REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université de Constantine

Institut de Mathématiques

Thèse

En vue de l'obtention du diplôme de Magistere

THEOREMES ASYMPTOTIQUES POUR LE TEMPS DE PANNE DE SYSTEMES K-CONSECUTIFS-SUR-N

MODELES DE PREVISIONS METEOROLOGIQUES

Présentée par :

Lamia ABADA

Soutenue le 04 Juillet 1994

Devant le jury d'examen :

Président :	**H.KHERBACHI**	**Béjaia**
Rapporteur :	**B.KSIR**	**Constantine**
Examinateur :	**A.AISSANI**	**Blida**
Examinateur :	**M.DAKHMOUCHE**	**Constantine**

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université de Constantine

Institut de Mathématiques

Thèse

En vue de l'obtention du diplôme de Magistere

THEOREMES ASYMPTOTIQUES POUR LE TEMPS DE PANNE DE SYSTEMES K-CONSECUTIFS-SUR-N

MODELES DE PREVISIONS METEOROLOGIQUES

Présentée par :

Lamia ABADA

Soutenue Le

Devant le jury d'examen :

Président :	H.KHERBACHI	Béjaia
Rapporteur :	B.KSIR	Constantine
Examinateur :	A.AISSANI	Blida
Examinateur :	M.DAKHMOUCHE	Constantine

THEOREMES ASYMPTOTIQUES POUR LE TEMPS DE PANNE DE SYSTEMES K-CONSECUTIFS-SUR-N
MODELES DE PREVISIONS METEOROLOGIQUES

REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur B.Ksir d'avoir accepté de diriger les travaux de ma thèse.Je le remercie aussi pour toute l'aide et le suivi qu'il a temoigne pour que je puisse établir ce travail.

Je remercie Monsieur H.Kherbachi professeur à l'université de Béjaïa, Monsieur A.Aïssani maitre de conférence à l'université de Blida et Monsieur M.Dakhmouche chargé de cours a l'université de Constantine d'avoir accépté de juger ma thèse.

Je remercie toute l'équipe du projet de recherche option fiabilite et particulierement Mahmoud et Zineb pour tous les efforts qu'ils ont fourni.

Je remercie tous mes collègues de l'institut de mathematiques qui m'ont donné beaucoup de conseils pour pouvoir réaliser ce travail.Ainsi que tous les membres de l'administration.

Je remercie aussi les collègues du département d'énergitique de l'institut de physique en particulier Salah et Mourad pour tous les renseignements et l'aide qu'ils m'ont fourni.

Je remercie enfin le personnel du centre climatologique national et celui de la station météorologique de Constantine.

DEDICACE

Je dédie cette thèse à:

La memoire de mon père que je n'oublierai jamais.Que dieu lui accorde sa misericorde et qu'il repose en paix.

Ma mere ,je la remercie pour toute l'affection, la tendresse et l'encouragement qu'elle m'a offert et pour tout le confort qu'elle m'a fourni pour que je puisse arriver à ce stade ci.Je lui souhaite une longue vie.

Mes grands parents ,en temoignage de leur affection et toutes leurs prières qu'ils n'ont cessé de repeter pour que je puisse reussir dans ma vie.

Mes soeurs Hafsa et Fazet Sourour qui ont toujours été à mes côtés.

Ma soeur ainée Nora ,son mari Mohamed et ses filles Amina et Rayane.

Mon petit Houssem.Je lui souhaite tout le bonheur et la réussite dans sa vie.

Toutes mes tantes,tous mes oncles et tous leurs enfants.

Mes copines Fanny et Soumaya.

TABLE DE MATIERES

THEME I

STABILITE ASYMPTOTIQUE DE LA LOI DE WEIBULL PAR COMPOSITION DE STRUCTURES K-CONSECUTIVES-SUR-N

THEME II

MODELES PROBABILISTES POUR DES PREVISIONS METEOROLOGIQUES

THEME I

STABILITE ASYMPTOTIQUE DE LA LOI DE WEIBULL PAR COMPOSITION DE STRUCTURES K-CONSECUTIVES-SUR-N

I INTRODUCTION.

Depuis l'introduction dans la théorie de la fiabilité des systèmes k-consécutifs-sur-n en 1980 par Kontoleon [1],il existe une littérature intensive donnant la fiabilité d'un tel système sous des hypothèses diverses,on peut consulter par exemples Derman [3] , Hwang [7], Shanthikumar [5], Ksir et Boushaba [13],Chiang et Nui [2], Bollinger et Salvia [4], Fu [8],pour plus de précisions.

L'étude asymptotique lorsque n tend vers l'infini qui nous interesse ici a parcontre donné lieu à peu de travaux que nous rappellerons plus loin.

Pour des systèmes cohérents dont la configuration est en parallèle ou en série des travaux approfondis ont donné lieu à des résultats très developpés.Dans le cas où les composants sont indépendants et identiquement distribués, Fisher et Tippet en 1928 et Gnedenko en 1943 ont montré que pour des systèmes à composants en "série" il n'existe que trois types de lois asymptotiques possibles pour leur temps de panne. Un résultat analogue se déduit pour le temps de panne d'un système à composants en "parallèle".

Concernant les systèmes "k-sur-n",en 1952 Smirnov a aussi montré que pour leur temps de panne il n'existe que trois types de lois asymptotiques possibles.

Même dans le cas où les composants sont non indépendants,on montre que dans une structure en "série" la distribution limite des temps entre les pannes est exponentielle.

Ici,nous nous intéressons à d'autres types de systèmes plus exactement à des systèmes dont la configuration est plus compliquée:les systèmes k-consécutifs-sur-n.

Un système k-consécutifs-sur-n est défini de la manière suivante: le système comporte n composants disposés linéairement,il tombe en panne si et seulement si k composants consécutifs sont en panne.

Comme on l'a déja noté les systèmes k-consécutifs-sur-n ont fait l'objet de beaucoup de publications du point de vue calcul de la fiabilité.On a également démontré quelques théorèmes limites notamment dans [9] et [11].

Les systèmes k-consécutifs-sur-n sont en effet très utiles dans la pratique. on les rencontre souvent dans les domaines de la télécommunication,des circuits intégrés,dans le pompage de pétrole par pipes-lines etc....

Le premier résultat paru concernant le comportement asymptotique du temps de panne d'un système k-consécutifs-sur-n est du à Papastavridis en 1987 [9].Il établit un théorème de stabilité pour la loi de Weibull dans le cas où les composants sont supposés indépendants et de même loi (leur loi de panne étant la loi de Weibull).

Très récemment en 1990,Chrissaphinou et Papastavridis ont démontré un resultat analogue mais dans un cadre plus général;c'est à dire le cas où les composants sont indépendants mais de distributions de panne non nécessairement identiques (les lois de panne sont toujours supposées des lois de Weibull).On remarque que dans tous les résultats déjà parus l'hypothèse d'indépendance des composants est toujours conservée, bienqu'elle soit en réalité restrective.Notre but est d'établir une généralisation au cas non indépendant et ce en redemontrant le résultat établi dans [11] d'une manière différente qui se prête assez bien à l'extension voulue.Notre démonstration repose sur un encadrement de la distribution de panne du système.

La seconde partie de notre travail est un théorème de loi forte du type Erdös-Rényi-Shepp [6] pour le temps de panne du système dans le cas où les composants sont indépendants et identiquement distribués.Ici on suppose que le paramètre k croit avec n et on s'inspire des techniques utilisées par Ksir dans [10].

Mots clés:
Système k-consécutifs-sur-n. Stabilité asymptotique. Loi de Weibull. Loi forte.

II DEFINITIONS ET PROPRIETES.

II 1 DEFINITION D'UN SYSTEME K-CONSECUTIFS-SUR-N.

Un système k-consécutifs-sur-n est un système formé de n composants disposés linéairement.Ce système tombe en panne si et seulement si k consécutifs de ses composants sont en panne.On précise qu'un composant ne possède que deux états:il fonctionne ou il est en panne. cette dichotomie est valable aussi pour le système lui même.

La fonction de structure du système est donnée par:

$$\Phi(X) = \coprod_{j=1}^{n-k+1} \prod_{i=j}^{j+k-1} X_i = \max_{1\leq j\leq n-k+1} \min_{j\leq i\leq j+k-1} X_i$$

où $X_1,\ldots,X_n$ sont les états respectifs des composants $1,\ldots,n$.

Le temps de panne du système est donné par:

$$Z_n = \min_{1\leq j\leq n-k+1} \max_{j\leq i\leq j+k-1} T_i$$

où $T_1,\ldots,T_n$ sont les temps de panne respectifs des composants $1,\ldots,n$.

II 2 DEFINITION DE LA LOI DE WEIBULL.

On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi de Weibull de paramètres α et λ si sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue est:

$$f(x) = \alpha\lambda\, x^{\alpha-1}\exp(-\lambda x^{\alpha}) \quad \text{si } x\geq 0 \quad ;\alpha>0,\lambda>0.$$

Sa fonction de répartition F est $F(x) = 1- \exp(-\lambda x^{\alpha})$.

III QUELQUES THEOREMES DE STABILLITE CONCERNANT LES STRUCTURES EN "SERIE", LES STRUCTURES EN "PARALLELE" ET LES STRUCTURES "K-SUR-N".

On considère un système cohérent d'ordre n dont les composants sont supposés identiques et indépendants. On envisage les trois compositions de structures suivantes:

a) Montage en série des composants.

b) Montage en parallèle des composants.

c) Montage k-sur-n des composants.

Soient X_i, i=1,...,n les états respectifs des composants, T_i ,i=1,...,n leurs temps de panne respectifs. Si $\Phi(X)$ est la fonction de stucture du système et T son temps de panne. Alors pour les montages ci dessus on a respectivement:

a) $\Phi(X) = \prod_{i=1}^{n} X_i$ et $T = \inf_{1\le i\le n} T_i = \xi_n$

b) $\Phi(X) = \coprod_{i=1}^{n} X_i = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1-X_i)$ et $T = \sup_{1\le i\le n} T_i = \eta_n$

c) $\Phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{n} X_i \ge k \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$ et $T = T_{(k)}$ ($k^{\text{iéme}}$ statistique d'ordre).

On se pose la question suivante: Quels sont les types de distributions limites possibles pour la fonction de survie d'un système formé de composants disposés selon l'une des configurations données ci-dessus lorsque le nombre de composants augmente indéfiniment?

III 1 MONTAGES EN SERIE OU EN PARALLELE DES COMPOSANTS.

D'une manière générale pour déterminer la distribution des valeurs extrêmes ξ_n et η_n on utilise la transformation $U_n = nF(\xi_n)$ où F est la fonction de distribution de T_i, i=1,...,n.

En effet: $P(F(\xi_n) \le y/n) = P(\xi_n \le F^{-1}(y/n))$

$$= 1-(1-F(F^{-1}(y/n)))^n = 1-(1-(y/n))^n$$

D'où $\lim_{n\to\infty} P(U_n \le y) = 1-\exp(-y)$; U_n tend en loi vers une loi exponentielle.

Donc $P(\xi_n > x) = \bar{F}^n(x) \cong \exp(-nF(x))$ quand n tend vers ∞. ($\bar{F}(x) = 1-F(x)$)
La fonction de distribution de η_n se déduit facilement de celle de ξ_n en utilisant la relation $\eta_n = \sup\limits_{1\le i\le n} T_i = -\inf\limits_{1\le i\le n} (-T_i)$.

D'où $P(\eta_n < y) = P\big(\inf\limits_{1\le i\le n}(-T_i) > -y\big) \cong \exp(-n(1-F(y)))$ quand n tend vers ∞.

Dans les exemples qui suivent nous observons comment se comporte la variable aléatoire ξ_n quand la fonction de distribution F diffère d'une loi à une autre.

Exemples:

III-1-1- Si $F(x) = 1-\exp(-\lambda x)$ alors $P(\xi_n < x) = \bar{F}^n(x) = \exp(-n\lambda x)$.

III-1-2- Si $F(x) = x$, $0\le x\le 1$, alors $\bar{F}^n(x) \simeq \exp(-nx)$

ξ_n suit approximativement une loi exponentielle de paramètre n.

$P(\eta_n \le y) \simeq \exp(-n(1-y))$.

III-1-3- Si $F(x) = 1-\exp\big(-(\lambda_0 x)^\beta\big)$, loi de Weibull $W(\lambda_0,\beta)$ alors:
$\bar{F}^n(x) = \exp\big(-n(\lambda_0 x)^\beta\big)$, donc ξ_n suit approximativement une loi de Weibull $W(n^{1/\beta}\lambda_0,\beta)$. On dit que la loi de Weibull est stable par composition de stuctures en série.

III-1-4- Supposons que $\bar{F}(x) \simeq 1-\lambda_0 x^\beta$, x petit

$$P\big(n^{1/\beta}\xi_n > x\big) \simeq \exp\big(-(nP(T_i \le xn^{-1/\beta}))\big), \text{si n est grand}$$
$$\simeq \exp\big(-n\lambda_0 x^\beta n^{-1}\big) = \exp\big(-\lambda_0 x^\beta\big).$$

Donc $n^{1/\beta}\xi_n$ converge en loi quand n tend vers ∞ vers une loi $W(\lambda_0,\beta)$.

Evidemment, si n tend vers ∞, ξ_n converge presque sûrement vers la borne inférieure du support de F. Pour éviter des trivialités nous normalisons ξ_n par des constantes a_n et b_n et nous cherchons la distribution limite de $(\xi_n - b_n)/a_n$, où $a_n > 0$ et b_n sont convenablement choisies (par exemple dans l'exemple III-1-4 on a choisi $a_n = n^{-1/\beta}$ et $b_n = 0$). Nous écartons les distributions limites dégénérées pour une raison d'évidence.

