

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITE FRERES MENTOURI – CONSTANTINE 1
FACULTE DES SCIENCES
Département de Génie Mécanique

Thèse présentée pour l'obtention du diplôme
de Doctorat En Sciences
en Génie Mécanique
Spécialité : Génie Mécanique

Thème

***Etude Numérique de la Convection Mixte
dans une Cavité Tridimensionnelle
Chauffée par le Bas***

Présentée par :

Mr. Salim EUTAMENE

Soutenu publiquement le: 24/03/2022, devant le jury composé de :

Président	S. Benissaad	Prof.	Université des Frères Mentouri - Constantine 1
Directeur de thèse	S. Boudebous	Prof.	Université Larbi Ben M'hidi - Oum El Bouaghi
Rapporteur	O. Kholai	Prof.	Université des Frères Mentouri - Constantine 1
Examineur	Z. Nemouchi	Prof.	Université des Frères Mentouri - Constantine 1
Examineur	Y. Mouadji	M.C.A.	Ecole Nationale Polytechnique de Constantine
Examineur	A. Bouhezza	M.C.A.	Université 20 Aout 1955 - Skikda

Je dédie ce modeste travail :

A mon très cher Père

A ma très chère Mère

A ma très chère Femme

A mon très cher fils Amine

A mes très chères filles Serine et Aroua

A mes frères et sœurs

A tous mes amis et mes collègues.

ملخص :

هذا العمل عبارة عن دراسة حسابية لظاهرة الحمل الحراري الرقائقي المزدوج داخل فجوة ثلاثية الأبعاد بها مصدر حراري في قاعدتها ولها جدران جانبيين باردان يتحركان إلى الأعلى بسرعة ثابتة في حين أن بقية الأجزاء عازلة .

لحل المعادلات الخاصة بالظاهرة تم استعمال طريقة الأحجام المنتهية كما قمنا بتعديل برنامج حاسوب مكننا من الحصول على توزيع الحرارة داخل الفجوة.

العمل شمل دراسة تأثير عدة عوامل كاتجاه حركة الجدران المتحركان وحجم المصدر الحراري ونوعية السائل المستعمل على توزيع الحرارة وكميتها داخل الفجوة، وهذا لأجل قيم مختلفة لعدد ريتشاردسون Ri (0.1، 5 و 10) وبتثبيت عدد رينولدز عند القيمة $Re = 100$.

تحليل النتائج المحصل عليها يوضح أن الخصائص الحرارية والدينامكية داخل الفجوة تتأثر بشكل كبير بعدد ريتشاردسون وبحجم المصدر الحراري واتجاه حركة الجدران الجانبيين وكذلك السائل المستعمل.

الكلمات المفتاحية: فجوة مكعبة، متوسط نسلت، طريقة الحجم المنتهية، عدد ريتشاردسون.

Résumé:

Le transfert de chaleur par convection constitue, jusqu'à présent, un principe de base de nombreuses applications industrielles. Le présent travail conduit à l'analyse de la convection mixte dans une cavité cubique à parois latérales ayant un mouvement ascendant et maintenues à une température constante froide, la paroi inférieure est partiellement chauffée. Un modèle mathématique reposant sur les équations du Navier et Stocks est utilisé.

La méthode des volumes finis basée sur l'algorithme SIMPLER, a été choisie pour la discrétisation des différents termes des équations du modèle mathématique. La solution du système algébrique est basée sur l'algorithme de Thomas. Les termes convectifs et diffusifs sont discrétisés à l'aide du schéma de la loi de puissance. Les champs dynamiques et thermiques ainsi que le coefficient de transfert thermique (nombre de Nusselt) ont été déterminés pour différents nombres de Richardson (0.1, 5 et 10). L'effet de certains paramètres (largeur de la partie chauffée, direction des parois mobiles et nature du fluide utilisé) sur le comportement dynamique et thermique de l'écoulement est vérifié.

Les résultats obtenus montrent l'existence de trois écoulements complètement différents en fonction de la valeur du nombre de Richardson. Dans une première phase, l'écoulement est constitué de deux cellules contrarotatives et parfaitement symétriques lorsque la convection forcée est dominante. Quand on fait augmenter le nombre de Richardson; une nouvelle phase de l'écoulement prend naissance et les deux cellules précédentes deviennent antisymétriques. La

dernière phase est caractérisée par la naissance de quatre cellules contrarotatives. Une valeur critique de la largeur de partie chauffée est déterminée dont l'écoulement passe directement de la 1ère phase vers la 3ème phase. Les résultats montrent que la direction du mouvement des parois mobiles influent sur le comportement dynamique et thermique de l'écoulement et que l'augmentation du nombre de Nusselt moyen est proportionnel à la taille de la source de chaleur et au nombre de Prandtl.

Mots-clés: *Convection mixte, Cavité tridimensionnelle, Méthode des Volumes finis, Nombre de Richardson, Nombre de Prandtl.*

Abstract:

A numerical study of transient laminar mixed convection heat transfer characteristics confined within a cubic shape lid-driven cavity has been carried out. Lateral walls are maintained at a constant cold temperature and move upwards with a constant velocity. A heat source is located at the center of the bottom wall of the cavity and maintained at a constant high temperature. All the remaining parts of the cavity are considered adiabatic. The general conservation equations are discretized according to the Finite Volume method based on the SIMPLER algorithm. The relative importance of the natural and forced convection was controlled by the Richardson number (Ri), which was varied from 0.1 to 10. Several convective solution modes, with different flow patterns, have been highlighted. Some parameter's impacts (heat source size, moving walls direction and kind of fluid) are investigated. Three different regimes are observed with increasing Ri. When the forced convection dominates the flow consists of two symmetrical cells. For a precise interval of this number, this symmetry disappears starting from a critical value of the Richardson number. The results show that the dynamic and thermal flow behaviors are affected by the moving walls direction and the Nusselt number increase proportionally to heat source size and Prandtl number.

Keywords: *Mixed Convection, Cubic Lid-Driven Cavity, Finite volume Methods, Richardson Number, Prandtl Number.*

Remerciements

Tout d'abord, je remercie infiniment le bon dieu "**ALLAH**" puissant, de la bonne santé, la volonté et la patience qu'il m'a données tout le long de mes études.

Je remercie énormément mon directeur de thèse Monsieur S. Boudebous, Professeur à l'Université d'Oum El Bouaghi, d'avoir partagé avec moi son expérience si vaste, ainsi que sa compétence technique dans un domaine pour lequel, grâce à lui, je me suis passionnée. Il m'a conduit, en toute sérénité, à l'aboutissement de cette thèse à travers ses conseils et m'a assuré les meilleures conditions de travail. Je lui suis profondément reconnaissant pour sa disponibilité, ses encouragements, ses conseils, ses critiques, ses qualités humaines et sa bonne humeur.

Je tiens à remercier tout particulièrement le Professeur O. Kholai pour avoir accepté la poursuite de l'encadrement, pour ses conseils et avec qui j'ai eu l'occasion d'échanger un grand nombre de points de vue.

Un remerciement particulier à Monsieur Z. Nemouchi, Professeur à l'Université de Constantine 1, pour l'honneur qu'il me fait d'avoir accepté d'examiner mon travail et de présider le Jury de ma soutenance.

Je tiens d'exprimer mes sincères gratitudeux aux membres de jury: Monsieur S. Benisaad, Professeur à l'Université de Constantine 1, Monsieur Y. Mouadji, Maître de Conférences à l'Ecole Nationale Polytechnique de Constantine, Madame A. Bouhezza, Maître de Conférences à l'Université de Skikda, je tiens à les remercier infiniment d'avoir accepté de faire partie du jury et pour avoir consacré une partie de leurs temps pour lire, évaluer et juger ce travail.

Je tiens à adresser ma plus profonde reconnaissance à Mr Farid BERAHIL, Maître de Conférences à l'Université de Mila et Monsieur Rachid BESAIH, Professeur à l'Université de Constantine 1, pour m'avoir donné leurs précieux avis scientifiques. Je les remercie pour leurs disponibilités et leurs conseils dans les moments les plus difficiles.

Je n'oublie pas de remercier mes collègues Bachir DAHDI, Djoubier DEBBAH, Ahmed DJEBLI, Abdelkader FILALI pour leurs aides et conseils et avec qui j'ai toujours

passé de très bons moments. Je tiens à les remercier vivement pour leurs bonne humeur et le partage de connaissances, et je remercier aussi mes collègues Djamel AOUDIA et Mohammed ABASSI de l'Entreprise National de Forage pour m'avoir aidé à exécuter le programme sur leurs ordinateurs.

Enfin, un très grand merci à ma femme et à mes parents pour leur soutien permanent et pour bien d'autres choses sortant du cadre de cette thèse.

Table des matières

Liste des figures	ix
Liste des tableaux	xi
Nomenclature	xii
Introduction Générale	1
Chapitre I Revue Bibliographique.....	5
I.1 Généralités.....	5
I.2 Cavités chauffées par le bas et refroidies par la paroi mobile supérieure.....	6
I.3 Cavités chauffées par la paroi mobile supérieure et refroidies par le bas.....	10
I.4 Cavités soumises à un gradient de température imposé via des parois latérales chaude et froide mais opposées.....	12
I.5 Cavités avec une paroi inférieure localement chauffée et des parois latérales mobiles.	16
I.6 Conclusion.....	19
Chapitre II Formulation Mathématique du Problème	20
II.1 Introduction	20
II.2 Description du problème	20
II.3 Lois fondamentales de la dynamique et de la thermodynamique.....	22
II.3.1 Equation de conservation de masse	22
II.3.2 Equations de quantité de mouvement	22
II.3.3 Equation d'énergie.....	23
II.4 Hypothèses	24
II.4.1 Hypothèse d'Oberbeck-Boussinesq.....	24
II.4.2 Les autres hypothèses.....	25
II.5 Equations de base	25
II.6 Adimensionnalisation des équations.....	26
II.7 Conditions aux limites	26
II.8 Nombres adimensionnels caractérisant le problème.....	27
II.8.1 Nombre de Reynolds.....	27
II.8.2 Nombre de Prandtl	28
II.8.3 Nombre de Richardson.....	28
II.8.4 Calcul du nombre de Nusselt.....	28
II.9 Conclusion.....	30

Chapitre III Formulation Numérique	31
III.1 Introduction	31
III.2 Maillage.....	32
III.3 Discrétisation de l'équation générale de transport	35
III.3.1 Schémas numériques.....	38
III.3.2 Schéma loi de puissance (Power Law).....	38
III.3.3 Discrétisation de l'équation de continuité.....	40
III.3.4 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant X.....	40
III.3.5 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant Y	42
III.3.6 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant Z	44
III.3.7 Discrétisation de l'équation l'énergie.....	46
III.3.8 Discrétisation des conditions aux limites	48
III.4 Equation de pression.....	50
III.4.1 L'algorithme SIMPLER.....	51
III.4.2 Résumé de l'algorithme SIMPLER.....	51
III.4.3 Développement de l'algorithme SIMPLER	52
III.4.4 Organigramme de l'algorithme SIMPLER	54
III.5 Méthode de résolution (algorithme de Thomas).....	56
III.6 Critère de convergence.....	57
III.7 Conclusion.....	57
Chapitre IV Résultats et Discussions	58
IV.1 Introduction	58
IV.2 Choix du maillage.....	58
IV.3 Validation du code numérique.....	60
IV.4 Analyse thermique et dynamique de l'écoulement.....	61
IV.4.1 Champs dynamique et thermique pour $Ri = 0.1$	62
IV.4.2 Champs dynamique et thermique pour $Ri = 5$	65
IV.4.3 Champs dynamique et thermique pour $Ri = 10$	68
IV.5 Effet de la dimension de la partie chauffée	71
IV.5.1 Champs dynamique et thermique pour $Ri = 0.1$	71
IV.5.2 Champs dynamique et thermique pour $Ri = 5$	75
IV.5.3 Champs dynamique et thermique pour $Ri = 10$	78
IV.5.4 Conclusion.....	81

IV.6	Effet de la direction de la vitesse des parois	82
IV.6.1	Champs dynamique et thermique pour $Ri=0.1$	82
IV.6.2	Champs dynamique et thermique pour $Ri=5$	83
IV.6.3	Champs dynamique et thermique pour $Ri=10$	85
IV.6.4	Conclusion.....	88
IV.7	Effet de la nature de fluide (nombre de Prandtl)	88
IV.7.1	Champs dynamique et thermique pour $Ri=0.1$	89
IV.7.2	Champs dynamique et thermique pour $Ri=5$	91
IV.7.3	Champs dynamique et thermique pour $Ri=10$	94
	Conclusion Générale.....	97
	Références bibliographiques.....	99

Liste des figures

Figure I.1 : Modèle physique avec conditions aux limites Temah et al [20].....	6
Figure I.2 : Modèle expérimental Yasin et al. [21]	7
Figure I.3 : Schéma de l'enceinte tridimensionnelle avec conditions aux limites, Benmansour et al. [22]	8
Figure I.4 : Schéma de l'enceinte tridimensionnelle avec les conditions aux limites. Abo Elazm et al. [23]	8
Figure I.5 : Géométrie de la cavité trapézoïdale avec les conditions aux limites appliquées, Fatih et al. [24].....	9
Figure I.6 : Géométrie et conditions aux limites du modèle, Iwatsu and Hyun [26]	10
Figure I.7 : Géométrie de la cavité triangulaire avec les conditions aux limites, Kadhim Hussein [28]	11
Figure I.8 : Model étudié par Kolsi [29] avec condition aux limites considérées	12
Figure I.9 : Schémas des trois rapports d'aspect de la cavité. Noura et al. [30].....	12
Figure I.10 : Schéma de la cavité cubique. Benkacem et al. [31]	13
Figure I.11 : Modèle physique et conditions aux limites de l'enceinte tridimensionnelle, Rani et al. [32]	14
Figure I.12 : Schéma du modèle physique Xu et al. [33].....	14
Figure I.13 : Schémas de la cavité cubique Hussein et al. [34]	15
Figure I.14 : Modèle physique et conditions aux limites d'enceinte cubique soumis à un flux de chaleur imposé. Khaleel Kareem et Gao [37].....	17
Figure I.15 : Configuration du modèle physique Khaleel Kareem et al. [38].	18
Figure II.1 :Modèle physique avec conditions aux limites.....	21
Figure II.2 : Mécanisme de déplacement des parois latérales [41]	21
Figure III.1 : Volume de contrôle entouré par les nœuds voisin.....	32
Figure III.2 : Maillage décalé suivant les trois plans.....	33
Figure III.3 : Maillage décalé sur le plan XY	33
Figure III.4 : Maillage décalé sur le plan YZ.....	34
Figure III.5 : Maillage décalé sur le plan XZ.....	34
Figure III.6 : Maillage décalé suivant la direction X (projections suivant le plan XY à gauche et suivant le plan XZ à droite)	41
Figure III.7 : Maillage décalé suivant la direction Y : projection suivant le plan YX (à gauche) et suivant le plan YZ (à droite).....	43
Figure III.8 : Maillage décalé suivant la direction Z : projection suivant le plan ZX (à gauche) et suivant le plan ZY (à droite).....	45
Figure III.9 : Organigramme de l'algorithme SIMPLER	55

Figure IV.1 : Schéma de la distribution du maillage dans la cavité.....	59
Figure IV.2 : Le nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de nœuds	60
Figure IV.3 : Positions des différents plans affichant les résultats numériques obtenus, (a) en 3D et (b) suivant l'axe Z ($X=Y=0$).	61
Figure IV.4 : Résultats bidimensionnelles pour $Ri=(0.1 \text{ à } 4.5)$ (a) lignes de courant (b) isotherme.	62
Figure IV.5 : Lignes de courant et isothermes aux différents plans z pour $Ri=(0.1 \text{ à } 2.5)$	63
Figure IV.6 : Résultats bidimensionnelles pour $Ri= (4.51 \text{ à } 6.29)$ (a) lignes de courant (b) isotherme.	65
Figure IV.7 : Lignes de courant et isothermes aux différents plans z pour $Ri= (2.51 \text{ à } 7.59)$	66
Figure IV.8 : Résultats bidimensionnelles pour $Ri \geq 6.3$. (a) lignes de courant (b) isotherme.	68
Figure IV.9 : Lignes de courant et isothermes aux différents plans z pour $Ri \geq 7.6$	69
Figure IV.10 : Lignes de courant pour $Ri=0.1$ et différentes ε	72
Figure IV.11 : Iso surface de température pour $Ri=0.1$ et différentes ε	73
Figure IV.12 : Nombre de Nusselt locale pour $Ri=0.1$ et différentes ε	74
Figure IV.13 : Lignes de courant pour $Ri=5$ et différentes ε	75
Figure IV.14 : Iso surface de température pour $Ri=5$ et différentes ε	76
Figure IV.15 : Nombre de Nusselt local pour $Ri=5$ et différentes ε	77
Figure IV.16 : Lignes de courant pour $Ri=10$ et différentes ε	78
Figure IV.17 : Iso surface pour $Ri=10$ et différentes ε	79
Figure IV.18 : Nombre de Nusselt locale pour $Ri=10$ et différentes ε	80
Figure IV.19 : Nombre de Nusselt moyen en fonction de dimension de la partie chauffée.....	81
Figure IV.20 : Ligne de courant et champs thermique pour $Ri=0.1$	82
Figure IV.21 : Iso surfaces de température pour $Ri=0.1$	83
Figure IV.22 : Ligne de courant et champs thermique pour $Ri=5$	84
Figure IV.23 : Iso surfaces de température pour $Ri=5$	85
Figure IV.24 : Ligne de courant et champs thermique pour $Ri=10$	86
Figure IV.25 : Iso surfaces de température pour $Ri=10$	86
Figure IV.26 : Nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Richardson.....	87
Figure IV.27 : Lignes de courant et champs thermique pour $Ri=0.1$	89
Figure IV.28 : Iso surfaces de température pour $Ri=0.1$	90
Figure IV.29 : Lignes de courant et champs thermique pour $Ri=5$	92
Figure IV.30 : Iso surfaces de température pour $Ri=5$	93
Figure IV.31 : Lignes de courant et champs thermique pour $Ri=10$	94
Figure IV.32 : Iso surfaces de température pour $Ri=10$	95
Figure IV.33 : Nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Richardson.....	96

Liste des tableaux

Tableau III.1 : Identification des termes des équations de transport sous forme adimensionnelle	37
Tableau IV.1 : Nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de nœuds	59
Tableau IV.2 : Comparaison du nombre de Nusselt moyen de la présente étude avec Iwatsu et Hyun [25].....	60
Tableau IV.3 : Nombre de Nusselt moyen pour les cas 2D et 3D	71
Tableau IV.4 : Nombre de Nusselt moyen pour $Ri=0.1$ et différents ε	74
Tableau IV.5 : Nombre de Nusselt moyen pour $Ri=5$ et différents ε	77
Tableau IV.6 : Nombre de Nusselt moyen pour $Ri=10$ et différents ε	80
Tableau IV.7 : Nombre de Nusselt moyen pour $Ri=0.1$	83
Tableau IV.8 : Nombre de Nusselt moyen pour $Ri=5$	85
Tableau IV.9 : Nombre de Nusselt moyen pour $Ri=10$	86
Tableau IV.10 : Nombre de Nusselt moyen pour $Ri=0.1$ et différents Pr	91
Tableau IV.11 : Nombre de Nusselt moyen pour $Ri=5$ et différents Pr	93
Tableau IV.12 : Nombre de Nusselt moyen pour $Ri=10$ et différents Pr	96

Nomenclature

b	Terme source dans le système d'équations algébriques discrétisées	
C_p	Chaleur spécifique du fluide à pression constante	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
D	Diffusivité massique	$m^2 \cdot s^{-1}$
g	Accélération de la pesanteur	$m \cdot s^{-2}$
Gr	Nombre de Grashof	
h	Coefficient de transfert convectif	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
k	Conductivité thermique	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
l	Longueur de la partie chauffée	m
L	Côté de la cavité	m
Nu_1	Nombre de Nusselt moyen de la paroi mobile $x=0$	
Nu_2	Nombre de Nusselt moyen de la paroi mobile $x=1$	
Nu_{moy}	Nombre de Nusselt moyen de la partie chauffée $y=0$	
p	Pression	Pa
P	Pression modifiée adimensionnelle	
Pr	Nombre de Prandtl	
Re	Nombre de Reynolds	
Ri	Nombre de Richardson	
S	Terme de source de l'équation de discrétisation	
T	Température	K
t	Temps	s
u	Composante de la vitesse selon la direction x	$m \cdot s^{-1}$
U	Composante de la vitesse adimensionnelle selon la direction X	
v	Composante de la vitesse selon la direction y	$m \cdot s^{-1}$
V	Composante de la vitesse adimensionnelle selon la direction Y	
V_0	Vitesse des parois latérales	$m \cdot s^{-1}$

w	Composante de la vitesse selon la direction z	$m.s^{-1}$
W	Composante de la vitesse adimensionnelle selon la direction Z	
x	Coordonnée horizontale	m
X	Coordonnée horizontale adimensionnelle	
y	Coordonnée verticale	m
Y	Coordonnée verticale adimensionnelle	
z	Coordonnée frontale	m
Z	Coordonnée frontale adimensionnelle	

Symboles grecques

α	diffusivité thermique	$m^2.s^{-1}$
β	Coefficient d'expansion thermique	K^{-1}
Γ	Coefficient de diffusion	$m^2.s^{-1}$
θ	température adimensionnelle	
τ	Temps adimensionnelle	
μ	Viscosité dynamique du fluide	$kg/m.s$
ν	Viscosité cinématique	$m^2.s^{-1}$
ρ	Masse volumique	$kg.m^{-3}$
\emptyset	Variable dépendante généralisée	
Δt	incrément de temps	s
$\Delta \tau$	incrément de temps adimensionnel	

Indices

c	Chaude
f	Froide
i	Indice d'un point du maillage suivant X
IL	Nombre de nœuds total dans la direction horizontale
j	Indice d'un point du maillage suivant Y

JL	Nombre de nœuds total dans la direction verticale
k	Indice d'un point du maillage suivant Z
KL	Nombre de nœuds total dans la direction frontale
Loc	Locale
moy	Moyen
P	Fait référence au nœud P d'un volume fini typique
nb	Désigne les nœuds voisins à P
n, s, e, w, b, t	Fait référence aux faces d'un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest, frontale et dorsale
N, S, E, W, B, T	Fait référence aux nœuds entourant un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest, frontale et dorsale

Introduction Générale

a) Généralités

Les phénomènes de convection naturelle ou mixte dans des espaces confinés ont toujours et continuent jusqu'à ce jour de susciter un grand intérêt pour de nombreux chercheurs aussi bien du point de vue théorique que du point de vue pratique. D'une part, ces phénomènes induisent souvent des écoulements caractérisés par des instabilités, des bifurcations, des pertes de symétries etc. Ces instabilités soulèvent des problèmes théoriques fondamentaux pour comprendre les mécanismes physiques en jeu et l'apparition de bifurcations d'un état stable vers un état instable, d'un état stationnaire et bidimensionnel vers un état fortement instationnaire et tridimensionnel. D'autre part, de nombreuses applications industrielles et en particulier ceux liés aux économies d'énergie telles que le refroidissement des composants électroniques, les systèmes de ventilation des bâtiments, les échangeurs thermiques, les capteurs d'énergie solaire, les procédés de séchage, etc. sont impactées directement par ces phénomènes. Actuellement un besoin important de compréhension de ce phénomène s'avère nécessaire pour arriver à une prévision correcte des circulations de fluides et des transferts de chaleur à l'intérieur de géométries qui deviennent de plus en plus complexes.

b) Transfert de la chaleur par convection

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes. D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux molécules du fluide adjacentes. L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces molécules du fluide. Ensuite les molécules vont se mélanger avec d'autres molécules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie. Dans ce cas l'écoulement transporte le fluide et l'énergie. L'énergie est, à présent,

emmagasinée dans les molécules du fluide et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement. La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par convection naturelle (libre) et convection forcée. Lorsqu'il se produit au sein du fluide des courants dus simplement aux différences de température, on dit que la convection est naturelle. Par contre si le mouvement du fluide est provoqué par une action externe, telle une pompe ou un ventilateur, le processus est appelé convection forcée. En d'autres termes l'existence, dans un fluide au repos ou en écoulement, de gradients de température et/ou de concentration donnent naissance à des forces de flottabilité ou poussées d'Archimède et qui à leur tour engendrent un écoulement spontané quand le fluide est au repos (convection naturelle) ou augmenter/diminuer son intensité lorsqu'il est déjà en mouvement (convection mixte). Ces forces de flottabilité modifient ainsi les champs des vitesses et influencent d'une manière directe le taux de transfert de chaleur à la faveur du couplage entre les différentes équations de conservation régissant le problème.

c) Méthode de résolution numérique

La résolution d'un écoulement en régime de convection mixte dans des espaces confinés revient à caractériser la structure de l'écoulement en déterminant les champs de vitesses et de températures ainsi que le taux de transfert de chaleur et tenant compte des divers paramètres qui contrôlent le phénomène considéré. Les études expérimentales ont fait d'énormes progrès à ce sujet grâce notamment aux développements du matériel de mesure comme par exemple la LDA (Laser Doppler Anemometry) ou la PIV (Particle Image Velocimetry) qui permettent de déterminer avec une grande précision les champs de vitesses instantanées d'un écoulement. Malheureusement ces études expérimentales reviennent très chères et très longues à réaliser. Aussi depuis quelques décennies les études numériques des écoulements convectifs ont supplantées les études expérimentales et une nouvelle discipline la CFD (Computational Fluid Dynamics en anglais) que l'on peut traduire par la « mécanique des fluides numérique » est apparue et a pris un essor considérable grâce, d'une part, à la disponibilité d'ordinateurs de plus en plus performants et d'autre part à un développement sans précédent des méthodes numériques.

Une grande variété de phénomènes physiques parmi lesquels les écoulements de fluides, avec ou sans transfert de chaleur et de masse, sont régis par des systèmes d'équations différentielles à dérivées partielles non linéaires établis à partir des principes généraux de conservation de la physique. Ces systèmes d'équations complexes et non-linéaires n'ont pas de solutions analytiques, aussi le recours aux méthodes numériques est la seule issue pour aboutir à

leur résolution. Par ailleurs l'existence des forces de flottabilité, dans l'équation de transport de la quantité de mouvement dépendant de la température, implique une résolution simultanée des différentes équations pour aboutir aux distributions exactes des champs de vitesses et de températures qui permettront par la suite l'accès aux autres paramètres pour dimensionner et optimiser les appareils et installations dans lesquels s'effectuent ces transferts. Dans cette étude nous avons porté notre choix sur la méthode des volumes finis pour la discrétisations de ces équations et un programme en langage Fortran a été établi pour déterminer la structure générale de l'écoulement dans la géométrie considérée.

d) But de l'étude

L'objectif du présent travail, en considération de l'argumentation citée ci-dessus, est de simuler numériquement le transfert de chaleur de la convection mixte en régime laminaire dans une cavité cubique chauffée partiellement par le bas, les parois latérales sont mobiles et froides alors que toutes les parois restantes sont supposées adiabatiques. L'analyse de la littérature scientifique concernant ce domaine montre que ce sujet reste d'actualité et c'est dans ce contexte que s'inscrit ce projet de doctorat.

e) Contenu du manuscrit

Ce travail comporte une formulation mathématique et numérique complétée par des simulations numériques pour déterminer les effets de différents paramètres sur la structure générale de l'écoulement. Pour cela nous avons adopté le plan suivant :

Après cette introduction le premier chapitre est consacré à des généralités sur le transfert de chaleur par convection dans les cavités confinées. Une synthèse bibliographique détaillée résume les travaux antérieurs rapportés dans la littérature relative au sujet considéré dans cette étude.

Dans le second chapitre nous présentons la formulation mathématique pour aboutir à la mise en équation du problème considéré dans cette étude. Les différentes hypothèses ainsi que les différentes conditions aux limites seront précisées.

Le troisième chapitre traitera de la formulation numérique du problème. Le maillage du domaine physique, la discrétisation des différentes équations et des conditions aux limites par la méthode des volumes finis ainsi que la méthode de résolutions du système d'équations algébriques obtenues après discrétisation seront détaillés.

Dans le quatrième et dernier chapitre nous présentons les résultats de différentes simulations numériques en mettant en évidence les effets des régimes de transfert, de la dimension de la partie chauffée, du sens de la vitesse des parois latérale et de la nature du fluide (Nombre de Prandtl) sur la structure générale de l'écoulement dans la configuration géométrique considérée dans cette étude.

Enfin, le manuscrit se termine par une conclusion générale résumant les principaux résultats obtenus ainsi qu'une suggestion de quelques travaux futurs en relation avec ce sujet.

Chapitre I

Revue Bibliographique

I.1 GENERALITES

Depuis le travail expérimental de Bénard [1] et [2], suivi par le travail théorique de Rayleigh [3] au début du XXe siècle sur la convection naturelle, de nombreuses études expérimentales, théoriques et numériques fortement liées à la convection de Rayleigh - Bernard sont réalisées. Ce phénomène de la convection naturelle (convection de Rayleigh-Bénard) dans des cavités confinées bidimensionnelles ou tridimensionnelles manifeste une forte sensibilité aux faibles variations des valeurs de certains paramètres tels que le nombre de Rayleigh (ou Grashof), le nombre de Prandtl, le facteur de forme des cavités et les conditions aux limites. Son étude révèle une variété de comportements d'écoulements complexes (instabilité, pertes de symétrie, bifurcation et chaos), ce qui est mis en évidence, par exemple, par les investigations de Gelfgat et al. [4], Erenburg et al. [5] et Lappa [6, 7]. Pour un complément d'information, nous tenons à signaler qu'il y a peu de temps (2021) Gelfgat [8] a publié un excellent livre dans lequel il fait un historique complet des écoulements cités précédemment et rapporte une synthèse de certains problèmes d'instabilité récemment résolus avec une description détaillée des techniques numériques les plus avancées utilisées pour leurs résolutions. D'ailleurs dans la préface de son livre l'auteur mentionne clairement que : "Instabilities of fluid flows and bifurcations between them comprise a fascinating set of problems that have attracted researchers for over a hundred years.", phrase que l'on peut traduire par : "Les instabilités d'écoulement des fluides et les bifurcations qui s'y produisent constituent un ensemble fascinant de problèmes qui attirent les chercheurs depuis plus de cent ans."

Le mécanisme du transport de la quantité de mouvement et de l'énergie dans une configuration géométrique bidimensionnel a déjà fait l'objet de nombreuses études de manière structurée et globale. Les champs dynamiques et thermiques, ainsi que les effets de certains paramètres spécifiques à ce phénomène, ont été déterminés, analysés et présentés dans de nombreuses publications scientifiques. Il est bon de signaler que jusqu'à présent, cette catégorie

de recherche continue d'être développée et publiée dans la littérature, comme le montrent les travaux de Hdhiri et Ben Beya [9], Sivasankaran et al. [10] et Khaleel Kareem et al. [11].

Cependant, toutes les configurations géométriques rencontrées dans la réalité sont en trois dimensions. La convection naturelle tridimensionnelle transitoire a fait l'objet de nombreuses études intensives théoriques, expérimentales et numériques, comme en témoigne le nombre d'excellents articles de synthèse rapportés dans la littérature par : Yang [12]; Bodenschatz et al.[13]; Lappa [14]; Baïri et al.[15]; Kadhim Hussein et al.[16]; Öztop et al.[17]; Soman et al. [18] et Arun et al. [19].

Contrairement à la convection naturelle tridimensionnelle instationnaire, les efforts de recherche étendus à la convection mixte tridimensionnelle ont été relativement rares. Jusqu'à présent, seules quelques études traitant ce problème ont devenues disponibles dans la littérature et peuvent principalement être organisées en quatre catégories en fonction de diverses combinaisons des gradients de température imposés.

I.2 CAVITES CHAUFFEES PAR LE BAS ET REFROIDIES PAR LA PAROI MOBILE SUPERIEURE

La première catégorie considère les cavités chauffées par le dessous et refroidies par la paroi mobile supérieure. Les autres parois restantes de la cavité sont adiabatiques et immobiles.

Teamah et al. [20] ont étudié numériquement la convection mixte dans une cavité cubique à paroi supérieure mobile remplie d'air dont les conditions aux limites sont détaillées dans la figure I.1. Les nombres de Richardson varient entre 0,1 et 10.

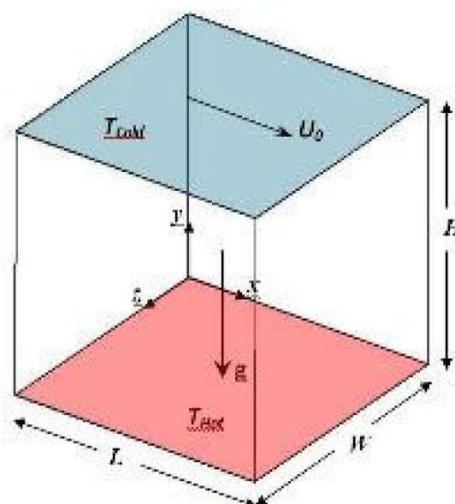


Figure I.1 : Modèle physique avec conditions aux limites Teamah et al [20]

Parmi les principaux résultats, une corrélation a été proposée pour relier le nombre de Nusselt moyen au nombre de Richardson au niveau de la section du centre de la cavité. En outre, pour mettre en évidence la précision des solutions en considérant la configuration tridimensionnelle, une comparaison entre les résultats bidimensionnels et tridimensionnels a été effectuée.

Pour déterminer l'effet du rapport d'aspect de la dimension de la cavité et du nombre de Richardson sur le comportement de l'écoulement et du transfert de la chaleur Yasin et al. [21] ont présenté une étude expérimentale de la convection mixte dans une cavité tridimensionnelle, dont la paroi inférieure est maintenue à une température plus chaude que la paroi supérieure qui est mobile d'une manière oscillatoire et le reste des parois est adiabatique. Le schéma du modèle expérimental de cette investigation est présenté dans la figure I.2. Les résultats montrent qu'avec une valeur constante du nombre de Richardson l'augmentation du nombre de Nusselt moyen est proportionnelle au rapport d'aspect de la cavité.

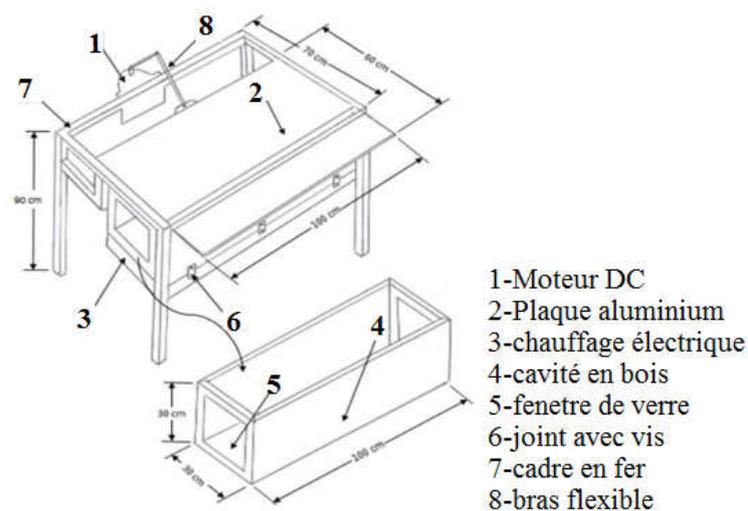


Figure I.2 : Modèle expérimental Yasin et al. [21]

Benmansour et al. [22], ont présenté une autre étude similaire aux deux études déjà mentionnées précédemment dont les conditions aux limites sont schématisées dans la figure I.3. Ils ont analysé les caractéristiques des champs dynamique et thermique en fonction des valeurs du nombre de Richardson qui varie de 10^{-3} à 10. De plus, de multiples corrélations en termes du taux de transfert de chaleur en fonction du nombre de Richardson ont été établies.

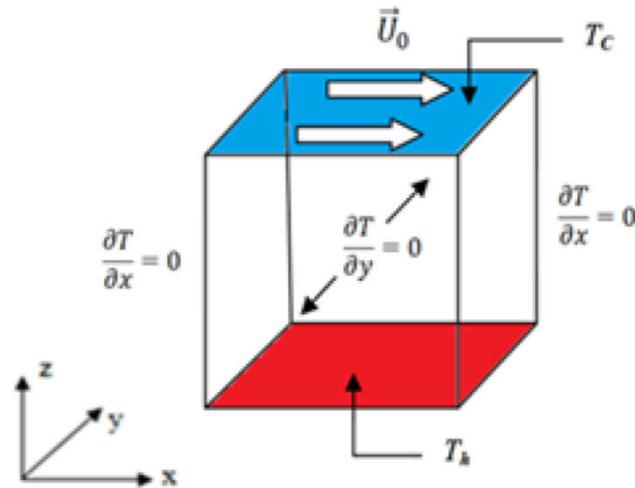


Figure I.3 : Schéma de l'enceinte tridimensionnelle avec conditions aux limites, Benmansour et al. [22]

Abo Elazm et al. [23], ont considéré la même configuration géométrique, mentionnée précédemment (voir figure I.4), avec cette fois-ci un nombre de Richardson très faible (mode de convection forcée) variant entre $5 \cdot 10^{-5}$ et $3 \cdot 10^{-4}$. Ils ont observé que le nombre de Nusselt moyen sur les surfaces supérieure et inférieure diminue dans toutes les sections à l'intérieur de la cavité lorsque le nombre de Richardson augmente. Comme dans l'étude précédente, une corrélation a été établie pour le nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Richardson avec une erreur maximale de 7,3 %.

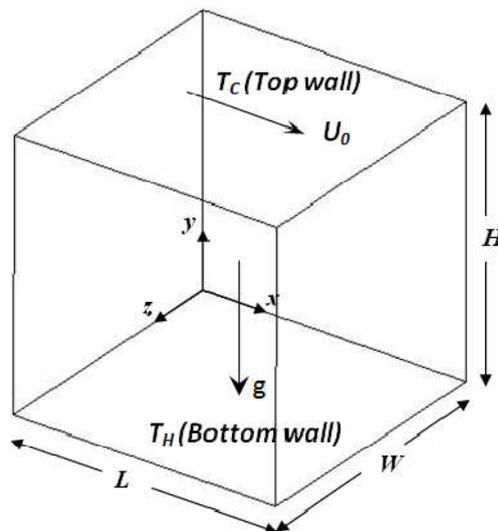


Figure I.4 : Schéma de l'enceinte tridimensionnelle avec les conditions aux limites. Abo Elazm et al. [23]

Fatih et al. [24] ont étudié numériquement la convection mixte dans une cavité 3-D avec des parois latérales trapézoïdales contenant un cylindre adiabatique. La figure I.5 montre le

modèle physique avec les différentes conditions aux limites considéré. L'étude a porté sur l'influence de quatre paramètres. le premier est le nombre de Richardson qui varie de 0.05 à 50, le deuxième est le module élastique des parois latérales qui varie de 10^3 à 10^5 , le troisième est l'angle d'inclinaison des parois latérales qui varie de 0° à 20° et le dernier est la fraction volumique des nano-fluide qui varie de 0 à 0.04. Le fluide est entraîné par deux forces, l'une est due à la mobilité de la face supérieure de la cavité qui est maintenue à une température froide et l'autre est due à la flottabilité du fluide provenant de la paroi inférieure chauffée. Les résultats révèlent une amélioration de 9.8 % du taux de transfert de chaleur quand le module élastique des parois latérales augmente de 10^3 à 10^5 pour un angle d'inclinaison égale à zéro, ainsi qu'une augmentation linéaire du nombre de Nusselt avec l'augmentation de la fraction volumétrique des nanoparticules.

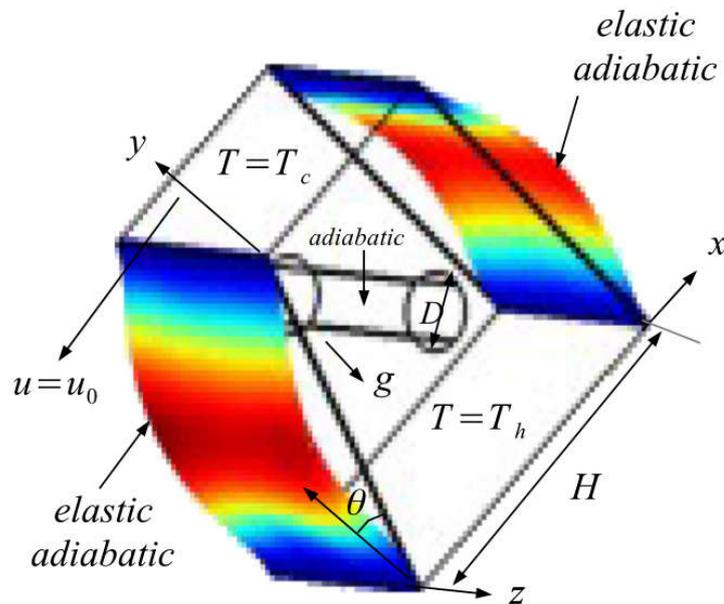


Figure I.5 : Géométrie de la cavité trapézoïdale avec les conditions aux limites appliquées, Fatih et al. [24]

I. R. Ali et al [25], ont analysé l'effet d'un nouveau type de nano-fluide appelé hybride-nano-fluide ($\text{Al}_2\text{O}_3\text{-Cu-Eau}$) sur le comportement du transfert de chaleur dans une cavité rectangulaire. L'investigation porte sur l'influence du nombre de Reynolds qui varie de 2 à 200. Les résultats indiquent que le Nusselt moyen est amélioré avec l'augmentation de la fraction volumique de la nanoparticule hybride mais il est insensible à la variation des nombres de Reynolds considérés.

I.3 CAVITES CHAUFFEES PAR LA PAROI MOBILE SUPERIEURE ET REFROIDIES PAR LE BAS

La seconde catégorie examine les cavités chauffées par la paroi mobile supérieure et refroidies par la paroi inférieure (stratification verticale stable de la température). Il convient de noter que contrairement à la première catégorie où le gradient de température qui agit parallèlement à la gravité est négatif, dans cette deuxième catégorie, ce gradient est toujours parallèle à la gravité mais positif.

