (Pr), typique des métaux liquides. Les parois verticales ont des températures constantes mais différentes, tandis que les parois horizontales sont adiabatiques. Un faible nombre de Prandtl présente une forte non-linéarité, où le terme d'advection domine le terme de diffusion dans les équations de quantité de mouvement. Par conséquent, une approche Multi Relaxation Time, Lattice Boltzmann modifié (MRTLBM) est utilisée pour surmonter la stabilité des solutions numériques. De plus, en utilisant la méthode mentionnée, une large gamme de nombres de Prandtl, Pr , (0,01 à 0,5) et une large gamme de nombres de Rayleigh, Ra , (10^4 à 10^8) sont étudiées. Il a été constaté que le champ d'écoulement présente des oscillations périodiques aux nombres critiques de Rayleigh, qui dépend du nombre

de Prandtl. Le flux périodique devient apériodique lorsque le nombre de Prandtl diminue et/ou le nombre de Rayleigh diminue. En outre, le nombre moyen de Nusselt est présenté et corrélé pour la plage étudiée des paramètres de contrôle.

L'écoulement tridimensionnel de convection naturelle dans une cavité cubique remplie d'air et chauffée de manière différentielle a été étudié par **Xin Wen et al. [67]** La paroi verticale de gauche est chauffée et la paroi verticale de droite est refroidie, les quatre parois restantes étant adiabatiques. Des simulations numériques directes de l'écoulement de convection naturelle ont été effectuées à l'aide d'un schéma cinétique de gaz unifié discret (DUGKS), avec une implémentation améliorée des conditions aux limites. De fines couches limites se développent le long des deux parois isothermes. La transition d'écoulement laminaire à un écoulement turbulent à l'intérieur des couches limites est étudiée dans cet article. Les simulations sont conduites à trois nombres de Rayleigh de 1.5×10^9 , 1.0×10^{10} , 1.0×10^{11} en utilisant des grilles non uniformes avec une résolution allant jusqu'à 320^3 . Le nombre de Prandtl est fixé à 0.71. Une analyse détaillée de la transition de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent à l'intérieur des couches limites verticales et de son influence sur le taux de transfert de chaleur est fournie. Des traces temporelles de température et de vitesse, un champ d'écoulement moyenné dans le temps, des statistiques de champs de fluctuation sont présentés pour illustrer des comportements distincts dans la couche limite thermique laminaire et turbulente, ainsi que pour déterminer l'emplacement de la transition à différents nombres de Ra. Les nombres de Nusselt moyens pour différents nombres de Ra sont compilés et comparés aux résultats précédents. Une ligne directrice de l'exigence de résolution est suggérée sur la base de l'échelle Ra de la couche limite thermique laminaire.

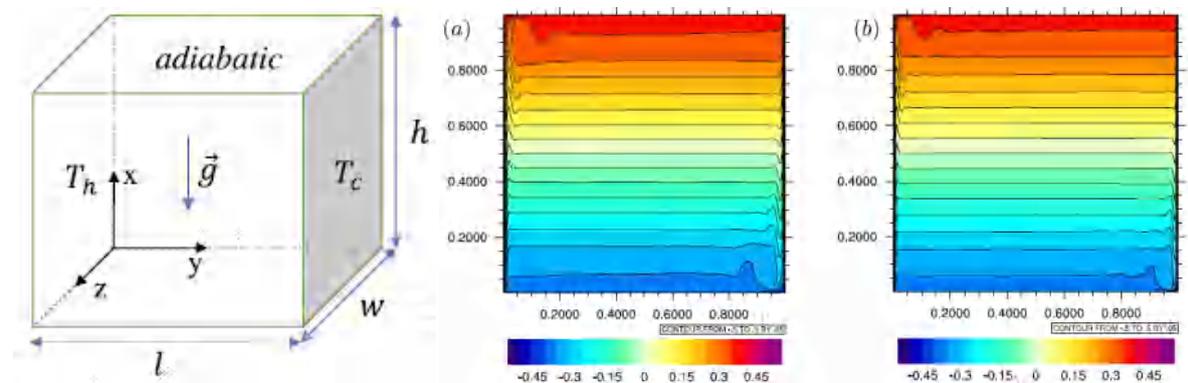


Figure 1.9 : Champ de température moyenné dans le temps pour: (a) $Ra = 1.5 \times 10^9$; (b) $Ra = 1.0 \times 10^{10}$ [67]

1.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une revue bibliographique relative à l'étude de la stabilité de la dynamique et du transfert thermique d'un écoulement de convection naturelle en cavité différentiellement chauffée en bidimensionnel et en tridimensionnel. La diversité des études concernant ce sujet est une preuve de son intérêt pratique et de la complexité des phénomènes de transfert mis en jeu. Nous avons exposé quelques résultats expérimentaux et numériques émanant de la littérature qui ont abordé ce thème de recherche.

Chapitre 2

MODELISATION MATHEMATIQUE

2.1 Introduction

D'une manière générale, la formulation mathématique d'un tel problème s'obtient en écrivant les théorèmes généraux de la mécanique des fluides et de la thermodynamique. Ces théorèmes traduisent la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie au sein du fluide. Dans ce chapitre, nous allons établir les équations qui nous permettront de modéliser le problème de convection naturelle dans une cavité symétriquement chauffée dans deux cas : bidimensionnelle et tridimensionnelle, en se servant de la formulation intégrale des lois de conservation et en introduisant des hypothèses simplificatrices qui seront justifiées.

2.2 Description du problème et formulation mathématique

2.2.1 Définition du problème

Le modèle physique considéré est schématisé en deux configurations (2D et 3D) sur les figures 2.1 et 2.2 respectivement. Pour le cas bidimensionnel, il s'agit d'une cavité carrée avec une longueur de paroi latérale L dont la paroi supérieure est adiabatique, tandis que les parois latérales sont maintenues à une température constante (T_f). Deux parties chauffées de longueur égale à un quart de celle de la cavité L ayant une température constante (T_c) sont placées, symétriquement en trois positions : en bas des parois verticales pour la 1^{ère} configuration, et au centre des parois verticales pour le 2^{ème} cas et en haut pour la dernière configuration. Une partie chaude de longueur égale à la moitié de celle de la cavité L est placée au centre de la paroi inférieure.

Pour le cas tridimensionnel, nous considérons un fluide dans une cavité chauffée de manière différentielle où les parties chauffées (sous forme des bandes) sont maintenues à la

température T_c tandis que les parties froides sont maintenues à la température T_f (Figure. 2. 1). Le fluide est supposé newtonien (air) avec des propriétés physiques constantes, à l'exception de la masse volumique dans le terme de flottabilité qui est régie par l'approximation de Oberbeck-Boussinesq et dépend linéairement de la température, $\rho = \rho_0 (1 - \beta (T - T_0))$ où β est le coefficient de dilatation thermique, T_0 est une température de référence et ρ_0 est la masse volumique de référence qui correspond à T_0 .

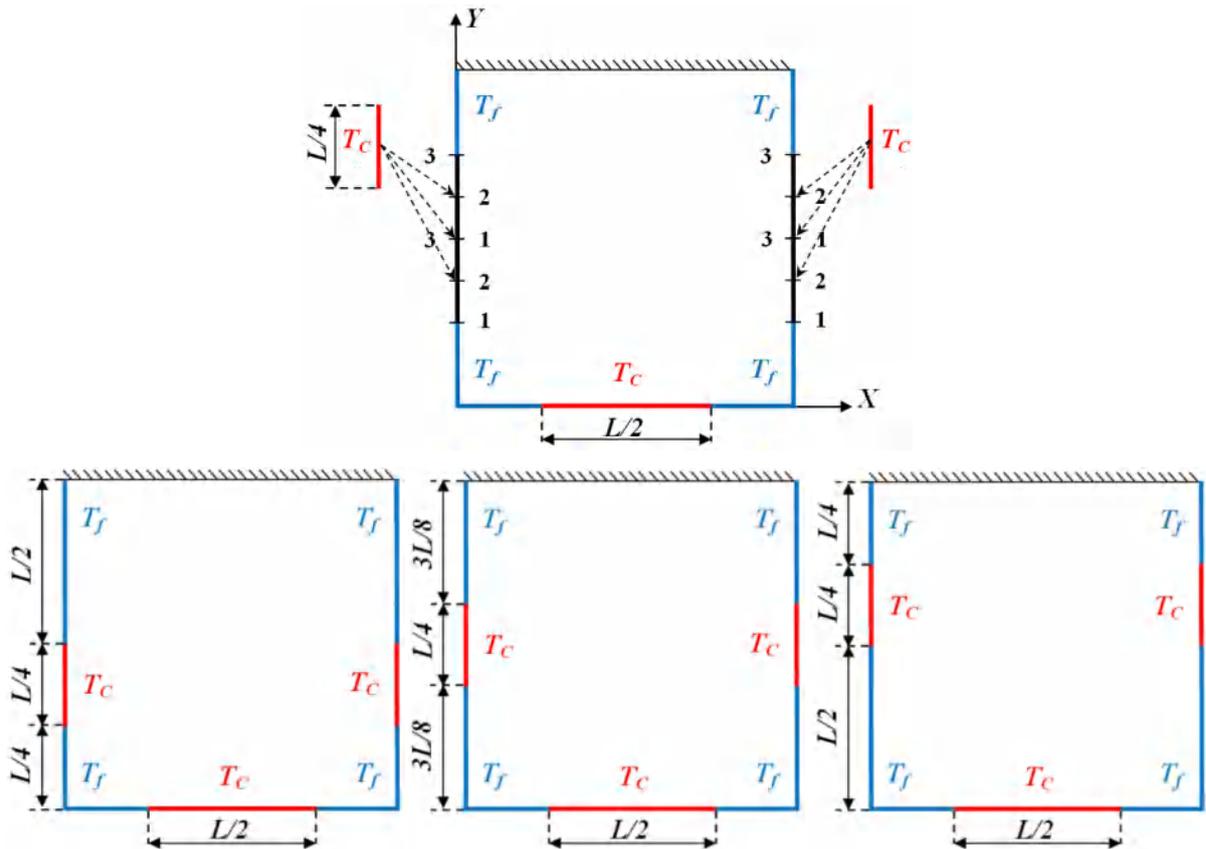
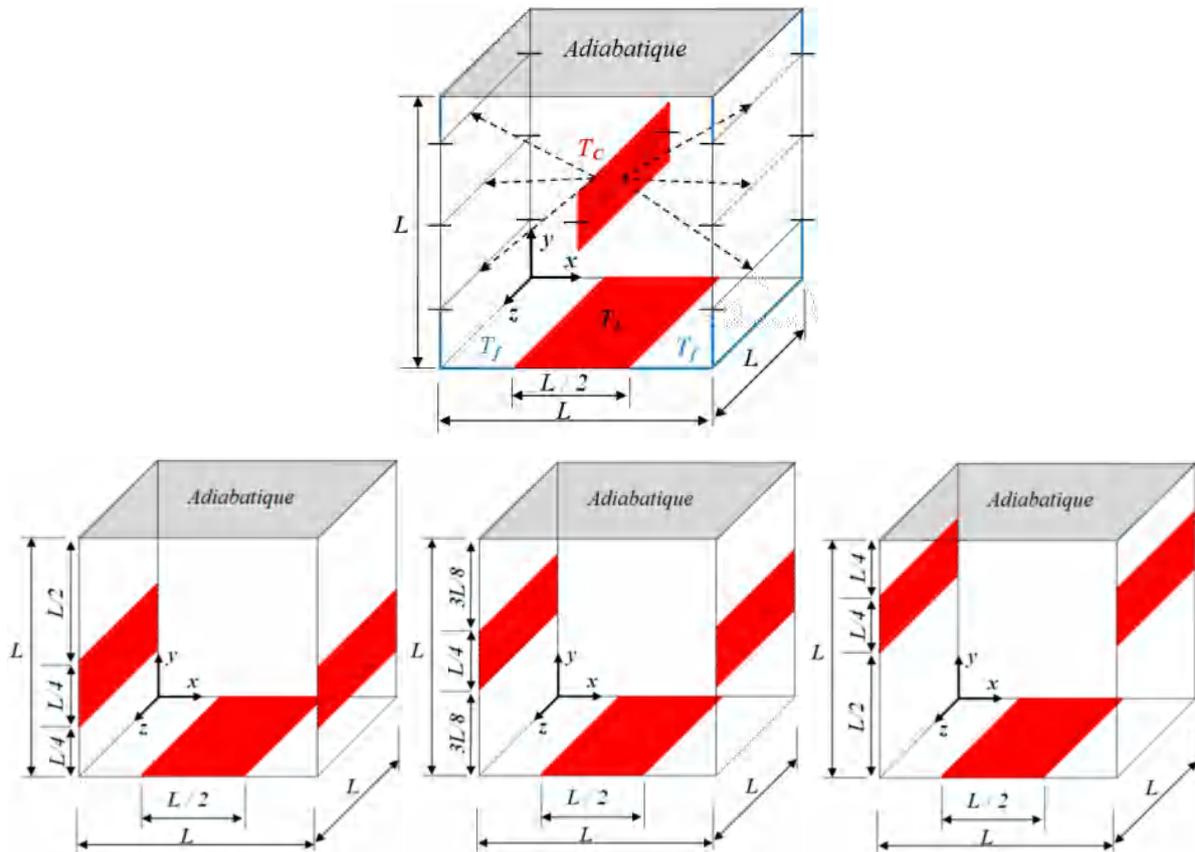


Figure 2.1 : Configuration géométrique bidimensionnelle du problème étudié



*Figure 2.2 : Configuration géométrique tridimensionnelle
du problème étudié*

2.2.2 Hypothèses simplificatrices

Pour étudier les phénomènes de convection naturelle, nous avons pris en considération les hypothèses simplificatrices suivantes :

- 1) L'écoulement est laminaire, incompressible, bidimensionnel (en 1^{er} cas) et tridimensionnel pour le 2^{ème} cas et en régime transitoire.
- 2) Le fluide (air) est newtonien.
- 3) Les propriétés du fluide sont supposées constantes à l'exclusion de la densité dans laquelle les forces de flottabilité ne sont pas négligées et suivent l'approximation de Boussinesq.
- 4) En général, lorsque le mécanisme de convection naturelle est pris en compte, le rayonnement peut avoir des effets considérables. Cependant, dans certains cas, ces effets peuvent être négligés (basses températures impliquées et/ou limites avec une très faible émissivité ou lorsque le fluide utilisé est supposé être parfaitement transparent au rayonnement) [16-18].

2.2.3 Formulation mathématique

L'écoulement d'un fluide est gouverné par les principes dits de conservation. Ces principes de conservation traduisent les bilans des quantités physiques pertinentes du problème considéré à savoir la quantité de mouvement, l'énergie et la masse. Pour un fluide newtonien, ces bilans conduisent aux équations de Navier-Stokes qui sont des équations aux dérivées partielles et non-linéaires. Dans le cas des écoulements chauffés, les équations deviennent couplées et n'admettent de solutions analytiques exactes que dans des cas très simplifiés ; le recours aux méthodes numériques s'avère alors inéluctable. Nous allons présenter dans ce chapitre les équations du mouvement en coordonnées cartésiennes, dans les deux cas : bidimensionnel et tridimensionnel, leur version adimensionnelle. En adoptant les hypothèses simplificatrices précédentes, les équations de conservation qui régissent cet écoulement en convection naturelle s'écrivent :

2.2.3.1 Equation de conservation de la masse

Cette loi traduit le fait qu'il n'y a ni création, ni disparition de matière dans un domaine fluide au cours de son mouvement. La masse du fluide extraite ou injectée dans un volume élémentaire est équivalente à la somme de la variation de masse du fluide pendant une période de temps élémentaire et des flux de masse qui traversent la surface de ce volume. Elle est définie par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad (2.1)$$

Ou encore
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.2)$$

Ce qui donne, en utilisant l'hypothèse d'incompressibilité :

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.3)$$

Donc, l'équation de conservation de la masse est donnée par

En 2D :
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

En 3D :
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.5)$$

2.2.3.2 Equations de la quantité de mouvement

C'est la deuxième loi de Newton, encore appelée principe fondamental de la dynamique; son énoncé est le suivant: dans un référentiel galiléen, la dérivée particulaire de la quantité de mouvement du fluide contenu dans D est égale à la somme de toutes les forces extérieures appliquées sur D :

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \vec{V} dv = \int_D \rho \vec{f} dv + \int_{\Sigma} \vec{T} d\Sigma \quad (2.6)$$

Les équations de quantité de mouvement s'écrivent :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{u} - \beta(T - T_0) \mathbf{g} \quad (2.7)$$

- Equation de la quantité de mouvement suivant x :

$$\text{En 2D :} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.8)$$

$$\text{En 3D :} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.9)$$

- Equation de la quantité de mouvement suivant y :

$$\text{En 2D :} \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g_y \beta (T - T_f) \quad (2.10)$$

$$\text{En 3D :} \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + g_y \beta (T - T_f) \quad (2.11)$$

- Equation de la quantité de mouvement suivant z :

$$\text{En 3D :} \quad \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.12)$$

2.2.3.3 Equation d'énergie

L'équation de transport de l'énergie est obtenue par l'application du premier principe de la thermodynamique. Cette équation, dans laquelle les termes de dissipations visqueuses sont négligés, s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = \frac{\lambda}{\rho c_p} \Delta T \quad (2.13)$$

Où λ est la conductivité thermique et c_p est la capacité calorifique.

$$\text{En 2D :} \quad \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.14)$$

$$\text{En 3D :} \quad \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2.15)$$

2.2.4 Conditions initiales et aux limites

Le modèle mathématique doit être complété par des conditions initiales et des conditions aux limites. Les conditions aux limites sont les conditions appliquées au niveau des frontières du domaine d'écoulement. Ces deux types de conditions doivent être bien pris en compte pour pouvoir déterminer la valeur des constantes apparaissant lors de l'intégration des équations aux dérivées partielles.

2.2.4.1 Les conditions initiales

Les conditions initiales permettent de définir l'état du système physique à l'instant initial t_0 et donc de pouvoir suivre sa trajectoire d'évolution au cours du temps. En fait, on dit conditions initiales par abus de langage, mais, en vérité, il suffit de connaître l'état du système à un instant donné quelconque pour pouvoir suivre l'évolution du système. Dans notre cas, les conditions initiales portent sur la vitesse et la température et sont données par

$$\text{En 2D :} \quad \text{À } t_0 = 0 : u = v = 0; T = 0 \quad (2.16)$$

$$\text{En 3D :} \quad \text{À } t_0 = 0 : u = v = w = 0; T = 0 \quad (2.17)$$

2.2.4.2 Les conditions aux limites

Dans le cas de cette étude, on distingue les conditions aux limites portant sur la vitesse et sur la température.

- **Condition sur la vitesse :**

Sur les frontières du domaine, la condition d'adhérence du fluide aux parois est imposée pour la vitesse, soit :

$$\text{En 2D : A } t > 0 : u(x, 0) = u(x, L) = u(0, y) = u(L, y) = 0 ; \quad (2.18)$$

$$v(x, 0) = v(x, L) = v(0, y) = v(L, y) = 0 ; \quad (2.19)$$

$$\text{En 3D : } \forall t > 0 : u(x, y, 0) = u(x, y, L) = u(x, 0, z) = u(x, L, z) = u(0, y, z) = u(L, y, z) = 0 \quad (2.20)$$

$$v(x, y, 0) = v(x, y, L) = v(x, 0, z) = v(x, L, z) = v(0, y, z) = v(L, y, z) = 0 ; \quad (2.21)$$

$$w(x, y, 0) = w(x, y, L) = w(x, 0, z) = w(x, L, z) = w(0, y, z) = w(L, y, z) = 0 ; \quad (2.22)$$

- **Conditions sur la température :**

On en distingue deux types : les conditions de parois isothermes dans le cas de la cavité tridimensionnelle, soit

En 2D :

$$\text{Dans les parties chauffées: } T(x, 0) = T(0, y) = T(L, y) = T_c \quad (2.23)$$

$$\text{Dans les parties froides: } T(x, 0) = T(0, y) = T(L, y) = T_f ; \quad (2.24)$$

En 3D:

$$\text{Dans les parties chauffées: } T(x, 0, z) = T(0, y, z) = T(L, y, z) = T_c \quad (2.25)$$

$$\text{Dans les parties froides: } T(x, 0, z) = T(0, y, z) = T(L, y, z) = T_f \quad (2.26)$$

et les conditions de Neumann pour la paroi adiabatique supérieure, où un gradient de température nul est imposé, soit

$$\vec{\nabla} \cdot T \vec{n} = 0 \quad (2.27)$$

Où \vec{n} et le vecteur normal à la paroi considérée.

$$\text{En 2D : } \left. \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \right|_{y=L} \quad (2.28)$$

$$\text{En 3D : } \left. \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \right|_{y=L} \quad (2.29)$$

2.3 Formulation adimensionnelle

Les équations de la mécanique des fluides et de la thermique comportent en général de très nombreux paramètres physiques. La mise sous forme adimensionnelle de ces équations, obtenue en choisissant des échelles de référence appropriées et en réalisant des groupements sans dimension des paramètres physiques, est une étape très importante de la modélisation d'un problème physique:

- d'un point de vue théorique, elle permet de définir et de décrire des classes d'écoulements que l'on dira "dynamiquement similaires"; c'est pour cela que l'analyse dimensionnelle des équations porte le nom de *similitude*;
- d'un point de vue expérimental ou technologique, l'analyse adimensionnelle est à la base des essais sur modèles réduits;
- d'un point de vue mathématique, la mise sous forme adimensionnelle est sans conséquence sur la nature des solutions obtenues et il est possible de remonter sans peine aux solutions des équations dimensionnelles de départ;
- d'un point de vue numérique, le choix d'échelles de référence prenant en compte la nature de l'écoulement permettra une économie de temps de calcul non négligeable.

Pour donner une formulation générale au problème étudié, on introduit dans les équations de conservation (2.4) – (2.15), les variables adimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{L}, Y = \frac{y}{L}, Z = \frac{z}{L}, U = \frac{uL}{\alpha}, V = \frac{vL}{\alpha}, P = \frac{pL^2}{\rho\alpha^2}, \theta = \frac{T - T_f}{T_c - T_f}, \\ \tau &= \frac{\alpha t}{L^2}, Pr = \frac{\nu}{\alpha}, Ra = \frac{g\beta(T_c - T_f)L^3 Pr}{\nu^2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.3.1 Equations de conservation

Après adimensionalisation, les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement, d'énergie et de concentration peuvent s'écrire :

a). Equation de continuité

$$\text{En 2D :} \quad \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2.31)$$

$$\text{En 3D :} \quad \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (2.32)$$

b). Equation de quantité de mouvement suivant x

$$\text{En 2D :} \quad \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + Pr \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (2.33)$$

$$\text{En 3D :} \quad \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} + W \frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial X} + Pr \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right) \quad (2.34)$$

c). Equation de quantité de mouvement suivant y

$$\text{En 2D : } \quad \frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial Y} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \text{Pr} \cdot \text{Ra} \cdot \theta \quad (2.35)$$

$$\text{En 3D : } \quad \frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} + W \frac{\partial V}{\partial Z} = - \frac{\partial P}{\partial Y} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right) + \text{Pr} \cdot \text{Ra} \cdot \theta \quad (2.36)$$

d). Equation de quantité de mouvement suivant z

$$\text{En 3D : } \quad \frac{\partial W}{\partial \tau} + U \frac{\partial W}{\partial X} + V \frac{\partial W}{\partial Y} + W \frac{\partial W}{\partial Z} = - \frac{\partial P}{\partial Z} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \right) \quad (2.37)$$

e). Equation d'énergie

$$\text{En 2D : } \quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (2.38)$$

$$\text{En 3D : } \quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} + W \frac{\partial \theta}{\partial Z} = \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \right) \quad (2.39)$$

2.3.2 Nombres adimensionnels caractérisant le problème

La mise sous forme adimensionnée des équations de conservation fait apparaître des nombres sans dimensions caractéristiques du problème. Ces paramètres sont :

a). Nombre de Rayleigh

C'est le paramètre qui caractérise la vigueur des écoulements de convection naturelle pour une longueur de référence $L_{\text{réf}}$:

$$\text{Ra}_{L_{\text{réf}}} = \frac{g \beta \Delta T L_{\text{réf}}^3 \text{Pr}}{\nu^2} \quad \text{avec : } \Delta T = T_c - T_f \quad (2.39)$$

que l'on peut voir comme le rapport des effets favorisant la convection (la flottabilité $\rho_0 g \beta (T_c - T_f) = g (\rho_0 - \rho)$, sur les effets s'y opposant, la diffusion thermique (qui casse les gradients de température), et la viscosité (qui s'oppose à l'écoulement du fluide).

b). Le nombre de Nusselt

C'est un nombre adimensionnel utilisé dans les opérations de transfert thermique. Il représente le rapport entre le transfert thermique convectif et le transfert thermique conductif à travers une interface (souvent fluide/solide). Si la conduction est le principal mode de transfert, alors le nombre de Nusselt sera de l'ordre de l'unité. En cas de présence de convection (due par exemple au déplacement d'un fluide en régime turbulent), le transfert thermique s'effectuera principalement par déplacement du fluide et aura pour conséquence de faire tendre le nombre de Nusselt vers l'infini.

On le définit de la manière suivante :

$$\text{Nu}_{L_{\text{réf}}} = \frac{\phi_{\text{convectif}}}{\phi_{\text{conductif}}} = \frac{h \Delta T}{-k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{\text{paroi}}} = \frac{h L}{k} \quad (2.40)$$

Ce nombre peut également être interprété comme la pente à l'origine de la température suivant l'axe normal à la paroi.

c). Nombre de Prandtl

C'est le nombre qui caractérise le fluide :

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (2.41)$$

qui tient uniquement compte des propriétés du fluide. Ce rapport compare la diffusion de la quantité de mouvement, via sa viscosité, à sa capacité à diffuser la chaleur via sa diffusivité thermique. Dans le cas de l'air, par exemple, avec un Prandtl de 0.71, les effets de la diffusion thermique et de la viscosité sont du même ordre.

d). Les rapports de forme Vertical, horizontal et transversal de la cavité :

$$A_V = \frac{H}{L}, A_H = \frac{D}{L}, A_T = \frac{H}{D} \quad (2.42)$$

qui donnent les caractéristiques géométriques sur l'aspect de la cavité.

2.3.3 Conditions initiales et aux limites

Les conditions initiales et aux limites (2.16 à 2.29) après adimensionnalisation s'écrivent alors :

a). Les conditions initiales

$$\text{En 2D :} \quad \text{À } t_0 = 0 : U = V = 0, T = 0 \quad (2.43)$$

$$\text{En 3D :} \quad \text{À } t_0 = 0 : U = V = W = 0, T = 0 \quad (2.44)$$

b). Les conditions aux limites

Les conditions sur la vitesse

$$\text{En 2D : A } t > 0 : \quad U(X, 0) = U(X, L) = U(0, Y) = U(L, Y) = 0 \quad (2.45)$$

$$V(X, 0) = V(X, L) = V(0, Y) = V(L, Y) = 0 ; \quad (2.46)$$

En 3D : A $t > 0$:

$$U(0, Y, Z) = U(L, Y, Z) = U(X, 0, Z) = U(X, L, Z) = U(X, Y, 0) = U(X, Y, L) = 0 \quad (2.47)$$

$$V(0, Y, Z) = V(L, Y, Z) = V(X, 0, Z) = V(X, L, Z) = V(X, Y, 0) = V(X, Y, L) = 0 \quad (2.48)$$

Les conditions sur la température

$$\text{Dans les parties chauffées:} \quad \theta(X, 0) = \theta(0, Y) = \theta(L, Y) = 1 \quad (2.49)$$

$$\text{Dans les parties froides:} \quad \theta(X, 0) = \theta(0, Y) = \theta(L, Y) = 0 \quad (2.50)$$

En 3D:

$$\text{Dans les parties chauffées:} \quad \theta(X, 0, Z) = \theta(0, Y, Z) = \theta(L, Y, Z) = 1 \quad (2.51)$$

$$\text{Dans les parties froides:} \quad \theta(X, 0, Z) = \theta(0, Y, Z) = \theta(L, Y, Z) = 0 \quad (2.52)$$

Les conditions de Neumann adimensionnées pour la paroi adiabatique supérieure :

$$\text{En 2D :} \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \right|_{Y=L} \quad (2.53)$$

$$\text{En 3D :} \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \right|_{Y=L} \quad (2.54)$$

2.3.4 Transfert de chaleur et de masse

Le long de la partie chauffée des parois latérales, le taux de transfert de chaleur local calculé est obtenu à partir du bilan thermique qui fournit une formulation du nombre de Nusselt local comme suit :

$$\text{Nu}_h(\mathbf{X}) = \frac{\partial \theta}{\partial Y} \Big|_{Y=0}, \frac{L}{4} \leq X \leq \frac{3L}{4} \quad (2.55)$$

$$\overline{\text{Nu}}_h(\mathbf{Y}) = \frac{1}{L/4} \int_{Y_1}^{Y_2} \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{X=0, X=L} dY, \text{ (le long de la partie chauffée)} \quad (2.56)$$

Le nombre moyen de Nusselt Nu_h sur les parties chauffées est calculé par :

$$\overline{\text{Nu}}_h(\mathbf{X}) = \frac{1}{L/2} \int_{L/4}^{3L/4} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \Big|_{Y=0} dX \quad (2.57)$$

$$\overline{\text{Nu}}_h(\mathbf{Y}) = \frac{1}{L/4} \int_{Y_1}^{Y_2} -\frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{X=0, X=L} dY, \text{ (le long de la partie chauffée)} \quad (2.58)$$

2.4 Conclusion

Le présent chapitre porte sur la modélisation mathématique des équations qui régissent le phénomène de la convection naturelle à l'intérieur d'une cavité bidimensionnelle en 1^{er} configuration puis en 3D. Ce phénomène est régi par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. L'écoulement convectif est contrôlé par des paramètres gouvernants tels que le nombre de Rayleigh et de Prandtl, qui sont déduits à partir de l'adimensionnalisation des équations gouvernantes. Les conditions aux limites choisies sont basées sur quatre paramètres qui sont la température, les composants de la vitesse. Ces trois paramètres sont liés par les équations gouvernantes. Nous avons aussi exprimé les nombres de Nusselt local et moyenne, afin de caractériser les transferts de chaleur.

Chapitre 3

FORMULATION NUMERIQUE

3.1 Introduction

Les phénomènes physiques résultant des modes de transfert de chaleur sont de nature complexe en raison du caractère fortement non linéaire des problèmes rencontrés. Pour traiter ce genre de problèmes, plusieurs voies et approches (expérimentales, analytiques et numériques) sont possibles. La voie expérimentale demeure de loin la plus coûteuse en temps et en coût. De plus, les solutions analytiques des équations ne sont possibles que pour des cas particuliers. C'est pour quoi on a souvent recours à des approches numériques basées sur les différences finies, les éléments finis, les volumes finis, les méthodes spectrales ...etc.

En raison de sa fiabilité, quant au phénomène de convection, la méthode des volumes finis, décrite par **Patankar [16]**, est adoptée afin de discrétiser les équations générales de conservation pour les deux cas bidimensionnelle et tridimensionnelle, tout en utilisant le schéma de la loi de puissance (Power Law) pour le deuxième cas et pour le cas bidimensionnel le schéma des différences centrées est utilisé pour discrétiser les dérivées des différents termes. Cette méthode consiste à diviser le domaine d'étude en un certain nombre de volumes de contrôle, sur lesquels notre système d'équations est intégré. Dans chaque volume, on considère un point situé en son centre. La variable dépendante considérée est calculée en ces points sachant que les grandeurs scalaires (pression et température) sont calculées aux centres des volumes de contrôle, alors que les composantes de la vitesse sont calculées sur les faces de ces volumes. Ceci est réalisé sur des grilles décalées où les projections des équations de quantité de mouvement dans les trois directions sont intégrées sur des volumes de contrôle décalés par rapport aux volumes de contrôle typiques (scalaire). Afin de résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles établies dans le chapitre précédent, nous allons procéder à leurs discrétisations dans le but d'obtenir un système d'équations algébriques dont la résolution nous permet de déterminer les champs de toutes les variables du problème considéré. Les flux convectifs et diffusifs sont évalués à l'aide du schéma de la loi de puissance « power-law ». Le couplage vitesse-pression est

traité par l'algorithme SIMPLE pour le cas bidimensionnel et SIMPLER pour le cas tridimensionnel (Patankar [16]).

Le domaine physique est divisé selon les directions x , y et z en une série de volume élémentaires finis appelés volume de contrôle ($\Delta v = \Delta x \Delta y \Delta z$). Le centre d'un volume de contrôle typique est un point P , et limité par six faces latérales : les faces **est** et **ouest** dans la direction horizontale X dont leurs centres sont e et w , **nord** et **sud** dans la direction verticale Y dont leurs centres sont n et s et frontale et dorsale « **top** and **bottom** » dans la direction frontale Z dont leurs centres sont t et b . Chaque volume fini sera directement entouré de six autres volumes finis, dans la direction horizontale deux volumes adjacents aux faces est et ouest et contenant en leurs centres les nœuds E et W , dans la direction verticale deux autres volumes adjacents aux faces nord et sud contenant en leurs centres les nœuds N et S , et en fin dans la direction frontale les deux volumes adjacents aux faces frontale et dorsale contenant en leurs centres les nœuds T et B .

Les variables scalaires (pression, température,...etc.) sont stockées aux points centrés dans les volumes finis, alors que les variables vectorielles telles que les composantes de vitesse sont stockées aux centres des faces latérales des volumes finis. Les équations de continuité et d'énergie sont discrétisées dans un volume fini typique (Figure 3.1). Tandis que les équations de quantité de mouvement sont intégrées dans de volumes finis décalés.

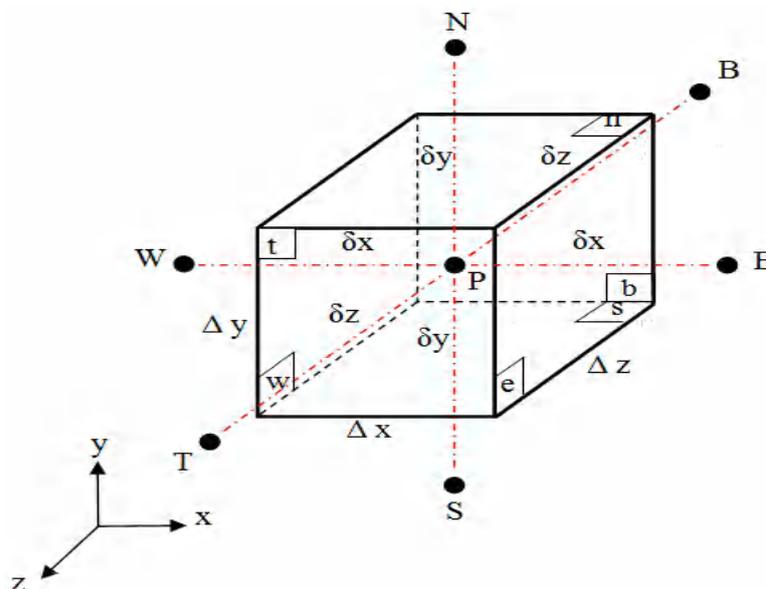


Figure 3.1 : Volume de contrôle entouré par les nœuds voisins

La composante de vitesse horizontale est décalée vers la droite, la composante de vitesse verticale est décalée vers le haut et la composante de vitesse frontale est décalée vers le front (Figure 3.2). Un schéma du maillage décalé pour chaque plan est présenté aux figures 3.3,

3.4 et 3.5. Ce maillage décalé pour les vitesses est nécessaire pour éviter les interpolations des vitesses dans l'équation de continuité et les termes de pression dans les équations de quantité de mouvement.

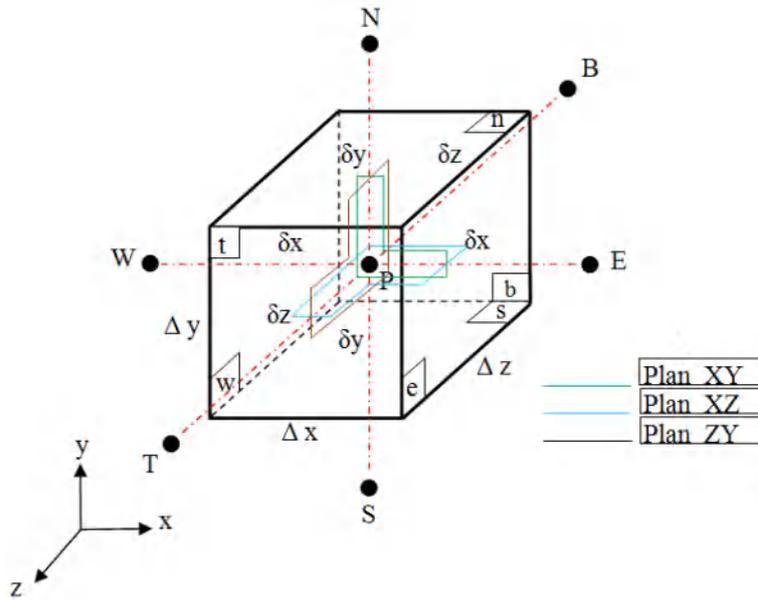


Figure 3.2 : Maillage décalé suivant les trois plans

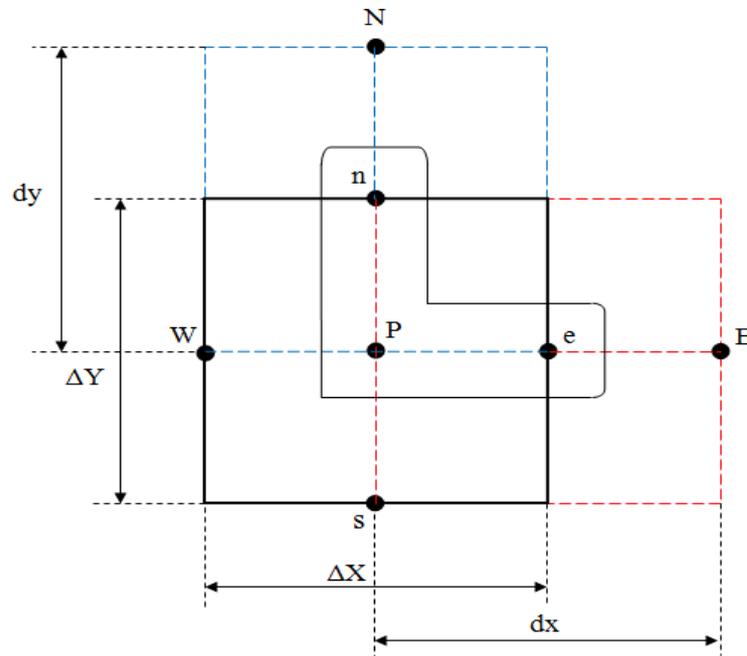


Figure 3.3 : Maillage décalé sur le plan XY

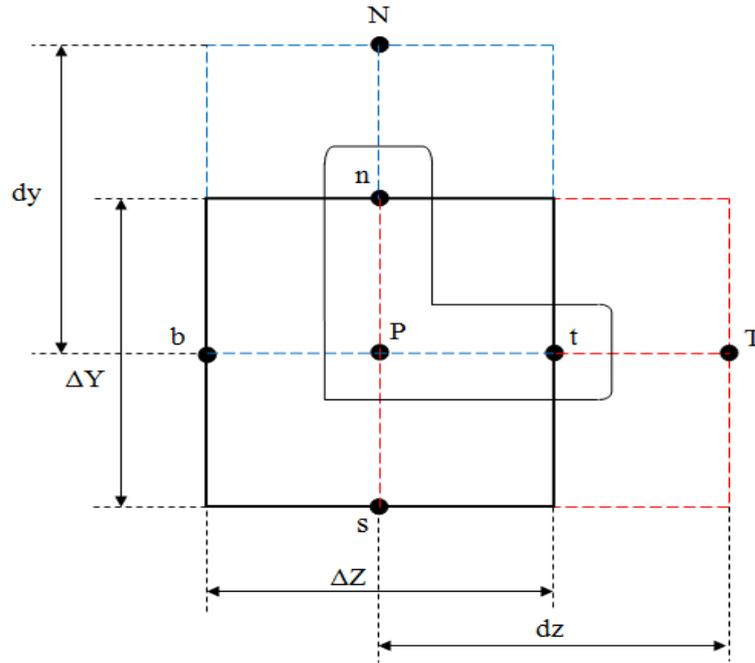


Figure 3.4 : Maillage décalé sur le plan YZ

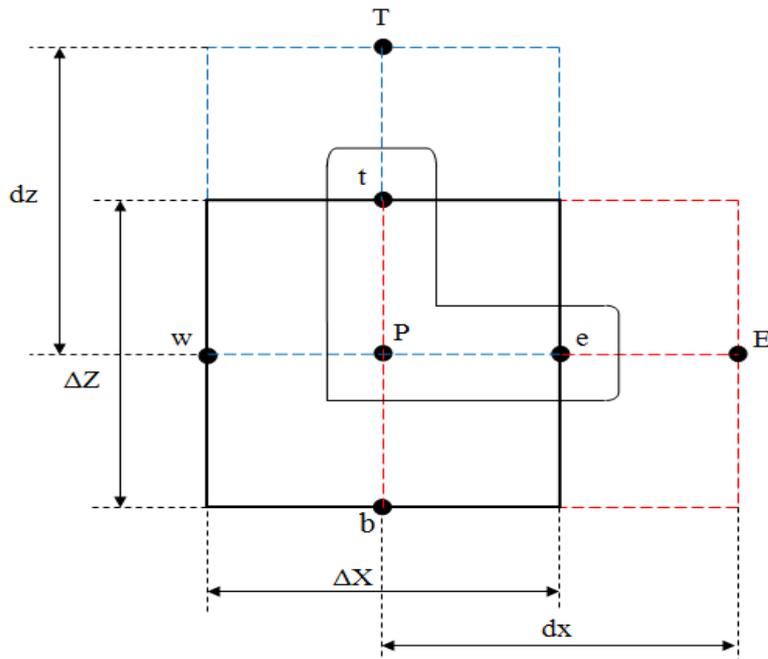


Figure 3.5 : Maillage décalé sur le plan XZ

3.2 Discrétisation de l'équation générale de transport

Pour éviter la répétition et puisque le cas tridimensionnel est plus général ont présente dans cette partie la discrétisation des équations de transport tridimensionnel. Chacune des équations

de conservation du modèle mathématique peut s'écrire sous la forme générale (dite équation de transport) suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(v \phi) + \frac{\partial}{\partial z}(w \phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S_{\phi} \quad (3.1)$$

Où : ϕ est la variable dépendante (U, V, W, θ, \dots)

$\frac{\partial \phi}{\partial t}$: représente le terme transitoire

$\frac{\partial}{\partial x}(u \phi), \frac{\partial}{\partial y}(v \phi)$ et $\frac{\partial}{\partial z}(w \phi)$: représente les termes convectifs.

$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$ et $\frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$: représente les termes diffusifs.

S_{ϕ} : représente le terme source.

L'écriture des équations sous cette forme permet une grande flexibilité de programmation, car elle conduit à la résolution d'une forme unique et généralisée d'équation. La méthode des volumes finis développé par PATANKAR [16] est utilisée pour exprimer les intégrales sur les volumes finis. Cette méthode s'appuie sur une discrétisation du domaine de calcul en différents nœuds, chacun d'entre eux étant entouré d'un volume élémentaire sur lequel on recherche la valeur moyenne de la variable.

L'intégration de l'équation générale de transport sur un volume de contrôle et en fonction du temps s'écrit :

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \iiint_{VC} \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(u \phi) \\ + \frac{\partial}{\partial y}(v \phi) \\ + \frac{\partial}{\partial z}(w \phi) \end{array} \right] d\tau dV = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \iiint_{VC} \left[\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \end{array} \right] d\tau dV + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \iiint_{VC} S_{\phi} d\tau dV \quad (3.2)$$

Nous utilisons le théorème de Gauss (appelé aussi le théorème de la divergence ou théorème d'Ostrogradski) qui permet de transformer une intégrale de volume en une intégrale de surface.

L'équation (3.2) s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{w} \int_{s} \int_{b} \frac{\partial\phi}{\partial\tau} dx dy dz d\tau + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{w} \int_{s} \int_{b} \frac{\partial(u\phi)}{\partial x} dx dy dz d\tau + \\
& \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{w} \int_{s} \int_{b} \frac{\partial(v\phi)}{\partial y} dx dy dz d\tau + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{w} \int_{s} \int_{b} \frac{\partial(w\phi)}{\partial z} dx dy dz d\tau = \\
& \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{w} \int_{s} \int_{b} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) dx dy dz d\tau + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{w} \int_{s} \int_{b} \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) dx dy dz d\tau + \\
& \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{w} \int_{s} \int_{b} \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) dx dy dz d\tau + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{w} \int_{s} \int_{b} S_{\phi} dx dy dz d\tau
\end{aligned} \tag{3.3}$$

L'intégration du terme transitoire de l'équation de transport (3.3) donne :

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{w} \int_{s} \int_{b} \frac{\partial\phi}{\partial\tau} dx dy dz d\tau = (\phi_p^{n+1} - \phi_p^n) \Delta X \Delta Y \Delta Z \tag{3.4}$$

L'intégration des termes convectifs de l'équation de transport (3.3) est approximée par :

$$\begin{aligned}
& \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{w} \int_{s} \int_{b} \left(\frac{\partial u\phi}{\partial x} \right) dx dy dz d\tau = (u_e \phi_e - u_w \phi_w) \Delta Y \Delta Z \Delta\tau \\
& \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{w} \int_{s} \int_{b} \left(\frac{\partial v\phi}{\partial y} \right) dx dy dz d\tau = (v_n \phi_n - v_s \phi_s) \Delta X \Delta Z \Delta\tau \\
& \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{w} \int_{s} \int_{b} \left(\frac{\partial w\phi}{\partial z} \right) dx dy dz d\tau = (w_t \phi_t - w_b \phi_b) \Delta X \Delta Y \Delta\tau
\end{aligned} \tag{3.5}$$

L'intégration des termes diffusifs de l'équation (3.3) conduit à :

$$\begin{aligned}
& \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{w} \int_{s} \int_{b} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) dx dy dz d\tau = \left[\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_w \right] \Delta Y \Delta Z \Delta\tau \\
& \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{w} \int_{s} \int_{b} \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) dx dy dz d\tau = \left[\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)_s \right] \Delta X \Delta Z \Delta\tau \\
& \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_{w} \int_{s} \int_{b} \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) dx dy dz d\tau = \left[\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_t - \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_b \right] \Delta X \Delta Y \Delta\tau
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Où les coordonnées des nœuds e, w, n, s, t et b ne sont pas les mêmes pour les variables scalaires et pour les composantes de vitesse si les grilles sont décalées.

Le terme source de l'équation (3.3) étant un scalaire défini au centre du volume de contrôle, on peut l'écrire :

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w \int_s \int_b S_{\phi} dx dy dz d\tau = S_{\phi} \Delta X \Delta Y \Delta Z \Delta\tau \quad (3.7)$$

Généralement le terme source S_{ϕ} peut aussi dépendre de la fonction ϕ elle-même.

Dans une telle situation nous linéarisons la source comme :

$$S_{\phi} = S_c + S_p \phi_p \quad (3.8)$$

Où S_p est le coefficient de ϕ_p et S_c est la partie constante de S_{ϕ} qui ne dépend pas de ϕ_p .

Le tableau (3.1) définit les différentes variables du problème (ϕ), leurs coefficients de diffusion Γ_{ϕ} ainsi que leurs termes source S_{ϕ} correspondant aux différentes équations de conservation. Ces équations non linéaires sont fortement couplées et seront résolues numériquement.