En général $P(\xi_n > x) = \bar{F}(x)$ et $P\big((\xi_n - b_n)/a_n\big) = P(\xi_n > a_n x + b_n)$
$$= \bar{F}(a_n x + b_n)$$

Dans le cas de l'exemple III-1-2 ci-dessus, en choisissant $a_n = 1/n$ et $b_n = 0$ on obtient: $\lim_{n\to\infty} \bar{F}(a_n x + b_n) = \lim_{n\to\infty} (1-(x/n))^n = e^{-x}$.
Donc la fonction de survie asymptotique d'un système en série est exponentielle lorsque ses composants (identiques) ont une fonction de survie uniforme.

L'exemple III-1-3 avec $\lambda_0 = 1$ i.e $F(x) = 1-\exp(-x^{\beta})$ (loi de Weibull) donne $\bar{F}^n(a_n x + b_n) = \exp(-n(a_n x + b_n)^{\beta}) = \exp(-x^{\beta})$ si on choisit $a_n = n^{-1/\beta}$ et $b_n = 0$ pour $n = 1,2,\ldots$ .La loi limite est encore une loi de Weibull de paramètre β.
On peut encore citer l'exemple suivant:

$F(x) = \exp(-(1-x)/x)$ $0 \le x \le 1$ pour $a_n = (\text{Log}n)^{-2}$ et $b_n = (\text{Log}n)/(1+\text{Log}n)$ on a:

$\lim_{n\to\infty} \bar{F}^n(a_n x + b_n) = 1-\exp(-\exp(x))$ $-\infty < x < +\infty$.
On remarque que cette dernière loi n'a de l'intérêt en fiabilité que si on la considère sur $[0,+\infty[$.
Pour cela nous allons nous intéresser à $\xi_n = \inf_{1\le i\le n} T_i$ d'une manière générale, c'est à dire en tant que variable aléatoire réelle (et non seulement en tant que temps de panne).
Les lois citées dans les exemples ci-dessus diffèrent l'une de l'autre en "type" ce qui nous conduit à la définition suivante:

Définition III-1-1:
Deux fonctions de distributions G et H sont dites du même type si et seulement si il existe des constantes $A>0, B$ telles que:

$G(Ax + B) = H(x)$, pour tout x.

On a le résultat fondamental suivant:

Lemme III-1-2:
Si $(F_n)_{n\ge 0}$ est une suite de fonctions de distributions telle que pour tout x :

a) $F(a_n x + b_n) \longrightarrow G(x)$ quand $n \longrightarrow \infty$

b) $F(a_n^* x + b_n^*) \longrightarrow G^*(x)$ quand $n \longrightarrow \infty$

où G et G^* sont non dégénérées, alors G et G^* sont du même type.

c'est la première loi $W_1(x)$ qui est la loi de Weibull de paramètre de forme β. De même donc pour η_n (temps de panne d'un système à composants en parallèle), la loi qui présente beucoup d'intérêt est la seconde loi $W_2^*(x)$ et qui est aussi une loi de Weibull de paramètre α.

III 2 MONTAGE k-SUR-n.

Smirnov (1952) [20] démontre que trois types de lois sont possibles pour le temps de panne $T_{(k)}$ ($k^{ième}$ statistique d'ordre) d'un système "k-sur-n". Ces lois sont:

a) $\dfrac{1}{(k-1)!}\displaystyle\int_0^{x^\alpha} e^{-u}u^{k-1}du \qquad x>0, \alpha>0$

b) $\dfrac{1}{(k-1)!}\displaystyle\int_0^{|x|^\alpha} e^{-u}u^{k-1}du \qquad x<0, \alpha>0 \qquad$ à rejeter.

c) $\dfrac{1}{(k-1)!}\displaystyle\int_0^{e^x} e^{-u}u^{k-1}du \qquad -\infty < x < +\infty$

III 3 DOMAINES D'ATTRACTION.

Définition III-3-1:

Une distribution F appartient au domaine d'attraction minimum d'une distribution G s'ils existent des constantes $\alpha_n>0$, β_n telles que:

$$\bar{F}^n(\alpha_n x + \beta_n) \xrightarrow{L} \bar{G}(x) \text{ quand } n \to \infty.$$

La fonction de distribution F appartient au domaine d'attraction maximum s'ils existent des constantes $\alpha_n>0$, β_n telles que:

$$F^n(\alpha_n x + \beta_n) \xrightarrow{L} G(x) \text{ quand } n \to \infty.$$

Notre but est de déterminer les domaines d'attaction de W_1, W_2 et Λ et les domaines de W_1^*, W_2^* et Λ^*.

Lemme III-3-2:

Pour que $\bar{F}^n(\alpha_n x + \beta_n) \xrightarrow{L} \bar{G}(x)$ quand $n \to \infty$, il faut et il suffit que:

$nF(\alpha_n x + \beta_n) \longrightarrow -\mathrm{Log}\bar{G}(x)$ quand $n \to \infty$, pour tous les point de continuité de G tels que $\bar{G}(x) \neq 0$.

Démonstration:

Puisque $1-y \leq -\mathrm{Log}y \leq (1-y)/y$, $0 \leq y \leq 1$; il suit que:

$$\lim_{n\to\infty} nF(\alpha_n x + \beta_n) \leq \lim_{n\to\infty} (-n\log\bar{F}(\alpha_n x + \beta_n)) \leq \lim_{n\to\infty} nF(\alpha_n x + \beta_n)/F(\alpha_n x + \beta_n)$$

or $\bar{F}^n(\alpha_n x + \beta_n) \xrightarrow{L} \bar{G}(x)$ quand $n \to \infty$ ou $nF(\alpha_n x + \beta_n) \longrightarrow -\mathrm{Log}\bar{G}(x)$

impliquent: $\lim_{n\to\infty} F(\alpha_n x + \beta_n) = 1$.

Donc $\lim_{n\to\infty} (-\mathrm{Log}F(\alpha_n x + \beta_n)) = \lim_{n\to\infty} nF(\alpha_n x + \beta_n)$,on déduit que:

$\bar{F}^n(\alpha_n x + \beta_n) \xrightarrow{L} \bar{G}(x)$ quand $n \to \infty \Leftrightarrow nF(\alpha_n x + \beta_n) \longrightarrow -\mathrm{Log}\bar{G}(x)$ quand $n \to \infty$.

Domaine d'attraction de la loi de Weibull:

Théorème III-3-3:

Une fonction de distribution F appartient au domaine d'attraction minimum de $W_1(x) = 1-\exp(-x^{\alpha})$, $x \geq 0$, $\alpha > 0$ si et seulement si:

a) Il existe x_0 tel que $F(x_0) = 0$ et $F(x_0 + \varepsilon) > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.

b) $\lim_{t\to 0^+} (F(tx + x_0)/F(t + x_0)) = x^{\alpha}$, pour $x > 0$, $\alpha > 0$.

Démonstration:

Supposons que les conditions a) et b) sont vérifiées. Par le lemme fondamental on peut supposer $x_0 = 0$. On définit $a_n = \sup\{x / F(x^-) \leq (1/n) \leq F(x^+)\}$

Alors $a_n > 0$ et grâce à l'hypothèse a) $a_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

A partir de la définition du point a_n on a:

$$n\,F(a_n^+) \leq 1 \leq nF(a_n^-)$$

En passant à la limite quand $n \to \infty$ on obtient:

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)F(a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} nF(a_{n+1}) \leq \lim_{n\to\infty} nF(a_n^-) \leq 1 \leq \lim_{n\to\infty} nF(a_n^+) \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} nF(a_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} (n-1)F(a_{n-1}).$$

Donc $\lim_{n\to\infty} nF(a_n) = 1$.

Puisque $\lim_{t\to 0} (F(tx)/F(t)) = x^{\alpha}$, $x > 0$ alors

$$x = \lim_{n\to\infty} (F(a_n x)/F(a_n)) = \lim_{n\to\infty} (nF(a_n x)/nF(a_n)) = \lim_{n\to\infty} nF(a_n x).$$

Par le lemme III-3-2 on déduit: $\lim_{n\to\infty} F(a_n x) = \exp(-x^{\alpha})$ pour $x \geq 0$.

Pour la condition nécessaire on peut consulter [14].

Corollaire III-3-4:

F appartient au domaine d'attraction maximum de $W_1^*(x) = \exp(-(-x^{\alpha}))$ $x\leq 0$, $\alpha>0$ si et seulement si:

a) Il existe x_0 tel que $F(x_0) = 1$ et $F(x_0-\varepsilon) < 1$, $\forall\varepsilon>0$.

b) $\lim\limits_{t\to 0^+} \left(\bar{F}(x_0+ tx)/\bar{F}(x_0+ t)\right) = x^{\alpha}$ pour $x<0$, $\alpha>0$.

Exemple III-3-1:

Soit F la loi Gamma de densité $f(y) = \lambda^{\alpha}y^{\alpha-1}e^{-\lambda y}/\Gamma(\alpha)$ pour $y\geq 0$.

Pour montrer que F appartient au domaine d'attraction(minimum) de W_1 on utilise le théorème III-3-3. En effet:

a) pour $x_0= 0, F(x_0) = 0$.

b) $\lim\limits_{t\to 0} \left(F(tx)/F(t)\right) = \lim\limits_{t\to 0} \left(xf(tx)/f(t)\right) = x^{\alpha}$ (en utilisant la règle de l'Hospital).

Théorème III-3-5:

a) F appartient au domaine d'attraction minimum de $W_2(x) = 1-\exp(-(-x)^{\alpha})$ $x\leq 0$, $\alpha>0$ si et seulement si: $\lim\limits_{t\to\infty} F(t)/F(tx) = x^{\alpha}, x<0$.

b) F appartient au domaine d'attraction maximum de $W_2^*(x) = \exp(-(x^{-\alpha}))$ $x\geq 0$. $\alpha>0$ si et seulement si: $\lim\limits_{t\to\infty} \bar{F}(t)/\bar{F}(tx) = x^{\alpha}$ pour tout $x>0$.

Soit maintenant F une fonction de distribution de densité f et de taux de panne $r(x) = f(x)/\bar{F}(x)$.

Théorème III-3-6:

a) soient $F(x) < 1$ pour tout x et $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r(x)}\right) = 0$.

Alors F appartient au domaine d'attraction maximum de Λ^*. En outre :

$\lim\limits_{n\to\infty} F\left((x-b_n)/a_n\right) = \exp(-(\exp(-x))$ ou b_n satisfait $\bar{F}(b_n) = \frac{1}{n}$ et $a_n = \frac{1}{nf(b_n)}$

b) S'il existe x_0 tel que pour tout $\varepsilon>0, G(x_0-\varepsilon)<1, G(x_0) = 1$ et si

$\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r(x)}\right) = 0$. Alors G appartient au domaine d'attraction de Λ^*.

Démonstration: consulter [17]

Théorème III-3-7:

S'il existe x_0 tel que $F(x_0) = 0$ et $F(x_0 + \varepsilon) > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$ et si $\lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Phi'(x)}\right) = 0$, où $\Phi(x) = -\mathrm{Log}F(x)$, alors F appartient au domaine d'attraction minimum de $\Lambda(x) = 1 - \exp(-\exp(x))$.

IV STABILITE ASYMPTOTIQUE DE LA LOI DE WEIBULL PAR COMPOSITION DE STRUCTURES K-CONSECUTIVES-SUR-N.

Le but de ce chapitre est d'établir par analogie avec ce qu'on a vu précédemment un théorème de stabilité asymptotique pour la loi de Weibull pour le temps de panne d'un système k-consécutifs-sur-n. Nous exposons plus exactement un théorème limite analogue à celui donné dans [11] en conservant l'hypothèse d'indépendance des composants, mais nous nous basons dans la démonstration sur une méthode plus générale. Par la suite, vu que l'hypothèse d'indépendance est restrictive, nous nous proposons de démontrer un résultat plus général lorsque les composants possèdent une dépendance Markovienne.

IV 1 CAS Où LES COMPOSANTS SONT INDEPENDANTS ET DE MEME LOI.

On considère un système k-consécutifs-sur-n les composants sont supposés indépendants et de même loi. Soit T le temps de panne d'un composant et T_n celui du système. Si $q(t)$ est la distribution de panne d'un composant, on a le résultat suivant:

Théorème IV-1-1: [9]

Si $q(t)$ est de la forme $q(t) = (\lambda t)^a + t^a o(1)$ $\forall t \geq 0$ où a et λ sont des constantes positives alors:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(n^{1/ka} T_n \leq t\right) = 1 - \exp(-(\lambda t)^{ak}) \quad \forall t \geq 0.$$

Ce qui exprime le fait que si T suit une loi de Weibull $W(a,\lambda)$ alors $n^{1/ak} T_n$ converge en loi vers une Weibull $W(ak,\lambda)$.

Démonstration:

Soient $p(t) = 1-q(t) = P(T>t)$ et $R(p(t),n) = P(T_n>t)$ respectivement la fiabilité d'un composant et celle du système, $t_n = n^{-1/ak}$ et $x(t)$ l'unique racine positive du polynôme $1-pz(1+pz+\ldots+p^{k-1}z^{k-1})$.

Il est clair qu'on est ramené à démontrer que:

$$\lim_{n\to\infty} R(p(t_n),n) = \exp(-(\lambda t)^{ak}) \quad \forall t \geq 0.$$

D'après Feller(1967) p.325 [22] on rappelle que:

$$R(p(t_n),n) \simeq \frac{1- q(t_n)x(t_n)}{k+1-k\ x(t_n)p(t_n)} \quad (x(t_n))^{-(n+1)}$$

$x(t) = 1+ p(t)\ q^k(t)+(k+1)(p(t)q^k(t))+\ldots$ si $(k+1)p(t) > 1$.

Quand $n \longrightarrow \infty$ $t_n \longrightarrow 0$ et donc $q(t_n) \longrightarrow 0$ i.e $p(t_n) \longrightarrow 1$,

puisque $q(t) = (\lambda t)^a + o(t^a)$ alors on a:

$x(t) = 1+ (\lambda t)^{ak} + o(t^{ak})$ et $\mathrm{Log}x(t) = (\lambda t)^{ak} + o(t^{ak})$.

