



Université Mentouri Constantine – Université de Reims

Université Mentouri Constantine  
Université de Reims

N° D'ordre :  
N° D'ordre :

## THESE

---

# Caractérisation des transferts convectifs a l'intérieur de mini- et de micro-canaux

---

Présentée et soutenue publiquement le 28 Novembre 2010

Pour l'obtention du :

Doctorat en Sciences de l'Université de Constantine  
Doctorat de l'Université de Reims

Par

**Yassine KABAR**

Jury :

*Président :*

**Rachid BESSAÏH**, Professeur, Université de Constantine

*Rapporteurs :*

**Samir RAHAL**, Professeur, Université de Batna

**Said ABBOUDI**, Maître de Conférences HDR, Université de Belfort

*Examineurs :*

**Mohamed LACHI**, Professeur, Université de Reims

*Directeurs de thèse :*

**Colette PADET**, Professeur, Université de Reims

**Mahfoud KADJA**, Professeur, Université de Constantine

**Mourad REBAY**, Maître de conférences (HDR), Université de Reims

***A Abderrahmane***

## REMERCIEMENTS

Cette thèse a été réalisée en cotutelle entre l'université Mentouri de Constantine, Algérie et l'Université de Reims, France dans le Laboratoire *Groupe de Recherche en Sciences Pour l'Ingénieur* (GRESPI).

J'adresse, tout d'abord, mes vifs remerciements à M. Mourad REBAY, pour m'avoir proposé ce sujet de thèse, de m'avoir accueillie dans son laboratoire, pour ses précieux conseils, sa patience, et pour nos nombreux échanges scientifiques.

Je voudrais bien évidemment remercier très sincèrement M. Mahfoud KADJA, pour les connaissances qu'il m'a transmises, je tiens à lui exprimer ma gratitude pour son aide chaleureuse, et ses conseils.

Je tiens également à remercier Madame Colette PADET, pour son soutien tout au long de cette thèse.

Je remercie également M. Rachid BESSAIH d'avoir accepté de présider mon jury.

Je tiens aussi à remercier M. Samir RAHEL et M. Said ABOUDDI, pour m'avoir fait l'honneur d'examiner mes travaux de thèse et d'en être les rapporteurs.

Mes vifs remerciements s'adressent également à M. Mohamed LACHI, qui me fait l'honneur de participer à ce jury.

Tous mes remerciements à mes amis et collègues pour leur soutien et leur gentillesse.

Je voudrais également remercier les responsables du centre de calcul Champagne-Ardenne Romeo pour leurs disponibilités et leurs conseils.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance au Ministère de l'Enseignement Supérieur Algérien pour son soutien financier.

Enfin, je tiens à remercier l'ensemble des membres et thésards du laboratoire GRESPI.

Merci à tous. Yassine.

## ملخص

تهتم الدراسة الحالية إلى التمييز المزدوج للحمل الحراري – التواصل داخل قناة متناهية خصبة.

يفترض أن السوائل غير قابلة للضغط مع خواص فيزيائية ثابتة، يأخذ بعين الاعتبار آثار التوصيل المحوري في السائل و الجدار الصلب و التبديد اللزج و الندرة و التنمية في آن واحد لكل من الطبقات المحدودة الديناميكية و الحرارية. يجري التحليل لنوعين من الشروط الحدودية للحرارة: درجة حرارة ثابتة على السطح الخارجي للقناة أو تدفق مستمر. تم حل عدديا لمعادلات Navier-Stokes ثنائية الأبعاد و معادلة الطاقة بواسطة طريقة الأبعاد المنتهية. تم الحصول على نتائج مختلف أعداد Brinkman و أعداد Knudsen و نسب مختلفة للتوصيلات الحرارية

جدار/سوائل التي تشير إلى تشوهات كبيرة في لمحات توزيع درجة الحرارة و المكاني لعدد Nusselt تحت تأثير المشترك للتبديد اللزج و التوصيل في الجدار.

الكلمات المفتاح: تحويل حراري مشترك, التحويل المحوري, التبديد اللزج, الندرة, قناة متناهية, الحل العددي.

## Résumé

La présente étude s'intéresse à la caractérisation du transfert couplé convection - conduction dans un micro-canal plan. Le fluide est supposé incompressible avec des propriétés thermo-physiques constantes. Les effets de la conduction axiale dans le fluide et dans la paroi solide, de la dissipation visqueuse, de la raréfaction, et de la zone du développement simultané des deux couches limites, dynamique et thermique, sont pris en considération. Une analyse est effectuée pour 2 types de conditions aux limites : température constante à la surface externe des plaques (T) ou flux constant imposé (H2). Les équations bidimensionnelles de Navier-stockes et l'équation de l'énergie ont été résolues numériquement par la méthode des volumes finis. Les résultats sont obtenus pour différents nombres de Brinkman, nombre de Knudsen et différents rapports des conductivités thermiques paroi/fluide. Ils montrent des distorsions importantes dans les profils de température et dans les distributions spatiales du nombre de Nusselt sous l'effet conjugué de la dissipation visqueuse et de la conduction dans la paroi.

**Mots clés:** transfert de chaleur conjugué, la conduction axiale, la dissipation visqueuse, raréfaction, micro-canaux, résolution numérique

## Abstract

This study focuses on the characterization of coupled transfer convective - conduction in a micro-channel plan. The fluid is assumed incompressible with constant properties. The effects of axial conduction in the fluid and the solid wall, viscous dissipation, rarefaction, and the simultaneous development of boundary layers, dynamics and thermal are taken into consideration. An analysis is made for 02 types of boundary conditions: constant temperature at the outer surface of the plates (T) or imposed constant flux (H2). The equations of two-dimensional Navier-Stokes and energy equation were solved numerically by the finite volume method. The results are obtained for different numbers of Brinkman number and Knudsen different ratios of thermal conductivities wall / fluid. They show significant distortions in the profiles of temperature and spatial distributions of the Nusselt number under the combined effect of viscous dissipation and conduction in the wall.

**Key words:** conjugated heat transfer, axial conduction, viscous dissipation, rarefaction, microchannel, numerical resolution

## Nomenclature

<b>A</b>	Surface	$m^2$
<b>Br</b>	Nombre de Brinkman	
<b>b</b>	Terme source dans l'équation algébrique discrétisée	
<b>C</b>	Vitesse quadratique moyenne des molécules	$m.s^{-1}$
<b>C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub></b>	Constantes d'intégration	
<b>C<sub>p</sub></b>	Chaleur spécifique à pression constante	$J./kgK$
<b>C<sub>s</sub></b>	Vitesse du son	$m.s^{-1}$
<b>d<sub>0</sub></b>	Diamètre intérieur	$m$
<b>D</b>	Terme diffusif dans l'équation discrétisée	
<b>d</b>	Diamètre moyen des molécules	$m$
<b>d0</b>	Diamètre moyen des molécules	$m$
<b>D<sub>h</sub></b>	Diamètre hydraulique $D_h = \frac{4S}{P_m}$	$m$
<b>E</b>	Epaisseur adimensionnée de la paroi	
<b>E<sub>i</sub></b>	Energie totale moyenne des molécules incidentes	$J$
<b>E<sub>r</sub></b>	Energie totale moyenne des molécules réfléchies	$J$
<b>E<sub>t</sub></b>	Energie totale moyenne des molécules incidentes	$J$
<b>F</b>	Terme convectif dans l'équation discrétisée	
<b>f</b>	Coefficient de frottement	
<b>Gz</b>	Nombre de Gertz	
<b>H</b>	Hauteur du micro-canal	$m$
<b>h</b>	Coefficient de transfert convectif	$W/m^2K$
<b>il</b>	Nombre de nœuds selon X	
<b>jl</b>	Nombre de nœuds selon Y	
<b>K</b>	Rapport de conductivité thermique	
<b>k</b>	Conductivité thermique.	$W/mK$
<b>Kn</b>	Nombre de Knudsen $Kn = \frac{\lambda}{L}$	

<b>L<sub>h</sub></b>	Longueur d'établissement hydrodynamique	m
<b>L<sub>t</sub></b>	Longueur d'établissement thermique	m
<b>Ma</b>	Nombre de Mach $Ma = \frac{u}{c_s}$	
<b>m</b>	Masse d'une molécule simple	kg
<b>M</b>	Rapport du flux convectif sur le flux diffusif	
<b>N</b>	Nombre des molécules	
<b>N<sub>A</sub></b>	Nombre d'Avogadro	Kmol <sup>-1</sup>
<b>Nu</b>	Nombre de Nusselt	
<b>Nu<sub>∞</sub></b>	Nombre de Nusselt au régime établi	
<b>Nu<sub>x</sub></b>	Nombre de Nusselt local	
<b>P</b>	Pression adimensionnelle	
<b>p</b>	Pression	N.m <sup>-1</sup>
<b>Pe</b>	Nombre de Péclet	
<b>Po</b>	Nombre de Poiseuille	
<b>Pr</b>	Nombre de Prandtl	
<b>q</b>	Apport de chaleur volumétrique	W/m <sup>3</sup>
<b>q<sub>0</sub></b>	Flux de chaleur	W
<b>R</b>	Coefficient de détermination	
<b>r</b>	Rayon	m
<b><math>\bar{R}</math></b>	Constante universelle des gaz	J/KmolK
<b>r<sub>0</sub></b>	Rayon intérieure du tube	m
<b>Re</b>	Nombre de Reynolds	
<b>T</b>	Température	K
<b>t</b>	Temps	s
<b>U</b>	Vitesse adimensionnelle selon x	
<b>u</b>	Composante de la vitesse selon x	m.s <sup>-1</sup>
<b>V</b>	Vitesse adimensionnelle selon y	
<b>v</b>	Composante de la vitesse selon y	m.s <sup>-1</sup>

$v_0$	Volume	$m^3$
$\bar{v}$	Volume molaire	$m^3/Kmol$
$v_g$	Vitesse moyenne du gaz au voisinage de la paroi	$m.s^{-1}$
$v_i$	Composante tangentielle de la vitesse des molécules incidente	$m.s^{-1}$
$v_r$	Composante tangentielle de la vitesse des molécules réfléchis	$m.s^{-1}$
$w$	Composante de la vitesse selon z	$m.s^{-1}$
$X^*$	Coordonnées cartésiennes adimensionnelle	
$x, y, z$	Coordonnées cartésiennes	m,m,m
$X^+$	Coordonnées cartésiennes adimensionnelle	
$Y$	Coordonnées cartésiennes adimensionnelle	

### EXPOSANT

$n+1$	Correspond au temps $\tau + \Delta\tau$
$n$	Correspond au temps $\tau$
$\wedge$	Pseudo- vitesse
$\`$	Valeur corrigée

### SYMBOLE GREQUES

$\lambda_0$	Distance moyenne	m
$\lambda$	Libre parcours moyen	m
$\nu$	Viscosité cinématique	$m^2/s$
$\rho$	Masse volumique	$Kg/m^3$
$\alpha$	Diffusion thermique	
$\beta$	Rapport des coefficients d'accommodation	
$\gamma$	Rapport des chaleurs spécifiques	
$\Delta$	Epaisseur de la paroi	m
$\nabla$	Operateur de vecteur Nabla	$s^{-1}$
$\nabla^2$	Opérateur Laplacien	$s^{-2}$

$\delta_h$	Epaisseur de la couche limite hydrodynamique	m
$\delta_T$	Epaisseur de la couche limite thermique	m
$\delta$	Distance intermoléculaire moyenne	m
$\theta$	Température adimensionnelle	
$\mu$	Viscosité dynamique	Kg/ms
$\sigma$	Coefficient d'accommodation	
$\tau$	Temps adimensionnel	
$\varphi$	Variable dépendante générale	
$\Phi$	Fonction de dissipation visqueuse	J/m <sup>3</sup> s

## INDICES

<b>axi</b>	Axiale
<b>b</b>	Mélange
<b>cond</b>	Conductif
<b>conv</b>	Convectif
<b>f</b>	Fluide
<b>g</b>	Particule gaz proche de la paroi
<b>h</b>	Hydrodynamique
<b>H2</b>	Condition de flux constant
<b>i</b>	Interface
<b>in</b>	Entrée
<b>m</b>	Moyenne
<b>p</b>	Paroi
<b>s</b>	Saut
<b>T</b>	Température
<b>v</b>	Vitesse
<b>w</b>	Solide

---

# SOMMAIRE

<b>REMERCIEMENTS</b>	<b>i</b>
<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>v</b>
<b>SOMMAIRE</b>	<b>x</b>
<b>INTRODUCTION GENERALE</b>	<b>1</b>
<b>1. Analyse bibliographique</b>	<b>4</b>
1.1 INTRODUCTION.	4
1.2. MODELISATION DE L'ECOULEMENT.	6
1.2.1 Modélisation moléculaire	7
1.2.2 Modèle continu (Nguyen 2006)	8
1.3. Modélisation continue des fluides	12
1.3.1. Equation de continuité.	12
1.3.2. Equation des quantités de mouvement.	12
1.3.3. Equation de l'énergie.	12
1.3.4 Fluide gazeux	13
1.3.5 Fluide Liquide	16
1.4. Conditions aux limites	17
1.4.1 Glissement de vitesse	17
1.4.2 Saut de température à la paroi	20
1.5. Effets d'échelles.	21
1.5.1 La longueur d'établissement	22
1.5.2 La dissipation visqueuse	25
1.5.3 Conduction axiale	30
1.5.3.1 Conduction axiale dans le fluide	30
1.5.3.2 Conduction dans le solide	35
1.5.3.3 Conduction axiale combinée fluide/solide	39
1.5.4 Effet de la raréfaction	40
1.6 Conclusions	41
<b>2. Position du problème et résolution numérique.</b>	<b>43</b>
2.1 Introduction	43
2.2 Position du problème	44
2.3 Mise en équations	45

2.3.1. Equation de continuité.	45
2.3.2. Equation des quantités de mouvement.	46
2.3.3. Equation de l'énergie.	46
<i>2.4. Equations simplifiées.</i>	46
2.4.1. Hypothèses.	46
2.4.2 Equation de continuité.	47
2.4.3 Equations des quantités de Mouvement.	47
2.4.4 Equation d'énergie.	47
<i>2.5. Conditions aux limites.</i>	47
2.5.1 Ecoulement non raréfié $Kn < 0.001$	48
2.5.1.1 Conditions aux limites hydrodynamiques	48
2.5.1.2 Conditions aux limites thermiques	48
2.5.2 Ecoulement légèrement raréfié $0.001 < Kn < 0.1$	49
2.5.2.1. Glissement de vitesse à la paroi	49
2.5.2.2. Saut de température à la paroi	49
<i>2.6. Adimensionalisation</i>	50
2.6.1 Grandeurs caractéristiques et variables adimensionnelles.	50
2.6.2 Equation de continuité adimensionnelle	51
2.6.3 Equations adimensionnelles de Navier-Stokes.	52
2.6.4 Equation adimensionnelle de l'énergie.	53
<i>2.7. Conditions aux limites adimensionnelles.</i>	56
<i>2.8. Modèle numérique.</i>	58
2.8.1 Introduction.	58
2.8.2 Maillage.	58
2.8.3. Equation algébrique de la composante horizontale de la vitesse (U).	60
2.8.4 Coefficient de viscosité à l'interface entre volume décalé vers la droite.	61
2.8.5 Equation algébrique de la composante verticale de la vitesse (V).	65
2.8.6. Equation algébrique de la température $\theta$ .	67
2.8.7 Coefficient de conductivité thermique aux interfaces des volumes de contrôle :	69
2.8.8 Incorporation du saut de température à l'interface fluide/solide	72
2.8.9 Fonction $\mathbf{A}(\mathbf{P})$ pour différents schémas numériques.	73
2.8.10. Equation algébrique de pression.	73
2.8.11 Développement de l'algorithme SIMPLER.	76
2.8.12 Méthode de résolution (Algorithme TDMA)	76
2.8.13. Faux transitoire.	80
2.8.14 Critère de convergence.	81
<i>2.9 Validation des codes de calcul élaborés</i>	82
2.9.1 Ecoulement non raréfié	82
2.9.2 Ecoulement légèrement raréfié	85
<b>3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan</b>	<b>87</b>
<i>3.1 Introduction</i>	87
<i>3.2 Paramètres de l'étude.</i>	90
<i>3.3 Résultats et discussions.</i>	92
3.3.1 Champs hydrodynamiques	92

3.3.1.1 Evolutions de la couche limite hydrodynamique	92
3.3.2 Profils de température	94
3.3.3 Champs de températures	99
3.3.4 Nombre de Nusselt local	101
3.3.5 Longueur d'établissement de la couche limite thermique	113
3.3.6 Corrélation	114
<b>4. Ecoulement des gaz dans un micro-canal plan</b>	<b>116</b>
4.1 Introduction	116
4.2 Analyse	119
4.3 Paramètres de l'étude	121
4.4 Résultats et discussions.	121
4.4.1 Champs hydrodynamique	121
4.4.2 Nombre de Poiseuil	123
4.4.3 Effet du paramètre d'interaction gaz-paroi $\beta$	124
4.4.4 Effet de la raréfaction	129
4.4.4.1 Sur le champ thermique	129
4.4.4.2 Sur les profils de température	131
4.4.4.3 Sur le nombre de Nusselt local	136
<b>5. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES</b>	<b>145</b>
<b>RÉFÉRENCES</b>	<b>148</b>
<b>Annexe</b>	<b>154</b>

---

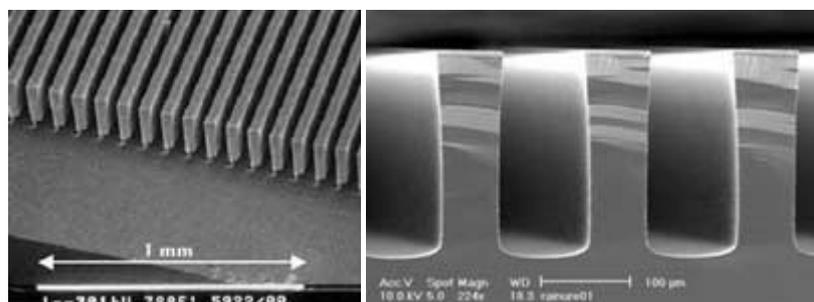
# ***Introduction générale***

---

## INTRODUCTION GENERALE

Le développement des systèmes mécaniques et énergétiques miniaturisés se heurte aux problèmes d'évacuation des flux de chaleur dans des volumes compacts. Par exemple, en électronique, où les composants doivent fonctionner à des températures optimales, des techniques avancées et fiables d'évacuation de la chaleur doivent être employées pour assurer leur refroidissement. L'une des approches les plus prometteuses étant le refroidissement au moyen d'un écoulement simple ou diphasique dans des micro-canaux (figure 1). Ce type de refroidissement offre de hautes performances en transfert de chaleur. Cependant, pour concevoir et fabriquer de tels systèmes, il est nécessaire de bien comprendre et de caractériser les écoulements ainsi que les transferts de chaleur aux petites échelles. Il est aussi important d'examiner l'interaction du transfert convectif dans le fluide avec la conduction dans la paroi du micro-canal.

Dans le cas des écoulements dans des micro-canaux, de nombreux effets ne peuvent plus être négligés comme c'est souvent le cas à l'échelle macroscopique. Citons parmi ces effets : la dissipation visqueuse, la zone du développement simultané des couches limites thermique et dynamique, le glissement de vitesse et le saut de température à la paroi. Ceci est lié au fait que le rapport surface/volume est nettement supérieur dans ces micros systèmes. En particulier, à cause du confinement, le frottement du fluide induit un dégagement de chaleur de nature à modifier le champ thermique.



**Figure 1 Photos des micro-canaux prises au microscope électronique.**

Le sujet de recherche dans cette thèse consiste à appréhender l'évolution du coefficient de frottement et du coefficient de transfert de chaleur à l'échelle microscopique. Nous simulerons numériquement par la méthode des volumes finis les transferts conjugués (conduction-convection) dans des micro-canaux en tenant compte des différents effets qui caractérisent les écoulements dans les micro-canaux.

Dans cette thèse, nous exposerons dans une première partie une analyse bibliographique consacrée aux écoulements micro-fluidiques forcés. Après avoir introduit les notions de physiques nécessaires à cette étude, nous présenterons les effets non négligeables à la micro-échelle.

Le deuxième chapitre est consacré à la méthode des volumes finis utilisée pour la résolution numérique des équations de conservation régissant ce type de problème. Nous présentons aussi une technique pour introduire le saut de température à la paroi lorsque l'écoulement est raréfié.

Au troisième chapitre, nous avons étudié la convection forcée laminaire dans un micro-canal en tenant compte des effets suivants :

- développement simultané des couches limites thermique et hydrodynamique
- dissipation visqueuse
- conduction axiale combinée (fluide/paroi)
- épaisseur de la paroi

Pour cela, nous utilisons différents paramètres, à savoir : le rapport des conductivités thermiques, le nombre de Brinkman, le nombre de Péclet, et l'épaisseur de la paroi.

Les résultats obtenus mettent en évidence l'influence de la réduction d'échelle sur le transfert de chaleur. A titre d'exemple, nous avons montré que les effets conjugués de l'échauffement dû au frottement visqueux et à la conduction dans la paroi provoquent une

modification du nombre de Nusselt aussi bien dans la zone du développement de l'écoulement que dans la région où le régime est établi.

Le quatrième chapitre de cette thèse concerne la modélisation du problème dans le cas où l'écoulement est considéré légèrement raréfié, la modélisation classique reste valable, dans ce cas nous devons introduire de nouvelles conditions aux limites à l'interface fluide/paroi. (Glissement de vitesse et saut de température).

L'analyse des résultats montre que selon les valeurs du nombre de Knudsen, du rapport  $\beta$  et du nombre de Brinkman une diminution sensible du nombre de Nusselt est observée.

Nous terminons cette thèse par des conclusions et des perspectives.

---

***Chapitre 01***

***Analyse bibliographique***

---

## 1. Analyse bibliographique

### 1.1 INTRODUCTION.

Durant les 20 dernières années, le développement considérable qu'ont connu les industries électronique et informatique, surtout en miniaturisation des équipements, n'était possible que par une bonne évacuation de la chaleur générée par le fonctionnement des composants électroniques. La figure (1.1) montre la carte routière internationale de la technologie des semi-conducteurs (ITRS), où la puissance thermique dégagée par les micro processeurs était de moins de 50 w avant l'an 2000, cette puissance a pratiquement doublé au bout de 10 ans

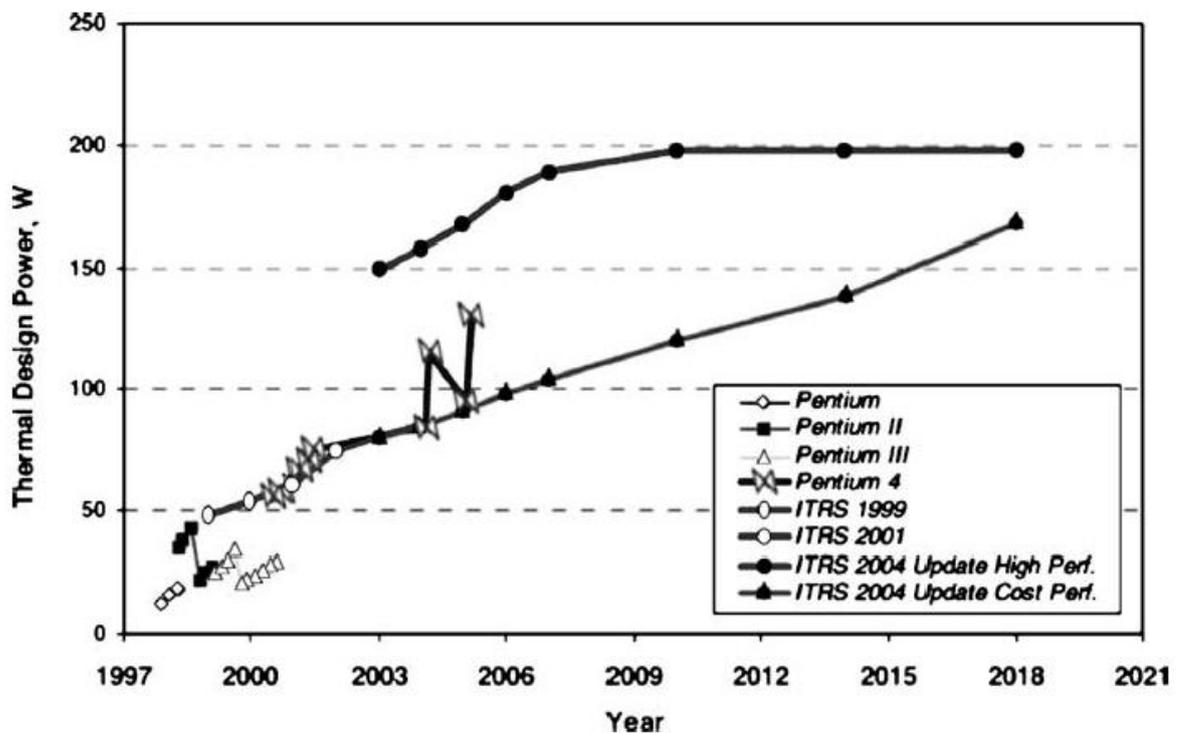
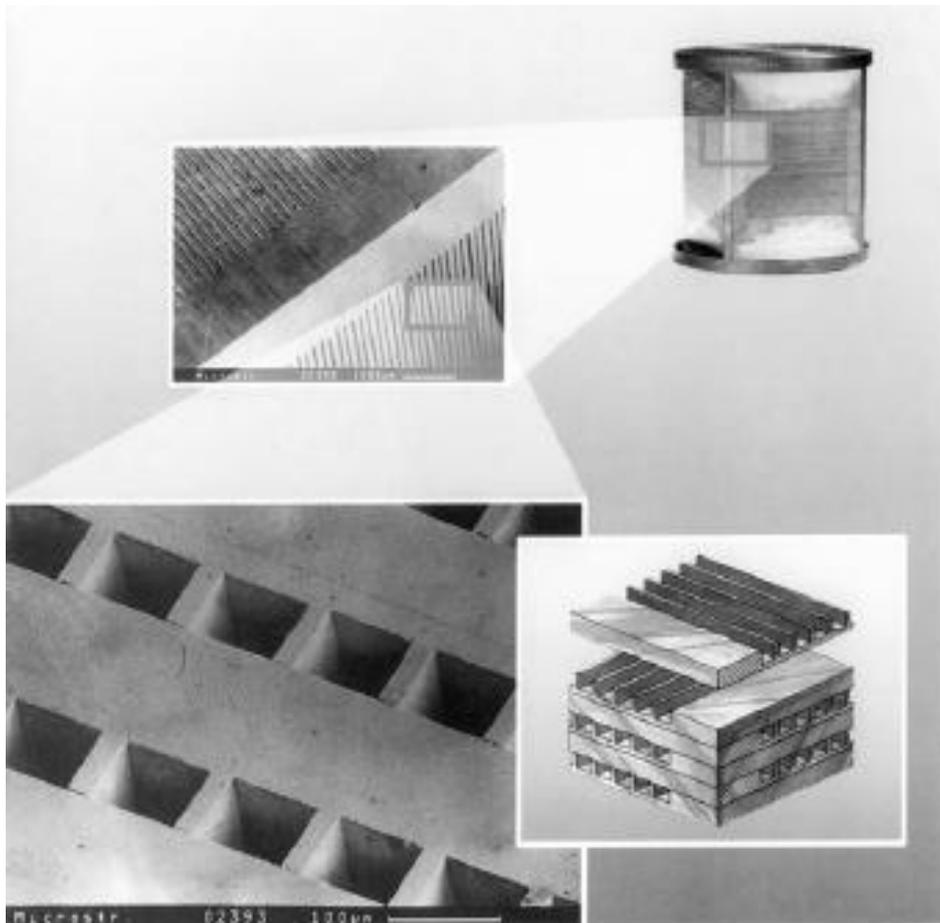


Figure (1.1) La carte routière internationale de la technologie des semi-conducteurs (ITRS)

## 1. Analyse bibliographique

---

Plusieurs techniques d'évacuation du flux de chaleur généré par les composants électroniques sont adoptées et continuellement améliorées. L'une des approches les plus prometteuses étant le refroidissement au moyen d'écoulements simples ou diphasiques dans des micro-canaux. Ces derniers forment des échangeurs de chaleur de hautes performances comme le montre la figure (1.2) qui représente une pile d'échangeurs de chaleur à flux croisés de dimensions 14 mm x 14 mm x 14 mm capables de transférer 10 kilowatts avec une différence de températures entrée/sortie de 80 K malgré leurs faibles dimensions.



**Figure (1.2) Micro échangeur de chaleur (Gad-el-Hak 2002). page 10-2**

Les micro-canaux peuvent être définis comme des canaux dont les dimensions sont comprises entre un micron et un millimètre Tableau (1.1). Au-delà d'un millimètre le comportement de l'écoulement est identique à celui présenté dans l'analyse macro-échelles.

# 1. Analyse bibliographique

---

**Tableau (1.1) Classification des canaux**

<i>Canaux conventionnels</i>	$D_h > 3mm$
<i>Mini-canal</i>	$200 \mu m \leq D_h \leq 3mm$
<i>Micro-canal</i>	$10 \mu m \leq D_h \leq 200 \mu m$
<i>Nano-canal</i>	$D_h \leq 0.1 \mu m$

Actuellement, les micro-canaux ont des dimensions de l'ordre des microns, ils sont fabriqués à partir de plusieurs matériaux tels que le verre, les polymères, le silicium.... en utilisant différentes techniques d'usinage telles que la micro-gravure.

L'un des avantages que présente les micros-canaux est leur rapport élevé de surface/volume ainsi que leurs faible encombrement. En effet, lorsque la taille du canal devient très petite le rapport de la surface au volume devient plus grand. Si on considère un tube de diamètre  $D$  et de longueur  $L$ . Le rapport de la surface  $A$  au volume  $V_0$  est :

$$\frac{A}{V_0} = \frac{\pi DL}{\pi D^2 L / 4} = \frac{4}{D} \quad (1.1)$$

L'équation (1.1) montre que lorsque le diamètre  $D$  est très petit, le rapport  $A/V_0$  devient très grand, en conséquence les forces de surface deviennent plus dominantes et donc les conditions aux frontières peuvent s'écarter du comportement des milieux continus et prendre différentes formes. Cela a des implications importantes dans l'analyse des problèmes de micro-canaux.

## 1.2. MODELISATION DE L'ÉCOULEMENT.

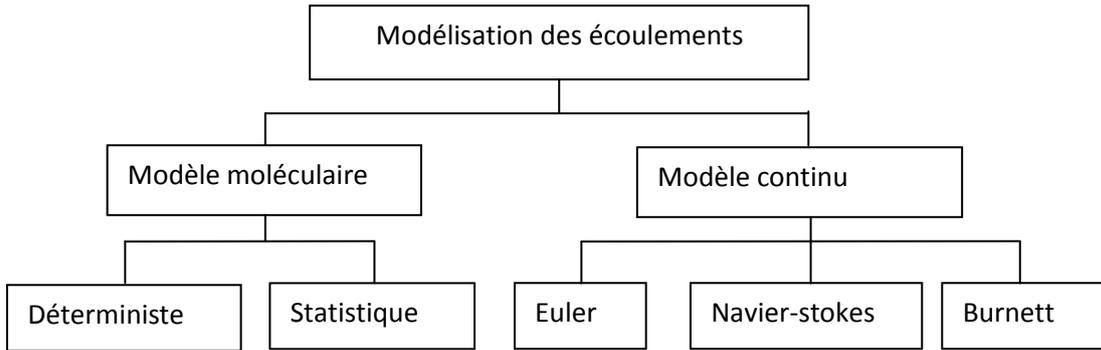
Du fait de leurs dimensions de l'ordre du micron une première question se pose : comment modéliser le transfert de chaleur et de masse dans ces micro-canaux ?

Il existe deux méthodes pour modéliser l'écoulement dans les micro-canaux :

- La modélisation moléculaire : approche statistique.
- La modélisation continue.

# 1. Analyse bibliographique

---



**Figure (1.3) Modélisation des écoulements**

## 1.2.1 Modélisation moléculaire

L'écoulement peut être modélisé à partir de l'équation de Boltzmann (équation 1.2), qui décrit l'évolution spatio-temporelle de la fonction de distribution de vitesse  $f(x, v, t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + F \frac{\partial f}{\partial v} = Q(f, f^*) \quad (1.2)$$

$x$  représentant la position,  $v$  la vitesse des molécules et  $F$  les forces extérieures de volume. Le second membre de l'équation est relatif aux collisions intermoléculaires, supposées binaires. Cette équation est valable quel que soit le degré de raréfaction puisque l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local n'est pas utilisée.

L'équation est difficile à résoudre à cause du terme  $Q(f, f^*)$ . En conséquence, plusieurs modèles simplifiés de ce terme de collision ont été introduits. Comme *Le modèle BGK (Bhatnagar-Gross-Krook) pour les gaz simples*. Qui est le modèle le plus simple et le plus utilisé pour les écoulements isothermes. Il consiste à remplacer l'opérateur de collision par une différence entre la fonction de distribution inconnue et une distribution locale Maxwellienne :

$$Q_{BGK}(ff^*) = -\nu[f(t, r, \xi) - f_{loc}^M(n, T, u)] \quad (1.3)$$

où  $\nu$  est la fréquence de collision. La fonction de distribution locale de Maxwell s'écrit

## 1. Analyse bibliographique

---

$$f_{loc}^M(n, T, \mathbf{u}) = n(t, r) \left( \frac{m}{2\pi k_B T(t, r)} \right)^{3/2} \exp \left( - \frac{m(\xi - \mathbf{u}(t, r))^2}{2k_B T(t, r)} \right) \quad (1.4)$$

où  $\mathbf{u}$  représente le vecteur vitesse macroscopique locale.

Ces modèles de collision peuvent être résolus analytiquement ou numériquement par une approche linéaire ou non-linéaire. Ching, S., (2005)

### 1.2.2 Modèle continu (Nguyen 2006)

L'étude de la mécanique des fluides à la macro- échelles suppose généralement que le fluide peut être traité comme étant un milieu continu. Cette supposition de la continuité de la masse et des autres propriétés est raisonnable à la macro-échelle par contre pour des longueurs microscopiques cette supposition dépend énormément de la situation étudiée. En effet on sait que la matière est constituée d'atomes et de molécules et non pas comme étant une substance uniformément distribuée sans traits distinctifs, donc si les molécules d'un fluide sont étroitement empaquetées relativement à la longueur d'échelle de l'écoulement, la supposition de continuum est probablement valable. Mais si les molécules occupent peu d'espace relativement aux dimensions d'un micro-canal on ne peut pas assumer la continuité du fluide. Cependant, aux micro- échelles, il peut toujours y avoir des milliers de molécules pour définir une particule fluide dans une longueur caractéristique de l'écoulement. Par exemple, 10- $\mu\text{m}$  d'un canal peut contenir 30 000 molécules d'eau, ça sera assez de molécules pour considérer le fluide comme continu.

Enfin, il est nécessaire que les grandeurs macroscopiques ne soient pas trop perturbées par les fluctuations microscopiques. On peut considérer que la prise en compte de 10 000 molécules conduit à des fluctuations statistiques de l'ordre de 1% lors de la définition des grandeurs macroscopiques.

Si nous mesurons la densité d'un fluide contenu dans une particule fluide assimilée a un cube de dimension L.

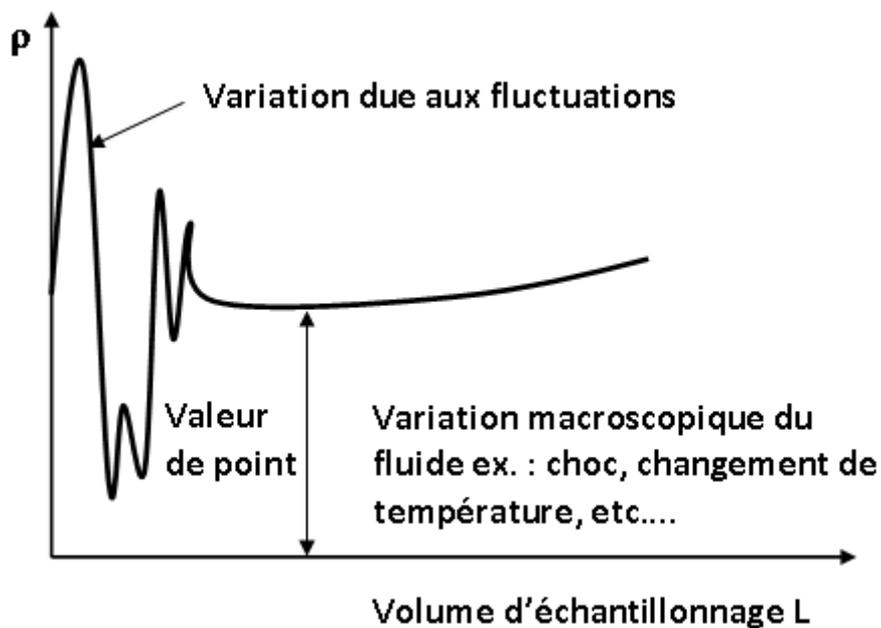
On peut le faire en comptant le nombre de molécules dans ce volume, selon la relation suivante :

## 1. Analyse bibliographique

$$\rho = \frac{Nm}{L^3} \quad (1.5)$$

N est le nombre des molécules à l'intérieure de ce volume.  
m : masse d'une molécule simple.

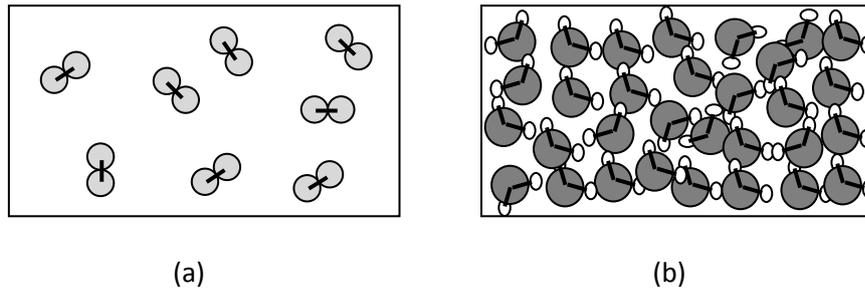
Si la taille de cette particule est très petite, elle peut contenir seulement quelques molécules. Au fur et à mesure que sa taille augmente de nouvelles molécules viennent s'ajouter et le calcul de la densité varie rapidement. Comme ce volume devient très grand, le calcul de la densité tend à se rapprocher d'une valeur relativement constante. Cette valeur est appelée la valeur de point dans la mécanique des milieux continus.



**Figure (1.4) variation de la densité instantanée de la particule fluide en fonction de son volume (Nguyen 2006)**

Pour avoir un ordre de grandeur des dimensions des particules fluides on considère un exemple concret. La figure (1.5) montre deux croquis, de l'azote  $N_2$ , et de l'eau, aux conditions standard. Le tableau (1.2) compare les propriétés du gaz et du liquide.

# 1. Analyse bibliographique



**Figure (1.5) Croquis de (a) N<sub>2</sub>, (b) H<sub>2</sub>O aux conditions standards.**

**Tableau (1.2) Propriétés de l'azote et de l'eau aux conditions standards**

	<i>Gaz</i>	<i>Liquide</i>
<i>Propriétés</i>	<i>(N<sub>2</sub>)</i>	<i>(H<sub>2</sub>O)</i>
<i>Diamètre moléculaire</i>	<i>0.3 nm</i>	<i>0.3 nm</i>
<i>Densité</i>	<i>3 x 10<sup>25</sup> m<sup>-3</sup></i>	<i>2 x 10<sup>28</sup> m<sup>-3</sup></i>
<i>Espace intermoléculaire</i>	<i>3 nm</i>	<i>0.4 nm</i>
<i>Distance de déplacement</i>	<i>100 nm</i>	<i>0.001 nm</i>
<i>Vitesse moléculaire</i>	<i>500 m/s</i>	<i>1000 m/s</i>

Pour obtenir des variations statistiques raisonnablement stationnaires, c.à.d. statistiques à 1 %, 10<sup>4</sup> molécules doivent être utilisées pour calculer une valeur moyenne (*Colin et al 2004*). Par conséquent, les quantités de points peuvent être considérées comme continues si la particule fluide est un cube de coté :

$$L_{gaz,pt} = \sqrt[3]{\frac{10^4}{3 \times 10^{25} m^{-3}}} = 70 \times 10^{-9} m \quad (1.6)$$

$$L_{liquid,pt} = \sqrt[3]{\frac{10^4}{2 \times 10^{28} m^{-3}}} = 8 \times 10^{-9} m \quad (1.7)$$

## 1. Analyse bibliographique

---

Aussi cette particule doit rester ponctuelle par rapport à la taille du microsysteme (micro-canal, micro valve...), c'est à dire que l'échelle du domaine d'étude doit être supérieure à celle de la particule.

Comment déterminer dans ce cas la taille de la particule fluide ? On sait que pour un gaz c'est le libre parcours moyen qui l'emporte ainsi une particule de gaz est un volume incorporant un grand nombre de libre parcours moyens

Pour un liquide, les molécules sont essentiellement dans un état continu de collision ou d'interaction, leur diamètre moléculaire serait une meilleure évaluation. *Tabeling (2003)*

Donc si on considère que la particule fluide est un cube dont la longueur des côtés L est 10 fois supérieure au libre parcours moyen.

Pour les gaz on trouve :

$$L_{gaz,tr} = \sqrt[3]{10^3} \times 100nm = 10^{-6}m \quad (1.8)$$

Pour les liquides on tire L à partir de la relation suivante :

$$L_{liquide,tr} = \sqrt[3]{\frac{10^3}{2 \times 10^{25}m^{-3}}} = 4 \times 10^{-9}m \quad (1.9)$$

Pour s'attendre à un comportement continue, on prend la plus grande longueur définie à partir de c'est deux critères, c'est-à-dire que :

$$L_{gaz} = 1 \mu m \quad (1.10)$$

$$L_{liquide} = 10 nm \quad (1.11)$$

On voit bien que la taille des particules des gaz est comparable à l'ordre des microsystemes, leurs modélisations entre dans le domaine des gaz raréfiés.

## 1.3. Modélisation continue des fluides

### 1.3.1. Equation de continuité.

Le principe de conservation de masse peut être formulé comme suit : L'accumulation de la masse dans un volume donné par unité de temps est égale à la différence entre les masses qui entrent et celles qui sortent du volume infini. Il est exprimé par l'équation de continuité comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0 \quad (1.12)$$

### 1.3.2. Equation des quantités de mouvement.

Les équations de Navier-Stokes s'expriment par la deuxième loi fondamentale de la dynamique.

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla \vec{p} + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (1.13)$$

Où

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{w} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.13a)$$

Représente l'expression de la dérivée particulaire.

### 1.3.3. Equation de l'énergie.

L'équation de l'énergie traduite par le premier principe de la thermodynamique s'écrit comme suit :

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q + \mu \Phi \quad (1.14)$$

L'expression de la dissipation visqueuse en coordonnées cartésiennes est la suivante :

$$\Phi = 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] + \eta \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right]^2 \quad (1.15)$$

### 1.3.4 Fluide gazeux

Afin de modéliser les écoulements des gaz, on doit introduire ici plusieurs conclusions tirées de la cinétique des gaz. En effet la comparaison du diamètre moyen des molécules  $d_0$  et de la distance intermoléculaire moyenne  $\delta$  permet de classer les gaz.

Si le rapport

$$\frac{\delta}{d_0} \gg 1 \quad (1.16)$$

Le gaz serait dilué (Nguyen 2006), et donc les collisions binaires entre les molécules sont les plus probables, tandis que ceux qui ne remplissent pas cette condition seraient des gaz denses.

Pour les gaz dilués, le mode le plus commun de l'interaction intermoléculaire serait les collisions binaires. Les collisions multiples simultanées de molécules sont peu probables.

Généralement, lorsque le rapport  $\frac{\delta}{d_0} \gg 7$  les gaz sont considérés comme dilués.

Dans le cas de l'azote par exemple, on a

$$\frac{\delta}{d_0} = \frac{3.3 \times 10^{-9} m}{3 \times 10^{-10} m} \approx 10 \gg 1 \quad (1.17)$$

D'autres quantités de transport sont importantes dans la dynamique des gaz à savoir le libre parcours moyen  $\lambda$  (distance moyenne parcourue par une molécule entre deux chocs consécutifs), la vitesse quadratique moyenne des molécules  $C$ , et la vitesse  $C_s$  du son.

## 1. Analyse bibliographique

---

Le libre parcours moyen est la distance moyenne parcourue par une molécule entre deux chocs. Pour un gaz simple où les molécules sont assimilées à des sphères rigides à l'équilibre thermo-dynamique, est donné par l'équation

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \quad (1.18)$$

$n$  est la concentration moléculaire  $n = \delta^{-3}$

La vitesse quadratique moyenne des molécules (Nguyen 2006) est indiquée par :

$$c = \sqrt{3RT} \quad (1.19)$$

La vitesse avec laquelle le son (vagues infinitésimales de pression) se propage dans un gaz est importante. Elle détermine le type d'écoulement qui se développera dans le gaz.

$$c_s = \sqrt{\gamma RT} \quad (1.20)$$

Une dernière quantité d'importance dans la dynamique des gaz est la viscosité du gaz. Selon la théorie de gaz cinétique, elle est donnée par :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{1}{2}\lambda c \quad (1.21)$$

Cette équation rapporte ainsi la viscosité à la température et à la pression par le libre parcours moyen et la vitesse quadratique moyenne de la molécule.

En plus de ces paramètres, il y a plusieurs groupes sans dimensions de paramètres qui sont très importants en évaluant l'état d'un fluide dans l'écoulement. Ce sont le nombre de Mach  $Ma$ , le nombre de Knudsen  $Kn$ , et le nombre de Reynolds  $Re$ .

## 1. Analyse bibliographique

---

Le nombre de Mach est le rapport à la vitesse d'écoulement  $u$  à la vitesse du son  $C_s$ , il est donné par la relation suivante :

$$\mathbf{Ma} = \frac{u}{c_s} \quad (1.22)$$

Le nombre de Mach mesure de la compressibilité d'un gaz et peut être considéré comme le rapport des forces d'inerties aux forces élastiques. Si le nombre de Mach d'un écoulement de gaz est supérieur à 0.3, l'écoulement sera traité comme étant compressible. Si le nombre de mach d'un écoulement est inférieur à 0.3, l'écoulement peut être traité comme étant incompressible condition nécessaire mais pas suffisante puisque si le fluide est fortement chauffé cela peut causer de grands changements de sa densité (Gad-el-Hak 2002).