Iwatsu et Hyun [26] ont présenté l'écoulement dans une cavité cubique remplie d'air dont les conditions aux limites sont mentionnées sur la figure I.6. Le nombre de Reynolds varie entre 10^2 et 2×10^3 alors que le nombre de Richardson varie entre 0 et 10. Leurs résultats mettent en évidence les effets tridimensionnels de l'écoulement dans la cavité en fonction de la combinaison des nombres de Reynolds et de Richardson et que lorsque le nombre de Richardson est proche de 0 l'influence du gradient de température est mineure.

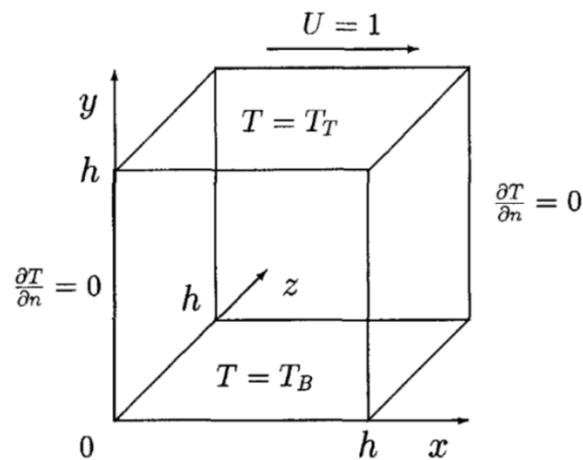


Figure I.6 : Géométrie et conditions aux limites du modèle, Iwatsu and Hyun [26]

Ouertatani et al. [27] ont rapporté une étude numérique similaire, mais dans ce cas particulier, le haut et le bas de la cavité se déplacent dans la même direction avec une vitesse constante. Des simulations numériques ont été effectuées en considérant des nombres de Reynolds compris entre 10^2 et 10^3 et des nombres de Richardson compris entre 0.001 et 10. Les auteurs ont observé qu'une amélioration remarquable du transfert thermique pouvant atteindre 76 pour cent. Cette amélioration ne pouvait être atteinte que lorsque le nombre de Reynolds était de 400 et que le nombre de Richardson égale à 1.

Une investigation numérique récente de la convection mixte dans une enceinte triangulaire tridimensionnelle conduite par Kadhim Hussein [28]. Dont la face verticale droite

mobile dans deux différentes directions est maintenue à une température chaude la même que celle de la paroi inférieure et la face inclinée est maintenue à une température froide comme elle est présentée sur la figure I.7. L'auteur a observé que la direction de la paroi mobile influe sur le comportement de l'écoulement, de la quantité du transfert de chaleur. En outre l'augmentation de l'entropie générée et le nombre de Nusselt moyen sont proportionnels à l'augmentation du nombre de Richardson.

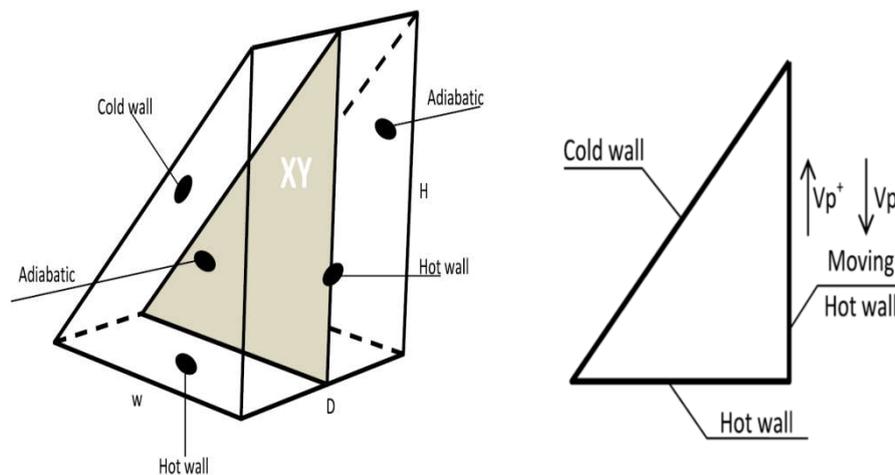


Figure I.7 : Géométrie de la cavité triangulaire avec les conditions aux limites, Kadhim Hussein [28]

Kolsi [29] a étudié numériquement l'effet de deux nombres adimensionnels, l'un est le nombre de Richardson qui varie de 10 à 100 et l'autre est le nombre de Hartman qui varie de 0 à 80, sur la génération de l'entropie dans une cavité tridimensionnelle dont les conditions aux limites sont présentées sur la figure I.8. Les résultats montrent que l'augmentation du taux de génération de l'entropie est proportionnelle à l'augmentation du nombre de Richardson et inversement proportionnelle au nombre de Hartman.

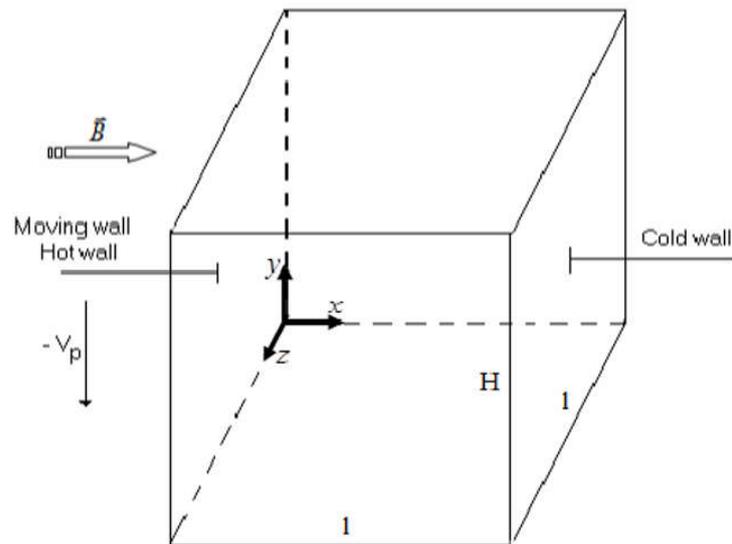


Figure I.8 : Model étudié par Kolsi [29] avec condition aux limites considérées

Noura et al. [30] ont discuté l'effet du rapport d'aspect sur le comportement dynamique et thermique de l'écoulement dans une cavité tridimensionnel dont la paroi supérieure mobile est maintenue à une température chaude, la paroi inférieure est refroidie et le reste des parois sont adiabatiques. Cette investigation est réalisée pour trois différents rapports d'aspect 1, 0.5 et 0.25 comme illustré dans la figure I.9. Les résultats indiquent que lorsque le rapport d'aspect et le nombre de Richardson augmentent, le nombre de Nusselt moyen augmente aussi.

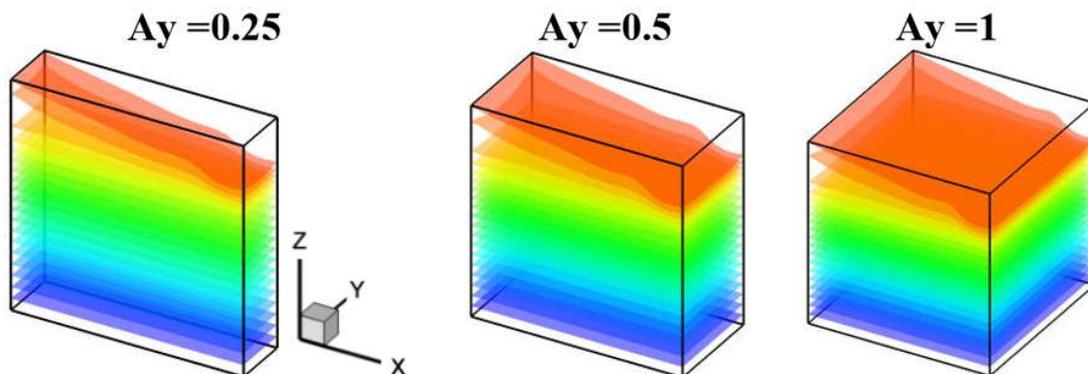


Figure I.9 : Schémas des trois rapports d'aspect de la cavité. Noura et al. [30]

I.4 CAVITES SOUMISES A UN GRADIENT DE TEMPERATURE IMPOSE VIA DES PAROIS LATERALES CHAUDE ET FROIDE MAIS OPPOSEES

La troisième catégorie concerne les cavités soumises à un gradient de température imposé par deux parois latérales opposées chaude et froide. Contrairement à la convection bien connue

de Rayleigh – Bénard, le gradient de température est dans ce cas perpendiculaire (au lieu d'être parallèle) à la gravité.

Benkacem et al. [31] ont examiné numériquement une cavité cubique remplie d'air (voir figure I.10). Les simulations ont été effectuées avec des nombres de Reynolds compris entre 10^2 et 10^3 et des nombres de Richardson entre 10^{-3} et 10. Les effets des différentes combinaisons de ces nombres sur l'écoulement et le transfert de chaleur ont été présentés. Les résultats indiquent que le nombre, la taille et l'intensité des cellules dépendent des valeurs de ces nombres.

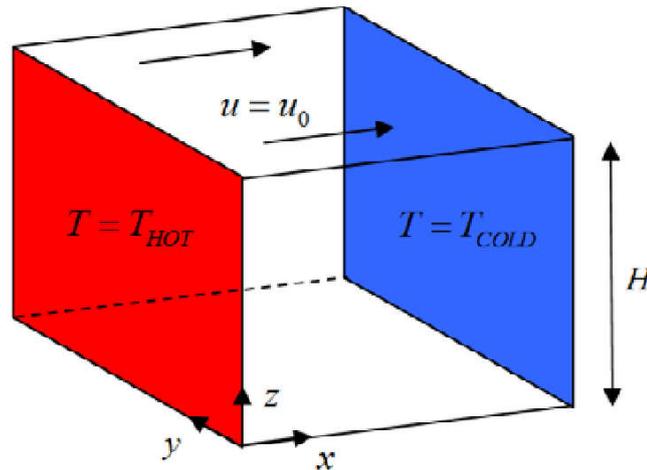


Figure I.10 : Schéma de la cavité cubique. Benkacem et al. [31]

La même configuration étudiée par Benkacem et al. [31] comme présenté dans la figure I.11a a été reconsidérée quelques années plus tard par Rani et al. [32]. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux du cas bidimensionnel. Les résultats montrent que l'effet de la troisième direction sur le champ thermique est mineur pour un nombre de Richardson élevé (convection naturel dominante).

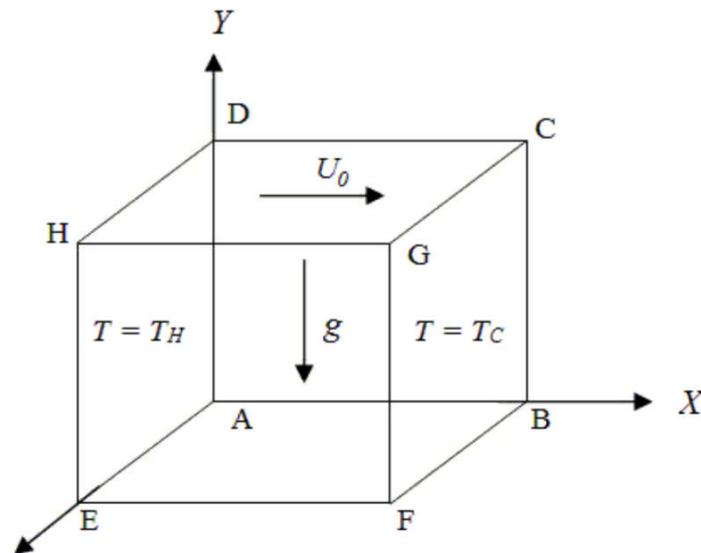


Figure I.11 : Modèle physique et conditions aux limites de l'enceinte tridimensionnelle, Rani et al. [32]

La convection mixte dans une cavité cubique remplie avec de l'air est analysée par Xu et al. [33] dont les conditions aux limites considérées sont illustrées sur la figure I.12. Cette investigation est effectuée pour un nombre de Richardson qui varie de 0.001 à 10 et pour un nombre de Reynolds fixe et égal à 100. Les résultats montrent que le champ dynamique est caractérisé par une seule cellule pour $Ri=0.001$ et 1.0 et qu'une deuxième cellule apparaisse lorsque le nombre de Richardson atteint la valeur de 10.0.

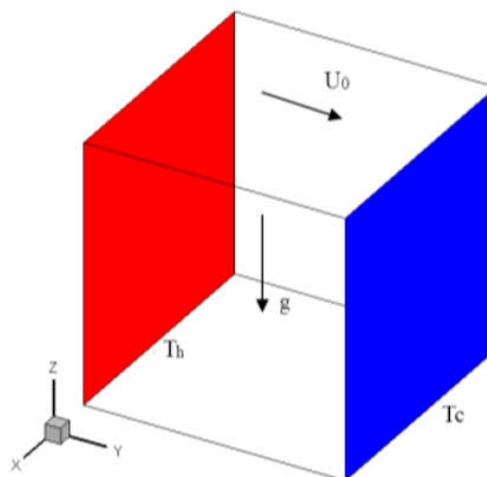


Figure I.12 : Schéma du modèle physique Xu et al. [33]

Très récemment (2019) Hussein et al. [34] ont considéré la convection mixte dans une enceinte cubique remplie avec de nano fluides. La configuration géométrique est particulière car les parois latérales gauche et arrière de la cavité ont été maintenues à une température chaude (T_h), tandis que les parois latérales droite et avant ont été maintenues à une température froide

(T_c). Les parois supérieure et inférieure sont supposées isolées thermiquement. La paroi supérieure de la cavité se déplace dans deux directions différentes comme le montre la figure I.13. Les fractions volumiques solides varient de 0 à 0.1%, tandis que le nombre de Richardson varie de 0,01 à 10. Ces auteurs ont constaté que le mécanisme du transfert de chaleur et les caractéristiques de l'écoulement dépendent fortement de la direction de la vitesse de la paroi supérieure. Il a été constaté aussi que le nombre de Nusselt moyen maximal correspond au cas où la paroi supérieure se déplace dans la direction x négative. De plus, les résultats ont indiqué que le nombre de Nusselt moyen augmente avec l'augmentation du nombre de Richardson et de la fraction volumique solide.

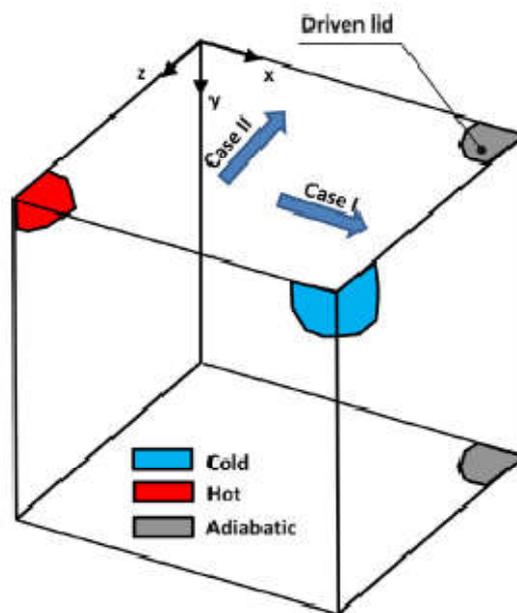


Figure I.13 : Schémas de la cavité cubique Hussein et al. [34]

Souad Marzougui et al [35], ont examiné numériquement la convection mixte et la génération d'entropie dans une cavité rectangulaire. La cavité est remplie d'un milieu poreux saturé d'un nano-fluide (Cu-Eau) et soumis à un champ magnétique uniforme. Les résultats obtenus montrent que le mouvement de la paroi horizontale, influé directement sur la génération de l'entropie à l'intérieur du milieu poreux, et que la variation de cette dernière représente une fonction linéaire avec la fraction volumique de la nanoparticule.

M. Hirphon [36], a considéré la convection mixte au sein d'une cavité trapézoïdale, dont la paroi inférieure chauffée est ondulée et la paroi supérieure mobile est adiabatique. Les résultats ont été obtenus pour des nombres de Richardson variant de [0.1 à 10]. Un comportement intéressant de l'écoulement est observé en augmentant le nombre de Richardson et les oscillations de la paroi inférieure.

I.5 CAVITES AVEC UNE PAROI INFÉRIEURE LOCALEMENT CHAUFFÉE ET DES PAROIS LATÉRALES MOBILES

La quatrième catégorie concerne une extension des études de Guo et Sharif (2004) et d'Aydin et Yang (2000) du régime d'écoulement laminaire dans une cavité carrée au régime d'écoulement turbulent dans une cavité cubique. Les parois latérales de la cavité sont isothermes et se déplaçant dans le même sens que la gravité, une source de chaleur est placée au centre de la paroi inférieure. Le reste des parois sont adiabatiques. Guo et Sharif (2004) ont imposé un flux de chaleur constant alors qu'Aydin et Yang (2000) ont considéré une température fixe. Malgré l'importance de cette configuration géométrique en régime laminaire (par exemple le refroidissement par air des appareils électroniques), seuls des travaux très limités, en considérant le régime turbulent, ont été publiés récemment par Khaleel Kareem et ses co-auteurs [2015-2016 et 2017]. Dans ces articles, le code CFD commercial ANSYS[®] FLUENT est utilisé pour résoudre les équations régissant le régime d'écoulement turbulent (le nombre de Reynolds est compris entre 5×10^3 et 3×10^4 tandis que le nombre de Richardson est compris entre 1 et 10).

Khaleel Kareem et Gao [37] ont procédé à des simulations numériques pour étudier la convection mixte turbulente stationnaire et instationnaire dans une enceinte tridimensionnelle remplie avec de l'air, dont les faces latérales mobiles sont refroidies, un flux de chaleur constant est imposé au centre de la face inférieure et les restes des parois sont adiabatiques, comme le montre la figure I.14. Trois différents modèles de turbulence sont présentés (RANS, URANS et LES) ainsi que différents modèles de $k-\varepsilon$ pour les nombres de Reynolds de Richardson considérés. L'influence du nombre de Reynolds sur les valeurs de l'énergie cinétique turbulente a été également illustrée. Ils ont conclu que le modèle LES est plus efficace pour la capture des petits tourbillons que le modèle URANS et que les différents modèles $k-\varepsilon$ ont un effet mineur sur les valeurs du nombre de Nusselt locale.

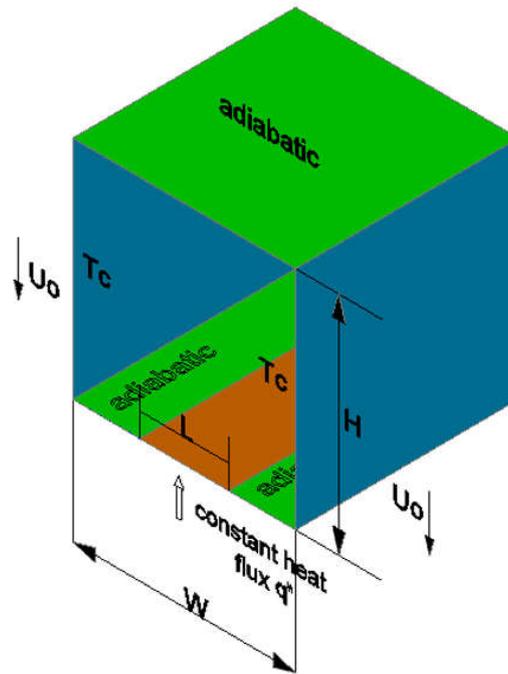


Figure I.14 : *Modèle physique et conditions aux limites d'enceinte cubique soumis à un flux de chaleur imposé. Khaleel Kareem et Gao [37].*

La même configuration (voir figure I.15) a été reconsidérée par les mêmes auteurs Khaleel Kareem et al [38] qui ont effectué une étude comparative entre deux modèles de turbulence LES et URANS dans une enceinte tridimensionnelle dont les faces latérales mobiles sont refroidies, un flux de chaleur constant est imposé à la face inférieure et les restes des parois sont adiabatiques. L'évaluation des performances des deux modèles montre que le modèle LES a plus d'avantages concernant la précision des calculs des vitesses et température mais sa durée de calcul est plus longue que le modèle URANS.

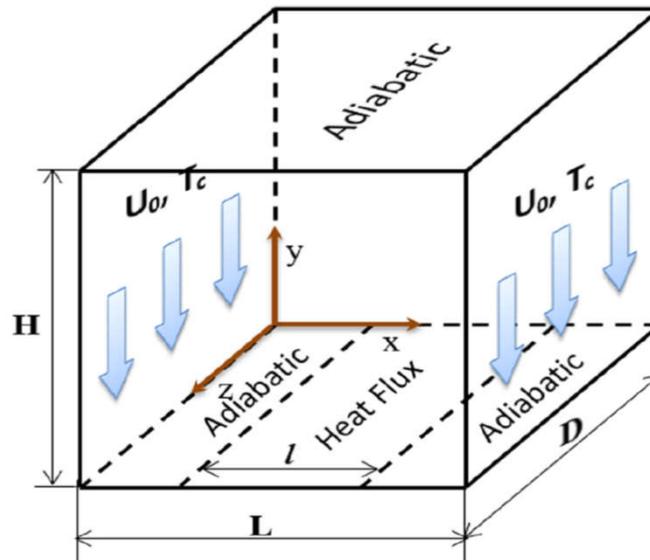


Figure I.15 : Configuration du modèle physique Khaleel Kareem et al. [38].

Khaleel Kareem et Gao [39] ont reconsidéré la même configuration précédente considéré par les mêmes auteurs Khaleel Kareem et Gao [37] et Khaleel Kareem et al [38] mais cette fois-ci la cavité est remplie de différents types de nano-fluides présentant différents diamètres de nanoparticules. Une augmentation du nombre de Nusselt et des fluctuations de l'énergie cinétique du fluide sur le champ d'écoulement. En outre, la comparaison entre les différents modèles turbulents a clairement montré les avantages de l'approche LES pour prévoir d'une manière plus précise les structures des champs dynamique et thermique dans la configuration géométrique considérée.

À la lumière de ces travaux, il semble intéressant de noter que les forces de flottabilité dues au gradient de température et la convection forcée due aux forces de cisaillement coopèrent pour imposer un écoulement composé de deux cellules contrarotatives strictement symétriques autour de la ligne verticale du centre de la cavité avec des parois latérales mobiles. Le cas où ces deux forces agissent de manière compétitive dans un régime d'écoulement laminaire (c'est-à-dire que la vitesse des parois mobiles est opposée à la gravité) n'a jamais été envisagé. Cette concurrence entre les deux forces peut amener l'écoulement à adopter, dans certaines conditions, des comportements complexes tels que la perte de symétrie, bifurcations et ainsi de suite. Par conséquent, nous avons considéré la même configuration géométrique que celle proposée par Aydin et Yang (2000) tout en introduisant la troisième dimension (cavité cubique) en considérant, dans ce cas, la direction de la vitesse des parois latérales constante et opposée à la gravité.

Nawal Ferroudj et al [40], ont étudié le problème de la génération de l'entropie dans une cavité bidimensionnelle. L'influence du nombre de Richardson et du nombre de Prandtl a été observée sur la génération de l'entropie et le champ de l'écoulement. Les résultats expriment que la génération de l'entropie et le nombre de Nusselt moyen augmentent avec le nombre de Prandtl et de Richardson.

I.6 CONCLUSION

Cette étude bibliographique nous a montré que la convection mixte induite dans une cavité avec des parois mobiles munis d'une source de chaleur a fait l'objet de nombreuses études en raison de l'importance du phénomène dans des nombreuses applications. Le phénomène de convection mixte s'avère un moyen efficace de refroidissement et présente en outre l'avantage d'être économique. L'objectif du présent travail consiste à étudier les détails des écoulements et du transfert thermique induit par convection mixte en régime laminaire au sein d'une cavité cubique partiellement chauffée par le bas dont les faces latérales, soumises à une température froide, se déplacent avec une vitesse fixée vers le haut. La paroi supérieure ainsi que les segments de la paroi inférieure non chauffés sont considérés adiabatiques.

Chapitre II

Formulation

Mathématique du

Problème

II.1 INTRODUCTION

La convection naturelle ou mixte est un mode de transport (ou de transfert) de l'énergie qui obéit, comme tout phénomène de transfert, aux lois fondamentales de la physique. Les équations fondamentales régissant le transfert ou transport d'une entité arbitraire dérivent du principe général de conservation. Ce principe stipule que la variation dans le temps de cette entité, dans un volume de contrôle élémentaire quelconque, est équivalente aux flux nets convectifs et diffusifs entrant et sortant par la surface délimitant ce volume de contrôle plus les taux nets de sa création et/ ou de sa destruction dans ce même volume. Cette entité peut représenter la masse, la quantité de mouvement, l'énergie etc. Dans ce chapitre nous allons exposer, dans un premier temps, la description du problème considéré dans cette étude. Nous présenterons par la suite les différentes équations mathématiques permettant la résolution du problème, ainsi que le système d'équations sans dimensions pour la détermination des champs dynamique et thermique de cet écoulement dans la configuration géométrique choisie.

II.2 DESCRIPTION DU PROBLEME

Le modèle physique considéré est schématisé sur la figure II.1. Il s'agit d'une cavité cubique dont les parois latérales sont maintenues à une température constante (froide) et qui se déplacent vers le haut avec une vitesse fixe V_0 . Une source de chaleur de différentes longueurs ayant une température constante (chaude) est placée au milieu de la paroi inférieure de la cavité. Toutes les autres parties de la cavité sont isolées thermiquement. L'écoulement dans cette

enceinte est induit par la force de cisaillement résultant du mouvement des parois latérales combinée avec la force de flottabilité résultant de la source de chaleur.

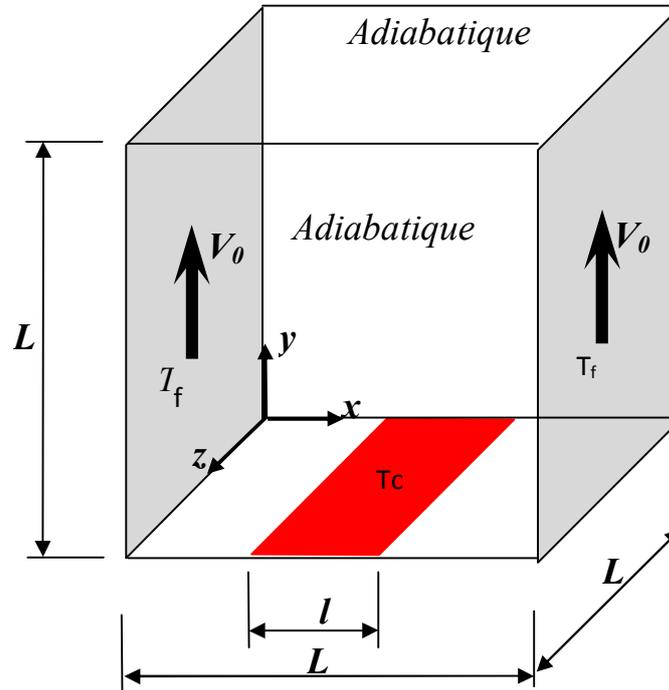


Figure II.1 : *Modèle physique avec conditions aux limites*

Le mécanisme du déplacement des parois latérales est illustré par la figure II.2 rapporté dans l'article de Roy et al. [41] qui ont étudié la génération d'entropie en régime de convection mixte dans une enceinte carrée pour différentes parois mobiles horizontales ou verticales et où la paroi inférieure de la cavité est isotherme, les parois latérales sont froides et la paroi supérieure est adiabatique.

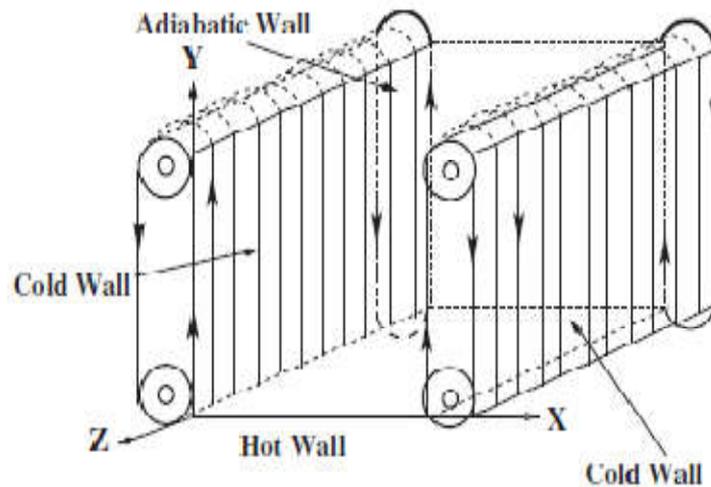


Figure II.2 : *Mécanisme de déplacement des parois latérales [41]*

Leurs simulations numériques ont été réalisées pour un nombre de Prandtl (Pr) égal à 0.026 et 7.2, un nombre de Reynolds (Re) variant de 10 à 100, et un nombre de Grashof (Gr) variant de 10^3 à 10^5 .

II.3 LOIS FONDAMENTALES DE LA DYNAMIQUE ET DE LA THERMODYNAMIQUE

La résolution d'un problème de convection mixte thermique doit reposer sur une solide compréhension des lois fondamentales régissant le transfert ou le transport d'une entité physique quelconque. Les équations générales des phénomènes convectifs sont celles de la mécanique des fluides et de la thermodynamique. Elles ont pour but la détermination des champs de vitesse, de pression et de température en chaque point du domaine occupé par le fluide. L'application des principes généraux de la physique nous permet d'établir les différentes équations nécessaires à la résolution du problème considéré dans cette étude. Nous allons donc écrire successivement la loi de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Le modèle mathématique ainsi obtenu sera, ensuite, simplifié en utilisant l'hypothèse de Boussinesq. Les conditions initiales et aux limites qui régissent ce problème seront également présentées.

Différentes méthodes peuvent être utilisées pour obtenir ces équations fondamentales. Nous proposons ici la méthode qui consiste à faire un bilan de quantités transportées et produites au cours du temps dans un volume élémentaire de contrôle et dont les détails peuvent aisément se retrouver dans des ouvrages de référence [42, 43].

II.3.1 Equation de conservation de masse

Cette équation appelée aussi « équation de continuité » exprime le principe de la conservation de la masse d'un fluide en mouvement. Dans un volume élémentaire et pendant un intervalle de temps élémentaire, la masse du fluide prélevé ou injecté est égale à la somme de la variation de la masse du fluide et des flux massiques traversant la surface de ce volume. Elle est définie par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V} = 0 \quad (\text{II.1})$$

II.3.2 Equations de quantité de mouvement

L'équation de la quantité de mouvement est obtenue par l'application de la deuxième loi de la dynamique à une particule de fluide passant à travers un volume de contrôle infinitésimal.

Elle stipule que la variation de la quantité de mouvement de cette particule dans ce volume élémentaire considéré est égale la somme de toutes les forces qui lui sont appliquées. La différence essentielle qui fait l'originalité des phénomènes convectifs concerne la présence d'une nouvelle force volumique causée par des gradients de températures qui créent une des différences de la masse volumique (densité) au sein du fluide, au repos ou en écoulement, dont il faut tenir compte dans la conservation de la quantité de mouvement. Par conséquent il faut procéder à une adaptation des équations classiques afin d'introduire cette nouvelle force volumique, elle s'écrit :

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \vec{\nabla} (\rho \vec{V}) = \rho \vec{F}_g + \vec{\nabla} p^* + \vec{\nabla} \bar{\tau} \quad (\text{II.2})$$

II.3.3 Equation d'énergie

L'équation générale du transport de l'énergie est obtenue par l'application du premier principe de la thermodynamique. Elle est donnée par l'expression suivante :

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \vec{\nabla} T \right) = \vec{\nabla} (k \vec{\nabla} T) + \beta T \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V} \vec{\nabla} p^* \right) + \varphi \quad (\text{II.3})$$

φ est la fonction de dissipation exprimée par :

$$\varphi = 2 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} + \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\} - \frac{2}{3} \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right\}^2 \quad (\text{II.4})$$

Dans ces équations :

- \vec{V} : est le vecteur de vitesse.
- $\vec{\nabla}$: est l'opérateur nabla défini comme suit : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j}$ (II.5)
- ρ : est la masse volumique.
- t : est le temps.
- \vec{F}_g : est la force volumique.
- p^* : est la pression motrice.
- $\vec{\nabla} \bar{\tau}$: est le tenseur des contraintes visqueuses donné par l'expression suivante :

$$\vec{\nabla} \bar{\tau} = \mu \left(\vec{\nabla}^2 \vec{V} + \frac{1}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right) \quad (\text{II.6})$$

- μ : est la viscosité dynamique du fluide.
- k : est la conductivité thermique.
- C_p : est la chaleur spécifique à pression constante.
- φ : est la fonction de la dissipation visqueuse et représente la puissance des forces de viscosité dans le fluide donné par l'expression suivante :

$$\varphi = \sum_{i,j} \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (\text{II.7})$$

II.4 HYPOTHESES

Ces hypothèses ont été largement adoptées pour l'étude des phénomènes convectifs dans des domaines très variés. Elles ont été étudiées en détail par de nombreux auteurs dans le but de simplifier la formulation mathématique des équations de conservation couplées. Mais la principale d'entre elles qui concerne directement la modélisation du phénomène de la convection a été attribuée à Boussinesq [44], mais elle a été présentée au paravent par Oberbeck [45].

II.4.1 Hypothèse d'Oberbeck-Boussinesq

Le mouvement du fluide en régime de convection naturelle est produit par le changement de la masse volumique ayant pour cause une différence de température au sein du fluide. La supposition de la masse volumique constante dans les équations Navier-Stokes ne peut donc être faite dans l'analyse des problèmes de la convection qu'elle soit naturelle, forcée ou mixte. Pour surmonter cet obstacle on fait appel à l'hypothèse d'Oberbeck-Boussinesq. L'approche de base dans cette approximation est de considérer la masse volumique comme constante dans l'équation de continuité et le terme d'inertie de l'équation de quantité de mouvement, mais elle change avec la température dans le terme de pesanteur (force volumique \bar{F}_g figurant dans l'équation de la conservation de la quantité de mouvement). En d'autres termes dans les cas les plus courants de convection, les variations de masse volumique au sein du fluide sont faibles et les vitesses d'écoulement sont assez lentes. Il est alors possible de considérer le fluide incompressible. Les variations de ρ sont négligées partout, excepté dans la force de gravité à l'origine du phénomène de convection. Cette variation est donnée par son développement au premier ordre par rapport à la température :

$$\rho(T) = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (\text{II.8})$$

Où : ρ_0 : densité de référence du fluide à la température densité de fluide T_0

β : est le coefficient d'expansion thermique exprimé par :

$$\beta = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (\text{II.9})$$

II.4.2 Les autres hypothèses

Les hypothèses complémentaires sont classiques et largement évoquées dans les études relatives à l'étude des écoulements en mécanique des fluides. Elles peuvent être énoncées comme suit :

- L'écoulement est tridimensionnel, laminaire, supposé newtonien et incompressible.
- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.
- La chaleur générée par la dissipation visqueuse ϕ est négligeable.
- Les effets de dilatation thermique sont négligés devant les autres termes dans l'équation de l'énergie.
- Le travail, induit par les forces visqueuses et de pression, est négligeable.

II.5 EQUATIONS DE BASE

Compte tenu de toutes ces hypothèses et en considérant un système de coordonnées cartésiennes les équations vectorielles précédentes peuvent s'écrire :

a) **Équation de continuité :**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.10})$$

b) **Équation de quantité de mouvement suivant x :**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.11})$$

c) **Équation de quantité de mouvement suivant y :**

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + g\beta(T - T_f) \quad (\text{II.12})$$

d) **Équation de quantité de mouvement suivant z :**

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.13})$$

e) **Équation d'énergie :**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.14})$$

II.6 ADIMENSIONNALISATION DES EQUATIONS

L'adimensionnalisation ou la normalisation consiste à transformer les variables dépendantes et indépendantes en des variables sans dimensions, c'est-à-dire qu'elles seront normalisées par rapport à certaines dimensions caractéristiques. Cela permet de spécifier les conditions d'écoulement avec un nombre restreint de paramètres de façon à rendre la solution plus générale. Les variables sans dimensions sont données par les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{x}{L}; Y = \frac{y}{L}; Z = \frac{z}{L} \\ U &= \frac{u}{v_0}; V = \frac{v}{v_0}; W = \frac{w}{v_0} \\ \theta &= \frac{T-T_f}{T_c-T_f}; \tau = \frac{v_0 t}{L}; P = \frac{p-p_0}{\rho v_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.15})$$

En introduisant les grandeurs sans dimensions dans les équations de conservation de masse, de mouvement et d'énergie, on obtient respectivement :

- L'équation de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (\text{II.16})$$

- L'équation de quantité de mouvement suivant x :

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} + W \frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right) \quad (\text{II.17})$$

- L'équation de quantité de mouvement suivant y :

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} + W \frac{\partial V}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right) + Ri \cdot \theta \quad (\text{II.18})$$

- L'équation de quantité de mouvement suivant z :

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} + U \frac{\partial W}{\partial X} + V \frac{\partial W}{\partial Y} + W \frac{\partial W}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \right) \quad (\text{II.19})$$

- L'équation d'énergie :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} + W \frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{1}{Re \cdot Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \right) \quad (\text{II.20})$$

II.7 CONDITIONS AUX LIMITES

La résolution du système d'équations obtenu précédemment nécessite l'incorporation des conditions initiales et aux limites pour chaque variable dépendante. Dans un premier temps, le fluide est au repos et sa température adimensionnelle est nulle dans toute la cavité. Les

conditions de températures sont connues sur les parois. La température adimensionnelle de la paroi gauche et droite (refroidies) est constante et égale à 0. La partie chaude de la paroi inférieure est soumise à une température adimensionnelle égale à 1.0. La condition d'adiabacité est adoptée pour les autres parois (supérieure, frontale et dorsale) ainsi que le reste de la paroi inférieure. Les vitesses des parois gauche et droite sont uniformes et égales à 1.0.

Ces différentes conditions peuvent être résumées par les expressions suivantes :

- Pour $X = 0$; 1 et $0 < Y < 1$ et $0 < Z < 1$:

$$\theta = 0, U = W = 0, V = 1 \quad (\text{II.21a})$$

- Pour $Y = 0$ et $0 < Z < 1$ et $(1 - \varepsilon)/2 \leq X \leq (1 + \varepsilon)/2$:

$$\theta = 1, U = V = W = 0 \quad (\text{II.21b})$$

- Pour les parties : $\begin{cases} Y = 0, 0 < Z < 1 \text{ et } 0 < X < (1 - \varepsilon)/2, (1 + \varepsilon)/2 < X < 1 \\ Y = 1, 0 < Z < 1 \text{ et } 0 < X < 1 \end{cases}$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0, U = V = W = 0 \quad (\text{II.21c})$$

Où : $\varepsilon = l/L$

- Pour $Z = 0$; 1 et $0 < Y < 1$ et $0 < X < 1$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z} = 0, U = W = 0, V = 0 \quad (\text{II.21d})$$

II.8 NOMBRES ADIMENSIONNELS CARACTERISANT LE PROBLEME

La mise sous forme adimensionnée des équations de conservation fait apparaître des nombres sans dimensions caractéristiques du problème. Il nous a semblé utile, dans ce qui suit, de rappeler leurs significations

II.8.1 Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension qui représente la compétition entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Il est défini par :

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} \quad (\text{II.22})$$

Avec : U : vitesse caractéristique du fluide

L : dimension caractéristique.

ρ : masse volumique du fluide.

μ : viscosité dynamique du fluide.

II.8.2 Nombre de Prandtl

Ce nombre sans dimension ne dépend que des propriétés intrinsèques du fluide considéré. Il représente le rapport entre la diffusivité de la quantité de mouvement ν et la diffusivité thermique α . Il est défini par :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (\text{II.23})$$

II.8.3 Nombre de Richardson

Ce nombre représente le rapport entre l'énergie potentielle gravitationnelle d'une parcelle de fluide et son énergie cinétique : (énergie potentielle/énergie cinétique). Il peut s'exprimer en fonction de différents nombres sans dimension par les formules suivantes :

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2} = \frac{Ra}{PrRe^2} \quad (\text{II.24})$$

$Ra = Gr Pr$ est le nombre de Rayleigh et Gr est le nombre de Grashof qui représente le rapport entre les forces de flottabilité thermique et les forces de viscosité et dont la formule est :

$$Gr = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu^2} \quad (\text{II.25})$$

II.8.4 Calcul du nombre de Nusselt

L'étude du transfert de chaleur dans une enceinte soumise à des températures différentes nécessite la détermination du taux de transfert de chaleur, afin d'évaluer les transferts de chaleur entre le fluide en mouvement et la partie chaude de la paroi inférieure ainsi que les parois latérales, Il est nécessaire de déterminer le taux de transfert de chaleur exprimé par le nombre de Nusselt locale et moyen.

Le nombre de Nusselt est défini par la relation suivante :

$$Nu = \frac{hL}{k} \quad (\text{II.26})$$

Où :

- k : conductivité thermique.
- h : coefficient d'échange thermique par convection.
- L : longueur caractéristique.

La densité de flux de chaleur par conduction (q) peut être calculé à partir de l'équation suivante (loi de Fourier) :

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial Y} \quad (\text{II.27})$$

Le signe ($-$) signifie que le gradient de température est négatif, le transfert de chaleur se réalisé dans le sens de la diminution de la température (le sens positif).

La quantité de chaleur par convection entre la paroi chauffée et le fluide peut être exprimé au moyen de l'équation suivante :

$$q = h(T_c - T_f) \quad (\text{II.28})$$

Où : T_c : température de la paroi.

T_f : température moyenne du fluide dans une section.

