

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE CONSTANTINE 1
FACULTE DES SCIENCES DE LA TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

N° d'ordre:
Série:

THESE
EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE
DOCTORAT EN SCIENCES
EN GENIE MECANIQUE
OPTION: ENERGETIQUE

THEME
ETUDE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE ET THERMIQUE
DE FLUIDES VISCOELASTIQUES
DANS DES CONDUITES DE SECTIONS NON-CIRCULAIRES

PRESENTEE PAR:
Filali Abdelkader

Soutenue le: 08/04/2014

Devant le jury:

Président	Mr. M. KADJA	(Prof.)	Université de Constantine 1
Rapporteur	Mr. Z. NEMOUCHI	(Prof.)	Université de Constantine 1
Co-rapporteur	Mr. L. KHEZZAR	(Prof. Assoc.)	Institut du Pétrole (Abu Dhabi)
Examineur	Mr. M. SI-AMEUR	(Prof.)	Université de Batna
Examineur	Mr. S. BENISSAAD	(Prof.)	Université de Constantine 1
Examineur	Mr. M. H. BENHAMZA	(Prof.)	Université de Guelma

Résumé

Le présent travail est dédié à l'étude du problème de Graetz dans des conduites droites de sections circulaires et non circulaires pour analyser l'influence des paramètres rhéologiques sur l'amélioration du transfert de chaleur en négligeant la dissipation visqueuse pour une classe de fluides viscoélastiques non-linéaires représentés par les modèles de comportement de « Phan-Thien-Tanner simplifié (SPTT) » et le modèle « Finite Extensible Nonlinear Elastic-Peterlin (FENE-P) ». La simulation numérique est réalisée en utilisant le code de calcul POLYFLOW basé sur la méthode des éléments finis et les résultats sont comparés avec les solutions analytiques et semi-analytiques disponibles dans la littérature pour les géométries 2D axisymétriques.

L'analyse considère le cas d'un flux de chaleur constant imposé sur la paroi et les résultats montrent que pour le modèle SPTT les effets élastiques et rhéofluidifiants combinés représentés par le paramètre εWe^2 conduisent à une amélioration du transfert de chaleur. Pour le modèle FENE-P, les résultats montrent qu'une augmentation de l'élasticité du fluide améliore le coefficient de transfert de chaleur en raison de l'augmentation du niveau de comportement rhéofluidifiant. Cependant l'augmentation du paramètre d'extensibilité L^2 aboutit à une diminution du nombre de Nusselt. Des résultats numériques sous forme de nombre de Nusselt pour les cas 2D axisymétriques sont obtenus pour un certain nombre de valeurs de la concentration de la phase polymérique β et confirment quantitativement que la concentration du polymère augmente les taux de transfert de chaleur dans les fluides FENE-P. La distribution du nombre de Nusselt dans la région d'entrée des conduites de forme triangulaire équilatérale, carrée ou rectangulaire est obtenue pour la première fois pour des fluides viscoélastiques non-linéaires de type SPTT et FENE-P.

Mots clefs

Viscoélastique, problème de Graetz, modèle simplifié Phan-Thien-Tanner SPTT, modèle FENE-P, convection à l'entrée d'une conduite, nombre de Nusselt.

Abstract

The present work is dedicated to the study of the Graetz problem in straight pipes of circular and non-circular cross-sections to analyze the influence of the rheological parameters on the heat transfer enhancement with negligible viscous dissipation for a class of non-linear viscoelastic fluids constitutively represented by the simplified Phan-Thien-Tanner (SPTT) and the Finite Extensible Nonlinear Elastic-Peterlin (FENE-P) models. Numerical simulation is conducted using the finite element based software POLYFLOW and results are compared with analytical and semi-analytical solutions available in the literature for the 2D axisymmetric pipes.

The analysis considers a constant wall heat flux boundary condition and results shows that for the SPTT model the combined elastic and shear-thinning effects represented by the parameter εWe^2 lead to heat transfer enhancement. For the FENE-P model, the results show that an increase in fluid elasticity raised the normalized heat transfer coefficient due to the increased level of shear-thinning behavior. But increasing the extensibility parameter L^2 leads to a decrease in Nusselt number. Nusselt number values are obtained for the axisymmetric pipe flows for several values of polymer concentration β and the study confirms quantitatively that polymer concentration enhances heat transfer rates in FENE-P fluids. The Nusselt number distribution in the entrance region of tubes of equilateral triangular, square and rectangular cross-sections is reported for the first time for non-linear viscoelastic fluids of the SPTT and FENE-P type.

KEYWORDS: Viscoelastic, Graetz problem, Simplified Phan-Thien-Tanner model SPTT, FENE-P model, entry flow heat transfer, Nusselt number.

ملخص

تكرس هذا العمل لدراسة موضوع Graetz داخل أنابيب ذات المقاطع العرضية الدائرية و غير الدائرية لتحليل تأثير العوامل الريولوجية على تعزيز نقل الحرارة مع اهمال تأثير الانتشار بفعل اللزوجة بالنسبة للموائع ذات اللزوجة غير الخطية باستعمال نموذجي التمثيل الرقمي (SPPT) و (FENE-P). تتم الدراسة الرقمية باستخدام برنامج الحساب POLYFLOW و تتم مقارنة النتائج مع الحلول التحليلية وشبه التحليلية بالنسبة للأنابيب 2D ذات المحور والمتوفرة في المنشورات العلمية.

التحليل يعتبر حالة تدفق حراري ثابت مطبق عبر جدار الانابيب والنتائج تظهر أن في حالة نموذج التمثيل الرقمي SPTT أن آثار مرونة السائل و القص الرقيق مجتمعة وممثلة بالعامل ϵWe^2 يؤدي إلى تعزيز التبادل الحراري. في حالة نموذج التمثيل الرقمي FENE -P، النتائج تبين أن زيادة مرونة السائل تؤدي إلى رفع معامل نقل الحرارة بسبب زيادة مستوى سلوك القص رقيق. ولكن زيادة معامل التمدد L^2 يؤدي إلى انخفاض في معامل نقل الحرارة. و قد تم الحصول على قيم عديدة لمعامل نقل الحرارة للتدفقات عبر الأنابيب 2D ذات المحور بتغيير معامل تركيز البوليمر β وتؤكد الدراسة أن تركيز البوليمر يعزز معدلات نقل الحرارة في السوائل ذات النوع FENE -P. نتائج توزيع معامل نقل الحرارة في منطقة مدخل أنابيب ذات المقاطع العرضية غير الدائرية المتمثلة في الثلاثي متساوي الأضلاع ، والمربعة والمستطيلة تم عرضها للمرة الأولى بالنسبة للسوائل اللزجة غير الخطية الخاضعة لنموذجي التمثيل الرقمي SPTT و FENE -P.

كلمات رئيسية

اللزجة ، المشكلة Graetz ، نموذجي التمثيل الرقمي SPTT و FENE -P, تعزيز النقل الحراري، معامل نقل الحرارة.

لله الحمد من قبل و من بعد

Remerciements

Je tiens à remercier :

*Mon encadreur le professeur **Nemouchi Zoubir**, professeur au département de génie mécanique à l'université Constantine 1, je lui exprime ici mon attachement et ma profonde reconnaissance.*

*Le Dr **Khezzar Lyes**, mon co-encadreur de thèse à l'Institut du Pétrole (P.I.) d'Abu Dhabi aux Emirats Arabes Unis, qui m'a reçu au sein de son département pour poursuivre mon travail de recherche et d'avoir suivi ce travail avec un intérêt particulier, pour la confiance qu'il m'a témoignée, pour ses conseils et son constant soutien et pour le savoir et l'expérience que j'ai acquis durant mon séjour au P.I.*

*Le Dr **D Siginer** maintenant à l'université de Santiago au Chili pour son aide durant la phase initiale du projet sur les calculs théoriques avec le modèle PTT ainsi que le **Dr Nabil Kharoua**.*

*Mes remerciements s'adressent ensuite aux membres du jury. Je remercie vivement Mr. **Kadja Mahfoud**, professeur au département de génie mécanique à l'université Constantine 1, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant la présidence de ce jury.*

*J'exprime mes remerciements aux membres du jury, **Si-Ameur Mohamed**, professeur au département de génie mécanique à l'université de Batna, Mr. **Benissaad Smail**, professeur au département de génie mécanique à l'université Constantine 1, et Mr. **Mohamed El Hocine Benhamza**, professeur au département de chimie industrielle à l'université de Guelma pour leurs contributions à l'évaluation et l'enrichissement de la présente étude.*

Je tiens à remercier mes collègues et mes amis à l'Université Constantine 1 et les responsables de la poste graduation de l'université de Constantine 1.

Je me dois d'être reconnaissant aux membres de l'administration, staff et faculté de l'Institut du Pétrole d'Abu Dhabi pour le support financier et scientifique dans le cadre d'un projet d'initiation à la recherche sur les écoulements viscoélastiques et qui m'a permis d'utiliser des moyens de recherche avancés. Je n'oublie pas, aussi, l'environnement agréable au sein de l'Institut du Pétrole que j'ai partagé avec des chercheurs de différentes régions du monde.

Je tiens à remercier ma famille, pour le soutien continu qu'elle m'a apporté tout au long de ces années d'études.

Je n'oublierai pas non plus tous ceux qui, de près ou de loin, par leur compétence, leur aide technique et leurs conseils ont contribué à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce travail à

mes parents

ma femme

ma famille

et mes amis

لله الحمد من قبل و من بعد

Acknowledgement

I would like to express thanks to:

*My supervisor Mr. **Nemouchi Zoubir**, professor of mechanical engineering at the university Constantine 1, I express here my deep gratitude and attachment.*

*Dr. **Khezzar Lyes**, my co-supervisor at the Petroleum Institute (P.I.) in Abu Dhabi, United Arab Emirates, who has received me in his department to continue my research and has followed this work with particular interest, for the trust he has provided me, for his guidance and permanent support and for the knowledge and experience I gained during my stay in the P.I.*

Dr. D Siginer now at the University of Santiago in Chili for his help during the initial phase of the project for the calculations with the PTT model and also Dr. Nabil Kharoua.

*My thanks then addressed to Mr. **Kadja Mahfoud**, professor of mechanical engineering at the university Constantine 1, for accepting to chair the jury which has evaluated the present work.*

*I express my thanks to the members of the jury, Mr. **Si-Ameur Mohamed**, professor of engineering process at the university of Batna, Mr. **Smail Benissaad**, professor of Mechanical engineering at the university Constantine 1, and Mr. **Hocine Mohamed El Benhamza**, professor at the department of chemical engineering at the university of Guelma for their pertinent evaluation and enrichment of the present study.*

I would like to thank my colleagues, friends and responsible for post graduation from the university center of Constantine 1.

I am grateful to the administration, staff and faculty of the Petroleum Institute of Abu Dhabi and the oil company ADNOC for financial and scientific support which provided me with advanced research equipment and facilities. I do not forget, also, the pleasant environment within the Petroleum Institute which I have been sharing with researchers from different regions of the world.

I would like to thank my family for their continued support that they give to me during all my life to succeed in my study.

I will not forget either all those near and far, for their expertise, technical assistance, advice and contribution to this work.

Table des matières

REMERCIEMENTS

RESUME

NOMENCLATURE

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

Chapitre I : Introduction générale

I.1. INTRODUCTION.....	1
I.2. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE.....	1
I.3. OBJECTIF DE LA THESE.....	4
I.4. CONTENU DE LA THÈSE.....	5

Chapitre II : Rhéologie et classification des fluides non-newtoniens

II.1. GENERALITES SUR LA RHEOLOGIE.....	7
II.1.1. Tenseur des contraintes	9
II.1.2. Le comportement newtonien	11
II.1.3. Le comportement non-newtonien	11
II.2. LA VISCOELASTICITE	13
II.2.1. Viscoélasticité linéaire	15
II.2.2. Viscoélasticité non linéaire	16
II.2.3. Viscosité élongationnelle	18
II.3. MATERIAUX ET MODELES.....	19
II.3.1. Fluides viscoélastiques	19
II.3.2. Modèles rhéologiques	21
II.3.2.1. Modèle newtonien	21
II.3.2.2. Modèle du fluide newtonien généralisé	21
II.3.2.3. Modèle viscoélastique	22
II.3.2.3.1. Modèle de Maxwell	23
II.3.2.3.2. Modèle de Maxwell sur-convecté (UCM)	24
II.3.2.3.3. Modèle de Oldroyd-B	24
II.3.2.3.4. Modèle de Phan-Thien-Tanner (PTT).....	25

II.3.2.3.5. Modèle de Giesekus	25
II.3.2.3.6. Modèle FENE-P	26
II.3.2.4. Le choix du modèle rhéologique.....	26

Chapitre III : Formulation mathématique et méthode numérique

III.1. INTRODUCTION	28
III.2. MODELE MATHEMATIQUE	28
III.2.1. Equation de continuité	28
III.2.2. Equation de conservation de la quantité de mouvement	28
III.2.2. Equation de l'énergie	28
III.2.2. Equation constitutive	28
III.3. LE NOMBRE DE NUSSELT	31
III.4. METHODE NUMERIQUE.....	31
III.4.1. Méthodes des éléments finis	32
III.4.2. Présentation du logiciel POLYFLOW	32
III.4.3. Méthodes de convergence	35
III.5.GEOMETRIES, MAILLAGES ET CONDITIONS AUX LIMITES.....	37

Chapitre IV : Résultats et discussions

IV.1.INTRODUCTION.....	39
IV.2. LE MODELE SPTT.....	39
IV.2.1. Effets du Maillage.....	39
IV.2.2.Géométries circulaires: profils de vitesse	41
IV.2.3.Géométries circulaires: profils de contrainte normale et tangentielle.....	44
IV.2.4. Géométries circulaire: transfert de chaleur.....	47
IV.2.5. Géométries non-circulaire: transfert de chaleur	49
IV.2.6. Conclusion	51
IV.3. LE MODELE FENE-P SANS CONTRIBUTION NEWTONIENNE $\beta = 0$	52
IV.3.1. Effet du Maillage.....	52
IV.3.2.Géométries circulaires: profils de vitesse	54
IV.3.3.Géométries circulaires: profils de contrainte normale et coefficient de frottement.....	57

IV.3.4. Géométries non-circulaires: profils de vitesse	59
IV.3.5. Géométries circulaires: transfert de chaleur	63
IV.3.6. Géométries non-circulaires: transfert de chaleur	66
IV.3.7. Conclusion	70
IV.4. LE MODELE FENE-P AVEC CONTRIBUTION NEWTONIENNE $\beta \neq 0$	70
IV.4.1. Géométries circulaires: profils de vitesse	71
IV.4.2. Géométries circulaire: profils des contraintes normale et coefficient de frottement.....	76
IV.4.3. Géométries non-circulaire: profils de vitesse	79
IV.4.4. Géométries circulaire: transfert de chaleur	81
IV.4.5. Géométries non-circulaire: transfert de chaleur	85
IV.4.6. Conclusion	88
CONCLUSION ET PERSPECTIVES.....	89
NOMENCLATURE.....	91
BIBLIOGRAPHIE.....	93
PUBLICATIONS	97

Liste des tableaux

Tableau 1	Les différents types de fluides non newtoniens	12
Tableau 2	Concentrations typiques pour la formulation de divers fluides de Boger.....	20
Tableau 3	Maillages testés avec le modèle SPTT dans le cas 2D axisymétrique.....	39
Tableau 4	Maillages testés avec le modèle SPTT dans le cas 3D circulaire.....	40
Tableau 5	Maillages testés avec le modèle SPTT pour les géométries non-circulaires..	41
Tableau 6	Maillages testés avec le modèle FENE-P dans le cas 2D axisymétrique.....	53

Liste des figures

Figure II.1	Représentation schématique d'un écoulement de cisaillement simple induit par une force F . Le fluide confiné entre deux plaques de surface S , qui se trouvent à une distance h	08
Figure II.2	Élongation simple dans la direction x	08
Figure II.3	Composantes σ_{xy} , σ_{yy} , σ_{zy} de la contrainte s'exerçant sur une surface dS de normale orientée suivant l'axe y	09
Figure II.4	Rhéogrammes des fluides (lois de comportement rhéologiques élémentaires).....	13
Figure II.5	Modèle de Maxwell de viscoélasticité linéaire.....	16
Figure II.6	(a) Effet Weissenberg (b) Gonflement à l'extrusion pour une solution aqueuse de 2% de polyacrylamide. D'après Boger et Walters [31].....	17
Figure II.7	A gauche, sphère de fluide au repos soumise à une contrainte, devenant une ellipsoïde (à droite) [30].....	17
Figure II.8	Schéma d'une elongation planaire dans la direction x [30].....	18
Figure III.1	Modélisation des macromolécules par des haltères élastiques.....	29
Figure III.2	Géométrie et maillage avec les conditions aux limites pour le cas 2D axisymétrique.....	37
Figure III.3	Domaines de simulation et maillages pour le cas des géométries 3D circulaire et non circulaires, l'axe- x est perpendiculaire à la figure.....	37
Figure IV.1	Nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale normalisée x^* pour $\varepsilon We^2 = 1$, dans le cas 2D axisymétrique, avec différents maillages.....	40
Figure IV.2	Nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale normalisée x^* pour $\varepsilon We^2 = 1$, dans le cas 3D circulaire, avec différents maillages et une comparaison avec la solution 2D axisymétrique.....	41
Figure IV.3	Comparaison des profils de vitesse entièrement développés dans le cas axisymétrique avec ceux de Letelier et Siginer [16] et Oliveira et Pinho [17] pour différentes valeurs de εWe^2	43
Figure IV.4	Profils de vitesse adimensionnelle entièrement développés du modèle SPTT exponentiel en fonction du paramètre εWe^2	44
Figure IV.5	Variation des profils de contraintes normale et de cisaillement normalisées en fonction du nombre de Weissenberg pour une valeur constante de $\varepsilon = 0,25$ pour les géométries (a)-2D Axisymétrique - la	

	contraintes de cisaillement, (b)-2D Axisymétrique - la contrainte normale et (c)-3D circulaire - les contraintes normale et de cisaillement.	46
Figure IV.6a	Contraintes normale et tangentielle normalisées $\tau_{xx}/(\tau_{xy})_w$ et $\tau_{xy}/(\tau_{xy})_w$ pour le cas 2D axisymétrique, Oliveira et Pinho [17].....	47
Figure IV.6b	Contraintes normale et de cisaillement normalisées $\tau_{xx}/(\tau_{xy})_w$ et $\tau_{xy}/(\tau_{xy})_w$ pour le cas 2D axisymétrique, pour le présent travail.....	47
Figure IV.7	Variation du nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale $x' = x / D.Re.Pr$ pour un flux de chaleur q_w constant imposé à la paroi pour la géométrie axisymétrique et $0,001 < \varepsilon We^2 < 100$. Les valeurs de Nu tabulées sont celles liées à la région pleinement développée.....	48
Figure IV.8	Variation du nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale $x' = x / D.Re.Pr$ pour un flux de chaleur q_w constant imposé à la paroi pour la géométrie 3D circulaire et $0,001 < \varepsilon We^2 < 100$. Les valeurs de Nu tabulées sont celles liées à la région pleinement développée.....	49
Figure IV.9	Variation du nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale $x' = x / D.Re.Pr$ pour un flux de chaleur q_w constant imposé à la paroi pour la géométrie triangulaire et $0,001 < \varepsilon We^2 < 100$. Les valeurs de Nu tabulées sont celles liées à la région pleinement développée.....	50
Figure IV.10	Variation du nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale $x' = x / D.Re.Pr$ pour un flux de chaleur q_w constant imposé a la paroi pour la géométrie carrée et $0,001 < \varepsilon We^2 < 100$. Les valeurs finales Nu rapportées sont ceux liés à la région pleinement développé.....	50
Figure IV.11	Variation du nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale $x' = x / D.Re.Pr$ pour un flux de chaleur q_w constant imposé a la paroi pour la géométrie rectangulaire et $0,001 < \varepsilon We^2 < 100$. Les valeurs finales Nu rapportées sont ceux liés à la région pleinement développé.....	51
Figure IV.12	Test de sensibilité de maillage pour le cas 2D axisymétrique: nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale normalisée x' pour $We = 10$ et $L^2 = 10$	52
Figure IV.13	Test de sensibilité du maillage dans le cas 3D circulaire: nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale normalisée x' pour $We = 10$ et $L^2 = 10$ et une comparaison avec la solution 2D axisymétrique.....	53
Figure IV.14	Comparaison des profils de vitesse entièrement développés pour les cas 2D axisymétrique et 3D circulaire avec ceux de Oliveira [22] pour $L^2 = 10$ et $We = 1, 2, 5$ et 10	55

Figure IV.15	Profils de vitesse entièrement développés pour le cas 2D axisymétrique pour $L^2 = 10$ et $We = 1, 2, 5$ et 10	55
Figure IV.16	Comparaison des profils de vitesse entièrement développés pour les cas 2D axisymétrique et 3D circulaire avec ceux de Oliveira [22] pour $We = 10$ et $L^2 = 10, 100$ et 1000	56
Figure IV.17	Profils de vitesse entièrement développés pour le cas 2D axisymétrique pour $We = 10$ et $L^2 = 10, 100$ et 1000	56
Figure IV.18	Contrainte normale normalisée avec la contrainte de cisaillement newtonien à la paroi pour le cas 2D axisymétrique pour $L^2 = 10$ et $We = 0.5, 1, 2, 5$ et 10	57
Figure IV.19	Contrainte normale normalisée avec la contrainte de cisaillement à la paroi, du modèle FENE-P pour le cas 2D axisymétrique ($\tau_w = \tau_{xr}(r = 1)$) pour $L^2 = 10$ et $We = 0.5, 1, 2, 5$ et 10	58
Figure IV.20	Variation du coefficient de frottement normalisé C_f/C_{fN} avec le paramètre d'extensibilité L^2 et le nombre de Weissenberg pour les différentes géométries considérées.....	58
Figure IV.21a	Comparaison des contours de la vitesse axiale normalisée u/\bar{u} pour la géométrie carrée, le cas newtonien.....	60
Figure IV.21b	Contours de la vitesse axiale normalisée u/\bar{u} pour la géométrie carrée, le cas FENE-P.....	60
Figure IV.22a	Comparaison des contours de la vitesse axiale normalisée u/\bar{u} pour la géométrie rectangulaire, le cas newtonien.....	61
Figure IV.22b	Contours de la vitesse axiale normalisée u/\bar{u} pour la géométrie rectangulaire $a/b = 1/2$, le cas FENE-P.....	61
Figure IV.23a	Comparaison des contours de la vitesse axiale normalisée u/\bar{u} pour la géométrie triangulaire équilatérale, le cas newtonien.....	62
Figure IV.23b	Contours de la vitesse axiale normalisée u/\bar{u} pour la géométrie triangulaire équilatérale, le cas FENE-P.....	62
Figure IV.24	Nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale $x' = x/D.Re.Pr$, pour le cas 2D axisymétrique, effet d'extensibilité L^2 , $We = 1$ et 10	64
Figure IV.25	Nombre de Nusselt vs. la distance axiale $x' = x/D.Re.Pr$, pour le cas 3D circulaire, effet d'extensibilité L^2 , $We = 1$ et 10	65
Figure IV.26	Nombre de Nusselt vs. paramètre dimensionnel $We^2 / (aL)^2$, pour le cas 2D axisymétrique.....	66
Figure IV.27	Nombre de Nusselt vs. la distance axiale $x' = x/D.Re.Pr$, pour le cas	

	triangulaire équilatéral, effet d'extensibilité L^2 , $We = 1$ et 10	67
Figure IV.28	Nombre de Nusselt vs. la distance axiale $x' = x/D.Re.Pr$, pour le cas carré, effet d'extensibilité L^2 , $We = 1$ et 10	68
Figure IV.29	Nombre de Nusselt vs. la distance axiale $x' = x/D.Re.Pr$, pour le cas rectangulaire ($b/a = 1/2$), effet d'extensibilité L^2 , $We = 1$ et 10	69
Figure IV.30a	Comparaison des profils de vitesse entièrement développés pour les cas 2D axisymétrique et 3D circulaire avec ceux de Cruz et al [24] pour $L^2 = 10$ et $We = 1, 2, 5$ et 10 pour $\beta = 1/9$	72
Figure IV.30b	Profils de vitesse entièrement développés pour le cas 2D axisymétrique pour $L^2 = 10$, $We = 1, 2, 5$ et 10 , $\beta = 1/9$	73
Figure IV.31a	Comparaison des profils de vitesse entièrement développés pour les cas 2D axisymétrique et 3D circulaire avec ceux de Cruz et al [24] pour $We = 10$, $L^2 = 10, 100$ et 1000 , $\beta = 1/9$	74
Figure IV.31b	Profils de vitesse entièrement développés pour le cas 2D axisymétrique pour $We = 10$, $L^2 = 10, 100$ et 1000 , $\beta = 1/9$	74
Figure IV.32a	Comparaison des profils de vitesse entièrement développés pour le cas 2D axisymétrique avec ceux de Cruz et al [24] pour $L^2 = 10$, $We = 10$, $\beta = 0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 0.8$ et 0.999	75
Figure IV.32b	Profils de vitesse entièrement développés pour le cas 2D axisymétrique pour $L^2 = 10$, $We = 10$, $\beta = 0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 0.8$ et 0.999	76
Figure IV.33a	Contraintes de cisaillement normalisées pour le cas 2D axisymétrique pour $We = 10$, $L^2 = 10$ et différentes valeurs de β	77
Figure IV.33b	Contraintes normales normalisées pour le cas 2D axisymétrique pour $We = 10$, $L^2 = 10$ et différentes valeurs de β	77
Figure IV.34	Variation du coefficient de frottement normalisé C_f/C_{fN} en fonction du paramètre extensibilité L^2 et du nombre de Weissenberg pour les différentes géométries considérées et pour différentes valeurs de β	79
Figure IV.35a	Comparaison des contours de la vitesse axiale normalisée u/\bar{u} pour la géométrie carrée, pour $\beta = 0$ et $1/9$, pour le cas extrême $We = 10$ et $L^2 = 10$	80
Figure IV.35b	Contours de la vitesse axiale normalisée u/\bar{u} pour la géométrie carrée, le cas FENE-P, pour $\beta = 0$ et $1/9$	80
Figure IV.36a	Comparaison des contours de la vitesse axiale normalisée u/\bar{u} pour la géométrie rectangulaire ($b/a = 1/2$), pour $\beta = 0$ et $1/9$, pour le cas	80

	extrême $We = 10$ et $L^2 = 10$	81
Figure IV.36b	Contours de la vitesse axiale normalisée u/\bar{u} pour la géométrie rectangulaire ($b/a = 1/2$), le cas FENE-P, pour $\beta = 0$ et $1/9$	81
Figure IV.37a	Comparaison des contours de la vitesse axiale normalisée u/\bar{u} pour la géométrie triangulaire équilatérale, pour $\beta = 0$ et $1/9$, pour le cas extrême $We = 10$ et $L^2 = 10$	82
Figure IV.37b	Contours de la vitesse axiale normalisée u/\bar{u} pour la géométrie équilatérale triangulaire, le cas FENE-P, pour $\beta = 0$ et $1/9$	82
Figure IV.38	Nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale $x' = x/D.Re.Pr$, pour le cas 2D axisymétrique, effet d'extensibilité L^2 , $We = 1$ et 10	83
Figure IV.39	Nombre de Nusselt vs. la distance axiale $x' = x/D.Re.Pr$, pour le cas 3D circulaire, effet d'extensibilité L^2 , $We = 1$ et 10	84
Figure IV.40	Nombre de Nusselt vs. paramètre $We^2 / (aL)^2$, pour le cas 2D axisymétrique, effet de β	85
Figure IV.41	Nombre de Nusselt vs. la distance axiale $x' = x/D.Re.Pr$, pour le cas carré, effet d'extensibilité L^2 , $We = 1$ et 10	86
Figure IV.42	Nombre de Nusselt vs. la distance axiale $x' = x/D.Re.Pr$, pour le cas rectangulaire, effet d'extensibilité L^2 , $We = 1$ et 10	87
Figure IV.43	Nombre de Nusselt vs. la distance axiale $x' = x/D.Re.Pr$, pour le cas triangulaire, effet d'extensibilité L^2 , $We = 1$ et 10	88

Chapitre I

Introduction générale

I.1 Introduction

Les fluides non newtoniens sont présents dans presque tous les produits chimiques et les industries de transformation. Ce type de fluide a fait l'objet de recherches fondamentales poussées, non seulement parce que les fluides non newtoniens sont très présents dans la nature, mais aussi en vue d'éventuelles applications industrielles. Les facteurs qui déterminent les caractéristiques rhéologiques de ce type de fluides sont très complexes et leur compréhension nécessite des connaissances dans plusieurs disciplines (mathématique, physique et chimie). Par ailleurs, les domaines d'application sont aussi extrêmement vastes et diversifiés.

En particulier, l'étude du comportement des fluides viscoélastiques avec transfert de chaleur est un domaine de recherche très actif, étant donné le grand nombre d'applications des polymères dans l'industrie. Un des outils utilisés pour analyser les écoulements de fluides viscoélastiques est la simulation numérique.

Le transfert de chaleur dans la région d'entrée des conduites non-circulaires est d'un intérêt particulier dans la conception des échangeurs de chaleur compacts dans les industries chimique, pharmaceutique, pétrochimique et alimentaire. Généralement les échangeurs de chaleur utilisent des conduites de sections circulaires et rectangulaires, qui sont faciles à fabriquer, entretenir et nettoyer. Comme la plupart des fluides utilisés dans l'industrie chimique, pharmaceutique, pétrochimique, et des procédés de l'industrie alimentaire sont non-newtoniens, il est important de déterminer les caractéristiques de chaleur transférée par convection forcée en régime d'écoulement laminaire d'un fluide non-newtonien à travers des conduits de sections circulaire et non-circulaire. Le problème d'écoulement laminaire à travers des conduites circulaires et non-circulaires avec transfert de chaleur (appelé aussi le problème classique de Graetz) pour les fluides newtoniens a reçu suffisamment d'attention dans la littérature à l'aide de l'approche théorique, numérique ou expérimentale. Cependant, pour les fluides non-newtoniens et en particulier viscoélastiques, la littérature demeure restreinte et l'approche expérimentale reste tout au moins difficile à réaliser dans la majorité des cas.

I.2 Etude bibliographique

Le problème de Graetz considère un régime d'écoulement hydrodynamique pleinement développé (profil de vitesse dépendant seulement de la position radiale), mais se développe thermiquement. Historiquement, le problème classique de Graetz [1] remonte à l'année 1883, le but recherché était la détermination de la distribution des températures d'un écoulement laminaire, permanent, dans un tube circulaire d'un fluide newtonien à propriétés thermo-physiques constantes. Le travail exhaustif classique compilé par Shah et London [2] porte sur le transfert de chaleur par

convection pour des conduites circulaire et non circulaire pour les fluides newtoniens, et une extension de ce travail a été rapportée par Shah et Bhatti [3].

Le problème de Graetz pour un écoulement laminaire d'un fluide non-newtonien en loi de puissance à travers des conduites circulaires a été examiné par Lyche et Bird [4] et une solution semi-analytique a été obtenue. Une extension de leurs études a été rapportée par Toor [5] qui a résolu les équations du champ analytique en prenant en compte la génération de chaleur interne. Mansour [6] a obtenu une solution analytique du problème de Graetz dans les conduites circulaires pour un fluide non-newtonien en loi de puissance pour différentes valeurs de l'indice « n », en utilisant des fonctions hypergéométriques confluentes et la transformation de Laplace pour le cas d'une température constante à la paroi et sans dissipation visqueuse.

La plupart des solutions analytiques suivent le modèle de réduction des équations régissant à un problème Sturm-Liouville pour ensuite calculer numériquement les valeurs propres et les vecteurs propres [7]. Des solutions analytiques d'un écoulement laminaire d'un fluide en loi de puissance à travers un tube ont été développées par Parikh et Mahalingam [8] pour obtenir les profils de température dans le cas d'un flux de chaleur constant imposé sur la paroi et aussi en faisant varier le flux de chaleur arbitrairement. Flores et al. [9] ont obtenu un comportement asymptotique d'un fluide en loi de puissance avec température de paroi constante à travers des géométries planes et asymétriques.

Les premiers travaux de McKillop [10] rapportent sur la solution numérique des fluides en loi de puissance pseudo-plastiques à travers des tubes circulaires. Chandrupatla et Sastri [11] ont utilisé la méthode des différences finies pour un écoulement laminaire avec transfert de chaleur pour des fluides newtoniens et pseudo-plastiques à travers une conduite de section carrée pour différentes conditions aux limites thermiques. La solution numérique et les résultats du nombre de Nusselt pour les fluides newtoniens donnent des valeurs en excellent accord avec celles disponibles dans la littérature. En général, il a été reporté que le coefficient de transfert de chaleur pour les fluides rhéofluidifiants représentés par la loi de puissance est supérieure à celui des fluides newtoniens.

La capacité des fluides viscoélastiques à améliorer le transfert de chaleur dans un écoulement laminaire dans des tubes de section transversale non circulaire a été d'abord démontrée par Hartnett et Kostic [12]. Des solutions analytiques et semi-analytiques avec des fluides obéissant le modèle Simplifié Phan-Thien Tanner (SPTT) [13] ont été obtenues par Coelho et al. [14] pour un écoulement laminaire pleinement développé avec transfert de chaleur à travers deux géométries axisymétrique et plane dans le cas d'une température constante à la paroi. Les résultats montrent une augmentation du coefficient de transfert de chaleur avec l'augmentation du paramètre « $\varepsilon^{1/2}We$ » qui combine l'effet d'élasticité représenté par le nombre de Weissenberg « We » et l'élongation du fluide représentée par

le paramètre ε . Cette augmentation qui peut atteindre jusqu'à 14% par rapport à la valeur dans le cas newtonien, est le résultat d'augmentation du niveau de fluidification par cisaillement régi par ε dans le modèle SPTT. La solution analytique pour l'écoulement de Poiseuille d'un fluide viscoélastique représenté par le modèle PTT non-affine a été rapportée indépendamment par Letelier et Siginer [15,16] et Oliveira et Pinho [17]. Coelho et al. [18] ont réalisé une étude théorique du problème de Graetz dans le cas plan et axisymétrique en utilisant la solution du champ de vitesse dérivée dans la Ref. [17], et ont discuté la variation du nombre de Nusselt pour différents nombres de Brinkman et aussi l'effet des deux paramètres combinés, le nombre de Weissenberg We le paramètre ε , sur l'amélioration du coefficient de transfert de chaleur.

Un autre modèle viscoélastique commun pour les fluides polymères est le modèle FENE-P (Finite Extensible Non-linear Elastic - Peterlin, voir [19, 20]). Le modèle FENE-P est l'un des modèles les plus couramment utilisés pour les polymères liquides sous la forme de solutions diluées, semi-diluées et concentrées, voir Purnode et Crochet [21]. Contrairement aux modèles PTT et SPTT qui sont des modèles basés sur des milieux continus, la FENE-P possède une équation constitutive à base moléculaire et est connu pour prédire la diminution de la viscosité en fonction du cisaillement et de modéliser avec précision les propriétés viscosimétriques pour un certain nombre de fluides.

La solution du cas complètement développée d'un fluide de type FENE-P à travers un tube circulaire et aussi dans le cas bidimensionnel plan a été obtenue par Oliveira [22]. Il a été constaté que pour le modèle FENE-P, le profil de vitesse tend à être plus uniforme en augmentant le paramètre adimensionnel caractérisant la viscoélasticité, le nombre de Deborah (De), ou par la diminution du paramètre d'extensibilité L^2 . Cela est dû au comportement de fluidification par cisaillement du fluide FENE-P. Les résultats montrent aussi que le profil de la contrainte normale varie de façon non-monotone avec le nombre de Deborah De . Pour $De < De_{cr}$ (De_{cr} est le nombre de Deborah critique), la contrainte normale augmente avec l'élasticité, mais pour des valeurs de Deborah supérieures à la valeur critique De_{cr} , cette tendance est inversée.

Oliveira et al. [23] ont obtenu une solution semi-analytique pour le problème du Graetz des liquides viscoélastiques obéissant au modèle FENE-P. La solution obtenue pour les cas axisymétrique et plan en tenant compte de la présence de la dissipation visqueuse pour les deux conditions aux limites thermiques, température constante et flux de chaleur constant à la paroi. Ils ont déterminé que la différence entre le comportement du PTT et les fluides FENE-P est due à l'effet d'élongation du fluide représenté par le paramètre ε et l'effet du paramètre d'extensibilité L^2 . L'augmentation du paramètre ε et le nombre de Weissenberg mène à une augmentation du nombre de Nusselt, voir Coelho et al. [18]. L^2 et $\varepsilon^{1/2}We$ manifestent des effets opposés sur l'amélioration du transfert de chaleur. L'augmentation du paramètre $\varepsilon^{1/2}We$ mène à une augmentation

du nombre de Nusselt et l'augmentation du paramètre d'extensibilité L^2 conduit à une diminution de fluidification par cisaillement, et par conséquent une diminution dans le coefficient de transfert de chaleur.

Cruz et al [24] cependant ont dérivé une solution générale exacte pour un écoulement entièrement développé pour les cas axisymétrique et plan des fluides obéissant au modèle FENE-P et PTT respectivement en tenant compte de la contribution newtonienne. Les résultats sont quantifiés par référence aux effets des paramètres rhéologiques sur le champ de vitesse et les contraintes normales et tangentielles.

I.3. Objectif de la thèse

Le problème du transfert de chaleur d'un fluide newtonien en régime laminaire et permanent dans la région d'entrée de conduites de section circulaire et non-circulaire a été traité dans de nombreux travaux antérieurs à l'aide de l'approche théorique, numérique ou expérimentale. Cependant, pour les fluides non-newtoniens et en particulier viscoélastiques, la littérature demeure restreinte et les travaux souvent éparses. Les extensions du problème de Graetz, considèrent : l'effet de dissipation visqueuse et le régime transitoire. La plus importante extension est la considération des fluides non-newtoniens vue la complexité de la modélisation de ce type de fluides et en particulier les fluides de type viscoélastique. En outre, les écoulements des fluides non-newtoniens, dans les conduites de section circulaire ou non-circulaire, ont une grande importance pratique, éventuellement dans les processus industriels, tels que la manipulation de polymères, la stérilisation de la nourriture, la fabrication de produits cosmétiques, plastiques, peinture et bien d'autres. Des solutions analytiques et semi-analytiques pour le même problème avec un fluide viscoélastique de type SPTT et FENE-P ont été obtenues pour les cas axisymétrique et plan durant les dix dernières années, [14, 17, 18, 22, 23 et 24]. Ces solutions représentent une avancée intéressante mais demeurent toutefois limitées à des géométries simples. Obtenir des solutions analytiques dans le cas de conduites avec sections non-circulaires demeure pour le moment pratiquement impossible.

L'objectif donc de ce travail est d'utiliser une approche numérique pour l'étude de l'écoulement laminaire en convection forcée (le problème de Graetz) d'un fluide viscoélastique à travers des conduites de section circulaire et non circulaires à l'aide du logiciel « POLYFLOW ». Les deux modèles rhéologiques utilisés sont le SPTT (Phan-Thien Tanner simplifiée) et FENE-P (Finite Extensible Nonlinear Elastic-Peterlin). Le choix de ces modèles repose sur plusieurs considérations :

Ces deux modèles viscoélastiques de type différentiel sont issus de deux catégories de fluides viscoélastiques [25]. Le premier modèle choisi est le modèle de Phan-Thien Tanner simplifiée

(SPTT) qui représente la catégorie des modèles basés sur des concepts de mécanique des milieux continus. Les modèles Phan- Thien/Tanner (PTT) et Giesekus sont les plus couramment utilisés de cette catégorie. Le modèle de Giesekus comprend un paramètre contrôlant la non-linéarité, alors que celui du PTT en inclut deux. Ce modèle est bien connu pour bien reproduire le comportement en cisaillement et en élongation.

Le deuxième modèle choisis celui du FENE-P est basée sur l'utilisation de concepts appartenant à la théorie moléculaire des solutions polymériques et l'utilisation de la mécanique statistique. La littérature indique que ce modèle est approprié dans les cas où le comportement rhéofluidifiant connue en anglais "shear-thinning" est présent. Ce comportement représente la diminution de la viscosité avec augmentation du taux de cisaillement. Le modèle FENE-P est caractérisé par le fait que l'extensibilité maximale du "dumbell" est fixée à une certaine valeur déterminée dans sens où il ne permet pas au polymère de s'allonger indéfiniment.

Le programme de simulations considère d'abord la géométrie 2D axisymétrique en vue de la validation de l'approche numérique avec des solutions analytiques publiées dans la littérature. L'étude sera ensuite étendue à d'autres géométries tri-dimensionnelles circulaires et des géométries non-circulaires telles que des conduites de sections transversales triangulaires, carrées, rectangulaires et elliptiques.

L'étude analyse d'une façon détaillée l'influence des paramètres rhéologiques sur le champ de vitesse et l'amélioration du transfert de chaleur dans le cas où la dissipation visqueuse reste négligeable. L'analyse prend en compte l'influence du paramètre adimensionnel caractérisant la viscoélasticité, le nombre de Weissenberg (We), et d'autres paramètres particuliers au modèle choisi tels que le paramètre d'extensibilité L^2 pour le cas du modèle FENE-P sur le comportement du champ thermique et le débit. Les résultats numériques pour les géométries non-circulaires obtenus sont présentés ici pour la première fois.

I.4. Organisation de la thèse

Le présent mémoire est structuré en quatre chapitres avec une conclusion générale :

- Le premier chapitre présente une introduction générale ainsi que la problématique des écoulements viscoélastiques avec transfert de chaleur dans des conduites suivi par une étude bibliographique.

- Le deuxième chapitre est consacré au rappel des notions importantes concernant la rhéologie et les propriétés des fluides viscoélastiques, ainsi que les modèles rhéologiques utilisés dans cette étude.

- Le troisième chapitre traite de la formulation mathématique. On y décrit les équations qui régissent l'écoulement, et la méthode des éléments finis, les schémas numériques utilisés, les configurations géométriques traitées et les conditions aux limites appropriées.

- Le quatrième chapitre présente les résultats ainsi que leur discussion.

- Enfin une conclusion générale résume les résultats trouvés. Des perspectives pour des études futures sont aussi présentées.

Chapitre II

Rhéologie et classification des fluides non-newtoniens

II.1 Généralités sur la rhéologie

La rhéologie est la science qui étudie les déformations et l'écoulement de la matière. Elle a pour objet d'analyser les comportements mécaniques des substances et d'établir leurs lois de comportement. La rhéologie englobe de nombreuses disciplines fondamentales telles que la résistance des matériaux, la mécanique des fluides, la plasticité. Un matériau est considéré comme déformé quand sa structure microscopique est modifiée du fait de l'action d'une force (plus spécifiquement une **contrainte** τ) appliquée sur lui. Il est possible de classer les matériaux en fonction de leur comportement :

- il existe des corps très déformables ou fluides qui prennent une déformation finie sous l'effet d'une pression hydrostatique, et un écoulement indéfini sous l'effet d'une contrainte de cisaillement même faible.
- il existe des corps peu déformables ou solides qui ont une déformation finie quelle que soit la nature de la contrainte, au moins jusqu'à un certain seuil de contrainte.
- il existe des matériaux (les plus courants) qui sont compris entre ces deux extrêmes (les matériaux à comportement élastique, plastique, visqueux et viscoplastique).