Le nombre de Knudsen est d'une très grande importance dans la dynamique des gaz. Il fournit une mesure de la façon dont un écoulement est raréfié, ou de la façon dont la densité est basse relativement à l'échelle de la longueur de l'écoulement.

$$\mathbf{Kn} = \frac{\lambda}{L} \quad (1.23)$$

Le nombre de Reynolds est donné par la relation suivante

$$\mathbf{Re} = \frac{uL}{\nu} \quad (1.24)$$

Tous les trois groupes sans dimensions sont liés entre eux par l'expression :

$$\mathbf{Kn} = \sqrt{\frac{\gamma\pi}{2}} \frac{\mathbf{Ma}}{\mathbf{Re}} \quad (1.25)$$

Le nombre de Knudsen est l'un des outils principaux utilisés pour classifier la raréfaction d'un écoulement.

## 1. Analyse bibliographique

---

Il existe quatre principaux régimes de raréfaction d'un fluide en fonction de Kn à savoir :

$Kn < 10^{-3}$ , le régime est continu, l'écoulement est modélisé par les équations de Navier–Stokes associées aux conditions classiques de continuité de la température et de la vitesse à la paroi ;

$10^{-3} < Kn < 10^{-1}$ , le régime est glissant, les équations de Navier–Stokes sont applicables, mais il est nécessaire de prendre en compte un saut de température et de vitesse à la paroi, résultant du déséquilibre thermodynamique qui apparaît en priorité près des frontières solides, là où le gaz n'occupe qu'un demi-espace ;

$10^{-1} < Kn < 10$ , le régime est de transition, l'approche continue traduite par les équations de Navier–Stokes n'est plus valable, mais les collisions intermoléculaires ne sont pas encore totalement négligeables et doivent être prises en compte ;

$Kn > 10$ , le régime est moléculaire libre les collisions entre molécules sont alors d'occurrence négligeable, comparées aux collisions entre molécules et paroi. (**Colin et al 2004**)

### 1.3.5 Fluide Liquide (Gad-el-Hak 2002).

Les liquides sont environ 1000 fois plus denses que les gaz, l'espacement entre les molécules dans les liquides est approximativement 10 fois inférieure que l'espacement dans les gaz. Les molécules liquides n'ont pas de libre parcours moyen, mais l'espacement de treillis  $\delta$  peut être employé comme mesure semblable.

L'espacement de treillis  $\delta$  est défini comme suit

$$\delta \sim \left( \frac{\bar{v}}{N_A} \right)^{1/3} \quad (1.26)$$

$\bar{v}$  est le volume molaire

$N_A$  est le nombre d'Avogadro.

# 1. Analyse bibliographique

---

Pour l'eau, cet espacement est de 0.3 nanomètre. Dans un espace de 1  $\mu\text{m}$  et un canal de 50  $\mu\text{m}$  de diamètre, les nombres de Knudsen équivalant sont  $3 \times 10^{-4}$  et  $6 \times 10^{-6}$  respectivement, qui restent dans l'ordre pour des écoulements continu.

## 1.4. Conditions aux limites

Dans le cas des liquides nous avons vu que leur modélisation par le modèle continu nécessite les conditions d'adhérence à la paroi, c'est-à-dire que la vitesse du fluide la plus proche de la paroi va prendre la valeur de cette dernière (paroi mobile, ou fixe).

Par contre pour la modélisation des gaz on introduit des conditions aux limites de glissement pour la vitesse et de saut de température à la paroi.

### 1.4.1 Glissement de vitesse

Maxwell a introduit en 1878 les premières conditions aux limites qui tiennent compte du glissement de la vitesse à la paroi :

$$v_g - v_w = \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v} \lambda_0 \left. \frac{\partial v_g}{\partial y} \right|_w + \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v} \frac{\lambda_0^2}{2} \left. \frac{\partial^2 v_g}{\partial y^2} \right|_w \quad (1.27)$$

Ou

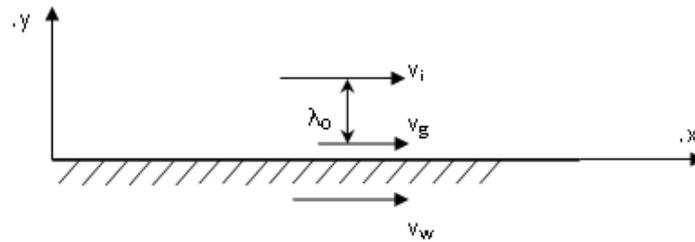
$v_g$  : La vitesse moyenne tangentielle du gaz au voisinage de la paroi.

$v_w$  : La vitesse moyenne tangentielle de la paroi.

En effet, si on considère un écoulement unidimensionnel d'un gaz, entre deux plaques planes.

On définit les vitesses des molécules au voisinage de la paroi mobile.  $v_i$  et  $v_r$  comme étant les composantes tangentielles respectives des vitesses moyennes des molécules incidentes et réfléchies, figure 1.6

## 1. Analyse bibliographique

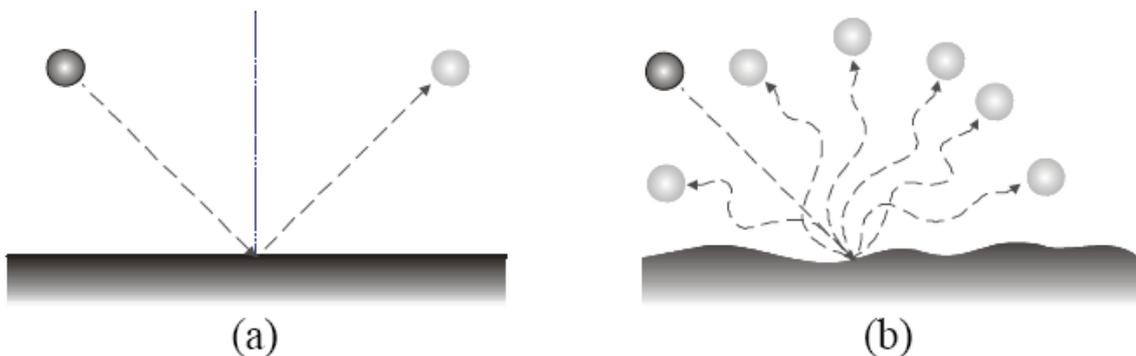


**Figure (1.6) Vitesse du gaz près d'une paroi mobile**

La vitesse moyenne tangentielle  $v_g$  du gaz au voisinage de la paroi est évaluée selon la moyenne arithmétique suivante

$$v_g = 1/2(v_i + v_r) \quad (1.28)$$

Maxwell a considéré la paroi comme une surface intermédiaire entre une surface spéculaire c'est-à-dire comme étant une paroi plane est lisse à l'échelle de la molécule et une surface diffuse cas des parois rugueuses à l'échelle de la molécule. Il a proposé qu'une fraction  $\sigma$  des molécules incidentes se réfléchisse de façon diffuse en acquérant la vitesse moyenne tangentielle de la paroi  $v_w$ , alors que la fraction  $1-\sigma_v$  se réfléchit de manière parfaitement spéculaire en conservant la vitesse moyenne tangentielle initiale  $v_i$  figure (1.7).



**Figure (1.7) (a) Réflexion spéculaire. (b) Réflexion diffuse.**

## 1. Analyse bibliographique

---

Le coefficient de réflexion de Maxwell  $\sigma_v$  est appelé coefficient d'accommodation.

$\sigma_v = 0$  : la réflexion est spéculaire.

$\sigma_v = 1$  : la réflexion est diffuse.

On peut exprimer donc la vitesse moyenne tangentielle  $v_r$  des molécules qui quittent la paroi par une moyenne pondérée de  $v_i$  et de  $v_w$  :

$$\mathbf{v}_r = (\mathbf{1} - \sigma_v)\mathbf{v}_i + \sigma_v\mathbf{v}_w \quad (1.29)$$

Et aussi  $v_g$  par :

$$\mathbf{v}_g = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_i + (\mathbf{1} - \sigma_v)\mathbf{v}_i + \sigma_v\mathbf{v}_w) \quad (1.30)$$

La vitesse des molécules incidentes  $v_i$  correspond à la vitesse des molécules atteinte suite à leur dernière collision, à une distance moyenne  $\lambda_0$  de la paroi. ( $\lambda_0 \approx \lambda$ )

Le développement de Taylor de  $v_i$  autour de  $v_g$  donne

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_g + \lambda_0 \left. \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial y} \right|_w \quad (1.31)$$

Des équations (1.30) et (1.31) on obtient finalement

$$\mathbf{v}_g - \mathbf{v}_w = \lambda_0 \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \left. \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial y} \right|_w \quad (1.32)$$

La vitesse de glissement est la quantité  $v_g - v_w$  qui représente le saut de vitesse entre le gaz et la paroi. On remarque que si le libre parcours moyen des molécules est très petit devant la dimension caractéristique de l'écoulement  $h$ , le terme  $\lambda_0 \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \left. \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial y} \right|_w$  est négligeable et la vitesse moyenne tangentielle du gaz près de la paroi correspond à  $v_w$ . On dit alors qu'il y a adhérence du gaz à la paroi. Si le libre parcours moyen des molécules n'est plus négligeable devant la dimension caractéristique de l'écoulement, l'équation (1.32) qui

## 1. Analyse bibliographique

---

traduit le glissement à la paroi est acceptable tant que le développement de Taylor au premier ordre rend compte de la réalité, ce qui est le cas tant que le nombre de Knudsen reste modéré. Pour des nombres de Knudsen plus élevés, il est possible de tenir compte des termes d'ordres supérieurs du développement de Taylor dans l'expression de la vitesse de glissement.

### 1.4.2 Saut de température à la paroi

L'expression du saut de température à la paroi a été introduite par Smoluchowski en 1898 selon la relation suivante :

$$T_g - T_w = \frac{2-\sigma_T}{\sigma_T} \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{1}{Pr} \lambda_0 \frac{\partial T_g}{\partial y} \quad (1.33)$$

Où :

$\sigma_T$  est le coefficient d'accommodation thermique,

Reprenons le même raisonnement que pour le glissement de vitesse. Lorsqu'une molécule heurte une surface solide un échange d'énergie se produit. On définit comme pour la vitesse, l'énergie totale moyenne incidente  $E_i$  et l'énergie totale moyenne des molécules réfléchie  $E_r$ .

Proche de la paroi l'énergie totale moyenne notée  $E_t$ , est évaluée selon une moyenne arithmétique comme suit :

$$E_t = \frac{1}{2}(E_i + E_r) \quad (1.34)$$

L'énergie totale moyenne  $E_r$  est une moyenne pondérée de :  $E_i$  et  $E_w$  :

$$E_r = (1 - \sigma_T)E_i + \sigma_T E_w \quad (1.35)$$

Donc

$$E_t = \frac{1}{2}(E_i + (1 - \sigma_T)E_i + \sigma_T E_w) \quad (1.36)$$

## 1. Analyse bibliographique

---

On pose comme pour le glissement de vitesse que l'écart entre les énergies  $E_i$  et  $E_w$  est égale à  $\lambda_0$  et donc le développement de série de Taylor d'ordre 1 donne :

$$E_i = E_g + \lambda_0 \left. \frac{\partial E_g}{\partial y} \right|_w \quad (1.37)$$

On obtient donc :

$$E_g - E_w = \lambda_0 \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \left. \frac{\partial E_g}{\partial y} \right|_w \quad (1.38)$$

Où la quantité  $E_g - E_w$  représente le saut d'énergie moyenne totale entre le gaz et la paroi par unité de temps. On peut exprimer ce saut d'énergie en fonction du saut de température entre la paroi et le gaz avec suffisamment de précision. Ainsi **Kennard (1938)** établit que

$$E_g - E_w = m_{st} c_v \frac{1}{2} (\gamma + 1) (T_g + T_w) \quad (1.39)$$

Où  $m_{st}$  représente la masse du gaz traversant l'élément de surface par unité de temps,  $c_v$  la chaleur spécifique à volume constant et  $\gamma$  le rapport des chaleurs spécifiques. De plus,

$$\frac{\partial E_g}{\partial y} = m_{st} c_v \frac{\partial T_g}{\partial y} \quad (1.40)$$

Donc

$$T_g - T_w = \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{2}{\gamma + 1} \lambda_0 \left. \frac{\partial T_g}{\partial y} \right|_w \quad (1.41)$$

Cette équation représente donc le saut de température entre le gaz et la paroi.

### 1.5. Effets d'échelles.

De nombreuses études traitant les écoulements et les processus fondamentaux de transfert de chaleur dans des géométries simples ont trouvé des écarts plus ou moins importants entre les grandeurs sans dimensions fondamentales obtenues par l'analyse à la micro échelle et ceux rapportés dans la littérature à la macro échelle comme :

## 1. Analyse bibliographique

---

Le coefficient de frottement  $f$  :

$$0.5 < \frac{f_{Micro}}{f_{Macro}} < 3 \quad (1.42)$$

Le nombre de Nusselt  $Nu$

$$0.2 < \frac{Nu_{Micro}}{Nu_{Macro}} < 16 \quad (1.43)$$

Le Nombre de Reynolds critique  $Re_c$

$$0.13 < \frac{Re_{c, Micro}}{Re_{c, Macro}} < 0.43 \quad (1.44)$$

Ces déviations peuvent être expliquées par le fait que dans les études menées à la macro échelle plusieurs effets étaient généralement négligés comme :

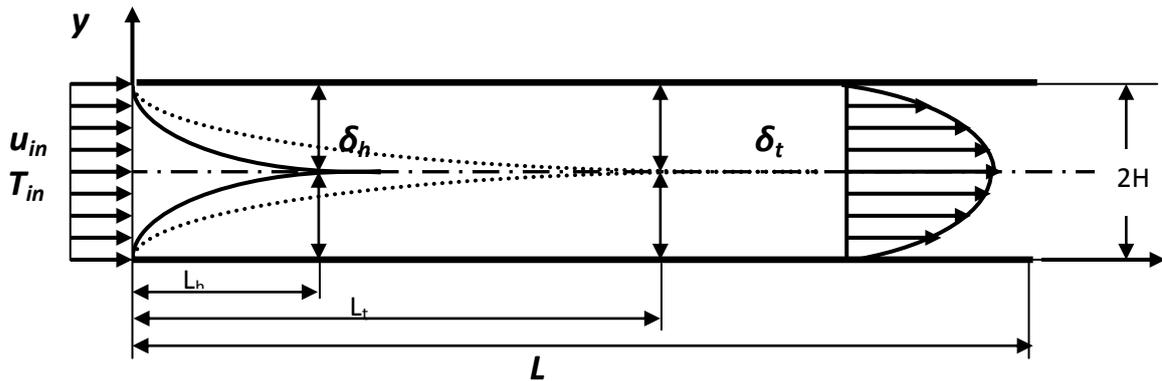
La longueur d'établissement thermique et hydrodynamique, la dissipation visqueuse, la conduction axiale, la raréfaction... qui sont appelés les effets d'échelles. En effet, toutes les divergences qui existe entre les résultats obtenus par l'analyse à la micro-échelle est ceux obtenus par la micro échelle peuvent être expliquées par les effets d'échelles.

### 1.5.1 La longueur d'établissement

Par définition la longueur d'établissement hydrodynamique est la longueur à laquelle la vitesse centrale de l'écoulement serait égale à 0.99 % de la valeur de cette vitesse en écoulement développé

La longueur d'établissement de la couche limite thermique est la longueur de l'entrée du micro-canal ou le rapport du nombre de Nusselt à cette longueur sur le nombre de Nusselt au régime développé est inférieur à 99%.

$$Nu_{x^*} / Nu_{\infty} \leq 99\% \quad (1.45)$$



**Figure (1.8) Longueurs de développement hydrodynamique et thermique dans un micro-canal**

Lorsqu'un fluide entre dans un canal avec une vitesse constante  $u_{in}$ , le profil de vitesse commence à se développer le long de ce canal atteignant finalement le profil parabolique propre aux écoulements laminaires.

Dans l'analyse macroscopique cette longueur est donnée par la relation suivante

$$\frac{L_h}{D_h} \approx 0.06Re \quad (1.46)$$

Où :

$D_h$  est le diamètre hydraulique

$Re$  est le nombre de Reynolds basé sur le diamètre hydraulique.

Pour les écoulements à faible nombre de Reynolds, ce qui est souvent le cas dans les microsystèmes la longueur d'établissement hydrodynamique calculée avec l'équation (1.46) tend vers une valeur nulle ce qui est en désaccord avec l'expérience menée sur des écoulements à faible nombre de Reynolds

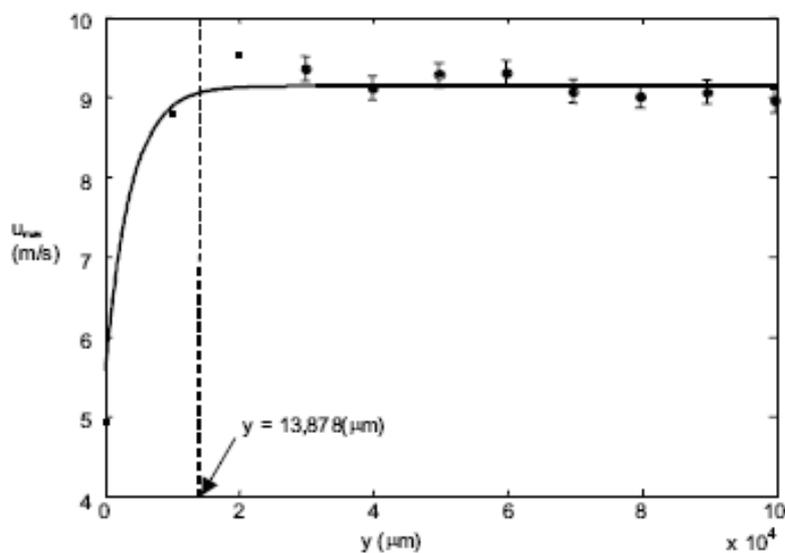
Une meilleure approximation de la longueur d'établissement hydrodynamique pour les faibles nombres de Reynolds est donnée par la relation suivante :

$$\frac{L_h}{D_h} \approx \frac{0.6}{1+0.035Re} + 0.056Re \quad (1.47)$$

## 1. Analyse bibliographique

L'utilisation de l'équation (1.47) pour prévoir la longueur d'établissement hydrodynamique fournit des résultats plus raisonnables aux faibles nombres de Reynolds.

L'expérience menée par (Lee et al 2002) sur la mesure des vitesses par la vélocimétrie dans un micro-canal de section rectangulaire, de diamètre hydraulique de  $327 \mu\text{m}$ , a montré que pour un nombre de Reynolds égal à 1980 une différence entre la longueur d'établissement mesurée et celle prévue par l'équation (1.47). En effet, la figure (1.9) montre clairement que le fluide se développe a une distance approximativement égale à  $y = 1.4 \text{ cm}$  c'est pratiquement la moitié de ce qui est prévu par l'équation (1.47).



**Figure (1.9) Développement d'un écoulement entrant dans un canal rectangulaire (Lee et al 2002).**

Cette différence est surtout expliquée par le fait que, dans l'analyse macro échelle, le fluide à l'entrée du canal est partout uniforme, ce qui n'est pas le cas pour les sections de test en micro-canal où souvent ce dernier est relié a un réservoir de même dimension donc le fluide entre dans le micro-canal a moitié développé se qui réduit considérablement la longueur d'établissement hydrodynamique par rapport a celle rapporter dans l'analyse macro échelle.

La raréfaction augmente la longueur d'établissement hydrodynamique  $L_h$ . dans le régime d'écoulement glissant. Une corrélation de la longueur  $L_h$  a été établie en fonction des

## 1. Analyse bibliographique

---

nombre de Reynolds et de Knudsen tirée de l'étude numérique menée par (Barber et Emerson 2002) sur l'écoulement d'un gaz dans un micro-canal à plaques parallèles avec un nombre de Reynolds compris entre 10 et 400 et un nombre de Knudsen variant de 0 à 0.1. Comme suit :

$$\frac{L_h}{D_h} = \frac{0.332}{0.0271Re+1} + 0.011Re \frac{1+14.78Kn}{1+9.78Kn} \quad (1.48)$$

Où les nombres de Reynolds et de Knudsen sont basés sur le diamètre hydraulique. On voit bien que de l'équation (1.48), pour un nombre de Reynolds  $Re = 400$  et  $Kn = 0.1$ , le glissement de vitesse à la paroi augmente la longueur d'établissement hydrodynamique de 25%.

Les effets de la longueur d'établissement thermique sont toujours expliqués en calculant le nombre de Nusselt local. D'une part le Nusselt moyen, reste constant pour des écoulements développés, mais augmente avec le nombre de Reynolds, lorsque les effets d'entrée ont une influence significative. Le nombre de Graetz est défini par l'équation. (1.49) est employé comme critère pour négliger les effets d'entrée.

$$Gz = \frac{RePrD_h}{L} \quad (1.49)$$

Morini (2006) a établi que les effets d'entrée sur le nombre de Nusselt moyen peuvent être négligés si l'inégalité suivante est satisfaite

$$Gz < 10 \quad (1.50)$$

### 1.5.2 La dissipation visqueuse

Les effets de la dissipation visqueuse sur les écoulements avec transfert de chaleur à l'intérieur d'une conduite sont souvent négligés. Cependant, lorsque le diamètre hydraulique est très petit, la production de chaleur interne en raison des forces visqueuses peut entraîner une hausse de température même si les parois sont adiabatiques. La variation de température en raison de la dissipation visqueuse change les valeurs des propriétés thermo physique du fluide entre l'admission et la sortie et peuvent remarquablement

## 1. Analyse bibliographique

---

influencer le transfert chaleur. Le nombre de Brinkmann, défini comme étant le rapport entre le chauffage visqueux sur le taux de transfert thermique moyen entre le liquide et les parois du canal, est employé pour évaluer les effets de la dissipation visqueuse.

Le nombre de Brinkmann est défini par les expressions suivantes :

Pour une température imposée à la paroi :

$$Br_T = \frac{\mu u^2}{k\Delta T} \quad (1.51)$$

Pour un flux imposé à la paroi :

$$Br_{H2} = \frac{\mu u^2}{q_0 D_h} \quad (1.52)$$

Les effets du nombre de Brinkmann sur le nombre de Nusselt dépendent des conditions aux limites imposées aux frontières du domaine d'étude. L'effet de la dissipation visqueuse sur le champ de la température a été étudié par Koo et Kleinstreuer (2004) il est a été constaté que l'effet de la dissipation visqueuse peut être très important pour les fluides à faible chaleurs spécifique et à viscosité élevées, même si l'écoulement est à faible vitesses. Cet effet doit être pris en compte dans les analyses expérimentales et numérique, particulièrement dans les micro-canaux rectangulaires avec de faible allongement (allongement zéro indique un canal entre deux plaques parallèles).

La figure (1.10), de Jeong et Jeong (2006), montre les effets de dissipation visqueuse sur le nombre de Nusselt local, Pour  $Kn = 0$  (sans effet de raréfaction) et  $Pe = 10^6$  (Conduction axiale négligeable), et pour une température constante imposée à la paroi, le nombre de Nusselt en régime développé est indépendant du nombre de Brinkman, et atteint des valeurs beaucoup plus élevées que pour  $Br = 0$  (sans effet de la dissipation visqueuse). La figure (1.10A) montre que  $Nu$  au régime établi augmente de 7.54 pour  $Br = 0$  à 17.5 pour  $Br > 0$  pour un micro-canal. Lorsque un flux constant est imposé a la paroi, le nombre de Nussel varie avec  $Br$  et peut être inférieur pour  $Br > 0$  (canal chauffé) et élevé pour  $Br < 0$  (canal refroidi). De la figure (1.10B) on peut voir que  $Nu$  se réduit de 8.24 pour  $Br = 0$  et tend vers 7 pour  $Br = 0.1$ .

# 1. Analyse bibliographique

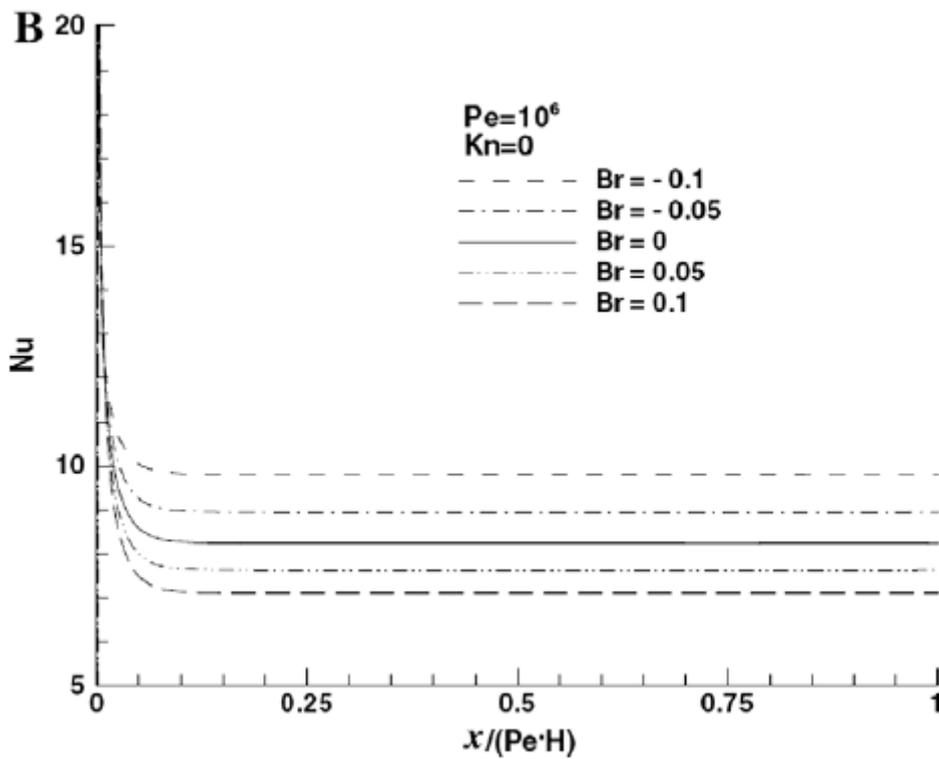
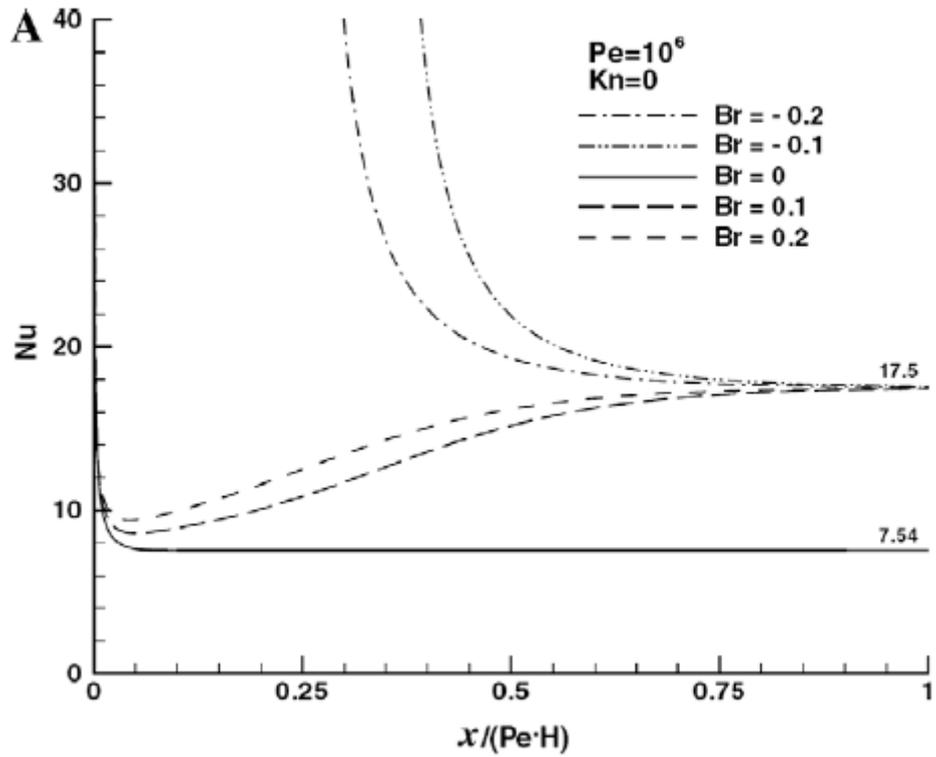


Figure (1.10) Effet du Nombre de Brinkman sur le nombre de Nusselt local  
(H.-E. Jeong, J.-T. Jeong 2006)

(A) Température constante imposée à la paroi ;  
(B) : Flux constant imposé à la paroi.

## 1. Analyse bibliographique

---

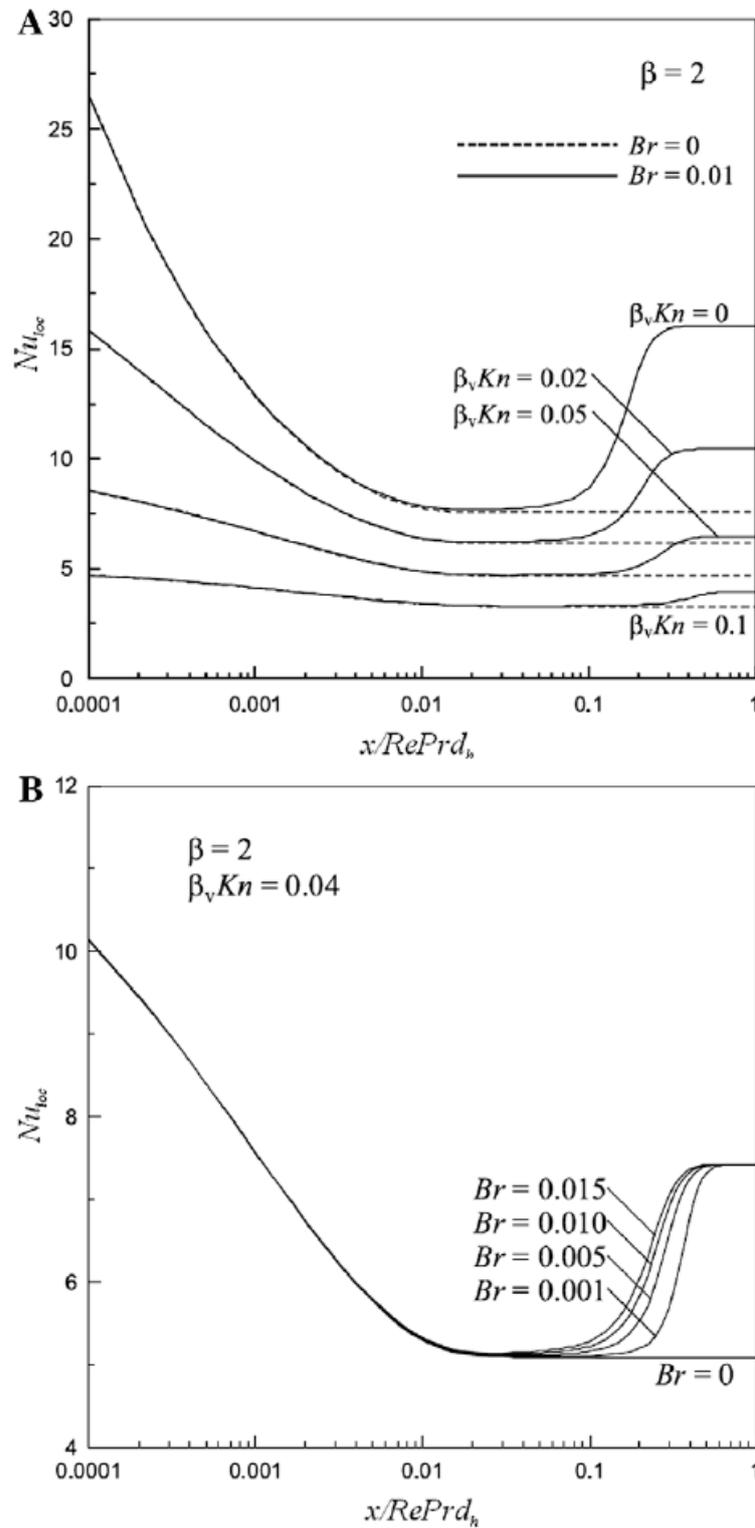
La figure (1.11) montre les effets de raréfaction et de la dissipation visqueuse sur le transfert thermique présenté par Chen (2006). Sous l'effet de la dissipation visqueuse le nombre de Nusselt local subit un saut à une certaine position axiale puis se stabilise pour tendre vers sa valeur finale. L'augmentation du nombre de Nusselt, est très importante pour un écoulement non-raréfiés ( $Kn = 0$ ), et diminue significativement lorsque la raréfaction de l'écoulement augmente. La figure (1.11B) montre les effets du nombre de Brinkmann sur le transfert thermique pour un écoulement raréfié. Le nombre de Nusselt augmente aussi pour des écoulements raréfiés. Tunc et Bayazitoglu (2001) ont constaté que, lorsqu'une température constante est imposée à la paroi et pour le cas où le fluide est refroidi, le nombre de Nusselt en régime développé augmente indépendamment des valeurs de  $Br$  et reste supérieur au cas où  $Br = 0$ . Lorsque la chaleur est uniformément fournie au fluide par les parois, une diminution du nombre de Nusselt en régime établi a été constatée, ce qui est en bon accord avec les résultats présentés par Jeong et Jeong (2006).

Morini (2006) a montré que l'échauffement dû à la dissipation visqueuse est inversement proportionnel au diamètre hydraulique élevé à la puissance trois ; par conséquent, il pourrait être très significatif dans les micro-canaux. Il a proposé la condition suivante pour tenir compte des effets de la dissipation visqueuse :

$$Br < \frac{\xi_{lim} d_h^2}{2AfRe} \quad (1.53)$$

$\xi_{lim}$  Rapport maximal permis entre l'augmentation de la température due à la dissipation visqueuse sur l'augmentation de température due au flux de chaleur à la paroi.

# 1. Analyse bibliographique



**Figure (1.11) Effet de la dissipation visqueuse Chen (2006). (A) effet de la raréfaction et de la dissipation visqueuse sur le nombre de Nusselt local. (B) Effet du nombre de Brinkman sur le nombre de Nusselt local pour un écoulement raréfié.**

## 1.5.3 Conduction axiale

### 1.5.3.1 Conduction axiale dans le fluide

L'analyse suivante rapportée par Yarin et al (2009) permet de définir un critère au quel l'effet de la conduction axiale dans le fluide sur le transfert de chaleur dans des micro-canaux peut être négligée comme suit :

En effet, considérant l'équation d'énergie dans un micro-tube sans dissipation visqueuse pour un fluide incompressible avec des propriétés physiques constantes.

$$\rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} = k \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \quad (1.54)$$

A la paroi on impose un flux constant  $q_0$ , en introduisant les nouvelles variables adimensionnelles, suivantes :

$$\tilde{u} = \frac{u}{u_{axi}} \quad (1.54a)$$

$$R = \frac{r}{r_0} \quad (1.54b)$$

$$X^+ = \frac{2}{Pe} \frac{x}{d} \quad (1.54c)$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{\left( \frac{q_0 d}{k} \right)} \quad (1.54d)$$

$$Pe = \frac{U d}{\alpha} \quad (1.54e)$$

$$\tilde{u} = (1 - R^2) \quad (1.54f)$$

$$d = 2r_0 \quad (1.54g)$$

$$U = \frac{U_{axi}}{2} \quad (1.54h)$$

# 1. Analyse bibliographique

---

Où

$Pe$  : est le nombre de Péclet

$U$  et  $U_{axi}$  : sont les vitesses moyenne et axiale respectivement.

$T_0$  : est la température a l'entrée de la section chauffée.

On obtient l'équation de l'énergie adimensionnée suivante :

$$\tilde{u} \frac{\partial \theta}{\partial X^+} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) + \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^{+2}} \quad (1.55)$$

En intégrant l'équation (1.55) sur la section du micro-canal, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial X^+} \left( \int_0^1 \tilde{u} \theta R dR \right) = \left( R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) \Big|_0^1 + \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2}{\partial X^{+2}} \left( \int_0^1 \theta R dR \right) \quad (1.56)$$

En assumant que : la sortie du micro-canal est connectée à une section adiabatique, les conditions aux limites sont :

$$X^+ = 0, \theta = 0 \quad (1.57)$$

$$X^+ > 0 \begin{cases} R = 0, \frac{\partial \theta}{\partial R} = 0 \\ R = 1, \frac{\partial \theta}{\partial R} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad X^+ = X_*^+, \frac{\partial \theta}{\partial X^+} = 0 \quad (1.58)$$

Où  $X_*^+$  correspond à la sortie du micro-canal

On obtient donc en tenant compte des conditions aux limites (1.58) dans l'équation (1.56)

$$\frac{d}{dX^+} \left( \int_0^1 \tilde{u} \theta R dR \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{\theta}}{dX^{+2}} \quad (1.59)$$

## 1. Analyse bibliographique

---

Ou

$$\bar{\theta} = \int_0^1 \theta R dR \quad (1.60)$$

$\bar{\theta}$  est la température moyenne, on suppose que  $\theta$  varie faiblement selon  $R$  est

$$\theta \approx \bar{\theta} \quad (1.61)$$

$$\int_0^1 \tilde{u} \theta R dR \approx \frac{\bar{\theta}}{4} \quad (1.62)$$

Donc l'équation (1.59) devient

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial X^{*2}} - \frac{1}{4} Pe^2 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial X^*} + \frac{1}{2} Pe^2 = 0 \quad (1.63)$$

La solution de cette dernière est donnée par :

$$\bar{\theta} = C_1 + C_2 \exp\left(\frac{Pe^2}{4} X^*\right) + 2X^* \quad (1.64)$$

Où  $C_1$  et  $C_2$  sont les constantes d'intégration.

A partir des conditions aux limites (1.58), on tire

$$C_1 = C_2, C_2 = -\frac{2}{\left(\frac{Pe^2}{4}\right)} \exp\left(-\frac{Pe^2}{4} X^*\right) \quad (1.65)$$

L'effet de la conduction axiale sur le transfert de chaleur dans le fluide dans le micro-canal peut être caractérisé par un paramètre sans dimensions noté  $M$  défini comme suit :

# 1. Analyse bibliographique

---

$$M = \frac{|q_{cond}|}{|q_{conv}|} \quad (1.66)$$

On définit le flux convectif par la relation suivante :

$$q_{cond} = k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.67)$$

$$q_{conv} = \rho U C_p (T - T_0) \quad (1.68)$$

Remplaçant l'expression de  $\bar{\theta}$  et  $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial R}$  dans l'expression de M équation (1.66), on obtient

$$M = \frac{1}{4} \frac{1 - \exp(\chi^+ - \chi_*^+)}{\chi^+ - \exp(\chi^+ - \chi_*^+) + \exp(-\chi_*^+)} \quad (1.69)$$

Ou

$$\chi^+ = \frac{Pe^2 X^+}{4} \quad (1.70)$$

$$\chi_*^+ = \frac{Pe^2 X_*^+}{4} \quad (1.71)$$

Les cas limites sont :

$$1 \quad \chi^+ \ll 1, \chi_*^+ \gg 1 \quad (1.72)$$

$$2 \quad \chi^+ - \chi_*^+ \ll 1 \begin{cases} a. \chi_*^+ \gg 1 \\ b. \chi_*^+ \ll 1 \end{cases} \quad (1.73)$$

Ce qui correspond aux cas de transfert de chaleur à l'entrée du micro-canal et au transfert de chaleur au alentour de la sortie adiabatique.

Dans le premier cas on obtient une évaluation du paramètre M

## 1. Analyse bibliographique

$$M = \frac{1}{4} \frac{1}{\chi^+} \gg 1 \quad (1.74)$$

Ce qui prouve qu'à l'entrée du micro-canal, les pertes de chaleur due à la conduction axiale dans le fluide sont dominantes.

Dans le second cas le paramètre M serait égal à

Cas d'un long micro-canal :

$$M = \frac{\chi_*^+ - \chi^+}{\chi_*^+ - 1} \ll 1 \quad (1.75)$$

Cas d'un court micro-canal :

$$M = \frac{\chi_*^+ - \chi^+}{\chi_*^+} \ll 1 \quad (1.76)$$

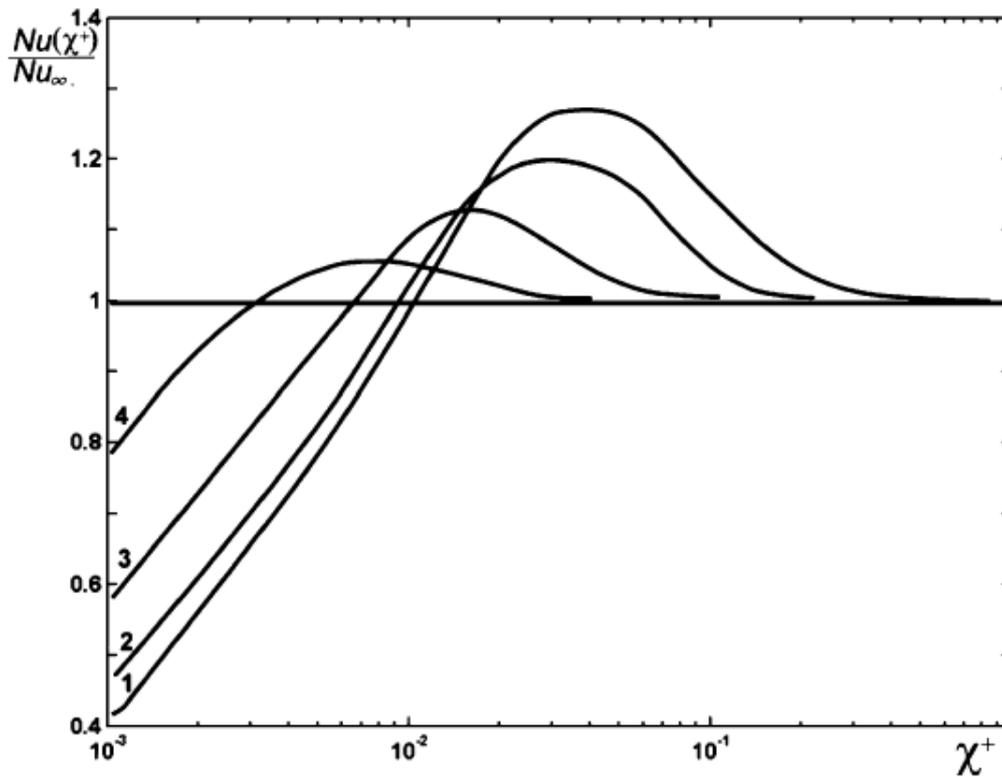


Figure (1.12) Calcul numérique de la dépendance de Nu(X+) : 1 Pe = 1, 2 Pe = 2.5, 3 Pe = 10 ; 4 Pe = 45 Yarin et al (2009)

## 1. Analyse bibliographique

Dans cette région  $M$  décroît lorsque  $\chi^+$  augmente (le nombre de Péclet augmente aussi) puisque il est relié à  $\chi^+$  par la relation (1.70), aussi le nombre de Nusselt décroît est se rapproche de la valeur du Nusselt en régime établi.

La conduction axiale dans le fluide augmente la différence de température entre le fluide et la paroi et fait baisser la valeur du nombre de Nusselt à l'entrée par rapport au Nusselt infini.

Ces effets sont illustrés sur la figure (1.12), où on peut estimer une valeur critique de  $M$  par rapport à laquelle la conduction axiale doit être prise en compte. En effet la conduction axiale devient dominante si  $M > M_{cr}$ , elle est négligeable si  $M < M_{cr}$ . La valeur critique  $M_{cr}$  est prise égale à 0.01.

### 1.5.3.2 Conduction dans le solide

Maranzana et al (2004) ont analysé ce type de problème à partir d'une étude numérique sur le transfert de chaleur d'un écoulement entre plaques parallèles. La géométrie utilisée dans leur simulation est montrée dans la figure (1.13)

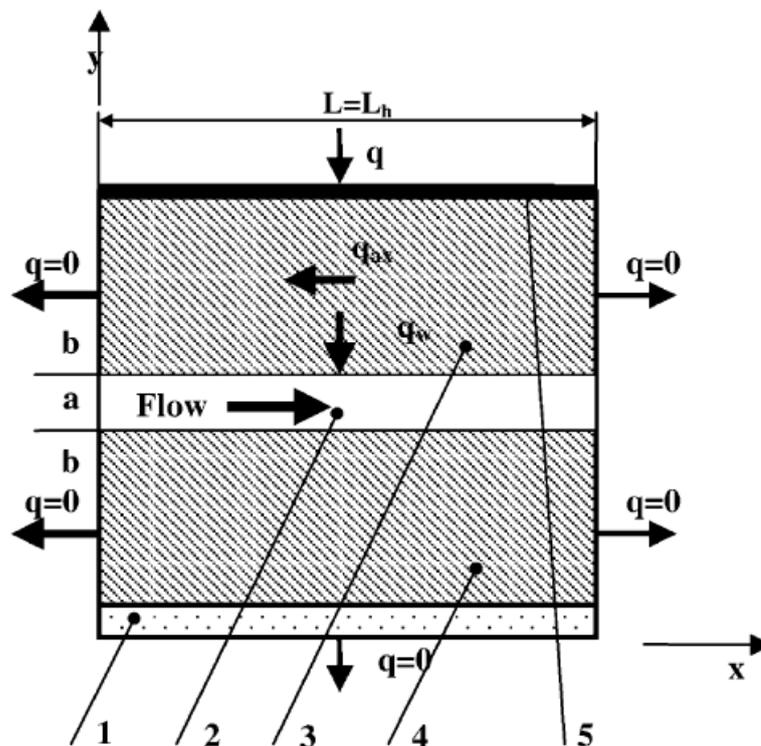
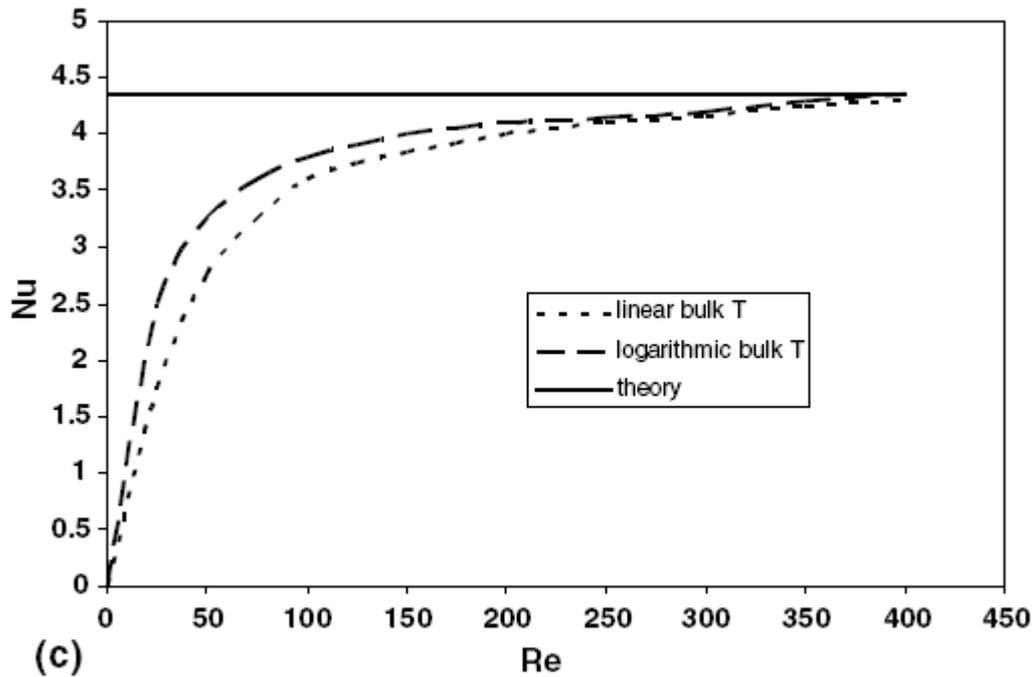


Figure (1.13) Ecoulement entre deux plaques parallèles (Maranzana 2004)  
1 : couvercle ; 2 : micro-canal ; 3 et 4 : bloc en silicone ; 5 : plaque chauffée.