L'application de la loi de la conservation d'énergie à l'interface solide–fluide (le flux de chaleur dissipée par la paroi solide égale au flux de chaleur récupérer par le fluide) nous permet d'écrire :

$$\text{Flux par convection} = \text{Flux par conduction}$$

$$\text{Donc :} \quad q = -k \frac{\partial T}{\partial Y} = h(T_c - T_f) \quad (\text{II.29})$$

De l'équation (II.29) :

$$h = -k \frac{\partial T / \partial Y}{(T_c - T_f)} \quad (\text{II.30})$$

Le nombre de Nusselt local au niveau de la partie chaude est obtenu en remplaçant le coefficient d'échange de chaleur convectif h obtenu dans l'équation (II.30) dans l'équation (II.26).

$$Nu = \frac{hL}{k} = - \frac{kL(\partial T / \partial Y)}{k(T_c - T_f)} \quad (\text{II.31})$$

Par ailleurs comme $\theta = \frac{T - T_f}{T_c - T_f}$ il vient donc :

$$Nu_{Loc} = \frac{hL}{k} = - \frac{kL(T_c - T_f) \frac{1}{L} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \Big|_{Y=0}}{k(T_c - T_f)} \quad (\text{II.32})$$

Le nombre de Nusselt locale de la partie chauffée de la paroi inférieure devient :

$$Nu_{Loc}(X, Z) = - \left[\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right]_{Y=0} \quad (\text{II.33})$$

Le même résultat a été présenté au paravent par Iwatsu [25].

Le nombre de Nusselt moyen le long de cette partie est obtenu par intégration des valeurs du nombre de Nusselt local, il est donné par :

$$Nu_{moy} = \int_0^1 \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_{(1-\varepsilon)/2}^{(1+\varepsilon)/2} Nu_{Loc}(X, Z) dX \right] dZ \quad (II.34)$$

Il est nécessaire de noter que ces deux expressions des nombre de Nusselt local et moyen correspondent seulement à la partie chaude de la paroi inférieure (source de chaleur).

Le même raisonnement est suivi pour le calcul des autres expressions des nombres de Nusselt local et moyen des parois latérales.

$$Nu_{Loc1,2}(Y, Z) = - \left[\frac{\partial \theta}{\partial X} \right]_{X=0,1} \quad (II.35)$$

$$Nu_{1,2} = \int_0^1 \left[\int_0^1 Nu(Y, Z) dY \right] dZ \quad (II.36)$$

Où : Nu_{Loc1} : nombre de Nusselt local de la paroi gauche ($X = 0$).

Nu_{Loc2} : nombre de Nusselt local de la paroi droite ($X = 1$).

Nu_1 : nombre de Nusselt moyen de la paroi gauche ($X = 0$).

Nu_2 : nombre de Nusselt moyen de la paroi droite ($X = 1$).

II.9 CONCLUSION

Le modèle mathématique du problème considéré dans cette étude a été établi, les conditions initiales et aux limites ont été précisées. Ce modèle est constitué d'équations différentielles à dérivées partielles (E.D.P) non linéaires. La solution analytique de tels modèles n'est possible que dans certains cas très simplifiés. Le recours aux méthodes numériques s'avère indispensable pour la résolution de ce modèle. La méthode de discrétisation des équations basée sur la méthode des volumes finis ainsi que la résolution des systèmes d'équations algébriques obtenus après discrétisation seront exposées en détail dans le chapitre suivant.

Chapitre III

Formulation Numérique

III.1 INTRODUCTION

Les phénomènes physiques résultant des modes de transfert de chaleur sont de nature complexe en raison du caractère fortement non linéaire des problèmes rencontrés. Pour traiter ce genre de problèmes, plusieurs voies et approches (expérimentales, analytiques et numériques) sont possibles. La voie expérimentale demeure de loin la plus coûteuse en temps et en argent. De plus, les solutions analytiques des équations ne sont possibles que pour des cas particuliers. C'est pour quoi on a souvent recours à des approches numériques basées sur les différences finies, les éléments finis, les volumes finis, les méthodes spectrales ... etc.

La méthode des volumes finis, décrite par Patankar [42], possède beaucoup d'avantages telle que la stabilité, la convergence et notamment elle assure la conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie sur chaque volume de contrôle. Cette méthode consiste à diviser le domaine d'étude en un certain nombre de volumes de contrôle, sur lesquels notre système d'équations est intégré. Dans chaque volume, on considère un point situé en son centre. La variable dépendante considérée est calculée en ces points sachant que les grandeurs scalaires (pression et température) sont calculées aux centres des volumes de contrôle, alors que les composantes de la vitesse sont calculées sur les faces de ces volumes.

Ceci est réalisé sur des grilles décalées où les projections des équations de quantité de mouvement dans les trois directions sont intégrées sur des volumes de contrôle décalés par rapport aux volumes de contrôle typiques (scalaire). Afin de résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles établies dans le chapitre précédent, nous allons procéder à leurs discrétisations dans le but d'obtenir un système d'équations algébriques dont la résolution nous permet de déterminer les champs de toutes les variables du problème considéré. Les flux convectifs et diffusifs sont évalués à l'aide du schéma de la loi de puissance « power-law ». Le couplage vitesse-pression est traité par l'algorithme SIMPLER (Patankar [42]).

III.2 MAILLAGE

Le domaine physique est divisé selon les directions x , y et z en une série de volume élémentaires finis appelés volume de contrôle ($\Delta v = \Delta x \Delta y \Delta z$). Le centre d'un volume de contrôle typique est un point P , et limité par six faces latérales : les faces est et ouest dans la direction horizontale X dont leurs centres sont e et w , nord et sud dans la direction verticale Y dont leurs centres sont n et s et frontale et dorsale « top and bottom » dans la direction frontale Z dont leurs centres sont t et b . Chaque volume fini sera directement entouré de six autres volumes finis, dans la direction horizontale deux volumes adjacents aux faces est et ouest et contenant en leurs centres les nœuds E et W , dans la direction verticale deux autres volumes adjacents aux faces nord et sud contenant en leurs centres les nœuds N et S , et en fin dans la direction frontale les deux volumes adjacents aux faces frontale et dorsale contenant en leurs centres les nœuds T et B .

Les variables scalaires (pression, température,...etc.) sont stockées aux points centrés dans les volumes finis, alors que les variables vectorielles telles les composantes de vitesse sont stockées aux centres des faces latérales des volumes finis. Les équations de continuité et d'énergie sont discrétisées dans un volume fini typique (Figure III.1). Tandis que les équations de quantité de mouvement sont intégrées dans de volumes finis décalés.

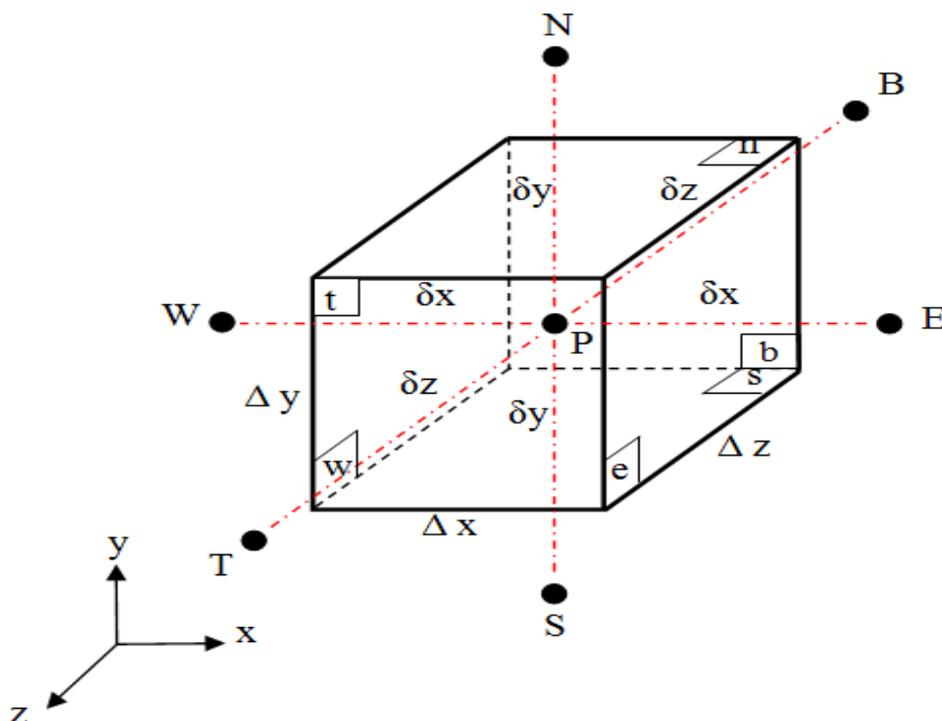


Figure III.1 : Volume de contrôle entouré par les nœuds voisin

La composante de vitesse horizontale est décalée vers la droite, la composante de vitesse verticale est décalée vers le haut (Figure III.2) et la composante de vitesse frontale est décalée vers le front. Un schéma du maillage décalé pour chaque plan est présenté aux figures III.3, 4 et 5. Ce maillage décalé pour les vitesses est nécessaire pour éviter certaines instabilités numériques.

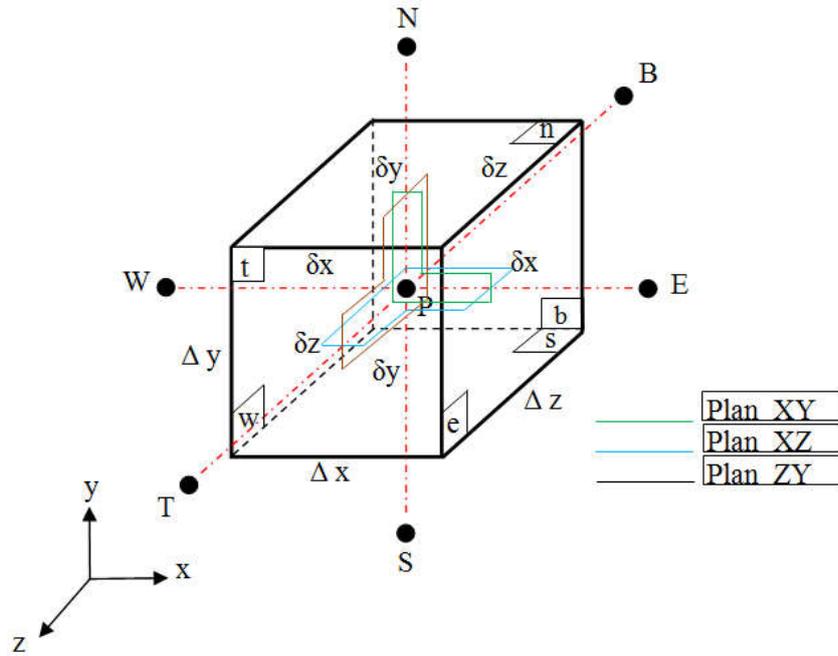


Figure III.2 : Maillage décalé suivant les trois plans

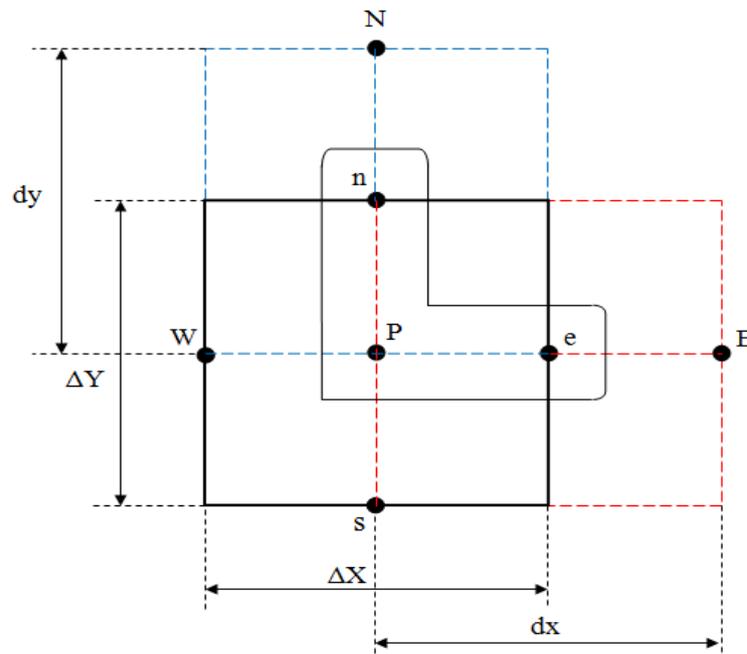


Figure III.3 : Maillage décalé sur le plan XY

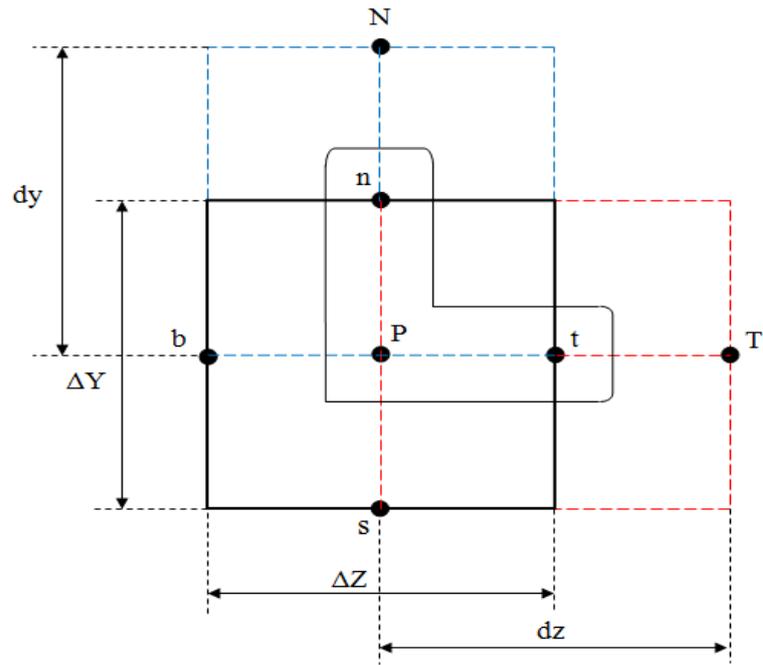


Figure III.4 : Maillage décalé sur le plan YZ

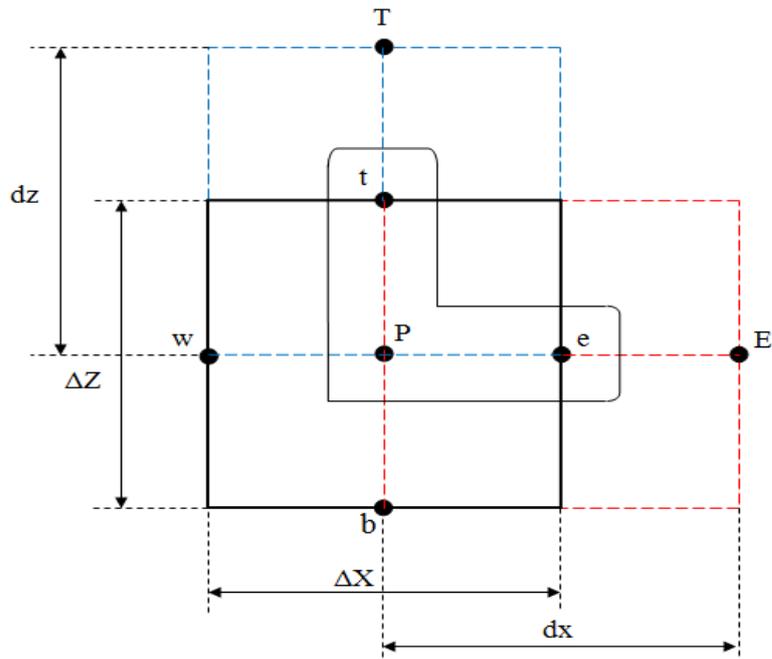


Figure III.5 : Maillage décalé sur le plan XZ

III.3 DISCRETISATION DE L'EQUATION GENERALE DE TRANSPORT

Chacune des équations de conservation du modèle mathématique peut s'écrire sous la forme générale (dite équation de transport) suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(v\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(w\phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) + S_\phi \quad (\text{III.1})$$

Où : ϕ : variable dépendante (U, V, W, θ, \dots)

$\frac{\partial \phi}{\partial t}$: représente le terme transitoire

$\frac{\partial}{\partial x}(u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(v\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(w\phi)$: représente les termes de convection.

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$: représente les termes de diffusion.

S_ϕ : représente le terme source.

L'écriture des équations sous cette forme permet une grande flexibilité de programmation, car elle conduit à la résolution d'une forme unique et généralisée d'équation. La méthode des volumes finis développé par Patankar [42] est utilisée pour exprimer les intégrales sur les volumes finis. Cette méthode s'appuie sur une discrétisation du domaine de calcul en différents nœuds, chacun d'entre eux étant entouré d'un volume élémentaire sur lequel on recherche la valeur moyenne de la variable.

L'intégration de l'équation générale de transport sur un volume de contrôle et en fonction du temps s'écrit :

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \oint_{VC} \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \\ \frac{\partial}{\partial x}(u\phi) + \\ \frac{\partial}{\partial y}(v\phi) + \\ \frac{\partial}{\partial z}(w\phi) \end{array} \right] d\tau dV = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \oint_{VC} \left[\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) \end{array} \right] d\tau dV + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \oint_{VC} S_\phi d\tau dV \quad (\text{III.2})$$

Nous utilisons le théorème de Gauss (appelé aussi le théorème de la divergence ou théorème d'Ostrogradski) qui permet de transformer une intégrale de volume en une intégrale de surface. L'équation (III.2) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dy dz d\tau + \\ \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial(U\phi)}{\partial x} dx dy dz d\tau + \\ \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial(V\phi)}{\partial y} dx dy dz d\tau + \\ \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial(W\phi)}{\partial z} dx dy dz d\tau \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dx dy dz d\tau + \\ \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dx dy dz d\tau + \\ \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) dx dy dz d\tau + \\ \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \int_b^t S_\phi dx dy dz d\tau \end{array} \right\} \quad (\text{III.3})$$

L'intégration du terme transitoire de l'équation de transport (III.3) donne :

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial\phi}{\partial\tau} dx dy dz d\tau = (\phi_p^{n+1} - \phi_p^n) \Delta X \Delta Y \Delta Z \quad (\text{III.3a})$$

L'intégration des termes convectifs de l'équation de transport (III.3) est approximée par :

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial(U\phi)}{\partial x} dx dy dz d\tau = (U_e \phi_e - U_w \phi_w) \Delta Y \Delta Z \Delta \tau \quad (\text{III.3b})$$

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial(V\phi)}{\partial y} dx dy dz d\tau = (V_n \phi_n - V_s \phi_s) \Delta X \Delta Z \Delta \tau \quad (\text{III.3c})$$

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial(W\phi)}{\partial z} dx dy dz d\tau = (W_t \phi_t - W_b \phi_b) \Delta X \Delta Y \Delta \tau \quad (\text{III.3d})$$

L'intégration des termes diffusifs de l'équation (III.3) conduit à :

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) dx dy dz d\tau = \left[\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_w \right] \Delta Y \Delta Z \Delta \tau \quad (\text{III.3e})$$

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) dx dy dz d\tau = \left[\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)_s \right] \Delta X \Delta Z \Delta \tau \quad (\text{III.3f})$$

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) dx dy dz d\tau = \left[\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_t - \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_b \right] \Delta X \Delta Y \Delta \tau \quad (\text{III.3g})$$

Où les coordonnées des nœuds e, w, n, s, t et b ne sont pas les mêmes pour les variables scalaires et pour les composantes de vitesse si les grilles sont décalées.

Le terme source de l'équation (III.3) étant un scalaire défini au centre du volume de contrôle, on peut l'écrire :

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \int_b^t S_{\phi} dx dy dz d\tau = S_{\phi} \Delta X \Delta Y \Delta Z \Delta \tau \quad (\text{III.3h})$$

Généralement le terme source S_{ϕ} peut aussi dépendre de la fonction ϕ elle-même. Dans une telle situation nous écrivons :

$$S_{\phi} = S_c + S_p \phi_p \quad (\text{III.4})$$

Où : S_p : coefficient de ϕ_p

S_c : partie constante de S_{ϕ} qui ne dépend pas de ϕ_p

Le tableau (III.1) définit les différentes variables du problème ϕ , leurs coefficients de diffusion Γ ainsi que leurs termes source S_{ϕ} correspondant aux différentes équations de conservation. Ces équations non linéaires sont fortement couplées et seront résolues numériquement en utilisant l'algorithme SIMPLER pour le couplage pression-vitesse.

Tableau III.1 : Identification des termes des équations de transport sous forme adimensionnelle

Equation	Variable de transport	Coefficient de diffusion	Terme source
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement suivant x	U	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial P}{\partial X}$
Quantité de mouvement suivant y	V	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial P}{\partial X} + Ri \theta$
Quantité de mouvement suivant z	W	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial P}{\partial Z}$
Energie	θ	$\frac{1}{PrRe}$	0

Les densités de flux $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e$, $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w$, $\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_n$, $\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_s$, $\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_t$ et $\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_b$ traversant les faces du volume de contrôle sont évaluées par une interpolation entre les nœuds voisins du type :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e &= \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta X_e}, & \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w &= \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta X_w} \\
 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_n &= \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta Y_n}, & \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_s &= \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta Y_s} \\
 \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_t &= \frac{\phi_T - \phi_P}{\Delta Z_t}, & \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_b &= \frac{\phi_P - \phi_B}{\Delta Z_b}
 \end{aligned} \tag{III.5}$$

Où l'indice E correspond au point « est » (ou à gauche de P) du maillage sur lequel est définie la variable ϕ (le point e étant situé sur l'interface du volume de contrôle, entre E et P), dx représente donc la distance entre E et P , alors que ΔX est la distance entre e et w , et même chose pour les deux autres directions.

L'intégration des termes diffusifs conduit à :

$$\left. \begin{aligned}
 \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w \right] \Delta Y \Delta Z \Delta \tau &= \left[\Gamma_e \frac{\phi_e - \phi_P}{\Delta X_e} - \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_w}{\Delta X_w} \right] \Delta Y \Delta Z \Delta \tau \\
 \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_s \right] \Delta Y \Delta Z \Delta \tau &= \left[\Gamma_n \frac{\phi_n - \phi_P}{\Delta Y_n} - \Gamma_s \frac{\phi_P - \phi_s}{\Delta Y_s} \right] \Delta X \Delta Z \Delta \tau \\
 \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_t - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_b \right] \Delta Y \Delta Z \Delta \tau &= \left[\Gamma_t \frac{\phi_t - \phi_P}{\Delta Z_t} - \Gamma_b \frac{\phi_P - \phi_b}{\Delta Z_b} \right] \Delta X \Delta Y \Delta \tau
 \end{aligned} \right\} \tag{III.6}$$

Le résultat de l'intégration de l'équation (III.3) divisé par $\Delta \tau$ donne :

$$\left(\begin{array}{l} \frac{(\phi_p^{n+1} - \phi_p^n)}{\Delta \tau} \Delta X \Delta Y \Delta Z \\ + (U_e \phi_e - U_w \phi_w) \Delta Y \Delta Z \\ + (V_n \phi_n - V_s \phi_s) \Delta X \Delta Z \\ + (W_t \phi_t - W_b \phi_b) \Delta X \Delta Y \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w \right] \Delta Y \Delta Z \\ + \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_s \right] \Delta X \Delta Z \\ + \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_t - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_b \right] \Delta X \Delta Y \end{array} \right) + S_\phi \Delta X \Delta Y \Delta Z \tag{III.7}$$

Pour évaluer les vitesses des termes convectifs (U_e, U_w, V_n, V_s, W_t et W_b nous choisissons une interpolation entre les nœuds voisins, nous obtenons :

$$\left. \begin{aligned} U_e &= \frac{U_E + U_P}{2}, U_w = \frac{U_P + U_W}{2} \\ V_n &= \frac{V_N + V_P}{2}, V_s = \frac{V_P + V_S}{2} \\ W_t &= \frac{W_T + W_P}{2}, W_b = \frac{W_P + W_B}{2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.8})$$

Finalement, nous obtenons une équation discrétisée, sous la forme générale suivante, pour les différentes variables ϕ .

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_T \phi_T + a_B \phi_B + b \quad (\text{III.9})$$

Les coefficients $a_P, a_E, a_W, a_N, a_S, a_T$ et a_B sont définis en fonction de l'interpolation utilisée pour la valeur entre deux points voisins du maillage. b est un groupement qui contient le terme source et le terme $a_P^n \phi_P^n$ (calculé au pas du temps précédente).

$$b = S_c + a_P^n \phi_P^n \quad (\text{III.10})$$

III.3.1 Schémas numériques

Le problème majeur est d'approximer les valeurs des termes $\phi_E, \phi_W, \phi_N, \phi_S, \phi_T$ et ϕ_B aux interfaces du volume de contrôle par rapport aux nœuds du maillage. Différents schémas ont été introduits dans la littérature: Différences centrées, Décentré Amont, Hybride, Exponentiel, Loi de puissance... etc.

La différence entre ces schémas est la façon avec laquelle, on prend en compte les termes de convection et de diffusion. Dans notre étude, nous avons utilisé le schéma de la loi de puissance (Power-Law).

III.3.2 Schéma loi de puissance (Power Law)

Le schéma de la loi de puissance permet de fournir une meilleure stabilité de la solution numérique et réalise une meilleure approximation de la courbe exacte (exponentielle) et de plus ne coûte pas cher comparé à l'exponentiel et il est recommandé pour les problèmes de convection-diffusion.

Les coefficients $a_P, a_E, a_W, a_N, a_S, a_T$ et a_B de l'équation (III.9) pour le schéma de la loi de puissance sont définis par les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} a_E &= D_e A(|Pe_e|) + \max(-F_e, 0); a_W = D_w A(|Pe_w|) + \max(F_w, 0) \\ a_N &= D_n A(|Pe_n|) + \max(-F_n, 0); a_S = D_s A(|Pe_s|) + \max(F_s, 0) \\ a_E &= D_t A(|Pe_t|) + \max(-F_t, 0); a_B = D_b A(|Pe_b|) + \max(F_b, 0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.11})$$

et
$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_T + a_B - S_P \quad (\text{III.12})$$

Où $A(|Pe_i|)$ est défini selon le schéma utilisée, pour le schéma de la loi de puissance, il est défini comme suit :

$$A(|Pe_i|) = \max[0, (1 - 0.1|Pe_i|)^5]; \text{ avec } i = e, w, n, s, t, b \quad (\text{III.13})$$

Pe est le nombre de Peclet qui caractérise le rapport entre le flux convectif et le flux diffusif :

$$Pe = \frac{\rho u \delta x}{\Gamma} = \frac{F}{D} \Rightarrow Pe_i = \frac{F_i}{D_i}; \text{ avec } i = e, w, n, s, t, b \quad (\text{III.14})$$

Ces coefficients contiennent une combinaison du flux convectif F et diffusif D aux interfaces des volumes de contrôle. Les valeurs de F et D pour chaque interface e, w, n, s, t et b du volume de contrôle sont donnés par les relations suivantes :

$$\text{Flux convectifs : } \left. \begin{aligned} F_e &= U_e \Delta Y \Delta Z, F_w = U_w \Delta Y \Delta Z \\ F_n &= V_n \Delta X \Delta Z, F_s = V_s \Delta X \Delta Z \\ F_t &= U_t \Delta X \Delta Y, F_b = U_b \Delta X \Delta Y \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.15})$$

$$\text{Flux diffusifs : } \left. \begin{aligned} D_e &= \frac{\Gamma_e}{\Delta X_e} \Delta Y \Delta Z, D_w = \frac{\Gamma_w}{\Delta X_w} \Delta Y \Delta Z \\ D_n &= \frac{\Gamma_n}{\Delta Y_n} \Delta X \Delta Z, D_s = \frac{\Gamma_s}{\Delta Y_s} \Delta X \Delta Z \\ D_t &= \frac{\Gamma_t}{\Delta Z_t} \Delta X \Delta Y, D_b = \frac{\Gamma_b}{\Delta Z_b} \Delta X \Delta Y \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.16})$$

Si l'on exprime l'équation (III.9) en fonction du système de coordonnées indicielles (numérotation des nœuds), donc l'équation générale sous forme indicielle s'écrit.

$$a_P(i, j, k) \phi(i, j, k) = \left(\begin{aligned} &a_E(i, j, k) \phi(i + 1, j, k) + \\ &a_W(i, j, k) \phi(i - 1, j, k) + \\ &a_N(i, j, k) \phi(i, j + 1, k) + \\ &a_S(i, j, k) \phi(i, j - 1, k) + \\ &a_T(i, j, k) \phi(i, j, k + 1) + \\ &a_B(i, j, k) \phi(i, j, k - 1) + \\ &b(i, j, k) \end{aligned} \right) \quad (\text{III.17})$$

Les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie gouvernant l'écoulement du fluide et du transfert de chaleur du problème traité sont exprimées en termes d'équations différentielles tridimensionnelles.

III.3.3 Discrétisation de l'équation de continuité

L'intégration de l'équation de continuité entre les limites du volume de contrôle typique nous donne :

$$\left. \begin{aligned} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial U}{\partial x} dx dy dz d\tau &= (U_e - U_w) \Delta Y \Delta Z \Delta \tau \\ \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial V}{\partial y} dx dy dz d\tau &= (V_n - V_s) \Delta X \Delta Z \Delta \tau \\ \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \int_b^t \frac{\partial W}{\partial z} dx dy dz d\tau &= (W_t - W_b) \Delta X \Delta Y \Delta \tau \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.18})$$

L'équation de continuité discrétisée s'écrit sous la forme suivante :

$$(U_e - U_w) \Delta Y \Delta Z + (V_n - V_s) \Delta X \Delta Z + (W_t - W_b) \Delta X \Delta Y = 0 \quad (\text{III.19})$$

III.3.4 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant X

L'application du principe de conservation de la quantité de mouvement nous permet d'obtenir une relation entre les causes qui produisent le mouvement du fluide et ces caractéristiques dont la définition de ce principe est la suivante : « Le taux de variation de la quantité de mouvement dans un volume de contrôle est égal à la somme de toutes les forces extérieures appliquées sur ce volume ».

Nous remplaçons ϕ , Γ_e et S_e par leurs valeurs correspondants à l'équation de quantité de mouvement suivant la direction X dans l'équation générale du transport, on obtient l'équation de quantité de mouvement pour la composante de la vitesse U suivante :

$$\left(\begin{aligned} &\frac{(U_p^{n+1} - U_p^n)}{\Delta\tau} \Delta X \Delta Y \Delta Z + \\ &(U_e U_e - U_w U_w) \Delta Y \Delta Z + \\ &(V_n U_n - V_s U_s) \Delta X \Delta Z + \\ &(W_t U_t - W_b U_b) \Delta X \Delta Y \end{aligned} \right) = \left(\begin{aligned} &\frac{1}{Re} \left[\frac{U_e - U_p}{\Delta X_e} - \frac{U_p - U_w}{\Delta X_w} \right] \Delta Y \Delta Z + \\ &\frac{1}{Re} \left[\frac{U_n - U_p}{\Delta Y_n} - \frac{U_p - U_s}{\Delta Y_s} \right] \Delta X \Delta Z + \\ &\frac{1}{Re} \left[\frac{U_t - U_p}{\Delta Z_t} - \frac{U_p - U_b}{\Delta Z_b} \right] \Delta X \Delta Y + \\ &[Pe_w - Pe_e] \Delta Y \Delta Z \end{aligned} \right) \quad (\text{III.20})$$

Nous intégrons l'équation (III.20) sur le volume de contrôle décalé suivant la direction X (figure III.6).

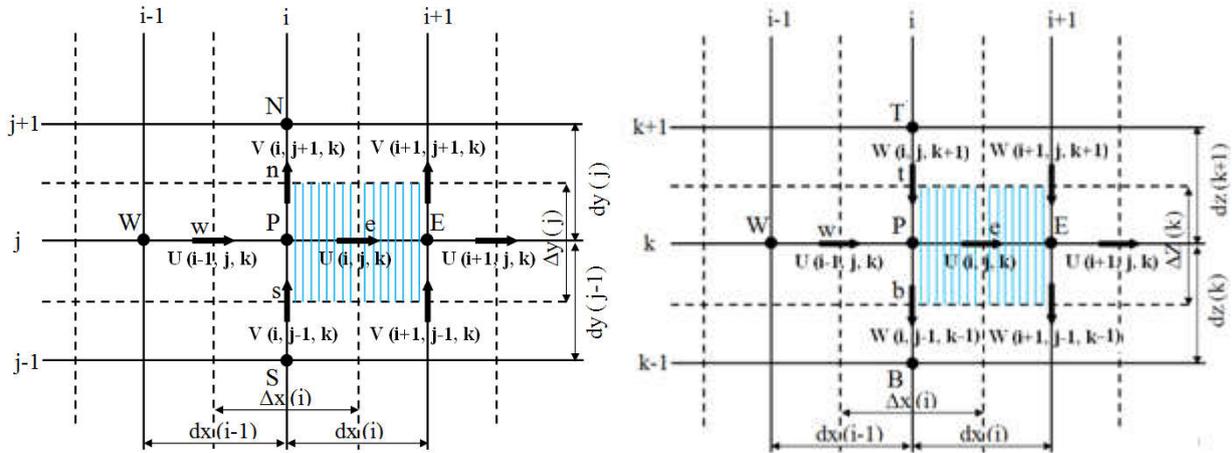


Figure III.6 : Maillage décalé suivant la direction X (projections suivant le plan XY à gauche et suivant le plan XZ à droite)

Nous suivons les mêmes étapes que nous avons suivies pour la variable ϕ . Nous obtenons l'équation discrétisée algébrique sous la forme suivante :

$$a_P(i, j, k)U(i, j, k) = \begin{pmatrix} a_E(i, j, k)U(i + 1, j, k) + \\ a_W(i, j, k)U(i - 1, j, k) + \\ a_N(i, j, k)U(i, j + 1, k) + \\ a_S(i, j, k)U(i, j - 1, k) + \\ a_T(i, j, k)U(i, j, k + 1) + \\ a_B(i, j, k)U(i, j, k - 1) + \\ b_U(i, j, k) \end{pmatrix} \quad (\text{III.21})$$

Où les coefficients de l'équation discrétisée et le terme source, sont donnés par les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} a_E(i, j, k) &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ a_W(i, j, k) &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\ a_N(i, j, k) &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ a_S(i, j, k) &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \\ a_T(i, j, k) &= D_t A(|P_t|) + \max(-F_t, 0) \\ a_B(i, j, k) &= D_b A(|P_b|) + \max(F_b, 0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.22})$$

$$a_P(i, j, k) = \begin{pmatrix} a_E(i, j, k) + a_W(i, j, k) + \\ a_N(i, j, k) + a_S(i, j, k) + \\ a_T(i, j, k) + a_B(i, j, k) \end{pmatrix} + \frac{dx(i)\Delta y(j)\Delta z(k)}{\Delta \tau}$$

Les coefficients de l'équation (III.22) contiennent une combinaison du flux convectif F et diffusif D aux interfaces de volumes de contrôle.

$$\text{Flux convectifs : } \left. \begin{aligned} F_e &= \frac{U(i+1,j,k)+U(i,j,k)}{2} \Delta Y(j) \Delta Z(k) \\ F_w &= \frac{U(i,j,k)+U(i-1,j,k)}{2} \Delta Y(j) \Delta Z(k) \\ F_n &= \frac{V(i,j,k)+V(i+1,j,k)}{2} dX(i) \Delta Z(k) \\ F_s &= \frac{V(i,j-1,k)+V(i+1,j-1,k)}{2} dX(i) \Delta Z(k) \\ F_t &= \frac{W(i,j,k)+W(i+1,j,k)}{2} dX(i) \Delta Y(j) \\ F_b &= \frac{W(i,j,k-1)+W(i+1,j,k-1)}{2} dX(i) \Delta Y(j) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.23})$$

$$\text{Flux diffusifs : } \left. \begin{aligned} D_e &= \frac{1}{Re} \frac{\Delta Y(j) \Delta Z(k)}{\Delta X(i+1)} \\ D_w &= \frac{1}{Re} \frac{\Delta Y(j) \Delta Z(k)}{\Delta X(i)} \\ D_n &= \frac{1}{Re} \left[\frac{\Delta X(i+1)}{\Delta Y(j)+\Delta Y(j+1)} + \frac{\Delta X(i)}{\Delta Y(j)+\Delta Y(j+1)} \right] \Delta Z(k) \\ D_s &= \frac{1}{Re} \left[\frac{\Delta X(i+1)}{\Delta Y(j-1)+\Delta Y(j)} + \frac{\Delta X(i)}{\Delta Y(j-1)+\Delta Y(j)} \right] \Delta Z(k) \\ D_t &= \frac{1}{Re} \left[\frac{\Delta X(i+1)}{\Delta Z(k)+\Delta Z(k+1)} + \frac{\Delta X(i)}{\Delta Z(k)+\Delta Z(k+1)} \right] \Delta Y(j) \\ D_b &= \frac{1}{Re} \left[\frac{\Delta X(i+1)}{\Delta Z(k-1)+\Delta Z(k)} + \frac{\Delta X(i)}{\Delta Z(k-1)+\Delta Z(k)} \right] \Delta Y(j) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.24})$$

Après le calcul du champ de vitesse U le terme b_U de l'équation de quantité de mouvement suivant la direction X est décrit (équation (III.9)).

$$b_U(i, j, k) = S_c(i, j, k) + \frac{dX(i) \Delta Y(j) \Delta Z(k)}{\Delta \tau} U(i, j, k)$$

III.3.5 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant Y

Nous remplaçons ϕ , Γ_ϕ et S_ϕ par leurs valeurs correspondants à l'équation de quantité de mouvement suivant la direction verticale Y dans l'équation générale du transport, on obtient l'équation de quantité de mouvement pour la composante de la vitesse V suivante :

$$\left(\begin{aligned} &\frac{(V_p^{n+1}-V_p^n)}{\Delta \tau} \Delta X \Delta Y \Delta Z + \\ &(U_e U_e - U_w U_w) \Delta Y \Delta Z + \\ &(V_n U_n - V_s U_s) \Delta X \Delta Z + \\ &(W_t U_t - W_b U_b) \Delta X \Delta Y \end{aligned} \right) = \left(\begin{aligned} &\frac{1}{Re} \left[\frac{V_e - V_p}{\Delta X_e} - \frac{V_p - V_w}{\Delta X_w} \right] \Delta Y \Delta Z + \\ &\frac{1}{Re} \left[\frac{V_n - V_p}{\Delta Y_n} - \frac{V_p - V_s}{\Delta Y_s} \right] \Delta X \Delta Z + \\ &\frac{1}{Re} \left[\frac{V_t - V_p}{\Delta Z_t} - \frac{V_p - V_b}{\Delta Z_b} \right] \Delta X \Delta Y + \\ &[P_s - P_n] \Delta X \Delta Z + Ri \cdot \theta \end{aligned} \right) \quad (\text{III.25})$$

Nous intégrons l'équation (III.25) sur le volume de contrôle décalé suivant la direction Y (figure III.7).