On distingue deux types d'écoulements qui se caractérisent par le déplacement relatif entre molécules adjacentes: écoulement d'élongation et de cisaillement. Dans un **écoulement d'élongation**, deux éléments adjacents du matériau selon leur position dans l'écoulement s'éloignent à partir d'une position initiale proche ou se rapprochent à partir d'une position initiale distante ; par contre, dans un **écoulement de cisaillement**, ces éléments peuvent se croiser. Pour caractériser un écoulement entièrement, il faut utiliser une échelle de temps associée à la déformation; on obtient finalement le **gradient de vitesse** $\dot{\gamma}$ et le **taux d'élongation** $\dot{\epsilon}$.

Considérons la situation représentée dans la figure. II.1, un matériau comme un ensemble de couches moléculaires parallèles emprisonnées entre 2 plans parallèles de surface S séparés d'une distance h . Un des plans est fixe, et le second est mis en mouvement par une force F appliquée à la plaque supérieure. La force nécessaire par unité de surface pour tirer la plaque est à l'origine de la contrainte ($\tau = F / S$) [26]. Sous l'effet de la force tangentielle, la première couche moléculaire se déplace à la même vitesse. Les couches inférieures vont se mouvoir dans la même direction mais avec des vitesses de plus en plus petites. Ils se créent entre les deux plans un **gradient de vitesse** d'amplitude $\dot{\gamma} = v_x / h$.

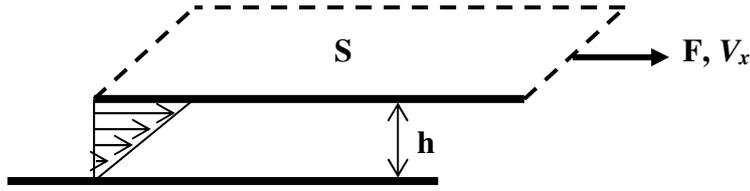


Figure. II.1. Représentation schématique d'un écoulement de cisaillement simple induit par une force F. Le fluide confiné entre deux plaques de surface S, qui se trouvent à une distance h.

La plaque supérieure se déplace à une vitesse v_x . Dans le cas d'un fluide newtonien, le coefficient de proportionnalité reliant le gradient de vitesse à la contrainte est la viscosité μ du fluide, qui est définie par :

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (2.1)$$

D'un autre côté, nous montrons à titre d'information un autre type de déformation: l'élongation, qui nous amène à définir la viscosité élongationnelle. Un écoulement élongationnel est un écoulement dans lequel les éléments de fluide sont étirés sans rotation ni cisaillement. La figure II.2 montre l'élongation simple d'un matériau de longueur initiale l_0 soumis à une force F dans la direction x et qui produit un allongement dl . Le rapport entre l'allongement et longueur initiale est définie comme la déformation relative $\varepsilon' = dl / l$.

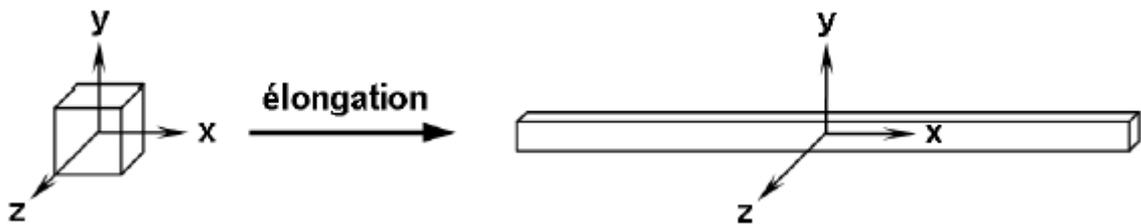


Figure. II.2. Élongation simple dans la direction x.

Le coefficient de proportionnalité reliant la déformation relative à la contrainte est le **module élastique G**, défini par :

$$G = \frac{\tau}{\varepsilon'} \quad (2.2)$$

Il serait pratique de pouvoir considérer que tout liquide est purement « visqueux » et tout solide purement « élastique » mais aucun matériau « réel » ne correspond parfaitement à ces deux extrêmes.

Les fluides viscoélastiques se caractérisent par un comportement intermédiaire entre fluide et solide car leur structure interne dépend du temps caractéristique de la contrainte appliquée. Quand celui-ci est faible ou respectivement grand, elles se comportent comme des solides ou des fluides (essayez de marcher plus ou moins rapidement sur le sable mouillé).

II.1.1 Tenseur des contraintes

Pour un liquide non-newtonien, il est nécessaire de tenir compte des contraintes perpendiculaires à l'écoulement, plus communément appelées contraintes normales. Nous introduisons le tenseur des contraintes à cet effet.

Le tenseur des contraintes fait apparaître toutes les contraintes qui peuvent s'exercer sur un matériau, c'est-à-dire non seulement les contraintes tangentielles à l'origine des cisaillements, mais également les contraintes à l'origine des compressions et des elongations du matériau.

Le concept de pression isotropique P en tant que force normale exercée par unité de surface est bien connu, mais il y a également des contraintes qui conduisent à la déformation d'un fluide qui doivent être formulées complètement sous forme de tenseurs [27].

Considérons un élément de surface dS dans le plan xz : la normale n à la surface dS est suivant l'axe y (voir Figure II.3). Une contrainte σ appliquée à cette surface peut être décomposée en trois composantes suivant les axes x , y et z : ce sont respectivement σ_{xy} , σ_{yy} et σ_{zy} . Plus généralement, dans la notation σ_{ij} , i est la direction de la contrainte et j la direction de la normale n à la surface dS . σ_{xy} et σ_{zy} sont des contraintes tangentielles et σ_{yy} est une contrainte normale.

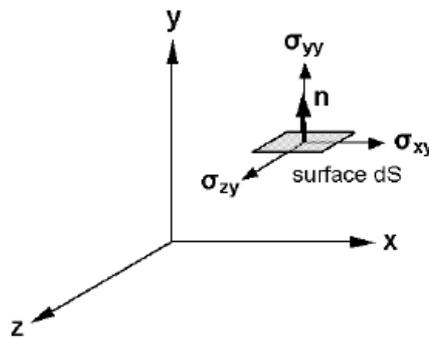


Figure II.3. Composantes σ_{xy} , σ_{yy} , σ_{zy} de la contrainte s'exerçant sur une surface dS de normale orientée suivant l'axe y .

Nous définissons ici le tenseur des contraintes totales de Cauchy σ , objet décrivant les informations sur les efforts internes en un point. Par construction, dans le cas général, ce tenseur contient des termes élastiques et dissipatifs. On prend l'habitude, pour les fluides viscoélastiques, de séparer le terme de pression hydrostatique $-PI$ (avec I la matrice identité) des autres effets.

On note ainsi le tenseur des contraintes totales de Cauchy:

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}_p + \boldsymbol{\tau}_s \quad (2.3)$$

ou $\boldsymbol{\tau}_p$ est le tenseur contenant des effets élastiques et $\boldsymbol{\tau}_s$ est le tenseur des contraintes visqueuses.

La relation entre le tenseur des contraintes et l'histoire des déformations est à l'origine des lois de comportement pour décrire l'écoulement d'un fluide. Pour décrire correctement les déformations et leur histoire il faut définir le tenseur des gradients de vitesse L_{ij} au sein du fluide :

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (2.4)$$

Ce tenseur peut être décomposé en une partie symétrique et une partie antisymétrique. Les termes de la diagonale caractérisent des efforts en traction ou en compression, alors que les autres représentent les efforts associés au cisaillement. C'est-à-dire que le tenseur des taux de déformation d_{ij} qui nous intéresse correspond à la partie symétrique de L_{ij} :

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.5)$$

Dans le cas d'un cisaillement simple, le tenseur des contraintes visqueuses et le tenseur des taux de déformation s'écrivent :

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{d} = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

La viscosité apparente est définie comme :

$$\mu = \frac{\tau_{xy}}{\dot{\gamma}} \quad (2.8)$$

Et la première et deuxième différence de contraintes normales sont définies comme :

$$N_1 = \tau_{xx} - \tau_{yy} \quad (2.9)$$

$$N_2 = \tau_{yy} - \tau_{zz} \quad (2.10)$$

L'équation constitutive pour les fluides newtoniens incompressibles contient une seule constante : la viscosité μ , nous pouvons écrire $\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{d}$ qui donne $N_1 = N_2 = 0$ en cisaillement simple.

II.1.2 Le comportement newtonien

Un liquide newtonien est donc un liquide dont la viscosité ne varie pas suivant le gradient de vitesse. Cela implique que :

- La viscosité de cisaillement μ est indépendante du taux de cisaillement.
- Dans un écoulement de cisaillement simple, les seules contraintes créées par l'écoulement sont des contraintes de cisaillement σ .
- La viscosité est indépendante du temps et les contraintes s'annulent immédiatement lorsque l'écoulement cesse. Si on reprend le cisaillement ultérieurement, la viscosité doit être la même que précédemment.

Par exemple, l'eau est un fluide newtonien parce qu'elle continue d'exhiber les propriétés d'un fluide quelle que soit la vitesse à laquelle elle est agitée. Les solutions aqueuses et les huiles de faibles viscosités, la plupart des solvants, l'air, de nombreux gaz, sont des exemples de fluides newtoniens.

Ainsi, un grand nombre de fluides suit le modèle newtonien. Mais des que le comportement d'un fluide diverge de ce modèle, il est alors regroupé dans une autre catégorie appelée « modèle non-newtonien ».

Certains liquides qui rentrent dans la catégorie des fluides non-newtoniens montrent aussi des caractéristiques élastiques (donc liées à un caractère solide). Ils sont connus en tant que fluides viscoélastiques. Par la suite, nous allons nous intéresser à ces fluides qui sont le centre d'intérêt de notre travail.

II.1.3 Le comportement non-newtonien

Un fluide est dit non newtonien lorsque le tenseur des contraintes visqueuses n'est pas une fonction linéaire du tenseur des taux de déformation. Autrement dit, lorsque sa vitesse de déformation (par exemple le taux de cisaillement) n'est pas directement proportionnelle à la force qu'on lui applique. Le meilleur exemple est celui du sable mouillé en bord de mer : quand on frappe le sable, il a la viscosité élevée d'un solide, alors que lorsqu'on appuie doucement dessus, il se comporte comme une pâte.

On peut citer à titre d'exemple de fluides non-newtoniens : les solutions de polymères, les polymères fondus, les suspensions, les pâtes, les émulsions et les fluides biologiques [28]. En rhéologie et de manière simple, un fluide non-newtonien correspond à un fluide dont la viscosité μ dépend du taux de cisaillement. Concrètement lorsqu'on soumet un tel matériau à une contrainte de

cisaillement τ , la réponse de ce fluide n'est pas proportionnelle comme serait le cas pour un fluide newtonien. Il existe plusieurs types classiques de fluide non-newtonien. Ils ne sont d'ailleurs pas exclusifs l'un de l'autre, un fluide peut présenter plusieurs des propriétés présentées ci-dessous. Le **tableau 1** résume les différents types de fluides non newtoniens. Aussi, en se basant sur le comportement de la fonction $\mu(\dot{\gamma})$, voir figure. II.4, il est d'usage de subdiviser les fluides non-newtoniens en trois catégories : Fluide rhéofluidifiant, fluide rhéoépaississant et fluide à seuil.

Tableau 1 : Les différents types de fluides non newtoniens

Fluides dont la viscosité dépend du taux de cisaillement		
Fluides rhéofluidifiants (« shear-thinning fluid » en anglais)	Sa viscosité diminue lorsque le taux de cisaillement augmente	sang, shampoing, encres d'imprimerie, jus de fruit concentré, suspensions de particules solides solutions de polymères de masse moléculaire élevée, ...
Fluides rhéoépaississants « shear-thickening fluid » en anglais)	Sa viscosité augmente avec le taux de cisaillement	suspensions de particules micrométriques d'argile, de craie, de quartz, ou de cellules du sang dans du plasma, d'amidon de maïs...
Fluides à seuil	Un fluide qui ne s'écoule que lorsque la contrainte σ qui lui est appliquée dépasse un certain seuil	Le dentifrice, la mousse à raser, le ciment frais, les peintures, les boues de forage...
Fluides dont la viscosité dépend du temps		
Les fluides thixotropes	Leur viscosité diminue avec le temps lorsqu'ils sont soumis à une contrainte constante. À l'arrêt du cisaillement, la viscosité augmente avec le temps, ce qui indique une réversibilité (au moins partielle) du phénomène	peintures, yaourts, encres, suspensions d'argile, crèmes cosmétiques, sauce tomate concentrée, sang...
Les fluides rhéopectiques	Leur viscosité augmente lorsqu'ils sont soumis à une contrainte constante	La crème Chantilly
Les fluides viscoélastiques	Un solide ou un fluide viscoélastique présente des caractéristiques tantôt d'un solide, tantôt d'un liquide, selon le temps de sollicitation auquel le matériau est soumis. Sous cisaillement ou élongation, ces matériaux subissent une première déformation instantanée comme un solide	Silly Putty

	élastique, puis continuent à se déformer de manière continue comme un liquide visqueux. À l'arrêt du cisaillement ou de l'élongation, le matériau reprend en partie sa forme initiale	
--	---	--

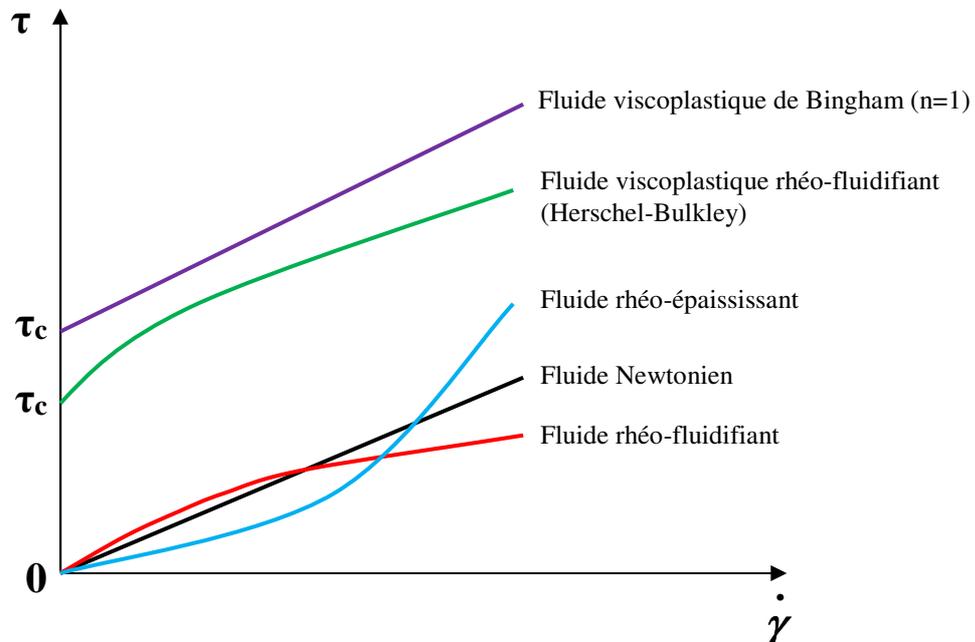


Figure. II.4. Rhéogrammes des fluides (lois de comportement rhéologiques élémentaires).

II.2 La viscoélasticité

La viscoélasticité est définie comme caractérisant un comportement mécanique particulier intermédiaire entre le comportement d'un solide idéal dit "Hookéen" et celui d'un liquide idéal dit "newtonien". La réponse d'un matériau viscoélastique à une déformation est alors un couplage entre la réponse d'un fluide visqueux (contrainte proportionnelle à la vitesse de déformation) et celle d'un solide élastique (contrainte proportionnelle à la déformation). Cela revient à considérer que les propriétés mécaniques observées sont de façons générales dépendantes du temps ou de ses quantités dérivées.

Ainsi, une contrainte appliquée engendre une déformation dans le temps et vice versa, ce qui traduit que les propriétés mécaniques d'un matériau viscoélastique évoluent dans le temps et dépendent de l'histoire des sollicitations. Quatre essais fondamentaux permettent de mettre en évidence le comportement viscoélastique des matériaux : essai de fluage, de relaxation, de recouvrance et d'effacement.

Maxwell (1867) est l'un des premiers à proposer un modèle mathématique pour un liquide avec des propriétés élastiques. Un solide est une matière qui, soumise à une contrainte donnée, a une déformation fixe finale et ne change pas continuellement de forme sous l'effet de cette contrainte. D'un autre côté un liquide est une matière qui change continuellement de forme (il s'écoule) quand il est soumis à une contrainte donnée, indépendamment de l'amplitude de la contrainte [29].

Contrairement à un fluide purement élastique, un fluide viscoélastique a un composant élastique et un composant visqueux. La viscosité d'une substance viscoélastique donne à la substance une vitesse de déformation dépendant du temps. Un matériau purement élastique ne dissipe pas l'énergie (chaleur) lorsqu'une charge est appliquée, puis enlevée. Cependant, une substance viscoélastique perd de l'énergie lorsqu'une charge est appliquée, puis enlevée. Plus précisément, la viscoélasticité est un réarrangement moléculaire. Quand une contrainte est appliquée à un matériau viscoélastique, tel qu'un polymère, une partie des chaînes de polymère changent de positions. Ce mouvement ou réarrangement est appelé Fluage (en anglais Creep).

Les matériaux viscoélastiques ont sous certaines conditions des caractéristiques analogues à celles de corps élastiques (non fluides) et dans d'autres conditions des caractéristiques de fluides simplement visqueux. C'est le cas par exemple de certaines pâtes silicones qui se comportent comme des balles en caoutchouc solide lorsqu'on les fait rebondir et qui s'étalent si on les abandonne un temps sur un plan incliné.

Pour comprendre de façon simple comment un matériau peut présenter ces deux caractéristiques, imaginons un liquide de structure complexe qui présente une énergie minimale au repos. Si une contrainte lui est appliquée, le « liquide » s'écoule en adoptant un comportement visqueux ; mais, dès que la contrainte est relâchée, ses forces internes réagissent pour récupérer l'état initial et revenir à la microstructure d'énergie minimale. Ce comportement présente une analogie avec celui d'un solide élastique qui reprend sa forme initiale quand on ne lui applique plus de contrainte. On parle alors d'un comportement viscoélastique [30].

Pour un fluide viscoélastique, un double comportement est possible au cours du temps, comme lorsqu'on s'empare d'un morceau de pâte crue qui se met à couler au bout de quelques secondes. Fondamentalement, il s'agit d'examiner la capacité de la structure microscopique à se réarranger au cours du temps. Ce couplage entre la structure et la déformation amène naturellement à introduire le temps de relaxation du fluide τ qui détermine une frontière entre les comportements solides aux temps courts et liquides aux temps longs. Cette frontière se transpose dans l'espace des fréquences : les déformations basses fréquences donneront lieu à une réponse liquide et les hautes fréquences à une réponse solide. On peut évaluer approximativement un temps caractéristique,

appelé temps de relaxation λ , en se plaçant à la frontière entre le régime élastique de module G et visqueux de viscosité μ :

$$\lambda \approx \mu / G \quad (2.11)$$

Pour prédire le comportement du fluide dans une situation d'écoulement, il s'agit donc de définir le nombre de Deborah, De , nombre adimensionnel qui compare le temps de relaxation caractéristique du matériau au temps caractéristique d'observation t .

$$De = \frac{\lambda}{t} \quad (2.12.a)$$

Il existe également un nombre adimensionnel relatif au temps de relaxation du fluide (formellement similaire au De , bien qu'il diffère par sa signification physique) que l'on utilise pour caractériser en général l'élasticité d'un fluide en écoulement : le nombre de Weissenberg (We).

$$We = \lambda \dot{\gamma} \quad (2.12.b)$$

Ce nombre permet d'estimer l'état d'anisotropie généré par une déformation. Des valeurs élevées de We sont une indication que le fluide n'a pas de temps suffisant pour se « réorganiser » (contraintes normales non nulles), suggérant que les effets élastiques sont non négligeables. Ces deux nombres sont utilisés plus ou moins couramment selon le contexte et parfois indifféremment. Dans cette thèse et dans le cadre d'écoulements stationnaires $We = \dot{\gamma}\tau$ sera utilisé pour comparer le taux de déformation local au temps de relaxation du fluide. En pratique, dans un écoulement avec des taux de déformation élevés, We sera élevé et les comportements spécifiquement viscoélastiques particuliers aux fluides complexes se manifesteront d'une manière ostentatoire.

II.2.1 Viscoélasticité linéaire

D'un point de vue mécanique, la viscoélasticité est classiquement modélisée par deux éléments distinctifs : un ressort pour prendre en compte les caractéristiques élastiques et un amortisseur hydraulique pour les caractéristiques visqueuses. Avec des combinaisons de ces éléments, nous pouvons définir plusieurs modèles dont le modèle de Maxwell et le modèle de Kelvin-Voigt sont les modèles de base.

Le comportement viscoélastique, typiquement illustré par les modèles ressorts-amortisseurs, se manifeste surtout dans les polymères, et par conséquent aussi dans les matériaux composites dont ils constituent la matrice. La propriété caractéristique de ces modèles ressorts-amortisseurs est la linéarité. Le principe de superposition de Boltzmann postule que des incréments de contrainte discrets $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ appliqués respectivement aux temps t_1, t_2, \dots, t_n agissent indépendamment sur la

déformation du matériau et que les déformations respectives s'additionnent linéairement. Par exemple avec le modèle de Maxwell, un amortisseur et un ressort sont en série (Figure. II.5). Ce modèle, représente le comportement d'un matériau viscoélastique liquide. Il possède un comportement totalement élastique sous un effort brutal (un choc par exemple) et présente une déformation résiduelle permanente après arrêt de la contrainte.

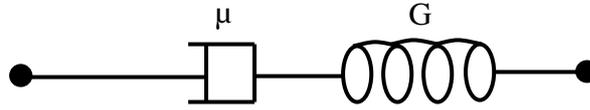


Figure. II.5. Modèle de Maxwell de viscoélasticité linéaire.

Pour le ressort élastique, la contrainte τ est proportionnelle à la déformation relative ε' par l'intermédiaire d'une constante de proportionnalité qui est le module élastique G (2.2). Dans l'amortisseur hydraulique, qui est supposé immergé dans un fluide newtonien de viscosité μ , la contrainte τ est proportionnelle au gradient de vitesse $\dot{\gamma}$ (2.1). La déformation totale γ est la somme des déformations, ce qui donne la relation suivante :

$$\gamma = \varepsilon' + \gamma_v \quad (2.13)$$

que l'on peut écrire :

$$\tau + \frac{\mu}{G} \dot{\tau} = \mu \dot{\gamma} \quad (2.14)$$

Si l'on applique une déformation γ_0 à partir de l'instante initial ($t > 0$) et que l'on résout l'équation précédente, on obtient :

$$\tau = \mu \dot{\gamma}_0 e^{-tG/\mu} \quad (2.15)$$

Le rapport μ/G , est le temps de relaxation λ du matériau.

II.2.2 Viscoélasticité non linéaire

Certains phénomènes liés à la viscoélasticité d'un fluide ne sont pas explicables grâce aux modèles de viscoélasticité linéaire. Idéalement, les forces de restauration doivent être égales dans les trois directions de l'espace; un matériau viscoélastique linéaire devrait donc récupérer ses caractéristiques initiales d'une façon équivalente. Plusieurs effets très particuliers des fluides viscoélastiques (Figure. II.6) sont liés à des différences de contraintes normales non nulles, comme l'effet Weissenberg pour lequel un fluide soumis à agitation, au lieu de générer un vortex concave autour de la tige d'agitation, donne lieu à un vortex convexe qui commence à « monter » sur la tige

dès que le gradient de vitesse est suffisant pour entraîner le développement de contraintes normales appréciables.

Un phénomène présent dans le processus d'extrusion montre comment un fluide viscoélastique se « gonfle » sous l'effet des contraintes normales pour occuper, à la sortie d'un tube, un volume plus grand que celui qu'il occupait à l'intérieur.

Ces phénomènes trouvent leur origine à l'échelle microscopique quand les contraintes normales dans les trois directions de l'espace ne sont pas les mêmes. D'un point de vue physique, la génération de contraintes normales inégales et les valeurs non nulles de N_1 et de N_2 proviennent du fait que, dans un écoulement, la microstructure d'un liquide viscoélastique devient anisotrope.

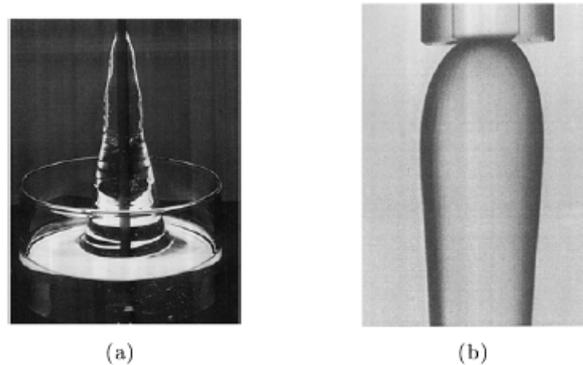


Figure II. 6. (a) Effet Weissenberg (b) Gonflement à l'extrusion pour une solution aqueuse de 2% de polyacrylamide. D'après Boger et Walters [31].

Prenons par exemple la figure. II.7, où des molécules du polymère sont diluées dans l'eau. Des chaînes de polymère, qui, au repos, auraient une enveloppe sphérique, auront tendance à se déformer dès qu'un cisaillement est imposé pour devenir une ellipsoïde dont l'axe majeur sera dans la direction de l'écoulement.

Les forces de restauration de cette microstructure anisotrope sont aussi dotées d'un caractère anisotrope et s'avèrent plus importantes dans la direction principale par rapport aux deux autres directions orthogonales. Ces forces « restauratrices » sont donc à l'origine des différences de contraintes normales N_1 et N_2 mais le deuxième est toujours très faible.

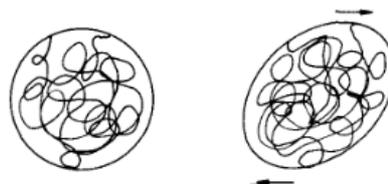


Figure. II.7. A gauche, sphère de fluide au repos soumise à une contrainte, devenant une ellipsoïde (à droite) [30].

II.2.3 Viscosité élongationnelle

La viscosité élongationnelle μ_E est la viscosité apparaissant lorsqu'une contrainte élongationnelle est appliquée au fluide. L'écoulement d'élongation peut être uni-axial, bi-axial et planaire [29].

D'après la théorie de Hencky, une déformation incrémentée ($d\varepsilon'$) est définie comme le rapport entre un changement de longueur (dl) par rapport à la longueur initiale (l), [32] :

$$d\varepsilon' = \frac{dl}{l} \quad (2.16)$$

La déformation relative peut être écrite comme :

$$\varepsilon' = \int \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) = \ln\left(1 + \frac{dl}{l_0}\right) \quad (2.17)$$

et le taux de déformation peut être défini:

$$\dot{\varepsilon}' = \frac{\partial l}{\partial t} \cdot \frac{1}{l} = \frac{dv}{l} \quad (2.18)$$

Considérons le cas particulier d'une élongation planaire bidimensionnelle équivalant à l'étirement d'une feuille plate et mince de matériau dans une seule direction (x), avec une contraction correspondante dans son épaisseur suivant la direction z , mais sans aucune variation dans la largeur y de la feuille (Figure. II.8).

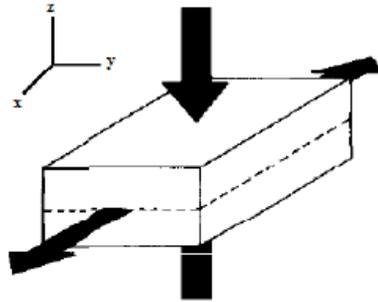


Figure. II.8. Schéma d'une élongation planaire dans la direction x [30].

Le champ de vitesse s'écrit :

$$v_x = \dot{\varepsilon}' x \quad (2.19)$$

$$v_y = 0 \quad (2.20)$$

$$v_z = -\dot{\varepsilon}' z \quad (2.21)$$

avec le tenseur du taux de déformation associé :

$$\mathbf{d} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Pour un fluide newtonien le tenseur des contraintes sera donc :

$$\boldsymbol{\tau} = -P\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau}_s = \begin{pmatrix} -P + 2\mu\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} & 0 & 0 \\ 1 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P - 2\mu\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

La première différence de contraintes normales NI dans ce cas est donc $\tau_{xx} - \tau_{zz}$, et décrit la résistance du fluide à cette élongation :

$$\tau_{xx} - \tau_{zz} = (-P + 2\mu\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - (-P - 2\mu\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = 4\mu\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mu_{EP}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.24)$$

Dans le cas particulier d'une élongation planaire, μ_{EP} est la viscosité élongationnelle planaire et on trouve pour un fluide newtonien, $\mu_{EP} = 4\mu$ où μ est la viscosité de cisaillement. En généralisant pour un fluide non newtonien, on définit la viscosité élongationnelle planaire comme:

$$\mu_{EP}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \frac{\tau_{xx} - \tau_{zz}}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (2.25)$$

II.3 Matériaux et modèles

II.3.1 Fluides viscoélastiques

Les fluides dits de Boger [33-36] ont plus ou moins une viscosité de cisaillement constante sur une grande échelle de taux de cisaillement. De tels fluides sont utilisés pour leurs propriétés viscoélastiques semblables à celles de polymères industriels. C'est en ce sens qu'on peut les assimiler à des matériaux modèles, car leurs propriétés sont plus ou moins connues et leur emploi est aisé.

Un fluide de Boger est généralement composé d'un polymère de haute masse moléculaire dissout dans un solvant peu visqueux. Le premier fluide de ce type a été formulé en 1976 par Boger [33].

L'objectif de Boger était de formuler un fluide optiquement transparent, très visqueux et hautement élastique qui exhibe une viscosité à peu près constante et qui peut être traitée à la température ambiante. Ce fluide a été formulé à partir de sirop de maltose et de polyacrylamide. Le sirop de maltose sert alors de solvant et le polyacrylamide de composante élastique à hauteur de

0.08%. Les mesures rhéologiques montrent que le sirop de maltose seul ne présente pas de diminution de la viscosité avec la vitesse de cisaillement. Par contre pour la solution sirop de maltose/polyacrylamide, on constate une faible diminution de la viscosité aux hautes vitesses (shear-thinning). La nature hautement élastique du fluide a été démontrée par la mesure de la dite première différence de contrainte normale, N_1 . Cette propriété, mesurée en cisaillement constant, est défini comme la contrainte normale dans la direction de cisaillement moins la contrainte normale dans la direction transversale.

Ces 30 dernières années, les fluides de Boger ont été utilisés pour la modélisation de certaines applications industrielles ou pour la validation de modèles théoriques. On retrouve dans la littérature différents exemples tels que la validation d'un nouveau test rhéologique [37], l'analyse par élément finis du gonflement à la filière d'un fluide hautement élastique [38], la modélisation de fluide de Boger en écoulement extensionnel [39] et déformation et relaxation de gouttes newtoniennes dans un écoulement extensionnel plan d'un fluide de Boger [40]. Les fluides de Boger ont plus ou moins une viscosité de cisaillement constante sur une grande échelle de taux de cisaillement et sont donc utilisés dans de nombreuses applications. Le tableau suivant représente quelques concentrations typiques pour la formulation de divers fluides de Boger.

Tableau 2 : Concentrations typiques pour la formulation de divers fluides de Boger.

Polymère	% wt	Solvant Visqueux	% wt	Solvant Secondaire	% wt
Polyacrylamide Hydrolysé	0,02	Sirop de maïs	90- 95	Eau	5 - 10
	0,10	Glycérol			
	0,08	Maltose			
Separan AP30	0,10–0,015	Glycérol	82 – 90	Eau	10 - 18
Separan MG500	0,04 - 1				
Gomme Xanthane	0,02	Sirop de blé	85 – 93	Eau	7 - 15
Polyisobutylène	0,05 –0,42	Polyisobutylène	95,59 - 95,95	Kérosène	4,0
Polyoxyde d'éthylène	1,5 - 2,5	Eau	97,5-98,5	Hydroxytoluène butylé	0,02 – 0,05
Polystyrène	0,15	Hercules Piccolastique	80	Diocetylphthalate	20

Au cours de ce travail, nous allons considérer différents fluides de type Boger en tenant compte des différentes valeurs de concentrations de polymère défini par le paramètre β pour la modélisation des écoulements laminaire des fluides de type SPTT et FENE-P. L'objectif est d'étudier le comportement rhéofluidifiant (en Anglais shear-thinning) ainsi que l'influence des paramètres rhéologiques de ces fluides sur l'écoulement et le transfert de chaleur.

II.3.2 Modèles rhéologiques

II.3.2.1. Modèle newtonien

Pour un fluide newtonien incompressible, le tenseur des extra-contraintes τ est donnée par,

$$\tau = 2\mu d, \quad (2.26)$$

où μ est une constante qui représente la viscosité de cisaillement et d représente le taux de déformation.

La plupart des liquides avec de petites molécules, tels que l'eau, le pétrole et le gaz peuvent être représentés par des modèles de fluides newtoniens. De nombreux autres liquides ne présentent pas ce comportement simple lors de l'écoulement, leurs viscosités, dites "apparentes", dépendent du gradient de vitesse. Ils sont dits "non-newtoniens" et peuvent se diviser en différentes catégories.

II.3.2.2. Modèle newtonien généralisé

Pour le modèle newtonien généralisé, la viscosité de cisaillement n'est pas constante, mais une fonction non linéaire soit du tenseur des extra-contraintes, ou le tenseur de taux de déformation.

$$\tau = 2\mu (II_D) d. \quad (2.27)$$

Où II_D dénotent le deuxième invariant de tenseur du gradient de vitesse définies par

$$II_D = (1/2) \text{tr} (d^2) \quad (2.28)$$

Où tr désigne la trace d'un tenseur. Pour un écoulement de cisaillement simple, $II_D = \dot{\gamma}^2$. Il représente le carré d'un taux de cisaillement instantané.

Plusieurs modèles existent, dépendant essentiellement du nombre de paramètres qu'ils comportent. Ces schémas simples, très utilisés dans l'industrie, permettent de modéliser certains phénomènes importants des fluides non-newtoniens tels que la rhéofluidification ou le rhéoépaississement. Toutefois, ils s'avèrent insuffisants pour décrire le comportement complet d'un

fluide viscoélastique : première et second différence normale de contraintes non nulles, élasticité et phénomène de mémoire ne sont pas pris en compte.

II.3.2.3. Modèle viscoélastique

Deux approches ont servi à la formulation des lois de comportement des fluides viscoélastique. La première est basée sur des concepts de mécanique des milieux continus et inclut des modèles tels que Giesekus, Leonov, Phan-Thien/Tanner et le modèle intégral K-BKZ (de Kaye-Bernstein-Kearsley- Zapas). Une fraction importante des travaux sur l'analyse numérique de l'écoulement viscoélastique des polymères fondus est basée sur l'utilisation de modèles intégraux de type K-BKZ. Pour ce qui est des modèles de type différentiel, Phan- Thien/Tanner (PTT) et Giesekus sont les plus couramment utilisés, bien que le modèle de Leonov prédise des valeurs limites plus réalistes des viscosités en élongation que le modèle de Giesekus, et ne contienne pas de paramètres non linéaires. Le modèle de Giesekus comprend un paramètre contrôlant la non-linéarité, alors que PTT en inclut deux. Ce dernier a la propriété d'ajuster indépendamment les prédictions des propriétés en cisaillement et en élongation, mais cause des oscillations artificielles lors de l'initiation des écoulements en cisaillement.

La seconde méthode pour formuler les lois de comportement viscoélastique est basée sur la dérivation de théories moléculaires et l'utilisation de la mécanique statistique inclut des modèles tels que le modèle d'Oldroyd-B et FENE. Une approche numérique récente pour simuler les écoulements viscoélastiques est la « formulation micro-macro » basée sur des théories cinétiques, où des simulations browniennes de molécules de polymères sont couplées à la modélisation de l'écoulement macroscopique.

Dans le cas d'un fluide viscoélastique, on décompose le tenseur des extra-contraintes $\boldsymbol{\tau}$ en deux parties : une contribution newtonienne du solvant $\boldsymbol{\tau}_s$ et une contribution du polymère, $\boldsymbol{\tau}_p$. On obtient :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_p + \boldsymbol{\tau}_s \quad (2.29)$$

La contribution newtonienne se calcule par l'équation (2.26) dans laquelle μ_s est une constante qui représente la viscosité de cisaillement. Alors, le tenseur d'extra-contraintes $\boldsymbol{\tau}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_p + 2\mu_s \boldsymbol{d} \quad (2.30)$$

Il reste encore à formuler une équation pour $\boldsymbol{\tau}_p$. La partie qui suit présente quelques modèles viscoélastiques pour $\boldsymbol{\tau}_p$ proposés dans la littérature.

II.3.2.3.1. Modèle de Maxwell

Le modèle de Maxwell considère la combinaison de la viscosité et l'élasticité. Le schéma mécanique de la combinaison entre ressort et amortisseur en série, représente le comportement d'un matériau viscoélastique liquide comme représenté dans la Fig. 6. L'amortisseur représente le comportement visqueux et le ressort le caractère élastique du fluide [41]. Dans la configuration présentée par la Figure. II.6, lorsqu'une contrainte axiale est appliquée, la déformation totale du système γ est la somme de chacun des éléments :

$$\gamma = \gamma_R + \gamma_A \quad (2.31)$$

ou γ_R représente la déformation du ressort et γ_A représente la déformation d'amortisseur. Tandis que la contrainte τ est la même pour tous :

$$\tau = \tau_R = \tau_A \quad (2.32)$$

Dans le cas du ressort, la contrainte est proportionnelle à la déformation ce qui se traduit par la loi de Hooke et la constante de proportionnalité est le module de Young G:

$$\tau_R = G \gamma_R \quad (2.33)$$

Dans le cas de l'amortisseur, la contrainte est proportionnelle à la vitesse de déformation ce qui se traduit par la loi linéaire de Newton et la constante de proportionnalité est la viscosité μ :

$$\tau_A = \mu \dot{\gamma}_A \quad (2.34)$$

Avec

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}, \quad (2.35)$$

Alors, la vitesse de déformation totale est donnée par l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma_R}{dt} + \frac{d\gamma_A}{dt} = \frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{\eta} \quad (2.36)$$

Qu'on peut ré-écrire sous la forme :

$$\lambda \frac{d\tau}{dt} + \tau = \eta \dot{\gamma}, \quad (2.37)$$

Le modèle de Maxwell est irréversible. Le terme visqueux en série empêche le matériau de retrouver sa déformation initiale lorsqu'une contrainte constante est instantanément supprimée. Ce modèle est utilisé pour représenter les liquides viscoélastiques, le terme liquide évoquant le fait que le matériau ne retrouve pas sa déformation initiale.

II.3.2.3.2. Modèle de Maxwell sur-convecté (UCM)

Pour passer à un modèle de Maxwell tensoriel, Oldroyd a remplacé la dérivée temporelle dans l'équation constitutive (2.37) par une dérivée convective dans un tenseur [20], la dérivée sur-convectée (en anglais upper-convected derivative) et la dérivée sous-convectée (en anglais lower-convected derivative). Le modèle Oldroyd-B utilise la dérivée sur-convectée. C'est la forme la plus fréquemment utilisée du dérivé invariant puisque le modèle UCM prédit les résultats physiquement pertinents, en particulier, il donne une première différence de contraintes normales positive et une deuxième différence de contraintes normales nulle qui est en accord qualitatif avec les données expérimentales.

En générale, le dérivée invariant d'un tenseur A est

$$\frac{\delta A}{\delta t} = \frac{DA}{Dt} - \mathbf{J} \cdot A - A \cdot \mathbf{J}^T. \quad (2.38)$$

Ou le tenseur \mathbf{J} est définie par

$$\mathbf{J} = \left(1 - \frac{\varphi}{2}\right) \nabla \mathbf{u} - \frac{\varphi}{2} (\nabla \mathbf{u})^T \quad (2.39)$$

Cette invariante temporelle est aussi connue come la dérivée de Johnson-Segalman. La dérivée sur-convectée de l'extra-tenseur est le cas spéciale de cette invariante quand $\varphi = 0$, est définie de la manière suivante :

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau} - (\nabla \mathbf{u}^T \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}). \quad (2.40)$$

et la dérivée sous-convectée de l'extra-tenseur $\overset{\Delta}{\boldsymbol{\tau}}$ est définie par :

$$\overset{\Delta}{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau} + (\nabla \mathbf{u}^T \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}). \quad (2.41)$$

Alors, (2.37) devient le modèle de Maxwell convecté (appelé aussi UCM pour Upper-Convected-Maxwell) :

$$\lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_p + \boldsymbol{\tau}_p = 2\mu_p \mathbf{d}, \quad (2.42)$$

La composante purement visqueuse de l'extra-tenseur $\boldsymbol{\tau}_s$ du modèle UCM est égale à zéro. Le modèle UCM contient les effets de mémoire et les premières différences des contraintes normales et une valeur nulle des secondes différences des contraintes normales.

II.3.2.3.3. Modèle Oldroyd-B

Le tenseur des extras-contrainte pour le modèle Oldroyd-B obéit à l'équation suivante [42]:

$$\boldsymbol{\tau}_p + \lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_p = 2\mu_p \mathbf{d}, \quad (2.43)$$

Cette loi diffère du modèle de Maxwell par l'ajout d'une contribution newtonienne dans l'expression du tenseur des extras-contraintes, Il se comporte comme le modèle de Maxwell en écoulement viscométrique, et est caractérisé par une viscosité de cisaillement constante. La première différence de contraintes normales varie quadratiquement suivant le taux de cisaillement, la seconde différence de contraintes normales est nulle. Cependant, certains problèmes numériques peuvent émerger, notamment concernant la viscosité élongationnelle qui peut tendre vers l'infini un certain taux d'élongation. Ceci limite les simulations aux fluides de faible élasticité.

II.3.2.3.4. Modèle de Phan-Thien/Tanner (PTT)

Ce modèle particulier a été introduit par Phan-Thien et Tanner. Ce modèle a la réputation de bien reproduire le comportement en cisaillement et en élongation pour les polymères fondus et solutions [13,43]. Le modèle est particulièrement efficace dans la représentation de l'écoulement viscoélastique. L'équation constitutive du modèle PTT peut être écrite sous une forme générale,

$$f(Tr(\boldsymbol{\tau}_p))\boldsymbol{\tau}_p + \lambda \left[\left(1 - \frac{\xi}{2}\right) \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_p + \frac{\xi}{2} \overset{\Delta}{\boldsymbol{\tau}}_p \right] = 2\mu_p \mathbf{d}. \quad (2.44)$$

Les constantes ε et ξ sont des paramètres du modèle qui aident à contrôler l'extension et la réponse au cisaillement, où ξ varie entre $0 \leq \xi \leq 2$ et f est une fonction qui a une forme linéaire ou exponentielle. La forme linéaire est définie par

$$f(\boldsymbol{\tau}_p) = \left\{ 1 + \frac{\varepsilon\lambda}{\mu_p} Tr(\boldsymbol{\tau}_p) \right\} \quad (2.45)$$

et la forme exponentielle est exprimée par,

$$f = \exp\left(\frac{\varepsilon\lambda}{\mu_p} Tr(\boldsymbol{\tau}_p)\right). \quad (2.46)$$

Le modèle Oldroyd-B peut être retrouvé à partir du modèle PTT lorsque $\varepsilon = \xi = 0$.