## 1. Analyse bibliographique

Un flux thermique uniforme est imposé sur la paroi supérieure du bloc 3 ; la surface inférieure du bloc 4 et les surfaces latérales des deux blocs sont adiabatiques. Les deux blocs, en silicium ont une longueur égale à 10 mm et une épaisseur de 500 µm est forment, où s'écoule de l'eau dans. La figure (1.14) montre la variation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Reynolds.



**Figure (1.14) Effet de la conduction axiale sur le nombre de Nusselt  
Maranzana et al (2004)**

L'effet de conduction axiale dans le solide est inversement proportionnel au nombre de Reynolds. Les auteurs ont introduit aussi un nombre qui quantifie l'effet de la conduction axial dans le solide noté  $M$  qui est défini comme le rapport du flux thermique conductif sur le flux convectif.

Pour un tube circulaire  $M$  est défini comme suit :

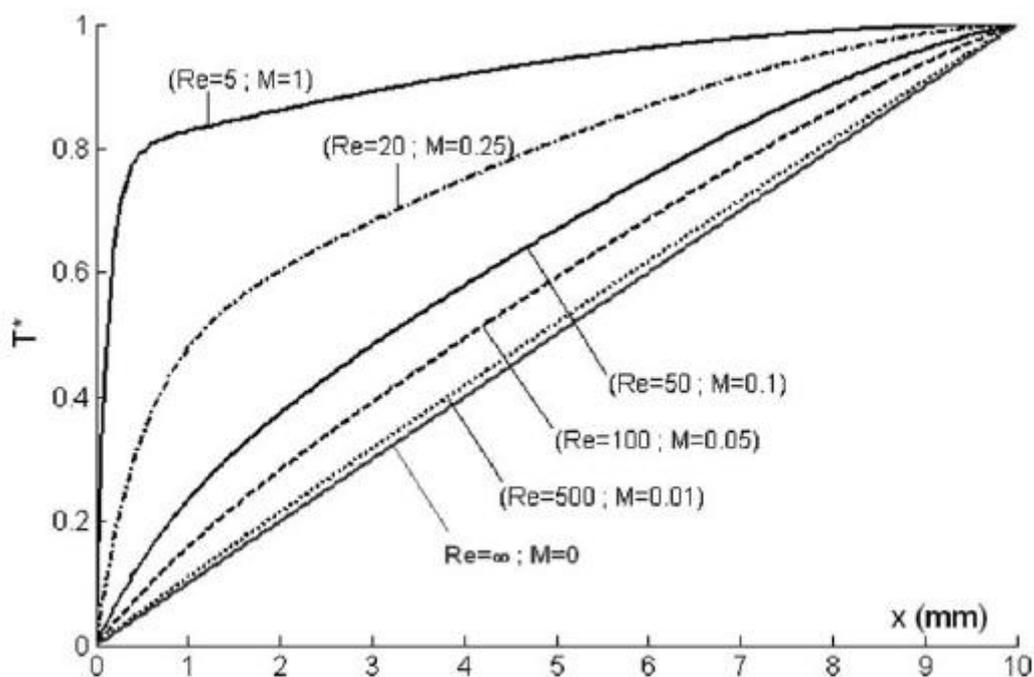
$$M = \frac{q_{cond//}}{q_{conv}} = \left( \frac{k_w}{k_f} \right) \left( \frac{d_{ext}^2 - d_0^2}{d_0 L} \right) \frac{1}{RePr} \quad (1.77)$$

## 1. Analyse bibliographique

Où  $k_w$  et le  $k_f$  sont les conductivités thermiques de la paroi et du fluide, respectivement, le  $d_{ext}$  et  $d_0$  sont les diamètres extérieure et intérieure du micro-tube, et  $L$  est sa longueur.

Lorsque les effets du transfert de chaleur conjugué sont prédominants, la distribution de la température du mélange le long du micro-canal n'est plus linéaire (figure(1.15)).

On remarque que pour cette géométrie, les effets de la conduction axiale sont négligeables pour  $M < 0.01$  ( $Re = 500$ ).



**Figure (1.15) Température du mélange adimensionnée le long de l'axe pour un flux thermique uniforme et plusieurs nombres de Reynolds. Maranzana et al (2004)**

L'étude numérique et expérimentale de Tiselj et al (2004) sur l'effet de la conduction axiale a été menée sur une plaque de silicium où sont gravés 17 micro-canaux parallèles de longueur  $L = 15$  mm et ayant une section triangulaire de base  $a = 530$   $\mu\text{m}$  figure (1.16). Contrairement à l'étude menée par Maranzana et al (2004) les parois à l'entrée et à la sortie de la plaque ne sont plus adiabatiques. Les auteurs ont conclu que la conduction axiale

# 1. Analyse bibliographique

dans le solide affecte de manière significative la distribution longitudinale de la température du mélange du fluide et de la paroi à l'interface fluide/solide.

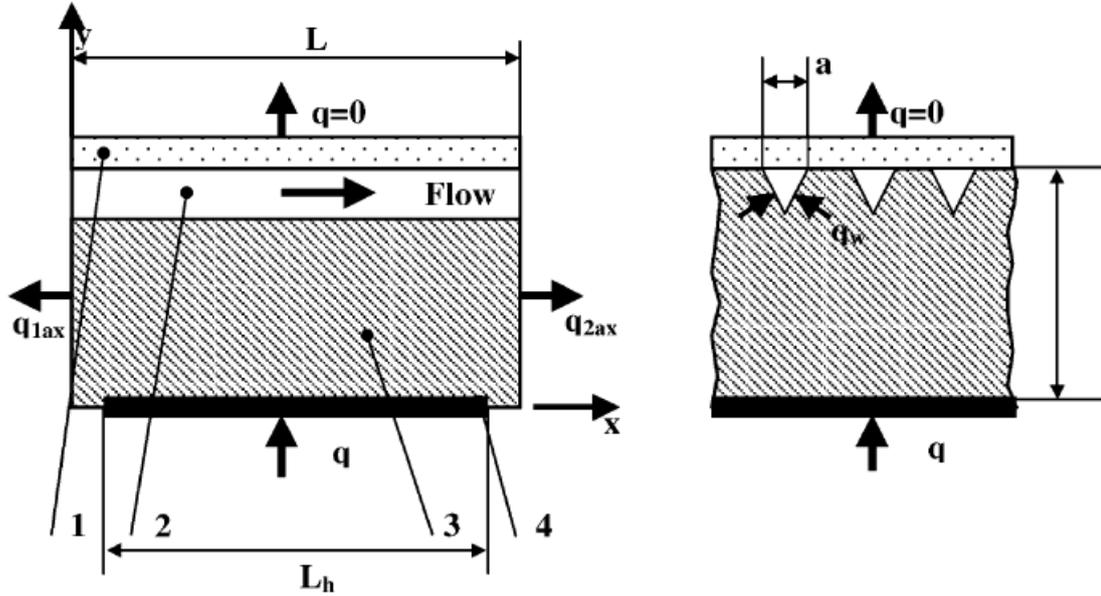


Figure (1.16) Géométrie utilisée dans l'étude de Tiselj et al (2004)

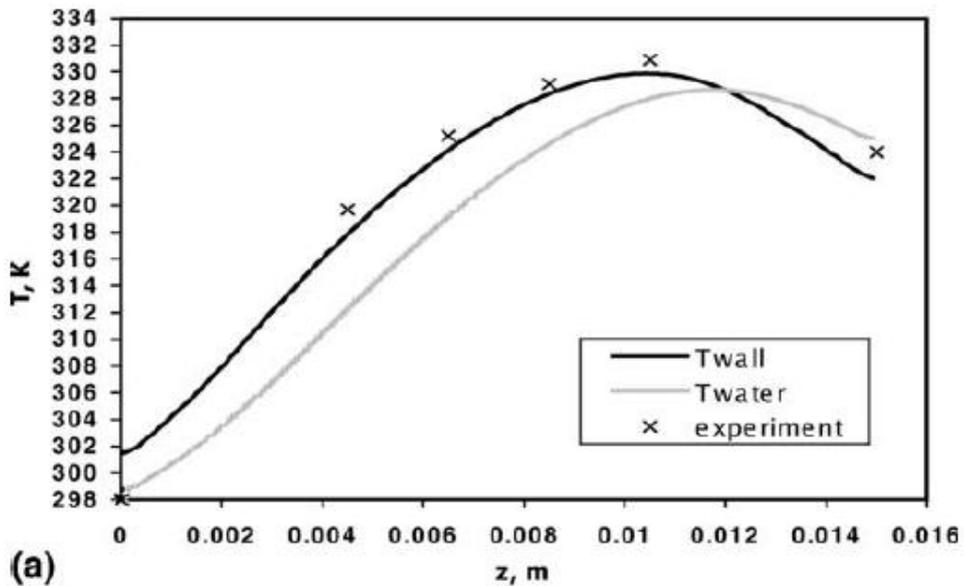


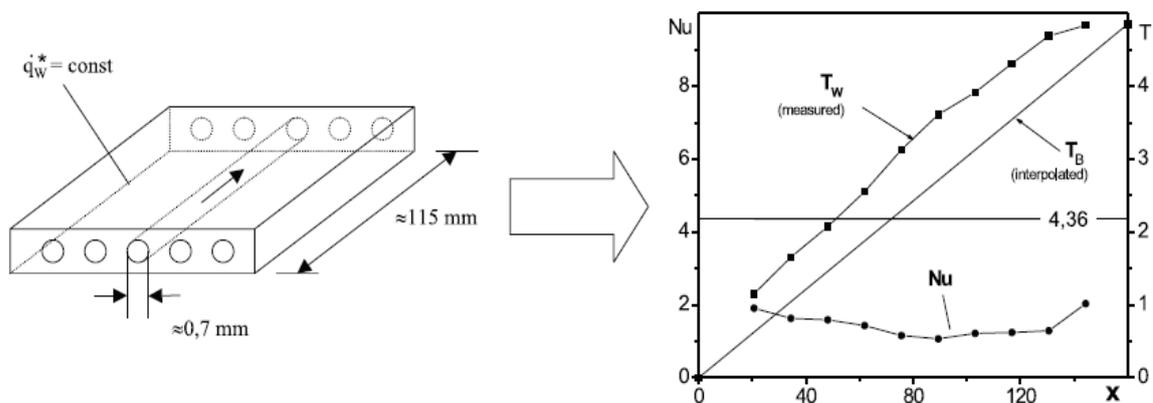
Figure (1.17) Variation des températures du mélange de l'eau et de la paroi selon la direction longitudinale Tiselj et al (2004)

## 1. Analyse bibliographique

Les deux températures n'ont pas varié linéairement le long de la direction longitudinale. En fait, une variation linéaire ne peut pas être considérée comme une bonne approximation pour les deux températures.

### 1.5.3.3 Conduction axiale combinée fluide/solide

L'étude expérimentale menée par Tso, C. P.; et Mahulikar, S. P (2000) concernait l'écoulement laminaire dans une conduite soumise à un flux constant. Dans l'analyse macro échelle, le nombre de Nusselt en régime établi, obtenu pour ce type de géométrie et régime d'écoulement, est égal à 4.63. Les valeurs du nombre de Nusselt obtenus par les auteurs en régime développé restent très éloignées de cette-ci. Comme le calcul du Nusselt dépend de la température de mélange du fluide, dans leur expérience, les auteurs n'ont pas pu mesurer cette dernière, ils ont considéré une variation linéaire de la température du mélange de l'entrée jusqu'à la sortie du canal, figure (1.18)

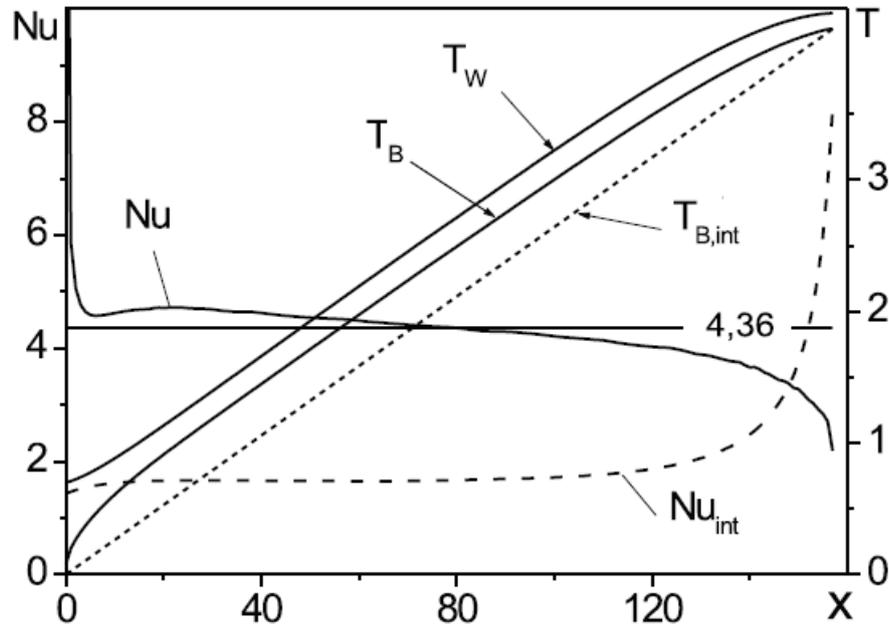


**Figure (1.18) Résultats obtenus par Tso, C. P.; Mahulikar, S. P(2000) pour le nombre de Nusselt. Cas d'un écoulement laminaire dans une micro-conduite soumise à un flux constant d'après Herwig (2002)**

Herwig (2002) à mené une étude numérique du même cas en tenant compte de la conduction axiale combinée fluide/solide. En comparant les résultats avec ceux obtenus par Tso, C. P.; Mahulikar, S. P(2000), il a trouvé que la température du mélange ne varie pas linéairement de l'entrée à la sortie du micro-canal, résultat du aux forts effets conjugués et

## 1. Analyse bibliographique

à la conduction axiale considérée. Le nombre de Nusselt évalué avec les nouvelles valeurs de la température moyenne devient proche de la valeur rapportée dans la littérature lorsqu'on impose un flux à savoir  $Nu = 4.36$



**Figure (1.19) Comparaison des résultats obtenus par Herwig (2002) et Tso, C. P.; Mahulikar, S. P.(2000)**

### 1.5.4 Effet de la raréfaction

Pour les gaz raréfiés ( $Kn > 0.001$ ), l'écoulement glissant et le saut de température à la paroi doivent être pris en compte ; l'écoulement glissant tend à augmenter le nombre de Nusselt en régime établi, alors que le saut de température tend à le diminuer. Par conséquent, le nombre de Nusselt dans des écoulements raréfiés peut augmenter ou diminuer, selon l'importance des phénomènes précédemment cités. Lorsque le saut de température est négligeable le nombre de Nusselt augmente, c'est généralement le cas pour les faibles valeurs du rapport d'interaction gaz-paroi notée  $\beta$  qui est défini par la relation suivante :

$$\beta = \frac{\beta_T}{\beta_v} \quad (1.78)$$

# 1. Analyse bibliographique

---

Où

$$\beta_v = \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v} \quad (1.79)$$

$$\beta_T = \frac{2-\sigma_T}{\sigma_T} \frac{2\gamma}{(\gamma+1)} \frac{1}{Pr} \quad (1.80)$$

Le tableau suivant donne quelque valeur des coefficients d'accommodation  $\sigma_T$  et  $\sigma_v$  pour différents gaz et surfaces

**Tableau (1.3) Coefficients d'accommodation. Karniadakis, G.E., Beskok, A., (2002)**

Gaz	Surface	$\sigma_T$	$\sigma_v$
Air	Al	0.87-0.97	0.87-0.97
He	Al	0.073	nc
Air	Acier	0.87-0.96	0.87-0.93
He	Acier	0.31-0.55	nc
Air	Bronze	nc	0.88-0.95

Cependant, pour les valeurs typiques de  $\beta$  dans les applications en engineering ( $\beta = \frac{\beta_T}{\beta_v} = 1.667$ ), l'effet de raréfaction tend à réduire de manière significative le nombre de Nusselt. Par exemple, pour l'écoulement glissant dans les micro-canaux circulaires avec la température constante imposée à la paroi, le nombre de Nusselt varie de 3.68 pour  $Kn = 0$  à 2.54 pour  $Kn = 0.1$ .

## 1.6 Conclusions

Une classification de la modélisation des écoulements à l'échelle microscopique en fonction du nombre de Knudsen est présentée dans ce chapitre, lorsque le fluide de fonctionnement est à l'état liquide le régime est continu, l'écoulement est modélisé par les équations de Navier–Stokes associées aux conditions classiques de continuité de la

## 1. Analyse bibliographique

---

température et de la vitesse à la paroi. Pour les gaz la taille de leurs particules est comparable à celles des microsystèmes, leurs modélisations entre dans le domaine des gaz raréfiés, le régime est glissant, les équations de Navier–Stokes sont applicables, mais il est nécessaire de prendre en compte un saut de température et de vitesse à la paroi, résultant du déséquilibre thermodynamique qui apparaît en priorité près des frontières solides. De plus, de l'analyse bibliographique les grandeurs sans dimensions fondamentales obtenues par l'analyse à la micro échelles et ceux rapportés dans la littérature à la macro échelles présentaient des déviations plus au moins importantes. Les auteurs suggèrent dans plusieurs études de tenir compte des effets qui étaient généralement négligés à la macro échelle comme : la dissipation visqueuse, la conduction axiale,... pour expliquer les écarts obtenus entre les deux analyses. Dans notre travail nous allons combiner tous les effets présentés pour des écoulements non glissant et pour des écoulements légèrement raréfiés, en plus de cela nous allons prendre en considération l'épaisseur de la paroi puisque lorsque les dimensions du système sont réduites l'épaisseur de la paroi devient dans certains cas plus importante que la dimension de la section de passage du fluide.

---

## ***Chapitre 2***

# ***Position du problème et résolution numérique.***

---

### 2. Position du problème et résolution numérique.

#### 2.1 Introduction

L'objectif de ce travail est d'étudier le transfert de chaleur conjugué convection-conduction dans des micro-canaux à plaques parallèles. Les effets de la dissipation visqueuse, la conduction axiale combinée fluide/paroi, la raréfaction et le développement simultané des couches limites thermiques et dynamiques sont pris en compte. Le but est d'appréhender l'évolution du coefficient de transfert de chaleur à l'échelle microscopique ou ces effets ne peuvent plus être négligés, comme c'est souvent le cas à l'échelle macroscopique

Pour ce faire, nous exposons d'abord la géométrie du problème ainsi que les équations qui gouvernent les écoulements laminaires avec transfert de chaleur. Nous développerons ensuite la méthode numérique des volumes finis utilisée pour discrétiser les équations de transport et nous expliquerons la technique de résolution entre autre l'algorithme SIMPLER.

Nous validons enfin le code de calcul développé, avec les résultats disponibles dans la littérature.

2.2 Position du problème

Considérons un micro-canal plan de longueur  $L$ , et de hauteur  $H$ . L'épaisseur de la paroi est prise égale à  $\Delta$ . A l'intérieur du micro canal s'écoule en régime laminaire un fluide newtonien. A l'extérieur des parois, on impose soit une température constante, soit un flux constant.

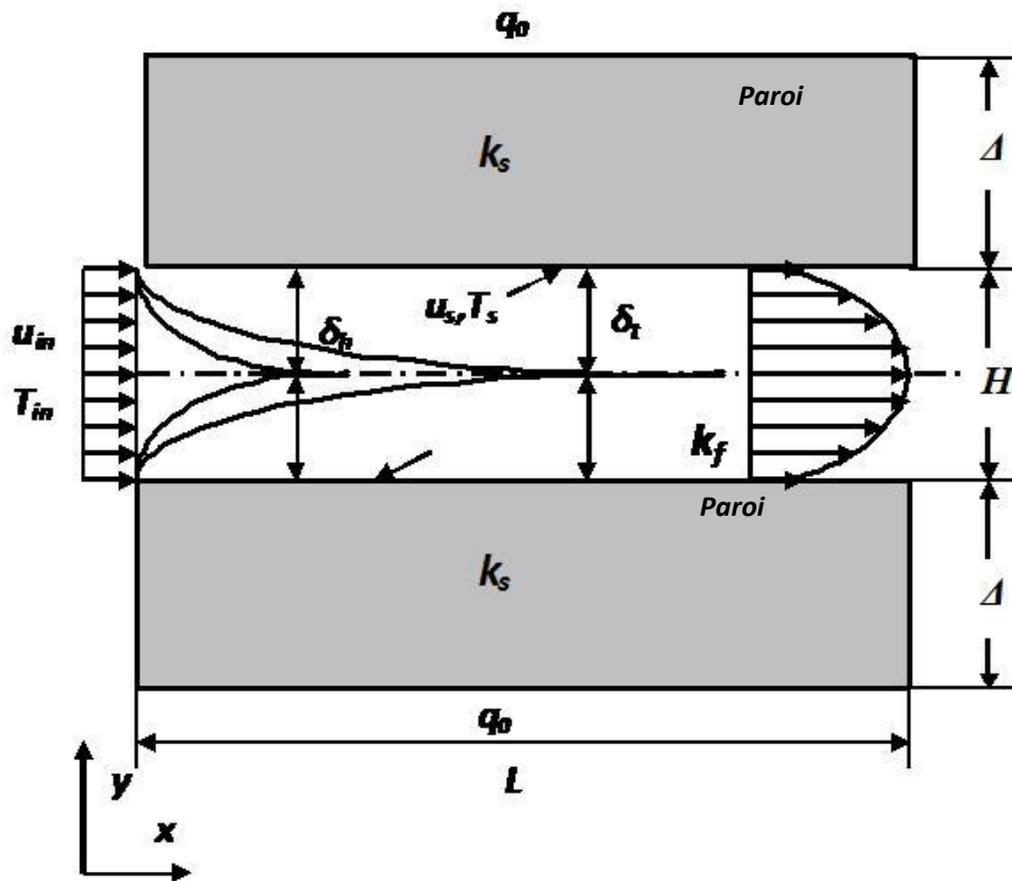


Figure 2.1 Géométrie du problème.

## 2. Position du problème et résolution numérique

### 2.3 Mise en équations

La modélisation des écoulements fluides liquides ou gazeux est régie par les équations de conservation tirées des hypothèses des milieux continus déjà discutées dans le chapitre précédent.

Dans notre étude, on se placera dans le cadre de cette modélisation classique en supposant d'abord un gaz non raréfié ( $Kn < 0.001$ ) puis un gaz légèrement raréfié ( $0.001 < Kn < 0.1$ ), voir (Tableau 2.1).

Tableau 2.1 Classification des écoulements en fonction du nombre de Knudsen

<b>Écoulement calassique</b>	<b>Écoulement glissant</b>	<b>Écoulement de transition</b>	<b>Écoulement moléculaire</b>
<i>Non raréfié</i>	<i>Légerment raréfié</i>	<i>Modérément raréfié</i>	<i>Hautement raréfié</i>
<b><math>Kn &lt; 0,001</math></b>	<b><math>0,001 &lt; Kn &lt; 0,1</math></b>	<b><math>0,1 &lt; Kn &lt; 10</math></b>	<b><math>Kn &gt; 10</math></b>
<b>Modélisation</b>			
N-S	N-S+ Saut de Vitesse et température a la paroi	Approche moléculaire	Approche moléculaire

Les équations générales de conservation de la mécanique et de la thermodynamique s'écrivent :

#### 2.3.1. Equation de continuité.

Le principe de conservation de masse peut être formulé comme suit : L'accumulation de masse dans un volume donné par unité de temps est égale à la différence entre les masses qui entrent et celles qui sortent du volume. Il est exprimé par l'équation de continuité comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0 \quad (2.1)$$

### 2.3.2. Equation des quantités de mouvement.

Les équations de Navier-Stokes s'expriment par la deuxième loi fondamentale de la dynamique.

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla \vec{p} + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.2)$$

### 2.3.3. Equation de l'énergie.

-Dans le fluide

L'équation de l'énergie traduit par le premier principe de la thermodynamique. Elle s'écrit comme suit :

$$\rho C_P \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q + \mu \Phi \quad (2.3)$$

En coordonnées cartésiennes, l'expression de la dissipation visqueuse s'écrit :

$$\Phi = 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] + \eta \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right]^2 \quad (2.3a)$$

-Dans le solide

$$\rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q + \mu \Phi \quad (2.3b)$$

## 2.4. Equations simplifiées.

### 2.4.1. Hypothèses.

- Ecoulement plan.
- Fluide incompressible ( $\rho = \text{constante}$ )

## 2. Position du problème et résolution numérique

---

- Forces de volumes nulles.
- Fluide à propriétés physiques constantes
- Ecoulement sans source de chaleur interne.

En tenant compte des hypothèses citées ci-dessus, les équations simplifiées s'écrivent comme suit :

### 2.4.2 Equation de continuité.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

### 2.4.3 Equations des quantités de Mouvement.

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.5)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.6)$$

### 2.4.4 Equation d'énergie.

**-Dans le fluide**

$$\rho C_P \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_f \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_f \frac{\partial T}{\partial y} \right) + 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.7)$$

**-Dans le solide**

$$\rho C_P \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_s \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_s \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (2.8)$$

## 2.5. Conditions aux limites.

La résolution de ces équations aux dérivées partielles nécessite des conditions aux limites (hydrodynamiques et thermiques) aux quatre frontières du domaine d'étude. Ces conditions aux limites sont définies en fonctions du nombre de Knudsen.

### 2.5.1 Ecoulement non raréfié $Kn < 0.001$

#### 2.5.1.1 Conditions aux limites hydrodynamiques

A l'entrée du micro-canal  $x = 0$

$$u = u_{in} \quad (2.9)$$

$$v = 0 \quad (2.9a)$$

A la sortie du micro-canal  $x = L$ .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.9b)$$

A la paroi supérieure  $y = h + \Delta$

$$u = v = 0 \quad (2.9c)$$

Sur l'axe de symétrie  $y = 0$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \text{ et } v = 0 \quad (2.9d)$$

#### 2.5.1.2 Conditions aux limites thermiques

A l'entrée :  $x = 0$

$$T = T_{in} \quad (2.10a)$$

A la Sortie  $x = L$  (Régime établi)

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (2.10b)$$

A la paroi supérieure :  $y = h + \Delta$

Dans cette étude deux types de conditions aux limites sont considérées, soit la paroi est maintenue à une température constante, soit à un flux constant à la paroi comme suit :

Température imposée

$$T = T_p \quad (2.10c)$$

Flux imposée

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{x=h+\Delta} = q_0 \quad (2.10d)$$

Sur l'axe de symétrie

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (2.10e)$$

A l'interface fluide/solide

$$T_f = T_s \quad (2.10f)$$

$$k_f \left( \frac{\partial T_f}{\partial y} \right)_w = k_s \left( \frac{\partial T_s}{\partial y} \right)_w \quad (2.10g)$$

### 2.5.2 Ecoulement légèrement raréfié $0.001 < Kn < 0.1$

Les conditions aux limites déjà présentées pour un écoulement non raréfié restent valables. On introduit de nouvelles conditions pour le glissement de la vitesse et le saut de la température à l'interface fluide/solide comme suit :

#### 2.5.2.1. Glissement de vitesse à la paroi

Dans cette étude, on a utilisé la condition aux limites traduisant un glissement de la vitesse à la paroi du premier ordre établies par Maxwell

$$v_g - v_w = \lambda \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{\partial v_g}{\partial y} \Big|_w \quad (2.11)$$

Où  $\sigma_v$  est le coefficient d'accommodation

#### 2.5.2.2. Saut de température à la paroi

La condition aux limites du premier ordre, introduite par Smoluchowski définie comme :

$$T_g - T_w = \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{1}{Pr} \lambda \frac{\partial T_g}{\partial y} \quad (2.12)$$

Où  $\sigma_T$  est le coefficient d'accommodation thermique

### 2.6. Adimensionalisation

#### 2.6.1 Grandeurs caractéristiques et variables adimensionnelles.

La complexité du système d'équation des phénomènes de convection rend nécessaire l'utilisation de l'analyse adimensionnelle, permettant de réduire le nombre des paramètres physiques et d'obtenir des solutions indépendantes des grandeurs du domaine d'étude.

Les grandeurs caractéristiques posées sont :

H : Longueur caractéristique [m]

$u_{in}$  : Vitesse caractéristique [m/s]

$\rho u_m^2$  : Pression caractéristique [N/m<sup>2</sup>]

Donc les variables adimensionnelles introduites dans les équations de bilan sont :

Pour les équations de Continuité et de Navier-Stokes, on définit l'abscisse adimensionnée comme suit :

$$X^+ = \frac{2x}{D_h Re} \quad (2.13)$$

Pour l'équation de l'énergie, l'expression de l'abscisse adimensionnée est la suivante :

$$X^* = \frac{2x}{D_h Pe} \quad (2.14)$$

Les variables suivantes sont introduites dans les 3 équations sans distinction

$$Y = \frac{2Y}{D_h} \quad (2.15)$$

## 2. Position du problème et résolution numérique

---

$$U = \frac{u}{u_{in}} \quad (2.15a)$$

$$V = \frac{v}{u_{in}} \quad (2.15b)$$

$$\tau = \frac{2tu_{in}}{D_h} \quad (2.15c)$$

$$P = \frac{p}{\rho u_{in}^2} \quad (2.15d)$$

Dans le cas où on impose une température à la paroi, on définit la température adimensionnelle  $\theta$  par la relation suivante :

$$\theta = \frac{T - T_p}{T_{in} - T_p} \quad (2.16)$$

Pour un flux imposé l'expression de la température adimensionnelle  $\theta$  est définie par :

$$\theta = \frac{(T - T_{in})k}{D_h q_0} \quad (2.17)$$

### 2.6.2 Equation de continuité adimensionnelle

Reprenant l'expression de l'équation de continuité simplifiée

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.18)$$

Introduisant les variables non dimensionnelles, on obtient :

$$\frac{2u_{in}\partial U}{D_h Re \partial X^+} + \frac{2u_{in}\partial V}{D_h \partial Y} = 0 \quad (2.19)$$

## 2. Position du problème et résolution numérique

---

Après simplification on obtient :

$$\frac{1}{Re} \frac{\partial U}{\partial X^+} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2.20)$$

Qui représente l'expression de l'équation de continuité adimensionnée

### 2.6.3 Equations adimensionnelles de Navier-Stokes.

Selon la direction x l'équation de Navier Stocks s'écrit comme suit :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.21)$$

Introduisant les variables adimensionnelles définies plus haut, on obtient :

$$\rho \left( \frac{u_{in} \partial U}{\frac{D_h}{2u_{in}} \partial \tau} + U u_{in} \frac{u_{in} \partial U}{\frac{D_h Re}{2} \partial X^+} + V u_{in} \frac{u_{in} \partial U}{\frac{D_h}{2} \partial Y} \right) = - \frac{\rho u_{in}^2 \partial P}{\frac{D_h Re}{2} \partial X^+} + \mu \left( \frac{u_{in} \partial^2 U}{\left(\frac{D_h Re}{2}\right)^2 \partial X^{+2}} + \frac{u_{in} \partial^2 U}{\left(\frac{D_h}{2}\right)^2 \partial Y^2} \right) \quad (2.22)$$

En introduisant le nombre de Reynolds défini comme suit :

$$Re = \frac{\rho u_{in} D_h}{\mu} \quad (2.23)$$

## 2. Position du problème et résolution numérique

---

On obtient

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{U}{Re} \frac{\partial U}{\partial X^+} + V \frac{\partial U}{\partial Y}\right) = -\frac{1}{Re} \frac{\partial P}{\partial X^+} + 2 \left( \frac{\partial^2 U}{(Re)^3 \partial X^{+2}} + \frac{\partial^2 U}{Re \partial Y^2} \right) \quad (2.24)$$

Selon la direction y, nous avons :

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.25)$$

Après introduction des variables adimensionnelles, on obtient :

$$\rho \left( \frac{u_{in} \partial V}{\frac{D_h}{2u_{in}} \partial \tau} + U u_{in} \frac{u_{in} \partial V}{\frac{D_h Re}{2} \partial X^+} + V u_{in} \frac{u_{in} \partial V}{\frac{D_h}{2} \partial Y} \right) = -\frac{\rho u_{in}^2 \partial P}{\frac{D_h}{2} \partial Y} + \mu \left( \frac{u_{in} \partial^2 V}{\left(\frac{D_h Re}{2}\right)^2 \partial X^{+2}} + \frac{u_{in} \partial^2 V}{\left(\frac{D_h}{2}\right)^2 \partial Y^2} \right) \quad (2.26)$$

On aura finalement :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{U}{Re} \frac{\partial V}{\partial X^+} + V \frac{\partial V}{\partial Y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial Y} + 2 \left( \frac{\partial^2 V}{(Re)^3 \partial X^{+2}} + \frac{\partial^2 V}{Re \partial Y^2} \right) \quad (2.27)$$

### 2.6.4 Equation adimensionnelle de l'énergie.

Dans le cas d'une température imposée :

$$\theta = \frac{T - T_p}{T_{in} - T_p} \quad (2.28)$$

## 2. Position du problème et résolution numérique

---

*-Dans le fluide*

En introduisant les variables non dimensionnelles dans l'équation de l'énergie :

$$\rho C_P \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_f \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_f \frac{\partial T}{\partial y} \right) + 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.29)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \rho C_P \left( \frac{(T_{in} - T_p) \partial \theta}{\frac{D_h}{2u_{in}} \partial \tau} + u_{in} U \frac{(T_{in} - T_p) \partial \theta}{\frac{D_h Pe}{2} \partial X^*} + u_{in} V \frac{(T_{in} - T_p) \partial \theta}{\frac{D_h}{2} \partial Y} \right) \\ = k_f \left( \frac{(T_{in} - T_p) \partial^2 \theta}{\left( \frac{D_h Pe}{2} \right)^2 \partial X^{*2}} + \frac{(T_{in} - T_p) \partial^2 \theta}{\left( \frac{D_h}{2} \right)^2 \partial Y^2} \right) \\ + 2\mu \left[ \left( \frac{u_{in}}{\frac{D_h Pe}{2}} \frac{\partial U}{\partial X^*} \right)^2 + \left( \frac{u_{in}}{\frac{D_h}{2}} \frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{u_{in}}{\frac{D_h}{2}} \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{u_{in}}{\frac{D_h Pe}{2}} \frac{\partial V}{\partial X^*} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.30)$$

Les nombres de Prandtl  $Pr$  et de Brinkman  $Br_T$  sont définis par:

$$Pr = \frac{\mu C_p}{k} \quad (2.31)$$

$$Br_T = \frac{\mu u_{in}^2}{k_f (T_{in} - T_p)} \quad (2.32)$$

On aura finalement

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{1}{Pe} U \frac{\partial \theta}{\partial X^*} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \\ = \frac{2}{Pe} \left( \frac{\partial^2 \theta}{Pe^2 \partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \\ + 4 \frac{Br_T}{Pe} \left[ \left( \frac{1}{Pe} \frac{\partial U}{\partial X^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{1}{Pe} \frac{\partial V}{\partial X^*} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

## 2. Position du problème et résolution numérique

---

### *-Dans le solide*

Dans le solide l'équation de l'énergie est la suivante :

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau}\right) = \frac{2}{Pe} \left( \frac{\partial^2 \theta}{Pe^2 \partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (2.34)$$

Dans le cas où on impose un flux à la paroi, on introduit le nombre de Brinkman basé sur le flux imposé  $Br_{H2}$  :

$$Br_{H2} = \frac{\mu u_{in}^2}{q_0 D_h} \quad (2.35)$$

On aura finalement :

### *-Dans le fluide*

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{1}{Pe} U \frac{\partial \theta}{\partial X^*} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \\ & = 2 \left( \frac{\partial^2 \theta}{Pe^3 \partial X^{*2}} + \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \\ & + 4 \frac{Br_{H2}}{Pe} \left[ \left( \frac{1}{Pe} \frac{\partial U}{\partial X^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{1}{Pe} \frac{\partial V}{\partial X^*} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.36)$$

### *-Dans le solide*

On obtient dans le solide l'équation de l'énergie suivante :

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau}\right) = 2 \left( \frac{\partial^2 \theta}{Pe^3 \partial X^{*2}} + \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (2.37)$$

## 2. Position du problème et résolution numérique

---

### 2.7. Conditions aux limites adimensionnelles.

Les conditions aux limites adimensionnelles hydrodynamiques et thermiques sont présentées respectivement dans les tableaux (2.2) et (2.3) :

Tableau 2.2 Conditions aux limites adimensionnelles

<i>Limites</i>	<i>Conditions hydrodynamiques</i>
$X^+ = \frac{2x}{D_h Re} = 0$	$U = 1$ $V = 0$
$X^+ = 10$	$\frac{\partial U}{\partial X^+} = \frac{\partial V}{\partial X^+} = 0$
$Y = 0$	$\frac{\partial U}{\partial Y} = 0$ et $V = 0$
$Y + E$	$U = V = 0$

## 2. Position du problème et résolution numérique

---

**Tableau 2.3 Conditions aux limites adimensionnelles**

<i>Limites</i>	<i>Conditions thermiques</i>
$X^* = \frac{2x}{D_h Pe} = 0$	$\theta = 1$
$X^* = X^+/Pr$	$\frac{\partial \theta}{\partial X^*} = 0$
$Y = 0$	$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0$
$Y + E$	<i>Température imposée <math>\theta = 0</math></i>
$Y + E$	<i>Flux imposé <math>-\frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{2K}</math></i>
<i>A l'interface fluide/solide</i>	$\theta_f = \theta_s$ et $k_f \left(\frac{\partial \theta_f}{\partial Y}\right)_w = k_s \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial Y}\right)_w$

Pour un écoulement légèrement raréfié, on introduit aussi les conditions aux limites adimensionnelles du glissement de vitesse et du saut de température à l'interface fluide/solide comme suit :

$$U_g - U_w = 2Kn \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v} \frac{\partial U_g}{\partial Y} \Big|_w \quad (2.38)$$

$$\theta_g - \theta_w = 2Kn \frac{2-\sigma_T}{\sigma_T} \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{1}{Pr} \frac{\partial \theta_g}{\partial Y} \quad (2.39)$$

### 2.8. Modèle numérique.

#### 2.8.1 Introduction.

La complexité de la résolution numérique des problèmes de transfert de chaleur, et d'écoulement de fluide est reflétée par la complexité des équations qui gouvernent les phénomènes physiques. C'est pourquoi, ces équations doivent être discrétisées.

Il existe plusieurs méthodes de discrétisation des équations différentielles aux dérivées partielles telles que : la méthode des volumes finis, la méthode des différences finies....

Dans la présente étude, on utilisera la méthode des volumes finis qui consiste à diviser le domaine de calcul en un nombre de volumes de contrôles entourant les nœuds du maillage, les équations aux dérivées partielles sont alors intégrées sur chaque volume de contrôle. Le résultat de la discrétisation en un point est une équation algébrique liant sa valeur de la variable  $\phi$  aux valeurs des variables des points adjacents.

#### 2.8.2 Maillage.

Le domaine d'étude est divisé en un certain nombre de volumes de contrôle de telle façon qu'il soit entièrement recouvert par eux (Figure 2.2). Chaque volume de contrôle de dimension  $\Delta X.\Delta Y.1$ , doit conserver les grandeurs scalaires P et T dans le nœud du maillage (P) qui se situe au centre du volume de contrôle et les grandeurs vectorielles U et V au milieu des segments reliant les deux nœuds adjacents. Ces quatre faces sont repérées à l'aide des quatre points, cardinaux e, w, n, s et les centres des volumes adjacents par E, W, N, S.

Ce volume de contrôle est utilisé pour l'expression des bilans des grandeurs scalaires, appelé volume de contrôle typique (Figure 2.3), et pour l'expression des grandeurs vectorielles, le volume de contrôle décalé (Figures. 2.4 et 2.6) est utilisé pour les avantages suivants :

- Une localisation des vitesses apportant une bonne estimation des flux convectifs dans les bilans des grandeurs scalaires.
- Une localisation de la pression permettant une bonne estimation de la force de pression dans l'équation de quantité de mouvement.

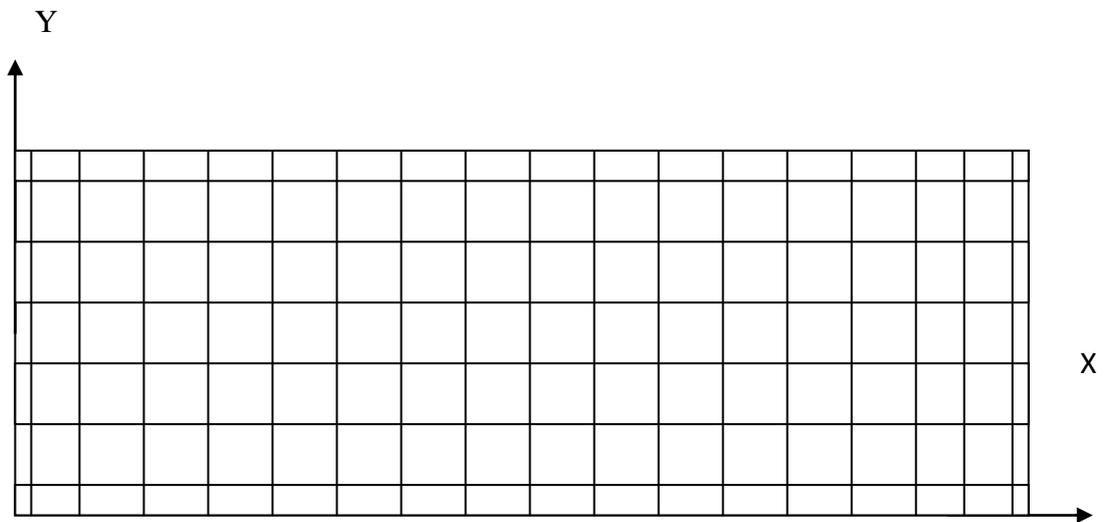


Figure 2.2 : Maillage du domaine de l'écoulement.

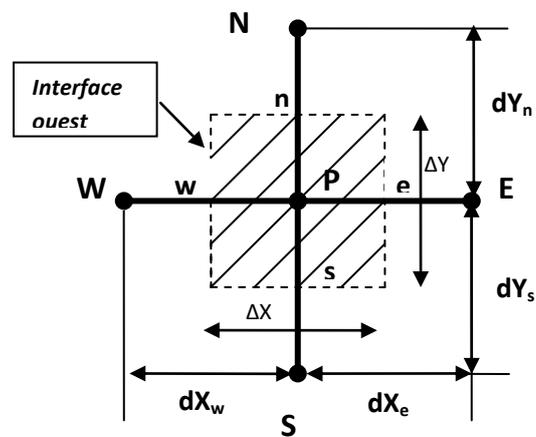


Figure. 2.3. Volume de contrôle typique

2.8.3. Equation algébrique de la composante horizontale de la vitesse (U).

L'intégration de l'équation différentielle aux dérivées partielles de l'équation de quantité de mouvement suivant X sur un volume de contrôle décalé à droite (Figure 2.4) donne :

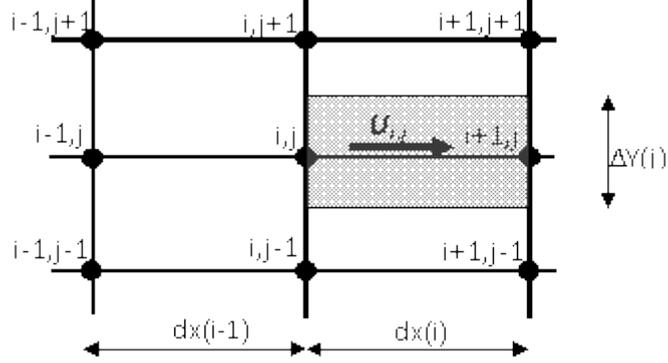


Figure 2.4. Domaine d'intégration de l'équation de mouvement suivant X.

$$\begin{aligned}
 A_p(\mathbf{i}, \mathbf{j})U^{n+1}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) &= A_E(\mathbf{i}, \mathbf{j})U^{n+1}(\mathbf{i} + \mathbf{1}, \mathbf{j}) + A_W(\mathbf{i}, \mathbf{j})U^{n+1}(\mathbf{i} - \mathbf{1}, \mathbf{j}) \\
 &+ A_N(\mathbf{i}, \mathbf{j})U^{n+1}(\mathbf{i}, \mathbf{j} + \mathbf{1}) + A_S(\mathbf{i}, \mathbf{j})U^{n+1}(\mathbf{i}, \mathbf{j} - \mathbf{1}) + b(\mathbf{i}, \mathbf{j})
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Avec :

$$A_E(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, \mathbf{0}). \tag{2.40a}$$

$$A_W(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = D_w A(|P_w|) + \max(F_w, \mathbf{0}) \tag{2.40b}$$

$$A_N(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, \mathbf{0}) \tag{2.40c}$$

$$A_S(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = D_s A(|P_s|) + \max(F_s, \mathbf{0}) \tag{2.40d}$$

$$b(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \frac{1}{Re} [P(\mathbf{i}, \mathbf{j}) - P(\mathbf{i} - \mathbf{1}, \mathbf{j})] \Delta Y(\mathbf{j}) + \frac{U(\mathbf{i}, \mathbf{j})^n}{\Delta \tau} dX(\mathbf{i}) \Delta Y(\mathbf{j}) \tag{2.40e}$$

## 2. Position du problème et résolution numérique

---

$$A_p(i, j) = A_E(i, j) + A_W(i, j) + A_N(i, j) + A_S(i, j) + \frac{dX(i)\Delta Y(j)}{\Delta \tau} \quad (2.40f)$$

$$F_e = \frac{1}{2Re} (U(i+1, j) + U(i, j)) \Delta Y(j) \quad (2.40g)$$

$$F_w = \frac{1}{2Re} (U(i-1, j) + U(i, j)) \Delta Y(j) \quad (2.40h)$$

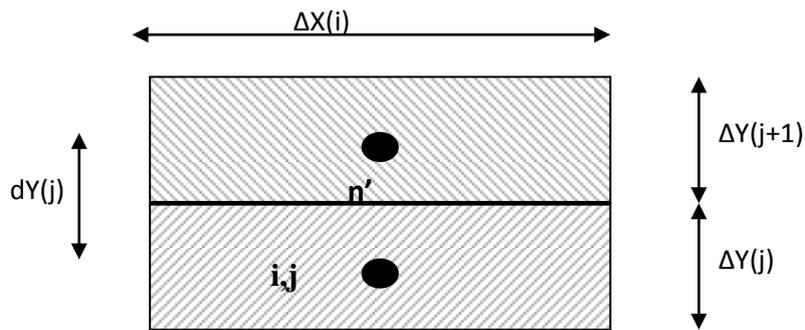
$$F_n = \frac{1}{2} (V(i, j) + V(i+1, j)) dX(i) dY(j+1) \quad (2.40i)$$

$$F_s = \frac{1}{2} (V(i, j-1) + V(i+1, j-1)) dX(i) dY(j-1) \quad (2.40j)$$

### 2.8.4 Coefficient de viscosité à l'interface entre volume décalé vers la droite.

Afin de déterminer les flux diffusifs essayons tout d'abord de déterminer les viscosités des interfaces entre les volumes finis contenant des matériaux différents Bessaih (1994). On note que la viscosité est une propriété physique du volume de contrôle.