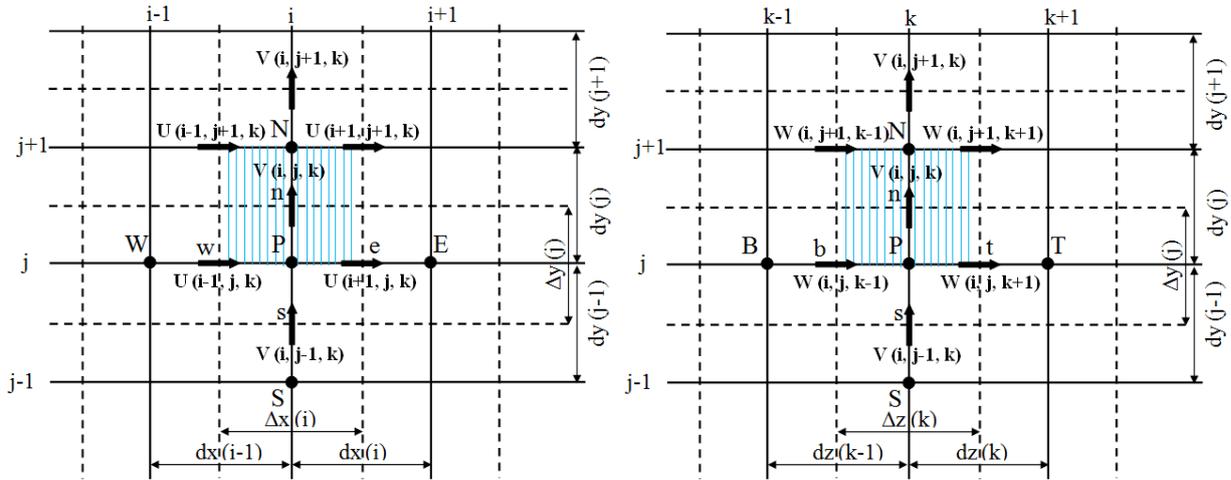


Figure III.7 : Maillage décalé suivant la direction Y : projection suivant le plan YX (à gauche) et suivant le plan YZ (à droite)

Nous suivons les mêmes étapes que nous avons suivies pour la variable ϕ . Nous obtenons l'équation discrétisée algébrique sous la forme suivante :

$$a_P(i, j, k)V(i, j, k) = \begin{pmatrix} a_E(i, j, k)V(i + 1, j, k) + \\ a_W(i, j, k)V(i - 1, j, k) + \\ a_N(i, j, k)V(i, j + 1, k) + \\ a_S(i, j, k)V(i, j - 1, k) + \\ a_T(i, j, k)V(i, j, k + 1) + \\ a_B(i, j, k)V(i, j, k - 1) + \\ b_V(i, j, k) \end{pmatrix} \quad (\text{III.26})$$

Où les coefficients de l'équation de discrétisation et le terme source, sont donnés par les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} a_E(i, j, k) &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ a_W(i, j, k) &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\ a_N(i, j, k) &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ a_S(i, j, k) &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \\ a_T(i, j, k) &= D_t A(|P_t|) + \max(-F_t, 0) \\ a_B(i, j, k) &= D_b A(|P_b|) + \max(F_b, 0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.27})$$

$$a_P(i, j, k) = \begin{pmatrix} a_E(i, j, k) + a_W(i, j, k) + \\ a_N(i, j, k) + a_S(i, j, k) + \\ a_T(i, j, k) + a_B(i, j, k) \end{pmatrix} + \frac{dx(i)\Delta y(j)\Delta z(k)}{\Delta \tau}$$

Les coefficients de l'équation (III.27) contiennent une combinaison du flux convectif F et diffusif D aux interfaces de volumes de contrôle.

$$\text{Flux convectifs : } \left. \begin{aligned} F_e &= \frac{U(i,j,k)+U(i,j+1,k)}{2} dY(j)\Delta Z(k) \\ F_w &= \frac{U(i-1,j,k)+U(i-1,j+1,k)}{2} dY(j)\Delta Z(k) \\ F_n &= \frac{V(i,j+1,k)+V(i,j,k)}{2} \Delta X(i)\Delta Z(k) \\ F_s &= \frac{V(i,j,k)+V(i,j-1,k)}{2} \Delta X(i)\Delta Z(k) \\ F_t &= \frac{W(i,j,k)+W(i,j+1,k)}{2} \Delta X(i)dY(j) \\ F_b &= \frac{W(i,j,k-1)+W(i,j+1,k-1)}{2} \Delta X(i)dY(j) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.28})$$

$$\text{Flux diffusifs : } \left. \begin{aligned} D_e &= \frac{1}{Re} \left[\frac{\Delta Y(j+1)}{\Delta X(i)+\Delta X(i+1)} + \frac{\Delta Y(j)}{\Delta X(i)\Delta X(i+1)} \right] \Delta Z(k) \\ D_w &= \frac{1}{Re} \left[\frac{\Delta Y(j+1)}{\Delta X(i-1)+\Delta X(i)} + \frac{\Delta Y(j)}{\Delta X(i-1)\Delta X(i)} \right] \Delta Z(k) \\ D_n &= \frac{1}{Re} \frac{\Delta X(i)\Delta Z(k)}{\Delta Y(j+1)} \\ D_s &= \frac{1}{Re} \frac{\Delta X(i)\Delta Z(k)}{\Delta Y(j)} \\ D_t &= \frac{1}{Re} \left[\frac{\Delta Y(j+1)}{\Delta Z(k)+\Delta Z(k+1)} + \frac{\Delta Y(j)}{\Delta Z(k)+\Delta Z(k+1)} \right] \Delta Y(j) \\ D_b &= \frac{1}{Re} \left[\frac{\Delta Y(j+1)}{\Delta Z(k-1)+\Delta Z(k)} + \frac{\Delta Y(j)}{\Delta Z(k-1)+\Delta Z(k)} \right] \Delta Y(j) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.29})$$

Après le calcul du champ de vitesse V le terme b_v de l'équation de quantité de mouvement suivant la direction Y est décrit (équation (III.9)).

$$\begin{aligned} b_v(i,j,k) &= S_c(i,j,k) + \frac{\Delta X(i)dY(j)\Delta Z(k)}{\Delta \tau} V(i,j,k) \\ &+ \frac{Ri}{2} [\theta(i,j,k) + \theta(i,j+1,k)] \Delta X(i)dY(j)\Delta Z(k) \end{aligned}$$

III.3.6 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant Z

Nous remplaçons ϕ , Γ_ϕ et S_ϕ par leurs valeurs correspondants à l'équation de quantité de mouvement suivant la direction verticale Z dans l'équation générale du transport, on obtient l'équation de quantité de mouvement pour la composante de la vitesse W suivante :

$$\left(\begin{aligned} &\frac{(W_p^{n+1}-W_p^n)}{\Delta \tau} \Delta X \Delta Y \Delta Z + \\ &(U_e W_e - U_w W_w) \Delta Y \Delta Z + \\ &(V_n W_n - V_s W_s) \Delta X \Delta Z + \\ &(W_t W_t - W_b W_b) \Delta X \Delta Y \end{aligned} \right) = \left(\begin{aligned} &\frac{1}{Re} \left[\frac{W_e - W_p}{\Delta X_e} - \frac{W_p - W_w}{\Delta X_w} \right] \Delta Y \Delta Z + \\ &\frac{1}{Re} \left[\frac{W_n - W_p}{\Delta Y_n} - \frac{W_p - W_s}{\Delta Y_s} \right] \Delta X \Delta Z + \\ &\frac{1}{Re} \left[\frac{W_t - W_p}{\Delta Z_t} - \frac{W_p - W_b}{\Delta Z_b} \right] \Delta X \Delta Y + \\ &[P_t - P_b] \Delta X \Delta Z \end{aligned} \right) \quad (\text{III.30})$$

Nous intégrons l'équation (III.30) sur le volume de contrôle décalé suivant la direction Z (figure III.8).

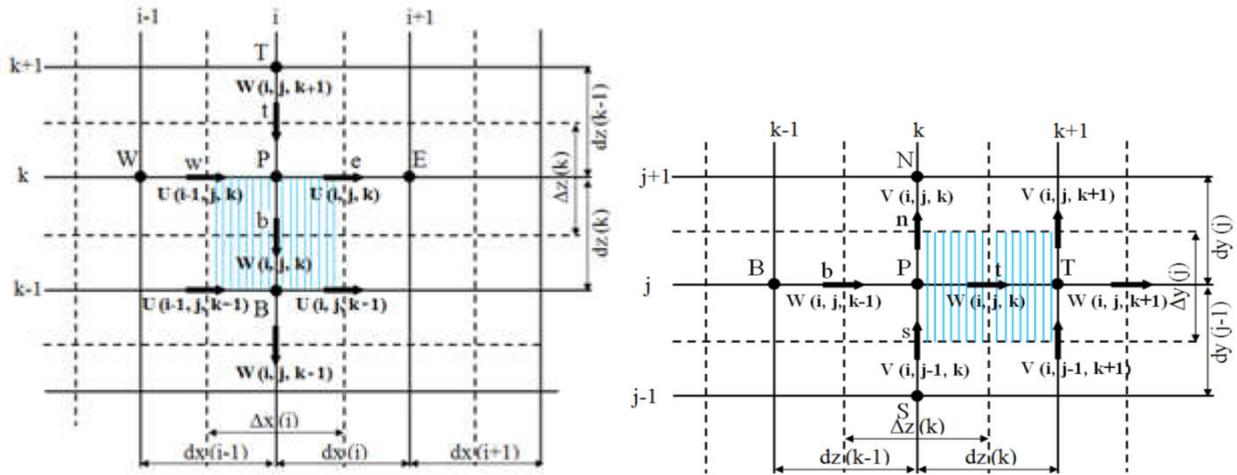


Figure III.8 : Maillage décalé suivant la direction Z : projection suivant le plan ZX (à gauche) et suivant le plan ZY (à droite)

Nous suivons les mêmes étapes que nous avons suivies pour la variable ϕ . Nous obtenons l'équation discrétisée algébrique sous la forme suivante :

$$a_P(i, j, k)W(i, j, k) = \begin{pmatrix} a_E(i, j, k)W(i+1, j, k) + \\ a_W(i, j, k)W(i-1, j, k) + \\ a_N(i, j, k)W(i, j+1, k) + \\ a_S(i, j, k)W(i, j-1, k) + \\ a_T(i, j, k)W(i, j, k+1) + \\ a_B(i, j, k)W(i, j, k-1) + \\ b_W(i, j, k) \end{pmatrix} \quad (\text{III.31})$$

Où les coefficients de l'équation de discrétisation et le terme source, sont donnés par les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} a_E(i, j, k) &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ a_W(i, j, k) &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\ a_N(i, j, k) &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ a_S(i, j, k) &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \\ a_T(i, j, k) &= D_t A(|P_t|) + \max(-F_t, 0) \\ a_B(i, j, k) &= D_b A(|P_b|) + \max(F_b, 0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.32})$$

$$a_P(i, j, k) = \begin{pmatrix} a_E(i, j, k) + a_W(i, j, k) + \\ a_N(i, j, k) + a_S(i, j, k) + \\ a_T(i, j, k) + a_B(i, j, k) \end{pmatrix} + \frac{dx(i)\Delta y(j)\Delta z(k)}{\Delta \tau}$$

Les coefficients de l'équation (III.32) contiennent une combinaison du flux convectif F et diffusif D aux interfaces de volumes de contrôle.

$$\text{Flux convectifs : } \left. \begin{aligned} F_e &= \frac{U(i,j,k)+U(i,j,k+1)}{2} \Delta Y(j) dZ(k) \\ F_w &= \frac{U(i-1,j,k)+U(i-1,j,k+1)}{2} \Delta Y(j) dZ(k) \\ F_n &= \frac{V(i,j,k)+V(i,j,k+1)}{2} \Delta X(i) dZ(k) \\ F_s &= \frac{V(i,j-1,k)+V(i,j-1,k+1)}{2} \Delta X(i) dZ(k) \\ F_t &= \frac{W(i,j,k)+W(i,j,k+1)}{2} \Delta X(i) \Delta Y(j) \\ F_b &= \frac{W(i,j,k)+W(i,j,k-1)}{2} \Delta X(i) \Delta Y(j) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.33})$$

$$\text{Flux diffusifs : } \left. \begin{aligned} D_e &= \frac{1}{Re} \left[\frac{\Delta Z(k+1)}{\Delta X(i)+\Delta X(i+1)} + \frac{\Delta Z(k)}{\Delta X(i)\Delta X(i+1)} \right] \Delta Y(j) \\ D_w &= \frac{1}{Re} \left[\frac{\Delta Z(k+1)}{\Delta X(i-1)+\Delta X(i)} + \frac{\Delta Z(k)}{\Delta X(i-1)\Delta X(i)} \right] \Delta Y(j) \\ D_n &= \frac{1}{Re} \left[\frac{\Delta Z(k+1)}{\Delta Y(j)+\Delta Y(j+1)} + \frac{\Delta Z(k)}{\Delta Y(j)\Delta Y(j+1)} \right] \Delta X(i) \\ D_s &= \frac{1}{Re} \left[\frac{\Delta Z(k+1)}{\Delta Y(j-1)+\Delta Y(j)} + \frac{\Delta Z(k)}{\Delta Y(j-1)\Delta Y(j)} \right] \Delta X(i) \\ D_t &= \frac{1}{Re} \frac{\Delta X(i) \Delta Y(j)}{\Delta Z(k+1)} \\ D_b &= \frac{1}{Re} \frac{\Delta X(i) \Delta Y(j)}{\Delta Z(k)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.34})$$

Après le calcul du champ de vitesse W le terme b_w de l'équation de quantité de mouvement suivant la direction Z est décrit (équation (III.9)).

$$b_w(i, j, k) = S_c(i, j, k) + \frac{\Delta X(i) \Delta Y(j) dZ(k)}{\Delta \tau} W(i, j, k)$$

III.3.7 Discrétisation de l'équation l'énergie

Pour un fluide Newtonien incompressible l'équation de conservation d'énergie est obtenue à partir du premier principe de la thermodynamique.

Nous remplaçons ϕ , Γ_ϕ et S_ϕ par leurs valeurs de l'équation de l'énergie dans l'équation générale du transport, on obtient l'équation de l'énergie :

$$\left(\begin{aligned} &\frac{(\theta_p^{n+1}-\theta_p^n)}{\Delta \tau} \Delta X \Delta Y \Delta Z + \\ &(U_e \theta_e - U_w \theta_w) \Delta Y \Delta Z + \\ &(V_n \theta_n - V_s \theta_s) \Delta X \Delta Z + \\ &(W_t \theta_t - W_b \theta_b) \Delta X \Delta Y \end{aligned} \right) = \left(\begin{aligned} &\frac{1}{Pr Re} \left[\frac{\theta_e - \theta_p}{\Delta X_e} - \frac{\theta_p - \theta_w}{\Delta X_w} \right] \Delta Y \Delta Z + \\ &\frac{1}{Pr Re} \left[\frac{\theta_n - \theta_p}{\Delta Y_n} - \frac{\theta_p - \theta_s}{\Delta Y_s} \right] \Delta X \Delta Z + \\ &\frac{1}{Pr Re} \left[\frac{\theta_t - \theta_p}{\Delta Z_t} - \frac{\theta_p - \theta_b}{\Delta Z_b} \right] \Delta X \Delta Y \end{aligned} \right) \quad (\text{III.35})$$

L'intégration de l'équation (III.35) sur le volume de contrôle typique nous donne l'équation discrétisée algébrique sous la forme suivante :

$$a_p(i, j, k)\theta(i, j, k) = \begin{pmatrix} a_E(i, j, k)\theta(i + 1, j, k) + \\ a_W(i, j, k)\theta(i - 1, j, k) + \\ a_N(i, j, k)\theta(i, j + 1, k) + \\ a_S(i, j, k)\theta(i, j - 1, k) + \\ a_T(i, j, k)\theta(i, j, k + 1) + \\ a_B(i, j, k)\theta(i, j, k - 1) + \\ b_\theta(i, j, k) \end{pmatrix} \quad (\text{III.36})$$

Où les coefficients de l'équation de discrétisation et le terme source, sont donnés par les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} a_E(i, j, k) &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ a_W(i, j, k) &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\ a_N(i, j, k) &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ a_S(i, j, k) &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \\ a_E(i, j, k) &= D_t A(|P_t|) + \max(-F_t, 0) \\ a_B(i, j, k) &= D_b A(|P_b|) + \max(F_b, 0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.37})$$

$$a_p(i, j, k) = \begin{pmatrix} a_E(i, j, k) + a_W(i, j, k) + \\ a_N(i, j, k) + a_S(i, j, k) + \\ a_T(i, j, k) + a_B(i, j, k) \end{pmatrix} + \frac{dx(i)\Delta y(j)\Delta z(k)}{\Delta \tau}$$

Les coefficients de l'équation (III.37) contiennent une combinaison du flux convectif F et diffusif D aux interfaces de volumes de contrôle.

$$\text{Flux convectifs :} \quad \left. \begin{aligned} F_e &= U(i, j, k)\Delta Y(j)\Delta Z(k) \\ F_w &= U(i - 1, j, k)\Delta Y(j)\Delta Z(k) \\ F_n &= V(i, j, k)\Delta X(i)\Delta Z(k) \\ F_s &= V(i, j - 1, k)\Delta X(i)\Delta Z(k) \\ F_t &= W(i, j, k)\Delta X(i)\Delta Y(j) \\ F_b &= W(i, j, k - 1)\Delta X(i)\Delta Y(j) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.38})$$

$$\text{Flux diffusifs :} \quad \left. \begin{aligned} D_e &= \frac{1}{PrRe} \left[\frac{2}{\Delta X(i) + \Delta X(i+1)} \right] \Delta Y(j)\Delta Z(k) \\ D_w &= \frac{1}{PrRe} \left[\frac{2}{\Delta X(i-1) + \Delta X(i)} \right] \Delta Y(j)\Delta Z(k) \\ D_n &= \frac{1}{PrRe} \left[\frac{2}{\Delta Y(j) + \Delta Y(j+1)} \right] \Delta X(i)\Delta Z(k) \\ D_s &= \frac{1}{PrRe} \left[\frac{2}{\Delta Y(j-1) + \Delta Y(j)} \right] \Delta X(i)\Delta Z(k) \\ D_t &= \frac{1}{PrRe} \left[\frac{2}{\Delta Z(k) + \Delta Z(k+1)} \right] \Delta X(i)\Delta Y(j) \\ D_b &= \frac{1}{PrRe} \left[\frac{2}{\Delta Z(k-1) + \Delta Z(k)} \right] \Delta X(i)\Delta Y(j) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.39})$$

Après le calcul du champ de température θ le terme b_θ de l'équation de l'énergie est décrite (équation (III.9)).

$$b_\theta(i, j, k) = S_c(i, j, k) + \frac{\Delta X(i)\Delta Y(j)\Delta Z(k)}{\Delta \tau} \theta(i, j, k)$$

III.3.8 Discrétisation des conditions aux limites

Les équations de discrétisation des conditions aux limites sont écrites selon la forme générale de l'équation de discrétisation pour toutes les variables dépendantes (U, V, W et θ).

Les conditions aux limites de la composante de la vitesse U doit vérifier l'équation (III.21) pour toutes les parois de la cavité.

$$a_p(i, j, k)U(i, j, k) = \begin{pmatrix} a_E(i, j, k)U(i + 1, j, k) + \\ a_W(i, j, k)U(i - 1, j, k) + \\ a_N(i, j, k)U(i, j + 1, k) + \\ a_S(i, j, k)U(i, j - 1, k) + \\ a_T(i, j, k)U(i, j, k + 1) + \\ a_B(i, j, k)U(i, j, k - 1) + \\ b_U(i, j, k) \end{pmatrix}$$

La condition de non glissement est adoptée pour cette composante sur toutes les parois.

$$1. U(2, j, k) = \begin{pmatrix} 0. U(3, j, k) + \\ 0. U(1, j, k) + \\ 0. U(2, j + 1, k) + \\ 0. U(2, j - 1, k) + \\ 0. U(2, j, k + 1) + \\ 0. U(2, j, k - 1) + \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

et

$$1. U(il - 1, j, k) = \begin{pmatrix} 0. U(il, j, k) + \\ 0. U(il - 2, j, k) + \\ 0. U(il - 1, j + 1, k) + \\ 0. U(il - 1, j - 1, k) + \\ 0. U(il - 1, j, k + 1) + \\ 0. U(il - 1, j, k - 1) + \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} a_p(1, j, k) = 1.0, b_u(1, j, k) = 0 \text{ et } a_p(il - 1, j, k) = 1.0, b_u(il - 1, j, k) = 0 \\ a_p(i, 1, k) = 1.0, b_u(i, 1, k) = 0 \text{ et } a_p(i, jl, k) = 1.0, b_u(i, jl, k) = 0 \\ a_p(i, j, 1) = 1.0, b_u(i, j, 1) = 0 \text{ et } a_p(i, j, kl) = 1.0, b_u(i, j, kl) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ (III.40)}$$

Les mêmes procédures sont appliquées pour la composante de la vitesse V elle doit vérifier l'équation (III.26).

$$a_p(i, j, k)V(i, j, k) = \begin{pmatrix} a_E(i, j, k)V(i, +1, j, k) + \\ a_W(i, j, k)V(i - 1, j, k) + \\ a_N(i, j, k)V(i, j + 1, k) + \\ a_S(i, j, k)V(i, j - 1, k) + \\ a_T(i, j, k)V(i, j, k + 1) + \\ a_B(i, j, k)V(i, j, k - 1) + \\ b_V(i, j, k) \end{pmatrix}$$

La condition de non glissement est appliquée pour cette composante dans les quatre parois (supérieure, inférieure, frontale et dorsale) et les deux parois latérales son mobile (mouvement ascendante) avec une vitesse adimensionnel égale à l'unité.

Donc :

$$\left. \begin{aligned} a_p(1, j, k) = 1.0, b_v(1, j, k) = 1.0 \text{ et } a_p(il, j, k) = 1.0, b_v(il, j, k) = 1.0 \\ a_p(i, 1, k) = 1.0, b_v(i, 1, k) = 0 \text{ et } a_p(i, jl - 1, k) = 1.0, b_v(i, jl - 1, k) = 0 \\ a_p(i, j, 1) = 1.0, b_v(i, j, 1) = 0 \text{ et } a_p(i, j, kl) = 1.0, b_v(i, j, kl) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ (III.41)}$$

Les conditions aux limites de la composante de la vitesse W doit vérifier l'équation (III.31).

$$a_p(i, j, k)W(i, j, k) = \begin{pmatrix} a_E(i, j, k)W(i, +1, j, k) + \\ a_W(i, j, k)W(i - 1, j, k) + \\ a_N(i, j, k)W(i, j + 1, k) + \\ a_S(i, j, k)W(i, j - 1, k) + \\ a_T(i, j, k)W(i, j, k + 1) + \\ a_B(i, j, k)W(i, j, k - 1) + \\ b_W(i, j, k) \end{pmatrix}$$

La condition de non glissement est adoptée pour cette composante dans toutes les parois.

$$\left. \begin{aligned} a_p(1, j, k) = 1.0, b_w(1, j, k) = 0 \text{ et } a_p(il, j, k) = 1.0, b_w(il, j, k) = 0 \\ a_p(i, 1, k) = 1.0, b_w(i, 1, k) = 0 \text{ et } a_p(i, jl, k) = 1.0, b_w(i, jl, k) = 0 \\ a_p(i, j, 1) = 1.0, b_w(i, j, 1) = 0 \text{ et } a_p(i, j, kl - 1) = 1.0, b_w(i, j, kl - 1) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ (III.42)}$$

De la même manière les conditions aux limites de la température doit vérifier l'équation (III.36).

$$a_p(i, j, k)\theta(i, j, k) = \begin{pmatrix} a_E(i, j, k)\theta(i, +1, j, k) + \\ a_W(i, j, k)\theta(i - 1, j, k) + \\ a_N(i, j, k)\theta(i, j + 1, k) + \\ a_S(i, j, k)\theta(i, j - 1, k) + \\ a_T(i, j, k)\theta(i, j, k + 1) + \\ a_B(i, j, k)\theta(i, j, k - 1) + \\ b_\theta(i, j, k) \end{pmatrix}$$

Les parois latérales sont maintenues à une température froide, donc :

$$a_p(1, j, k) = 1.0, b_\theta(1, j, k) = 0 \text{ et } a_p(il, j, k) = 1.0, b_\theta(il, j, k) = 0 \quad (\text{III.43})$$

La paroi inférieure est partiellement chauffée, les conditions de la partie chauffée s'écrit :

$$a_p(i, 1, k) = 1.0, b_\theta(i, 1, k) = 1.0 \quad (\text{III.44})$$

Pour $i = ii$ à ie (ii : début de la partie chauffée et ie : fin de la partie chaude)

Le reste des parois sont adiabatique

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$$

Ces conditions sont discrétisées selon les différences régressives :

$$\frac{\theta(i, j, 1) - \theta(i, j, 2)}{\partial z(2)} = \frac{\theta(i, j, kl) - \theta(i, j, kl-1)}{\partial z(kl-1)} = 0$$

$$\theta(i, j, 1) = \theta(i, j, 2) \quad (\text{III.45})$$

et

$$\theta(i, j, kl) = \theta(i, j, kl - 1) \quad (\text{III.46})$$

Donc pour l'équation (III.45) $a_p(i, j, 1) = 1.0, a_T(i, j, 1) = 1.0$ et $b_\theta(i, j, 1) = 0.0$

et pour l'équation (III.46) $a_p(i, j, kl) = 1.0, a_B(i, j, kl) = 1.0$ et $b_\theta(i, j, kl) = 0.0$

Pour la paroi supérieure et la partie adiabatique de la paroi inférieure :

$$a_p(i, 1, k) = 1.0, a_S(i, 1, k) = 1.0 \text{ et } b_\theta(i, 1, k) = 0.0$$

$$a_p(i, jl, k) = 1.0, a_N(i, jl, k) = 1.0 \text{ et } b_\theta(i, jl, k) = 0.0$$

III.4 EQUATION DE PRESSION

La présence du champ de pression (sous forme de gradient) dans les équations de mouvement rend la résolution des équations de quantité de mouvement plus compliquée. Pour

résoudre les systèmes d'équations discrétisées il est nécessaire de connaître la pression qui apparaît dans les termes sources de ces équations. Donc, il nous faut une équation de discrétisation de la pression à chaque point intérieur du maillage typique. L'obtention d'une telle équation est possible avec l'utilisation des équations de discrétisation des vitesses et de continuité à travers un algorithme appelé SIMPLER.

III.4.1 L'algorithme SIMPLER

L'algorithme SIMPLER (SIMPLE Revised), mise au point par Patankar [42], est une version améliorée de l'algorithme SIMPLE. Selon cet algorithme l'équation de continuité discrétisée est utilisée pour obtenir une équation discrétisée pour la pression au lieu d'une équation de correction de pression comme dans l'algorithme SIMPLE. Le champ de pression est obtenu directement, sans correction de pression, mais le champ de vitesse est obtenu à l'aide de la correction. L'évaluation des performances des deux algorithmes montre que l'algorithme SIMPLER a plus d'avantages concernant Le nombre d'itération et le temps de calcul pour atteindre la convergence que SIMPLE [43].

III.4.2 Résumé de l'algorithme

Pour résoudre l'ensemble des systèmes d'équations discrétiser des vitesses, de la pression et de la température, on utilise l'algorithme SIMPLER qui se résume par les étapes suivantes :

1. On commence par une initialisation des champs des vitesses et de température ;
2. Avec le champ de vitesse initial, on calcule les pseudo-vitesses \hat{u} , \hat{v} et \hat{w} (calcul des coefficients des équations discrétisés de la quantité de mouvement suivants X , Y et Z) ;
3. Avec les pseudo-vitesses, on peut résoudre (par la méthode itérative de balayage) le système d'équations discrétisés de la pression et obtenir une estimation de cette dernière P^* ;
4. On initialise le champ de pression initial P^{**} avec le nouveau champ de pression obtenu à l'étape 3 ($P^{**} = P^*$) et on calcule les vitesses estimées (par la méthode itérative de balayage) u^{**} , v^{**} et w^{**} ;
5. Avec les estimations des vitesses, on peut résoudre (par la méthode itérative de balayage) le système d'équations discrétisés de la correction de pression et obtenir une estimation de cette dernière P' ;
6. Avec la correction de la pression, on calcule les corrections des vitesses et on corrige le champ de vitesse, mais sans corriger la pression ;

7. On résout le système d'équations discrétisés de la température (calcul des coefficients de l'équation d'énergie par la méthode itérative de balayage) et on obtient le champ de température ;
8. On vérifie la convergence des calculs : si le régime stationnaire est atteint on arrête le calcul, sinon on augmente le temps d'un pas et avec le champ de vitesse corrigé comme une nouvelle initialisation, on retourne à l'étape 2.

III.4.3 Développement de l'algorithme

L'algorithme SIMPLER suit les étapes suivantes :

- Une estimation de champ de vitesse est considérée.
- Ecriture des trois équations discrétisées de quantité de mouvement suivant X , Y et Z d'une manière à faire apparaître les trois gradients de pression dans le but de les éliminer, pour obtenir trois champs de vitesse dit pseudo- vitesses:

Les équations discrétisée de mouvement pour les composantes u , v et w sont écrites sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned}
 u(i, j, k) &= \frac{\sum_{nb=E,W,S,N,T,B} a_{nb} u_{nb} + b_u}{a_p(i, j, k)} + \frac{[P(i, j, k) - P(i+1, j, k)] \Delta y(j) \Delta z(k)}{a_p(i, j, k)} \\
 u(i-1, j, k) &= \frac{\sum_{nb=E,W,S,N,T,B} a_{nb} u_{nb} + b_u}{a_p(i-1, j, k)} + \frac{[P(i-1, j, k) - P(i, j, k)] \Delta y(j) \Delta z(k)}{a_p(i-1, j, k)} \\
 v(i, j, k) &= \frac{\sum_{nb=E,W,S,N,T,B} a_{nb} v_{nb} + b_v}{a_p(i, j, k)} + \frac{[P(i, j, k) - P(i, j+1, k)] \Delta x(i) \Delta z(k)}{a_p(i, j, k)} \\
 v(i, j-1, k) &= \frac{\sum_{nb=E,W,S,N,T,B} a_{nb} v_{nb} + b_v}{a_p(i, j-1, k)} + \frac{[P(i, j-1, k) - P(i, j, k)] \Delta x(i) \Delta z(k)}{a_p(i, j-1, k)} \\
 w(i, j, k) &= \frac{\sum_{nb=E,W,S,N,T,B} a_{nb} w_{nb} + b_w}{a_p(i, j, k)} + \frac{[P(i, j, k) - P(i, j, k+1)] \Delta x(i) \Delta y(j)}{a_p(i, j, k)} \\
 w(i, j, k-1) &= \frac{\sum_{nb=E,W,S,N,T,B} a_{nb} w_{nb} + b_w}{a_p(i, j, k-1)} + \frac{[P(i, j, k-1) - P(i, j, k)] \Delta x(i) \Delta y(j)}{a_p(i, j, k-1)}
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.47})$$

b_u, b_v et b_w sont les termes de source ne contenant pas le terme de pression.

Selon l'algorithme SIMPLER, on définit les pseudo-vitesses \hat{u} , \hat{v} et \hat{w} , par les expressions suivantes :

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{u}(i, j, k) &= (\sum_{nb=E,W,S,N,T,B} a_{nb} u_{nb} + b_u) / a_p(i, j, k) \\
 \hat{u}(i-1, j, k) &= (\sum_{nb=E,W,S,N,T,B} a_{nb} u_{nb} + b_u) / a_p(i-1, j, k) \\
 \hat{v}(i, j, k) &= (\sum_{nb=E,W,S,N,T,B} a_{nb} v_{nb} + b_v) / a_p(i, j, k) \\
 \hat{v}(i, j-1, k) &= (\sum_{nb=E,W,S,N,T,B} a_{nb} v_{nb} + b_v) / a_p(i, j-1, k) \\
 \hat{w}(i, j, k) &= (\sum_{nb=E,W,S,N,T,B} a_{nb} w_{nb} + b_w) / a_p(i, j, k) \\
 \hat{w}(i, j, k-1) &= (\sum_{nb=E,W,S,N,T,B} a_{nb} w_{nb} + b_w) / a_p(i, j, k-1)
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.48})$$

Les relations de la correction des vitesses aux niveaux des interfaces s'écrivent comme suit :

$$\left. \begin{aligned} u(i, j, k) &= \hat{u}(i, j, k) + \frac{[P(i, j, k) - P(i+1, j, k)] \Delta y(j) \Delta z(k)}{a_p(i, j, k)} \\ u(i-1, j, k) &= \hat{u}(i-1, j, k) + \frac{[P(i-1, j, k) - P(i, j, k)] \Delta y(j) \Delta z(k)}{a_p(i-1, j, k)} \\ v(i, j, k) &= \hat{v}(i, j, k) + \frac{[P(i, j, k) - P(i, j+1, k)] \Delta x(i) \Delta z(k)}{a_p(i, j, k)} \\ v(i, j-1, k) &= \hat{v}(i, j-1, k) + \frac{[P(i, j-1, k) - P(i, j, k)] \Delta x(i) \Delta z(k)}{a_p(i, j-1, k)} \\ w(i, j, k) &= \hat{w}(i, j, k) + \frac{[P(i, j, k) - P(i, j, k+1)] \Delta x(i) \Delta y(j)}{a_p(i, j, k)} \\ w(i, j, k-1) &= \hat{w}(i, j, k-1) + \frac{[P(i, j, k-1) - P(i, j, k)] \Delta x(i) \Delta y(j)}{a_p(i, j, k-1)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.49})$$

En remplaçant les vitesses par leurs expressions (III.49) dans l'équation de continuité discrétisée (III.18), on obtient l'équation de pression discrétisée au nœud typique P , qui s'écrit dans sa forme générale :

$$a_p P_p = a_N P_N + a_S P_S + a_E P_E + a_W P_W + a_T P_T + a_B P_B + b_p \quad (\text{III.50})$$

Les coefficients de cette équation sont :

$$\left. \begin{aligned} a_p &= a_N + a_S + a_E + a_W + a_T + a_B \\ a_E &= d_e \Delta y(j) \Delta z(k) \\ a_W &= d_w \Delta y(j) \Delta z(k) \\ a_S &= d_s \Delta x(i) \Delta z(k) \\ a_N &= d_n \Delta x(i) \Delta z(k) \\ a_T &= d_t \Delta x(i) \Delta y(j) \\ a_B &= d_b \Delta x(i) \Delta y(j) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.51})$$

Dont les coefficients d_e , d_w , d_s , d_n , d_t et d_b sont définis comme suit :

$$\left. \begin{aligned} d_e &= \frac{\Delta y(j) \Delta z(k)}{a_p(i, j, k)}, d_w = \frac{\Delta y(j) \Delta z(k)}{a_p(i-1, j, k)} \\ d_s &= \frac{\Delta x(i) \Delta z(k)}{a_p(i, j, k)}, d_n = \frac{\Delta x(i) \Delta z(k)}{a_p(i, j-1, k)} \\ d_t &= \frac{\Delta x(i) \Delta y(j)}{a_p(i, j, k)}, d_b = \frac{\Delta x(i) \Delta y(j)}{a_p(i, j, k-1)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.52})$$

$$b_p = \left(\begin{aligned} &[\hat{u}(i, j, k) - \hat{u}(i-1, j, k)] \Delta y(j) \Delta z(k) + \\ &[\hat{v}(i, j, k) - \hat{v}(i, j-1, k)] \Delta x(i) \Delta z(k) + \\ &[\hat{w}(i, j, k) - \hat{w}(i, j, k-1)] \Delta x(i) \Delta y(j) \end{aligned} \right) \quad (\text{III.53})$$

On définit la correction de la pression P' comme la différence entre la pression correcte P et la pression estimée P^{**} :

$$P = P^{**} + P'$$

De façon similaire on définit la correction des vitesses u' , v' et w' comme la différence entre les vitesses correctes u , v , w et les vitesses estimées u^{**} , v^{**} et w^{**} :

$$\begin{aligned} u &= u^{**} + u' \\ v &= v^{**} + v' \\ w &= w^{**} + w' \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} u(i, j, k) &= u^{**}(i, j, k) + d_e[P'(i, j, k) - P'(i + 1, j, k)] \\ u(i - 1, j, k) &= u^{**}(i - 1, j, k) + d_w[P'(i - 1, j, k) - P'(i, j, k)] \\ v(i, j, k) &= v^{**}(i, j, k) + d_n[P'(i, j, k) - P'(i, j + 1, k)] \\ v(i, j - 1, k) &= v^{**}(i, j - 1, k) + d_s[P'(i, j - 1, k) - P'(i, j, k)] \\ w(i, j, k) &= w^{**}(i, j, k) + d_t[P'(i, j, k) - P'(i, j, k + 1)] \\ w(i, j, k - 1) &= w^{**}(i, j, k - 1) + d_b[P'(i, j, k - 1) - P'(i, j, k)] \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.54})$$

L'introduction de ces nouvelles expressions des vitesses dans l'équation de continuité discrétisée permettront d'une équation de discrétisation de la correction de pression P' avec des vitesses estimées u^{**} , v^{**} et w^{**} :

$$a_p P'_p = a_N P'_N + a_S P'_S + a_E P'_E + a_W P'_W + a_T P'_T + a_B P'_B + b'_p \quad (\text{III.55})$$

Les coefficients de cette équation sont :

$$\left. \begin{aligned} a_p &= a_N + a_S + a_E + a_W + a_T + a_B \\ a_E &= d_e \Delta y(j) \Delta z(k) \\ a_W &= d_w \Delta y(j) \Delta z(k) \\ a_S &= d_s \Delta x(i) \Delta z(k) \\ a_N &= d_n \Delta x(i) \Delta z(k) \\ a_T &= d_t \Delta x(i) \Delta y(j) \\ a_B &= d_b \Delta x(i) \Delta y(j) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.56})$$

Dont les coefficients d_e , d_w , d_s , d_n , d_t et d_b sont définis comme suit :

$$\left. \begin{aligned} d_e &= \Delta y(j) \Delta z(k) / a_p(i, j, k), \quad d_w = \Delta y(j) \Delta z(k) / a_p(i - 1, j, k) \\ d_s &= \Delta x(i) \Delta z(k) / a_p(i, j, k), \quad d_n = \Delta x(i) \Delta z(k) / a_p(i, j - 1, k) \\ d_t &= \Delta x(i) \Delta y(j) / a_p(i, j, k), \quad d_b = \Delta x(i) \Delta y(j) / a_p(i, j, k - 1) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.57})$$

$$b'_p = \begin{pmatrix} [u^{**}(i, j, k) - u^{**}(i - 1, j, k)] \Delta y(j) \Delta z(k) + \\ [v^{**}(i, j, k) - v^{**}(i, j - 1, k)] \Delta x(i) \Delta z(k) + \\ [w^{**}(i, j, k) - w^{**}(i, j, k - 1)] \Delta x(i) \Delta y(j) \end{pmatrix} \quad (\text{III.58})$$

III.4.4 Organigramme de l'algorithme

La figure III.9 présente les différentes étapes utilisées par l'algorithme SIMPLER pour la résolution numérique de l'équation adimensionnelle couplée (pression-vitesse).

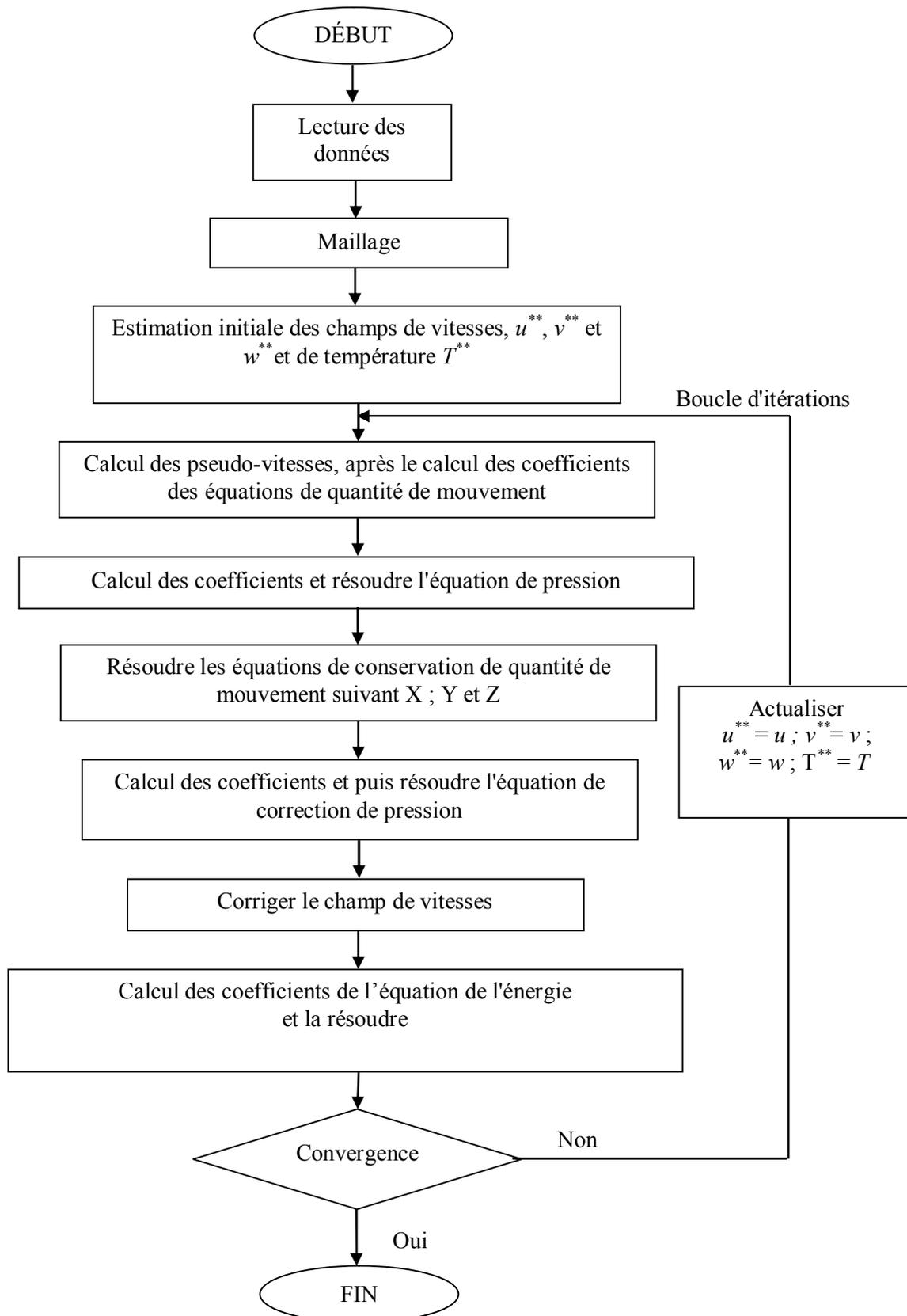


Figure III.9 : Organigramme de l'algorithme SIMPLER

III.5 METHODE DE RESOLUTION (ALGORITHME DE THOMAS)

Bien qu'il existe plusieurs méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques, notamment les méthodes itératives comme Gauss-Seidel et les méthodes directes comme Gauss-Jordan. La résolution directe du système d'équations algébriques est compliquée, Pour résoudre ce système par une méthode itérative, on utilise la technique de balayage qui s'effectue séquentiellement suivant les trois directions. L'algorithme de Thomas permet de calculer la solution d'un système algébrique linéaire lorsque la matrice est tri-diagonale.

Dans sa forme générale indicielle, l'équation discrétisée s'écrit comme suit :

$$a_P(i, j, k)\phi_{i,j,k} = \begin{pmatrix} a_E(i, j, k)\phi_{i+1,j,k} + a_W(i, j, k)\phi_{i-1,j,k} + \\ a_N(i, j, k)\phi_{i,j+1,k} + a_S(i, j, k)\phi_{i,j-1,k} + \\ a_T(i, j, k)\phi_{i,j,k+1} + a_B(i, j, k)\phi_{i,j,k-1} + \\ S_\phi(i, j, k) \end{pmatrix} \quad (\text{III.59})$$

Comme exemple, on prend le balayage suivant X , et on suppose que les valeurs de la variable ϕ le long des deux autres directions Y et Z sont connues. L'équation (III.59) est réécrite comme suit :

$$a_i\phi_{i+1} = b_i\phi_{i+1} + c_i\phi_{i-1} + d_i \quad (\text{III.60})$$

Dont :

$$a_i = a_P(i, j, k), b_i = a_E(i, j, k), c_i = a_W(i, j, k)$$

$$d_i = \begin{pmatrix} a_N(i, j, k)\phi_{i,j+1,k} + a_S(i, j, k)\phi_{i,j-1,k} + \\ a_T(i, j, k)\phi_{i,j,k+1} + a_B(i, j, k)\phi_{i,j,k-1} \end{pmatrix} + S_\phi(i, j, k)$$

On introduit la relation de récurrence suivante :

$$\phi_i = P_i\phi_{i+1} + Q_i \quad (\text{III.61})$$

Pour l'indice $i - 1$, on a :

$$\phi_{i-1} = P_{i-1}\phi_i + Q_{i-1} \quad (\text{III.62})$$

En remplaçant la relation (III.62) dans l'équation (III.61) on trouve :

$$\phi_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \phi_{i+1} + \frac{d_i - c_i \phi_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (\text{III.63})$$

De (III.48) et (III.50) on a :

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \text{ et } Q_i = \frac{d_i - c_i \phi_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (\text{III.64})$$

Pour $i = 1$ on a :

$$c_1 = 0$$

Donc, on trouve :

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} \text{ et } Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \quad (\text{III.65})$$

Pour $i = 1$ on a : $b_{il} = 0$ donc $P_{il} = 0$

Et de l'équation (III.63) on trouve : $\phi_{il} = Q_{il}$

Avec l'utilisation de ces valeurs on peut calculer les valeurs de ϕ_i .