II.3.2.3.5. Modèle de Geisekus

Comme le modèle PTT, le modèle Geisekus est l'un des modèles viscoélastiques différentiels les plus réalistes. Il présente de fluidification par cisaillement (en anglais shear thinning), et une première différence de contrainte normale non quadratique à taux de cisaillement élevé. Le modèle Geisekus calcule $\boldsymbol{\tau}_p$ à partir de

$$\left(\mathbf{I} + \frac{\alpha\lambda}{\mu_p} \boldsymbol{\tau}_p \right) \cdot \boldsymbol{\tau}_p + \lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_p = 2\mu_p \mathbf{d}. \quad (2.47)$$

\mathbf{I} est le tenseur unité et α est un paramètre compris entre 0 et 1.

Pour $\alpha = 0$, on retrouve le modèle UCM. Lorsqu'un modèle viscoélastique multi-mode est utilisé, la composante purement visqueuse du tenseur de contrainte supplémentaire est définie par le premier mode seulement, plus précisément la viscosité correspondante est donnée par le produit $\mu_p\beta$ ou $\beta = \mu_p/\mu$ est le rapport de viscosité polymérique μ_p et la viscosité à cisaillement nul μ .

II.3.2.3.6. Modèle FENE-P

Le modèle FENE est un modèle dit "micro-macro". Cette terminologie indique qu'il couple des effets microscopiques et l'hydrodynamique "classique". Les modèles FENE tels que (FENE-P, FENE-L, FENE-LS et FENE-CR, voir par exemple [44]) sont dérivés à partir d'une théorie des molécules. Dans une simple présentation, les molécules sont décrites comme des « dumbbells ». L'idée maîtresse de ces modèles consiste à identifier chaque molécule d'un polymère à un vecteur \mathbf{Q} appelé vecteur bout-à-bout (end-to-end en anglais) [45]. On assimile ainsi une molécule à un ressort et on lui applique les lois classiques de la mécanique en utilisant la force de ressort pour décrire la dynamique du polymère, Warner [46].

Le modèle FENE-P suggéré par Peterlin [19], est basé sur une équation constitutive de forme fermée, dérivée du modèle de FENE original, en utilisant une approximation de pré-moyenne auto-cohérente. Le modèle FENE-P calcule $\boldsymbol{\tau}_p$ explicitement à partir d'une configuration tenseur (\mathbf{A}) sur la base d'une équation algébrique de Kramers [47, 48]:

$$\boldsymbol{\tau}_p = \frac{\mu_p}{\lambda} \left[\frac{\mathbf{A}}{1 - \text{Tr}(\mathbf{A})/3L^2} - \frac{\mathbf{I}}{1 - 1/L^2} \right]. \quad (2.48)$$

où \mathbf{A} est calculé à partir de l'équation différentielle suivante

$$\frac{\mathbf{A}}{1 - \text{Tr}(\mathbf{A})/3L^2} + \lambda \overset{\nabla}{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{I}}{1 - 1/L^2} \quad (2.49)$$

où L représente le rapport entre la longueur maximale du ressort et sa longueur dans l'état statique. Dans cette expression, L ou (L^2) doit être strictement supérieur à 1. En outre, quand L tend vers l'infini, le modèle FENE-P devient équivalent au modèle de Maxwell.

II.3.2.4. Le choix du modèle rhéologique

D'autres modèles rhéologiques sont disponibles dans la littérature ont montré que les propriétés rhéologiques de quelques fluides viscoélastiques comme des aliments tels que la pâte

peuvent être prédits par des modèles viscoélastiques intégrés, tels que le modèle Doi-Edwards et le modèle KBKZ. Toutefois, les modèles viscoélastiques intégrés ne se prêtent pas à être utilisés dans la simulation numérique des écoulements complexes, en raison des coûts élevés de calcul impliqués dans le suivi de l'histoire des contraintes.

Dans le code POLYFLOW, la modélisation des écoulements viscoélastiques basée sur les modèles intégrés est limitée pour les géométries 2D seulement et n'est pas applicable pour les géométries 3D. Étant donné que l'objectif de ce travail est la modélisation des écoulements viscoélastiques à travers des géométries 2D et 3D, alors les modèles intégrés ne sont pas inclus dans ce travail.

Il existe donc un besoin de trouver des modèles viscoélastiques différentiels appropriés cités précédemment, qui sont relativement simples, pour prédire les propriétés rhéologiques des écoulements laminaires viscoélastiques avec transfert de chaleur.

Au cours de cette thèse, deux modèles viscoélastiques différentiels différents ont été choisis pour la modélisation des écoulements laminaires à travers des conduites de sections circulaires et non-circulaires. Le premier modèle choisi est le modèle Simplifié de Phan-Thien Tanner (SPTT) qui représente la catégorie des modèles basée sur des concepts de mécanique des milieux continus. Le deuxième modèle choisi pour la représentation du comportement viscoélastique est le modèle FENE-P qui est basé sur la dérivation de théories moléculaires et l'utilisation de la mécanique statistique.

Chapitre III

Formulation mathématique et méthode numérique

III.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous décrivons le système d'équations régissant les écoulements de fluides non-newtoniens de type viscoélastique ainsi que le transfert de chaleur à travers des conduites circulaire et non circulaire. Par la suite, nous exposons la méthode numérique utilisée pour la résolution des équations gouvernantes.

III.2. Modèle mathématique

La modélisation mathématique générale des écoulements des fluides avec transfert de chaleur est représentée par un ensemble d'équations aux dérivées partielles. Le code de calcul POLYFLOW basé sur la méthode des éléments finis (FEM) résoud les équations de quantité de mouvement, de continuité, d'énergie et l'équation rhéologique. Nous considérons dans notre travail un écoulement laminaire stationnaire, bidimensionnel axisymétrique et tridimensionnel d'un fluide incompressible. De plus nous adoptons l'hypothèse que les propriétés physiques du fluide (ρ , c_p et k) sont supposées constantes. Les équations s'écrivent, alors, dans le système des coordonnées cartésiennes (x,y,z) comme suit

III.2.1. Equation de continuité

L'application du principe de conservation de la masse à un élément fluide infinitésimal aboutit à l'équation ci-dessous :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.1)$$

III.2.2. Equations de quantité de mouvement

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (3.2)$$

III.2.3. Equation de l'énergie

$$\rho c_p \nabla(\mathbf{u}T) = k \nabla^2 T, \quad (3.3)$$

\mathbf{u} , p , ρ , k , c_p , T et $\boldsymbol{\tau}$ représentent le vecteur de vitesse, la pression, la masse volumique du fluide, la conductivité thermique, la chaleur spécifique, la température et le tenseur des extras-contraintes totales, respectivement.

III.2.4. Equation constitutive

Le tenseur total des extras-contraintes $\boldsymbol{\tau}_{ij}$ est décomposé en une composante du tenseur viscoélastique $\boldsymbol{\tau}_p$ et $\boldsymbol{\tau}_s$ une composante du tenseur newtonien purement visqueux en utilisant la méthode EVSS (Elastic–Viscous Split–Stress),

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_p + \boldsymbol{\tau}_s, \quad (3.4)$$

$$\boldsymbol{\tau}_s = 2\mu_s \mathbf{d}, \quad (3.5)$$

$\boldsymbol{\tau}_1$ est calculé différemment pour chaque type de modèle viscoélastique comme montré dans le chapitre II. Par exemple dans le modèle SPTT (Simplifié Phan Thian-Tanner) choisi dans travail, le paramètre qui représente le glissement entre le réseau moléculaire et le continuum environnant « ξ » est négligé et l'équation constitutive (2.44) pour $\boldsymbol{\tau}_p$ devient [13] :

$$f\boldsymbol{\tau}_p + \lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_p = 2\mu_p \mathbf{d}. \quad (3.6)$$

et la dérivée supérieure-convectée de l'extra-tenseur $\boldsymbol{\tau}$ est définie par :

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}_p = \frac{D\boldsymbol{\tau}_p}{Dt} - \boldsymbol{\tau}_p \cdot \nabla \mathbf{u}_i - \nabla \mathbf{u}_i^T \cdot \boldsymbol{\tau}_p, \quad (3.7)$$

et le taux de déformation tensoriel D et la version exponentiel de la fonction f [38] sont définis tels que

$$\mathbf{d}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.8)$$

$$f = \exp \left[\frac{\varepsilon \lambda}{\mu_p} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}_p) \right], \quad (3.9)$$

Le paramètre constitutif ε régit l'élongation et le comportement de fluidification par cisaillement. λ , μ_p , μ_s représentent le temps de relaxation, la viscosité polymérique et la viscosité du solvant, respectivement. La viscosité à cisaillement nul est donnée par $\mu = \mu_p + \mu_s$, où dans ce travail $\mu_s = 0,00445$ (Pas) et le rapport de viscosité β qui est égale μ_p/μ est nul ($\beta = 0$).

Le modèle FENE est un modèle dit "micro-macro". Cette terminologie indique qu'il couple des effets microscopiques et l'hydrodynamique "classique". Les macromolécules sont modélisées par des chaînes de maillons rigides (chaînes de Kramers) immergées dans un fluide de viscosité μ_s (viscosité du solvant). L'introduction d'un solvant rend ce type de modèles particulièrement adapté aux solutions de polymère. L'idée maîtresse de ces modèles consiste à identifier chaque molécule d'un polymère à un vecteur \mathbf{Q} appelé vecteur bout-à-bout (end-to-end en anglais). On assimile ainsi une molécule à un ressort et on lui applique les lois classiques de la mécanique **statistique**. Une macromolécule est alors représentée par deux sphères reliées par un ressort (figure III.1).

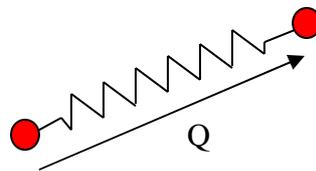


Figure. III.1. Modélisation des macromolécules par des haltères élastiques.

Le ressort exerce une force de rappel F dépendant de la distance entre les deux sphères. Ce type de modèles est appelé modèle d'haltères élastiques (Hookean dumbbell en anglais).

D'après Chilcott et Rallison [49], le modèle exprimé en termes d'un tenseur de configuration A définie par $A = 3 \langle QQ \rangle / Q_e^2$ où Q_e est une longueur d'équilibre. Pour le modèle FENE (Warner [46]), la force F entre les deux sphères, est exprimée par :

$$\bar{F} = H \frac{1}{1 - \langle QQ \rangle / Q_0^2} \bar{Q} \quad (3.10)$$

Où H est la constant du ressort, $Q = |\bar{Q}|$ et Q_0 est la longueur maximal du ressort. Le modèle FENE prend en compte une longueur maximale (norme de Q_0) qui correspond à la longueur de tous les maillons de la chaîne.

Etant donné le coût de calcul élevé de la discrétisation des modèles micro-macro, les physiciens ont cherché à dériver des modèles macro-macro "proches" du modèle FENE. L'exemple le plus simple est le modèle FENE-P qui est obtenu à partir du modèle FENE en utilisant l'approximation de fermeture (l'approximation de Peterlin [19]). Cette approximation conduit à une équation différentielle (Bird et al [50]) en terme de l'extra-contrainte τ .

Afin de dériver une équation d'évolution pour le tenseur de configuration A , la moyenne $\langle QF \rangle$ est nécessaire, et il n'est pas possible d'obtenir une équation de forme fermée à moins d'introduire une approximation. Dans le modèle FENE-P, l'équation (3.10) donnant la force du ressort est approchée par:

$$\bar{F} \approx H \frac{1}{1 - \langle QQ \rangle / Q_0^2} \bar{Q} \equiv fH\bar{Q} \quad (3.11)$$

Suivant l'idée suggérée par Peterlin (voir Bird et al [50]) et en utilisant la définition de A donnée ci-dessus, nous voyons que la fonction adimensionnelle f définie dans l'équation (3.11) dépend de la trace de A et peut être écrite comme:

$$f \equiv f(\text{tr}A) = \frac{L^2}{L^2 - \text{tr}A} \quad (3.12)$$

Où $L^2 \equiv 3Q_0^2 / Q_e^2$ est appelé le paramètre d'extensibilité.

Donc, pour le modèle FENE-P, la contrainte polymérique τ_1 est calculée explicitement à partir d'un tenseur de configuration (A) sur la base d'une équation algébrique, voir équation (2.48) et (2.49) dans le chapitre précédent.

III.3. Le Nombre de Nusselt

Le coefficient de transfert de chaleur, axialement local mais périphériquement moyen, h_x est défini par :

$$q_w = h_x(T_b - \bar{T}_w), \quad (3.13)$$

q_w est le flux de chaleur par unité de surface imposé sur la paroi et considéré constant au cours de ce travail. \bar{T}_w correspond à la température moyenne de la paroi. La température moyenne T_b du fluide à travers une section transversale arbitraire est définie comme, [2],

$$T_b = \frac{1}{A_c u_m} \int u T dA_c, \quad (3.14)$$

Où u_m est la vitesse axiale moyenne du fluide et A_c est la surface transversale perpendiculaire à l'écoulement.

Le nombre de Nusselt local moyen sur la périphérie est défini par,

$$Nu_x = \frac{h_x D}{k} = \frac{q_w D}{k(T_b - \bar{T}_w)}. \quad (3.15)$$

III.4. Méthode numérique

La modélisation mathématique générale du problème des écoulements des fluides viscoélastiques avec transfert thermique est faite par des équations de conservation telles que les équations de quantité de mouvement, de continuité, d'énergie et le modèle rhéologique ou équation de constitution.

La résolution numérique des équations aux dérivées partielles (EDP) nécessite leur discrétisation, qui permet de les transformer en un système d'équations algébriques. Le résultat obtenu à partir de la discrétisation d'une équation aux dérivées partielles est un ensemble fini de valeurs qui permet de reconstruire la forme de la solution.

Il existe plusieurs méthodes numériques de discrétisation des équations différentielles aux dérivées partielles, à savoir :

- La méthode des éléments finis
- La méthode des différences finies
- La méthode des volumes finis
- La méthode des éléments de frontière

La méthode numérique utilisée dans cette étude incorporée dans le code de calcul POLYFLOW est celle des éléments finis.

III.4.1. Méthodes des éléments finis

C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique: problèmes stationnaires ou non, linéaires ou non, définis dans un domaine géométrique quelconque. La méthode des éléments finis consiste à discrétiser un solide ou un fluide en éléments de géométries simples rattachés à des nœuds auxquels sont associées des grandeurs cinématiques. A chaque nœud sont associées des variables, ou degrés de liberté (ddl) qui peuvent être de différentes natures : déplacements, vitesse, températures. Les champs sont alors approximés en tout point des éléments par une interpolation à partir des valeurs associées aux différents nœuds. Les fonctions choisies doivent satisfaire des conditions de continuité entre les différents éléments.

III.4.2. Présentation du logiciel POLYFLOW

La simulation numérique de ce travail est effectuée en utilisant le logiciel ANSYS POLYFLOW [51]. Le code de calcul POLYFLOW est un des codes commerciaux les plus populaires pour la simulation numérique des écoulements de liquides polymères. Ce code a été développé dans les années 1980 par l'équipe CESAME de l'université catholique de Louvain. Ce code permet d'utiliser, en 2D et 3D, un grand nombre de modèles rhéologiques différentiels comme le modèle de Giesekus, PTT, FENE-P ou d'Oldroyd-B mais aussi des modèles intégraux. Il reste une référence dans ce domaine et il permet d'obtenir des simulations pour des nombres de Weissenberg élevés (en général supérieurs à 10). Dans POLYFLOW, la vitesse est approchée par des éléments finis continus quadratiques et la pression par des éléments finis linéaires.

La création de la géométrie et la génération du maillage ont été effectués en utilisant le logiciel « GAMBIT », ensuite la modélisation du problème est effectuée en utilisant le code POLYDATA et la solution en utilisant POLYFLOW en suivant les étapes suivantes où les étapes sélectionnées en gras sont celles considérées dans notre étude :

- 1- Création d'un nouveau projet M.E.F
- 2- Lecture du fichier importé par GAMBIT
- 3- Choix du type de problème

Problème newtonien généralisé non-isotherme (pour le cas newtonien)

Problème newtonien généralisé isotherme

Problème viscoélastique différentiel non-isotherme

Problème viscoélastique différentiel isotherme

Problème viscoélastique intégral non-isotherme

Problème viscoélastique intégral isotherme.

4- Choix du modèle rhéologique

Modèle de Maxwell

Modèle de Maxwell sur-convecté (UCM)

Modèle d'Oldroyd-B

Modèle de White-Metzner

Modèle de Phan-Thien/Tanner (PTT) (Les paramètres rhéologiques : $\mu, \lambda, \varepsilon, \xi, \beta$)

Modèle de Geisekus

Modèle FENE-P (Les paramètres rhéologiques : μ, λ, L^2, β)

Modèle de POM-POM [DCPP]

Modèle de Leonov.

5- Conditions aux limites

> Conditions aux limites hydrodynamiques

- **Paroi** ; vitesse normale (v_n) = vitesse tangentielle (v_s) = 0
- Condition de glissement
- Paroi poreuse
- **Axe de symétrie**
- **Entrée**; débit volumique = constant
- **Sortie**; débit volumique = constant
- Surface libre
- Vitesses normales et tangentielles imposées
- Forces normales et tangentielles imposées
- Vitesse normale et force tangentielle imposées
- Force normale et vitesse tangentielle imposées
- Force globale imposée
- Vitesses cylindriques imposées
- Profile de vitesse imposée à partir d'un fichier CSV
- Interface
- Interface et milieu poreux
- Interface avec un solide élastique
- Condition d'entrée périodique
- Condition de sortie périodique

> Conditions aux limites thermiques

- Interface
- **Température constante** (température du fluide à l'entrée)
- **Flux de chaleur constant** (imposé à la paroi)

- **Symétrie**
- Entrée; flux de chaleur = constant
- **Sortie**; flux de chaleur = constant
- Condition d'entrée périodique
- Condition de sortie périodique
- Correction de Rosseland

6- Interpolation

> Coordonnées:

- **Linéaire**
- Quadratique

> Contraintes:

- Quadratique
- 4x4 SU éléments
- 4x4 SUPG éléments
- EVSS
- **EVSS/SU**
- DEVSS
- **DEVSS/SU**

> Vitesses:

- Linéaire
- **Quadratique**

> Pression:

- Constante
- **Linéaire**
- Linéaire discontinue

> Température:

- Linéaire
- **Quadratique**
- 2x2 éléments
- 4x4 éléments

7- Paramètres numériques

- **Méthode d'évolution pour le temps de relaxation λ**
- Méthode d'évolution pour le débit volumique Q

8- Création d'un fichier résultats : CFD-Post.

III.4.3. Méthodes de convergence

Pour faire face à des problèmes de convergence et de stabilité lorsque le nombre de Weissenberg est grand, deux méthodes d'éléments finis mixtes ont été considérées ; la méthode EVSS/SU (Elastic-Viscous Split-Stress/Streamline Upwinding) pour le cas du model rhéologique SPTT et la méthode DEVSS/SU (Discrete Elastic Viscous Split Stress/ Streamline Upwinding) pour le cas du model rhéologique FENE-P.

Dans la méthode EVSS introduite dans Rajagopalan et al [52], et la méthode DEVSS introduite par Guénette et Fortin dans [53], la contrainte total $\boldsymbol{\tau}_{ij}$ est décomposé en une partie élastique et une partie visqueuse, qui sont résolus séparément et sont basées sur le rajout du tenseur des vitesses de déformation $\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u})$ comme une quatrième inconnue.

Les résultats numériques peuvent ensuite être stabilisés par l'utilisation d'un schéma de stabilisation SU (Streamline Upwinding) introduite dans [54]. L'idée de base de la méthode SU, est l'application d'une diffusivité artificielle aux termes convectifs uniquement qui agissent seulement dans la direction de l'écoulement.

Dans la suite, on présente brièvement ces méthodes dans le cas newtonien. On rappelle d'abord la formulation classique à trois champs du problème de Stokes continu :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} + \nabla p &= f \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \boldsymbol{\tau} &= 2\mu\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) \end{aligned} \tag{3.16}$$

La méthode EVSS est basée sur un changement de variable : $\mathbf{s} = \boldsymbol{\tau} - 2\mu\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u})$ et le rajout dans la formulation d'une quatrième inconnue définie par $\mathbf{d} = \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u})$. La motivation de ce changement de variable provient du fait que pour les modèles viscoélastiques (notamment le modèle PTT), les équations de la quantité de mouvement et de continuité ne sont pas bien posées si $\boldsymbol{\tau}$ est fixé. A partir de là, la quatrième inconnue est rajoutée pour obtenir la coercivité du problème en terme de vitesse-pression. Le problème de Stokes s'écrit alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned} -2\operatorname{div}\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) + \nabla p &= f + \operatorname{div}\mathbf{s} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \mathbf{s} &= 0 \\ \mathbf{d} &= \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Compte tenu du fait que le changement de variable $\mathbf{s} = \boldsymbol{\tau} - 2\mu\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u})$ ne peut être effectué pour toutes les classes de modèles viscoélastiques, Guénette et Fortin [52] ont rajouté dans les deux membres de l'équation du mouvement le terme $-2\alpha\operatorname{div}\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u})$. Cela correspond à effectuer un nouveau

changement de variable $s = \boldsymbol{\tau} - 2\alpha \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u})$ où α est une constante positive. On obtient la formulation en $(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{d})$ suivante :

$$\begin{aligned} -2\alpha \operatorname{div} \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) + \nabla \mathbf{p} &= \mathbf{f} + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} - 2\alpha \operatorname{div} \mathbf{d} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \boldsymbol{\tau} &= 2\mu \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{d} &= \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Pour les calculs du modèle FENE-P, l'utilisation du schéma DEVSS sans le schéma SU pour les cas 2D axisymétrique été suffisante pour atteindre la convergence et les résultats étaient identiques à celle en utilisant le schéma couplé DEVSS/SU, mais pour les calculs 3D, nous avons rencontré des problèmes de convergence et l'utilisation schéma couplé DEVSS/SU été nécessaire.

Dans la présente étude, une autre méthode appelé « méthode d'évolution » pour le paramètre de relaxation λ a été utilisés pour atteindre la convergence numérique [51]. Evolution est un schéma numérique supplémentaire facilitant la convergence des problèmes d'écoulement complexes. En POLYFLOW, tout paramètre du problème peut être définie comme une fonction algébrique de la variable d'évolution S . Au cours du processus d'évolution, la valeur du paramètre spécifique sera calculée comme le produit.

Pour des fluides viscoélastiques de type différentiel l'évolution adéquate est généralement basée soit sur le temps de relaxation du fluide λ ou le débit Q fournissant des augmentations graduelles de la valeur attribuée au nombre de Weissenberg We .

Dans ce travail, la technique d'évolution est appliquée sur le temps de relaxation de telle sorte que $\lambda_i = f(S_i) \times \lambda_{nom}$, où λ_{nom} est le temps de relaxation nominale, $f(S_i) = S_i = (S_{i-1} + \Delta S_{i-1})$ avec les valeurs initiales et finales de S sont $S_0 = 0$ et $S_{final} = 1$, respectivement, et la valeur initiale de $\Delta S_0 = 0,01$, avec S représentant la variable d'évolution. Par exemple, pour $i = 1$, on a $\lambda_1 = f(S_1) \times \lambda_{nom}$, si la solution converge $\Delta S_1 = \Delta S_0 \times 1,5$ et $S_2 = S_1 + \Delta S_1$, puis pour $i = 2$, $\lambda_2 = f(S_2) \times \lambda_{nom}$. Toutefois, si la solution diverge alors, $\Delta S_1 = \Delta S_1 / 2$ et $S_2 = S_1 + \Delta S_1$ et l'itération est refaite jusqu'à ce que ΔS_i soit inférieur à une valeur minimale $\Delta S_{min} = 1 \times 10^{-4}$ et la simulation s'arrête.

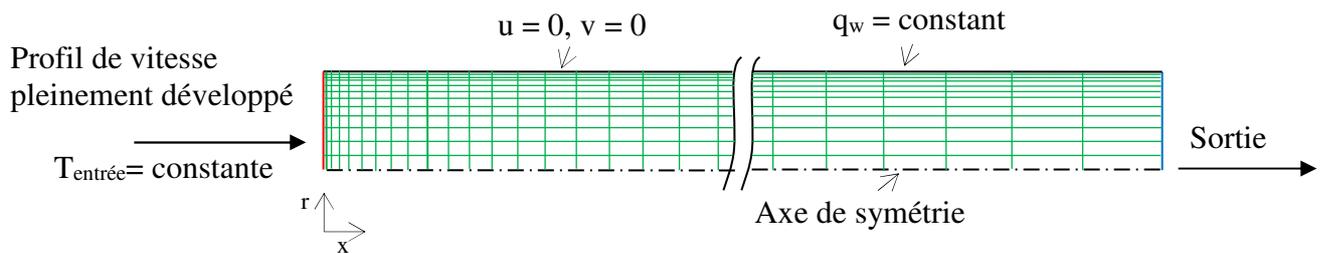
La solution du problème non linéaire est obtenue en utilisant le schéma itératif classique de la méthode Newton et la convergence est basée sur le calcul d'une erreur relative globale pour chaque champ (pression, vitesse, contraintes). L'erreur relative est calculée comme le rapport de la différence dans la valeur d'un champ donné, à chaque nœud entre deux itérations successives et la valeur maximale du champ. Le critère de convergence utilisé dans nos simulations est de 10^{-5} , considéré suffisant pour une convergence acceptable. Le nombre d'itérations nécessaires pour la convergence était égal à 10. Les calculs ont été effectués en utilisant un ordinateur (Workstation), avec un

processeur Intel (R) Xeon (R) CPU X5550@2.67 GHz avec 12 Go de RAM et 4 Go additionnels. La capacité de mémoire a été utilisée au maximum possible pour les simulations 3D.

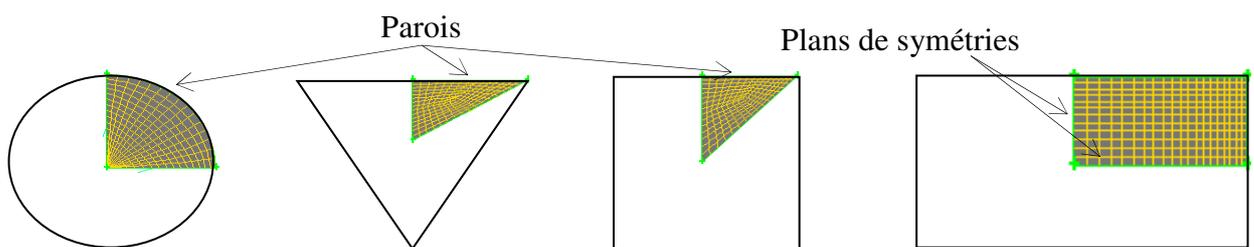
III.5. Géométries, Maillages et conditions aux limites considérés

Les géométries des conduites considérées ont des sections circulaires et non circulaires. La géométrie 2D axisymétrique est utilisée avec symétrie axiale des sections transversales pour la validation avec la solution analytique et semi analytique et aussi pour la comparaison avec la solution des simulations de la géométrie 3D circulaire. Pour chacune des géométries avec sections circulaires et non circulaires sélectionnée, les calculs sont effectués pour les deux fluides newtoniens et viscoélastiques non-linéaire du type SPTT et FENE-P.

Les sections et les maillages utilisés pour les conduites 2D axisymétriques et 3D considérées sont représentées dans les figures. III.2 et III.3, respectivement, avec les conditions aux limites appropriées.



Figures. III.2. Géométrie et maillage avec les conditions aux limites pour le cas 2D axisymétrique.



Figures. III.3. Domaines de simulation et maillages pour le cas des géométries 3D circulaire et non circulaires, l'axe-x est perpendiculaire à la figure.

Les résultats pour les fluides newtoniens et viscoélastiques pour la variation du nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale normalisée concernent $x' > 10^{-05}$, où $x' = x / D.Re.Pr$ est la distance axiale normalisée, D est le diamètre hydraulique, Re est le nombre de Reynolds et Pr est le nombre de Prandtl. Pour la plupart des fluides viscoélastiques le nombre de Prandtl prend des valeurs proche de 50 ou plus. Et parce que l'augmentation de nombre de Reynolds et/ou le nombre de Prandtl conduit à une augmentation de la longueur de la conduite, alors, une valeur relativement

faible du nombre de Prandtl $Pr = 30$ et un nombre de Reynolds $Re = 50$ ont été utilisées pour tous les cas considérés à travers cette étude pour optimiser les calculs. Il a été vérifié que le nombre de Nusselt Nu ne dépend pas de Reynolds Re avec des fluides obéissant au modèle SPTT ou FENE-P en calculant Nu pour différentes valeurs de Re pour le cas 2D axisymétrique. Ceci est différent du comportement des fluides PTT non-affines, qui prédisent la dépendance de Nu sur Re , Siginer et Letelier [55,56].

Des tests sur l'effet du maillage sur les résultats trouvés ont été réalisés avec un nombre différent de cellules pour calculer la variation du nombre de Nusselt en fonction de la distance normalisée x' pour le cas du modèle SPTT et le cas FENE-P. Les détails de ces tests sont présentés dans le chapitre des résultats.

Chapitre IV

Résultats et discussion

IV.2. Introduction

Ce dernier chapitre est constitué de trois parties. La première est consacrée à la discussion des résultats numériques du problème de Graetz pour le cas d'un fluide de type SPTT. La deuxième partie de ce chapitre concerne les résultats obtenus de la simulation numérique du problème de Graetz pour le cas d'un fluide de type FENE-P en négligeant la contribution newtonienne du solvant où le rapport de viscosité β , défini comme le rapport de la viscosité du solvant par rapport à la viscosité totale du fluide, est nul. Dans la troisième partie, et pour le même modèle utilisé dans la deuxième partie, on introduit l'effet de la contribution newtonienne ($0 \leq \beta \leq 1$) sur le comportement hydrodynamique et l'amélioration du transfert de chaleur.

IV.2. Modèle SPTT

IV.2.1 Effet du Maillage

Des tests de sensibilité du maillage ont été réalisés avec un nombre différent de cellules pour calculer la variation du nombre de Nusselt pour deux valeurs du paramètre εWe^2 (0,001 et 1), dans le cas 2D axisymétrique. Des tests ont été effectués à l'aide de maillages non uniformes, présentés dans le tableau 3 et seule la variation du nombre de Nusselt avec la distance normalisée x^* est représentée sur la figure. IV.1 pour $\varepsilon We^2 = 1$. La solution ne change pas de manière significative pour les maillages M2, M3 et M4 pour les deux valeurs de εWe^2 . On peut conclure que la solution est indépendante du maillage. Les résultats présentés ci-après pour le modèle SPTT ont été obtenus avec le maillage M2 pour optimiser l'espace mémoire du calculateur et le temps de calcul.

Tableau 3. Maillages testés avec le modèle SPTT dans le cas 2D axisymétrique.

Géométrie	Maillage	Nx	Nr	Nombre des éléments	Nombre des nœuds
2D axisymétrique	M1	75	10	750	836
	M2	120	15	1800	1936
	M3	300	20	6000	6416
	M4	1025	50	51250	52326

Pour les géométries 3D, encore une fois des tests de sensibilité du maillage ont été réalisés pour deux valeurs du paramètre εWe^2 (0,001 et 1) en considérant la variation du nombre de Nusselt avec la distance axiale normalisée x^* . Les différents maillages utilisés sont résumés dans le tableau 4 où N_x , N_r et N_θ représentent le nombre de cellules dans les directions axiale, radiale et tangentielle

respectivement. Les résultats obtenus pour le tube 3D circulaire pour $\varepsilon We^2 = 1$ sont présentés dans la figure. IV.2. La différence entre les maillages M5 et M6 est insignifiante pour les deux valeurs de εWe^2 . La comparaison entre les résultats obtenus pour le maillage 2D axisymétrique et 3D circulaire montre un désaccord très près de l'entrée de la conduite pour une distance $10^{-5} < x^* < 10^{-4}$. Au-delà d'une certaine distance $x^* > 10^{-4}$ de l'entrée du tube, les valeurs sont en excellent accord jusqu'à la région pleinement développée du tube.

Le tableau 5 montre des détails sur les maillages utilisés pour les conduits non circulaires sélectionnés (triangulaire, carré $b/a = 1$ et rectangulaire $b/a = 1/2$). La solution des problèmes étudiés pour les géométries 3D nécessite un grand espace mémoire, autour de 12 Go de RAM. Les nombres de nœuds des maillages utilisés dans la présente étude ont été élevés jusqu'à la limite maximale autorisée par la capacité de stockage de l'ordinateur disponible.

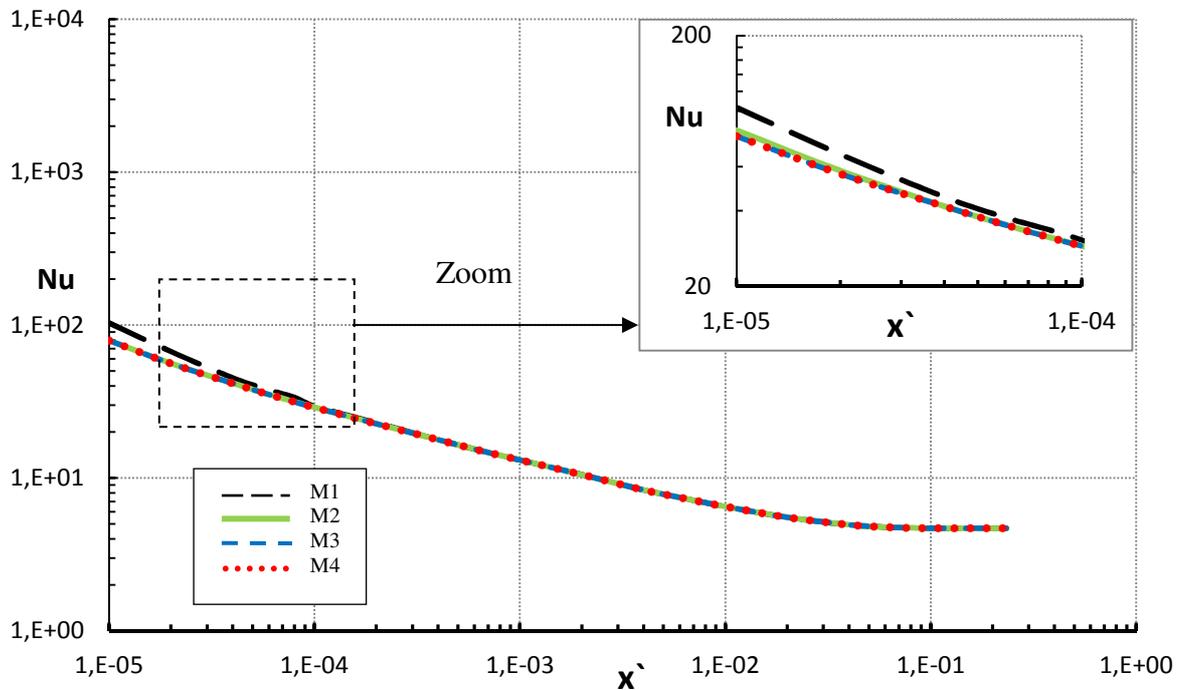


Figure. IV. 1. Nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale normalisée x^* pour $\varepsilon We^2 = 1$, dans le cas 2D axisymétrique, avec différents maillages.

Tableau 4. Maillages testés avec le modèle SPTT dans le cas 3D circulaire.

Géométrie	Maillage	Nx	Nr	Nθ	Nombre des éléments	Nombre des nœuds
3D circulaire	M4	100	10	15	18000	19481
	M5	120	15	15	27000	29161
	M6	154	15	15	34650	37355

Tableau 5. Maillages testés avec le modèle SPTT pour les géométries non-circulaires.

Géométries 3D non circulaires	Nx	Ny	Nz	Nombre des éléments	Nombre des nœuds
Triangulaire	120	15	15	21120	24200
Carré (b/a = 1)	120	15	15	21120	24200
Rectangulaire (b/a = 1/2)	120	15	20	36000	40656

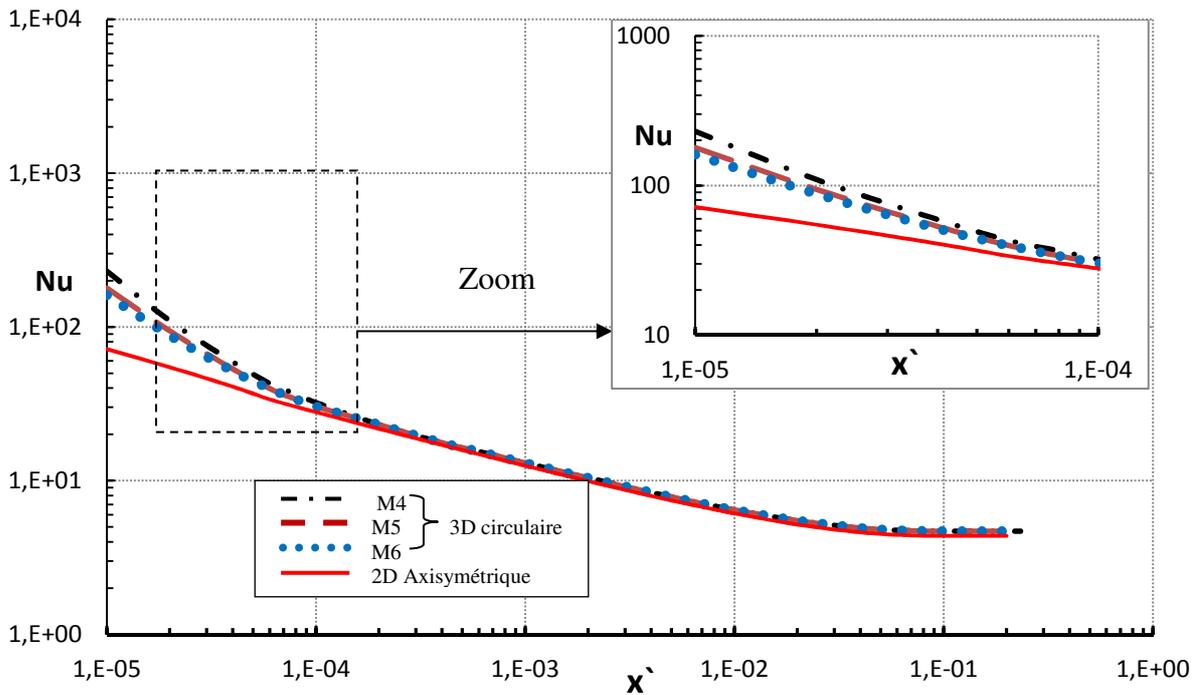


Figure. IV. 2. Nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale normalisée x' pour $\varepsilon We^2 = 1$, dans le cas 3D circulaire, avec différents maillages et une comparaison avec la solution 2D axisymétrique.

IV.2.2. Géométrie circulaire: profils de vitesses

Pour valider les calculs numériques, les résultats numériques d'un écoulement isotherme entièrement développé d'un fluide de type PTT à travers une conduite circulaire sont comparés avec la solution semi-analytique rapportée par Oliveira et Pinho [17] pour la version exponentielle du modèle PTT. Les résultats numériques sont obtenus en utilisant des maillages 2D axisymétriques et des maillages 3D. Les calculs sont effectués pour différentes valeurs du paramètre εWe^2 allant de 0,001 à 100. Celles-ci correspondent à des valeurs du nombre de Weissenberg équivalentes allant de 0,0632 à un maximum de 20. Dans tous les calculs présentés dans ce manuscrit, le paramètre ε est fixé à une valeur de 0,25.

Les profils de vitesse normalisée entièrement développés obtenus à partir du présent travail et de la référence [17] avec la version exponentielle du modèle SPTT et de références [15] et [16] avec la version linéaire du modèle SPTT sont présentés sur la figure. IV.3. La vitesse axiale

adimensionnelle analytique avec la version linéaire du modèle SPTT est donnée par les équations. (4.1) et (4.2) tirées du travail de Letelier et Siginer [16] et Oliveira et Pinho [17], respectivement. \bar{u} et \bar{u}_N représentent la vitesse moyenne du fluide SPTT et la vitesse moyenne newtonienne respectivement,

$$\frac{u(r)}{\bar{u}} = \frac{6}{3+8\varepsilon We^2} \left(1 - (r/R)^2\right) \left(1 + 2\varepsilon We^2 \left(1 + (r/R)^2\right)\right) \quad (4.1)$$

$$\frac{u(r)}{\bar{u}} = 2 \left(\bar{u}_N / \bar{u}\right) \left(1 - (r/R)^2\right) \left(1 + 16\varepsilon We^2 \left(\bar{u}_N / \bar{u}\right)^2 \left(1 + (r/R)^2\right)\right) \quad (4.2)$$

La valeur \bar{u}_N / \bar{u} est calculée à partir de l'équation suivante

$$\frac{\bar{u}_N}{\bar{u}} = \frac{(432)^{1/6} \left(\delta^{2/3} - 2^{2/3}\right)}{6b^{1/2} \delta^{1/3}} \quad (4.2.a)$$

$$b \equiv (64/3)\varepsilon We^2$$

$$\delta = \alpha^{1/2} + \beta; \quad \alpha = 3^3 b + 4; \quad \beta = 3^{3/2} b^{1/2}$$

La vitesse axiale semi-analytique adimensionnelle pour la version exponentielle du modèle SPTT est donnée par, Oliveira et Pinho [17],

$$\frac{u(r)}{\bar{u}} = 2 \frac{\bar{u}_N}{\bar{u}} \frac{\exp\left(b\left(\bar{u}_N / \bar{u}\right)^2\right)}{b\left(\bar{u}_N / \bar{u}\right)^2} \left(1 - \exp\left(-b\left(\bar{u}_N / \bar{u}\right)^2 \left(1 - (r/R)^2\right)\right)\right) \quad (4.3)$$

Où \bar{u}_N / \bar{u} est calculé à partir d'une équation non linéaire résolue par une méthode itérative robuste de bisection.

$$1 = 2 \frac{\bar{u}_N}{\bar{u}} \frac{\exp\left(b\left(\bar{u}_N / \bar{u}\right)^2\right)}{b\left(\bar{u}_N / \bar{u}\right)^2} \left(1 - \frac{1 - \exp\left(-b\left(\bar{u}_N / \bar{u}\right)^2\right)}{b\left(\bar{u}_N / \bar{u}\right)^2}\right) \quad (4.3.a)$$

$$b \equiv 32\varepsilon We^2$$

Un excellent accord est indiqué pour εWe^2 variant de 0,001 à 100 en particulier dans la région proche de la paroi. Une différence maximale dans la zone médiane de 1% est observée entre les résultats actuels et ceux de Oliveira et Pinho [17]. Les prédictions numériques des profils de vitesse avec le modèle SPTT exponentiel du présent travail et celles dérivées dans [17] conduisent à un aplatissement de vitesse en augmentant le comportement de fluidification par cisaillement du fluide par l'augmentation du paramètre εWe^2 . Le même comportement est observé pour le modèle LPTT linéaire tiré du travail de Letelier et Siginer [16] et Oliveira et Pinho [17].