Considérons la figure suivante où chaque volume de contrôle est composé d'une matière spécifique.



**Figure 2.5. Volume de contrôle de milieux différents.**

La viscosité aux faces Est et Ouest du volume de contrôle décalé dont le centre est la position de la vitesse  $U(i, j)$  est facilement déterminée ; Par contre pour les deux autres

## 2. Position du problème et résolution numérique

---

faces l'obtention de la viscosité n'est pas facile ,ceci s'explique par le fait que les volumes de contrôle typiques des points (i, j), (i+1,j), (i+1,j+1) et (i, j+1) contiennent des matériaux différents.

La question qui se pose est comment obtenir  $\mu_n$  ?

$\mu_n$ , est la viscosité qui garantit une valeur correcte de la contrainte de cisaillement à la face Nord. Cette dernière est la somme de deux contraintes, la première est la demi de contrainte à l'interface des volumes de contrôles contenant les points (i, j) et (i, j+1) ; La deuxième est la demi de contrainte à l'interface des volumes de contrôles contenant les points(i+1,j) et (i+1,j+1)

La contrainte de cisaillement à l'interface de ces volumes peut être évaluée de trois manières :

$$\tau_{n'} = \mu^*(i, j) \frac{U(n') - U(i, j)}{\Delta Y(j)/2} \quad (2.41)$$

$$\tau_{n'} = \mu^*(i, j + 1) \frac{U(i, j+1) - U(n')}{\Delta Y(j+1)/2} \quad (2.41a)$$

$$\tau_{n'} = \mu^*(n') \frac{U(i, j+1) - U(i, j)}{dY(j)} \quad (2.41b)$$

Ou bien :

$$U(n') - U(i, j) = \frac{\tau_{n'} \Delta Y(j)/2}{\mu^*(i, j)} \quad (2.41c)$$

$$U(i, j + 1) - U(n') = \frac{\tau_{n'} \Delta Y(j+1)/2}{\mu^*(i, j+1)} \quad (2.41d)$$

$$U(i, j + 1) - U(i, j) = \frac{\tau_{n'} dY(j)}{\mu^*(n')} \quad (2.41e)$$

La somme des équations (2.41c) et (2.41d) membre à membre donne :

$$U(i, j + 1) - U(i, j) = \tau_{n'} \left[ \frac{\Delta Y(j)/2}{\mu^*(i, j)} + \frac{\Delta Y(j+1)/2}{\mu^*(i, j+1)} \right] \quad (2.41f)$$

## 2. Position du problème et résolution numérique

---

l'égalité de (2.41f) et (2.41e) donne :

$$\frac{dY(j)}{\mu^*(n')} = \left[ \frac{\Delta Y(j)/2}{\mu^*(i,j)} + \frac{\Delta Y(j+1)/2}{\mu^*(i,j+1)} \right] \quad (2.41g)$$

D'où on obtient la viscosité de n'

$$\mu^*(n') = \frac{dY(j)}{\left[ \frac{\Delta Y(j)/2}{\mu^*(i,j)} + \frac{\Delta Y(j+1)/2}{\mu^*(i,j+1)} \right]} \quad (2.41h)$$

De la même manière on obtient

$$\mu^*(n'') = \frac{dY(j)}{\left[ \frac{\Delta Y(j)/2}{\mu^*(i+1,j)} + \frac{\Delta Y(j+1)/2}{\mu^*(i+1,j+1)} \right]} \quad (2.41i)$$

On évalue la contrainte au point n :

$$\tau_n = \frac{1}{2} \tau_{n'} + \frac{1}{2} \tau_{n''} \quad (2.41j)$$

$$\tau_{n=1/2} (\mu^*(n') + \mu^*(n'')) \left[ \frac{U(i,j+1) - U(i,j)}{dY(j)} \right] \quad (2.41k)$$

$\tau_n$  est obtenu aussi comme suit :

$$\tau_{n'} = \mu^*(n) \left[ \frac{U(i,j+1) - U(i,j)}{dY(j)} \right] \quad (2.41l)$$

L'égalité de (2.41k) et de (2.41l) donne

$$\mu^*(n) = \frac{1}{2} \mu^*(n') + \frac{1}{2} \mu^*(n'') \quad (2.41m)$$

$$\mu^*(n) = \frac{1}{2} \left[ \frac{dY(j)}{\frac{\Delta Y(j)/2}{\mu^*(i,j)} + \frac{\Delta Y(j+1)/2}{\mu^*(i,j+1)}} + \frac{dY(j)}{\frac{\Delta Y(j)/2}{\mu^*(i+1,j)} + \frac{\Delta Y(j+1)/2}{\mu^*(i+1,j+1)}} \right] \quad (2.41n)$$

## 2. Position du problème et résolution numérique

---

Donc

$$\mu^*(n) = \left[ \frac{dY(j)}{\frac{\Delta Y(j)}{\mu^*(i,j)} + \frac{\Delta Y(j+1)}{\mu^*(i,j+1)}} + \frac{dY(j)}{\frac{\Delta Y(j)}{\mu^*(i+1,j)} + \frac{\Delta Y(j+1)}{\mu^*(i+1,j+1)}} \right] \quad (2.41o)$$

Par un développement similaire on obtient  $\mu_s$

$$\mu^*(s) = \left[ \frac{dY(j-1)}{\frac{\Delta Y(j)}{\mu^*(i,j)} + \frac{\Delta Y(j-1)}{\mu^*(i,j-1)}} + \frac{dY(j-1)}{\frac{\Delta Y(j)}{\mu^*(i+1,j)} + \frac{\Delta Y(j-1)}{\mu^*(i+1,j-1)}} \right] \quad (2.41p)$$

Les termes de diffusion de l'équation de quantité de mouvement suivant x sont donc données par :

$$D_e = \frac{2}{Re^3} \frac{\mu^*(i,j)\Delta Y(j)}{\Delta X(i+1)} \quad (2.41q)$$

$$D_w = \frac{2}{Re^3} \frac{\mu^*(i,j)\Delta Y(j)}{\Delta X(i)} \quad (2.41r)$$

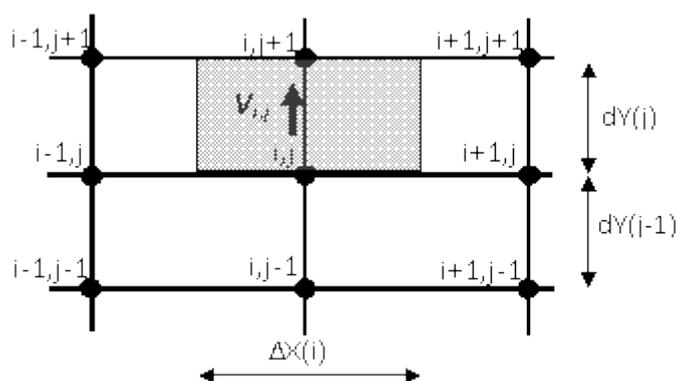
$$D_n = \frac{2}{Re} \left[ \frac{\Delta X(i+1)}{\frac{\Delta Y(j)}{\mu^*(i+1,j)} + \frac{\Delta Y(j)}{\mu^*(i+1,j+1)}} + \frac{\Delta X(i)}{\frac{\Delta Y(j)}{\mu^*(i,j)} + \frac{\Delta Y(j+1)}{\mu^*(i,j+1)}} \right] \quad (2.41s)$$

$$D_s = \frac{2}{Re} \left[ \frac{\Delta X(i+1)}{\frac{\Delta Y(j-1)}{\mu^*(i+1,j-1)} + \frac{\Delta Y(j)}{\mu^*(i+1,j)}} + \frac{\Delta X(i)}{\frac{\Delta Y(j-1)}{\mu^*(i,j-1)} + \frac{\Delta Y(j)}{\mu^*(i,j)}} \right] \quad (2.41t)$$

### 2.8.5 Equation algébrique de la composante verticale de la vitesse (V).

L'intégration de l'équation différentielle aux dérivées partielles de l'équation de quantité de mouvement suivant Y sur un volume de contrôle décalé vers le haut conduit à :

$$\begin{aligned}
 A_p(i, j)V^{n+1}(i, j) &= A_E(i, j)V^{n+1}(i + 1, j) + A_W(i, j)V^{n+1}(i - 1, j) \\
 &+ A_N(i, j)V^{n+1}(i, j + 1) + A_S(i, j)V^{n+1}(i, j - 1) + b(i, j)
 \end{aligned}
 \tag{2.42}$$



**Figure 2.6. Domaine d'intégration de l'équation de mouvement suivant Y.**

avec :

$$A_E(i, j) = D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0). \tag{2.42a}$$

$$A_W(i, j) = D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \tag{2.42b}$$

$$A_N(i, j) = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \tag{2.42c}$$

$$A_S(i, j) = D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \tag{2.42d}$$

## 2. Position du problème et résolution numérique

---

$$\mathbf{b}(i, j) = [\mathbf{P}(i, j) - \mathbf{P}(i, j + 1)]\Delta X(i) + \frac{V(i, j)^n}{\Delta \tau} \Delta X(i) dY(j) \quad (2.42e)$$

$$\mathbf{A}_p(i, j) = \mathbf{A}_E(i, j) + \mathbf{A}_W(i, j) + \mathbf{A}_N(i, j) + \mathbf{A}_S(i, j) + \frac{\Delta X(i) dY(j)}{\Delta \tau} \quad (2.42f)$$

$$\mathbf{F}_e = \frac{1}{2Re} (\mathbf{U}(i, j) + \mathbf{U}(i, j + 1)) dY(j) \quad (2.42g)$$

$$\mathbf{F}_w = \frac{1}{2Re} (\mathbf{U}(i - 1, j) + \mathbf{U}(i - 1, j + 1)) dY(j) \quad (2.42h)$$

$$\mathbf{F}_n = \frac{1}{2} (\mathbf{V}(i, j + 1) + \mathbf{V}(i, j)) \Delta X(i) dY(j + 1) \quad (2.42i)$$

$$\mathbf{F}_n = \frac{1}{2} (\mathbf{V}(i, j - 1) + \mathbf{V}(i, j)) \Delta X(i) dY(j - 1) \quad (2.42j)$$

Le coefficient de viscosité à l'interface entre volumes de contrôles décalés vers le haut est déterminé d'une manière similaire à celle déjà présentée pour le cas des volumes de contrôles de l'équation de quantité de mouvement suivant X

Les termes de diffusion sont déterminés comme suit :

$$\mathbf{D}_e = \frac{2}{Re^3} \left[ \frac{\Delta Y(j+1)}{\frac{\Delta X(i)}{\mu^*(i, j+1)} + \frac{\Delta X(i+1)}{\mu^*(i+1, j+1)}} + \frac{\Delta Y(j)}{\frac{\Delta X(i)}{\mu^*(i, j)} + \frac{\Delta X(i+1)}{\mu^*(i+1, j)}} \right] \quad (2.42k)$$

$$\mathbf{D}_w = \frac{2}{Re^3} \left[ \frac{\Delta Y(j+1)}{\frac{\Delta X(i-1)}{\mu^*(i-1, j+1)} + \frac{\Delta X(i)}{\mu^*(i, j+1)}} + \frac{\Delta Y(j)}{\frac{\Delta X(i-1)}{\mu^*(i-1, j)} + \frac{\Delta X(i)}{\mu^*(i, j)}} \right] \quad (2.42l)$$

$$\mathbf{D}_n = \frac{2}{Re} \frac{\mu^*(i, j+1) \Delta X(i)}{dY(j)} \quad (2.42m)$$

$$\mathbf{D}_s = \frac{2}{Re} \frac{\mu^*(i, j) \Delta X(i)}{dY(j)} \quad (2.42n)$$

## 2. Position du problème et résolution numérique

---

$$\mu^* = \frac{\mu}{\mu_f} \quad (2.42o)$$

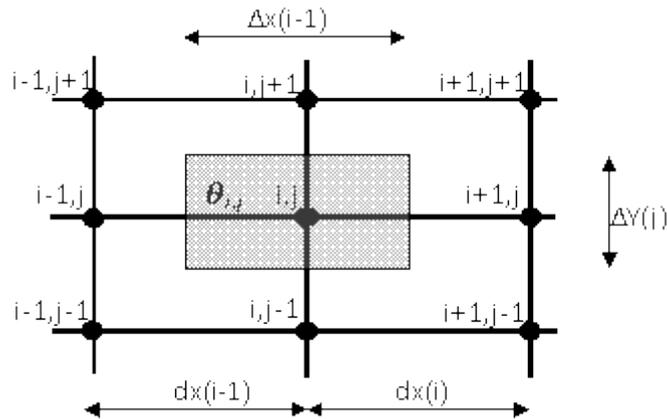
La méthode d'extension du domaine Patankar (1981) est utilisée pour considérer le domaine en entier. Lors de la résolution des équations de la vitesse, le coefficient  $\mu^*$  prend sa valeur réelle pour les points situés dans la phase fluide et on lui attribue une très grande valeur pour les points situés dans la phase solide.

Cela permet d'assurer des vitesses nulles dans tout le solide et des conditions aux limites correctes à l'interface fluide-solide.

### 2.8.6. Equation algébrique de la température $\theta$ .

L'intégration de l'équation différentielle aux dérivées partielles de l'équation de l'énergie sur un volume de contrôle typique (Fig. 2.7) donne :

$$\begin{aligned} A_p(i, j)\theta^{n+1}(i, j) &= A_E(i, j)\theta^{n+1}(i + 1, j) + A_W(i, j)\theta^{n+1}(i - 1, j) \\ &+ A_N(i, j)\theta^{n+1}(i, j + 1) + A_S(i, j)\theta^{n+1}(i, j - 1) + b(i, j) \end{aligned} \quad (2.43)$$



**Figure.2.7. Domaine d'intégration de l'équation d'énergie**

Avec

$$A_E(i, j) = D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0). \quad (2.43a)$$

$$A_W(i, j) = D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \quad (2.43b)$$

$$A_N(i, j) = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \quad (2.43c)$$

$$A_S(i, j) = D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \quad (2.43d)$$

$$b = \left[ \frac{Br}{RePr} \left( 2 \left( \frac{U(i, j) - U(i, j-1)}{dY(j-1)} + \frac{1}{RePr} \frac{V(i, j) - V(i-1, j)}{dX(i-1)} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \left( \frac{1}{RePr} \frac{U(i-1, j) - U(i, j)}{\Delta X(i)} \right)^2 + 4 \left( \frac{V(i, j-1) - V(i, j)}{\Delta Y(j)} \right)^2 \right) \right. \\ \left. + \frac{\theta(i, j)^n}{\Delta \tau} \right] \Delta X(i) \Delta Y(j) \quad (2.43e)$$

$$A_p(i, j) = A_E(i, j) + A_W(i, j) + A_N(i, j) + A_S(i, j) + \frac{\Delta X(i) \Delta Y(j)}{\Delta \tau} \quad (2.43f)$$

Les flux convectifs sont donnés par :

$$F_e = U(i, j) \Delta Y(j) \quad (2.43g)$$

$$F_w = U(i-1, j) \Delta Y(j) \quad (2.43h)$$

$$F_n = V(i, j) \Delta X(i) dY(j+1) \quad (2.43i)$$

$$F_n = V(i, j-1) \Delta X(i) dY(j-1) \quad (2.43j)$$

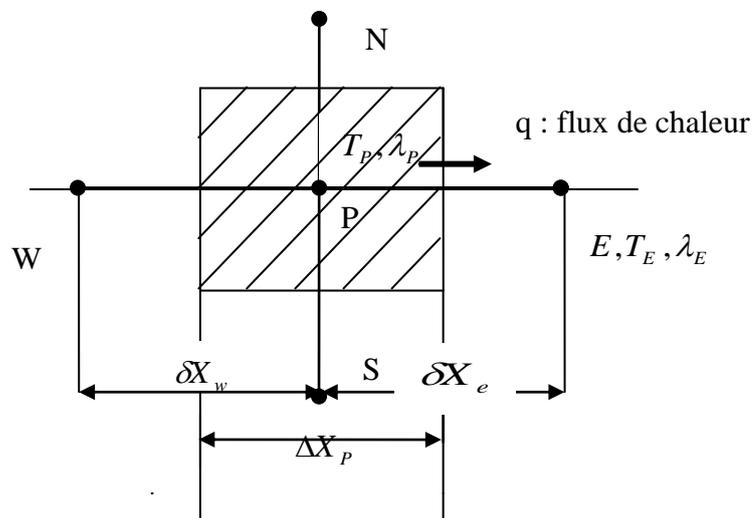
## 2. Position du problème et résolution numérique

---

Les conductivités thermiques aux interfaces des volumes de contrôles sont déterminées d'une manière similaire à celle des viscosités aux interfaces, sauf que dans ce cas, les volumes de contrôle ne sont pas décalés.

### 2.8.7 Coefficient de conductivité thermique aux interfaces des volumes de contrôle :

On cherche à déterminer les quatre conductivités aux interfaces ( $k_e, k_w, k_s$  et  $k_n$ ) par une moyenne harmonique Patankar (1978).



**Figure 2.8** Volume de contrôle bidimensionnel

On prend par exemple le flux de chaleur sur l'interface « est » e du volume de contrôle :

L'expression du flux s'écrit alors de trois manières différentes

$$q = k_e \frac{T_P - T_E}{\delta X_e} \quad (2.44)$$

$$q = 2k_p \frac{T_P - T_e}{\Delta X_p} \quad (2.44a)$$

## 2. Position du problème et résolution numérique

---

$$q = 2k_E \frac{T_e - T_E}{\Delta X_E} \quad (2.44b)$$

On peut écrire aussi :

$$T_P - T_E = \frac{q \delta X_e}{k_e} \quad (2.44c)$$

$$T_P - T_e = \frac{q \Delta X_P}{2k_P} \quad (2.44d)$$

$$T_e - T_E = \frac{q \Delta X_E}{2k_E} \quad (2.44e)$$

La somme des équations (2.44d) et (2.44e) donne :

$$T_P - T_E = q \left[ \frac{\Delta X_P}{2k_P} + \frac{\Delta X_E}{2k_E} \right] \quad (2.44f)$$

On remplace l'équation (2.44f) dans l'équation (2.44) on obtient :

$$k_e = \frac{2 \delta X_e}{\frac{\Delta X_P}{k_P} + \frac{\Delta X_E}{k_E}} \quad (2.44g)$$

Par analogie pour les expressions de  $k$  dans les interfaces (w, s et n) , on tire :

$$k_w = \frac{2 \delta X_w}{\frac{\Delta X_P}{k_P} + \frac{\Delta X_w}{k_W}} \quad (2.44h)$$

## 2. Position du problème et résolution numérique

---

$$k_s = \frac{2\delta Y_s}{\frac{\Delta Y_p}{k_p} + \frac{\Delta Y_s}{k_s}} \quad (2.44i)$$

$$k_n = \frac{2\delta Y_n}{\frac{\Delta Y_p}{k_p} + \frac{\Delta Y_n}{k_N}} \quad (2.44j)$$

Donc les termes de diffusifs de l'équation de l'énergie sont :

$$D_e = \frac{1}{Pe} \frac{2.0\Delta Y(j)}{\frac{\Delta X(i)}{K(i,j)} + \frac{\Delta X(i+1)}{K(i+1,j)}} \quad (2.45)$$

$$D_w = \frac{1}{Pe} \frac{2.0\Delta Y(j)}{\frac{\Delta X(i-1)}{K(i-1,j)} + \frac{\Delta X(i)}{K(i,j)}} \quad (2.45a)$$

$$D_n = \frac{1}{Pe} \frac{2.0\Delta X(i)}{\frac{\Delta Y(j)}{K(i,j)} + \frac{\Delta Y(j+1)}{K(i,j+1)}} \quad (2.45b)$$

$$D_s = \frac{1}{Pe} \frac{2.0\Delta X(i)}{\frac{\Delta Y(j-1)}{K(i,j-1)} + \frac{\Delta Y(j)}{K(i,j)}} \quad (2.45c)$$

$$K = \frac{k}{k_f} \quad (2.45b)$$

Pour la résolution de l'équation d'énergie, le coefficient prend la valeur réelle du milieu en question. Cette technique a été utilisée en transfert conjugué par de nombreux auteurs dont :

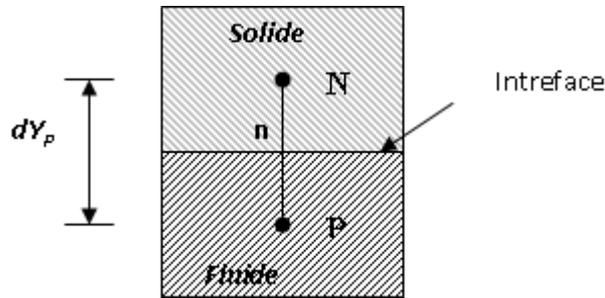
Sugavanam et al (1995), et Omara, A. and Abboudi, S., (2007).

**2.8.8 Incorporation du saut de température a l'interface fluide/solide**

L'équation (2.43) peut se mettre sous la forme suivante

$$A_N(\theta_N - \theta_P) + A_S(\theta_S - \theta_P) + A_E(\theta_E - \theta_P) + A_W(\theta_W - \theta_P) + b = 0 \quad (2.46)$$

Nous écrivons la condition de glissement sous forme adimensionnelle à l'interface fluide/paroi schématisée par la figure (2.9)



**Figure 2.9 Interface fluide/paroi**

$$\theta_n - \theta_w = \frac{Kn}{G} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \Big|_i \quad (2.47)$$

où

$$G = \left( \frac{\gamma+1}{\gamma} \right) Pr \quad (2.48)$$

Kn Nombre de Knudssen

Après quelques manipulations on obtient :

$$\theta_P - \theta_w = \left( 1 + \frac{Kn}{G} \right) (\theta_P - \theta_N) \quad (2.49)$$

Il suffit de remplacer le coefficient  $A_N$  à l'interface par  $A'_N$  Comme suit :

$$A'_N = \frac{2A_N}{\left( 1 + \frac{Kn}{G} \right)} \quad (2.50)$$

**2.8.9 Fonction  $A(|P|)$  pour différents schémas numériques.**

Le tableau suivant donne les expressions de cette fonction pour différents schémas numériques.

Tableau 2.5 Fonction  $A(|P|)$  pour différents schémas numérique.

SCHEMAS	$A( P )$
<b>Différence centrée</b>	$1-0.5  P $
<b>Upwind</b>	<b>1</b>
<b>Hybrid</b>	$\text{Max}[1,1-0.5  P ]$
<b>Power-law</b>	$\text{Max}[1,(1-0.5  P )^5]$
<b>Exponentiel</b>	$\frac{ A }{[\exp( P )-1]}$

**2.8.10. Equation algébrique de pression.**

Les composantes des équations des quantités de mouvement sont couplées avec la pression qui agit par les composantes de son gradient, seulement nous ne disposons pas d'équation propre à cette variable.

L'idée de Patankar (1981) consiste à utiliser l'équation de continuité pour obtenir le champ de pression. Si le bon champ de pression est pris en compte dans le traitement des équations des quantités de mouvement, alors les vitesses obtenues vérifiant l'équation de

## 2. Position du problème et résolution numérique

---

continuité. Cette dernière apparaît donc comme une contrainte à vérifier par le champ de pression.

Reprenons les équations de quantité de mouvement suivant X et Y.

$$\begin{cases} A_p^u U_p = \sum_{nb=E,W,N,S} A_{nb}^u U_{nb} + b_u \\ A_p^v V_p = \sum_{nb=E,W,N,S} A_{nb}^v V_{nb} + b_v \end{cases} \quad (2.51)$$

En introduisant les pseudo-vitesses :

$$\hat{U}_e = \sum_{nb=E,W,N,S} (A_{nb}^u U_{nb} + b_u) / A_e^u \quad (2.52)$$

$$\hat{U}_w = \sum_{nb=E,W,N,S} (A_{nb}^u U_{nb} + b_u) / A_w^u \quad (2.52a)$$

$$\tilde{V}_n = \sum_{nb=E,W,N,S} (A_{nb}^v V_{nb} + b_v) / A_n^v \quad (2.52c)$$

$$\tilde{V}_s = \sum_{nb=E,W,N,S} (A_{nb}^v V_{nb} + b_v) / A_s^v \quad (2.52d)$$

Où les sources  $b_u$  et  $b_v$  ne contiennent pas le terme de pression.

Les relations de la correction des vitesses  $U_e$ ,  $U_w$ ,  $V_n$  et  $V_s$  aux niveaux des interfaces s'écrivent comme suit :

$$U_e = \hat{U}_e + \frac{1}{\text{Re}} (P_p - P_E) \frac{\Delta Y}{A_p^u} \quad (2.53)$$

$$U_w = \hat{U}_w + \frac{1}{\text{Re}} (P_w - P_p) \frac{\Delta Y}{A_p^u} \quad (2.53a)$$

## 2. Position du problème et résolution numérique

---

$$V_n = \hat{V}_n + (P_p - P_N) \frac{\Delta X}{A_p^v} \quad (2.53b)$$

$$V_s = \hat{V}_s + (P_s - P_p) \frac{\Delta X}{A_p^v} \quad (2.53c)$$

En intégrant l'équation de continuité sur le volume de contrôle typique, on obtient :

$$\frac{1}{\text{Re}} [U_e - U_w] \Delta Y + [V_n - V_s] \Delta X = 0 \quad (2.54)$$

en remplaçant  $U_e$ ,  $U_w$ ,  $V_n$  et  $V_s$  par leurs valeurs dans l'équation (2.54), on obtient l'équation de pression :

$$A_p^p P_p = \sum_{nb=E,W,N,S} A_{nb}^p P_{nb} + b_p \quad (2.55)$$

Avec :

$$A_E^p = \frac{1}{\text{Re}^2} \frac{\Delta Y}{A_p^u} \Delta Y \quad (2.55a)$$

$$A_W^p = \frac{1}{\text{Re}^2} \frac{\Delta Y}{A_p^u} \Delta Y \quad (2.55b)$$

$$A_N^p = \frac{\Delta X}{A_p^v} \Delta X \quad (2.55c)$$

$$A_S^p = \frac{\Delta X}{A_p^v} \Delta X \quad (2.55d)$$

$$A_p^p = A_E^p + A_W^p + A_N^p + A_S^p \quad (2.55e)$$

$$b_p = \frac{1}{\text{Re}} [\hat{U}_e - \hat{U}_w] \Delta Y + [\hat{V}_n - \hat{V}_s] \Delta X \quad (2.55f)$$

### 2.8.11 Développement de l'algorithme SIMPLER.

- 1- Calcul des pseudo-vitesses  $U_e$ ,  $U_w$ ,  $V_n$  et  $V_s$  equations (2.52,a,b,c et d) à partir des coefficients des équations de quantité de mouvement.
- 2- Calcul des coefficients de l'équation de pression. Equations (2.55a,b,c,d,e,et f).
- 3- Résolution de l'équation de pression (2.55).
- 4- Calcul des vitesses par les relations de correction de vitesse (2.53,a,b,c)
- 5- Calcul des coefficients de l'équation d'énergie.
- 6- Résoudre l'équation d'énergie.
- 7- Tester la convergence, si elle n'est pas obtenue retour à l'étape 1.

### 2.8.12 Méthode de résolution (Algorithme TDMA)

Le système d'équations algébriques non linéaires contient (IL-2) (JL-2) équations, ceci après incorporation des conditions aux limites, avec IL et JL représentent respectivement les nombres totaux des nœuds suivants X et Y.

L'équation algébrique s'écrit pour le nœud P du maillage comme suit :

$$A_p \phi_p = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + b_\phi \quad (2.56)$$

Le système d'équations obtenu peut se mettre sous la forme :

$$[A] + [\phi] = [b_\phi] \quad (2.57)$$

Où :

[A] est une matrice de (IL-2)(JL-2) éléments.

[\phi] Vecteur des inconnues  $\phi(i, j)$ .

## 2. Position du problème et résolution numérique

---

La résolution directe du système étant compliquée, on utilise donc une méthode de résolution itérative qui détermine les valeurs de la variable  $\phi$  sur chaque colonne indépendamment des autres colonnes. Ainsi pour déterminer les valeurs de la variable sur la colonne (i), on suppose que ces valeurs sont connues sur les colonnes (i-1) et (i+1).

L'équation algébrique est alors réduite à une équation qui ne contient que trois inconnues ( $\phi_p$ ,  $\phi_N$  et  $\phi_S$ ).

Pour le nœud (i,j) du maillage, l'équation algébrique peut s'écrire :

$$\begin{aligned} A_S(i, j)\phi(i, j - 1) + A_P(i, j)\phi(i, j) - A_N(i, j)\phi(i, j + 1) \\ = A_E(i, j)\phi(i + 1, j) + A_W(i, j)\phi(i - 1, j) + b(i, j) \end{aligned} \quad (2.58)$$

En posant :

$$a_j = A_P(i, j) \quad (2.59)$$

$$b_j = A_N(i, j) \quad (2.59a)$$

$$c_j = A_S(i, j) \quad (2.59b)$$

$$d_j = A_E(i, j) \phi(i+1, j) + A_W(i, j) \phi(i-1, j) + b_\phi \quad (2.59c)$$

l'équation (2.58) s'écrit sous la forme suivante :

$$- c_j \phi_{j-1} + a_j \phi_j - b_j \phi_{j+1} = d_j \quad (2.60)$$

## 2. Position du problème et résolution numérique

---

Avec  $c_1 = 0$  et  $b_{jL} = 0$

Pour tous les noeuds  $[J = 2, jL]$  de la colonne, on a un système de la forme :

$$\begin{bmatrix} -C_2\phi_1 + a_2\phi_2 - b_2\phi_3 = d_2 \\ 0 - C_3\phi_2 + a_3\phi_3 + b_3\phi_3 = d_3 \\ \vdots \\ 0 - C_{jL}\phi_{jL-1} + a_{jL}\phi_{jL} - B_{jL}\phi_{jL+1} = d_j \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

La matrice associée au système est tridiagonale, on utilise l'algorithme TDMA pour la résoudre.

Les équations (2.61) peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\phi_j = \frac{C_j}{a_j} \phi_{j-1} + \frac{b_j}{a_j} \phi_{j+1} + \frac{d_j}{a_j} \quad (2.62)$$

Ou :

$$\phi_2 = \frac{C_2}{a_2} \phi_1 + \frac{b_2}{a_2} \phi_3 + \frac{d_2}{a_2} \quad (2.63)$$

$$\phi_3 = \frac{C_3}{a_3} \phi_2 + \frac{b_3}{a_3} \phi_4 + \frac{d_3}{a_3} \quad (2.63a)$$

Jusqu'au noud  $jL-1$

$$\phi_{jL} = \frac{C_{jL}}{a_{jL}} \phi_{jL-1} + \frac{b_{jL}}{a_{jL}} \phi_{jL+1} + \frac{d_{jL}}{a_{jL}} \quad (2.63b)$$

## 2. Position du problème et résolution numérique

---

Puisque  $\phi_1$  est connu, on élimine  $\phi_2$  puis  $\phi_3$  et ainsi de suite jusqu'à obtention d'une relation de récurrence pour  $\phi_j$  :

$$\phi_j = P_j \phi_{j+1} + Q_j \quad (2.64)$$

*Détermination de  $P_j$  et  $Q_j$*

Pour le nœud  $(i, j-1)$ , on a :

$$\phi_{j-1} = P_{j-1} \phi_j + Q_{j-1} \quad (2.65)$$

En remplaçant (2.65) dans (2.58) on obtient :

$$-C_j (P_{j-1} \phi_j + Q_{j-1}) + a_j \phi_j - b_j \phi_{j+1} = d_j \quad (2.66)$$

D'où on a :

$$(a_j - C_j P_{j-1}) \phi_j = d_j + C_j Q_{j-1} + b_j \phi_{j+1} \quad (2.67)$$

$$\phi_j = \frac{b_j}{a_j - c_j P_{j-1}} \phi_{j+1} + \frac{d_j + c_j Q_{j-1}}{a_j - c_j P_{j-1}} \quad (2.68)$$

Des équations (2.64) et (2.68) on a :

$$P_j = \frac{b_j}{a_j - c_j P_{j-1}} \quad (2.69)$$

## 2. Position du problème et résolution numérique

---

$$\phi_j = \frac{d_j + c_j \phi_{j-1}}{a_j - c_j p_{j-1}} \quad (2.70)$$

On peut dire finalement qu'on a résolu la matrice en faisant un balayage suivant X (colonne par colonne).

Pour la résolution de la matrice en faisant un balayage suivant Y (ligne par ligne), on utilisera les mêmes étapes que le balayage suivant X, en supposant connues les valeurs de la variable  $\phi$  sur les lignes (j-1) et (j+1).

### 2.8.13. Faux transitoire.

La forme linéarisée discrète de l'équation de convection diffusion s'écrit :

$$A_p \phi_p = \sum_{nb=E,W,N,S} A_{nb} \phi_{nb} + b_\phi \quad (2.71)$$

Comme les valeurs de  $\phi$  peuvent varier fortement d'une itération à la suivante, on est conduit à introduire le faux transitoire pour améliorer la convergence, qui consiste à utiliser la forme discrète de l'équation de transport avec le terme instationnaire :

$$\frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta t} (\phi_p^{n+1} - \phi_p^n) + A_p \phi_p = \sum_{nb=E,W,N,S} A_{nb} \phi_{nb} + b_\phi \quad (2.72)$$

Soit :

$$\phi_p^{n+1} \left( A_p + \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta t} \right) = \sum_{nb=E,W,N,S} A_{nb} \phi_{nb} + b_\phi + \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta t} \phi_p^n \quad (2.73)$$

Si on pose :

## 2. Position du problème et résolution numérique

---

$$\varepsilon = A_p \frac{\Delta t}{\Delta X \Delta Y} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \quad (2.74)$$

On trouve que l'expression de l'équation (2.73) coïncide avec l'expression de l'équation linéarisée discrète en introduisant la sous relaxation qui est sous la forme suivante :

$$\frac{A_p}{\alpha} \phi_p = \sum_{nb=E,W,N,S} A_{nb} \phi_{nb} + b_\phi + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} A_p \phi_p^0 \quad (2.75)$$

Avec :

$\alpha$  : Coefficient de sous relaxation qui varie entre 0 et 1.

$\phi_p^0$  : valeur de l'itération précédente.

Donc, on peut dire qu'on a fait une sous-relaxation différemment en imposant un pas de temps  $\Delta t$  identique pour tous les nœuds. *Versteeg H.K. et Malalasekera W. (1998).*

### 2.8.14 Critère de convergence.

Le critère de convergence utilisé dans le code de calcul est basée sur la différence relative pour la vitesse axiale  $U$  et la température  $\theta$  dans tout le domaine d'étude comme suit

$$\max \left| \frac{U^{n+1} - U^n}{U^n} \right| \leq 10^{-4} \quad (2.76)$$

$$\max \left| \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\theta^n} \right| \leq 10^{-7} \quad (2.77)$$

### 2.9 Validation des codes de calcul élaborés

#### 2.9.1 Ecoulement non raréfié

Le code de calcul développé dans le cas des écoulements non raréfié est validé avec les solutions analytiques disponibles dans la littérature.

Pour le champ hydrodynamique Shah et London (1978) dans leurs ouvrage propose une corrélation de l'évolution du nombre de Poiseuille le long d'un canal à plaques parallèles lorsque l'écoulement est en développement.

Le nombre de Poiseuille est défini par la relation :

$$Po = f Re \quad (2.78)$$

Ou  $f$  est le facteur de frottement, il est défini par l'expression suivante

$$f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho u_{in}^2} \quad (2.79)$$

L'expression donnée par Shah et London (1978) pour l'évolution du nombre de Poiseuille dans un canal bidimensionnel est la suivante

A l'entrée du canal

$$Po = \frac{3.44}{\sqrt{X^+}} + \frac{24 + \frac{0.674}{4X^+} - \frac{3.44}{\sqrt{X^+}}}{1 + \frac{2.910^{-5}}{X^{+2}}} \quad (2.80)$$

Avec

$$X^+ = \frac{x}{D_h Re} \quad (2.81)$$

## 2. Position du problème et résolution numérique

---

Pour un écoulement complètement développé  $Po = 24$

La figure 2.10 montre l'évolution du nombre de Poiseuille en fonction de  $X^+$  le long d'un micro-canal pour les résultats obtenus par simulation numérique et ceux obtenus à partir de l'équation (2.80). Pour notre cas on a à considérer les paramètres suivants pour cette comparaison  $Re = 100$ ,  $Pr = 7$ , et un maillage  $282 \times 102$

Pour valider le champ thermique obtenu par notre code de calcul nous avons tracé l'évolution du nombre de Nusselt local le long du micro-canal. La figure (2.11) représente une comparaison entre le Nusselt local obtenu par notre code avec celui calculé à partir de la corrélation proposée par Shah and Bhatti (Bejan (2003)), valable pour des nombre de Prandtl compris entre  $0.1 < Pr < 1000$ . Cette dernière s'écrit sous la forme :

$$Nu_x = 7.55 + \frac{0.024(X^*)^{-1.14} \left( 0.0179 Pr^{0.17} (X^*)^{-0.64} - 0.14 \right)}{\left( 1 + 0.0358 Pr^{0.17} (X^*)^{-0.64} \right)^2} \quad (2.82)$$

$$X^* = \frac{x}{D_h Pe} \quad (2.83)$$

On voit bien que les deux courbes sont légèrement dissociées à l'entrée du canal, et qu'elles sont confondues entre  $X^* = 0,02$  et  $10$ . Elles tendent vers une valeur asymptotique constante, égale à  $Nu = 7.54$ , lorsque l'écoulement est développé. La différence à l'entrée est due au fait qu'on considère dans notre étude un développement simultané des couches limites dynamique et thermique à partir de l'entrée, cependant, la corrélation de Shah et Bhatti a été obtenue pour un problème avec développement de la couche limite thermique dans un écoulement complètement développé tout au long du canal (Problème de Graetz).

Ainsi, on peut dire que le code de calcul développé dans cette thèse pour simuler les écoulements non raréfiés est validé.

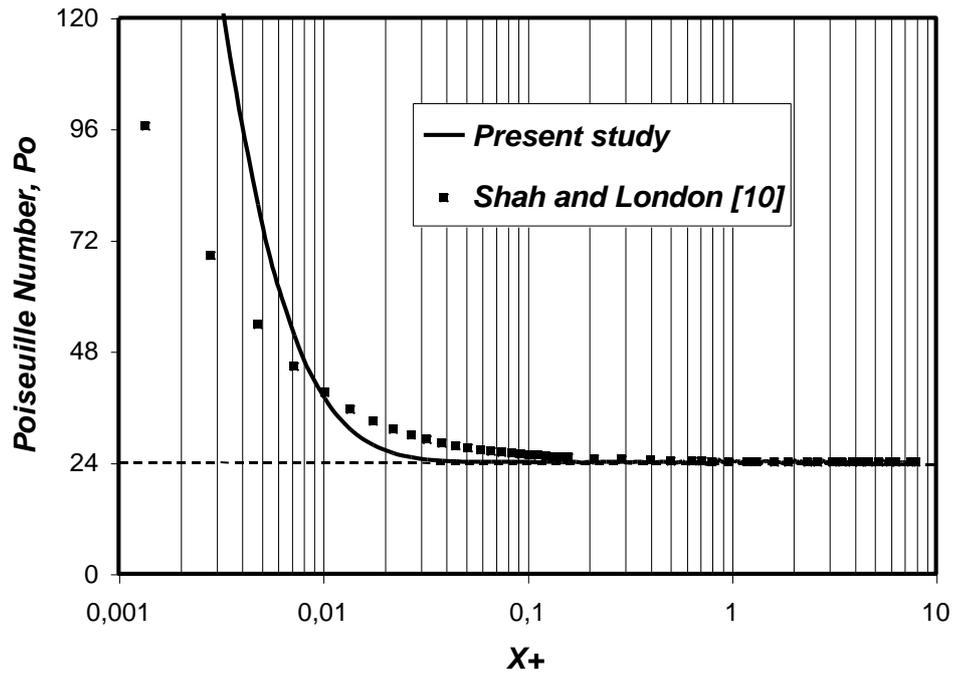


Figure (2.10) Comparaison de l'évolution du nombre de Poiseuille le long d'un canal

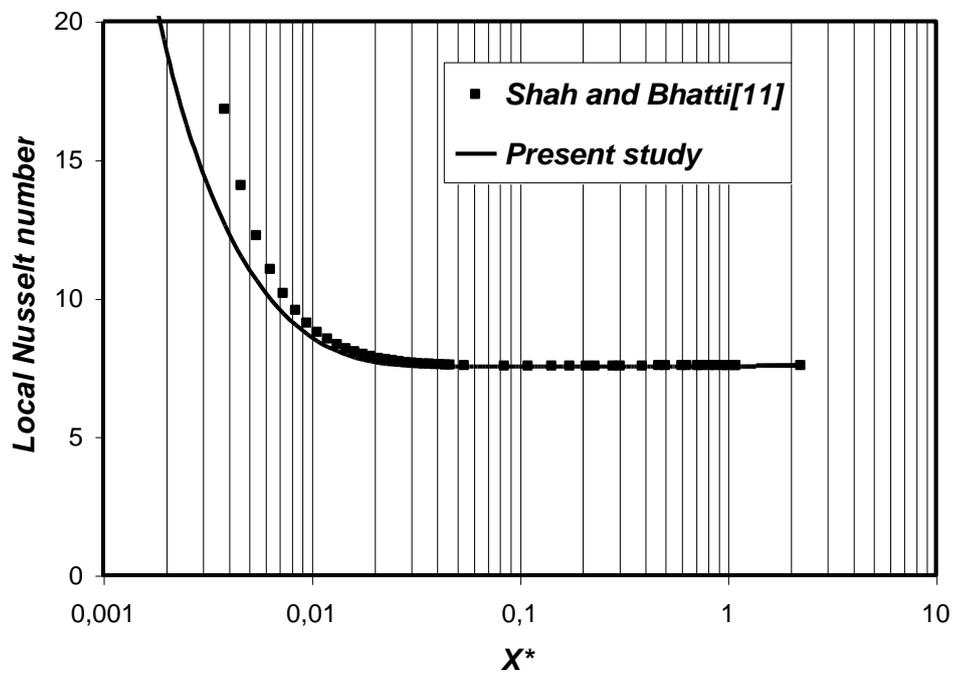


Figure (2.11) Comparaison du Nusselt local obtenu avec la corrélation de Shah et Bhatti

### 2.9.2 Ecoulement légèrement raréfié

Afin de valider notre code pour le cas d'un écoulement de gaz légèrement raréfié, nous avons calculé le champ dynamique pour différents nombre de Knudsen ( $Kn = 0.1, 0.08, 0.06, 0.04, 0.02$ , et 0) et comparé les profils de vitesses à la sortie du micro-canal sur la figure 2.12. La comparaison s'est faite avec la solution analytique obtenue par Van Rij et al (2007) donnée par :

$$\frac{u(y)}{u_m} = \frac{u_s}{u_m} + 6 \left( 1 - \frac{u_s}{u_m} \right) \left( \frac{y}{h} - \frac{y^2}{h^2} \right) \quad (2.84)$$

$$\frac{u_s}{u_m} = 1 - \frac{1}{(1 + 12\sigma_v Kn^2)} \quad (2.85)$$

Une deuxième comparaison a été également faite sur le nombre de Poiseuille en régime établi figure (2.13) avec l'expression obtenue analytiquement par Hong et al (2007)

$$f Re = \frac{24}{(1 + 12Kn)} \quad (2.86)$$

Nous remarquons sur les courbes précédentes, qu'aussi bien pour les profils de vitesse que pour le nombre de Poiseuille, les résultats obtenus par simulation numérique sont quasi-identiques à ceux calculés à partir des relations analytiques (2.84) et (2.86). L'écart avec ces résultats ne dépasse pas 1%.