Le balayage suivant la direction Y et Z sont similaire à celui de balayage suivant la direction X et les résultats obtenus à le premier balayage suivant la direction X sont utilisés dans les deux balayages suivant les directions Y et Z .

III.6 CRITERE DE CONVERGENCE

Le critère de convergence utilisé dans notre programme de calcul est basé sur la différence relative de toutes les variables (U, V, W et θ) comme suit :

$$\max \left| \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\phi^n} \right| \leq 10^{-7} \quad (\text{III.60})$$

Où : ϕ : est la variable dépendante qui représente U, V, W et θ .

n : est le nombre d'itération.

III.7 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présentés la résolution numérique des équations gouvernant l'écoulement de notre problème physique. Cette résolution consiste à remplacer le système d'équations différentielles aux dérivées partielles par un système d'équations algébriques en utilisant une méthode de discrétisation basée sur les volumes finis. Le système d'équations algébriques obtenu est mis sous une forme tri-diagonale et sa résolution est réalisée, d'une manière itérative, par l'algorithme de Thomas pour obtenir la valeur de toutes les variables du problème considéré. Les résultats des différentes simulations seront présentés dans le chapitre suivant.

Chapitre IV

Résultats et Discussions

IV.1 INTRODUCTION

L'étude des phénomènes de convection mixte dans les milieux confinés fait un état de diverses configurations où le comportement de l'écoulement dépend fortement des paramètres géométriques et physiques appliqués au système. On s'intéresse, dans ce chapitre à des simulations tridimensionnelles en convection mixte dans une cavité cubique partiellement chauffée par le bas afin d'avoir l'effet de certains paramètres sur le comportement de l'écoulement et du transfert de chaleur tels que la direction de la vitesse des parois latérales, la nature du fluide utilisé et la dimension de la partie chauffée, les lignes de courants, les iso surfaces de température, le nombre de Nusselt moyen et le champ de température seront analysés. La résolution numérique du système d'équations gouvernant le phénomène étudié a été réalisée à l'aide d'un programme que nous avons élaboré en langage FORTRAN. Afin de confirmer la certitude de nos résultats nous avons cependant préalablement vérifiés que les résultats numériques obtenus à partir de ce code sont en parfait accord avec ceux obtenus par Iwatsu [25].

IV.2 CHOIX DU MAILLAGE

Nous avons opté pour un maillage non uniforme dans les trois directions, la matrice de subdivision du domaine de calcul suivant les directions X, Y et Z est de la forme Il, Jl et Kl . La distribution du maillage suivant la direction X à titre indicatif est définie par la relation suivante :

$$\Delta X(1) = 0.0, \quad \Delta X(2) = \frac{1}{2} \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^{(il/2-1)}}, \quad \Delta X(i) = \alpha \cdot \Delta X(i-1) \quad (\text{IV.1})$$

Avec : $\alpha = 1.1$

Le maillage décalé est défini comme suit :

$$\begin{aligned} dX(1) &= \Delta X(2)/2 \\ dX(i) &= (\Delta X(i) + \Delta X(i+1))/2 \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

La figure IV.1 montre ce maillage non uniforme à l'intérieur de la cavité. Il est plus fin près des parois où le gradient des variables physiques est important.

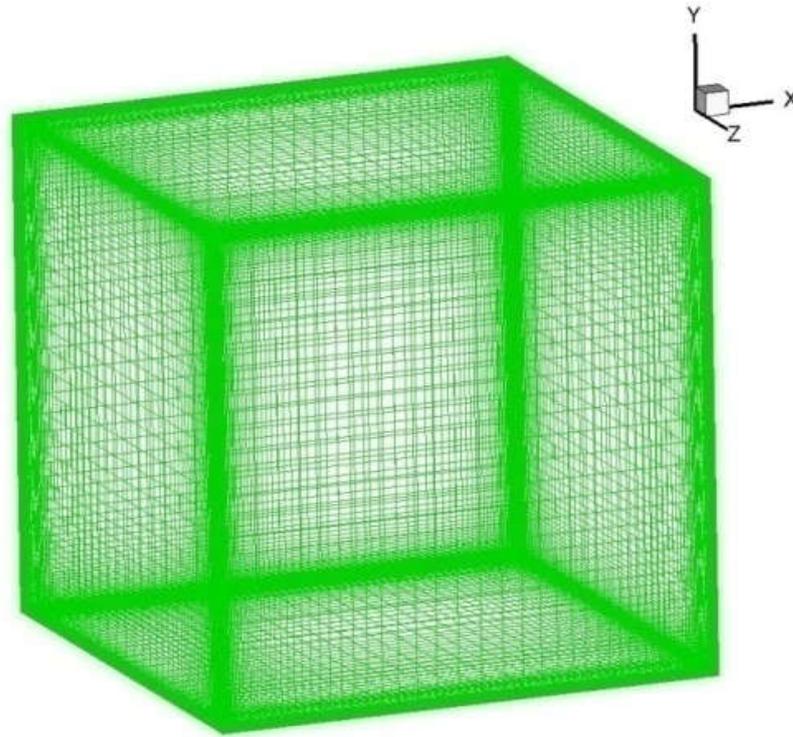


Figure IV.1 : Schéma de la distribution du maillage dans la cavité

Afin d'avoir un compromis raisonnable entre le temps de calcul et la précision des résultats, le choix d'un maillage adéquat s'avère nécessaire. Cela nécessite des essais préliminaires pour tester l'effet du maillage sur la sensibilité des solutions. Dans cette étude nous avons considéré les maillages $61 \times 61 \times 61$, $71 \times 71 \times 71$, $81 \times 81 \times 81$, $91 \times 91 \times 91$, $101 \times 101 \times 101$, $111 \times 111 \times 111$ et $121 \times 121 \times 121$.

Les résultats obtenus en terme du nombre de Nusselt moyen de la paroi chauffée en fonction du maillage montrent que le profil du nombre de Nusselt moyen devient insensible au nombre de nœuds à partir d'un maillage de $91 \times 91 \times 91$ comme présenté dans le tableau IV.1 et la figure IV.2. De ce qui précède, nous avons opté pour un maillage de $91 \times 91 \times 91$ pour l'ensemble des simulations numériques.

Tableau IV.1 : Nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de nœuds

Nombre de nœuds	61^3	71^3	81^3	91^3	101^3	111^3	121^3
Nu_{moy}	2.98	3.24	3.31	3.336	3.342	3.35	3.355
Erreur	11.2%	3.45%	1.35%	0.56%	0.39%	0.15%	-

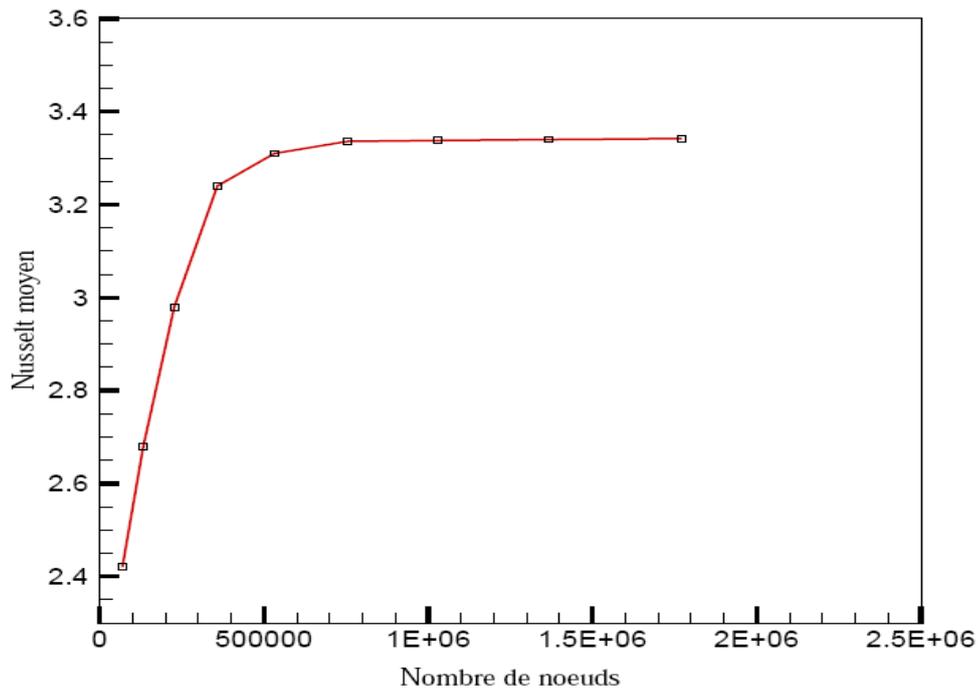


Figure IV.2 : Le nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de nœuds

IV.3 VALIDATION DU CODE NUMERIQUE

Pour utiliser le code numérique élaboré avec plus de confiance, il est indispensable de le valider avec des résultats existant dans la littérature. Ainsi, nous avons comparé avec succès nos résultats à ceux obtenus à partir de l'étude de la convection mixte dans une cavité cubique conduite par Iwatsu et Hyun [25] (la seconde catégorie qui examine les cavités chauffées de la paroi mobile supérieure et refroidies du dessous).

Tableau IV.2 : Comparaison du nombre de Nusselt moyen de la présente étude avec Iwatsu et Hyun [25]

<i>Re</i>	<i>Ri</i> = 0.001			<i>Ri</i> = 1.0			<i>Ri</i> = 10.0		
	Présente étude	Iwatsu	Diff %	Présente étude	Iwatsu	Diff %	Présente étude	Iwatsu	Diff %
100	1.825	1.82	0.27	1.343	1.33	0.97	1.092	1.08	1.09
400	3.975	3.99	0.37	1.521	1.50	1.3	1.158	1.17	1.02
1000	6.98	7.03	0.71	1.789	1.80	0.6	1.395	1.37	1.79

IV.4 ANALYSE THERMIQUE ET DYNAMIQUE DE L'ÉCOULEMENT

Dans cette partie nous avons essayés de faire une comparaison qualitative entre les résultats du cas bidimensionnel et tridimensionnel. L'étude est effectuée pour le cas où la partie chauffée est égale à $3/5$ et le fluide utilisé est l'air avec un nombre de Prandtl $Pr = 0.71$ et pour un nombre de Reynolds fixe égale à 100 . Dans le cadre de ce problème de convection mixte, on distingue trois régimes d'écoulement dépendamment de la valeur du nombre de Richardson Ri .

Les résultats sont présentés avec l'augmentation graduelle du nombre de Richardson Ri . Elles sont donnés sous forme de distributions des isothermes et des lignes de courants aux plans ($Z = 1/32, 1/16, 1/8, 1/4, 1/2$, et $3/4$) pour les trois différents nombres de Richardson correspond aux trois modes de transfert par convection, la première pour $Ri = 0.1$ (convection forcée), la deuxième pour $Ri = 5$ (convection mixte) et la troisième pour $Ri = 10$ (convection naturelle). Les différents plans des résultats sont illustrés dans la figure IV.3.

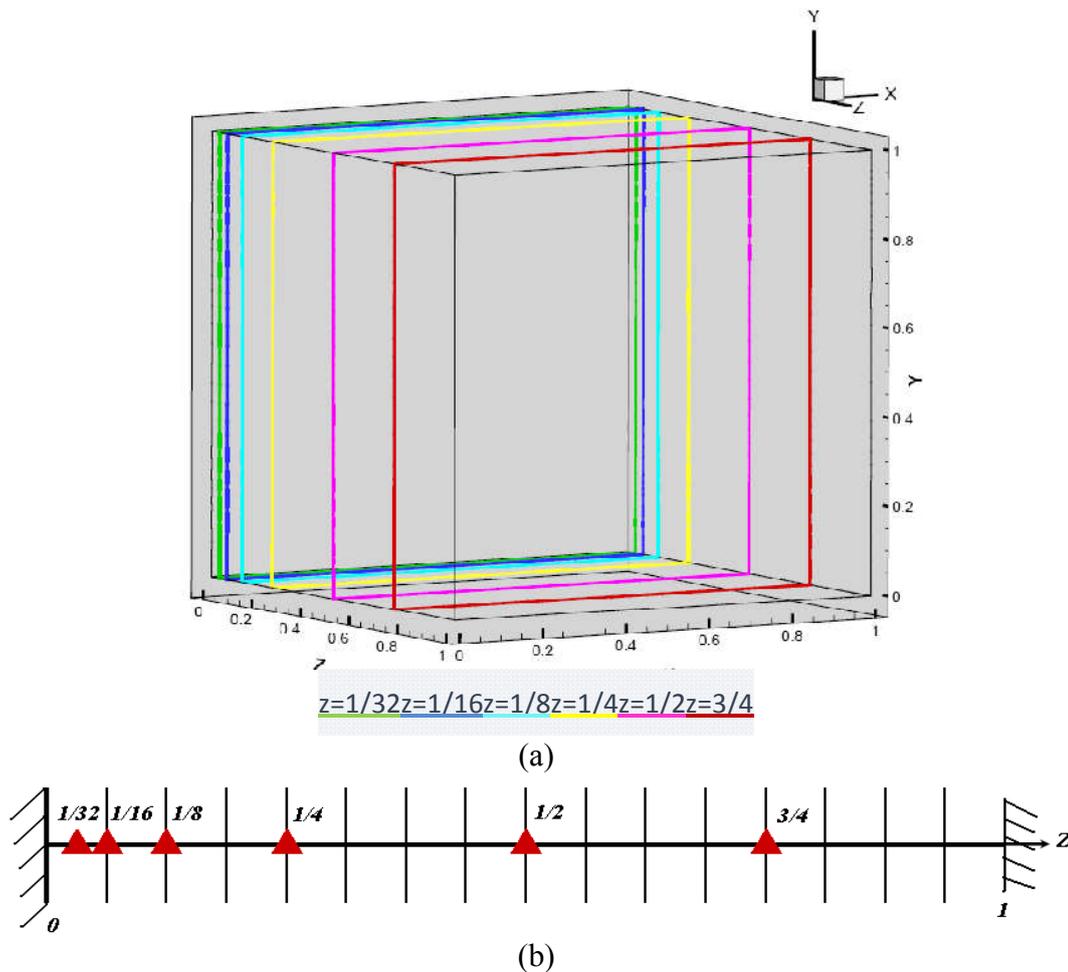


Figure IV.3 : Positions des différents plans affichant les résultats numériques obtenus, (a) en 3D et (b) suivant l'axe Z ($X=Y=0$).

IV.4.1 Champs dynamique et thermique pour $Ri = 0.1$ à 4.5 pour le cas 2D et $Ri = 0.1$ à 2.5 pour le cas 3D

Les champs dynamique et thermique sont représentés dans la figure IV.4 pour le cas bidimensionnel et IV.5 pour le cas tridimensionnel dans les plans mentionnés sur la figure IV.3 pour un nombre de Reynolds fixé égale à 100, un nombre de Prandtl égale à 0.71 et un nombre de Richardson égale à 0.1 qui correspond au régime de la convection forcée. La solution présente un écoulement symétrique caractérisé par une paire de zone de recirculation contrarotative identique car les conditions aux limites sont symétriques.

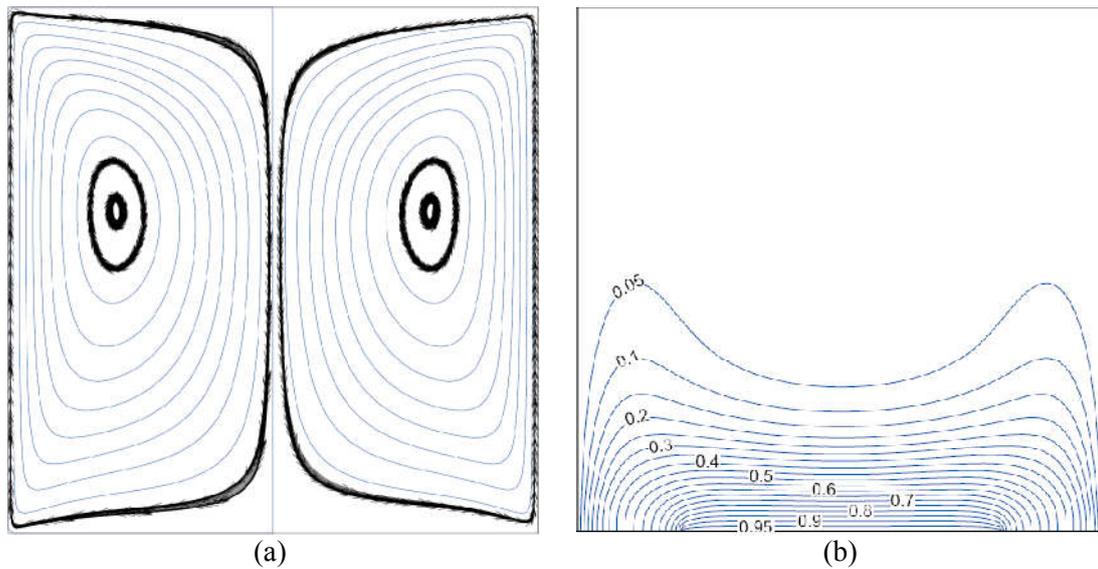


Figure IV.4 : Résultats bidimensionnelles pour $Ri=(0.1$ à $4.5)$
(a) lignes de courant (b) isotherme.

Nous remarquons qu'une stratification thermique existe près de la partie chauffée. Nous constatons que l'effet des forces de flottabilités est secondaire et que les couches de fluide près des parois sont entraînées par les forces visqueuses dues au mouvement ascendant des parois latérales. Il est remarquable que la température froide occupe toute la partie supérieure de la cavité et que la température au centre de la cavité soit plus basse que celle des extrémités dans la même profondeur. Il est intéressant de noter que les champs dynamique et thermique au plan ($z=1/4$) sont qualitativement les plus proche à ceux du cas bidimensionnel.

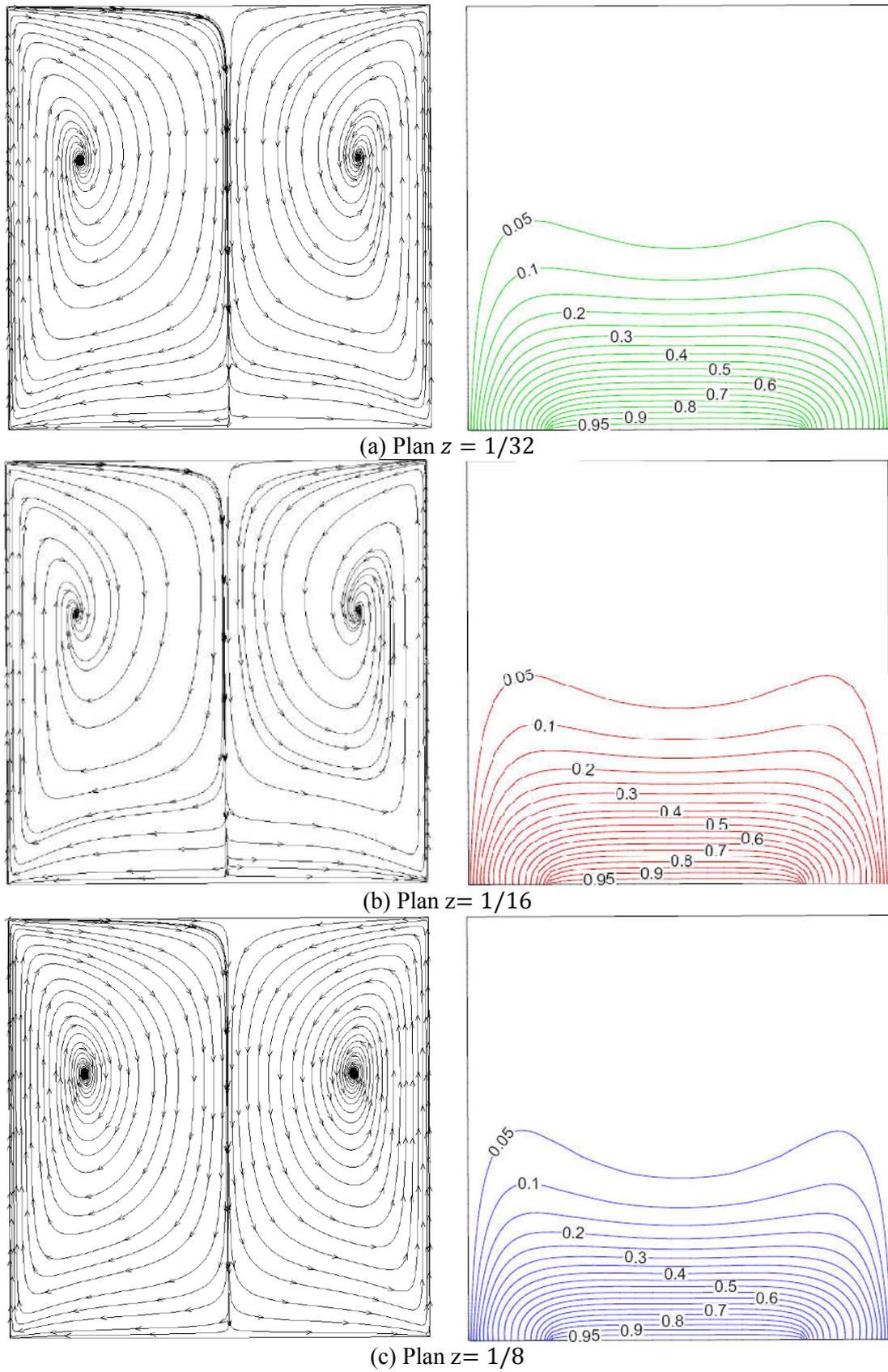


Figure IV.5 : Lignes de courant et isothermes aux différents plans z pour $Ri=(0.1 \text{ à } 2.5)$

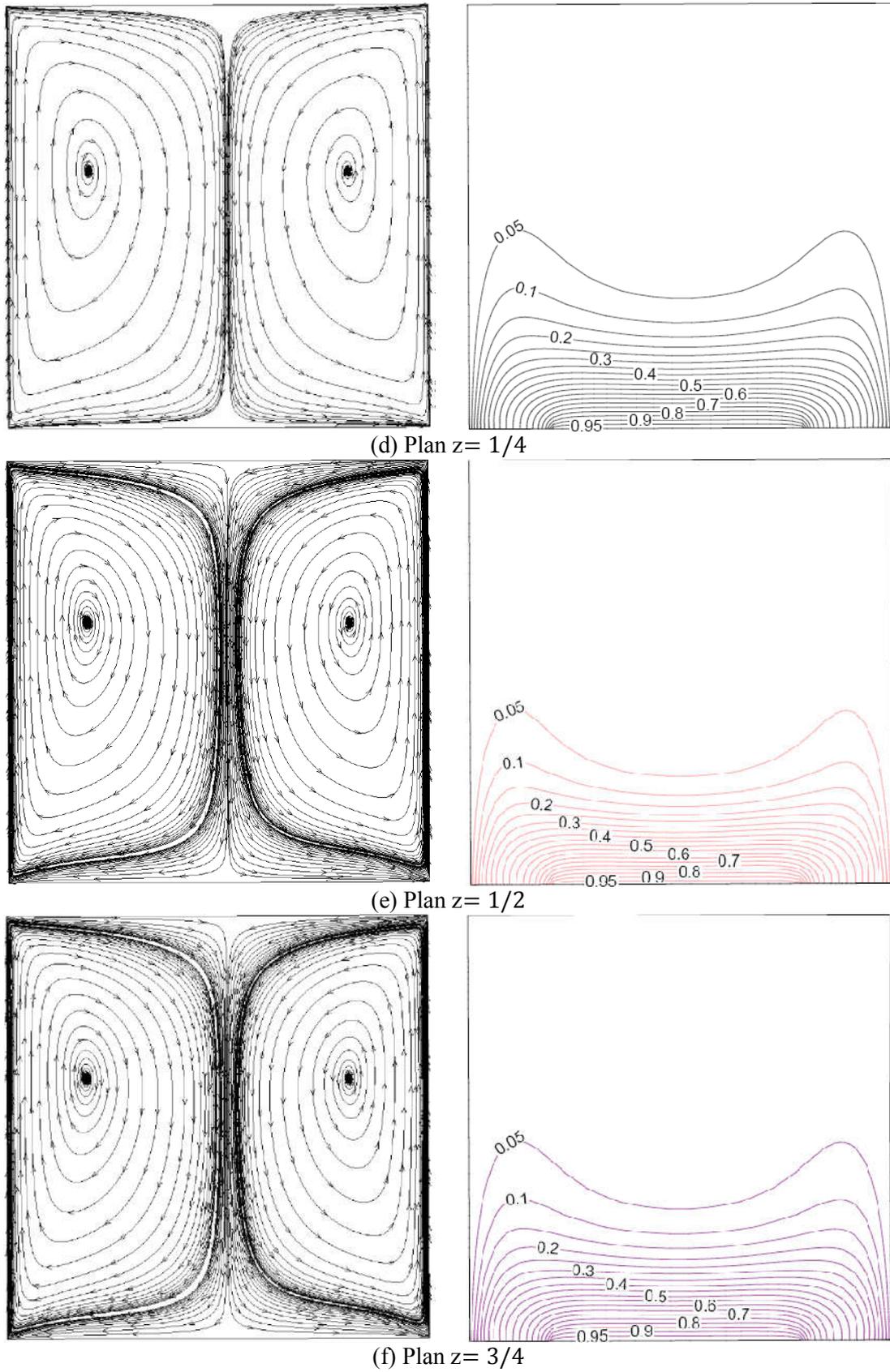


Figure IV.5 : Lignes de courant et isothermes aux différents plans z pour $Ri = (0.1 \text{ à } 2.5)$ (suite)

IV.4.2 Champs dynamique et thermique pour $Ri = 4.51$ à 6.29 pour le cas 2D et $Ri = 2.51$ à 7.59 pour le cas 3D

Avec l'augmentation du nombre de Richardson l'effet des forces de flottabilités devient plus perceptible. Pour une valeur du nombre de Richardson plus grand que 2.5 pour le cas tridimensionnel et 4.5 pour le cas bidimensionnel un nouveau type d'écoulement est observé où l'écoulement perd sa symétrie, le début du passage de l'écoulement symétrique vers un comportement asymétrique est réalisé pour une valeur du nombre de Richardson compris entre 2.5 et 3 pour le cas 3D et entre 4.5 et 5 pour le cas 2D.

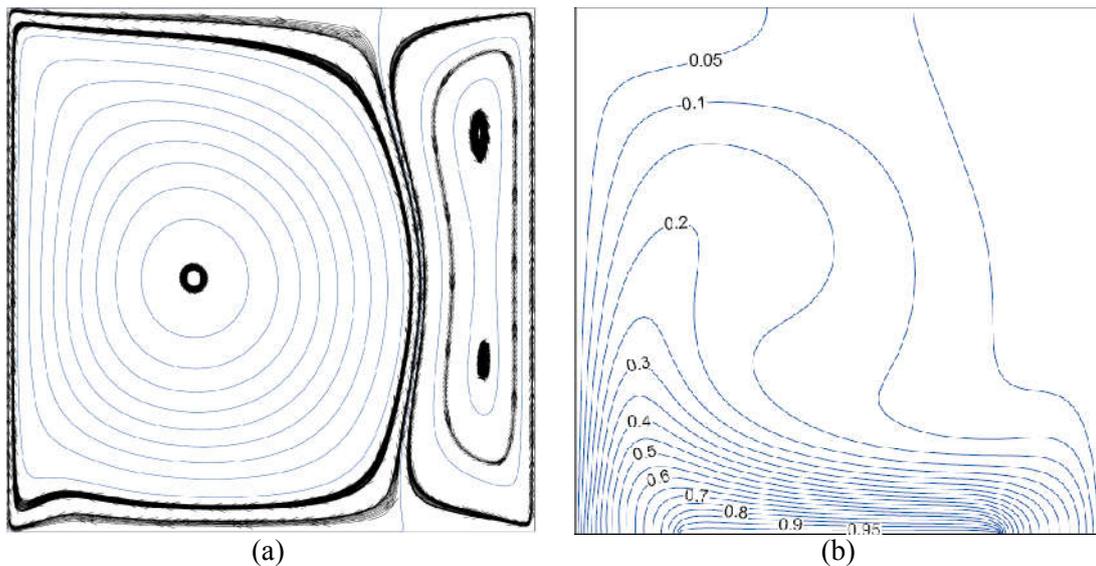


Figure IV.6 : Résultats bidimensionnelles pour $Ri = (4.51 \text{ à } 6.29)$
(a) lignes de courant (b) isotherme.

Les lignes de courant et les isothermes sont représentées dans la figure IV.6 pour le cas 2D et dans la figure IV.7 pour le cas 3D pour Richardson égale à cinq dans les mêmes plans cité précédemment. Deux cellules contrarotatives de différentes formes et intensités sont observées, la première à droite, antihoraire, occupant un tiers de la cavité et la deuxième horaire à gauche occupant les deux tiers de la cavité. Ce phénomène de perte de symétrie a été rapporté par plusieurs auteurs comme Kachi et al [57] qui ont publié leurs travaux récemment, mais jusqu'à présent personne n'a pas pu l'expliquer d'une manière scientifique et rigoureuse.

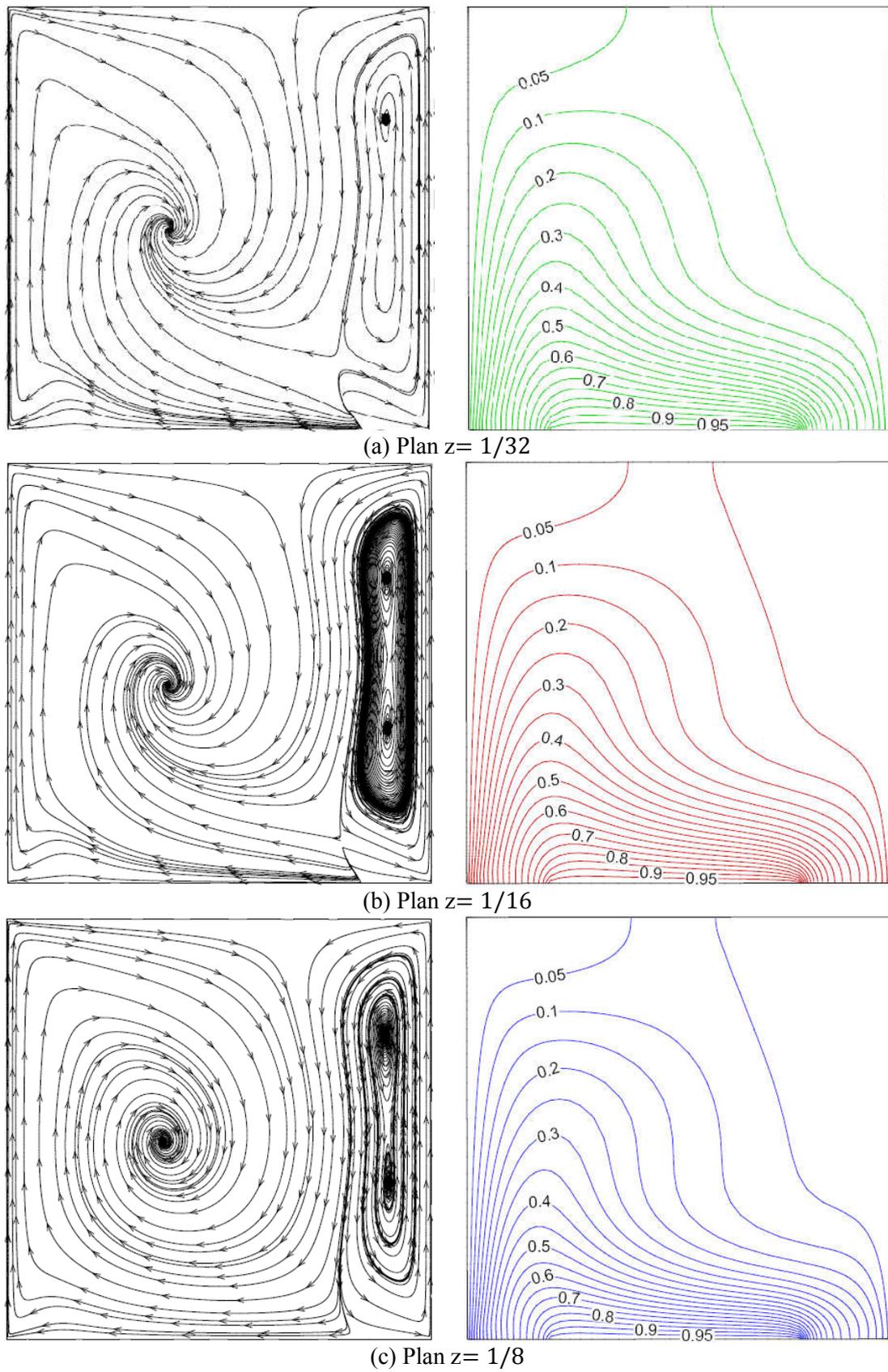
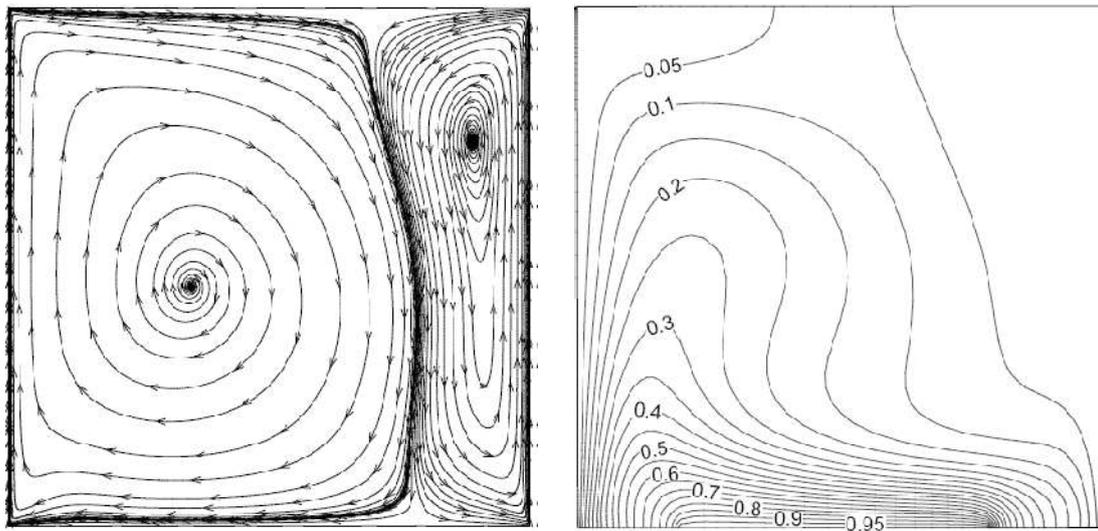
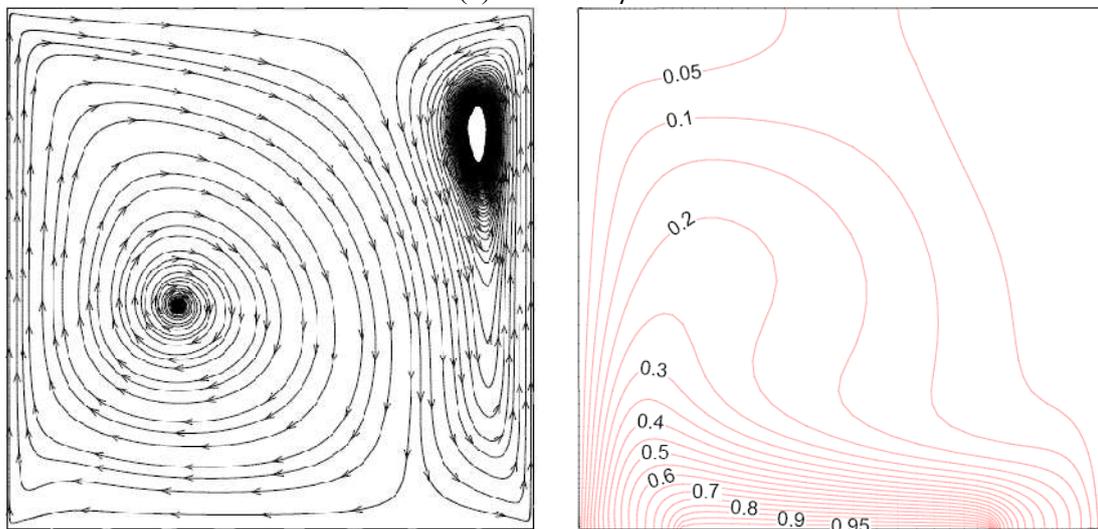


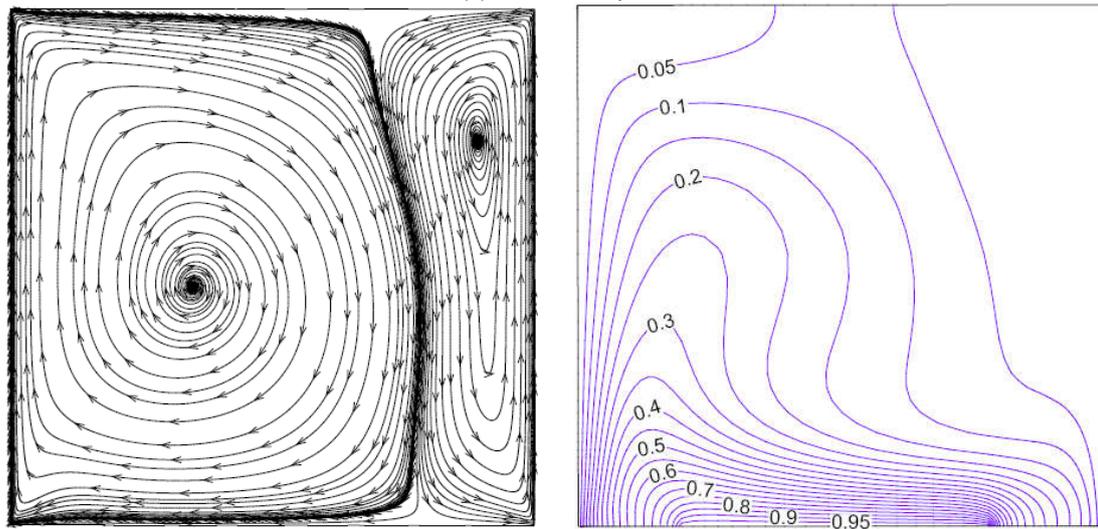
Figure IV.7 : Lignes de courant et isothermes aux différents plans z pour $Ri = (2.51 \text{ à } 7.59)$



(d) Plan $z = 1/4$



(e) Plan $z = 1/2$



(f) Plan $z = 3/4$

Figure IV.7 : Lignes de courant et isothermes aux différents plans z pour $Ri = (2.51 \text{ à } 7.59)$ (suite)

Les isothermes montrent que la distribution de la température est dissymétrique et que le gradient de la température est plus important au côté gauche de la cavité. Nous constatons que les deux cellules sont produites par les forces visqueuses qui dominent l'écoulement due au mouvement ascendant des parois latérales qui restent plus important par rapport aux forces de flottabilités pour cette valeur du nombre de Richardson. Cette dissymétrie n'apparaît pas dans les travaux d'Aydin et Yang [48] et de Guo et Sharif [49] car dans ce cas les forces visqueuses et les forces de flottabilités agissent dans le même sens. Il est bon de signaler que le champ dynamique du plan $z = 1/4$ est le plus proche à celui du cas bidimensionnel et le plan $z = 1/2$ pour le champ thermique.

IV.4.3 Champs dynamique et thermique pour $Ri \geq 6.3$ pour le cas 2D et $Ri \geq 7.6$ pour le cas 3D

Un passage soudain à un nouveau type d'écoulement est observé quand la valeur du nombre de Richardson atteinte 6.3 pour le cas bidimensionnel et 7.6 pour le cas tridimensionnel dont la solution récupère leur symétrie pour des valeurs du nombre de Richardson relativement élevés. Le champ dynamique est représenté dans la figure IV.8a pour le cas bidimensionnel et la figure IV.9 pour le cas tridimensionnel dans les mêmes plans, Une bifurcation vers une structure d'écoulement symétrique caractérisé par deux paires de cellules est mise en évidence.

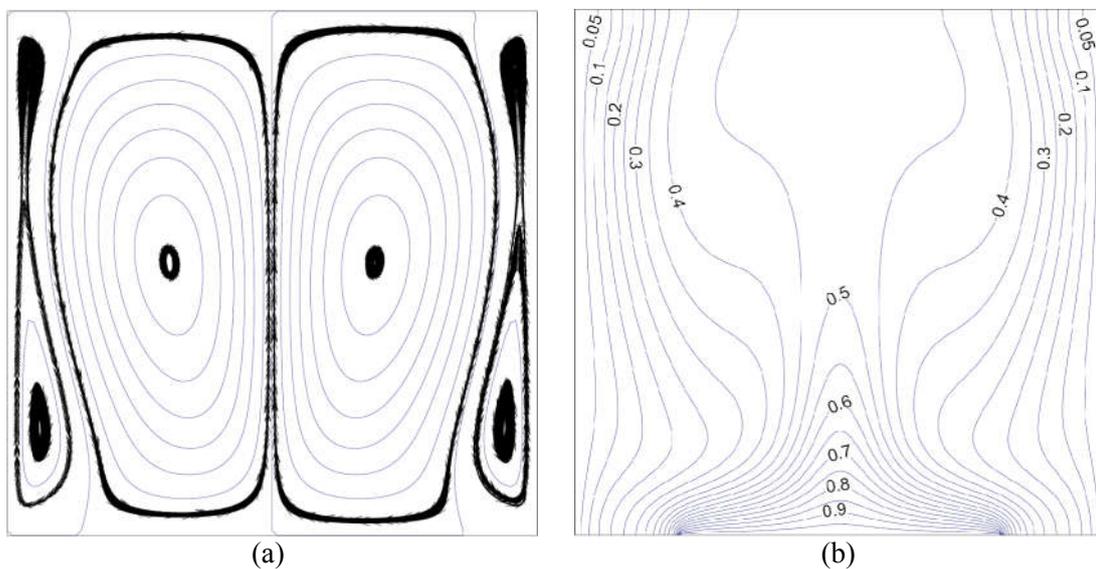


Figure IV.8 : Résultats bidimensionnelles pour $Ri \geq 6.3$.
(a) lignes de courant (b) isotherme.