Par substitution on obtient $\mathrm{Log}x(t_n) = ((\lambda t)^{ak})/n + o(1/n)$

et $$- \frac{\mathrm{Log}x(t_n)}{1/(n+1)} = - \frac{((\lambda t)^{ak})/n + o(1/n)}{1/(n+1)} \longrightarrow -(\lambda t)^{ak} \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

D'où $-\mathrm{Log}R(p(t_n),n) \longrightarrow (\lambda t)^{ak}$ quand $n \longrightarrow \infty$.

Le résultat est donc demontré.

IV 2 CAS Où LES COMPOSANTS SONT INDEPENDANTS ET DE LOIS DE PANNE NON IDENTIQUES.

Nous allons établir un résultat plus général que théorème IV-1-1. Ici on s'intéresse au cas où les composants sont indépendants mais de distributions de panne non identiques.

Nous avons besoin des notations suivantes:

$T_1,\ldots,T_n$ étant les temps de panne respectifs des composants $1,\ldots,n$ du système. Le temps de panne Z_n du système est donné par:

$$Z_n = \min_{1\le j\le n-k+1} \ \max_{j\le i\le j+k-1} T_i$$

On designe par $F_i(t)$ $t\geq 0$ $i = 1,\ldots,n$ la fonction de répartition de la variable aléatoire T_i $i = 1,\ldots,n$ et on définit les quantites suivantes:

$$P_j(t) = \prod_{i=j}^{j+k-1} F_i(t) \quad j = 1,\ldots,n-k+1;\ P(t) = \max_{1\le i\le n} F_i(t);\ \Lambda_n(t) = \sum_{j=1}^{n-k+1} P_j(t).$$

Le resultat que nous allons exposer est du à Chrissaphinou et Papastavridis(1990) [11]. Il est basé sur l'inégalité de Barbour et Eagleson [19].

Théorème IV-2-1: [11]

$$|P(Z_n \le t) - (1- \exp(-\Lambda_n(t)))| \le (2k-1)\ P^k(t) + (2k-2)P(t)$$

Démonstration:

Pour t fixe considérons la variable aléatoire Y_j $j = 1,\dots,n-k+1$ qui prend la valeur 1 si et seulement si tous les composants dans les positions $j,\dots,j+k-1$ sont en panne et 0 si non. Soit $Y = \sum Y_j$, le système tombe en panne si et seulement si $Y > 0$. $E(Y_j) = P_j(t)$ et $E(Y) = \Lambda_n(t)$.
En appliquant le théorème 2 de Barbour et Eagleson [20] nous avons:

$$|P(Y>0)-(1-e^{-EY})| \le \min(1,\frac{1}{EY}) \sum_{j=1}^{n-k+1} \Big((EY_j)^2 + \sum_{\substack{i=j-k+1 \\ i\neq j}}^{j+k-1} (EY_i EY_j + E(Y_i Y_j)) \Big)$$

Donc

$$|P(Z_n \le t)-(1-\exp(-\Lambda_n(t))| \le \min(1,\frac{1}{EY}) \sum_{j=1}^{n-k+1} (P_j^2(t) + \sum_{\substack{i=j-k+1 \\ i\neq j}}^{j+k-1} (P_i(t)P_j(t)+E(Y_i Y_j)))$$

$$\le \frac{1}{EY}\Big(\big(\sum_{j=1}^{n-k+1} P_j(t)P^k(t) \big) + \big(\sum_{j=1}^{n-k+1} P_j(t) \big)(2k-2)P^k(t) + \big(\sum_{j=1}^{n-k+1} EY_j \big)(2k-2)P(t) \Big)$$

$$\le (2k-1)P^k(t) + (2k-2)P(t).$$

On établit le théorème limite en question sous les conditions suivantes:
(a) Il existe des nombres positifs λ_i, α_i et des fonctions $\Phi_i(t)$ tels que:

$F_i(t) = (\lambda_i t)^{\alpha_i} + t^{\alpha_i}\Phi_i(t)$ $i = 1,\dots,n$ pour $0 \le t \le \delta$ et un certain $\delta > 0$.

(b) $\lim_{t\to 0} \Phi_i(t) = 0$ uniformément en i.

(c) $\lim_{i\to\infty} \lambda_i = \lambda$.

Théorème IV-2-2:

Sous les conditions (a);(b) et (c) on a:

1) Si $\alpha = \inf_i \alpha_i = \alpha_i$ pour $i = 1,2,\dots$ alors:

$$\lim_{n\to\infty} P(n^{1/k\alpha} Z_n \le t) = 1- \exp(-(\lambda t)^{\alpha k}).$$

2) Si $\alpha > 0$ et pour chaque $j = 1,2,\dots$ il existe un i avec $j \le i \le j+k-1$ telque $\alpha_i > \alpha$ alors: $\lim_{n\to\infty} P(n^{1/k\alpha} Z_n \le t) = 0.$

Démonstration:

Il n'est pas difficile de montrer que la borne donnée par l'inégalité dans le théorème IV-2-2 tend vers 0 quand n tend vers ∞. En outre, on peut facilement déduire que $\Lambda_n(t)$ tend vers $(\lambda t)^{\alpha k}$ quand n tend vers ∞ dans le cas 1), alors que $\Lambda_n(t)$ tend vers 0 quand n tend vers ∞ dans le cas 2).

Pour établir le résultat du théorème IV-2-2, Chrissaphinou et Papastavridis se sont basés sur l'inégalité dans le théorème IV-2-1. Pour établir cette inégalité ils se sont inspirés d'un résultat de Barbour et Eagleson où l'hypothèse d'indépendance des composants est fondamentale.

Notre but est d'établir un résultat analogue et qui se prête à une généralisation au cas où les composants possèdent une dépendance Markovienne. Pour cela nous changeons de démarche et nous optons pour la démonstration d'un résultat donnant un encadrement de la distribution de panne du système. Nous le faisons d'abord dans le cas indépendant.

Avec les notations ci-dessus on a le résultat suivant:

Théorème IV-2-3:

$$\frac{\Lambda_n^2(t)}{\Lambda_n(t) + \Lambda_n^2(t) + 2n\frac{P^{k+1}(t)}{1-P(t)}} \leq P(Z_n \leq t) \leq \Lambda_n(t)$$

Démonstration:

Concernant l'inégalité de droite, on la déduit facilement, en effet:

$$P(Z_n \leq t) = P\left(\min_{1\leq j\leq n-k+1} \max_{j\leq i\leq j+k-1} T_i \leq t\right) \leq \sum_{j=1}^{n-k+1} P\left(\max_{j\leq i\leq j+k-1} T_i \leq t\right)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n-k+1} \prod_{i=j}^{j+k-1} P(T_i \leq t)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n-k+1} P_j(t) = \Lambda_n(t)$$

D'où $P(Z_n \leq t) \leq \Lambda_n(t)$ ...(1).

Par ailleurs pour t fixé considérons la variable aléatoire Y_j qui prend la valeur 1 si et seulement si tous les composants dans les positions $j,\ldots,j+k-1$ sont en panne et la valeur 0 sinon, $j=1,\ldots n-k+1$.

D'autre part définissons la variable aléatoire $Y = \sum Y_j$, on remarque que le système tombe en panne si et seulement si $Y>0$, c'est à dire que $P(Z_n \leq t) = P(Y > 0)$. On voit clairement que $EY = \sum EY_j = \sum P_j(t) = \Lambda_n(t)$.

De l'inégalité de Schwartz il est possible de démontrer que:

$$P(Y>0) \geq \frac{(EY)^2}{E(Y^2)} .$$

$$\text{Or } E(Y^2) = E\Big(\big(\sum_{j=1}^{n-k+1} Y_j\big)^2\Big) = E\Big(\sum_{j=1}^{n-k+1} Y_j + \sum_{i\neq j} Y_i Y_j\Big)$$

$$= \sum_j E(Y_j) + \sum_{i\neq j} E(Y_i Y_j)$$

$$= \sum_j E(Y_j) + \sum_{|i-j|<k} E(Y_i Y_j) + \sum_{|i-j|\geq k} E(Y_i Y_j) \qquad \text{car } Y_j^2 = Y_j .$$

$$= \Lambda_n(t) + \sum_{|i-j|<k} E(Y_i Y_j) + \sum_{|i-j|\geq k} E(Y_i)E(Y_j)$$

$$= \Lambda_n(t) + \sum_{(i,j)\in B} E(Y_i Y_j) + \sum_{|i-j|\geq k} E(Y_i)E(Y_j)$$

où $B = \{(i,j) : i,j = 1,\dots,n-k+1,\ i<j,\ j-i<k\}$

$$\text{Donc } E(Y^2) \leq \Lambda_n(t) + 2\sum_{(i,j)\in B} E(Y_i Y_j) + \sum_i \sum_j E(Y_i)E(Y_j)$$

$$\leq \Lambda_n(t) + 2\sum_{(i,j)\in B} E(Y_i Y_j) + \Lambda_n^2(t).$$

$$\leq \Lambda_n(t) + 2\sum_{(i,j)\in B} (P(t))^{j+k-1-i+1} + \Lambda_n^2(t)$$

$$\text{Car } E(Y_i Y_j) = P(Y_i Y_j = 1) = P(Y_i = 1, Y_j = 1) \quad \text{pour } (i,j)\in B$$

$$= P(X_i = 0,\dots,X_{i+k-1} = 0,\dots,X_{j+k-1} = 0)$$

$$= P(X_i = 0)\dots P(X_{i+k-1} = 0)\dots P(X_{j+k-1} = 0)$$

$$= F_i(t)\dots F_{i+k-1}(t)\dots F_{j+k-1}(t)$$

$$\leq (P(t))^{j+k-1-i+1}$$

$$\text{D'où } \quad E(Y^2) \leq \Lambda_n(t) + 2\sum_{(i,j)\in B} (P(t))^{j-i+k} + \Lambda_n^2(t)$$

$$\leq \Lambda_n(t) + 2\sum_{l=1}^{k-1} (n-k+1-l)(P(t))^{l+k} + \Lambda_n^2(t)$$

$$\leq \Lambda_n(t) + 2n\sum_{l=1}^{\infty} (P(t))^{l+k} + \Lambda_n^2(t)$$

$$\leq \Lambda_n(t) + 2n\,(P(t))^{k+1}\sum_{l=0}^{\alpha}(P(t))^{l} + \Lambda_n^2(t)$$

$$\leq \Lambda_n(t) + 2n\,\frac{(P(t))^{k+1}}{1-P(t)} + \Lambda_n^2(t).$$

Donc $P(Z_n \leq t) \geq \dfrac{\Lambda_n^2(t)}{\Lambda_n(t) + \Lambda_n^2(t) + 2n\dfrac{P^{k+1}(t)}{1-P(t)}}$ ...(2)

Le théorème est démontré en combinant les inégalités (1) et (2).

Grâce à ce théorème et aux conditions (a),(b) et (c) posées au paravant nous établissons le résultat asymptotique analogue au théorème IV-2-2.

Théorème IV-2-4:

1) Si $\alpha = \inf_i \alpha_i = \alpha_i$ pour $i = 1,2,\ldots$ alors:

$$\lim_{n\to\infty} P(n^{1/k\alpha} Z_n \leq t) = 1 - \exp(-(\lambda t)^{\alpha k}).$$

2) Si $\alpha > 0$ et pour chaque $j = 1,2,\ldots$ il existe un i avec $j \leq i \leq j+k-1$

telque $\alpha_i > \alpha$ alors: $\lim_{n\to\infty} P(n^{1/k\alpha} Z_n \leq t) = 0$.

Démonstration:

En posant $t_n = n^{-1/\alpha k} t$ on a $\lim_{n\to\infty} P(n^{1/k\alpha} Z_n \leq t) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq t_n)$

1) On montre d'abord que quand n tend vers ∞ $nP^{k+1}(t_n)$ tend vers 0 et $\Lambda_n(t_n)$ tend vers $1 - \exp(-(\lambda t)^{\alpha k})$.

$$\lim_{n\to\infty} nP^{k+1}(t_n) = \lim_{n\to\infty} n\Big(\max_{1\leq i\leq n} F_i(n^{-1/\alpha k} t)\Big)^{k+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\Big(\max_{1\leq i\leq n}\big((\lambda_i n^{-1/\alpha k} t)^{\alpha_i} + (n^{-1/\alpha k} t)^{\alpha_i}\,\Phi_i(n^{-1/\alpha k} t)\big)\Big)^{k+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\Big(\max_{1\leq i\leq n}\big((\lambda_i n^{-1/\alpha k} t)^{\alpha} + (n^{-1/\alpha k} t)^{\alpha}\,\Phi_i(n^{-1/\alpha k} t)\big)\Big)^{k+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\Big(\max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{n^{1/k}}\big((\lambda_i t)^{\alpha} + t^{\alpha}\,\Phi_i(n^{-1/\alpha k} t)\big)\Big)^{k+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^{(k+1)/k}} \left(\max_{1\le i\le n}((\lambda_i t)^{\alpha} + t^{\alpha}\, \Phi_i(n^{-1/\alpha k}t))\right)^{k+1} = 0.$$

D'autre part:

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n(t_n) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-k+1} \left((\lambda_j t_n)^{\alpha_j} + t_n^{\alpha_j}\Phi_j(t_n)\right)\ldots\left((\lambda_{j+k-1}t_n)^{\alpha_{j+k-1}} + t_n^{\alpha_{j+k-1}}\Phi_{j+k-1}(t_n)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-k+1} \left((\lambda_j n^{-1/\alpha k}t)^{\alpha} + (n^{-1/\alpha k}t)^{\alpha}\, \Phi_j(n^{-1/\alpha k}t)\right) \ldots$$

$$\left((\lambda_{j+k-1} n^{-1/\alpha k}t)^{\alpha} + (n^{-1/\alpha k}t)^{\alpha}\, \Phi_{j+k-1}(n^{-1/\alpha k}t)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-k+1} \left((\lambda_j t)^{\alpha} + t^{\alpha}\Phi_j(n^{-1/\alpha k}t)\right)\ldots\left((\lambda_{j+k-1}t)^{\alpha} + t^{\alpha}\Phi_{j+k-1}(n^{-1/\alpha k}t)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n-k+1}{n}\, \frac{1}{n-k+1} \sum_{j=1}^{n-k+1} \left((\lambda_j t)^{\alpha} + t^{\alpha}\, \Phi_j(n^{-1/\alpha k}t)\right)\ldots$$

$$\left((\lambda_{j+k-1}t)^{\alpha} + t^{\alpha}\, \Phi_{j+k-1}(n^{-1/\alpha k}t)\right)$$