## 2. Position du problème et résolution numérique

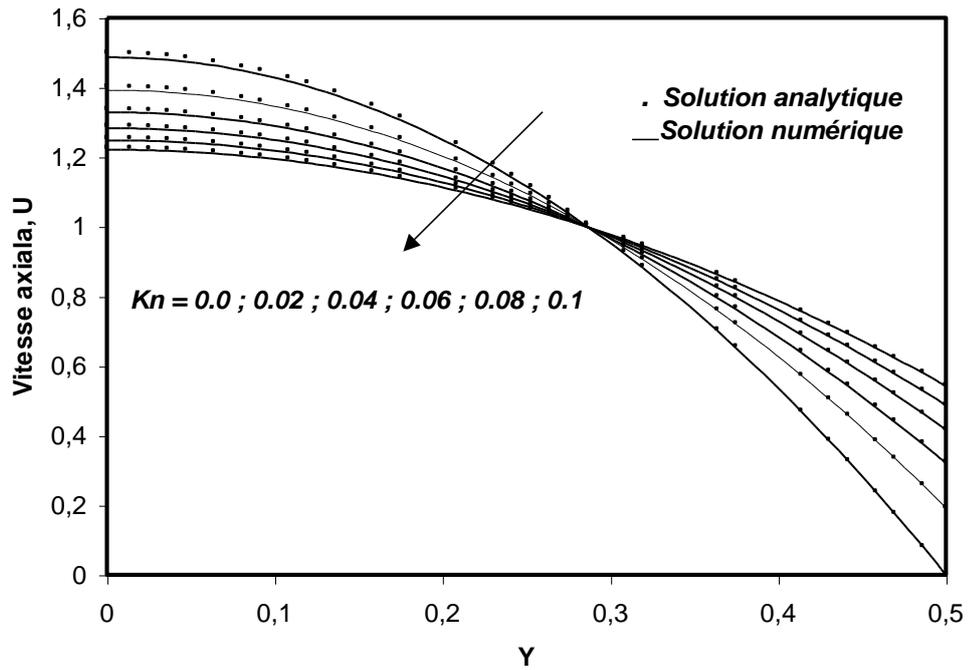


Figure (2.12) Comparaison des profils de vitesse en régime développé calculer avec ceux obtenus analytiquement de Van Rij et al (2007)

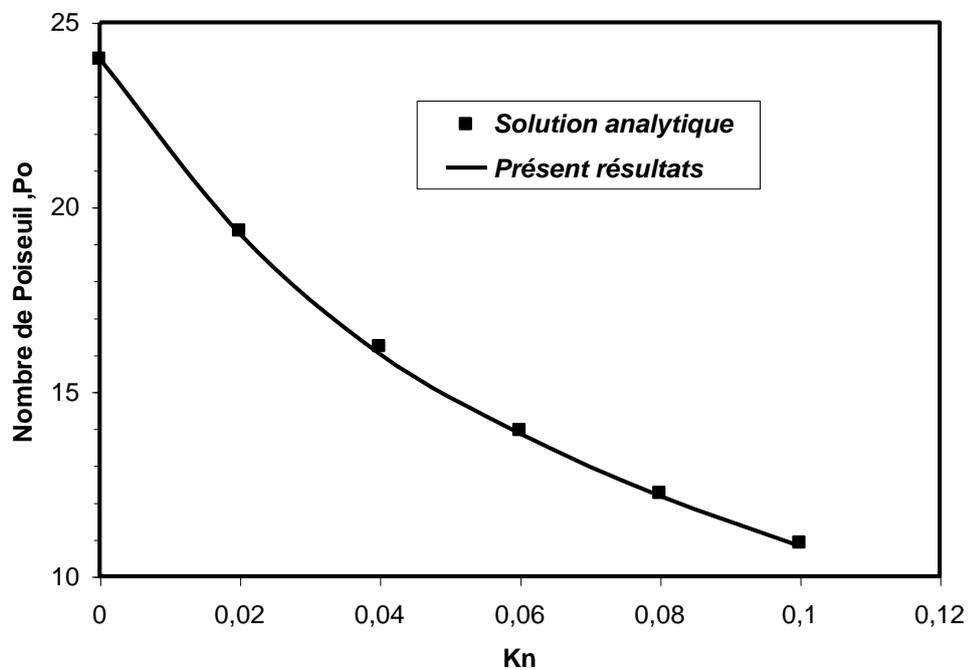


Figure (2.13) Comparaison du nombre de Poiseuille calculer avec ceux obtenus par l'analyse analytique de Hong et al (2007)

---

***Chapitre 03***

***Couplage convection-conduction  
dans un micro-canal plan***

---

## 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan

### 3.1 Introduction

L'application des micro-échangeurs dans l'industrie connaît un essor croissant, ces micro échangeurs sont généralement constitués de micro-canaux où s'écoule un fluide, de nombreux effets ne peuvent plus être négligés, comme c'est souvent le cas à l'échelle macroscopique (effets présentés dans le chapitre 01). Citons parmi ces effets : la dissipation visqueuse, la conduction, la raréfaction (pour les gaz)... Ceci est lié au fait que le rapport surface/volume est nettement supérieur dans ces micros systèmes. En particulier, à cause du confinement, le frottement du fluide induit un dégagement de chaleur de nature à modifier le champ thermique.

Dans le but d'appréhender l'évolution du coefficient de frottement et du coefficient de transfert de chaleur à l'échelle microscopique, plusieurs travaux ont été menés ces dernières années. L'effet de la dissipation visqueuse, a été étudié expérimentalement par TSO and Mahulikar(1997) sur le transfert de chaleur dans des micro-canaux, les auteurs constatent que le nombre de Brinkman est un paramètre important pour évaluer la dissipation visqueuse. L'influence de celle ci est plus importante dans les régimes laminaires que turbulent. Ils proposent le nombre de Brinkman pour corréler les paramètres de transfert de chaleur dans les micro-canaux. Une autre étude expérimentale réalisée aussi par TSO et Mahulikar (1999) sur l'effet de la dissipation visqueuse au moyen du nombre de Brinkman. Les mesures ont été effectuées à partir de thermocouples installés le long du micro-tube. Les auteurs proposent une corrélation pour calculer le nombre de Nusselt en fonction du nombre de Brinkman pour un micro-tube soumis à un flux constant aux parois. G. L. Morini(2005) a mené une expérience sur l'échauffement du fluide due à la

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan

---

dissipation visqueuse dans des micros canaux de géométries différentes, il a conclu que cet effet est important pour les écoulements liquides lorsque le diamètre  $D_h$  est inférieure à 100  $\mu\text{m}$ . Aussi l'auteur propose un critère en fonction des nombres d'Eckert et de Reynolds où l'effet de dissipation visqueuse peut être négligé. Koo J. and Kleinstreuer C.(2004) ont étudié numériquement la convection forcée dans des micro-conduits de géométries différentes, les auteurs constatent que l'effet de la dissipation visqueuse est plus important pour des micro-conduits de rapport d'aspect très élevé et de faible diamètre hydraulique  $D_h < 50$ .

L'effet de la dissipation visqueuse et du développement simultané de la couche limite thermique et hydrodynamique a été étudié numériquement par la méthode des éléments finis par Del Giudice (2007) dans le cas de la convection forcée laminaire dans des micro-canaux. Les auteurs étudient aussi l'effet de la variation linéaire de la viscosité dynamique en fonction de la température, ils confirment l'effet observé des deux paramètres sur le transfert de chaleur. Dans l'analyse macro-échelle, Nguyen(1992) a mené une étude numérique sur la convection forcée laminaire dans des conduites et des plaques parallèles. Le développement thermique a été étudié par la méthode des différences finis pour deux configurations ; tube cylindrique et plaques parallèles. Des corrélations en fonction du nombre de Péclet ont été obtenues pour le développement de la couche limite thermique. Une étude récente sur le développement simultané menée expérimentalement dans un micro-canal rectangulaire de  $D_h = 440 \mu\text{m}$  par Mishan (2007). Les mesures ont été obtenues par camera infrarouge. Les résultats obtenus confirment qu'en tenant compte des effets d'entrée, la théorie conventionnelle est applicable et que les effets souvent négligés à l'échelle macro ne le sont plus dans l'analyse micro.

Un autre phénomène a retenu une attention particulière ces dernières années dans la modélisation du transfert de chaleur dans des micros-canaux, c'est l'effet de la conduction axiale que ce soit dans le fluide, dans le solide ou combinée. L'étude numérique menée par Jambal (2005) sur la convection forcée laminaire dans des plaques parallèles et dans des conduits circulaires par la méthode des différences finies sur l'effet de la dissipation visqueuse et de la conduction axiale dans le fluide a été développée pour différent nombres de Péclet. Les travaux menés par Maranzana (2004) ont porté sur l'influence de la conduction axiale dans les parois des mini- micro-canaux. Les auteurs ont introduit un

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan

---

critère où la conduction axiale peut être négligeable. La recherche des critères limitant l'influence de la conduction axiale a fait l'objet de plusieurs recherches dans l'analyse macro-échelles. Bilir (1995) a étudié le transfert de chaleur conjugué pour un écoulement laminaire en tenant compte de l'épaisseur des parois et de la conduction axiale du liquide : l'influence du rapport de conductivité fluide/paroi, l'épaisseur de la paroi et le nombre de Péclet a été exploré. L'auteur conclut que le paramètre le plus influent est le nombre de Péclet. Piva (1996) a mené une étude analytique sur l'effet de la conduction axiale sur le préchauffage de la convection forcée laminaire. Cole(1997) a étudié le transfert de chaleur conjugué en présence d'une plaque chauffée. L'auteur propose un nouveau critère appelé le nombre de Péclet modifié où la conduction axiale dans le fluide peut être négligée. L'étude numérique menée par Zueco(2004) sur le transfert de chaleur conjugué dans un tube soumis à un saut de température en régime instationnaire montre que la conduction (axial-radiale) bidimensionnelle de la chaleur dans la paroi et dans le fluide joue un rôle significatif dans transfert thermique conjugué instationnaire pour les grandes valeurs du nombre de Péclet. Cependant, la conduction axiale dans les liquides peut être négligeable. Abboudi et Papini (1990) On résolu numériquement par la méthode des différences finies le profil de température dans un canal à plaques parallèles pour une largeur unité, traversé par un fluide en convection forcée, incompressible, en régime d'écoulement laminaire ou turbulent. Les résultats obtenus sont validés expérimentalement à l'aide de mesures faisant intervenir un dispositif de thermographie infrarouge, et mettent en évidence l'influence de la conduction axiale dans le fluide et dans la paroi sur le transfert de chaleur en régime instationnaire. Gamrat et al. (2005) présentent une analyse numérique en utilisant le logiciel Fluent pour simuler la convection forcée laminaire dans un micro-canal rectangulaire d'un rapport d'aspect très élevé. L'espacement est pris égal à 1mm, 0,3 mm et 0,1 mm pour des nombres de Reynolds variant de 200 à 3000. La dissipation visqueuse a été négligée, mais l'étude a pris en compte les effets thermiques d'entrée et les effets conjugués conduction/convection. Les auteurs confrontent leurs résultats numériques à ceux obtenus par les expériences de Gao et al (2002). Ils concluent que la forte diminution du nombre de Nusselt observée dans les expériences ne peut pas être expliquée par l'effet la conduction axiale dans le solide. Récemment Li et al (2007) ont mené des travaux expérimentaux et numériques sur la caractérisation du transfert de chaleur dans un écoulement laminaire liquide dans une micro tube. L'effet de la rugosité a été étudié en premier lieu où les expériences menées sur l'écoulement de l'eau dé-ionisée montrent que pour une rugosité relative inférieure à 1.5 %. Les résultats obtenus pour le coefficient de

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan

---

frottement présentent une différence par rapport à ceux obtenus à la macro échelle. Dans la deuxième partie, les auteurs constatent que l'influence de la conduction axiale est plus prononcée lorsque le nombre de Reynolds est petit et lorsque l'épaisseur de la paroi est grande.

Le but de la présente étude est de simuler numériquement, par la méthode des volumes finis, l'écoulement laminaire d'un fluide newtonien dans un micro-canal en tenant compte de la conduction axiale combinée (fluide/paroi), du développement simultané de la couche limite thermique et dynamique, et de la dissipation visqueuse.

#### 3.2 Paramètres de l'études.

Une étude paramétrique est effectuée sur les effets de la dissipation visqueuse et de la conduction axiale sur la convection forcée dans des micro-canaux à plaques parallèles. La longueur adimensionnée du micro-canal est égale à 10 (équation 3.1) afin d'obtenir les effets de la dissipation visqueuse qui nécessitent une longueur importante du micro-canal.

$$X_{max}^+ = \frac{2L}{D_h Re} = 10 \quad (3.1)$$

La hauteur du micro-canal est égale  $H = 1$ . L'épaisseur de la paroi est prise égale à  $\Delta = 0.1H, 0.2H, 0.5H$  et  $2H$ . Cette dernière configuration, c'est-à-dire lorsque l'épaisseur de la paroi est plus grande que la hauteur du micro canal, est souvent rencontrée dans les micro-canaux qui sont généralement gravés à l'intérieur des systèmes. Les nombres de Prandtl sont égaux à 0.7 et 7 correspondant à l'air et à l'eau respectivement. Le nombre de Reynolds est égal à 100. Trois valeurs du rapport de la conductivité thermique solide/fluide ont été considérées

$$k_s/k_f = 1, 10 \text{ et } 100 \quad (3.2)$$

Les équations constituant le modèle mathématique sont résolues numériquement par la méthode des volumes finis. Le domaine d'étude est divisé en  $202 \times 282$  nœuds pour une

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan

épaisseur de la paroi  $E = 0.1$ . Une grille non-uniforme est employée dans la direction X. Dans la direction Y, le pas  $\Delta y$  est constant dans le solide et dans le fluide pour les différentes épaisseurs de paroi utilisée dans les calculs. Selon X nous avons employé la relation de Tchebychev suivante pour l'évolution des tailles des mailles :

$$ang = \frac{\pi}{2(i-2)} \quad (3.3)$$

$$\Delta(i) = L[\cos((i-1).ang) - \cos(i.ang)] \quad (3.4)$$

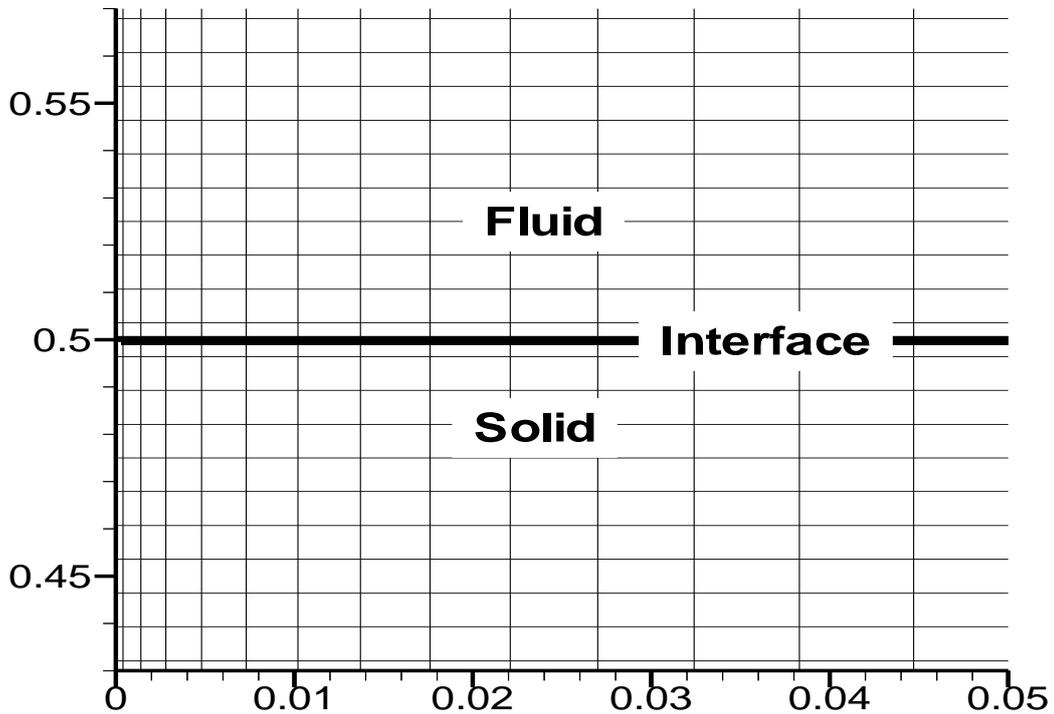


Figure 3.1 Partie du maillage utilisé dans la présente étude.

Les vitesses U et V sont calculées en chaque position  $X^+$ , elles sont ensuite transposées aux points correspondant  $X^*$  pour être utilisées dans l'équation de l'énergie. Il est nécessaire de respecter leurs positionnements dans le nouveau domaine de résolution de l'équation d'énergie. Pour cela, toutes les dimensions du maillage employées pour la résolution de la

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan

vitesse et de la pression seront divisées par le nombre de Prandtl, puisque  $X^+$  et  $X^*$  sont reliés par la relation suivante :

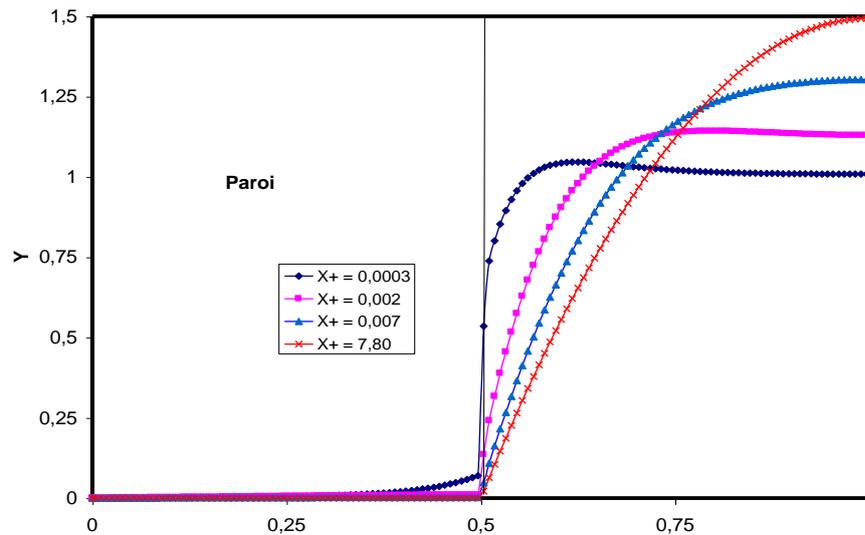
$$X^* = \frac{X^+}{Pr} \quad (3.5)$$

Le problème a été résolu par la méthode de discrétisation des volumes finis dans tout le domaine d'étude paroi+fluide présentée au chapitre 2.

#### 3.3 Résultats et discussions.

##### 3.3.1 Champs hydrodynamiques

###### 3.3.1.1 Evolutions de la couche limite hydrodynamique

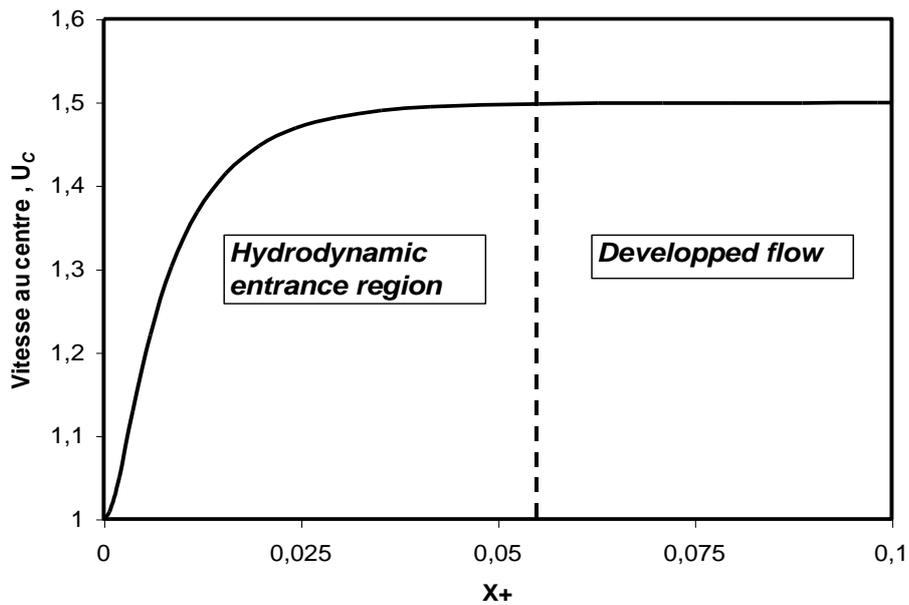


**Figure 3.2 Profils de vitesses aux points (a)  $X^+ = 0.0003$ , (b)  $X^+ = 0.002$ , (c)  $X^+ = 0.007$ , et (d)  $X^+ = 7.8$ , Pour  $Re = 100$ .**

L'évolution des profils de vitesses le long du micro canal est schématisée par la figure (3.2). A l'entrée du micro-canal, nous imposons un profil de vitesse unitaire  $U = 1$ , qui commence à se développer d'une station à une autre. Sur la station  $x^+ = 0.0003$ , on voit

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan

l'apparition d'un gradient de vitesse près de la paroi du fait des forces de viscosité .Au fur et à mesure que  $x^+$  augmente, la vitesse au centre du canal augmente et se stabilise à une valeur maximale  $U_{\max} = 1.5$  (station  $x^+ = 7.80$ ). A cette abscisse, le profil est parabolique, caractéristique du régime laminaire établi. Notons qu'il n'y a pas d'influence du champ thermique sur les vitesses du fait que nous considérons un fluide non thermo-dépendant (problèmes dynamique et thermique non couplés).



**Figure 3.3 Evolution de la vitesse au centre du micro-canal pour  $Re = 100$ , et  $E = 0.5$ .**

Nous recherchons l'abscisse où la couche limite hydrodynamique est développée. Pour cela on considère que cette abscisse est localisée lorsque la différence entre deux vitesses axiales maximales  $U_{\max}$  successive situées à des distance  $X_i^+$  et  $X_{i+1}^+$  le long du micro-canal est inférieure à 1% (équation (3.6))

$$U_{\max, X_i^+} - U_{\max, X_{i-1}^+} \leq 0.01 \quad (3.6)$$

Dans notre étude cette abscisse est localisée à :

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan

---

$$X^+ = \frac{x}{D_h Re} = 5.55e - 2 \quad (3.7)$$

Ou bien

$$L_{cd} = 0.055 D_h Re \quad (3.8)$$

Sur la figure 3.3, l'évolution de la vitesse au centre du micro-canal ne varie plus à partir de  $X^+ = 0.052$ , cette abscisse correspond à la longueur d'établissement de la couche limite hydrodynamique (zone d'entrée dynamique) déterminée dans l'analyse macro-échelles.

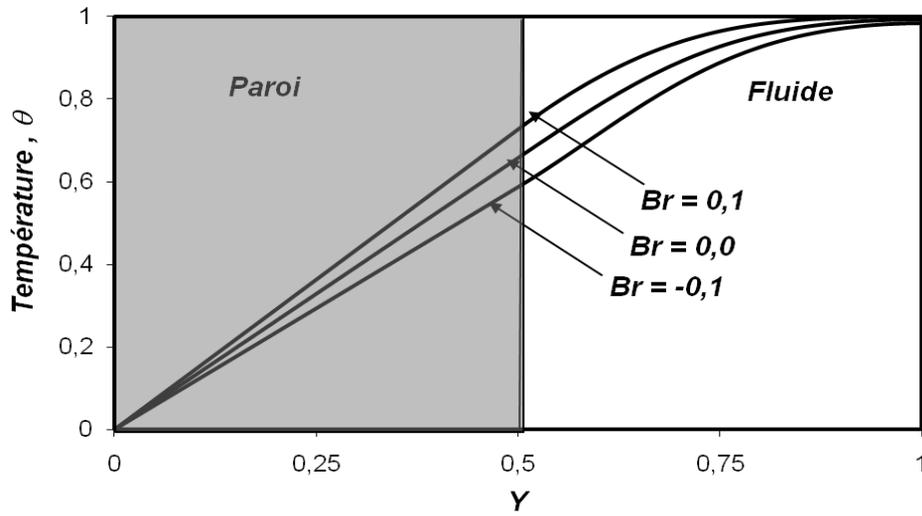
#### 3.3.2 Profils de température

L'évolution des profils de température le long du micro-canal est donnée dans les figures 3.4a-3.4d. Vu la symétrie du problème, ces profils sont représentés jusqu'à  $H/2$ . Ils sont calculés pour  $Br = 0, 1$  ;  $0$  et  $-0,1$ ,  $Re = 100$ ,  $K^+ = 1$  et  $Pr = 7$ .  $Br = 0$  correspond à un écoulement sans dissipation visqueuse,  $Br < 0$  est associé à un échauffement du fluide au contact de la paroi ( $T_e < T_w$ ), et  $Br > 0$  correspond à la situation où le fluide se refroidit ( $T_e > T_w$ ).

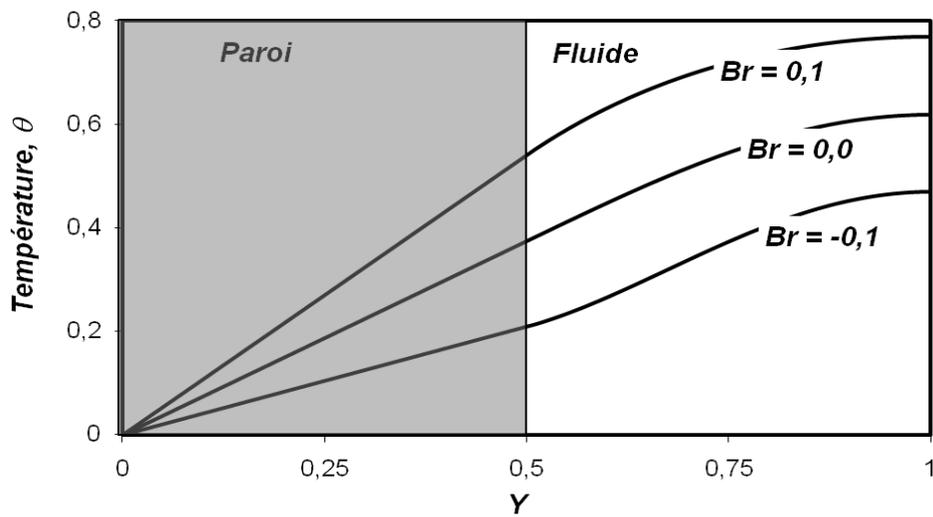
On peut noter sur la figure 3.4a ( $X^* = 0,005$ ), qu'à l'entrée du canal les trois profils de température dans le fluide sont confondus au centre, mais se dissocient au fur et à mesure que l'on s'approche de la paroi. La température adimensionnée au centre est d'environ 1, et le gradient de température est le même dans le fluide et dans le solide à l'interface fluide/solide lorsque  $K = 1$ . L'influence de la dissipation visqueuse commence à se faire sentir à  $X^* = 0.042$  (figure. 3.4b).

La différence entre les profils pour les trois valeurs de  $Br$  est de plus en plus grande lorsque le fluide progresse le long du micro-canal. On peut noter que à  $X^* = 0.1$ , le profil pour le  $Br = - 0.1$  présente des distorsions dans la zone fluide qui se trouve près de l'interface avec la paroi. Le gradient de température est négatif dans cette zone et devient positif à l'approche du centre du micro-canal.

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan

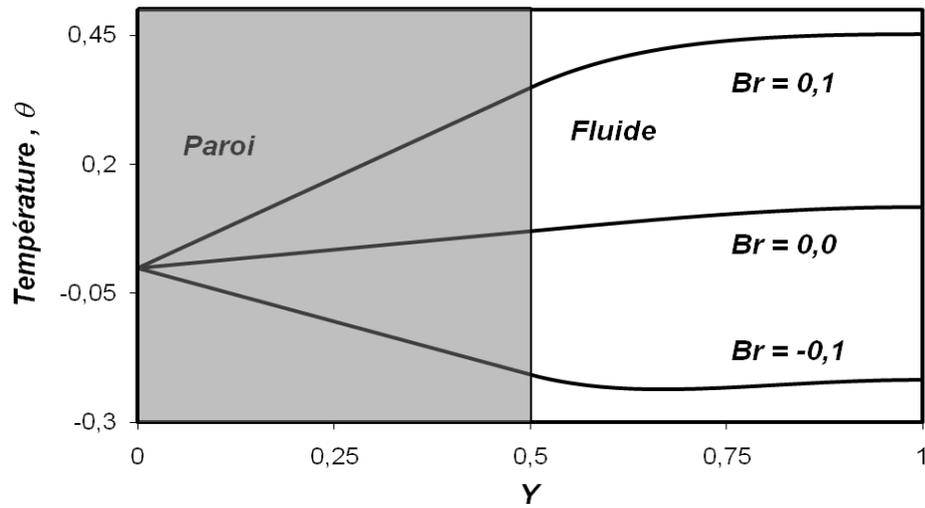


(a)  $X^* = 0,005$

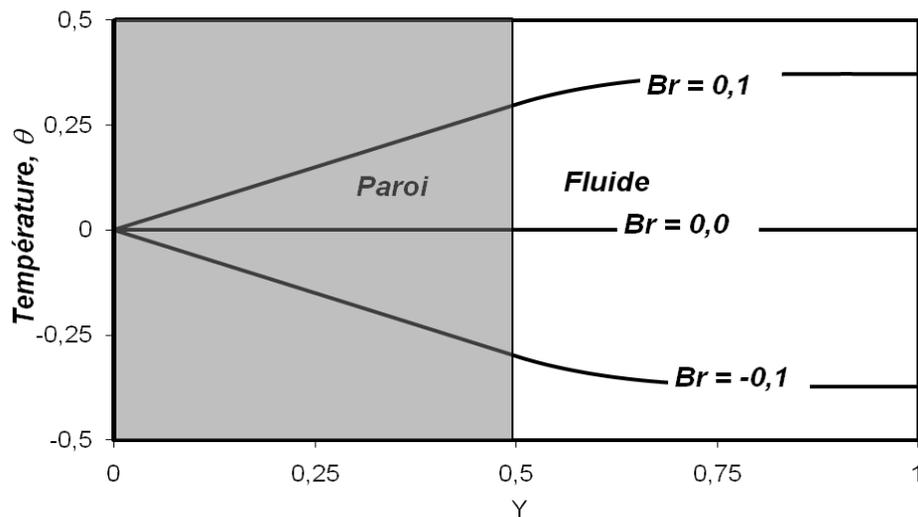


(b)  $X^* = 0,042$

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan



(c)  $X^* = 0,36$



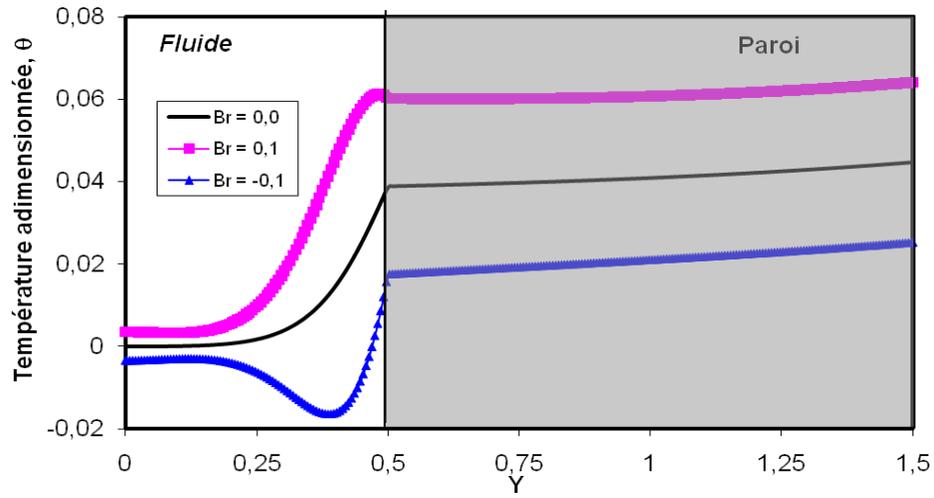
(d)  $X^* = 1,5$

**Figure 3.4: Evolution des profils de température pour différents nombres de Brinkman dans un micro-canal soumis à une température constante**

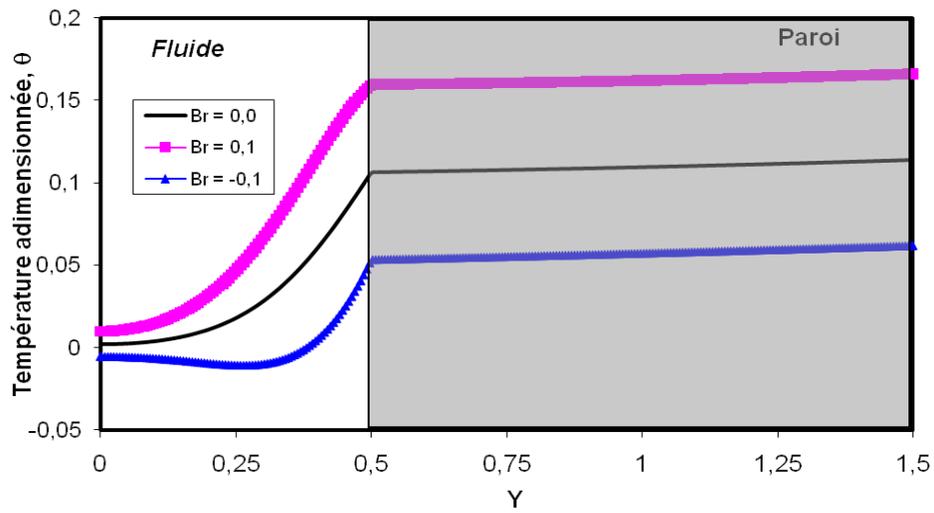
$Re = 100, Pr = 7, K^+ = 1, E = 0.5$  et  $Br = 0,1 ; 0,0 ; -0,1$

(a)  $X^* = 0.005$  ; (b)  $X^* = 0.042$  ; (c)  $X^* = 0.36$  ; (d)  $X^* = 1.5$

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan

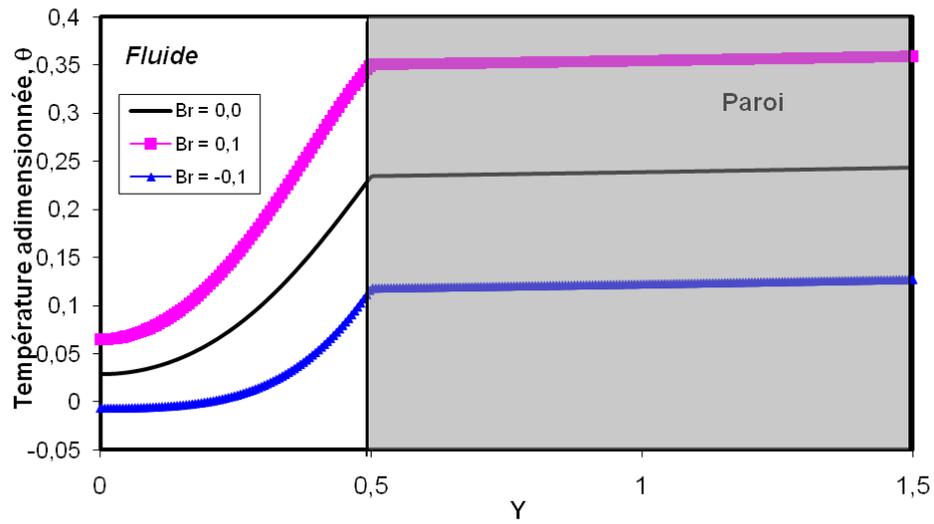


(a)  $X^* = 0,0005$

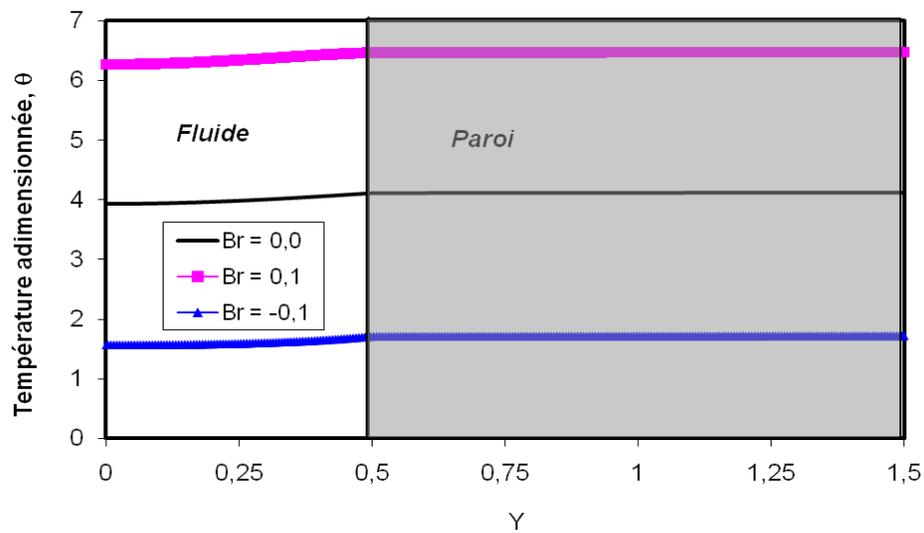


(b)  $X^* = 0,001$

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan



(c)  $X^* = 0,5$



(d)  $X^* = 1$

**Figure 3.5: Evolution des profils de température pour différents nombres de Brinkman dans un micro-canal soumis à un flux constant.**

$Re = 100, Pr = 0.7, K^+ = 1, E = 1$  et  $Br = 0,1 ; 0,0 ; -0,1$

(a)  $X^* = 0.0005$  ;(b)  $X^* = 0.001$  ;(c)  $X^* = 0.5$  ;(d)  $X^* = 0.5$

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan

Les figures (3.5)(a ; b ; c ; d) montrent l'évolution des profils de température le long du micro-canal lorsque la paroi extérieure est soumise à un flux constant pour une épaisseur de la paroi du micro-canal  $E = 1$ , un rapport de conductivités thermiques  $K = 100$ ,  $Pr = 0.7$  et pour différents nombres de Brinkman.

Là aussi, à l'entrée du canal ( $X^* = 0,0005$ ), les trois profils de température dans le fluide sont confondus au centre, mais se dissocient au fur et à mesure que l'on s'approche de la paroi. La température au centre est d'environ 0. L'influence de la dissipation visqueuse commence à se faire sentir dès l'entrée du canal. La différence entre les profils pour les trois valeurs de  $Br$  est de plus en plus grande lorsque le fluide progresse le long du micro-canal. Dans la paroi du micro-canal le gradient de température est presque nul ( $K = 100$  paroi très conductrice).

#### 3.3.3 Champs de températures

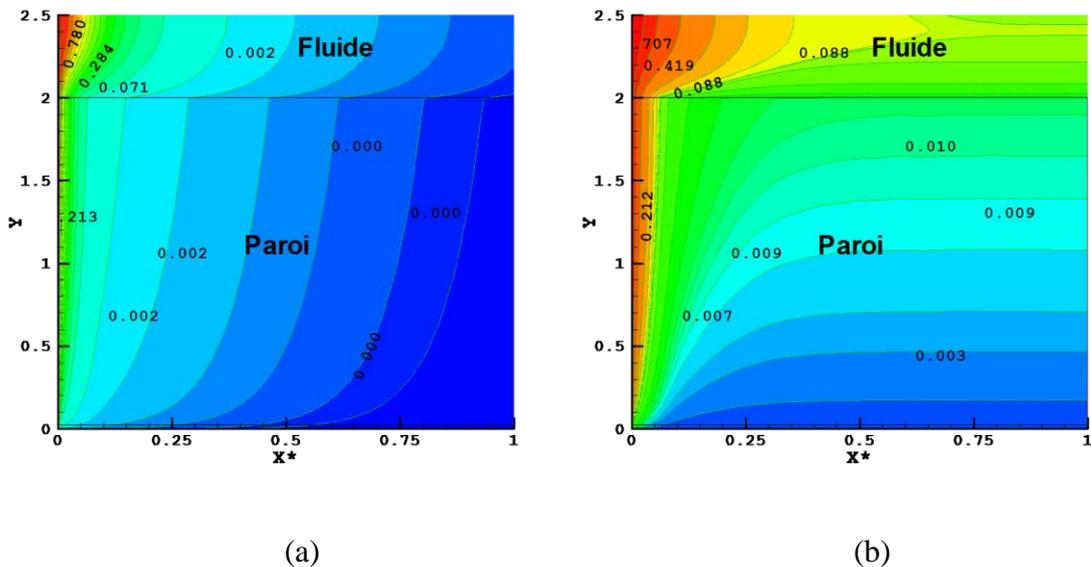
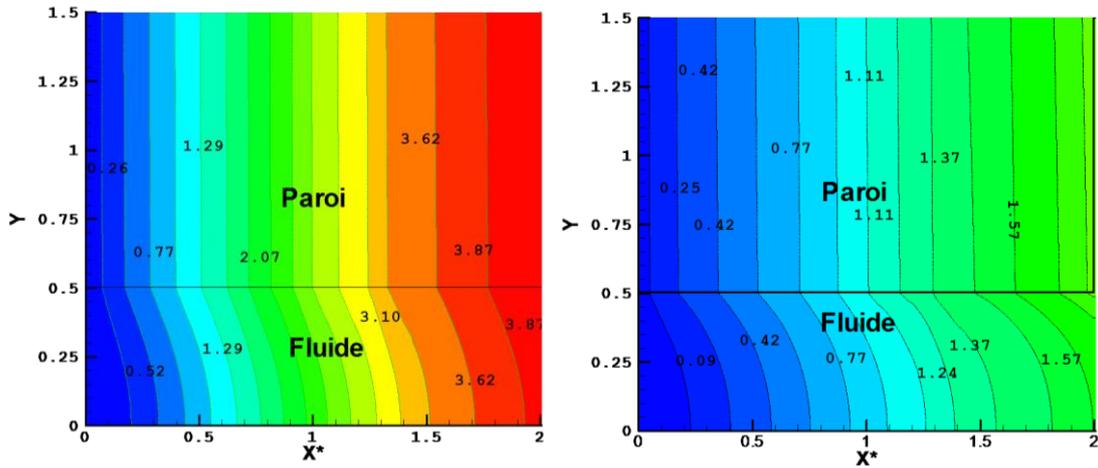


Figure 3.6 Isotherms pour  $K = 100$ ,  $E = 2$ ; (a)  $Br = 0.0$  ; (b)  $Br = 0.1$   
Cas d'une température imposée.

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan

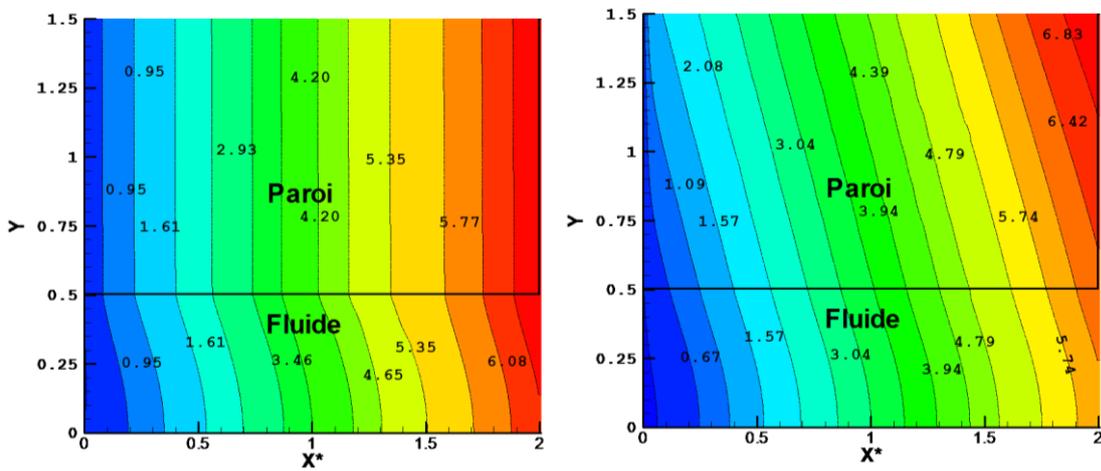
Les effets de la dissipation visqueuse dans le fluide et la conduction axiale dans la paroi sont montrées à travers les lignes isothermes représentées dans les figures 3.6a et 3.6b pour une

paroi épaisse ( $E = \frac{\Delta}{H} = 2$ ) avec une conductivité élevée ( $K = \frac{k_s}{k_f} = 100$ ).



(a)

(b)



(c)

(d)

Figure 3.7 Isotherms pour  $E = 1$ ; (a)  $Br = 0.0; K = 100$ ; (b)  $Br = -0.1; K = 100$   
(c)  $Br = -0.1; K = 100$ ; (d)  $Br = 0.1, K = 1$ . Cas d'un flux imposé.

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan

---

Puisque le problème est symétrique, seule la moitié inférieure du domaine est présentée sur ces figures, ainsi  $Y=2.5$  représente le plan de symétrie axial du micro-canal.

Comparé à un profil linéaire quand la conduction axiale est négligée ( $Br = 0$ ), les profils de température dans le solide sont fortement tordus (cas où  $Br = 0,1$ ). Ces déformations sont dues à la dissipation visqueuse, ce qui a produit une variation significative du champ thermique dans le fluide et dans la paroi. Ils sont amplifiés à la section d'entrée dans la partie solide du micro-canal, puisque on impose une condition de profil de température uniforme au fluide et au solide à l'entrée. Cette condition est justifiée parce que ce micro-canal peut constituer une partie d'un échangeur de chaleur micro-canaux multiples. Le fluide à l'entrée de l'échangeur de chaleur serait en contact avec les parois qui auront la même température que le fluide à l'entrée.

La distribution de la chaleur dans le cas où on impose un flux constant à la paroi comme condition aux limites est schématisée dans la figure (3.7). Les distributions de la température dans le canal sont identiques pour les trois valeurs du nombre de Brinkman figure 3.7 a-b et c, les valeurs de la température maximale du fluide à la sortie du canal sont  $\theta = 6.08$  pour  $Br = 0.1$ ,  $\theta = 3.87$  pour  $Br = 0,0$  ;  $\theta = 1.57$  pour  $Br = -0.1$ . Ce qui montre un sur-chauffage du fluide pour  $Br > 0$ . L'intensité du chauffage par flux constant est plus importante que dans le cas où on chauffe le canal par température constante. En effet, le chauffage visqueux qui a généré une variation significative du champ thermique dans le fluide et dans le solide, (figure (3.6b)) est amoindri dans le cas où impose une température constante à la surface externe de la paroi.

#### 3.3.4 Nombre de Nusselt local

Le nombre de Nusselt est déterminé à partir de l'égalité du flux convectif et conductif à l'interface fluide/solide comme suit :

$$\varphi_{int} = -k_{in} \frac{\partial T}{\partial y} = h(T_b - T_w) \quad (3.9)$$

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan

On multiplie par le diamètre hydraulique  $D_h$ , et on divise par la conductivité thermique du fluide  $k$  les deux membres de l'équation (3.9) afin de faire apparaître le nombre de Nusselt, on aura :

$$Nu = \frac{hD_h}{k} = \frac{k_{int}}{k} \frac{-D_h \frac{\partial T}{\partial y}}{(T_b - T_w)} \quad (3.10)$$

L'adimensionalisation de l'équation (3.10) donne l'expression du nombre de Nusselt pour les deux types de conditions aux limites considérées dans la présente étude à savoir flux imposé ou température fixe à la paroi.

$$Nu = K_{int} \frac{-2 \frac{\partial \theta}{\partial Y}}{(\theta_b - \theta_w)} \quad (3.11)$$

Avec

$$K_{int} = \frac{k_{int}}{k} \quad (3.12)$$

$K_{int}$  est le rapport des conductivités thermiques à l'interface, il est évalué à l'aide d'une moyenne harmonique

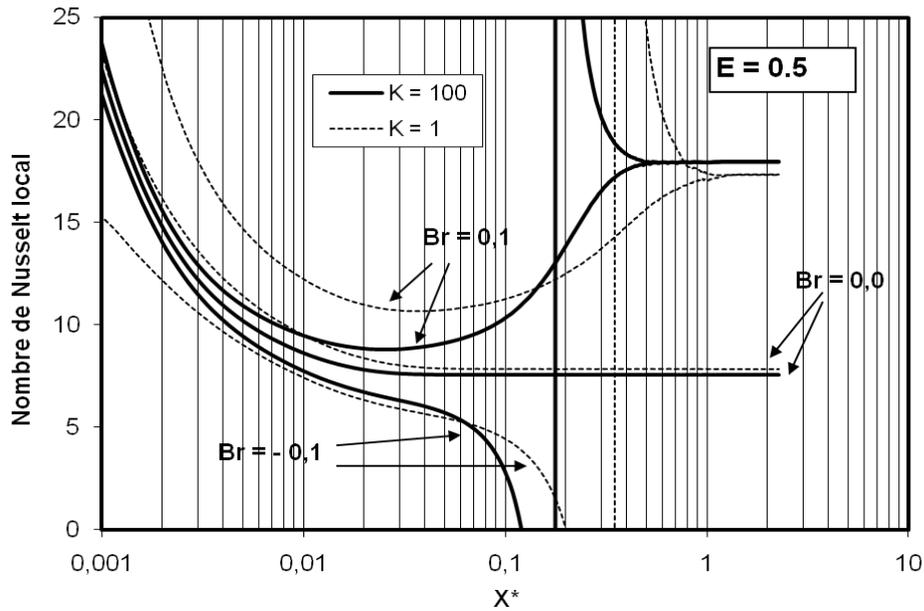
$\theta_b$  est la Température adimensionnelle moyenne du mélange définit comme suit :

$$\theta_b = \int_0^Y U^+ \theta dY / \int_0^Y U^+ dY \quad (3.13)$$

Et  $\theta_w$  : Température adimensionnelle à l'interface fluide-paroi.