La paire de cellules contrarotatives au centre de la cavité est principalement entretenue par les forces de flottabilité et celle pincées près des parois verticales en mouvement entretenues par les forces de viscosité. Si on augmente le nombre de Richardson (augmentation de l'effet des forces de flottabilités), les deux cellules près des parois se rétrécissent.

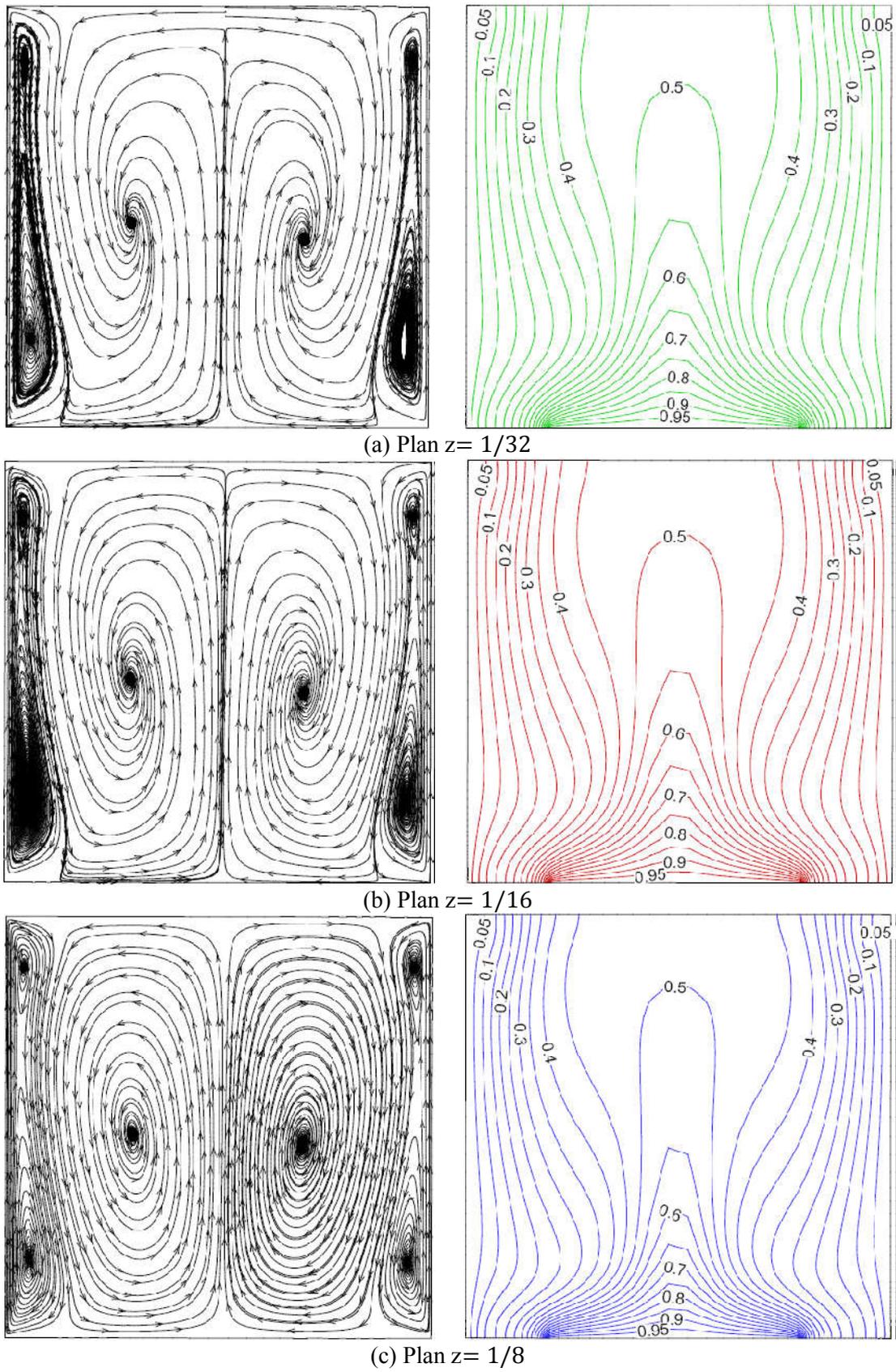


Figure IV.9 : Lignes de courant et isothermes aux différents plans z pour $Ri \geq 7.6$

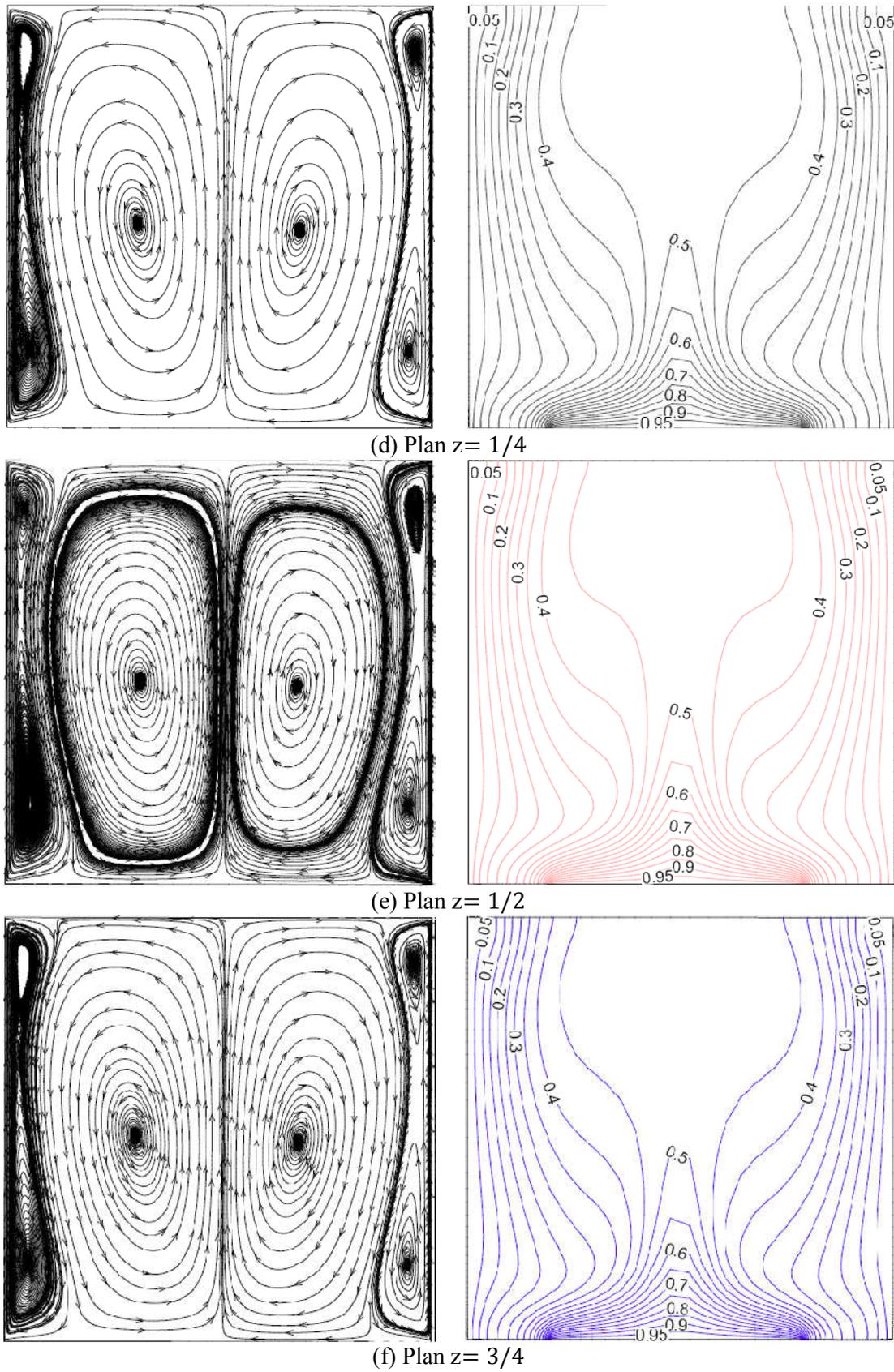


Figure IV.9 : Lignes de courant et isothermes aux différents plans z pour $Ri \geq 7.6$ (suite)

Le champ thermique est représenté dans la figure IV.8b pour le cas 2D et dans la figure IV.9 pour le cas 3D. La chaleur récupérée de la source chaude est transportée par convection vers le haut au milieu de l'enceinte par la paire de cellules au centre. C'est ce qui explique les températures relativement élevées dans la partie centrale de la cavité, La chaleur est évacuée de façon équitable à travers les deux parois latérales.

Les résultats de cette investigation montrent que le taux de transfert de chaleur dépend de la nature de la convection et que la partie affectée par le transfert de chaleur est plus importante près des parois frontales et dorsales due au gradient de température élevé et le minimum au centre de la cavité et qu'il n'y a pas une grande différence entre les résultats des cas bidimensionnels et tridimensionnels.

Tableau IV.3 : Nombre de Nusselt moyen pour les cas 2D et 3D

	$Nu_{1moy}(2D)$	$Nu_{2moy}(2D)$	$Nu_{moy}(2D)$	$Nu_{1moy}(3D)$	$Nu_{2moy}(3D)$	$Nu_{moy}(3D)$
Ri=0.1	1.79	1.79	3.374	1.71	1.62	3.33
Ri=5	2.64	1.28	3.90	3.10	0.81	3.92
Ri=10	2.12	2.12	4.25	2.10	2.05	4.16

IV.5 EFFET DE LA LARGEUR DE LA PARTIE CHAUFFÉE

Nous présentons dans cette partie l'influence de la taille de la source de chaleur ε sur le comportement de l'écoulement et du transfert thermique. L'évolution des lignes de courant, les iso surfaces de température et le nombre de Nusselt moyen et locale en fonction du nombre de Richardson (0.1, 5 et 10) sont présentées pour les quatre valeurs de la dimension de la partie chauffée ε (1/5, 2/5, 3/5 et 4/5). Pour déterminer l'effet de la dimension de la partie chauffée sur le transfert de chaleur et le comportement des différents paramètres de l'écoulement on compare la distribution des champs de température, les lignes de courant les iso-surface de température et le nombre de Nusselt de la partie chaude pour les quatre cas précédentes.

IV.5.1 Champs dynamique et thermique pour $Ri = 0.1$

Le champ dynamique est représenté dans la figure IV.10 pour un nombre de Richardson égale à 0.1 pour quatre différentes largeurs adimensionnelles de la partie chauffée (1/5, 2/5, 3/5 et 4/5). Deux cellules symétriques contrarotatives caractérisent l'écoulement pour les quatre différentes dimensions donc l'augmentation de la taille de la source de chaleur n'influe pas sur le comportement des lignes de courant quand la convection forcée est dominante.

Le champ thermique est illustré dans la même figure IV.10 avec les lignes de courant. Nous remarquons que l'intensité de la stratification thermique qui existe près de la partie chauffée dépend de la dimension de la partie chauffée et de la distance entre cette dernière et les parois latérales froides. Les couches de fluide adjacent aux parois sont entraînées par les forces visqueuses dues au mouvement ascendant des parois latérales. Nous constatons aussi que la température froide occupe toute la partie supérieure de la cavité et une légère différence est observée entre la hauteur de la partie occupée par la température froide pour les quatre cas étudiés par contre la largeur de la partie affectée par la température chaude est proportionnel à la taille de la partie chauffée.

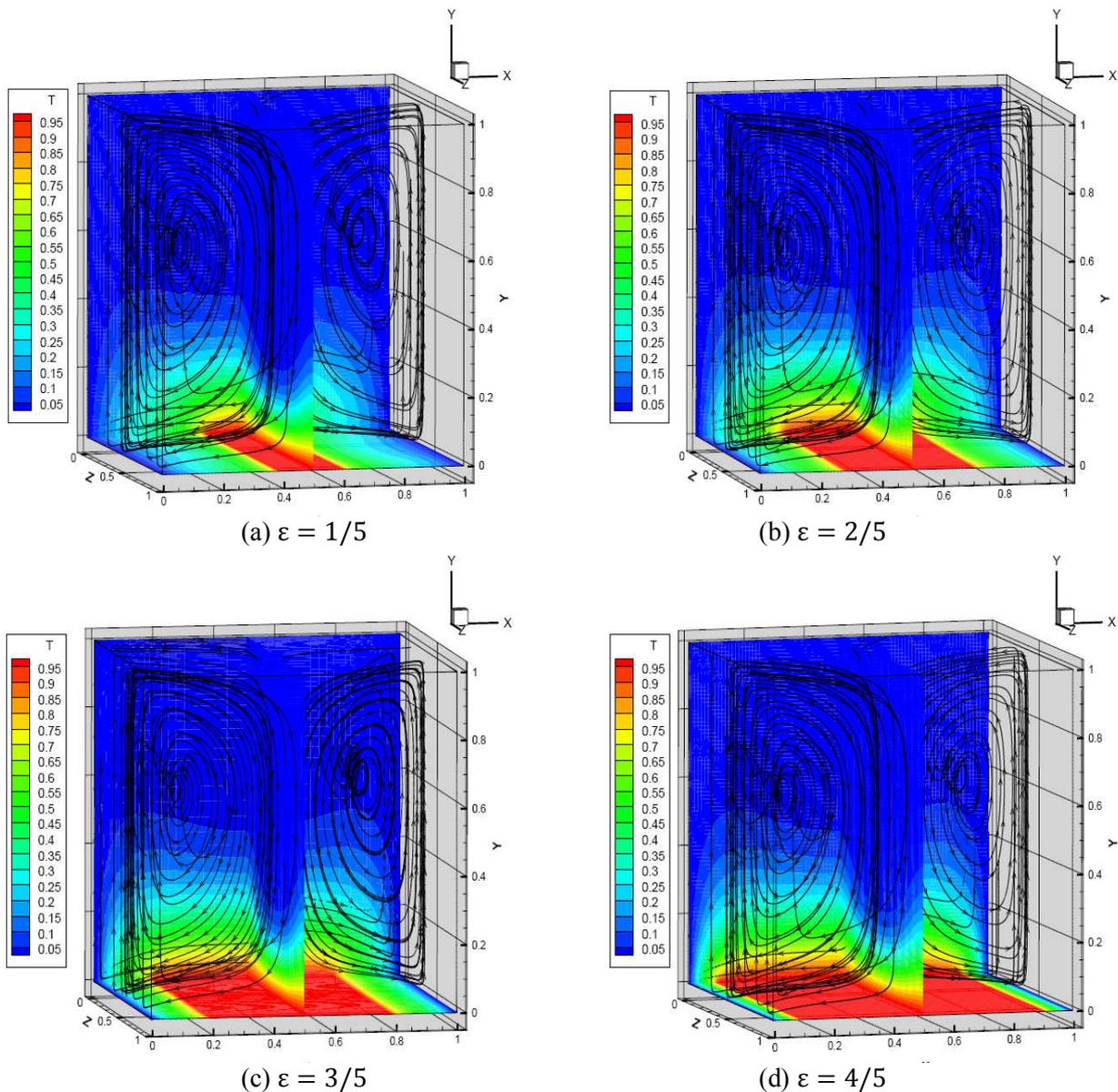


Figure IV.10 : Lignes de courant pour $Ri=0.1$ et différentes ϵ

En effet, il est remarquable que les faibles flux de chaleur récupérés par le fluide de la source chaude sont directement évacués à travers la partie inférieure des parois latérales pour les quatre cas étudiés.

Pour plus de justification concernant la distribution de la température dans la cavité, la figure IV.11 montre la distribution de température dans l'enceinte, neuf zones sont présentées de 0.9 à 0.1 du bas vers le haut, une concentration des isothermes au niveau de la partie inférieure de la cavité est observée. La convection de la chaleur causée par une zone de recirculation du fluide justifiant la structure thermique générale.

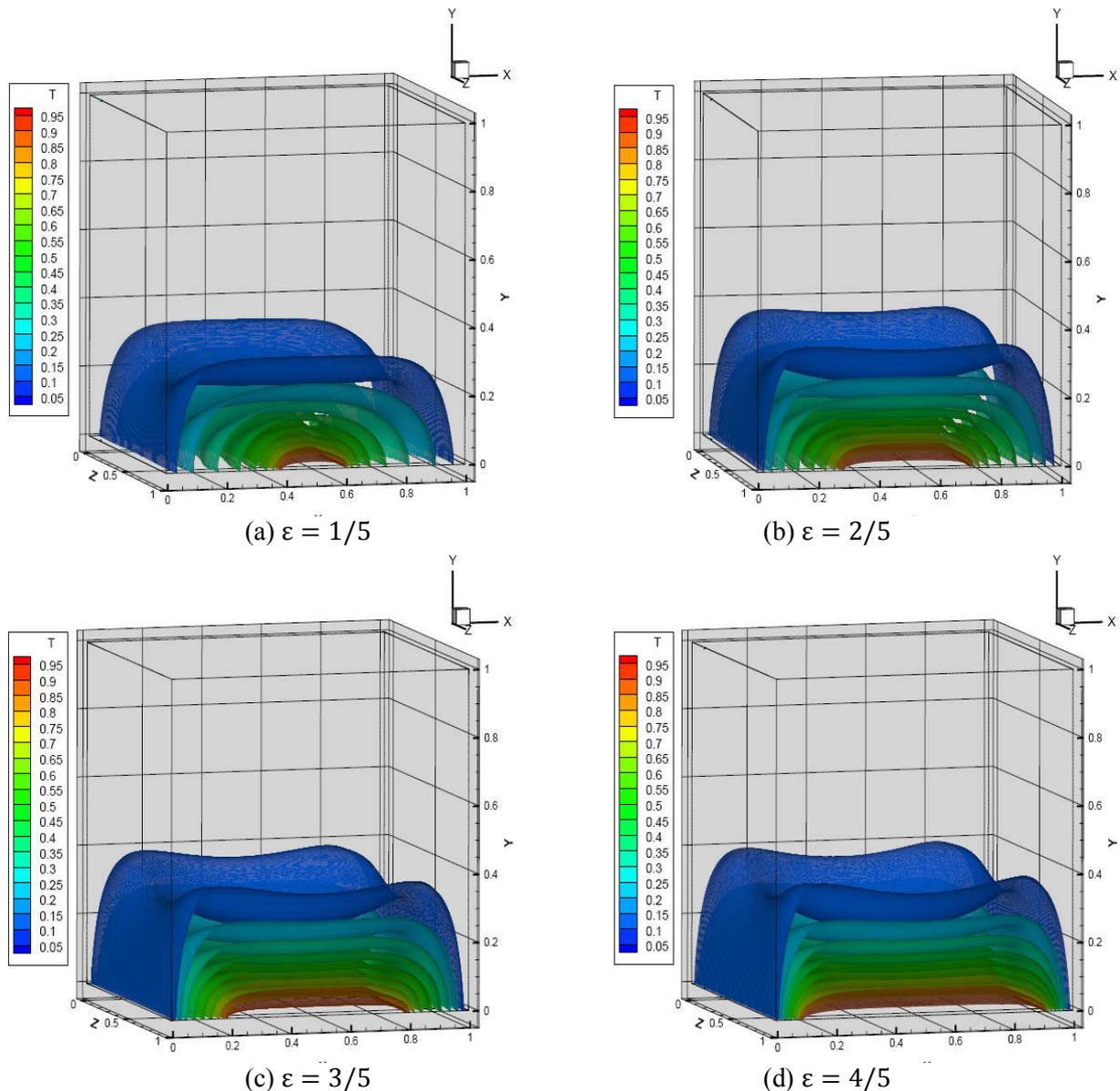


Figure IV.11 : Iso surface de température pour $Ri=0.1$ et différentes ε

La variation du nombre de Nusselt local le long de la partie chauffée est représentée dans la figure IV.12. Il est évident que la valeur minimale du nombre de Nusselt local située au milieu

de la partie chauffée près des parois adiabatiques, tandis qu'il prend sa valeur maximale aux bornes de celui-ci due au grand écart de température entre le fluide froid et la source chaude. D'une manière générale l'échange de chaleur est plus important à gauche de la partie chauffée par rapport à l'autre côté.

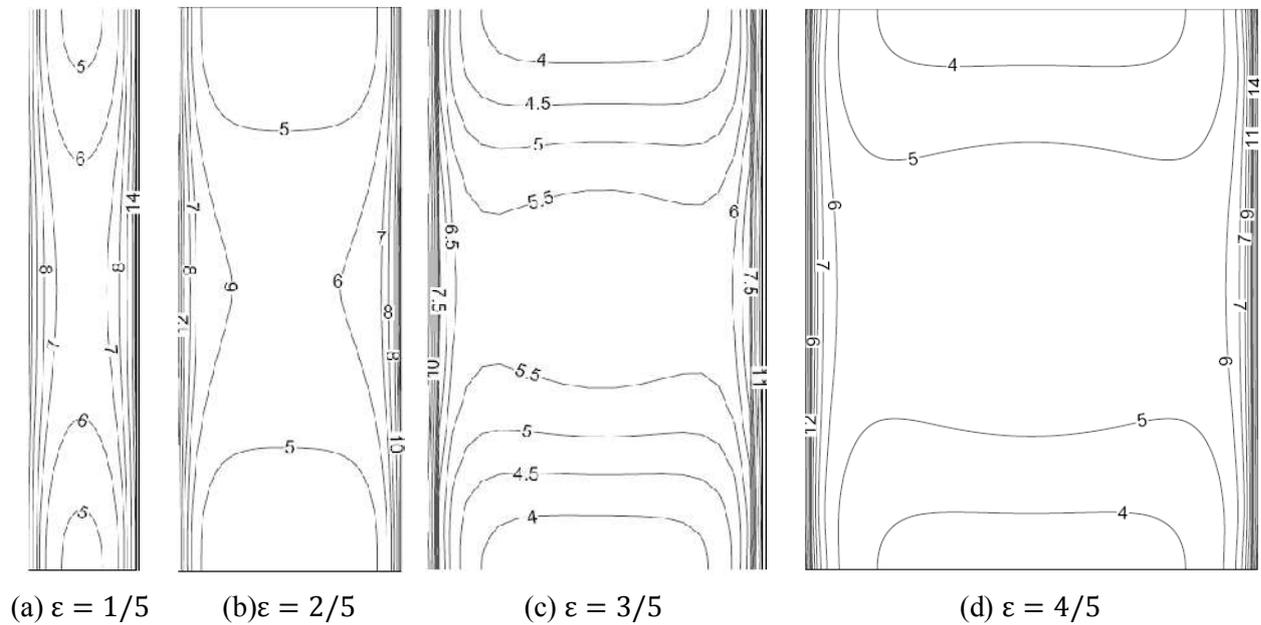


Figure IV.12 : Nombre de Nusselt locale pour $Ri=0.1$ et différentes ε

Le tableau IV.4 présente les différentes valeurs du nombre de Nusselt moyen pour les quatre valeurs de la taille de la partie chauffée, la valeur la plus élevée du nombre de Nusselt moyen est obtenue pour la taille la plus grande de la source de chaleur car avec l'augmentation de la largeur de la partie chauffée la distance entre la partie chauffée et les parois mobiles diminue donc l'échange de chaleur entre eux augmente.

Tableau IV.4 : Nombre de Nusselt moyen pour $Ri=0.1$ et différentes valeurs de ε

ε	1/5	2/5	3/5	4/5
Nu_{1moy}	0.860140	1.296937	1.712890	2.257214
Nu_{2moy}	0.819875	1.249394	1.621203	2.257213
Nu_{moy}	1.680071	2.546453	3.334587	4.514612

Nous avons constatés que les résultats du nombre de Nusselt moyen obtenus à partir de notre cas sont tout à fait cohérents avec ceux obtenus par Guo et Sharif [49] et Billah et Al [50] qui ont constatés que la section de la cavité affectée par la source de chaleur est proportionnelle à la largeur de la source de chaleur.

IV.5.2 Champs dynamique et thermique pour $Ri = 5$

Le champ dynamique est représenté dans la figure IV.13 avec le champ de température, deux nouvelles configurations d'écoulement apparaissent dépendant de la taille de partie chauffée. Ce changement est dû à l'augmentation de l'effet des forces de flottabilités caractérisées par le nombre du Richardson.

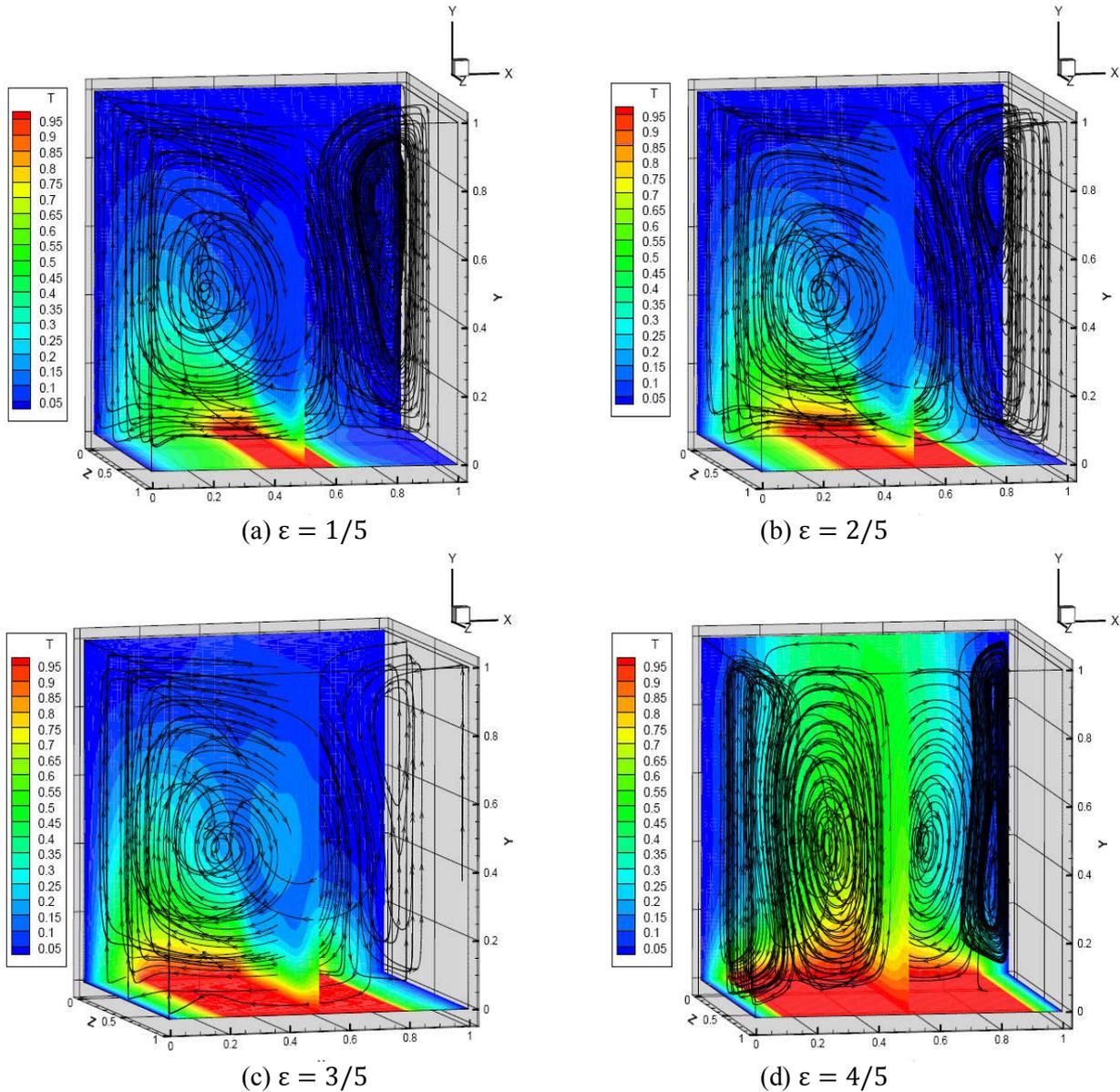


Figure IV.13 : Lignes de courant pour $Ri=5$ et différentes ε

Deux cellules contrarotatives de différentes tailles sont observées, la première à droite, antihoraire, occupe un tiers de la cavité, la deuxième à droite occupe deux tiers de la cavité pour une valeur ε inférieur ou égale à 0.72. Au fur et à mesure que la taille de la partie chauffée augmente et quand elle occupe plus de 72 pour cent de la surface de la paroi inférieur de la cavité

elle commence à avoir un effet sur l'écoulement qui devient symétrique caractérisé par deux grandes cellules qui occupent la majorité de la cavité et deux petites cellules près des parois mobiles pour $Ri > 3$.

Le champ de température montre que pour les trois configurations correspondent aux valeurs de la taille adimensionnelle de la partie chauffée $\varepsilon (1/5, 2/5 \text{ et } 3/5)$, la répartition de la température dans la cavité est caractérisée principalement par une perte de symétrie. Pour $\varepsilon = 4/5$, on observe un allure carrément différent de la structure d'écoulement dont l'écoulement devient symétrique et multicellulaires. Deux cellules secondaires apparaissent près des parois mobiles, et deux cellules principales occupent la majorité de la cavité.

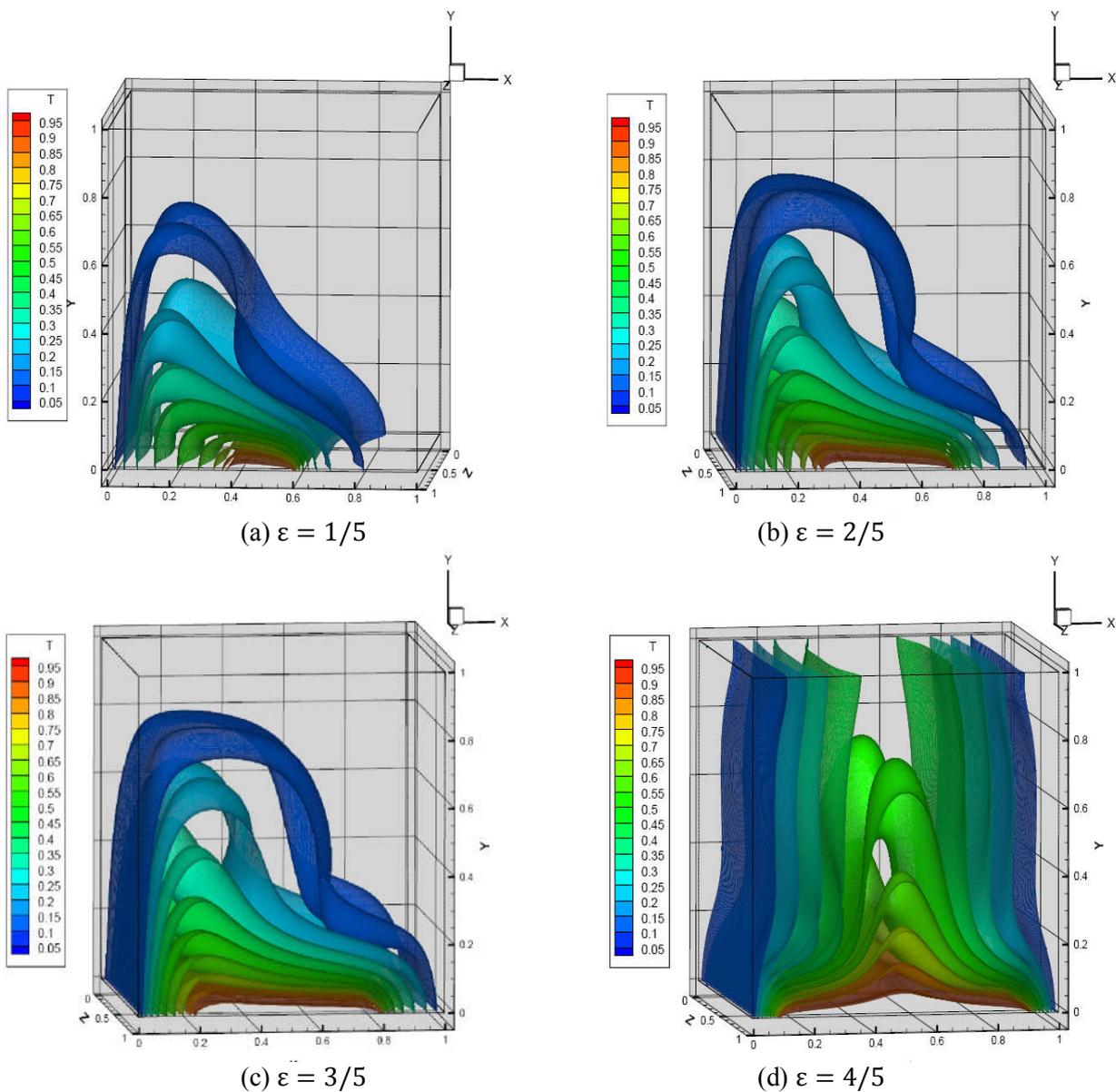


Figure IV.14 : Iso surface de température pour $Ri=5$ et différents ε

L'augmentation du nombre de Richardson a pour conséquence d'augmenter le nombre de Nusselt. La variation du nombre de Nusselt local le long de la partie chauffée est représentée dans la figure IV.15. Le nombre de Nusselt local prend une faible valeur du côté gauche de la cavité par rapport au côté droit pour $\varepsilon \leq 0.72$ et prend des valeurs minimum au centre de la partie chauffée du côté droit par rapport au côté gauche pour $\varepsilon > 0.72$.

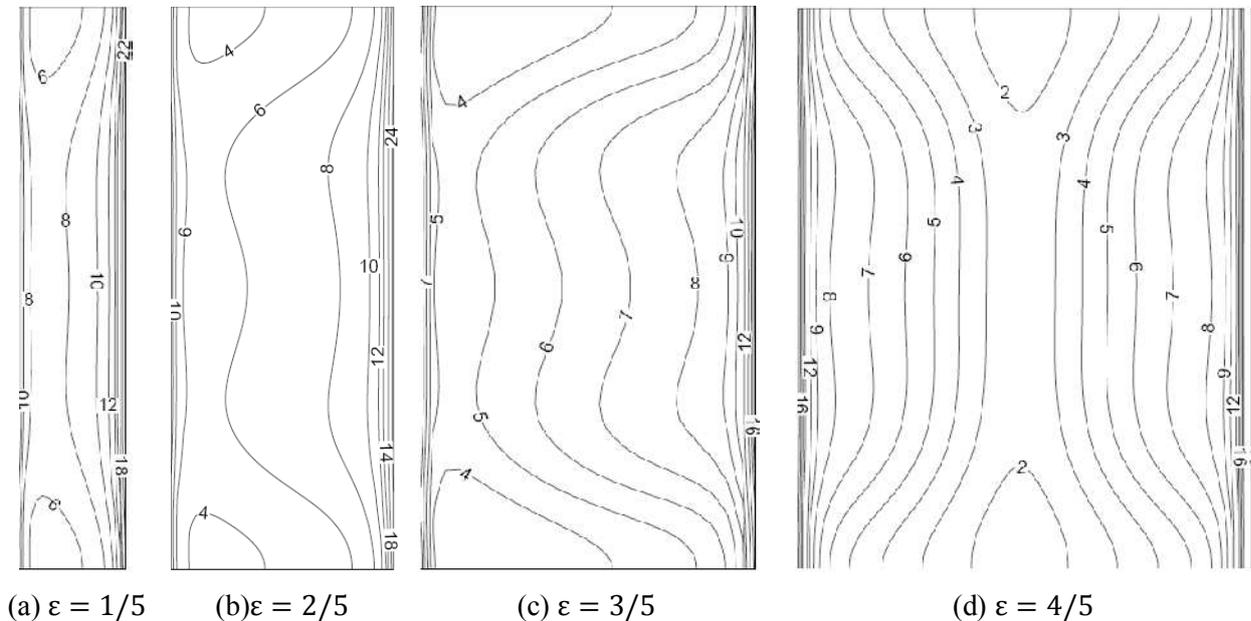


Figure IV.15 : Nombre de Nusselt local pour $Ri=5$ et différents ε

Nous récapitulons dans le tableau IV.5 les valeurs du nombre de Nusselt moyen pour les différentes tailles de la source de chaleur et pour une valeur du nombre de Richardson égale à cinq. Pour chaque taille de la source de chaleur ($\varepsilon \leq 0.72$), le transfert de chaleur des deux parois latérales ne s'effectue pas de la même intensité d'après les valeurs obtenues du nombre de Nusselt moyen, on voit clairement que la taille de la source a un impact sur le taux d'échange de chaleur.

Tableau IV.5 : Nombre de Nusselt moyen pour $Ri=5$ et différents ε

ε	1/5	2/5	3/5	4/5
Nu_{1moy}	1.775033	2.742381	3.107111	2.312161
Nu_{2moy}	0.251366	0.455445	0.816557	2.311537
Nu_{moy}	2.098556	3.144755	3.920562	4.629900

IV.5.3 Champs dynamique et thermique pour $Ri = 10$

Le champ dynamique est représenté dans la figure IV.16, pour des valeurs du nombre de Richardson élevés aucun changement n'est observé sur la structure d'écoulement pour $\varepsilon > 0.72$, par contre pour $\varepsilon \leq 0.72$, les solutions récupèrent leur symétrie et elles deviennent identiques à celle du cas ou $\varepsilon > 0.72$ dont l'écoulement est caractérisé par deux paires de cellules pour toutes les dimensions de la partie chauffée. La paire de cellules contrarotatives au centre de la cavité est principalement entretenue par les forces de flottabilité et la paire de cellules pincées près des parois verticales en mouvement entretenues par les forces de viscosité. Si on augmente le nombre de Richardson, les deux cellules près des parois se rétrécissent.

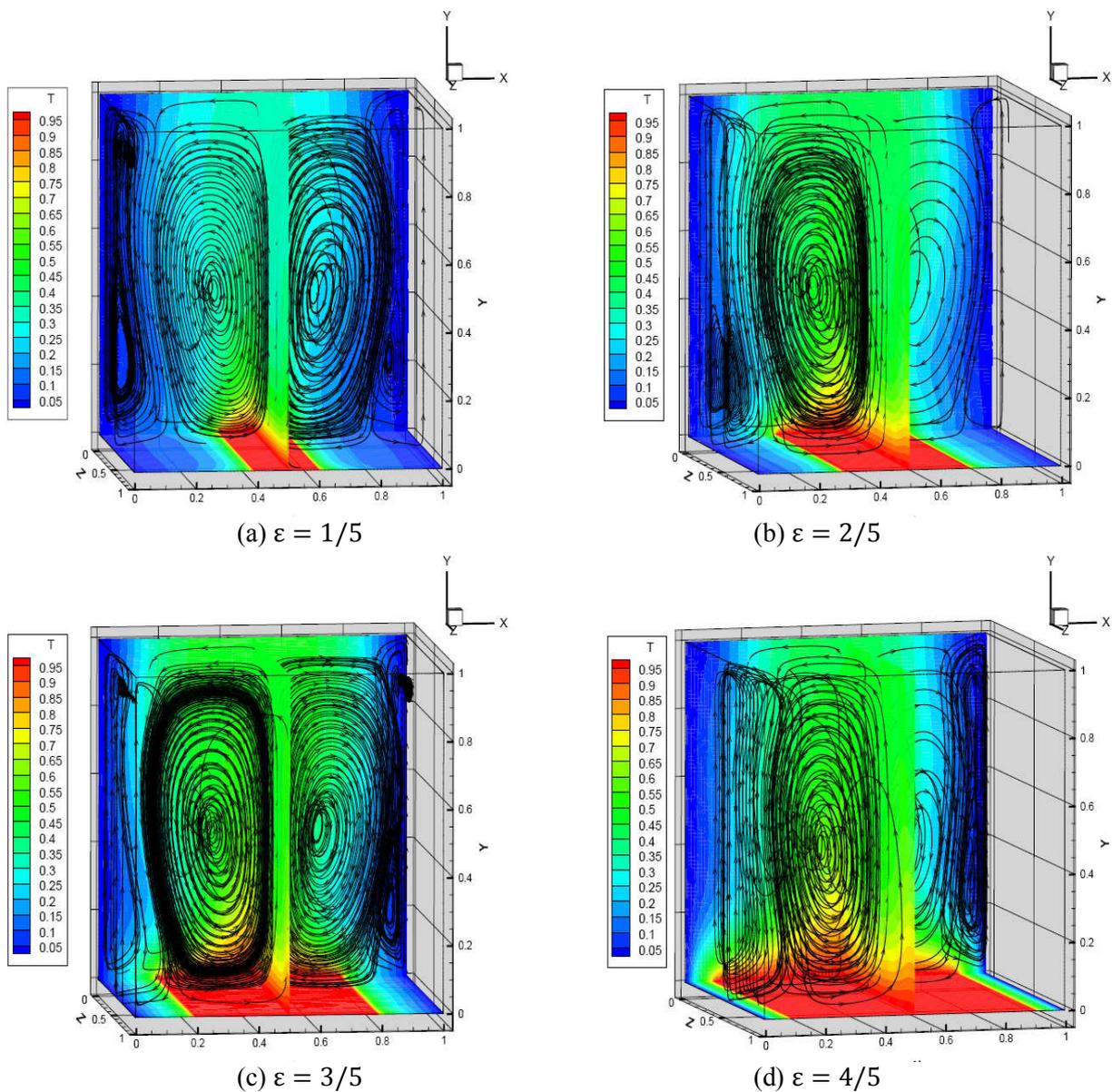


Figure IV.16 : Lignes de courant pour $Ri=10$ et différentes ε

Le champ thermique est représenté dans la même figure. La chaleur récupérée de la source chaude est transportée par convection vers le haut au milieu de l'enceinte par les cellules au centre. C'est ce qui explique que les températures sont relativement élevées dans la partie centrale de la cavité. La distribution de la température est proportionnelle à la taille de la partie chaude.