En appliquant le théorème de Césaro on a:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-k+1} \sum_{j=1}^{n-k+1} \left((\lambda_j t)^{\alpha} + t^{\alpha}\Phi_j(n^{-1/\alpha k}t)\right)\ldots\left((\lambda_{j+k-1}t)^{\alpha} + t^{\alpha}\Phi_{j+k-1}(n^{-1/\alpha k}t)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left((\lambda_n t)^{\alpha} + t^{\alpha}\, \Phi_n(n^{-1/\alpha k}t)\right)\ldots\left((\lambda_{n+k-1}t)^{\alpha} + t^{\alpha}\, \Phi_{n+k-1}(n^{-1/\alpha k}t)\right)$$

$$= \left((\lambda t)^{\alpha} + t^{\alpha}\, o(1)\right)^{k} = (\lambda t)^{\alpha k} + t^{\alpha k} o(1).$$

D'où $\lim_{n\to\infty} \Lambda_n(t_n) = (\lambda t)^{\alpha k} + t^{\alpha k} o(1) = 1 - \exp(-(\lambda t)^{\alpha k}) = \Lambda(t)$

En appliquant donc le théorème IV-2-3 on a:

$$\frac{\Lambda^2(t)}{\Lambda(t) + \Lambda^2(t)} \le \lim_{n\to\infty} P(Z_n \le t_n) \le \Lambda(t)$$

Or l'inégalité de gauche entraine:

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \le t_n) \ge \frac{\Lambda(t)}{1+\Lambda(t)}$$

D'où $1 - \lim_{n\to\infty} P(Z_n \le t_n) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n > t_n) \le 1 - \dfrac{\Lambda(t)}{1+\Lambda(t)}$

$$\leq \frac{1}{1+\Lambda(t)}$$

$$\leq \frac{1}{1+(\lambda t)^{\alpha k}+t^{\alpha k}o(1)}$$

$$\leq 1-(\lambda t)^{\alpha k}+t^{\alpha k}o(1)$$

$$\leq \exp(-(\lambda t)^{\alpha k})$$

Donc $\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq t_n) \geq 1-\exp(-(\lambda t)^{\alpha k}) = \Lambda(t)$.

Enfin on peut conclure que: $\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq t_n) = \Lambda(t)$

Ici on doit montrer que quand $n \longrightarrow \infty$ $nP^{k+1}(t_n) \longrightarrow 0$ et $\Lambda_n(t_n) \longrightarrow 0$.

De la même manière qu'au 1) on peut déduire que $nP^{k+1}(t_n) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.

Par ailleurs,

$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n(t_n) =$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-k+1} ((\lambda_j t_n)^{\alpha_j}+t_n^{\alpha_j}\Phi_j(t_n))\ldots((\lambda_{j+k-1}t_n)^{\alpha_{j+k-1}}+t_n^{\alpha_{j+k-1}}\Phi_{j+k-1}(t_n))$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-k+1} \frac{1}{n^{\alpha_j/\alpha k}} ((\lambda_j t_n)^{\alpha_j}+t_n^{\alpha_j}\Phi_j(t_n))\ldots$$

$$\frac{1}{n^{\alpha_{j+k-1}/\alpha k}} ((\lambda_{j+k-1}t_n)^{\alpha_{j+k-1}}+t_n^{\alpha_{j+k-1}}\Phi_{j+k-1}(t_n)).$$

Sachant que $\forall j = 1,2,\ldots$ il existe au moins un i: $j\leq i\leq j+k-1$ tel que $\alpha_i > \alpha$

on a: $\sum \alpha_i = \alpha k + \varepsilon > \alpha k$ $(\varepsilon > 0)$ donc $\frac{1}{n^{\Sigma\alpha_i/\alpha k}} = \frac{1}{n^{\varepsilon_j} n}$.

D'où $\lim_{n\to\infty} \Lambda_n(t_n) =$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-k+1} \frac{1}{n^{\varepsilon_j}} ((\lambda_j t_n)^{\alpha_j}+t_n^{\alpha_j}\Phi_j(t_n))\ldots((\lambda_{j+k-1}t_n)^{\alpha_{j+k-1}}+t_n^{\alpha_{j+k-1}}\Phi_{j+k-1}(t_n))$$

L'existance du terme $\frac{1}{n^{\varepsilon_j}}$ fait donc en sorte que cette limite soit égale à 0 et par conséquent $\lim_{n\to\infty} \Lambda_n(t_n) = 0$.

Par la suite d'aprés théorème IV-2-3 on a: $\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq t_n) = 0$.

IV 3 GENERALISATION AU CAS OÙ LES COMPOSANTS SONT NON INDEPENDANTS.

L'hypothèse d'indépendance des composants du système est restrective. Beaucoup de systèmes dans la réalité ne la vérifient pas. Ici on envisage une dépendance Markovienne des composants.

Plus précisemment si $X_1(t),\dots,X_n(t)$ sont les variables aléatoires représentant les états respectifs des composants $1,\dots,n$ du système au temps t, alors la suite $(X_i(t))_{1\le i\le n}$ forme une chaine de Markov dont les paramètres sont:

$F_i(t) = P(X_i(t) = 0) = P(T_i \le t) \quad 1\le i\le n.$

$\alpha_i(t) = P(X_i(t) = 0/\ X_{i-1}(t) = 0) \quad 2\le i\le n.$

$\beta_i(t) = P(X_i(t) = 1/\ X_{i-1}(t) = 1) \quad 2\le i\le n.$

Posons: $P_{j,\dots,j+k-1}(t) = P\left(\max\limits_{j\le i\le j+k-1} T_i \le t\right) \quad j=1,\dots,n-k+1;$

$D_n(t) = \sum\limits^{n-k+1} P_{j,\dots,j+k-1}(t)$ et $P(t) = \sup\left(\max F_i(t)\ ;\ \max \alpha_i(t)\right).$

Nous allons démontrer des résultats analogues à ceux obtenus dans le paragraphe IV-2.

Théorème IV-3-1:

$$\frac{D_n^2(t)}{D_n(t) + D_n^2(t) + 2n\dfrac{P^{k+1}(t)}{1-P(t)}} \le P(Z_n \le t) \le D_n(t)$$

Démonstration:

$$\begin{aligned}\text{D'une part, } P(Z_n\le t) = P\left(\min_{1\le j\le n-k+1}\ \max_{j\le i\le j+k-1} T_i \le t\right) &\le \sum_{j=1}^{n-k+1} P\left(\max_{j\le i\le j+k-1} T_i \le t\right)\\ &\le \sum_{j=1}^{n-k+1} P_{j,\dots,j+k-1}(t)\\ &\le D_n(t)\end{aligned}$$

D'où $P(Z_n \le t) \le D_n(t)$.

D'autre part pour t fixé considérons la variable aléatoire Y_j qui vaut 1 si et seulement si tous les composants dans les positions $j,\dots,j+k-1$ sont en panne et 0 si non, $j=1,\dots,n-k+1$. La variable aléatoire $Y = \sum Y_j$ a pour moyenne $EY = \sum_j E(Y_j) = D_n(t)$. Le système tombe en panne si et seulement si $Y>0$. Donc $P(Z_n \le t) = P(Y > 0)$.

On a aussi: $P(Y > 0) \ge \dfrac{(EY)^2}{E(Y^2)}$

$$\begin{aligned}
\text{Or } E(Y^2) &= E\Big(\big(\sum_{j=1}^{n-k+1} Y_j\big)^2\Big) = E\Big(\sum_{j=1}^{n-k+1} Y_j^2 + \sum_{i\neq j} Y_iY_j\Big)\\
&= \sum_j E(Y_j^2) + \sum_{i\neq j} E(Y_iY_j)\\
&= \sum_j E(Y_j) + \sum_{|i-j|<k+1} E(Y_iY_j) + \sum_{|i-j|\ge k+1} E(Y_iY_j) \qquad \text{car } Y_j^2 = Y_j.\\
&= D_n(t) + \sum_{|i-j|<k+1} E(Y_iY_j) + \sum_{|i-j|\ge k+1} E(Y_i)E(Y_j)\\
&\le D_n(t) + \sum_{|i-j|<k+1} E(Y_iY_j) + D_n^2(t).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $i,j=1,\dots,n-k+1$ et vérifiant $i<j$ et $j-i<k+1$ on a:

$$\begin{aligned}
E(Y_iY_j) &= P(Y_iY_j = 1) = P(Y_i = 1, Y_j = 1).\\
&= P(X_i(t) = 0,\dots,X_{i+k-1}(t) = 0,\dots,X_{j+k-1}(t) = 0)\\
&= P(X_i(t)=0)P(X_{i+1}(t)=0/\ X_i(t)=0)\dots P(X_{j+k-1}(t)=0/\ X_{j+k-2}(t)=0).\\
&= F_i(t)\ \alpha_{i+1}(t)\ \dots\alpha_{i+k-1}(t)\dots\alpha_{j+k-1}(t)\\
&< (P(t))^{j+k-1-i+1} = (P(t))^{j-i+k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{D'où } E(Y^2) &\le D_n(t) + D_n^2(t) + 2\sum_{j-i<k+1} (P(t))^{j-i+k}\\
&\le D_n(t) + D_n^2(t) + 2n\, P^{k+1}(t) \sum_{l=0}^{\infty} P^l(t)\\
&\le D_n(t) + D_n^2(t) + 2n\, \frac{P^{k+1}(t)}{1-P(t)}
\end{aligned}$$

Donc $P(Z_n \le t) \ge \dfrac{D_n^2(t)}{D_n(t) + D_n^2(t) + 2n\dfrac{P^{k+1}(t)}{1-P(t)}}$.

Par conséquent le theorème est démontré.

Pour établir le résultat asymptotique en question, nous avons besoin des conditions suivantes:

(a^*) Il existe des nombres positifs λ_i, α_i, δ_i et des fonctions Φ_i et Ψ_i tels que:

$$F_i(t) = (\lambda_i t)^{\delta_i} + t^{\delta_i}\Phi_i(t) \qquad 1 \le i \le n$$

$$\alpha_i(t) = (\gamma_i t)^{\delta_i} + t^{\delta_i}\Psi_i(t) \qquad 2 \le i \le n$$

pour $0 \le t < \varepsilon$ et un certain $\varepsilon > 0$.

(b^*) $\lim\limits_{t\to 0} \Phi_i(t) = \lim\limits_{t\to 0} \Psi_i(t) = 0$ uniformément en i.

(c^*) $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i = \lim\limits_{i\to\infty} \gamma_i = \lambda$.

Théorème IV-3-2:

Sous les conditions (a^*), (b^*) et (c^*) ci-dessus nous avons :

1) Si $\delta = \inf\limits_i \delta_i = \delta_i$ pour i=1,2,... alors:

$$\lim_{n\to\infty} P(n^{1/\delta k} Z_n \le t) = 1- \exp(-(\lambda t)^{\delta k})$$

2) Si $\delta > 0$ et pour chaque j=1,2,... il existe un i avec $j \le i \le j+k-1$ tel que $\delta_j > \delta$ alors: $\lim\limits_{n\to\infty} P(n^{1/\delta k} Z_n \le t) = 0$.

Démonstration:

La démonstration se fait de la même manière qu'au théorème IV-2-4 du paragraphe précédent. En effet en posant $t_n = n^{-1/\delta k} t$ on a:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} nP^{k+1}(t_n) = \lim\limits_{n\to\infty} n \sup\left(\left(\max\limits_{1\le i\le n} F_i(t_n) \right)^{k+1}, \left(\max\limits_{2\le i\le n} \alpha_i(t_n) \right)^{k+1} \right)$

$$= \lim_{n\to\infty} n\sup\left(\left(\max_{1\le i\le n} \left((\lambda_i t_n)^{\delta_i} + t_n^{\delta_i}\Phi_i(t_n) \right) \right)^{k+1}, \left(\max_{2\le i\le n} \left((\gamma_i t_n)^{\delta_i} + t_n^{\delta_i}\Psi_i(t_n) \right) \right)^{k+1} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^{(k+1)/k}} \sup\left(\left(\max_{1\le i\le n} \left((\lambda_i t)^{\delta} + t^{\delta}\Phi_i(t_n) \right) \right)^{k+1}, \left(\max_{2\le i\le n} \left((\gamma_i t)^{\delta} + t^{\delta}\Psi_i(t_n) \right) \right)^{k+1} \right)$$

$= 0$.

$$\text{Et } \lim_{n\to\infty} D_n(t_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-k+1} P_{j,\dots,j+k-1}(t_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-k+1} P\Big(\max_{j\le i\le j+k-1} T_i \le t_n\Big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-k+1} P(T_j\le t_n, T_{j+1}\le t_n,\dots,T_{j+k-1}\le t_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-k+1} P(T_j\le t_n)P(T_{j+1}\le t_n/T_j\le t_n)\dots P(T_{j+k-1}\le t_n/T_{j+k-2}\le t_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-k+1} F_j(t_n)\ \alpha_{j+1}(t_n)\dots\alpha_{j+k-1}(t_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-k+1} \big((\lambda_j t_n)^{\delta_j} + t_n^{\delta_j}\Phi_j(t_n)\big)\ \big((\gamma_{j+1}t_n)^{\delta_{j+1}} + t_n^{\delta_{j+1}}\Psi_{j+1}(t_n)\big)$$

$$\dots\big((\gamma_{j+k-1}t_n)^{\delta_{j+k-1}} + t_n^{\delta_{j+k-1}}\Psi_{j+k-1}(t_n)\big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-k+1} \big((\lambda_j t)^{\delta} + t^{\delta}\,\Phi_j(t_n)\big)\ \big((\gamma_{j+1} t)^{\delta} + t^{\delta}\,\Psi_{j+1}(t_n)\big)$$

$$\dots\big((\gamma_{j+k-1}t_n)^{\delta} + t^{\delta}\,\Psi_{j+k-1}(t_n)\big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \big((\lambda_n t)^{\delta} + t^{\delta}\,\Phi_n(t_n)\big)\ \big((\gamma_{n+1} t)^{\delta} + t^{\delta}\,\Psi_{n+1}(t_n)\big)$$

$$\dots\big((\gamma_{n+k-1} t)^{\delta} + t^{\delta}\,\Psi_{n+k-1}(t_n)\big)$$

$$= \big((\lambda t)^{\delta} + t^{\delta}\,o(1)\big)\ \big((\lambda t)^{\delta} + t^{\delta}\,o(1)\big)\dots\big((\lambda t)^{\delta} + t^{\delta}\,o(1)\big)$$

$$= \big((\lambda t)^{\delta} + t^{\delta}o(1)\big)^{k} = (\lambda t)^{\delta k} + t^{\delta k}o(1) = 1 - \exp\big(-(\lambda t)^{\delta k}\big)$$

En remplaçant t par t_n dans le théorème IV-3-1 et en passant à la limite quand n tend vers ∞ le résultat se déduit exactememt de la même manière que dans la démonstration du théorème IV-2-4.C'est à dire que:

$$\lim_{n\to\infty} P(n^{1/\delta k} Z_n \le t) = 1- \exp\big(-(\lambda t)^{\delta k}\big)$$

2) On déduit facilement comme dans 1) que $nP^{k+1}(t_n) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.