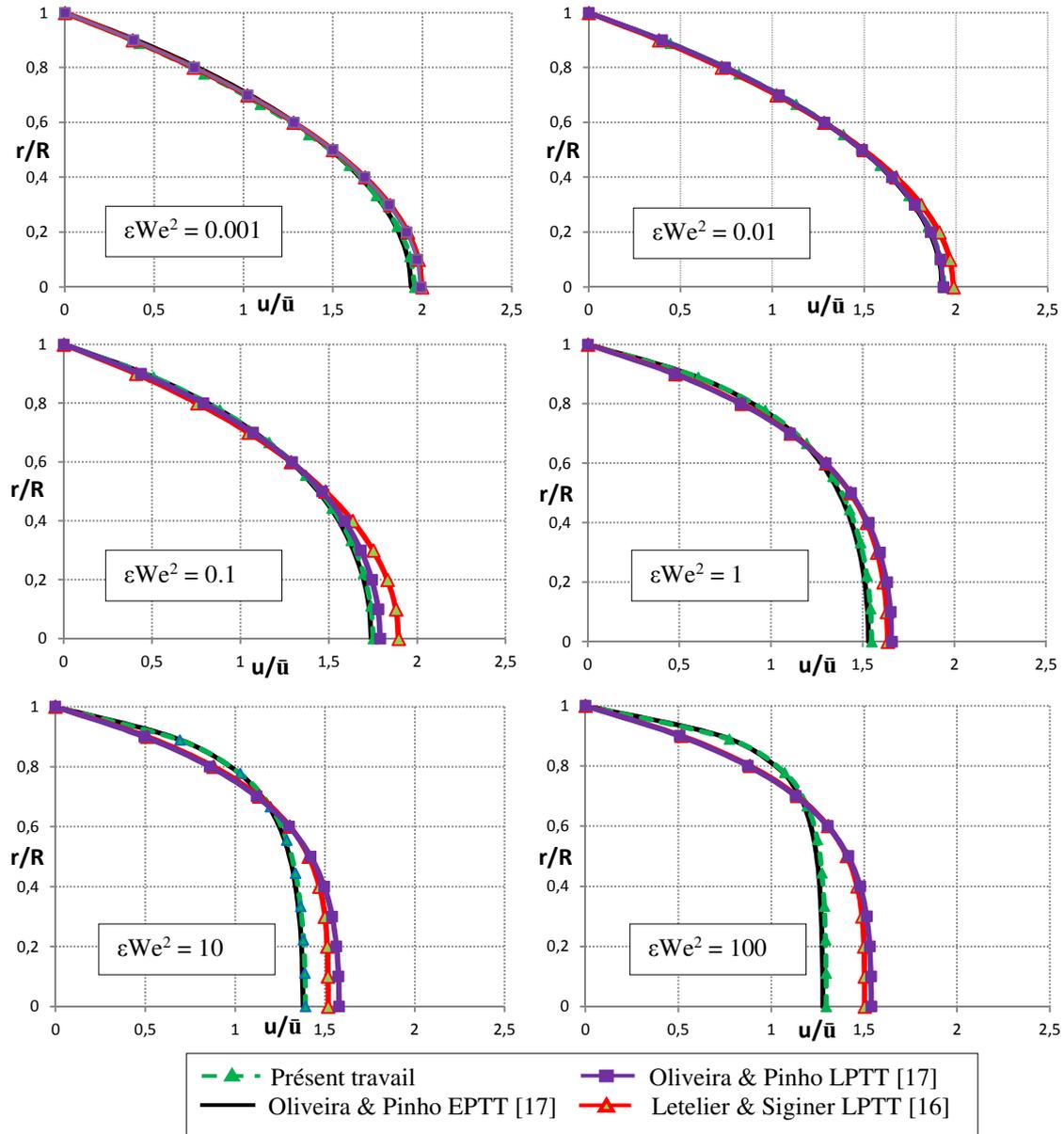
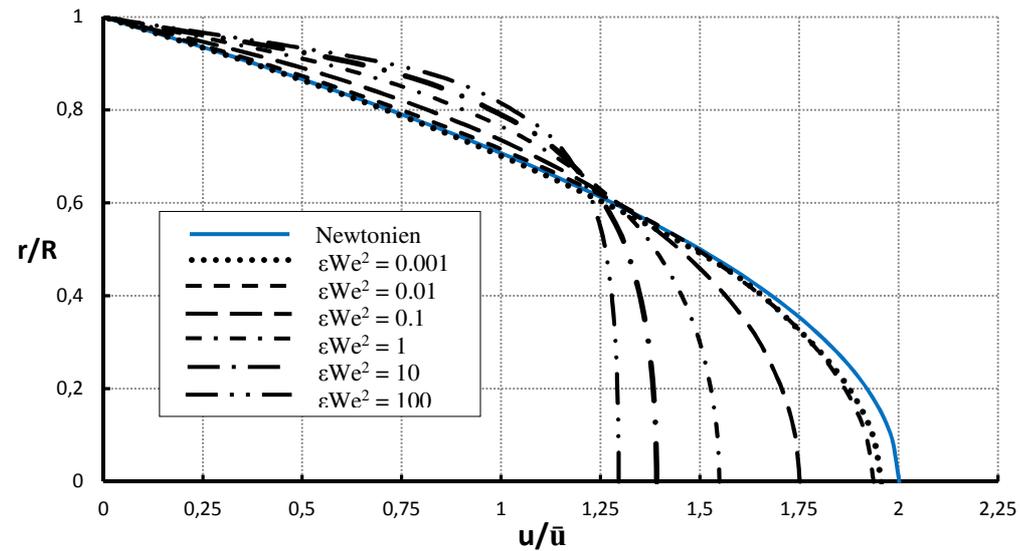
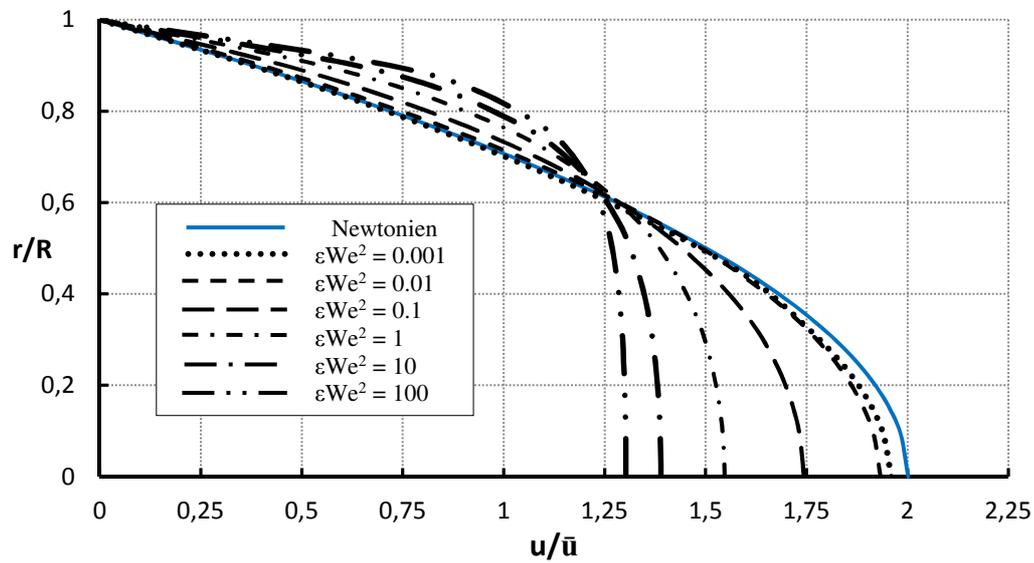


Figure. IV.3. Comparaison des profils de vitesse entièrement développés dans le cas axisymétrique avec ceux de Letelier et Siginer [16] et Oliveira et Pinho [17] pour différentes valeurs de ϵWe^2 .

La figure. IV.4 montre les profils de vitesse obtenus avec le maillage 2D axisymétrique et 3D pour plusieurs valeurs du paramètre ϵWe^2 . Pour fournir davantage de validation et accroître la confiance dans les simulations 3D, les calculs 3D ont été réalisés et comparés avec les résultats en 2D. Clairement le champ de vitesse entièrement développé obtenu avec les maillages 2D et 3D sont identiques et donc on peut supposer que les simulations 3D avec les maillages utilisés offrent une précision acceptable.



2D axisymétrique



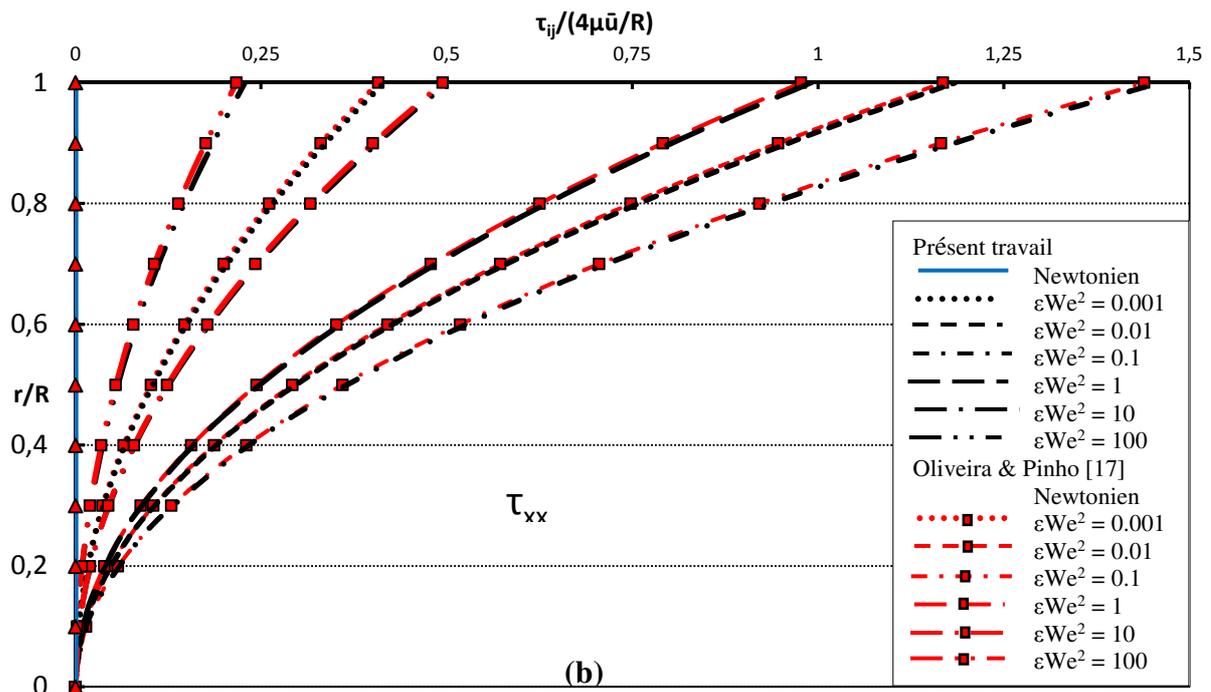
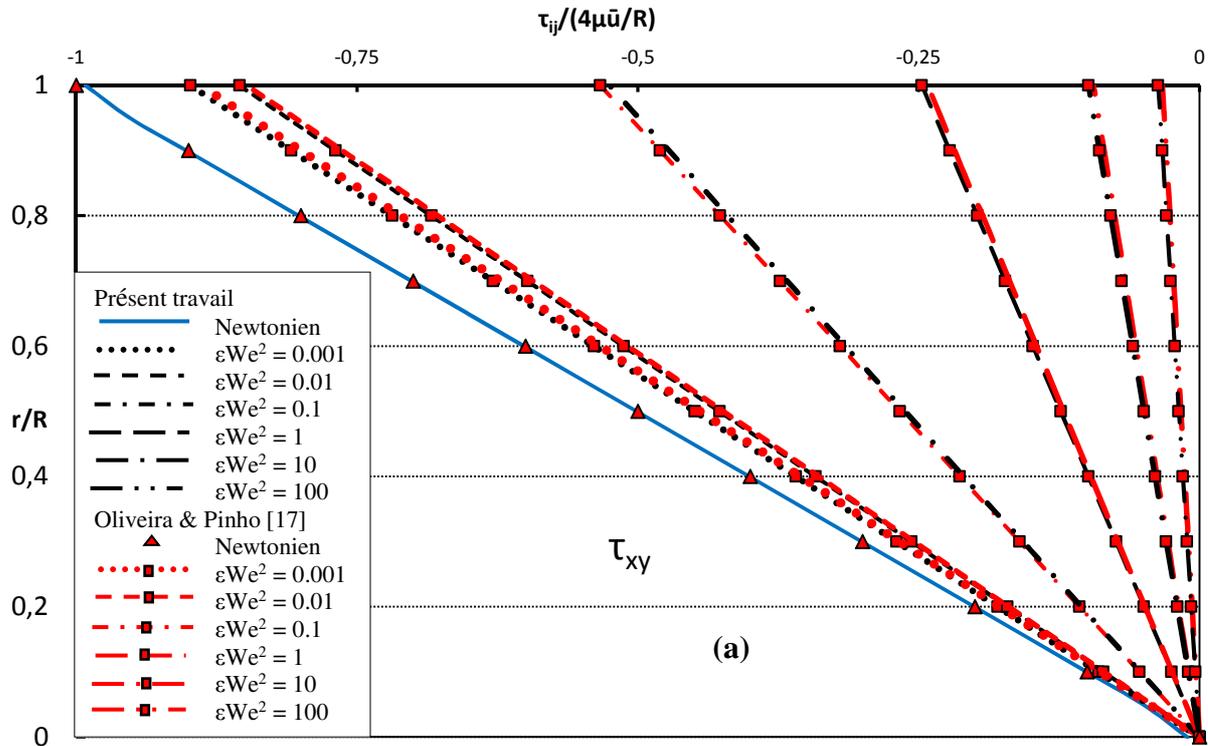
3D Circulaire

Figure. IV.4. Profils de vitesse adimensionnelle entièrement développés du modèle SPTT exponentiel en fonction du paramètre εWe^2 .

IV.2.3. Géométrie circulaire: profils de contraintes normale et tangentielle

Figure. IV.5 illustre le comportement des contraintes normales et de cisaillement à travers les tubes circulaires obtenus avec le modèle de SPTT exponentielle en utilisant le maillage axisymétrique (figures. IV.5a et IV.5b) et le maillage 3D (figure. IV.5c) pour une série de valeurs du nombre de Weissenberg We et une valeur constante de $\varepsilon = 0,25$. Les figures. IV.5a et IV.5b montrent une comparaison avec les résultats analytiques d'Oliveira et Pinho [17]. Les résultats numériques pour les deux maillages axisymétriques et 3D sont exactement les mêmes. La comparaison des valeurs numériques des contraintes de cisaillement et normale avec la solution

analytique de [17] est en général très bonne. Comme tracée dans les figures. IV.5a, b et c, pour une valeur de ε constante et un faible nombre de Weissenberg, la contrainte normale τ_{xx} augmente. Cependant, pour une grande élasticité pour des grandes valeurs de We , la contrainte normale diminue. La solution analytique prédit que pour des grandes valeurs de Weissenberg, les contraintes normales dépendent seulement de We et τ_{xx} est proportionnelle à $We^{-1/3}$ confirmant ainsi la diminution de τ_{xx} observée dans la figure. IV.5b.



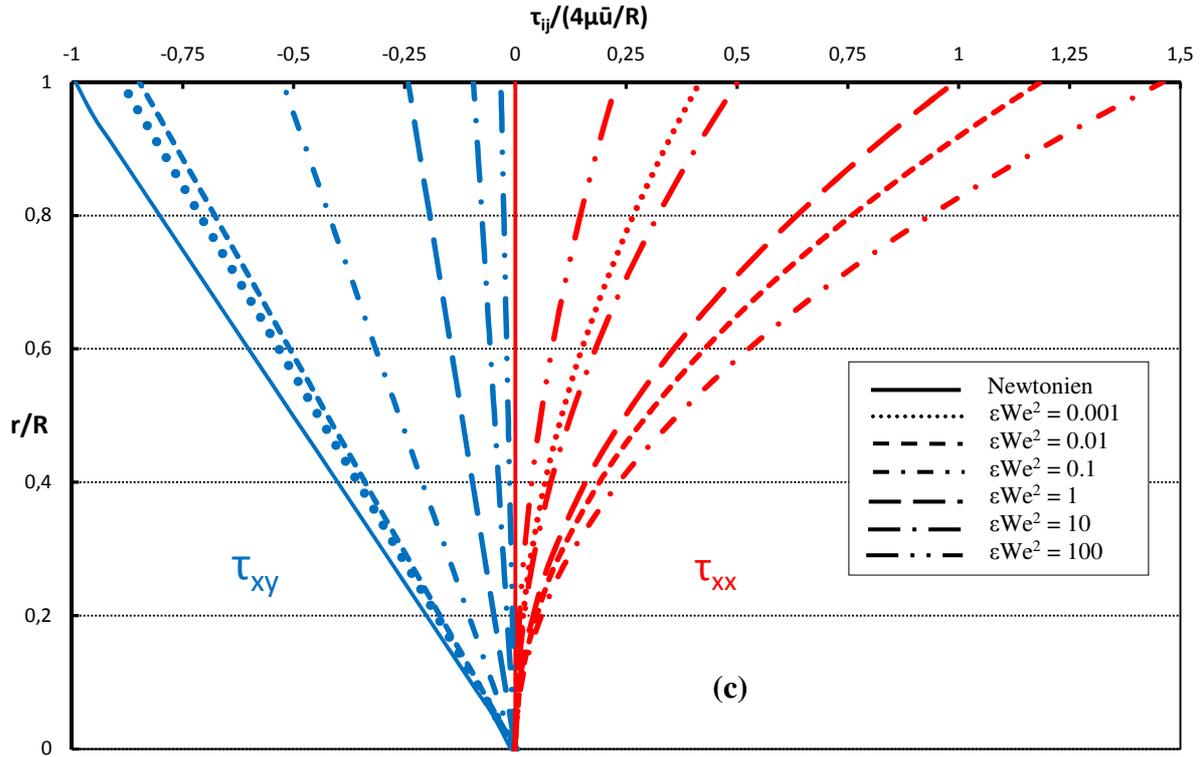


Figure. IV. 5. Variation des profils de contraintes normale et de cisaillement normalisées en fonction du nombre de Weissenberg pour une valeur constante de $\varepsilon = 0,25$ pour les géométries (a)-2D Axisymétrique - la contraintes de cisaillement, (b)-2D Axisymétrique - la contrainte normale et (c)-3D circulaire - les contraintes normale et de cisaillement.

Mais si les contraintes normales sont mises à l'échelle avec la valeur de la contrainte de cisaillement à la paroi, la solution prédit que le rapport sans dimension augmente de façon monotone avec We comme montré à la figure. IV.6a pour la solution analytique [17] et à la figure. IV.6b pour le présent travail.

Les résultats des profils de contraintes normales non-dimensionnelles obtenues à partir des calculs numériques du présent travail sont en bon accord avec la solution analytique [17]. Les expressions analytiques pour les composantes de contraintes normalisées sont facilement obtenues après mise à l'échelle avec la contrainte de cisaillement à la paroi pour le fluide newtonien (ou UCM). Les contraintes normale et tangentielle normalisées suivant la référence [17] sont données par (4.4) et (4.5), respectivement,

$$\frac{\tau_{xx}}{(\tau_{xy})_W} = 4\kappa We \left(\frac{\overline{u}_N}{u} \right) \left(\frac{y}{H} \right)^2 \quad (4.4)$$

$$\frac{(\tau_{xy})}{(\tau_{xy})_W} = \frac{y}{H} \quad (4.5)$$

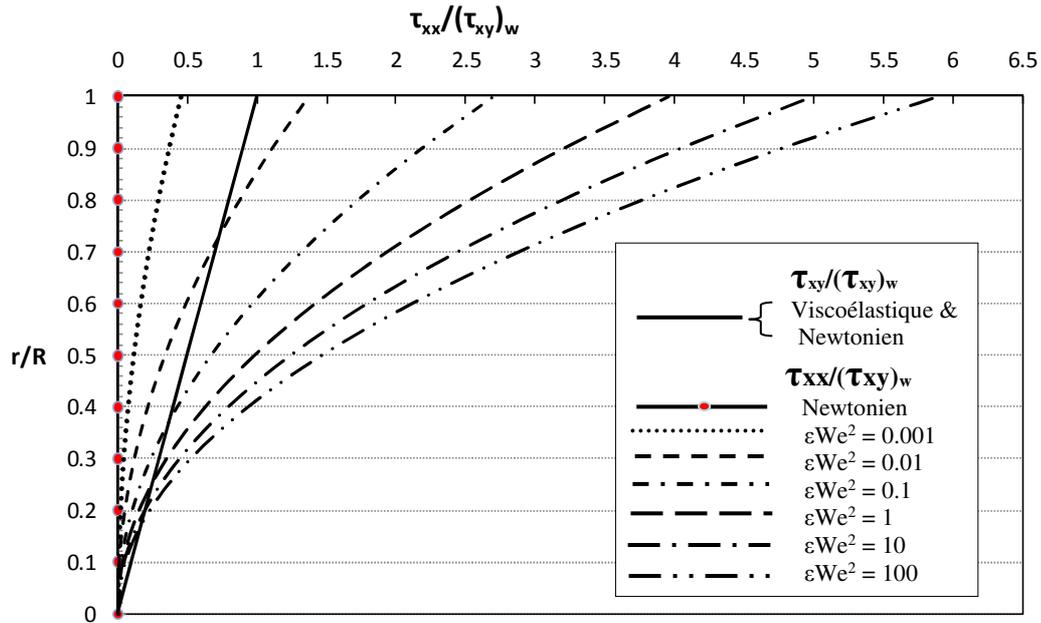


Figure. IV.6a. Contraintes normale et tangentielle normalisées $\tau_{xx}/(\tau_{xy})_w$ et $\tau_{xy}/(\tau_{xy})_w$ pour le cas 2D axisymétrique, Oliveira et Pinho [17].

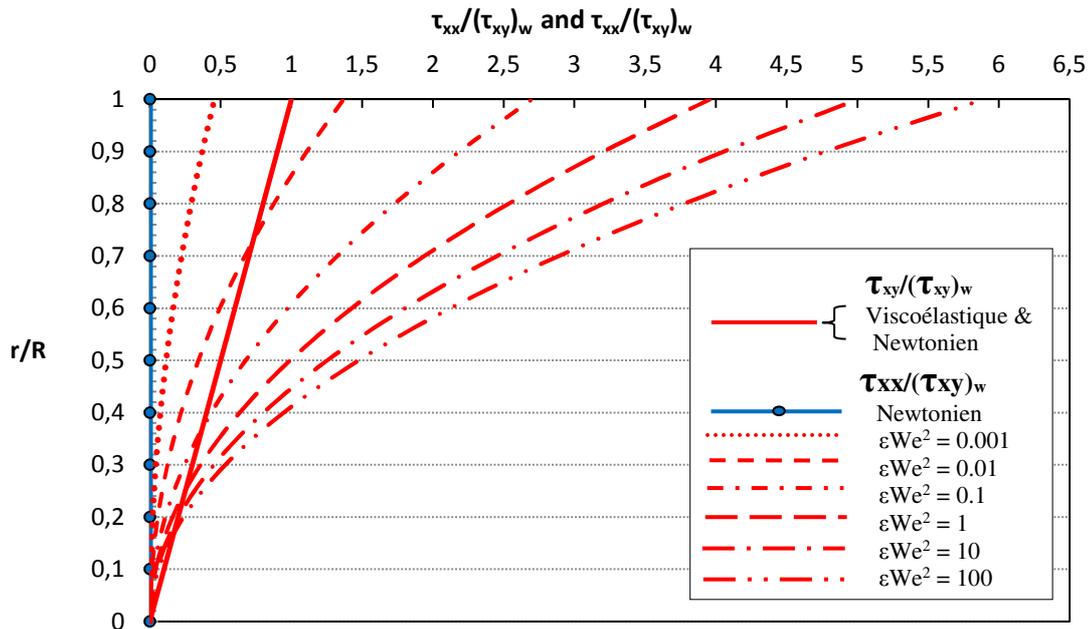


Figure. IV.6b. Contraintes normale et de cisaillement normalisées $\tau_{xx}/(\tau_{xy})_w$ et $\tau_{xy}/(\tau_{xy})_w$ pour le cas 2D axisymétrique, pour le présent travail.

IV.2.4. Géométrie circulaire: transfert de chaleur

Les résultats analytiques concernant le nombre de Nusselt moyen pour le problème de Graetz avec les fluides viscoélastiques dans le cas d'un flux de chaleur constant imposé à la paroi sont utilisés pour une validation supplémentaire.

Les figures. IV.7 et 8 montrent la comparaison entre les valeurs calculées et celles rapportées par Coelho et al [18] et Shah et London [2] pour les deux géométries 2D axisymétrique et 3D circulaire respectivement pour le cas d'un fluide newtonien et un fluide viscoélastique tel que $0.001 < \varepsilon We^2 < 100$. La comparaison est très satisfaisante pour les deux géométries considérées et le nombre de Nusselt calculé numériquement augmente avec l'augmentation du paramètre εWe^2 . L'écart observé dans la région $10^{-5} < x' < 10^{-4}$ se limite à une petite distance à l'entrée.

Pour une valeur maximale de $\varepsilon We^2 = 100$, le nombre de Nusselt pour le cas axisymétrique et 3D circulaire est plus élevé que la valeur newtonienne d'environ 15,72%. L'effet de ε est négligeable quand il est de l'ordre de $O(10^{-2})$. La valeur du paramètre ε utilisé dans les calculs est $\varepsilon = 0,25$.

Les résultats montrent donc qu'il existe une amélioration du transfert de chaleur quant le paramètre εWe^2 augmente jusqu'à une valeur de $\varepsilon We^2 = 100$.

En l'absence de la dissipation visqueuse, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, le nombre de Nusselt tend asymptotiquement vers la valeur bien connue de 4.364 pour un fluide newtonien, dans la région pleinement développée pour toutes les valeurs de Weissenberg, Pinho et Oliveira [24]. Le paramètre constitutif ε donne de la fluidification par cisaillement au fluide viscoélastique à condition que le paramètre ne soit pas trop petit.

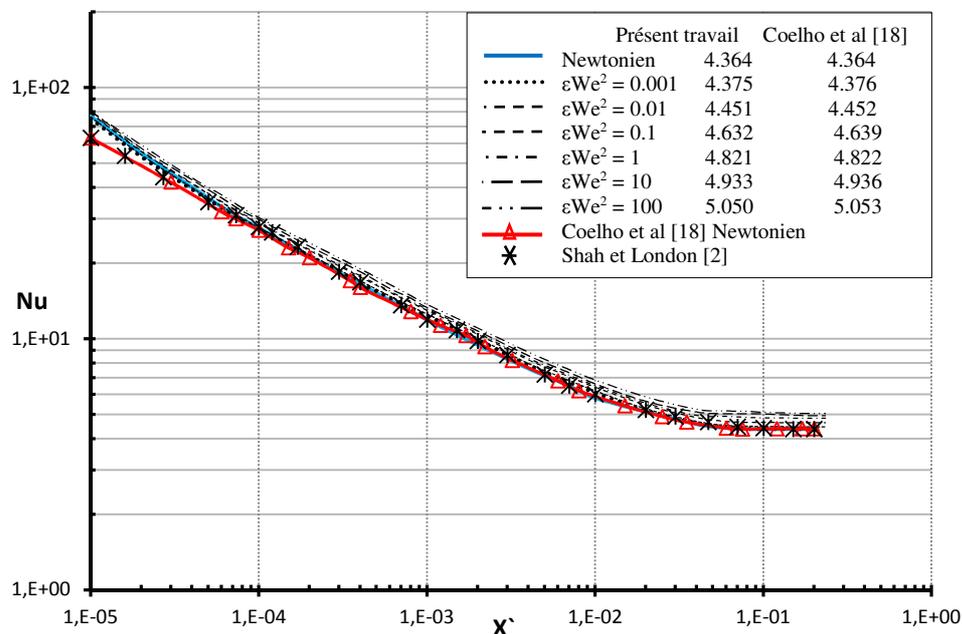


Figure. IV.7. Variation du nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale $x' = x / D.Re.Pr$ pour un flux de chaleur q_w constant imposé à la paroi pour la géométrie axisymétrique et $0,001 < \varepsilon We^2 < 100$. Les valeurs de Nu tabulées sont celles liées à la région pleinement développée.

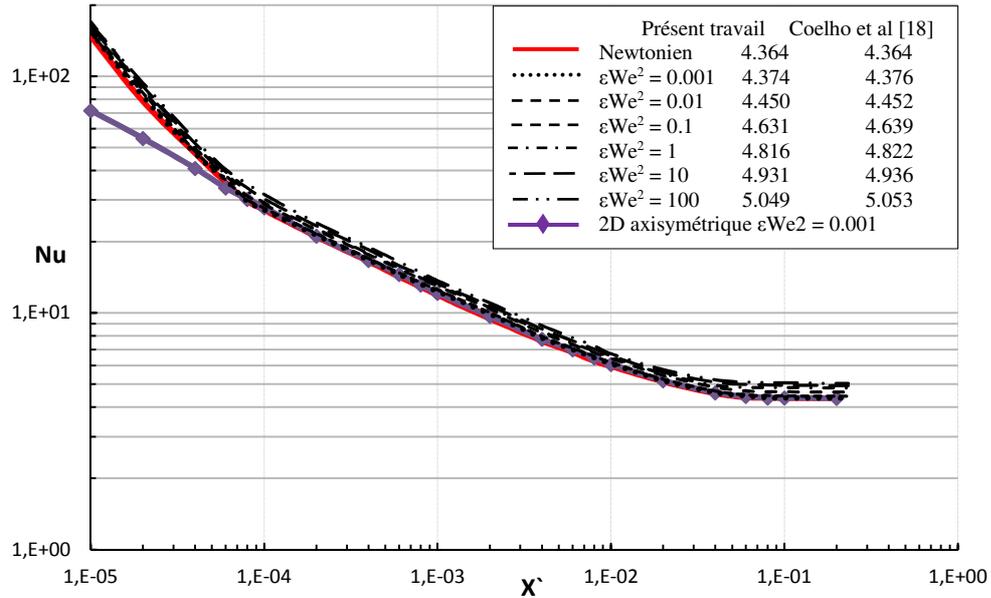


Figure. IV.8. Variation du nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale $x' = x / D.Re.Pr$ pour un flux de chaleur q_w constant imposé à la paroi pour la géométrie 3D circulaire et $0,001 < \epsilon We^2 < 100$. Les valeurs de Nu tabulées sont celles liées à la région pleinement développée.

IV.2.5. Géométries non-circulaires: transfert de chaleur

Trois canaux non circulaires, triangulaire, carré et rectangulaire ont été considérés dans le présent travail pour le problème de Graetz avec les fluides viscoélastiques non linéaires. Dans tous les cas, le maillage des différentes géométries étudiées est tridimensionnel et réduit en utilisant la symétrie pour minimiser l'espace mémoire et le temps de calcul. Les figures. IV.9, 10 et 11 représentent la variation du nombre de Nusselt moyen pour les trois géométries considérées. Il y a un excellent accord entre la valeur pleinement développée du nombre de Nusselt newtonien calculée numériquement et les résultats disponibles dans la littérature, Shah et London [2], fournissant ainsi une confiance dans la précision des résultats numériques.

La valeur viscoélastique entièrement développée du nombre de Nusselt augmente en augmentant le paramètre ϵWe^2 suivant la même tendance inhérente aux résultats de calcul pour les conduites axisymétrique et 3D circulaire. Pour une valeur maximale de $\epsilon We^2 = 100$, le nombre de Nusselt pour les géométries carrée ($b/a = 1$) et rectangulaire ($b/a = 1/2$) est plus élevé que celui du fluide newtonien d'environ 10,47% et 10,11% respectivement. Mais pour la géométrie triangulaire, l'augmentation du nombre de Nusselt est relativement faible en comparaison avec les géométries précédentes, environ 4,07% de la valeur newtonienne.

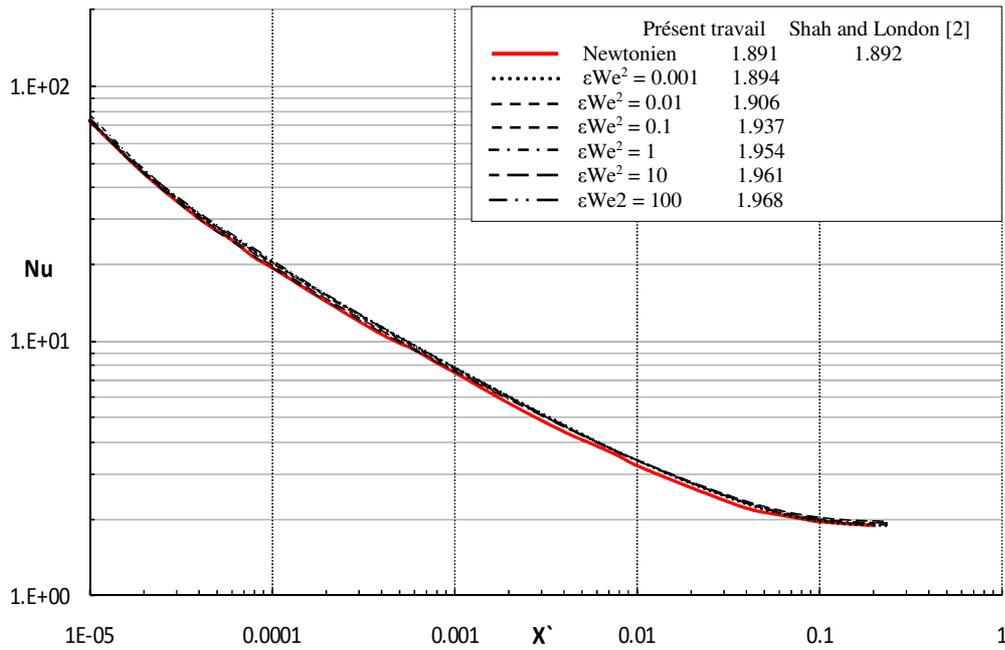


Figure. IV.9. Variation du nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale $x' = x / D.Re.Pr$ pour un flux de chaleur q_w constant imposé à la paroi pour la géométrie triangulaire et $0,001 < \epsilon We^2 < 100$. Les valeurs de Nu tabulées sont celles liées à la région pleinement développée.

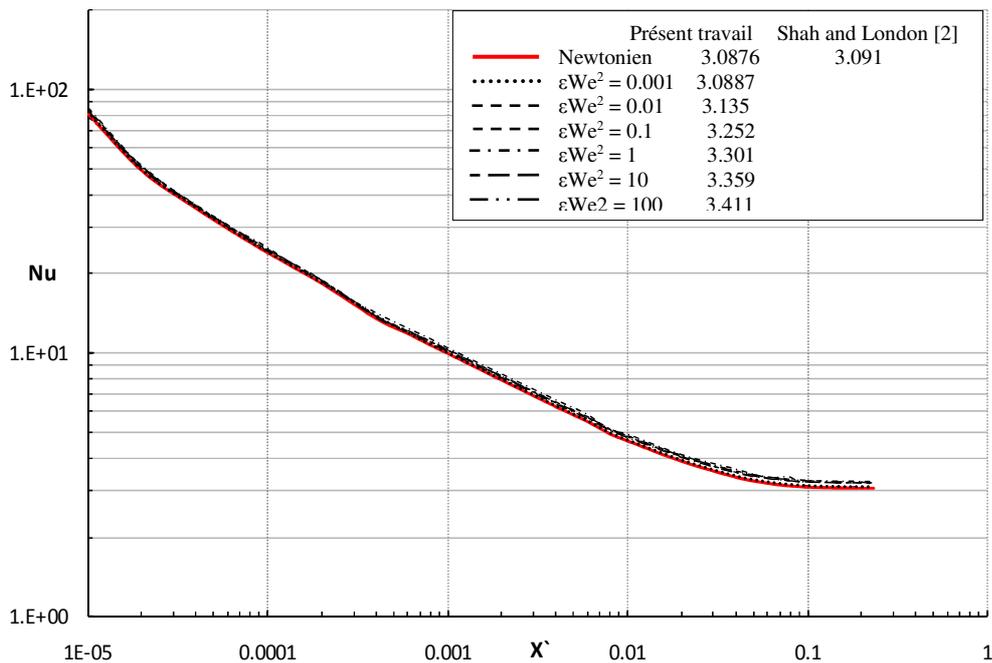


Figure. IV.10. Variation du nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale $x' = x / D.Re.Pr$ pour un flux de chaleur q_w constant imposé a la paroi pour la géométrie carrée et $0,001 < \epsilon We^2 < 100$. Les valeurs finales Nu rapportées sont ceux liés à la région pleinement développé.

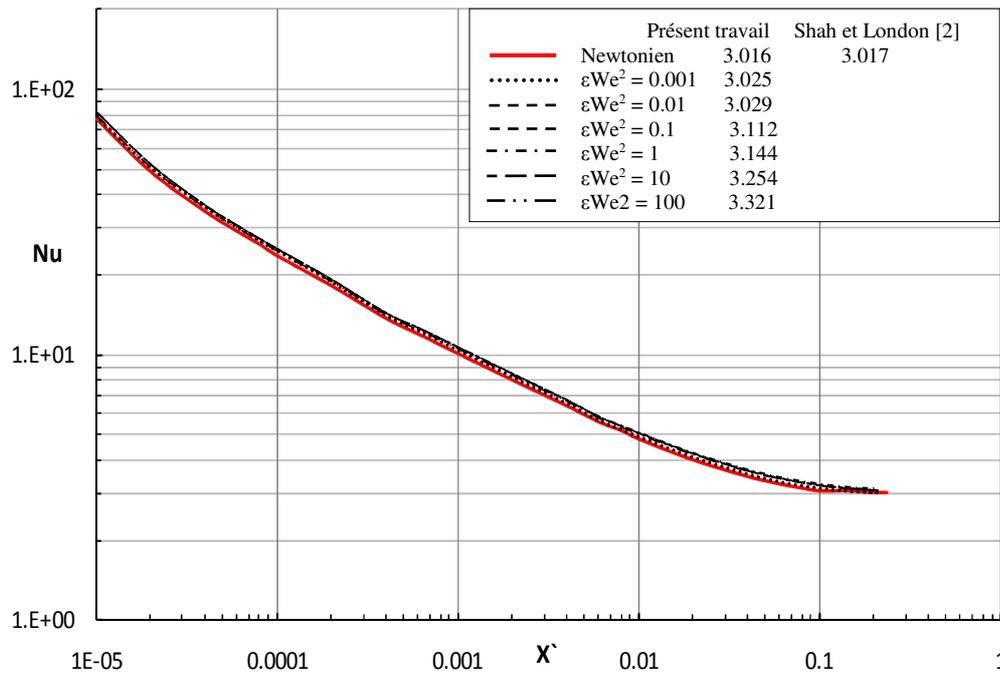


Figure. IV.11. Variation du nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale $x' = x / D.Re.Pr$ pour un flux de chaleur q_w constant imposé à la paroi pour la géométrie rectangulaire et $0,001 < \epsilon We^2 < 100$. Les valeurs finales Nu rapportées sont ceux liés à la région pleinement développée.

IV.2.6. Conclusion

Le problème de Graetz pour un écoulement laminaire newtonien et des fluides viscoélastiques décrit par la version simplifiée du modèle Tanner Phan-Thien avec la forme exponentielle de la fonction f représentant des effets élongationnels (fluidification par cisaillement) à travers des conduits de sections transversales circulaire, triangulaire, carrée et rectangulaire, sont résolues numériquement pour le cas d'un flux de chaleur constant imposé à la paroi en l'absence de la dissipation visqueuse. La solution présentée est comparée avec des travaux antérieurs disponibles dans la littérature et discutée en termes de combinaison de fluidification par cisaillement et les effets élastiques représentés par le paramètre ϵWe^2 et la distance axiale non-dimensionnelle x' .

Pour les géométries considérées, la comparaison des profils de vitesse et les profils de contraintes normales et tangentielles avec les résultats analytiques disponibles dans la littérature est très satisfaisante. Aussi, dans la région pleinement développée, les valeurs du nombre de Nusselt obtenues pour les conduites circulaire, triangulaire, carrée et rectangulaire pour le cas newtonien sont en bon accord avec celles rapportées dans la littérature. Les résultats viscoélastiques calculés avec le modèle SPTT sont également en bon accord avec ceux disponibles dans la littérature pour les différentes valeurs du paramètre ϵWe^2 pour les géométries circulaires. Les résultats pour les sections non circulaires étudiées sont obtenus pour la première fois pour les liquides polymères de type constitutive SPTT. Le maillage utilisé dans les calculs a été largement étudié et optimisé en

comparant les résultats en 2D et 3D et par comparaison avec les résultats existants dans la littérature comme décrit ci-dessus.

Les résultats montrent une augmentation du coefficient de transfert de chaleur avec l'augmentation du paramètre εWe^2 qui combine l'effet représenté par l'augmentation d'élasticité et l'élongation du fluide. Cette augmentation peut atteindre jusqu'à 15% par rapport à la valeur d'un fluide newtonien pour les cas circulaires.

IV.3. le modèle FENE-P sans contribution Newtonienne $\beta = 0$

V.3.1 Effet du Maillage

En ce qui concerne les fluides de type FENE-P, des tests de sensibilité de maillage pour le cas 2D axisymétrique ont été réalisés avec différents nombres de cellules en utilisant des maillages non uniformes pour calculer la variation du nombre de Nusselt pour $We = 10$ et pour une valeur extrême de $L^2 = 10$ car pour $L^2 < 10$ il y a peu d'intérêt pratique. Les détails du maillage utilisé sont présentés dans le tableau 6. La variation du nombre de Nusselt avec la distance normalisée x^* est représentée sur la Fig. IV.12. Comme la différence entre M2, M3 et M4 est insignifiante, les résultats présentés ci-après pour le modèle FENE-P ont été obtenus avec le maillage M2 pour optimiser le temps de calcul.