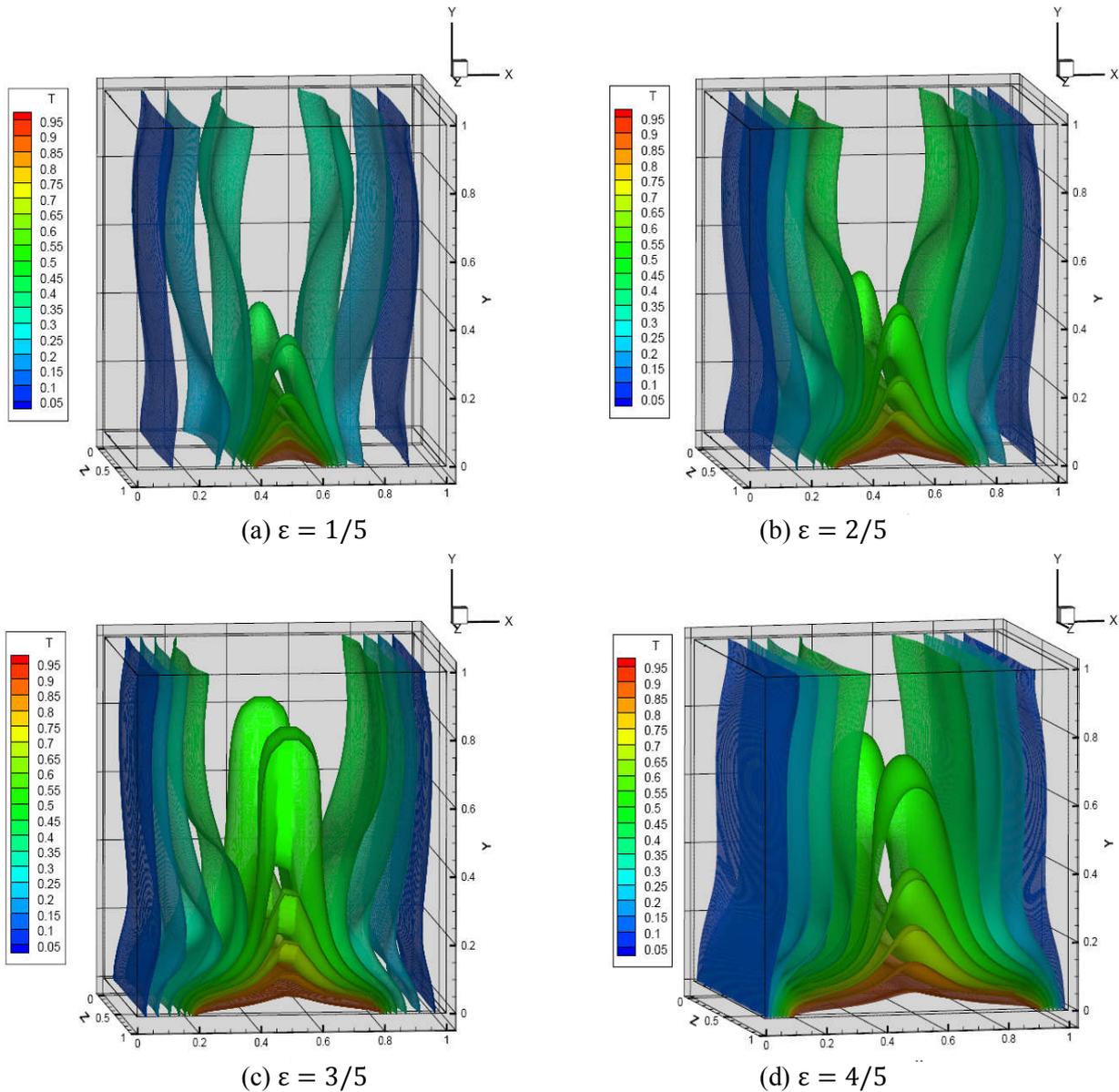


Figure IV.17 : Iso surface pour $Ri=10$ et différentes

La variation du nombre de Nusselt local le long de la partie chauffée est représentée dans la figure IV.18. Il est évident que l'augmentation du nombre de Richardson signifie un apport de chaleur dans la cavité et en conséquence intensifier le mouvement de fluide notamment aux extrémités de la partie chauffée caractérisée par l'augmentation du nombre de Nusselt moyen et local.

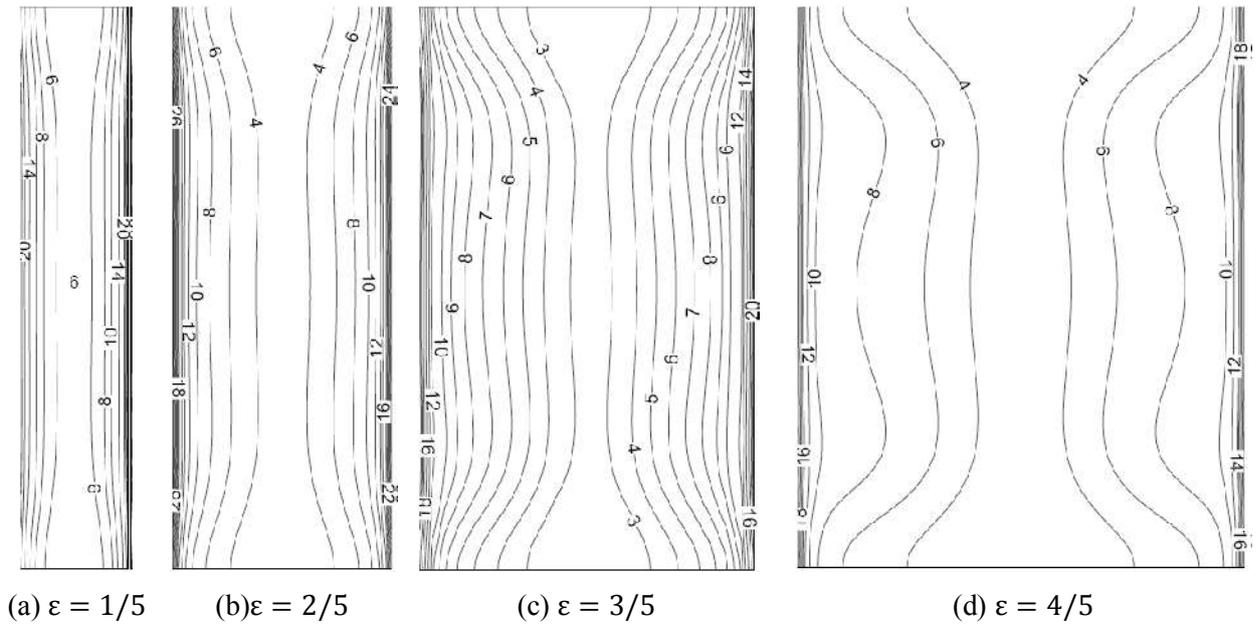


Figure IV.18 : Nombre de Nusselt locale pour $Ri=10$ et différentes ϵ

Afin de mieux quantifier le taux de transfert de chaleur sous l’effet du changement du mode de transfert par convection en fonction de la taille de la partie chauffée, les valeurs du nombre de Nusselt moyen sont mentionnées dans le tableau IV.6. D’après ces valeurs on remarque que l’effet de l’augmentation du nombre de Richardson est mineur sur la valeur du nombre de Nusselt moyen pour $\epsilon = 1/5$ (entre $Ri = 5$ et 10) et aussi pour $\epsilon = 4/5$ (entre $Ri = 0.1$ et 5).

Tableau IV.6 : Nombre de Nusselt moyen pour $Ri=10$ et différentes ϵ

ϵ	1/5	2/5	3/5	4/5
Nu_{1moy}	1.079667	1.677789	2.109048	2.715676
Nu_{2moy}	1.078683	1.672035	2.052926	2.715675
Nu_{moy}	2.158247	3.350888	4.163911	5.432451

La figure IV.19 représente l’évolution du nombre de Nusselt moyen en fonction de la taille de la partie chauffée, Le transfert thermique évolue comme une fonction croissante avec le nombre de Richardson et la largeur de la source de chaleur, ce résultat est tout à fait en parfait accord avec ceux obtenus par S. Sivasankaran et al [51] et Sivakumar [52]

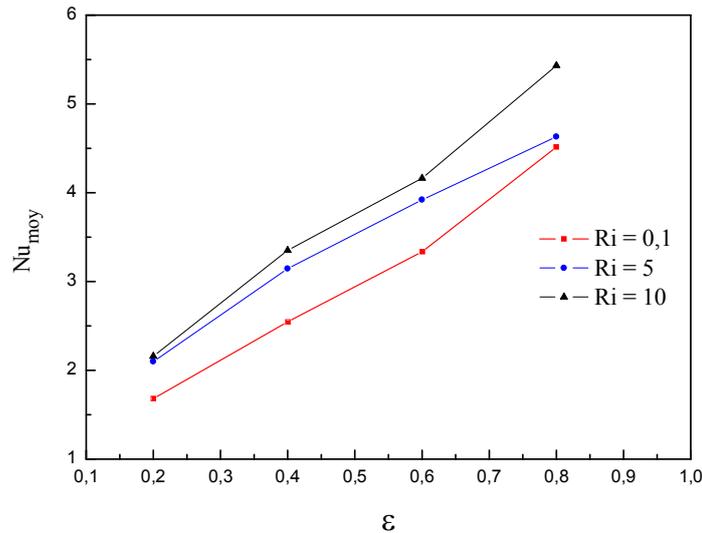


Figure IV.19 : Nombre de Nusselt moyen en fonction de dimension de la partie chauffée

IV.5.4 Conclusion

Les lignes de courant et les iso surface de température correspondent à la plage de la convection forcée sont identiques pour toutes les valeurs de ϵ (Il est important de noter que la largeur de la partie chauffée a une influence mineure sur la distribution des isothermes et n'a pas d'influence sur les lignes de courant pour les petites valeurs de Ri). Donc l'écoulement est dirigé par le mécanisme des forces de cisaillements. Ce résultat est en parfait accord avec ceux obtenus par Khalil Khanafer et Ali Chamkha [53] qu'ils ont remarqués que le mécanisme du transfert de chaleur et les caractéristique de l'écoulement dépend du nombre de Richardson et que la présence d'une source de chaleur influe sur le comportement des isothermes et son influence est mineur sur les le comportement des lignes de courant pour des petite valeurs du nombre de Richardson.

L'analyse des résultats obtenus, pour $Ri = 10$ où l'effet de la convection naturelle est dominant montre que le structure de l'écoulement est la même pour les différentes tailles de la partie chauffée et elle préserve une symétrie par rapport à $X = 0.5$ car les conditions aux limites sont symétriques.

Bien que la structure de l'écoulement pour $Ri = 5$ (convection mixte) est asymétrique pour $\epsilon = 1/5, 2/5$ et $3/5$ et les forces de poussées et de cisaillement sont comparables et les isothermes sont plus denses près de la paroi gauche de la cavité, une symétrie est observée pour le cas de $\epsilon = 4/5$ et le structure de l'écoulement est identique à $Ri = 10$ donc les forces de flottabilités dominant et dirigent l'écoulement.

IV.6 EFFET DE LA DIRECTION DES PAROIS MOBILES

Dans cette partie, il est intéressant d'étudier l'influence de la direction des parois latérales mobiles sur le comportement de l'écoulement et le transfert de chaleur. Nous avons examiné l'effet de la direction des parois latérales sur le comportement de l'écoulement et le transfert de chaleur pour les mêmes valeurs du nombre de Richardson (0.1, 5 et 10). L'étude est effectuée pour le cas où la partie chauffée égale à 3/5.

IV.6.1 Champs dynamique et thermique pour $Ri=0.1$

La distribution de la température ainsi que les lignes de courant pour les deux différentes cas de la direction des vitesses des parois latérales étudiés ((a) ascendantes et (b) descendantes) sont illustrés dans la figure IV.20

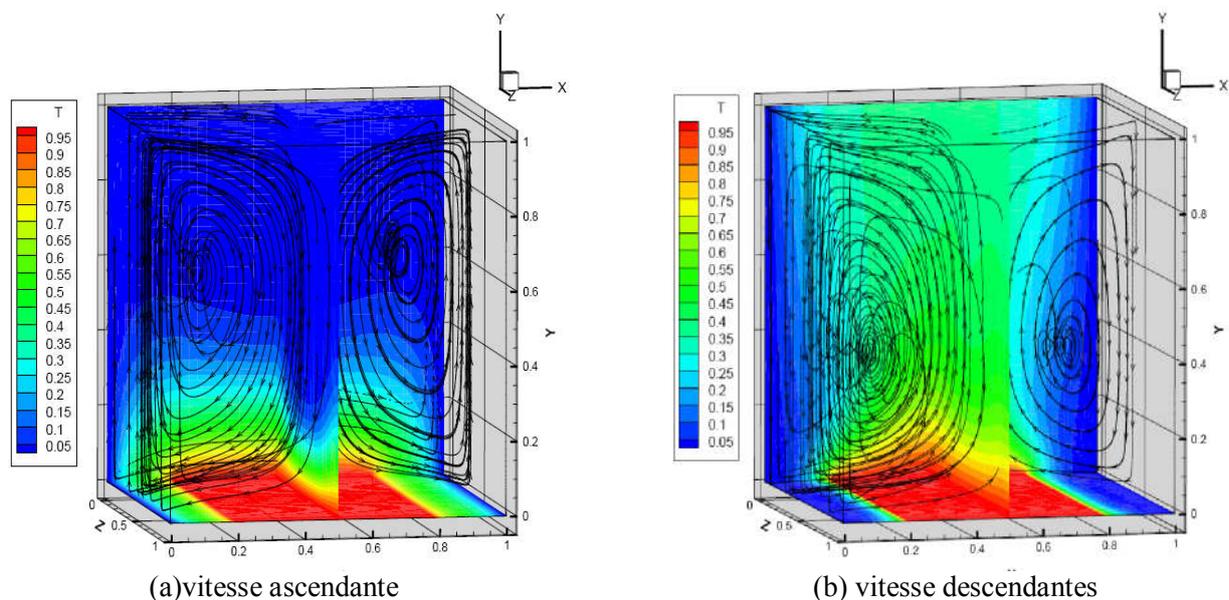


Figure IV.20 : Ligne de courant et champs thermique pour $Ri=0.1$

Nous remarquons pour les deux cas que la solution présente un écoulement symétrique caractérisée par une paire de zone de recirculation contrarotative dans des sens contraire (direction horaire pour la cellule gauche et anti horaire pour la cellule droite) dans la vitesse des parois sont ascendantes et inversement dans le cas des vitesses descendantes des parois latérales. Nous constatons que les lignes de courants sont insensibles à la direction des parois mobiles pour des faibles valeurs du nombre de Richardson (convection forcée dominante).

En fait pour le cas des vitesses ascendantes les faibles flux de chaleur récupérés, par le fluide, de la source chaude sont directement évacués à travers la partie inférieure des parois

verticales mais pour le cas des vitesses descendantes la direction des parois influe sur les forces de flottabilité qui jouent un rôle sur la distribution de la température dans la partie supérieure de la cavité, ce résultat est tout à fait en parfait accord avec ceux obtenus par Guo et Sharif [49] qui ont remarqué que pour les petites valeurs de Ri , la température est uniformément distribuée à l'intérieure de l'enceinte et une large section de la cavité est affectée par la source de chaleur.

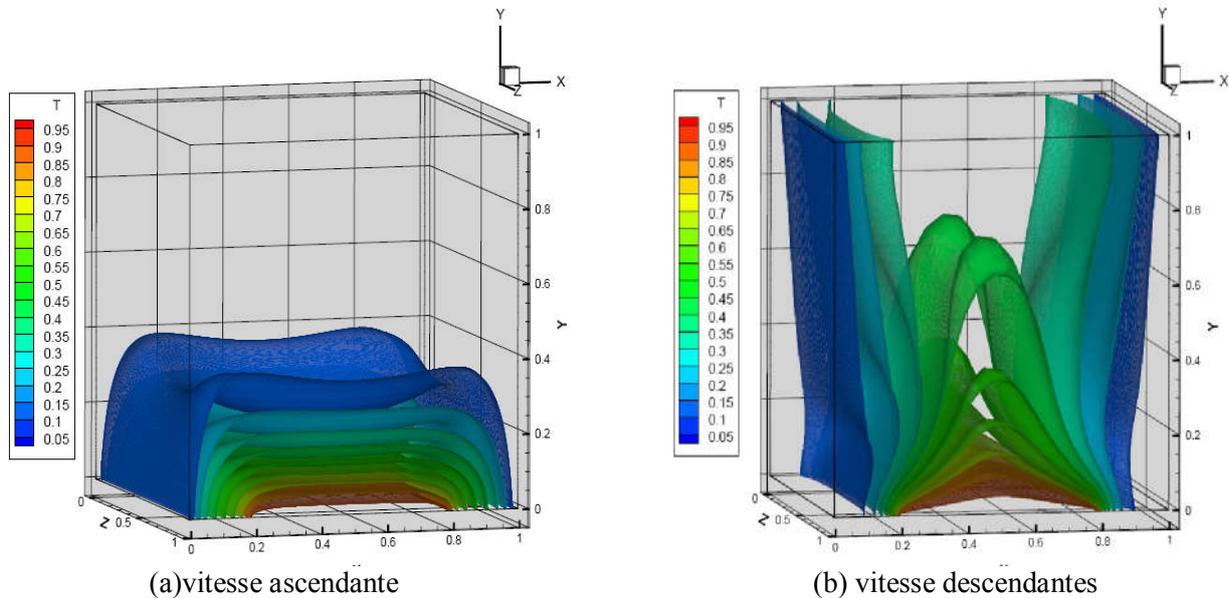


Figure IV.21 : Iso surfaces de température pour $Ri=0.1$

Tableau IV.7 : Nombre de Nusselt moyen pour $Ri=0.1$

Direction parois	ascendantes	descendantes
Nu_{1moy}	1.712890	1.9791570
Nu_{2moy}	1.621203	1.9383620
Nu_{moy}	3.334587	3.9187860

Le tableau IV.7 représente les valeurs du nombre de Nusselt moyen calculé pour les deux différentes directions des parois latérales dont la valeur de ce dernier est plus important pour le cas où le mouvement des parois mobiles se déplace dans le même sens de la gravité (convection favorable).

IV.6.2 Champs dynamique et thermique pour $Ri=5$

La figure IV.22 montre la distribution des champs dynamique et thermique pour un nombre de Richardson égale à 5. Nous constatons que l'écoulement est caractérisé par une perte de symétrie pour le cas des parois ascendante (la direction des parois sont opposés à la direction

de la gravité) dont deux cellules contrarotatives de différentes formes et intensités sont observées, la première à gauche antihoraire, occupant les deux tiers de la cavité et la deuxième à droite horaire occupe un tiers de la cavité. Pour le cas où la gravité est dans la même sens avec la direction des parois latérales, le fluide chauffé par la paroi inférieure se déplace vers la paroi supérieure adiabatique, où il se divise en deux flux, l'un se dirige vers la paroi froide gauche et l'autre se dirige vers la paroi froide droite qui aident la particule de fluide a se déplace vers le bas donc l'écoulement est symétrique et caractérisé par deux cellules contrarotatives des mêmes formes et intensités et la répartition de la température est caractérisée essentiellement par l'augmentation de la zone affectée par la température pour les deux cas et une perte de symétrie pour le cas des parois ascendantes.

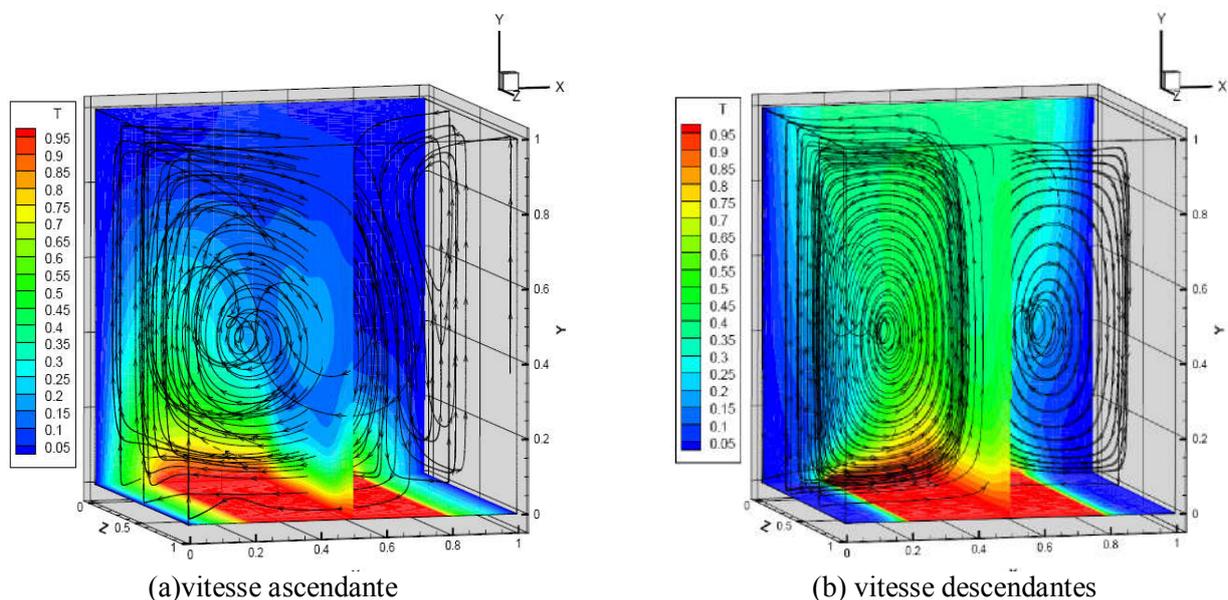


Figure IV.22 : Ligne de courant et champs thermique pour $Ri=5$

La figure IV.23 présente la répartition des iso surface dans la cavité pour $Ri = 5$, Nous remarquons que la répartition de la température dans la cavité est caractérisée principalement par une dissymétrie pour le cas (a), La zone ou la température est élevée occupe environ deux tiers de la cavité à gauche s'explique par un transfert de chaleur par convection pour le premier cas (a). Il est à noter que pratiquement toute la chaleur récupérée de la source chaude est évacuée à travers la paroi gauche et le gradient de température normal à la paroi droite est pratiquement nul pour ce cas. Pour le cas (b) les iso surfaces de température sont insensible à la variation du nombre de Richardson pratiquement le même profil que pour $Ri = 0.1$ seulement la zone affectée par le transfert de chaleur est plus importante.

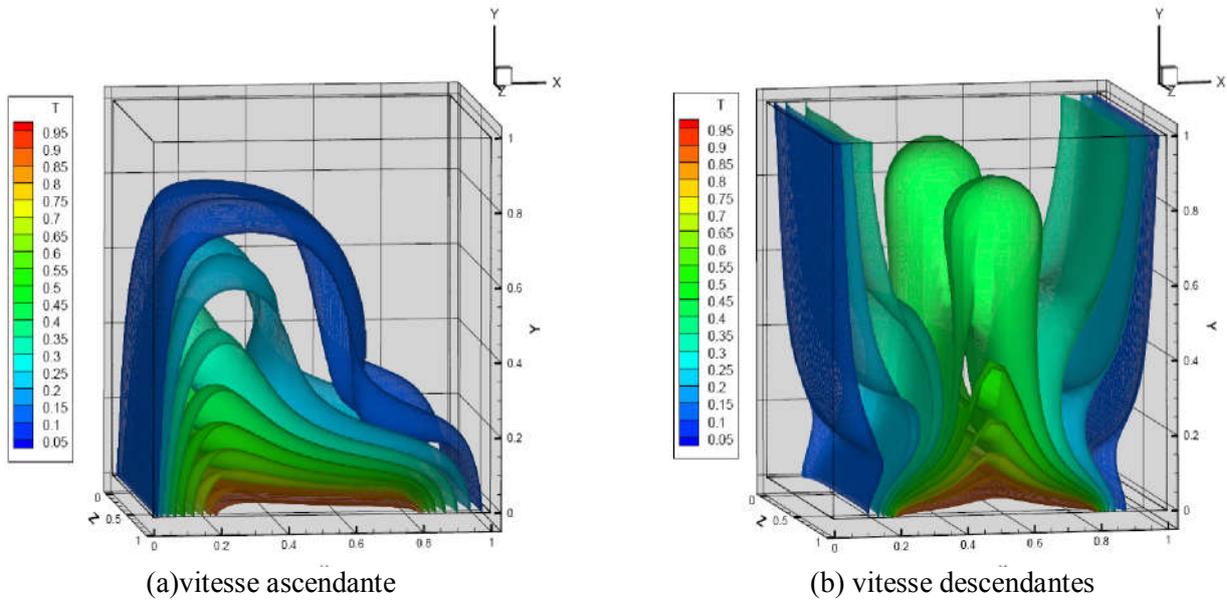


Figure IV.23 : Iso surfaces de température pour $Ri=5$

Le tableau IV.8 montre la performance thermique des deux cas étudiés pour un nombre de Richardson égale à Cinq qui peut être quantifiée par la comparaison des nombres des Nusselt moyens des deux différentes directions considérer. On voit que le meilleur transfert de chaleur est obtenu pour le cas où le mouvement des parois mobiles ce déplace dans le même sens de la gravité (convection favorable). Les nombres de Nusselt moyen des deux cas étudiés augmentent avec l'augmentation du nombre de Richardson.

Tableau IV.8 : Nombre de Nusselt moyen pour $Ri=5$

Direction parois	ascendantes	descendantes
Nu_{1moy}	3.1071110	2.555264
Nu_{2moy}	0.8165577	2.537587
Nu_{moy}	3.9205562	5.093792

IV.6.3 Champs dynamique et thermique pour $Ri=10$

Nous avons remarqués que le comportement dynamique pour les cas (b) est qualitativement le même et qu'est insensible à la variation du nombre de Richardson. L'écoulement est caractérisé par deux cellules contrarotatifs de même forme est taille dont le sens de rotation est opposé donc il est clair que l'augmentation du nombre de Richardson n'influe pas sur la structure des lignes de courant pour ce cas comme il est présenté dans la figure IV.24 dont ces deux cellules sont entretenue par les forces visqueux et de flottabilités qui

sont dans la même direction, par contre pour le cas (a) l'écoulement est caractérisé par deux paires de cellules. La paire de cellules contrarotatives au centre de la cavité est principalement entretenue par les forces de flottabilité et la paire de cellules pincées près des parois verticales en mouvement entretenues par les forces de viscosité qui sont opposés à la gravité.

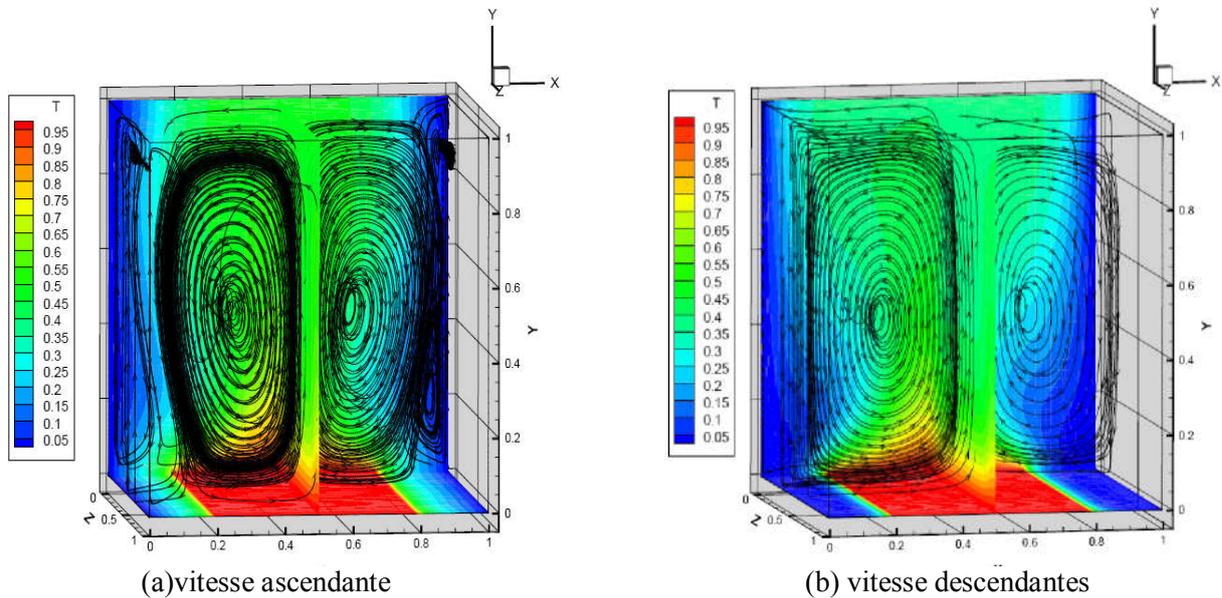


Figure IV.24 : Ligne de courant et champs thermique pour $Ri=10$

La figure IV.25 montre la distribution des iso surfaces de température dans l'enceinte pour $Ri = 10$.

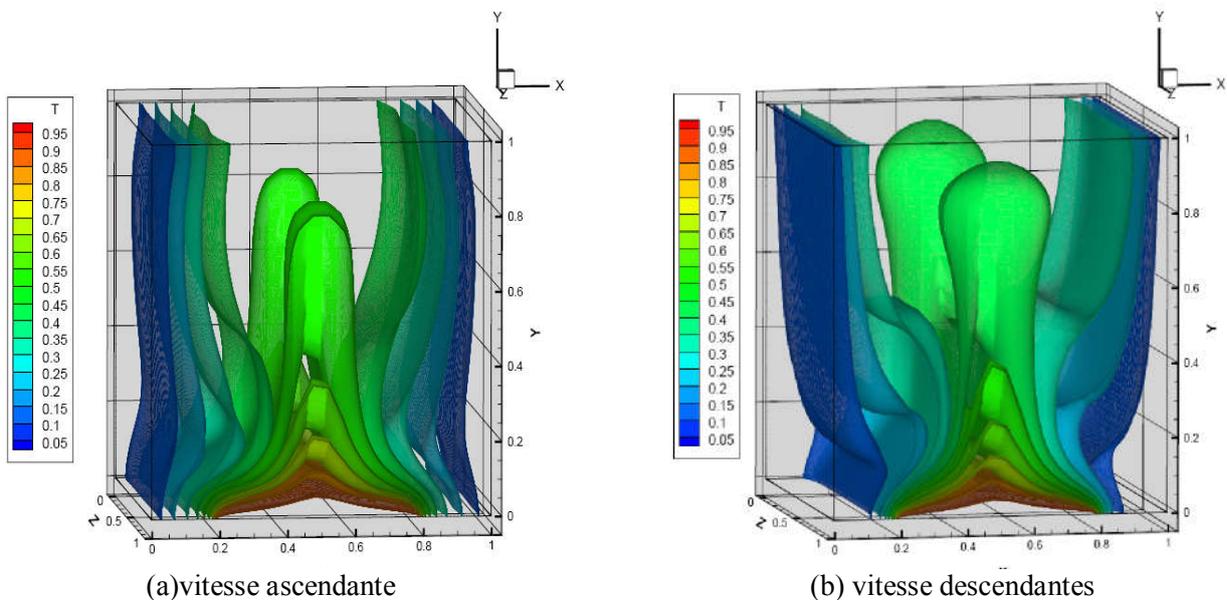


Figure IV.25 : Iso surfaces de température pour $Ri=10$

Malgré que les caractéristiques de iso surface pour le cas (a) sont qualitativement similaire au cas (b) la zone affectée par le transfert de chaleur dans la partie supérieure de l'enceinte est

plus important dans le cas (b) que dans le cas (a), donc pour les deux cas l'effet des forces de flotabilités augmentent la quantité de fluide affecter par la temperature au centre de la cavité.

Tableau IV.9 : Nombre de Nusselt moyen pour $Ri=10$

Direction parois	ascendantes	descendantes
Nu_{1moy}	2.109048	2.849647
Nu_{2moy}	2.052926	2.830399
Nu_{moy}	4.163911	5.681009

La figure IV.26 présente l'évolution du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Richardson pour les deux cas de la direction des vitesses des parois latérales.

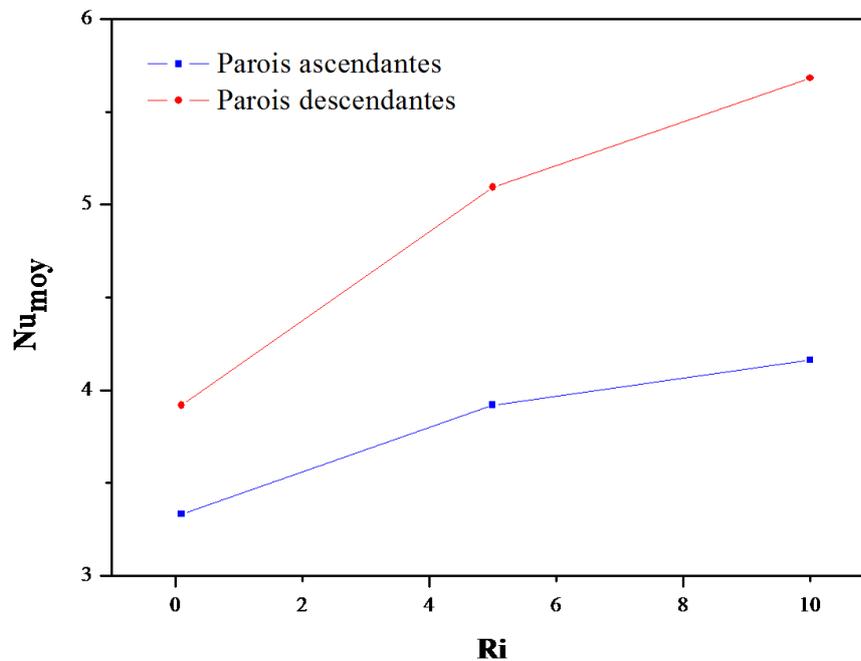


Figure IV.26 : Nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Richardson

La performance thermique des différents cas des directions des parois latérales considérées peut être quantifiée par la comparaison des nombres des Nusselt moyens de ces derniers pour les deux cas étudiés. On voit que le meilleur transfert de chaleur est réalisé dans le cas où la direction des parois latérales est descendante.

La variation du nombre de Nusselt moyen est proportionnel au nombre de Richardson et l'écart entre les deux cas étudiés est aussi proportionnel à l'augmentation du nombre de Richardson.

IV.6.4 Conclusion

Le transfert par convection mixte est un phénomène complexe à cause de l'interaction entre la force de flottabilité et la force de cisaillement, le phénomène le plus important dans le processus de convection mixte est l'effet de la poussée sur la vitesse de convection forcée. Cela dépend de leurs directions respectivement par rapport à la force d'inertie, les forces de flottabilité peuvent aider ou s'opposer à l'écoulement forcé causant une augmentation ou une diminution des taux de transfert de chaleur.

Les lignes de courant et les isothermes sont insensibles à la variation du nombre de Richardson pour le cas des vitesses des parois sont descendante mais ce n'est pas le cas pour la direction ascendante.

L'augmentation du nombre de Nusselt moyen est proportionnelle à l'augmentation du nombre de Richardson pour les deux cas étudiés mais le transfert de chaleur est plus amélioré pour le deuxième cas.

Les résultats obtenus montrent que les caractéristiques de l'écoulement et la quantité du transfert de chaleurs sont fortement affectés par la direction des parois mobiles. Ce résultat est toute à fait d'accord avec les résultats obtenue par Monisha Roy et al [54] pour le cas bidimensionnelle et Ahmed Kadhim Hussein [27] pour le cas d'une enceinte triangulaire tridimensionnelle.

L'augmentation du nombre de Nusselt moyen est proportionnel à l'augmentation du nombre de Richardson pour les deux cas etudies et sa valeur est plus importante dans le cas des vitesse descendantes.

Les résultats montrent qu'il y a des valeurs critiques du nombre de Richardson influent sur les paramètres de la convection, ces valeurs dépendent de la direction des parois mobiles

IV.7 EFFET DE LA NATURE DE FLUIDE (NOMBRE DE PRANDTL)

Afin d'avoir une étude paramétrique plus complète, nous avons analysés l'influence de la nature de fluide utilise donc le paramètre clé dans cette partie est le nombre de Prandtl. Pour voir l'influence du nombre de Prandtl, on a comparé le galium ($Pr = 0.021$) avec l'air ($Pr = 0.71$), l'eau ($Pr = 6.8$) et on a choisi une grande valeur de Prandtl qui existe dans la littérature ($Pr = 30$) T.S. Cheng [55]. Afin de vérifier l'effet de ce dernier sur le comportement des lignes de courants, les isothermes et la variation du nombre de Nusselt moyen calculé le long de la

paroi chaude en fonction du nombre de Richardson pour ces quatre fluides, pour minimiser le temps de calcul et avoir une convergence des solution les plus vite possible notamment pour les cas des nombres de Richardson et Prandtl élevés (convection naturel et fluide lourd), les calculs sont effectués pour le cas où la partie chauffée égale à $1/5$.

IV.7.1 Champs dynamique et thermique pour $Ri=0.1$

Nous présentons sur la figure IV.27 le champ thermique et dynamique pour les quatre valeurs du nombre de Prandtl (0.021, 0.71, 6.8 et 30), les champs dynamiques pour un nombre de Richardson égale à 0.1 sont caractérisés par deux cellules contrarotatif la cellule droite anti horaire et gauche horaire pour les différents nombres de Prandtl considérés donc la nature de fluide utilisé n'influe pas sur les lignes de courant quand la convection forcée est dominante.

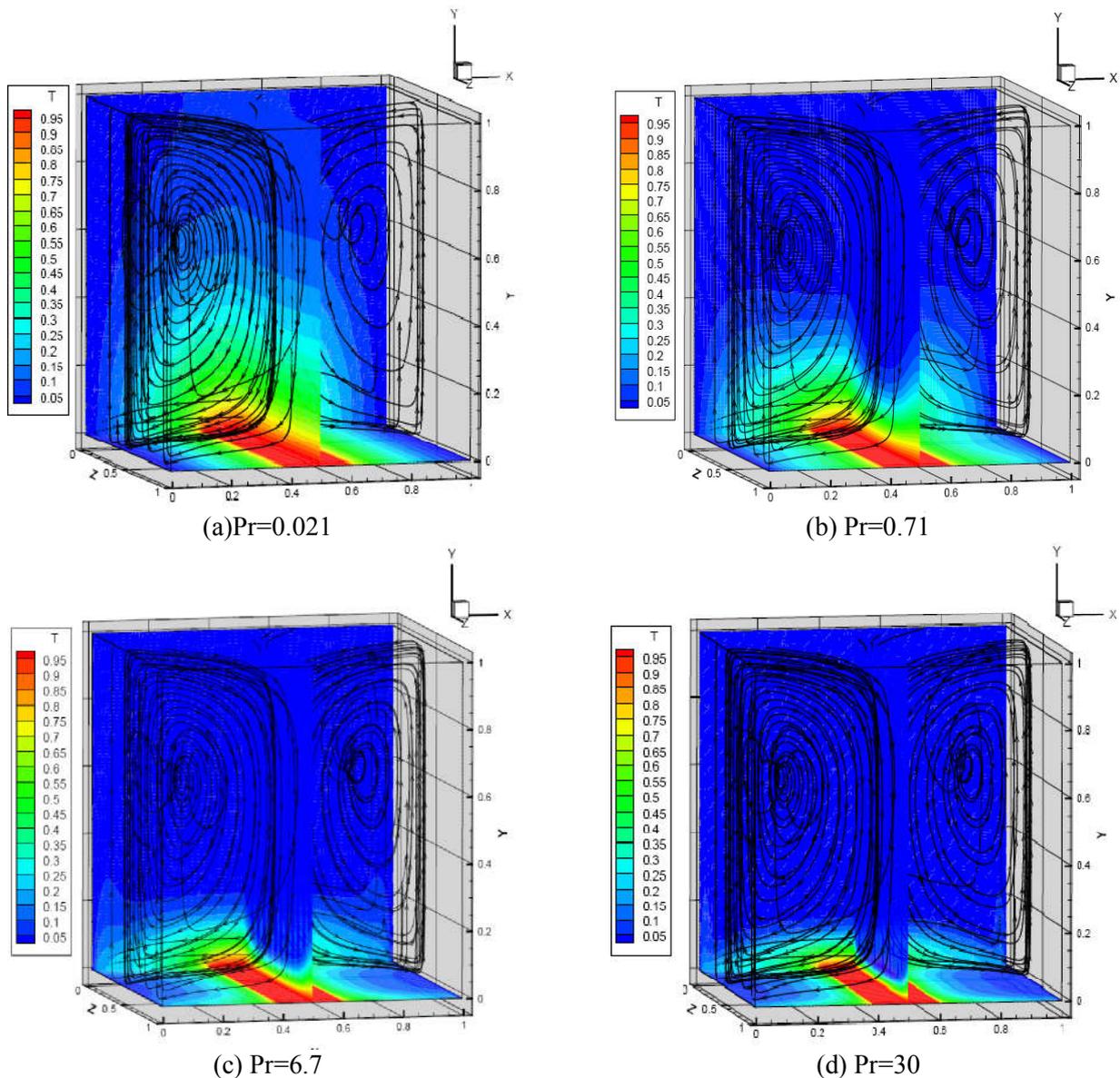


Figure IV.27 : Lignes de courant et champs thermique pour $Ri=0.1$

Il est intéressant d'observer que l'intensité de l'écoulement est réduite pour les grandes valeurs de Pr due à la faible intensité des forces de flottabilité car une large section de la cavité est occupée par des iso surfaces de température froides. Ces résultats sont tout à fait cohérents avec ceux obtenus lors d'une étude préalable dans les Milieu poreux faite par Tanmay Basak et al [56].

Sur la figure IV.28 les iso surfaces de température pour les différents nombres de Prandtl sont présentées, On observe que la partie affecté par le transfert de chaleur augmente quand le nombre de Prandtl diminue ainsi que la distance entre les iso surfaces de température est plus importante pour les petites valeurs de Pr . Nous remarquons qu'une stratification thermique existe près de la partie chauffée et que son intensité est proportionnel à la valeur du nombre de Prandtl.

