REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE MENTOURI - CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
ECOLE DOCTORALE – POLE DE CONSTANTINE

N° d'ordre : …………
N° de série : …………

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :
MAGISTER EN MATHEMATIQUES

OPTION
Processus Stochastiques

THEME

Modèles financiers avec sauts

Par :
ABADA NOUR EL HOUDA

Devant le jury :

Président	:	A. Benchetteh	Professeur	**Université Annaba**
Rapporteur	:	M. Boushaba	M.C	**Université Constantine**
Co-rapporteur	:	P. R. DE Fitte	Professeur	**Université Rouen**
Examinateur	:	M. Dakhmouche	M.C	**Université Constantine**
Examinateur	:	K. Khaledi	M.C	**Université Boumerdes**

Soutenu le : … … ………

REMERCIEMENTS

Avant tout, mes vifs remerciements, je les exprime à **Dieu** tout puissant.

Je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à l'égard de Monsieur: **Mahmoud Boushaba** maître de conférences à l'université de **Constantine**, pour sa fraîcheur d'esprit, pour leur conseils judicieux, pour l'infinie patience ainsi pour les conseils qu'il ma donné tout au long de ce travail.

A mon co-rapporteur Monsieur **Paul Renauld De Fitte** professeur à l'université de **Rouen** mes remerciements les plus sincères et ma reconnaissance pour l'aide qu'il ma accordée, durant la réalisation de ce travail.

Je suis également très honoré que Monsieur **A. Benchetteh** professeur à l'université de **Annaba** soit le président de jury de mon mémoire.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur **M. Dakhmouche** maître de conférences à l'université de **Constantine** et à Monsieur **K. Khaledi** maître de conférences à l'université de **Boumerdes** d'avoir accepté de juger ce travail et d'en être les examinateurs.

Pour finir, je ne voudrais pas oublier mes proches qui m'ont soutenu moralement, sans les nommer explicitement, je les remercie pour leur encouragement.

Table des matières

Introduction

La finance est un domaine particulièrement large, que l'on peut diviser en deux catégories : la finance d'entreprise (corporate finance) et la finance de marché (market finance). La finance d'entreprise utilise essentiellement des mathématiques simples alors que la finance de marché s'appuie sur des mathématiques complexes et génère de nombreux travaux mathématiques.

Les origines de la mathématisation de la finance moderne remontent à la thèse de Louis Bachelier intitulée « Théorie de la spéculation » et soutenu à la Sorbonne en 1900, cette approche fut oubliée durant près trois quarts de siècle, jusqu'en 1973 avec la parution des travaux de Black et Scholes. Ces travaux marquent d'une part la naissance des processus stochastiques à temps continu, et d'autre part celle des stratégies à temps continues pour la couverture de risque en finance.

Une des caractéristiques du modèle de Black et Scholes est que le prix de l'action est une fonction continue de temps, or certains évènements rares peuvent entraîner des variations brutales des cours. Pour mieux modéliser les risques associés à ces variations soudaines des prix de marché, on utilise les processus à trajectoires discontinues, dits « Processus de sauts ».

Le but de ce travail est justement l'étude de ces processus dits avec sauts afin de trouver l'évaluation et la couverture des produits dérivés. Pour cela, on va introduire ces notions : calcul stochastique, mouvement Brownien, processus de Lévy pour atteindre ce but.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Une introduction où on situe notre travail et son plan.

Le premier chapitre est consacré à la présentation nomenclature de la finance.

Dans le deuxième chapitre, on introduit les principales notions de calcul stochastique qui est une extension du calcul différentiel et intégrale classique, dans laquelle les processus à temps continu remplacent les fonctions, et les martingales jouent le rôle des constantes utilisées dans le modèle de Black et Scholes à temps continu, qu'on va l'étudié en détail au prochain chapitre.

Dans le troisième chapitre, après l'obtention de la notion d'arbitrage et la relation de parité call-put, on étudie le modèle de Black et Scholes à temps continu, où l'intégrale stochastique va jouer un rôle important dans cette modélisation, en particulier, pour obtenir des formules explicites des prix d'options européennes et une couverture parfaite.

Le quatrième chapitre est consacré au calcul stochastique avec sauts. Le processus de Lévy va jouer un rôle important du fait que ces trajectoires sont discontinues contrairement au mouvement Brownien. On montre que le processus de Lévy se décompose en deux parties, une partie martingale et une autre partie à variation bornée, qui n'est rien d'autre qu'une semi martingale dont on va introduire l'intégrale par rapport à celle-ci.

Dans le cinquième chapitre, on applique les notions du chapitre précédent à la finance qui repose sur des idées analogues à celles déjà présentées dans le cadre des modèles continus. En effet, on calcule les prix des options européennes par la méthode de transformée de Fourier et, on montre que la couverture n'est parfaite sauf si les sauts ont la même taille. Ensuite, on parlera du problème du smile.

Enfin, dans l'annexe, et pour permettre aux lecteurs de mieux comprendre ce travail, on le termine avec un petit lexique français - anglais, où on donne l'appellation des termes financiers en français (par rapport aux termes anglo-saxons).

Chapitre 1

Marché financier

La finance est un domaine particulièrement large, que l'on peut diviser en deux catégories : la finance d'entreprise (**corporate finance**) et la finance de marché (**market finance**). La finance d'entreprise utilise essentiellement des mathématiques simples alors que la finance de marché s'appuie sur des mathématiques complexes et génère de nombreux travaux mathématiques. Nous verrons dans ce chapitre que la notion fondamentale de la finance de marché est le risque et que les mathématiques produisent des outils efficaces de gestion de risque. Ces notion sont tirées essentiellement de [12].

Remarque 1 *Les termes anglo-saxons se sont largement imposés sur les marchés financiers. Nous préférerons souvent l'utilisation de ces termes plutôt que des termes français, moins utilisés.*

1.1 Marché financier

Définition 2 *Le marché financier est un lieu (parfois virtuel) où l'on achète et vend des titres financiers (ou bien actifs financiers).*

1.1.1 Actifs financiers

Les actifs financiers sont des contrats où les parties s'échangent des flux d'argent.

- Une **quantité donnée d'un actif financier** (action, obligation, indice boursier, devise, matière première, ou un autre produit dérivé), appelé **actif sous-jacent (underlying asset).**
- **Prix d'un titre financier (price) :** est le montant convenu entre les deux parties en échange du titre.
- **Maturité ou échéance** (Maturity) : c'est la date à laquelle l'échange doit avoir lieu.
- **Prix de livraison ou prix à terme (dettlement price or forward price) :**le prix auquel l'actif sous-jacent est échangé.

Les transactions peuvent être directes entre le **broker** et le client (**over the counter**) ou sur une place financière organisée telle qu'une bourse (**stock exchange**).

Une **bourse** est un marché financier institutionnel avec un règlement spécifique choisi de manière à améliorer les conditions des transactions.

1.1.2 Rôle des marchés financiers

Les principales caractéristiques d'un marché financier sont :

- La rencontre de deux contreparties (vendeurs et acheteurs).
- La cotation continue des produits financiers.
- L'élaboration de bonnes conditions pour les transactions, en prenant en compte les objectifs opposés des acteurs du marché.

1.1.3 Principaux marché

Il s'agit, par ordre de volumes négociés décroissants :

- **Marchés de taux d'intérêt,** c'est-à-dire les marchés de la **dette,** qu'il est d'usage de séparer en :

Marché monétaire pour les dettes à court terme (moins d'un, deux ou mêmes parfois trois ans à son émission).

Marché obligataire pour les dettes originellement à moyen ou long terme ;

- **Marché des changes,** ou **Forex,** où l'on échange des **devises** les unes contre les autres ;
- **Marchés d'actions,** c'est-à-dire des titres de propriété des entreprises ;
- Et enfin, par tradition, à la frontière avec les marchés organisés de **produits de base** (en anglais : **commodities**), **les marchés de deux métaux précieux, or et argent,** bien que ceux-ci soient de moins en moins monétisés et que leurs marchés soient en fait minuscules en regard de la taille désormais atteinte par les autres marchés.

1.1.4 Produit primaire

un produit primaire est un titre avec une rémunération indépendante de tout autre titre.

Il existe deux types de produits primaires : les actions et les obligations.

Obligation (bond)

L'obligation est un titre financier correspondant à un emprunt pendant un temps fixé dont le risque de défaut (**default risk)** est supposé inexistant lorsque l'obligation est émise par l'état, celle-ci est échangée sur les **marchés obligataires.**

Elle est vendue sur le marché primaire à un prix proche du **montant nominal (la somme empruntée)** puis elle est échangée sur le marché secondaire à un prix qui fluctue.

Une obligation est **déterminée** par :

- Une durée,
- Un taux d'intérêt.

Remarque 3 *Le taux d'intérêt d'une obligation est choisi en fonction du risque de faillite de l'institution. Ce risque est évalué grâce à des notations faites par des institutions indépendantes. Le prix d'une obligation dépend du montant nominal* $\boldsymbol{M}$*, de la date d'échéance, et des coupons.*

Coupons : ce sont des montants versés par l'emprunteur aux dates fixées à l'avance et qui correspondent à des intérêts sur le nominal.

D'autre terme, le revenu perçu par le détenteur d'une obligation est dit "**intérêt**" et d'une action est "**dividende**".

Obligation zéro-coupon (zero-coupon bond) : est une obligation qui ne verse pas des coupons donc à l'échéance, seul le nominal est remboursé.

Lorsqu'il y a suffisamment de zéro-coupons, il est possible de construire la courbe des taux de rentabilité annuelle en fonction des échéances, appelée courbe des **taux zéro-coupon** par terme **(zero-rate curve)**.

Lorsque cette courbe est **croissante,** cela signifie que le marché attend une rentabilité d'autant plus grande que l'échéance est lointaine, c'est à dire **le risque de taux est important.**

Au contraire, une courbe **décroissante** signifie que le marché anticipe **une baisse des taux.**

Une courbe **plate** n'existe jamais en pratique mais signifierait qu'un **taux d'intérêt constant** dans le temps.

On va considérer cette dernière comme hypothèse par la suite pour simplifier les modèles.

Action (share) :

Une action est un titre de propriété d'une entreprise qui n'est pas remboursable.

- Le prix d'une action est défini par sa cotation en bourse. Une action peut être vendue ou achetée à n'importe quel moment (pendant les heures d'ouverture de la bourse).
- Le détenteur d'une action devient un associé, proportionnellement au nombre de titres qu'il détient. De plus, l'actionnaire a des droits sur :
  - Le management,
  - Les bénéfices,
  - L'actif social.
- Les émetteurs des actions sont des entreprises. L'émission d'actions permet de recouvrir son investissement initial et ses bénéfices.
- Une action est un produit très volatile, lié à la fois aux performances de l'entreprise et à la situation du marché. Sa cotation est constamment réévaluée en fonction de l'offre et de la demande sur les marchés financiers.

1.1.5 Produit dérivé

Un produit dérivé (derivative) ou **actif contingent** est un titre dont la valeur dépend d'un autre titre, appelé l'actif sous-jacent.

Il existe une multitude de produits dérivés. Les principaux exemples sont

Les futures, les forwards et les options.