Nous présentons dans la figure 3.8 une comparaison entre  $K = 1$  et  $K = 100$  de la variation du nombre de Nusselt ( $Nu_x$ ) le long du micro-canal dans le cas de température à la paroi constante pour trois valeurs du nombre de Brinkman.

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan

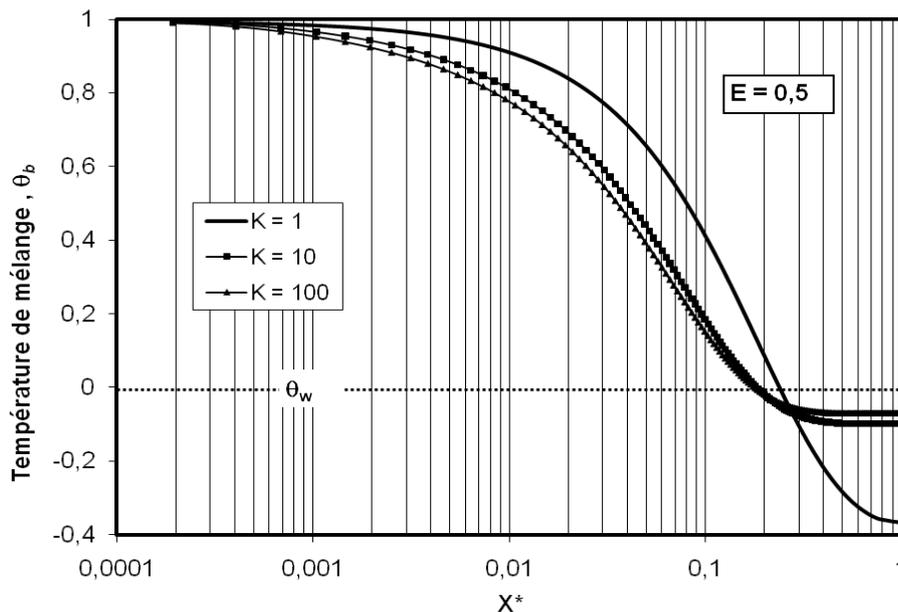


**Figure 3.8** Variation du nombre de Nusselt local  $Nu_T$  pour  $Re = 100$ ,  $Pr = 7$  et  $E = 0.5$

L'effet conjugué de la dissipation visqueuse et du rapport des conductivités  $K$  sur le nombre de Nusselt local est bien mis en évidence sur la figure 3.8. Notons que cette influence est accentuée pour les petites valeurs de  $X^*$ . En effet, nous pouvons remarquer dans cette zone que, quoique l'allure des courbes pour les 3 valeurs de  $Br$  est la même, les écarts entre elles sont d'autant plus élevé que le rapport  $K$  est faible. Quand  $X^*$  augmente, les 3 courbes se dissocient de plus en plus, et une divergence entre leurs évolutions apparaît autour de  $X^* \approx 0,1$ . Pour une dissipation visqueuse nulle ( $Br = 0$ ), le  $Nu_x$  décroît vers une valeur asymptotique. Celle-ci est atteinte autour de  $X^* = 0,05$  ( $Nu_\infty = 7.54$  pour  $K = 100$  et  $7.86$  pour  $K = 1$ ). Dans le cas d'un refroidissement du fluide au contact avec la paroi ( $Br > 0$ ), son échauffement dû à la dissipation visqueuse provoque une augmentation de sa température de mélange ( $\theta_b$ ), et par conséquent, une augmentation de  $Nu_x$ . Ainsi, le  $Nu_x$  augmente à partir de  $X^* = 0,05$  puis tend vers une valeur constante associée à un écoulement développé. L'évolution de  $Nu_x$  pour  $Br = -0,1$  (échauffement du fluide) présente une discontinuité autour de  $X^* \approx 0,2$ : où la température du mélange  $\theta_b$  serait égale à la température de la paroi  $\theta_w$  le nombre de Nusselt local devient insignifiant et diminue

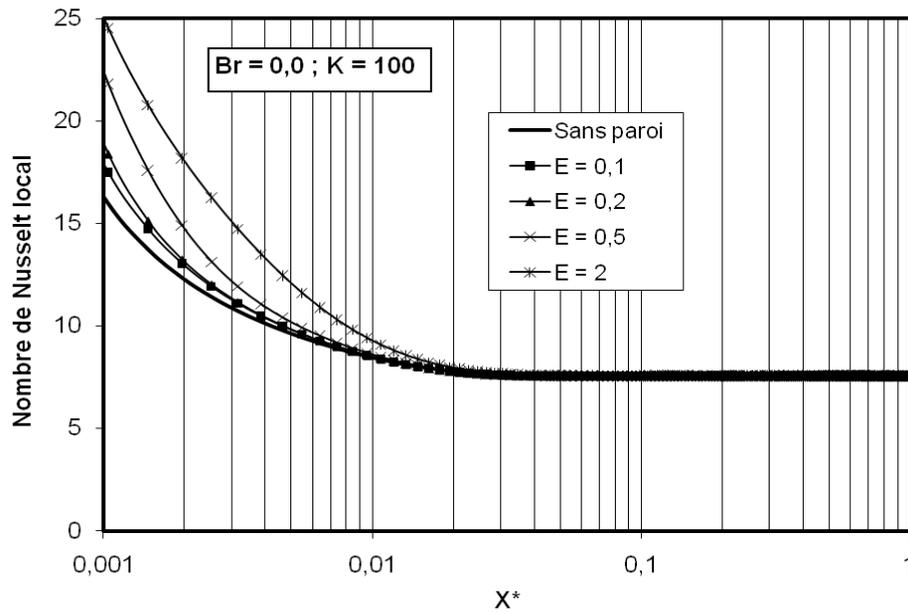
### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan

rapidement vers moins l'infini, puis augmente brusquement vers plus l'infini, C'est dû au fait que la génération de chaleur par la dissipation visqueuse augmente la température du mélange du fluide qui passe de  $T_{in}$  à l'entrée du micro-canal jusqu'à une certaine température supérieure à  $T_w$ . L'évolution des températures du mélange le long du micro-canal pour  $k = 1, 10$  et  $100$  obtenue pour  $Br = -0.1$  sont montrées dans la figure 3.9. On note que le signe de  $\theta_b(x)$  change à la même coordonnée  $x$  où le nombre de Nusselt local subit un saut de plus l'infini à moins l'infini. Après cela, le Nusselt local décroît de nouveau pour tendre vers la même valeur asymptotique correspondant au régime établi avec  $Br = 0,1$ . L'abscisse  $X^*_c$  à laquelle le régime devient établi est plus proche de l'entrée pour  $K = 10$  que lorsque  $K = 1$ . Ceci signifie qu'une faible conductivité de la paroi ( $k_s$ ) tend à retarder l'établissement du régime du transfert, et à augmenter la zone du développement thermique.

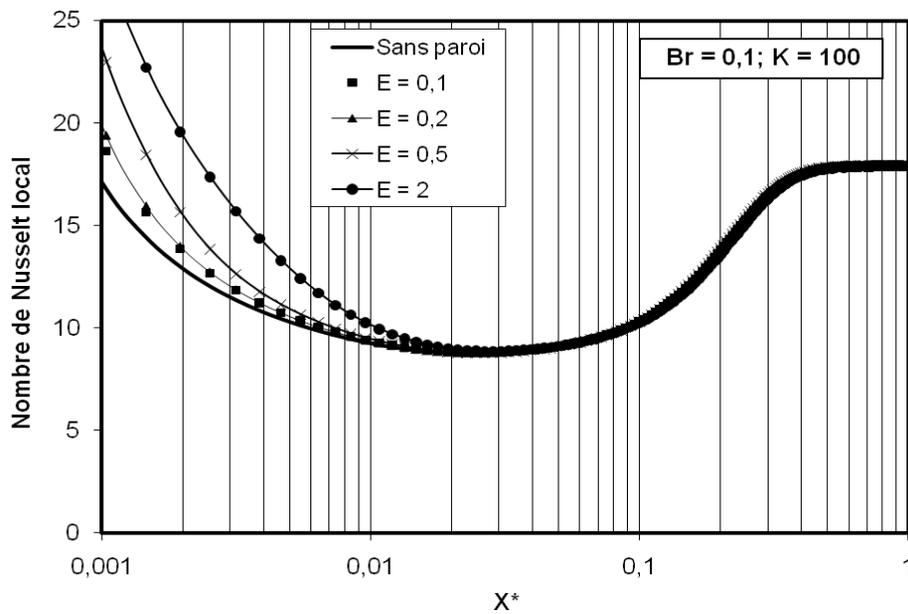


**Figure 3.9** Variation de la température du mélange du fluide en fonction de  $X^*$  ( $Br = -0.1$ )  
Cas d'une température imposée.

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan

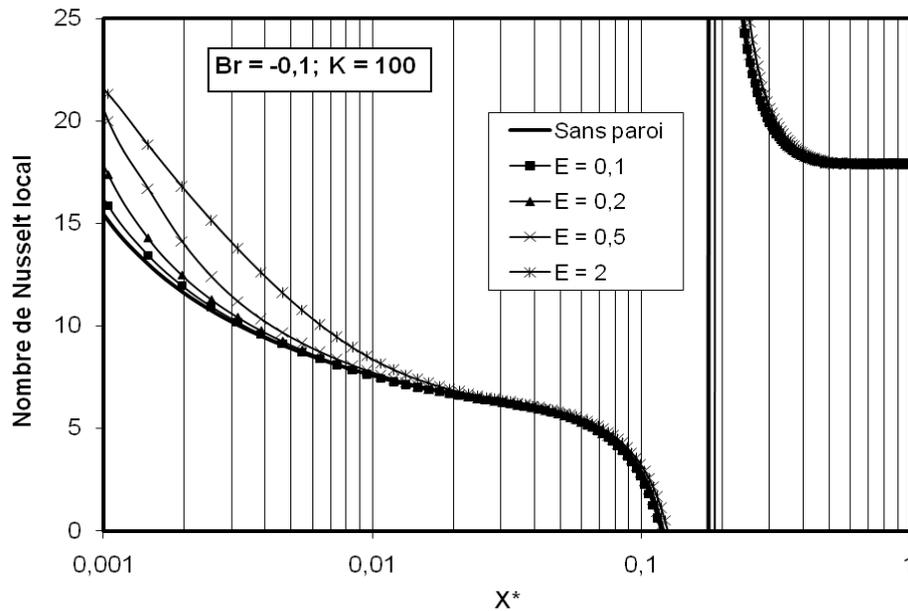


**Figure 3.10** Variation du nombre local de Nusselt  $Nu_T$  pour différente épaisseurs de la paroi.  
( $Re = 100, Pr = 7, Br = 0$ )



**Figure 3.11** Variation du nombre local de Nusselt  $Nu_T$  pour différente épaisseurs de la paroi.  
( $Re = 100, Pr = 7, Br = 0,1$ )

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan



**Figure 3.12** Variation du nombre local de Nusselt  $Nu_T$  pour différentes épaisseurs de la paroi.  
( $Re = 100, Pr = 7, Br = -0,1$ )

Les figures (3.10),(3.11), et (3.12) montrent l'influence de l'épaisseur de la paroi sur l'évolution du nombre de Nusselt local pour différent nombre de Brinkman. L'effet de l'épaisseur de la paroi sur le transfert de chaleur est localisé à l'entrée du micro-canal, en effet lorsque  $E$  augmente  $Nu_x$  augmente. En dehors de la zone de développement simultanée de la couche limite hydrodynamique et thermique, les courbes de l'évolution du nombre de Nusselt local le long du micro-canal sont confondues.

Un examen des valeurs de  $Nu_\infty$  obtenues dans la zone où l'écoulement est établi (tableau 3.1) montre que l'influence conjuguée de la paroi ainsi que la dissipation visqueuse se fait sentir même loin de l'entrée. La comparaison avec les résultats de Jambal et al. (2005), qui ont étudié l'effet de la dissipation visqueuse des fluides non-newtoniens sans tenir compte de l'épaisseur des parois, est présentée sur le tableau 3.1.

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan

**Tableau 3.1 : Nombre de Nusselt en régime établi  $Nu_{T\infty}$**

	<b>E = 0.1</b>	<b>E = 0.2</b>	<b>E = 0.5</b>	<b>E = 2</b>	<b>E = 0,1</b>	<b>E = 0,2</b>	<b>E = 0,5</b>	<b>E = 2</b>	<b>Jambal[2005]</b>	
	<b>Pr=0,7</b>				<b>Pr = 7</b>				Sans paroi	
	<b>K = 1</b>				<b>K = 1</b>				<b>Pe →</b>	<b>Pe = 10</b>
<b>Br = 0.0</b>	7,625	7,731	7,883	7,884	7,614	7,718	7,863	7,864	7,54	7,628
<b>Br = 0.1</b>	17,358	17,234	17,147	17,039	17,392	17,349	17,360	17,990	17,5	17,5
<b>Br = -0.1</b>	17,358	17,234	17,147	17,039	17,392	17,349	17,360	17,990	17,5	17,5
	<b>K = 10</b>				<b>K = 10</b>					
<b>Br = 0.0</b>	7,555	7,574	7,637	7,826	7,549	7,572	7,632	7,812	7,54	7,628
<b>Br = 0.1</b>	17,920	17,829	17,803	17,714	17,903	17,893	17,871	17,847	17,5	17,5
<b>Br = -0.1</b>	17,920	17,829	17,803	17,714	17,903	17,893	17,871	17,847	17,5	17,5
	<b>K = 100</b>				<b>K = 100</b>					
<b>Br = 0.0</b>	7,543	7,541	7,548	7,582	7,537	7,539	7,547	7,580	7,54	7,628
<b>Br = 0.1</b>	17,979	17,896	17,890	17,879	17,956	17,956	17,951	17,943	17,5	17,5
<b>Br = -0.1</b>	17,979	17,896	17,890	17,879	17,956	17,956	17,951	17,943	17,5	17,5

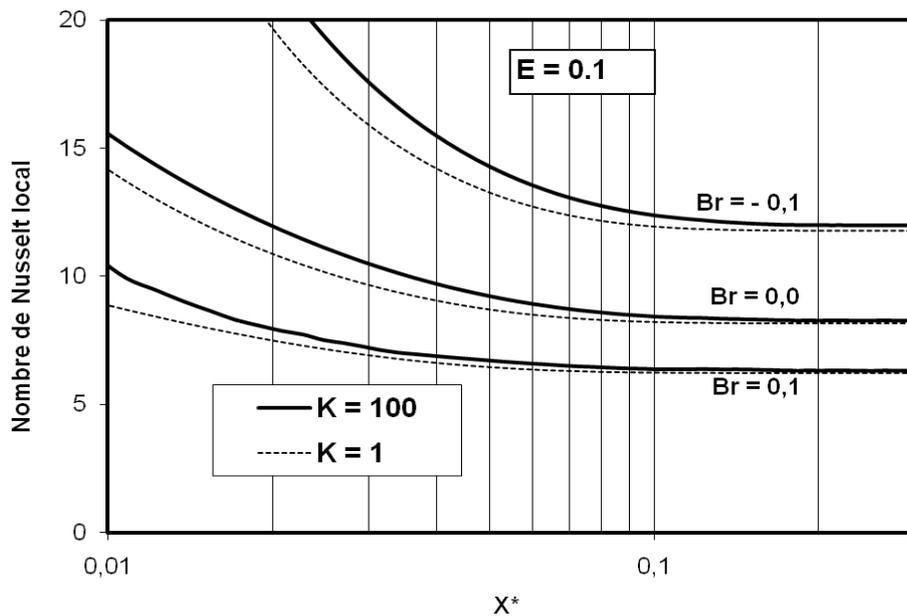
Pour  $Br = 0$ , les résultats montrent que la conductivité de la paroi (donc de  $K$ ), joue le même effet sur  $Nu_{\infty}$  que le nombre de Péclet :  $Nu_{\infty}$  augmente quand  $K$  diminue. Cependant, quand la dissipation visqueuse n'est pas négligeable ( $Br \neq 0$ ),  $Nu_{\infty}$  diminue quand  $K$  diminue. Les valeurs du nombre de Nusselt au régime établi changent avec le rapport de conductivité thermique, elles peuvent être soit inférieures ou supérieures aux valeurs asymptotiques connues dans la littérature pour  $Br \neq 0$ . Par contre pour un  $Br = 0$  ces valeurs tendent à celles du régime établi pour de grandes valeurs du rapport  $K$ . Un examen des valeurs de  $Nu_{\infty}$  obtenu dans la région de l'écoulement développé prouve que l'influence de la conduction axiale dans le solide est clairement accentuée même loin de l'entrée.

Les figures (3,13) et (3.14) montrent la variation du nombre de Nusselt local  $Nu_{H2}$  en fonction de la coordonnée axiale  $X^*$  pour différentes épaisseurs de la paroi, nombre de Brinkman et rapport de conductivité thermique  $K$ . Lorsqu'un flux constant est imposé comme condition aux limites thermiques le Nusselt local décroît dès l'entrée du micro-canal et tend vers des valeurs asymptotiques spécifiques pour chaque  $Br$ . Pour  $Br = 0$  le Nusselt au régime établi est  $Nu = 8.24$  et pour  $Br = 0.1$  le Nusselt au régime établi serait  $Nu = 6.25$  soit une diminution de presque 25 %. Pour  $Br = -0,1$  le Nusselt  $Nu = 12,1$ .

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan

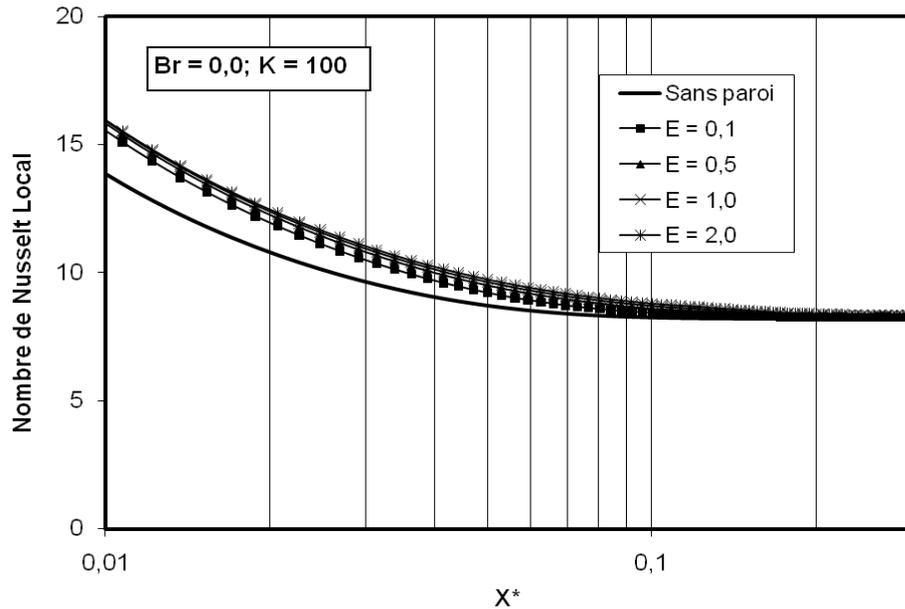
La longueur d'établissement thermique est de  $L_t = 0,09$  pour  $Br = 0,1$  par contre lorsque  $Br = 0$  cette longueur augmente encore est devient  $L_t = 0,15$ . Sa valeur maximale atteinte pour le cas où  $Br = -0,1$  est  $L_t = 0,2$ . On peut dire que lorsque le  $Br$  augmente, la longueur d'établissement thermique diminue. L'effet de l'épaisseur de la paroi est localisé aussi à l'entrée du micro canal. Une nette distinction de l'évolution du nombre de Nusselt local le long du micro-canal est remarquable pour des parois d'épaisseur  $E \neq 0$  par rapport au cas d'un canal sans paroi lorsqu'on augmente l'épaisseur  $E$  une légère différence toujours localisé à l'entrée apparait pour les différentes courbes, puis elles se joignent à la sortie du micro-canal.

De la figure (3.13) l'effet de la conduction axiale dans le solide et du rapport de conductivité thermique sur le nombre de Nusselt est localisée a l'entrée du micro-canal, lorsque le rapport de conductivité thermique  $K$  augmente le transfert de chaleur augmente aussi.



**Figure 3.13** Variation du nombre de Nusselt local  $Nu_q$ .  
( $Re = 100$ ,  $Pr = 7$  et  $E = 0,1$ )

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan



**Figure 3.14** Variation du nombre local de Nusselt  $Nu_q$  pour différente épaisseurs de la paroi.  
( $Re = 100, Pr = 7$ )

Dans la littérature, Peterson(1999) et Maranzana(2004) ont introduit un nombre adimensionnel ( $M$ ) pour quantifier l'effet de la conduction axiale dans le solide. Ce nombre est défini par :

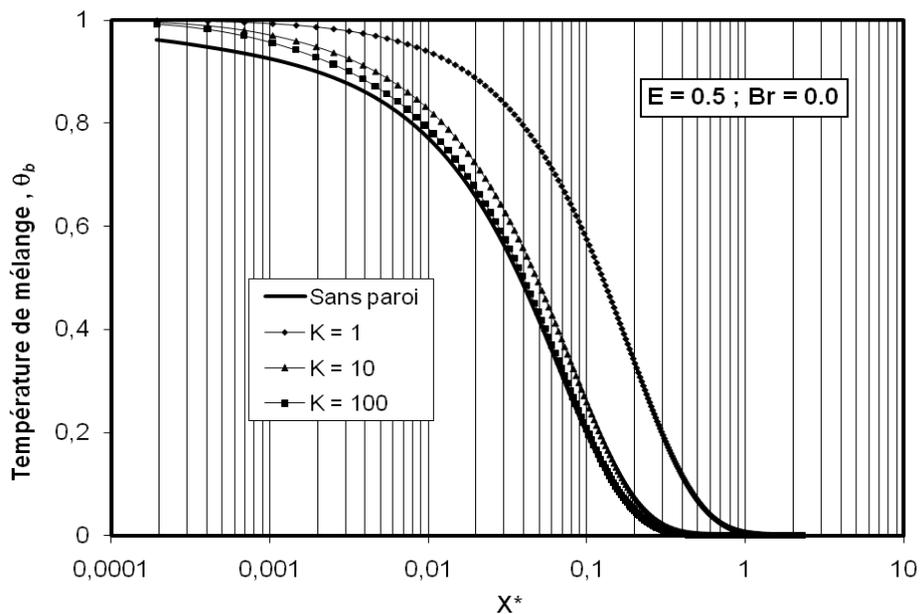
$$M = \frac{k_s \Delta / L}{\rho C_f H U_e} \quad (3.14)$$

Lorsque  $M \ll 1$ , l'effet de la conduction axiale n'est pas significatif. Ce critère est élaboré pour le cas où on imposerait la même température de sortie pour le fluide et le solide. Il n'en n'ait pas ainsi ici. De plus, ce nombre ne tient pas compte du développement des couches limites dynamique et thermique, ce qui est le cas dans la présente étude. Nous ne pouvons l'appliquer que pour  $Br = 0$ , où nous obtenons un profil plat à la sortie dans le solide et le fluide. En considérant un écoulement d'air avec une vitesse de 1m/s, on montre que l'effet de la conduction axiale est négligeable pour les 3 valeurs de  $K$  étudiées. Quand

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan

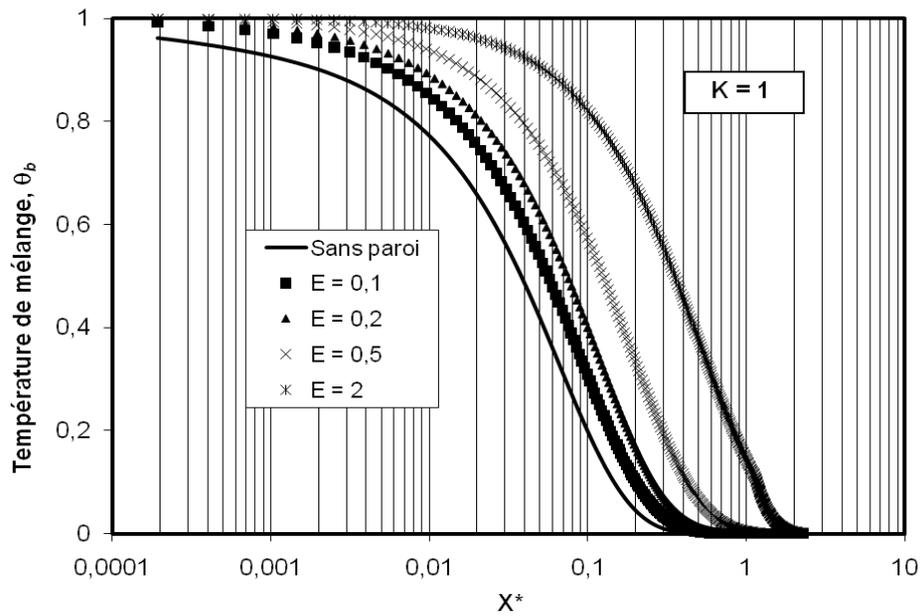
$Br \neq 0$ , les variations de  $Nu_{\infty}$  constatées ici sont donc dues aux effets conjugués des conceptions axiale et transversale dans la paroi ainsi que de la dissipation visqueuse dans le fluide.

Les figures 3.15 et 3.16 montrent les évolutions de la température du mélange le long du micro-canal sans effet de la dissipation visqueuse  $Br = 0$ , pour différentes épaisseurs de la paroi et différents rapports de conduction thermique  $K$ . On voit bien sur ces figures que la coordonnées  $X_c$  est plus proche de l'entrée du micro-canal lorsque  $K$  augmente et  $E$  diminue. Ce qui signifie qu'une faible conductivité de la paroi augmente la longueur de développement thermique. Aussi lorsque l'effet de la conduction axiale dans le solide est pris en compte, la variation de la température du mélange le long du micro-canal n'est plus linéaire comme c'est rapporté dans les travaux de Herwig (2002), Tiselj et al (2004), et Maranzana et al (2004). L'effet axial de la conduction dans le solide est plus significatif pour des parois plus épaisses et de faibles rapports de la conductivité thermique.

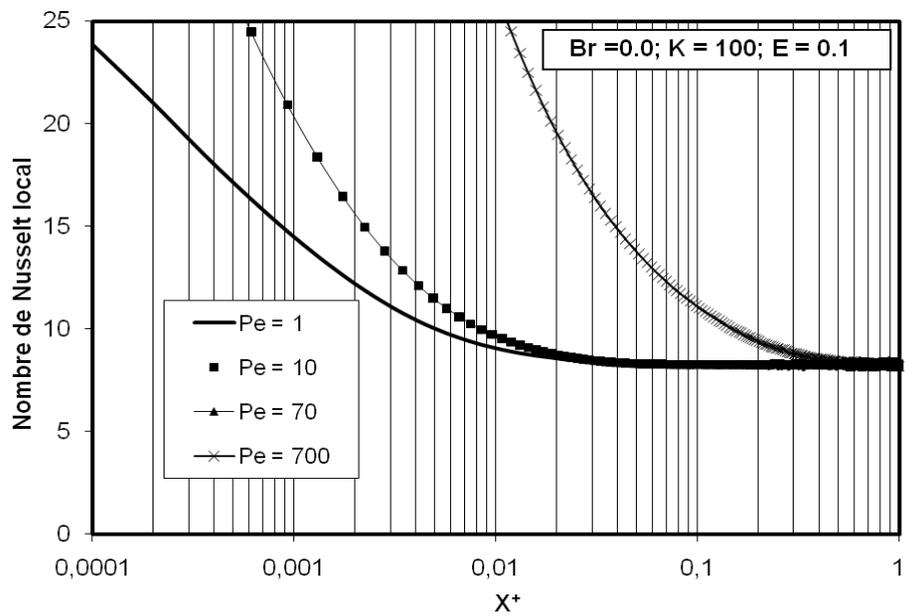


**Figure 3.15** Variation de la température du mélange du fluide en fonction de  $X^*$  pour différents rapport  $K$  ( $Br = 0.0$ )  
Cas température imposée.

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan



**Figure 3.16** Variation de la température du mélange du fluide en fonction de  $X^*$  pour différentes épaisseurs  $E$  ( $Br = 0,0$ )  
Cas température imposée.



**Figure 3.17** Variation du nombre local de Nusselt  $Nu_q$  pour différent nombre de Péclet. ( $Re = 100, Br = 0$ )

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan

La figure (3.17) montre l'évolution du Nusselt local pour différents nombres de Péclet. Le chauffage s'effectue aussi dans ce cas à flux constant. Lorsque le nombre de Péclet  $Pe$  augmente le nombre de Nusselt augmente aussi à l'entrée du canal, où le transfert de chaleur par convection est dominant par rapport au transfert de chaleur par conduction.

L'évolution de la température du mélange normalisée donnée par la relation (3.23) dans un repère linéaire pour le cas de chauffage à flux constant le long du canal est montrée dans la figure (3.18) pour les nombres de Péclet  $Pe = 1$  et  $700$ . Dans le cas où  $Pe = 700$ , la variation de la température du mélange est linéaire, par contre elle n'est pas linéaire pour  $Pe = 1$ . On peut dire que l'effet de la conduction axiale est important pour les faible nombre de Péclet

$$\theta_b^* = \frac{\theta_b}{\theta_{b_{max}}} \quad (3.15)$$

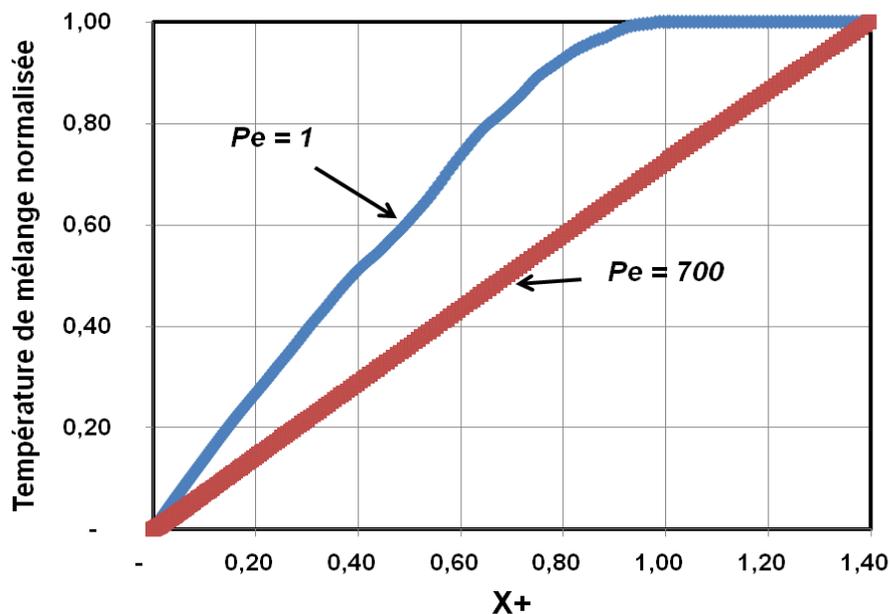


Figure 3.18 Variation de la température de mélange adimensionnée le long du micro-canal pour différents nombre de Péclet ( $Re = 100, Br = 0$ ) Cas flux imposé.

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan

#### 3.3.5 Longueur d'établissement de la couche limite thermique

La longueur d'établissement de la couche limite thermique pour différent rapport des conductivités thermiques  $K$ , de l'épaisseur  $E$ , et du nombre de Brinkman  $Br$  est donnée dans le tableau 3.2. Dans le cas où le micro-canal est soumis à une température constante

**Tableau 3.2. Longueurs d'établissement thermique ( $Re = 100, Pr = 7$ ).**

	<b>Br = 0,0</b>	<b>Br = 0,1</b>	<b>Br = -0,1</b>
<b>K = 1</b>			
<b>E = 0,1</b>	0,084563	1,408149	1,268647
<b>E = 0,2</b>	0,084563	1,745118	1,480361
<b>E = 0,5</b>	0,093954	3,339412	2,828228
<b>K = 10</b>			
<b>E = 0,1</b>	0,067254	1,103677	1,040668
<b>E = 0,2</b>	0,075663	1,135823	1,071958
<b>E = 0,5</b>	0,084563	1,23481	1,135823
<b>K = 100</b>			
<b>E = 0,1</b>	0,067254	1,071958	1,00981
<b>E = 0,2</b>	0,067254	1,071958	1,00981
<b>E = 0,5</b>	0,075663	1,103677	1,040668

Cette longueur a été calculée lorsque le rapport du nombre de Nusselt à l'abscisse  $X^*$  sur le nombre de Nusselt au régime développé pour les différents cas est inférieure à 99%.

$$\frac{Nu_{X^*}}{Nu_{\infty}} \leq 99\% \quad (3.16)$$

La longueur d'établissement est plus grande pour les faibles rapports de conductivité thermique. La dissipation visqueuse retarde l'établissement thermique surtout pour les valeurs négatives du nombre de Brinkman

#### 3.3.6 Corrélation

A partir de l'évolution du nombre de Nusselt le long du micro-canal schématiser dans la figure 3.9 pour un rapport des conductivités thermique  $K = 100$ , et sans dissipation visqueuse  $Br = 0$ , et différentes épaisseurs  $E$  de la paroi nous avons établi une corrélation de l'évolution du nombre de Nusselt local le long du micro-canal en variant l'épaisseur de la paroi sous forme d'une fonction exponentielle.

Ce lissage est obtenu en utilisant le logiciel Origin 6.1 selon les étapes suivantes :

1. Pour chaque épaisseur  $E$  on pose une relation de la variation du Nusselt le long du micro-canal comme suit :

$$Nu_x = P_1 + \frac{0.024X^{P_2}(0.0249X^{P_3}-0.14)}{(1+0.049X^{-P_4}-0.14)} \quad (3.17)$$

Cette forme exponentielle à été adoptée puisque on obtient avec un bon ajustement du modèle, en effet dans tous les cas, c'est à dire pour les différentes épaisseurs, les coefficients de déterminations  $R^2$  tendent vers l'unité.

2. De nouvelles corrélation sont obtenue de la variation des différents coefficient  $P_1, P_2, P_3$ , et  $P_4$  en fonction de la variation de l'épaisseur  $E$

Le regroupement des équations de variation des coefficients  $P_1, P_2, P_3$ , et  $P_4$  en fonction de la variation de l'épaisseur  $E$  dans l'équations (3.17) permet d'obtenir la corrélation globale pour  $K = 100$ ,  $Br = 0$ , et différentes épaisseurs  $E$  de la paroi suivante :

### 3. Couplage convection-conduction dans un micro-canal plan

---

$$Nu_x = 7.517 - 0.008E + 0.0083E^2 + \frac{0.024X^{*-2.212+0.888e^{\frac{-E}{1.274}}}\left(0.0249X^{*-1.623+0.886e^{\frac{-E}{1.275}}} - 0.14\right)}{\left(1 + 0.049X^{*-1.623+0.886e^{\frac{-E}{1.275}}} - 0.14\right)} \quad (3.18)$$

Avec un coefficient de détermination  $R^2 = 0.91$

$$X^* = \frac{2x}{D_h Pe} \quad (3.19)$$

$$0 \leq E \leq 2 \quad (3.20)$$

---

## ***Chapitre 04***

# ***Ecoulement des gaz dans un micro-canal plan***

---

### 4. Ecoulement des gaz dans un micro-canal plan

#### 4.1 Introduction

Souvent les dimensions des micro-canaux constituant les systèmes de refroidissement miniaturisés montés sur les composants électroniques sont de l'ordre du micron, l'analyse du transfert de chaleur en macro échelle n'est plus adaptée lorsque le fluide de fonctionnement est un gaz. On sait que le libre parcours moyen des molécules des gaz est de l'ordre du diamètre hydraulique de ces micro-canaux. Leurs modélisations entrent donc dans le domaine des gaz raréfiés (chapitre1).

Une classification à été établie en fonction du nombre de Knudsen, rappelons que le Kn est le critère pour modéliser les écoulements des gaz, il est le rapport du libre parcours moyen de la particule sur la longueur caractéristique de l'écoulement (Tableau 4.1)

## 4. Écoulement des gaz dans un micro-canal plan

---

**Tableau 4.1 Classification des écoulements**

<b>Écoulement classique</b>	<b>Écoulement glissant</b>	<b>Écoulement de transition</b>	<b>Écoulement moléculaire</b>
<i>Non raréfié</i>	<i>Légerment raréfié</i>	<i>Modérément raréfié</i>	<i>Hautement raréfié</i>
<b>Kn&lt;0,001</b>	<b>0,001&lt;Kn&lt;0,1</b>	<b>0,1&lt;Kn&lt;10</b>	<b>Kn&gt;10</b>
<b>Modélisation</b>			
N-S	N-S+ Saut de Vitesse et température a la paroi	Approche moléculaire	Approche moléculaire

Dans la présente étude, on considère un écoulement légèrement raréfié (écoulement glissant) c'est à dire que le nombre de Knudsen dans notre cas est compris entre 0.001 et 0.1. Les équations de Navier stocks et de l'énergie restent valables, on introduit seulement les conditions de glissement de vitesse et de saut de température à l'interface fluide/paroi.

La caractérisation et la compréhension du transfert convectif des écoulements raréfiés ont fait l'objet plusieurs travaux ces dernières années. Barron *et al.* (1996, 1997) Ont étudié le problème de Graetz d'un écoulement laminaire dans un tube soumis à une température constante en introduisant les conditions de glissement et en ignorant le saut de température à la paroi. Les auteurs ont montré que pour un nombre de Graetz donné, le transfert de chaleur par convection, représenté par le nombre de Nusselt, augmente avec le nombre de Knudsen.

Par la suite Larrode et al. (2000) ont montré dans leurs étude de la convection de chaleur des écoulements des gaz en régime glissant que l'effet du saut de température à la paroi qui a été négligé dans les études précédentes de Barron et al (1996, 1997), est essentiel dans l'analyse du transfert de chaleur.

En effet, le glissement de la vitesse augmente la vitesse du fluide proche de la paroi, ainsi, le transfert convectif entre le fluide et la paroi est amélioré, tandis qu'un saut de température fait diminuer le gradient de température à la paroi et par conséquent le transfert de chaleur diminue aussi. Les effets de raréfaction sur le transfert de chaleur ne sont pas

#### 4. Écoulement des gaz dans un micro-canal plan

---

évidents, mais dépendent de l'influence relative de l'écoulement glissant et du saut de température (c'est-à-dire du rapport  $\beta = \beta_T/\beta_v$ ). L'étude menée par Ghodoossi et al (2005), ont trouvé que lorsque le rapport  $\beta < 0.5$  c'est-à-dire que le glissement des vitesses a la paroi est dominant par rapport au saut de température le transfert de chaleur augmente dans ce cas. Pour  $\beta \geq 0.5$ , les effets de saut de température sont dominants par rapport au glissement de la vitesse, dans ce cas les auteurs ont observé une diminution de nombre de Nusselt. Souvent on propose  $\beta = 1.667$  comme valeur typique pour des applications en engineering avec l'air comme fluide de fonctionnement, Yu et al (2001) ont trouvé dans ce cas que les effets de raréfaction tendent à réduire le nombre de Nusselt. L'analyse analytique de Mikhailov et Cotta (2005) et Chen (2006) d'un écoulement laminaire développé d'un gaz dans un micro-canal formé par deux plaques parallèles où se développe à l'intérieur une couche limite thermique, en négligeant la dissipation visqueuse, et en considérant les propriétés thermo-physiques constantes, Mikhailov et Cotta (2005) ont obtenu, pour  $\beta = 1$ , un nombre de Nusselt en régime développé de 3.01, tandis que Chen (2006) calculait, pour  $\beta = 2$ , une valeur de 3.33. Ces valeurs sont inférieures à la valeur classique de 7.54 et donnent une idée de l'influence de la raréfaction sur le transfert de chaleur.

Jeong et Jeong (2006) ont analysé le problème de Graetz dans un canal à plaques parallèles soumis à une température constante aux parois en tenant compte des effets de la raréfaction, de la dissipation visqueuse et de la conduction axiale. Le nombre de Nusselt en régime établi diminue lorsque le nombre de Knudsen  $Kn$  augmente. Pour  $Kn = 0.08$  (régime d'écoulement glissant)  $Nu = 4.10$ . Tunc et Bayazitoglu (2001)(2002) ont analysé un écoulement bidimensionnel laminaire à propriétés thermo-physiques constantes avec prise en compte de la dissipation visqueuse dans des micro-tubes soumis à une température constante ou un flux imposé comme conditions aux limites. En considérant un glissement de vitesse et un saut de la température, ils ont trouvé que le nombre de Nusselt en régime développée diminuait lorsque le nombre de Knudsen augmente, en raison du saut de température aux parois. Pour  $\beta = 1.667$ , le nombre de Nusselt a diminué de 3.68 pour  $Kn = 0$  à 2.54 pour  $Kn = 0.1$  pour une température imposée à la paroi, et de 4.36 à 2.90 pour un flux thermique constant imposé aux parois. Lorsque, ils ont négligé le saut de la température, le nombre de Nusselt dans ce cas est proportionnel au nombre de Knudsen.

L'étude numérique menée par Barbaros et al (2006) sur l'écoulement d'un gaz entièrement développé dans des micro-tubes et micro-canaux formés de plaques parallèles avec prise en

## 4. Ecoulement des gaz dans un micro-canal plan

compte de l'effet de la dissipation visqueuse et en négligeant la conduction axiale ont été exécuté pour une température ou un flux constant imposé comme conditions aux limite thermique. Les auteurs ont montré les effets de la raréfaction et de la dissipation visqueuse sur le nombre de Nusselt. Une autre étude numérique mené par Van Rij et al (2009) sur l'effet de la dissipation visqueuse de la conduction axiale, et de la raréfaction sur la convection forcée dans un micro-canal rectangulaire, les auteurs ont conclue que ces effets sont significatifs sur le développement simultanée des couche limite thermique et hydrodynamique et sur le nombre de Nusselt en régime développé est dépend surtout du degré de raréfaction.

Comme dans le cas des écoulements non raréfiés, les effets de la dissipation visqueuse, de la conduction axiale combinée fluide/paroi pour un fluide s'écoulant dans un micro-canal plan d'épaisseur de paroi variable avec un développement simultanée des couches limites thermique et hydrodynamique sont considérés dans cette étude.

### 4.2 Analyse

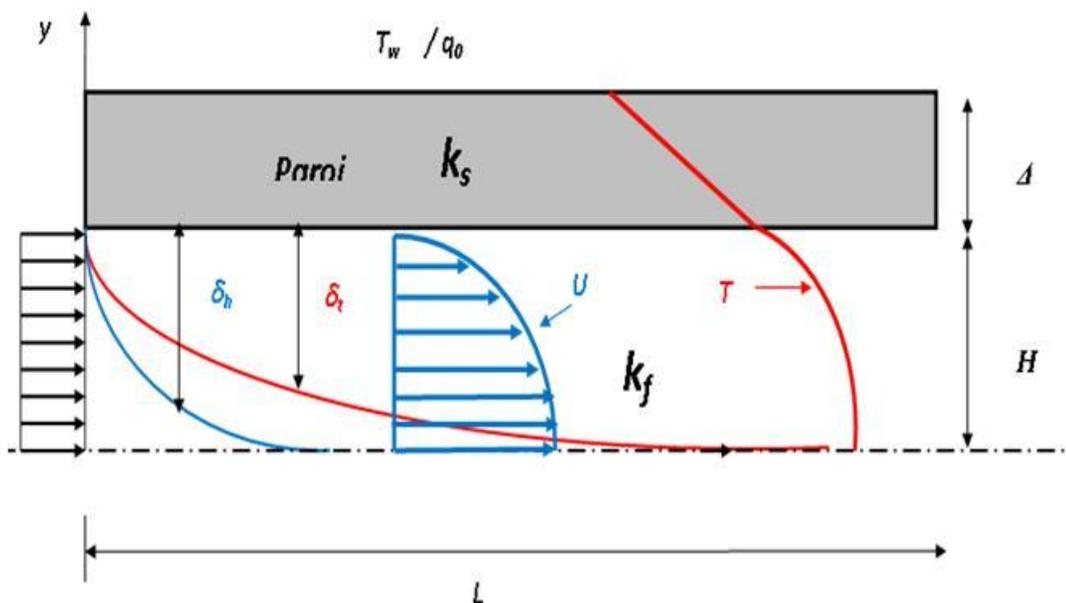


Figure 4.1 Géométrie du problème.

## 4. Ecoulement des gaz dans un micro-canal plan

---

Considérons un écoulement bidimensionnel de l'air dans un micro-canal de longueur  $L$ , et de hauteur  $H$ . L'épaisseur des parois est prise égale à  $\Delta$ . A l'interface fluide/solide l'écoulement subit un glissement de vitesse  $u_s$  et un saut de température  $T_s$ .