D'autre part:

$\lim\limits_{n\to\infty} D_n(t_n) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-k+1} \left((\lambda_j t_n)^{\delta_j} + t_n^{\delta_j}\Phi_j(t_n)\right) \left((\gamma_{j+1} t_n)^{\delta_{j+1}} + t_n^{\delta_{j+1}}\Psi_{j+1}(t_n)\right) \ldots \left((\gamma_{j+k-1} t_n)^{\delta_{j+k-1}} + t_n^{\delta_{j+k-1}}\Psi_{j+k-1}(t_n)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-k+1} \frac{1}{n^{\delta_j/\delta k}} \left((\lambda_j t)^{\delta_j} + t^{\delta_j}\Phi_j(t_n)\right) \frac{1}{n^{\delta_{j+1}/\delta k}} \left((\gamma_{j+1} t)^{\delta_{j+1}} + t^{\delta_{j+1}}\Psi_{j+1}(t_n)\right) \ldots \frac{1}{n^{\delta_{j+k-1}/\delta k}} \left((\gamma_{j+k-1} t)^{\delta_{j+k-1}} + t^{\delta_{j+k-1}}\Psi_{j+k-1}(t_n)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-k+1} \frac{1}{n^{\Sigma\delta_i/\delta k}} \left((\lambda_j t)^{\delta_j} + t^{\delta_j}\Phi_j(t_n)\right) \left((\gamma_{j+1} t)^{\delta_{j+1}} + t^{\delta_{j+1}}\Psi_{j+1}(t_n)\right) \ldots \left((\gamma_{j+k-1} t)^{\delta_{j+k-1}} + t^{\delta_{j+k-1}}\Psi_{j+k-1}(t_n)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\Sigma\delta_i/\delta k}} \left((\lambda_n t)^{\delta_n} + t^{\delta_n}\Phi_n(t_n)\right) \left((\gamma_{n+1} t)^{\delta_{n+1}} + t^{\delta_{n+1}}\Psi_{n+1}(t_n)\right) \ldots \left((\gamma_{n+k-1} t)^{\delta_{n+k-1}} + t^{\delta_{n+k-1}}\Psi_{n+k-1}(t_n)\right) = 0$$

car $\Sigma\delta_i - \delta k > 0$.

D'où $\lim\limits_{n\to\infty} D_n(t_n) = 0$ et par conséquent en appliquant théorème IV-3-1 on a:

$\lim\limits_{n\to\infty} P(Z_n \leq t_n) = 0$.

V LOIS FORTES POUR LE TEMPS DE PANNE DU SYSTEME.

Ici on suppose que les composants du système sont statistiquement indépendants et de même loi, autrement dit les temps de panne $T_1,\dots,T_n$ des composants du système sont des variables aléatoires (positives) indépendantes. Le temps de panne du Système est donc:

$$Z_n = \min_{1\le j\le n-k+1} \ \max_{j\le i\le j+k-1} T_i$$

On suppose de plus que le paramètre k croit avec n (on le note k_n) et on s'interesse au comportement asymptotique des variables aléatoires Z_n et $k_n\dfrac{Z_n - a}{\mathrm{Log}k_n}$ pour le choix $k_n = [c\mathrm{Log}n], c>0$. ($[x]$ represente la partie entière de x).

Soient $m = E(T_1)$, M = ess-sup T_1, h la transformée de Cramer de T_1 et t^* un point tel que $h(a) = \sup\limits_{t>0}\big(at-\mathrm{Log}E(\exp(tT_1))\big) = at^* - \mathrm{Log}E(\exp(t^*T_1))$, pour $a\in\ ]m,M[$ et verifiant $\exp(-h(a)) = \exp(-1/c)$. On pose $\Phi(t) = E(\exp(tT_1))$. La borne supérieure dans l'expression de h(a) est atteinte en un point $t^*>0$ car l'équation $\dfrac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} = a$ admet une solution unique dans $]0,+\infty[$ quand a varie dans $]m,M[$, de plus la fonction $at-\mathrm{Log}\Phi(t)$ admet une dérivee seconde strictement négative. (Pour plus de détails on peut consulter [6]).

Plus exactement dans ce chapitre nous nous interessons aux lois fortes du type Erdos-Rényi-Shepp pour la statistique Z_n. Deheuvels [6] a établi ce type de lois pour certaines variables aléatoires bien particulières s'exprimant en fonction de la somme de variables aléatoires indépendantes. Un autre exemple qu'on peut citer ici est un travail de Ksir [10] qui a établi des résultats analogues dans un cadre Markovien généralisant ainsi [6] et [16].

En s'inspirant des techniques utilisées par Ksir dans [10], notre but est d'etablir des résultats analogues concernant la variable aléatoire Z_n.

Nous nous proposons de démontrer deux résultats, le premier concerne la convergence presque sûre de Z_n le second concerne celle de $k_n\dfrac{Z_n - a}{\mathrm{Log}k_n}$.

Nous avons besoin d'établir le résultat suivant qui nous sera utile dans la suite.

Théorème V-1:

Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels vérifiant $nY_n^2 \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.

Alors uniformément par rapport à toutes les suites X_n avec $|X_n| \leq Y_n$, nous avons:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} T_i < n(a + X_n) \right) \leq \exp(-nh(a)) \exp\left(-nX_n t^*\right).$$

où a et t^* vérifient les conditions citées ci-dessus.

Revenant maintenant au but du chapitre. Chacun des deux résultats que nous allons établir se fera en deux étapes.

Théorème V-2:

$$\lim_n \sup Z_n \leq a \text{ p.s.}$$

Démonstration:

La démonstration de ce théorème comme celles de ceux qui vont suivre repose directement sur le lemme de Borel-Cantelli.

Pour démontrer que $\lim_n \sup Z_n \leq a$ p.s on est amené à démontrer que la série $\sum_{n\geq 1} P(Z_n - a > 0)$ est convergente, pour cela on va essayer de majorer la quantité $P(Z_n > a)$ par le terme général d'une série qui converge.

En effet:

$$P(Z_n > a) = P\left(\min_{1\leq j\leq n-k_n+1} \ \max_{j\leq i\leq j+k_n-1} T_i > a \right)$$

Posons $Y_j = \max_{j\leq i\leq j+k_n-1} T_i$ $j=1,\dots,n-k_n+1$ on a $\min_{j\leq j\leq n-k_n+1} Y_j \leq \frac{1}{n-k_n+1} \sum_{j=1}^{n-k_n+1} Y_j$.

$$\text{Donc, } P(Z_n > a) = P\left(\min_{j\leq j\leq n-k_n+1} Y_j > a \right) \leq P\left(\frac{1}{n-k_n+1} \sum_{j=1}^{n-k_n+1} Y_j > a \right)$$

$$\leq P\left(\sum_{j=1}^{n-k_n+1} Y_j > (n-k_n+1)a \right)$$

$$\leq P\left(\sum_{j=1}^{n-k_n+1} Y_j - (n-k_n+1)a > 0 \right)$$

En appliquant l'inégalité de Tchebychev généralisée on a:

Le théorème suivant concerne la variable aléatoire $k_n \dfrac{Z_n - a}{\mathrm{Log} k_n}$.

Théorème V-3:

$$\liminf_n k_n \frac{Z_n - a}{\mathrm{Log} k_n} \geq \frac{1}{t^*} \text{ p.s}$$

Démonstration:

Comme dans [6] et [10] on pose: pour $j \in \mathbb{N}^*$, $n_j = \inf\{n / [c\mathrm{Log} n] = j\}$,

et pour $n_j \leq n < n_{j+1}$ on a: $Z_{n_j} \leq Z_n \leq Z_{n_{j+1}-1}$.

Montrons alors que $\sum_{j\geq 1} P\left(j \dfrac{Z_{n_j} - a}{\mathrm{Log} j} < \dfrac{1}{t^*} \right)$ est convergente.

$$P\left(j \frac{Z_{n_j} - a}{\mathrm{Log} j} < \frac{1}{t^*} \right) = P\left(Z_{n_j} < a + \frac{\mathrm{Log} j}{jt^*} \right)$$

$$= P\left(\min_{1\leq l\leq n_j - j+1} \ \max_{l\leq i\leq l+j-1} T_i < a + \frac{\mathrm{Log} j}{jt^*} \right)$$

$$\leq \sum_{l=1}^{n_j - j+1} P\left(\max_{l\leq i\leq l+j-1} T_i < a + \frac{\mathrm{Log} j}{jt^*} \right)$$

$$\leq \sum_{l=1}^{n_j - j+1} P\left((\max_{1\leq i\leq j} T_i) o \theta_l < a + \frac{\mathrm{Log} j}{jt^*} \right)$$

où $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{n_j - j+1})$ est un opérateur de translation et

$$P\left((\max_{1\leq i\leq j} T_i) o \theta_l < a + \frac{\mathrm{Log} j}{jt^*} \right) = P\left(\max_{1\leq i\leq j} T_i < a + \frac{\mathrm{Log} j}{jt^*} \right).$$

D'où $P\left(Z_{n_j} < a + \dfrac{\mathrm{Log} j}{jt^*} \right) \leq (n_j - j + 1)\, P\left(\max\limits_{1\leq i\leq j} T_i < a + \dfrac{\mathrm{Log} j}{jt^*} \right)$

$$\leq n_j\, P\left(\max_{1\leq i\leq j} T_i < a + \frac{\mathrm{Log} j}{jt^*} \right)$$

Sachant que $\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} T_i \leq \max_{1\leq i\leq j} T_i$ on a donc:

$$P\left(Z_{n_j} < a + \frac{\text{Log}j}{jt^*} \right) \leq n_j\, P\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} T_i < a + \frac{\text{Log}j}{jt^*}\right)$$

$$\leq n_j\, P\left(\sum_{i=1}^{j} T_i < j\left(a + \frac{\text{Log}j}{jt^*}\right)\right)$$

Pour $X_n = \frac{\text{Log}n}{nt^*}$ les hypothèses du théorème V-1 sont vérifiées et par conséquent on a:

$$P\left(Z_{n_j} < a + \frac{\text{Log}j}{jt^*} \right) \leq n_j \exp(-jh(a)) \exp\left(-j\frac{\text{Log}j}{jt^*}\, t^*\right)$$

$$\leq n_j (\exp(-jh(a)))/j$$

$$\leq n_j \exp(-jh(a))$$

$$\leq n_j \exp(-j/c)$$

De plus $[c\text{Log}n_j] = j$, pour $c'>c$ tel que $[c'\text{Log}n_j] = j$ on a:

$$n_j < \exp((j+1))/c').$$

D'ou $P\left(Z_{n_j} < a + \frac{\text{Log}j}{jt^*} \right) \leq \exp((j+1)/c') \exp(-j/c)$

$$\leq e^{1/c'}\left(e^{1/c'-1/c}\right)^j$$

La série $\sum_{j\geq 1} (e^{1/c'-1/c})^j$ est une série géométrique de raison $e^{1/c'-1/c}<1$.

Elle est donc convergente.

Il s'en suit que la série $\sum_{j\geq 1} P\left(j\frac{Z_{n_j} - a}{\text{Log}j} < \frac{1}{t^*} \right)$ est convergente.

On en déduit: $\sum_{n\geq 1} P\left(k_n \frac{Z_n - a}{\text{Log}k_n} < \frac{1}{t^*} \right) < +\infty$

En appliquant le lemme de Borel-Cantelli on a:

$$\liminf_n k_n \frac{Z_n - a}{\text{Log}k_n} \geq \frac{1}{t^*} \text{ p.s}$$

Les deux résultats de convergence presque sûre que nous voulons établir se résument dans les deux corollaires suivants:

Corollaire V-1:

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = a \text{ p.s}$$

Démonstration:

On a montré dans le théorème V-2 que $\limsup_n Z_n \leq a$ p.s ...(1).

Il reste donc à montrer que $\liminf_n Z_n \geq a$ p.s.

Comme dans le théorème V-3 on est amené à démontrer que: $\sum_{j\geq 1} P(Z_{n_j} < a) < +\infty$

Or $P(Z_{n_j} < a) \leq P(Z_{n_j} < a + \dfrac{\mathrm{Log}\, j}{j t^*})$.