Contrat a terme (forward)

Est un contrat qui donne à l'investisseur l'obligation d'acheter ou de vendre un titre à un prix défini à l'avance pendant une période fixée.

Future (futur)

ce sont des contrats à terme négociables.
Il y a une petite différence entre les contrats à terme et les futures :

- Le forward est payé à maturité, alors que le futures est marqué au marché.
- Le contrat futur est échangé sur un marché organisé, le contrat à terme est de gré à gré.
- Les prix du future et celui du forward sont différents lorsque les taux sont stochastiques.

Option

Un tel titre est appelé **option d'achat (call)** ou **option de vente (put).**

Le sujet porte sur le prix d'une option. Nous nous concentrons maintenant sur ce produit. Ses principales caractéristiques sont

- **Le strike**, noté K : prix d'exercice de l'option, qui est choisi et fixé à l'instant initial.
- **Le prix de l'option** : prime de risque plus marge de l'intermédiaire.
- **La date d'expiration**, notée T : fin de la période, elle aussi fixée à l'instant initial.
- **La fonction payoff** : fonction qui détermine la transaction finale.
- Des contraintes annexes. Par exemple, si le sous-jacent passe un certain niveau, le contrat s'annule (**option barrière**).

Les options les plus simples, et généralement les plus liquides (les plus vendues), sont les **calls** et les **puts** de type européens ou américains. Ces options sont souvent appelées **options vanilles**. Les autres options, appelées **options exotiques** , sont généralement beaucoup plus difficiles à preciser.

Les options peuvent être utilisées :

- Soit en couverture de risque de baisse ou hausse,
- Soit pour spéculer à la baisse ou à la hausse du sous-jacent,
- Soit pour spéculer sur la volatilité.

On distingue deux grands types

Option européenne Contrat qui donne à son détenteur (celui qui achète le contrat) le droit, et non l'obligation , d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif financier (sous-jacent) à un prix fixé ou prix d'exercice (strike price) à une date fixée à l'avance (maturité).

Option américaine Contrat qui donne à son **détenteur le droit**, non l'obligation, d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif financier à un prix et **jusqu'a une date fixé** à l'avance.

Ce droit lui même s'achète ou se vend, cela sur un marché d'options (une bourse spécialisée, ou au gré à gré), contre un certain prix, appelé **prime** en français et **premium** en anglais.

1.1.6 Théorie du portefeuille

Un portefeuille : est un ensemble de titres (actions, obligations,...) détenu par un investisseur.

Les principales problématiques de la gestion d'un portefeuille sont :

- Comment minimiser le risque et maximiser le rendement ?
- Comment calculer le rendement espéré associé à un risque ?
- Quelle est la performance d'un portefeuille ?

Pour simplifier l'analyse, nous prenons un marché avec les hypothèses suivantes :

- Le marché est sans arbitrage.
- Les brokers ont un comportement rationnel.
- Il existe une unique loi de probabilité qui explique les comportements futurs des marchés financiers.

On peut considérer que les marchés en dehors de ces hypothèses sont des cas particuliers.

Hypothèse de non arbitrage

L'une des hypothèses fondamentales des modèles usuels est qu'il n'existe aucune stratégie financière permettant, pour un coût initial nul, d'acquérir une richesse certaine dans une date future. Cette hypothèse est appelée **absence d'opportunités d'arbitrage (A.O.A)**, et est justifiée par l'existence d'**arbitragistes**, acteurs sur les marchés dont le rôle est de détecter ce type d'opportunités et d'en profiter. Ceux-ci créent alors une force qui tend à faire évoluer le prix de l'actif vers son prix de non-arbitrage.

Il n'existe pas beaucoup d'arbitrages sur les marchés développés. De plus, si un arbitrage apparaît, les **traders** prennent avantage de celui-ci et donc il disparaît.

Arbitrage et prix unique : dans le modèle de Black- Scholes dont nous parlerons avec détails au chapitre 3, le prix et la stratégie de couverture sont uniques. L'unicité est garantie par l'absence d'arbitrage sur les marchés. Illustrons ce résultat à travers le prix d'un call européen. Dans le modèle de Black-Scholes, une option est sans risque puisque la stratégie de couverture élimine complètement le risque de l'option.

la valorisation d'une option dépend ainsi principalement des éléments suivants :

1) **du sous-jacent,** en particulier.
2) **de son prix.**
3) **de la volatilité de ce prix.**
4) **de la durée jusqu'à l'échéance.**
5) **des taux d'intérêt.**

Marché viable : le marché est viable s'il y a une absence d'opportunité d'arbitrage.

Hypothèse de complétude des marchés

Une autre hypothèse, beaucoup plus remise en question, est que tout flux à venir peut être répliqué exactement, et quel que soit l'état du monde, par un portefeuille d'autres actifs bien choisis. Les modèles ne comprenant pas les hypothèses de non arbitrage et de complétude des marchés sont dits modèles de **marchés imparfaits**.

Probabilité martingale

Une des conséquences des hypothèses de non arbitrage et de complétude des marchés est l'existence et l'unicité à équivalence près d'une mesure de probabilité dite **probabilité martingale** ou « **probabilité risque-neutre** » telle que le processus de prix des actifs ayant une source de risque commune est une martingale sous cette probabilité. Cette probabilité peut s'interpréter comme celle qui régirait le processus de prix des sous-jacents de ces actifs si l'espérance du taux de rendement de ceux-ci était le taux d'intérêt sans risque (d'où le terme risque-neutre : aucune prime n'est attribuée à la prise de risque).

Valorisation (Evaluation)

La valorisation (**pricing**) d'un titre financier est l'évaluation de sa valeur, ne pas "mettre en exploitation" ou bien à "augmenter la valeur" comme l'indiquent les dictionnaires, mais simplement à évaluer.

La notion d'arbitrage fournit un premier moyen de le faire.

Le problème d'évaluation des produits dérivés :

L'**évaluation** (on dit aussi «valorisation») des produits dérivés se ramène souvent au calcul du prix aujourd'hui d'un actif dont on ne connaît le prix qu'à une date future. Il se ramène donc au calcul d'une **espérance conditionnelle.**

Valorisation par absence d'opportunité d'arbitrage

Valorisation des options la valorisation des options et moins aisée que celle des contrat à terme dont la valeur pouvait être déterminée à partir d'un raisonnement par arbitrage.

Par **A.O.A** la valeur d'une option est toujours supérieure à celle du contrat à terme correspondant puisque c'est le cas à l'échéance.

1.1.7 Stratégie de couverture

- L'**achat d'un call (long call**) permet de se prémunir contre une hausse éventuelle du sous-jacent.
- De même, le détenteur du sous-jacent pourra se prémunir contre une baisse de celui-ci en **achetant un put (long put**).

Dans ce cas, cette position de l'agent est une stratégie de couverture du sous-jacent.

- L'achat d'un call ou la **vente d'un put (short put**) peuvent également être des stratégies de spéculation à la hausse du sous-jacent.
- De même, la **vente d'un call (short call)** ou l'achat d'un put sont des stratégies plus complexes, par exemple l'anticipation d'une variation du sous-jacent dans un sens indéterminé (à la hausse ou à la baisse) peut conduire à acheter simultanément un call et un put à la monnaie c'est à dire le prix d'exercice est égale au prix de marché actuel.

Donc, la **couverture (hedging)** est une protection contre le risque généré par une position. les notion et les définitions de ce chapitre sont tirées de [3].

Chapitre 2

Calcul stochastique dans le cas continu

Dans ce chapitre on va donner quelques notions mathématiques qui seront utiles dans le prochain chapitre

les résultats de cette partie se trouve dans plusieurs ouvrages généraux, "par exemple [9]".

Filtration

On appelle filtration sur $(\Omega, \mathcal{F})$ toute famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de sous tribus $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_T$.

A chaque processus $(X_t)_{t\geq 0}$ on peut associer une filtration : $\forall t \geq 0 \quad \mathcal{F}_t = \sigma\left(X_u : 0 \leq u \leq t\right)$.

La suite $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est appelée filtration naturelle de $(X_t)_{t\geq 0}$ si elle est la plus petite filtration formée de tribus complète à laquelle $(X_t)_{t\geq 0}$ est adapté.

Processus adapté (ou non anticipatif)

On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$ est adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable pour tout $t \geq 0$.

Temps d'arrêt

Définition 4 *On dit qu'une v.a τ à valeurs dans $[0, +\infty]$ est un temps d'arrêt si $\forall t \in [0, +\infty[$ $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

On dit que τ un temps d'arrêt fini si : $\tau < +\infty$ p.s.

Proposition 5 1) *Si S et T sont des temps d'arrêt, et si $A \in \mathcal{F}_S$, alors $A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T$.*

2) *Si $S \leq T$, alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.*

3) *Si S et T sont des temps d'arrêt, alors $\mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{S\wedge T}$.*

4) *Si T est un temps d'arrêt, alors :*

$$\mathcal{F}_T = \sigma\left(A \cap \{n \leq T\}, A \in \mathcal{F}_n\right)$$

5) *Si T et S sont des temps d'arrêt, alors la variable X_T définie par :*

$$X_{T(\omega)} = X_{T(\omega)}(\omega)\, 1_{T<\infty} = \sum_n X_n 1_{T=n}$$

est $\mathcal{F}_T$ -mesurable.

Processus prévisible

Un processus (X_t) est prévisible si X_0 est $\mathcal{F}_0$- mesurable, et que, pour tout $t \geq 1$, X_t est $\mathcal{F}_{t-1}$- mesurable.

Processus prévisible simple (ou élémentaire)

Définition : un processus stochastique $(\phi_t)_{t\in[0,T]}$ est dit un processus prévisible simple s'il est représenté comme suit :

$$\phi_t = \phi_0 1_{t=0} + \sum_{i=1}^{n} \phi_i 1_{]T_i,T_{i+1}]}(t)$$

où $0 = T_0 < T_1 < ... < T_n < T_{n+1} = T$ sont des temps d'arrêt, et toute v.a ϕ_i est bornée et $\mathcal{F}_{T_i}-$mesurable.

2.1 Mouvement Brownien

Le mouvement Brownien servira de base pour la construction de la plupart des modèles d'actifs financiers.

Définition 6 *On appelle mouvement Brownien un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ à valeurs réelles, qui est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues.*

Le mouvement Brownien peut être vu comme limite de marches aléatoires sur des pas de temps de plus en plus courts.

Théorème 7 ***"Caractérisation du mouvement Brownien"***
Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien si et seulement s'il est un processus gaussien continu centré de fonction de covariance $cov(X_s, X_t) = s \wedge t$.

2.1.1 Mouvement Brownien standard

Soit X un processus stochastique, on dit que X est un mouvement Brownien standard si :
$X_0 = 0 \quad P$ p.s ; $E(X_t) = 0 \quad ; E\left(X_t^2\right) = t$.
Dans ce cas, la loi de X_t est une loi normale

Définition 8 *On appelle $\mathcal{F}_t$- mouvement Brownien un processus stochastique à valeurs réelles et à trajectoires continues qui vérifie*
- Pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$- mesurable.
- Si $s \leq t$, $X_t - X_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s$.
- Si $s \leq t$, la loi de $X_t - X_s$ est identique à celle de $X_{t-s} - X_0$.