Les premières conditions aux limites du premier ordre traduisant un glissement de vitesse et un saut de température à la paroi ont été établies par Maxwell en 1879 et par Smoluchowski en 1898 pour la vitesse et la température respectivement comme suit :

$$u_s - u_w = \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v} Kn \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_w \quad \text{ordre 2} \quad (4.1)$$

$$T_s - T_w = C_{saut} = \frac{2-\sigma_T}{\sigma_T} \frac{2\gamma}{(\gamma+1)} \frac{k}{c_p \mu} \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \quad (4.2)$$

Il est à noter que la résolution des équations de Navier–Stokes avec les conditions aux limites (glissement de vitesse, et saut de température) du second ordre peut s'avérer problématique dans certaines configurations géométriques, qu'il s'agisse de trouver des solutions analytiques ou numériques. En effet, les équations de Navier–Stokes correspondent à une approximation de l'équation de Boltzmann du premier ordre en Knudsen ( $\vartheta(Kn)$ ), et ne devraient en toute rigueur être associées qu'à des conditions aux limites du premier ordre Karniadakis et Beskok (2002).

En négligeant l'effet de la transpiration thermique (phénomène à l'origine d'une mise en mouvement du gaz en présence d'un simple gradient tangentiel de température, l'écoulement s'effectuant des basses vers les hautes températures). En l'absence de ce gradient tangentiel pariétal ( $\partial T/\partial t = 0$ ), les conditions aux limites introduite dans cette étude sont dites au premier ordre ( $\vartheta(Kn)$ ) : le saut de vitesse (respectivement de température) est alors proportionnel au gradient transversal de vitesse (respectivement de température) et au nombre de Knudsen  $Kn$ .

Pour l'air à la pression et à la température standard, son libre parcours moyen serait  $\lambda \approx 0.065 \mu\text{m}$  (Gad-el-Hak (1999)). Par conséquent, un micro-canal avec un diamètre hydraulique de  $10 \mu\text{m}$  aurait un nombre de Knudsen  $Kn = 0.0065$ , qui se trouve bien dans la zone des écoulements glissants

## 4. Ecoulement des gaz dans un micro-canal plan

### 4.3 Paramètres de l'étude

Le modèle mathématique est résolu numériquement par un code de calcul élaboré en langage fortran basé sur la méthode des volumes finis. Une technique d'introduction des conditions de glissement de vitesse et du saut de la température en présence de la paroi a été développée (voir chapitre 2).

Le maillage utilisé dans cette étude est très raffiné à l'entrée du micro canal selon l'axe x dans le but de capter au maximum les gradients qui sont très important dans cette région, par contre le maillage est régulier selon y où nous avons gardé le même pas  $\Delta Y$  dans le solide et dans le fluide. Le tableau suivant récapitule les paramètres de calcul utilisés dans la présente étude.

Tableau (4.2) Paramètres de l'étude

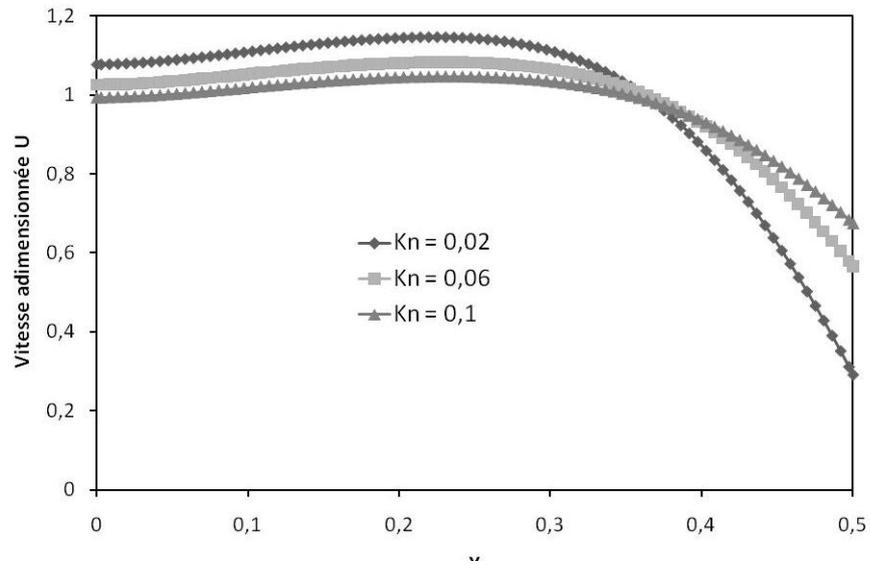
Epaisseur E	Maillage	Re	Kn	Br	$\beta$	K
0.0	200x92					
0.1	200x110					
0.5	200x182	100	0;0.02;0.04;0.06;0.08;0.1	0;0.1;-0.1	0;0.5;1.67;5;10	1;10;100
1.0	200x272					
2.0	200x452					

### 4.4 Résultats et discussions.

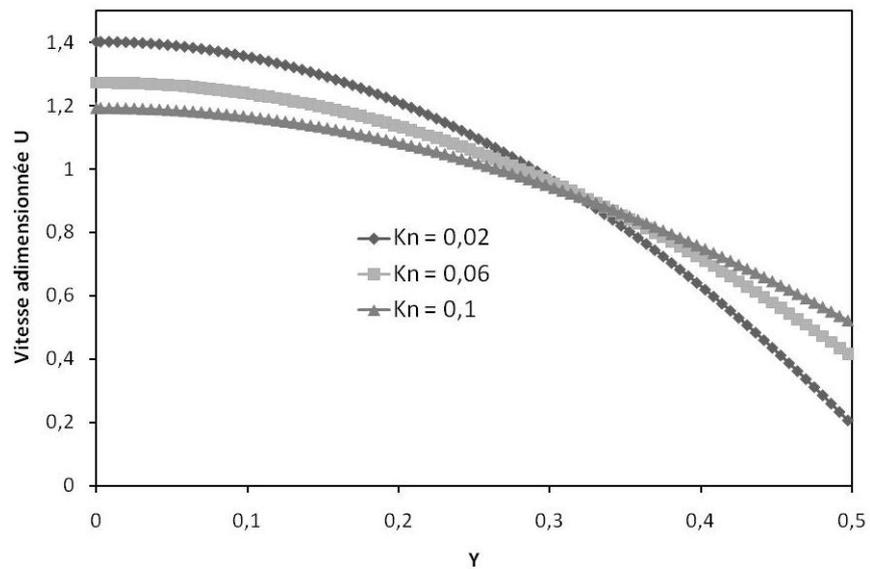
#### 4.4.1 Champs hydrodynamique

Les figures 4.2 et 4.1 montrent l'effet de la raréfaction sur les profils de la vitesse axiale adimensionnée  $U$  à l'entrée du micro-canal ( $X^+ = 0.005$ ) et à la sortie ( $X^+ = 1$ ) respectivement pour différents nombres de Knudsen  $Kn = 0.02, 0.06, \text{ et } 0.1$ . Le glissement de la vitesse à la paroi augmente lorsque  $Kn$  augmente, en effet pour  $Kn = 0.02$  la vitesse a la paroi ( $Y = 0.5$ ) est  $U_w = 0.2$  lorsque l'écoulement est établi, et elle est égale à  $U_w = 0.53$  pour  $Kn = 0.1$ , par contre la vitesse maximale au centre du micro-canal diminue lorsque le nombre de Knudsen augmente.

#### 4. Ecoulement des gaz dans un micro-canal plan



**Figure 4.2 Profils des vitesses axiales a l'entrée du micro-canal  $X^+ = 0.0005$ .  
 $Re = 100$**



**Figure 4.3 Profils des vitesses axiales à la sortie du micro-canal  $X^+ = 1$ .  
 $Re = 100$**

4.4.2 Nombre de Poiseuil

Le nombre de Poiseuille calculé pour un écoulement laminaire non glissant  $Kn = 0$  développé est égal à celui rapporté dans la littérature pour un écoulement laminaire dans un canal formé de plaques parallèles, à savoir  $Po = 24$ . Le nombre de Poiseuille obtenu pour différents nombres de Knudsen  $Kn$  est schématisé dans la figure 4.4. L'évolution du nombre de Poiseuille le long du micro-canal tend vers une asymptote qui caractérise l'écoulement établi. Les résultats numériques obtenus dans la présente étude sont en bonnes concordances avec ceux obtenus à partir de la relation analytique donnée par Hong et al. (2007) équation (4.18), représentés dans la figure 4.5.

$$f Re = \frac{24}{(1 + 12Kn)} \tag{4.3}$$

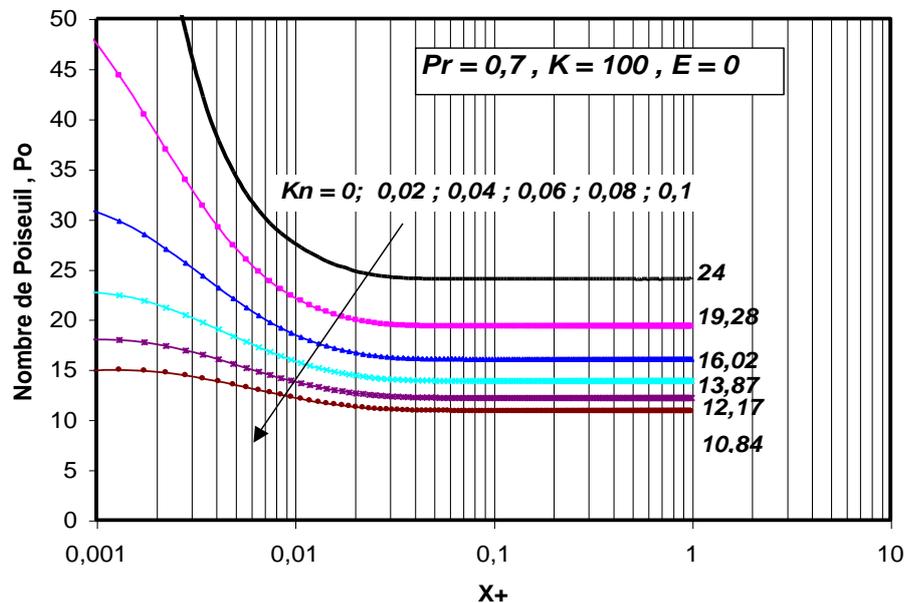


Figure 4.4. Nombre de Poiseuil pour différent Kn  $Re = 100$ .

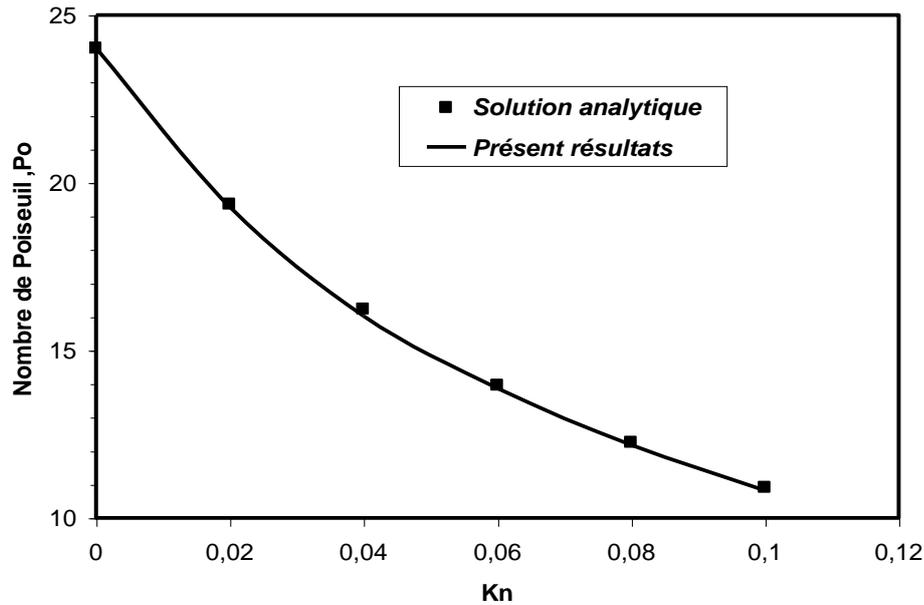


Figure 4.5 comparaison du nombre de Poiseuil

De la figure (4.5) on remarque que la raréfaction réduit le coefficient de frottement du fluide dans le micro-canal. En effet, le nombre de Poiseuille en régime établi passe de 10,84 pour  $Kn = 0.1$  à 24 pour  $Kn = 0$ . Le gradient de vitesse décroît lorsque la raréfaction augmente ( $Kn$  augmente)

#### 4.4.3 Effet du paramètre d'interaction gaz-paroi $\beta$

L'effet du paramètre d'interaction gaz-paroi  $\beta$  sur le transfert de chaleur est montré dans la figure 4.6 qui représente la variation du nombre de Nusselt obtenu en régime établi pour différents nombres de Knudsen en fonction du rapport  $\beta$  ( $\beta = \frac{\beta_T}{\beta_v}$ ).

$$\beta = \frac{\beta_T}{\beta_v} = \frac{\frac{2-\sigma_T}{\sigma_T} \frac{2\gamma-1}{(\gamma+1)Pr}}{\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}} \quad (4.4)$$

#### 4. Ecoulement des gaz dans un micro-canal plan

---

$\beta = 0$  est un cas purement théorique, mais utile pour observer l'effet du glissement de la vitesse sans saut de température sur le transfert de chaleur.

$\beta = 1.667$  valeur typique pour l'air.

$\beta = 10$  traduit un saut de température très important à la paroi.

Le rapport  $\beta$  peut être supérieur à 100 puisque il dépend de  $\gamma$ , du nombre de Prandtl  $Pr_v$ ,  $\sigma_v$  et  $\sigma_t$ , où les valeurs de ces dernières doivent être mesurées expérimentalement. D'après Karniadakis et Beskok (2002), ils tiennent compte de plusieurs interactions fluide-surface.

La figure 4.6 montre la variation du nombre de Nusselt en régime établi  $Nu_{H_2\infty}$  en fonction du rapport  $\beta$  pour différents nombres de Knudsen sans échauffement visqueux pour une épaisseur de la paroi  $E = 0.1$ .

Dans le cas où  $\beta = 0$  le Nusselt obtenu pour les différents nombre de Knudsen est maximal. En augmentant le rapport  $\beta$  le nombre de Nusselt diminue pour toutes les valeurs du nombre de Knudsen. On remarque un point d'inflexion au alentour de  $\beta = 0.5$ . En effet, lorsque le rapport  $\beta$  est inférieur à 0.5, le nombre de Nusselt obtenu  $Nu_{H_2\infty}$  augmente dans ce cas puisque comme on vient de le mentionner, lorsque le glissement de vitesse est dominant par rapport au saut de température, le transfert de chaleur augmente. Pour les valeurs de  $\beta$  supérieures à 0.5, le Nusselt diminue lorsque  $\beta$  augmente. Ce résultat est aussi obtenu par Ghodoossi et al (2005), dans un micro-canal rectangulaire.

La figure 4.7 montre la variation du nombre de Nusselt local  $Nu_{H_2}$  le long du micro-canal pour  $Kn = 0,04$  et différents rapports  $\beta$  et sans effet de dissipation visqueuse. On remarque que le transfert de chaleur est maximum pour  $\beta = 0$ . Il diminue lorsque  $\beta$  augmente. Aussi les faibles valeurs du rapport  $\beta$  retarde l'établissement de la couche limite thermique ceci est bien mis en évidence dans le tableau 4.2 qui représente la longueur de l'établissement de la couche limite thermique le long du micro-canal pour un nombre de Knudsen  $Kn = 0.04$ . Pour  $\beta = 0$ , la longueur d'établissement thermique  $L_t = 0,166$ , et elle est égale à 0,066 lorsque  $\beta = 10$  soit une diminution de plus de 50%.

#### 4. Ecoulement des gaz dans un micro-canal plan

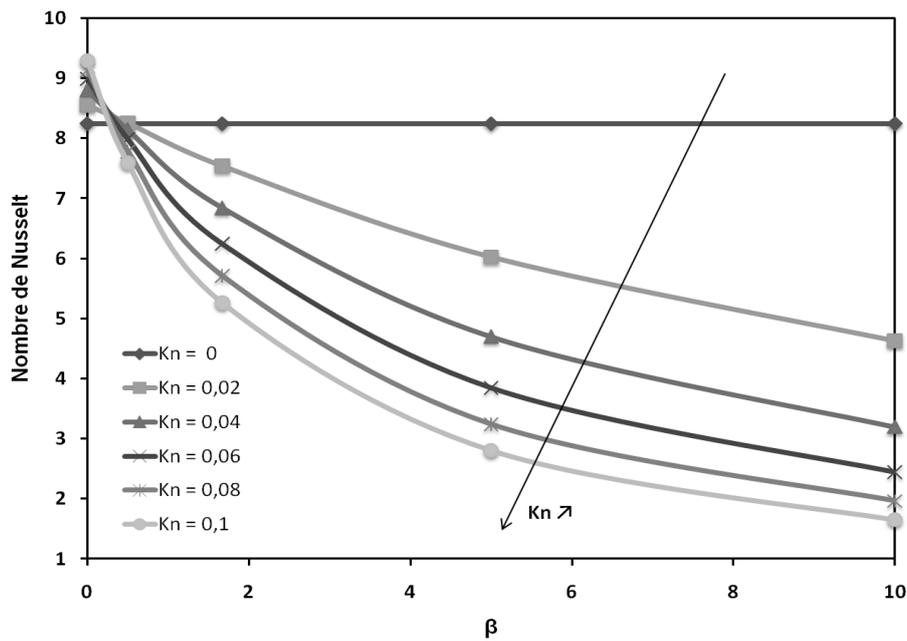


Figure 4.6 Variation du nombre de Nusselt en régime établi  $Nu_{q\infty}$  en fonction du rapport  $\beta$  pour différents nombres de Knudsen avec  $E = 0.1$

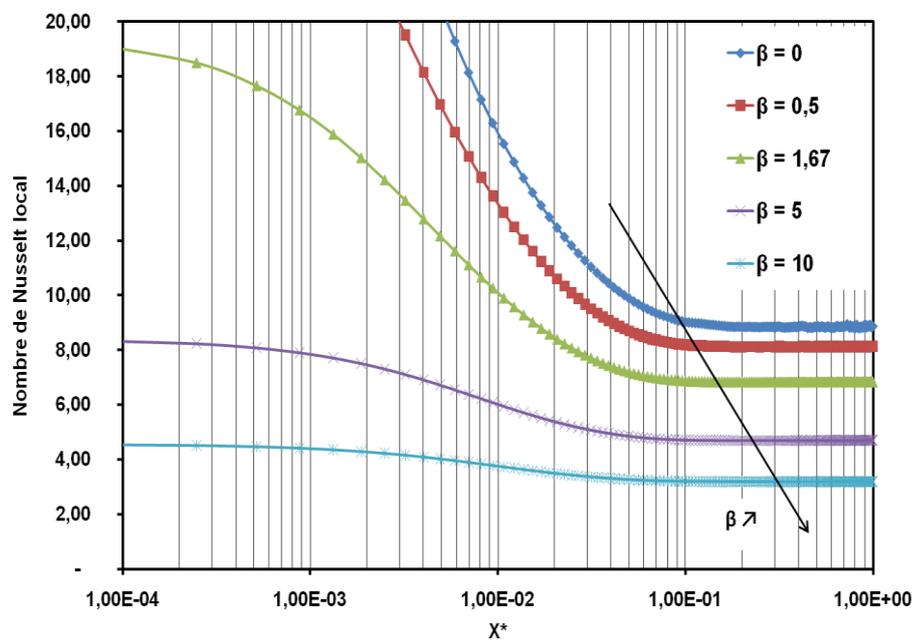
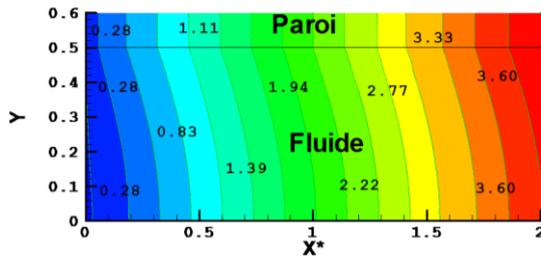
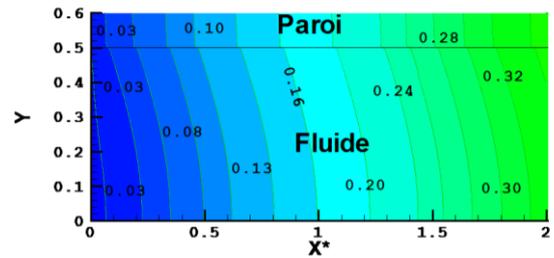


Figure 4.7 Variation du nombre de Nusselt local  $Nu_q$  pour  $Br = 0$  et  $E = 0.1$   
 $Kn = 0.04$   
 Cas d'un flux imposé.

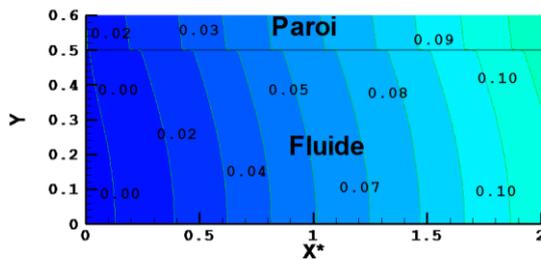
#### 4. Ecoulement des gaz dans un micro-canal plan



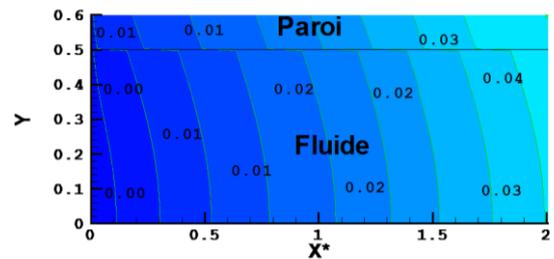
(a)  $\beta = 0$



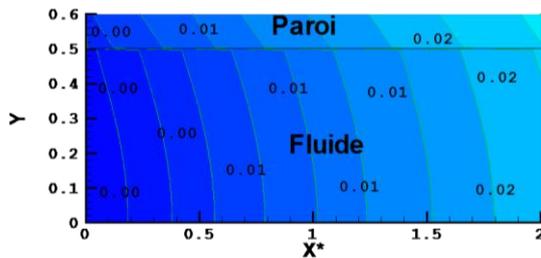
(b)  $\beta = 0.5$



(c)  $\beta = 1.67$



(d)  $\beta = 5$



(e)  $\beta = 10$

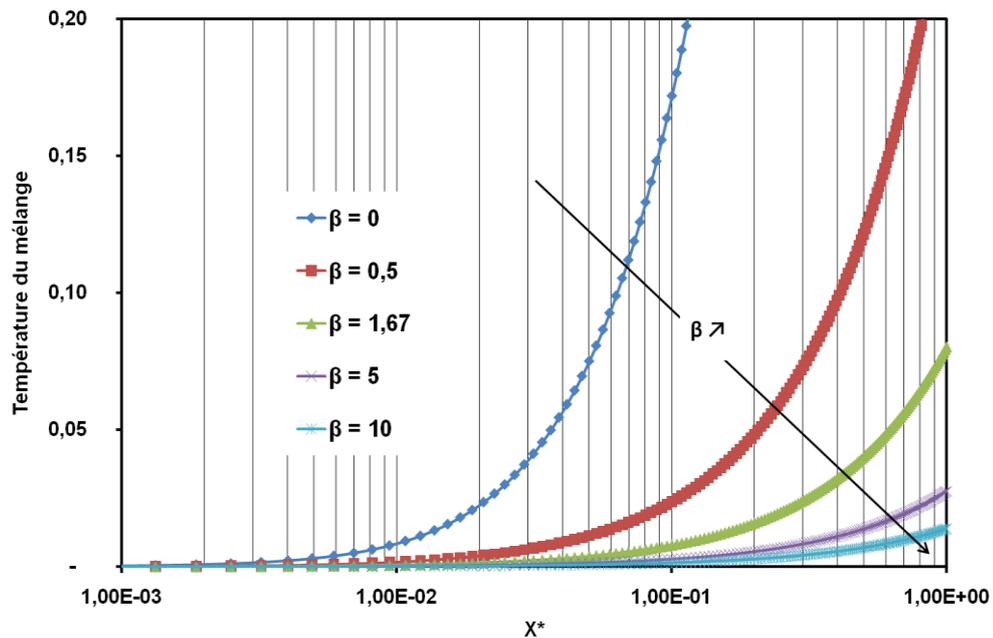
**Figure 4.9 distribution de température dans un micro-canal soumis à un flux constant Pour  $Kn = 0.06$**

**(a)  $\beta = 0$  ;(b)  $\beta = 0.5$  ;(c)  $\beta = 1.67$  ;(d)  $\beta = 5.0$  ; (e)  $\beta = 10$**

L'échauffement du fluide reste très faible lorsque  $\beta$  augmente, ce qui traduit aussi un saut de température plus important et par conséquent la résistance thermique augmente. Ceci minimise le transfert de chaleur paroi/fluide. Pour  $\beta = 10$ , la température du mélange à la

#### 4. Ecoulement des gaz dans un micro-canal plan

sortie du micro-canal ( $X^* = 1$ ) reste très proche de celle de l'entrée du micro-canal, par contre pour  $\beta = 0$  l'échauffement du fluide est sensible juste à l'entrée du micro-canal (Figure 4.8). Les isothermes obtenues dans ce cas dans un micro-canal d'épaisseur de la paroi  $E = 0.1$  et en négligeant l'échauffement visqueux montrent clairement que lorsque  $\beta < 0.5$  le transfert de chaleur paroi/fluide dans ce cas augmente. En effet, à  $X^* > 1$  la distribution de la température obtenue pour  $\beta = 0$  est de l'ordre de 3.25. Au fur et à mesure que  $\beta$  augmente, le transfert de chaleur paroi fluide diminue et pour  $\beta = 10$  (limite supérieure dans notre cas d'étude) la température à la sortie du micro canal est de l'ordre de 0.02. Cette valeur est très proche de celle à l'entrée du micro-canal. On remarque dans ce cas que le saut de température est plus important que pour tous les autres cas, ce qui traduit une résistance thermique élevée.



**Figure 4.8 Evolution de la température du mélange du fluide le long du micro-canal pour différents rapport  $\beta$ .**

**$E = 0.1$**

**Cas flux imposé.**

## 4. Ecoulement des gaz dans un micro-canal plan

---

Tableau 4.2 Longueur de l'établissement de la couche limite thermique pour différents rapports  $\beta$ ,  $Kn = 0.04$

$\beta$	$L_t$
<b>0</b>	<b>0,166</b>
<b>0,500</b>	<b>0,092</b>
<b>1,670</b>	<b>0,084</b>
<b>5,000</b>	<b>0,077</b>
<b>10,000</b>	<b>0,066</b>

### 4.4.4 Effet de la raréfaction

#### 4.4.4.1 Sur le champ thermique

L'effet du nombre de Knudsen sur la distribution de la température dans un micro-canal d'épaisseur de paroi  $E = 1$  soumis à un flux constant est schématisé dans la figure (4.9). A l'entrée du micro-canal, la température du fluide imposée est  $\theta_{eH2} = 0$ . Pour  $Kn = 0$ , et en considérant une paroi très conductrice  $K = 100$ , le fluide commence à s'échauffer dès l'entrée du micro-canal. A la sortie, la valeur de l'isotherme dans ce cas est égale à 3,87. En augmentant le nombre de Knudsen une discontinuité apparaît à  $Y = 0,5$  (interface fluide/paroi), elle est de plus en plus importante lorsque le  $Kn$  augmente. Aussi la température du fluide reste presque constante et ne s'échauffe presque plus.

On constate aussi que ce soit pour forte ou une faible conductivité thermique de la paroi ( $K = 100$ , ou  $K = 1$ ), les isothermes obtenues pour un nombre de Knudsen  $Kn = 0.1$  sont presque identiques. On peut dire que l'effet de la raréfaction diminue considérablement le transfert thermique et qu'on doit en tenir compte pour une bonne évaluation du coefficient de transfert thermique dans des micro-canaux en régime glissant.

## 4. Ecoulement des gaz dans un micro-canal plan

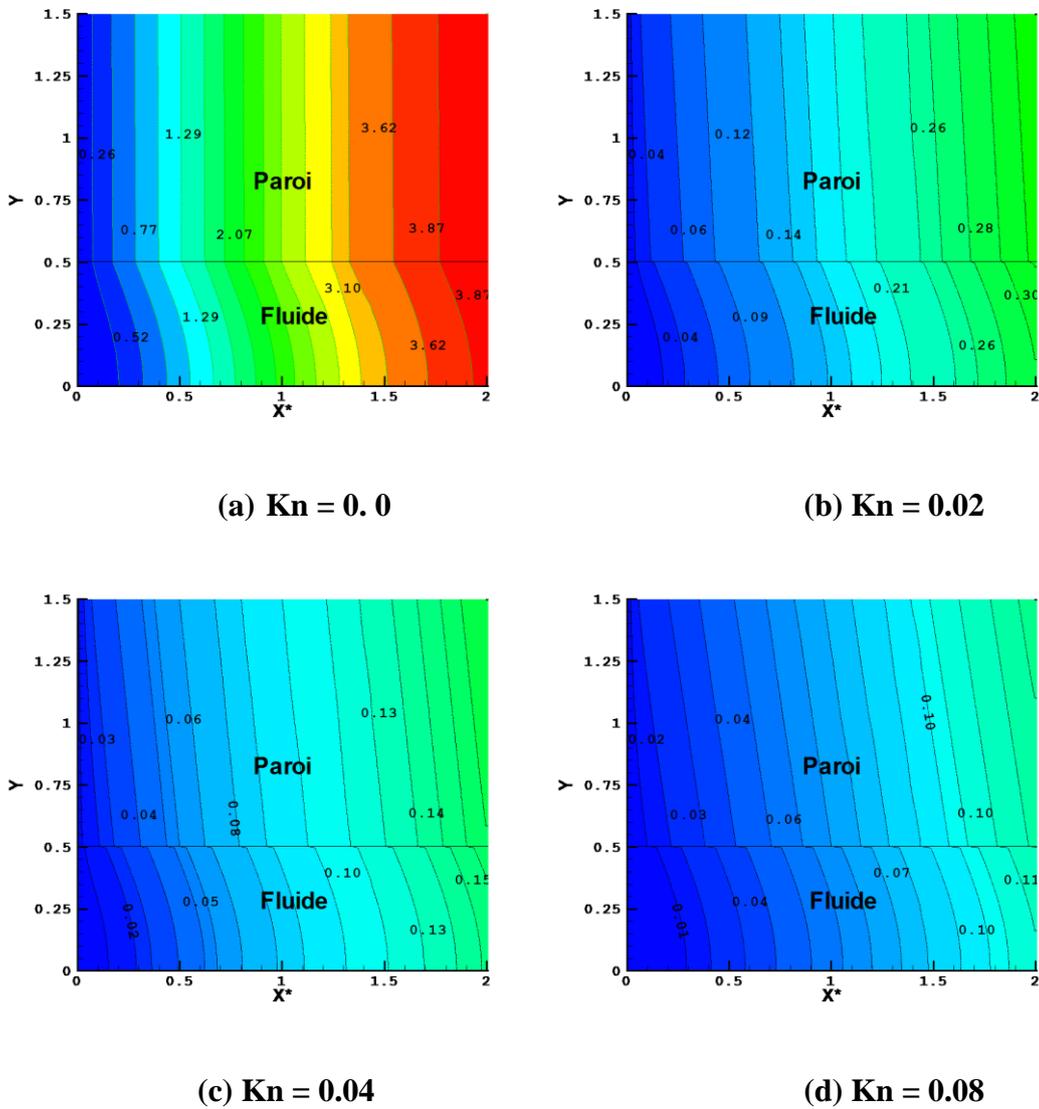
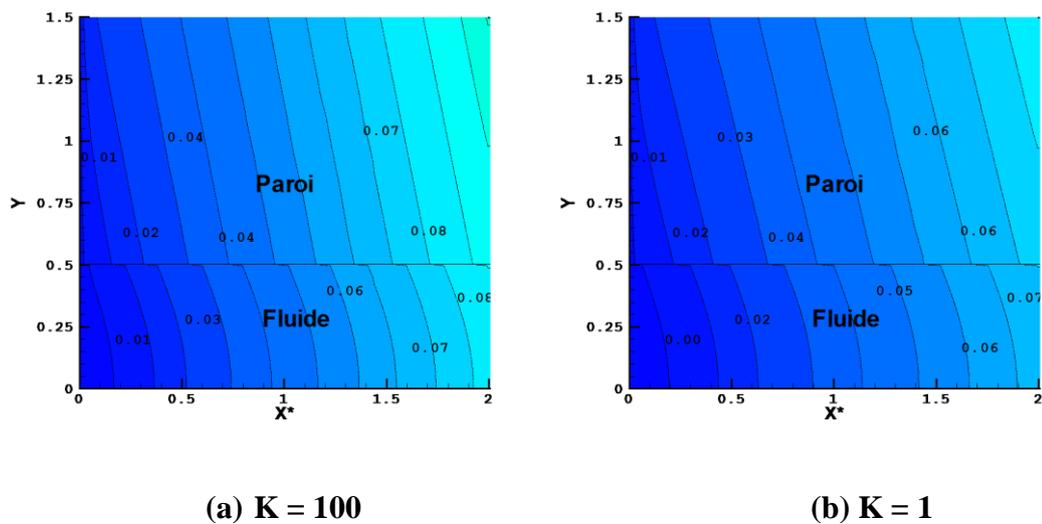


Figure 4.9 Distribution de température dans un micro-canal soumis à un flux constant pour

$$Br = 0, \beta = 1.667$$

(a)  $Kn = 0,0$  ;(b)  $Kn = 0.02$  ;(c)  $Kn = 0.04$  ;(d)  $Kn = 0.08$

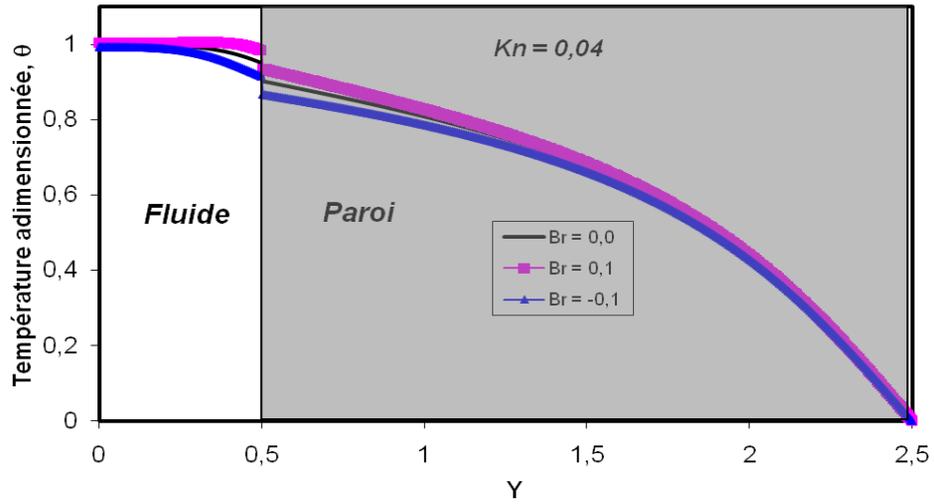


**Figure 4.9 Comparaison de la distribution de température dans un micro-canal soumis à un flux constant pour  $Br = 0$ ,  $Kn = 0.1$  et différent rapport de conductivité thermique  
(a)  $K = 100$  ;(b)  $Kn = 1$**

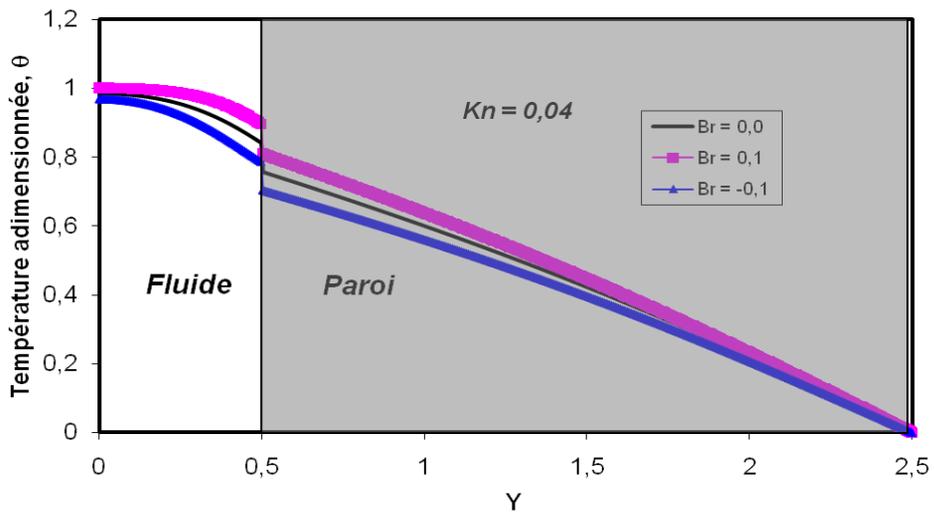
### 4.4.4.2 Sur les profils de température

La figure 4.10 montre l'évolution des profils de température le long du micro-canal soumis à une température constante pour  $Kn = 0.4$ ,  $Re = 100$ ,  $K = 100$ ,  $Pr = 0,7$  et différents  $Br = 0,1 ; 0$  et  $-0,1$ . On rappelle que  $Br = 0$  correspond à un écoulement sans dissipation visqueuse,  $Br < 0$  est associé à un échauffement du fluide au contact de la paroi ( $T_e < T_w$ ), et  $Br > 0$  correspond à la situation où le fluide se refroidit ( $T_e > T_w$ ). On remarque qu'à l'entrée du micro-canal (figure 4.10a,  $X^* = 0,0005$ ) les trois profils de température dans le fluide sont confondus au centre, au fur et à mesure que l'on s'approche de la paroi, les trois profils se dissocient, et subissent un saut au niveau de l'interface fluide/solide. A  $X^* = 1$ , on obtient un profil plat pour un  $Br = 0$  est une symétrie parfaite entre le profil obtenu pour un  $Br = 0.1$  et  $Br = -0.1$ .

#### 4. Ecoulement des gaz dans un micro-canal plan

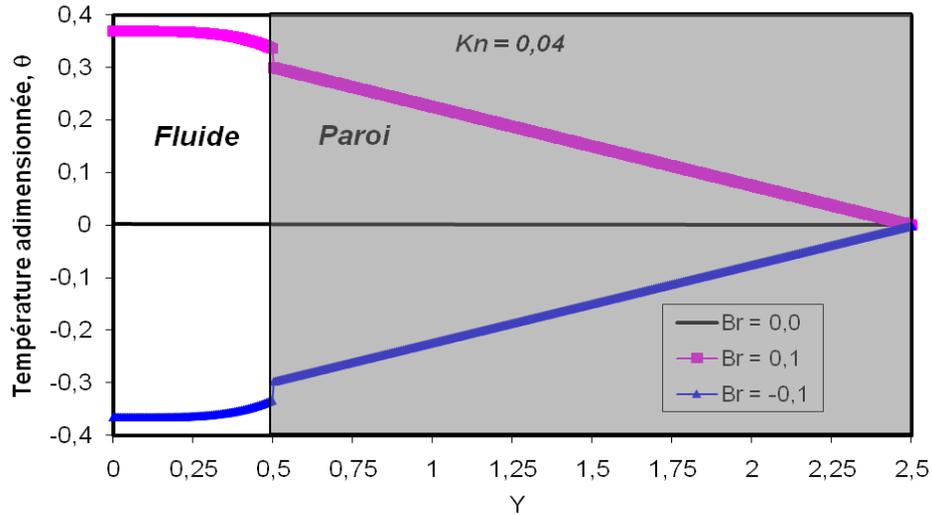


(a)  $X^* = 0.0005$



(b)  $X^* = 0.001$

#### 4. Ecoulement des gaz dans un micro-canal plan



(c)  $X^* = 0.8$

Figure 4.10 Evolution des profils de température pour différents nombres de Brinkman dans un micro-canal soumis à une température constante

( $E = 2$  ;  $Kn = 0.04$ )

(a)  $X^* = 0.0005$  (b)  $X^* = 0.001$  (c)  $X^* = 0.8$

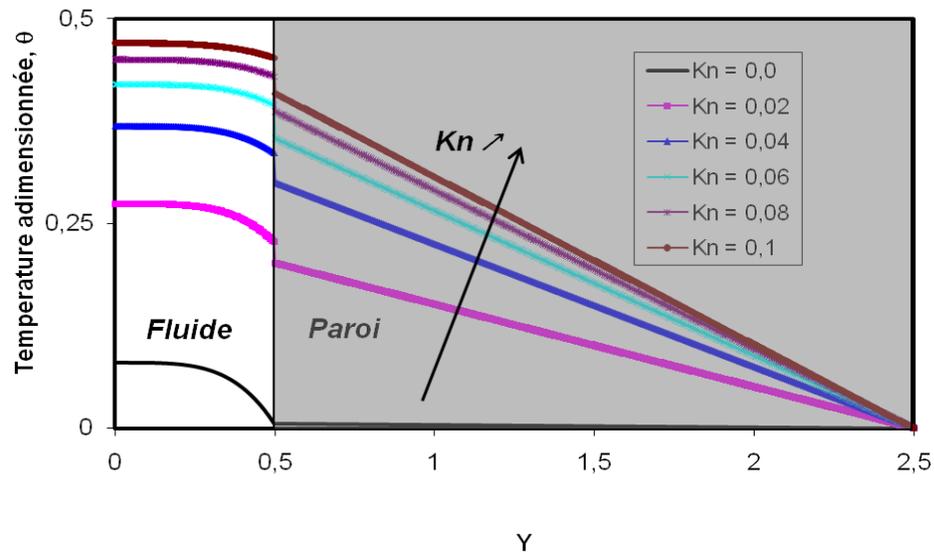
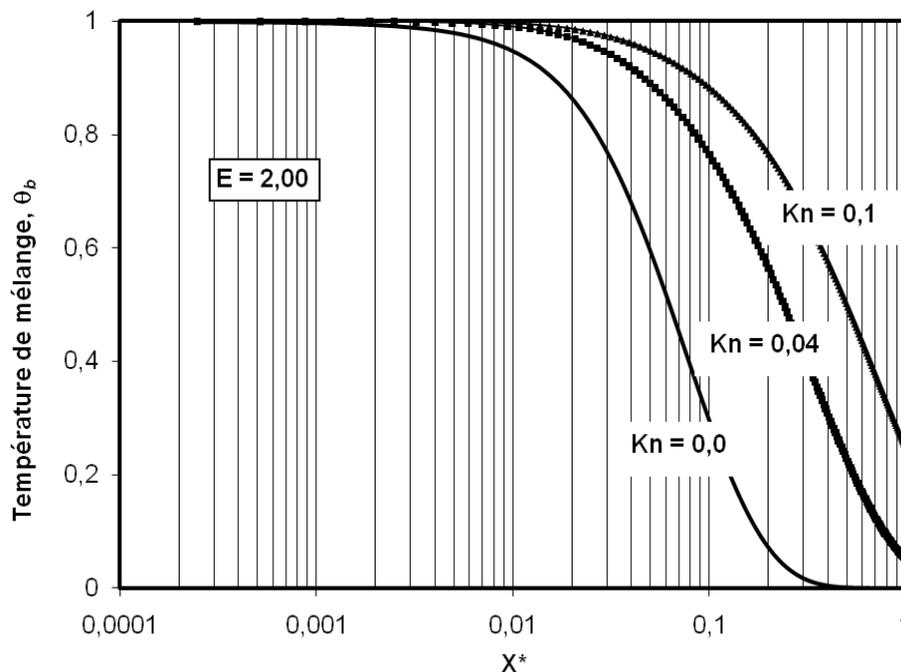


Figure 4.11 Profile de température à la sortie du micro-canal pour différents nombre de Knudsen ( $Br = 0,1$ )  
Cas température imposée

## 4. Ecoulement des gaz dans un micro-canal plan

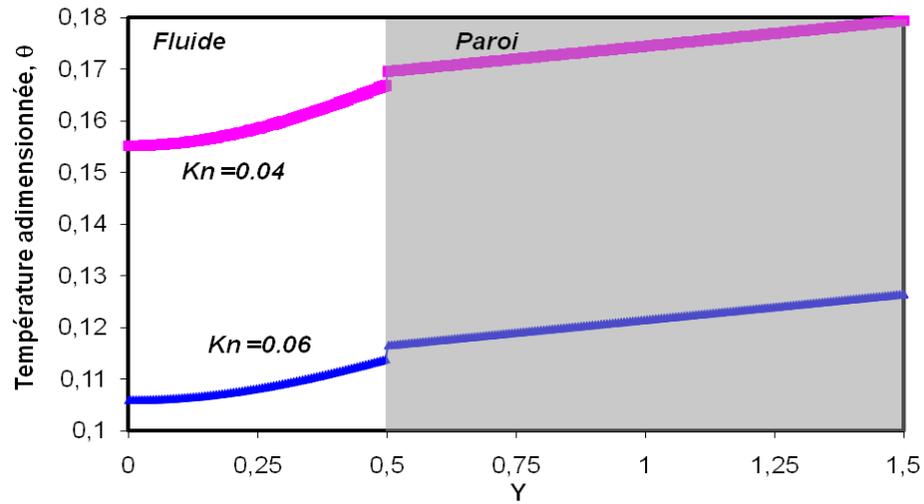
Sous l'effet de la raréfaction, la température à l'interface fluide/solide subit un saut, ce saut est proportionnel au nombre de Knudsen. En effet, sur la figure 4.11, on constate que lorsque  $Kn \neq 0$ , une discontinuité de la température apparaît à l'interface et le gradient de température décroît lorsque le nombre de Knudsen augmente. Ce saut de température joue le rôle d'une résistance thermique et diminue considérablement le transfert de chaleur. On constate aussi que le gradient de température dans la paroi n'est plus constant malgré que la paroi est très conductrice  $K = 100$ .

On note sur la figure (4.9) que lorsque  $Kn = 0$ , la température du mélange du fluide diminue rapidement pour atteindre la valeur imposée à la paroi extérieure ( $\theta = 0$ ). En augmentant le nombre de Knudsen le transfert de chaleur diminue, le refroidissement du fluide est freiné pour  $Kn = 0.1$  par rapport aux cas où  $Kn = 0$  et  $Kn = 0.04$ .