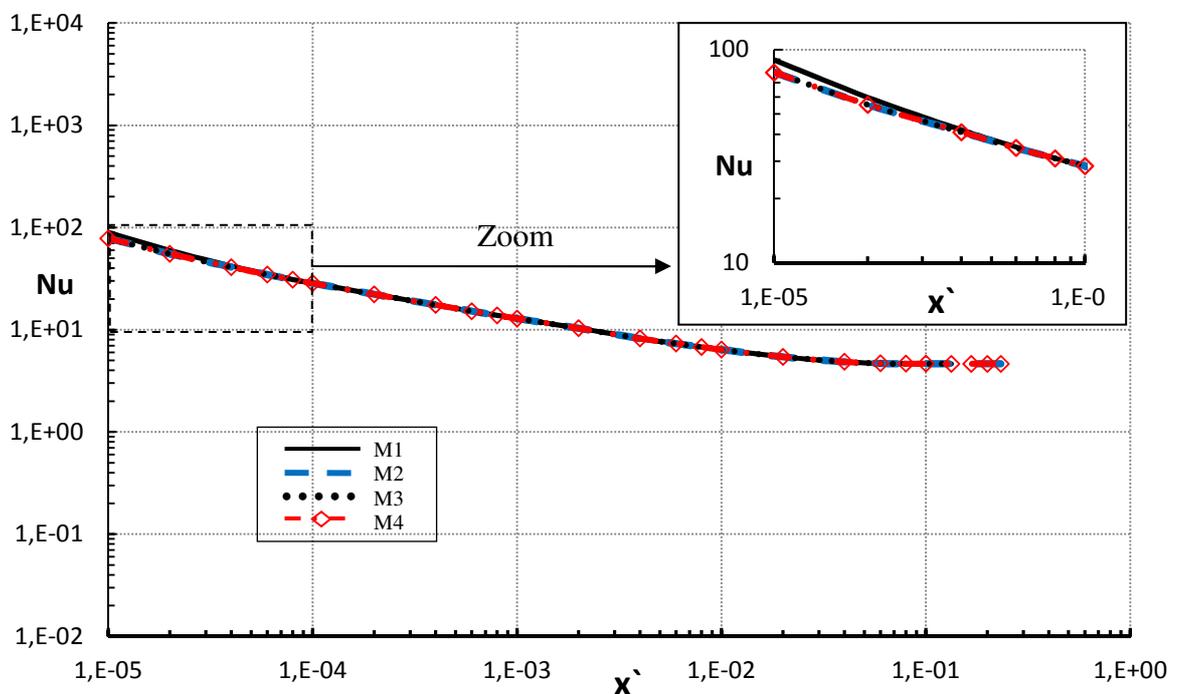


Figure. IV. 12. Test de sensibilité de maillage pour le cas 2D axisymétrique: nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale normalisée x^* pour $We = 10$ et $L^2 = 10$.

Tableau 6. Maillages testés avec le modèle FENE-P dans le cas 2D axisymétrique.

Géométrie	Maillage	Nx	Nr	Nombre des éléments	Nombre des nœuds
2D axisymétrique	M1	75	10	750	836
	M2	120	15	1800	1936
	M3	300	20	6000	6416
	M4	800	30	24000	24831

Pour les géométries 3D, encore une fois des tests de sensibilité de maillage ont été réalisés avec différents nombres de cellules, pour $We = 10$ et $L^2 = 10$, sur la variation du nombre de Nusselt avec la distance axiale normalisée x^* comme montré sur la figure IV. 13. Les différents maillages utilisés pour la géométrie 3D circulaire et 3D non circulaire sont ceux utilisés précédemment pour le modèle SPTT résumés dans les Tableaux 3 et 4 respectivement. Pour le cas 3D circulaire, la différence entre les résultats des maillages M5 et M6 est insignifiante et pour cela le maillage M5 a été considéré dans le présent travail pour le modèle FENE-P.

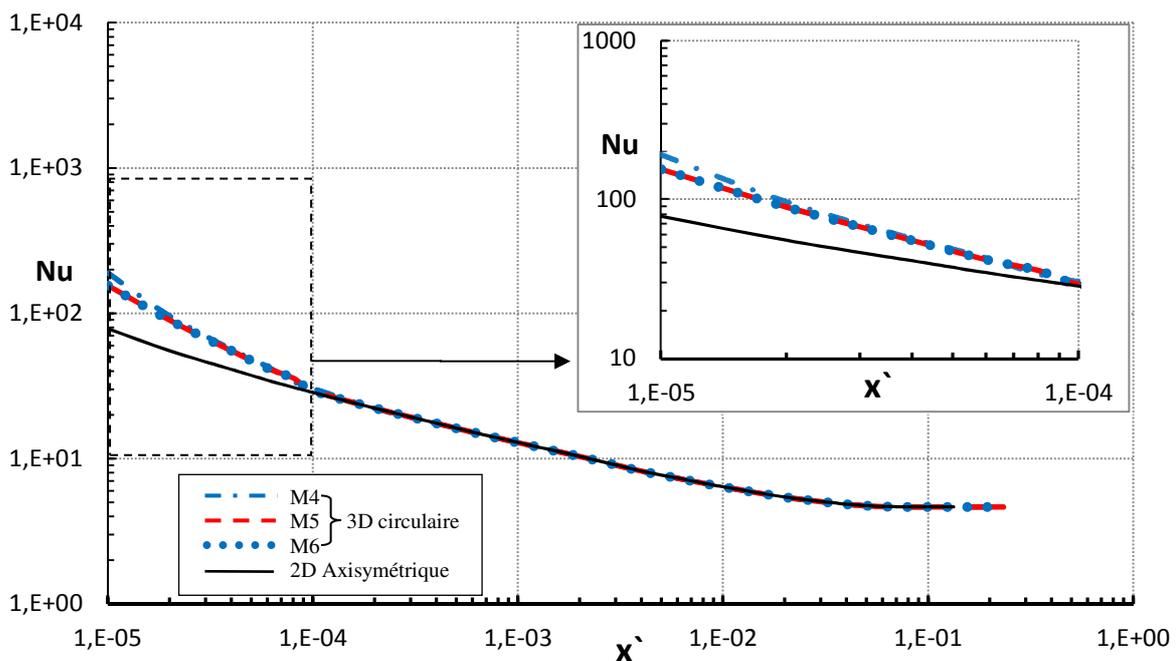


Figure. IV. 13. Test de sensibilité du maillage dans le cas 3D circulaire: nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale normalisée x^* pour $We = 10$ et $L^2 = 10$ et une comparaison avec la solution 2D axisymétrique.

La comparaison entre les résultats obtenus pour le maillage 2D axisymétrique et 3D circulaire montre un désaccord très près de l'entrée de la conduite pour une distance $10^{-5} < x^* < 10^{-4}$. Au-delà d'une certaine distance $x^* > 10^{-4}$ de l'entrée du tube, les valeurs sont en excellent accord jusqu'à la région pleinement développée du tube. La vérification de l'effet du maillage sur la solution pour les

géométries non-circulaires a été réalisée pour la géométrie du canal triangulaire pour un maillage de 21120 éléments (24200 nœuds) et 30375 éléments (34272 nœuds).

Les résultats obtenus pour le cas de test de $We = 10$ et $L^2 = 10$ sur la variation du nombre de Nusselt entièrement développé avec la distance axiale normalisée x^* , non présentés ici, sont similaires et confirment l'indépendance des résultats du maillage considéré.

IV.3.2. Géométrie circulaire: profils de vitesses

La figure IV. 14 montre les profils de vitesse entièrement développés des cas de conduite 2D et 3D pour plusieurs valeurs de nombre de Weissenberg en fixant la valeur du paramètre d'extensibilité $L^2 = 10$.

On peut constater que les calculs 2D et 3D prévoient essentiellement le même profil de vitesse. En comparaison avec la solution théorique de référence [22], donnée par l'équation (15) ci-dessous, les solutions numériques s'accordent parfaitement avec la solution analytique. La légère différence dans le flux principal reste inférieure à 1%. L'effet de We correspond parfaitement avec la théorie, une augmentation de We conduit à une diminution de la vitesse avec un aplatissement conséquente du profil comme on peut le voir sur la figure. IV. 15. La solution analytique pour le champ de vitesse, référence [22], est donnée par:

$$\hat{u}(\hat{r}) = 2X(1 - \hat{r}^2) \left[1 + 16 \frac{We^2 X^2}{a^2 L^2} (1 + \hat{r}^2) \right] \quad (4.6)$$

où $\hat{u} \equiv u/\bar{u}$, $\hat{r} \equiv r/R$ représentent la vitesse et le rayon non dimensionnels respectivement, \bar{u} est la vitesse moyenne et R le rayon de la conduite. Le paramètre a est défini comme $a \equiv 1/(1 - 3/L^2)$. Le paramètre de gradient de pression non dimensionnelle X est défini comme $X \equiv \bar{u}_N / \bar{u}$ où \bar{u}_N représente la vitesse moyenne pour un cas newtonien. Le paramètre de gradient de pression peut être explicitement écrit:

$$X = \frac{432^{1/6} (S^{2/3} - 2^{2/3})}{6\beta^{1/2} S^{1/3}} \quad (4.7)$$

où les paramètres β et S sont définis comme

$$\beta = \frac{64}{3} \frac{We^2}{a^2 L^2} \quad \text{et} \quad S = (4 + 27\beta)^{1/2} + 3^{3/2} \beta^{1/2}$$

La figure IV. 16 montre les profils de vitesse pour une valeur constante de $We = 10$ en variant le paramètre d'extensibilité L^2 . Pour le cas newtonien $L^2 = 0$, un accord parfait est observé en comparaison avec la solution théorique de la référence [22]. D'autres valeurs de L^2 de la solution numérique sont en accord avec les profils théoriques avec une petite différence dans l'intervalle de

1%, et la tendance de l'effet de l'augmentation de L^2 qui conduit à un aplatissement de premier plan du profil de vitesse est correctement prédite, voir figure IV. 17.

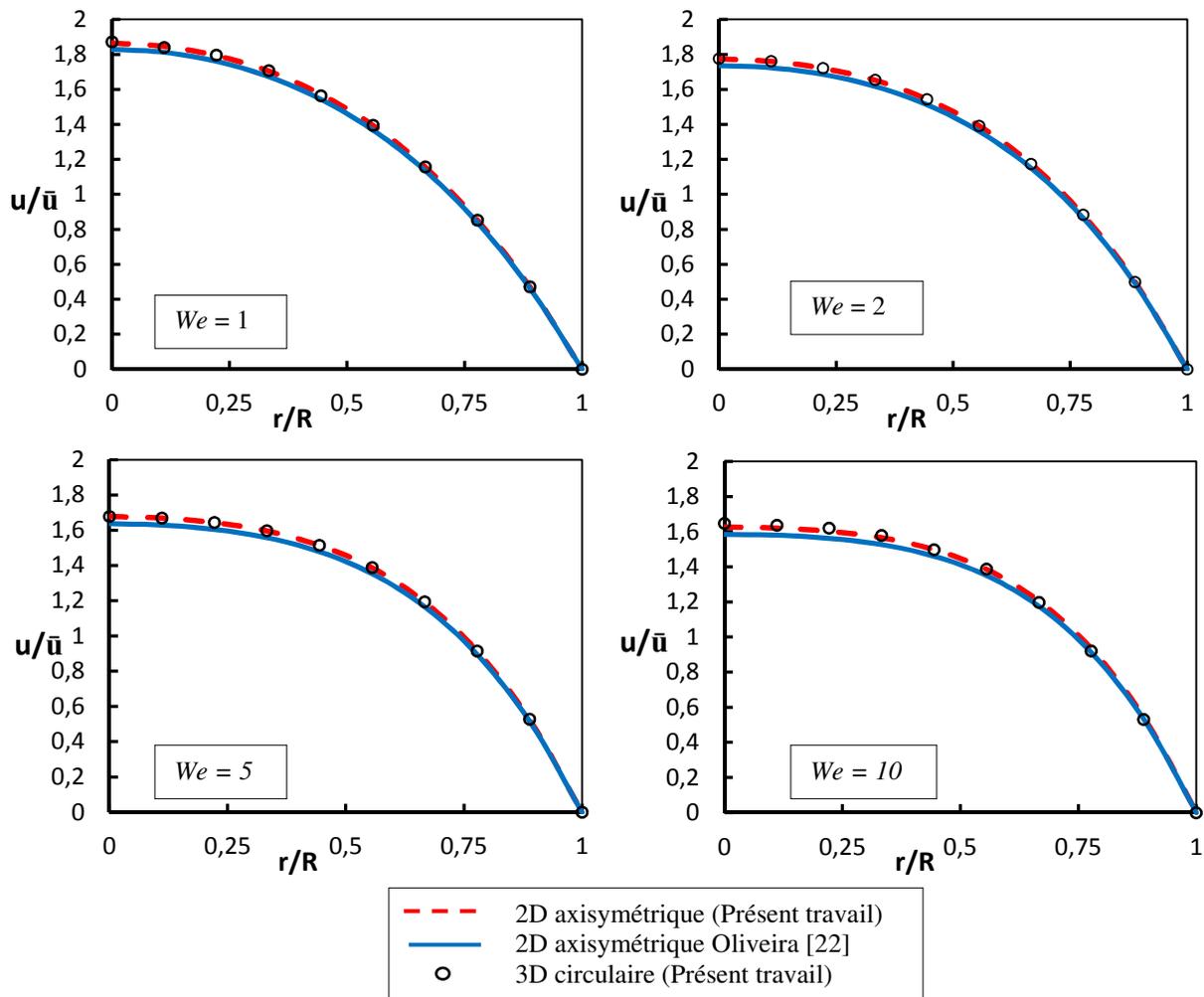


Figure IV. 14. Comparaison des profils de vitesse entièrement développés pour les cas 2D axisymétrique et 3D circulaire avec ceux de Oliveira [22] pour $L^2 = 10$ et $We = 1, 2, 5$ et 10 .

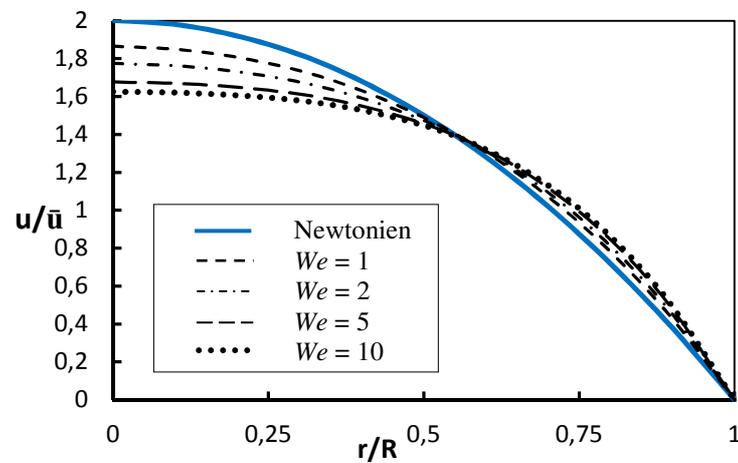


Figure IV. 15. Profils de vitesse entièrement développés pour le cas 2D axisymétrique pour $L^2 = 10$ et $We = 1, 2, 5$ et 10 .

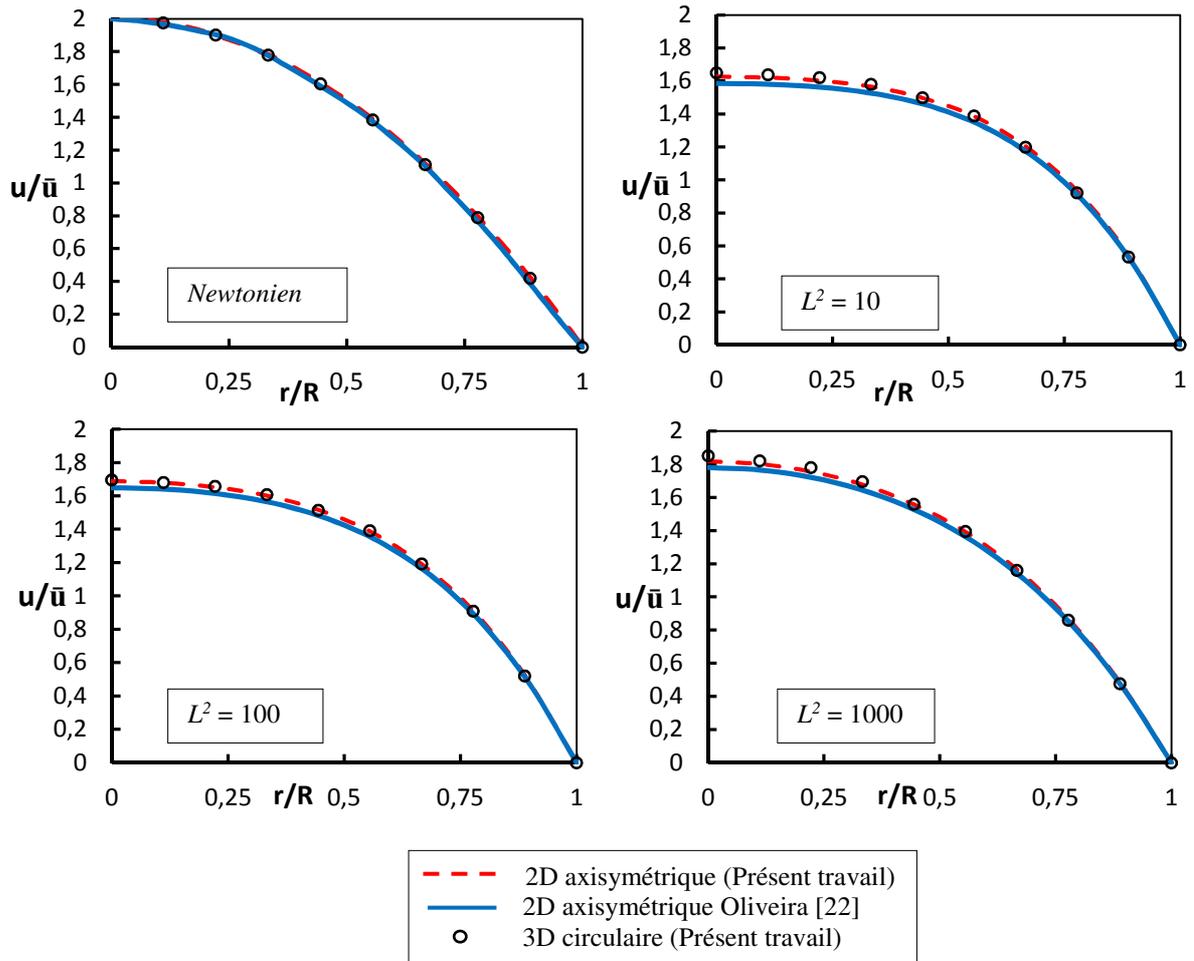


Figure IV. 16. Comparaison des profils de vitesse entièrement développés pour les cas 2D axisymétrique et 3D circulaire avec ceux de Oliveira [22] pour $We = 10$ et $L^2 = 10, 100$ et 1000 .

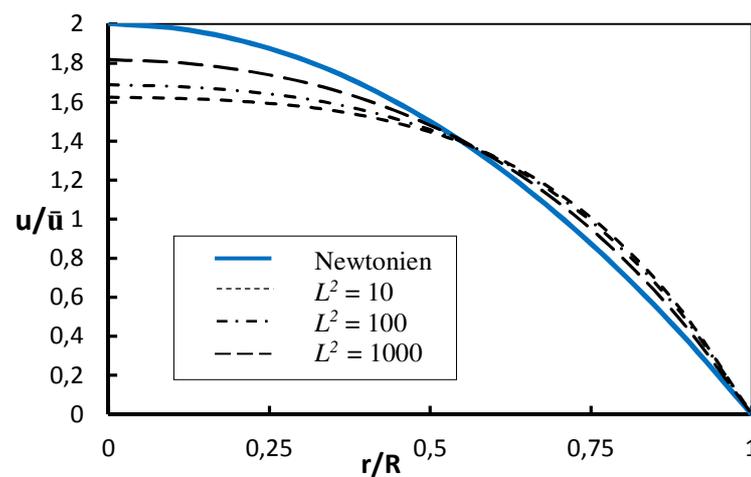


Figure IV. 17. Profils de vitesse entièrement développés pour le cas 2D axisymétrique pour $We = 10$ et $L^2 = 10, 100$ et 1000 .

IV.3.3. Géométrie circulaire : profils de contrainte normale et coefficient de frottement

Les profils de la contrainte normale normalisée, avec la contrainte de cisaillement à la paroi d'un fluide newtonien, $\tau_{xx}/(\tau_{wN})$ et avec la contrainte de cisaillement à la paroi du modèle FENE-P $\tau_{xx}/(\tau_{xr} (r = R))$ pour la géométrie 2D axisymétrique sont présentés dans la figure IV. 18 et 19, respectivement. Ils sont comparés avec la solution analytique de Oliveira [22] donnée par les équations (20, 21) pour différentes valeurs de We et une valeur fixe du paramètre d'extensibilité $L^2 = 10$.

La figure IV. 18 est utilisée pour capter le nombre de Weissenberg critique où la valeur maximale de la contrainte normale τ_{xx} est atteinte avant qu'elle ne commence à diminuer à nouveau, ce qui correspond à une valeur du $We_{cr} = 2$ et est en parfait accord avec les conclusions de Oliveira [22]. Les valeurs numériques des contrainte normale normalisée avec la contrainte de cisaillement à la paroi $\tau_{xx}/(\tau_{xr})$ correspondent très bien avec la solution analytique de [22] avec un petit désaccord de l'ordre de 1 % observé pour le profil de contrainte normale normalisée avec la contrainte de cisaillement newtonien à la paroi $\tau_{xx}/(\tau_{wN})$. Les profils de contraintes normalisées pour la géométrie circulaire 3D qui ne sont pas représentés ici sont en excellent accord avec ceux du cas 2D axisymétrique. Les composantes normale et tangentielle normalisées disponibles dans la référence [22] sont données par les équations (4.8) et (4.9), respectivement,

$$\tau_{xr} \equiv -X\hat{r}, \quad (4.8)$$

$$\tau_{xx} \equiv 8WeX^2\hat{r}^2 / a. \quad (4.9)$$

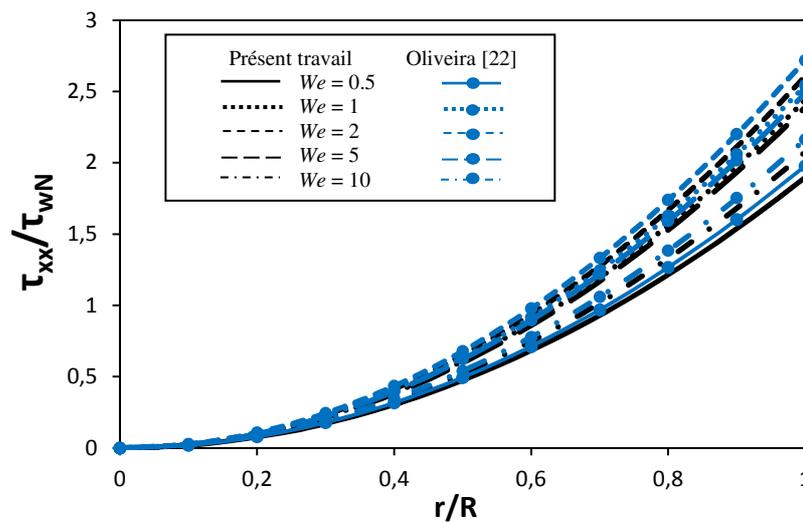


Figure IV. 18. Contrainte normale normalisée avec la contrainte de cisaillement newtonien à la paroi pour le cas 2D axisymétrique pour $L^2 = 10$ et $We = 0.5, 1, 2, 5$ et 10 .

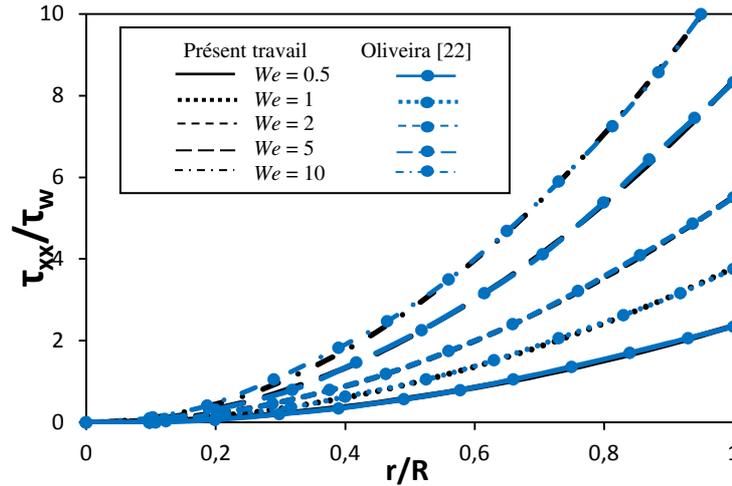


Figure IV. 19. Contrainte normale normalisée avec la contrainte de cisaillement à la paroi, du modèle FENE-P pour le cas 2D axisymétrique ($\tau_w = \tau_{xr}(r = 1)$) pour $L^2 = 10$ et $We = 0.5, 1, 2, 5$ et 10 .

Le coefficient de frottement C_f est défini par [2] :

$$C_f = \frac{\bar{\tau}_w}{\frac{1}{2} \rho \bar{u}^2}. \quad (4.10)$$

Où $\bar{\tau}_w$ est la contrainte de cisaillement moyenne par rapport au pourtour de la paroi dans la région pleinement développée.

La variation du coefficient de frottement normalisé C_f/C_{fN} en fonction du paramètre d'extensibilité L^2 est représentée sur la figure IV. 20 pour les différentes géométries considérées où C_{fN} représente le coefficient de frottement pour le fluide newtonien.

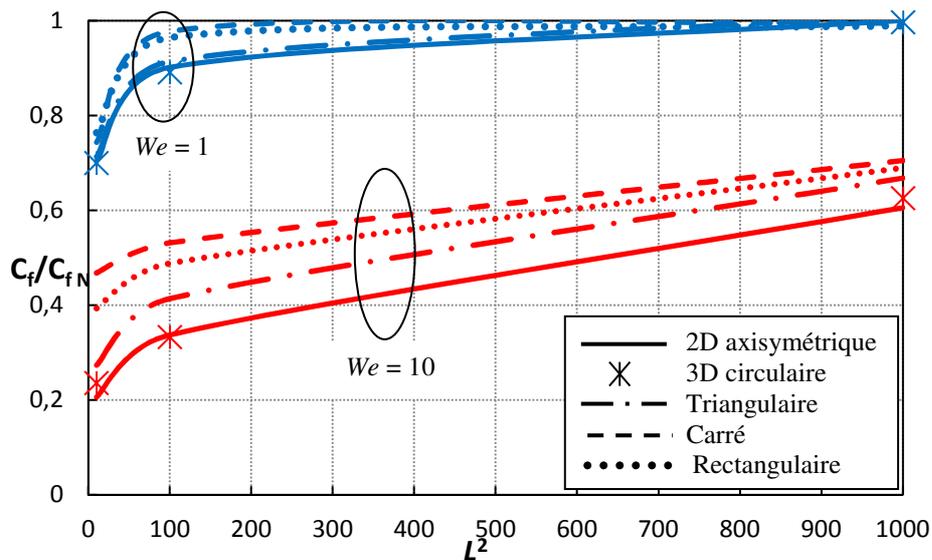


Figure IV. 20. Variation du coefficient de frottement normalisé C_f/C_{fN} avec le paramètre d'extensibilité L^2 et le nombre de Weissenberg pour les différentes géométries considérées.

Deux limites d'élasticité du fluide ont été considérées $We = 1$ et $We = 10$. En général, les résultats indiquent clairement que l'augmentation de l'élasticité du fluide FENE -P à travers le nombre de We conduit à une diminution du coefficient de frottement si on la compare avec le cas limite newtonien.

La figure IV. 20 montre aussi que pour une petite valeur du paramètre d'extensibilité $L^2 = 10$, le coefficient de frottement atteint une valeur minimale, puis augmente de façon monotone avec l'augmentation de L^2 pour atteindre la limite du fluide newtonien pour $L^2 = 1000$ pour un faible niveau d'élasticité du fluide ($We = 1$).

IV.3.4. Géométrie non-circulaire: profils de vitesses

Les figures IV. 21, 22 et 23 illustrent les contours des profils de vitesse entièrement développés pour les géométries carrée, rectangulaire ($b/a = 1/2$) et triangulaire considérées dans le présent travail pour le cas newtonien et viscoélastique FENE-P.

En utilisant les propriétés de symétrie des sections, seulement 1/4 du domaine est indiqué pour les formes rectangulaires et 1/6 pour le triangulaire. Les résultats newtoniens peuvent être directement comparés avec les solutions analytiques de la référence [2,44], données par les équations (4.11 à 4.14).

L'accord entre la solution numérique avec le maillage choisi s'accorde parfaitement bien avec la solution analytique comme le montrent les figures IV. 21.a, 22.a et 23.a pour les géométries carrée, rectangulaire ($b/a = 1/2$) et triangulaire respectivement. Cet accord représente une nouvelle validation de l'approche de modélisation adoptée dans cette étude.

Les figures IV. 21.b, 22.b et 23.b présentent l'effet de We et L^2 pour les géométries carrée, rectangulaire ($b/a = 1/2$) et triangulaire équilatérale respectivement. Les résultats montrent les mêmes tendances observées avec les cas 2D axisymétrique et 3D circulaire, c'est à dire une augmentation de We pour une valeur fixe de L^2 et/ou une diminution de L^2 pour une valeur fixe de We , conduit à une diminution de la vitesse conduisant à un aplatissement du profil.

Les équations pour un écoulement de fluide newtonien à travers une section transversale rectangulaire : $-a \leq y \leq a$, $-b \leq z \leq b$ sont données par:

$$u(y, z) = \frac{16a^2}{\mu\pi^3} \left(-\frac{d\hat{p}}{dx} \right) \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(i-2)/2} \left[1 - \frac{\cosh(i\pi z/2a)}{\cosh(i\pi b/2a)} \right] \cdot \left[\frac{\cos(i\pi y/2a)}{i^3} \right] \quad (4.11)$$

$$Q = \frac{4ba^3}{3\mu} \left(-\frac{d\hat{p}}{dx} \right) \left[1 - \frac{192a}{\pi^5 b} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\tanh(i\pi b/2a)}{i^5} \right] \quad (4.12)$$

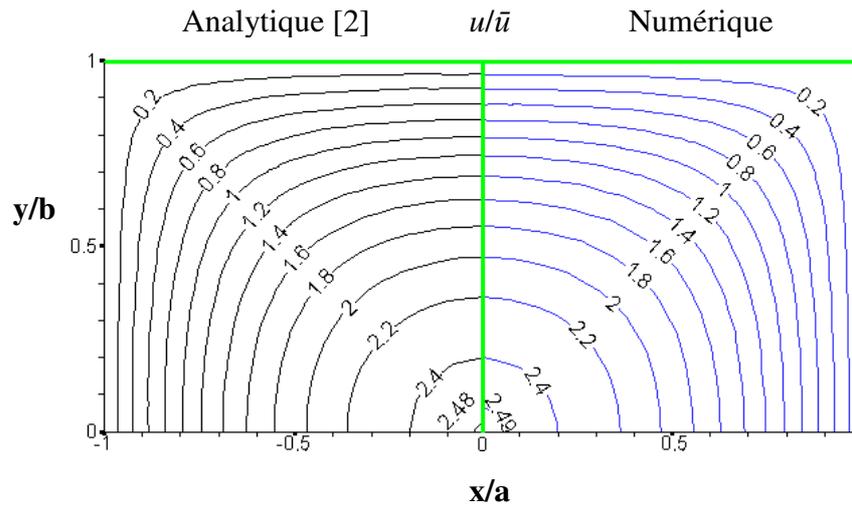


Figure IV. 21.a. Comparaison des contours de la vitesse axiale normalisée u/\bar{u} pour la géométrie carrée, le cas newtonien.

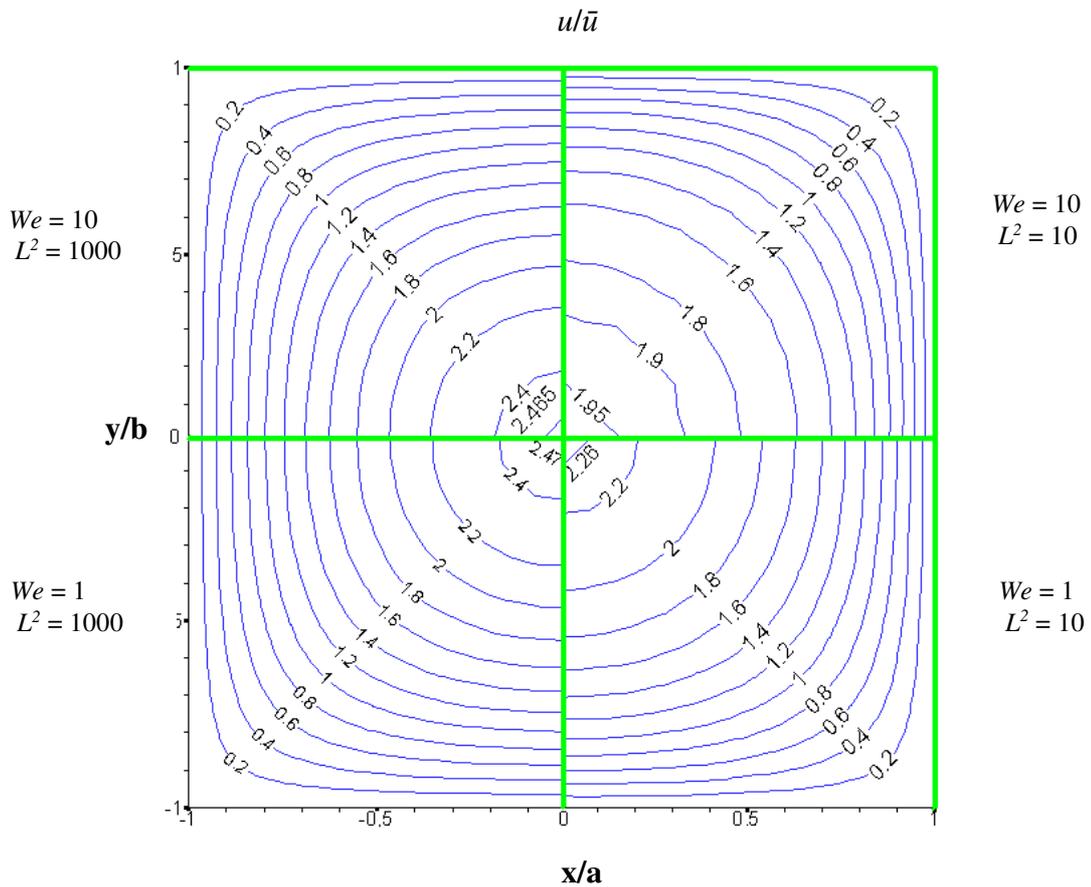


Figure IV. 21.b. Contours de la vitesse axiale normalisée u/\bar{u} pour la géométrie carrée, le cas FENE-P.

Alors que pour la section triangulaire équilatérale :

$$u(y, z) = \frac{-d\hat{p}/dx}{2\sqrt{3}a\mu} \left(z - \frac{1}{2}a\sqrt{3} \right) (3y^2 - z^2) \quad (4.13)$$

$$Q = \frac{a^4 \sqrt{3}}{320\mu} \left(-\frac{d\hat{p}}{dx} \right) \quad (4.14)$$

où a et b représentent les longueurs des côtés des conduits, pour la géométrie carrée $a = b$ et pour la géométrie rectangulaire $b/a = 1/2$. $u(y, z)$ représente la composante de vitesse transversale et y et z représentent respectivement les coordonnées transversales. Q dans les équations (21, 23) représente le débit volumétrique d'écoulement, u/\bar{u} dans les figures IV. 21, 22 et 23 est la vitesse non dimensionnelle et \bar{u} représente la vitesse moyenne comme indiqué plus haut.

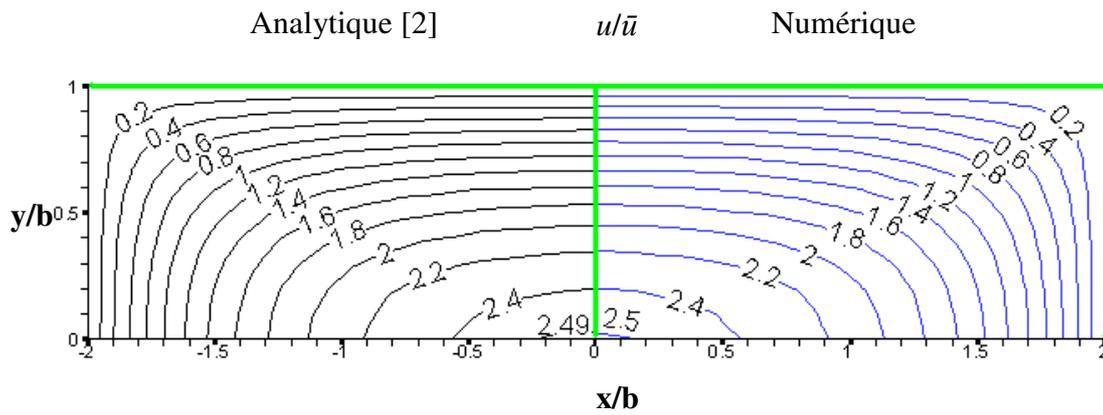


Figure IV. 22.a. Comparaison des contours de la vitesse axiale normalisée u/\bar{u} pour la géométrie rectangulaire, le cas newtonien.

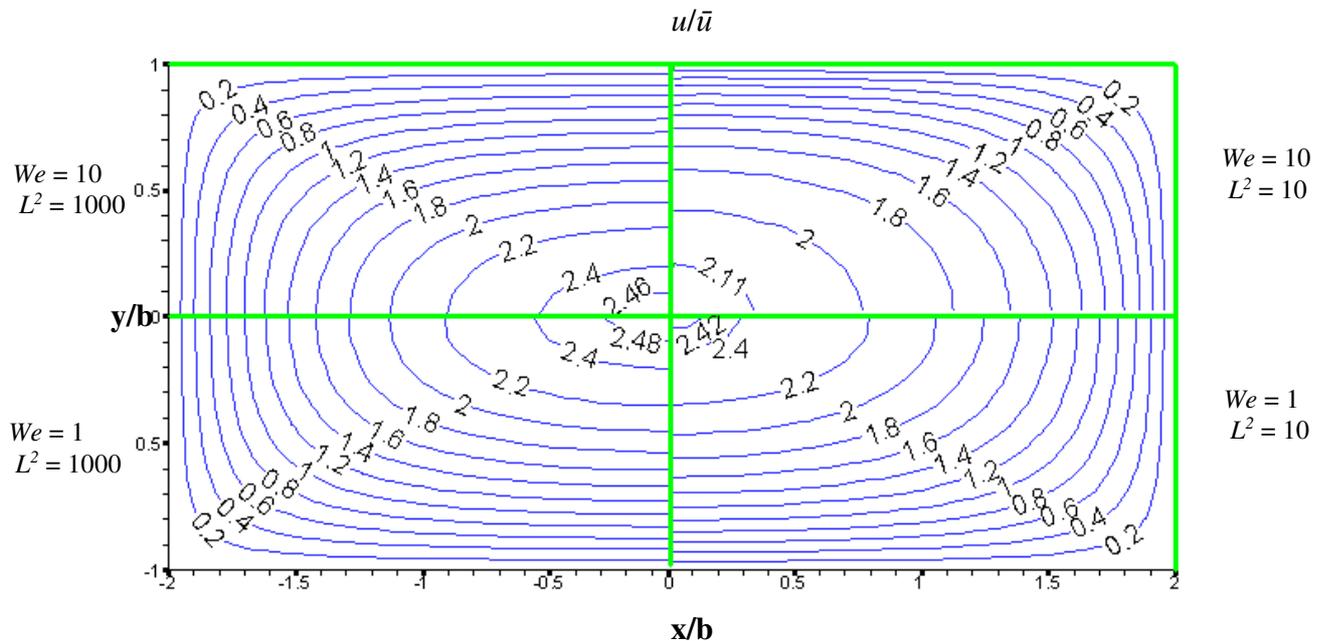


Figure IV. 22.b. Contours de la vitesse axiale normalisée u/\bar{u} pour la géométrie rectangulaire $a/b = 1/2$, le cas FENE-P.

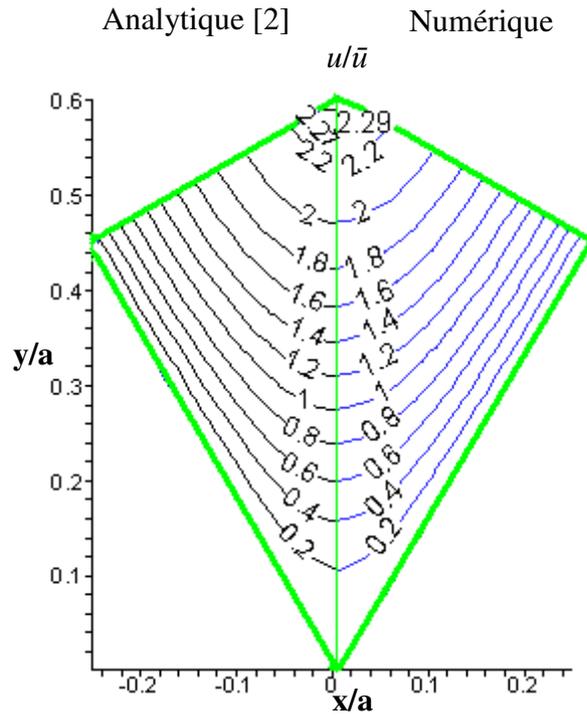


Figure IV. 23.a. Comparaison des contours de la vitesse axiale normalisée u/\bar{u} pour la géométrie triangulaire équilatérale, le cas newtonien.

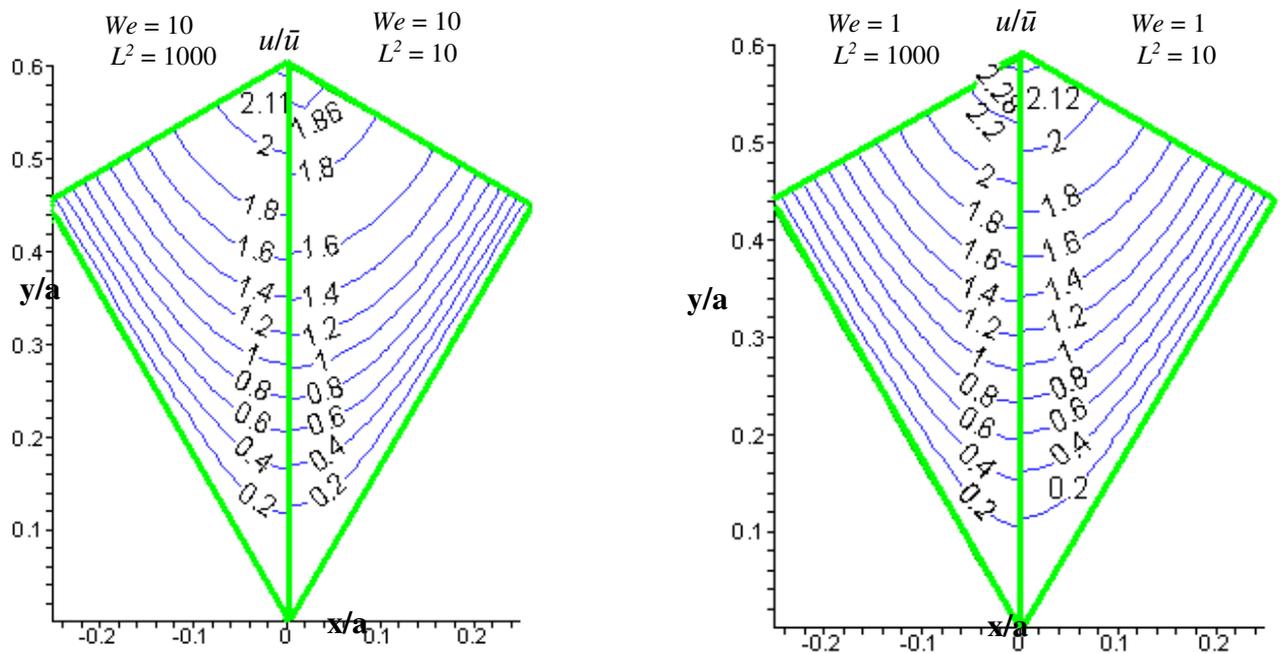


Figure IV. 23.b. Contours de la vitesse axiale normalisée u/\bar{u} pour la géométrie triangulaire équilatérale, le cas FENE-P.