2.1.2 Mouvement Brownien géométrique

Le **mouvement Brownien géométrique** est la solution de l'équation différentielle stochastique linéaire à coefficients constants :

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

où W_t un mouvement Brownien standard.

2.2 Martingales

Définition 9 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration de cet espace. Une famille adaptée $(M_t)_{t\geq 0}$ de variables aléatoires intégrables, (c'est à dire : $E(|M_t|) < \infty$ pour tout t) est :*

- Une martingale si, pour tout $s \leq t$, $E(M_t/\mathcal{F}_s) = M_s$.

- une sur martingale si, pour tout $s \leq t$, $E(M_t/\mathcal{F}_s) \leq M_s$.

- une sous martingale si, pour tout $s \leq t$, $E(M_t/\mathcal{F}_s) \geq M_s$.

Remarque 10 *On déduit que,*

- Si $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale, alors : $E(M_t) = E(M_0)$, pour tout t.

- X_t est une martingale si et seulement si : $\mu = 0$

2.2.1 Mouvement Brownien et martingales

Proposition 11 *Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard alors :*

1) X_t est une $\mathcal{F}_t$- martingale.

2) $X_t^2 -$ X_t est $\mathcal{F}_t$- martingale.

3) $exp(\sigma X_t - \frac{\sigma^2}{2}t)$ est $\mathcal{F}_t$- martingale.

Théorème 12 *"**théorème d'arrêt**" Si $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale continue par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, et si τ_1, τ_2 sont deux temps d'arrêt tels que*

$\tau_1 \leq \tau_2 \leq K$, K une constante réelle finie,

alors M_{τ_2} est intégrable et $E(M_{\tau_2}/\mathcal{F}_{\tau_1}) = M_{\tau_1}$ P p.s.

2.2.2 Probabilités équivalentes

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité. Une probabilité Q sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est dite absolument continue par rapport à P si :

$$\forall A \in \mathcal{F} : P(A) = 0 \Longrightarrow Q(A) = 0.$$

Théorème 13 *Q est absolument continue par rapport à P si et seulement si, il existe une variable aléatoire Z à valeurs positives ou nulles sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que :*

$$\forall A \in \mathcal{F} : Q(A) = \int_A Z(\Omega)\, dP(\Omega).$$

Z est appelée densité de Q par rapport à P notée $\dfrac{d(Q)}{d(P)}$.

2.3 Théorème de Girzanov

Théorème 14 *Soit* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, P\right)$ *un espace probabilisé dont la filtration est la filtration naturelle d'un mouvement Brownien standard* $(W_t)_{0\leq\ t\leq T}$*, et soit* $(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$ *un processus adapté vérifiant* $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$ *p.s tel que le processus* $(L_t)_{0\leq t\leq T}$ *défini par :*

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right),$$

soit une $\mathcal{F}_t-$*martingale, Alors il exist une probabilité* $\mathbb{P}^{(L)}$ *de densité* L_t *équivalente à* $\mathbb{P}$ *sous laquelle le processus* $(B_t)_{0\leq t\leq T}$ *défini par*

$$B_t = W_t - \int_0^t \theta_s ds$$

est un $\mathcal{F}_t-$*mouvement Browien standard.*

2.4 Représentations des martingales Browniennes

Soit $(M_t)_{0\ \leq\ t\ \leq\ T}$ une martingale de carré intégrable, par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{0\leq\ t\leq T}$ la filtration naturelle de B_t, il existe un processus adapté $(H_t)_{0\leq\ t\leq\ T}$ tel que $E\left(\int\limits_0^T H_s^2 ds\right) < +\infty$ et

$$\forall t \in [0, T] \qquad M_t = M_0 + \int\limits_0^t H_s dB_s \quad p.s$$

Remarque 15 *Cette présentation n'est possible que pour les martingales de la filtration naturelle du mouvement Brownien.*

2.5 Intégrale stochastique et calcul d'Itô

2.5.1 Construction de l'intégrale stochastique

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$- mouvement Brownien standard sur$\left(\Omega, \mathcal{F}\ , (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$.

Définition 16 *L'intégrale stochastique d'un processus élémentaire* ϕ *est alors, un processus continu* $\left(I(\phi)_t\right)_{t\in[0,T]}$ *défini par*

$$I(\phi)_t = \sum_{1\leq i\leq k} \phi_i \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right) + \phi_{k+1}\left(W_t - W_{t_k}\right)$$

$I(\phi)_t$ *peut s'écrire comme suit*

$$I(\phi)_t = \sum_{1\leq i\leq k} \phi_i \left(W_{t_i\wedge t} - W_{t_{i-1}\wedge t}\right)$$

2.5.2 Formule d'isométrie d'une intégrale Brownienne

Proposition 17 *Si* $(\phi_t)_{t\in[0,T]}$ *un processus prévisible vérifi* $E\left(\int\limits_0^t \phi_s^2 dt\right) < \infty$ *alors*

1) $\left(\int\limits_0^t \phi_s dW_s\right)_{t\in[0,T]}$ *est une martingale de carré intégrable.*

2) $E\left(\int\limits_0^t \phi_s dt\right) = 0$

3) $E\left(\left(\int\limits_0^t \phi_s dW_s\right)^2\right) = E\left(\int\limits_0^t \phi_s^2 ds\right)$ *appelée **formule d'isométrie**.*

2.5.3 Formule d'Itô

Définition 18 *Si* X_t *est un processus d'Itô de la forme :*

$$X_t = X_0 + \int\limits_0^t K_s ds + \int\limits_0^t \phi_s dW_s$$

Où : X_0 *est* $\mathcal{F}_0-$*mesurable,* K *et* ϕ *deux processus non anticipatifs tels que*

$$\int\limits_0^T |K_s|\, ds < \infty \quad et \quad \int\limits_0^T |\phi_s|^2\, ds < \infty \quad p.s.$$

alors, la formule d'Itô s'écrit pour toute fonction
$f : [0, \infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$(t, x) \rightarrowtail f(t, x)$
telle que $f \in \mathcal{C}^{1,2}$*, et tout processus d'Itô* X *sous la forme suivante*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int\limits_0^t f_s^{'}(s, X_s)\, ds + \int\limits_0^t f_x^{'}(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int\limits_0^t f_{xx}^{''}(s, X_s)\, d\langle X, X\rangle_s$$

Proposition 19 *Soit* $dX(t) = a(t)\, dt + b(t)\, dW(t)$, *si* $f(x, t) : \mathbb{R} \times [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$*, fonction de classe* $\mathcal{C}^2$*, alors le processus* $f(X(t), t)$ *admet une différentielle stochastique donnée par*

$$\begin{aligned} df(X(t), t) \quad = \quad & \left[\frac{\partial f}{\partial t}(X(t), t) + a(t)\frac{\partial f}{\partial x}(X(t), t) + \frac{1}{2}b^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X(t), t)\right] dt + \\ & b(t)\frac{\partial f}{\partial x}(X(t), t)\, dW(t) \end{aligned}$$

2.5.4 Variation quadratique

La variation quadratique d'un mouvement Brownien est résumée dans le tableau suivant :

$[d., d.]$	ds	dW_s
ds	0	0
dW_s	0	ds

– Si $B_t = \sigma W_t$ où W est un processus de Brownien standard, alors : $[B, B]_t = \sigma^2 t$.

Chapitre 3

Modèle de Black et Schols à trajectoires continues

Les raisonnements par arbitrage fournissent des nombreuses relations intéressantes, mais ils ne sont pas suffisants pour obtenir les formules des prix. Pour cela, on a besoin de modéliser l'évolution des cours d'une façon précise.

Le problème traité par **Black** et **Scholes** est l'évaluation et la couverture d'une option de type européen (call ou put) sur une action ne donnant pas de dividendes. Black et scholes ont proposé un modèle conduisant à une formule explicite pour le prix d'un call (européen) sur une action ne distribuant pas de dividendes et à une stratégie de gestion qui permet au vendeur de l'option d'éliminer totalement le risque (c'est à dire se couvrir).

Dans la suite, on considère un marché d'espace de scénario $(\Omega, \mathcal{F})$, où $\mathcal{F} = \mathcal{F}_t$ est la filtration historique. $(S_t)_{t\in[0,T]}$ est l'ensemble des cours d'actions (actifs risqués) à la date t et d' échéance T. $\left(S_t^0\right)_{t\in[0,T]}$ est l'ensemble des cours d'actifs sans risque $S_t^0 = \exp(rt)$ où r est le taux d'intérêts.
Le facteur de discontinuité est donné par :

$$B(t,T) = \exp[-r(T-t)]$$

- L'option call peut être vue comme un actif de pay-off :

$$H(S_T) = (S_T - K)_+ = \max(S_T - K, 0)$$

et son prix est donné par :

$$C_t(T,K) = e^{-r(T-t)} E^Q \left[(S_T - K) \backslash \mathcal{F}_t\right]$$

- De même l'option put peut être vue comme un actif de pay-off :

$$H(S_T) = (K - S_T)_+ = \max(K - S_T, 0)$$

et son prix est donné par :

$$P_t(T,K) = e^{-r(T-t)} E^Q \left[(K - S_T) \backslash \mathcal{F}_t\right]$$

- La valeur $(S_T - K)$ (resp $(K - S_T)$) est la valeur intrinsèque de l'option, et $C_t(T,K) - (S_T - K)_+$ (resp $P_t(T,K) - (K - S_T)_+$) est sa valeur de temps.

En l'absence d'opportunité d'arbitrage, on a la relation de parité :

$$C_t - P_t = S_t - K \exp\left[-r\left(T-t\right)\right]$$

- On désigne $\mathcal{M}\left(S\right)$ l'ensemble des mesures de probabilité $Q \sim P$ telle que $\tilde{S}_t$ la valeur actualisée de S_t est $Q-$martingale. E^Q est l'espérance sous Q.
- La valeur discontinue d'un portefeuille V_t est donnée par : $\tilde{V}_t = V_t \backslash S_t^0$ tel que $S_t^0 = \exp\left(rt\right).$

On désigne par $\mathcal{S}$, l'ensemble des stratégies prévisibles simple

$$\mathcal{S} = \left\{ \phi : \text{càglàd prévisible, et } \mathrm{E}\left| \int_0^T \phi_t d\tilde{S}_t \right|^2 < \infty \right\}$$

- Et $\mathcal{A}$ l'ensemble de pay-off terminale atteignable par n'importe quelle stratégie

$$\mathcal{A} = \left\{ V_0 + \int_0^T \phi_t dS_t, V_0 \in \mathbb{R}, \phi \in \mathcal{S} \right\}$$

- Le processus stochastique $\left(G_t\left(V_t\right)\right)_{t\in[0,T]}$ est dit processus de gain de la stratégie ϕ et :

$$G_t\left(\phi\right) = \phi_0 S_0 + \sum_{i=1}^{n} \phi_i \left(S_{T_{i+1}\wedge t} - S_{T_i \wedge t}\right)$$

d'autre part : le portefeuille a une valeur $V_t = \phi_t S_t$ au temps t, et :

$$C_t\left(\phi\right) = V_t\left(\phi\right) - G_t\left(\phi\right) = \phi_t S_t + \int_0^t \phi_u dS_u.$$

- Cette différence représente **le coût de la stratégie** au temps t. $C_t\left(\phi\right)$ est appelé **processus de coût** associé à la stratégie ϕ.