Dans la démonstration du théorème V-3 on a vu que la série

$\sum_{j\geq 1} P(Z_{n_j} < a + \dfrac{\mathrm{Log}\, j}{j t^*})$ est convergente, donc la série $\sum_{j\geq 1} P(Z_{n_j} < a)$ est convergente, par conséquent la série $\sum_{n\geq 1} P(Z_n < a)$ est convergente et le lemme de Borel-Cantelli entraîne: $\liminf_n Z_n \geq a$ p.s ...(2).

En combinant les inégalités (1) et (2) on obtient: $\lim_{n\to\infty} Z_n = a$ p.s.

Corollaire V-2:

$$\lim_{n\to\infty} k_n \frac{Z_n - a}{\mathrm{Log} k_n} = \frac{1}{t^*} \text{ p.s.}$$

Démonstration:

On a montré dans le théorème V-3 que $\liminf_n k_n \dfrac{Z_n - a}{\mathrm{Log} k_n} \geq \dfrac{1}{t^*}$ p.s ...(3)

Il reste donc à voir que $\limsup_n k_n \dfrac{Z_n - a}{\mathrm{Log} k_n} \leq \dfrac{1}{t^*}$ p.s.

$$\text{Or } P\left(k_n \frac{Z_n - a}{\mathrm{Log} k_n} > \frac{1}{t^*}\right) = P\left(Z_n - a > \frac{\mathrm{Log} k_n}{k_n t^*}\right)$$

$$= P\left(Z_n > a + \frac{\mathrm{Log} k_n}{k_n t^*}\right)$$

$$\leq P(Z_n > a)$$

Dans la démonstration du théorème V-2 on a vu que la série $\sum_{n\geq 1} P(Z_n > a)$ est convergente, par conséquent $\sum_{n\geq 1} P(k_n \frac{Z_n - a}{\mathrm{Log} k_n} > \frac{1}{t^*})$ est convergente.

En appliquant encore le lemme de Borel-Cantelli on a:

$$\lim_n \sup k_n \frac{Z_n - a}{\mathrm{Log} k_n} \leq \frac{1}{t^*} \text{ p.s } \ldots (4).$$

En combinant (3) et (4) on obtient $\lim_{n\to\infty} k_n \frac{Z_n - a}{\mathrm{Log} k_n} = \frac{1}{t^*}$ p.s.

THEME II

MODELES PROBABILISTES POUR DES PREVISIONS METEOROLOGIQUES

I INTRODUCTION.

Le soleil est une source d'energie d'un grand bénéfice pour l'homme. En effet c'est grâce au soleil comme grâce à l'eau que la vie sur terre est possible.Comme son apparition pendant l'été est très utile sa disparition pendant l'hiver l'est aussi.Cette succession de deux étapes différentes (ie apparition et disparition) permet de définir deux états météorologiques et par rapport à un seuil bien défini concernant la quantité d'énergie reçue par jour,on décide si une journée est une journee de beau temps "1" ou de mauvais temps "0".

La représentation ....00110100111... d'une suite de jours donnee nous a permis de penser à des résultats qu'on rencontre en théorie de la fiabilité.Et plus exactement le calcul des probabilités des suites catastrophiques,c'est à dire les suites de journées de mauvais temps ainsi que celles des suites de journées de beau temps est possible grâce a des résultats concernant les systèmes k-consécutifs-sur-n [7] et [13]. Pour cela on construit un modèle Markovien à deux états:beau temps "1" et mauvais temps "0".La méthode du minimum de contraste [21] nous permet d'estimer les probabilités de transition de la chaine de Markov ainsi définie. A l'aide des données fournies par différentes stations météorologiques nous calculons les probabilités citées ci-dessus,et nous comparons avec les résultats obtenus quand les deux états meteorologiques (beau temps et mauvais temps) sont indépendants.

Il est tout à fait possible de faire une extension du modèle précédent où on a observé des suites du type ...00110100111....

Maintenant on n'observe le processus qu'aux instants de changement d'état,autrement dit la suite ci-dessus est reduite à une alternance de 0 et de 1.

Pour la chaine ainsi construite,connaissant les probabilités de transition de 0 à 0 et de 1 à 1 on peut calculer les probabilités de faire i transitions de 0 à 0 ou de 1 à 1 (ie les probabilités de i+1 journees successives de mauvais temps ou de beau temps).

Mots clés:

Etat météorologique. Energie solaire. Dépendance Markovienne. Suites catastrophiques.

II MODELES PROBABILISTES POUR DES PREVISIONS METEOROLOGIQUES BINAIRES.

Nous pensons que deux états météorologiques successifs ne sont pas statistiquement indépendants.Planifier une energie solaire dans une région doit prendre ceci en considération.Dans le but d'étudier le potentiel de l'énergie solaire dans une région un modèle Markovien est developpé.Dans ce modèle il est supposé que les états météorologiques successifs sont représentés par une chaine de Markov $(X_n)_{n\geq 1}$à deux états où $X_n$est l'état météorologique à la $n^{iéme}$étape.

La discrimination entre une journée de beau temps et une journée de mauvais temps est faite par le biais du calcul d'un rapport qu'on définira par la suite.On décide que c'est une journée de beau temps ou de mauvais temps selon que ce rapport est supérieur ou inférieur à 1/2.

II 1 MODELE MATHEMATIQUE.

Le modèle considéré est binaire ,il comporte donc deux états méteorologiques "beau temps" et "mauvais temps", et l'unité de temps considérée est le jour, i.e qu'on observe l'état chaque jour et la décision prise est basée sur une methode qu'on exposera par la suite.

En representant "beau temps" par "1" et "mauvais temps" par "0", nous pouvons considérer qu'une suite d'observations est représentée par une succession de 0 et de 1,par exemple la suite:...1100010100111110000....

Une première approche est de supposer que cette suite est une simple chaine de Markov $(X_n)_{n\geq 1}$i.e la probabilité qu'un jour soit "1" dépend seulement du jour qui le précède.Nous notons alors α la probabilité de transition de "0" à "1" et β celle de "1" à "0" i.e:

$\alpha = P(X_i = 1/ X_{i-1} = 0)$; $\beta = P(X_i = 0/ X_{i-1} = 1)$.

La matrice de transition relative à ce modèle est donc donnée par:

$$\begin{pmatrix} 1-\beta & \beta \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

Une seconde approche est de considérer une extension du modèle précédent au cas semi-Markovien.Une étude détaillée fera l'objet du paragrapheIII.

Revenant maintenant au modèle précédent dont les paramètres inconnus sont α et β. Pour pouvoir le décrire il faut donc les estimer.

II 2 ESTIMATION DE α ET β.

l'estimation des paramètres d'une chaine de Markov quand une longue suite d'observations est donnée a été discutée par Bartlett(1950).
Dans notre travail les estimateurs de α et β sont donnés par la méthode du minimum de contraste étudiée par Gansler(1972) [21].
Cette méthode consiste à minimiser la fonction $L_n(\theta)$ définie par:

$$L_n(\theta) = -\sum_{m=0}^{n-1} \operatorname{Log} \Pi(X_m, X_{m+1}, \theta)$$

où $\theta = (\alpha,\beta)$ et $\Pi(X_m, X_{m+1}, \theta) = \left((1-\alpha)^{1-X_m} \beta^{X_m}\right)^{1-X_{m+1}} \left(\alpha^{1-X_m} (1-\beta)^{X_m}\right)^{X_{m+1}}$.

Il faut donc chercher la valeur de θ pour laquelle $L_n(\theta)$ est minimum.
Soit calculer les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial\alpha} L_n(\theta)$ et $\frac{\partial}{\partial\beta} L_n(\theta)$ et les egaliser à 0. On a:

$$\begin{aligned} L_n(\theta) &= -\sum_{m=0}^{n-1} \operatorname{Log} \Pi(X_m, X_{m+1}, \theta) \\ &= -\sum_{m=0}^{n-1} \operatorname{Log}\left(\left((1-\alpha)^{1-X_m} \beta^{X_m}\right)^{1-X_{m+1}} \left(\alpha^{1-X_m} (1-\beta)^{X_m}\right)^{X_{m+1}} \right) \\ &= -\sum_{m=0}^{n-1} \Big((1-X_{m+1})(1-X_m)\operatorname{Log}(1-\alpha) + (1-X_{m+1})X_m \operatorname{Log}\beta + (1-X_m)X_{m+1}\operatorname{Log}\alpha + \\ &\qquad X_m X_{m+1} \operatorname{Log}(1-\beta) \Big). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} L(\alpha,\beta) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(1-X_{m+1})(1-X_m)}{1-\alpha} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(1-X_m)X_{m+1}}{\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta} L(\alpha,\beta) = -\sum_{m=0}^{n-1} \frac{(1-X_{m+1})X_m}{\beta} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{X_m X_{m+1}}{1-\beta} = 0$$

On a alors:

$$\alpha = \frac{\sum_{m=0}^{n-1} (1-X_m)X_{m+1}}{\sum_{m=0}^{n-1} (1-X_m)X_{m+1} + \sum_{m=0}^{n-1} (1-X_{m+1})(1-X_m)} \; ; \beta = \frac{\sum_{m=0}^{n-1} (1-X_{m+1})X_m}{\sum_{m=0}^{n-1} (1-X_{m+1})X_m + \sum_{m=0}^{n-1} X_m X_{m+1}}$$

Maintenant on pose les notations suivantes:

$$\sum_{m=0}^{n-1} (1-X_{m+1})X_m = n10 = \text{nombre de transitions de 1 à 0.}$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} X_m X_{m+1} = n11 = \text{nombre de transitions de 1 à 1.}$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} (1-X_m)X_{m+1} = n01 = \text{nombre de transitions de 0 à 1.}$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} (1-X_m)(1-X_{m+1}) = n00 = \text{nombre de transitions de 0 à 0.}$$

Les estimateurs de α et β s'écrivent donc:

$$\alpha_n = \frac{n01}{n01 + n00} \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{n10}{n10 + n11}$$

$n10 + n11 = n1 =$ nombre de 1.

$n01 + n00 = n0 =$ nombre de 0.

$n1 + n0 = n =$ la longueur de la suite.

L'estimateur du minimum de contraste de θ est donne par:

$$\theta_n = (\alpha_n, \beta_n) = \left(\frac{n01}{n0} \; ; \; \frac{n10}{n1}\right)$$

II 3 DISCRIMINATION ENTRE LES ETATS METEOROLOGIQUES.

Nous exposons dans ce paragraphe la méthode choisie pour discriminer entre les deux états météorologiques "beau temps" et "mauvais temps". Etant donné $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite d'observations, Z_n est la valeur observée le $n^{ième}$ jour, dans ce travail la valeur de Z_n considérée est le rapport de la radiation globale quotidienne sur la radiation à l'exterieur de l'atmosphère où la radiation globale est mesurée et la radiation à l'exterieur de l'atmosphère est calculée.

La discrimination entre les deux états se fait de la manière suivante:

On décide qu'une journée est une journée de "beau temps" si le rapport ci-dessus est supérieur à $\frac{1}{2}$ et qu'une journée est une journée de "mauvais temps" s'il lui est inférieur. Pour établir cela on s'est basé sur des travaux faits dans [15] et [18].

III DIFFERENTS RESULTATS OBTENUS CONCERNANT CERTAINES STATIONS METEOROLOGIQUES BIEN PARTICULIERES.

La représentation d'une suite de jours donnée au paragraphe I-1, nous a permi de pouvoir lui adapter des résultats de la théorie de la fiabilité, plus exactement des résultats concernant les systèmes k-consécutifs-sur-n.La défaillance d'un système k-consécutifs-sur-n est en effet la probabilité qu'il y ait parmi les n composants du système k consécutifs qui sont en panne c'est à dire au moins k zéros consécutifs. Le calcul de cette probabilité revient à celui de la probabilité que dans une suite de n jours il y ait k journées consécutives de "mauvais temps".

Les travaux faits par F.K.Hwang dans [7] et B.Ksir et M.Boushaba dans [13] nous permettent de réaliser cela respectivement dans les deux cas indépendant et Markovien.En se basant sur ces deux travaux nous allons donc pouvoir calculer les probabilités des suites de mauvais temps ainsi que celles des suites de beau temps et tous ces calculs sont bien sûre possibles à partir de données fournies par différentes stations météorologiques .Plusieurs scénaris seront envisagés.

Nous commençons d'abord par établir les deux théorèmes suivants et par la suite nous exposons les différents résultats que nous avons pu réaliser.

Théorème III-1:(cas indépendant)[7]

Si p_0 est la probabilité de beau temps, $q_0 = 1-p_0$ la probabilité de mauvais temps et $R(p_0,k,n)$ la probabilité d'avoir k journées consécutives de mauvais temps parmi n journées nous avons:

$$R(p_0,k,n) = 1 - \sum_{i\geq 0} (-1)^i p_0^{i-1} q_0^{ki} \left(C_{n-ki+1}^{i} - q_0 C_{n-ki}^{i} \right)$$

Démonstration:

$R(p_0,k,n)$ est en effet la défaillance d'un système k-consécutifs-sur-n à composants indépendants et de même probabilité de fonctionnement p_0.