IV.3.5. Géométrie circulaire: transfert de chaleur

Les figures IV. 24 et 25 représentent la variation du nombre de Nusselt en fonction de la longueur axiale de tube pour les cas 2D axisymétrique et 3D circulaire, respectivement, pour les deux valeurs de $We = 1$ et 10 et pour différentes valeurs du paramètre d'extensibilité L^2 . La variation du nombre de Nusselt en fonction de la longueur axiale de tube est similaire pour les deux maillages 2D et 3D.

La valeur newtonienne exacte du nombre de Nusselt de 4.364 est obtenue par les simulations. En regardant les valeurs du régime pleinement développé, les simulations sont capables d'afficher la tendance correcte de l'effet du paramètre L^2 . La diminution des valeurs du paramètre d'extensibilité conduit à une augmentation du coefficient de transfert de chaleur. Une augmentation du nombre de Weissenberg conduit aussi à un transfert de chaleur amélioré d'une valeur de l'ordre de 11% obtenue dans le cas de $We = 10$ et $L^2 = 10$.

Là encore, les différences entre les résultats 2D et 3D ne sont pas très importantes et les résultats montrent la même tendance. La valeur unique obtenue à partir de l'analyse de Oliveira et al [23] lorsque $L^2 = 10$ et $We = 1$ et 10 est prédite par la solution numérique avec une erreur inférieure à 2% .

Pour examiner l'effet d'une très grande élasticité sur le nombre de Nusselt et pour le cas 2D axisymétrique, figure IV. 26 montre la variation du nombre de Nusselt entièrement développé Nu_{fd} en fonction du paramètre dimensionnel $We^2 / (aL)^2$, qui apparaît dans la formulation du profil de vitesse donnée par l'équation (17).

L'augmentation du paramètre dimensionnel en augmentant l'élasticité et /ou en diminuant le paramètre d'extensibilité conduit à une augmentation monotone et rapide du coefficient de transfert de chaleur à partir de la valeur classique Newtonienne 4.364 pour atteindre une limite asymptotique de $4,955$ ce qui correspond à la valeur donnée par Oliveira et al [23] comme le montre la figure IV. 26, avec une différence de moins de 2% .

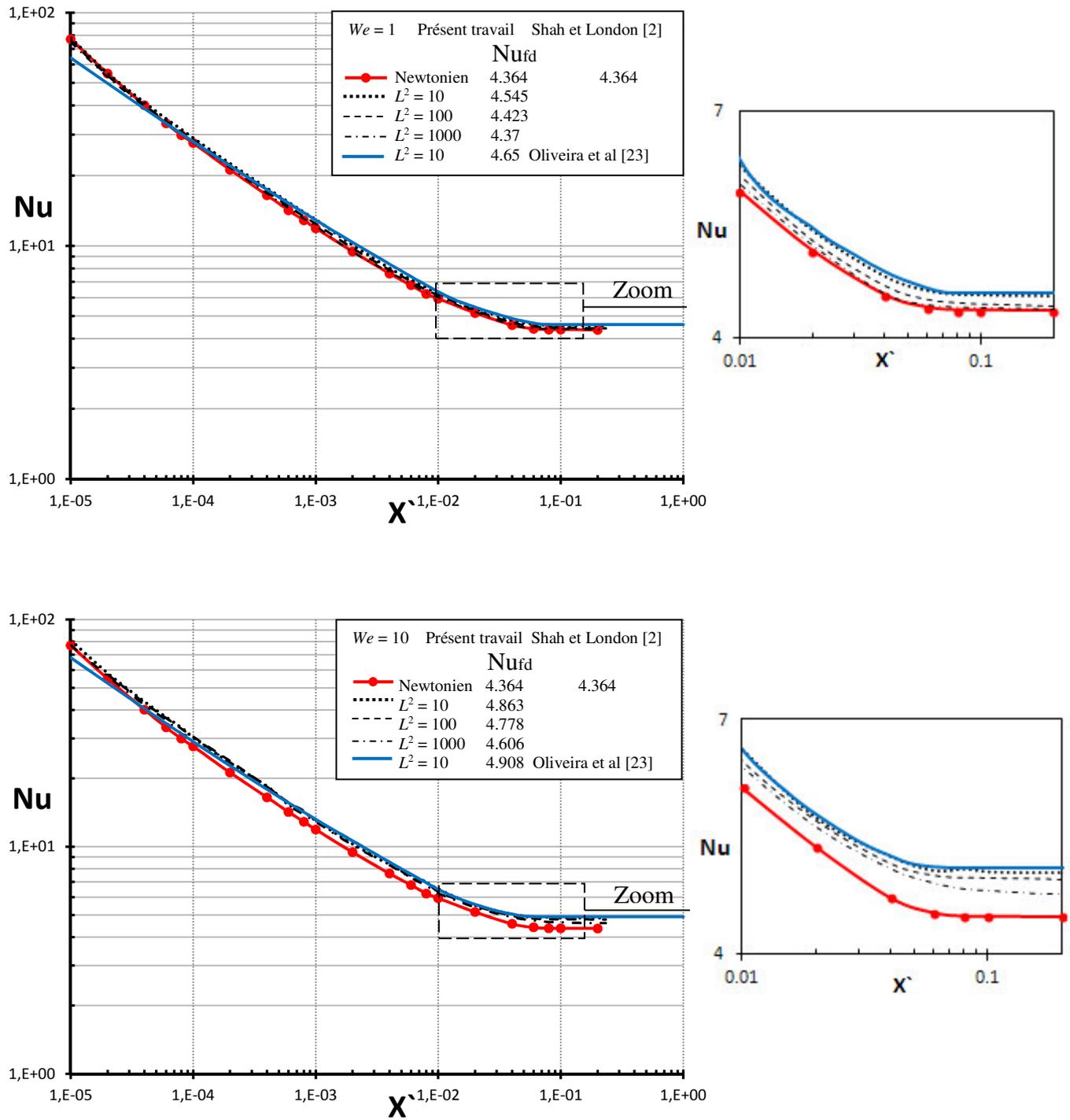


Figure IV. 24. Nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale $x' = x/D.Re.Pr$, pour le cas 2D axisymétrique, effet d'extensibilité L^2 , $We = 1$ et 10.

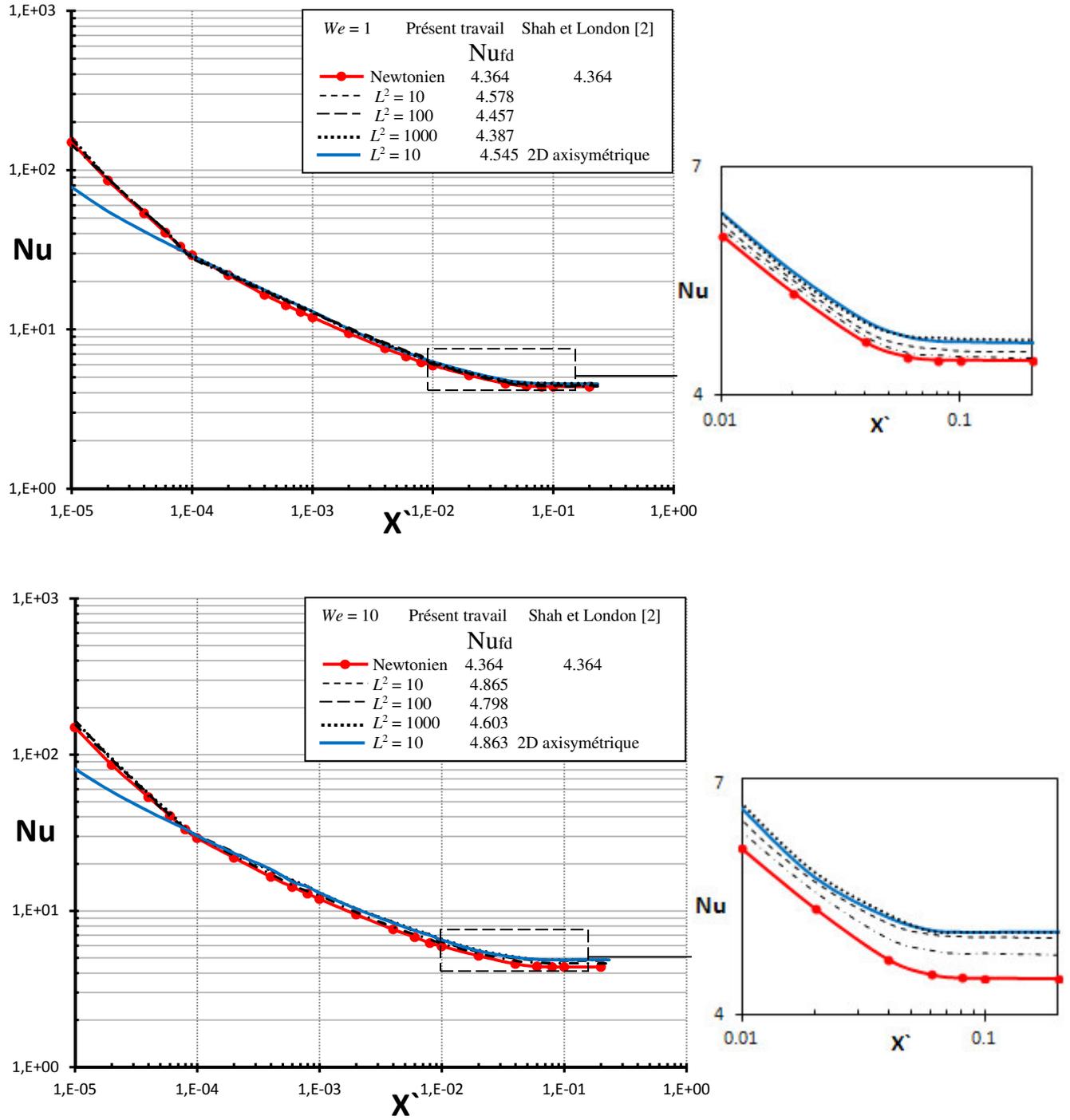


Figure IV. 25. Nombre de Nusselt vs. la distance axiale $x' = x/D.Re.Pr$, pour le cas 3D circulaire, effet d'extensibilité L^2 , $We = 1$ et 10.

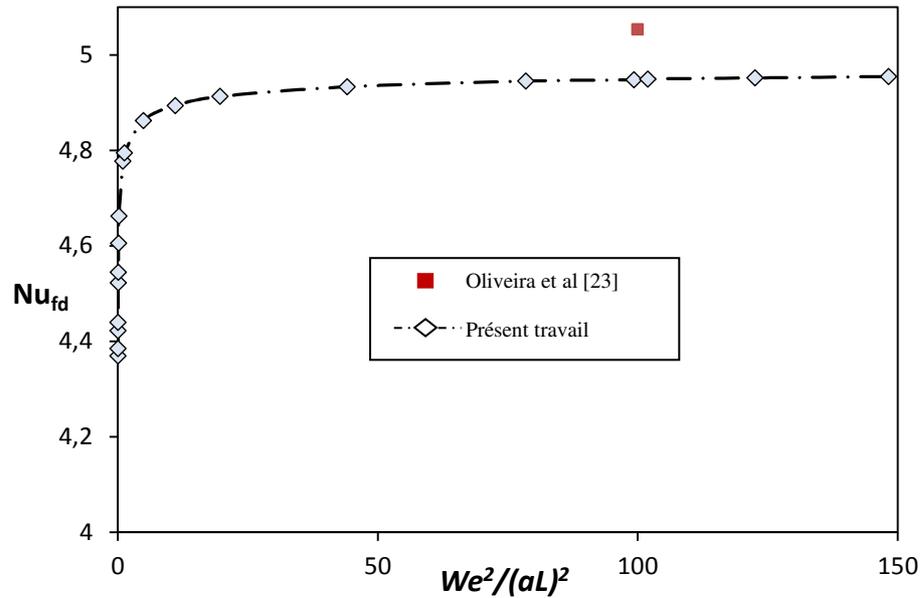


Figure IV. 26. Nombre de Nusselt vs. paramètre dimensionnel $We^2/(aL)^2$, pour le cas 2D axisymétrique.

IV.3.6. Géométrie non-circulaire: transfert de chaleur

Une variété de géométries de passage non circulaire, y compris les canaux triangulaires, carrés et rectangulaires ($b/a = 1/2$), a été examinée dans le présent travail pour le problème Graetz avec le modèle FENE-P viscoélastique non linéaire. L'influence des effets élastiques/extensibilité sur la variation du nombre de Nusselt moyen pour les trois géométries considérées est représentée dans les figures IV. 27, 28 et 29 respectivement. Dans tous les cas, la comparaison de la valeur pleinement développée du Nu newtonien avec des travaux disponibles dans la littérature, Shah et London [2], montre un excellent accord. La comparaison représente ainsi une validation directe qui contribue à renforcer la confiance dans la précision des résultats numériques.

En général, les résultats du fluide FENE-P montrent que le nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation du We , mais faiblement. Pour la valeur de $We = 10$ et une valeur constante du paramètre d'extensibilité $L^2 = 10$, l'augmentation du nombre de Nusselt par rapport au cas newtonien est d'environ 4,76% pour la géométrie triangulaire, 9,24% pour la conduite carrée et de 5,17% pour la conduite rectangulaire ($b/a = 1/2$).

Le paramètre extensibilité L^2 a un effet opposé suivant la même tendance inhérente aux résultats de calcul pour les conduites 2D axisymétrique et 3D circulaire. Pour un nombre Weissenberg constant, et L^2 augmentant de 10 à 1000 conduit à une diminution du nombre de Nusselt et s'approche asymptotiquement à la limite newtonienne de Nu_{fd} .

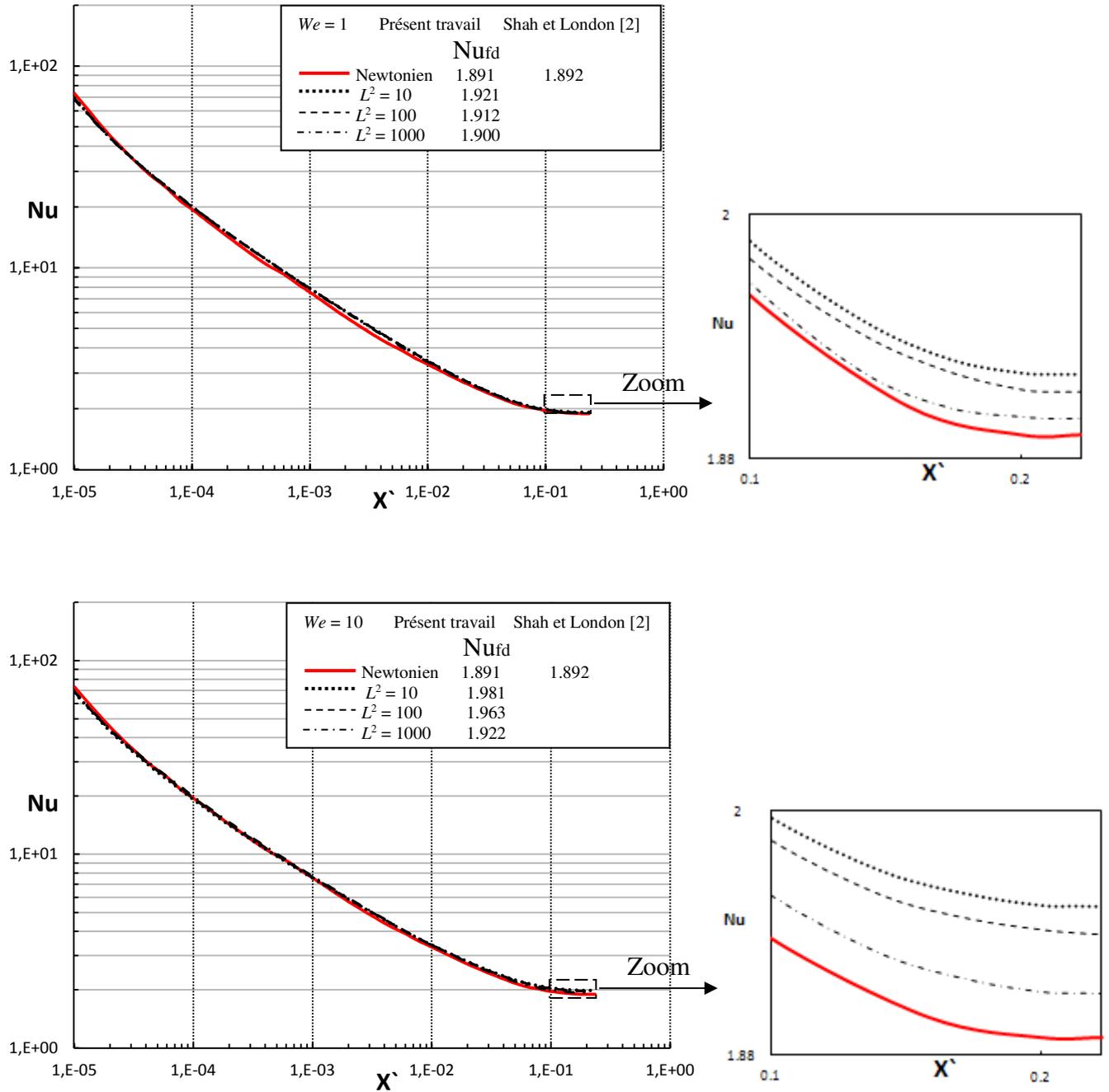


Figure IV. 27. Nombre de Nusselt vs. la distance axiale $x' = x/D.Re.Pr$, pour le cas triangulaire équilatéral, effet d'extensibilité L^2 , $We = 1$ et 10.

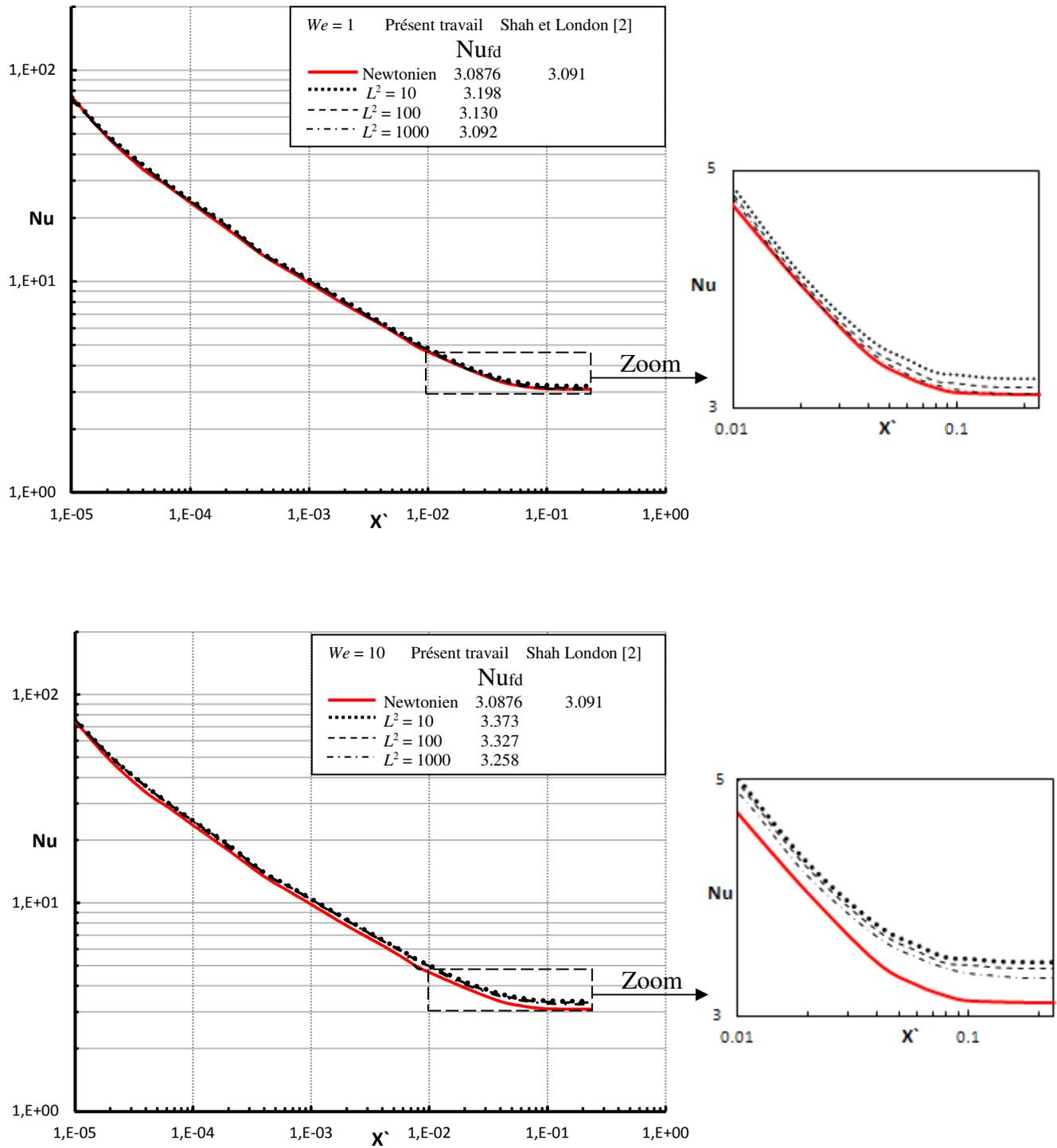


Figure IV. 28. Nombre de Nusselt vs. la distance axiale $x' = x/D.Re.Pr$, pour le cas carré, effet d'extensibilité L^2 , $We = 1$ et 10.

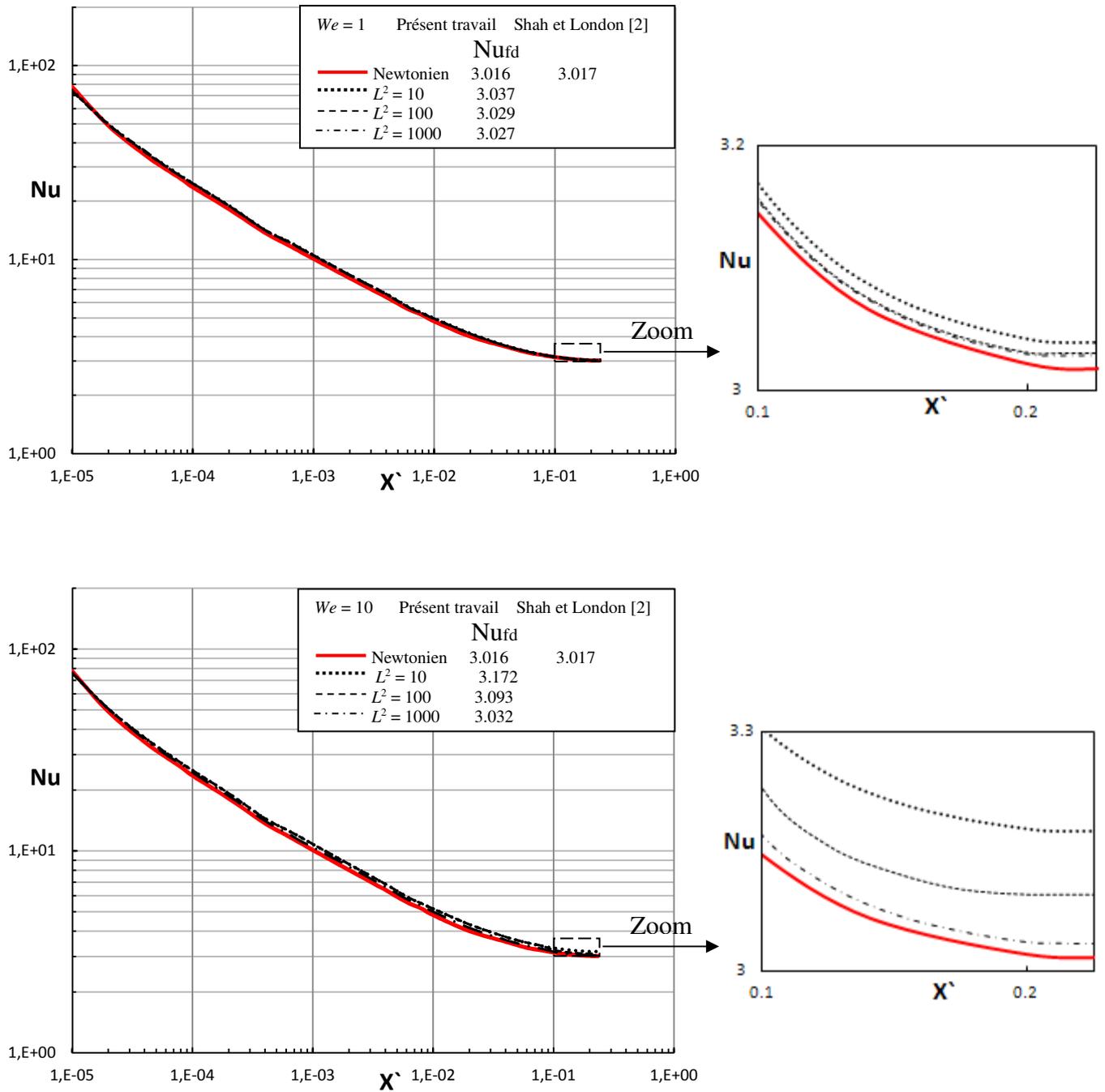


Figure IV. 29. Nombre de Nusselt vs. la distance axiale $x' = x/D.Re.Pr$, pour le cas rectangulaire ($b/a = 1/2$), effet d'extensibilité L^2 , $We = 1$ et 10.

IV.3.7. Conclusion

Le problème de Graetz pour un écoulement laminaire d'un fluide newtonien et un fluide viscoélastique décrit par l'équation constitutive FENE-P dans des conduits de sections transversales circulaires, triangulaires, carrées et rectangulaires est résolu numériquement, en utilisant le code de calcul Polyflow basé sur des éléments finis, pour le cas d'un flux de chaleur constant imposé à la paroi et dans le cas d'une dissipation visqueuse et viscosité du solvant négligées.

Les résultats sont discutés en termes d'effets d'élasticité par le nombre Weissenberg We et le paramètre d'extensibilité L^2 sur la variation des profils de la vitesse, contraintes normales, coefficient de frottement et le coefficient de transfert de chaleur moyen en fonction de la distance non dimensionnelle axiale x^* . Le maillage utilisé dans les calculs a été largement étudié et les résultats présentés pour les profils de vitesse et de contraintes normales ainsi que le coefficient de transfert de chaleur sont indépendants du maillage.

Pour les différentes géométries prises en compte dans le présent travail, les valeurs pleinement développées du nombre de Nusselt obtenues pour les cas newtoniens sont en excellent accord avec celles disponibles dans la littérature. La comparaison entre les résultats calculés dans les cas 2D axisymétrique et 3D circulaire pour le modèle FENE-P montre un très bon accord et offre une bonne validation des calculs numériques et l'approche utilisée. Les profils de vitesse et le nombre de Nusselt dans l'écoulement entièrement développé, utilisant le modèle FENE-P, montrent des différences insignifiantes de ceux donnés par la solution analytique pour la vitesse et la solution semi-analytique pour le Nu pour la géométrie circulaire.

En général, il a été démontré qu'une augmentation de l'élasticité mesurée par We a entraîné une amélioration du coefficient de transfert de chaleur due à l'influence de la fluidification par cisaillement. Ces résultats sont en accord avec les tendances disponibles dans la littérature. Par contre, le paramètre d'extensibilité (L^2) a eu un effet inverse avec une diminution du comportement rhéofluidifiant.

IV.4. Le modèle FENE-P avec contribution newtonienne, $\beta \neq 0$

Cette partie explore les résultats de l'effet de la viscosité du solvant sur le champ de vitesse et le transfert de chaleur pour le cas 2D axisymétrique ainsi que les conduits 3D circulaire et non circulaire. L'objectif ici est de chercher à quantifier l'effet du rapport de viscosité du solvant β défini comme $\beta = \mu_s / (\mu_s + \mu_p)$ qui peut prendre des valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ sur la vitesse axiale et les profils des contraintes pour différentes valeurs des paramètres L^2 et We .

La valeur $\beta = 0$ correspond à une valeur nulle de la viscosité du solvant et la valeur $\beta = 1$ correspond à un fluide newtonien. On commence par examiner la géométrie de section circulaire en utilisant les maillages 2D et 3D. Dans le cas de l'écoulement axisymétrique pleinement développé, la distribution de vitesse de la solution analytique de Cruz et al [24] et celles de [22, 23] seront utilisées pour la validation des résultats obtenus numériquement.

La même approche utilisée dans l'analyse des résultats de la géométrie 3D circulaire sera ensuite utilisée pour l'analyse des géométries non-circulaires considérées dans cette étude et pour lesquelles aucune solution théorique ni de travaux expérimentaux ne sont encore disponibles. Nous allons ensuite examiner l'effet de β sur le nombre de Nusselt pour différentes valeurs du paramètre $We^2/(aL)^2$.

Dans la seconde partie de cette section, les canaux non circulaires 3D sont considérés. L'effet de β sur le champ de vitesse et le nombre de Nusselt est examiné. Les calculs pour les géométries 3D sont très coûteux en temps et donc l'effet de β est analysé en considérant une seule valeur de 1/9, qui est intermédiaire entre les valeurs extrêmes 0 et 1 comme on peut le voir d'après les résultats ci-dessous.

IV.4.1. Géométrie circulaire : profils de vitesses

Cruz et al [24] ont obtenu une expression analytique du profil de vitesse de l'écoulement complètement développé à travers une conduite circulaire pour un fluide FENE-P avec une contribution du solvant $\beta \neq 0$. Cette expression est récapitulée ci-dessous et est utilisée pour la validation de la solution numérique obtenue:

$$u(r) = \left(\frac{2U_N}{\beta} \right) \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) + \frac{3}{8C\eta_s} \{ F_R^+ G_R^- - F_r^+ G_r^- + F_R^- G_R^+ - F_r^- G_r^+ \} \quad (4.15)$$

où:

$$U_N = \frac{-p_z R^2}{8\eta_0} \quad (4.16)$$

Avec les fonctions F et G définies comme suit:

$$F_x^\pm = \left(CX \pm \sqrt{A^3 + (CX)^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.17)$$

$$G_x^\pm = 3CX \pm \sqrt{A^3 + (CX)^2}$$

et

$$A = \frac{\eta_p^2 (b+5)^3}{6\lambda^2 (b+2)^2} \left(1 + \frac{\eta_p}{\eta_s} \right); \quad B = \left(\frac{\eta_p^2 (b+5)^3}{4\lambda^2 (b+2)^2} \frac{\eta_p p_z}{\eta_s 2} \right) r = Cr \quad (4.18)$$

p_z est le gradient de pression axial, B est le coefficient qui exprime l'importance relative de l'apport de solvant à une contrainte totale et le paramètre a est défini comme $a \equiv 1/(1-3/L^2)$.

La Figure IV. 30.a montre des profils de vitesse entièrement développés à travers des conduites circulaires 2D axisymétrique et 3D pour plusieurs valeurs de We en fixant la valeur du paramètre d'extensibilité $L^2 = 10$. On peut constater que les calculs 2D et 3D prédisent le même profil de vitesse.

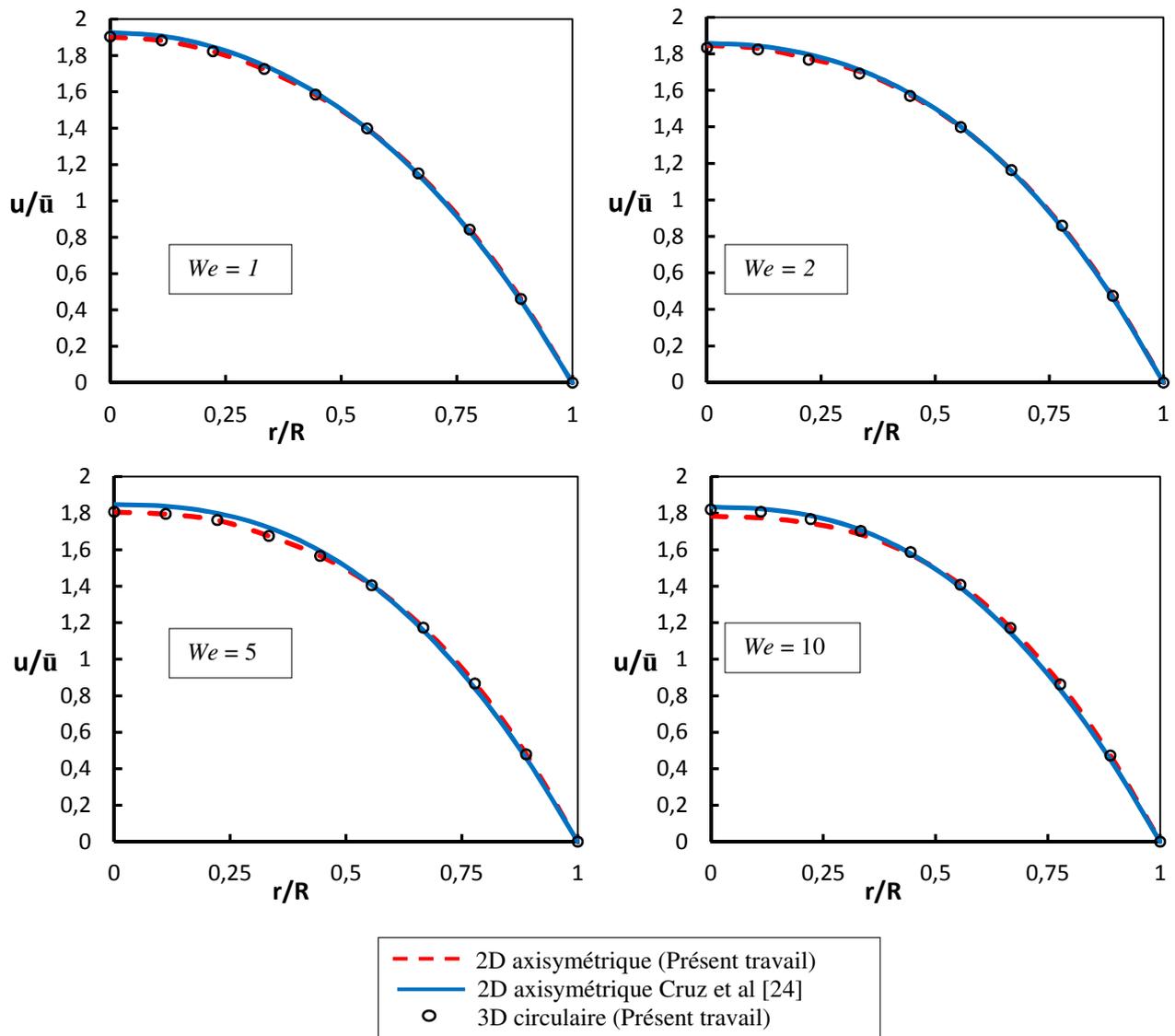


Figure IV. 30.a. Comparaison des profils de vitesse entièrement développés pour les cas 2D axisymétrique et 3D circulaire avec ceux de Cruz et al [24] pour $L^2=10$ et $We = 1, 2, 5$ et 10 pour $\beta = 1/9$.

Le résultat numérique du profil de vitesse correspond parfaitement avec la solution théorique donnée par Eq (4.15). La légère différence reste bien en dessous de 1 %. L'effet de We peut également être clairement visible dans la figure IV. 30.b en accord avec la théorie. L'augmentation de We conduit à une diminution de la vitesse.

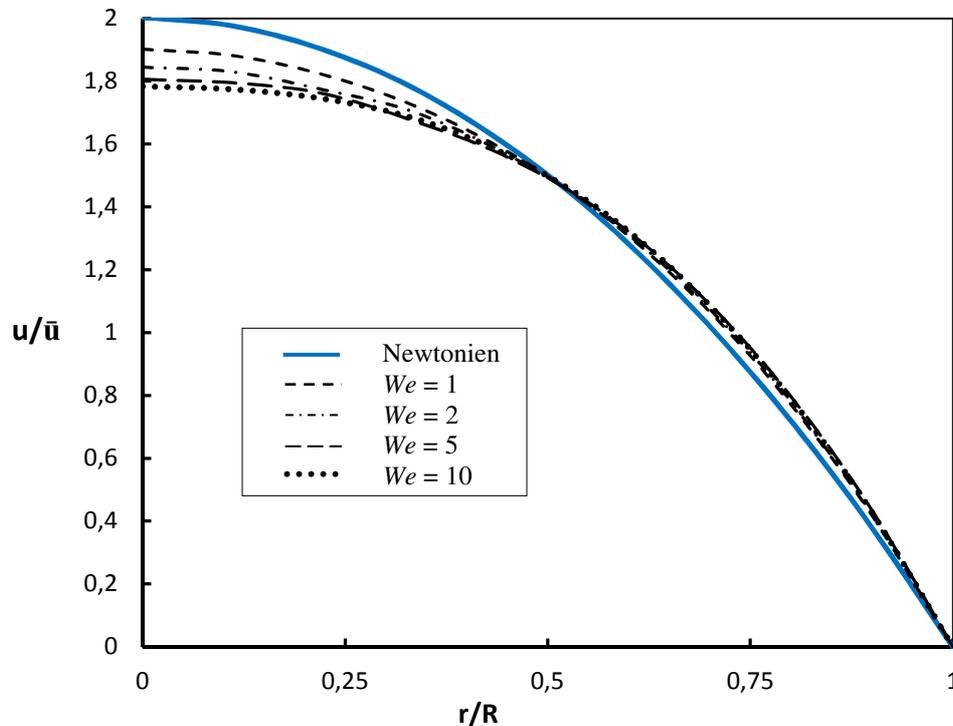


Figure IV. 30.b. Profils de vitesse entièrement développés pour le cas 2D axisymétrique pour $L^2 = 10$, $We = 1, 2, 5$ et 10 , $\beta = 1/9$.

L'influence du paramètre extensibilité L^2 sur le profil de vitesse est représentée sur la figure IV. 31.a, tout en maintenant une valeur constante de $We = 10$.

L'accord entre la solution numérique et la solution théorique de [24] est excellent, avec une petite différence de l'ordre de 1% et la tendance de l'effet d'augmenter L^2 conduisant à un important aplatissement du profil de vitesse est correctement prédit, voir Figure IV. 31.b.

La variation du profil de vitesse pour différents de valeurs de β et pour des valeurs extrêmes en termes de viscoélasticité de $We = 10$ et $L^2 = 10$ sont illustrés dans la figure IV. 32.a.

Pour $\beta \geq 0.5$, l'accord entre la solution théorique et numérique est très bon, mais pour $\beta < 0.5$ et pour $r/R < 0.5$, une légère différence d'environ 2% est observé.

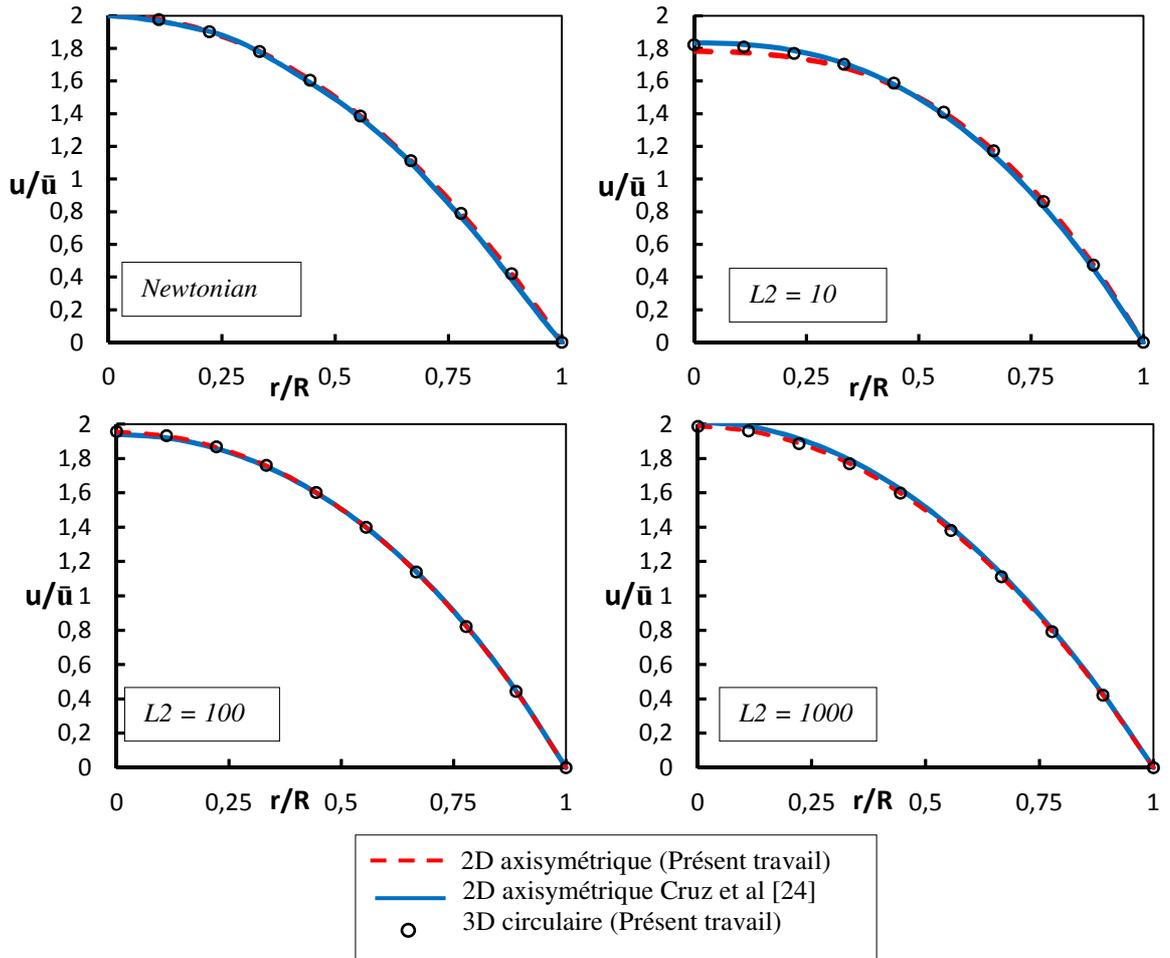


Figure 31.a. Comparaison des profils de vitesse entièrement développés pour les cas 2D axisymétrique et 3D circulaire avec ceux de Cruz et al [24] pour $We = 10$, $L^2 = 10, 100$ et 1000 , $\beta = 1/9$.