Tableau 3.1 : Identification des termes des équations de transport sous forme adimensionnelle

Equation	Variable de transport	Coefficient de diffusion	Terme source
	ϕ	Γ	S_{ϕ}
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement Suivant X	U	Pr	$-\frac{\partial P}{\partial X}$
Quantité de mouvement Suivant Y	V	Pr	$-\frac{\partial P}{\partial Y} + Pr Ra \theta$
Quantité de mouvement Suivant Z	W	Pr	$-\frac{\partial P}{\partial Z}$
Energie	θ	1	0

Les densités de flux $\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e, \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w, \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_n, \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_s, \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_t$ et $\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_b$ traversant les faces du

volume de contrôle sont évaluées par une interpolation entre les nœuds voisins du type :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e &= \frac{\phi_E - \phi_P}{dX_e} & \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_n &= \frac{\phi_N - \phi_P}{dY_n} & \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_t &= \frac{\phi_T - \phi_P}{dZ_t} \\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w &= \frac{\phi_P - \phi_W}{dX_w} & \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_s &= \frac{\phi_P - \phi_S}{dY_s} & \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_b &= \frac{\phi_P - \phi_B}{dZ_b} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Où l'indice E correspond au point « est » (ou à gauche de P) du maillage sur lequel est définie la variable ϕ (le point e étant situé sur l'interface du volume de contrôle, entre E et P), dx représente donc la distance entre E et P, alors que ΔX est la distance entre e et w, et même chose pour les deux autres directions

L'évaluation des termes diffusifs conduit à :

$$\begin{aligned} \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_E - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] \Delta Y \Delta Z \Delta \tau &= \left[\Gamma_E \frac{\phi_E - \phi_P}{dX_E} - \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_w}{dX_w} \right] \Delta Y \Delta Z \Delta \tau \\ \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_N - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] \Delta X \Delta Z \Delta \tau &= \left[\Gamma_N \frac{\phi_N - \phi_P}{dY_N} - \Gamma_s \frac{\phi_P - \phi_s}{dY_s} \right] \Delta X \Delta Z \Delta \tau \quad (3.10) \\ \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_T - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_B \right] \Delta X \Delta Y \Delta \tau &= \left[\Gamma_T \frac{\phi_T - \phi_P}{dZ_T} - \Gamma_B \frac{\phi_P - \phi_B}{dZ_B} \right] \Delta X \Delta Y \Delta \tau \end{aligned}$$

L'équation de transport après discrétisation, divisé par $\Delta \tau$ donne :

$$\frac{(\phi_p^{n+1} - \phi_p^n)}{\Delta \tau} \Delta X \Delta Y \Delta Z + \left(\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & \left(U_e \phi_e \right) \Delta Y \Delta Z \\ & \left(-U_w \phi_w \right) \end{aligned} \right] \\ & + \left[\begin{aligned} & \left(V_n \phi_n \right) \Delta X \Delta Z \\ & \left(-V_s \phi_s \right) \end{aligned} \right] \\ & + \left[\begin{aligned} & \left(W_T \phi_T \right) \Delta X \Delta Y \\ & \left(-W_B \phi_B \right) \end{aligned} \right] \end{aligned} \right) = \left(\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & \left[\Gamma_e \frac{\phi_e - \phi_p}{\Delta X_e} \right] \Delta Y \Delta Z \\ & \left[-\Gamma_w \frac{\phi_p - \phi_w}{\Delta X_w} \right] \end{aligned} \right] \\ & + \left[\begin{aligned} & \left[\Gamma_n \frac{\phi_n - \phi_p}{\Delta Y_n} \right] \Delta X \Delta Z \\ & \left[-\Gamma_s \frac{\phi_p - \phi_s}{\Delta Y_s} \right] \end{aligned} \right] \\ & + \left[\begin{aligned} & \left[\Gamma_T \frac{\phi_T - \phi_p}{\Delta Z_T} \right] \Delta X \Delta Y \\ & \left[-\Gamma_B \frac{\phi_p - \phi_B}{\Delta Z_B} \right] \end{aligned} \right] \end{aligned} \right) + S_\phi \Delta X \Delta Y \Delta Z \quad (3.11)$$

Pour évaluer les vitesses des termes convectifs $(U)_e, (U)_w, (V)_n, (V)_s, (W)_t$ et $(W)_b$, nous choisissons une interpolation entre les nœuds voisins d'un maillage uniforme, nous obtenons :

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{U_E + U_P}{2} & V_n &= \frac{V_N + V_P}{2} & W_t &= \frac{U_T + U_P}{2} \\ U_w &= \frac{U_P + U_W}{2} & V_s &= \frac{U_P + U_S}{2} & W_b &= \frac{U_P + U_B}{2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Finalement, nous obtenons une équation discrétisée, sous la forme générale suivante, pour les différentes variables ϕ .

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_T \phi_T + a_B \phi_B + b \quad (3.13)$$

Les coefficients a_E, a_W, a_N, a_S, a_T et a_B , sont définis en fonction du schéma numérique utilisé. b est un groupement qui contient le terme source et le terme $a_P^n \phi_P^n$ (calculé au pas de temps précédent).

$$b = S_c + a_P^n \phi_P^n \quad (3.14)$$

3.3 Schémas numériques

Le problème majeur est d'approximer les valeurs des termes $\phi_E, \phi_W, \phi_N, \phi_S, \phi_T$ et ϕ_B aux interfaces du volume de contrôle par rapport aux nœuds du maillage. Différents schémas ont été introduits dans la littérature: Différences centrées, Décentré Amont, Hybride, Exponentiel, Loi de puissance...etc.

La différence entre ces schémas est la façon avec laquelle, on prend en compte les termes de convection et de diffusion. Dans notre étude, nous avons utilisé le schéma centré pour le cas bidimensionnel car elle préserve l'aspect physique pour les écoulements instables et la loi de puissance (Power-Law) pour le cas tridimensionnel car elle est la plus proche à la solution exacte.

3.3.1 Schéma centré

Le schéma centré est classiquement utilisé, l'interpolation consiste en une simple moyenne arithmétique pour un maillage uniforme:

$$\begin{aligned} \phi_e &= \frac{\phi_E + \phi_P}{2} \\ \phi_w &= \frac{\phi_P + \phi_W}{2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.3.2 Schéma loi de puissance

Le schéma de la loi de puissance permet de fournir une meilleure stabilité de la solution numérique et réalise une meilleure approximation de la courbe exacte (exponentielle) et de plus

ne coûte pas cher comparé à l'exponentiel et il est recommandé pour les problèmes de convection-diffusion.

Les coefficients $a_E, a_W, a_N, a_S, a_T, a_B$ et a_p de l'équation (3.13) pour le schéma de la loi de puissance sont définis par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} a_E &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) & a_N &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) & a_T &= D_t A(|P_t|) + \max(-F_t, 0) \\ a_W &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) & a_S &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) & a_B &= D_b A(|P_b|) + \max(F_b, 0) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B - S_p \quad (3.17)$$

Où : $A(|P_i|)$ est défini selon le schéma utilisée Patankar [16], pour le schéma de la loi de puissance $A(|P_i|)$ est défini comme suit :

$$A(|P_i|) = \max \left[0, (1, -0.1|P_i|)^5 \right] \quad (i = e, w, n, s, t \text{ et } b) \quad (3.18)$$

$$Pe = \frac{\rho u \delta x}{\Gamma} = \frac{F}{D}$$

$$Pe_e = \frac{F_e}{D_e}, \quad Pe_w = \frac{F_w}{D_w}, \quad Pe_n = \frac{F_n}{D_n}, \quad Pe_s = \frac{F_s}{D_s}, \quad Pe_t = \frac{F_t}{D_t}, \quad Pe_b = \frac{F_b}{D_b} \quad (3.19)$$

Ces coefficients contiennent une combinaison du flux convectif F et diffusif D aux interfaces des volumes de contrôle. Les valeurs de F et D pour chaque interface e, w, n, s, t et b du volume de contrôle sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Flux convectifs :} \quad F_e &= U_e \Delta Y \Delta Z & F_n &= V_n \Delta X \Delta Z & F_T &= W_T \Delta X \Delta Y \\ F_w &= U_w \Delta Y \Delta Z & F_s &= V_s \Delta X \Delta Z & F_B &= W_B \Delta X \Delta Y \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \text{Flux diffusifs :} \quad D_e &= \frac{\Gamma_e}{\Delta X_e} \Delta Y \Delta Z & D_n &= \frac{\Gamma_n}{\Delta Y_n} \Delta X \Delta Z & D_T &= \frac{\Gamma_T}{\Delta Z_T} \Delta X \Delta Y \\ D_w &= \frac{\Gamma_w}{\Delta X_w} \Delta Y \Delta Z & D_s &= \frac{\Gamma_s}{\Delta Y_s} \Delta X \Delta Z & D_B &= \frac{\Gamma_B}{\Delta Z_B} \Delta X \Delta Y \end{aligned} \quad (3.21)$$

Si l'on exprime l'équation (3.13) en fonction du système de coordonnées indicelles (numérotation des nœuds), donc l'équation générale sous forme indicelle s'écrit :

$$\begin{aligned}
& a_E(i+1, j, k) \phi(i, j, k) \\
& + a_W(i, j, k) \phi(i-1, j, k) \\
a_p(i, j, k) \phi(i, j, k) = & + a_N(i, j, k) \phi(i, j+1, k) + b(i, j, k) \\
& + a_S(i, j, k) \phi(i, j-1, k) \\
& + a_T(i, j, k) \phi(i, j, k+1) \\
& + a_B(i, j, k) \phi(i, j, k-1)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie gouvernant l'écoulement du fluide et du transfert de chaleur du problème traité sont exprimées en termes d'équations différentielles tridimensionnelles.

3.4 Discrétisation de l'équation de continuité

L'intégration de l'équation de continuité entre les limites du volume de contrôle typique nous donne :

$$\begin{aligned}
\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w \int_s \int_b \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy dz d\tau &= (u_e - u_w) \Delta Y \Delta Z \Delta \tau \\
\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w \int_s \int_b \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy dz d\tau &= (v_n - v_s) \Delta X \Delta Z \Delta \tau \\
\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w \int_s \int_b \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) dx dy dz d\tau &= (w_t - w_b) \Delta X \Delta Y \Delta \tau
\end{aligned} \tag{3.23}$$

L'équation de continuité discrétisée s'écrit sous la forme suivante :

$$(u_e - u_w) \Delta Y \Delta Z + (v_n - v_s) \Delta X \Delta Z + (w_t - w_b) \Delta X \Delta Y = 0 \tag{3.24}$$

3.4.1 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant X

L'application du principe de conservation de la quantité de mouvement nous permet d'obtenir une relation entre les causes qui produisent le mouvement du fluide et ces caractéristiques. La définition de ce principe est la suivante :

Le taux de variation de la quantité de mouvement dans un volume de contrôle est égal à la somme de toutes les forces extérieures appliquées sur ce volume.

Nous remplaçons ϕ , Γ_ϕ et S_ϕ par leurs valeurs correspondants à l'équation de quantité de mouvement suivant la direction X dans l'équation générale du transport, intégrée sur le volume

de contrôle décalé (Figure 3.6 et Figure 3.7). On obtient la forme discrétisée de l'équation de la vitesse U suivante

$$\frac{(u_p^{n+1} - u_p^n)}{\Delta\tau} \Delta X \Delta Y \Delta Z + \left(\begin{array}{l} [(u_e u_e - u_w u_w) \Delta Y \Delta Z] \\ + [(v_n u_n - v_s u_s) \Delta X \Delta Z] \\ + [(w_T u_T - w_B u_B) \Delta X \Delta Y] \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Pr} \left[\frac{u_e - u_p}{\Delta X_e} - \frac{u_p - u_w}{\Delta X_w} \right] \Delta Y \Delta Z \\ + \text{Pr} \left[\frac{u_n - u_p}{\Delta Y_n} - \frac{u_p - u_s}{\Delta Y_s} \right] \Delta X \Delta Z \\ + \text{Pr} \left[\frac{u_T - u_p}{\Delta Z_T} - \frac{u_p - u_B}{\Delta Z_B} \right] \Delta X \Delta Y \\ + [P_w - P_e] \Delta Y \Delta Z \end{array} \right) \quad (3.25)$$

L'équation algébrique obtenue est :

$$\begin{aligned} & a_E(i, j, k) u(i+1, j, k) \\ & + a_W(i, j, k) u(i-1, j, k) \\ a_P(i, j, k) u(i, j, k) = & + a_N(i, j, k) u(i, j+1, k) + b_u(i, j, k) \\ & + a_S(i, j, k) u(i, j-1, k) \\ & + a_T(i, j, k) u(i, j, k+1) \\ & + a_B(i, j, k) u(i, j, k-1) \end{aligned} \quad (3.26)$$

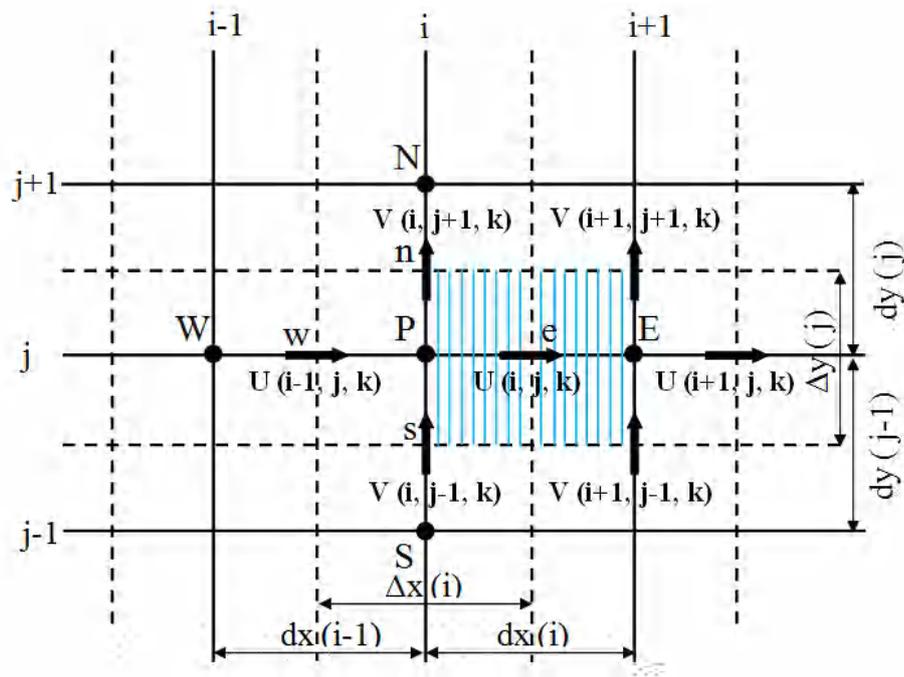


Figure 3.6 : Maillage décalé suivant la direction X :
projection suivant le plan X-Y

$$\begin{aligned}
F_n &= \frac{(V(i, j, k) + V(i+1, j, k))}{2} dx(i) \Delta z(k) \\
F_s &= \frac{(V(i, j-1, k) + V(i+1, j-1, k))}{2} dx(i) \Delta z(k) \\
F_t &= \frac{(W(i, j, k) + W(i+1, j, k))}{2} dx(i) \Delta y(j) \\
F_b &= \frac{(W(i, j, k-1) + W(i+1, j, k-1))}{2} dx(i) \Delta y(j)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Flux diffusifs :

$$\begin{aligned}
D_e &= \text{Pr} \frac{\Delta y(j) \Delta z(k)}{\Delta x(i+1)} \\
D_w &= \text{Pr} \frac{\Delta y(j) \Delta z(k)}{\Delta x(i)} \\
D_n &= \text{Pr} \left[\frac{\Delta x(i+1)}{\Delta y(j) + \Delta y(j+1)} + \frac{\Delta x(i)}{\Delta y(j) + \Delta y(j+1)} \right] \Delta z(k) \\
D_s &= \text{Pr} \left[\frac{\Delta x(i+1)}{\Delta y(j-1) + \Delta y(j)} + \frac{\Delta x(i)}{\Delta y(j-1) + \Delta y(j)} \right] \Delta z(k) \\
D_t &= \text{Pr} \left[\frac{\Delta x(i+1)}{\Delta z(k) + \Delta z(k+1)} + \frac{\Delta x(i)}{\Delta z(k) + \Delta z(k+1)} \right] \Delta y(j) \\
D_b &= \text{Pr} \left[\frac{\Delta x(i+1)}{\Delta z(k-1) + \Delta z(k)} + \frac{\Delta x(i)}{\Delta z(k-1) + \Delta z(k)} \right] \Delta y(j)
\end{aligned}$$

Après le calcul du champ de vitesse U le terme b_u de l'équation de quantité de mouvement suivant la direction X est décrit (équation (3.29)).

$$b_u(i, j, k) = S_c(i, j, k) + \frac{dX(i) \Delta Y(j) \Delta Z(k) U(i, j, k)}{\Delta \tau} \tag{3.29}$$

3.4.2 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant Y

Nous remplaçons ϕ , Γ_ϕ et S_ϕ par leurs valeurs correspondants à l'équation de quantité de mouvement suivant la direction verticale Y dans l'équation générale du transport, on obtient l'équation de quantité de mouvement pour la composante de la vitesse V suivante :

$$\frac{(v_p^{n+1} - v_p^n)}{\Delta\tau} \Delta X \Delta Y \Delta Z + \left(\begin{array}{l} [(u_e v_e - u_w v_w) \Delta Y \Delta Z] \\ + [(v_n v_n - v_s v_s) \Delta X \Delta Z] \\ + [(w_T v_T - w_B v_B) \Delta X \Delta Y] \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Pr} \left[\frac{v_e - v_p}{\Delta X_e} - \frac{v_p - v_w}{\Delta X_w} \right] \Delta Y \Delta Z \\ + \text{Pr} \left[\frac{v_n - v_p}{\Delta Y_n} - \frac{v_p - v_s}{\Delta Y_s} \right] \Delta X \Delta Z \\ + \text{Pr} \left[\frac{v_T - v_p}{\Delta Z_T} - \frac{v_p - v_B}{\Delta Z_B} \right] \Delta X \Delta Y \\ + [P_s - P_n] \Delta X \Delta Z + \text{Pr Ra } \theta \end{array} \right) \quad (3.30)$$

Nous intégrons l'équation (3.23) sur le volume de contrôle décalé suivant la direction Y (Figure 3.8 et Figure 3.9).

Nous suivons les mêmes étapes que nous avons suivies pour la variable ϕ ; nous obtenons l'équation discrétisée algébrique sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & a_E(i, j, k) v(i+1, j, k) \\ & + a_W(i, j, k) v(i-1, j, k) \\ a_p(i, j, k) v(i, j, k) = & + a_N(i, j, k) v(i, j+1, k) + b_v(i, j, k) \quad (3.31) \\ & + a_S(i, j, k) v(i, j-1, k) \\ & + a_T(i, j, k) v(i, j, k+1) \\ & + a_B(i, j, k) v(i, j, k-1) \end{aligned}$$

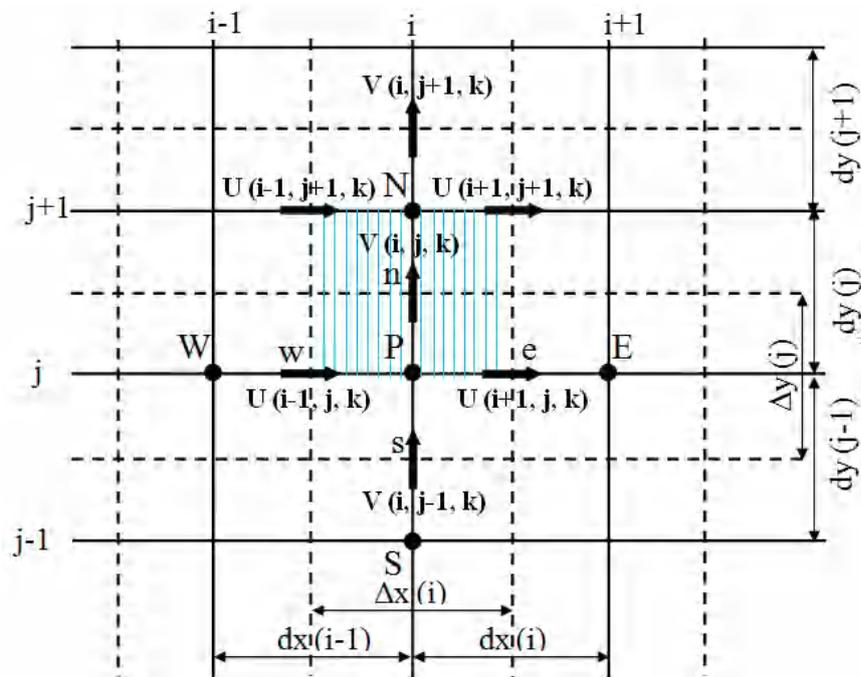


Figure 3.8 : Maillage décalé suivant la direction Y :
projection suivant le plan (Y-X)

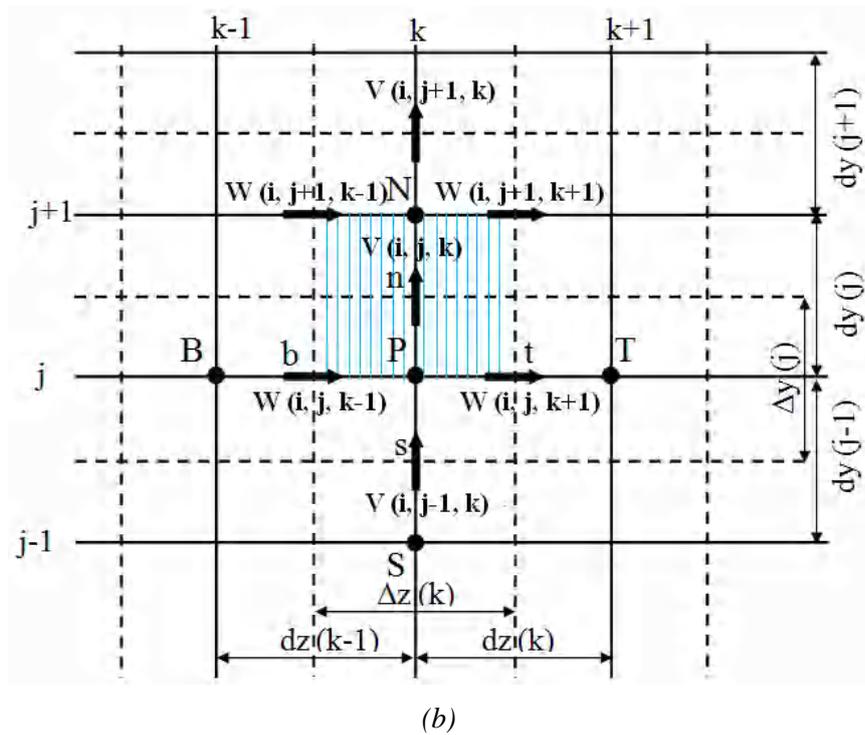


Figure 3.9 : Maillage décalé suivant la direction Y :
projection suivant le plan $(Y-Z)$

Où les coefficients de l'équation 3.31 de discrétisation et le terme source, sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 a_E(i, j, k) &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\
 a_W(i, j, k) &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\
 a_N(i, j, k) &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\
 a_S(i, j, k) &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \\
 a_T(i, j, k) &= D_t A(|P_t|) + \max(-F_t, 0) \\
 a_B(i, j, k) &= D_b A(|P_b|) + \max(F_b, 0)
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
 a_P(i, j, k) &= a_N(i, j, k) + a_S(i, j, k) \\
 &+ a_E(i, j, k) + a_W(i, j, k) + \frac{\Delta x(i) dy(j) \Delta z(k)}{\Delta \tau} \\
 &+ a_T(i, j, k) + a_B(i, j, k)
 \end{aligned}$$

Les coefficients de l'équation (3.31) contiennent une combinaison du flux convectif F et diffusif D aux interfaces de volumes de contrôle.

Flux convectifs :

$$\begin{aligned}
F_e &= \frac{(u(i, j, k) + u(i, j+1, k))}{2} dy(j) \Delta z(k) \\
F_w &= \frac{(u(i-1, j, k) + u(i-1, j+1, k))}{2} dy(j) \Delta z(k) \\
F_n &= \frac{(v(i, j+1, k) + v(i, j, k))}{2} \Delta x(i) \Delta z(k) \\
F_s &= \frac{(v(i, j, k) + v(i, j-1, k))}{2} \Delta x(i) \Delta z(k) \\
F_t &= \frac{(w(i, j, k) + w(i, j+1, k))}{2} \Delta x(i) dy(j) \\
F_b &= \frac{(w(i, j, k-1) + w(i, j+1, k-1))}{2} \Delta x(i) dy(j)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Flux diffusifs :

$$\begin{aligned}
D_e &= \text{Pr} \left[\frac{\Delta y(j+1)}{\Delta x(i) + \Delta x(i+1)} + \frac{\Delta y(j)}{\Delta x(i) + \Delta x(i+1)} \right] \Delta z(k) \\
D_w &= \text{Pr} \left[\frac{\Delta y(j+1)}{\Delta x(i-1) + \Delta x(i)} + \frac{\Delta y(j)}{\Delta x(i-1) + \Delta x(i)} \right] \Delta z(k) \\
D_n &= \text{Pr} \left[\frac{\Delta x(i) \Delta z(k)}{\Delta y(j+1)} \right] \\
D_s &= \text{Pr} \left[\frac{\Delta x(i) \Delta z(k)}{\Delta y(j)} \right] \\
D_t &= \text{Pr} \left[\frac{\Delta y(j+1)}{\Delta z(k) + \Delta z(k+1)} + \frac{\Delta y(j)}{\Delta z(k) + \Delta z(k+1)} \right] \Delta x(i) \\
D_b &= \text{Pr} \left[\frac{\Delta y(j+1)}{\Delta z(k-1) + \Delta z(k)} + \frac{\Delta y(j)}{\Delta z(k-1) + \Delta z(k)} \right] \Delta x(i)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Après le calcul du champ de vitesse V le terme b_v de l'équation de quantité de mouvement suivant la direction Y est décrit (équation (3.35)).

$$b_v(i, j, k) = S_c^\tau(i, j, k) + \frac{\Delta X(i) dY(j) \Delta Z(k) V(i, j, k)}{\Delta \tau} + \frac{1}{2} \text{Pr} Ra \left[\begin{array}{c} \theta(i, j, k) \\ + \theta(i, j+1, k) \end{array} \right] \Delta X(i) dY(j) \Delta Z(k) \tag{3.35}$$

3.4.3 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant Z

Nous remplaçons ϕ , Γ_ϕ et S_ϕ par leurs valeurs correspondants à l'équation de quantité de mouvement suivant la direction verticale Z dans l'équation générale du transport, on obtient l'équation de quantité de mouvement pour la composante de la vitesse W suivante :

$$\frac{(W_p^{n+1} - W_p^n)}{\Delta\tau} \Delta X \Delta Y \Delta Z + \left(\begin{array}{l} [(u_e w_e - u_w w_w) \Delta Y \Delta Z] \\ + [(v_n w_n - v_s w_s) \Delta X \Delta Z] \\ + [(w_T w_T - w_B w_B) \Delta X \Delta Y] \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Pr} \left[\frac{W_e - W_p}{\Delta X_e} - \frac{W_p - W_w}{\Delta X_w} \right] \Delta Y \Delta Z \\ + \text{Pr} \left[\frac{W_n - W_p}{\Delta Y_n} - \frac{W_p - W_s}{\Delta Y_s} \right] \Delta X \Delta Z \\ + \text{Pr} \left[\frac{W_T - W_p}{\Delta Z_T} - \frac{W_p - W_B}{\Delta Z_B} \right] \Delta X \Delta Y \\ + [P_b - P_t] \Delta X \Delta Y \end{array} \right) \quad (3.36)$$

Nous intégrons l'équation (3.30) sur le volume de contrôle décalé suivant la direction Z (Figure 3.10 et Figure 3.11).

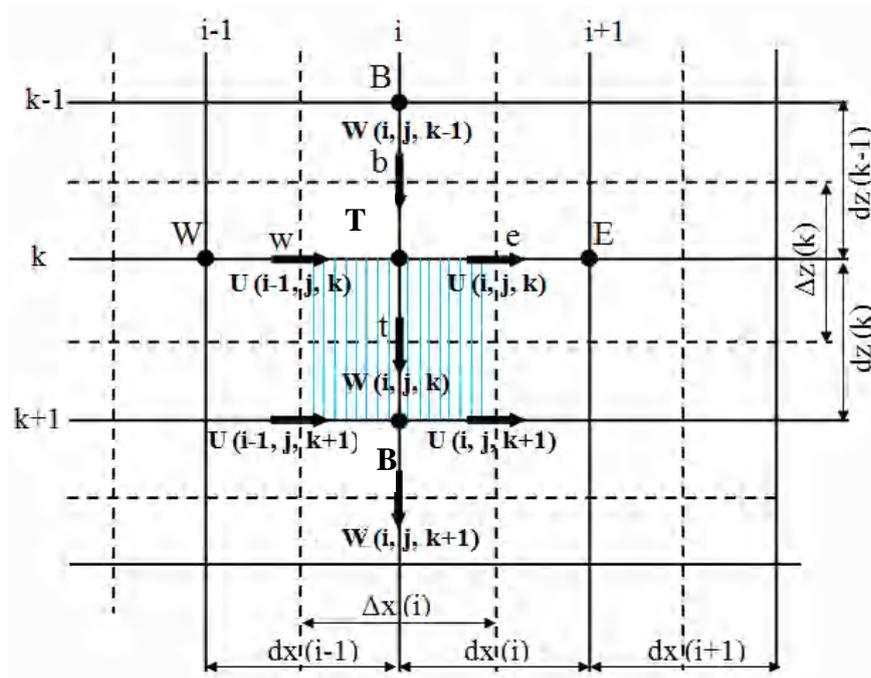


Figure 3.10 : Maillage décalé suivant la direction Z :
projection suivant le plan (Z-X)

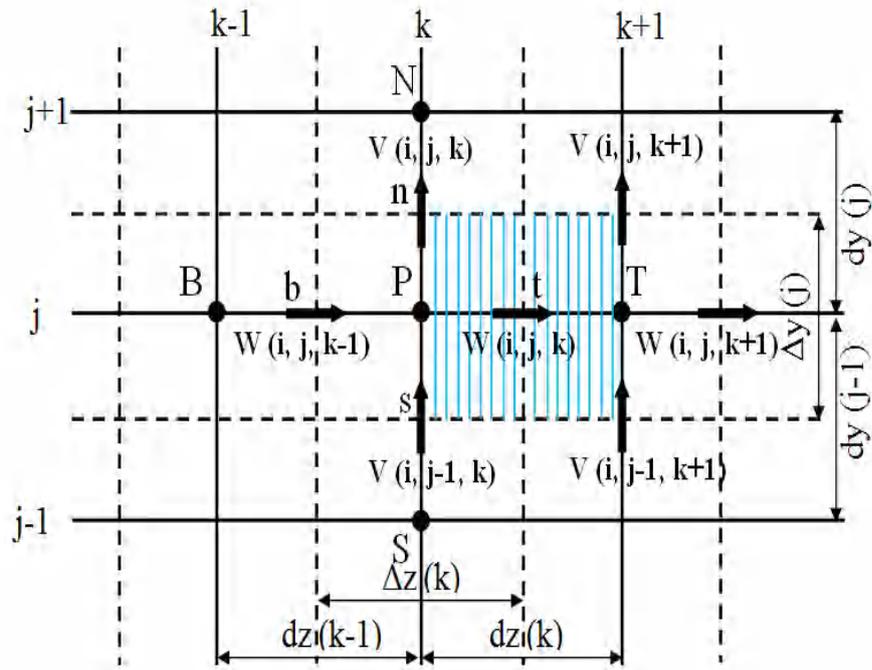


Figure 3.11 : Maillage décalé suivant la direction Z :
projection suivant le plan $(Z-Y)$

Nous suivons les mêmes étapes que nous avons suivies pour la variable ϕ ; nous obtenons l'équation discrétisée algébrique sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 a_E(i, j, k)W(i+1, j, k) &+ a_W(i, j, k)W(i-1, j, k) \\
 + a_N(i, j, k)W(i, j+1, k) &+ a_S(i, j, k)W(i, j-1, k) + b_w(i, j, k) \\
 a_P(i, j, k)W(i, j, k) = &+ a_T(i, j, k)W(i, j, k+1) \\
 + a_B(i, j, k)W(i, j, k-1) &
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Où les coefficients de l'équation de discrétisation et le terme source, sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 a_E(i, j, k) &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\
 a_W(i, j, k) &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\
 a_N(i, j, k) &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\
 a_S(i, j, k) &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \\
 a_T(i, j, k) &= D_t A(|P_t|) + \max(-F_t, 0)
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
a_b(i, j, k) &= D_b A(|P_b|) + \max(F_b, 0) \\
a_p(i, j, k) &= a_N(i, j, k) + a_S(i, j, k) \\
&+ a_E(i, j, k) + a_W(i, j, k) + \frac{\Delta x(i) \Delta y(j) dz(k)}{\Delta \tau} \\
&+ a_T(i, j, k) + a_B(i, j, k)
\end{aligned}$$

Les coefficients de l'équation (3.31) contiennent une combinaison du flux convectif F_e et diffusif D aux interfaces de volumes de contrôle.

Flux convectifs :

$$\begin{aligned}
F_e &= \frac{(U(i, j, k) + U(i, j, k+1))}{2} \Delta y(j) dz(k) \\
F_w &= \frac{(U(i-1, j, k) + U(i-1, j, k+1))}{2} \Delta y(j) dz(k) \\
F_n &= \frac{(V(i, j, k) + V(i, j, k+1))}{2} \Delta x(i) dz(k) \\
F_s &= \frac{(V(i, j-1, k) + V(i, j-1, k+1))}{2} \Delta x(i) dz(k) \\
F_t &= \frac{(W(i, j, k) + W(i, j, k+1))}{2} \Delta x(i) \Delta y(j) \\
F_b &= \frac{(W(i, j, k) + W(i, j, k-1))}{2} \Delta x(i) \Delta y(j)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Flux diffusifs :

$$\begin{aligned}
D_e &= \text{Pr} \left[\frac{\Delta z(k+1)}{\Delta x(i) + \Delta x(i+1)} + \frac{\Delta z(k)}{\Delta x(i) + \Delta x(i+1)} \right] \Delta y(j) \\
D_w &= \text{Pr} \left[\frac{\Delta z(k+1)}{\Delta x(i-1) + \Delta x(i)} + \frac{\Delta z(k)}{\Delta x(i-1) + \Delta x(i)} \right] \Delta y(j) \\
D_n &= \text{Pr} \left[\frac{\Delta z(k+1)}{\Delta y(j) + \Delta y(j+1)} + \frac{\Delta z(k)}{\Delta y(j) + \Delta y(j+1)} \right] \Delta x(i) \\
D_s &= \text{Pr} \left[\frac{\Delta z(k+1)}{\Delta y(j-1) + \Delta y(j)} + \frac{\Delta z(k)}{\Delta y(j-1) + \Delta y(j)} \right] \Delta x(i) \\
D_T &= \text{Pr} \left[\frac{\Delta x(i) \Delta y(j)}{\Delta z(k+1)} \right] \quad D_B = \text{Pr} \left[\frac{\Delta x(i) \Delta y(j)}{\Delta z(k)} \right]
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Après le calcul du champ de vitesse W le terme b_w de l'équation de quantité de mouvement suivant la direction Z est décrit (équation (3.41)).

$$b_w(i, j, k) = S_c(i, j, k) + \frac{\Delta X(i)\Delta Y(j)dZ(k)W(i, j, k)}{\Delta \tau} \quad (3.41)$$

3.5 Discrétisation de l'équation l'énergie

Pour un fluide Newtonien incompressible l'équation de conservation d'énergie est obtenue à partir du premier principe de la thermodynamique.

Nous remplaçons ϕ , Γ_ϕ et S_ϕ par leurs valeurs de l'équation de l'énergie dans l'équation générale du transport, on obtient l'équation de l'énergie :

$$\frac{(\theta_p^{n+1} - \theta_p^n)}{\Delta \tau} \Delta X \Delta Y \Delta Z + \left(\begin{array}{l} [(U_e \theta_e - U_w \theta_w) \Delta Y \Delta Z] \\ + [(V_n \theta_n - V_s \theta_s) \Delta X \Delta Z] \\ + [(W_T \theta_T - W_B \theta_B) \Delta X \Delta Y] \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \left[\frac{\theta_e - \theta_p}{\Delta X_e} - \frac{\theta_p - \theta_w}{\Delta X_w} \right] \Delta Y \Delta Z \\ + \left[\frac{\theta_n - \theta_p}{\Delta Y_n} - \frac{\theta_p - \theta_s}{\Delta Y_s} \right] \Delta X \Delta Z \\ + \left[\frac{\theta_T - \theta_p}{\Delta Z_T} - \frac{\theta_p - \theta_B}{\Delta Z_B} \right] \Delta X \Delta Y \end{array} \right). \quad (3.42)$$

L'intégration de l'équation (3.42) sur le volume de contrôle typique nous donne l'équation discrétisée algébrique sous la forme suivante :

$$a_p(i, j, k) \theta(i, j, k) = \begin{array}{l} a_E(i, j, k) \theta(i+1, j, k) \\ + a_W(i, j, k) \theta(i-1, j, k) \\ + a_N(i, j, k) \theta(i, j+1, k) \\ + a_S(i, j, k) \theta(i, j-1, k) \\ + a_T(i, j, k) \theta(i, j, k+1) \\ + a_B(i, j, k) \theta(i, j, k-1) \end{array} + b_\theta(i, j, k) \quad (3.43)$$

Où les coefficients de l'équation de discrétisation et le terme source, sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{array}{l} a_E(i, j, k) = D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ a_W(i, j, k) = D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\ a_N(i, j, k) = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ a_S(i, j, k) = D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \\ a_T(i, j, k) = D_t A(|P_t|) + \max(-F_t, 0) \\ a_B(i, j, k) = D_b A(|P_b|) + \max(F_b, 0) \end{array} \quad (3.44)$$

$$a_p(i, j, k) = a_N(i, j, k) + a_S(i, j, k) + a_E(i, j, k) + a_W(i, j, k) + a_T(i, j, k) + a_B(i, j, k) + \frac{\Delta x(i) \Delta y(j) \Delta z(k)}{\Delta \tau}$$

Les coefficients de l'équation (3.43) contiennent une combinaison du flux convectif F et diffusif D aux interfaces de volumes de contrôle.

Flux convectifs :

$$\begin{aligned}
 F_e &= U(i, j, k) \Delta y(j) \Delta z(k) \\
 F_w &= U(i-1, j, k) \Delta y(j) \Delta z(k) \\
 F_n &= V(i, j, k) \Delta x(i) \Delta z(k) \\
 F_s &= V(i, j-1, k) \Delta x(i) \Delta z(k) \\
 F_t &= W(i, j, k) \Delta x(i) \Delta y(j) \\
 F_b &= W(i, j, k-1) \Delta x(i) \Delta y(j)
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Flux diffusifs :

$$\begin{aligned}
 D_e &= \left[\frac{2}{\Delta x(i) + \Delta x(i+1)} \right] \Delta z(k) \Delta y(j) \\
 D_w &= \left[\frac{2}{\Delta x(i-1) + \Delta x(i)} \right] \Delta z(k) \Delta y(j) \\
 D_n &= \left[\frac{2}{\Delta y(j) + \Delta y(j+1)} \right] \Delta z(k) \Delta x(i) \\
 D_s &= \left[\frac{2}{\Delta y(j-1) + \Delta y(j)} \right] \Delta z(k) \Delta x(i) \\
 D_T &= \left[\frac{2}{\Delta z(k) + \Delta z(k+1)} \right] \Delta x(i) \Delta y(j) \\
 D_B &= \left[\frac{2}{\Delta z(k) + \Delta z(k-1)} \right] \Delta x(i) \Delta y(j)
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Après le calcul du champ de température θ le terme b_θ de l'équation de l'énergie est décrit (équation (3.47)).

$$b_\theta(i, j, k) = S_c(i, j, k) + \frac{\Delta X(i) \Delta Y(j) \Delta Z(k) \theta(i, j, k)}{\Delta \tau} \tag{3.47}$$

3.5.1 Discrétisation des conditions aux limites

Les équations de discrétisation des conditions aux limites sont écrites selon la forme générale de l'équation de discrétisation pour toutes les variables dépendantes (U, V, W et θ).

Les conditions aux limites de la composante de la vitesse U doit vérifier l'équation (3.22) pour toutes les parois de la cavité.

$$a_p(i, j, k)U(i, j, k) = \begin{pmatrix} a_E(i, j, k)U(i + 1, j, k) + \\ a_W(i, j, k)U(i - 1, j, k) + \\ a_N(i, j, k)U(i, j + 1, k) + \\ a_S(i, j, k)U(i, j - 1, k) + \\ a_T(i, j, k)U(i, j, k + 1) + \\ a_B(i, j, k)U(i, j, k - 1) + \\ b_U(i, j, k) \end{pmatrix}$$

La condition de non glissement est adoptée pour cette composante sur toutes les parois.

$$1. U(2, j, k) = \begin{pmatrix} 0. U(3, j, k) + \\ 0. U(1, j, k) + \\ 0. U(2, j + 1, k) + \\ 0. U(2, j - 1, k) + \\ 0. U(2, j, k + 1) + \\ 0. U(2, j, k - 1) + \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

et

$$1. U(il - 1, j, k) = \begin{pmatrix} 0. U(il, j, k) + \\ 0. U(il - 2, j, k) + \\ 0. U(il - 1, j + 1, k) + \\ 0. U(il - 1, j - 1, k) + \\ 0. U(il - 1, j, k + 1) + \\ 0. U(il - 1, j, k - 1) + \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} a_p(1, j, k) = 1.0, b_u(1, j, k) = 0 \text{ et } a_p(il - 1, j, k) = 1.0, b_u(il - 1, j, k) = 0 \\ a_p(i, 1, k) = 1.0, b_u(i, 1, k) = 0 \text{ et } a_p(i, jl, k) = 1.0, b_u(i, jl, k) = 0 \\ a_p(i, j, 1) = 1.0, b_u(i, j, 1) = 0 \text{ et } a_p(i, j, kl) = 1.0, b_u(i, j, kl) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

Les mêmes procédures sont appliquées pour la composante de la vitesse V elle doit vérifier l'équation (3.27).

$$a_p(i, j, k)V(i, j, k) = \begin{pmatrix} a_E(i, j, k)V(i, +1, j, k) + \\ a_W(i, j, k)V(i - 1, j, k) + \\ a_N(i, j, k)V(i, j + 1, k) + \\ a_S(i, j, k)V(i, j - 1, k) + \\ a_T(i, j, k)V(i, j, k + 1) + \\ a_B(i, j, k)V(i, j, k - 1) + \\ b_V(i, j, k) \end{pmatrix}$$

La condition de non glissement est appliquée pour cette composante sur toutes les parois.

Donc :

$$\left. \begin{aligned} a_p(1, j, k) = 1.0, b_v(1, j, k) = 0 \text{ et } a_p(il, j, k) = 1.0, b_v(il, j, k) = 0 \\ a_p(i, 1, k) = 1.0, b_v(i, 1, k) = 0 \text{ et } a_p(i, jl - 1, k) = 1.0, b_v(i, jl - 1, k) = 0 \\ a_p(i, j, 1) = 1.0, b_v(i, j, 1) = 0 \text{ et } a_p(i, j, kl) = 1.0, b_v(i, j, kl) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

Les conditions aux limites de la composante de la vitesse W doit vérifier l'équation (3.32).

$$a_p(i, j, k)W(i, j, k) = \begin{pmatrix} a_E(i, j, k)W(i, +1, j, k) + \\ a_W(i, j, k)W(i - 1, j, k) + \\ a_N(i, j, k)W(i, j + 1, k) + \\ a_S(i, j, k)W(i, j - 1, k) + \\ a_T(i, j, k)W(i, j, k + 1) + \\ a_B(i, j, k)W(i, j, k - 1) + \\ b_W(i, j, k) \end{pmatrix}$$

La condition de non glissement est adoptée pour cette composante dans toutes les parois.

$$\left. \begin{aligned} a_p(1, j, k) = 1.0, b_w(1, j, k) = 0 \text{ et } a_p(il, j, k) = 1.0, b_w(il, j, k) = 0 \\ a_p(i, 1, k) = 1.0, b_w(i, 1, k) = 0 \text{ et } a_p(i, jl, k) = 1.0, b_w(i, jl, k) = 0 \\ a_p(i, j, 1) = 1.0, b_w(i, j, 1) = 0 \text{ et } a_p(i, j, kl - 1) = 1.0, b_w(i, j, kl - 1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

De la même manière les conditions aux limites de la température doit vérifier l'équation (3.37).

$$a_p(i, j, k)\theta(i, j, k) = \begin{pmatrix} a_E(i, j, k)\theta(i, +1, j, k) + \\ a_W(i, j, k)\theta(i - 1, j, k) + \\ a_N(i, j, k)\theta(i, j + 1, k) + \\ a_S(i, j, k)\theta(i, j - 1, k) + \\ a_T(i, j, k)\theta(i, j, k + 1) + \\ a_B(i, j, k)\theta(i, j, k - 1) + \\ b_\theta(i, j, k) \end{pmatrix}$$

Les parois latérales sont partiellement chauffées, donc :

$$a_p(1, j, k) = 1.0, b_\theta(1, j, k) = 1.0 \text{ et } a_p(il, j, k) = 1.0, b_\theta(il, j, k) = 1.0$$

Pour $i = il1$ à $il2$ ($il1$: début de la partie chauffée et $il2$: fin de la partie chaude)

La partie qui reste des parois latérales sont maintenues à une température froide, donc :

$$a_p(1, j, k) = 1.0, b_\theta(1, j, k) = 0 \text{ et } a_p(il, j, k) = 1.0, b_\theta(il, j, k) = 0 \quad (3.51)$$

La paroi inferieure est partiellement chauffée, les conditions de la partie chauffée s'écrit :

$$a_p(i, 1, k) = 1.0, b_\theta(i, 1, k) = 1.0 \quad (3.52)$$

Pour $i = if1$ à $if2$ ($if1$: début de la partie chauffée et $if2$: fin de la partie chaude)

Le reste de la paroi inferieure est maintenues à une température froide, donc :

$$a_p(i, 1, k) = 1.0, b_\theta(i, 1, k) = 0.0$$

Les parois frontale et dorsale sont maintenues à une température froide, donc :

$$a_p(i, j, 1) = 1.0, b_\theta(i, j, 1) = 0 \text{ et } a_p(i, j, kl) = 1.0, b_\theta(i, j, kl) = 0$$

La paroi supérieure est adiabatique

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (3.53)$$

Ces conditions sont discrétisées selon les différences régressives :

$$\frac{\theta(i, jl, k) - \theta(i, jl-1, k)}{\partial y(jl-1)} = 0$$

$$\theta(i, jl, k) = \theta(i, jl - 1, k) \quad (3.54)$$

Donc

Pour l'équation (3.54) $a_p(i, jl, k) = 1.0, a_B(i, jl, k) = 1.0$ et $b_\theta(i, jl, k) = 0.0$

Pour la paroi supérieure adiabatique :

$$a_p(i, jl, k) = 1.0, a_N(i, jl, k) = 1.0 \text{ et } b_\theta(i, jl, k) = 0.0$$

3.6 Equation de pression

La présence du champ de pression (sous forme de gradient) dans les équations de mouvement rend la résolution des équations de quantité de mouvement plus compliquée. Pour résoudre les systèmes d'équations discrétisées il est nécessaire de connaître la pression qui apparait dans les termes sources de ces équations. Donc, il nous faut un champ de pression à chaque point intérieur du maillage typique. L'obtention de ce champ nécessite une équation propre à la pression, ceci est possible avec l'utilisation de l'équation continuité à travers différents algorithmes comme : SIMPLER, SIMPLE, PISO, ...

3.6.1 L'algorithme SIMPLER

L'algorithme SIMPLER (SIMPLE Revised), mise au point par Patankar [16], est une version améliorée de l'algorithme SIMPLE. Selon cet algorithme l'équation de continuité discrétisée est utilisée pour obtenir une équation discrétisée pour la pression au lieu d'une équation de correction de pression comme dans l'algorithme SIMPLE. Le champ de pression est obtenu directement, sans correction de pression, mais le champ de vitesse est obtenu à l'aide de la correction. L'évaluation des performances des deux algorithmes montre que l'algorithme SIMPLER a plus d'avantages concernant le nombre d'itération et le temps de calcul pour atteindre la convergence que l'algorithme SIMPLE [66], pour cette raison, nous avons utilisés l'algorithme SIMPLE pour le cas bidimensionnel, et l'algorithme SIMPLER pour le cas tridimensionnel.