Si la stratégie est autofinancée $V_t\left(\phi\right) = G_t\left(\phi\right).$

3.1 Notion d'arbitrage et la relation de parité call-put

L'hypothèse de base, retenue dans tous les modèles, est l'absence d'opportunité d'arbitrage, c'est à dire qu'il est impossible de faire des profits sans prendre de risques.

A partir de cette hypothèse, on peut établir des relations entre les prix des call et des put européen de même échéance T, de même prix d'exercice K, sur une action de cours S_t à l'instant t, et un taux de placer ou d'emprunter de l'argent est constant égale r.

On désigne par C_t et P_t les prix respectifs du call et du put à l'instant t.

Par l' A.O.A, pour tout instant $t < T$, on a la relation suivante appelée "**relation de parité call-put**" :

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Profit sans risque si on a, par exemple :

$$C_t - P_t > S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

A l'instant t, on achète une action et un put et on vend un call. Cela dégage un profit net égal à

$$C_t - P_t - S_t$$

Si cette somme est positive, on la place au taux r jusqu'à la date T, on obtient deux cas :

- $S_T > K$: donc, le call est exercé, on livre l'action, on encaisse la somme K et on solde l'emprunt, de sorte qu'on se retrouve avec une richesse égale à :

$$K + e^{-r(T-t)} (C_t - P_t - S_t) > 0$$

- $S_T \leq K$: donc, on exerce son put et on solde comme précédemment, de sorte qu'on se retrouve avec une richesse égale à :

$$K + e^{-r(T-t)} (C_t - P_t - S_t)$$

Dans les deux cas, on a réalisé un profit positif sans mise de fond initiale, qui est un exemple d'arbitrage.

3.2 Description du modèle de Black et Scholes

Nous supposons que nous avons un espace de probabilité avec une filtration $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ **tel que :** $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}, \mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2 \leq ....\mathcal{F}_T$**,** $T < \infty$ qui est une filtration naturelle du mouvement Brownien standard B_t.

Le modèle proposé pour décrire l'évolution des cours est un modèle à temps continu avec un actif risqué (une action de prix S_t à l'instant t) et un actif sans risque (de prix S_t^0 à l'instant t).

- On suppose que l'évolution de S_t^0 est régie par l'équation différentielle :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt \quad S_0^0 = 1$$

  de sorte que $S_t^0 = e^{rt}$ pour $t \geq 0$.

Cela signifie que le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque est constant égale à r.

- On suppose que l'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle Stochastique suivante :

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dB_t) \quad S_0 > 0 \tag{3.1}$$

Où μ , σ , S_0 sont des constantes.

(B_t) : un mouvement Brownien standard.

μ : est un coefficient de croissance (dérivé).

σ : est un coefficient de volatilité.

S_0 : est une valeur initiale pour S_t.

Le modèle étudié sur l'intervalle $[0, T]$ où T est la date d'échéance de l'option à étudier.

Remarque 20 *L'hypothèse selon laquelle le cours d'une action est un mouvement Brownien n'était pas réaliste car le prix de l'action ne peut pas prendre des valeurs négatives. D'où l'idée de modéliser par un mouvement Brownien géométrique :*

La solution de $dS_t = S_0 \exp(\mu dt + \sigma dB_t)$ est :

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t\right)$$

où S_0 est le cours observé à la date 0.

La loi de S_t est une loi log-normale (son logarithme suit une loi normale).

Le processus (S_t) vérifie une équation de type (3.1) sauf si son logarithme est un mouvement Brownien.

3.2.1 Stratégie financière

Une stratégie financière de gestion est définie par un processus $\phi = \{\phi_t\}_{0\leq t\leq T} = \left((\phi_t^0, \phi_t)\right)_{0\leq t\leq T}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, adapté à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ du mouvement brownien.

Les composantes de ϕ donnent les quantités d'actif sans risque ϕ_t^0 et l'actif risqué ϕ_t à chaque instant t, à cet instant la valeur du portefeuille est donnée par :

$$V_t(\phi) = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t$$

3.2.2 Stratégie autofinancée

La condition d'autofinancement au temps continu est donnée par :

$$dV_t(\phi) = \phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t dS_t$$

pour que cette égalité ait un sens, on supposera que :

$$\int_0^T |\phi_t^0|\, dt < \infty \quad p.s \quad \text{et} \quad \int_0^T \phi_t^2 dt < \infty \quad p.s$$

Proposition 21 *Une stratégie autofinancée définie par un couple* $\phi = \left((\phi_t^0, \phi_t)\right)_{0\leq t\leq T}$ *de processus adaptés vérifie :*

1) $\int_0^T |\phi_t^0|\, dt + \int_0^T \phi_t^2 dt < \infty \quad p.s$

2) $\phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t = \phi_0^0 S_0^0 + +\phi_0 S_0 + \int_0^t \phi_u^0 dS_u^0 + \int_0^t \phi_u dS_u$ *p.s pour tout* $t \in [0,T]$

Notons $\check{S}_t = e^{-rt} S_t$ est le cours actualisé de l'actif risqué de sorte que $\check{S}_t^0 = 1$.

Proposition 22 *Soit* $\phi = \left((\phi_t^0, \phi_t)\right)_{0\leq t\leq T}$ *un processus adapté à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$, *et qui vérifie la condition* (1) *ci-dessus.*

On pose :

$$V_t(\phi) = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t$$

et

$$\hat{V}_t(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi)$$

est la valeur actualisée du portefeuille à l'instant t.

alors ϕ définit une stratégie autofinancée si et seulement si :

$$\hat{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \phi_u d\hat{S}_u \quad p.s \tag{3.2}$$

Preuve Supposons la stratégie ϕ autofinancée. D'après la formule d'Itô :

$$d\hat{V}_t(\phi) = -r\hat{V}_t(\phi)\,dt + e^{-rt}dV_t(\phi)$$

Notons que $d\langle e^{-rt}, V_t(\phi)\rangle$ est nul.

on déduit :

$$\begin{aligned} d\hat{V}_t(\phi) &= -re^{-rt}\left(\phi_t^0 e^{rt} + \phi_t S_t\right)dt + e^{-rt}\phi_t^0 de^{rt} + e^{-rt}\phi_t dS_t \\ &= \phi_t\left(-re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t\right) \\ &= \phi_t d\hat{S}_t \end{aligned}$$

Réciproquement, soit ϕ une stratégie vérifiant :

$$dV_t(\phi) = \phi_t d\hat{S}_t$$

Aussi équivalente à l'égalité (3.2)

$$dV_t(\phi) = d\left(S_t^0\hat{V}_t(\phi)\right) = d\left(e^{rt}\hat{V}_t(\phi)\right)$$

et comme $\quad d\hat{S}_t = e^{-rt}dS_t - r\hat{S}_t dt$

on trouve $\quad dV_t(\phi) = \phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t dS_t$

Cela signifie que la stratégie $(\phi)_t$ est autofinancée. ■

Dans notre étude, on va chercher une loi de probabilité équivalente à la probabilité initiale sous laquelle les prix actualisés des actifs seront des martingales, puis on va construire des stratégies autofinancées simulant les options.

3.2.3 Probabilité martingale

On va montrer qu'il existe une probabilité équivalente à la probabilité initiale P, sous laquelle le prix actualisé $\hat{S}_t = e^{-rt}S_t$ est une martingale sous Q.

On a

$$\begin{aligned} d\hat{S}_t &= -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t \\ &= \hat{S}_t\left((\mu - r)\,dt + \sigma dB_t\right) \end{aligned}$$

posons

$$W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t = B_t + \theta t$$

d'ou :

$$d\hat{S}_t = \hat{S}_t \sigma dW_t \tag{3.3}$$

D'après le théorème de Girsanov : Il existe $Q \sim P$ tel que W_t est un mouvement Brownien standard sous Q et on a

$$\frac{dQ/\mathcal{F}_t}{dP/\mathcal{F}_t} = e^{-\frac{1}{2}\theta^2 t + \theta B_t}$$

On déduit que $\left(\hat{S}_t\right)$ est une martingale, et que

$$\hat{S}_t = \hat{S}_0 \exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right)$$

3.2.4 Valorisation

Option européenne

Soit H une variable aléatoire $\mathcal{F}_t-$mesurable, positive, et de la forme $f(S_T)$ telle que : $f(x) = (x-K)_+$dans le cas d'un call, et $f(x) = (K-x)_+$ dans le cas d'un put.

On va définir la valeur de l'option en la simulant.

Définition 23 *Une stratégie $\phi = \left(\phi_t^0, \phi_t\right)_{0 \leq t \leq T}$ est admissible si elle est autofinancée et si la valeur actualisée $\hat{V}_t(\phi) = \phi_t^0 + \phi_t \hat{S}_t$ du portefeuille correspondant est positive et telle que $\sup\limits_{t \in [0,T]} \hat{V}_t$ est de carré intégrable sous Q pour tout t.*

Option simulable (ou réplicable)

Pour que H soit simulable, il faut que H soit de carré intégrable sous Q. Les cas du call et put sont simulables puisque $E^*\left(S_T^2\right) < \infty$.

Théorème 24 *Dans le modèle de Black et Scholes, toute option est définie par une variable aléatoire H, positive, $\mathcal{F}_T-$ mesurable et de carré intégrable sous la probabilité Q est simulable et la valeur à l'instant t de tout portefeuille simulant est donnée par :*

$$V_t = E^Q\left(e^{-r(T-t)} H/\mathcal{F}_t\right)$$

Preuve Supposons qu'il existe une stratégie admissible $\left(\phi^0, \phi\right)$ simulant l'option .La valeur du portefeuille $\left(\phi_t^0, \phi_t\right)$ à l'instant t et :

$$V_t = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t$$

par hypothése $H = V_T$;

Soit $\hat{V}_t = e^{-rt} V_t$, la valeur actualisée du portefeuille est :

$$\begin{aligned} \hat{V}_t &= V_0 + \int_0^t \phi_u d\hat{S}_u \\ &= V_0 + \int_0^t \phi_u \sigma \hat{S}_u dW_u \end{aligned}$$

$\sup\limits_{t\in[0,T]} \hat{V}_t$ est de carré intégrable, sous la probabilité Q le processus $\left(\hat{V}_t\right)$ est défini par un intégrale stochastique par rapport à (W_t) et sous Q, définit une martingale de carré intégrable. D'où

$$\hat{V}_t = E^Q\left(\hat{V}_t/\mathcal{F}_t\right)$$

par conséquent :

$$V_t = E^Q\left(e^{-r(T-t)}H/\mathcal{F}_t\right)$$

Il reste à montrer que l'option est bien simulable, on cherche des processus $\left(\phi_t^0\right)$ et (ϕ_t) définissent une stratégie admissible et tel que :

$$\phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t = E^Q\left(e^{-r(T-t)}H/\mathcal{F}_t\right)$$

Le processus $M_t = E^Q\left(e^{-rT}H/\mathcal{F}_t\right)$, sous la probabilité Q, est une martingale de carré intégrable.