D'après théorème 1 page 261 [7],nous avons:

$$1 - R(p_0,k,n) = \sum_{j\geq 0} q_0^j \, p_0^{n-j} \sum_{i\geq 0} (-1)^i \, C_{n-j+1}^{i} \, C_{n-ki}^{n-j}$$

$$= \sum_{i\geq 0} (-1)^i \frac{(n-ki)!}{i!(n-(k+1)i+1)!} \sum_{j\geq 0} q_0^j\, p_0^{n-j} (n-j+1) C_{n-(k+1)j+1}^{j-ki}$$

$$= \sum_{i\geq 0} (-1)^i \frac{(n-ki)!}{i!(n-(k+1)i+1)!}\, q_0^{ki} p_0^{i-1} \sum_{l\geq 0} q_0^l p_0^{n-(k+1)i+1-l}$$

$$(n-ki+1-l)\; C_{n-(k+1)i+1}^{l}$$

$$= \sum_{i\geq 0} (-1)^i \frac{(n-ki)!}{i!(n-(k+1)i+1)!}\, q_0^{ki} p_0^{i-1} (n-ki+1-(n-(k+1)i+1)q_0)$$

$$= \sum_{i\geq 0} (-1)^i p_0^{i-1} q_0^{ki} (C_{n-ki+1}^{i} - q_0 C_{n-ki}^{i}).$$

Théorème III-2: (cas Markovien) [13]

Si p est le nombre de transitions de 0 à 0, q celui de 0 à 1 et $R(n)$ la probabilité d'avoir k journées consécutives de mauvais temps parmi n journées, nous avons:

$$R(n) = \sum_{k\leq p+q+1<n} \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\, \frac{C_{n-k}^{p+q+1-k} + (n-k)C_{n-k-1}^{p+q+1-k}}{C_n^{p+q+1}}\, (C_{p+q}^{p}\, C_{t+q}^{t}\, A_t + C_{p+q-1}^{p} C_{v+q}^{v}\, A_v)$$

$$+ \sum_{k\leq p+q<n} \frac{\beta}{\alpha+\beta}\, \frac{C_{n-k}^{p+q-k} + (n-k)C_{n-k-1}^{p+q-k}}{C_n^{p+q}}\, (C_{p+q-1}^{p}\, C_{u+q-1}^{u} A_u + C_{p+q}^{p}\, C_{v+q-1}^{v} A_v)$$

où $A_t = (1-\alpha)^p\alpha^q\beta^{q+1}(1-\beta)^t$; $A_u = (1-\alpha)^p\alpha^q\beta^{q-1}(1-\beta)^u$; $A_v = (1-\alpha)^p\alpha^q\beta^q(1-\beta)^v$;

et $t = v-1$; $v = u-1$; $u = n-p-2q$. Cette formule est valable pour: $[n/2]\leq k\leq n$.

Les quantités $a = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ et $b = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ sont respectivement les probabilités de beau temps et de mauvais temps (les probabilités stationnaires).

TABLEAUX DES DIFFERENTS RESULTATS:

Dans cette partie nous exposons quelques résultats déduits de données fournies par les stations météorologiques de Constantine et d'Oran.

Nous exposons d'abord les valeurs de n11,n00,n01,n10,α,β,p et q(où dans ce cas p et q sont les valeurs de a et b du théorème précédent ie les probabilités de beau temps et de mauvais temps) dans le cas Markovien ainsi que celles de n1,n0,p_0 et q_0 dans le cas indépendant pour tous les mois de l'année pour l'année 1986 concernant la station de Constantine et l'année 1991 concernant celle d'Oran.

Par la suite nous calculons les valeurs moyennes prises sur 5 années pour chaque moi de l'année pour α,β,p,q,p_0 et q_0 pour les deux stations. (Pour la station de Constantine la periode est étalée sur les années 1982-1986,pour celle d'Oran la periode est étalée sur les années 1987-1991).

	n11	n10	n01	n00	α	β	p	q
1	4	6	6	14	0.300	0.600	0.333	0.667
2	6	6	5	10	0.333	0.500	0.400	0.600
3	6	4	5	15	0.250	0.400	0.385	0.615
4	20	4	3	2	0.600	0.167	0.783	0.217
5	22	4	3	1	0.750	0.154	0.830	0.170
6	24	3	2	0	1.000	0.111	0.900	0.100
7	24	2	2	2	0.500	0.077	0.867	0.133
8	25	2	1	2	0.333	0.074	0.818	0.182
9	21	3	2	3	0.400	0.125	0.762	0.238
10	8	8	8	6	0.571	0.500	0.533	0.467
11	9	4	4	12	0.250	0.308	0.448	0.552
12	7	4	5	14	0.263	0.364	0.420	0.580

Valeurs de n11,n10,n01,n00,α,β,p,q pour l'année 1986 (Constantine).

	n1	n0	p_0	q_0
1	10	21	0.323	0.677
2	12	16	0.429	0.571
3	11	20	0.355	0.645
4	24	6	0.800	0.200
5	26	5	0.839	0.161
6	27	3	0.900	0.100
7	27	4	0.871	0.129
8	27	4	0.871	0.129
9	24	6	0.800	0.200
10	17	14	0.548	0.452
11	14	16	0.467	0.533
12	12	19	0.387	0.613

Valeurs de n1,n0,p_0,q_0 pour l'année 1986 (Constantine).

	n11	n10	n01	n00	α	β	p	q
1	21	5	4	0	1.000	0.192	0.839	0.161
2	12	6	5	4	0.556	0.333	0.625	0.375
3	15	5	6	4	0.600	0.250	0.706	0.294
4	23	2	3	1	0.750	0.080	0.904	0.096
5	24	2	2	2	0.500	0.077	0.867	0.133
6	29	0	0	0	×	×	×	×
7	27	1	1	1	0.500	0.036	0.933	0.067
8	26	2	2	0	1.000	0.071	0.933	0.067
9	24	2	1	2	0.333	0.077	0.813	0.187
10	16	5	5	4	0.556	0.238	0.700	0.300
11	17	5	5	2	0.714	0.227	0.759	0.241
12	15	3	3	9	0.250	0.167	0.600	0.400

Valeurs de n11,n10,n01,n00,α,β,p,q pour l'année 1991(Oran).

	n1	n0	p_0	q_0
1	26	5	0.839	0.161
2	18	10	0.643	0.357
3	21	10	0.677	0.323
4	26	4	0.867	0.133
5	27	4	0.871	0.129
6	30	0	1.000	0.000
7	29	2	0.935	0.065
8	29	2	0.935	0.065
9	26	4	0.867	0.133
10	22	9	0.710	0.290
11	23	7	0.767	0.233
12	19	12	0.613	0.387

Valeurs de n1,n0,p_0,q_0 pour l'année 1991 (Oran).

	M				I	
	α	β	p	q	p_0	q_0
1	0.3208	0.5082	0.4014	0.5986	0.4122	0.5878
2	0.4348	0.3878	0.4992	0.5008	0.5186	0.4814
3	0.3616	0.4326	0.4516	0.5484	0.4440	0.5560
4	0.5562	0.2504	0.7020	0.2980	0.6400	0.3600
5	0.5472	0.2350	0.7120	0.2880	0.7100	0.2900
6	0.7500	0.1190	0.8628	0.1372	0.8668	0.1332
7	0.7000	0.0592	0.9140	0.0860	0.9158	0.0842
8	×	×	×	×	0.9104	0.0896
9	0.7042	0.1614	0.8074	0.1926	0.8134	0.1866
10	0.5696	0.3714	0.5792	0.4208	0.5938	0.4062
11	0.2746	0.4706	0.3866	0.6134	0.3940	0.6060
12	0.3042	0.5372	0.3632	0.6368	0.3618	0.6382

Valeurs moyennes de $\alpha,\beta,p,q,p_0.q_0$ (Constantine).

	M				I	
	α	β	p	q	p_0	q_0
1	0.5190	0.3286	0.5950	0.4050	0.6066	0.3934
2	0.5928	0.2710	0.6956	0.3044	0.7072	0.2928
3	0.5812	0.1826	0.7546	0.2454	0.7548	0.2452
4	0.6850	0.1552	0.8152	0.1848	0.8066	0.1934
5	0.7000	0.1320	0.8390	0.1610	0.8322	0.1678
6	×	×	×	×	0.8680	0.1320
7	×	×	×	×	0.9096	0.0904
8	×	×	×	×	0.9418	0.0582
9	0.5858	0.1150	0.8260	0.1740	0.8468	0.1532
10	0.6552	0.2974	0.6872	0.3128	0.6774	0.3226
11	0.5518	0.2584	0.6686	0.3314	0.6734	0.3266
12	0.4724	0.3162	0.6076	0.3924	0.6064	0.3936

Valeurs moyennes de α,β,p,q,p_0,q_0 (Oran).

Remarque:

les valeurs manquantes dans les tableaux precedents (ie ×) sont dues au fait que les nombres utilisés pour le calcul de α et β sont nuls pour certains mois de l'année.

PROBABILITES DES SUITES DE BEAU TEMPS ET DES SUITES DE MAUVAIS TEMPS.

Dans cette partie nous calculons exactement les probabilites d'avoir k journées consécutives de mauvais temps ou de beau temps parmi n journees quand k et n varient dans les deux cas independant et Markovien.

(M correspond au cas Markovien et I au cas independant).

	I			M		
	n=5	n=10	n=15	n=5	n=10	n=15
k						
2	0.7731	0.9391	0.9865			
3	0.3708	0.6794	0.8357	0.2320		
4	0.1688	0.4008	0.5701	0.0610		
5		0.2151	0.3413		0.2084	
6		0.1094	0.1916		0.1014	
7		0.0543	0.1044		0.0453	
8		0.0261	0.0550		0.0172	0.0689
9		0.0119	0.0292		0.0044	0.0373
10			0.0151			0.0195
11			0.0077			0.0097
12			0.0038			0.0044
13			0.0018			0.0017
14			0.0008			0.0004

Probabilités des suites de mauvais temps "Janvier" (Constantine).

	I			M		
	n=5	n=10	n=15	n=5	n=10	n=15
k						
2	0.5916	0.8360	0.9382			
3	0.2268	0.4699	0.6359	0.1754		
4	0.0813	0.2165	0.3327	0.0410		
5		0.0926	0.1559		0.0945	
6		0.0381	0.0699		0.0392	
7		0.0152	0.0307		0.0152	
8		0.0058	0.0133		0.0051	0.0166
9		0.0021	0.0057		0.0012	0.0076
10			0.0024			0.0034
11			0.0010			0.0015
12			0.0004			0.0006
13			0.0002			0.0002
14			0.0001			0.0001

Probabilites des suites de mauvais temps "Fevrier" (Constantine).

	I			M		
	n=5	n=10	n=15	n=5	n=10	n=15
k						
2	0.7209	0.9153	0.9776			
3	0.3245	0.6188	0.7839	0.2063		
4	0.1380	0.3402	0.4967	0.0526		
5		0.1711	0.2772		0.1507	
6		0.0820	0.1459		0.0695	
7		0.0383	0.0748		0.0297	
8		0.0172	0.0357		0.0109	0.0390
9		0.0073	0.0186		0.0028	0.0200
10			0.0091			0.0100
11			0.0044			0.0047
12			0.0020			0.0021
13			0.0009			0.0008
14			0.0004			0.0002

Probabilités des suites de mauvais temps "Mars" (Constantine).

	I			M		
	n=5	n=10	n=15	n=5	n=10	n=15
k						
2	0.8013	0.9502	0.9901			
3	0.3971	0.7121	0.8615	0.2260		
4	0.1880	0.4365	0.6112	0.0630		
5		0.2427	0.3802		0.2299	
6		0.1276	0.2211		0.1177	
7		0.0655	0.1246		0.0556	
8		0.0325	0.0684		0.0225	0.0899
9		0.0154	0.0371		0.0063	0.0516
10			0.0198			0.0287
11			0.0104			0.0151
12			0.0054			0.0073
13			0.0027			0.0030
14			0.0013			0.0008

Probabilités des suites de mauvais temps "Novembre" (Constantine).

	I			M		
	n=5	n=10	n=15	n=5	n=10	n=15
k						
2	0.8491	0.9661	0.9945			
3	0.4477	0.7671	0.9010	0.2399		
4	0.2257	0.5021	0.6823	0.0638		
5		0.2970	0.4535		0.2320	
6		0.1651	0.2804		0.1153	
7		0.0898	0.1676		0.0525	
8		0.0473	0.0970		0.0202	0.0841
9		0.0239	0.0556		0.0052	0.0465
10			0.0314			0.0248
11			0.0175			0.0125
12			0.0095			0.0057
13			0.0050			0.0022
14			0.0025			0.0006

Probabilités des suites de mauvais temps "Décembre" (Constantine).

	I			M		
	n=5	n=10	n=15	n=5	n=10	n=15
k						
2	0.9427	0.9880	0.9989			
3	0.5655	0.8712	0.9615	0.3097		
4	0.3278	0.6534	0.8242	0.1022		
5		0.4420	0.6291		0.3057	
6		0.2767	0.4403		0.1686	
7		0.1701	0.3200		0.0872	
8		0.0102	0.1957		0.0398	0.1396
9		0.0592	0.1256		0.0134	0.0848
10			0.0798			0.0501
11			0.0499			0.0284
12			0.0307			0.0150
13			0.0184			0.0069
14			0.0107			0.0023

Probabilités des suites de beau temps "Mai" (Constantine).

	I			M		
	n=5	n=10	n=15	n=5	n=10	n=15
k						
2	1.0000	0.9997	1.0000			
3	0.8251	0.9874	0.9995	0.5016		
4	0.6402	0.9254	0.9859	0.2054		
5		0.8157	0.9394		0.5827	
6		0.6507	0.8516		0.3853	
7		0.5152	0.7601		0.2390	
8		0.4042	0.6165		0.1319	0.4055
9		0.3136	0.4977		0.0545	0.2899
10			0.3996			0.2016
11			0.3188			0.1344
12			0.2524			0.0840
13			0.1980			0.0465
14			0.1536			0.0193

Probabilites des suites de beau temps "Juin" (Constantine).

	I			M		
	n=5	n=10	n=15	n=5	n=10	n=15
k						
2	1.0000	0.9986	1.0000			
3	0.7383	0.9642	0.9954	0.4392		
4	0.5186	0.8490	0.9548	0.1684		
5		0.6873	0.8573		0.4865	
6		0.5048	0.7192		0.3026	
7		0.3665	0.5860		0.1762	
8		0.2623	0.4407		0.0909	0.2983
9		0.1842	0.3293		0.0350	0.2014
10			0.2441			0.1320
11			0.1793			0.0829
12			0.1302			0.0486
13			0.0932			0.0252
14			0.0654			0.0097

Probabilités des suites de beau temps "Septembre" (Constantine).