3.6.2 Résumé de l'algorithme SIMPLE (cas bidimensionnel)

L'algorithme SIMPLE est défini par les étapes suivantes :

- 1- Estimer le champ de pression ;
- 2- Résoudre les équations de quantité de mouvement pour obtenir U^* et V^* ;
- 3- Résoudre l'équation en P' et cela en utilisant U^* et V^* ;
- 4- Calculer le champ de pression P et le champ des vitesses U et V à partir de leurs expressions de correction en utilisant P ;
- 5- Résoudre l'équation discrétisée pour d'autres variables dépendantes ϕ (température, concentration.... etc.) s'ils influencent le champ d'écoulement ;
- 6- Traiter la pression P comme un nouveau estimé P^* , et revenir à l'équation pour répéter la même procédure jusqu'à convergence.

3.6.3 Résumé de l'algorithme SIMPLER (cas tridimensionnel)

L'algorithme SIMPLER qui est résumé par les étapes suivantes :

1. On commence par une initialisation des champs des vitesses et de température ;
2. Avec le champ de vitesse initial, on calcule les pseudo-vitesses \hat{u} , \hat{v} et \hat{w} (calcul des coefficients des équations discrétisés de la quantité de mouvement suivants X , Y et Z sans les termes de pression) ;

3. Avec les pseudo-vitesses, on peut résoudre (par la méthode itérative de balayage) le système d'équations discrétisés de la pression et obtenir une estimation de cette dernière \mathbf{P}^* ;
4. On initialise le champ de pression initial \mathbf{P}^{**} avec le nouveau champ de pression obtenu à l'étape 3 ($\mathbf{P}^{**} = \mathbf{P}^*$) et on calcule les vitesses estimées (par la méthode itérative de balayage) \mathbf{u}^{**} , \mathbf{v}^{**} et \mathbf{w}^{**} ;
5. Avec les estimations des vitesses, on peut résoudre (par la méthode itérative de balayage) le système d'équations discrétisés de la correction de pression et obtenir une estimation de cette dernière \mathbf{P}' ;
6. Avec la correction de la pression, on calcule les corrections des vitesses et on corrige le champ de vitesse, mais sans corriger la pression ;
7. On résout le système d'équations discrétisés de la température (calcul des coefficients de l'équation d'énergie par la méthode itérative de balayage) et on obtient le champ de température ;

On vérifie la convergence des calculs : si le régime stationnaire est atteint on arrête le calcul, sinon on augmente le temps d'un pas et avec le champ de vitesse corrigé comme une nouvelle initialisation, on retourne à l'étape 2.

3.6.4 Organigrammes des algorithmes

Les figures 3.12 et 3.13 présentent les différentes étapes utilisées par l'algorithme SIMPLE et l'algorithme SIMPLER pour la résolution numérique de l'équation adimensionnelle couplée (pression-vitesse) respectivement.

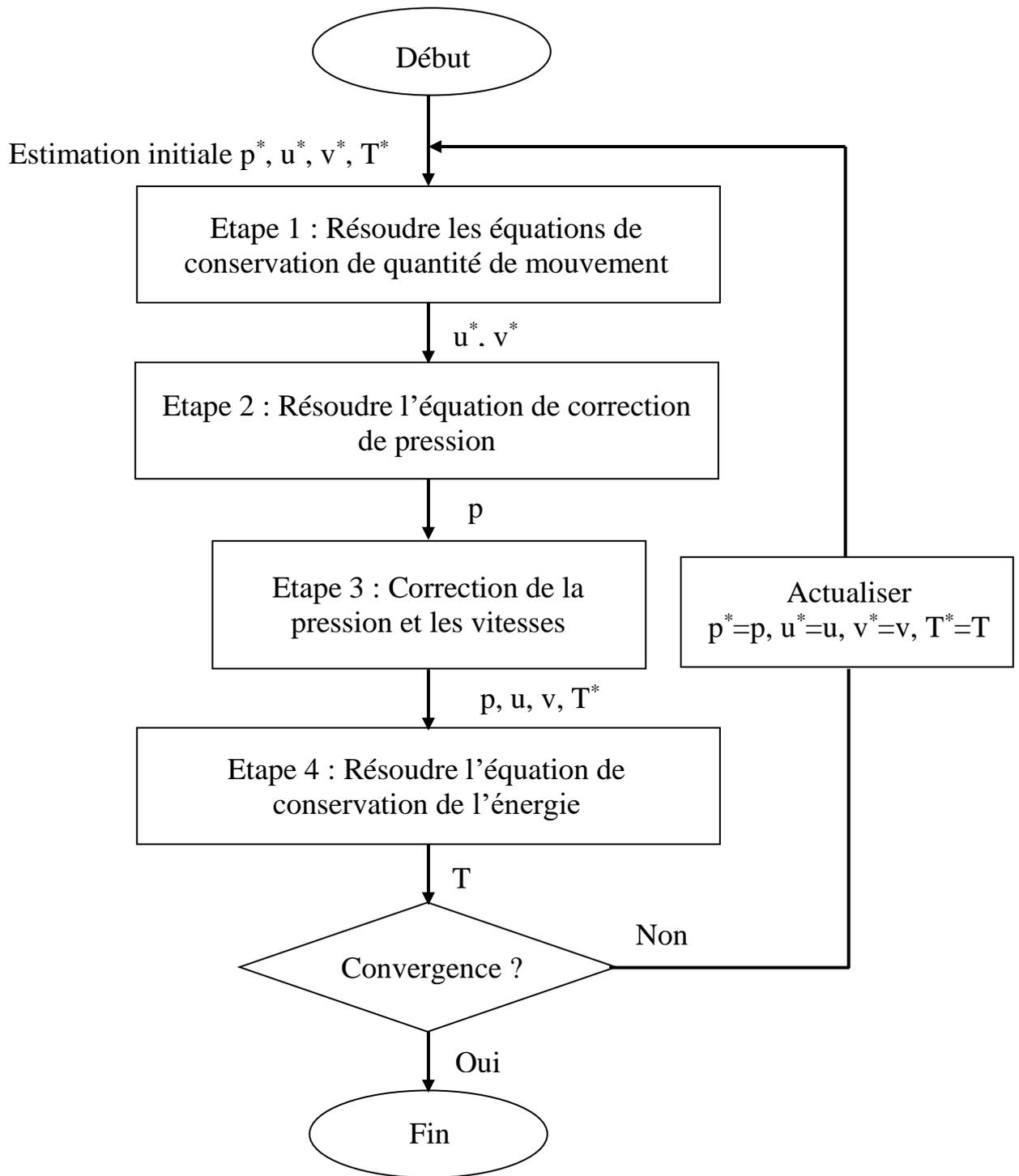


Figure 3.12 : Organigramme de l'algorithme SIMPLE

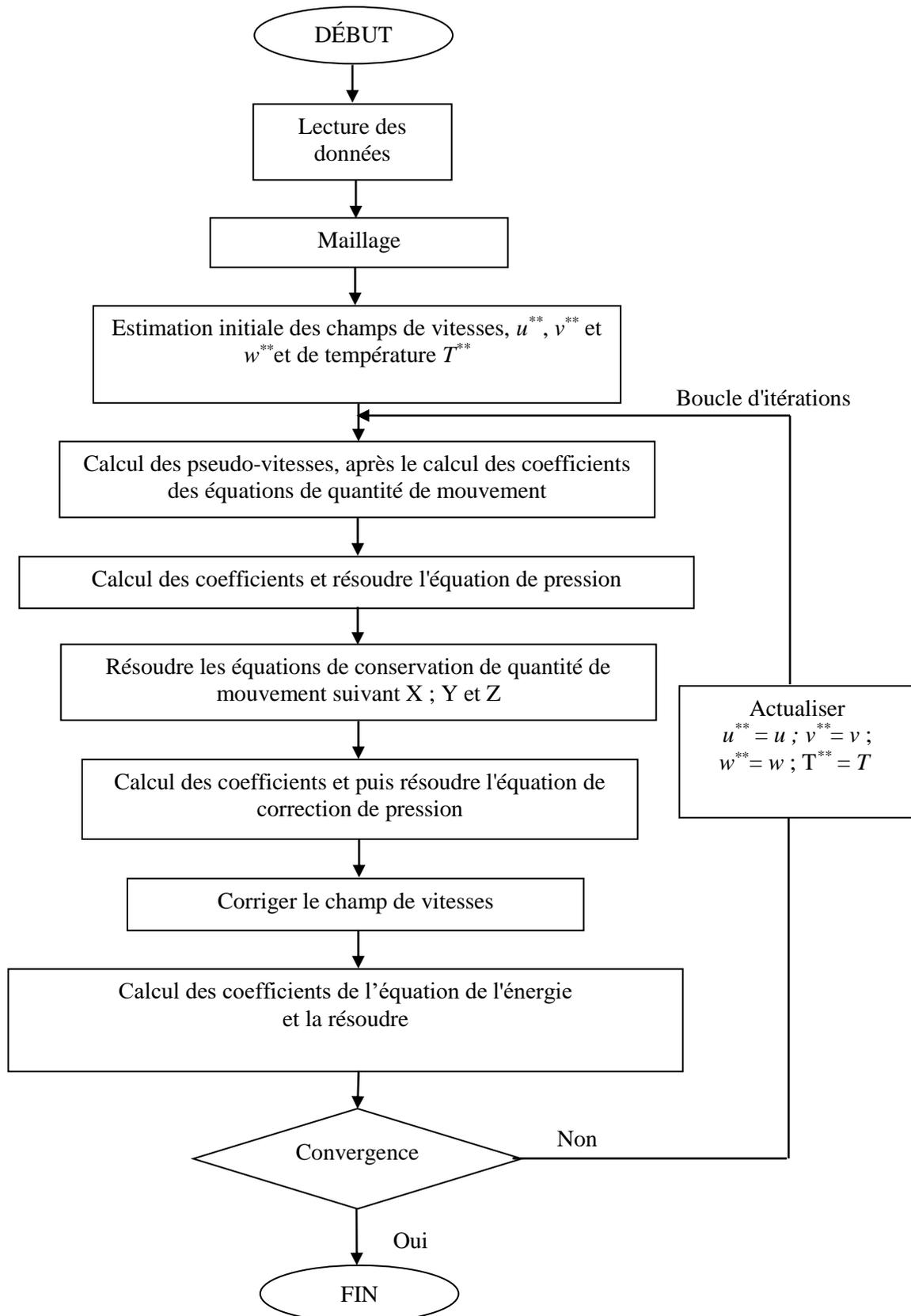


Figure 3.13 : Organigramme de l'algorithme SIMPLER

3.7 Méthode de résolution (Algorithme de Thomas)

Bien qu'il existe plusieurs méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques, notamment les méthodes itératives comme Gauss-Seidel et les méthodes directes comme Gauss-Jordan. La résolution directe du système d'équations algébriques est compliquée, Pour résoudre ce système par une méthode itérative, on utilise la technique de balayage qui s'effectue séquentiellement suivant les trois directions. L'algorithme de Thomas permet de calculer la solution d'un système algébrique linéaire lorsque la matrice est tri- diagonale.

Dans sa forme générale indicielle, l'équation discrétisée s'écrit comme suit :

$$a_P(i, j, k)\phi_{i,j,k} = \begin{pmatrix} a_E(i, j, k)\phi_{i+1,j,k} + a_W(i, j, k)\phi_{i-1,j,k} + \\ a_N(i, j, k)\phi_{i,j+1,k} + a_S(i, j, k)\phi_{i,j-1,k} + \\ a_T(i, j, k)\phi_{i,j,k+1} + a_B(i, j, k)\phi_{i,j,k-1} + \\ S_\phi(i, j, k) \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Comme exemple, on prend le balayage suivant X , et on suppose que les valeurs de la variable ϕ le long des deux autres directions Y et Z sont connues. L'équation (3.55) est réécrite comme suit :

$$a_i\phi_{i+1} = b_i\phi_{i+1} + c_i\phi_{i-1} + d_i \quad (3.56)$$

Dont :

$$a_i = a_P(i, j, k), b_i = a_E(i, j, k), c_i = a_W(i, j, k)$$

$$d_i = \begin{pmatrix} a_N(i, j, k)\phi_{i,j+1,k} + a_S(i, j, k)\phi_{i,j-1,k} + \\ a_T(i, j, k)\phi_{i,j,k+1} + a_B(i, j, k)\phi_{i,j,k-1} \end{pmatrix} + S_\phi(i, j, k)$$

On introduit la relation de récurrence suivante :

$$\phi_i = P_i\phi_{i+1} + Q_i \quad (3.57)$$

Pour l'indice $i - 1$, on a :

$$\phi_{i-1} = P_{i-1}\phi_i + Q_{i-1} \quad (3.58)$$

En remplaçant la relation (3.58) dans l'équation (3.57) on trouve :

$$\phi_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \phi_{i+1} + \frac{d_i - c_i \phi_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (3.59)$$

De (3.58) et (3.59) on a :

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \text{ et } Q_i = \frac{d_i - c_i \phi_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (3.60)$$

Pour $i = 1$ on a :

$$c_1 = 0$$

Donc, on trouve :

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} \text{ et } Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \quad (3.61)$$

Pour $i = 1$ on a : $b_{i1} = 0$ donc $P_{i1} = 0$

Et de l'équation (3.59) on trouve : $\phi_{i1} = Q_{i1}$

Avec l'utilisation de ces valeurs on peut calculer les valeurs de ϕ_i .

Le balayage suivant la direction Y et Z sont similaire à celui de balayage suivant la direction X et les résultats obtenus à le premier balayage suivant la direction X sont utilisés dans les deux balayages suivant les directions Y et Z .

3.8 Critère de convergence

Le critère de convergence utilisé dans notre programme de calcul est basé sur la différence relative de toutes les variables (U, V, W et θ) comme suit :

$$\max \left| \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\phi^n} \right| \leq 10^{-7} \quad (3.60)$$

Où : ϕ : est la variable dépendante qui représente U, V, W et θ .

n : est le nombre d'itération.

3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présentés la résolution numérique des équations gouvernant l'écoulement de notre problème physique. Cette résolution consiste à remplacer le système d'équations différentielles aux dérivées partielles par un système d'équations algébriques en utilisant une méthode de discrétisation basée sur les volumes finis. Le système d'équations algébriques obtenu est mis sous une forme tri-diagonale et sa résolution est réalisée, d'une manière itérative, par l'algorithme de Thomas pour obtenir la valeur de toutes les variables du problème considéré. Les résultats des différentes simulations seront présentés dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

RESULTATS ET DISCUSSION

4.1 Introduction

Les résultats obtenus au cours de cette étude sont présentés dans ce chapitre. Dans un premier temps, on considère le cas bidimensionnel, pour analyser l'influence de nombre de Rayleigh et de la position des parties chauffées montées sur les parois latérales sur la stabilité de l'écoulement et les transferts de chaleur. Deux sources de chaleur de longueur égale à un quatrième de celle de la cavité L ayant une température constante (T_c) est placées, symétriquement en trois positions : en bas des parois verticales pour la 1^{ère} configuration, et au centre des parois verticales pour le 2^{ème} cas et en haut pour la dernière configuration. Une source chaude de longueur égale à la moitié de celle de la cavité L est placée au centre de la paroi inférieure dans chaque configuration. Pour cela, nous avons fait varier le nombre de Rayleigh, tandis que le nombre de Prandtl est fixé à 0.71 (air), et donc on a trois différentes combinaisons considérées qui sont selon la position des parties chauffées:

- Premier cas : **Bas - Bas**,
- Deuxième cas : **Centre - Centre**,
- Troisième cas : **Haute - Haute**,

4.2 Effet du maillage dans le cas bidimensionnel

Pour examiner et évaluer l'indépendance du maillage de la solution, cinq maillages uniformes sont employés dans ce travail: (60×60), (90×90), (100×100), (120×120) et (130×130) nœuds, pour $Ra = 10^3$. La composante de la vitesse dans la direction x et la température dans l'enceinte ont été adoptées comme valeur des critères de test. Le Tableau 4.1 montre la variation des valeurs maximales T_{max} et U_{max} en fonction de la taille de la grille. Les variations des valeurs calculées sont très faibles pour trois grilles (100×100), (120×120) et (130×130) et nous avons remarqué que la variation de T_{max} entre les nœuds (100×100), et (130×130) est inférieure à $0.00911 = 0.911\%$ (voir Tableau 4.1). Cependant, et après avoir

effectué des tests d'indépendance entre la solution numérique et la maille, le maillage (100×100) est le maillage qui sera adopté pour tous les calculs.

Afin d'éliminer une solution numérique, nous utilisons deux pas de temps sans dimension, Dt et $Dt/2$. Les solutions physiques sont définies pour les mêmes oscillations, ou pour les très faibles variations entre les oscillations avec Dt et $Dt/2$.

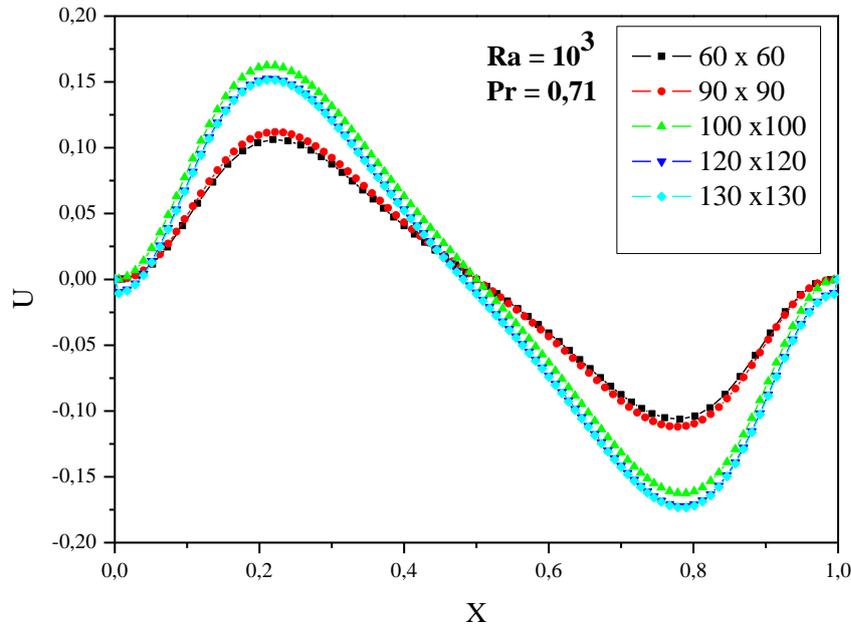


Figure 4.1 : Variation de la composante de la vitesse dans la direction x pour différents maillage

Tableau 4.1 : Résultat du test de maillage

Maillage	(60x60)	(90x90)	(100x100)	(120x120)	(130x130)
T_{\max}	0.916693	0.91338	0.90688	0.89863	0.89045
U_{\max}	0.10625	0.11198	0.16234	0.15234	0.15134

Afin de vérifier l'exactitude de la technique numérique employée pour la résolution du problème considéré dans la présente étude, elle a d'abord été validée en effectuant une simulation d'écoulement de convection naturelle dans une enceinte carrée verticale rapportée par **R. Iwatsu et al [40]**. La validation a été faite en prenant en compte les résultats de **R. Iwatsu et al**, obtenus dans le cas d'une cavité carrée, dont la paroi supérieure est mobile et maintenue à une température chaude. La paroi inférieure est soumise à une température froide. Les parois verticales sont adiabatiques. La figure 4.2 montre les tracés des lignes de courant, des distributions isothermes avec $Pr = 0.7$ et $Gr = 10^2$, (a) pour le code actuel et (b) pour **R. Iwatsu et al**. Il ressort de la comparaison que les champs thermique et dynamique obtenus par notre code de calcul sont très similaires à ceux obtenus par **R. Iwatsu et al**.

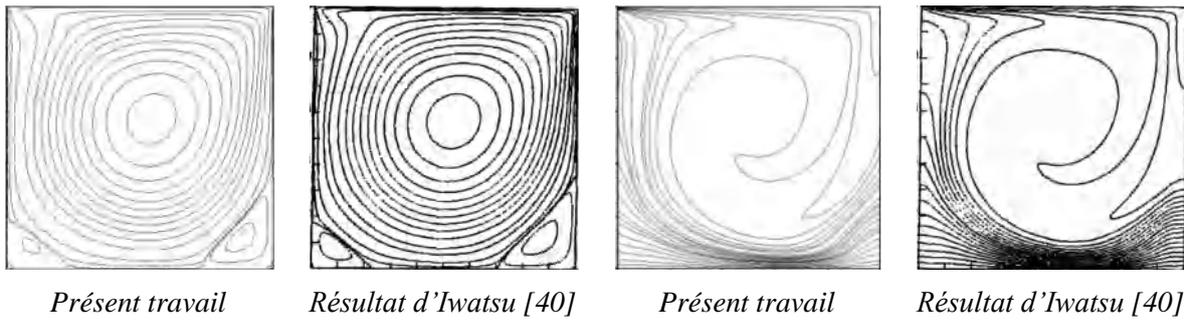


Figure 4.2 : Comparaison des isothermes (à droite) et contours de la fonction de courant (à gauche) pour $Re=10^3$, $Gr=10^2$ ($Ri=0.0001$)

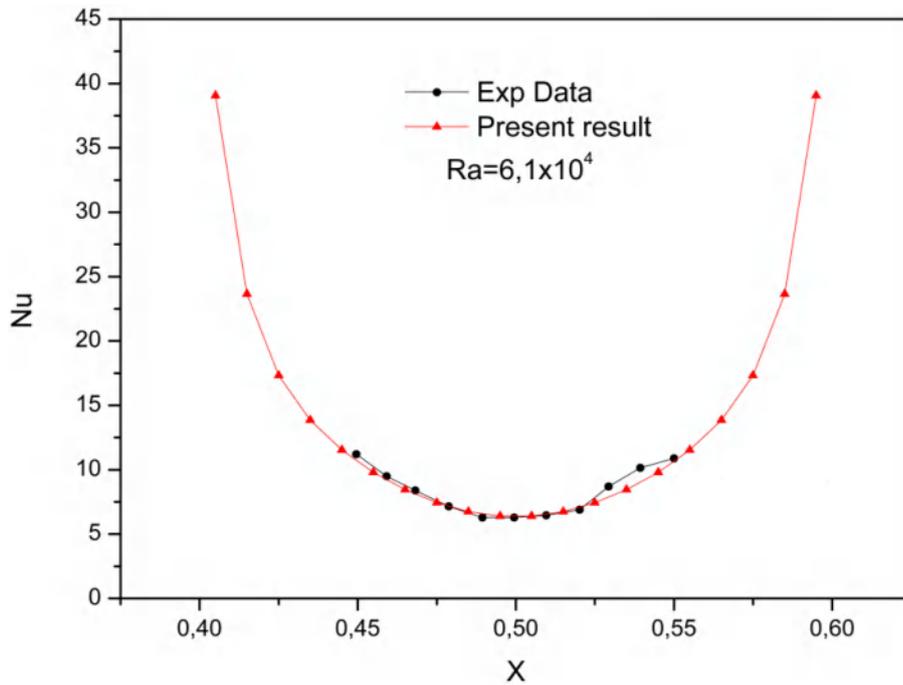


Figure 4.3 : Comparaison du Nusselt local calculé sur la source de chaleur (axe des abscisses) avec les données expérimentales [12].

Le code numérique est ensuite validé en comparant le Nusselt local (Nu) calculé évalué sur la source de chaleur (axe des abscisses) pour $Ra=6.1 \times 10^4$ avec les résultats expérimentaux de **Calcagni et al. [12]**, comme le montre la figure 4.3. Cette figure indique que le résultat calculé est en bon accord avec les données mesurées.

Tableau 4.2 : Comparaison des résultats numériques actuels avec la solution De Vahl [17]

	<i>De Vahl Davis</i>	<i>Présent travail</i>
Ra	$ \psi _{max}$	$ \psi _{max}$
10^5	9.612	9.5838
10^6	16.750	16.719

Une autre validation a été effectuée en comparant notre résultats avec les quelle obtenu par **De Vahl [17]** pour la convection naturelle non conjugué dans une cavité carré remplie d'air. Le Tableau 4.2 montre la comparaison entre les résultats de deux solutions.

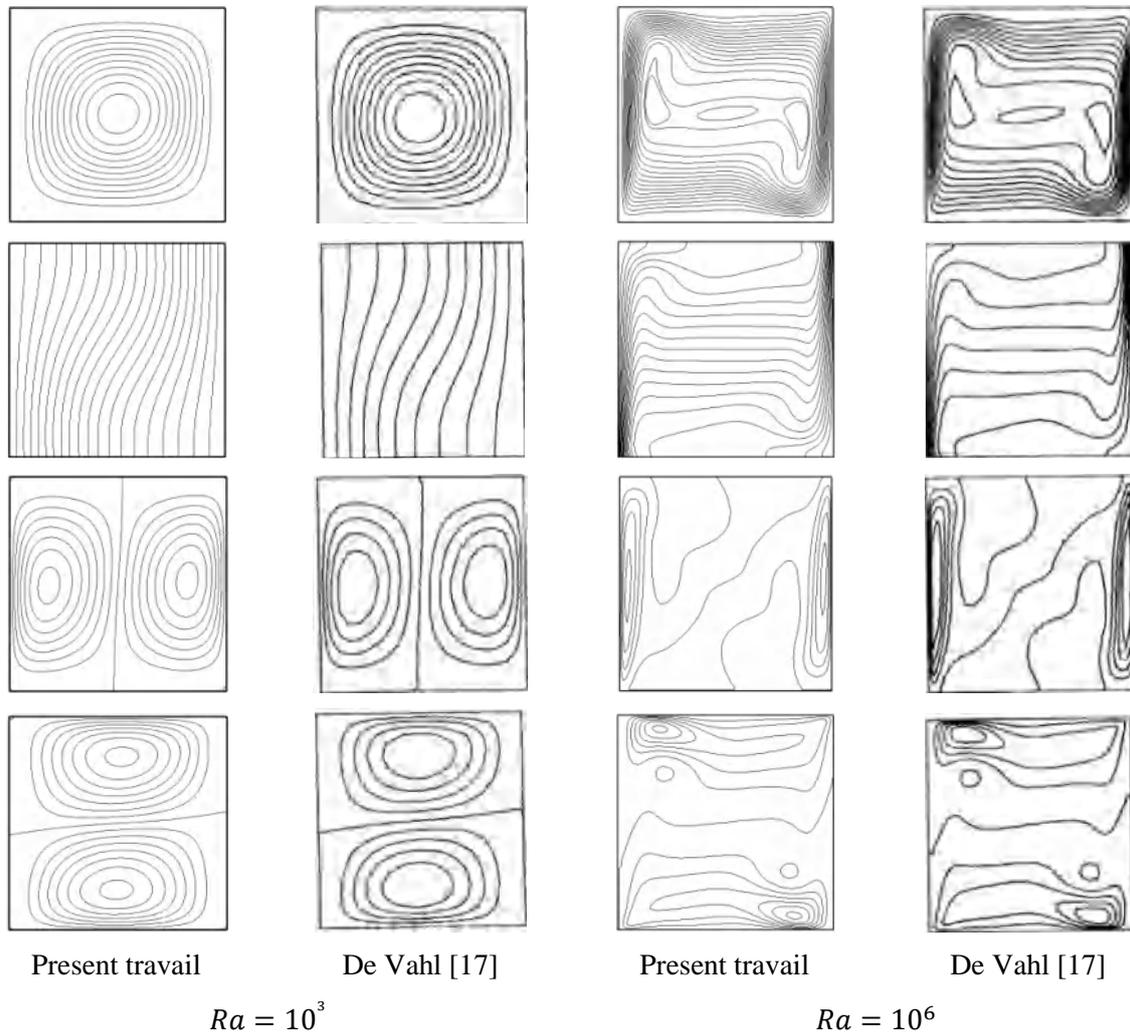


Figure 4.4 : Comparaison des lignes de courant, isothermes, la vitesse horizontale et verticale calculé avec les données expérimentales de [17]

La figure 4.4 trace les valeurs prédites pour les lignes de courant, les isothermes et les composantes de vitesse sans dimension dans les directions X et Y , respectivement sur une plaque pour le nombre de Rayleigh, Ra , de 10^3 à 10^6 pour la présente solution et les résultats publiés par **DeVahl [17]**. Il ressort de la comparaison que les résultats de notre travail sont en très bon accord avec les travaux précédents.

La simulation numérique est effectuée avec de l'air comme fluide, $Pr = 0.71$. Les résultats sous forme de profils de vitesse et de température, de lignes de courant et de contours isothermes, pour différents cas de l'emplacement des sources de chaleur sur les parois latérales (Cas 1 : bas-bas, Cas 2 : centre-centre et le 3^{ème} Cas : haute-haute), et pour une plaque bu nombre

de Rayleigh entre 10^3 et 9×10^6 , comprenant des régimes d'écoulement symétrique (stable) et asymétrique (oscillant) afin d'atteindre le chaos, la seuil de chaque transition et définie par le nombre de Rayleigh critique, la topologie de l'écoulement et tous ces bifurcations seront présentées et discutés.

4.3 Choix du maillage dans le cas tridimensionnel

L'étude des phénomènes de convection naturelle dans les milieux confinés fait un état de diverses configurations où le comportement de l'écoulement dépend fortement des paramètres géométriques et physiques appliqués au système. On s'intéresse, dans cette partie à des simulations tridimensionnelles en convection naturelle dans une cavité cubique partiellement chauffée par le bas, et partiellement mais symétriquement chauffée sur les deux parois latérales tandis que la paroi supérieure est considérer adiabatique, afin d'avoir l'effet de certain paramètres sur le comportement de l'écoulement et du transfert de chaleur tels que la position des parties chauffée des parois latérales (c.-à-d. les trois cas étudiées en 2d), le nombre de Rayleigh, les lignes de courants, les iso surfaces de température, le nombre de Nusselt moyen et le champ de température seront analysé. La résolution numérique du système d'équations gouvernant le phénomène étudié a été réalisée à l'aide d'un programme que nous avons élaboré en langage FORTRAN. Afin de confirmer la certitude de nos résultats nous avons cependant préalablement vérifiés que les résultats numériques obtenus à partir de ce code sont en parfait accord avec ceux obtenus par **Iwatsu [40]**.

Nous avons opté pour un maillage non uniforme dans les trois directions, la matrice de subdivision du domaine de calcul suivant les directions X, Y et Z est de la forme Il, Jl et Kl . La distribution du maillage suivant la direction X à titre indicatif est définie par la relation suivante :

$$\Delta X(1) = 0.0, \Delta X(2) = \frac{1}{2} \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^{(il/2-1)}}, \Delta X(i) = \alpha \cdot \Delta X(i-1) \quad (4.1)$$

Avec : $\alpha = 1.1$

Le maillage décalé est défini comme suit :

$$\begin{aligned} dX(1) &= \Delta X(2)/2 \\ dX(i) &= (\Delta X(i) + \Delta X(i+1))/2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

La **figure 4.5** montre ce maillage non uniforme à l'intérieur de la cavité. Il est plus fin près des parois où le gradient des variables physiques est important.

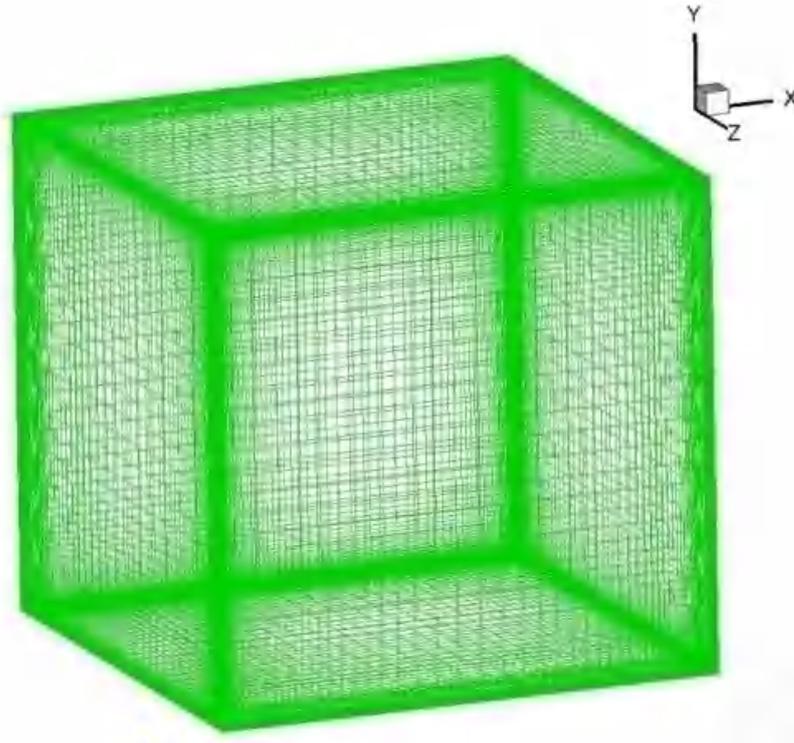


Figure 4.5 : Schéma de la distribution du maillage dans la cavité

Afin d'avoir un compromis raisonnable entre le temps de calcul et la précision des résultats, le choix d'un maillage adéquat s'avère nécessaire. Cela nécessite des essais préliminaires pour tester l'effet du maillage sur la sensibilité des solutions. Dans cette étude nous avons considéré les maillages $61 \times 61 \times 61$, $71 \times 71 \times 71$, $81 \times 81 \times 81$, $91 \times 91 \times 91$, $101 \times 101 \times 101$, $111 \times 111 \times 111$ et $121 \times 121 \times 121$.

Les résultats obtenus en terme du nombre de Nusselt moyen de la paroi chauffée en fonction du maillage montrent que le profil du nombre de Nusselt moyen devient insensible au nombre de nœuds à partir d'un maillage de $91 \times 91 \times 91$ comme présenté dans le **tableau 4.3** et la **figure 4.6**. De ce qui précède, nous avons opté pour un maillage de $91 \times 91 \times 91$ pour l'ensemble des simulations numériques.

Tableau 4.3 : Nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de nœuds

Nombre de nœuds	61^3	71^3	81^3	91^3	101^3	111^3	121^3
Nu_{moy}	2.98	3.24	3.31	3.336	3.342	3.35	3.355
Erreur	11.2%	3.45%	1.35%	0.56%	0.39%	0.15%	-

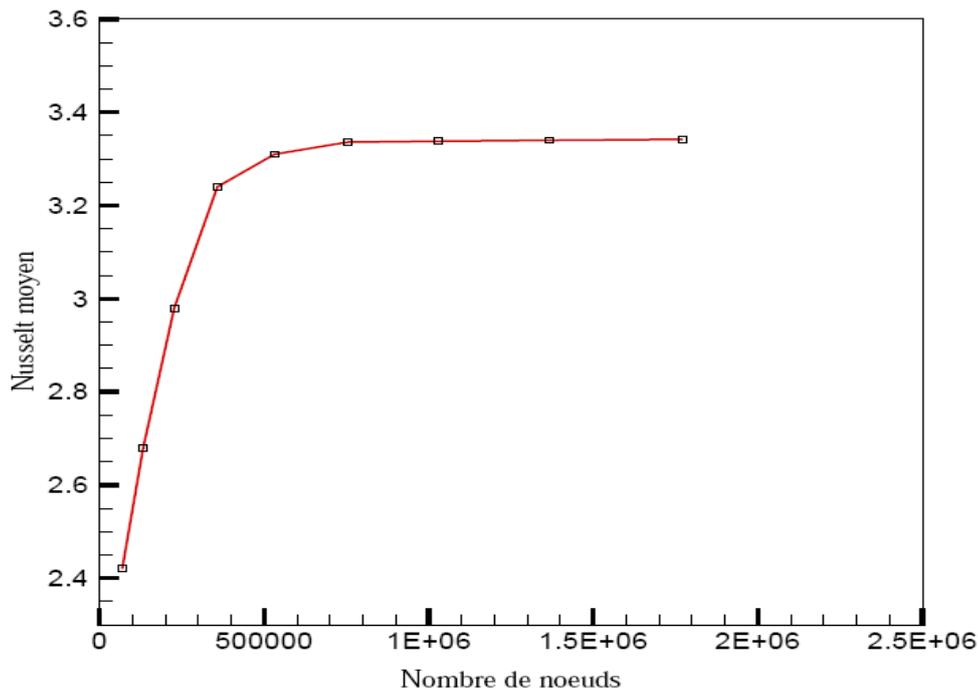


Figure 4.6 : Le nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de nœuds

4.4 Validation du code numérique

Pour utiliser le code numérique élaboré avec plus de confiance, il est indispensable de le valider avec des résultats existant dans la littérature. Ainsi, nous avons comparé avec succès nos résultats à ceux obtenus à partir de l'étude de la convection mixte dans une cavité cubique conduite par **Iwatsu et Hyun[40]** (la seconde catégorie qui examine les cavités chauffées de la paroi mobile supérieure et refroidies du dessous).

Tableau 4.4 : Comparaison du nombre de Nusselt moyen de la présente étude avec **Iwatsu et Hyun [40]**

<i>Re</i>	<i>Ri</i> = 0.001			<i>Ri</i> = 1.0			<i>Ri</i> = 10.0		
	Présente étude	Iwatsu	Diff %	Présente étude	Iwatsu	Diff %	Présente étude	Iwatsu	Diff %
100	1.825	1.82	0.27	1.343	1.33	0.97	1.092	1.08	1.09
400	3.975	3.99	0.37	1.521	1.50	1.3	1.158	1.17	1.02
1000	6.98	7.03	0.71	1.789	1.80	0.6	1.395	1.37	1.79

4.5 Effet de Ra sur les champs thermique et dynamique

4.5.1 Premier cas : Bas - Bas

Les figures 4.7, et 4.8 montrent les lignes de courant et les isothermes à l'intérieur de la cavité pour différentes valeurs du nombre du Rayleigh.

La figure 4.7 illustre la structure des lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh. On remarque la formation de deux grandes cellules primaires et de deux petites cellules sur les coins bas de la cavité contrarotatives ; l'une des cellules primaires tourne dans le sens des aiguilles d'une montre et la seconde tourne dans le sens contraire, ainsi que les petites cellules tournent dans le sens contraire des deux grandes cellules. Cette observation est valable pour tous les cas dans cet intervalle du nombre de Rayleigh. Le fluide qui est chauffé par la paroi inférieure se déplace au centre vers la paroi supérieure adiabatique, où il se divise en deux flux, l'un se dirige vers la partie froide de la paroi verticale gauche et l'autre se dirige vers la partie froide de la paroi verticale droite, les deux grandes cellules sont presque égales ou il subit un epaisement dans la partie inférieure causées par les deux autres petites cellules près des parties actives des parois verticales. Donc, la configuration présente un écoulement symétrique caractérisé par quatre cellules, une primaire et une secondaire de chaque côté de la cavité contrarotatives et identiques par rapport à l'axe de symétrie qui est la ligne médiane verticale de la cavité, en raison de la symétrie des conditions aux limites dans les parois verticales.

L'écoulement et le transfert de chaleur sont contrôlés par la source de chaleur locale sur la paroi inférieure et la différence de température sur les parois verticales à une influence négligeable, cette influence devient significative avec l'augmentation du nombre Rayleigh. Lorsque $Ra = Ra_{cr1} = 5.5 \times 10^4$, la déformation des isothermes et des lignes de courant augmente, et présente une bifurcation caractérisée par une première perte de la symétrie ou on remarque, la présence d'une dissymétrie vers la droite de la cavité. Il est important de mentionner que pour une valeur du nombre de Rayleigh plus élevée $Ra = 7 \times 10^4$, le système a eu toujours une dissymétrie vers la droite avec une petite oscillation, et cette oscillation devient plus forte avec l'augmentation du nombre du Rayleigh, c.-à-d. pour $Ra = 8 \times 10^4$, $Ra = 3 \times 10^5$ et $Ra = 8 \times 10^5$.

Comme le montre la figure 4.7, entre des valeurs de nombre de Rayleigh de 3.1×10^5 et 7×10^4 , la structure de l'écoulement change d'un état symétrique stable à un état asymétrique instable. Par conséquent, le début de ce changement (bifurcation) comptait pour le nombre critique de Rayleigh de 5.5×10^4 . A cette valeur critique $Ra = Ra_{cr1} = 5.5 \times 10^4$, des instabilités

surviennent en raison de la compétition de force entre les tourbillons principal et secondaire, entraînant une perte de symétrie de l'écoulement vers la droite et un champ d'écoulement non-oscillatoire. Dans ce régime d'écoulement instable, les deux tourbillons précédemment symétriques (représentés sur **la figure 4.7**) sont devenus asymétriques avec des tailles et des intensités différentes dans lequel les valeurs de la fonction de courant sont **0.710226 et -9** pour le petit vortex au sommet de la cavité et le plus grand tourbillon au fond de la cavité, respectivement, confirmant la force d'écoulement de déséquilibre dans les deux régions. Il est à noter que dans cette solution, les contours de température oscillent avec une faible fréquence dans les flancs droits. Dans ce régime, l'effet des deux éléments chauffants opposés est important et a une influence significative sur le champ d'écoulement et les niveaux de transfert de chaleur. De plus, pour toutes les solutions dans le cas, d'écoulement symétrique et avant d'atteindre le nombre de Rayleigh critique, la valeur de la fonction de courant le long de la ligne de symétrie est zéro.

À une deuxième valeur critique du nombre de Rayleigh ($\mathbf{Ra_{cr2}=3 \times 10^6}$), des instabilités surviennent en raison de la compétition de force entre les tourbillons principal et secondaire, entraînant une perte de symétrie de l'écoulement et un champ d'écoulement oscillatoire prévaut.

Pour de faibles valeurs du nombre Ra compris entre 10^3 et 5.4×10^4 comme le montrent les isothermes sur **la figure 4.8**, pour ces valeurs de Rayleigh suffisamment faibles, l'écoulement atteint un état stationnaire asymptotique présentant un mouvement symétrique autour de la ligne médiane verticale de la cavité.

Les isothermes montrent quant à elle que la chaleur récupérée de la source chaude est transportée par convection vers le haut au milieu de l'enceinte par la paire de deux grandes cellules au centre. C'est ce qui explique les températures relativement élevées dans la partie centrale de l'enceinte. La chaleur est évacuée de façon équitable à travers les deux parois latérales. Dans le cas de $Ra > 10^3$, la figure montre que les isothermes se modifient surtout en fonction du nombre de Rayleigh. Pour $Ra = 10^3$, les isothermes deviennent presque des ellipses concentriques et ont une structure symétrique par rapport au plan vertical passant par $X = 0,50$. Dans le cas où le $Ra > 10^3$, les isothermes se changent continuellement jusqu'aux valeurs de 10^6 du nombre de Rayleigh.

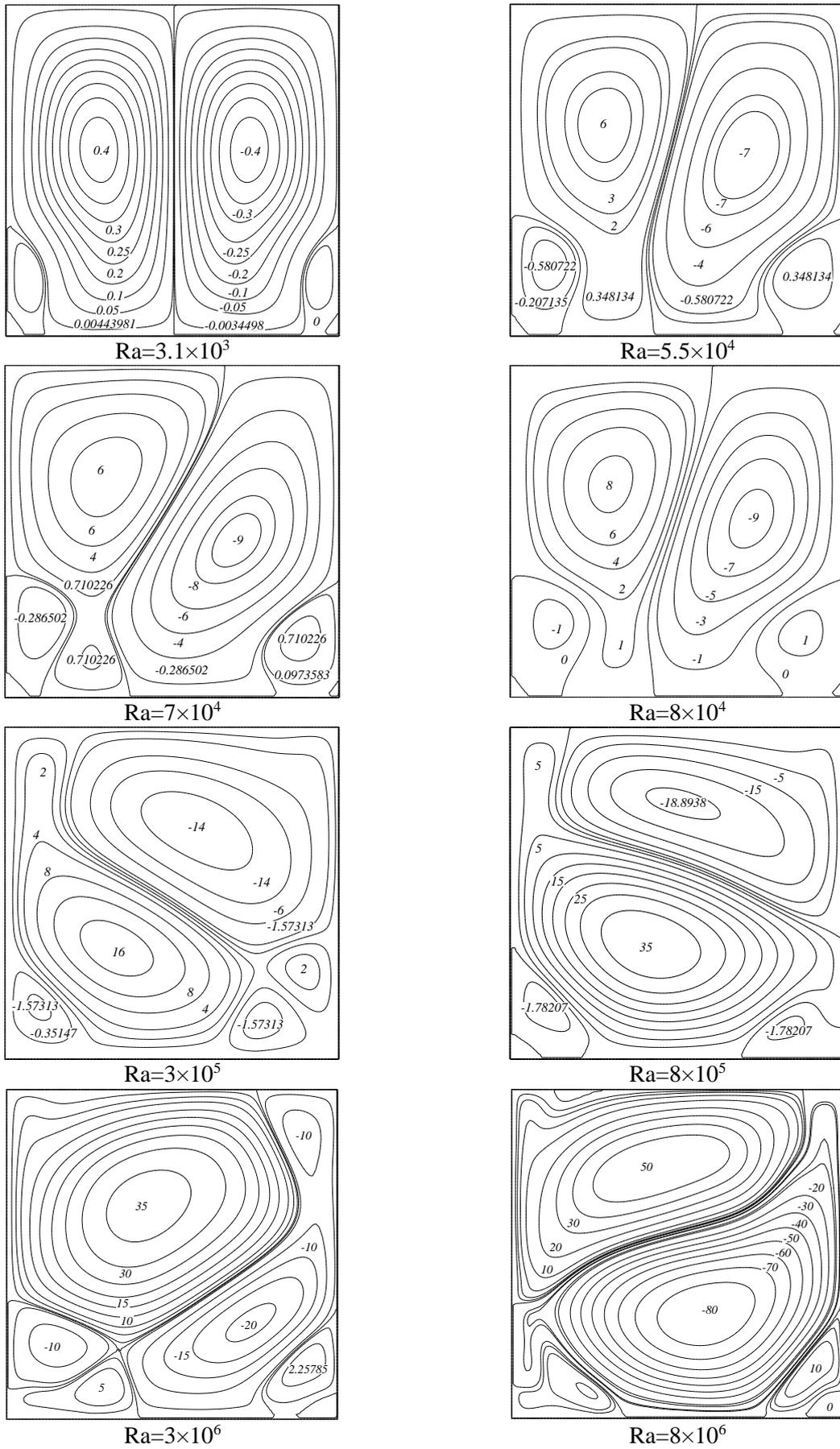


Figure 4.7 : Les lignes de courant pour différentes valeurs de Ra

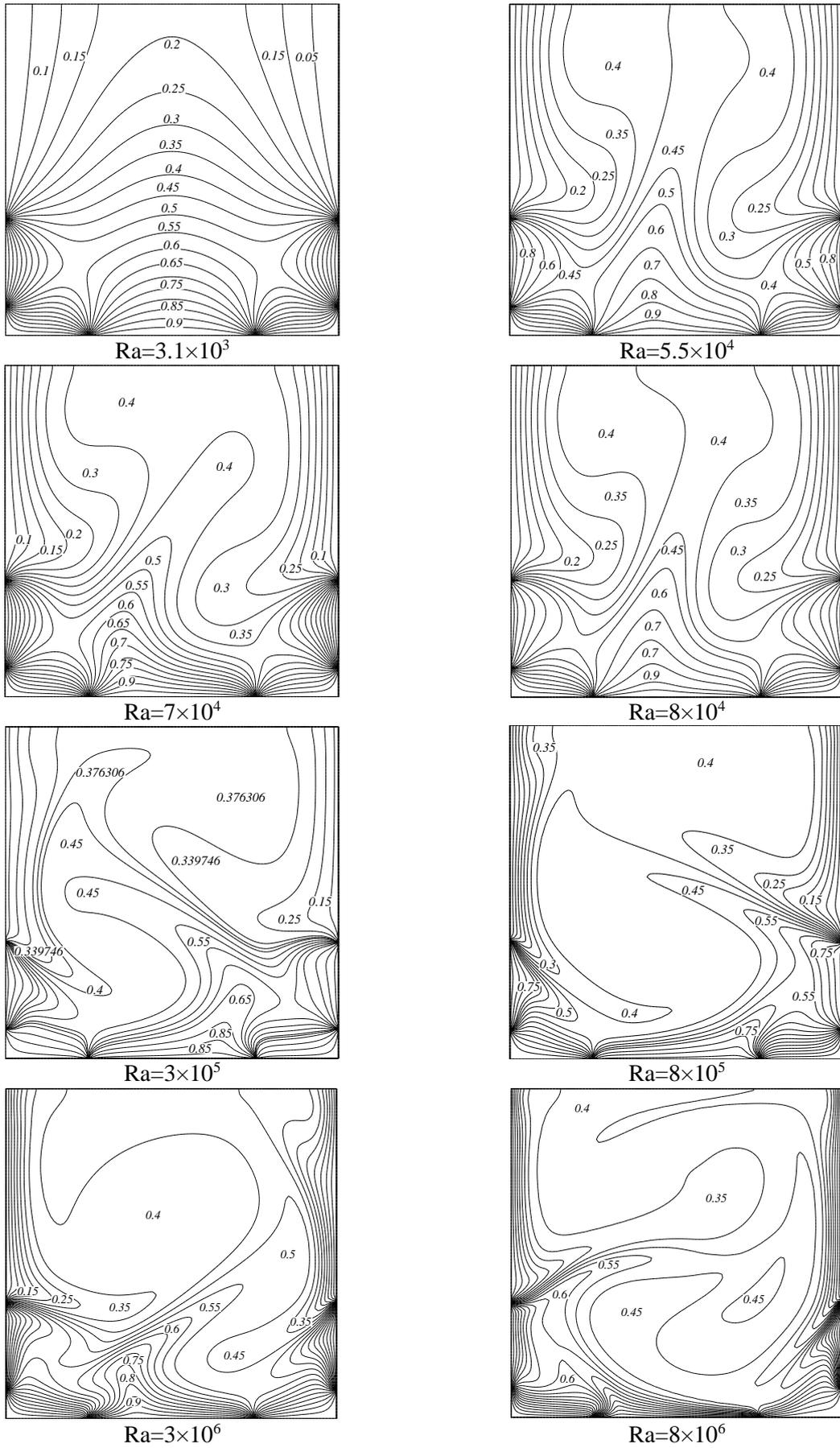


Figure 4.8 : Les isothermes pour différentes valeurs de Ra

Il est à noter que dans cette solution, les Isothermes oscillent proche des parois latérales de gauche à droite. La valeur de la fonction de courant au centre du vortex primaire gauche (égale à 16,0935) est supérieure à la valeur de la fonction de flux au centre du vortex primaire droit (égale à 14,0541). Après, le régime périodique est détruit par une petite augmentation du nombre de Rayleigh, le régime chaotique apparaît après à $Ra=8 \times 10^6$.