D'après le théorème de représentation des martingales Browniennes : il existe un processus adapté $(K_t)_{0\leq t\leq T}$ tel que $E^Q\left(\int\limits_0^T K_s^2 ds\right) < \infty$ et

$$\forall t \in [0,T] : \quad M_t = M_0 + \int\limits_0^t K_s dW_s \qquad p.s$$

La stratégie $\phi = \left(\phi_t^0, \phi_t\right)$ avec $\phi_t = K_t/\sigma\hat{S}_t$ et $\phi_t^0 = M_t - \phi_t\hat{S}_t$, alors ϕ est une stratégie autofinancée, dont la valeur à l'instant t est donnée par :

$$V_t(\phi) = e^{rt}M_t = E^Q\left(e^{-r(T-t)}H/\mathcal{F}_t\right)$$

Il est clair que $V_t(\phi)$ est une variable aléatoire positive, et que $\sup\limits_{t\in[0,T]} V_t(\phi)$ est de carré integrable sous Q et $V_t(\phi) = H$.

On a donc bien une stratégie admissible simulant H. ■

3.2.5 Valeurs des options vanilles

Calcul explicite :

Lorsque la variable aleatoire H est de la forme $H = f(S_T)$, on peut expliciter la valeur V_t de l'option à l'instant t comme une fonction de t et S_t :

$$S_T = e^{rt}\hat{S}_T = \left(S_t e^{-rt}\right)e^{rt}\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma(W_T - W_t)\right)$$

$$\hat{S}_T = \hat{S}_t \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma(W_T - W_t)\right)$$

donc :

$$S_T = S_t \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)\right\}$$

On a, en effet :

$V_t = E^Q\left[e^{-r(T-t)}\left(f\left(S_T\right)/\mathcal{F}_t\right)\right]$
$V_t = E^Q\left(e^{-r(T-t)}f\left(S_t \exp\left\{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\left(W_T-W_t\right)\right\}\right)\right)$

La variable aléatoire S_t est $\mathcal{F}_t-$ mesurable, sous Q, $W_T - W_t$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$ donc $V_t = F\left(t, S_t\right)$.

$W_T - W_t$ varie comme $\sqrt{T-t} * y$ tel que y suit la loi $N\left(0,1\right)$, implique que $W_T - W_t$ est une gaussienne centrée de variance $T-t$.

Avec :

$$\begin{aligned}
F\left(t,S_t\right) &= E^Q\left(e^{-r(T-t)}f\left(x\right)\exp\left\{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\left(W_T-W_t\right)\right\}/\mathcal{F}_t\right) \\
&= e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}\right\}\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy
\end{aligned}$$

On a $F\left(t,S_t\right) = E^Q\left(e^{-r(T-t)}f\left(S_T\right)/\mathcal{F}_t\right)$

Valeur du call européen

Dans ce cas, on note que $F\left(t,S_t\right) = C\left(t,S_t\right)$où $f\left(x\right) = \left(x-K\right)_+$ d'où :

$$\begin{aligned}
C\left(t,S_t\right) &= e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}f\left(x\exp\left\{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}\right\}\right)dy \\
&= E^Q\left(e^{-r(T-t)}\left(x\exp\left\{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}\right\}-K\right)_+\right)
\end{aligned}$$

Posons $\tau = T-t$ et g est une gaussienne centée reduite.

$$C\left(t,S_t\right) = E\left(x\exp\left\{\sigma\sqrt{\tau}g-\frac{\sigma^2}{2}\right\}-Ke^{-r\tau}\right)$$

Comme $x\exp\left\{\sigma\sqrt{\tau}g-\frac{\sigma^2}{2}\right\}-Ke^{-r\tau}\geq 0$ alors

$$g \geq \frac{\ln\frac{K}{x}-r\tau+\frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

posons

$$d_1 = \frac{\ln\frac{K}{x}-r\tau+\frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

d'où : $g \geq -d_2$, avec ces notations on obtient

$$\begin{aligned}
C\left(t,S_t\right) &= E\left(\left(x\exp\left\{\sigma\sqrt{\tau}g-\frac{\sigma^2}{2}\right\}-Ke^{-r\tau}\right)1_{\{g+d_2\geq 0\}}\right) \\
&= \int_{-d_2}^{+\infty}\left(x\exp\left\{\sigma\sqrt{\tau}y-\frac{\sigma^2}{2}\right\}-Ke^{-r\tau}\right)\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy \\
&= I_1 - I_2
\end{aligned}$$

où

$$I_1 = x \int_{-d_2}^{+\infty} \exp\left\{\sigma\sqrt{\tau}y - \frac{\sigma^2}{2}\right\} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

et

$$I_2 = Ke^{-r\tau} \int_{-d_2}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = Ke^{-r\tau}\varphi(d_2)$$

avec φ une fonction de répartition de $N(0,1)$.

Pour calculer I_1 on fait le changement de variable $y = z + \sigma\sqrt{\tau}$;

$$I_1 = e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{+\infty} \exp\left\{\sigma\sqrt{\tau}y - \frac{\sigma^2}{2}\right\} dy = \int_{-d_1}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \varphi(d_1)$$

Donc, on obtient

$$C(t, S_t) = x\varphi(d_1) - Ke^{-r\tau}\varphi(d_2) \tag{3.4}$$

Valeur du put européen :

Pour le put, on note que $F(t, S_t) = P(t, S_t)$ où $f(x) = (K - x)_+$. Un calcul analogue nous donne

$$P(t, S_t) = Ke^{-r\tau}\varphi(-d_2) - x\varphi(-d_1)$$

3.2.6 Couverture des calls et des puts

Il est important de pouvoir construire le portefeuille simulant pour couvrir une option.

Nous allons voir, dans le cas d'une option définie par la forme $H = f(S_T)$, comment expliciter le portefeuille de couverture.

A chaque instant t, la valeur actualisée d'un portefeuille simulant est égale à :

$$\begin{aligned} \hat{V}_t &= e^{-rt}F(t, S_t) \\ &= \hat{F}(t, S_t) \end{aligned}$$

La fonction F est de classe C^∞sur $[0, T[\times \mathbb{R}$.

on pose : $\hat{F}(t, S_t) = e^{-rt}F\left(t, xe^{rt}\right)$;

on a $\hat{V}_t = \hat{F}\left(t, \hat{S}_t\right)$, et d'après la formule d'Itô pour chaque $t < T$:

$$\begin{aligned} d\hat{V}_t &= \left[\hat{F}_t'\left(t, \hat{S}_t\right) + \frac{\sigma^2}{2}x^2\hat{F}_{xx}''\left(t, \hat{S}_t\right)\right] dt + \hat{F}_x'\left(t, \hat{S}_t\right) d\hat{S}_t \\ &= A_t dt + \hat{F}_x'\left(t, \hat{S}_t\right) d\hat{S}_t \end{aligned}$$

Cela implique d'aprés (3.3) que

$$\hat{V}_t = \hat{V}_0 + \int_0^t A_s ds + \int_0^t \hat{S}_t\hat{F}_x'\left(s, \hat{S}_s\right) \sigma dW_s$$

$E\left(\int\limits_0^t A_s ds\right) = 0$ p.s pour tout t de plus $\int\limits_0^t A_s ds$ est une martingale donc $A_t = 0 \quad p.s$ pour tout t.

on a

$$\hat{F}\left(t, \hat{S}_t\right) = \hat{F}\left(0, \hat{S}_0\right) + \int\limits_0^t \frac{\partial \hat{F}}{\partial x}\left(u, \hat{S}_u\right) d\hat{S}_u$$

d'autre part

$$\hat{F}\left(t, \hat{S}_t\right) = \hat{V}_0 + \int\limits_0^t \sigma \phi_u dW_u$$

d'où :

$$d\hat{F}_x\left(t, \hat{S}_t\right) = \sigma \phi_t dW_t$$

où

$$\phi_t = \frac{\partial Call}{\partial S}(t, S_t, T, K) = \varphi\left(d_1\right)$$

Si on pose : $\phi_t^0 = Call(t, S_t, T, K) - \phi_t S_t$, le portefeuille $\left(\phi_t^0, \phi_t\right)$ est autofinancé et sa valeur actualisée est bien $\hat{V}_t = \hat{F}\left(t, \hat{S}_t\right)$.

Dans le cas de call :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = \varphi\left(d_1\right)$$

Dans le cas de put :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = -\varphi\left(-d_1\right)$$

Chapitre 4

Calcul stochastique avec sauts

Dans ce chapitre, l'essentiel est tiré de [15] et [13].

On considère les processus stochastiques avec sauts, c'est à dire, les processus dont les trajectoires peuvent avoir des discontinuités ; et l'objet sera d'explorer les outils mathématiques nécessaires à l'étude du modèle Black et Scholes pour l'évaluation et la couverture des produits dérivés.

Processus càdlàg (resp càglàd)

Définition 25 *: une fonction $f : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ est dite càdlàg (respectivement càglàd) si elle est continue à droite (respectivement à gauche) avec une limite à gauche (respectivement à droite).*

Les limites :

$$f\left(t^-\right) = \lim_{s \to t, s<t} f(s) \quad \text{et} \quad f\left(t^+\right) = \lim_{s \to t, s>t} f(s)$$

existent et

$$f(t) = f\left(t^+\right)$$

pour une fonction càdlàg, et

$$f(t) = f\left(t^-\right)$$

pour une fonction càglàd.

– Si t est un point de discontinuité, on note :

$$\Delta f(t) = f(t) - f\left(t^-\right)$$

le saut de f (càdlàg) en t qui est définie comme une valeur avant le saut $f(t_i) := f\left(t_i^-\right)$, et

$$\Delta f(t) = f\left(t^+\right) - f(t)$$

est le saut de f (càglàd) en t qui est définie comme une valeur aprés le saut $f(t_i) := f\left(t_i^+\right)$.

– L'espace des fonctions càdlàg (resp càglàd) est noté par $\mathcal{D}([0,T])$ (resp $\mathcal{L}([0,T])$).

Processus càdlàg : Un processus càdlàg (resp càglàd) est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{D}([0,T])$ (resp $\mathcal{L}([0,T])$).

4.1 Processus de Lévy

Les processus de Lévy forment une classe des processus avec sauts, qui est à la fois simple à étudier et, en même temps, assez riche pour l'application. Ils sont une brique de base pour construire des modèles plus réaliste.

Définition 26 *Soit* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P\right)$ *un espace de probabilité filtré. Un processus* $\mathcal{F}_t$ *-adapté* $(X_t)_{t\geq 0} \subset \mathbb{R}^d$ *avec* $X_0 = 0$ P *p.s est appelé un processus de Lévy s'il vérifie les propriétés suivantes :*

1) ***Accroissements indépendants :*** *Pour chaque subdivision de temps* $t_0, t_1, ..., t_n$ *les v.a* $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *sont indépendantes.*

2) ***Accroissements stationnaires :*** *La loi de* $X_{t+h} - X_t$ *ne dépend pas de* t.

3) ***La continuité en probabilité :*** $\forall \varepsilon > 0 \quad \underset{h\to 0}{Lim}\ P\left(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon\right) = 0.$

La $3^{ème}$condition n'implique pas que les trajectoires du processus sont continues.