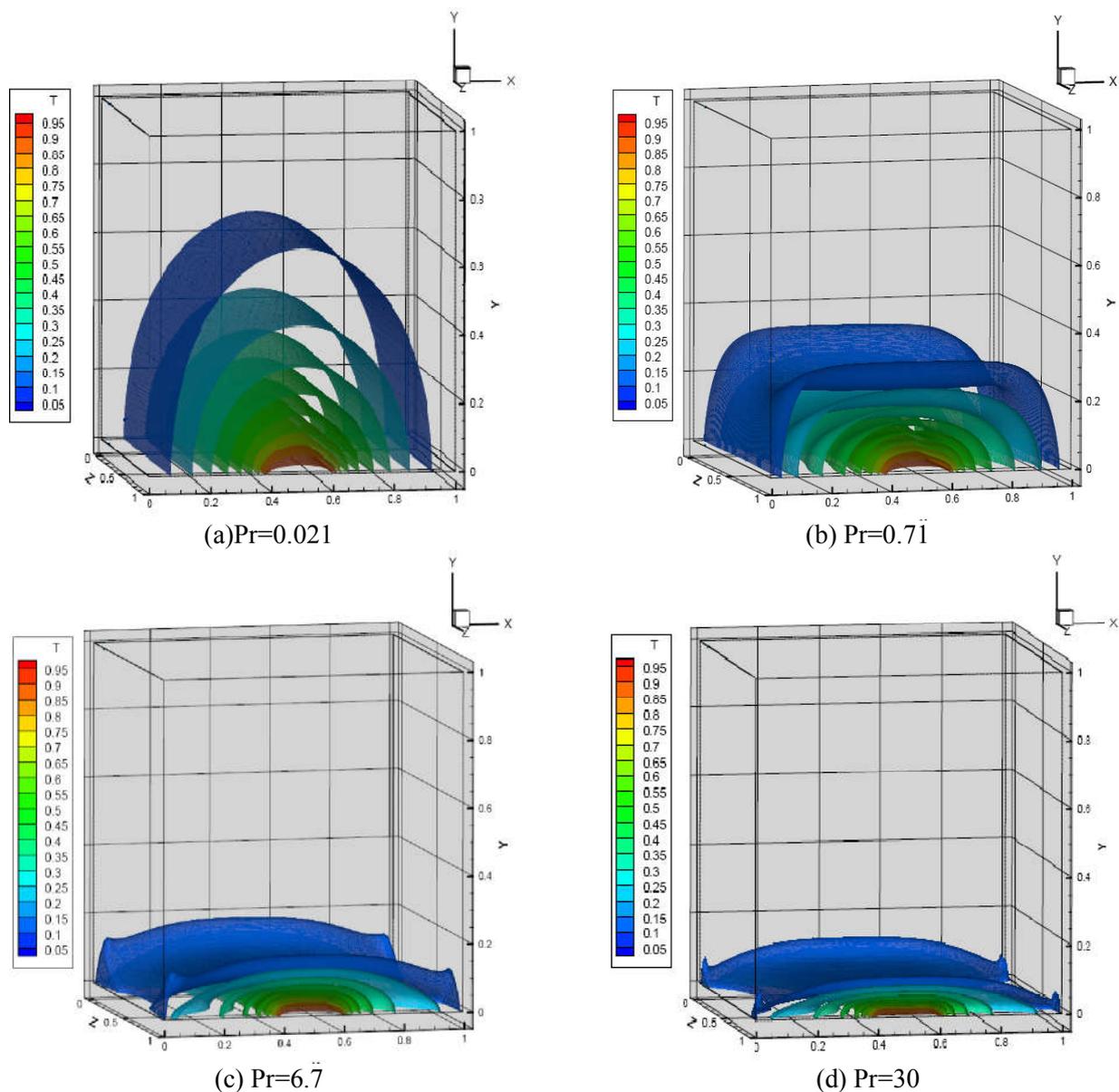


Figure IV.28 : Iso surfaces de température pour $Ri=0.1$

Le tableau IV.10 présente les différentes valeurs du nombre de Nusselt moyen pour un nombre de Richardson égale à 0.1, il est clair que l'augmentation du taux du transfert de chaleur est proportionnel à l'augmentation du nombre de Prandtl.

Tableau IV.10 : Nombre de Nusselt moyen pour $Ri=0.1$ et différents Pr

Pr	0.021	0.71	6.8	30
Nu_{1moy}	0.620342	1.071667	1.470463	2.443131
Nu_{2moy}	0.635547	1.071683	1.526308	2.336045
Nu_{moy}	1.255975	2.145247	3.041121	4.757626

IV.7.2 Champs dynamique et thermique pour $Ri=5$

Sur la figure IV.29, on présente le champ thermique avec les lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de Prandtl, l'augmentation des forces de flottabilité caractérisées par l'augmentation du nombre du Richardson montre un nouveau type d'écoulement pour le cas de galium ($Pr = 0.021$), deux petites cellules sont localisées au centre de la paroi inférieure qui occupent un quart de la cavité et deux grandes cellules qui occupent presque trois quarts de l'enceinte, une dissymétrie thermique et dynamique caractérise l'écoulement pour les cas de l'air et l'eau ($Pr = 0.71$ et 6.8), par contre toujours deux cellules contrarotatives caractérisent l'écoulement pour une valeur de $Pr = 30$.

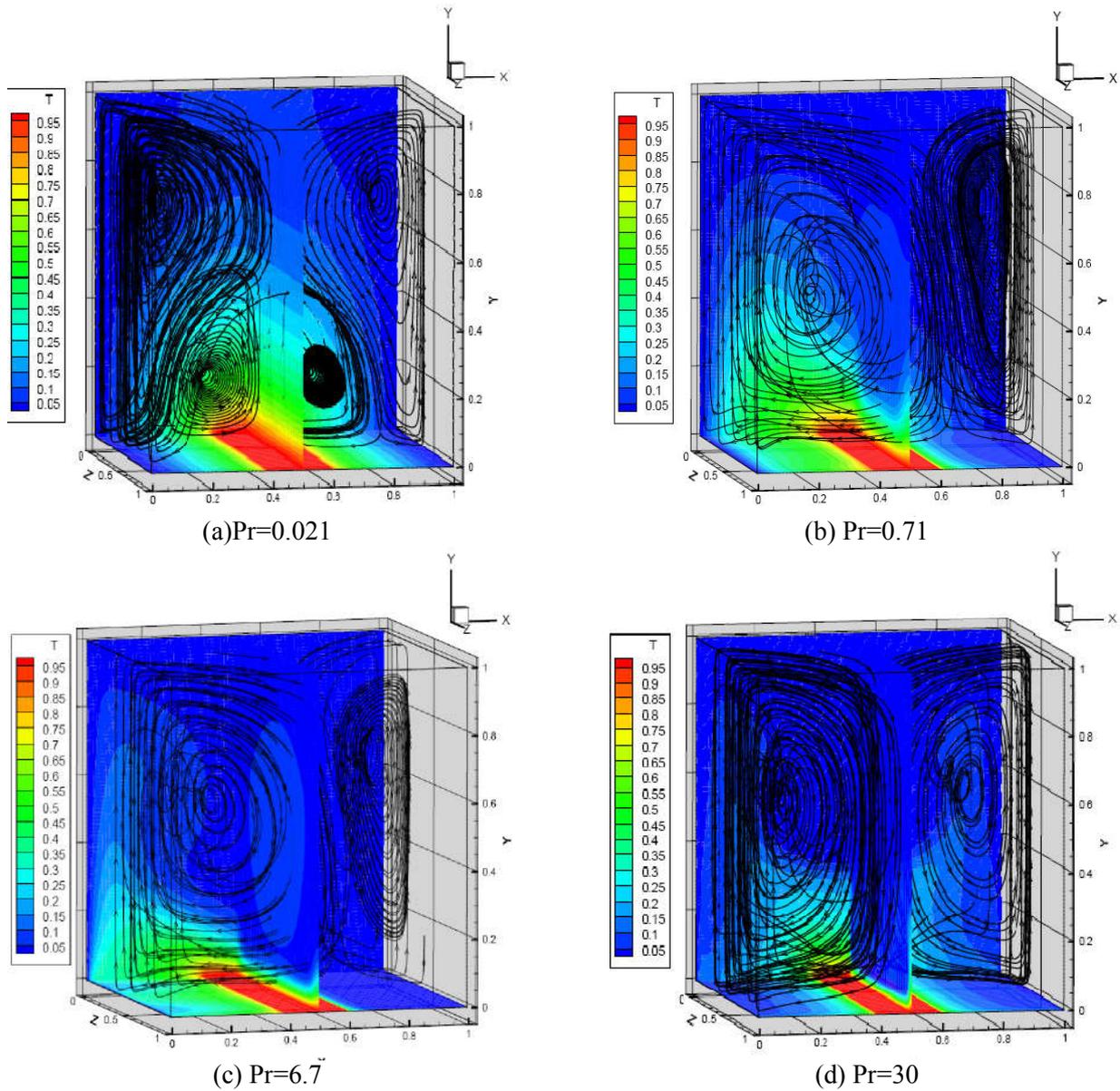


Figure IV.29 : Lignes de courant et champs thermique pour $Ri=5$

L'effet de l'augmentation du nombre de Richardson sur la distribution des iso surfaces de température est négligeable pour le cas (a), due à la densité élevée du fluide utilisés dans le cas (c) et (d) l'influence des force de flotabilités sur la zone affectée par la température est mineur et elle est plus importante près des parois adiabatiques.

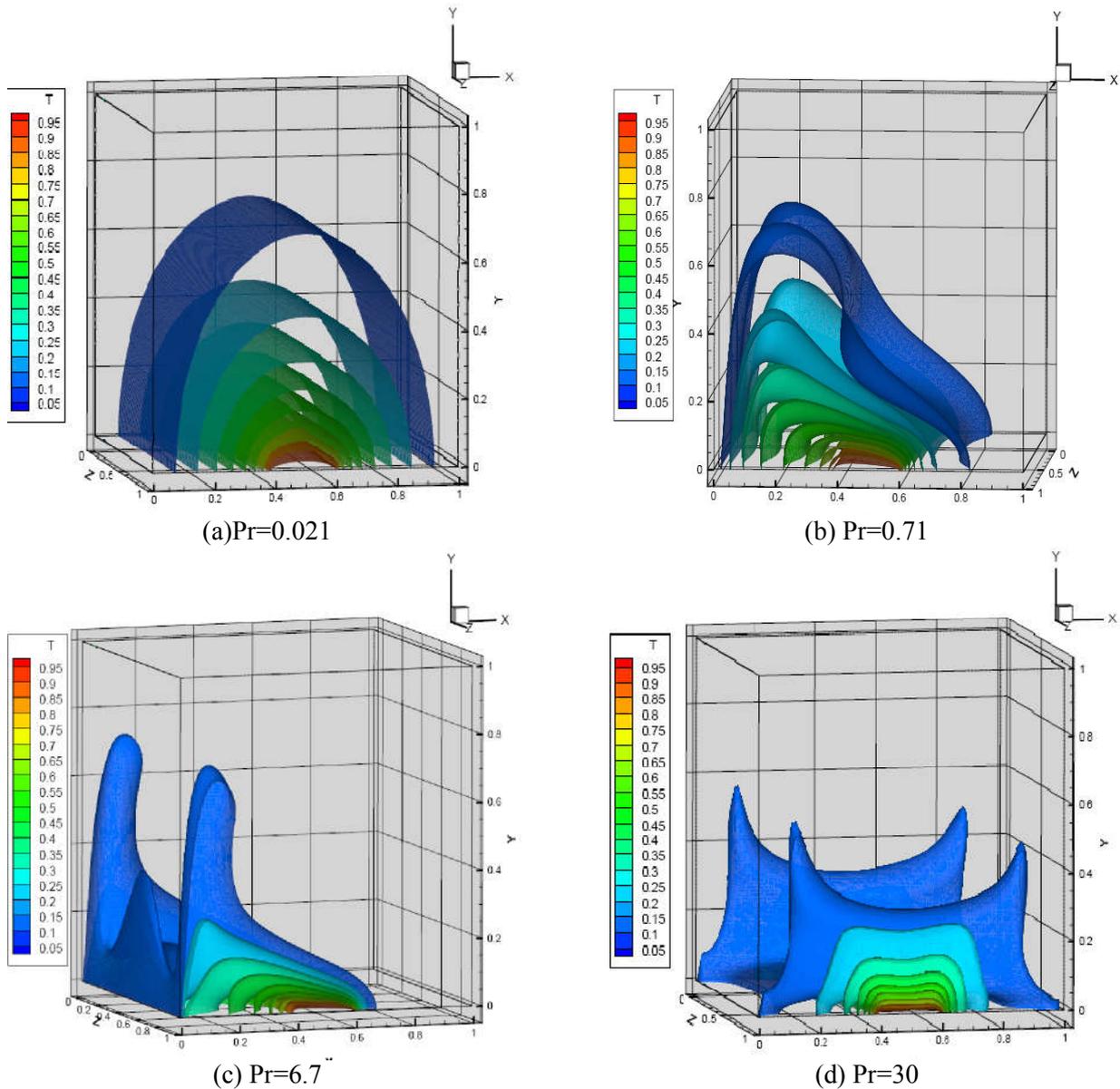


Figure IV.30 : Iso surfaces de température pour $Ri=5$

Tableau IV.11 : Nombre de Nusselt moyen pour $Ri=5$ et différents Pr

Pr	0.021	0.71	6.8	30
Nu_{1moy}	0.635510	1.93829	3.997563	2.086804
Nu_{2moy}	0.619643	0.22726	2.989147	1.68106
Nu_{moy}	1.255247	2.15337	4.116547	5.529458

Le tableau IV.11 montre les différentes valeurs du nombre de Nusselt moyen pour les différents fluides utilisés pour un nombre de Richardson égal à cinq. Il est remarquable que l'augmentation du nombre de Richardson n'a aucune influence sur le nombre de Nusselt moyen pour le cas du galium.

IV.7.3 Champs dynamique et thermique pour $Ri=10$

Au fur et à mesure que la taille des petites cellules au centre de la cavité augmentent du bas vers le haut avec l'augmentation du nombre de Richardson qui devient les cellules principales de l'écoulement, le volume des cellules près des parois mobiles diminue pour le cas (a) donc l'effet des forces de flottabilité domine l'écoulement.

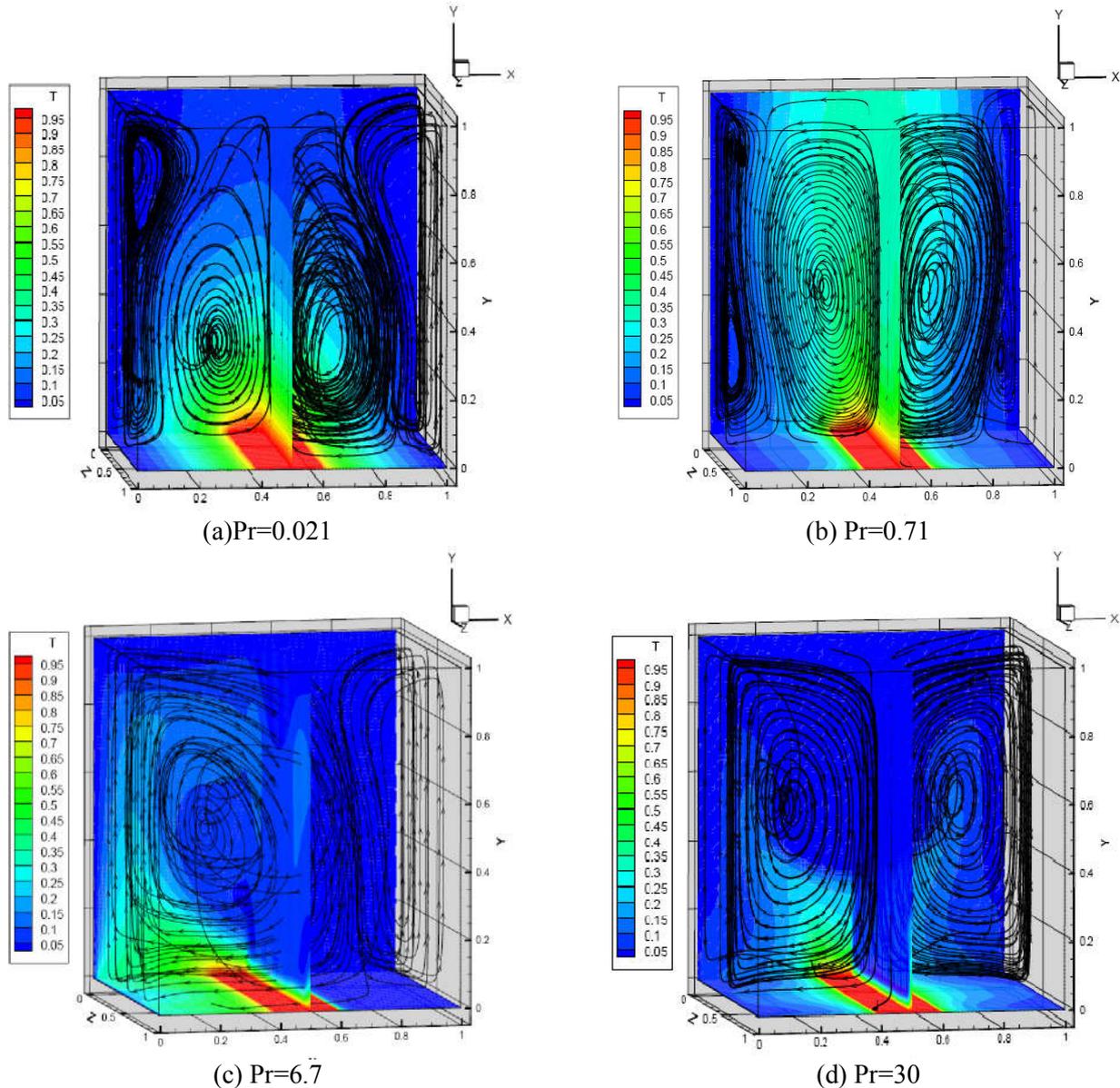


Figure IV.31 : Lignes de courant et champs thermique pour $Ri=10$

En augmentant le nombre de Richardson la structure de l'écoulement devient équivalente à l'écoulement du cas (b) qui est composée de deux grande cellules au centre de la cavité et deux petites cellules pincées vert les parois mobiles, Il est clair que les lignes de courant sont insensible au changement du nombre de Richardson pour le cas (d).

L'analyse des résultats des iso surfaces de température montre que l'écoulement est plus stratifié pour les grands valeurs du nombre de Prandtl et que le transfert de chaleur s'intensifie essentiellement près de la partie chauffée et que le nombre de Richardson n'a aucun influence sur la forme géométrique de la structure des iso surface de température pour le cas (a) dont le fluide utilisé est du galium.

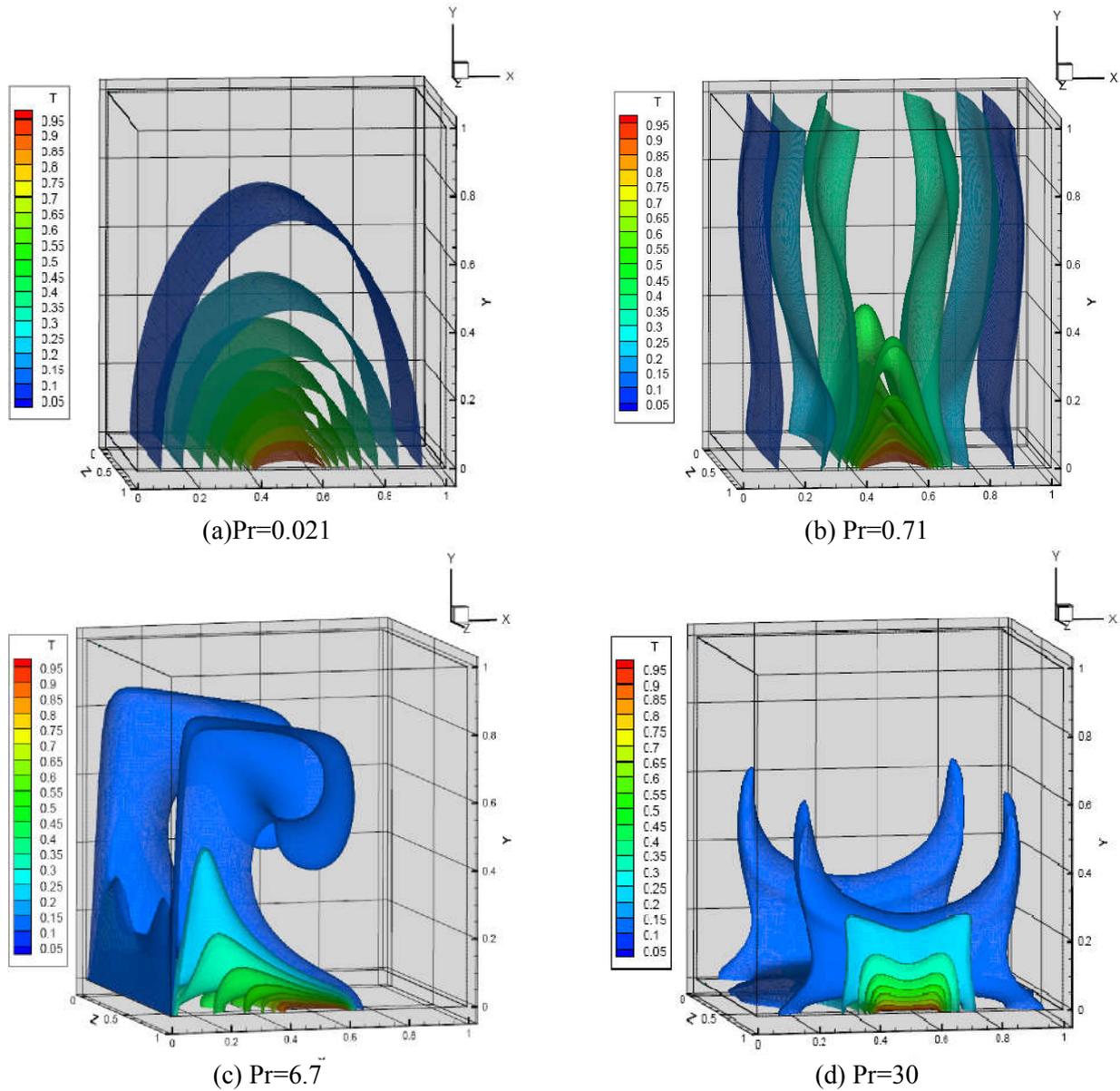


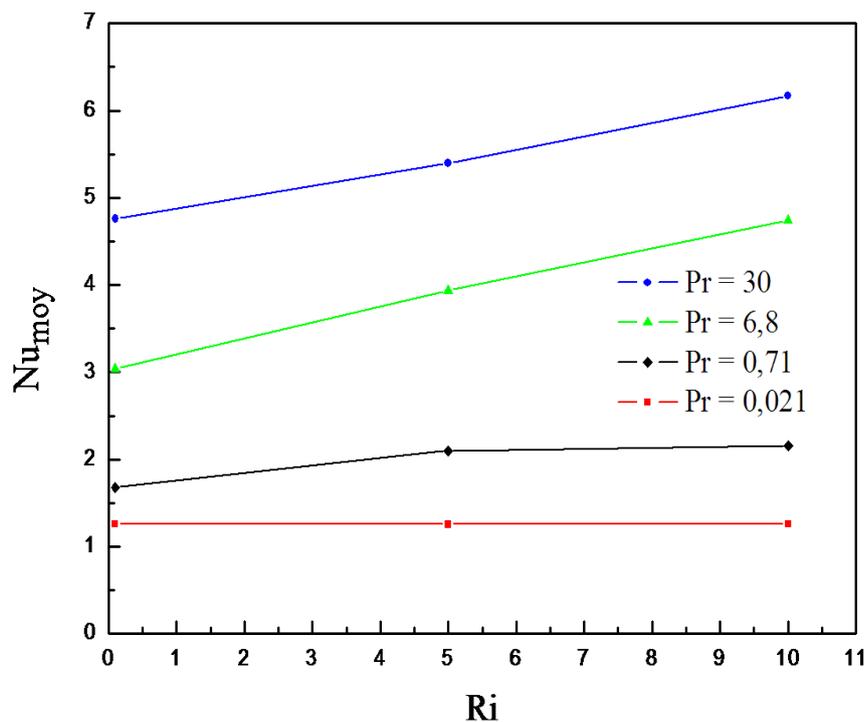
Figure IV.32 : Iso surfaces de température pour $Ri=10$

La convection est moins importante menant à des valeurs minimales du nombre de Nusselt moyen quel que soit la valeur du nombre de Richardson pour le cas du galium.

Tableau IV.12 : Nombre de Nusselt moyen pour $Ri=10$ et différents Pr

Pr	0.021	0.71	6.8	30
Nu_{1moy}	0.637511	1.079667	4.333705	2.99228
Nu_{2moy}	0.619885	1.078683	0.441890	3.255080
Nu_{moy}	1.257488	2.158247	4.745309	6.16972

La variation du nombre de Nusselt moyen calculé le long de la partie chauffée en fonction du nombre de Richardson pour ces quatre fluides, sont montrés dans la figure IV.33. Nous constatons que le nombre de Nusselt moyen est proportionnel au nombre de Prandtl mais il est insensible à la variation du nombre de Richardson pour le gualuim (très petites valeurs du nombre de Prandtl).

**Figure IV.33** : Nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Richardson

Conclusion Générale

Nous avons présenté dans ce mémoire les résultats d'une investigation numérique de la convection mixte dans une enceinte cubique ayant des parois latérales mobiles maintenues à une température froide et partiellement chauffée par la base. Les autres parois sont considérées adiabatiques. L'effet de certains paramètres tels que la dimension et l'emplacement de la partie chauffée, la direction des parois mobiles et la nature du fluide de refroidissement sont étudiés. Les résultats ainsi obtenus sont interprétés pour caractériser le comportement du transfert de chaleur.

Le système d'équations gouvernant le problème a été résolu numériquement par un code numérique en langage Fortran, basé sur la méthode des volumes finis, le schéma de la loi de puissance est utilisé pour discrétiser les équations écrites et l'algorithme SIMPLER est considéré pour la résolution des équations couplées. Une validation a été effectuée par la comparaison des valeurs du nombre de Nusselt moyen avec des travaux trouvés dans la littérature.

Les résultats préliminaires obtenus mettent en évidence l'existence de trois structures d'écoulements totalement différents suivant la valeur du nombre de Richardson.

Le passage de la première structure vers la deuxième se traduit par une perte de symétrie des champs dynamique et thermique. Tandis que le passage de la deuxième structure vers la troisième se produit d'une manière brusque pour une valeur bien déterminée de ce même nombre et conduit à une bifurcation d'un régime constitué de deux cellules à un autre constitué de quatre cellules.

Il existe une valeur critique de la taille de la partie chauffée $\varepsilon > 0.72$ dont l'écoulement directement passe de la première structure vers la troisième.

Le temps de calcul nécessaire pour la convergence dépend du mode de convection et de la nature du fluide utilisé.

D'une façon générale, les résultats obtenus de la deuxième partie montrent que l'effet de la taille de la partie chauffée est insignifiant sur les structures de l'écoulement et les champs thermiques et les iso surfaces de température générées dans la cavité quand la convection forcée est dominante (Il est important de noter que la largeur de la partie chauffée a une influence mineure sur la distribution des isothermes et n'a pas d'influence sur les lignes de courant pour les petites valeurs de Ri) mais le transfert thermique évolue comme une fonction croissante avec la largeur de la source de chaleur.

L'analyse des résultats obtenus, pour $Ri = 10$ où l'effet de la convection naturelle est dominant montre que la structure de l'écoulement est la même pour les différentes tailles de la partie chauffée et elle préserve une symétrie par rapport à $X = 0.5$ car les conditions aux limites sont symétriques.

Les lignes de courant et les iso surface de température sont insensibles à la variation du nombre de Richardson pour le cas des vitesses des parois sont descendante mais ce n'est pas le cas pour la direction ascendante.

L'augmentation du nombre de Nusselt moyen est proportionnelle à l'augmentation du nombre de Richardson pour les deux différents cas des directions des parois latérales étudiés mais le transfert de chaleur est amélioré pour le deuxième cas.

Les résultats obtenus montrent que les caractéristiques de l'écoulement et la quantité du transfert de chaleur sont fortement affectés par la direction des parois mobiles.

Le nombre de Prandtl n'influe pas sur les lignes de courant quand la convection forcée est dominante.

Le nombre de Nusselt moyen est proportionnel au nombre de Prandtl.

En général, ces résultats nous ont donné des informations qui peuvent être utiles dans l'industrie, dans le but de contrôler l'écoulement avec l'optimisation de la dissipation thermique et le choix du fluide de refroidissement utilisé.

Références bibliographiques

- [1] Bénard. H (1900), Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide, Rev. Gén. Sci. pures et Appl., Vol.11, pp.1261-1271.
- [2] Bénard. H (1901), Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent, Ann. Chim. Phys. Vol. 23, 62-144.
- [3] Lord Rayleigh. LIX (1916), On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the underside. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Vol. 32, (192), pp. 529-546.
- [4] Gelfgat. A. Yu, Bar-Yoseph. P. Z and Yarin. A. L (1999), Stability of Multiple Steady States of Convection in Laterally Heated Cavities. J. Fluid Mech., vol.388, pp. 315-334.
- [5] Erenburg. V, Gelfgat. A. Yu, Kit. E, Bar-Yoseph and. P. Z and Solan. A (2003), Multiple states stability and bifurcations of natural convection in a rectangular cavity with partially heated vertical walls. J. Fluid Mech., vol. 492, pp. 63–89.
- [6] Lappa. M (2013), On the existence and multiplicity of one-dimensional solid particle attractors in time-dependent Rayleigh-Benard convection. CHAOS 23, 013105.
- [7] Lappa. M (2019), A Mathematical and Numerical Framework for the Simulation of Oscillatory Buoyancy and Marangoni Convection in Rectangular Cavities with Variable Cross Section, Springer Int. Publishing AG, part of Springer Nature.
- [8] Gelfgat. A (2019), Computational Modeling of Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics, Computational Methods in Applied Sciences, 1st edition. cham, Switzerland .
- [9] Hdhiri. N and Ben Beya. B (2018), Numerical study of laminar mixed convection flow in a lid-driven square cavity filled with porous media: Darcy-Brinkman-Forchheimer and Darcy-Brinkman models. Int. J. of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, Vol. 28 (4), pp.857-877.
- [10] Sivasankaran. S, Ananthan. S. S, Bhuvanewari. M, and Abdulhakeem. A.K (2017), Double-diffusive mixed convection in a lid-driven cavity with non-uniform heating on side walls, Sādhanā, Vol. 42, (11), pp. 1929–1941.
- [11] Khaleel Kareem. A, Mohammed. H.A, Kadhim Hussein. A and Gao. S (2016), Numerical investigation of mixed convection heat transfer of nano-fluids in a lid-driven trapezoidal cavity, Int. Communications in Heat and Mass Transfer 77, pp. 195–205.
- [12] Yang. K.T (1988), Transitions and Bifurcations in Laminar Buoyant Flows in Confined Enclosures, J. of Heat Transfer, Transactions of the ASME, Vol. 110,pp.1191-1204.

-
- [13] Bodenschatz. E, Pesch. W, and Ahlers. G (2000), Recent Developments in Rayleigh-Bénard Convection, *Annu. Rev. Fluid Mech.* Vol. 32, pp. 709–778.
- [14] Lappa. M. (2010), *Thermal convection: Patterns, Evolution and Stability*. Wiley & Sons, Singapore.
- [15] Baïri. A, Zarco-Pernia. E and García de María. J. M (2014), A review on natural convection in enclosures for engineering applications. The particular case of the parallelogrammic diode cavity, *Ap. Thermal Engineering*, Volume 63, pp. 304-322.
- [16] Kadhim Hussein. A, Awad. M. M, Kolsi. L, Fathinia. F and Adegun. I.K (2014), A Comprehensive Review of Transient Natural Convection Flow in Enclosures, *J. Basic. Appl. Sci. Res.*, 4(11) pp.17-27.
- [17] Öztop. H. F, Estellé. P, Yan. W. M, Al-Salem. K, Orfi. J and Mahian. O (2015), A brief review of natural convection in enclosures under localized heating with and without Nano fluids, <https://www.sciencedirect.com/science/journal/07351933> Volume 60, pp. 37-44.
- [18] Soman. A, Nair P. A, Babu. R, Kiran P. K and Sumesh V. S (2016), Study on Natural Convection Heat Transfer in an Enclosure, *IOSR J. of Mechanical and Civil Engineering (IOSR-JMCE)*, Volume 13, Issue 4 Ver. VI, pp 26-30.
- [19] Arun. S, Satheesh A, Mohan C. G, Padmanathan P and Kumar D. S (2017), A review on natural convection heat transfer problems by Lattice Boltzmann Method, *J. of Chemical and Pharmaceutical Sciences (JCPS)* Volume 10 Issue 1, pp:635-645.
- [20] Teamah. M, Abo Elazm. M, Zaki. A (2012), Numerical Study of Mixed Convection Heat Transfer and Fluid Flow in Cubical Lid-Driven Cavity, *Eur. J. of Scientific Research*, Vol.72 (3), pp. 460-473.
- [21] J. Yasin. N, H. Alwan. D. D and S. Abdulla. A (2014), Experimental Study of Mixed Convection in an Enclosure with a Cold Movable Top Wall and Hot Bottom Wall, *Al-Khwarizmi Engineering J*, Vol. 10, (1), P. P. 32-46.
- [22] Ben Mansour. N, Ben Cheikh. N, Ben Beya. B and Lili. T (2015), Etude numérique de la convection mixte dans une cavité cubique entraînée chauffée par le bas, 22ème Congrès Français de Mécanique Lyon.
- [23] Abo Elazm. M. M, Shahata. A. I, Elsafty. A. F and Teamah M. A (2015), Numerical Investigation of a Three-Dimensional Laminar Mixed Convection Flows in Lid-Driven Cavity for Very Small Richardson Numbers, *ASME Power Conference*, San Diego, California, USA.
-

- [24] Fatih Selimefendigila, Hakan F. Öztopb, Ali J. Chamkhac (2017), analysis of mixed convection of nanofluid in a 3D lid-driven trapezoidal cavity with flexible side surfaces and inner cylinder, *International Communications in Heat and Mass Transfer* 87 40-51.
- [25] I.R. Ali, Ammar I. Alsabery, N.A. Bakar, Rozaini Roslan, (2020), Mixed Convection in a Lid-Driven Horizontal Rectangular Cavity Filled with Hybrid Nanofluid by Finite Volume Method, *Journal of Advanced Research in Micro and Nano Engineering* 1, Issue 1 (2020) 38-49
- [26] Iwatsu. R and Hyun. J. M (1995), Three dimensional driven cavity flows with a vertical temperature gradient, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 38 (18), pp.3319-3328.
- [27] Ouertatani. N, Ben Cheikh. N, Ben Beya. B, Lili. T and Campo. A (2009), Mixed convection in a double lid-driven cubic cavity, *Int. J. of Thermal Sciences*, Vol.48, pp.1265–1272.
- [28] Kadhim Hussein. A (2018), Entropy generation due to the transient mixed convection in a three- dimensional right-angle triangular cavity, *Int. J. of Mechanical Sciences* 146–147.
- [29] Lioua Kolsi MHD, Mixed convection and entropy generation in a 3d lid-driven cavity, *Frontiers in Heat and Mass Transfer (FHMT)*, 7, 26 (2016) DOI: 10.5098/hmt.7.26 ISSN: 2151-8629.
- [30] Noura BEN MANSOUR, Nader BEN-CHEIKH and Brahim BEN-BEYA (2014), Aspect ratio effects on 3d incompressible flow in lid driven parallepiped cavity, *International Journal of Scientific Research & Engineering Technology*, vol.1, pp 14-19.
- [31] Benkacem.N, Ben Cheikh. N and Ben Beya. B (2015), Three-dimensional Analysis of Mixed Convection in a Differentially Heated Lid-driven Cubic Enclosure, *J. Appl. Mech. Eng.*, 4: 159.
- [32] P-Rani. H, Narayana. V, Rameshwar. Y (2018), Analysis of vortical structures in a differentially heated lid driven cubical cavity, *Int. J. Heat and Technology*, Vol.36, (2), pp. 548-556.
- [33] H.T. Xu, Z.Z. Zhang¹, J. Chen¹ and M. Yang¹, Lattice Boltzmann simulation of 3d lid-driven mixed convection with double MRT model, *Proceedings of the 2nd Thermal and Fluid Engineering Conference, TFEC2017 4th International Workshop on Heat Transfer, IWHT2017 April 2-5, 2017, Las Vegas, NV, USA.*
- [34] Ahmed Kadhim Hussein, Lioua Kolsi, Mohammed A. Almeshaal, Dong Li, Hafiz Muhammad Ali andIsraa S. Ahmed, (2019), Mixed Convection in a Cubical Cavity With Active Lateral Walls and Filled With Hybrid Graphene–Platinum Nanofluid, *Journal of Thermal Science and Engineering Applications*, Vol. 11 / 041007.

-
- [35] S. Marzougui, F. Mebarek-Oudina, M. Magherbi et A. Mchirgui (2021), Entropy generation and heat transport of Cu-water nanoliquid in porous lid-driven cavity through magnetic field, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Emerald Publishing Limited.
- [36] Hirpho (2021) , Mixed convection of Casson fluid in a differentially heated bottom wavy wall, <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2021.e07361>.
- [37] Kareem. A. KH and Gao. S (2015), CFD Investigation of Turbulent Mixed Convection Heat Transfer in a Closed Lid-Driven Cavity, *Int. J. of Civil, Environmental, Structural, Construction and Architectural Engineering* Vol.9, (12), pp.1546-1551.
- [38] Kareem. A. KH, Gao. S and Qasim Ahmed. A (2016), Unsteady simulations of mixed convection heat transfer in a 3D closed lid-driven cavity, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Vol. 100, pp. 121-130.
- [39] Kareem. A. KH and Gao. S (2017), Computational study of unsteady mixed convection heat transfer of Nano fluids in a 3D closed lid-driven cavity, *Int. Communications in Heat and Mass Transfer* vol. 82, pp. 125-138
- [40] N. Ferroudj , H. Koten , S. Boudebous (2022), Mixed Convection Heat Transfer and Entropy Generation in a Water-filled Square Cavity Partially Heated from Below: The Effects of Richardson and Prandtl Numbers , *Journal of Applied and Computational Mechanics*, Vol. 8 (1), (2022), 282-297 DOI: 10.22055/JACM.2021.38614.3259
- [41] Roy. M, Roy. S, Basak. T (2015), Analysis of entropy generation on mixed convection in square enclosures for various horizontal or vertical moving wall(s), *Int. Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 68, pp. 258–266
- [42] Patankar, S.V. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing, New York.
- [43] Earn. L. CH, Yen. T. W and Ken. T. L (2017), The investigation on SIMPLE and SIMPLER algorithm through lid driven cavity, *J. of Advanced Research in Fluid Mechanics and Thermal Sciences*.
- [44] Bird. R.B, Stewart. W.E, Lightfoot. E.N (2006), "Transport Phenomena", John Wiley & Sons, New York.
- [45] Padet. J (2011), "Fluides en écoulement, Méthodes et modèles", Société Française de Thermique. 2^{ème} Edition.
- [46] Boussinesq. J (1903), *Théorie analytique de la chaleur*, Vol.2. Gauthier-Villars, Paris.
-

- [47] Oberbeck. A (1879), Ueber die warmeleitung der flussigkeiten bei berucksichtigung der stromungen infolge von temperature differenzen. *Annalen der physic und Chemie*, 243(6): 271-292.
- [48] Aydin. O. and Yang, W. J. (2000), Mixed convection in cavities with a locally heated lower wall and moving sidewalls. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, vol. 36, pp. 695–710.
- [49] Guo. G and Sharif. M. A. R (2004), Mixed convection in rectangular cavities at various aspect ratios with moving isothermal sidewalls and constant flux heat source on the bottom wall, *Int. J. of Thermal Sciences*, vol. 43, pp. 465–475.
- [50] Billah. M. M, Rahman. M. M, M. Sharif U, Rahim. N .A, Saidur. R and Hasanuzzaman. M (2011), Numerical analysis of fluid flow due to mixed convection in a lid-driven cavity having a heated circular hollow cylinder, *Int. Communications in Heat and Mass Transfer* 38, 1093–1103.
- [51] Sivasankaran. S, Sivakumar. V and Hussein. A. K (2013), Numerical study on mixed convection in an inclined lid-driven cavity with discrete heating, *Int. Communications in Heat and Mass Transfer* 46 (2013) 112–125.
- [52] Sivakumara. V and Sivasankaranb. S (2014), Mixed convection in an inclined lid-driven cavity with non-uniform heating on both sidewalls, *ISSN 0021-8944, J. of App Mechanics and Technical Physics*, 2014, Vol. 55, (4), pp. 634–649.
- [53] Khanafer. K. M and J. chamkha. A (1999), Mixed convection flow in a lid-driven enclosure filled with a fluid-saturated porous medium, *Int. J. of Heat Mass Transfer* 42, 2465-2481.
- [54] Roy. M, Roy. S and Basak. T (2014), Role of various moving walls on energy transfer rates via heat flow visualization during mixed convection in square cavities, *Energy* xxx, 1-22.
- [55] Cheng. T. S (2011), Characteristics of mixed convection heat transfer in a lid-driven square cavity with various Richardson and Prandtl numbers, *Int. J of Thermal Sciences* 50 (2011) 197-205.
- [56] Basak. T, Roy. S and Chamkha. A. J (2012), A Peclet number based analysis of mixed convection for lid-driven porous square cavities with various heating of bottom wall, *Int. Communications in Heat and Mass Transfer* 39 (2012) 657–664.
- [57] Kachi. S, Bensouici. F-z, Ferroudj. N and Boudebous. S (2019), Effect of Richardson Number on Unsteady Mixed Convection in a Square Cavity Partially Heated From Below, *Tech Science Press , FDMP*, vol.15, (2), pp.89-105.