L'évolution temporelle de la température et des deux composantes de la vitesse au milieu de l'enceinte sont représentées respectivement sur les **figures 4.9, 4.10 et 4.11** pour différentes valeurs de Rayleigh.

Pour des valeurs du nombre de Rayleigh inférieures à la valeur critique de bifurcation, les solutions tendent asymptotiquement vers le régime stationnaire stable (point limite). Au-delà de $Ra_{cr}=3 \times 10^6$, la convection devient oscillante mono-périodique.

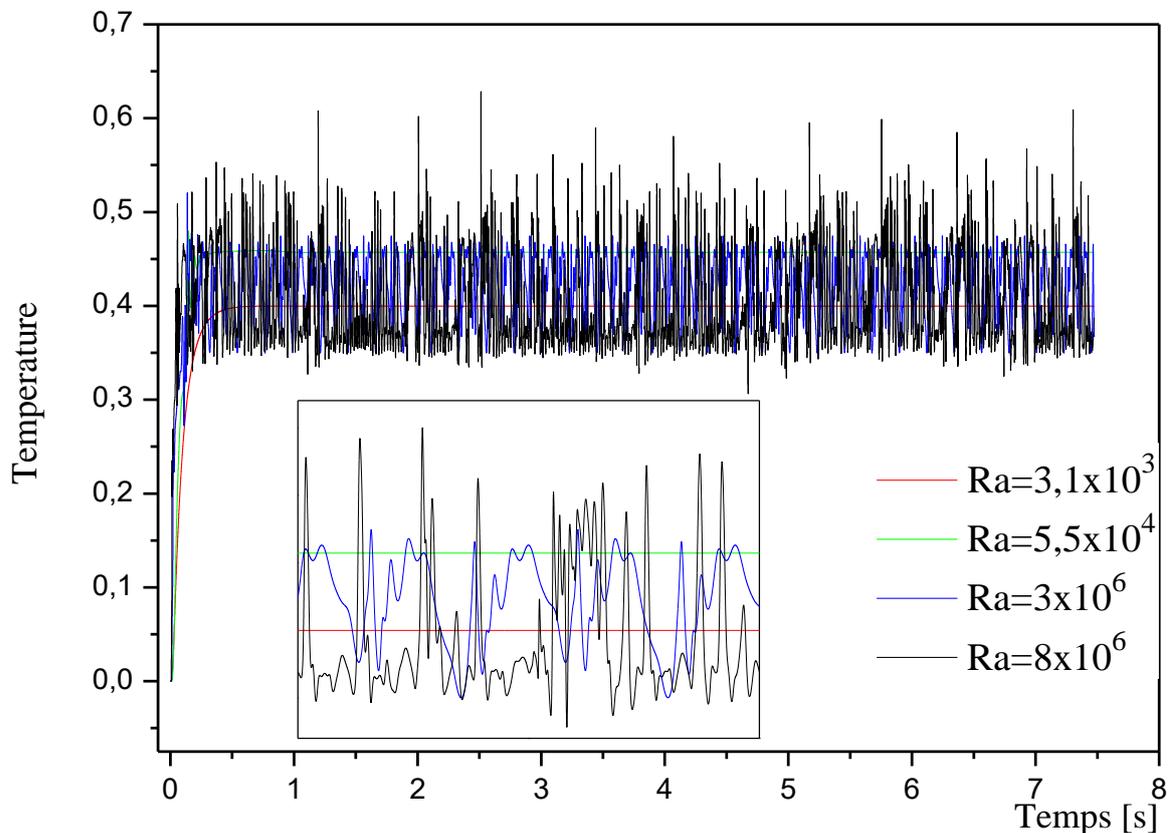


Figure 4.9 : Evolution temporelle de la température calculée au centre de la cavité pour différentes valeurs de **Ra**

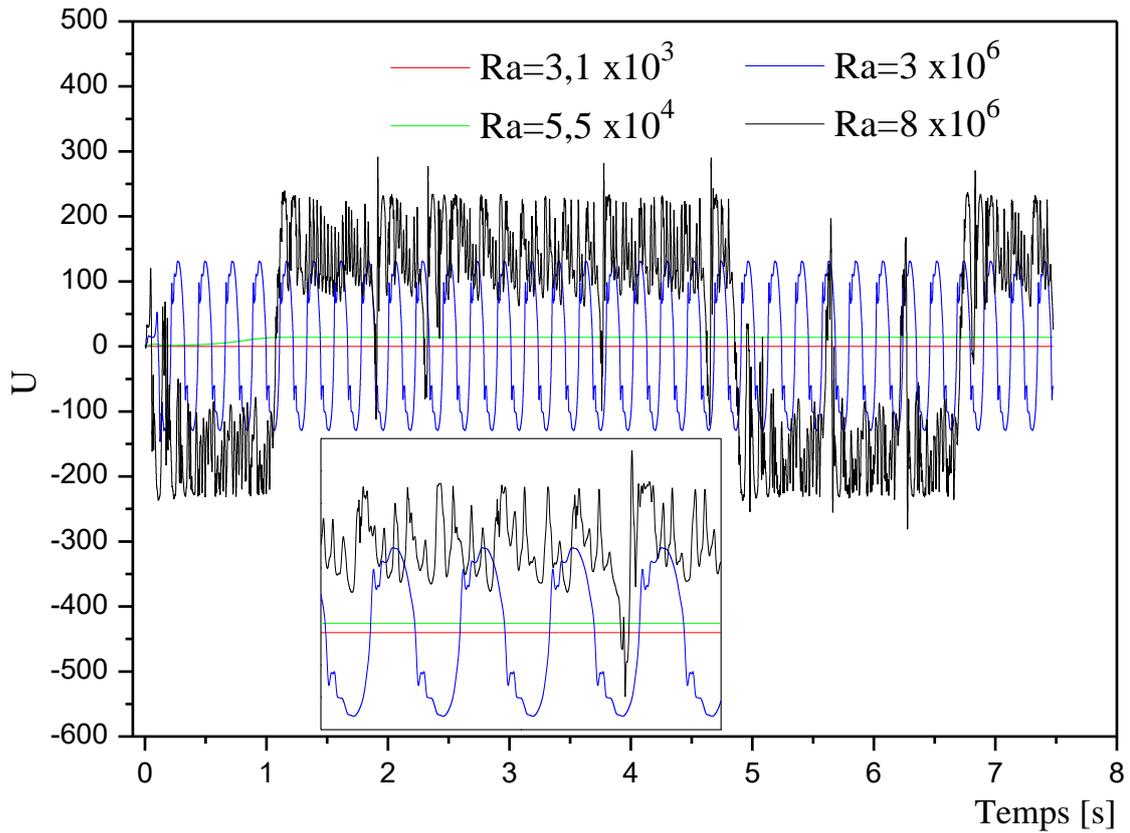


Figure 4.10 : Evolution temporelle de la vitesse U calculée au centre de la cavité pour différentes valeurs de Ra

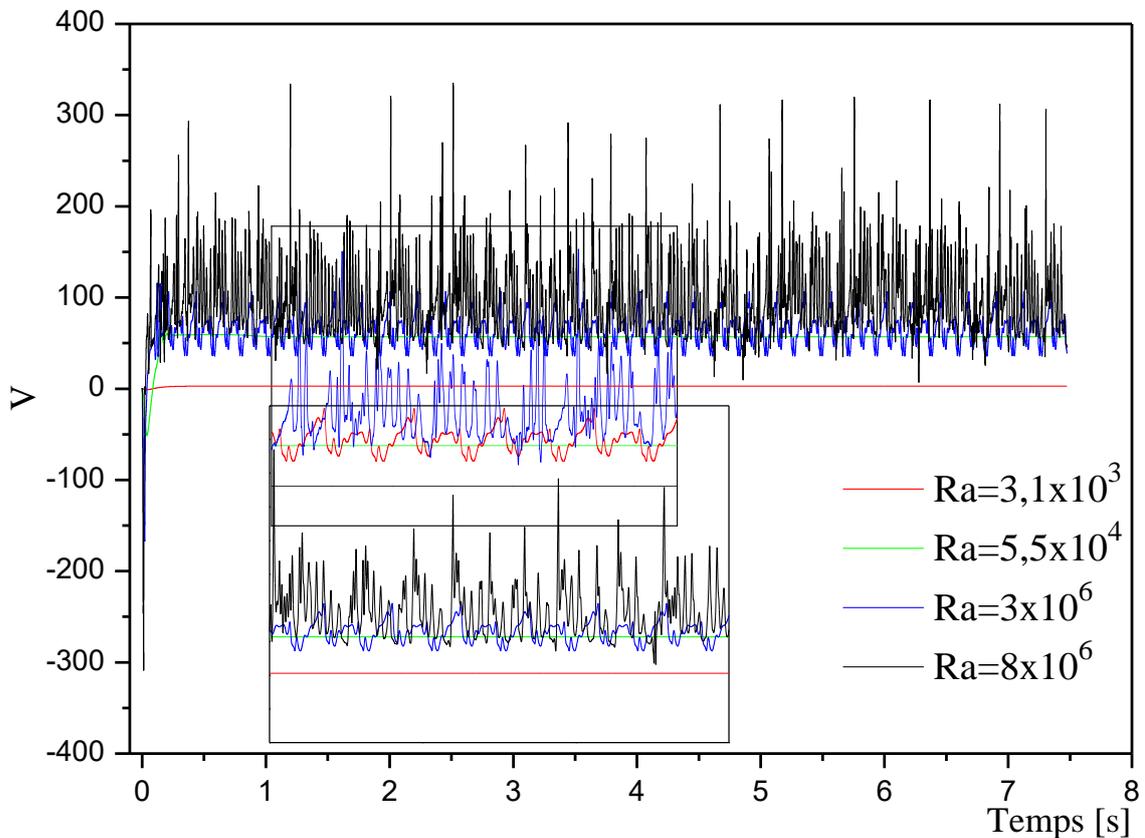


Figure 4.11 : Evolution temporelle de la vitesse V calculée au centre de la cavité pour différentes valeurs de Ra

Dans le but de quantifier les échanges thermiques au sein de la cavité, **la figure 4.12 (a), (b) et (c)** illustre la variation du nombre de Nusselt local calculé le long des parties chauffées des parois latérales (a) : gauche et (b) : droite, et le long de la source de chaleur de la paroi inférieure (figure 4.12 (c)), pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh. La variation du nombre de Nusselt local montre que, des valeurs minimales du nombre de Nusselt local sont obtenues au milieu des parties chauffées étant donné que c'est là où le gradient de température est le plus faible au vue des isothermes de **la figure 4.8**. Le nombre de Nusselt local atteint, en revanche, sa valeur maximale aux bornes de cette source chauffée étant donné que ça correspond au contact du fluide froid provenant des parties inactives des parois latérales et inférieure avec les extrémités des sources chauffées, ce qui donnera lieu aux plus forts gradients de température. Notons qu'en raison de la symétrie des conditions aux limites, la frontière commune des deux grandes cellules primaires contrarotatives joue le rôle d'isolateur. Le centre de la partie chauffée de la paroi inférieure devient une zone de flux minimal de chaleur puisqu'elle se trouve à une température maximale, ceci implique un nombre de Nusselt local minimal.

Pour ce qui concerne l'effet du nombre de Rayleigh sur la distribution du nombre de Nusselt local, nous observons, d'une manière générale, et pour des faibles valeurs du nombre de Rayleigh $Ra < 10^4$ que les profils à une symétrie parfaite par rapport à l'axe médiane verticale passe par le centre de chaque source, et que l'augmentation de nombre de Rayleigh à provoquer la dissymétrie du profil. De même, l'intensification des forces de poussée thermique, à travers l'augmentation du nombre de Rayleigh, favorise les échanges thermiques au sein de la cavité et ce, à cause de l'augmentation de la vitesse suite à l'intensification des courants de convection. Il est intéressant de noter que pour $Ra_{cr1} = 5.5 \times 10^4$ les profils à une dissymétrie vers la gauche, pour le cas (c), et vers la droite pour (a) et (b), et à une autre dissymétrie vers la droite, pour le cas de la source sur la paroi inférieure de la cavité pour $Ra_{cr2} = 3 \times 10^6$, ce qui est confirmé par les isothermes sur **la figure 4.8**.

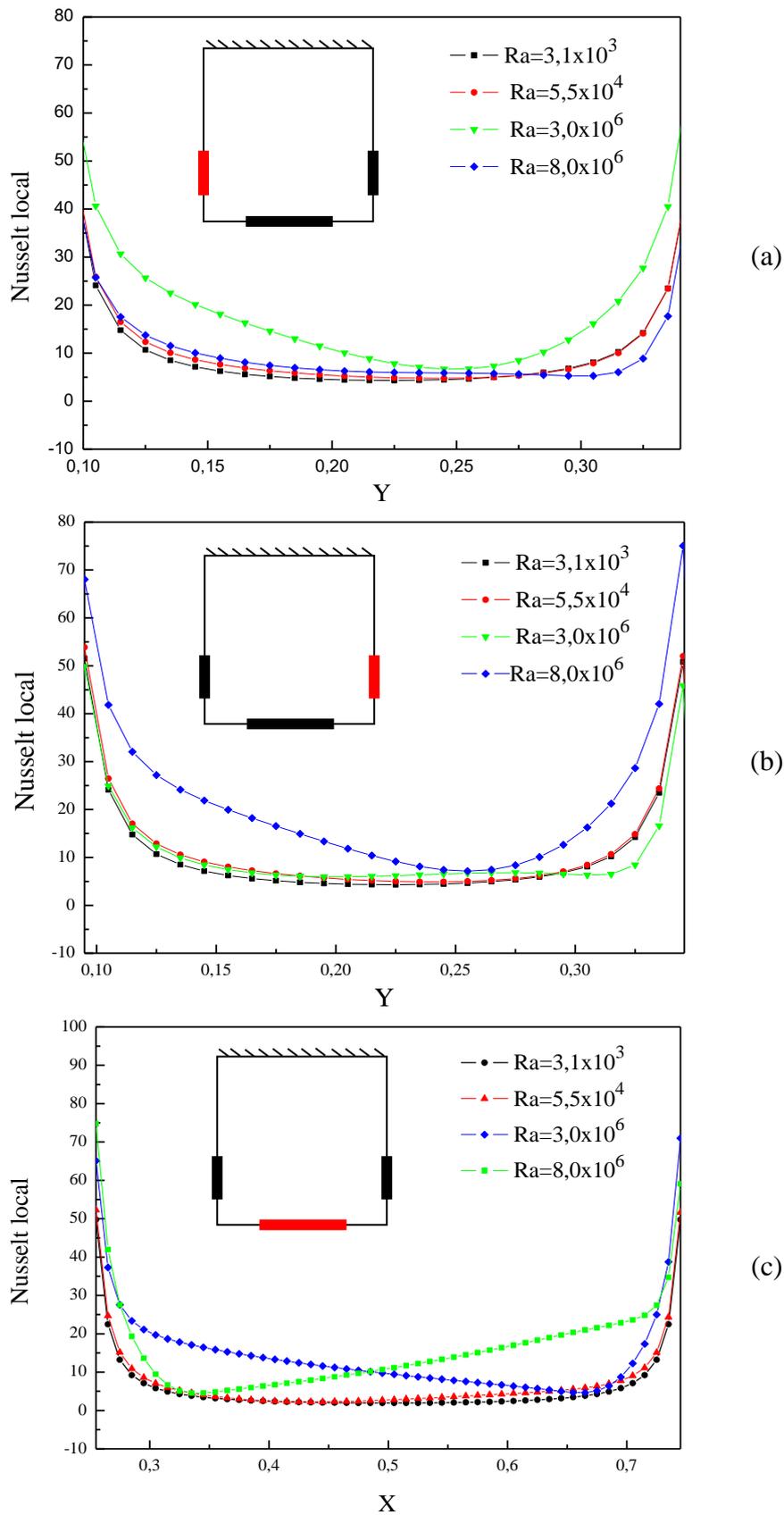


Figure 4.12 : Distributions des nombres de Nusselt locales calculée le long des parties chauffées à (a) : $X=0$, (b) : $X=1$ et (c) : $Y=0$ pour différentes nombres de Rayleigh

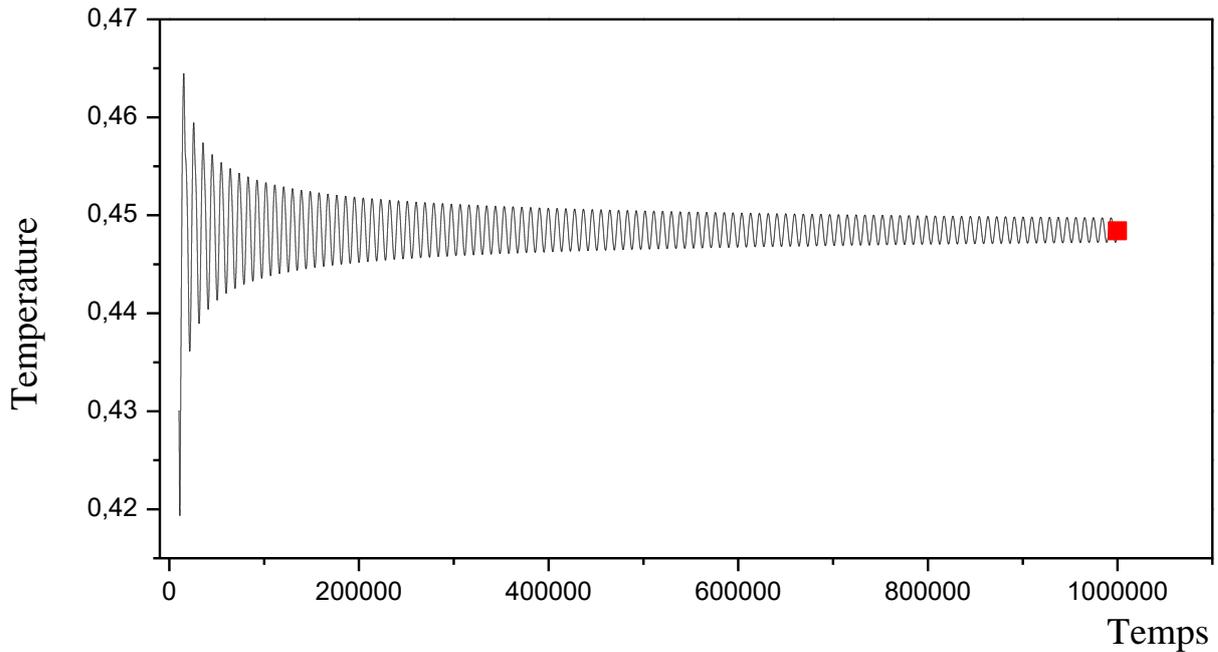


Figure 4.13 : Variation temporelle de la température pour $Ra=7 \times 10^4$

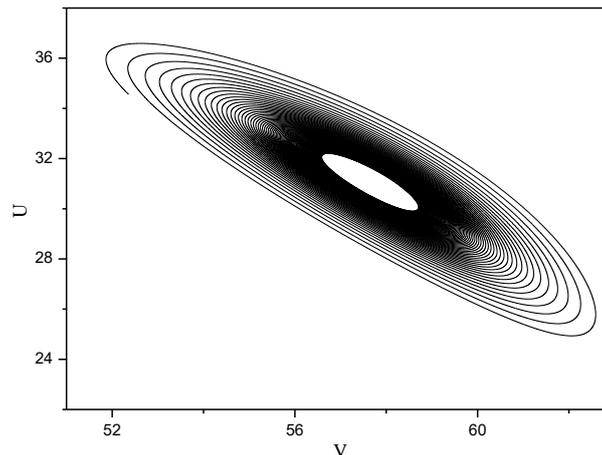


Figure 4.14 : Portrait de phase d'un point limite pour $Ra=7 \times 10^4$

Pour des faibles valeurs du nombre de Rayleigh, les solutions tendent à grand temps vers un régime stationnaire stable. La convection stationnaire transite vers une convection dépendant du temps lorsque le nombre de Rayleigh croît. En effet, **la convection stationnaire** dévient **oscillante périodique**, **pseudo-périodique** et enfin **chaotique**. Pour un nombre de Rayleigh $Ra = 7 \times 10^4$, les solutions présentent une oscillation qui s'amortit afin de se stabiliser à une valeur constante (**Figure 4.13**). La **Figure 4.14** est un portrait de phase ($U = f(V)$) construit avec les deux composantes de la vitesse calculées au centre de la cavité. Son allure en spirale, partant de l'extérieur et aboutissant en un point à l'intérieur, indique que les solutions présentent dans un premier temps une oscillation qui s'amortit par la suite afin de se stabiliser à une valeur constante. On dit dans ce cas que l'attracteur est un point limite.

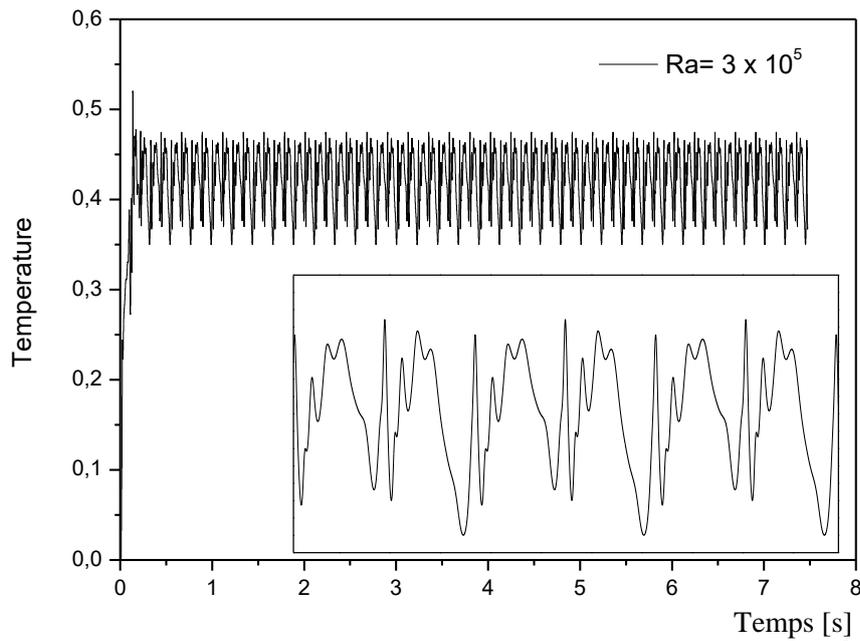


Figure 4.15 : Variation temporelle de la température pour $Ra=3 \times 10^5$

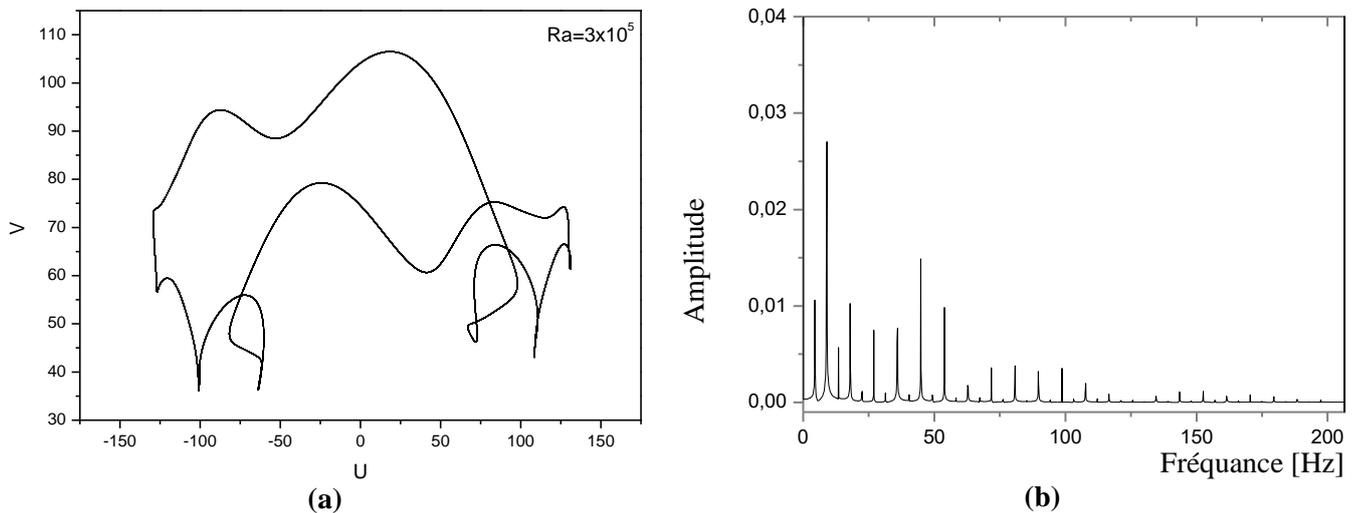


Figure 4.16 : (a) Portrait de phase d'un cycle limite, (b) Spectre de fréquence de Fourier de la température à $Ra=3 \times 10^5$

En augmentant davantage le nombre de Rayleigh, les résultats montrent que les variations temporelles des grandeurs ne sont plus sinusoïdales mais restent néanmoins périodiques (**Figure 4.15**). Le portrait de phase représenté sur la **Figure 4.16.a** est plus complexe que celui obtenu dans le cas précédent mais reste toujours cyclique. Le spectre d'amplitude comporte un pic fondamental et ses harmoniques qui apparaissent plus nettement que pour la valeur précédente de Rayleigh (**Figure 4.16.b**)

Ce comportement périodique persiste jusqu'à un nombre de Rayleigh $Ra = 2.9 \times 10^6$ mais la trajectoire devient de plus en plus complexe au fur et à mesure que ce nombre augmente.

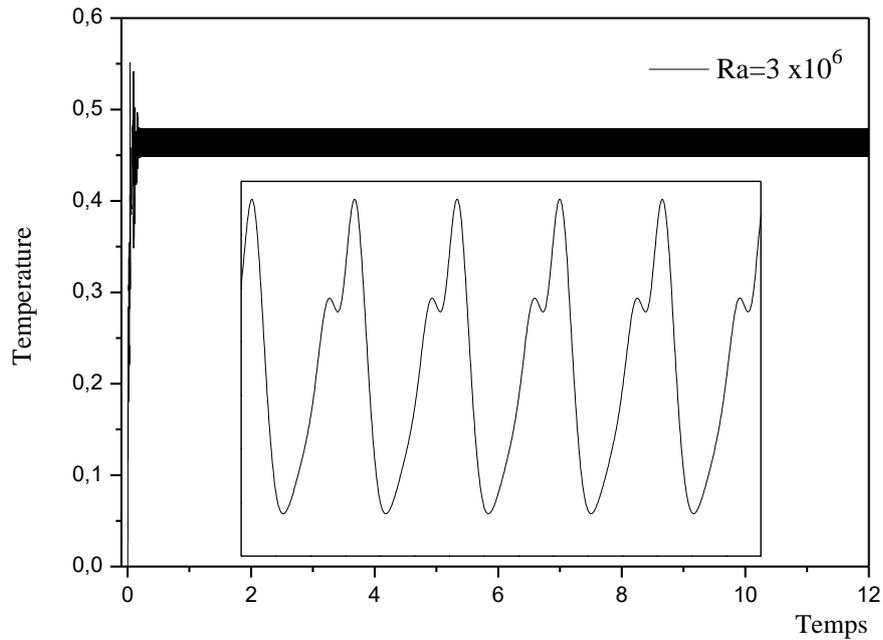


Figure 4.17 : Variation temporelle de la température pour $Ra=3 \times 10^6$

Pour $Ra = 3 \times 10^6$, les signaux temporels des grandeurs ne se stabilisent plus mais évoluent dans le temps de manière oscillatoire périodique. La **Figure 4.17** montre la variation périodique de la température à l'intérieur de la cavité. Le portrait de phase, constitué d'une boucle fermée, confirme cette périodicité (**Figure 4.18.a**). L'attracteur est un cycle limite. Le spectre d'amplitude issu de l'analyse de Fourier du signal temporel de la température au milieu de l'enceinte comporte un pic fondamental et quelques harmoniques de faible amplitude (**Figure 4.18 b**).

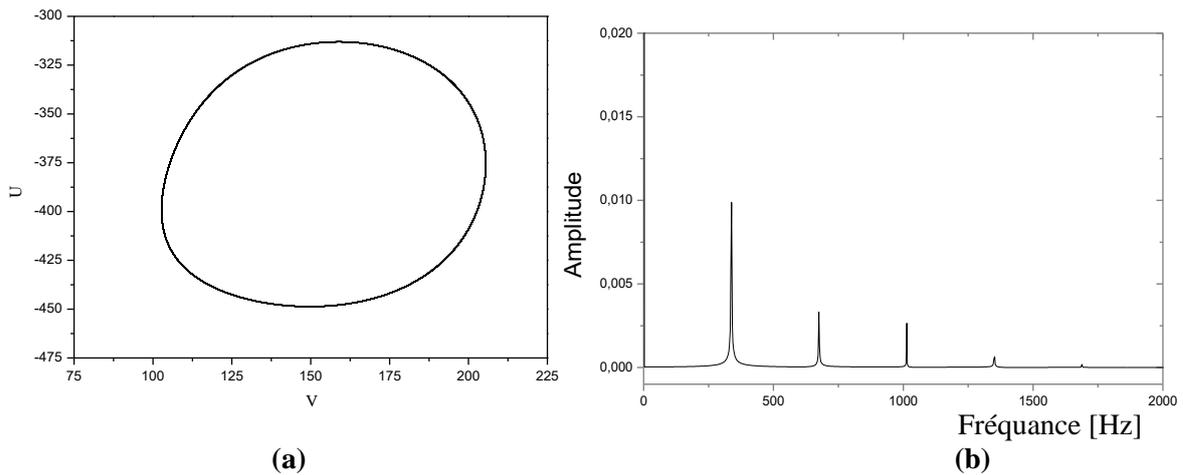


Figure 4.18 : (a) Portrait de phase d'un cycle limite, (b) Spectre de fréquence de Fourier de la température à $Ra=3 \times 10^6$

Il est à noter que l'apparition d'instabilité oscillatoire est liée au fait que l'écoulement perd sa stabilité par une bifurcation de **Hopf** [50]. Pour s'assurer qu'il s'agit d'une bifurcation de type

Hopf, on procède comme suit : pour une bifurcation de **Hopf** supercritique, l'amplitude des solutions périodiques est proportionnelle à $(Ra - Ra_{Cr})^{1/2}$, donc on a d'abord calculé les solutions supercritiques pour différentes valeurs de Ra au voisinage de Ra_{Cr} afin d'éviter tout effet de modulation d'amplitude, puis, nous avons examiné la relation entre l'amplitude A_{amp} des solutions et le nombre de Ra . Enfin, nous avons pu extrapoler les résultats à $A_{amp} = 0$ pour obtenir Ra_{Cr} . La **figure 4.19** présente la courbe $(A_{amp}^2 - Ra)$, dans laquelle une relation quasi-linéaire a pu être obtenue (le coefficient de détermination de la courbe d'ajustement est $R^2 = 0,999$, ce qui représente un degré d'ajustement linéaire élevé avec les données obtenues), ainsi, confirme que la bifurcation est supercritique. L'extrapolation de cette courbe fournit le nombre critique de Rayleigh qui est égal à $Ra_{Cr} = 3 \times 10^6$.

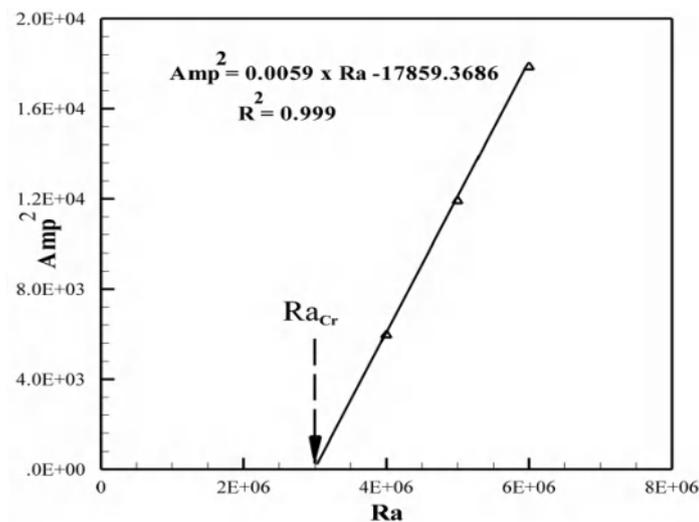


Figure 4.19 : Variation du carrée de l'amplitude de la vitesse U au point $(0.5, 0.5)$ en fonction du nombre de Rayleigh.

Les résultats obtenus qui ne sont pas tous représentés ici montrent que, en augmentant le nombre de Rayleigh, l'attracteur subit une série de doublements de période pour devenir chaotique à partir de $Ra = 8 \times 10^6$. La transition vers le chaos se fait donc via une cascade de bifurcations sous harmoniques. Pour $Ra = 8 \times 10^6$, les solutions commencent à perdre leur périodicité (**Figure 4.20**). Le signal temporel de la **Figure 4.20** montre des oscillations presque aussi régulières que celles de la **Figure 4.15** mais présentant de temps à autre des fluctuations d'amplitude irrégulière. Un tel comportement erratique, est confirmé par le portrait de phase constitué de plusieurs trajectoires (**Figure 4.21 a**) et du spectre d'amplitude présentant une allure déchiquetée (**Figure 4.21 b**).

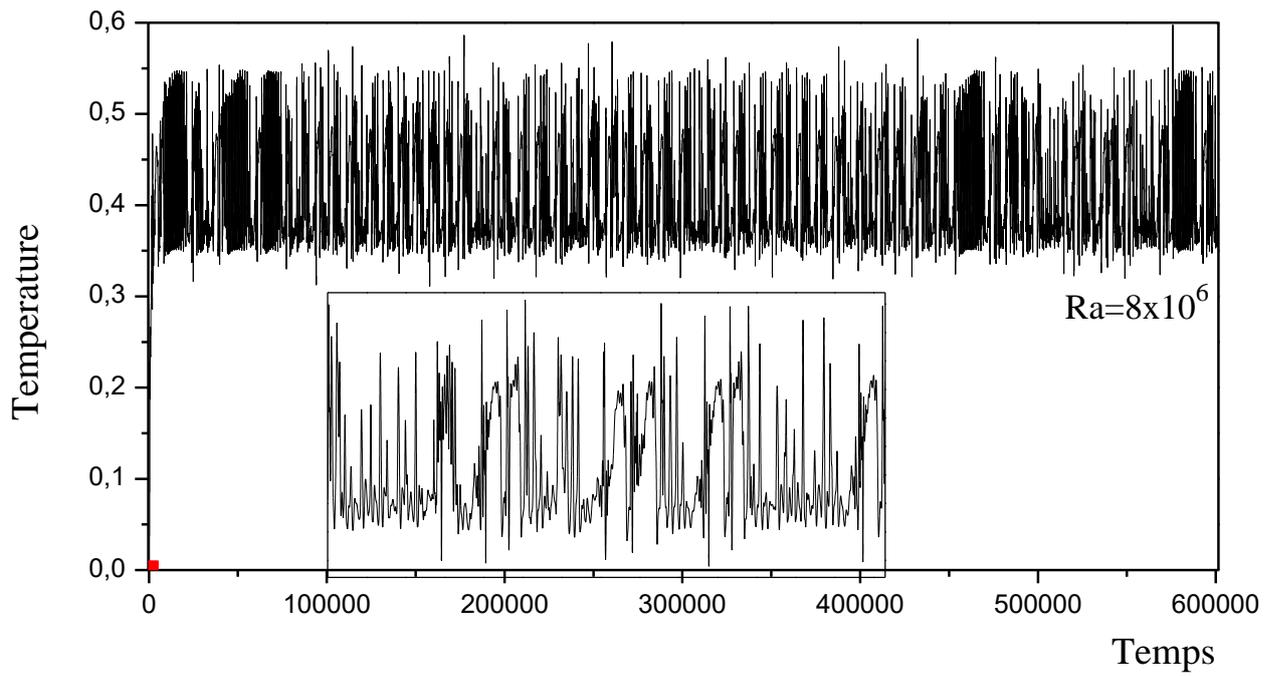


Figure 4.20 : Variation temporelle de la température pour $Ra=8 \times 10^6$

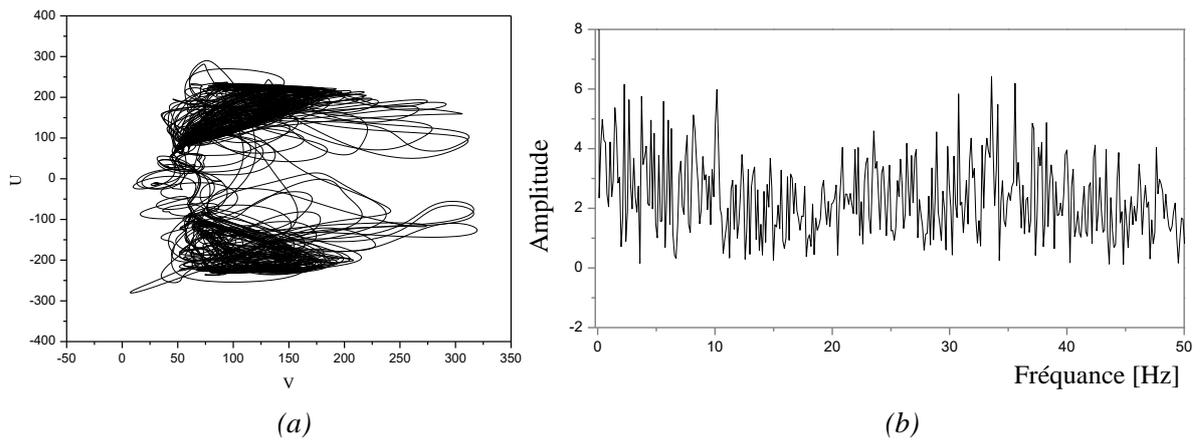


Figure 4.21 : (a) Portrait de phase du chaos, (b) Spectre de fréquence de Fourier de la température à $Ra=8 \times 10^6$

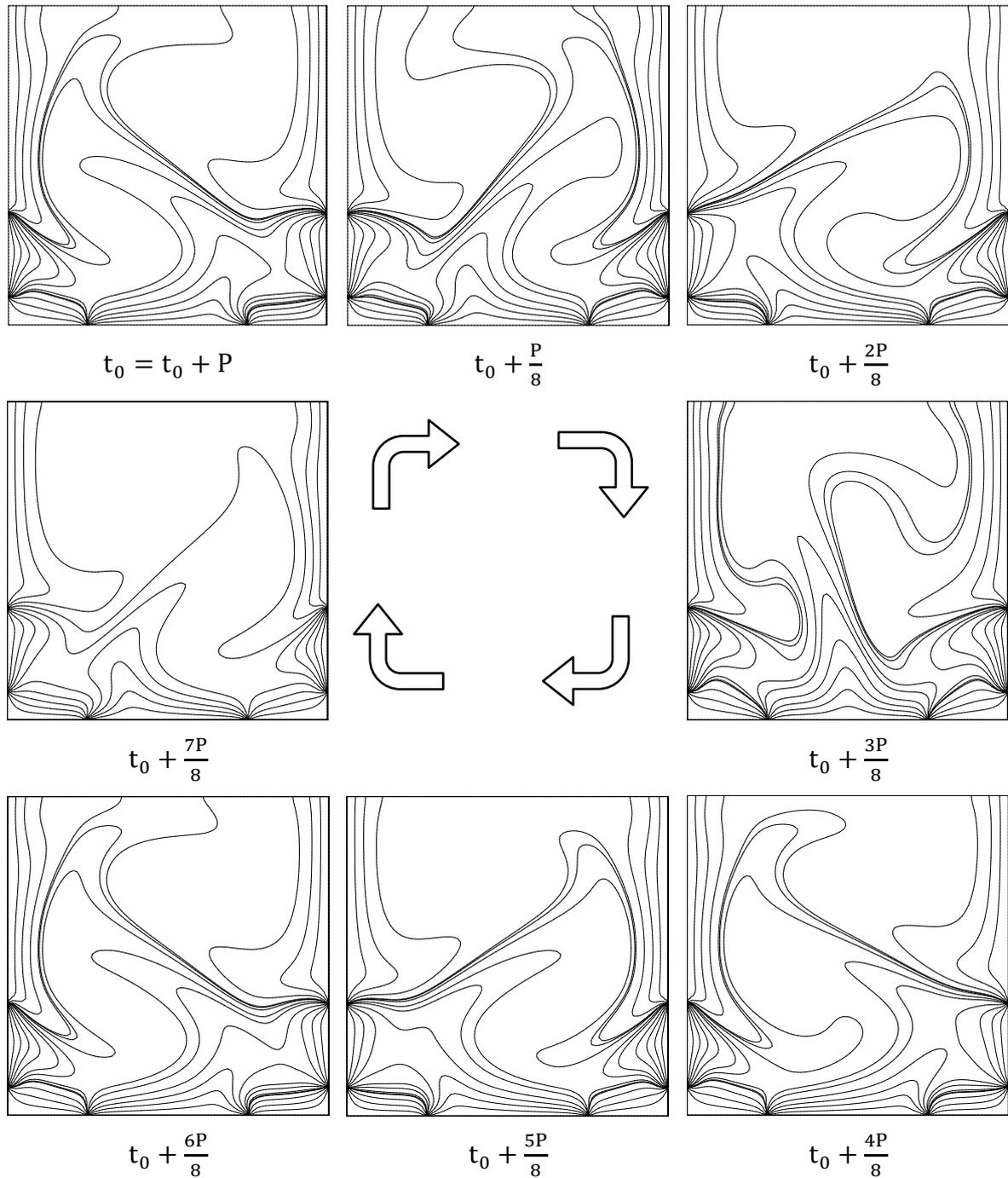


Figure 4.22 : Evolution temporelle des isothermes pendant une période d'oscillation dans le cas bidimensionnel à $Ra_{cr}=3 \times 10^6$

Pour la valeur critique du nombre de Rayleigh, les isothermes pendant une période d'oscillation sont présentées sur la **figure 4.22**, de cette figure on observe un mouvement oscillatoire de la droite vers la gauche puis de la gauche vers la droite.

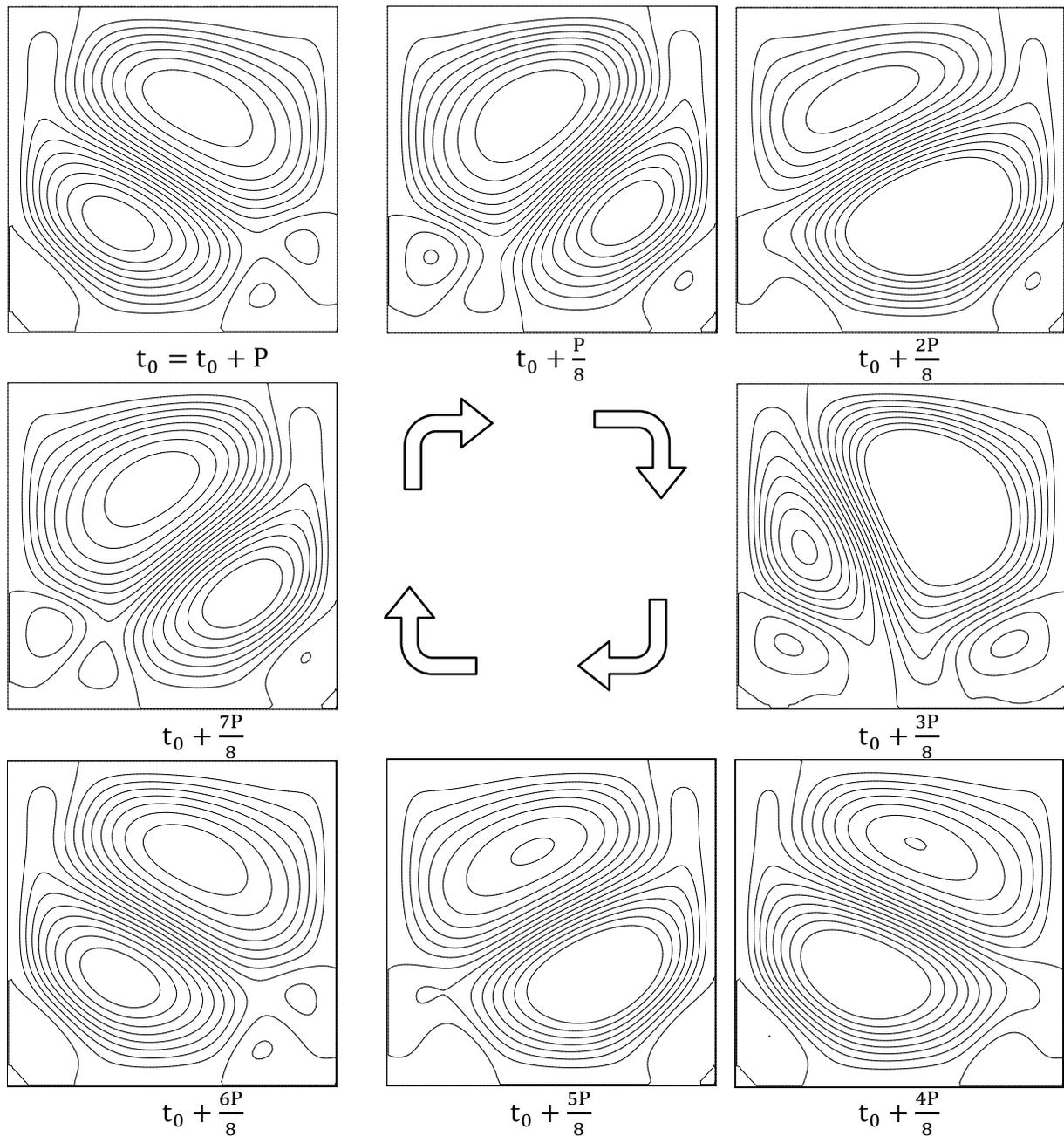


Figure 4.23 : Evolution temporelle des lignes de courant pendant une période d'oscillation dans le cas bidimensionnel à $Ra_{Cr}=3 \times 10^6$

La **figure 4.23** présente l'évolution temporelle des lignes de courant pendant une période d'oscillation. De cette figure, on observe que au début du cycle à l'instant t_0 , choisi arbitrairement, il y a quatre cellules non symétrique, l'une des principaux (à droite) est négative, et plus large dans la moitié droite de l'enceinte par rapport à celle positive à gauche, les deux autres secondaires, se trouvant près de la partie chauffée de la paroi verticale droite de la cavité. Il faut noter toutefois que la première grande cellule tourne plus rapidement que les autres.