Théorème 27 *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus de Lévy, alors* $(X_t)_{t\geq 0}$ *à une version càdlàg (continu à droite avec une limite à gauche).*

4.1.1 Loi et variables infiniment divisibles

Définition 28 *Une distribution de probabilité* F *sur* $\mathbb{R}^d$ *à une divisibilité infinie si pour chaque entier* $n \geq 2$, *il existe* n *variables aléatoires* ***iid*** $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ *telle que* $Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$ *a la même distribution* F.

Les exemples les plus connus de "divisibilité infinie" sont les distributions gaussiennes, Gamma, Poisson.

Preuve voir [5]. ■

Proposition 29 ***(Divisibilité infinie et Processus de Lévy)***

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus de Lévy, alors pour tout* t, X_t *a une distribution infiniment divisible. Par contre, si* F *une distribution infiniment divisible, alors il existe un processus de Lévy* $(X_t)_{\ t\geq 0}$ *tel que la distribution de* X_1 *est donnée par* F.

4.2 Processus de Poisson

Le premier pas vers la caractérisation d'un processus de Lévy est de caractériser les processus de comptages.

4.2.1 Processus de comptage

Soit $(T_n)_n$ une suite strictement croissante de variables aléatoires réelles avec $T_0 = 0$. Le processus de comptage N_t associé à $(T_n)_n$ est défini par

$$N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{\{T_n \leq t\}} = \sum_{n\geq 1} n 1_{\{T_n \leq t < T_{n+1}\}}$$

1) les trajectoires de N sont constantes par morceaux dont les sauts ne prennent que la valeur 1.

2) $\forall t > 0$, N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt :

Proposition 30

$$P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

3) La fonction caractéristique d'un processus de Poisson est :

Proposition 31

$$E\left[e^{iz.N_t}\right] = \exp\left[\lambda t\left(e^{iu} - 1\right)\right] \qquad \forall u \in \mathbb{R}$$

Définition 32 *Un processus de comptage N_t adapté est appelé un* ***processus de Poisson*** *si :*

-$N_0 = 0$ p.s.

-N_t est à accroissements indépendants.

-N_t est à accroissements stationnaires.

Remarque 33 *λ est le* ***nombre moyen des arrivées*** *par unité de temps ou bien* ***intensité.*** *Lorsque λ augmente, le temps moyen entre les sauts diminue, ce qui n'est pas surprenant puisque l'amplitude des sauts est fixée, égale à 1.*

4.2.2 Mesure aléatoire de Poisson

Définition 34 *Soit $\{Y_t\}$ un processus de Lévy, alors Y_t a une version càdlàg, et le saut de Y_t en $t \geq 0$ est défini par*

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t^-}$$

Soit B_0 la famille des ensembles Boréliens $A \subset \mathbb{R}$ dont sa fermeture $\bar{A}$ ne contient pas le zéro.

Pour $A \in B_0$, on définit

$$M(A) = \sum_{s:0<s\leq t} 1_A(\Delta Y_s)$$

$M(A)$ est appelée ***la mesure aléatoire de Poisson*** *(ou* ***la mesure de saut aléatoire*** *associée à N).*

Remarque 35 *L'intensité λ d'un processus de Poisson détermine une valeur moyenne de la mesure aléatoire M :*

$$E[M(A)] = \lambda |A|$$

où $|A|$ la mesure de Lebesgue de A.

4.2.3 Processus de Poisson compensé

On définit la version **"centrée"** d'un processus de Poisson par

$$\tilde{N}_t = N_t - \lambda t$$

sa fonction caractéristique est

$$\phi_{\tilde{N}_t}(z) = \exp\left[\lambda t\left(e^{iz} - 1 - iz\right)\right]$$

$\tilde{N}$ est aussi a accroissement indépendant.
Comme

$$\begin{aligned} E\left[N_t/N_s, s \leq t\right] &= E\left[N_t - N_s + N_s/N_s\right] \\ &= E\left[N_t - N_s\right] + N_s = \lambda(t-s) + N_s. \end{aligned}$$

alors $\left(\tilde{N}_t\right)$ est une martingale,

$$\forall s \leq t, \quad E\left[\tilde{N}_t/\tilde{N}_s\right] = \tilde{N}_s$$

- $\left(\tilde{N}_t\right)$ est dit **Processus de Poisson compensé** et l'expression déterministe $(\lambda t)_{t\geq 0}$ est dite **compensateur** de $(N_t)_{t\geq 0}$.

Pour un **processus de Poisson compensé,** la mesure aléatoire est définie par

$$\tilde{M}(A) = M(A) - \lambda|A|$$

$\tilde{M}(A)$ verifie :

$$E\left(\tilde{M}(A)\right) = 0 \text{ et } var\left(\tilde{M}(A)\right) = \lambda|A|$$

Remarque 36 *Pour définir la mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}^d$, on peut remplacer $A \subset \mathbb{R}^+$ par un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ et la mesure de **Lebesgue** $|.|$ par une mesure de **Radon -Nykodim** μ sur E.*

4.2.4 Mesure aléatoire de Poisson compensé

La mesure aléatoire de Poisson compensé est définit par

$$\tilde{M}(A) = M(A) - \mu(A)$$

et elle vérifie :

pour tous les ensembles compacts disjoints $A_1, ..., A_n \in \mathcal{E}$, les variables $\tilde{M}(A_1), ..., \tilde{M}(A_n)$ sont indépendantes ;

et

$$E\left(\tilde{M}(A_i)\right) = 0,\ Var\left(\tilde{M}(A_i)\right) = \mu(A_i)$$

Le processus de Poisson définit par un processus de comptage n'est pas utilisé pour modéliser les cours d'actifs, car la condition que la taille est toujours égale à 1, n'est pas réaliste. C'est pour ça, on va définir :

4.2.5 Processus de Poisson composé

Définition 37 *Le processus de Poisson composé d' intensité de sauts λ et de distribution de taille de sauts μ est un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est défini par*

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$$

où $\{Y_i\}_{i\geq 1}$ est une suite de v.a indépendantes de loi μ et N est un processus de Poisson standard d'intensité λ indépendant de $\{Y_i\}_{i\geq 1}$.

Remarque 38 *1)* ***Les trajectoires*** *de X sont des fonctions continues par morceau avec une version càdlàg.*

2) ***Les temps de sauts*** *$(T_n)_{n\geq 1}$ont la même loi que les temps de sauts d'un processus de Poisson N_t, ils peuvent s'écrire comme une somme partielle de v.a exponentielles de paramètre λ.*

3) Le processus de Poisson lui même peut être écrit comme un processus de Poisson composé sur $\mathbb{R}$ tel que : $Y_i = 1$.

Proposition 39 *un processus de Poisson $(X_t)_{t\geq 0}$ est composé si et seulement si, il est un processus de Lévy et ses trajectoires sont des fonctions continues par morceau.*

Fonction caractéristique d'un processus de Poisson composé

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson composé sur $\mathbb{R}^d$. La fonction caractéristique est :

$$E\left[e^{iz.X_t}\right] = \exp\left[\lambda t \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{iux} - 1\right) f(dx)\right] \qquad \forall u \in \mathbb{R}^d$$

où λ est **l'intensité de saut** et f la distribution des tailles de sauts .

Mesure aléatoire d'un processus de Poisson composé

Pour tout processus càdlàg et, en particulier, pour tout processus de Poisson composé, on peut associé une mesure aléatoire sur $\mathbb{R}^d \times [0, \infty[$ qui décrit les sauts de X pour chaque ensemble mesurable $B \subset \mathbb{R}^d \times [0, \infty[$:

$$J_X(B) = E\left(\sum_{t\in[0,T]} 1_B\left(X_t - X_{t^-}, t\right)\right)$$

Pour chaque ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^d$, $J_X(A \times [t_1, t_2])$ contient le nombre de sauts de X entre t_1 et t_2 dont les tailles des sauts sont dans A.

Mesure de saut d'un processus de Poisson composé

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$un processus de Poisson composé sur $\mathbb{R}^d$ avec intensité λ et distribution des tailles de saut f. Sa mesure de saut J_X est une mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}^d \times [0, \infty[$ avec une mesure d'intensité :

$$\mu (dx \times dt) = \nu (dx) \, dt = \lambda f (dx) \, dt$$

La mesure d'un processus de Poisson composé définit le nombre moyen de sauts par unité de temps.

Proposition 40 *Tout processus de Poisson composé peut s'écrire sous la forme :*

$$X_t = \sum_{s:0<s\leq t} \Delta X_s = \int\limits_{[0,t]\times\mathbb{R}^d} x J_X (ds \times dx)$$

Mesure aléatoire d'un processus de Poisson composé compensé

La mesure aléatoire d'un processus de Poisson composé compensé est définie par

$$\tilde{J}_X (ds \times dx) = J_X (ds \times dx) - \nu (dx) \, ds$$

où $J_X (ds \times dx)$ est la mesure aléatoire d'un processus de Poisson composé, $\nu (dx) \, ds$ sa mesure de saut.

4.2.6 Structure des trajectoires d'un processus de Lévy

Mesure de Lévy

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy sur $\mathbb{R}^d$. La mesure ν sur $\mathbb{R}^d$ définie par :

$$\nu (A) = E \left(\sum_{\substack{t\in[0,1] \\ \Delta X_t \neq 0}} 1_A (\Delta X_t) \right) \qquad ; A \in \mathcal{B} \left(\mathbb{R}^d \right)$$

est appelée la mesure de Lévy de X.

Autrement dit, $\nu (A)$ est le nombre, par unité de temps, de sauts dont la taille est dans A.

Décomposition de Lévy-Itô

Théorème 41 *Soit $\{X_t\}$ un processus de Lévy à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, de mesure de Lévy ν alors :*

- ν sa mesure de Lévy sur $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ satisfait, $\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\|x\|^2 \wedge 1 \right) \nu (dx) < \infty$.

- Sa mesure de sauts J_X est une mesure aléatoire de Poisson sur $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ d'intensité $\nu (dx) \times dt$.

- Il existent $\gamma \in \mathbb{R}^d$ et un mouvement Brownien d-dimensionnel $(W_t)_{t\geq 0}$ de matrice de covariance A tels que

$$X_t = \gamma t + \sigma W_t + X_t^l + \lim_{\varepsilon\to 0} X_t^{\varepsilon}, \text{ où}$$

$$X_t^l = \int\limits_{|x|\geq 1, s\in[0,t]} xJ_X\left(ds.dx\right) \quad et$$

$$X_t^\varepsilon = \int\limits_{\varepsilon\leq|x|<1, s\in[0,t]} x\tilde{J}_X\left(ds.dx\right)$$

Les trois derniers termes sont indépendants et la convergence dans le dernier terme est presque sure et, est uniforme en t sur les compactes.

Le triplet (A, ν, γ) est appelé triplet caractéristique de X.