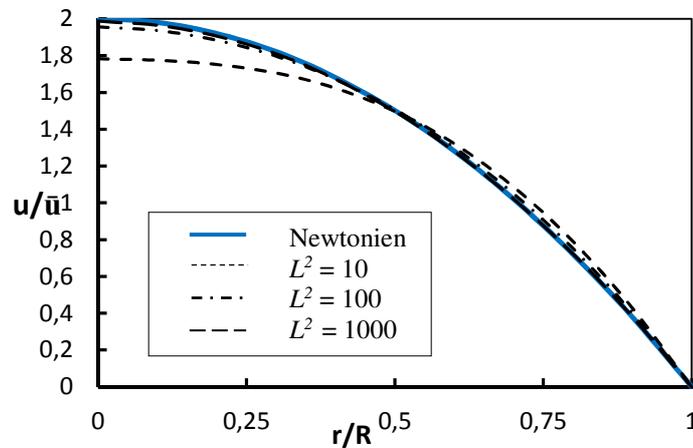


Figure IV. 31.b. Profils de vitesse entièrement développés pour le cas 2D axisymétrique pour $We = 10$, $L^2 = 10, 100$ et 1000 , $\beta = 1/9$.

L'effet du paramètre β sur le profil de vitesse est clairement illustré sur la figure IV. 32.b où il peut être remarqué que pour de faibles valeurs de β (ou des valeurs élevées de concentration en polymère) les débits respectifs augmentent en raison du comportement rhéofluidifiant.

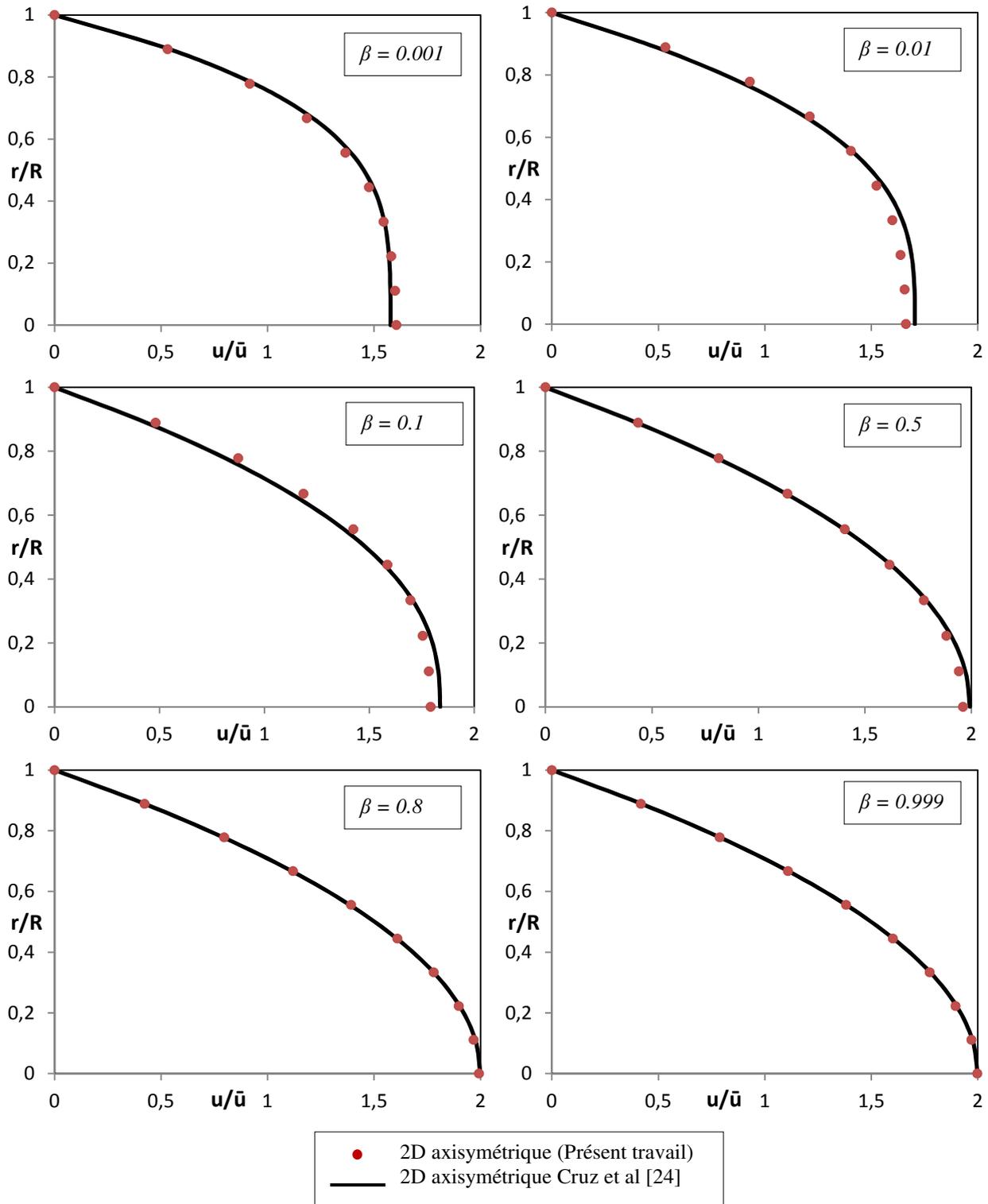


Figure IV. 32.a. Comparaison des profils de vitesse entièrement développés pour le cas 2D axisymétrique avec ceux de Cruz et al [24] pour $L^2 = 10$, $We = 10$, $\beta = 0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 0.8$ et 0.999 .

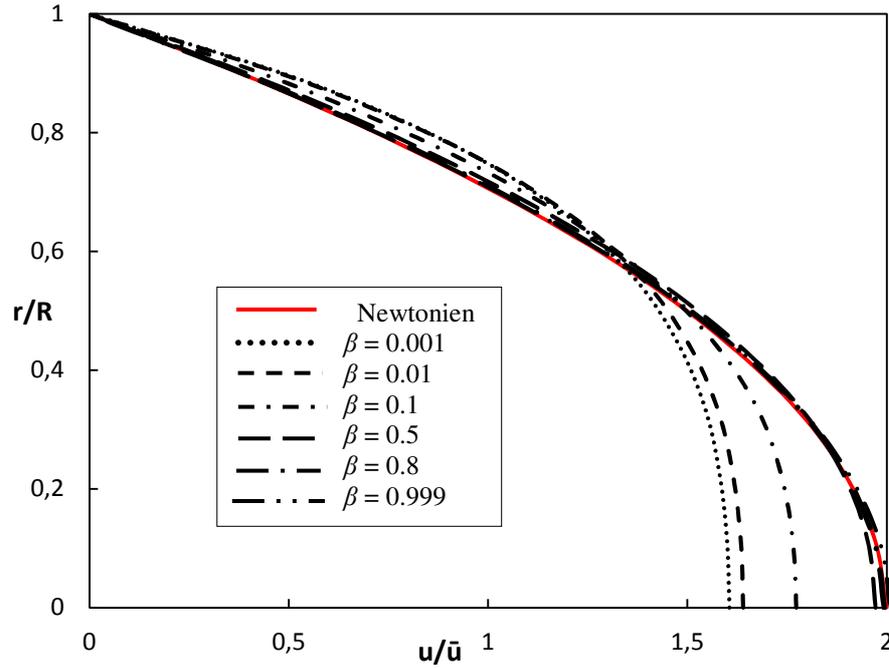


Figure IV. 32.b. Profils de vitesse entièrement développés pour le cas 2D axisymétrique pour $L^2 = 10$, $We = 10$, $\beta = 0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 0.8$ et 0.999 .

IV.4.2. Géométrie circulaire: contraintes normales et tangentielles et coefficient de frottement

Les figures IV. 33.a et b montrent les profils des composantes tangentielle et axiale de contrainte totale normalisée respectivement. Les valeurs de la contrainte de cisaillement tendent vers les valeurs newtoniennes quand la valeur de β tend vers l'unité et diminuent à des valeurs inférieures avec la diminution de β où la concentration du polymère devient supérieure et le comportement rhéofluidifiant devient plus apparent. La solution théorique de Cruz et al [24] donnée par l'équation (4.19) est également indiquée dans les figures.

Un très bon accord est établi entre les résultats théoriques et numériques. La composante normale de la contrainte diminue avec la diminution de la concentration de polymère quand β atteint la valeur 1 et le comportement du fluide s'approche de celui d'un fluide newtonien. Là encore, il y a un très bon accord avec les résultats théoriques de la référence [24]

$$\begin{cases} \tau_{rz} = \frac{dp}{dz} \frac{r}{2} \\ \tau_{zz} = \frac{2\lambda}{\eta_p} \tau_{rz}^2 \end{cases} \quad (4.19)$$

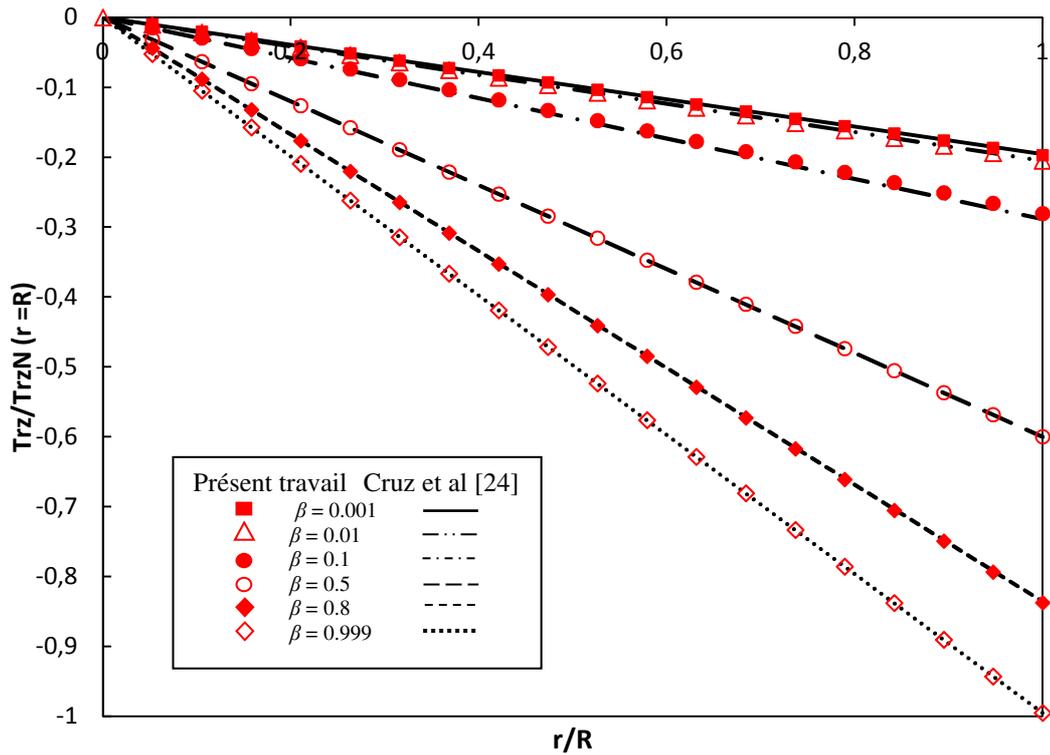


Figure IV. 33.a. Contraintes de cisaillement normalisées pour le cas 2D axisymétrique pour $We = 10$, $L^2 = 10$ et différentes valeurs de β

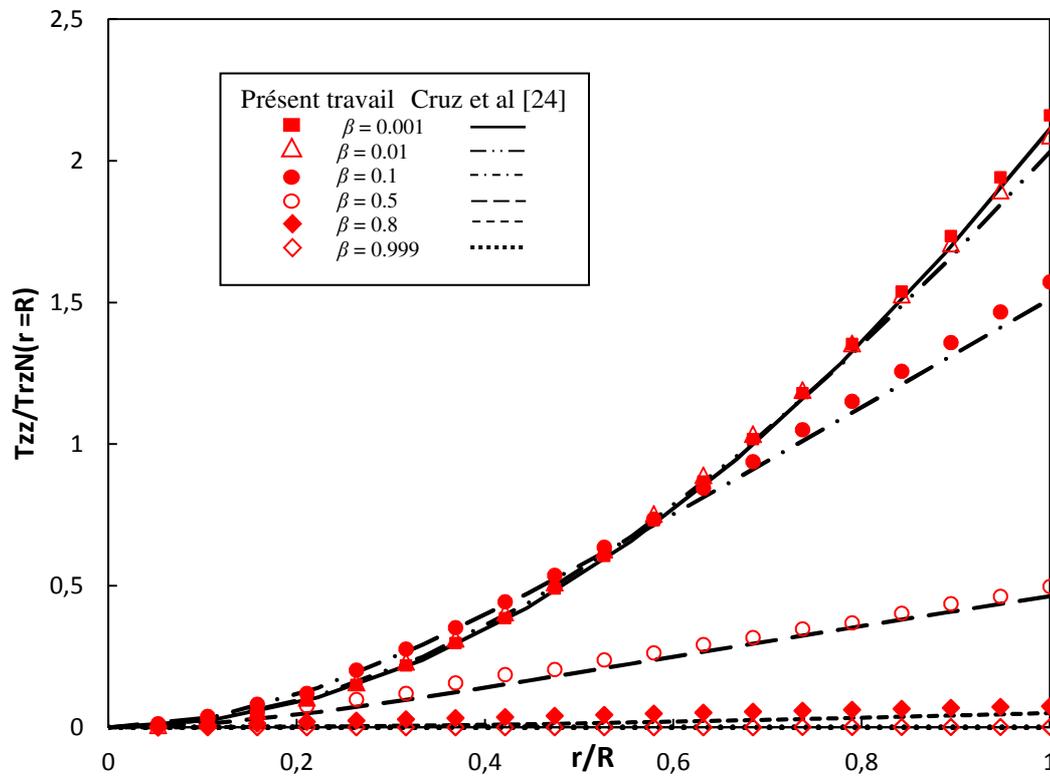
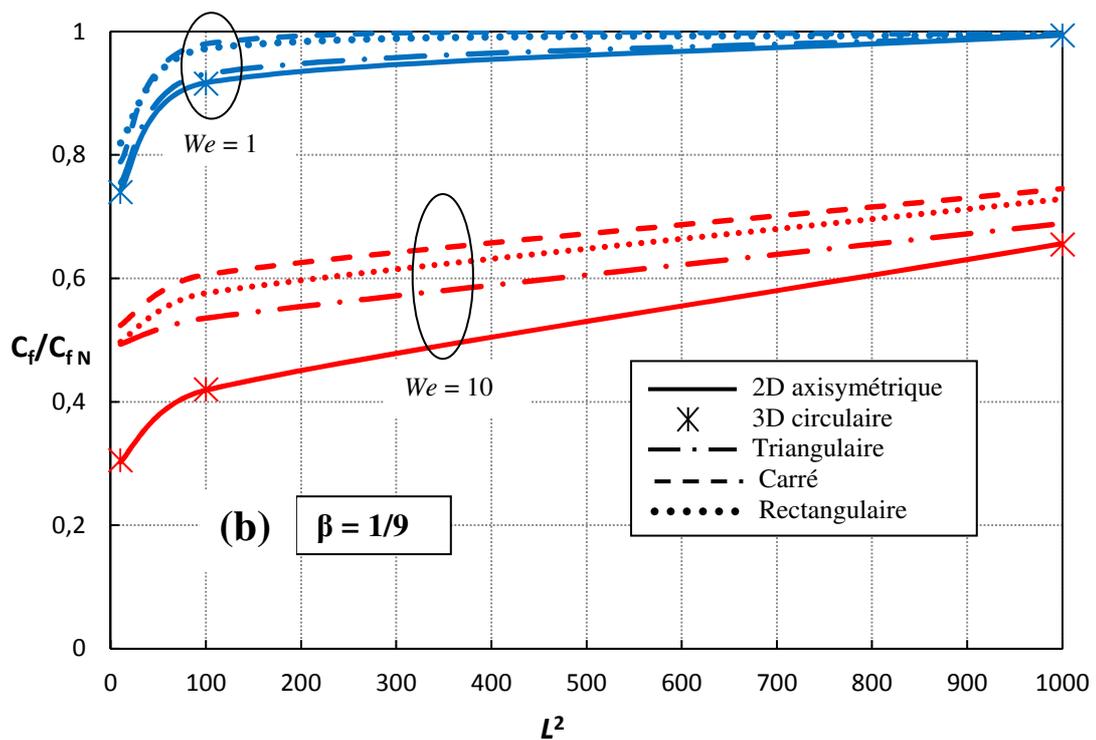
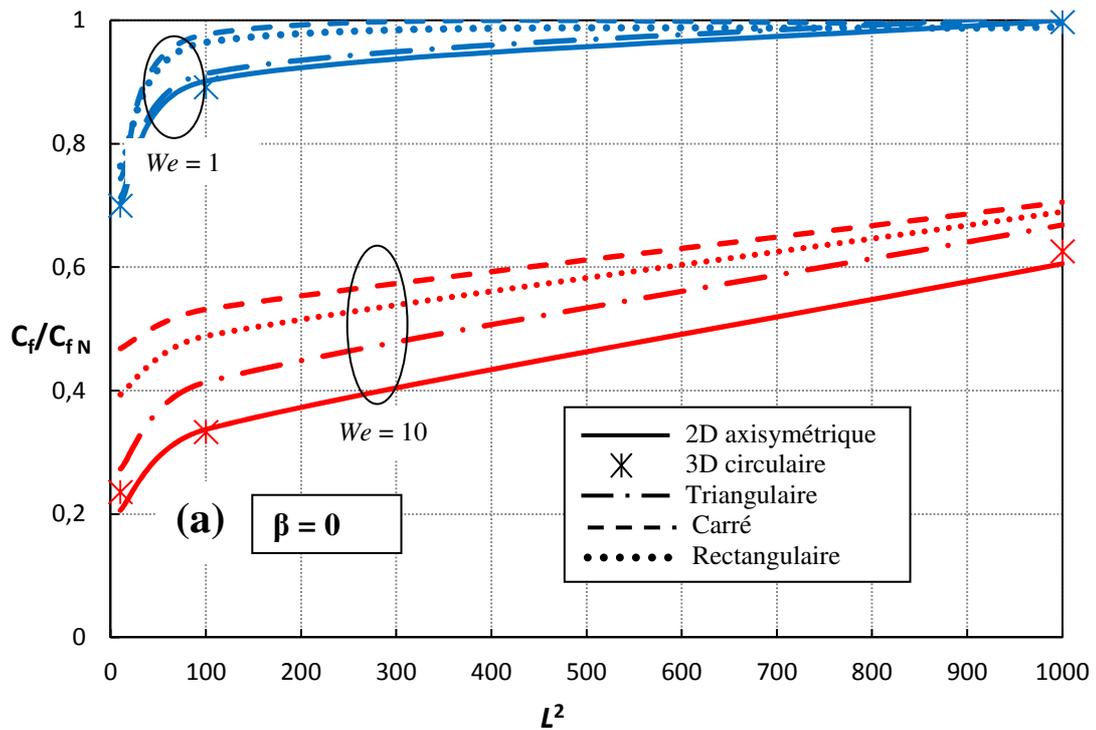


Figure IV. 33.b. Contraintes normales normalisées pour le cas 2D axisymétrique pour $We = 10$, $L^2 = 10$ et différentes valeurs de β

La figure IV. 34 représente la variation du coefficient de frottement normalisé C_f/C_{fN} en fonction du paramètre extensibilité L^2 pour les différentes géométries considérées et pour $\beta = 0, 1/9$ et $1/2$. Les résultats présentés pour les deux limites d'élasticité du fluide $We = 1$ et 10 montrent que l'augmentation de l'élasticité du fluide FENE-P à travers le nombre de Weissenberg conduit à une diminution du coefficient de frottement si on la compare avec le cas limite du fluide newtonien.



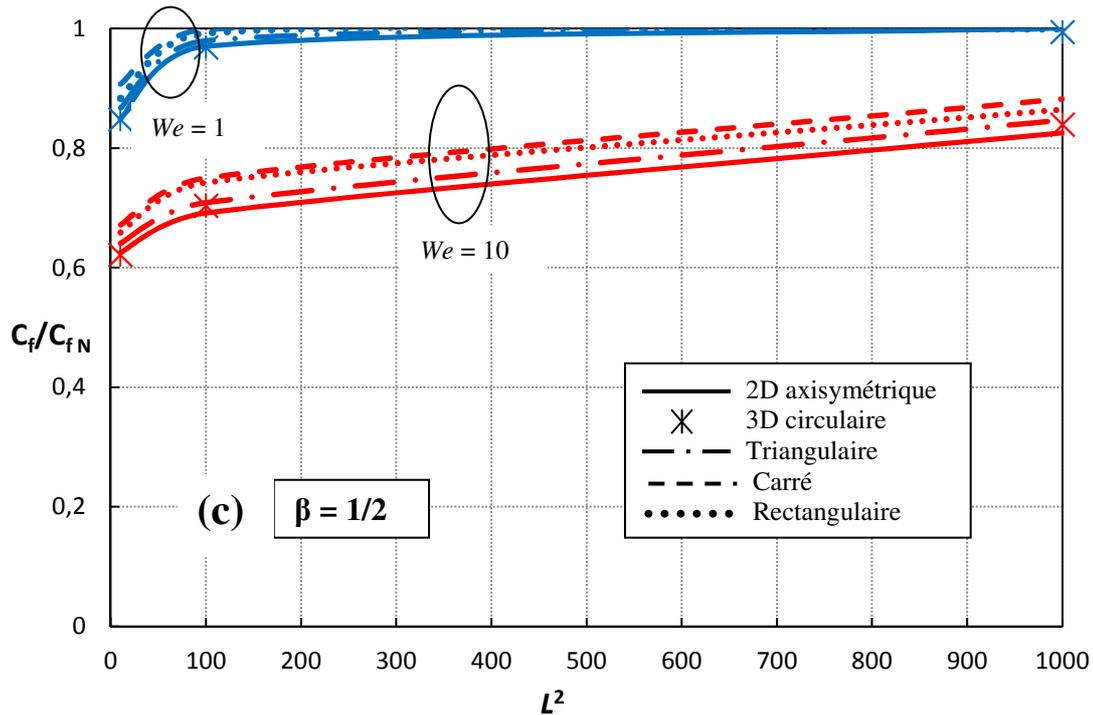


Figure IV. 34. Variation du coefficient de frottement normalisé C_f/C_{fN} en fonction du paramètre extensibilité L^2 et du nombre de Weissenberg pour les différentes géométries considérées et pour différentes valeurs de β .

La figure IV. 34 montre aussi que pour une petite valeur du paramètre d'extensibilité $L^2 = 10$, le coefficient de frottement atteint une valeur minimale, puis augmente de façon monotone avec l'augmentation de L^2 pour atteindre la limite du fluide newtonien pour $L^2 = 1000$ et pour un faible niveau d'élasticité du fluide ($We = 1$). Les figures IV. 34a, b et c représentent l'effet de la contribution newtonienne à travers le paramètre β pour $\beta = 0$, $1/9$ et $1/2$ respectivement. Le coefficient de frottement augmente avec l'augmentation du paramètre β et les valeurs calculées pour $\beta = 1/2$ sont plus élevées que les valeurs obtenues pour $\beta = 0$ et $1/9$.

IV.4.3. Géométrie non-circulaire: profils de vitesses

Les figures IV. 35, 36 et 37 illustrent les contours de la vitesse axiale dans la zone entièrement développée et l'effet de We et L^2 pour les géométries carré, rectangulaire ($b/a = 1/2$) et triangulaire équilatérale considérées dans le présent travail pour le cas newtonien et viscoélastique du type FENE-P. Les résultats du cas newtonien des sections carrée, rectangulaire et triangulaire ont été directement comparés avec succès avec les solutions analytiques de référence [2, 44] comme montré précédemment.

La partie (a) de ces figures montrent que, pour les mêmes valeurs de $We = 10$ et $L^2 = 10$, les profils de vitesse ont tendance à devenir plus aplatis avec la diminution des valeurs de β en raison des effets d'amincissement par cisaillement (shear thinning). Dans la partie (b) des figures, la même tendance observée avec le tube circulaire axisymétrique et 3D est présente aussi pour les géométries non circulaires ; soit une augmentation de We pour une valeur fixe de L^2 et/ou une diminution de la L^2 pour une valeur fixe de We , conduit à un aplatissement du profil de vitesse.

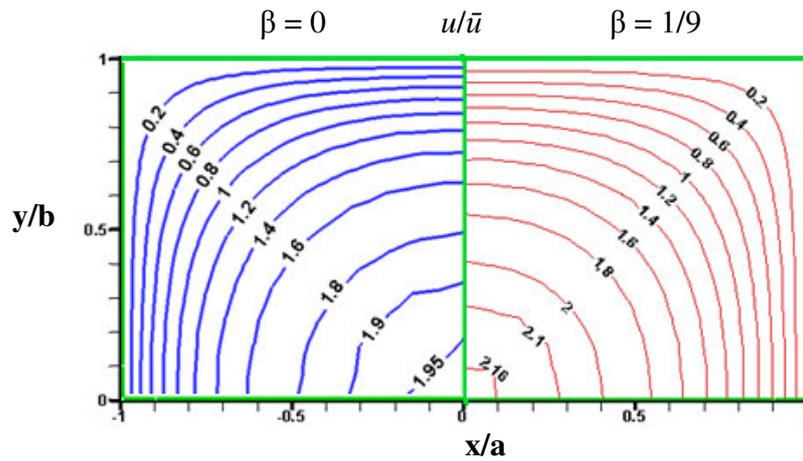


Figure IV. 35.a. Comparaison des contours de la vitesse axiale normalisée u/\bar{u} pour la géométrie carrée, pour $\beta = 0$ et $1/9$, pour le cas extrême $We = 10$ et $L^2 = 10$.

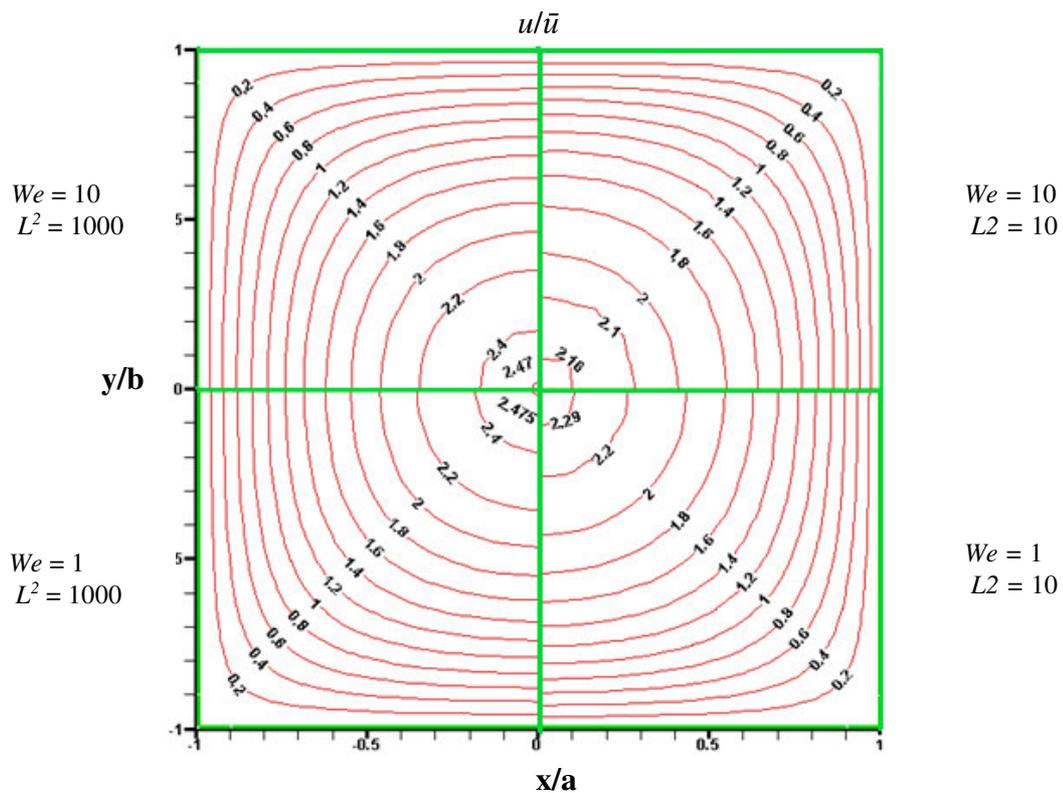


Figure IV. 35.b. Contours de la vitesse axiale normalisée u/\bar{u} pour la géométrie carrée, le cas FENE-P, pour $\beta = 0$ et $1/9$.

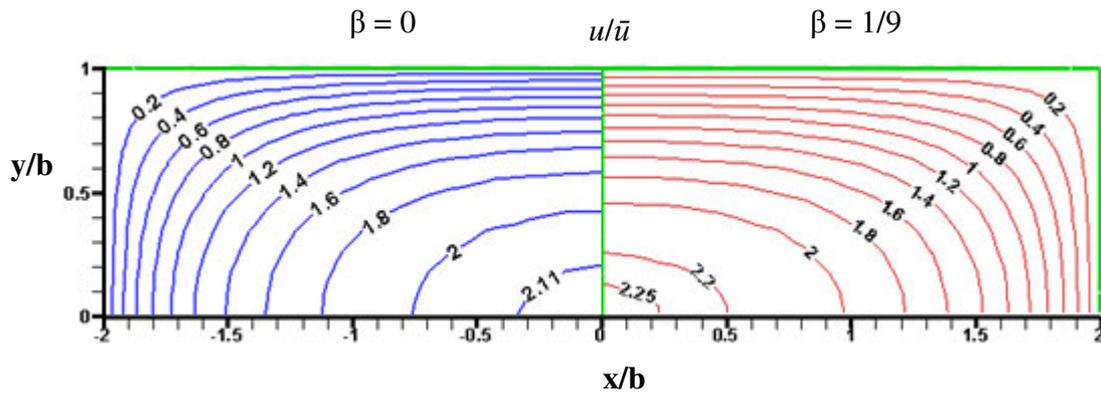


Figure IV. 36.a. Comparaison des contours de la vitesse axiale normalisée u/\bar{u} pour la géométrie rectangulaire ($b/a = 1/2$), pour $\beta = 0$ et $1/9$, pour le cas extrême $We = 10$ et $L^2 = 10$.

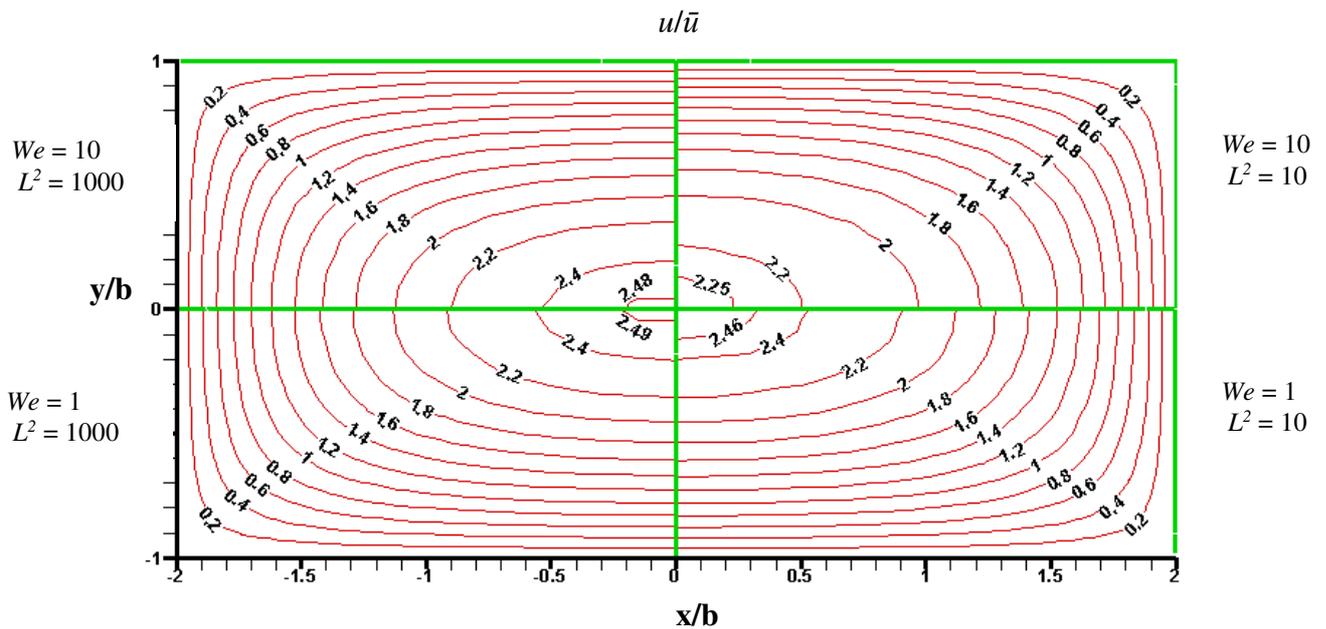


Figure IV. 36.b. Contours de la vitesse axiale normalisée u/\bar{u} pour la géométrie rectangulaire ($b/a = 1/2$), le cas FENE-P, pour $\beta = 0$ et $1/9$.

IV.4.4. Géométrie circulaire: transfert de chaleur

La variation du nombre de Nusselt en fonction de la longueur axiale du tube pour les cas 2D axisymétrique et 3D circulaire, pour les deux valeurs de $We = 1$ et 10 et pour différentes valeurs du paramètre d'extensibilité L^2 est indiquée sur les figures IV. 38 et 39 respectivement. Dans la légende des deux figures les valeurs du nombre de Nusselt pour $\beta = 0$ obtenues précédemment sont également représentées.

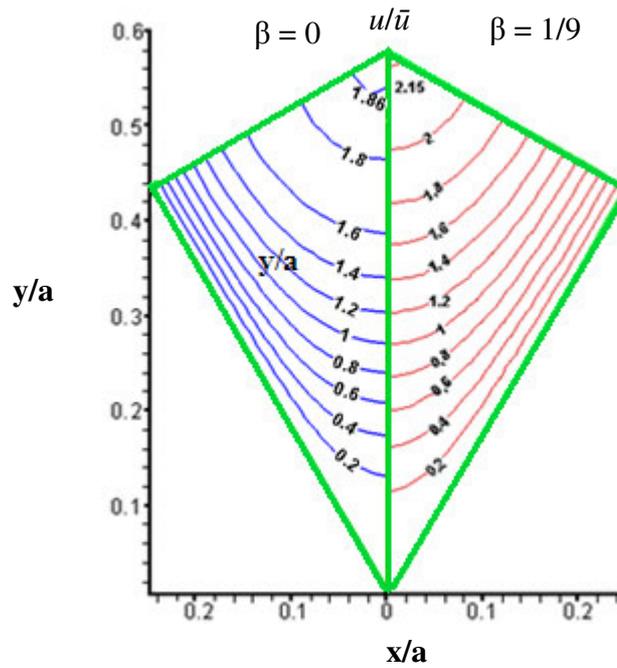


Figure IV. 37.a. Comparaison des contours de la vitesse axiale normalisée u/\bar{u} pour la géométrie triangulaire équilatérale, pour $\beta = 0$ et $1/9$, pour le cas extrême $We = 10$ et $L^2 = 10$.

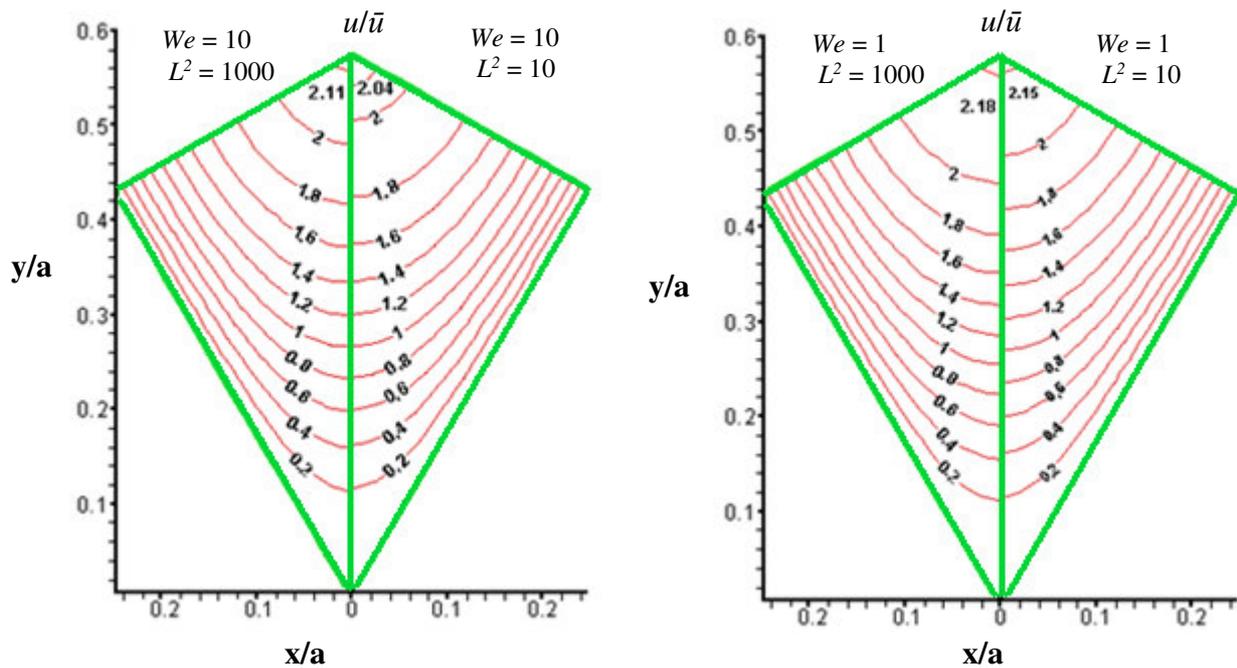


Figure IV. 37.b. Contours de la vitesse axiale normalisée u/\bar{u} pour la géométrie équilatérale triangulaire, le cas FENE-P, pour $\beta = 0$ et $1/9$.

En regardant les valeurs dans la région pleinement développée, les simulations sont capables d'afficher la tendance correcte de l'effet du paramètre L^2 . La diminution des valeurs du paramètre d'extensibilité conduit à une augmentation du coefficient de transfert de chaleur. Une augmentation

du nombre Weissenberg conduit également à un transfert de chaleur amélioré d'environ 11% dans le cas de $We = 10$ et $L^2 = 10$. Les différences entre les résultats 2D et 3D ne sont pas très importantes et la même tendance est capturée. La valeur unique obtenue à partir de l'analyse de Oliveira et al [23] lorsque $L^2 = 10$ et $We = 1$ et 10, est prédite par la solution numérique avec une erreur inférieure à 2%. L'effet de la concentration en solvant est de diminuer le nombre de Nusselt dans les deux cas de $We = 1$ et $We = 10$, avec un effet plus prononcé pour le second cas.

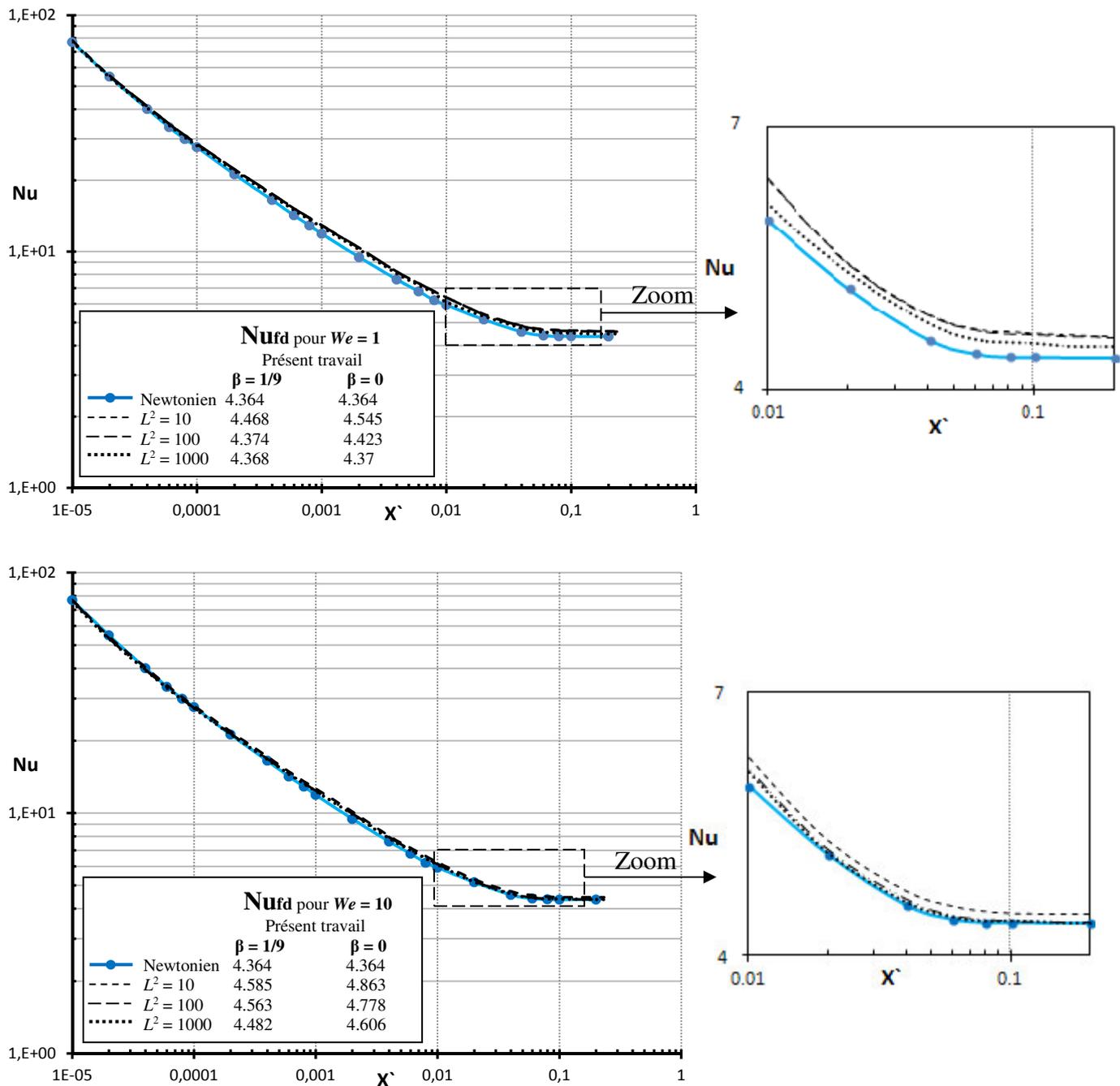


Figure IV. 38. Nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale $x' = x/D.Re.Pr$, pour le cas 2D axisymétrique, effet d'extensibilité L^2 , $We = 1$ et 10.