Après le premier huitième de la période à $(t_0+P/8)$, nous remarquons une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre autour du centre du carré, comme si le système dans son ensemble faisait un demi-tour, de sorte que la cellule positive devient plus grande et occupe le côté supérieur gauche, tandis que la cellule négative devient plus petite et confinée à la droite de la cavité, tandis que les deux petits anneaux restent près des deux parties chauffées des parois verticales. Pendant le temps $t_0 + 2P/8$, les deux cellules restent sur leurs côtés alors que la cellule négative augmente en taille et en largeur au bas de la cavité, tandis que l'autre positive devient plus petit et occupe le haut de l'enceinte. L'inversion et la rotation dans le sens opposé ont été observées à $t_0 + 3P/8$, de sorte que la taille de la cellule négative a augmenté pour occuper plus de la moitié droite de la cavité, tandis que la cellule positive a diminué du côté gauche. Ce mouvement de rotation des cellules est continué à $t_0 + 4P/8$ par l'effet de la poussée exercée par la plus grande cellule positive à gauche.

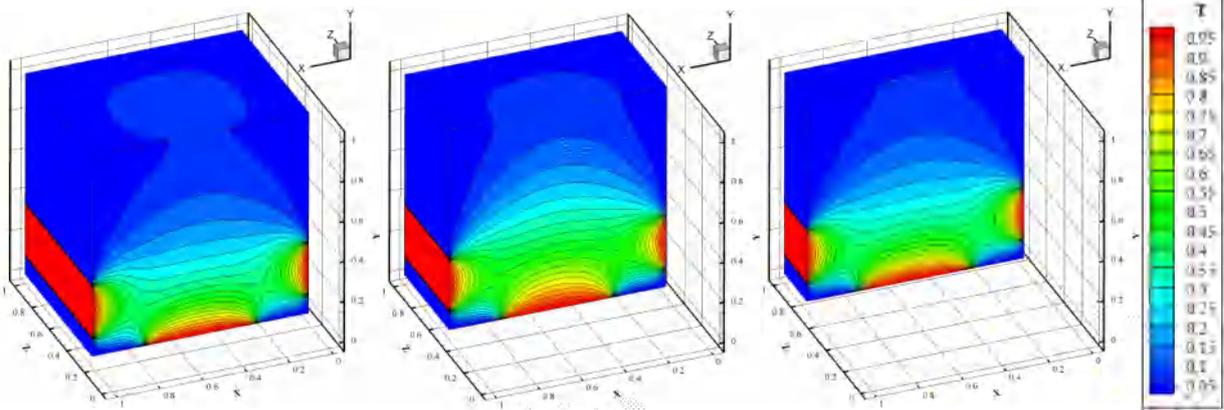
Pendant la seconde demi période $(t_0+5P/8)$, $(t_0+6P/8)$ et $(t_0+7P/8)$, c'est le phénomène inverse qui est observé ce qui nous donne un mouvement d'oscillation des lignes de courant.

Les résultats tridimensionnels sont présentés sur **les figures 4.24, 4.25 et 4.26**, pour différentes valeurs du Ra et à différents plans, par le champ thermique, champ dynamique et les Iso-surfaces de la température, respectivement. En commençant par le champ thermique, on observe tout d'abord que pour le même nombre de Rayleigh, la structure du champ thermique est différente dans chaque plan ($Z=0.25$; $Z=0.5$ et $Z=0.75$), ce qui donne une signification sur l'effet de la troisième direction (OZ) sur l'écoulement et le transfert de chaleur de l'air à l'intérieur de la cavité.

Pour des faibles valeurs du nombre de Rayleigh ($Ra=3.1 \times 10^3$), comme on a vu dans le cas 2d, le champ thermique a une symétrie parfaite par rapport au plan médiane ($0.5, y, z$) dans les trois plans de présentation, avec une seule pique (un seul cercle) de la température sur la paroi supérieure, cela correspond à la dominance de la bande chaude montée sur la paroi inférieure de la cavité. Et fur et à mesure que Rayleigh augmente, la structure du champ thermique se différencie c.-à-d. que le transfert thermique se développe et passe d'un état stable symétrique vers un état instable asymétrique. Le système conserve leur symétrie pour les deux autres valeurs de Rayleigh ($Ra=5.5 \times 10^4$ et 3×10^5), avec toujours une seule pique sur la paroi supérieure (leur cercle augmente avec Rayleigh), mais cette fois avec une distribution de la température différente que celle du premier nombre car l'écart de la température entre l'air et les parties chaudes est important.

La perte de la symétrie apparaît au-delà de la valeur critique de $Ra_{cr}=7.4 \times 10^5$, ou l'effet de deux bandes chaudes latérales joue un grand rôle dans ce cas, où le système est caractérisé par une faible oscillation de gauche à droite du plan de symétrie médiane, avec deux petites cercles (c.-à-d. deux pics de température) sur la paroi supérieure, l'un est de la bande latérale gauche (bien observée sur le plan $(x, y, 0.75)$) et l'autre cercle est due à la dominance de la bande latérale droite sur le plan $(x, y, 0.25)$. L'oscillation s'oriente vers la droite du plan de symétrie, et devient plus forte pour la valeur du nombre de Rayleigh égale à 1×10^6 , le régime dans ce cas est oscillant et dissymétrique vers la droite, avant d'être chaotique pour la valeur de 9.3×10^6 .

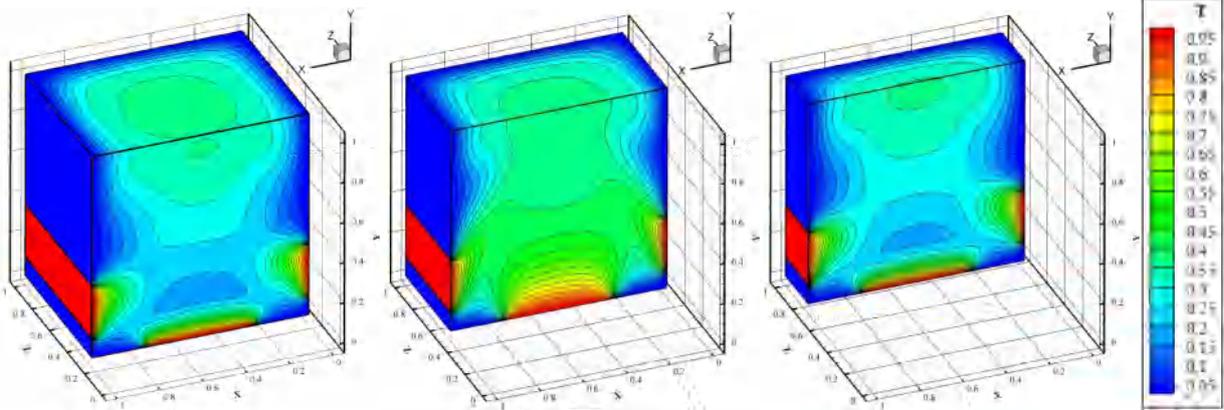
Pour le champ dynamique présenté sur **la figure 4.25** par les trajectoires des molécules d'air provoquer par la variation de la masse volumique due à l'augmentation de la température, on observe que pour le cas stable correspond à $Ra=3.1 \times 10^3$ l'existence d'un plan de symétrie médiane $(0.5, y, z)$, ou tout ce qui se passe en termes de mouvement d'un côté, se passe exactement la même chose de l'autre côté, mais dans le sens opposé. Par exemple, en ce qui concerne le plan $(x, y, 0.5)$, nous remarquons que sous l'effet de la chaleur, les particules d'air chaud montent du milieu de la partie inférieure chaude vers la paroi supérieure froide pour changer leur direction vers la droite et la gauche, puis commencent à redescendre, formant deux grands anneaux symétriques, de taille égale, mais de sens opposé. Dans les deux autres plans de présentation des résultats, on remarque la formation des zones de recirculation de chaque côté, complètement symétriques par rapport au plan de symétrie, ce qui reflète l'effet égal de la chaleur de chaque côté de la cavité. Cette symétrie est valable pour les deux nombres de Rayleigh suivants ($Ra=5.5 \times 10^4$ et 3×10^5), mais avec une différence notable due à l'augmentation de la température. On remarque cette fois que pour les deux plans avant $(x, y, 0.25)$ et arrière $(x, y, 0.75)$, l'existence de quatre cellules contre-rotatives, où les deux inférieures sont dues à l'influence des deux barres chaudes latérales, et les deux supérieures sont dues à l'effet de la chaleur de la barre chaude sur la paroi inférieure. Le début de la perte de symétrie se manifeste clairement par le changement de la taille des zones de recirculation et la déformation de leur forme, de sorte que comme nous l'avons vu à propos du champ thermique, cela se reflète également dans le champ dynamique, et l'effet de la chaleur de la bande chaude dans la surface de la paroi latérale gauche l'emporte, de sorte que la dissymétrie se fait vers le côté droit. La nature du mouvement devient turbulente avec l'augmentation des valeurs du nombre de Rayleigh ($\geq 10^6$), et on remarque également une augmentation du nombre d'anneaux de recirculation de quatre à cinq avec des tailles et des distributions différentes.



Plan(x, y, 0.25)

Plan(x, y, 0.5)

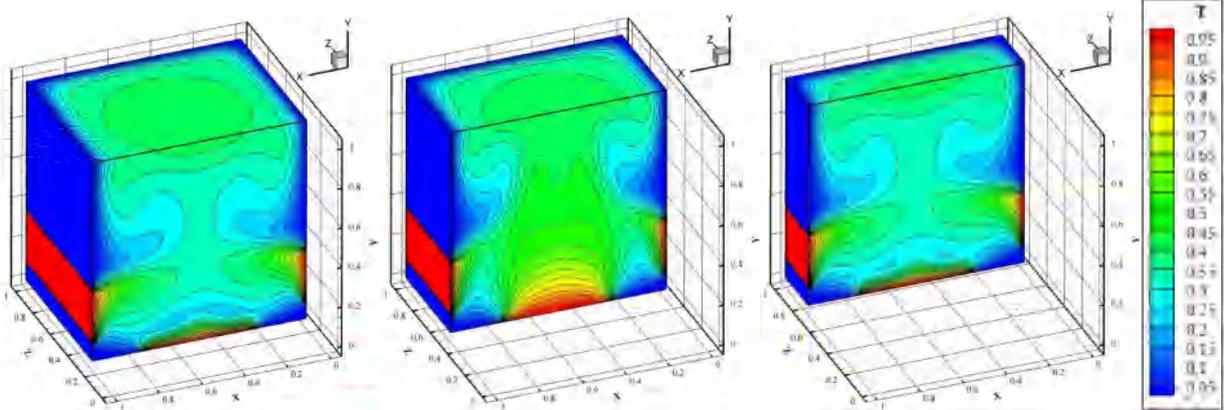
Plan(x, y, 0.75) Ra=3.1×10³



Plan(x, y, 0.25)

Plan(x, y, 0.5)

Plan(x, y, 0.75) Ra=5.5×10⁴



Plan(x, y, 0.25)

Plan(x, y, 0.5)

Plan(x, y, 0.75) Ra=3×10⁵

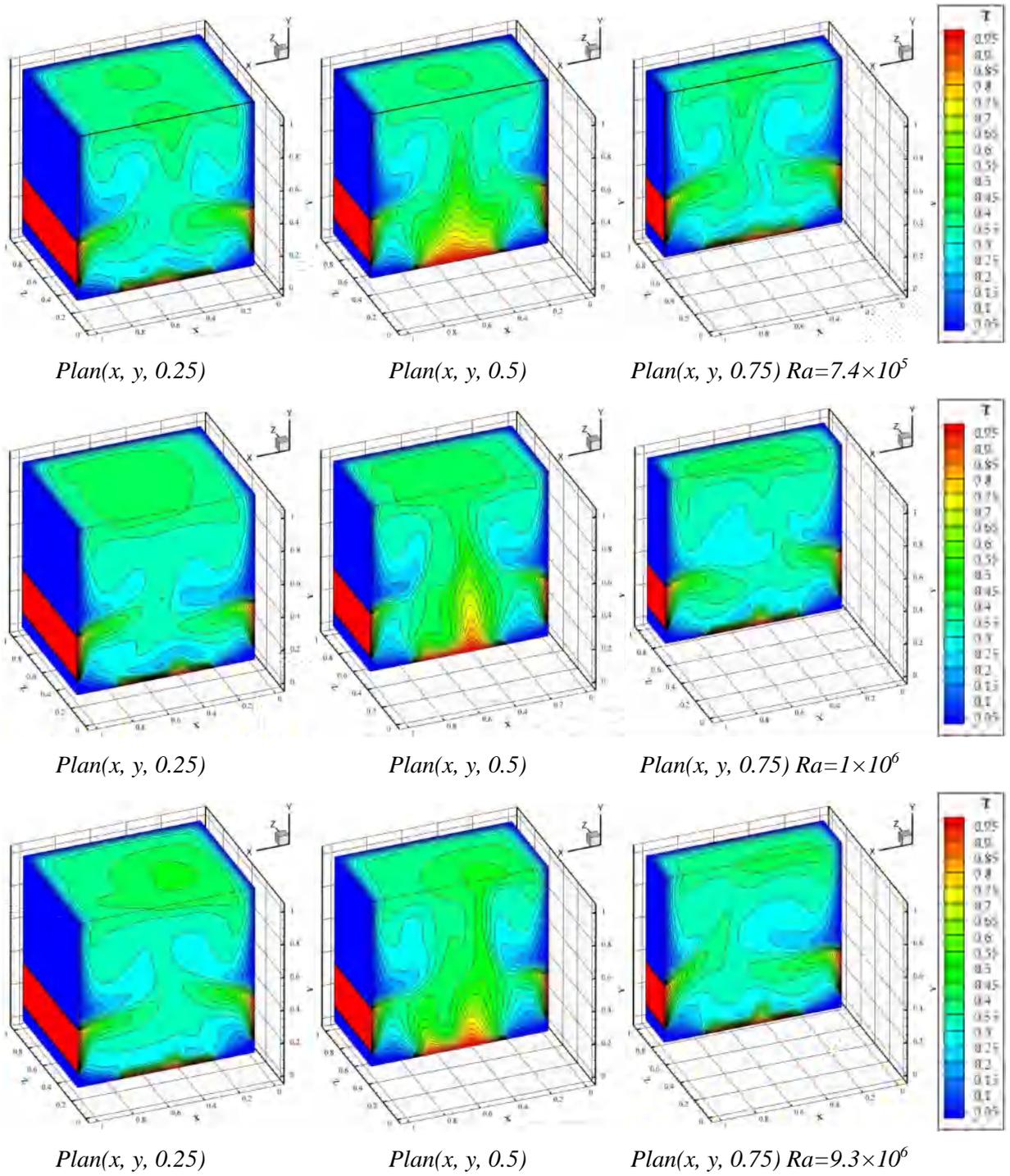
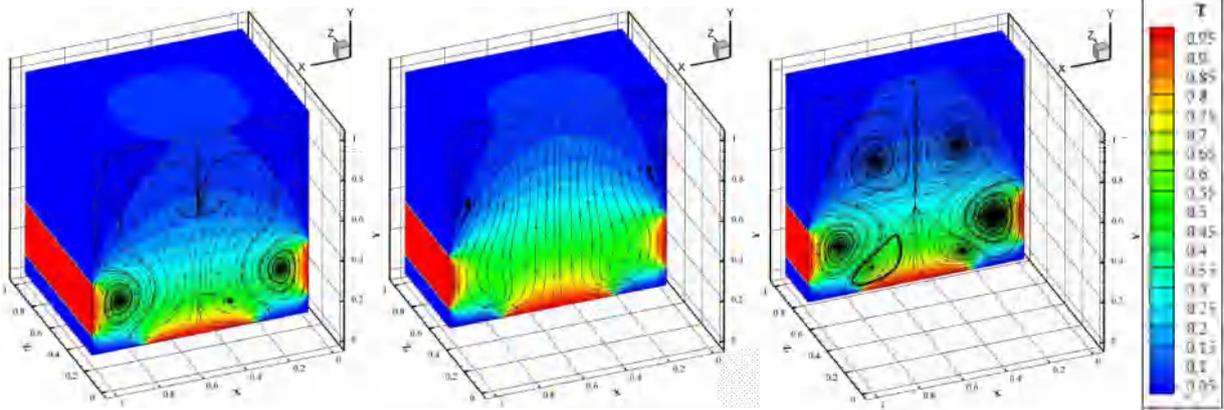


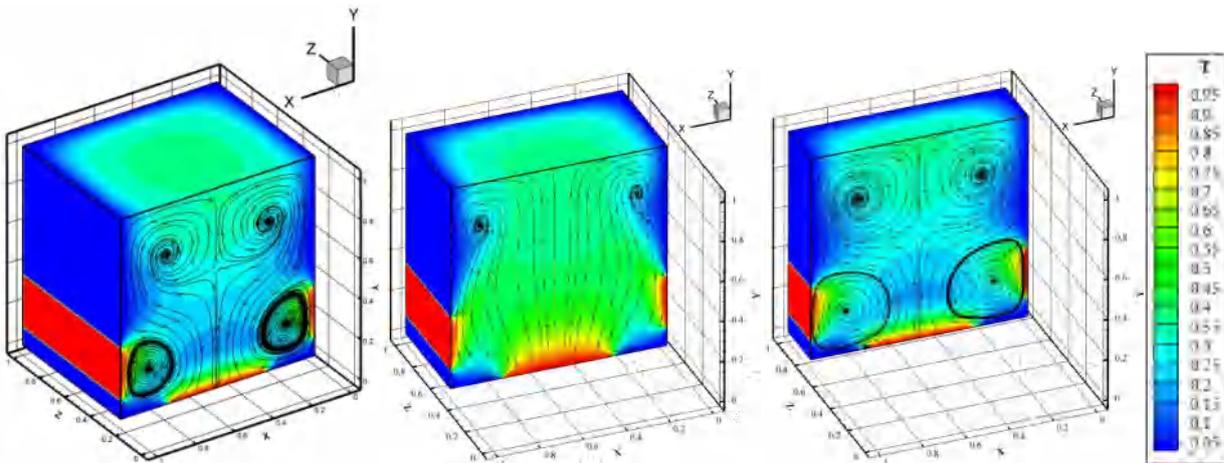
Figure 4.24 : Champs thermique Cas 3D- dans différentes plans et pour différentes nombres de Rayleigh



Plan(x, y, 0.25)

Plan(x, y, 0.5)

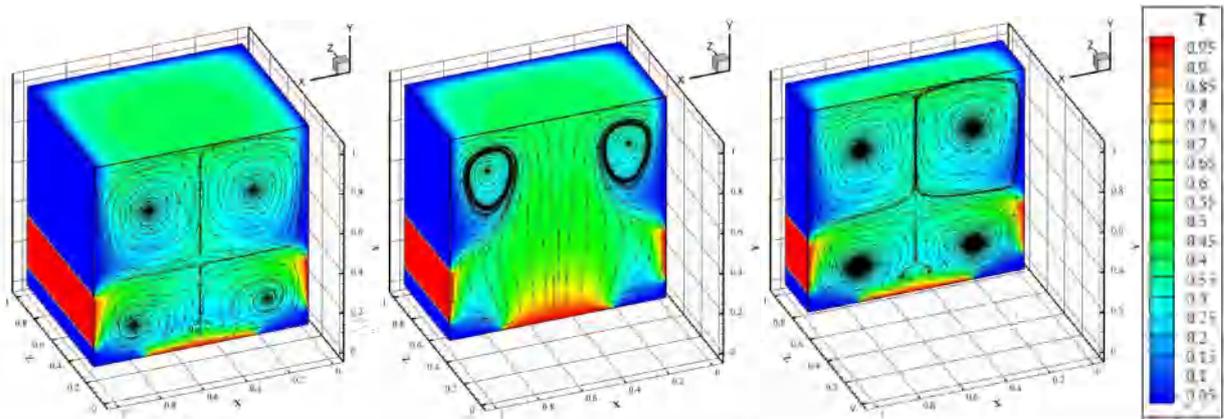
Plan(x, y, 0.75) $Ra=3.1 \times 10^3$



Plan(x, y, 0.25)

Plan(x, y, 0.5)

Plan(x, y, 0.75) $Ra=5.5 \times 10^4$



Plan(x, y, 0.25)

Plan(x, y, 0.5)

Plan(x, y, 0.75) $Ra=3 \times 10^5$

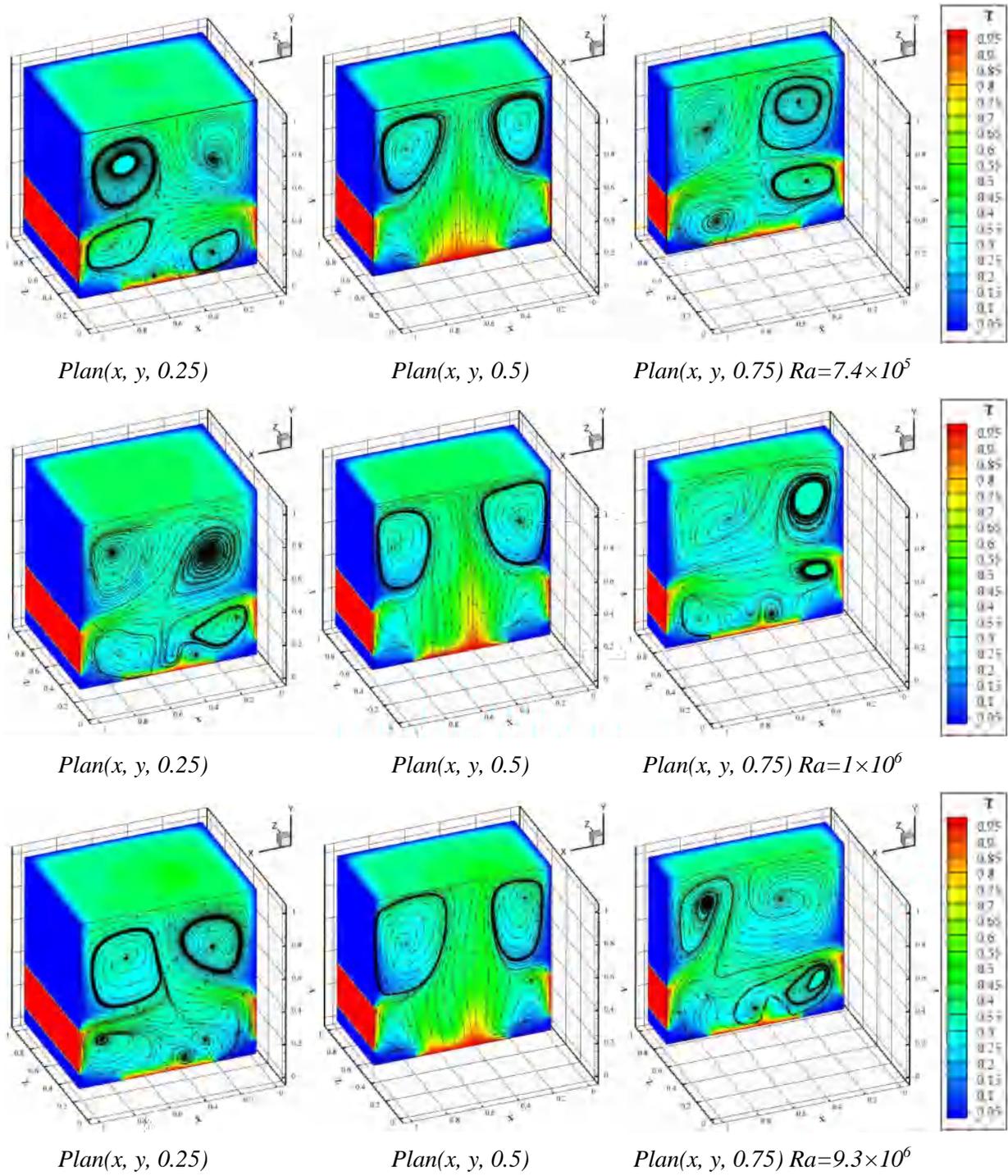
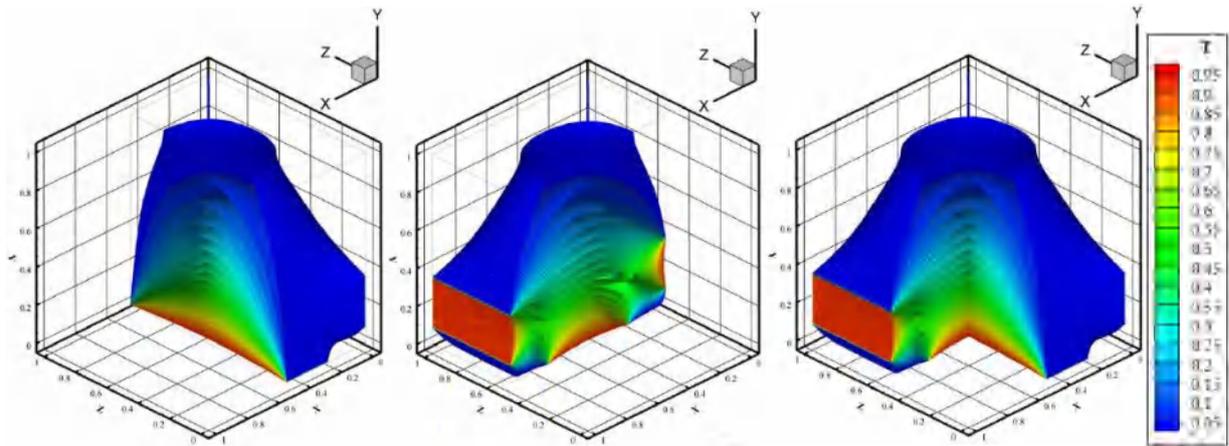


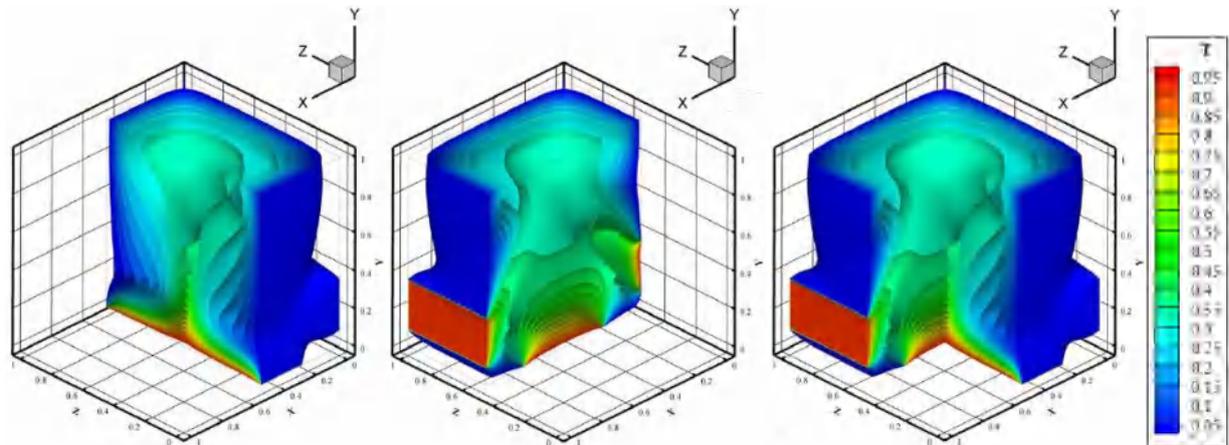
Figure 4.25 : Champs dynamique Cas 3D- dans différents plans et pour différentes nombres de Rayleigh



$Plan(0.5, y, z)$

$Plan(x, y, 0.5)$

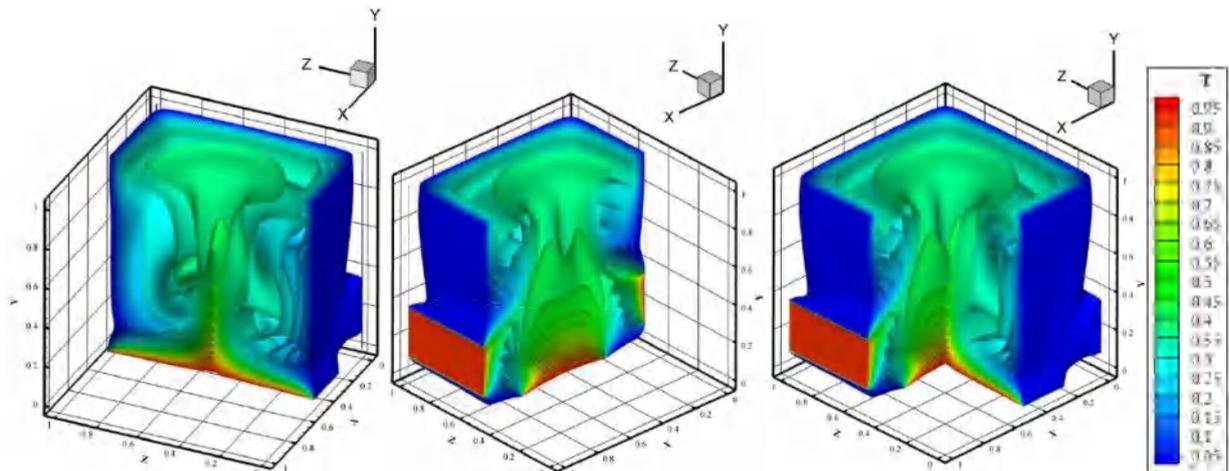
$Plan(0.5, y, 0.5) Ra=3.1 \times 10^3$



$Plan(0.5, y, z)$

$Plan(x, y, 0.5)$

$Plan(0.5, y, 0.5) Ra=5.9 \times 10^4$



$Plan(0.5, y, z)$

$Plan(x, y, 0.5)$

$Plan(0.5, y, 0.5) Ra=3 \times 10^5$

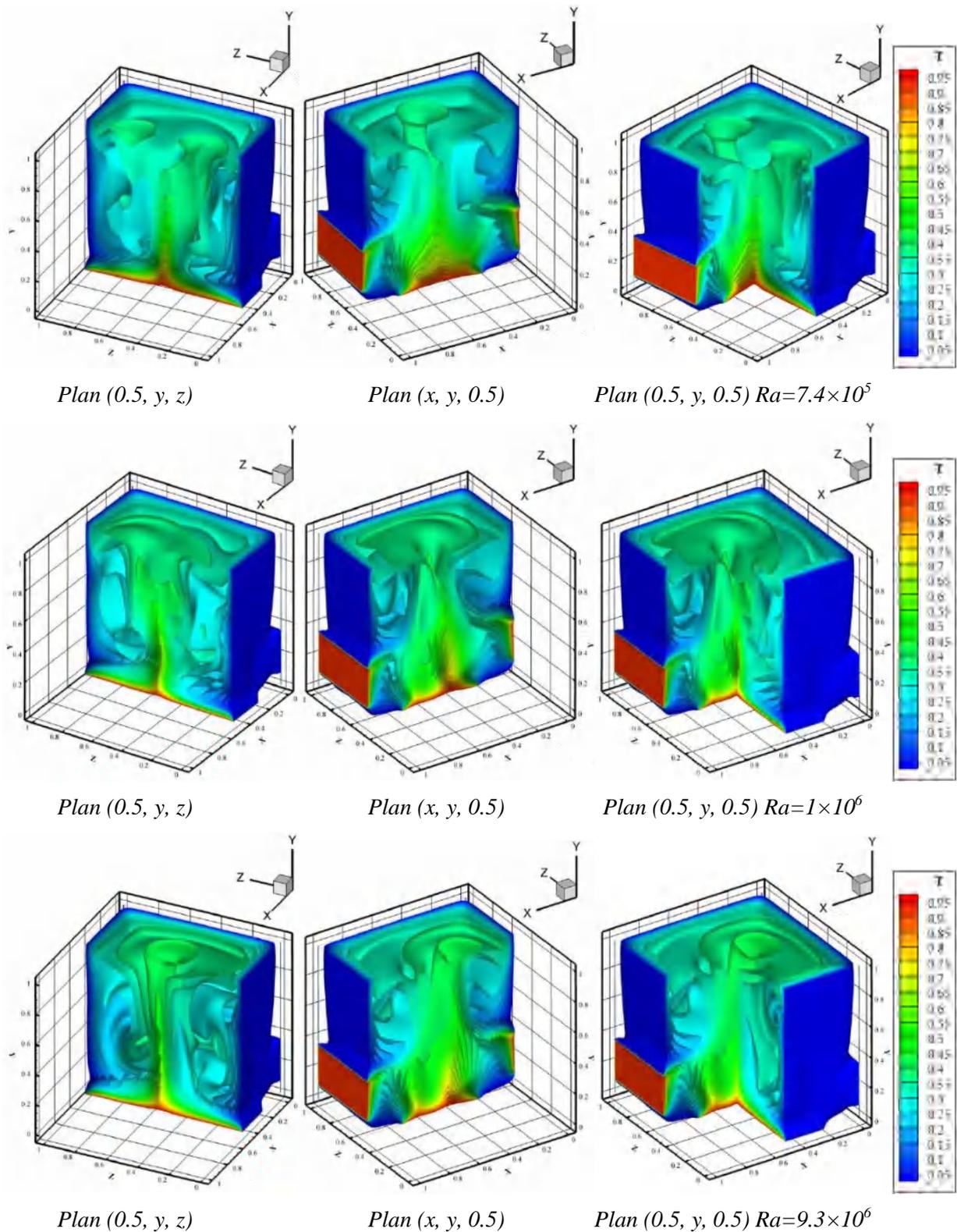


Figure 4.26 : Les iso-surfaces de la température dans différents plans et pour différentes nombres de Rayleigh

Les iso-surfaces de température pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh sont illustrées à la **figure 4.26**. Pour les faibles valeurs du nombre de Rayleigh, le flux est faible en

raison du régime de transfert de chaleur dominant en quasi-conduction et l'air est presque au repos. Les isothermes présentent une stratification presque verticale près de la paroi supérieure adiabatique et une stratification inclinée près des parties non chauffées sur les parois latérales droite et gauche. Il est évident que ces iso-surfaces sont toujours orthogonales aux parois adiabatiques. En d'autres termes, le flux est principalement dominé par la flottabilité et le transfert de chaleur est contrôlé principalement par la convection naturelle.

En augmentant le nombre de Rayleigh, l'air chauffé près des bandes chauffées sur la paroi inférieure et les deux autres parois latérales, est de plus en plus entraîné en raison des forces de flottabilité créant des couches parallèles se forment sous la forme d'une flamme au milieu, confinée entre deux petites flammes sur les côtés droit et gauche dans un mouvement ascendant vers le haut se terminant par un forme semblable à la sortie d'un cratère de volcan. On remarque que ce comportement se développe pour des valeurs faibles du nombre de Rayleigh ($Ra= 5.5 \times 10^4$ et 3×10^5), mais avec une symétrie complète pour les deux plans perpendiculaires (0.5, y, z) et (x, y, 0.5).

Comme on peut le voir sur la figure, le nombre de Rayleigh est un paramètre efficace sur la force de l'écoulement et un fort écoulement créer la dissymétrie, l'oscillation puis le chaos est observé avec l'augmentation de ce paramètre de $Ra= 4.7 \times 10^5$, 10^6 et 9.3×10^6 , successivement.

4.5.2 Deuxième cas : Centre – Centre

Les figures 4.27, et 4. 28 montrent les lignes de courant et les isothermes à l'intérieur de la cavité pour différentes valeurs du nombre du Rayleigh.

La figure 4.27 illustre la structure du champ dynamique pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh. On remarque la formation de deux grandes cellules primaires et de deux petites cellules sur le centre de chaque côté de la cavité contrarotatives ; l'une des cellules primaires tourne dans le sens des aiguilles d'une montre et la seconde tourne dans le sens contraire, ainsi que les petites cellules tournent dans le sens contraire des deux grandes cellules. On observe que les deux grandes cellules sont presque égales ou il subit une déformation vers l'intérieur du milieu par l'effet de poussée produit par la partie chauffée dans le milieu de chaque paroi latérale. Donc, la configuration présente un écoulement symétrique caractérisé par quatre cellules, une primaire et une secondaire au centre de chaque côté de la cavité contrarotatives et identiques par rapport à l'axe de symétrie.

L'augmentation de la valeur du nombre de Rayleigh rompt la symétrie. En effet, les deux grandes cellules se subdivisent pour donner naissance à des petites cellules secondaires, aussi

bien dans la partie supérieure que dans la partie inférieure de l'enceinte. Les cellules de convection changent de taille, de manière alternative. Le gonflement des unes s'accompagne du rétrécissement des autres. En examinant les isothermes, on peut remarquer la formation de couches limites thermiques au niveau des parois chaudes, qui se manifestent par des resserrements des lignes.

Comme on a vu dans le 1^{er} cas, pour de faibles valeurs du nombre Ra compris entre 10^3 et 3.85×10^5 comme le montrent les isothermes sur la figure 4.28, les isothermes se produisent symétriquement par rapport à l'axe médiane verticale de la cavité, et le transfert de chaleur est principalement dû à la conduction.

D'autre part, en augmentant le nombre de Rayleigh le mécanisme du transfert de chaleur se conjugue entre la conduction et la convection et finalement la convection est le mécanisme de transfert de chaleur dominant à haut nombre de Rayleigh.

On observe tout d'abord le début d'une petite oscillation au centre de la cavité à $Ra = 2.9 \times 10^5$, mais dans ce cas le système garde sa symétrie par rapport à l'axe de symétrie, ce qui s'explique par l'égalité de l'effet alternatif des parties chauffées sur les parois latérales de la cavité. Une désymétrie vers la gauche mais sans oscillation est observée à la valeur critique de nombre de Rayleigh de 3.9×10^5 , et ce comportement dure jusqu'à la valeur de 9×10^5 . Cela peut s'expliquer par la dominance de l'effet de la partie chauffée sur la paroi latérale droite par rapport à la partie chauffée sur la paroi gauche. Le début de l'oscillation mais toujours avec une dissymétrie vers la gauche est observé pour $Ra = 1 \times 10^6$. La fréquence de l'oscillation augmente au fur et à mesure avec la valeur du Rayleigh jusqu'à la valeur de 9×10^6 où le régime devient chaotique.

On en conclut que l'augmentation du nombre de Rayleigh entraîne le rapprochement des isothermes les unes des autres dans la zone située près de la paroi inférieure chauffée et des deux parties chauffées des parois verticales, c'est à dire que les gradients de température deviennent plus élevés à proximité des parties chauffées. Ceci implique une augmentation du transfert thermique à travers la paroi inférieure de l'enceinte pour un nombre de Rayleigh plus élevé. Par conséquent, les températures les plus élevées sont celles du fluide qui circule parallèlement à la paroi chauffée, tandis que les températures les plus basses sont celles du fluide qui circule parallèlement aux parois froides. En effet, le gradient de température au voisinage des parois latérales devient important pour le développement d'une couche limite thermique et le transfert de chaleur correspond à une convection naturelle.

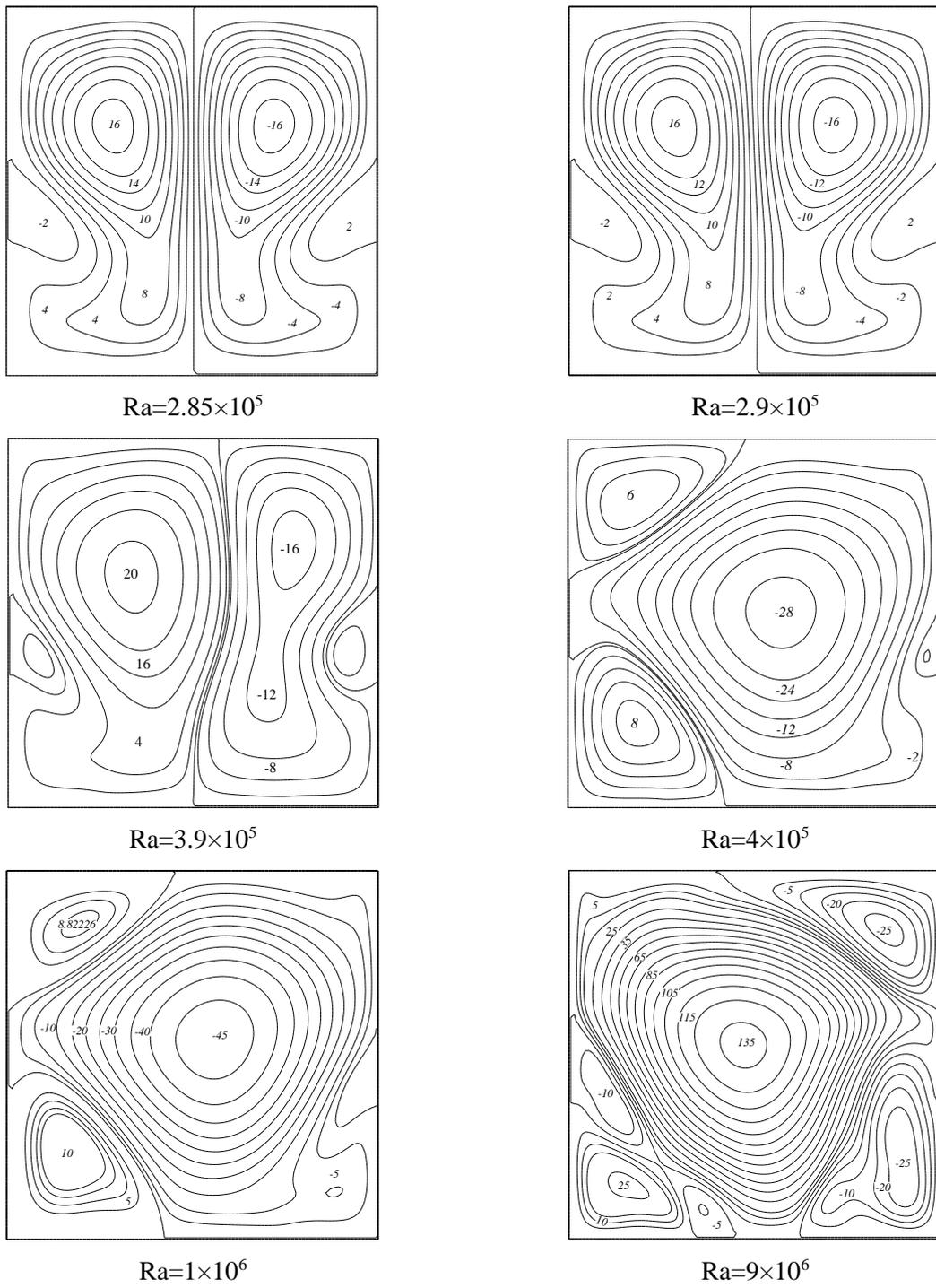


Figure 4.27 : Les lignes de courant pour différentes valeurs de Ra

variables (U et V), suggérant que le nombre de Rayleigh critique de la transition vers un écoulement instationnaire est $Ra_c = 3.9 \times 10^5$.

Pour $Ra = 4 \times 10^5$, l'amplitude des oscillations est supérieure à celle du nombre de Rayleigh inférieur. Il faut noter que, le nombre de Rayleigh critique pour le passage à la convection naturelle instationnaire dans la cavité avec deux sources de chaleur au milieu de chaque paroi latérale (cas 2 : Centre-Centre) est supérieur à celui dans le cas de la première configuration (cas1 : Bas-Bas).

La figure 4.32 (a), (b) et (c) illustre la variation du nombre de Nusselt local calculé le long des parties chauffées des parois latérales (a) et (b), et le long de la source de chaleur de la paroi inférieure (figure 4.32 (c)), pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh. La variation du nombre de Nusselt local montre que, pour des faibles valeurs du nombre de Rayleigh $Ra < 2,85 \times 10^5$ que les profils à une symétrie parfaite par rapport à l'axe médiane verticale passe par le centre de chaque source, et que l'augmentation de nombre de Rayleigh à provoquer la dissymétrie du profile. Il est intéressant de noter que pour $Ra_{cr1} = 4 \times 10^5$ les profils à une dissymétrie vers la gauche, pour le cas (c), et vers la droite pour (a) et (b).

Dans la figure 4.33, on présente les Isothermes pondant une période d'oscillation pour la valeur critique du nombre de Rayleigh. Il apparaît clairement que le mouvement oscillatoire alterne de droite à gauche puis inversement, mais dans ce cas (Centre-Centre) et par rapport au premier cas (Bas-Bas), les Isothermes au centre de la cavité sont plus fine et sa longueur s'étend jusqu'au centre de la cavité, et cela est dû à la position des sources de chaleur au milieu des deux surfaces latérales.

La figure 4.34 présente l'évolution temporelle des lignes de courant pondant une période d'oscillation. Ce que l'on peut voir sur cette figure, pour la première moitié du période, après que le système était composé de quatre cellules, l'un primaire et l'autre secondaire dans chaque moitié de la cavité, mais avec le temps, ce système a commencé dysfonctionnement de sorte que des cellules de tailles et de positions différentes se forment, de sorte que le nombre diminue et que la taille augmente Plus tard, l'union des cellules secondaires les uns avec les autres. On remarque le processus inverse durant la seconde moitié du cycle de l'oscillation.