Preuve voir [15] propo3.7, page 79. ■

Moments d'un processus de Lévy

Proposition 42 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy sur $\mathbb{R}$ de triplet caractéristique (A, ν, γ), le moment d'ordre n de X_t, $E\left[|X_t|^n\right]$ est fini si et seulement si $\int\limits_{|x|\geq 1} |x|^n \nu\left(dx\right) < \infty$,*

et on a

$$\begin{aligned} E\left[X_t\right] &= t\left(\gamma + \int\limits_{|x|\geq 1} x\nu\left(dx\right)\right) \\ Var\left[X_t\right] &= t\left(\gamma + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\nu\left(dx\right)\right) \end{aligned}$$

Exponentielle des moments

Proposition 43 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy sur $\mathbb{R}$ de triplet caractéristique (A, ν, γ), et soit $u \in \mathbb{R}$, l'exponentielle de moment $E\left[\exp\left(uX_t\right)\right]$ est finie pour tout $t > 0$, si et seulement si :*

$$\int\limits_{|x|\geq 1} e^{ux}\nu\left(dx\right) < \infty$$

et dans ce cas

$$E\left[\exp\left(uX_t\right)\right] = \exp\left(t\psi\left(-iu\right)\right)$$

où ψ est l'exposant caractéristique de X_t.

Fonction caractéristique et exposant caractéristique

Définition 44 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy. La fonction caractéristique de X_t est :*

$$\phi_{X_t}\left(z\right) = E\left[e^{iz.X_t}\right], \quad z \in \mathbb{R}^d$$

Théorème 45 *Soit $(X_t)\ _{t\geq 0}$ un processus de Lévy sur $\mathbb{R}^d$. Il existe une fonction continue ψ : $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ appelée **exposant caractéristique** de X telle que :*

$$E\left[e^{iz.X_t}\right] = e^{t\psi(z)}, \quad z \in \mathbb{R}^d$$

Le processus de Poisson est l'exemple le plus simple du processus de Lévy, que l'on peut considérer comme un processus de Poisson dont les sauts sont aléatoires.

Formule de Lévy -Khinchin

Théorème 46 *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus de Lévy sur* $\mathbb{R}^d$ *de triplet caractéristique* (A, ν, γ).
alors

$$E\left[e^{iz.X_t}\right] = e^{t\psi(z)},\ z \in \mathbb{R}^d$$

avec

$$\psi(z) = -\frac{1}{2}z.Az + i\gamma.z + \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(e^{iz..x} - 1 - iz.x1_{|x|\leq 1}\right)\nu(dx)$$

Processus de Lévy et variation finie

Proposition 47 *un processus de Lévy a une variation finie si et seulement si son triplet caractéristique vérifie*

$$A = 0 \quad et \quad \int\limits_{|x|\leq 1} |x|\,\nu(dx) < \infty$$

Pocessus de Lévy et martingales

Proposition 48 *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus de Lévy sur* $\mathbb{R}$ *de triplet caractéristique* (A, ν, γ).
1) (X_t) *est une martingale si et seulement si* $\int\limits_{|x|\geq 1} |x|\,\nu(dx) < \infty$ *et*

$$\gamma + \int\limits_{|x|\geq 1} |x|\,\nu(dx) = 0$$

2) $exp(X_t)$ *est une martingale si et seulement si*

$$\int\limits_{|x|\geq 1} e^x\nu(dx) < \infty$$

et

$$\frac{A}{2} + \gamma + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(e^x - 1 - 1_{|x|\leq 1}\right)\nu(dx) = 0$$

Remarque 49 *Le résultat qui peut être le plus important de la théorie de processus de Lévy est que la mesure de sauts d'un processus de Lévy général est également une mesure aléatoire de Poisson.*

4.2.7 Intégrale stochastique par rapport aux mesures de Poisson

La notion de l'intégrale stochastique par rapport à une mesure de Poisson est plus générale que celle de l'intégrale stochastique par rapport à un processus de Lévy, elle nous permettra de définir une classe de processus qui généralise celle de processus de Lévy appelée classe de **processus de Lévy-Itô**.

Proposition 50 ***(formule d'isométrie d'une intégrale de Poison compensée)***

Pour tout fonction prévisible simple $\phi : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, *le processus* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *défini par l'intégrale compensée*

$$X_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \phi(s,y)\, \tilde{M}(ds.dy)$$

est une martingale de carré intégrable et vérifie la formule d'isométrie

$$E[X_T^2] = E\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi(s,y)^2\, \mu(ds.dy)\right]$$

4.2.8 Formule de changement de variables pour les processus Lévy-Itô

En absence de sauts, la formule de changement de variable (formule d'Itô) pour une fonction $f \in C^2$ prend la forme :

$$f(X_T) = f(X_0) + \int_0^T f'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2}\int_0^T f''(X_t)\, \sigma_t^2 dt$$

Quand le processus n'a qu'un nombre fini de sauts sur $[0,T]$, on peut écrire $X_t := X_t^c + \sum_{s\leq t} \Delta X_s$ et appliquer la même formule entre les sauts :

Proposition 51 *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus de Lévy de triplet caractéristique* (σ^2, ν, γ) *et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction* $\mathcal{C}^2$. *Alors*

$$\begin{aligned} f(X_T) &= f(X_0) + \int_0^T f'(X_{t^-})\, dX_t + \frac{1}{2}\int_0^T f''(X_t)\, \sigma_t^2 dt + \\ &\sum_{t\leq T, \Delta X_t \neq 0} \left\{ f(X_{t^-} + \Delta X_t) - f(X_{t^-}) - \Delta X_t f'(X_{t^-}) \right\} \end{aligned}$$

Proposition 52 *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus de Lévy de triplet caractéristique* (σ^2, ν, γ) *et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^2$ *telle que* f *et ses deux dérivées sont bornées par une constante* C. *alors* $X_t = M_t + V_t$, *où* M *est la partie martingale donnée par*

$$M_t = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, \sigma_s dW_s + \int_{[0,t]\times\mathbb{R}} \{f(X_{s^-} + y) - f(X_{s^-})\}\, \tilde{J}_X(ds.dx)$$

et V *est un processus à variation finie continue*

$$\begin{aligned} V_t &= \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} f''(X_s)\, ds + \int_0^t \gamma f'(X_s)\, ds + \\ &\int_{[0,t]\times\mathbb{R}} \left\{ f(X_{s^-} + y) - f(X_{s^-}) - y f(X_{s^-})\, 1_{|y|\leq 1} \right\} ds.\nu(dy) \end{aligned}$$

Remarque 53 - *Si X_t est de Lévy, $Y_t = f(t, X_t)$ ne l'est pas toujours. C'est pour ça on va introduire les semi-martingales.*

- La classe des processus de Lévy-Itô a des propriétés de stabilité :

Si $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy-Itô, alors pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2$, $(f(X_t))$ est également un processus de Lévy-Itô. Ce que ne le possède pas la classe des processus de Lévy.

4.2.9 Semi-martingale

Pour pouvoir écrire la valeur actualisé d'un portefeuille d'une valeur initiale V_0, géré selon une stratégie autofinancée, on fait intervenir la notion d'intégrale stochastique qui est définie par des sem-martingales. Pour les démonstration voir [8] et [11].

On note $\mathcal{D}$ l'espace des processus adaptés càdlàg et $\mathcal{L}$ l'espace des processus adaptés càglàd.

Définition 54 *"la convergence uniforme"*

Une suite (ϕ^n) de processus converge uniformement en probabilité vers un processus ϕ sur les compacts si

$$\forall t > 0, \sup_{0\leq t\leq s} |\phi_s^n - \phi_s| \xrightarrow{P} 0$$

on note cette convergence par ucp.

On note $\mathcal{S}_{ucp}$ l'espace $\mathcal{S}$ des processus simplement prévisibles muni de la topologie de convergence *ucp* en (t, ω).

et on note $\mathcal{L}_{ucp}$ et $\mathcal{D}_{\ ucp}$ l'espace de processus adaptés continus à gauche, et à droite respectivement. muni de la convergence *ucp* respéctivement.

Définition 55 *Pour $\phi \in \mathcal{S}$ et X un processus càdlàg, on définit la fonction linéaire $I_X : \mathcal{S} \to \mathcal{D}$ par :*

$$I_X(\phi) = \phi_0 X_0 + \sum_{i=1}^{n} \phi_i \left(X^{T_{i+1}} - X^{T_i}\right)$$

où $0 = T_0 \leq T_1 \leq ... \leq T_{n+1} < \infty$ des temps d'arrêts.

On note : $X^T := (X_{t\wedge T})_{t\geq 0}$, et $I_X(\phi)$ l'intégrale stochastique de ϕ par rapport à X.

$$I_X(\phi) = \int \phi_s dX_s := \phi.S$$

Pour effectuer une extention par continuité de l'opérateur d'intégration stochastique $I_X(\phi)$ de $\mathcal{S}_{ucp}$ vers $\mathcal{L}_{ucp}$, il faut que cet opérateur soit un opérateur continu de $\mathcal{S}_{ucp}$ vers $\mathcal{D}_{ucp}$ qui est la définition des semi-martingales.

Définition 56 *Un processus $X \in \mathcal{D}$ est une semimartingale si l'opérateur d'intégration stochastique $I_X(\phi)$ est un opérateur continu de $\mathcal{S}_{ucp}$ vers $\mathcal{D}_{ucp}$.*

Théorème 57 *Soit X une semi-martingale, alors l'application $I_X : \mathcal{S}_{ucp} \to \mathcal{D}_{ucp}$ est continue.*

Définition 58 *un processus X non anticipatif càdlàg est décomposable s'il pourra être décomposer comme suit*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t$$

où $M_0 = A_0 = 0$; M est une martingale locale de carré intégrable, A un processus càdlàg adapté à variation bornée.

4.2.10 Variation quadratique

Définition 59 *Soient X une semi-martingale, la variation quadratique de X, notée $[X,X] = ([X,X]_t)_{t\geq 0}$ est définie par*

$$[X,X] = X^2 - 2\int X_- dX$$

où $X_{0^-} = 0$.

Théorème 60 *Le processus de variation quadratique de X est un processus càdlàg, croissant adapté, et satisfait*

i) $[X,X]_0 = X_0^2$ *et* $\Delta[X,X] = (\Delta X)^2$

i) Si σ_n une suite de partitions aléatoires identiques, alors :

$$X_0^2 + \sum_i \left(X^{T_{i+1}^n} - X^{T_i^n}\right)^2 \to [X,X]$$

avec une convergence en ucp, σ_n est $0 = T_0^n \leq T_1^n \leq ... \leq T_i^n \leq ... \leq T_k^n$. Où T_i^n sont des temps d'arrêts.

iii) Si T un temps d'arrêt, alors $\left[X^T, X\right] = \left[X, X^T\right] = \left[X^T, X^T\right] = [X,X]^T$.

et que : $\Delta(X_-.X) = X_-\Delta X$.

Définition 61 *Pour une semi-martingale X, On peut écrire*

$$[X,X]_t = [X,X]_t^c + X_0^2 + \sum_{0<s\leq t} (\Delta X)^2$$

où le processus $[X,X]^c$ représente la partie continue, trajectoire par trajectoire, de $[X,X]$ telle que $[X,X]_0^c = 0$.

Propriétés :

Ces processus sont des semi-martingales :

1) Processus de **Wiener** (car il est une martingale de carré intégrable)

2) Processus de **Poisson** (car il a une variation bornée).

3) Un processus **déterministe** est une semi-martingale si et seulement si, il a une variation bornée.

4) Tous les processus de **Lévy** sont des semi-martingales parce que le processus de Lévy est une somme des martingales de carré intégrable et des processus à variation bornée, "c'est la décomposition de Lévy-Itô".