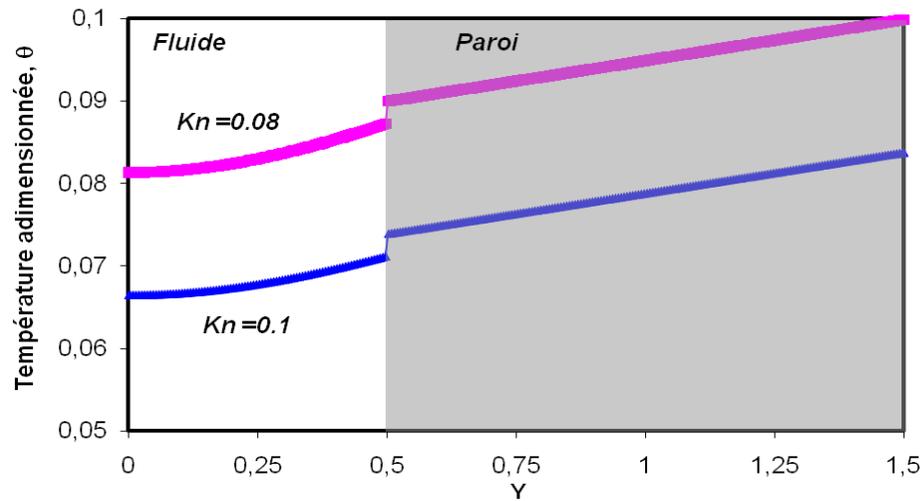


**Figure 4.12 Evolution de la température du mélange du fluide le long du micro-canal pour différents nombre de Knudsen.  $E = 2$   
Cas température imposée**

#### 4. Ecoulement des gaz dans un micro-canal plan



(a)



(b)

**Figure 4.13 Evolution des profils de température pour différents nombres de Brinkman. Cas flux imposée ( $E = 1, X^* = 0.8$ )**  
**(a)  $Kn = 0,04 ; 0,06$ . (b)  $Kn = 0,08 ; 0,1$**

## 4. Ecoulement des gaz dans un micro-canal plan

---

Les profils de température à la sortie du micro-canal soumis à un flux constant comme conditions aux limites thermique sont schématisés dans la figure (4.13). Malgré l'intensité de l'échauffement par flux thermique, la raréfaction réduit considérablement le transfert de chaleur. On constate en effet que pour  $Kn = 0,04$  la température sur l'axe du micro-canal ( $Y = 0$ ) est égale à 0,15, et pour  $Kn = 0,1$  elle est égale à 0,066.

### 4.4.4.3 Sur le nombre de Nusselt local

L'effet du nombre de Knudsen sur l'évolution du nombre de Nusselt local le long du micro canal pour  $Br = 0, 0.1$  et  $-0.1$  est représenté sur les figures (4.14).(4.15)(4.16) pour  $E = 0$ . Sans effet de dissipation visqueuse et sans Raréfaction, le Nusselt obtenu en régime établi est  $Nu_{T_{\infty}} = 7.5427$ . Sous l'effet du glissement de vitesse et du saut de température le nombre de Nusselt diminue lorsque le  $Kn$  augmente ; il passe de 7.54 pour  $Kn = 0$ . à 5.28 pour  $Kn = 0.1$  soit une diminution de 42%.

Lorsque  $Br = 0.1$  (refroidissement du fluide) le nombre de Nusselt décroît dès l'entrée du micro-canal puis commence à augmenter à une certaine distance de l'entrée (proche de  $X^* = 0.2$ ) pour se stabiliser à une valeur spécifique pour chaque nombre de Knudsen. Lorsque le  $Kn$  augmente le transfert de chaleur et le nombre de Nusselt en régime établi diminue

Dans le cas d'un échauffement du fluide sous l'effet de la dissipation visqueuse  $Br = -0.1$ , une discontinuité dans l'évolution du nombre de Nusselt local apparaît à une certaine distance de l'entrée du micro canal. Cette dernière s'éloigne de l'entrée lorsque le  $Kn$  augmente, elle se situe au alentour de  $X_c = 0.07$  pour  $Kn = 0$  et  $X_c \approx 0.5$  pour  $Kn = 0.1$ . Par la suite le nombre de Nusselt décroît de nouveau pour tendre vers la même valeur asymptotique correspondant au régime établi avec  $Br = 0,1$ . Sous l'effet de la raréfaction l'établissement de la couche limite thermique est retardé.

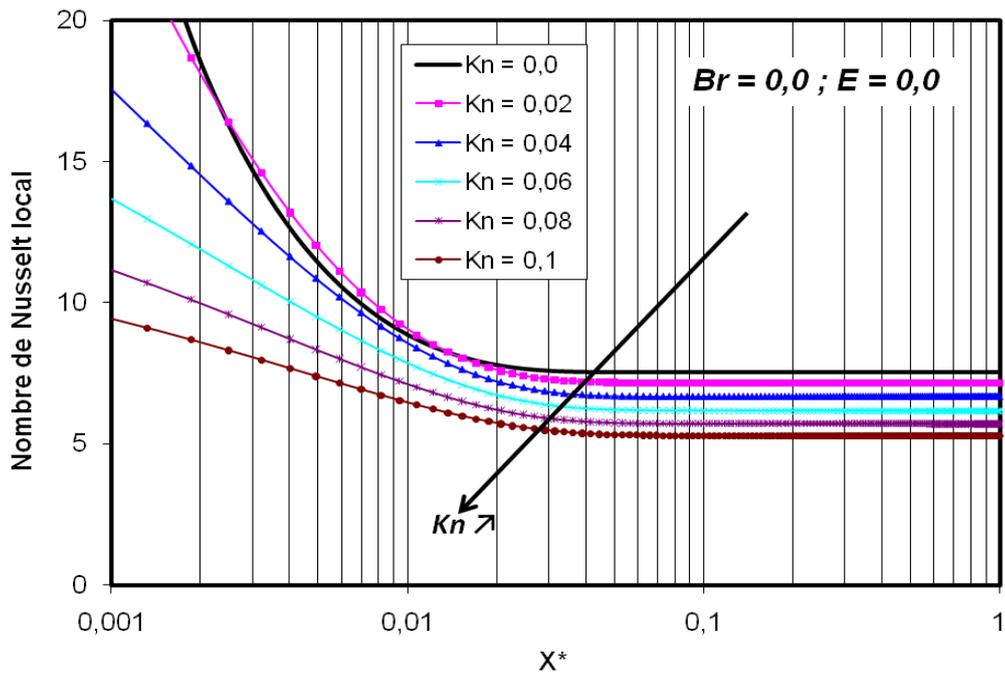


Figure 4.14 Variation du nombre de Nusselt local  $Nu_T$  pour  $Br = 0$  et  $E = 0,0$

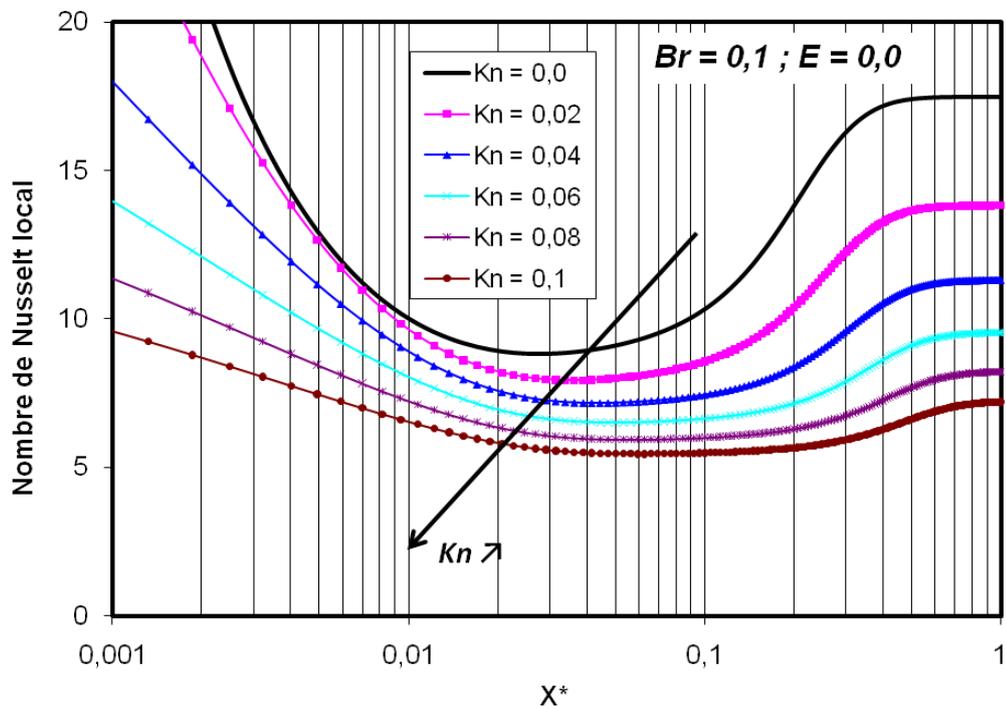


Figure 4.15 Variation du nombre de Nusselt local  $Nu_T$  pour,  $Br = 0,1$  et  $E = 0,0$

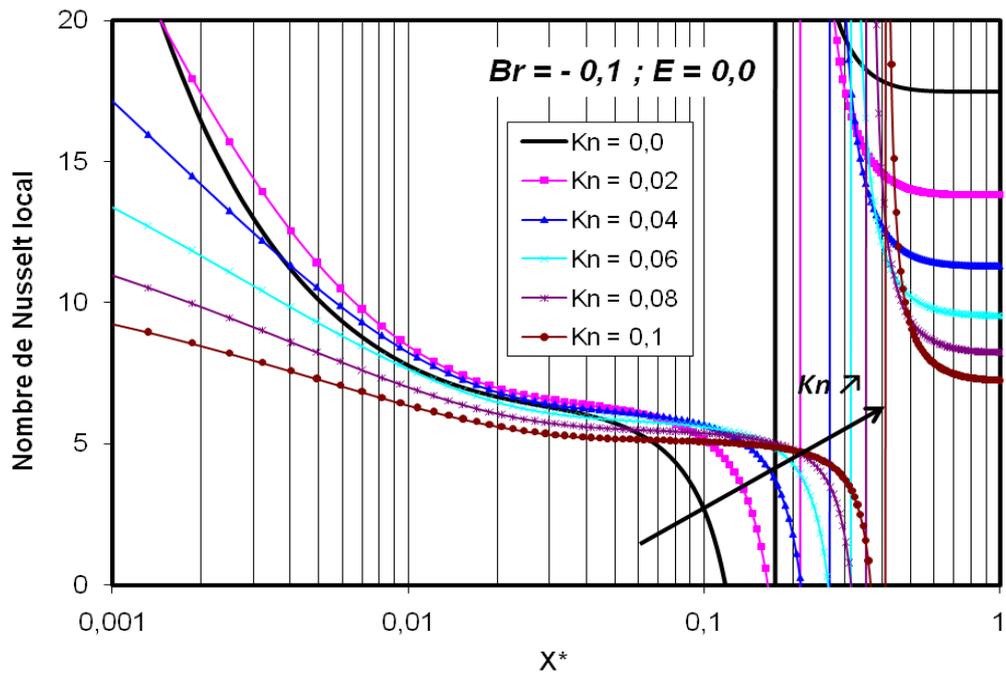


Figure 4.16 Variation du nombre de Nusselt local  $Nu_T$  pour  $Br = -0.1$  et  $E = 0.0$

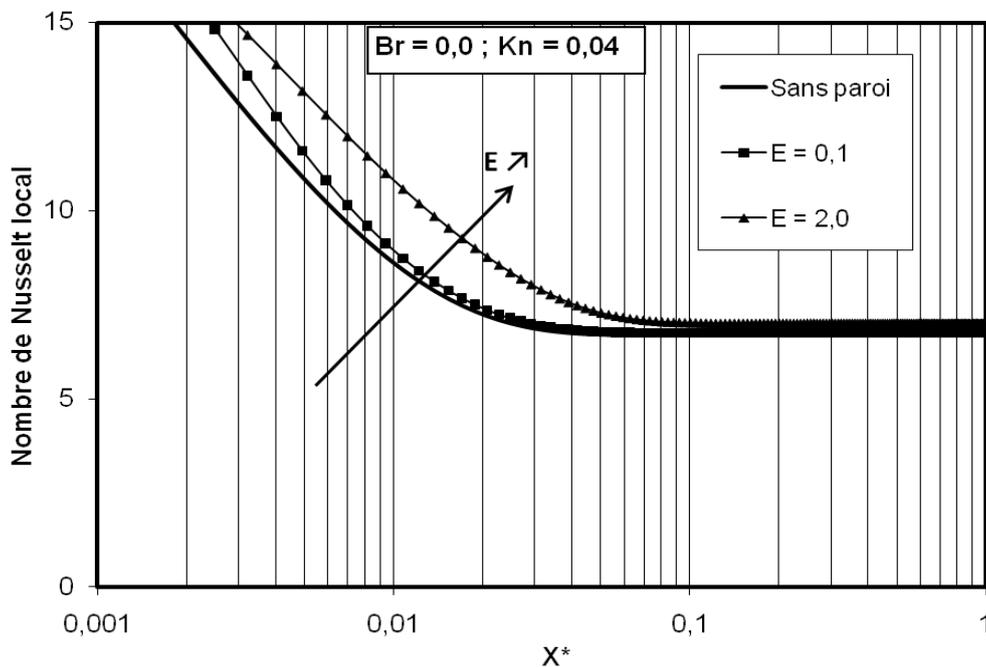
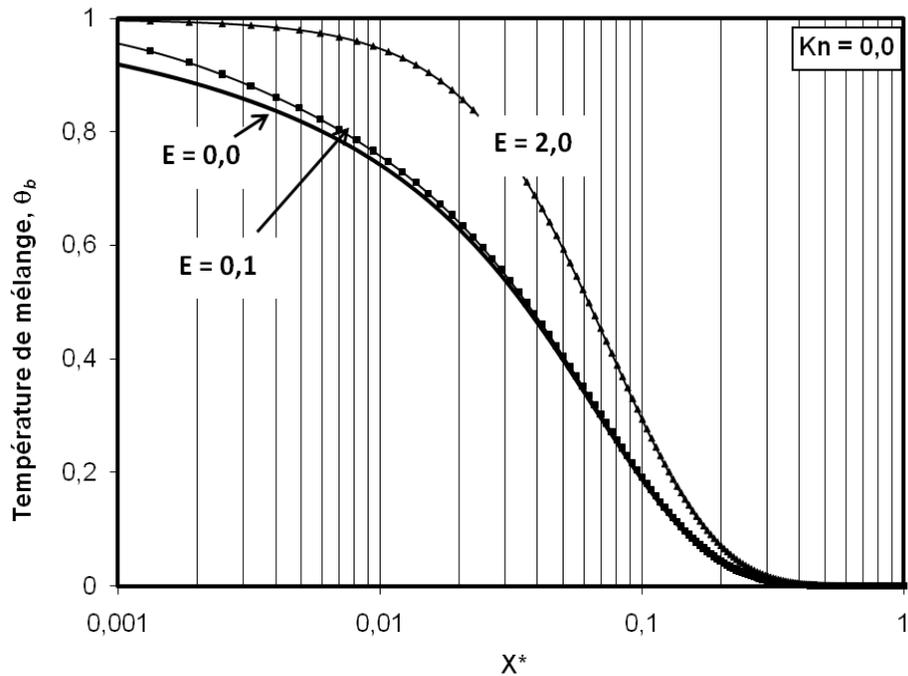
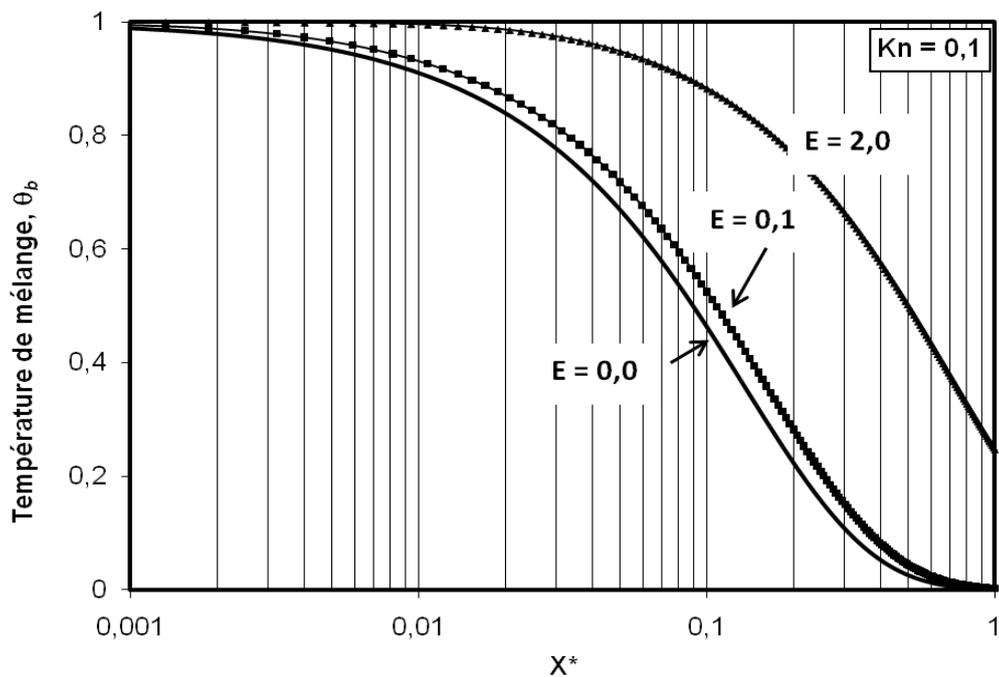


Figure 4.17 Variation du nombre de Nusselt local  $Nu_T$  pour  $Br = -0.0$  et  $Kn = 0.04$

#### 4. Ecoulement des gaz dans un micro-canal plan



**Figure 4.18 Evolution de la température du mélange du fluide le long du micro-canal pour différentes épaisseurs de la paroi nombre de  $Kn = 0,0$   
Cas température imposée**



**Figure 4.19 Evolution de la température du mélange du fluide le long du micro-canal pour différentes épaisseurs de la paroi nombre de  $Kn = 0,1$ .  
Cas température imposée**

#### 4. Ecoulement des gaz dans un micro-canal plan

---

L'influence de la présence de la paroi est nettement mise en évidence dans la figure (4.17) qui représente l'évolution du nombre  $Nu$  en fonction de  $X^*$ . Notons que cette influence est accentuée pour les petites valeurs de  $X^*$ . En effet, nous pouvons remarquer dans cette zone que, quoique l'allure des courbes pour les 3 valeurs de  $E$  est la même, l'écart par rapport au cas sans paroi est d'autant plus élevé lorsque  $E$  augmente. Par la suite, les trois courbes se rejoignent vers une valeur asymptotique spécifique pour chaque épaisseur comme on peut le constater dans le tableau (4.3).

L'effet du nombre de Knudsen et de l'épaisseur de la paroi sur la température du mélange du fluide est montré dans les figures (4.18) et (4.19) pour  $Kn = 0, 0.1$  respectivement. Rappelons le que la température imposée à la paroi extérieure est  $\theta = 0$ , le nombre de Knudsen retarde le refroidissement du fluide. En effet les résistances créées par le saut de température et l'épaisseur de la paroi freinent le transfert de chaleur, ce qui retarde l'équilibre thermique fluide paroi  $\theta_b = \theta_w$ . Pour  $Kn = 0$ , cet équilibre s'effectue lorsque  $X^* > 1$ . Aussi lorsque  $E = 0.1$ , l'évolution de la température du mélange du fluide est presque identique au cas où  $E = 0$  (canal sans paroi) l'effet de la paroi est localisé à l'entrée du micro-canal pour  $Kn = 0$ , est devient plus important pour  $Kn = 0.1$ .

Les valeurs du nombre de Nusselt  $Nu_T$  en régime établi sont rapportées dans le tableau (4.3) sans prise en compte de la dissipation visqueuse et dans le tableau (4.4) avec prise en compte de l'effet de la dissipation visqueuse. Les résultats obtenus sont en bonnes concordances avec ceux rapportés par Barbaros et al (2006)

#### 4. Ecoulement des gaz dans un micro-canal plan

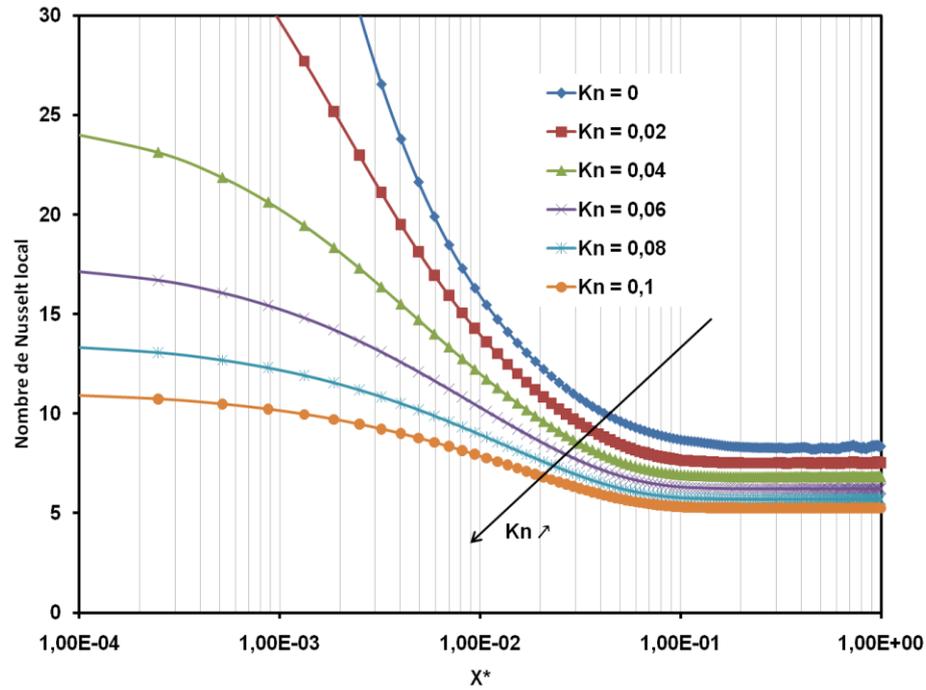
---

Tableau 4.3 Valeurs du Nombre de Nusselt au régime établis

<b>Sans dissipation visqueuse</b>				
	<b>E = 0,0</b>	<b>E = 0,1</b>	<b>E = 2,0</b>	<b>Barbaros (2006)</b>
<b>Kn = 0,0</b>	<b>7,5427</b>	<b>7,6205</b>	<b>7,6216</b>	<b>7,541</b>
<b>Kn = 0,02</b>	<b>7,1631</b>	<b>7,2362</b>	<b>7,5229</b>	<b>6,925</b>
<b>Kn = 0,04</b>	<b>6,672</b>	<b>6,7505</b>	<b>7,0073</b>	<b>6,374</b>
<b>Kn = 0,06</b>	<b>6,1766</b>	<b>6,2474</b>	<b>6,4328</b>	<b>5,882</b>
<b>Kn = 0,08</b>	<b>5,7113</b>	<b>5,7716</b>	<b>5,9102</b>	<b>5,445</b>
<b>Kn = 0,10</b>	<b>5,2889</b>	<b>5,3388</b>	<b>5,4413</b>	<b>5,058</b>

Tableau 4.4 Valeurs du Nombre de Nusselt au régime établis

<b>Avec dissipation visqueuse</b>				
	<b>E = 0,0</b>	<b>E = 0,1</b>	<b>E = 2,0</b>	<b>Barbaros (2006)</b>
<b>Kn = 0,0</b>	<b>17,5085</b>	<b>17,6273</b>	<b>17,6284</b>	<b>17,497</b>
<b>Kn = 0,02</b>	<b>13,8276</b>	<b>14,1128</b>	<b>14,1287</b>	<b>13,688</b>
<b>Kn = 0,04</b>	<b>11,3258</b>	<b>11,5204</b>	<b>11,4955</b>	<b>11,222</b>
<b>Kn = 0,06</b>	<b>9,5487</b>	<b>9,6894</b>	<b>9,595</b>	<b>9,499</b>
<b>Kn = 0,08</b>	<b>8,2362</b>	<b>8,3427</b>	<b>8,175</b>	<b>8,229</b>
<b>Kn = 0,10</b>	<b>7,2337</b>	<b>7,3163</b>	<b>7,0991</b>	<b>7,256</b>



**Figure 4.20** Variation du nombre de Nusselt local pour  $Br = 0$  et  $E = 0.5$   $Kn = 0.04$  Cas du flux imposé.

La figure (4.20) montre la variation du nombre de Nusselt local  $Nu_{H_2}$  en fonction de  $X^*$ . Dans le cas où le micro-canal est soumis à un flux thermique, le glissement de vitesse et le saut de température influent sur le nombre de Nusselt local dès l'entrée du micro-canal. Une baisse du nombre de Nusselt est observée lorsque le nombre de Knudsen augmente. Par la suite, les courbes tendent vers une valeur asymptote bien distincte pour chaque  $Kn$ . Ces valeurs du nombre de Nusselt obtenus en régime établi pour chaque nombre de Knudsen sont rapportées dans le tableau (4.5). Les résultats obtenus par la présente étude sont comparés à ceux obtenus analytiquement à partir de la relation (4.19) établie par van Rij (2009). On peut dire que la présence de la paroi influence le nombre de Nusselt même loin de l'entrée.

$$Nu_{H_2} = 420 \left[ 51 + 420 \left( \frac{2-\sigma_T}{\sigma_T} \right) \left( \frac{2\gamma}{(1+\gamma)} \right) \left( \frac{1}{Pr} \right) Kn - 2 \frac{u_s}{u_m} \left( 9 - \frac{u_s}{u_m} \right) \right]^{-1} \quad (4.20)$$

#### 4. Ecoulement des gaz dans un micro-canal plan

---

Le rapport  $\frac{u_s}{u_m}$  est défini par la relation suivante :

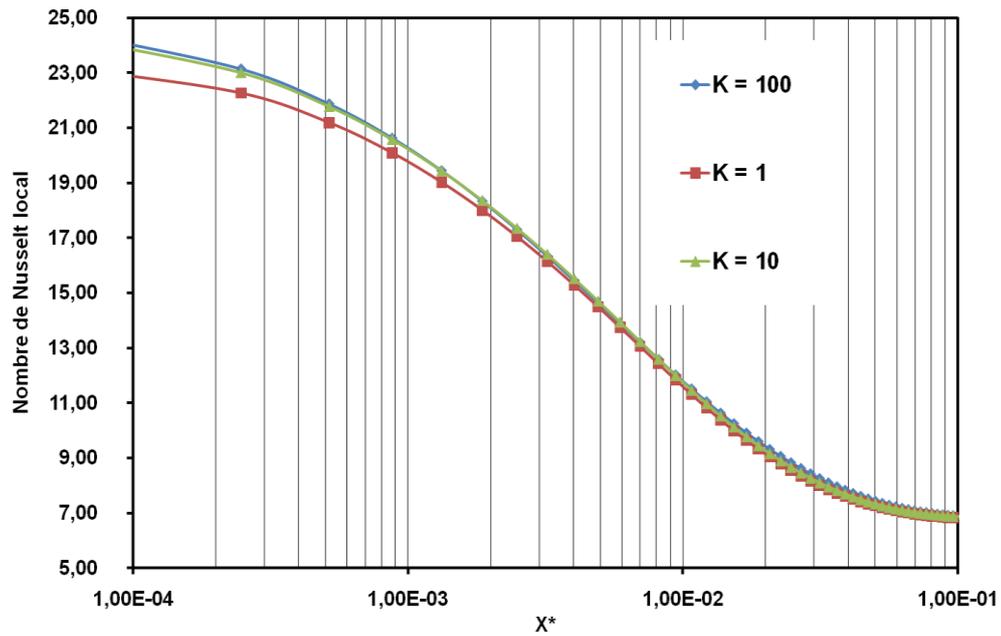
$$\frac{u_s}{u_m} = 1 - \frac{1}{1 + 12 \left( \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \right) Kn} \quad (4.21)$$

**Tableau 4.5 Valeurs du Nombre de Nusselt  $Nu_{H2\infty}$  au régime établi**

	<b>E = 0.1</b>	<b>E = 0.5</b>	<b>E = 1.0</b>	<b>E = 2.0</b>	<b>Solution analytique</b>
					<b>van Rij (2009)</b>
	<b>K = 100</b>				
<b>Kn = 0</b>	8,2397	8,2555	8,2525	8,2785	<b>8,2352</b>
<b>Kn = 0,02</b>	7,5226	7,5236	7,5352	7,5434	<b>7,4871</b>
<b>Kn = 0,04</b>	6,8345	6,8372	6,8406	6,8461	<b>6,8188</b>
<b>Kn = 0,06</b>	6,2288	6,2312	6,2333	6,2377	<b>6,2333</b>
<b>Kn = 0,08</b>	5,7045	5,7067	5,7079	5,7110	<b>5,7237</b>
<b>Kn = 0,1</b>	5,2527	5,2536	5,2542	5,2565	<b>5,2804</b>

L'effet du rapport de conductivité thermique K sur l'évolution du nombre de Nusselt local dans un micro-canal soumis à un flux constant en régime glissant est montré dans la figure (4.21). L'épaisseur de la paroi du micro-canal est prise égale à E = 0.5, le nombre de Knudsen considéré Kn = 0.04. Une légère différence de l'évolution du nombre de Nusselt local est observée juste à l'entrée du micro-canal  $X^* < 0.01$  quand K varie.

Le tableau (4.6) montre que le Nusselt obtenu en régime établi est peu sensible à E. Cependant, il est fortement dépendant du rapport des conductivités K.



**Figure 4.21** Variation du nombre de Nusselt local pour  $Br = 0$  et  $E = 0.5$   $Kn = 0.04$  Cas du flux imposé.

**Tableau 4.6** Valeurs du Nombre de Nusselt  $Nu_{H2\infty}$  au régime établis

	<b>K = 1</b>	<b>K = 10</b>	<b>K = 100</b>
	<b>E = 0.5</b>		
<b>Kn = 0</b>	8,2031	8,2284	8,2555
<b>Kn = 0,02</b>	7,4412	7,5134	7,5236
<b>Kn = 0,04</b>	6,7666	6,8263	6,8372
<b>Kn = 0,06</b>	6,1755	6,2246	6,2312
<b>Kn = 0,08</b>	5,6592	5,7007	5,7067
<b>Kn = 0,1</b>	5,2145	5,2479	5,2536

---

## ***Chapitre 05***

# ***Conclusions et perspectives***

---

### 5. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Le travail élaboré dans cette thèse porte sur la caractérisation des transferts convectifs dans des minis ou micro –canaux.

Après avoir introduit quelques effets d'échelles rapportés dans la littérature à savoir ; l'effet de la dissipation visqueuse, la conduction axiale combinée fluide/paroi, le développement simultanée des couches limites hydrodynamique et thermique, et la raréfaction, nous avons présenté le modèle mathématique régissant ce type d'écoulement avec transfert de chaleur et développé un code de calcul en langage Fortran pour résoudre les équations de conservation par la méthode des volumes finis. L'incorporation du saut de température en présence de la paroi a été réalisée. Le code de calcul développé a été validé avec les données analytiques rapportées dans la littérature.

Dans le cas où nous considérons un écoulement non raréfié, les résultats obtenus montrent que :

La longueur d'établissement est plus grande pour les faibles rapports de conductivité thermique ( $K=k_s/k_f$ ). La dissipation visqueuse retarde l'établissement thermique surtout pour les valeurs positives du nombre de Brinkman

Les valeurs du nombre de Nusselt au régime établi changent avec le rapport de conductivité thermique, elles peuvent être soit inférieures ou supérieures aux valeurs asymptotiques connues dans la littérature pour  $Br \neq 0$ . Par contre pour un  $Br = 0$  ces valeurs tendent vers celles du régime établi pour de grandes valeurs du rapport  $K$ .

## 5. Conclusions et perspectives

---

Une faible conductivité de la paroi augmente la longueur de développement thermique. Aussi lorsque l'effet de la conduction axiale dans le solide est pris en compte, la variation de la température du mélange le long du micro-canal n'est plus linéaire.

L'effet axial de la conduction dans le solide est plus significatif pour des parois plus épaisses et de faibles rapports de la conductivité thermique.

L'effet de l'épaisseur de la paroi sur le transfert de chaleur est localisé à l'entrée du micro-canal.

Dans la plupart des études menées sur les écoulements de gaz dans les micro-canaux, les auteurs négligent souvent l'épaisseur de la paroi, dans notre cas cette paroi est prise en compte. Les conditions du glissement de vitesse et du saut de température sont introduites à l'interface fluide-paroi.

Le gradient de vitesse décroît lorsque la raréfaction augmente ( $Kn$  augmente), de ce fait la raréfaction réduit le coefficient de frottement du fluide dans le micro-canal. En effet, le nombre de Poiseuille en régime établi passe de 24 pour  $Kn = 0$  à 10,84 pour  $Kn = 0.1$

Un glissement de vitesse important (faible  $\beta$ ) augmente la convection près de la paroi, d'autre part un saut de température important à la paroi (grand  $\beta$ ) diminue le transfert de chaleur en réduisant le gradient de température à la paroi.

L'effet de la raréfaction diminue considérablement le transfert thermique, on doit en tenir compte pour une bonne évaluation du coefficient de transfert thermique dans des micro-canaux en régime glissant.

Aussi une faible valeur du rapport  $\beta$ , c'est-à-dire dominance du glissement de vitesse sur le saut de température, retarde l'établissement de la couche limite thermique

## 5. Conclusions et perspectives

---

L'effet du glissement de vitesse est du saut de température induit une diminution du nombre de Nusselt. En effet,  $Nu$  passe de 7,54 pour un nombre de Knudsen  $Kn = 0$  à 5,28 pour  $Kn = 0,1$ , soit une diminution de 42%.

Lorsque le nombre de  $Kn$  augmente et en tenant compte de l'épaisseur de la paroi, le nombre de Nusselt diminue.

A l'issue de ce travail, de nombreuses perspectives apparaissent.

\*Considérer des fluides à propriétés thermo-physique variables.

\* D'une part considérer des micro-canaux à section plus complexe, à savoir : triangulaire, trapézoïdale .....

\* Introduction des conditions aux limites du glissement de vitesse et du saut de température d'ordre supérieur.

\* Modéliser le transfert convectif dans un micro-canal soumis à des conditions aux limites asymétriques pour la température, ceci nous permet de mieux approcher les conditions réelles de fonctionnement des micro-canaux dans les applications industrielles comme les piles à combustible.

---

## ***Bibliographies***

---

### RÉFÉRENCES

1. Abboudi, S. et Papini, F., (1990), Etude numérique du transfert thermique métal-fluide dans un conduit rectangulaire en régime instationnaire, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 33, No. 9, pp1909-1920.
2. Aydın, O. and Avcı, M., (2006), Viscous-dissipation effects on the heat transfer in a Poiseuille flow, *Applied Energy*, Vol. 83, No. 5, pp 495-512.
3. Barbaros, C., Yuncu, H., Kakaç, S., (2006) Flow in Microconduits with Viscous Dissipation, *International Journal of Transport Phenomena*, Vol. 8, pp. 297–315
4. Aubert Cécile, (1999), *Écoulements compressibles de gaz dans les micro-canaux : Effets de raréfaction, effets instationnaires*, Thèse Université Paul Sabatier toulouse.
5. Barber, R. W. and Emerson, D. R., The influence of Knudsen number on the hydrodynamic development length within parallel plate micro-channels, *Advances in Fluid Mechanics IV*, Wit press, pp 207-216
6. Barron, R. F., Wang, X. M., Warrington, R. O., (1996). Evaluation of the eigenvalues for the Graetz problem in slip-flow. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 23, No. 4, pp 563-574.
7. Barron, R. F., Wang, X. M., Ameel, T. A., Warrington, R. O., (1997), The Graetz problem extended to slip-flow, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 40, No. 8, pp 1817-1823.
8. Bejan, A. and Kraus Allan, D., (2003), *Heat transfer handbook*, John Wiley
9. Bessaih, R., (1994), *Effet thermique d'un craque mécanique dans un micro processeur*, Thèse de Magister Université Mentouri Constantine Algérie.
10. Bilir S., (1995), Laminar flow heat transfer in pipes including two-dimensional wall and fluid axial conduction, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 38, No 9, pp 1619-1625.

## Références

---

11. Chen C.-H., (2006), Slip-flow heat transfer in a microchannel with viscous dissipation, *Heat Mass Transfer*, Vol. 42, pp 853–860.
12. Ching S., (2005), *Rarefied Gas Dynamics Fundamentals, Simulations and Micro Flows*, Springer
13. Cole K.D.,(1997), Conjugate heat transfer from a small heated strip, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 40, No.11, pp 2709-2719.
14. Colin, S.et Baldas, L., (2004), Effets de raréfaction dans les micro-écoulements gazeux, *C. R. Physique*, Vol. 5, pp 521–530.
15. Del Giudice, S., Nonino, C., Savino, S., (2007), Effects of viscous dissipation and temperature dependent viscosity in thermally and simultaneously developing laminar flows in microchannels, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 28, No. 1, pp 15-27.
16. Gad-el-Hak, M., (2002)., *MEMS introduction and fundamentals*, Taylor & Francis Group
17. Gad-el-Hak, M., (1999), The fluid mechanics of microdevices—the Freeman scholar lecture, *Journal of Fluids Engineering, Transaction of the ASME*, Vol. 121, pp 5–33.
18. Gamrat, G., Favre-Marinet, M., Asendrych, D.,(2005), Conduction and entrance effects on laminar liquid flow and heat transfer in rectangular microchannels, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 48, No. 14, pp 2943-2954.
19. Gao, P., Le Person, S., Favre-Marinet, M.,(2002), Scale effects on hydrodynamics and heat transfer in two-dimensional mini and microchannels, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 41, No. 11, pp 1017-1027.
20. Ghodoossi, L. and Egrican, N., (2005), Prediction of heat transfer characteristics in rectangular microchannels for slip flow regime and H1 boundary condition, *Int. J. Therm. Sci.*, Vol. 44, pp 513–520.
21. Herwig H., (2002), Flow and Heat Transfer in Micro Systems: Is Everything Different or Just Smaller?, *ZAMM \_ Z. Angew. Math. Mech.* 82 9, pp 579—586.
22. Jambal, O., Shigechi, T., Davaa, G., Momoki, S., (2005), Effects of viscous dissipation and fluid axial heat conduction on heat transfer for non-Newtonian fluids in ducts with uniform wall temperature: Part I: Parallel plates and circular ducts, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 32, No. 9, pp 1165-1173.

## Références

---

23. Jeong, H.-E., Jeong, J.-T., (2006), Extended Graetz problem including streamwise conduction and viscous dissipation in microchannel, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 49, pp 2151–2157.
24. Hetsroni, G., Mosyak, A., Pogrebnyak, E., Yarin, L.P., (2005) Heat transfer in micro-channels: Comparison of experiments with theory and numerical result *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 48, pp 5580–5601.
25. Hong ,C., Asako, Y., Turner, S.E., Faghri, M., (2007), Friction factor correlations for gas flow in slip flow regime, *Journal of Fluids Engineering* , Vol.129 , pp 1268–1276.
26. Kabar, Y., Rebay, M., Kadja, M., Padet, C., (2010), Numerical Resolution of Conjugate Heat Transfer Problem in a Parallel-Plate Micro-Channel, *Heat Transfer Research*, Vol. 41, No. 3, pp 247-263.
27. Kakaç, S., Vasiliev, L.L., Bayazitoglu, Y., Yener ,Y.,(2005), *Microscale Heat Transfer - Fundamentals And Applications*, Springer-Nato science series.
28. Kandlikar, S. G., Garimella, S., Li, D., Colin, S., King, M. R., (2006), *Heat transfer and fluid flow in minichannels and microchannels*, Elsevier Ltd.
29. Karniadakis, G.E., Beskok, A., (2002), *Microflows: Fundamentals and Simulation*, Springer-Verlag, New York.
30. Koo, J. and Kleinstreuer, C.,(2004), Viscous dissipation effects in microtubes and microchannels, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, pp 3159-3169.
31. Larrode, F. E., Housiadas, C., Drossinos, Y., (2000), Slip-flow heat transfer in circular tubes, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, pp 2669–2680.
32. Lee, S. Y., et al (2002)., *Microchannel Flow Measurement Using Micro-PIV, Proceedings of IMECE2002 ASME International Mechanical Engineering Congress & Exposition*, New Orleans, Louisiana, November 17–22, , IMECE 2002-33682.
33. Li, Z., He, Y., Tang, G., Tao, W., (2007), Experimental and numerical studies of liquid flow and heat transfer in microtubes, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 50, pp 3447-3460.
34. . Li, J., Peterson, G. P., Cheng, P., (2004), Three-dimensional analysis of heat transfer in a micro-heat sink with single phase flow, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, pp 4215–4231.

## Références

---

35. Maranzana, G., Perry, I., Maillet, D., (2004), Mini- and micro-channels: influence of axial conduction in the walls, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, pp 3993-4004.
36. Mikhailov, M.D., Cotta, R.M., (2005), Mixed symbolic-numerical computation of convective heat transfer with slip flow in microchannels, *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, Vol. 32, pp 341–348.
37. Mishan, Y., Mosyak, A., Pogrebnyak, E., Hetsroni, G., (2007), Effect of developing flow and thermal regime on momentum and heat transfer in micro-scale heat sink, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 50, pp 3100-3114.
38. Morini G.L., (2006) Scaling effects for liquid flows in microchannels, *Heat Transfer Eng*, Vol. 27, No. 4, pp 64–73.
39. Morini G.L., (2005), Viscous heating in liquid flows in micro-channels, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 48, No. 17, pp 3637-3647.
40. Nguyen, N.-T., Wereley, S., (2006), *Fundamentals and Applications of Microfluidics*, Second Edition ARTECH HOUSE, INC
41. Nonino, C., Savino, S., Del Giudice, S., Mansutti, L., (2009), Conjugate forced convection and heat conduction in circular microchannel, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 30, pp 823–830.
42. Nonino, C., Del Giudice, S., Savino, S., (2006), Temperature dependent viscosity effects on laminar forced convection in the entrance region of straight ducts, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 49 , pp 4469–4481
43. Omara, A. and Abboudi, S., (2007), Numerical analysis of transient conjugated downward laminar mixed convection in a vertical pipe, *Numerical Heat Transfer; Part A: Applications*, Vol. 51, No. 3, pp. 225-247.
44. Patankar S.V., (1980), *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, Washington D.C
45. Patankar S. V., (1978), A numerical method for conduction in composite materials, flow in irregular geometries and conjugate heat transfer, In: International Heat Transfer Conference, 6th, Toronto, Canada, August 7-11, 1978, General Papers. Volume 3. (A79-42929 18-34) Washington, D.C., Hemisphere Publishing Corp., pp 297-302.
46. Peterson R.B., (1999), Numerical modelling of conduction effects in microscale counterflow heat exchangers, *Nanoscale and Microscale Thermophysical Eng.*, Vol. 3, pp17-30.

## Références

---

47. Rosa, P., Karayiannis, T.G., Collins, M.W, (2009) Single-phase heat transfer in microchannels: The importance of scaling effects, *Applied Thermal Engineering* , Vol. 29, pp 3447–3468.
48. Shah, R.K. and London, A.L., (1978), *Laminar flow forced convection in ducts*, in: *Advanced Heat Transfer*, Academic Press, New York.
49. Sugavanam, R. and Ortega, A., (1995), A numerical investigation of conjugate heat transfer from a flush heat source on a conductive board in laminar channel flow, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 38, No.16, pp 2969-2984.
50. Tabeling P., (2003), *Introduction à la microfluidique*, Edition Belin.
51. Tiselj, I., Hetsroni, G., Mavko, B., Mosyak, A., Pogrebnyak, E., Segal, Z., (2004), Effect of axial conduction on the heat transfer in micro-channels, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, pp 2551–2565.
52. Tso, C.P. and Mahulikar, S.P., (2000), Experimental verification of the role of Brinkman number in microchannels using local parameters , *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, No. 10, pp1837-1849.
53. Tso, C. P. and Mahulikar, S.P., (1998), The use of the Brinkman number for single phase forced convective heat transfer in microchannels , *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 41, No. 12, Pages 1759-1769.
54. Tunc, G. and Bayazitoglu, Y., (2002), Heat transfer in rectangular microchannels. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, pp 765–773.
55. Tunc, G. and Bayazitoglu, Y., (2001), Heat transfer in microtubes with viscous dissipation, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 4, pp 2395–2403.
56. Van Rij, J., Harman, T., Ameer, T., (2007), The effect of creep flow on two dimensional isoflux microchannels, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 46, pp 1095–1103.
57. Van Rij, J., Harman, T., Ameer, T., (2009), The effect of viscous dissipation and rarefaction on rectangular microchannel convective heat transfer, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 48, pp 271-281.
58. Versteeg, H.K. and Malalasekera, W., (1998), *An introduction to computational fluid dynamics : the finite volume method*, Longman
59. Yarín, L.P ,Mosyak, A., Hetsroni, G., (2009), *Fluid Flow, Heat Transfer and Boiling in Micro-Channels*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

## Références

---

60. Yu, S. and Ameen, T.A, (2001), Slip-flow heat transfer in rectangular microchannels, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 44, pp 4225–4234.
61. Zueco, J., Alhama, F., González Fernández, C. F., (2004), Analysis of laminar forced convection with Network Simulation in thermal entrance region of ducts, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 43, pp 443-451.

---

***Annexe***

---

Annexe

Heat Transfer Research, 2010, Vol. 41, No. 3

**Numerical Resolution of Conjugate Heat Transfer  
Problem in a Parallel-Plate Micro-Channel**

YASSINE KABAR<sup>a,b\*</sup>, MOURAD REBAY<sup>a</sup>,

MAHFOUD KADJA<sup>b</sup>, and COLETTE PADET<sup>a</sup>

<sup>a</sup>University of Reims Champagne-Ardenne, GRESPI/Laboratoire de  
Thermomécanique, Faculté des Sciences PB1039, 51687 Reims, France

<sup>b</sup>Université Mentouri Constantine, Laboratoire LEAP,  
Faculté des Sciences de l'ingénieur, Algérie

The present paper deals with the characterization of the conjugated two-dimensional steady-state heat transfer problem in two parallel-plate micro-channel heat sinks. The fluid is assumed to be incompressible and with constant properties. Simultaneous hydrodynamic and thermal developing region is taken into consideration here. Axial conduction is also taken into account. An analysis is performed for constant wall temperature at the outer surfaces of the plates. The heat wave generated at these surfaces is crossing through the plates to reach the interface with the fluid in the micro-channel. Due to the fact that channel height ( $H$ ) is of the same order of dimension of the plate thickness ( $E$ ) in the micro-channel, the conduction in the plate cannot be assumed negligible. Therefore, the convective heat transfer in a micro-channel is conjugated with the conduction in the solid plates. The two-dimensional Navier–Stokes equations and the energy equation are solved by the finite-control-volume method. Detailed temperature profiles in the fluid and the solid, the fluid bulk temperature and the heat flux distributions on the fluid–solid interface are provided. The effects of the plate thickness and the solid to fluid thermal conductivities ratio ( $K = k_s/k_f$ ) are studied for a water flow with a Reynolds number  $Re = 100$ . The results of different simulations are analyzed, and the axial distributions of the Nusselt number are deduced for each case. The results show that viscous heating of the fluid can significantly influence the heat transfer in the micro-channel heat sink. The thickness plate ( $E$ ) may have an influence on both thermal

\*Address all correspondence to Y. Kabar E-mail: kabar\_yassine@yahoo.fr