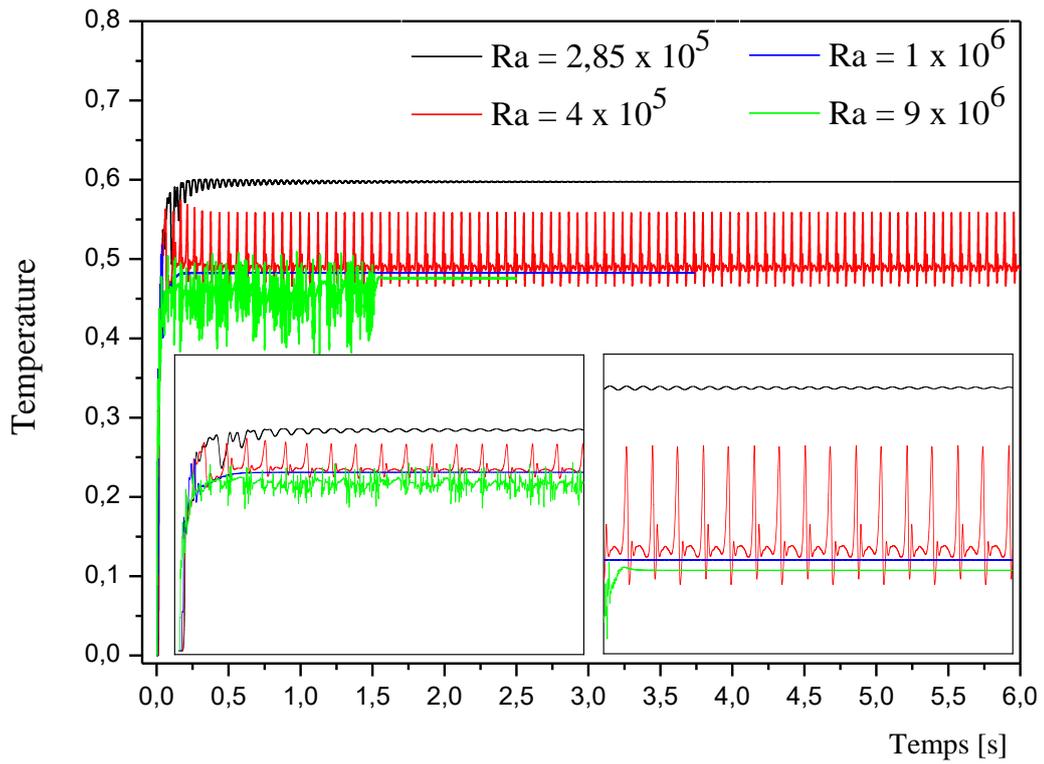


Figure 4.29 : Evolution temporelle de la Température calculée au centre de la cavité pour différentes valeurs de Rayleigh

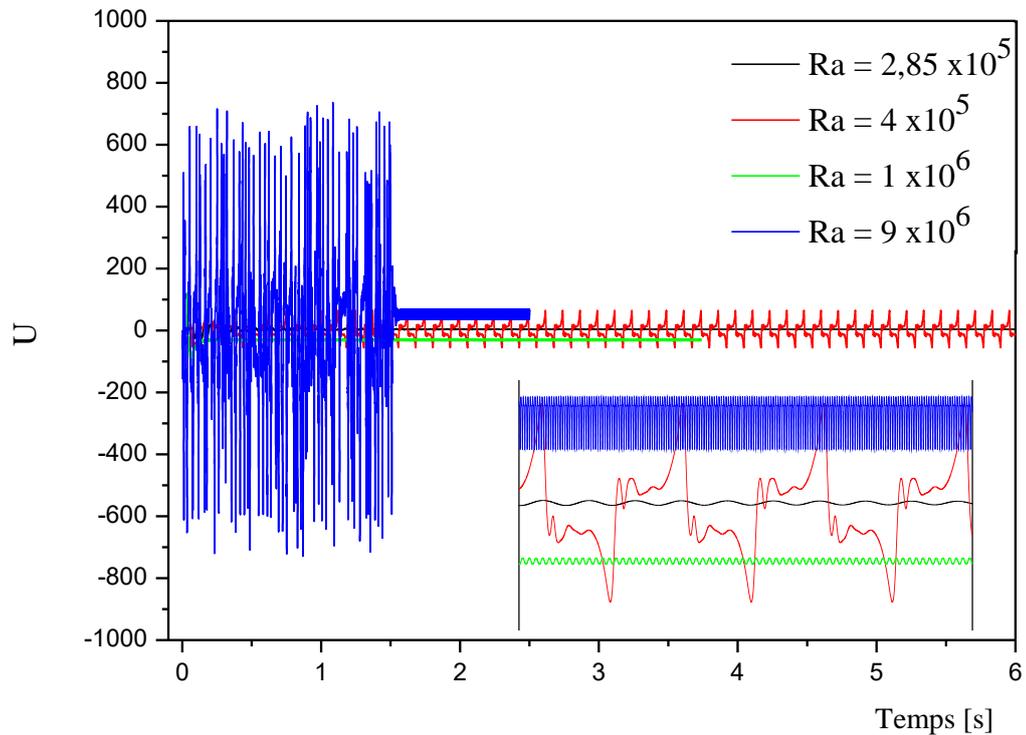


Figure 4.30 : Evolution temporelle de la vitesse U calculée au centre de la cavité pour différentes valeurs de Rayleigh

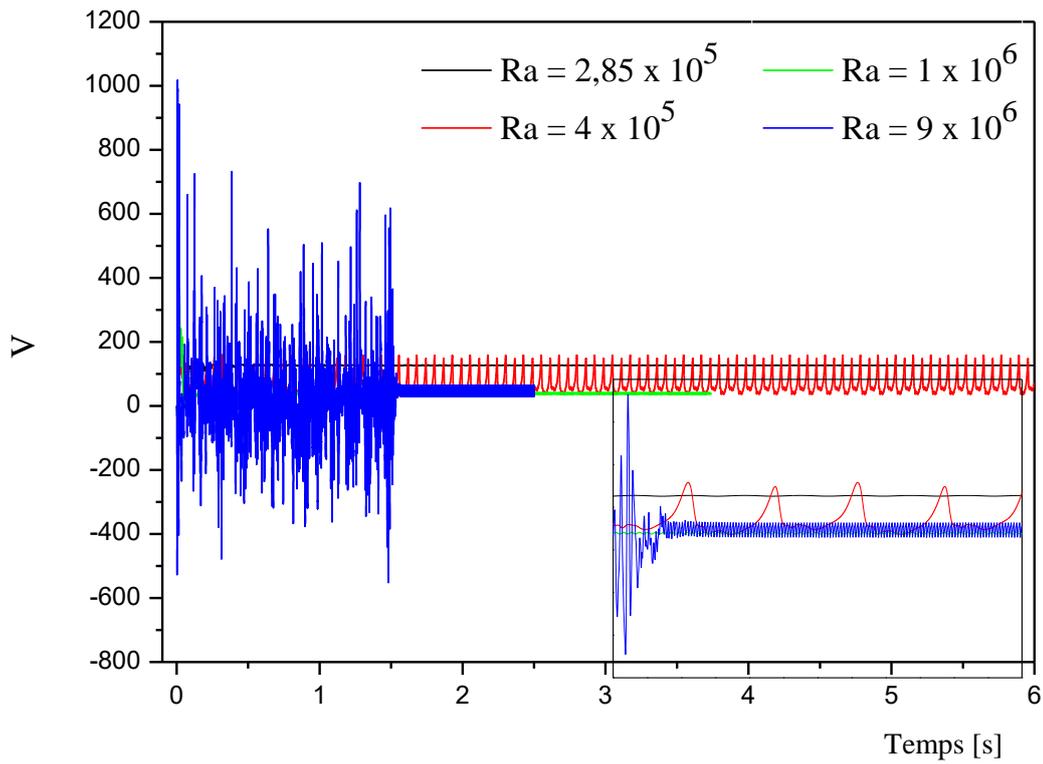


Figure 4.31 : Evolution temporelle de la vitesse V calculée au centre de la cavité pour différentes valeurs de Rayleigh

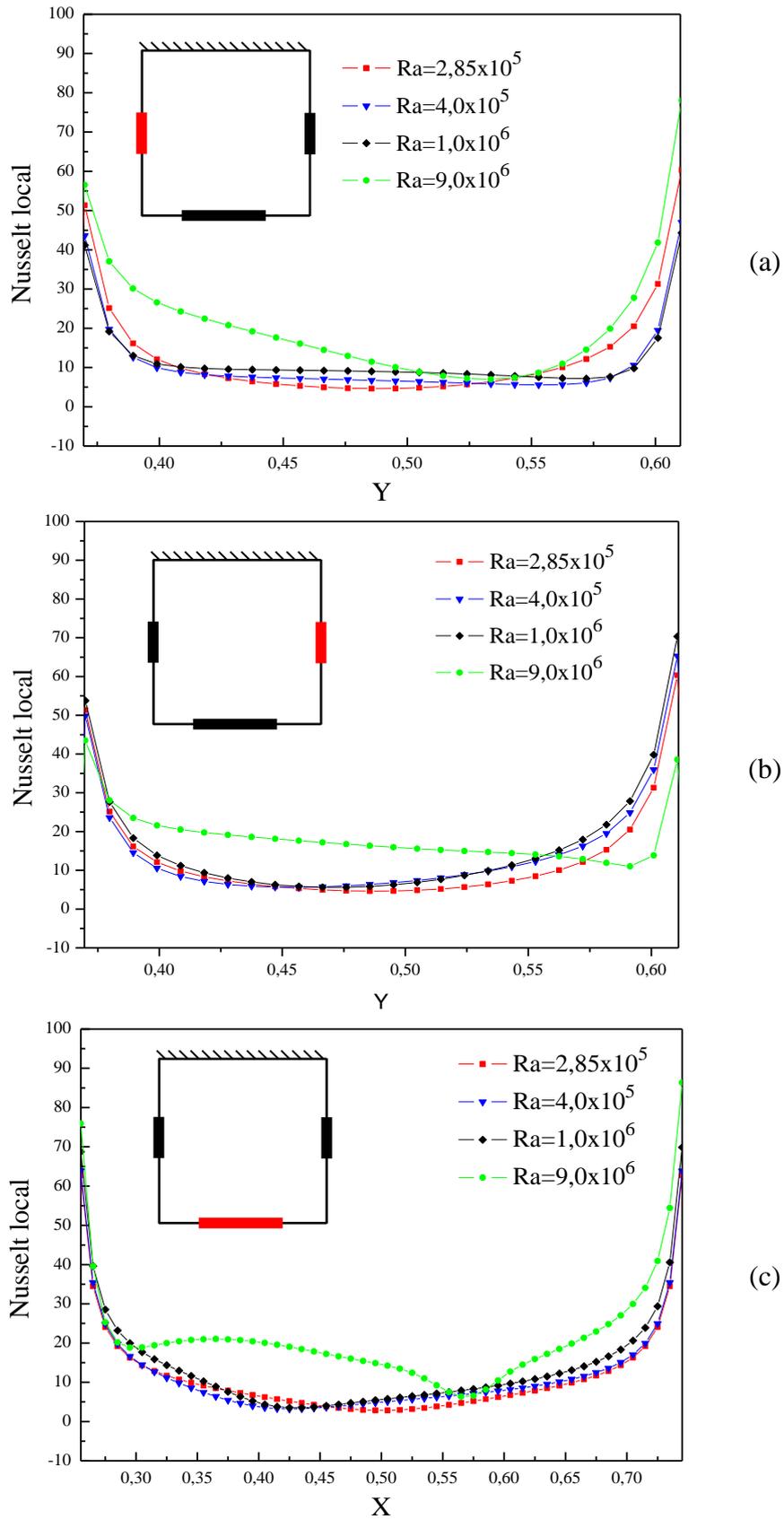


Figure 4.32 : Distributions des nombres de Nusselt locales calculées le long des parties chauffées à (a) : $X=0$, (b) : $X=1$ et (c) : $Y=0$ pour différents nombres de Rayleigh à $Y=0.5$

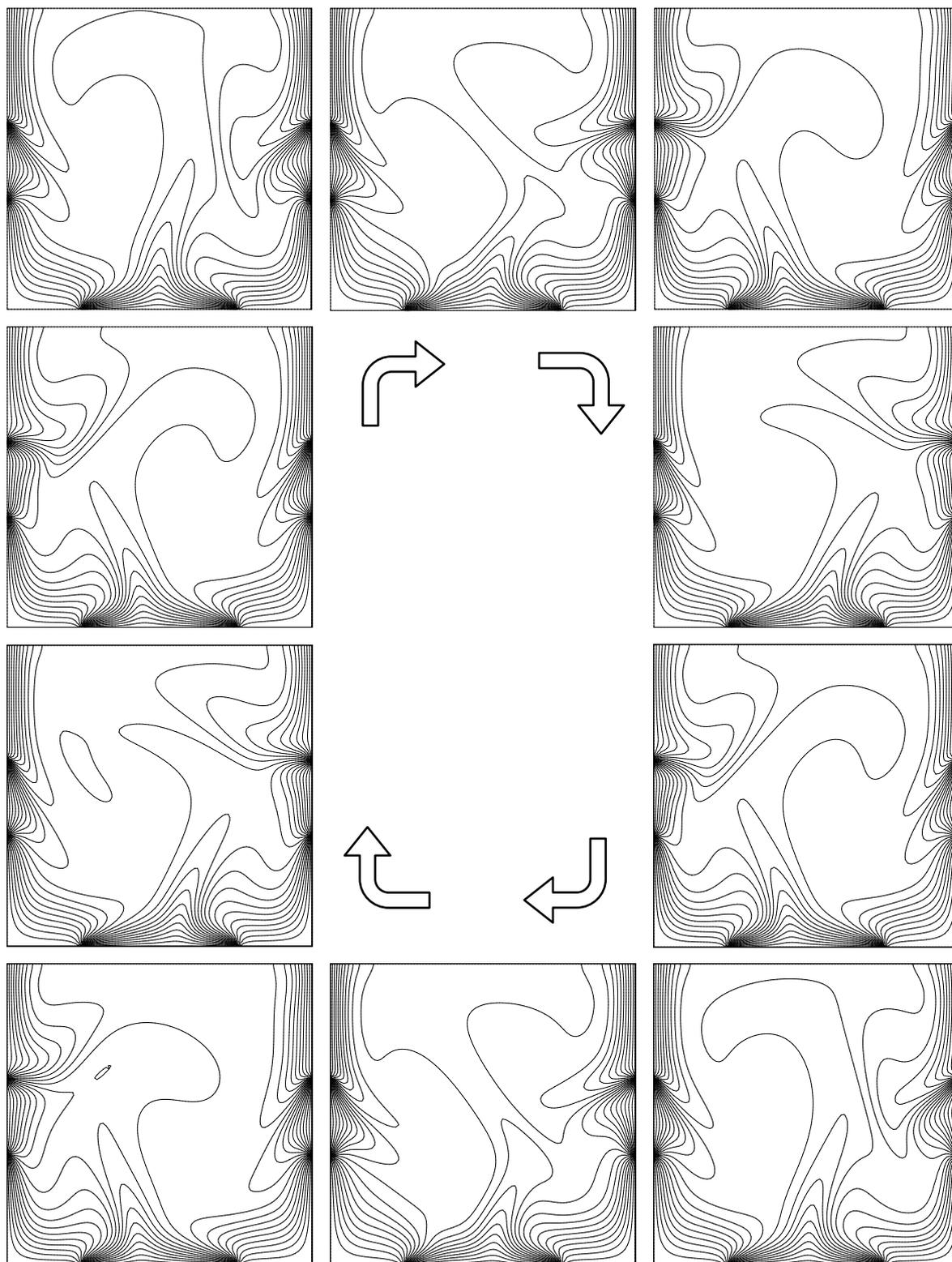


Figure 4.33 : Evolution temporelle des Isothermes pendant une période
d'oscillation à $Ra_{cr}=3.9 \times 10^5$

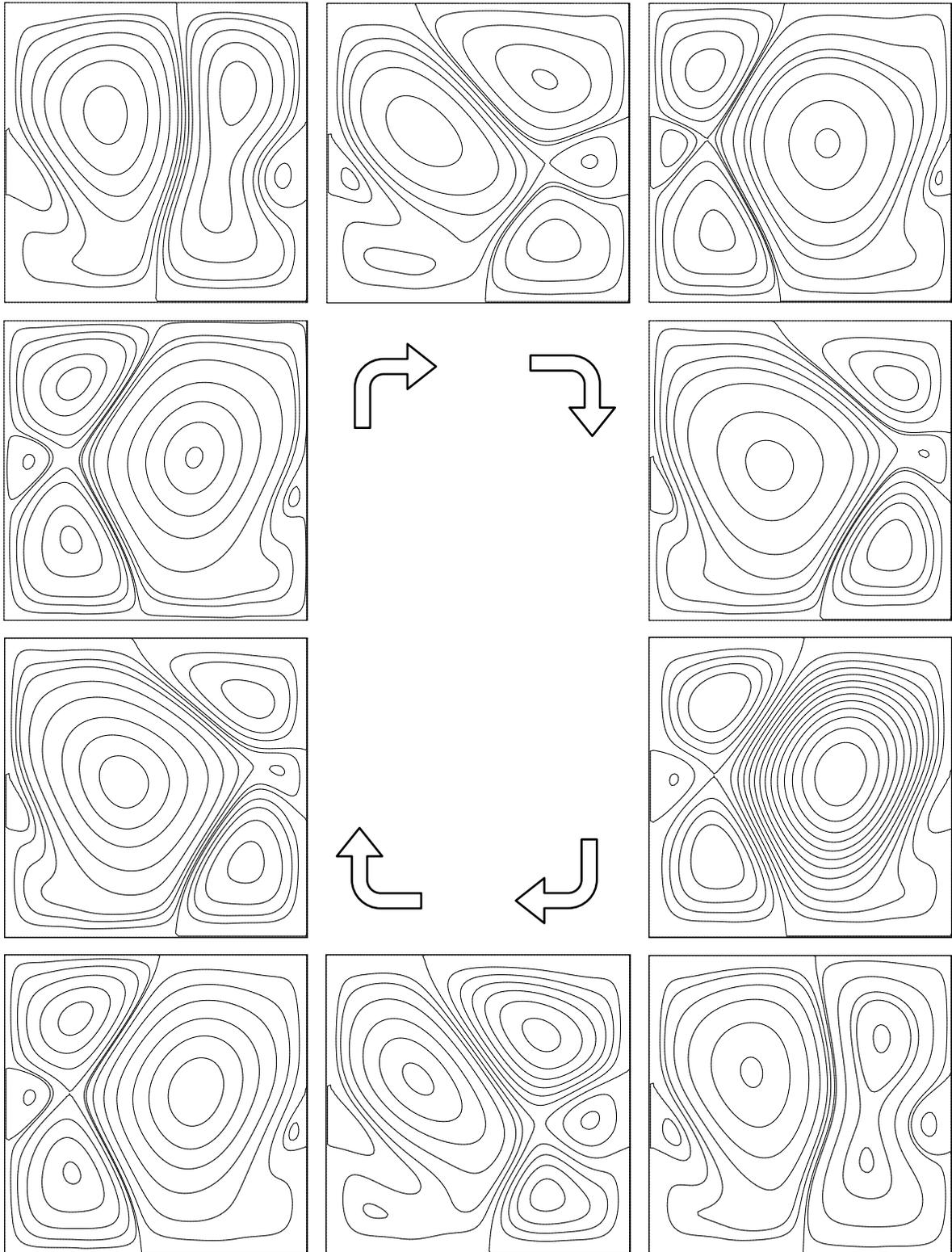


Figure 4.34 : Evolution temporelle des lignes de courant pendant une période d'oscillation à $Ra_{Cr}=3.9 \times 10^5$

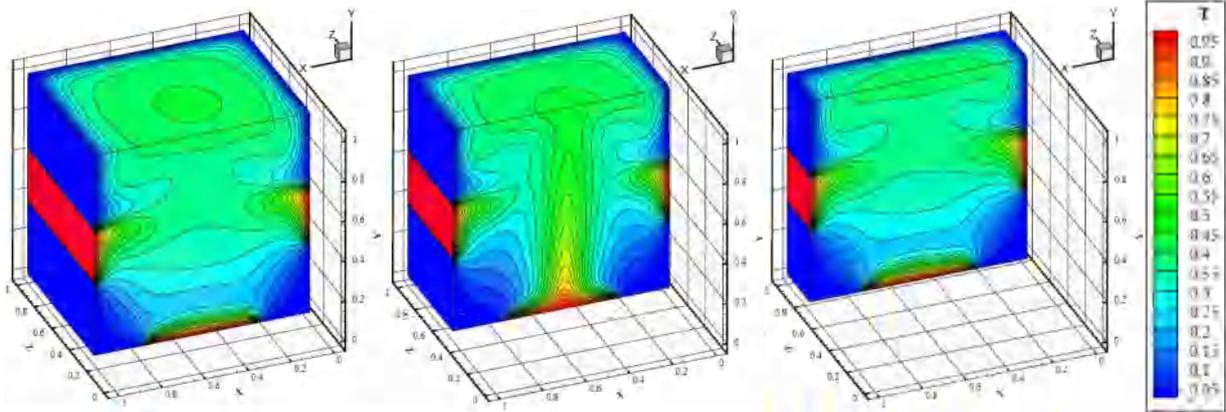
La topologie aérothermique du système est présentée en 3d sur les **figures 4.35, 4.36 et 4.37** par le champ thermique, champ dynamique et les Iso-surfaces de la température

respectivement, dans différents plans et pour différentes valeurs de Rayleigh. On observe tous d'abord, comme pour le premier cas (Bas-Bas), que pour le même nombre de Rayleigh, la structure du champ thermique et dynamique sont différents dans chaque plan ($Z=0.25$; $Z=0.5$ et $Z=0.75$), ce qui donne une signification sur l'effet de la troisième direction (OZ) sur l'écoulement et le transfert de chaleur de l'air à l'intérieur de la cavité dans ce deuxième cas (Centre-Centre).

Pour des valeurs du Ra compris entre 2.85×10^5 et 3.9×10^5 , les Isothermes et même les lignes de courant garde sa symétrie parfaite par rapport au plan vertical médian ($X=0.5$, Y, Z), sur les trois plans de présentation (à $Z=0.25$; 0.5 et 0.75), avec un seul pic -pour le champ thermique- (un seul cercle augmente en taille avec Rayleigh) de la température sur la paroi supérieure. Et fur et à mesure que Rayleigh augmente, le transfert thermique se développe et passe d'un état stable symétrique vers un état instable asymétrique. Cette instabilité apparaît au-delà de la valeur critique de $Ra_{cr}=4 \times 10^5$, où l'effet de deux bandes chaudes au centre des parois latérales joue un grand rôle dans ce cas, où le système est caractérisé par une faible oscillation de gauche à droite du plan de symétrie médiane, avec deux petites cercles (c.-à-d. deux pics de température) sur la paroi supérieure. L'oscillation devient plus forte pour la valeur du nombre de Rayleigh égale à 1×10^6 , le régime dans ce cas est oscillatoire.

Pour le champ dynamique, on observe que pour le cas stable correspond à Ra comprise entre 2.85×10^5 et 3×10^5 l'existence d'un plan de symétrie médiane ($0.5, y, z$), où tout ce qui se passe en termes de mouvement d'un côté, se passe exactement la même chose de l'autre côté, mais dans le sens opposé. Par exemple, en ce qui concerne le plan ($x, y, 0.5$), nous remarquons que sous l'effet de la chaleur, les particules d'air chaud montent du milieu de la partie inférieure chaude vers la paroi supérieure froide pour changer leur direction vers la droite et la gauche, puis commencent à redescendre, formant deux anneaux symétriques en haut de la cavité, de taille égale, mais de sens opposé. Dans les deux autres plans de présentation, on remarque la formation des zones de recirculation de chaque côté, ce qui reflète l'effet égal de la chaleur de chaque côté de la cavité. On remarque cette fois l'existence de six cellules contre-rotatives, où les deux au milieu sont dus à l'influence des deux barres chaudes latérales et jouent le rôle d'isolants, et les deux cercles supérieurs sont dus à l'effet de la chaleur de la barre chaude sur la paroi inférieure. Le début de la perte de symétrie se manifeste clairement par le changement de la taille des zones de recirculation et la déformation de leur forme, et même par la déformation de la ligne de symétrie (sur le plan ($x, y, 0.25$)).

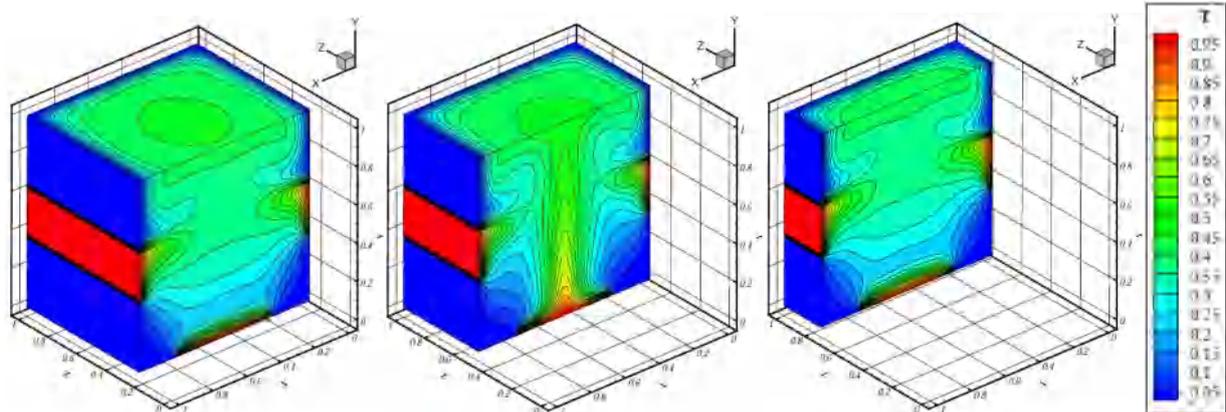
La nature du mouvement devient turbulente avec l'augmentation des valeurs du nombre de Rayleigh ($Ra=1 \times 10^6$), et on remarque une augmentation du nombre d'anneaux de recirculation de six à huit avec des tailles et des distributions différentes.



Plan(x, y, 0.25)

Plan(x, y, 0.5)

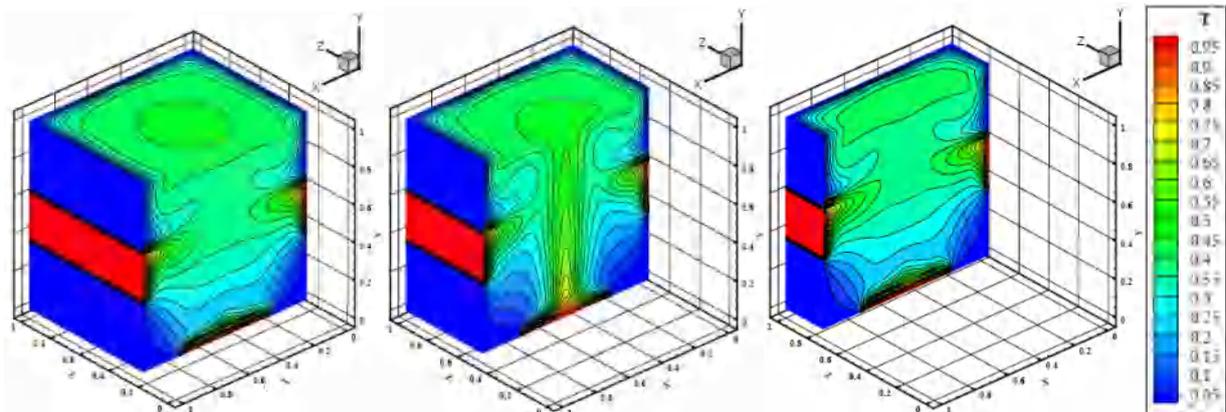
Plan(x, y, 0.75) $Ra=2.85 \times 10^5$



Plan(x, y, 0.25)

Plan(x, y, 0.5)

Plan(x, y, 0.75) $Ra=2.9 \times 10^5$



Plan(x, y, 0.25)

Plan(x, y, 0.5)

Plan(x, y, 0.75) $Ra=3.9 \times 10^5$

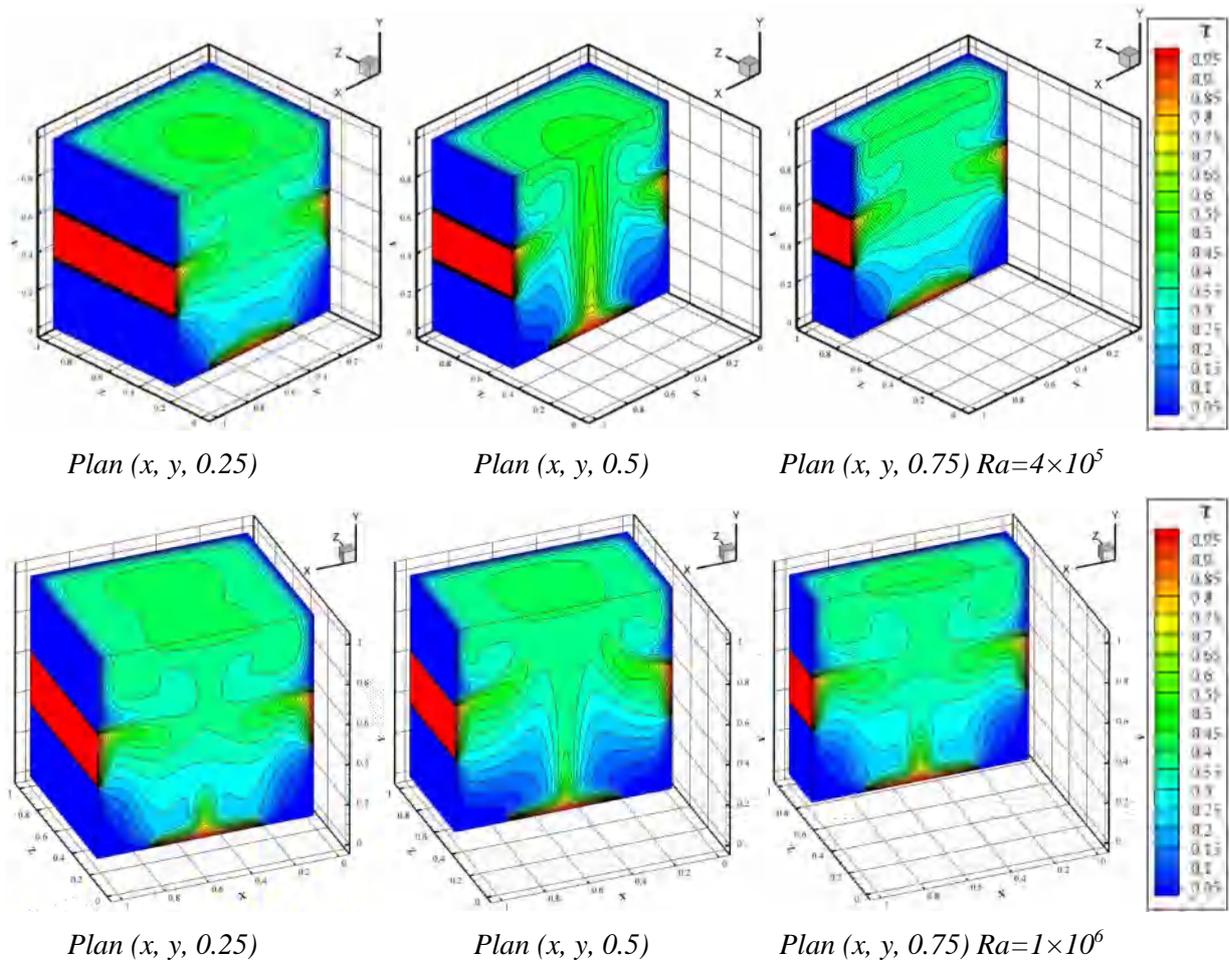
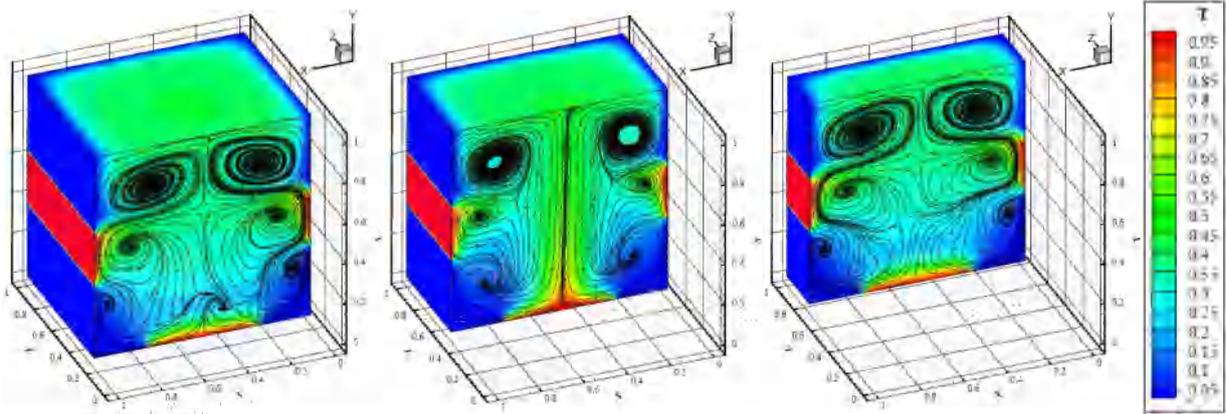


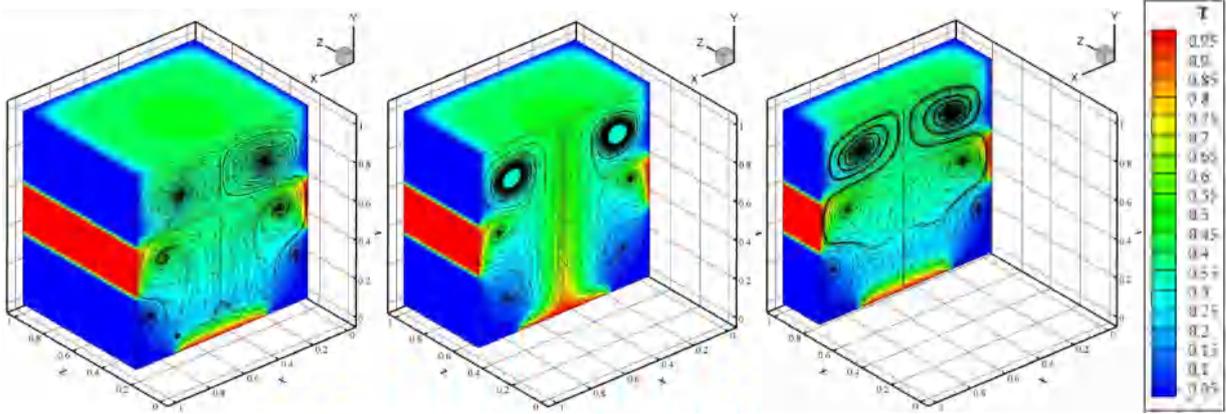
Figure 4.35 : Champs thermique dans différent plans et pour différentes valeurs de Rayleigh



Plan (x, y, 0.25)

Plan (x, y, 0.5)

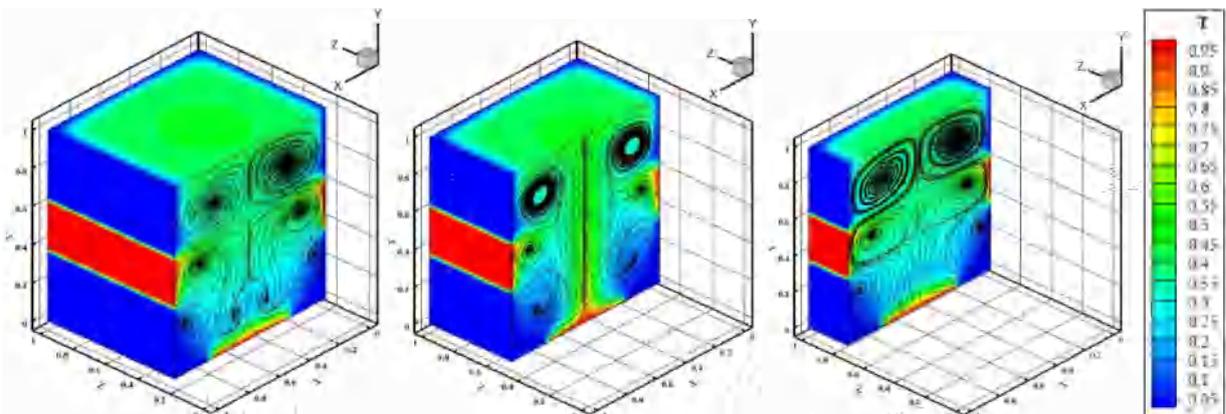
Plan (x, y, 0.75) $Ra = 2.85 \times 10^5$



Plan (x, y, 0.25)

Plan (x, y, 0.5)

Plan (x, y, 0.75) $Ra = 2.9 \times 10^5$



Plan (x, y, 0.25)

Plan (x, y, 0.5)

Plan (x, y, 0.75) $Ra = 3.9 \times 10^5$

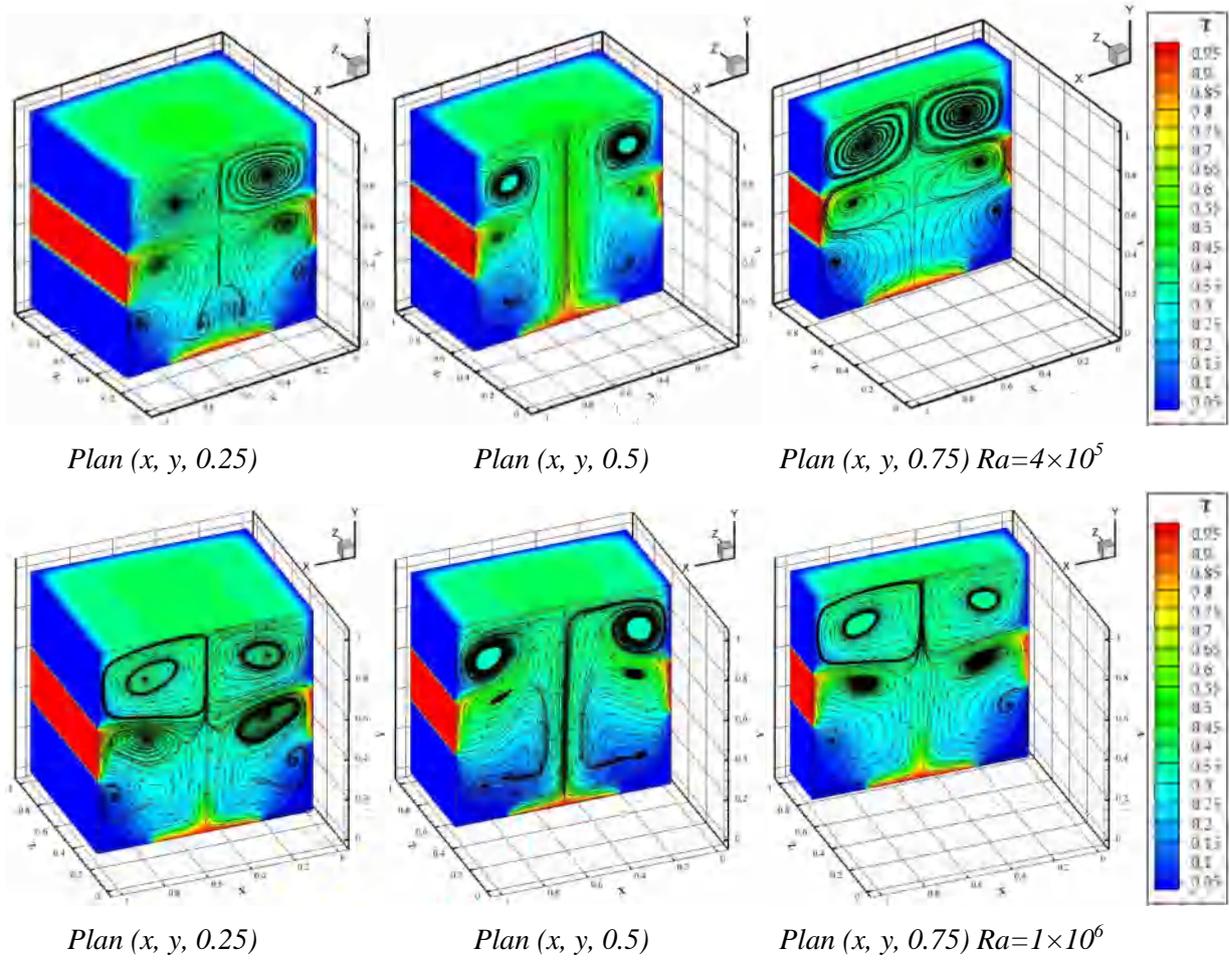
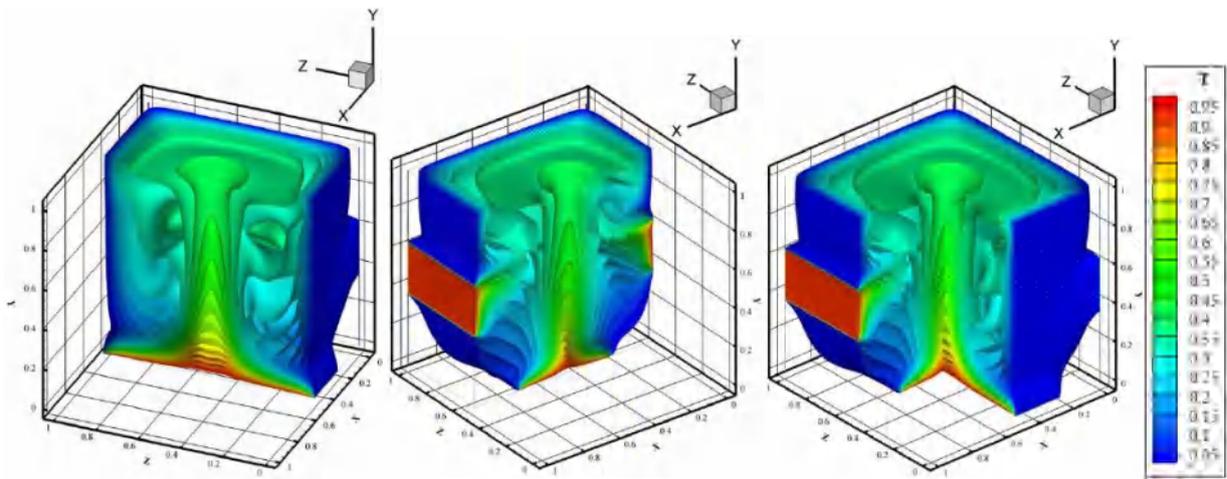


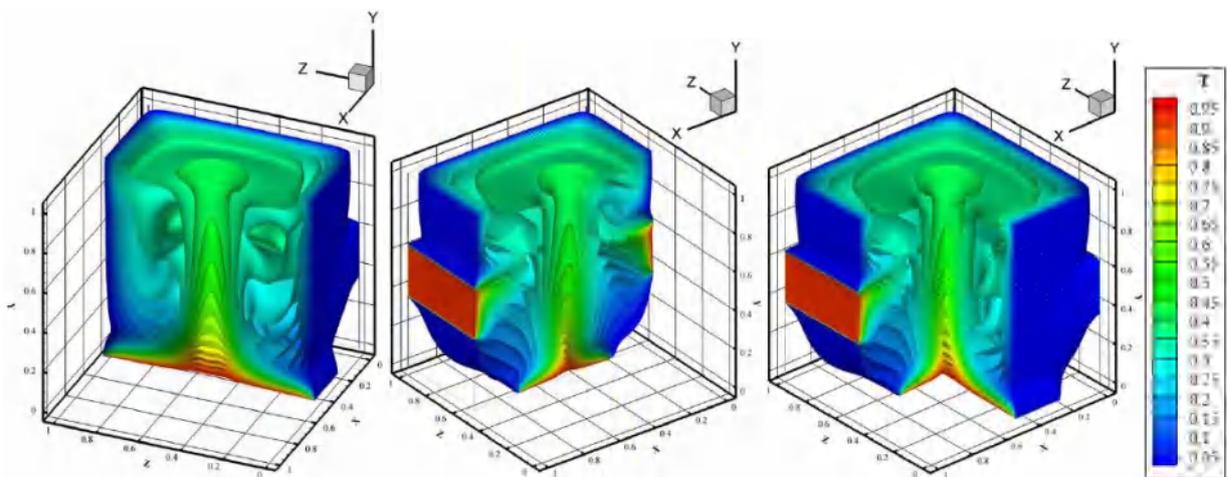
Figure 4.36 : Champs dynamique dans différent plans et pour différentes valeurs de Rayleigh



Plan (0.5, y, z)

Plan (x, y, 0.5)

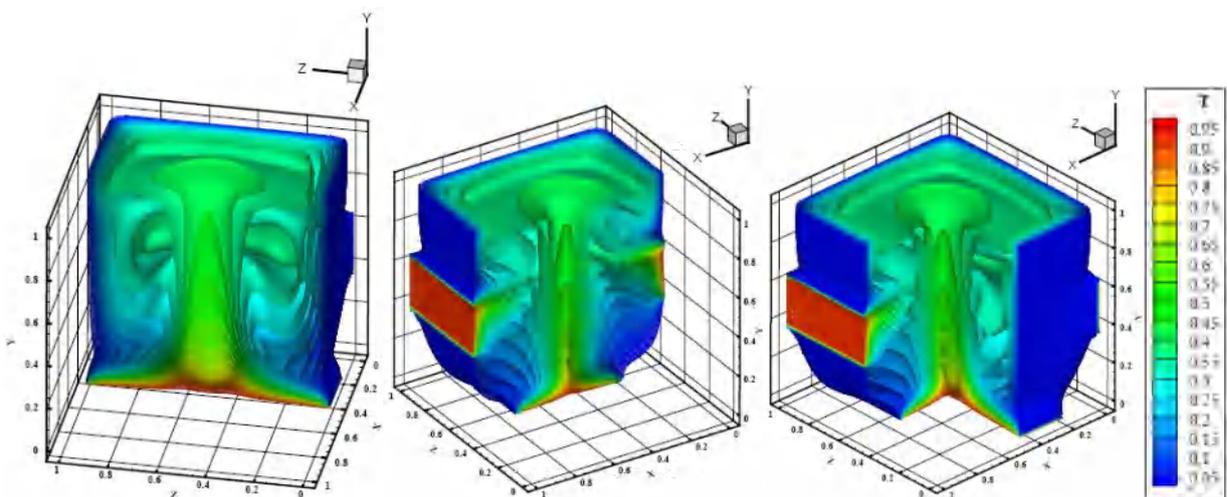
Plan (0.5, y, 0.5) $Ra=2.85 \times 10^5$



Plan (0.5, y, z)

Plan (x, y, 0.5)

Plan (0.5, y, 0.5) $Ra=2.9 \times 10^5$



Plan (0.5, y, z)

Plan (x, y, 0.5)

Plan (0.5, y, 0.5) $Ra=3.9 \times 10^5$

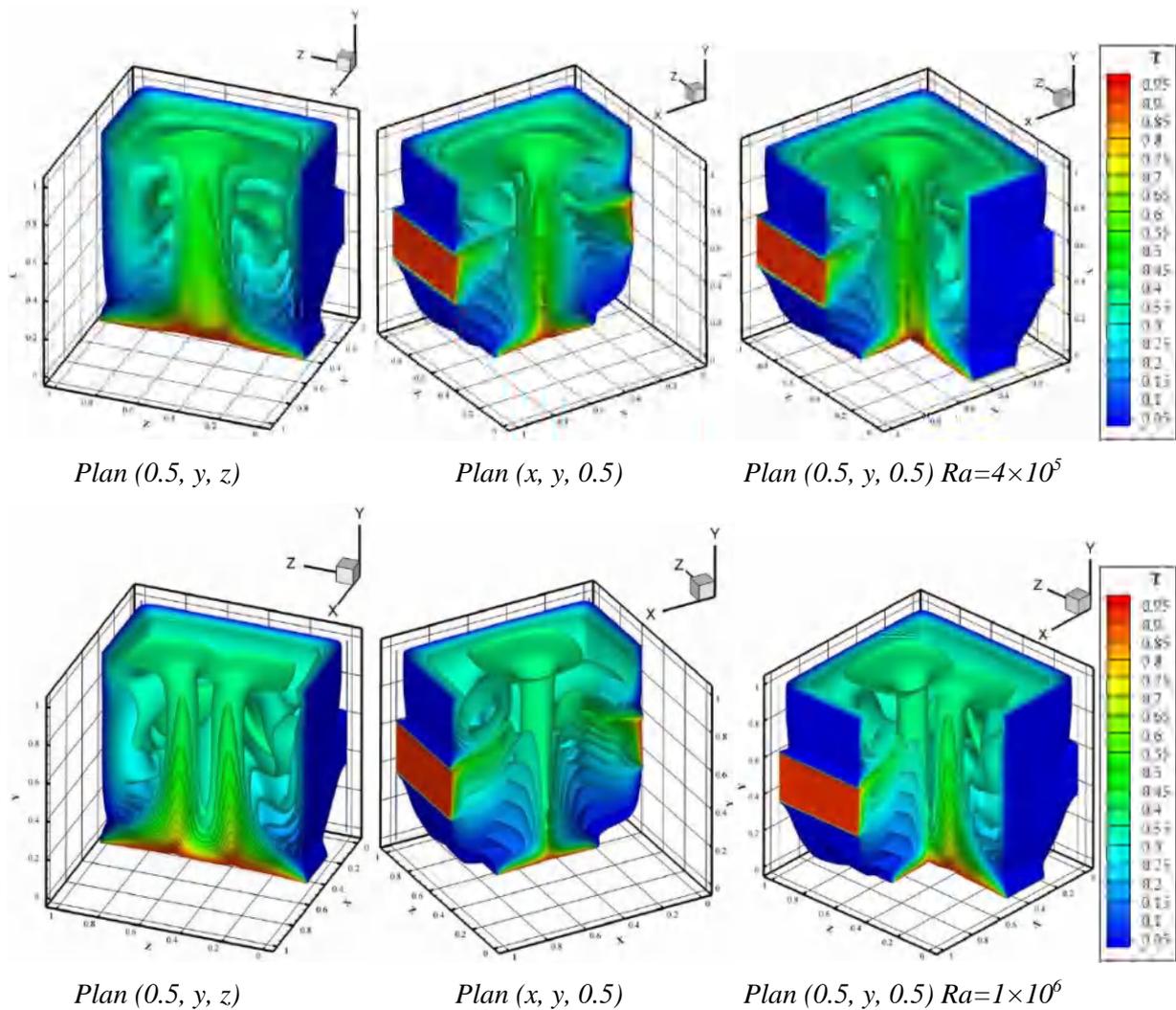


Figure 4.37 : Les iso-surfaces de la température dans différent plans et pour différentes valeurs de Rayleigh

La **figure 4.37** présente la distribution des iso-surfaces de température dans différent plans et pour différents nombres de Rayleigh. Pour $Ra = 2.85 \times 10^5$, une diffusion thermique moyenne similaire des deux bandes chaudes sur les parois latérales vers le milieu du cube (voir plan $(x, y, 0.5)$), et une diffusion thermique importante de la bande chaude sur la paroi inférieure vers le haut (plan $(0.5, y, z)$), ont été notée. Cette diffusion thermique augmente d'une façon symétrique avec l'augmentation du Ra jusqu' à la valeur critique. Une stratification thermique horizontale et verticale aux sources de chaleur a lieu. On observe la naissance d'une petite cellule acentrique au sommet proche du plan $(x, 1, z)$. En augmentant Ra à 4×10^5 la lame d'air chaud verticale, et la propagation vers le haut augmente, l'effet des deux bandes chaudes sur les parois latérales accélère cette propagation, la taille de la cellule devient plus grande et occupe la totalité du plan $(x, 1, z)$. Pour $Ra = 10^6$, un fort courant ascendant d'air chaud divisé en deux par effet des sources

latérales (plan $(0.5, y, z)$), se produit juste au-dessus de la source sur la paroi inférieure. Il est important de souligner que la grande cellule au sommet se divise en deux cellules égales.