L'effet de la concentration en polymère sur le nombre de Nusselt pour le cas 2D axisymétrique est exploré sur la figure IV. 40 qui montre la variation du nombre de Nusselt entièrement développé en fonction du paramètre $We^2/(aL)^2$ pour différentes valeurs du paramètre β . Pour $\beta = 0$, l'augmentation de $We^2/(aL)^2$ en augmentant l'élasticité et/ou en diminuant le paramètre d'extensibilité conduit à une augmentation monotone et rapide du coefficient de transfert de chaleur à partir de la valeur classique du cas newtonien 4,364 à une limite asymptotique de 4,955. Cela correspond à la valeur unique donnée par Oliveira et al [23] comme montré sur la figure IV. 40 avec une différence inférieure à 2%.

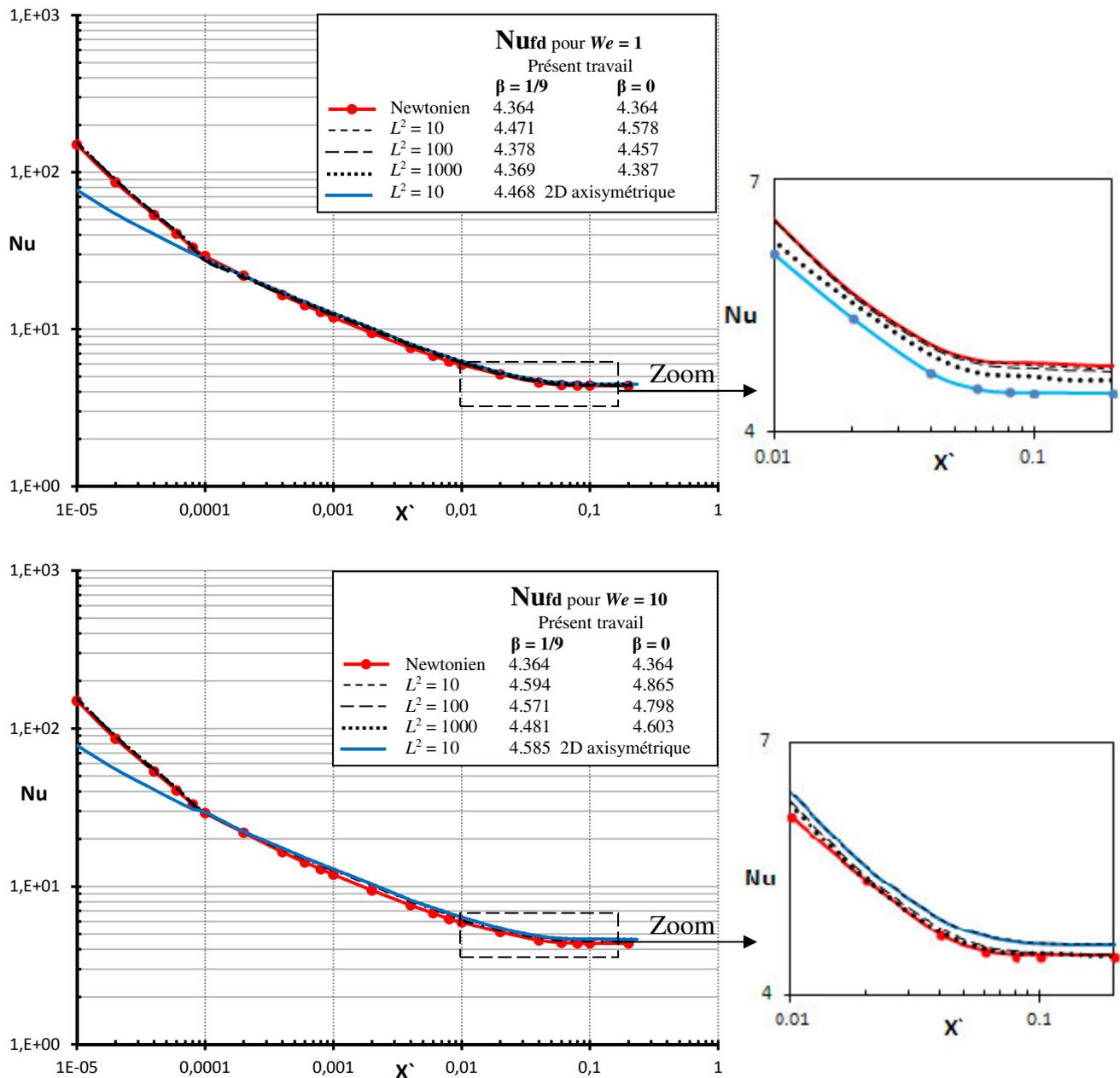


Figure IV. 39. Nombre de Nusselt vs. la distance axiale $x' = x/D.Re.Pr$, pour le cas 3D circulaire, effet d'extensibilité L^2 , $We = 1$ et 10.

L'effet du paramètre β est d'augmenter le nombre de Nusselt de sa valeur newtonienne de 4.364 à une valeur de 4.955. Cela représente une augmentation nette de 13%!

Pour $\beta > 0$, et en augmentant le paramètre $We^2/(aL)^2$, le coefficient de transfert de chaleur atteint une valeur maximale pour des valeur du paramètre $We^2/(aL)^2 < 2$, puis diminue graduellement en s'approchant de la valeur du cas newtonien quand β s'approche de la valeur 1.

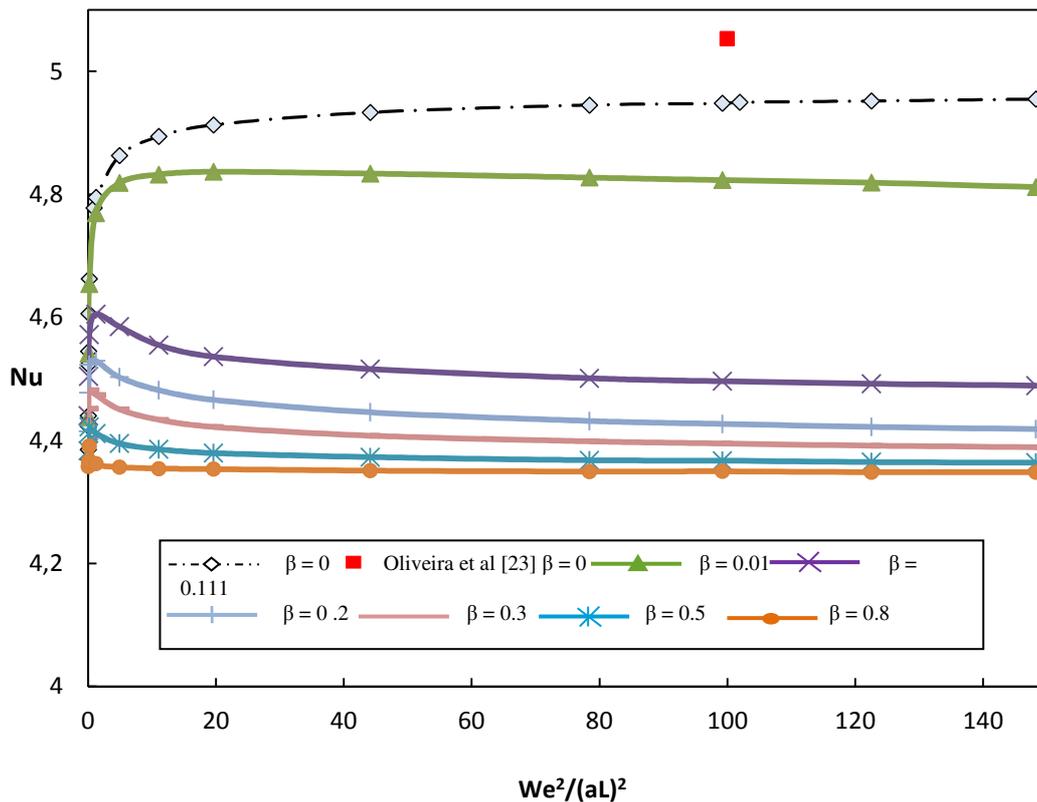


Figure IV. 40. Nombre de Nusselt vs. paramètre $We^2/(aL)^2$, pour le cas 2D axisymétrique, effet de β .

IV.4.5. Géométries non-circulaires : transfert de chaleur

Des conduits de section carrée, rectangulaire ($b/a = 1/2$) et triangulaire, ont été pris en compte dans la présente étude du problème Graetz avec le modèle FENE-P viscoélastique non linéaire. L'influence d'élasticité/extensibilité sur la variation du nombre de Nusselt moyen pour les trois géométries considérées est représentée dans les figures IV. 41, 42 et 43 respectivement. Dans tous les cas, la comparaison de la valeur, dans la région pleinement développée, du nombre de Nu pour le cas newtonien avec des travaux antérieurs dans la littérature, Shah et London [2], montre un excellent accord en fournissant une confiance dans la précision des résultats numériques. Les résultats obtenus précédemment pour le cas de $\beta = 0$ sont aussi présentés dans cette partie.

Les tendances générales du nombre de Nusselt pour le fluide FENE-P révèlent une augmentation croissante avec We mais avec une petite variation. Pour la valeur de $We = 10$ et une valeur constante du paramètre d'extensibilité $L^2 = 10$, l'augmentation du nombre de Nusselt par rapport celui du cas newtonien est d'environ 4,76 % pour le cas de la conduite triangulaire, 9,24 % pour le cas carré et 5,17 % pour le cas rectangulaire lorsque $\beta = 0$ et de 2,274 % pour le cas triangulaire, 4,45 % pour le cas carré 3,083 % pour le rectangulaire lorsque $\beta = 1/9$.

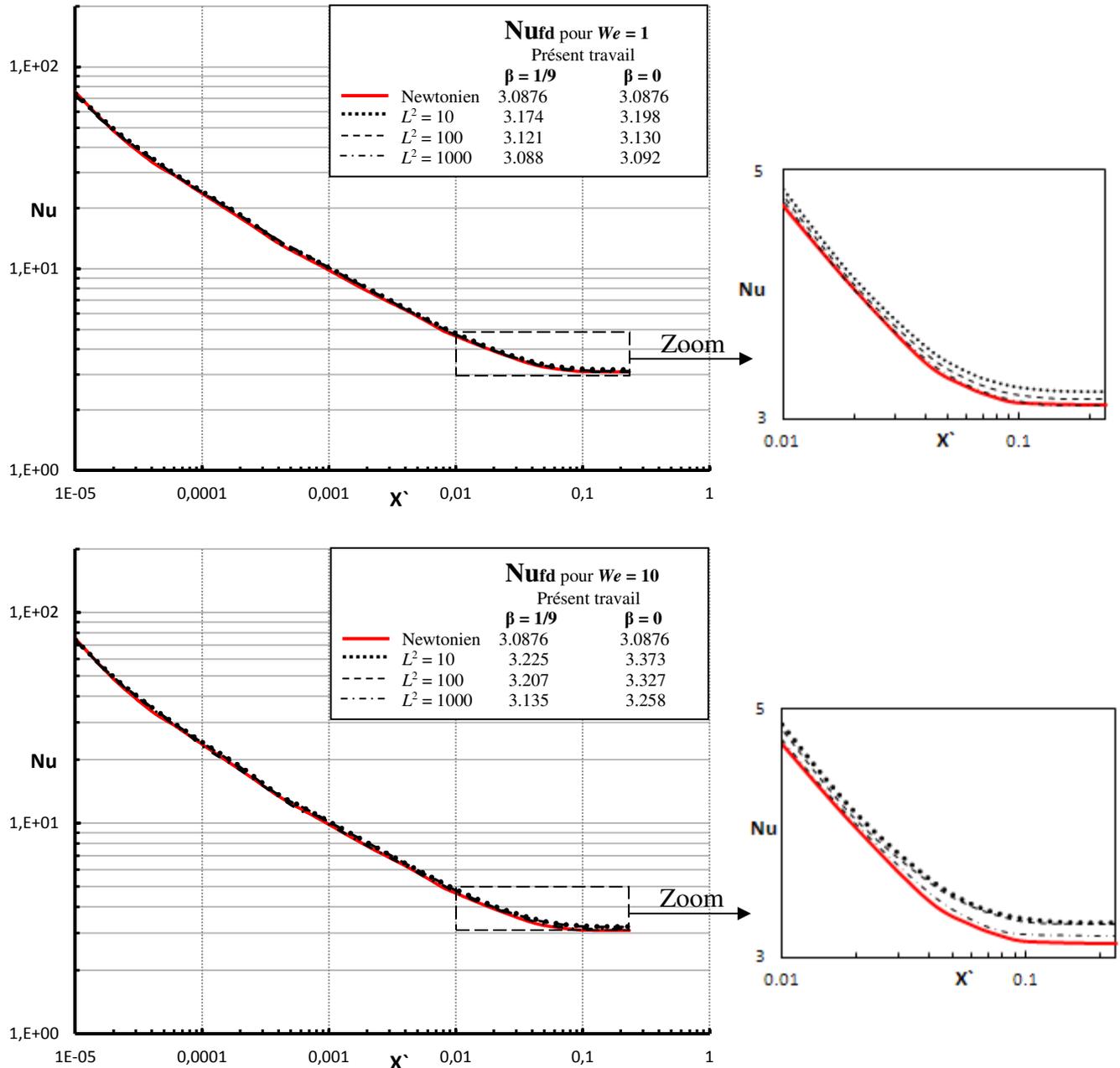


Figure IV. 41. Nombre de Nusselt vs. la distance axiale $x' = x/D.Re.Pr$, pour le cas carré, effet d'extensibilité L^2 , $We = 1$ et 10.

Le paramètre d'extensibilité L^2 affiche un effet opposé en suivant la même tendance des résultats de calculs obtenus pour la conduite circulaire axisymétrique et 3D. Pour une valeur constante de We , l'augmentant de L^2 de la valeur 10 jusqu'à 1000 conduit à une diminution du nombre de Nusselt qui s'approche asymptotiquement de la limite newtonienne et l'augmentation de la concentration du solvant a tendance de réduire le nombre de Nusselt.

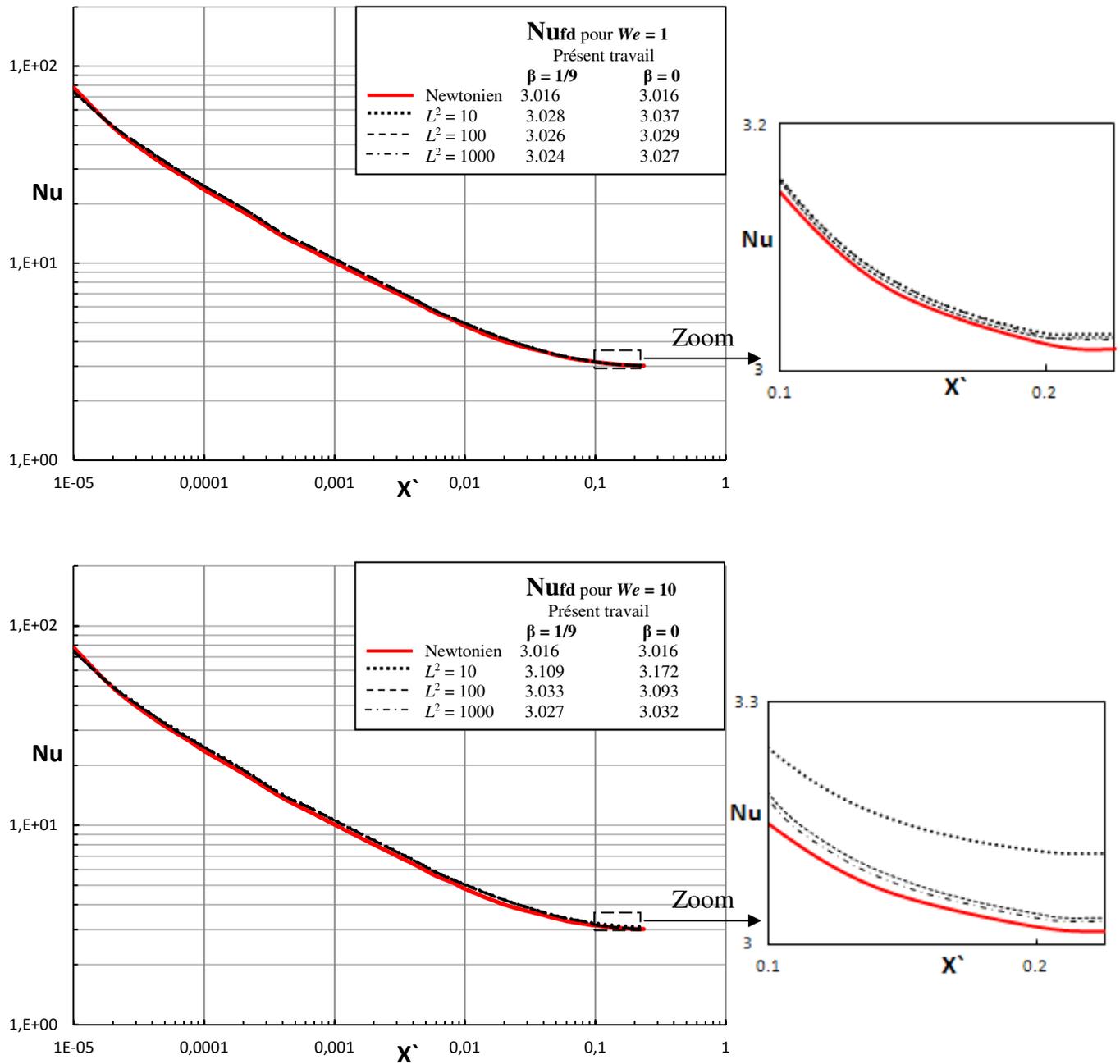


Figure IV. 42. Nombre de Nusselt vs. la distance axiale $x' = x/D.Re.Pr$, pour le cas rectangulaire, effet d'extensibilité L^2 , $We = 1$ et 10.

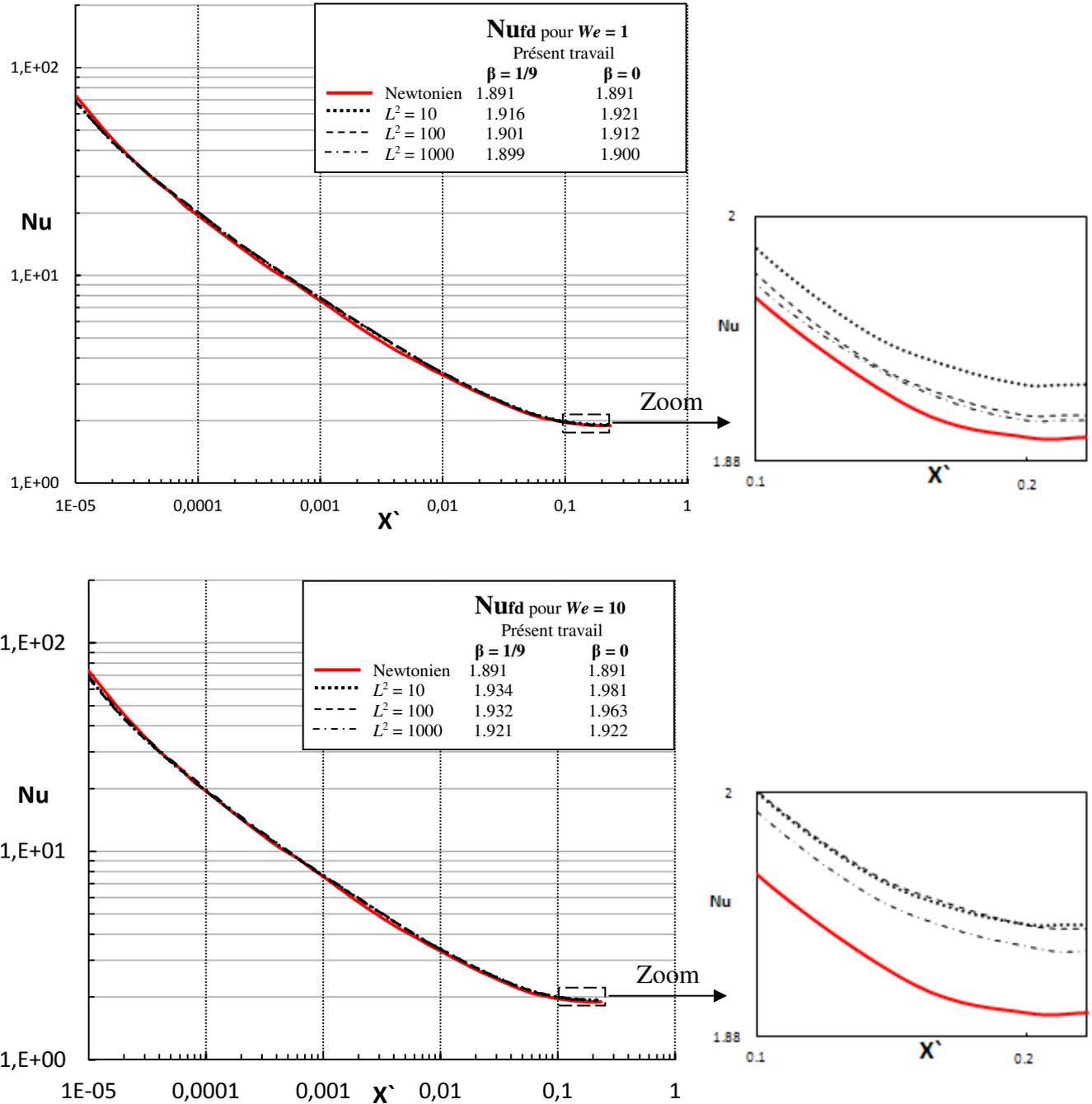


Figure IV. 43. Nombre de Nusselt vs. la distance axiale $x' = x/D.Re.Pr$, pour le cas triangulaire, effet d'extensibilité L^2 , $We = 1$ et 10 .

IV.4.6. Conclusions

Le problème de Graetz pour un écoulement laminaire d'un fluide viscoélastique de type FENE-P à travers des tubes de sections circulaire et non circulaire de différentes formes été étudié numériquement en utilisant le code Polyflow. L'effet de la contribution du solvant newtonien sur la dynamique et le transfert de chaleur a été évalué dans le cas d'un flux de chaleur constant imposé sur

la paroi et dans le cas d'une dissipation visqueuse négligée. Les résultats sont discutés en termes d'effets d'élasticité par le nombre de Weissenberg We et le paramètre l'extensibilité L^2 .

Les résultats trouvés pour les géométries circulaires sont en excellent accord avec ceux disponibles dans la littérature justifiant les calculs numériques et l'approche utilisé. Les profils de vitesse calculée en utilisant la solution théorique sont en excellent accord avec les prédictions numériques. Les valeurs du nombre de Nusselt calculées pour les géométries circulaires en considérant plusieurs valeurs du paramètre de concentration β sont obtenues ici pour la première fois, ainsi que les valeurs du nombre de Nusselt et de vitesse pour les cas de conduits 3D non circulaires.

Conclusions et perspectives

Les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse ont permis d'étudier numériquement le problème de Graetz dans le cas d'écoulements laminaires de fluides newtoniens et viscoélastiques à travers des conduites de sections circulaire, triangulaire, carrée et rectangulaire pour le cas d'un flux de chaleur constant imposé à la paroi en l'absence de la dissipation. Le code de calcul POLYFLOW, basé sur la méthode des éléments finis, est utilisé pour simuler les écoulements en question.

Deux modèles rhéologiques on été considérés au cours de ce travail décrivant le comportement viscoélastique : le modèle simplifié Phan-Thien Tanner (SPTT) avec la forme exponentielle de la fonction f et le modèle (Finite Extensible Nonlinear Elastic-Peterlin) FENE-P. Le maillage utilisé dans ces calculs numériques a été largement étudié et optimisé en comparant les résultats en 2D et 3D et par comparaison avec les résultats existants dans la littérature.

Dans la première partie de la thèse, nous avons considéré le modèle SPTT pour étudier les effets élastiques et rhéofluidifiant combinés représentés par le paramètre εWe^2 . Les profils de vitesse et les profils de contraintes normales et tangentielles comparés avec les résultats analytiques pour différentes valeurs du paramètre εWe^2 pour le cas des géométries circulaires, ainsi que les valeurs du nombre de Nusselt dans l'écoulement pleinement développé, dans les conduites circulaires et non-circulaires obtenu pour le cas newtonien comparées avec celles rapportées dans la littérature montrent une bonne concordance. Les résultats montrent une augmentation du coefficient de transfert de chaleur avec l'augmentation du paramètre εWe^2 . Cette augmentation peut atteindre jusqu'à 15% par rapport à la valeur du cas newtonien et la conduite circulaire.

Dans la second partie de cette thèse, nous avons considéré l'écoulement laminaire d'un fluide newtonien et un fluide viscoélastique décrit par l'équation constitutive FENE-P pour étudier l'effet d'élasticité représenté par le nombre Weissenberg, We et le paramètre d'extensibilité L^2 sur le champ hydrodynamique et le transfert de chaleur à travers les conduites circulaire et non circulaire. La

comparaison entre les résultats numériques calculés pour le cas 2D axisymétrique et 3D circulaire ainsi que la valeur pleinement développée du nombre de Nusselt obtenu pour les cas newtoniens, montrent un très bon accord avec celles disponibles dans la littérature. Il a été démontré qu'une augmentation de l'élasticité mesurée par We a entraîné une amélioration du coefficient de transfert de chaleur. Par contre, le paramètre d'extensibilité (L^2) a eu un effet inverse avec une diminution du comportement rhéofluidifiant.

Par la suite et pour le même modèle rhéologique FENE-P, nous avons évalué l'effet de la contribution du solvant newtonien sur le champ dynamique et le transfert de chaleur. La comparaison des résultats pour les géométries circulaires révèle un excellent accord avec ceux disponible dans la littérature. Les valeurs du régime pleinement développé du nombre de Nusselt, pour plusieurs valeurs du paramètre de concentration β , sont obtenues ici pour la première fois pour les cas de conduits 3D circulaire et non circulaire.

Ce travail pourrait être poursuivi sur plusieurs axes. Tout d'abord la même problématique pourrait être abordée en considérant la dissipation visqueuse. D'autre part, d'autres modèles viscoélastiques peuvent être considérés tels que les modèles d'Oldroyd, Giesekus, Pom-Pom, White-Metzner et le modèle Leonov. Il serait très intéressant aussi de considérer le cas d'une température constante imposée sur la paroi ou des conditions thermiques mixtes.

Nomenclature

c_p	Chaleur spécifique du fluide (J/kgK)
C_f	Coefficient de frottement
C_{fN}	Coefficient de frottement du fluide newtonien
d	Tenseur du taux de déformation
D	Diamètre de la conduite (m)
h_x	Coefficient de transfert moyenné sur la section mais variable suivant la direction axiale (W/m ² K)
k	Conductivité thermique (W/mK)
L^2	Paramètre d'extensibilité du modèle FENE-P
Nu	Nombre de Nusselt (hD/k)
P	Pression (Pa)
Pr	Nombre de Prandtl
Pe	Nombre de Péclet ($Pe = Pr.Re$)
Q	Débit volumique (m ³ /s)
q_w	Flux de chaleur imposé sur la paroi (W/m ²)
r	Coordonnée radiale (m)
R	Rayon du tube (m)
Re	Nombre de Reynolds ($\rho\bar{u}D/\mu$)
T	Température (K)
T_b	Température moyenne du fluide à travers une section transversale arbitraire (K)
\bar{T}_w	Température moyenne de la paroi (K)
u	Vitesse (m/s)
\bar{u}	Vitesse moyenne (m/s)
We	Nombre de Weissenberg ($\lambda\bar{u}/R$)
x	Coordonnée axiale (m)
x'	Coordonnée axiale normalisé ($x' = x/DRePr$)
y, z	Coordonnée transversale (m)

Lettres grecques

β	Rapport des viscosités newtonienne et polymérique ($\beta = \mu_s / \mu_s + \mu_p$)
λ	Temps de relaxation du fluide (s)

μ	Viscosité dynamique totale (Pa.s) ($\mu = \mu_s + \mu_p$)
μ_s	Viscosité dynamique du solvant (Pa.s)
μ_p	Viscosité dynamique du polymère (Pa.s)
ρ	Masse volumique (kg/m^3)
τ	Tenseur des contraintes totales (Pa)
τ_1	Tenseur des contraintes polymériques
τ_2	Tenseur des contraintes newtoniennes
ξ	Paramètre définissant le taux de glissement du modèle PTT
ε	Paramètre caractérisant le comportement élongationnel du modèle PTT
θ	Température non-dimensionnelle

Bibliographie

1. Grartz, L. (1883). *Über Die Warmemleitungsfähigkeit Von Flüssigkeiten*, Part1, *Annalen Der Physic Und Chemie*. Vol. 18, pp. 79-94.
2. Shah, R. K et London, A.L. (1978). *Laminar flow forced convection in ducts*, Academic Press, New York.
3. Shah, R. K et Bhatti, M. S (1987). *Laminar convective heat transfer in ducts*. In: (2nd edition. ed.), Kakac, S. Shah, R.K et Aung, W. Editors, *Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer*, Wiley, New York, Chap. 3.
4. Lyche, B. C et Bird, R. B (1956). The Graetz-Nuaselt problem for a power-law Non-Newtonian fluid. *Chemical Engineering Science*, Vol. 6, pp. 85-41.
5. Toor, H. L. (1957). Heat generation and conduction in the flow of a viscous compressible liquid, *Trans. Sec. Rheol.* Vol.1, pp. 177-190.
6. Mansour, A. R (1989). An analytical solution of laminar heat-transfer to power-law non-Newtonian fluids in circular ducts Graetz-Nusselt problem, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, Vol. 16, pp. 199-204
7. Siegel, R. Sparrow, E.M et Hallman, T.M. (1958). Steady laminar heat transfer in a circular tube with prescribed wall heat flux, *Appl. Sci. Res.* 7A, pp. 386-392.
8. Parikh, R. S et Mahalingam, R. (1988). Laminar tube flow heat transfer in non-Newtonian fluids under arbitrary wall heat flux. *Int. Comm. Heat Mass Transfer* Vol. 15, pp. 1-16.
9. Flores, A.F., Gottifredi, J.C., Morales, G.V et Quiroga, O.D (1991). Heat transfer to power-law fluids flowing in pipes and flat ducts with viscous heat generation. *Chemical Engineering Science*, Vol. 46, pp. 1385-1392.
10. McKillop, A. A (1964). Heat transfer for laminar flow of non-Newtonian fluids in entrance region of a tube, *Int. J. Heat Mass Transfer* Vol. 7, pp. 853–862.
11. Chandrupatla, A. R et V. M. K. Sastri, (1977). Laminar Forced Convection Heat Transfer of a Non-Newtonian Fluid in a Square Duct. *Int. J. Heat Mass Transfer* Vol. 20, pp. 1315–1324.
12. Hartnett J. P et Kostic, M. (1985). Heat transfer to a viscoelastic fluid in laminar flow through a rectangular channel, *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 28, pp. 1147-1155.
13. Phan-Thien, N et Tanner, R. I. (1977). A New Constitutive Equation Derived from Network Theory, *J. Non-Newtonian Fluid Mech* Vol. 2, pp. 353-365.
14. Coelho, P.M., Pinho, F.T et Oliveira. P.J. (2002). Fully developed forced convection of the Phan-Thien-Tanner fluid in ducts with a constant wall temperature. *Int. J. Heat Mass Transfer* Vol. 45, pp. 1413-1423.

-
15. Letelier, M. F et Siginer, D. A. (2000). Frictional effects in pipe flow of Phan-Thien-Tanner fluids, in: ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Orlando, Florida, November 5-15, ASME FED, Vol. 252, pp. 113-117.
 16. Letelier, M. F et Siginer, D (2005). On the fully developed tube flow of a class of non-linear viscoelastic fluids. *Int. J. Non-linear Mech.* Vol. 40, pp. 485-493.
 17. Oliveira, P. J et Pinho, F. T. (1999). Analytical solution for fully developed channel and pipe flow of Phan-Thien-Tanner fluids. *J. Fluid Mech.* Vol. 387, pp. 271-280.
 18. Coelho, P.M., Pinho, F. T et Oliveira. P.J. (2003). Thermal entry flow for a viscoelastic fluid: the Graetz problem for the PTT model. *Int. J. Heat Mass Transfer* Vol. 46, pp. 3865-3880.
 19. Peterlin, A. (1966). Hydrodynamics of macromolecules in a velocity field with longitudinal gradient. *Journal of Polymer Science Part B: Polymer Letters*, Vol. 4, pp. 287–291.
 20. Bird, R.B. Curtiss, C.F. Armstrong, R.C et Hassager, O. (1987). *Dynamics of Polymeric Liquids Kinetic Theory*. Vol. 2, second ed., Wiley, New York.
 21. Purnode, B et Crochet, M.J. (1998). Polymer solution characterization with the FENE-P model, *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, Vol. 77, pp. 1-20.
 22. Oliviera, P.J. (2002). An exact solution for tube and slit flow of a FENE-P fluid, *Acta Mechanica*. Vol. 158, pp. 157-167.
 23. Oliveira, P.J. Coelho, P. M et Pinho, F.T. (2004). The Graetz problem with viscous dissipation for FENE-P fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* Vol. 121, pp. 69–72.
 24. Cruz, D.O.A. Pinho, F. T et Oliveira, P.J. (2005). Analytical solutions for fully developed flow of some viscoelastic liquids with a Newtonian solvent contribution. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* Vol. pp. 132 28-35.
 25. F. A. Morrison. *Understanding Rheology*. Oxford University Press, New York, 2001.
 26. Conrrazé G et Grossiord J. L. (2000) "Initiation à la rhéologie", Tec \& Doc, 3ème édition.
 27. Fermigier M. *Mécanique des fluides*. Dunod, 2007.
 28. Bird, B., Stewart, W. E. et Lighfoot., E. N. (2002). *Transport phenomena*. John Wiley & Sons, New-York, USA, 2nd edition.
 29. Barnes H. A. (2000). *A handbook of elementary rheology*. University of Wales, Institute of Non-Newtonian Fluid Mechanics.
 30. Barnes, H. A., Hutton, J. F et Walters K. (1989). *An introduction to rheology*. Elsevier.
 31. Boger , D. V et Walters K. (1993) *Rheological phenomena in focus*. Elsevier, Amsterdam.
 32. Dealy, J. M et Larson, R. G. (2006). *Structure and rheology of molten polymers: from structure to flow behavior and back again*. Hanser Publishers.
-

-
33. Boger, D. V. (1977). A highly elastic constant-viscosity fluid. *J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. Vol. 3, pp. 87-91.
 34. Boger, D. V et Nguyen H. (1978). A model viscoelastic fluid. *Polymer Engineering & Science*. Vol. 18, pp. 1037-43.
 35. Binnington, R. J et Boger, D. V. (1986). Remarks on non-shear thinning elastic fluids. *Polymer Engineering & Science*. Vol. 26, pp. 133-8.
 36. Tam, K. C., Moussa, T and Tiu, C. (1989). Ideal elastic fluids of different viscosity and elasticity levels. *Rheologica Acta*; Vol. 28, pp. 112-20.
 37. Sigli D., Maalouf A., “Comparison of the responses of viscoelastic fluids to a new rheometrical test”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 9 (1-2), pp. 191-198, 1981
 38. Crochet M.J., Keunings R., “Finite element analysis of die swell of a highly elastic fluid”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 10 (3-4), pp. 339-356, 1982
 39. Verhoef M.R.J., van den Brule B.H.A.A., Hulsen M.A., “On the modelling of a PIB/PB Boger fluid in extensional flow”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 80 (2-3), pp. 155-182, 1999
 40. Tretheway D.C., Leal L.G., “Deformation and relaxation of Newtonian drops in planer extensional flows of a Boger fluid”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 99 (2-3), pp. 81-108, 2001
 41. Solomon, M. J et Muller S. J. (1996). Flow past a sphere in polystyrene-based Boger fluids: the effect on the drag coefficient of finite extensibility, solvent quality and polymer molecular weight. *J. of Non-Newtonian Fluid Mech*, 62: 81-94.
 42. Oldroyd, J.G. (1950). On the formation of rheological equations of state, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* 200, pp. 523–541.
 43. Phan-Thien, N. (1978). A nonlinear network viscoelastic model, *Journal of Rheology*. Vol. 22, pp. 259-283.
 44. Lielens, G., Keunings, R et Legat, V. (1999). The FENE-L and FENE-LS closure approximations to the kinetic theory of finitely extensible dumbbells. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 87, pp. 179–196,
 45. Bird, R. B., Hassager, O. Armstrong, R. C et Curtiss, C. F. (1977). *Dynamics of polymeric liquids: Kinetic theory*, Vol. 2, first ed, John Wiley & Sons, New York,
 46. Warner, H. R. (1972). Kinetic-theory and rheology of dilute suspensions of finitely extendible dumbbells, *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, Vol. 11, pp. 379-387.
 47. Oliveira P.J. et Miranda, A. I. P. A. (2005). Numerical study of steady and unsteady viscoelastic flow past bounded cylinders, *J. of Non-Newtonian Fluid Mech*, Vol. 127, pp. 51-66.
 48. Owens R. G et Phillips, T. N. (2002). *Computational Rheology*, Imperial College Press, London.
-

49. Chilcott, M. D., Rallison, J. M.: Creeping flow of dilute polymer solutions past cylinders and spheres. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 29, 381-432 (1988).
50. Bird, R. B., Dotson, P. J., Johnson, N. L.: Polymer solution rheology based on a finitely extensible bead-spring chain model. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 7, 213-235 (1980).
51. ANSYS POLYFLOW 12.1 User`s Guide September 2009.
52. Rajagopalan, D. Armstrong, R. C. et Brown. R. A. (1990). Finite element methods for calculation of steady, viscoelastic flow using constitutive equations with a Newtonian viscosity. *J. of Non-Newtonian Fluid Mech*, Vol. 36, pp. 159–192.
53. Guénette, R. et Fortin, M. (1995). A new mixed finite element method for computing viscoelastic flows. *J. of Non-Newtonian Fluid Mech*, Vol. 1, pp. 27–52.
54. Brooks, A. N. et Hughes, T. J. R. (1982). Streamlines Upwind/Petrov-Galerkin formulation for convective dominated flows, with particular emphasis on the incompressible Navier–Stokes equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* Vol. 32, pp. 199–259.
55. Siginer, D.A. Letelier, F.M. (2010). Heat transfer asymptote in laminar flow of nonlinear viscoelastic fluids in straight non-circular tubes, *Int. J. Eng. Sci*, Vol. 48, pp. 1544-1562.
56. Siginer, D.A. Letelier, M.F. (2011) Laminar flow of non-linear viscoelastic fluids in straight tubes of arbitrary contour, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 54 pp. 2188-2202.

Publications

❖ Ce travail de thèse a donné lieu aux publications suivantes :

➤ Articles publiés :

1 - Filali, A., Khezzar, L., Nemouchi, Z., Siginer, D.A., “Graetz Problem with Non-linear Viscoelastic Fluids in Non-Circular Tubes“. *International Journal of Thermal Sciences. Vol. 61, pp 50–60, November 2012.*

2 - Filali, A., Khezzar, L., “Numerical Simulation of the Graetz Problem in Ducts with Viscoelastic FENE-P Fluids” *Computers & Fluids*, vol. 84, pp. 1-15, 2013.

❖ Ce travail de thèse a donné lieu aux communications orales ou affichées suivantes :

1 - Filali, A., Khezzar, L., Siginer, D.A., “Numerical simulations of the axisymmetric Graetz problem using the viscoelastic PTT model“. *In: 3rd International congress of mechanical engineering CAM 2011, Guelma, Algeria. November 14-17, (2011).*

2 - Filali, A., Khezzar, L., Siginer, D.A., Nemouchi, Z., “Graetz problem in ducts of circular and some non-circular cross-sections with viscoelastic fluids“. *In: Proceedings of ASME 2011 International Mechanical Engineering Congress & Exposition IMECE2011, November 11-17, 2011, Denver, Colorado, USA.*

3 - Filali, A., Khezzar, L., Siginer, D.A., Nemouchi, Z., “Graetz Problem using FENE-P Fluids without viscous dissipation“. *Proceedings of ASME 2012 International Mechanical Engineering Congress & Exposition IMECE2012, November 9-15, 2012, Houston, Texas, USA.*

➤ Articles soumis:

1- Khezzar, L., Filali, A., and AlShehhi, M., Flow and Heat Transfer of FENE-P Fluids in Ducts of Various Shapes: Effect of Newtonian Solvent Contribution. (*Soumis le 07/08/2013 au: Journal of Non Newtonian Fluid Mechanic. Accepté le 04/03/2014*).

2- Filali, A., Khezzar, L., and Nemouchi, Z., Entry flows for FENE-P fluids in a plan passage for constant heat flux & wall temperature boundary conditions (*Soumis le 21/01/2014 au: Proceedings of CONV-14: Int. Symp. on Convective Heat and Mass Transfer, June 8 – 13, 2014, Turkey*).

3- Filali, A., Khezzar, L., Finite element simulation of the Graetz problem in an elliptic duct for a viscoelastic fluid (*Soumis le 21/01/2014 au: Proceedings of CONV-14: Int. Symp. on Convective Heat and Mass Transfer*, June 8 – 13, 2014, Turkey).

❖ **Autres publications :**

➤ **Articles publiés:**

1- Filali, A., Khezzar, L., and Mitsoulis, E., “Some experiences with the numerical simulation of Newtonian and Bingham fluids in dip coating” *Computers & Fluids*, Vol. 82 pp. 110-121, 2013.

2- Filali, A., and Khezzar, L., “A Finite Element Investigation of Elastic Flow Asymmetries in Cross-Slot Geometries Using a Direct Steady Solver”, *Fluid Dynamics & Materials Processing*, pp.1-23, 2013.

➤ **Communications orales ou affichées:**

1- Filali A., Khezzar, L., Pinho F. T. and Alves M. A., Purely Elastic Flow Asymmetries in Cross-slot Geometry- Are They Always Present?. *Proceedings of CHT-12 ICHMT International Symposium on Advances in Computational Heat Transfer*, England, Bath, July 1-6, (2012).

2- Filali, A., Khezzar, L., and Mitsoulis, E., “Numerical Modeling of the Dip Coating Problem“. *Proceedings of ASME 2012 International Mechanical Engineering Congress & Exposition IMECE2012*, November 11-17, 2012, Houston, Texas, USA.

3- Filali, A., Khan, T. S., Khezzar, L., and AlShehhi, M., Approaches to Understanding of Black Powder Movement & Dispersion. *ADRAC Abu Dhabi International Research & Development Academic Conference & Exhibition*, 24-26 February 2014.