	I			M		
	n=5	n=10	n=15	n=5	n=10	n=15
k						
2	0.4357	0.6972	0.8415			
3	0.1344	0.3015	0.4361	0.1332		
4	0.0383	0.1098	0.1763	0.0276		
5		0.0378	0.0657		0.0485	
6		0.0126	0.0238		0.0174	
7		0.0041	0.0085		0.0059	
8		0.0013	0.0030		0.0017	0.0051
9		0.0004	0.0010		0.0004	0.0020
10			0.0004			0.0008
11			0.0001			0.0003
12			0.0000			0.0001
13			0.0000			0.0000
14			0.0000			0.0000

Probabilités des suites de mauvais temps "Janvier" (Oran).

	I			M		
	n=5	n=10	n=15	n=5	n=10	n=15
k						
2	0.4375	0.6990	0.8430			
3	0.1353	0.3033	0.4384	0.1424		
4	0.0387	0.1108	0.1778	0.0323		
5		0.0383	0.0664		0.0605	
6		0.0128	0.0241		0.0236	
7		0.0042	0.0086		0.0088	
8		0.0013	0.0030		0.0029	0.0080
9		0.0004	0.0011		0.0007	0.0034
10			0.0004			0.0015
11			0.0001			0.0006
12			0.0000			0.0002
13			0.0000			0.0001
14			0.0000			0.0000

Probabilités des suites de mauvais temps "Décembre" (Oran).

	I			M		
	n=5	n=10	n=15	n=5	n=10	n=15
k						
2	0.9890	0.9947	0.9997			
3	0.6413	0.9202	0.9822	0.3556		
4	0.4045	0.7445	0.8931	0.1275		
5		0.5458	0.7365		0.3849	
6		0.3667	0.5622		0.2278	
7		0.2426	0.4139		0.1268	
8		0.1573	0.2867		0.0628	0.2124
9		0.0992	0.1969		0.0232	0.1279
10			0.1339			0.0872
11			0.0900			0.0530
12			0.0595			0.0301
13			0.0386			0.0151
14			0.0244			0.0056

Probabilités des suites de beau temps "Mars" (Oran).

	I			M		
	n=5	n=10	n=15	n=5	n=10	n=15
k						
2	1.0000	0.9992	1.0000			
3	0.7694	0.9742	0.9975	0.4609		
4	0.5597	0.8786	0.9684	0.1830		
5		0.7336	0.8901		0.5306	
6		0.5546	0.7685		0.3420	
7		0.4151	0.6469		0.2071	
8		0.3068	0.4996		0.1116	0.3526
9		0.2231	0.3836		0.0451	0.2467
10			0.2925			0.1679
11			0.2211			0.1097
12			0.1655			0.0672
13			0.1230			0.0365
14			0.0890			0.0148

Probabilités des suites de beau temps "Mai" (Oran).

	I			M		
	n=5	n=10	n=15	n=5	n=10	n=15
k						
2	1.0000	0.9995	1.0000			
3	0.7936	0.9806	0.9985	0.4064		
4	0.5934	0.8999	0.9770	0.1587		
5		0.7694	0.9130		0.4878	
6		0.4048	0.8055		0.3145	
7		0.4563	0.6955		0.1917	
8		0.3460	0.5486		0.1046	0.3310
9		0.2587	0.4303		0.0431	0.2338
10			0.3354			0.1612
11			0.2595			0.1076
12			0.1989			0.0670
13			0.1508			0.0373
14			0.1128			0.0156

Probabilités des suites de beau temps "Septembre" (Oran).

La variation des probabilités des suites de mauvais temps et des suites de beau temps pour n fixé quand k varie est mieux expliquée dans le modèle Markovien,ce qui s'explique bien car dans ce modèle on prend en considération plus de paramètres qui ont un rôle important.Dans le cas indépendant les probabilités des suites de beau temps sont surestimées, alors que les probabilités des suites de mauvais temps sont sousestimées.

III EXTENSION DU MODELE PRECEDENT.

On a observé des suites du type ...100101000... (états des journées successives). Maintenant on n'observe le processus qu'aux instants de changement d'état, autrement dit la suite ci-dessus est réduite à une alternance de 0 et de 1.

Soit τ_n la variable aléatoire qui désigne le nombre d'unités de temps (ici l'unité de temps est la journée) dans l'état 0 (mauvais temps) ou l'état 1 (beau temps) à la $n^{ième}$ étape. On note par $Y_n = X_{T_n}$ où $T_n = \sum_{i=0}^{n} \tau_n$ $\tau_0 = 0$.

Y_n est l'etat du processus à la $n^{ième}$ étape. Si τ_n est une variable aleatoire sur l'espace (Ω', a', P') telle que:

$$P(\tau_n = i) = (1-z)z^{i-1} \quad z \in]0,1[\quad i \geq 1.$$

Alors $(Y_n, \tau_n)_{n\geq 0}$ est une chaine de Markov [22] définie sur l'espace $(\Omega \times \mathbb{N}, \mathscr{A} \times \mathscr{P}(\mathbb{N}), P \times P')$.

Lorsque z désigne pour la chaine $(X_n)_{n\geq 0}$ la probabilité de passer de l'état 0 à l'état 0. Donc 1-z est la probabilité de passer de l'état 0 à l'état 1) la valeur $P(\tau = i) = (1-z)z^{i-1}$ signifie qu'entre la $n^{ième}$ et la $(n+1)^{ième}$ étape la probabilité de faire (i-1) transitions de 0 à 0 est $(1-z)z^{i-1}$.

(Autrement dit on a eu i journées successives de mauvais temps).

De ce fait pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$F_n(k) = P(\tau_n \leq k) = \sum_{i=1}^{k} P(\tau_n = i) \text{ détermine donc la loi de } \tau_n.$$

A partir de cette formule et à l'aide des valeurs de α et β déterminées auparavant nous pouvons donc déterminer les probabilités citées dans le paragraphe précédent (ie les probabilités des suites de beau temps et celles des suites de mauvais temps). En effet on calcule exactement la

probabilité qu'il y ait au moins k journées consécutives de mauvais temps sachant qu'on démarre par mauvais temps en faisant intervenir α, et la probabilité qu'il y ait k journées consécutives de beau temps sachant qu'on démarre par beau temps en faisant intervenir β.
Les résultats figurent dans les tableaux suivants: (S.M correspond au cas semi Markovien).

	S.M		
	n=5	n=10	n=15
k			
2	0.3630	0.4469	0.4590
3	0.2151	0.2989	0.3110
4	0.1146	0.1984	0.2105
5		0.1302	0.1423
6		0.0839	0.0960
7		0.0524	0.0645
8		0.0310	0.0431
9		0.0165	0.0286
10			0.0188
11			0.0121
12			0.0076
13			0.0045
14			0.0024

P obabilités des suites de mauvais temps "Janvier"(Constantine).

	S.M		
	n=5	n=10	n=15
k			
2	0.2867	0.3174	0.3191
3	0.1478	0.1785	0.1803
4	0.0694	0.1000	0.1018
5		0.0557	0.0575
6		0.0307	0.0324
7		0.0165	0.0183
8		0.0085	0.0103
9		0.0040	0.0058
10			0.0032
11			0.0018
12			0.0010
13			0.0005
14			0.0002

Probabilités des suites de mauvais temps "Fevrier" (Constantine).

	S.M		
	n=5	n=10	n=15
k			
2	0.3339	0.3999	0.4063
3	0.1923	0.2530	0.2589
4	0.0942	0.1586	0.1649
5		0.0986	0.1050
6		0.0603	0.0667
7		0.0359	0.0423
8		0.0203	0.0267
9		0.0104	0.0168
10			0.0104
11			0.0064
12			0.0038
13			0.0022
14			0.0011

Probabilités des suites de mauvais temps "Mars" (Constantine).

	S.M		
	n=5	n=10	n=15
k			
2	0.3804	0.4965	0.5198
3	0.2359	0.3520	0.3752
4	0.1311	0.2472	0.2705
5		0.1712	0.1945
6		0.1161	0.1394
7		0.0762	0.0995
8		0.0472	0.0705
9		0.0263	0.0495
10			0.0343
11			0.0233
12			0.0153
13			0.0095
14			0.0053

Probabilités des suites de mauvais temps "Novembre" (Constantine).

	S.M		
	n=5	n=10	n=15
k			
2	0.3707	0.4659	0.4814
3	0.2235	0.3186	0.3341
4	0.1210	0.2161	0.2316
5		0.1448	0.1603
6		0.0951	0.1106
7		0.0606	0.0761
8		0.0365	0.0520
9		0.0198	0.0353
10			0.0236
11			0.0155
12			0.0099
13			0.0060
14			0.0032

Proab lités des suites de mauvais temps "Décembre" (Constantine).

	S.M		
	n=5	n=10	n=15
k			
2	0.3848	0.5327	0.5715
3	0.2473	0.3952	0.4339
4	0.1403	0.2900	0.3287
5		0.2095	0.2482
6		0.1479	0.1867
7		0.1008	0.1396
8		0.0648	0.1025
9		0.0372	0.0760
10			0.0549
11			0.0388
12			0.0264
13			0.0170
14			0.0098

Probabilits des suites de beau temps "Mai" (Constantine).

	S.M		
	n=5	n=10	n=15
k			
2	0.3086	0.5280	0.6445
3	0.2162	0.4356	0.5521
4	0.1349	0.3543	0.4707
5		0.2826	0.3990
6		0.2194	0.3359
7		0.1638	0.2802
8		0.1148	0.2312
9		0.0716	0.1880
10			0.1480
11			0.1165
12			0.0869
13			0.0609
14			0.0380

Probabilités des suites de beau temps "Juin" (Constantine).

	S.M		
	n=5	n=10	n=15
k			
2	0.3551	0.5589	0.6436
3	0.2418	0.4456	0.5303
4	0.1467	0.3505	0.4352
5		0.2707	0.3555
6		0.2038	0.2885
7		0.1476	0.2324
8		0.1005	0.1852
9		0.0610	0.1457
10			0.1126
11			0.0847
12			0.0614
13			0.0418
14			0.0254

Probabilités des suites de beau temps "Septembre" (Constantine).

	S.M		
	n=5	n=10	n=15
k			
2	0.2190	0.2310	0.2314
3	0.0989	0.1110	0.1113
4	0.0411	0.0532	0.0535
5		0.0254	0.0257
6		0.0121	0.0124
7		0.0056	0.0060
8		0.0026	0.0029
9		0.0011	0.0014
10			0.0007
11			0.0003
12			0.0002
13			0.0001
14			0.0000

Probabili tés des suites de mauvais temps "Janvier" (Oran).

	S.M		
	n=5	n=10	n=15
k			
2	0.2571	0.2779	0.2788
3	0.1255	0.1463	0.1472
4	0.0561	0.0768	0.0777
5		0.0402	0.0410
6		0.0210	0.0216
7		0.0106	0.0114
8		0.0052	0.0060
9		0.0023	0.0032
10			0.0017
11			0.0009
12			0.0004
13			0.0002
14			0.0001

probabilités des suites de mauvais temps "Décembre" (Oran).

	S.M		
	n=5	n=10	n=15
k			
2	0.3701	0.5592	0.6281
3	0.2479	0.4371	0.5059
4	0.1482	0.3373	0.4061
5		0.2558	0.3246
6		0.1891	0.2580
7		0.1347	0.2036
8		0.0903	0.1591
9		0.0539	0.1228
10			0.0931
11			0.0689
12			0.0490
13			0.0329
14			0.0196

probabilités des suites de beau temps "Mars" (Oran).

	S.M		
	n=5	n=10	n=15
k			
2	0.3258	0.5427	0.6496
3	0.2263	0.4433	0.5501
4	0.1400	0.3569	0.4638
5		0.2820	0.3889
6		0.2170	0.3239
7		0.1605	0.2674
8		0.1115	0.2184
9		0.0690	0.1759
10			0.1389
11			0.1069
12			0.0791
13			0.0549
14			0.0340

probabilités des suites de beau temps "Mai" (Oran).

	S.M		
	n=5	n=10	n=15
k			
2	0.3028	0.5224	0.6415
3	0.2127	0.4323	0.5516
4	0.1400	0.3526	0.4718
5		0.2821	0.4013
6		0.2196	0.3389
7		0.1644	0.2836
8		0.1155	0.2347
9		0.0722	0.1914
10			0.1531
11			0.1192
12			0.0892
13			0.0627
14			0.0392

probabilites des suites de beau temps "Septembre" (Oran).

Enfin.il est tout à fait possible de réaliser une étude similaire pour toutes les stations météorologiques et les zones maritimes algériennes. Une extension au cas où il y a plus de deux états météorologiques donnera des résultats plus significatifs dans le cas où on dispose de méthodes de calcul des probabilités de suites catastrophiques.

1960,vol.4(3),pp.1-19.

[16]-L.A.Shepp,"A limit theorem concerning moving averages", Ann.Math. Statist.35,1964,pp.424-428.

[17]-Marcus,Pinsky,"On the domain of attraction of exp(-exp(-x))",J.of Math.Analysis and applications,1969,28,pp.440-449.

[18]-A.I.Kudish,D.Wolf,Y.Machlov,"A novel approach for calculating the monthly average daily fraction of diffuse solar radiation",Solar Energy, vol.28.N°3,1982,pp.181-186.

[19]-A.D.Barbour,G.K.Eagleson,"Poisson convergence for dissociated statistics",J.R.Statist.soc.B.46,1984,pp.397-402.

[20]-R.E.Barlow,F.Proschan,"Statistical theory of reliability and life testing",Holt.Rinehart and Winston,I.N.C.

[21]-Gansler 1972,Metrika 19,pp.115-130.

[22]-W.Feller, "An introduction to probability theory and its applications",vol.1,3rd edn.Wiley,New York,1967.