4.5.3 Troisième cas : Haute - Haute

Dans ce dernier cas (Haute-Haute), ou les parties chauffées sont situées en haut des deux parois latérales, tandis que la grande partie chauffée est toujours au milieu de la paroi inférieure. Les lignes de courant et les isothermes pour différentes valeurs de Rayleigh sont présentés sur les **figures 4.38** et **4.39**, respectivement.

Nous supposons que la transition vers l'instabilité de l'écoulement de l'air dans une cavité chauffée de manière différentielle se produit via une bifurcation de Hopf à $Ra = Ra_{cr}$. Nous avons essayé de localiser la valeur du nombre Ra critique en effectuant un ensemble de simulations numériques pour définir une plage de valeurs Ra à laquelle se produit une transition oscillatoire stable. Dans la première étape, le régime d'état stationnaire a été obtenu pour le flux correspondant à la valeur de Ra compris entre 1×10^3 et 1.9×10^5 . Ensuite, un certain nombre de simulations numériques ont été effectuées, augmentant successivement les valeurs de Ra de 2×10^5 , jusqu'à ce qu'un régime d'écoulement instable soit reconnu à $Ra = 3 \times 10^5$. De cette manière, la valeur préliminaire du nombre Ra critique auquel une transition oscillatoire stable a lieu s'est avérée être située dans l'intervalle $2,9 \times 10^5 \leq Ra_{cr} \leq 3,0 \times 10^5$.

Après ce régime oscillatoire qui dure jusqu'à $Ra = 8.7 \times 10^5$, le système revient à nouveau à l'état stationnaire, à partir de la valeur du nombre de Rayleigh de 9×10^5 .

Concernant les lignes de courant, pour des valeurs du nombre de Rayleigh inférieures à la valeur critique de bifurcation ($Ra = 10^3$; 10^4 ; 1.3×10^4 et 5.6×10^4) et jusqu'à 2.9×10^5 , les solutions tendent asymptotiquement vers le régime stationnaire stable, caractérisé par quatre cellules, deux grandes primaires et deux petites secondaires en haut de la cavité, symétriques par rapport au plan fictif vertical et tournant dans les sens horaire, pour la cellule primaire à droite et la secondaire en haut gauche et antihoraire pour la cellule primaire à gauche et la secondaire à la droite. La représentation des quatre courants de convection est séparée par une ligne de courant relativement nulle.

En effet, la valeur de la vitesse ascendante sur toute la ligne est pratiquement nulle comme on peut le constater sur **la figure 4.38**.

Au-delà de $Ra_{cr} = 3 \times 10^5$, la convection devient oscillante mono périodique. Cependant, l'amplitude maximale des oscillations reste relativement faible au voisinage du premier point de

bifurcation et jusqu'à $Ra = 5 \times 10^5$, où la solution a subi une augmentation d'amplitude et diminution de période d'oscillation.

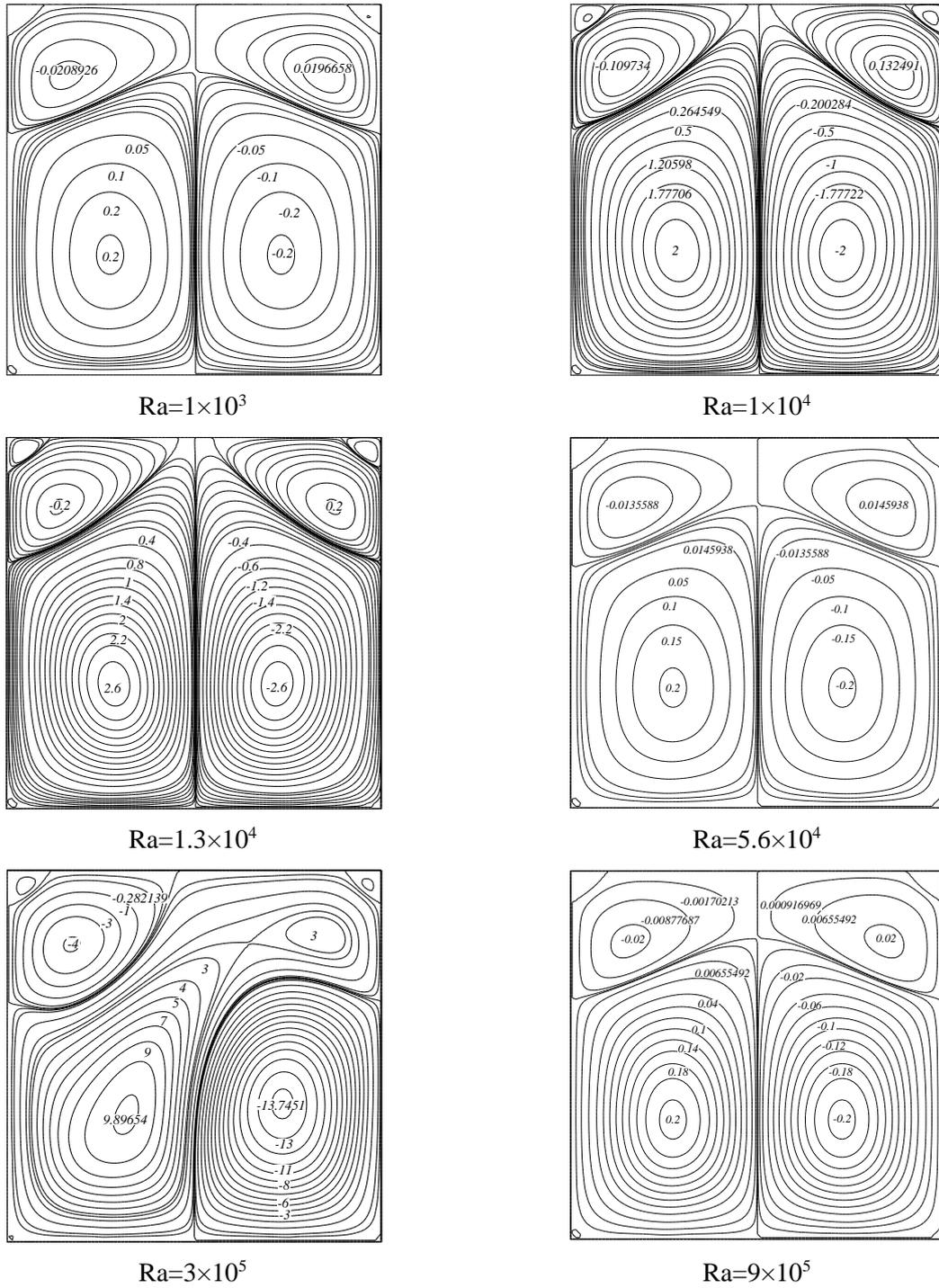


Figure 4.38 : Les lignes de courant pour différentes valeurs de Ra

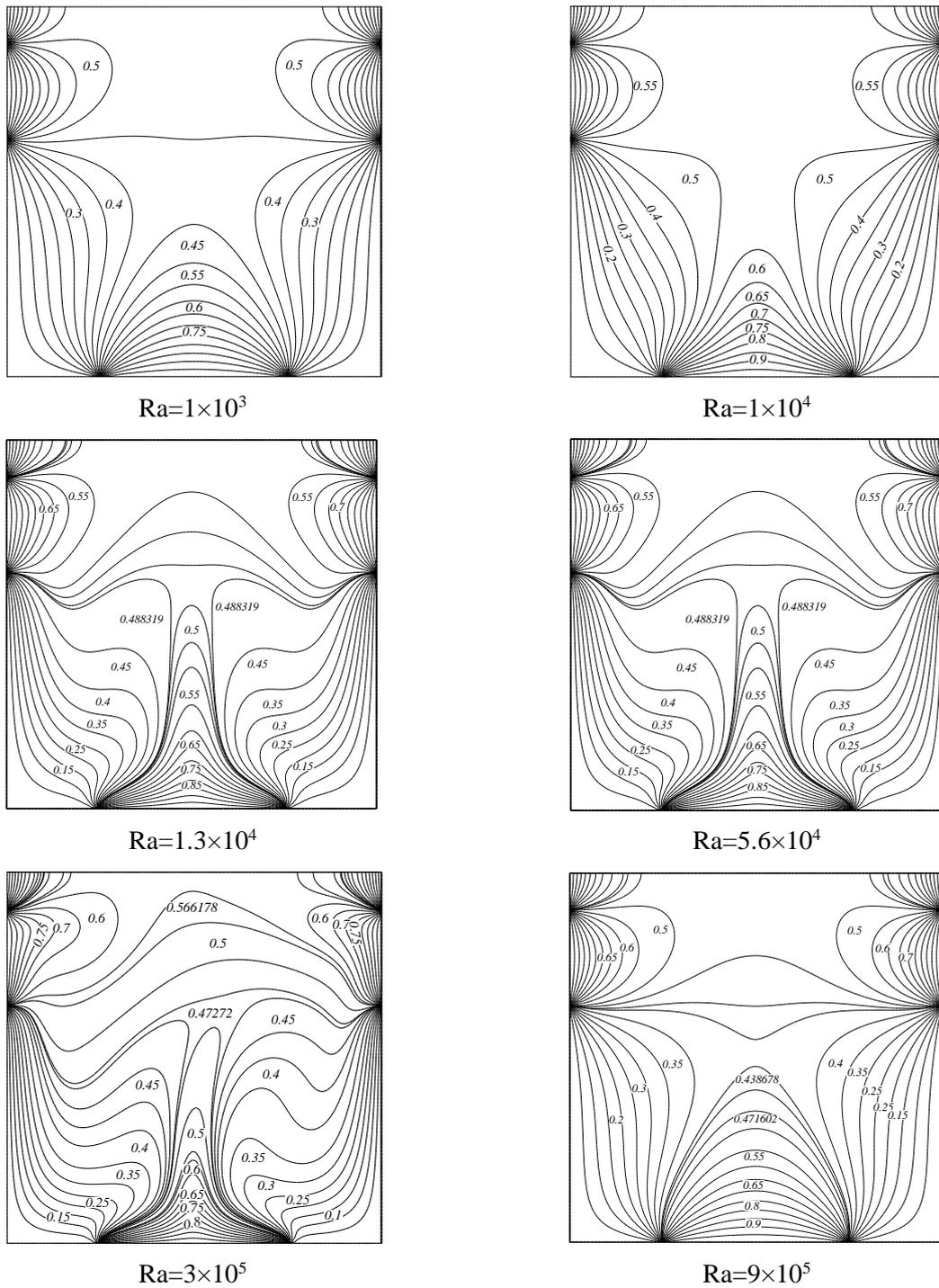


Figure 4.39 : Les isothermes pour différentes valeurs de Ra

L'évolution temporelle de la température et des deux composantes de la vitesse au milieu de l'enceinte sont représentées respectivement sur les **figures 4.40, 4.41 et 4.42** pour différentes valeurs de Rayleigh. Pour des valeurs du nombre de Rayleigh inférieures à la valeur critique de bifurcation, les solutions tendent asymptotiquement vers le régime stationnaire stable (point limite). Au-delà de $Ra_{cr}=3 \times 10^5$, la convection devient oscillante mono-périodique. Pour

$Ra=5 \times 10^5$, on observe une augmentation de l'amplitude et une diminution de la période d'oscillation, mais le régime reste toujours mono périodique jusqu'à $Ra=8.7 \times 10^5$. Le système revient stable pour $Ra=9 \times 10^5$.

Pour bien illustrer l'échange thermique dans les différents sources de chaleur, on présente sur la figure 4.43 : (a), (b) et (c), la variation du nombre de Nusselt locale le long des parties chauffées sur les parois latérales ((a) et (b)), et le long de la partie chauffée sur la paroi inférieure (figure 4.43 (c)) pour différents nombres de Rayleigh.

Généralement un bon accord a été observé entre les profils des isothermes et la distribution du Nusselt locale pour les différentes structures d'écoulement considérées. Nous constatons que l'augmentation du nombre de Richardson ($Ri=10$) signifie une augmentation d'apport de chaleur dans la cavité a conséquence d'intensifier le mouvement de fluide caractérisé par l'augmentation du nombre de Nusselt local. Nous remarquons aussi que la partie affectée par le transfert de chaleur est plus importante.

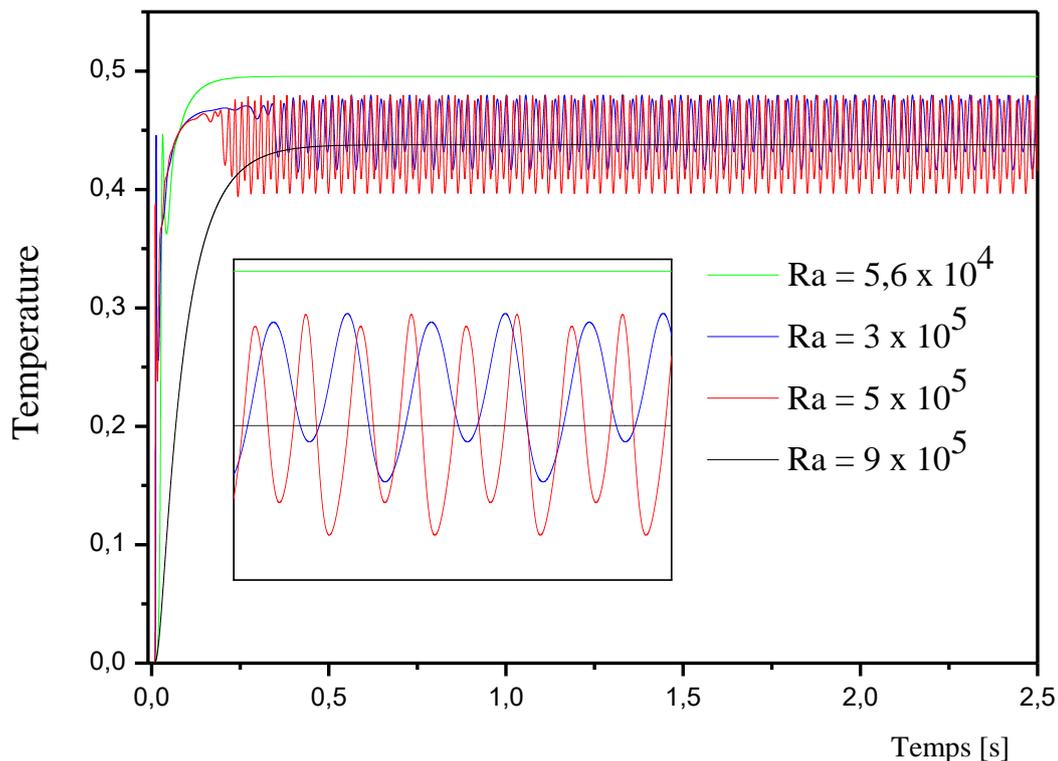


Figure 4.40 : Evolution temporelle de la Température calculée au centre de la cavité

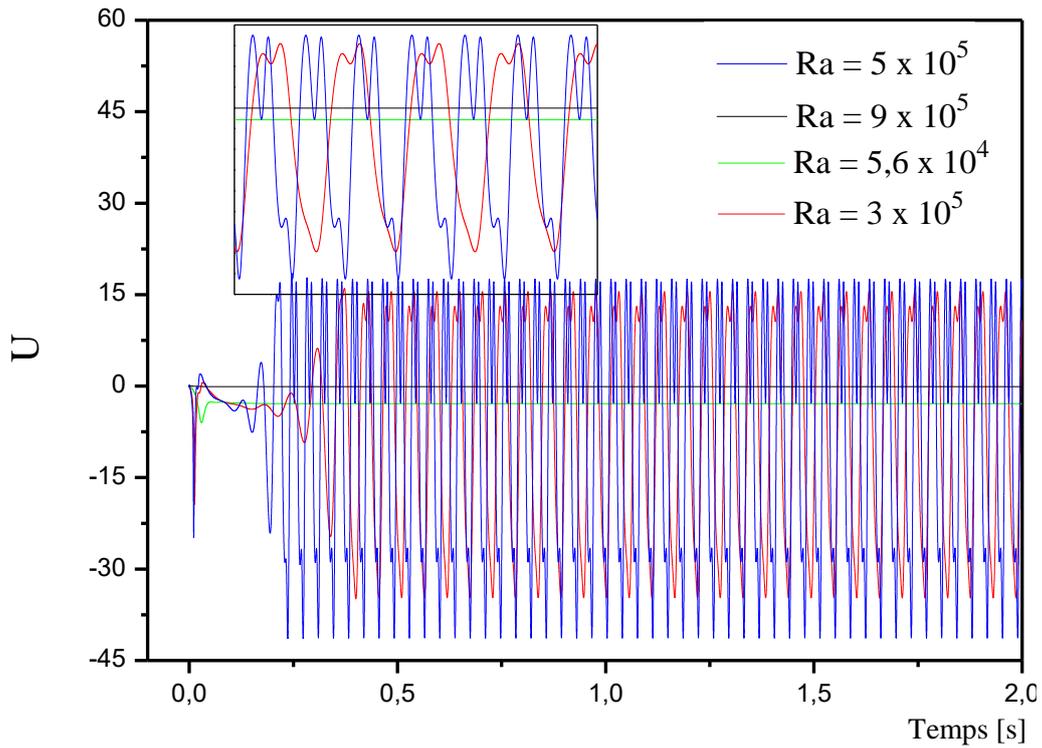


Figure 4.41 : Evolution temporelle de la vitesse U calculée au centre de la cavité

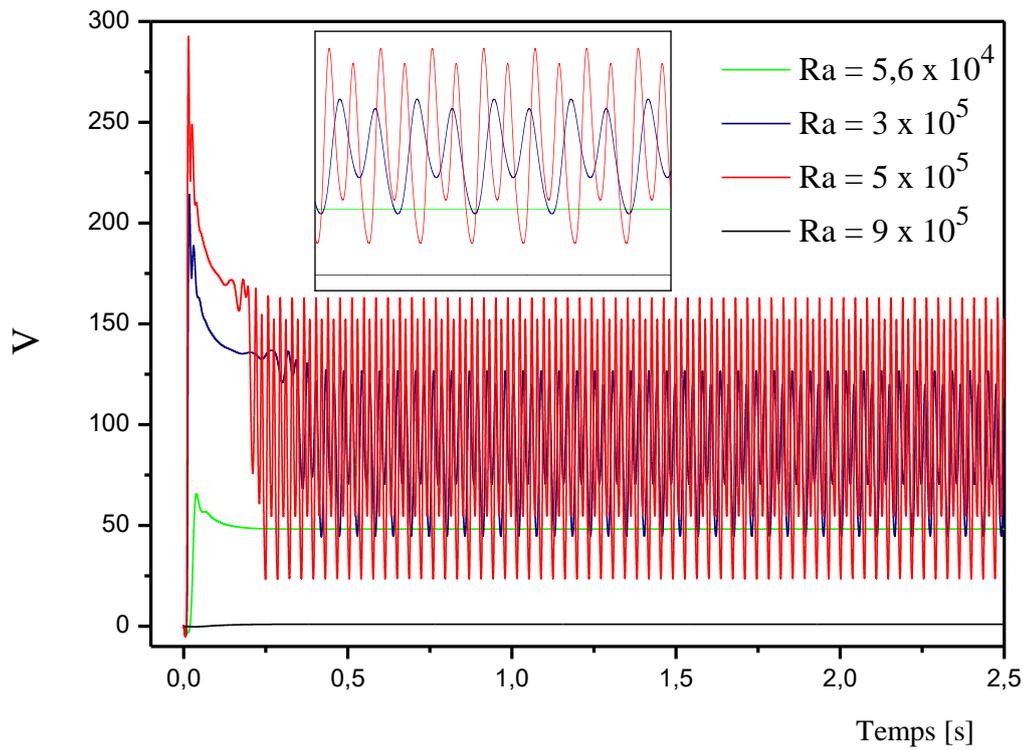


Figure 4.42 : Evolution temporelle de la vitesse V calculée au centre de la cavité

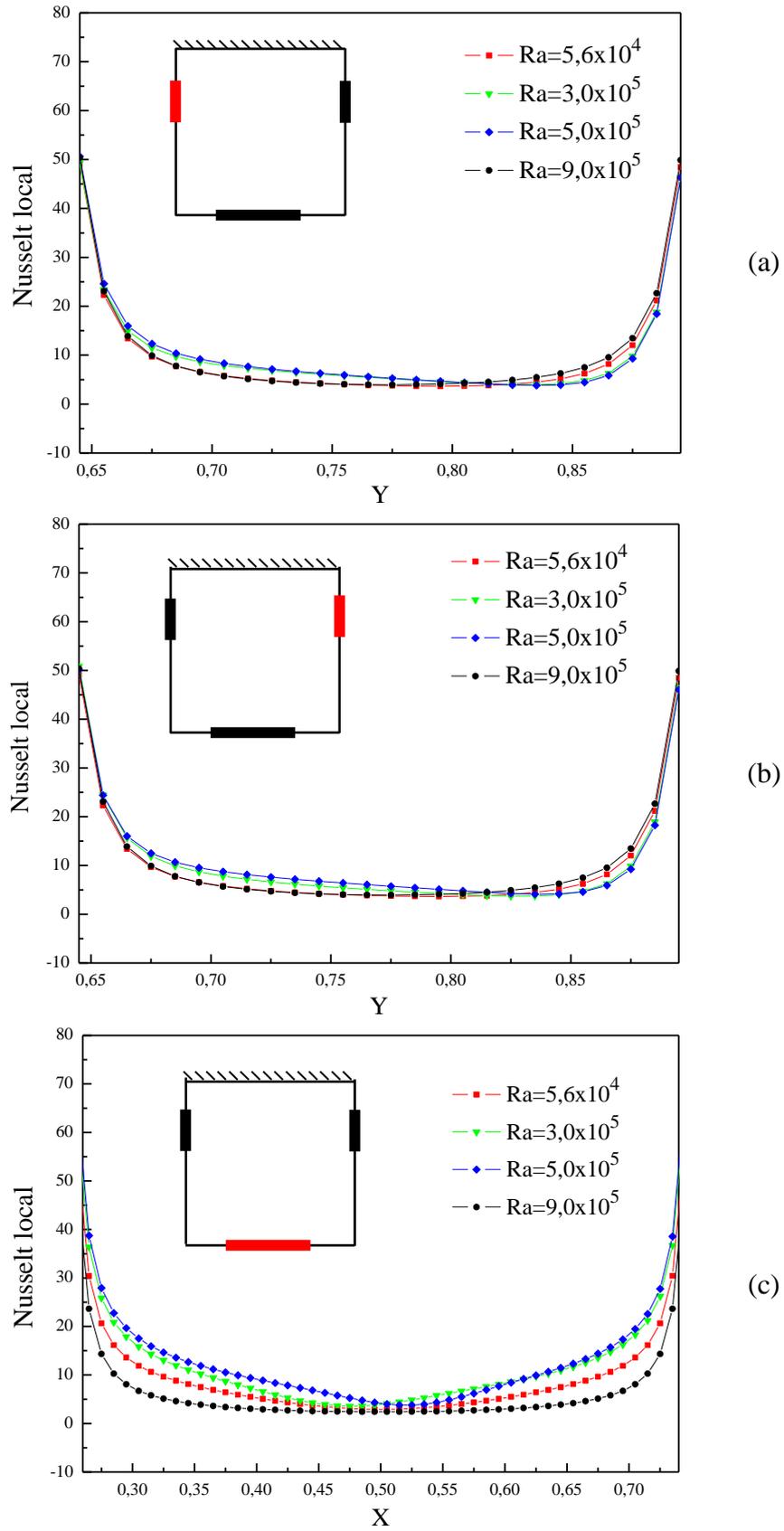


Figure 4.43 : Distributions des nombres de Nusselt locales calculée le long des parties chauffées à (a) : $X=0$, (b) : $X=1$ et (c) : $Y=0$ pour différentes nombres de Rayleigh

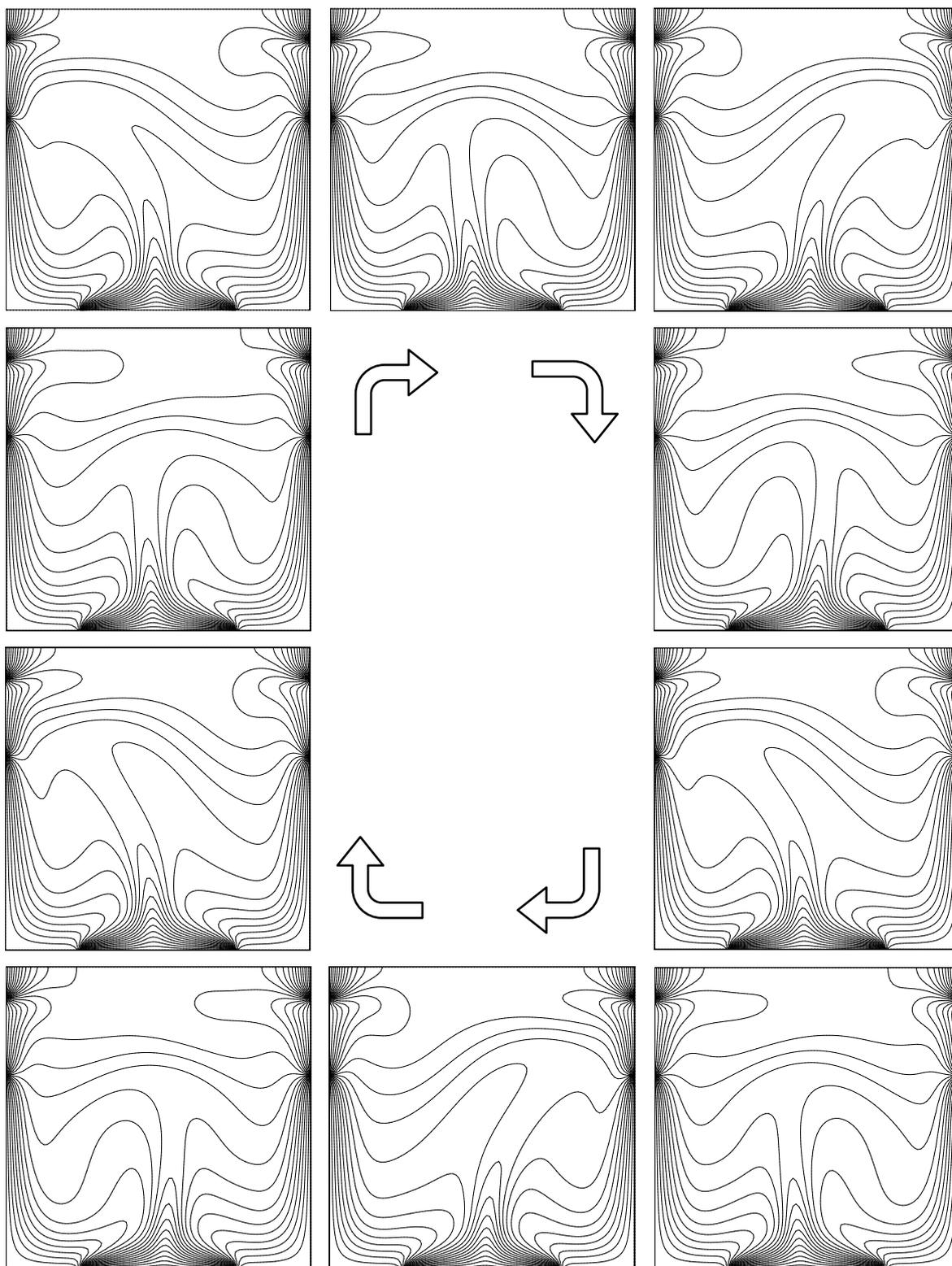


Figure 4.24 : Evolution temporelle des Isothermes pendant une période d'oscillation à $Ra_{cr}=3 \times 10^5$

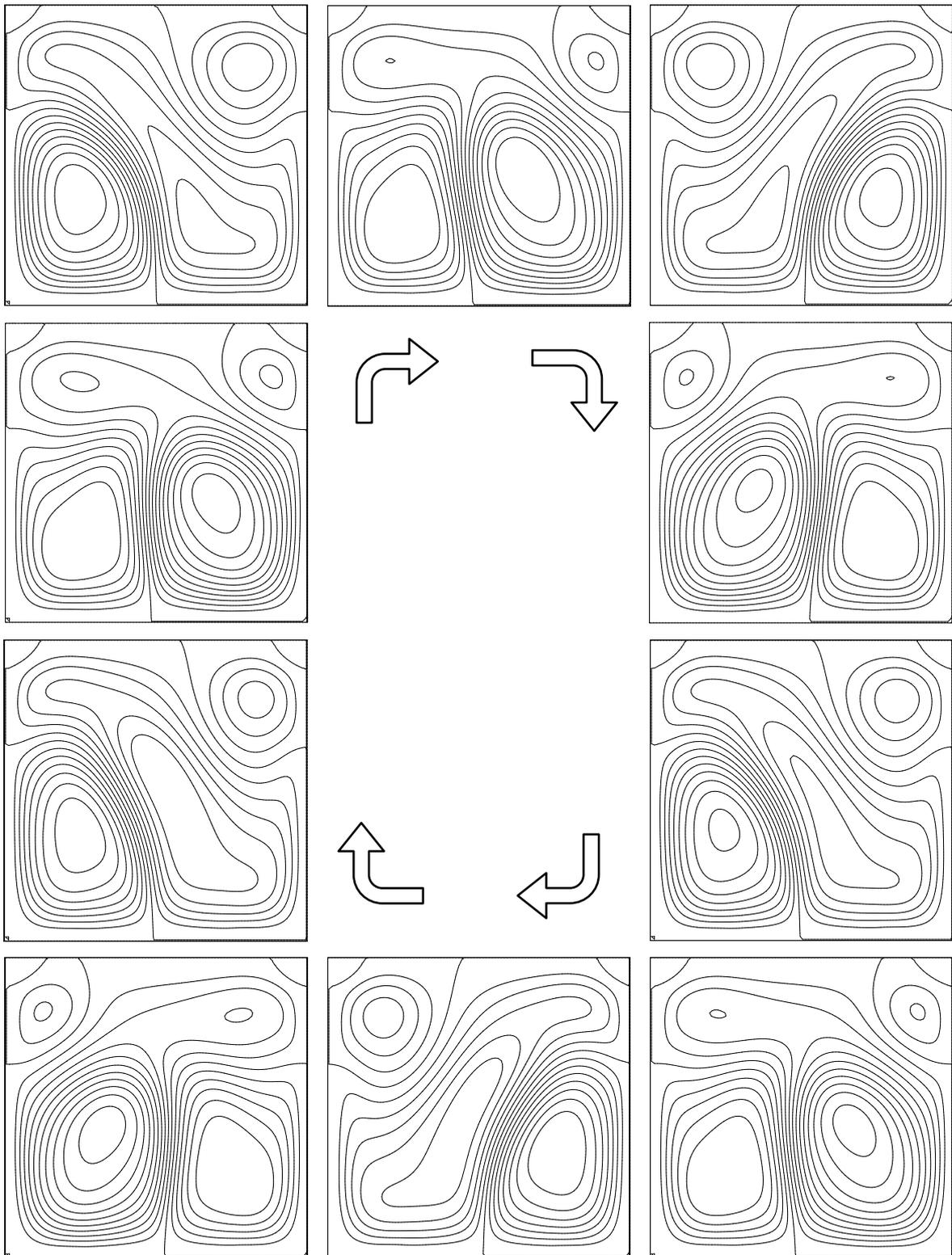
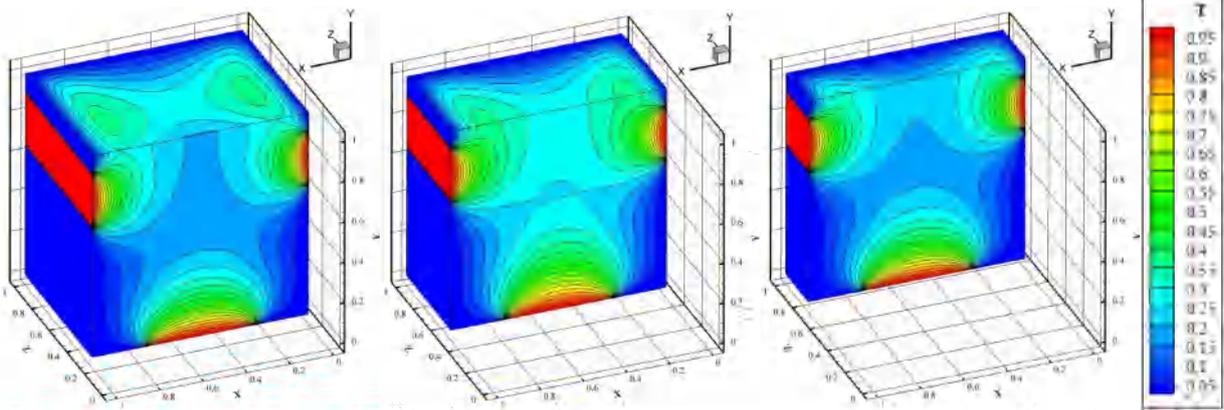


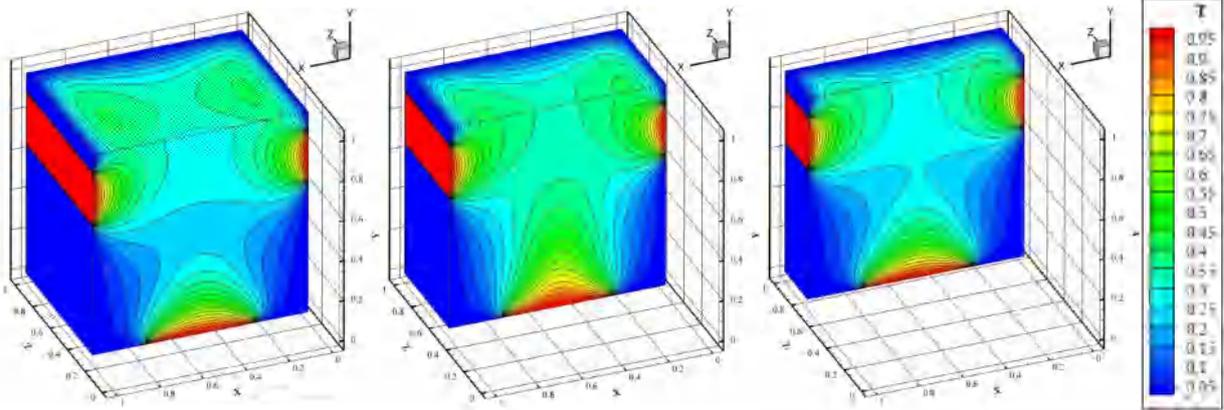
Figure 4.35 : Evolution temporelle des lignes de courant pendant une période d'oscillation à $Ra_{cr}=3 \times 10^5$



Plan (x, y, 0.25)

Plan (x, y, 0.5)

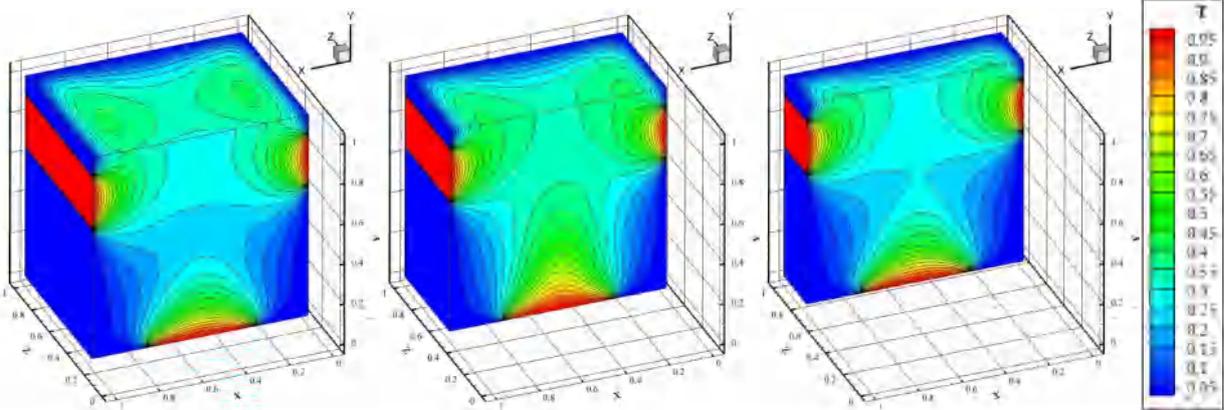
Plan (x, y, 0.75) Ra=1×10³



Plan (x, y, 0.25)

Plan (x, y, 0.5)

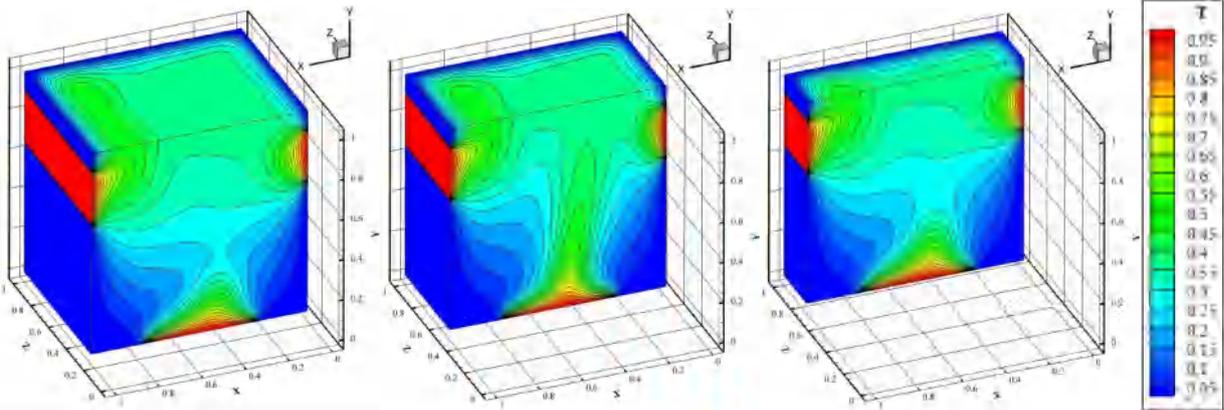
Plan (x, y, 0.75) Ra=1×10⁴



Plan (x, y, 0.25)

Plan (x, y, 0.5)

Plan (x, y, 0.75) Ra=5.6×10⁴



Plan (x, y, 0.25)

Plan (x, y, 0.5)

Plan (x, y, 0.75) Ra=2×10⁵

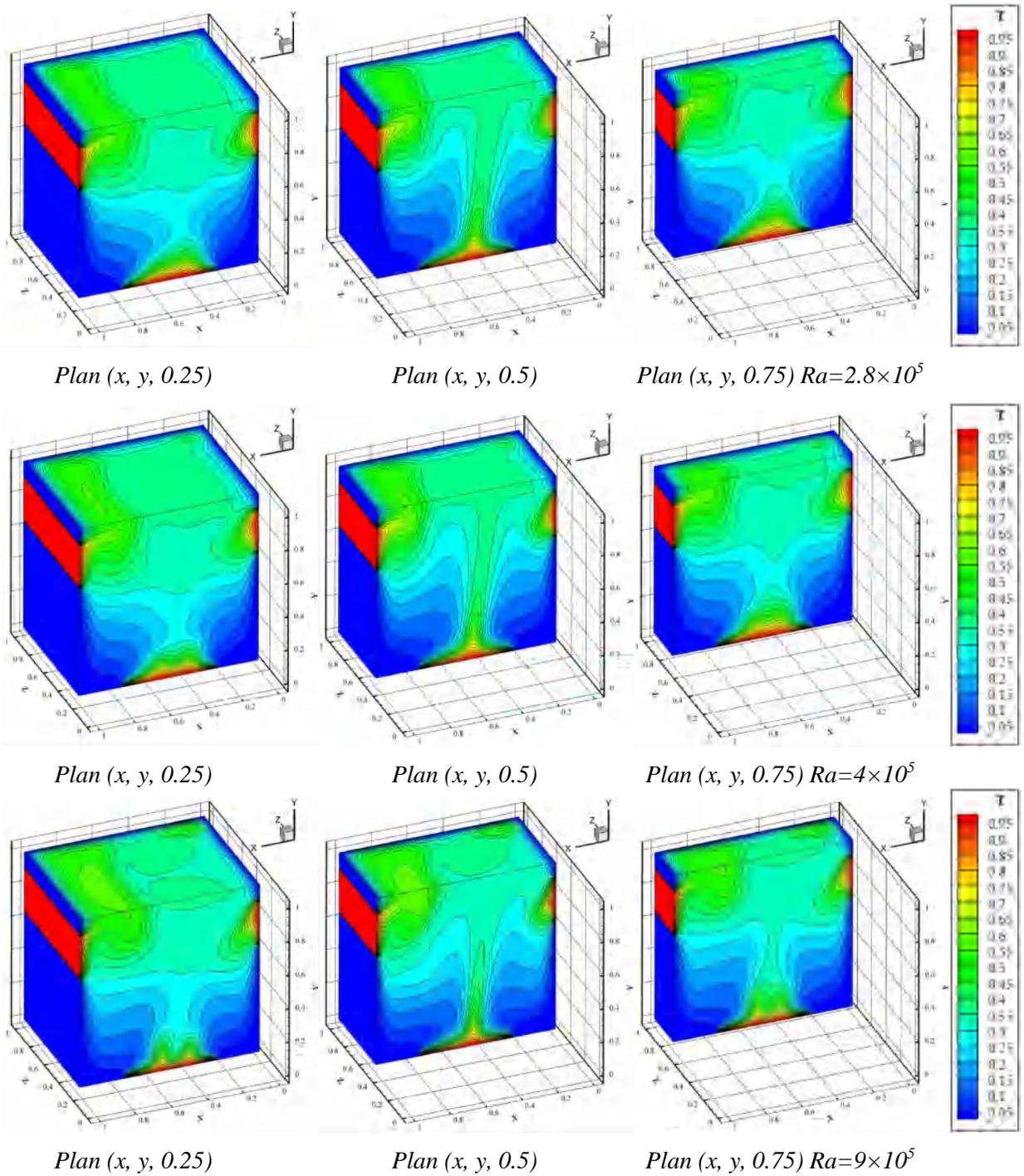
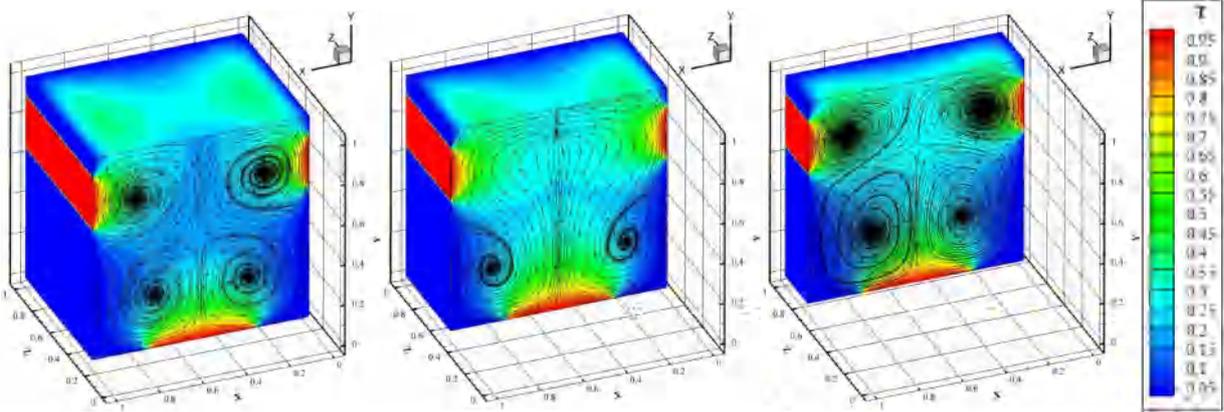


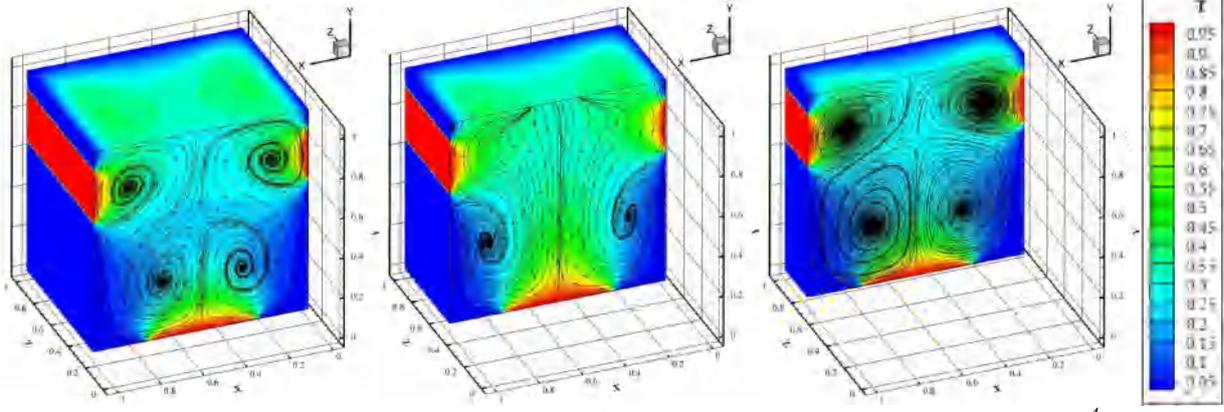
Figure 4.46 : Champs thermique Cas 3D- dans différent plans et pour différentes valeurs de Rayleigh



Plan (x, y, 0.25)

Plan (x, y, 0.5)

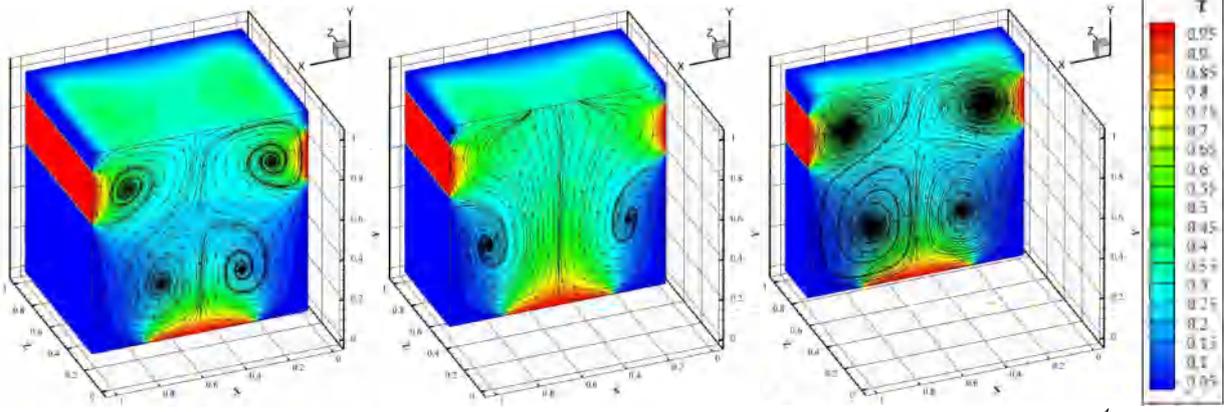
Plan (x, y, 0.75) $Ra=1 \times 10^3$



Plan (x, y, 0.25)

Plan (x, y, 0.5)

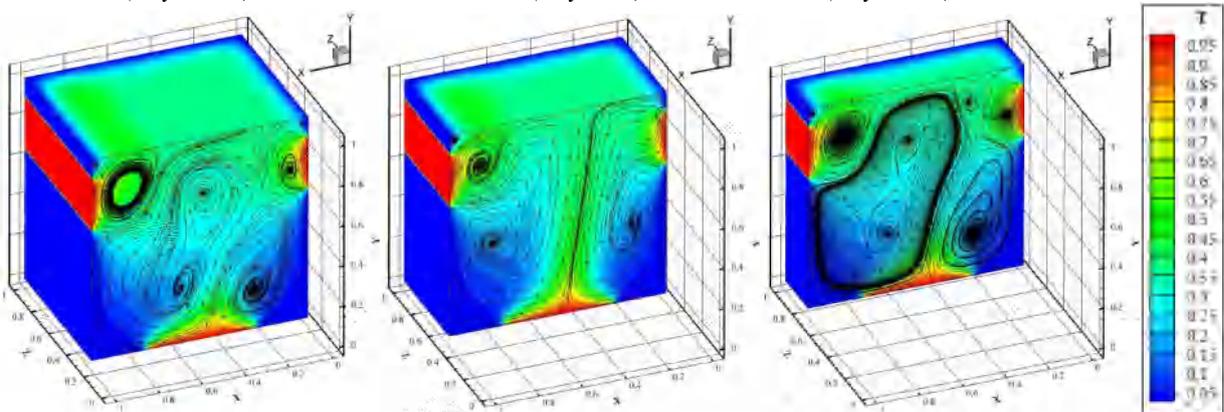
Plan (x, y, 0.75) $Ra=1 \times 10^4$



Plan (x, y, 0.25)

Plan (x, y, 0.5)

Plan (x, y, 0.75) $Ra=5.6 \times 10^4$



Plan (x, y, 0.25)

Plan (x, y, 0.5)

Plan (x, y, 0.75) $Ra=2 \times 10^5$

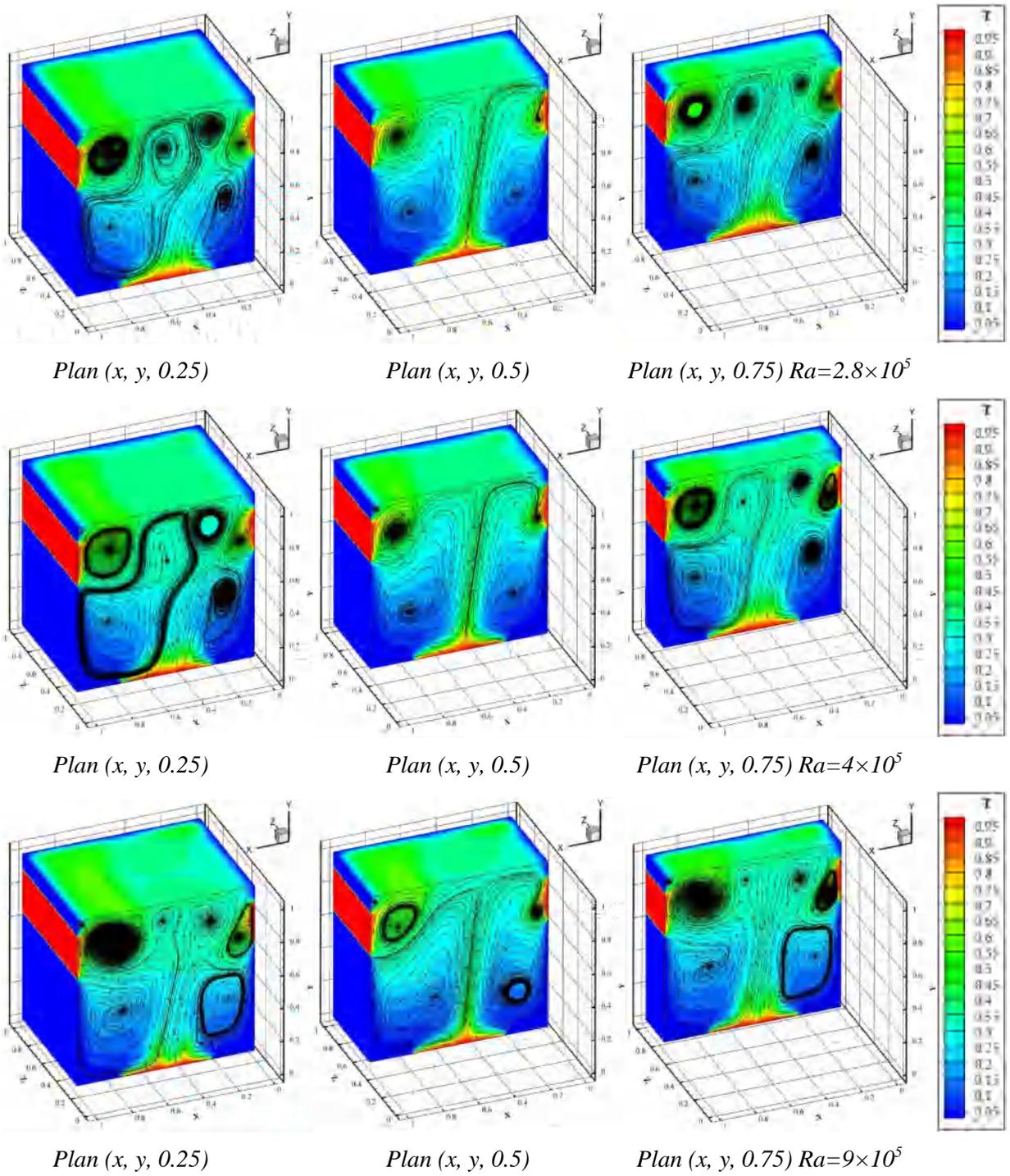
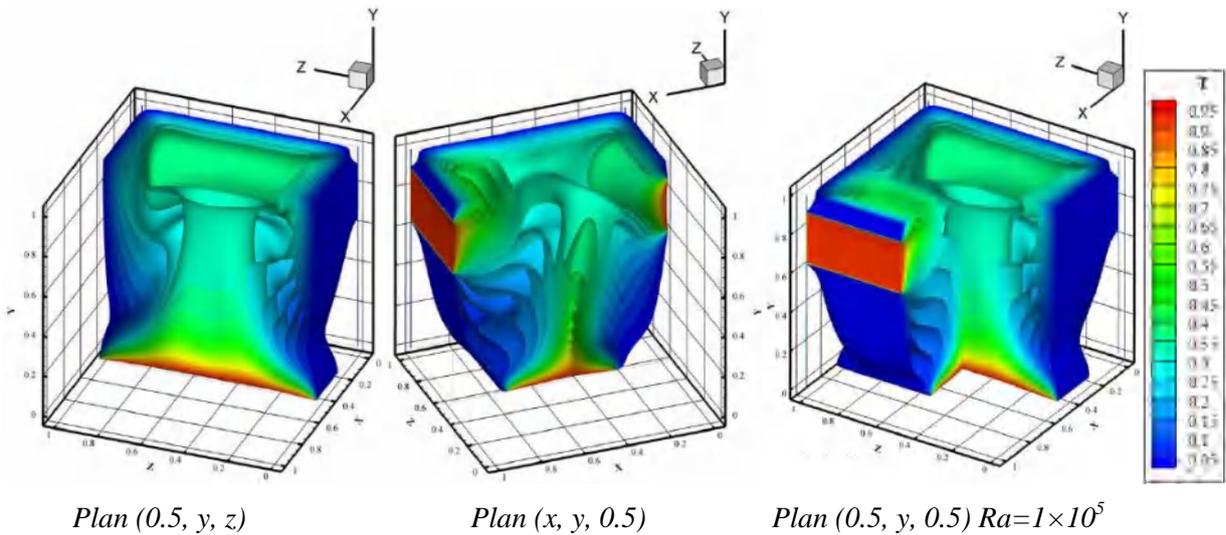
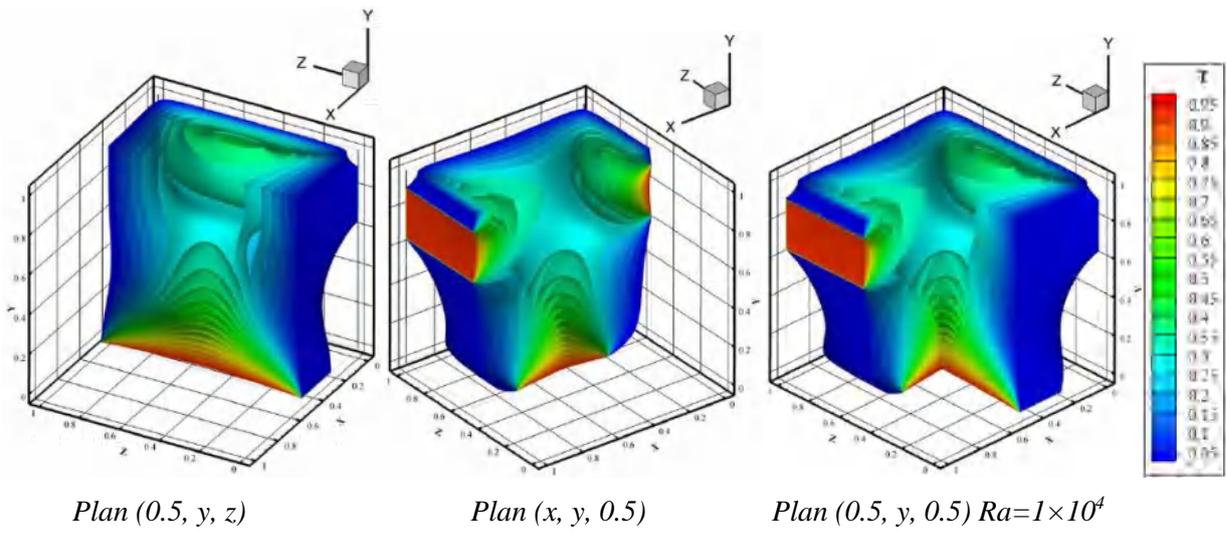
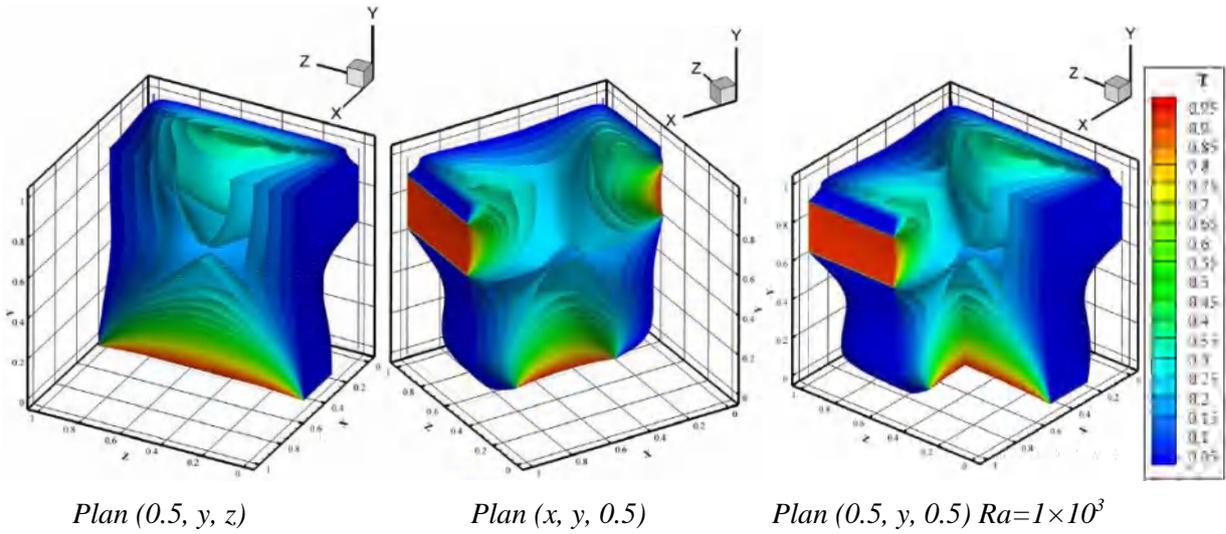


Figure 4.57 : Champs dynamique Cas 3D- dans différent plans et pour différentes valeurs de Rayleigh



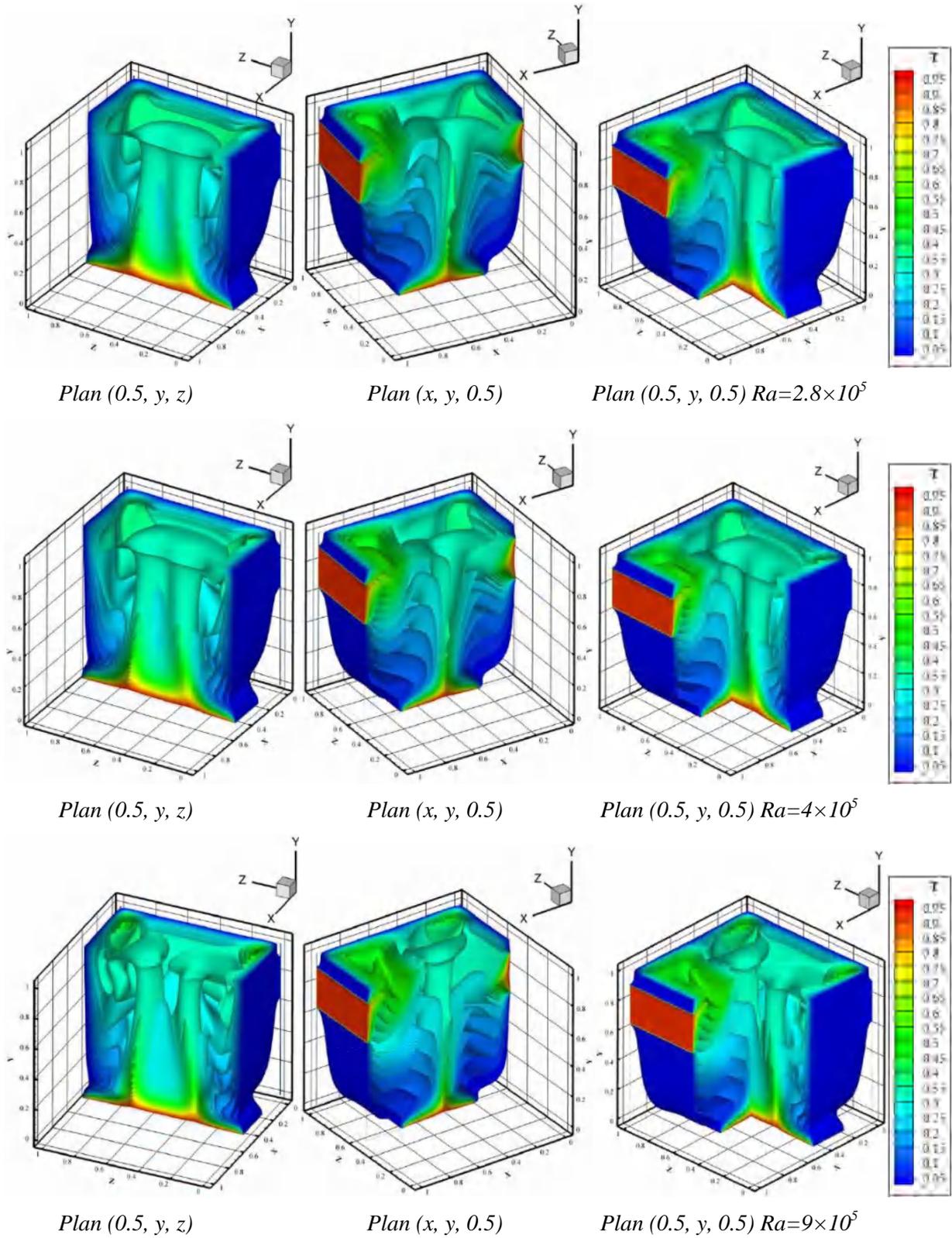


Figure 4.68 : Les iso-surfaces de la température dans différent plans et pour différentes valeurs de Rayleigh

La **figure 4.48** illustre les iso-surfaces de la température au sein de toute la géométrie pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh et dans différents plans. Lorsque le nombre de Rayleigh est faible $Ra = 10^3$, ou lorsque l'effet de la convection naturelle est faible, les iso-surfaces sont en général des droites lisses et parallèles aux parois latérales de la cavité. Ce comportement est dû à la faiblesse du débit lorsque le nombre de Rayleigh est faible. Mais, lorsque le nombre de Rayleigh augmente jusqu'à $Ra = 1 \times 10^5$ et $Ra = 2.8 \times 10^5$, la force de flottabilité domine sur la force visqueuse, ce qui augmente l'effet de convection naturelle. Par conséquent, la forme des iso-surfaces commence à s'écarter fortement de celle uniforme rencontrée dans le cas où $Ra = 10^3$. Cela est dû au fait qu'une forte circulation se produit lorsque le nombre de Rayleigh est élevé. La concentration des iso-surfaces adjacentes à la paroi inférieure, ainsi que celle des parois latérales, augmente à mesure que le nombre de Rayleigh augmente, illustrant une quantité de chaleur et un grand gradient de température adjacent à la paroi inférieure et les deux parois latérales de la cavité cubique.

Par conséquent, une couche limite thermique est construite dans ces régions et peut être observée en particulier lorsque $Ra = 4 \times 10^5$ et 9×10^5 . La convection de chaleur est le mécanisme dominant de transfert de chaleur dans ce cas.

La **figure 4.49** montre le nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh le long du plan médian horizontal du centre de la source de chaleur montée dans la paroi verticale pour cas 1 : (Bas-Bas), cas 2 (Centre-Centre) et pour le cas 3 (Haute-Haute). On note que lorsque Ra est inférieur à 10^3 , le Nu tend presque vers l'unité, ce qui indique que la conduction thermique l'emporte sur la convection pour le cas de Ra très petit, autrement dit à très petite échelle. Il ressort également de la figure 4.48, que le Nu augmente plus rapidement avec Ra dans l'intervalle de 10^3 à 10^4 que dans l'intervalle de 10^5 à 10^6 .

Des nombres de Nusselt moyens plus grands ont été enregistrés pour le cas 3 (la source de chaleur est montée dans la partie supérieure du mur vertical) par rapport aux nombres trouvés pour les autres emplacements de la source de chaleur (cas 1 et cas 2).

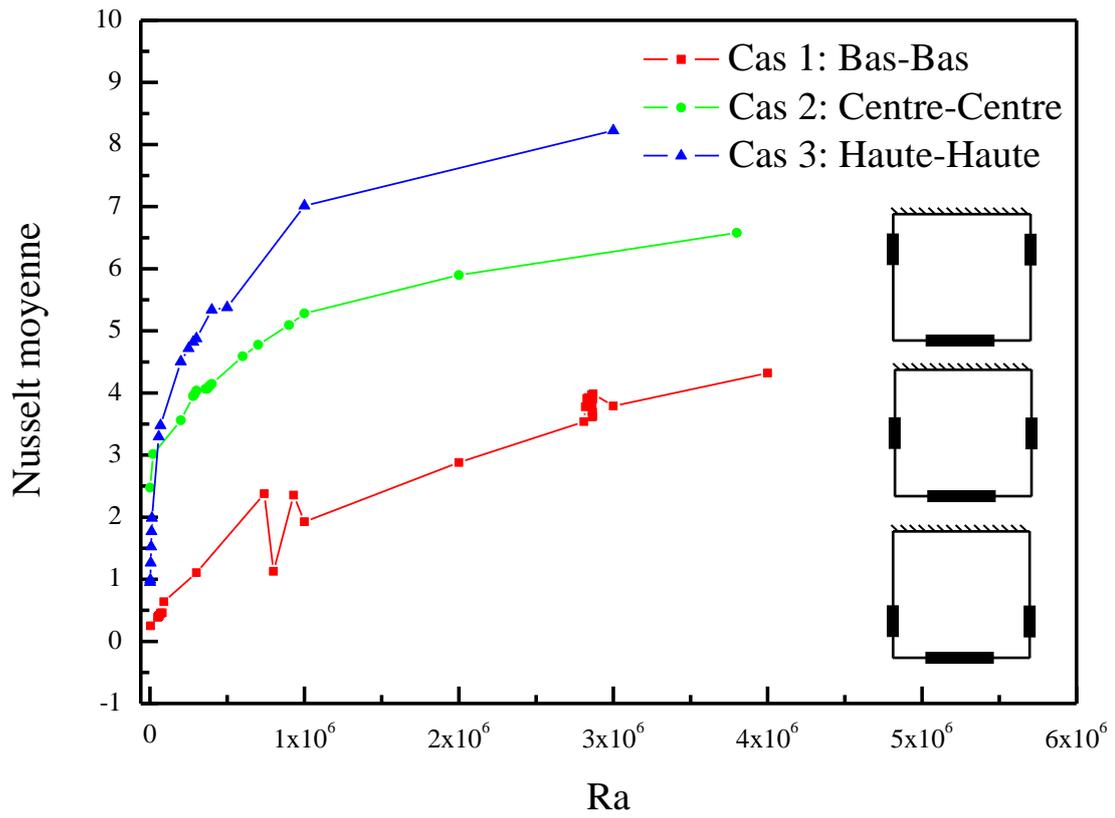


Figure 4.79 : Distributions des nombres de Nusselt moyennes en fonction du nombre de Rayleigh pour les trois cas

Conclusion Générale

Dans la présente thèse, la stabilité de la convection naturelle dans une cavité carrée chauffée symétriquement remplie d'air a été étudiée numériquement en 2D et en 3D. Le nombre de Rayleigh critique dans lequel se produit une transition d'un écoulement stationnaire à un écoulement oscillatoire est déterminé.

Des comparaisons ont été faites entre les trois cas étudiés, puis nous avons comparé chaque cas bidimensionnel et tridimensionnel afin de choisir le meilleur en termes de stabilité (nombre de Rayleigh critique élevé) ainsi que le plus efficace en termes d'échange thermique.

Pour le cas bidimensionnel, il s'agit d'une cavité carrée dont la paroi supérieure est adiabatique, tandis que les parois latérales sont maintenues à une température constante (T_f). Deux parties chauffées de longueur égale à un quatrième de celle de la cavité L ayant une température constante (T_c), sont placées symétriquement en trois positions : en bas des parois verticales pour la 1^{ère} configuration (Bas-Bas), et au centre des parois verticales pour le 2^{ème} cas (Centre-Centre) et en haut pour la dernière configuration (Haute-Haute). Une source chaude de longueur égale à la moitié de celle de la cavité L est placée au centre de la paroi inférieure. Ces trois cas ont été étudiés en tenant compte de l'effet de la troisième dimension (3d), où les parties chauffées sont présentées sous forme des bandes chaudes. Le fluide est supposé newtonien (air) avec des propriétés physiques constantes, à l'exception de la masse volumique dans le terme de flottabilité qui est régie par l'approximation de Oberbeck-Boussinesq et dépend linéairement de la température. Les équations gouvernantes sont résolues par la méthode de volumes finis et l'analyse est effectuée pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh Ra comprises entre 10^3 et 9×10^6 .

L'objectif de la présente étude est de déterminer le nombre de Rayleigh critique dans lequel se produit une transition d'un écoulement stationnaire à un écoulement oscillatoire. Donc, nous avons essayé de localiser la valeur du nombre Ra critique pour chaque cas en 2d et 3d, en effectuant un ensemble de simulations numériques pour définir une plage de valeurs de Ra à laquelle se produit une transition oscillatoire stable. Dans la première étape, le régime d'état stationnaire a été obtenu pour l'écoulement correspondant à la valeur de Ra compris entre (Ra_{cr} -

0.1) et $(Ra_{cr}+0.1)$. Ensuite, un certain nombre de simulations numériques ont été effectuées, en augmentant successivement les valeurs de Ra , jusqu'à ce qu'un régime d'écoulement instable soit reconnu. De cette manière, la valeur préliminaire du nombre de Ra critique auquel une transition oscillatoire-stable a lieu s'est avérée être déterminée. L'effet des sources de chaleur placées symétriquement sur les deux parois latérales opposées en plus de la source sur la paroi inférieure sur la topologie aérothermique a été étudié. Les résultats sont présentés pour le cas bidimensionnel en termes de lignes de courant, d'isothermes et de variables d'écoulement, y compris les profils de vitesse et de température et le spectre de fréquence de Fourier de la température.

Les résultats obtenus en 2D, et pour les trois configurations, ont montré que pour des nombres de Rayleigh inférieurs à Ra_{cr} , l'écoulement à l'intérieur de la cavité reste stationnaire avec des motifs parfaitement symétriques. Alors qu'au-delà de cette valeur critique, le système bifurque dans lequel la symétrie d'écoulement est rompue et un premier schéma d'écoulement périodique dépendant du temps de Hopf se produit. Dans le cas tridimensionnel, les résultats sont présentés en isothermes, les lignes de courant et les iso surfaces de la température, dans trois différents plans suivant la direction Z ($Z=0.25$; 0.5 et 0.75) pour différents nombres de Rayleigh et pour les trois configurations aussi (Bas-Bas ; Centre-Centre et Haut-Haut). Les résultats obtenus ont montré l'effet de la troisième direction, du nombre de Rayleigh et de la position des parties chauffées, sur la topologie aérothermique de l'écoulement de l'air dans la cavité cubique.

Le modèle d'écoulement à $Ra = 3.1 \times 10^3$ est parfaitement symétrique composé de deux tourbillons convectifs primaires et de deux tourbillons faibles près des parties chauffées de la paroi latérale, qui tournent dans des directions opposées. L'intensité des deux tourbillons dans ce régime d'écoulement est identique en raison de la symétrie des conditions aux limites appliquées aux parois verticales, et la valeur de la fonction de courant le long de la ligne de symétrie est nulle.

Pour le premier cas (**Bas-Bas**) en bidimensionnel et pour $Ra_{cr}=3 \times 10^6$, l'écoulement bifurque d'un état symétrique stable à un état asymétrique stable. Par conséquent, le début de cette bifurcation comptait pour le nombre critique de Rayleigh de 3×10^6 . A cette valeur critique $Ra_{cr} = 3 \times 10^6$, des instabilités apparaissent en raison de la compétition de force entre les tourbillons principal et secondaire, provoquant une perte de symétrie de l'écoulement et un champ d'écoulement oscillatoire prévaut. La solution à cette valeur du nombre de Rayleigh est mono-périodique avec une fréquence $f_1 = 0,012$, et la courbe de V en fonction de U est fermée.

Tandis que pour le deuxième cas (**Centre-Centre**), on observe tous d'abord le début d'une petite oscillation au centre de la cavité à $Ra=2.9 \times 10^5$, mais dans ce cas le système garde sa symétrie, ce qui s'explique par l'égalité de l'effet alternatif des parties chauffées sur les parois latérales de la cavité. Une désymétrie vers la gauche mais sans oscillation est observée au de la de la **valeur critique** de nombre de Rayleigh de 3.9×10^5 , et ce comportement continue jusqu'à la valeur de 9×10^5 . Cela peut s'expliquer par la dominance de l'effet de la partie chauffée sur la paroi latérale droite par rapport à la partie chauffée sur la paroi gauche. Le début de l'oscillation mais toujours avec la dissymétrie vers la gauche est observé pour $Ra=1 \times 10^6$. La fréquence de l'oscillation augmente au fur et à mesure avec la valeur du Rayleigh jusqu'à 9×10^6 où le régime devient chaotique.

Dans la première étape, le régime d'état stationnaire dans la cavité du 3^{ème} cas (**Haut-Haut**), a été obtenu pour l'écoulement correspondant à la valeur de Ra compris entre 1×10^3 et 1.9×10^5 . Ensuite, un certain nombre de simulations numériques ont été effectuées, en augmentant successivement les valeurs de Ra de 2×10^5 , jusqu'à ce qu'un régime d'écoulement instable soit reconnu à $Ra = 3 \times 10^5$. De cette manière, la valeur préliminaire du nombre Ra critique auquel une transition oscillatoire stable a lieu s'est avérée être située dans l'intervalle $2,9 \times 10^5 \leq Ra_{cr} \leq 3,0 \times 10^5$. Au-delà de $Ra_{cr} = 3 \times 10^5$, la convection devient oscillante mono périodique. Cependant, l'amplitude maximale des oscillations reste relativement faible au voisinage du premier point de bifurcation et jusqu'à $Ra = 5 \times 10^5$, où la solution a subi une augmentation d'amplitude et diminution de période d'oscillation.

De ces résultats de simulations numériques bidimensionnelles, on peut dire que le 1^{er} cas (Bas-Bas) est plus stable que les deux autres cas, car $Ra_{cr}(\text{Bas-Bas}) > Ra_{cr}(\text{Centre-Centre}) > Ra_{cr}(\text{Haut-Haut})$. Au contraire, en termes de transfert de chaleur, le troisième cas est le plus efficace.

Les résultats tridimensionnels montrent tous d'abord que, pour le même nombre de Rayleigh, la structure du champ thermique, champ dynamique et iso-surfaces de la température, sont différents dans chaque plan ($Z=0.25$; $Z=0.5$ et $Z=0.75$), ce qui donne une signification sur l'effet de la troisième direction (OZ) sur l'écoulement et le transfert de chaleur de l'air à l'intérieur de la cavité cubique.

La perte de la symétrie apparaît au-delà de la valeur critique de $Ra_{cr} = 7.4 \times 10^5$ pour le 1^{er} cas (**Bas-Bas**), et pour le 2^{ème} cas (**Centre-Centre**), cette instabilité apparaît au-delà de la valeur critique de $Ra_{cr} = 4 \times 10^5$, la valeur critique correspond au 3^{ème} cas (**Haut-Haut**) est

$\mathbf{Ra}_{cr}=2 \times 10^5$, c'est que veut dire que, le premier cas est, toujours comme en 2d, le plus stable car il possède le plus grand nombre de Rayleigh critique, et celui le moins efficace en vue de transfert de chaleur par rapport aux autres cas.

Maintenant, on compare les valeurs de transition pour le même cas en 2d et en 3d, les valeurs sont très proches pour le 2^{ème} et le 3^{ème} cas, mais il y'a une différence entre les valeurs du 1^{er} cas, comme suit :

- pour le 1^{er} cas (Bas-Bas) : $\mathbf{Ra}_{cr}(2d) = 3 \times 10^6$ tandis que $\mathbf{Ra}_{cr}(3d) = 7.4 \times 10^5$
- pour le 2^{ème} cas (Centre-Centre) : $\mathbf{Ra}_{cr}(2d) = 3.9 \times 10^5$ tandis que $\mathbf{Ra}_{cr}(3d) = 4 \times 10^5$
- pour le 3^{ème} cas (Haut-Haut) : $\mathbf{Ra}_{cr}(2d) = 3 \times 10^5$ tandis que $\mathbf{Ra}_{cr}(3d) = 2 \times 10^5$

Plusieurs travaux futurs, apparaissant à l'issue de travail sont les suivants :

- ❖ Considérer un écoulement en régime turbulent.
- ❖ Considérer des modèles qui tiennent en compte l'influence de champs magnétiques.
- ❖ Impliquant les milieux poreux, les nano fluides et l'influence de champs magnétiques peuvent s'inspirer de ce cas pour être entreprises.
- ❖ Les nombres de Reynolds et de Prandtl, figurant dans les équations sans dimensions gouvernant le phénomène étudié, ainsi que le rapport d'aspect de la cavité, peuvent constituer eux aussi d'excellents paramètres d'étude.

Bibliographie

- [1] D.G. Briggs, D.N. Jones, Two dimensional periodic natural convection in a rectangular enclosure of aspect ratio one, *J. Heat Transf.*, 107 (1985) 850–854
- [2] Le Quéré, Etude de la transition à l'instationnarité des écoulements de convection naturelle en cavité vertical différentiellement chauffée par méthodes spectrales Chebyshev, Thèse de doctorat ès Sciences, Université Poitiers, 1987.
- [3] S. Xin, P. Le Quéré, Direct numerical simulations of two-dimensional chaotic natural convection in a differentially heated cavity of aspect ratio 4, *J. Fluid Mech.*, 304-1 (1995) 87-118
- [4] S. Xin, P. Le Quéré, Linear stability analyses of natural convection flows in a differentially heated square cavity with conducting horizontal walls, *Physics of Fluids*, 13-9 (2001) 2529-2542
- [5] S. Mergui, F. Penot, Convection naturelle en cavité carrée différentiellement chauffée investigation expérimentale à $Ra=1,69 \times 10^9$, *Int. J. Heat Mass Transf.*, 39 (3) (1996) 563-574
- [6] S. Mergui, F. Penot, Analyse des vitesses et température de l'air en convection naturelle dans une cavité différentiellement chauffée, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 40-14 (1997) 3427-3441
- [7] M. Rahman, M. Mamun, M. A. H. Billah, M.M.Saidur, R. (2010). Natural convection flow in a square cavity with internal heat generation and a flush mounted heater on a side wall, *Journal of Naval Architecture and Marine Engineering*.7, 37-50. doi: <http://dx.doi.org/10.3329/jname.v7i2.3292>
- [8] M. Corcione, (2003). Effects of the thermal boundary conditions at the sidewalls upon natural convection in rectangular enclosures heated from below and cooled from above, *International Journal of Thermal Sciences*, 42, 199–208. [https://doi.org/10.1016/S1290-0729\(02\)00019-4](https://doi.org/10.1016/S1290-0729(02)00019-4)
- [9] T. Basak, S. Roy, A. R Balakrishnan, (2006). Effects of thermal boundary conditions on natural convection flows within a square cavity, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49, 4525-4535. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.05.015>
- [10] L. El Moutaouakil, Z. Zrikem, A. Abdelbaki, (2013). Convection naturelle multicellulaire dans une cavité verticale allongée : Effets des conditions aux limites non uniformes, 16èmes Journées Internationales de Thermique (JITH 2013) Marrakech (Maroc).

-
- [11]C. J Aswatha, G. Gowda, S. N. Sridhara K. N. Seetharamu. (2013). Effect Of Convective Boundary Conditions At Bottom Wall On Natural Convection In A Square Cavity, *Journal of Engineering Science and Technology*,8(2): 141-164.
- [12]B. Calcagni, F. Marsili, M. Paroncini, (2005). Natural convective heat transfer in square enclosures heated from below, *Applied Thermal Engineering* 25, 2522–253. [https://doi :org/10.1016/j.applthermaleng.2004.11.032](https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2004.11.032)
- [13]F. Xu, J.C. Patterson, C. Lei, An experimental study of the coupled thermal boundary layers adjacent to a partition in a differentially heated cavity, *Exp. Therm Fluid Sci.* 54 (2014) 12–21.
- [14]D. Saury, A. Benkhelifa, F. Penot, (2012). Experimental determination of first bifurcations to unsteady natural convection in a differentially heated cavity tilted from 0° to 180°, *Experimental Thermal and Fluid Science*, 38: 74-84.
- [15]P. F. Kieno, A. Ouédraogo, O. M. Zongo, J. D. Bathiébo, B. Zeghmati, (2013). Numerical Study of the Routes toward Chaos of Natural Convection within an Inclined Enclosure, *J. Sci. Res.* 5: 105-117
- [16]S.V. Patankar, (1980). *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York.
- [17]G.D De Vahl,. (1983). Natural convection of air in a square cavity a bench mark numerical solution, *International Journal for numerical methods in fluids*, 3, 249-264. <https://doi.org/10.1002/flid.1650030305>.
- [18]S. A. Benouaguef, B. Zeghmati, K. Bouhadeb, M. Daguene, (2008). Multiple Solutions in Natural Convection in an Air Filled Square Enclosure: Fractal Dimension of Attractors, *Journal of Applied Sciences* 8 (2): 218-229. <https://doi.org/10.3923/jas.2008.218.229>.
- [19]F. Xu, S.C. Saha, (2014). Transition to an unsteady flow induced by a fin on the sidewall of a differentially heated air-filled square cavity and heat transfer, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 71,236–244. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.12.019>
- [20]L. Kolsi, M. B. Ben Hamida, W. Hassen, A. K. Hussein, M. N. Borjini, S. Sivasankaran, S. C. Saha, M. M. Awad, F. Fathinia, H. Ben Aissia, (2015). Experimental and Numerical Investigations of Transient Natural Convection in Differentially Heated Air-Filled Tall Cavity, *American Journal of Modern Energy.* 1, (2):30-43. <https://doi:10.11648/j.ajme.20150102.12>
- [21]F. Mebarek-Oudina, Numerical modeling of the hydrodynamic stability in vertical annulus with heat source of different lengths, *Engineering Science and Technology, an International Journal* 20 (2017) 1324–1333, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jestch.2017.08.003>.
-

-
- [22] B. Zhao, Z. Tian, (2016). High-resolution high-order upwind compact scheme-based numerical computation of natural convection flows in a square cavity. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 98 313-328. <http://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.03.032>.
- [23] N. Azwadi C. Sidik, Prediction of Natural Convection in a Square Cavity with Partially Heated from Below and Symmetrical Cooling from Sides by the Finite Difference Lattice Boltzmann Method, *European Journal of Scientific Research*, ISSN 1450-216X Vol.35 No.3 (2009), pp.347-354.
- [24] O. Aydin, W. J. Yang, Natural convection in enclosures with localized heating from below and symmetrical cooling from sides, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*. Vol. 10 No. 5, 2000, pp. 518-529.
- [25] C. Cianfrini, M. Corcione, P. P. Dell’Omo, Natural convection in tilted square cavities with differentially heated opposite walls, *International Journal of Thermal Sciences* 44 (2005) 441–451.
- [26] G. Huelsz, R. Rechtman, Heat transfer due to natural convection in an inclined square cavity using the lattice Boltzmann equation method, *International Journal of Thermal Sciences* 65 (2013) 111-119.
- [27] V. Erenburg¹, A. Yu.gelfgat¹, E. Kit¹, P. Z. Bar-yoseph², A. Solan², Multiple states, stability and bifurcations of natural convection in a rectangular cavity with partially heated vertical walls. *J. FluidMech.* (2003), vol. 492, pp. 63–89. <https://doi:10.1017/S0022112003005469> .
- [28] G. Caronna, M. Corcione, E. Habib, Natural Convection Heat and Momentum Transfer in Rectangular Enclosures Heated at the Lower Portion of the Sidewalls and the Bottom Wall and Cooled at the Remaining Upper Portion of the Sidewalls and the Top Wall, *Heat Transfer Engineering*, 30(14):1166–1176, 2009. <https://doi:10.1080/01457630902972777> .
- [29] F. X. Trias, M. Sori A, A. Oliva, C. D. Pérez Segarra, Direct numerical simulations of two- and three-dimensional turbulent natural convection flows in a differentially heated cavity of aspect ratio 4, *J. Fluid Mech.* (2007), vol. 586, pp. 259–293. <https://doi:10.1017/S0022112007006908> .
- [30] J. C. Patterson, J. Imberger, Unsteady natural convection in a rectangular cavity, *J. Fluid Mech.*, 100, 65-86, 1980.
- [31] KH. Winters Hopf bifurcation in the double-glazing problem with conducting boundaries. *J. Heat Transfer* 1987; 109:894-898.
- [32] P Le Quéré, and M. Behnia From onset of unsteadiness to chaos in a differentially heated square cavity. *J. Fluid Mech.* 1998; 359:81-107.
-

-
- [33] A Yu. Gelfgat Implementation of arbitrary inner product in the global Galerkin method for incompressible Navier–Stokes equations *J. Comput. Phys.* 2005; 211:513-530.
- [34] P. Le Quéré Transition to unsteadiness routes to chaos and simulation of turbulent flows in cavities heated from the side: a review of present status. In *Heat transfer: Proceedings of the 10th Intl Heat transfer Conf.* 1994; 1:281-296.
- [35] S. Xin and P. Le Quéré An extended Chebyshev pseudo-spectral benchmark for the 8:1 differentially heated cavity. *Intl J. Num. Meth. Fluids* 2002; 40:981-998.
- [36] M.A Christon., P.M Gresho, and Sutton SB. Computational predictability of time dependent natural convection flows in enclosures (including a benchmark solution) *Intl J. Numer. Meth. Fluids* 2002; 201: 953-980.
- [37] Y.S Tian, T.G. Karayiannis Low turbulence natural convection in an air filled square cavity Part I: the thermal and fluid flow fields. *Intl J. Heat Mass Transf.* 2000; 43:849-866.
- [38] Y.S Tian, T.G Karayiannis. Low turbulence natural convection in an air filled square cavity Part II: the turbulence quantities. *Intl J. Heat Mass Transf.* 2000; 43:867-884.
- [39] J Salat, S Xin, P Joubert, A Sergent, F Penot, P Le Quéré. Experimental and numerical investigation of turbulent natural convection in a large air-filled cavity. *Intl J. Heat. Fluid Flow* 2004; 25:824-832.
- [40] R. Iwatsu, J.M. Hyun, and K. Kuwahara, [1993], Mixed convection in driven cavity with a stable vertical temperature gradient, *Int. J. Heat. Mass Transfer*, Vol 36, N° 6, pp 1601-1608.
- [41] Dj. Debbah, O. kholai, S. Boudebous, Effect of heating location on stability of natural convection in a square enclosure, *Proceedings of SEBUA-12, ICHMT International Symposium on Sustainable Energy in Buildings and Urban Areas*, July 14-20, 2012, Kusadasi, Turkey.
- [42] I. L. Ngo and C. Byon, Effects of heater location and heater size on the natural convection heat transfer in a square cavity using finite element method, *Journal of Mechanical Science and Technology* 29 (7) (2015) 2995~3003.
- [43] N. Williamson, S.W. Armfield, Wenxian Lin, M.P. Kirkpatrick, Stability and Nusselt number scaling for inclined differentially heated cavity flow, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 97 (2016) 787–793. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.02.053>.
- [44] C. Cianfrini, M. Corcione, E. Habib, A. Quintino, Effects of the Aspect Ratio on the Optimal Tilting Angle for Maximum Convection Heat Transfer across Air-filled

-
- Rectangular Enclosures Differentially Heated at Sides, *Journal of Thermal Science* Vol.26, No.3 (2017) 245-254. <https://doi:10.1007/s11630-017-0936-5> .
- [45] M. Khatamifar, W. Lin, L. Dong, Transient conjugate natural convection heat transfer in a differentially-heated square cavity with a partition of finite thickness and thermal conductivity, *Case Studies in Thermal Engineering*, Volume 25, June 2021, 100952. <https://doi:10.1016/j.csite.2021.100952>.
- [46] Q. Wang, W. Li, Z. Chen, D. J. Kukulka (2020) Numerical analysis on natural convection in various enclosures, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 77:4, 391-408, DOI: [10.1080/10407782.2019.1701347](https://doi:10.1080/10407782.2019.1701347).
- [47] M. Bhattacharya, T. Basak; Analysis of multiple steady states for natural convection of Newtonian fluids in a square enclosure. *Physics of Fluids* 1 October 2021; 33 (10): 103605. <https://doi.org/10.1063/5.0064899>.
- [48] T. Solano, J. Ordonez, K. Shoele, (2022). Natural convection in vertical enclosures with conjugate boundary conditions, *Journal of Fluid Mechanics*, 946, A17. <https://doi:10.1017/jfm.2022.568>.
- [49] M. Bhattacharya, T. Basak, Analysis of multiple steady states for natural convection of Newtonian fluids in a square enclosure, *Phys. Fluids* 33, 103605 (2021). <https://doi:10.1063/5.0064899>
- [50] F. Penot, O. Skurtys, D. Saury, Preliminary experiments on the control of natural convection in differentially-heated cavities, *International Journal of Thermal Sciences* 49 (2010) 1911-1919, <https://doi:10.1016/j.ijthermalsci.2010.05.008>.
- [51] P. Chorin, F. Moreau, D. Saury, Heat transfer enhancement of a natural convection flow in an enclosure submitted to a small extent thermal disturbance: Influence of location and frequency, *International Journal of Thermal Sciences* 161 (2021) 106711, <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2020.106711>.
- [52] F. Mebarek-Oudina, O.D. Makinde, Numerical Simulation of Oscillatory MHD Natural Convection in Cylindrical Annulus: Prandtl Number Effect, *Defect and Diffusion Forum* Vol. 387, *Computational Analysis of Heat Transfer in Fluids and Solids*, ISSN: 1662-9507, Vol. 387, pp 417-427 , <http://dx.doi:10.4028/www.scientific.net/DDF.387.417>.
- [53] F. Mebarek-Oudina, R. Bessaih, Numerical modeling of MHD stability in a cylindrical configuration, *Journal of the Franklin Institute* 351 (2014) 667–681, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfranklin.2012.11.004>.
- [54] G. K. Batchelor, Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures, *Q J Appl Maths* 12 (1954) 209-233.
-

-
- [55] J. C. Patterson, S. W. Armfield, Transient features of natural convection in a cavity, *J Fluid Mech* 219 (1990) 469-497.
- [56] H. Jiang, K. Luo, Z. Zhang, J. Wu, H. Yi, (2022). Global linear instability analysis of thermal convective flow using the linearized lattice Boltzmann method. *Journal of Fluid Mechanics*, 944, A31. <https://doi:10.1017/jfm.2022.497>.
- [57] S. Xin, P. Le Quéré; Stability of 2D natural convection flows in air-filled differentially heated cavities: 2D/3D disturbances, *Fluid Dynamics Research*, June 2012, doi: <https://10.1088/0169-5983/44/3/031419>.
- [58] T. Sheu, W-H, Lin, R-K (2011), Three dimensional bifurcations in a cubic cavity due to buoyancy-driven natural convection, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 54:447-467. <https://doi:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.09.024>.
- [59] H. Dillon, A. Emery, A. Mescherb, Analysis of chaotic natural convection in a tall rectangular cavity with non-isothermal walls, *Frontiers in Heat and Mass Transfer (FHMT)*, 4, 023004 (2013). <https://doi:10.5098/hmt.v4.2.3004>.
- [60] P. Wang, Y. Zhang, Z. Guo, Numerical study of three-dimensional natural convection in a cubical cavity at high Rayleigh numbers, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 113 (2017) 217–228, <https://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.05.057>
- [61] X. Wena, L.-Ping Wang, Z. Guo, D. B. Zhakebayev; Laminar to turbulent flow transition inside the boundary layer adjacent to isothermal wall of natural convection flow in a cubical cavity, *International Journal of Heat and Mass Transfer* December 4, 2020. <https://www.elsevier.com/open-access/userlicense/1.0/>.
- [62] A. Y. Gelfgat, Time-dependent modeling of oscillatory instability of three-dimensional natural convection of air in a laterally heated cubic box, *Theor. Comput. Fluid Dyn.* <https://doi:10.1007/s00162-017-0429-x>.
- [63] V. Kishor, S. Singh, A. Srivastava, On the identification of flow instabilities in a differentially-heated closed cavity: Non-intrusive measurements, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 147 (2020) 118933. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.118933>.
- [64] A. Atia, B. Ghernaout, S. Bouabdallah, Transition from Steady to Oscillatory Flow Natural Convection of Low-Pr Fluids in 3D Bridgman Configuration for Crystal Growth, *Journal of Applied Fluid Mechanics*, Vol. 11, No. 4, pp. 1021-1031, 2018. <https://doi:10.29252/jafm.11.04.27603>.
- [65] A. Xu, L. Shi, H. D. Xi, Lattice Boltzmann simulations of three-dimensional thermal convective flows at high Rayleigh number, *Int. J. Heat Mass Transf.* 140 (2019) 359-370.
-

-
- [66] S. Bawazeer, A. A. Mohamad, P. Oclon, Natural convection in a differentially heated enclosure filled with low Prandtl number fluids with modified lattice Boltzmann method, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 143 (2019) 118562, <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.118562>.
- [67] W. Xin, L. P. Wang, Z. Guo, D. B. Zhakebayev, Laminar to turbulent flow transition inside the boundary layer adjacent to isothermal wall of natural convection flow in a cubical cavity, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 167 (2021) 120822, <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.120822>.
- [68] L. CH. Earn., T. W. Yen., T. L Ken. (2017), The investigation on SIMPLE and SIMPLER algorithm through lid driven cavity, *J. of Advanced Research in Fluid Mechanics and Thermal Sciences*.