4.2.11 Formule d'Itô pour les semi-martingales

Proposition 62 *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *une semi-martingale. Pour toute fonction* $f \in C^{1,2}$ $:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(t,X_t) - f(t,X_0) &= \int_0^t \frac{\partial f}{ds}(s,X_s)\,ds + \int_0^t \frac{\partial f}{dx}(s,X_{s^-})\,dX_s + \\ &\quad \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{dx^2}(s,X_{s^-})\,d[X,X]_s^c + \\ &\quad \sum_{0\leq s\leq t,\Delta X_s\neq 0}\left[f(s,X_s) - f(s,X_{s^-}) - \Delta X_s \frac{\partial f}{dx}(s,X_{s^-})\right] \end{aligned}$$

où

$$d[X,X]_s = d[X,X]_s^c + \sum_{0\leq s\leq t}(\Delta X_s)^2$$

Chapitre 5

Modèle de Black et Scholes à trajectoires discontinues

Le prix de nombreux actifs financiers comporte des mouvements imprévisibles de grande amplitude. La prise en compte de ces sauts, qui ont un impact non-négligeable sur le rendement et le risque, a conduit au développement de modèles stochastiques basés sur des processus discontinus applés "**processus de sauts**". De nombreuses questions restent ouvertes notamment concernant l'implémentation numérique de ces modèles, à la fois pour l'évaluation des options et pour la calibration des modèles aux données de marché.

La principale application de l'intégrale stochastique en finance est la représentation d'un portefeuille autofinancé. On a déjà vu que, en absence de taux d'intérêt, lorsque le prix d'actif risqué est un processus aux trajectoires continues S de quantité ϕ, la valeur du portefeuille est :

$$V_T = \int_0^T \phi_t dS_t$$

En présence de sauts, quelles sont les propriétés à imposer sur S et ϕ pour que cette relation soit vraie ?

Comme les sauts dans les prix arrivent d'une façon inattendue, le processus S doit être continu à droite.

Par contre la stratégie de couverture ϕ, doit être continue à gauche, parce qu'elle est basée sur les observations du gérant du portefeuille.

Pour les processus prévisibles simples ϕ_t, on définit l'intégrale stochastique par :

$$\int_0^t \phi_s dS_s = \sum_{i=0}^{n} \phi_i \left(S_{T_{i+1}\wedge t} - S_{T_i \wedge t}\right)$$

Généralement, pour les processus adaptés continus à gauche, on définit l'intégrale stochastique par extension par continuité.

On a $\mathcal{S}_{ucp}$ est l'espace $\mathcal{S}$ muni par la topologie de convergence *ucp*, et on note $\mathcal{L}_{ucp}$ et $\mathcal{D}_{ucp}$ l'espace de processus adaptés continus à gauche, et à droite respectivement.

On a l'espace $\mathcal{S}_{ucp}$ est dense dans $\mathcal{L}_{ucp}$, et on peut associer cette topologie ucp une métrique sur $\mathcal{D}_{ucp}$, pour laquelle cet espace sera complet.

Pour effectuer cette extension par continuité de $\mathcal{S}_{ucp}$ vers $\mathcal{L}_{ucp}$, il faut que cet opérateur soit continu de $\mathcal{S}_{ucp}$ dans $\mathcal{D}_{ucp}$, qui est la définition des semi-martingales. Donc il faut que S soit une semi-martingale.

On concentre notre étude sur la notion des intégrales par rapport à une mesure aléatoire de Poisson parce qu'elle est plus générale que celle d'intégrales par rapport à un processus de Poisson, et elle nous permettra de définir la classe des processus Lévy-Itô (plus générale que les processus de Lévy) qui a une propriété de stabilité que ne possèdent pas celle de Lévy.

Si S est un processus de Lévy constant par morceau on a :

$$\int_0^T \phi_t dS_t = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi_t y J_S \left(dt \times dy\right)$$

5.1 Modèle exponentielle-Lévy

On a déjà vu que la dynamique risque neutre dans le modèle B-S avec des trajectoires continues s'écrit sous la forme d'une exponentielle d'un mouvement Brownien avec drift :

– En prenant l'exponentielle

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\} = S_0 \exp B_t^0 \tag{5.1}$$

– Et en utilisant la formule d'Itô on obtient :

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t = dB_t^1 \quad \text{où} \quad B_t^1 = rt + \sigma W_t \tag{5.2}$$

qui est une exponentielle stochastique.

Donc, il y a deux méthodes pour définir la dynamique risque neutre de B-S avec des trajectoires discontinues (avec sauts) :

– En remplaçant B_t^0 dans (5.1) par un processus de Lévy X_t :

$$S_t = S_0 \exp\left(rt + X_t\right) \tag{5.3}$$

Ces modèles sont des modèles exp-Lévy (exponentielle ordinaire)

Pour que $e^{-rt}S_t$ soit une martingale, on impose les conditions suivantes sur le triplet caractéristique $\left(\sigma^2, \nu, \gamma\right)$ de X :

$$\int_{|x|\geq 1} e^x \nu\left(dx\right) < \infty$$

et

$$\gamma + \frac{\sigma^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} \left(e^x - 1 - x1_{|x|\leq 1}\right)\nu\left(dx\right) = 0$$

– Une autre méthode, est de remplacer B_t^1 dans (5.2) par un processus de Lévy Z_t :

$$dS_t = rS_{t^-}dt + S_{t^-}dZ_t \tag{5.4}$$

Alors S_t correspond à l'exponentielle stochastique de Z.

$e^{-rt}S_t$ est une martingale si et seulement si le processus de Lévy Z_t est une martingale qui vérifie $E\left[Z_1\right] = 0$.

Remarque 63 *L'exponentielle stochastique et l'exponentielle ordinaire sont deux processus stochastiques différents, par exemple, Contrairement à l'exponentielle ordinaire qui est toujours positive, l'exponentielle stochastique n'est pas nécessairement positive sauf si tous les sauts de processus X sont plus grand que -1, ce qui revient à dire (pour les processus de Lévy) que la mesure de Lévy satisfait $\nu\left((-\infty,-1]\right)=0$.*

Donc, lequel de deux processus convient mieux pour construire des modèles financiers ?

La proposition suivante montre que les deux approches sont équivalentes (elles correspondent la même classe des processus positifs).

Proposition 64 ***"relation entre exponentielle ordinaire et stochastique"***

1. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy de triplet caractéristique $\left(\sigma^2,\nu,\gamma\right)$ et $Z=\mathcal{E}(X)$ son exponentielle stochastique.

Si $Z>0$ p.s, alors il existe un autre processus de Lèvy $(L_t)_{t\geq 0}$ de triplet caractéristique $\left(\sigma_L^2,\nu_L,\gamma_L\right)$ tel que $Z_t=e^{L_t}$ où

$$\begin{aligned}
L_t &= \ln Z_t = X_t-\frac{\sigma^2 t}{2}+\sum_{0\leq s\leq t}\left\{\ln\left(1+\Delta X_s\right)-\Delta X_s\right\}\\
\sigma_L &= \sigma\\
\nu_L(A) &= \nu\left(\{x:\ln(1+x)\in A\}\right)=\int 1_A\ln(1+X)\,\nu(dx)\\
\gamma_L &= \gamma-\frac{\sigma^2}{2}+\int\nu(dx)\left\{\ln(1+x)\,1_{|x|\leq 1}\left(\ln(1+x)\right)-x1_{|x|\leq 1}(x)\right\}
\end{aligned}$$

2. Soit $(L_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy de triplet caractéristique $\left(\sigma_L^2,\nu_L,\gamma_L\right)$ et $S_t=e^{L_t}$ son exponentielle.

Il existe un autre processus de Lèvy $(X_t)_{t\geq 0}$ de triplet caractéristique $\left(\sigma^2,\nu,\gamma\right)$ tel que S_t est l'exponentielle stochastique de X : $S=\mathcal{E}(X)$ où

$$\begin{aligned}
X_t &= L_t+\frac{\sigma^2 t}{2}+\sum_{0\leq s\leq t}\left\{e^{\Delta L_s}-1-\Delta L_s\right\}\\
\sigma &= \sigma_L\\
\nu(A) &= \nu_L\left(\{x:e^x-1\in A\}\right)=\int 1_A\left(e^x-1\right)\nu_L(dx)\\
\gamma &= \gamma_L+\frac{\sigma^2 t}{2}+\int\nu_L(dx)\left\{\left(e^x-1\right)1_{|x|\leq 1}\left(e^x-1\right)-x1_{|x|\leq 1}(x)\right\}
\end{aligned}$$

Et du fait que les formules qui utilisent l'exponentielle ordinaire sont plus lisibles, cette dernière est plus utilisée pour construire les modèles de prix. Cependant, dans certaines situations, l'exponentielle stochastique est mieux adaptée.

donc, on considère le modèle

$$\left\{\begin{array}{c} dS_t^0=rS_t^0dt \text{ tel que } S_0^0=1\\ S_t=S_0e^{rt+X_t}\end{array}\right. \tag{5.5}$$

où X_t est un processus de Lévy.

Ce modèle n'admet pas d'opportunité d'arbitrage s'il existe une probabilité Q équivalente à P telle que e^X est une Q-martingale. Si le triplet caractéristique de X sous Q est (A^Q, ν^Q, γ^Q), alors la condition de martingale s'écrit

$$\gamma + \frac{A}{2} + \int_{\mathbb{R}} \left(e^x - 1 - x1_{|x|\leq 1}\right) \nu^Q(dx) = 0$$

Pour appliquer les modèles (5.5) à l'évaluation d'options, il faut donc établir l'existence d'une probabilité martingale équivalente.

5.1.1 Probabilité martingale

Proposition 65 *Soient (X, P) et (X, Q) deux processus de Poisson composés de mesures de Lévy ν^P et ν^Q. Alors*

$P \sim Q$ sur $[0, T]$ si et seulement si $\nu^P \sim \nu^Q$ et dans ce cas,

$$\frac{dQ}{dP}\backslash\mathcal{F}_T = \exp\left(T\left(\lambda^P - \lambda^Q\right) - \sum_{s\leq t; \Delta X_s \neq 0} \phi(\Delta X_s)\right) := \exp(Z_T)$$

Où $\lambda^P := \nu^P(\mathbb{R}), \lambda^Q := \nu^Q(\mathbb{R})$ et $\phi = \log \frac{d\nu^Q}{d\nu^P}$.

Théorème 66 *Soient (X, P) et (X, Q) deux processus de Lévy de triplets caractéristiques (A^P, ν^P, γ^P), (A^Q, ν^Q, γ^Q) respectivement, Alors $P \sim Q$ sur $[0, T]$ pour tout T si et seulement si*

1. *Les coefficients de diffusion vérifient $A^P = A^Q := A$.*
2. *Les mesures de Lévy vérifient $\nu^P \sim \nu^Q$ avec la fonction $\phi = \log \frac{d\nu^Q}{d\nu^P}$ qui satisfait*

$$\int \left(e^{\phi/2} - 1\right) \nu^P(dx) < \infty$$

3. *Il existe $\beta \in \mathbb{R}$ avec*

$$\gamma^Q = \gamma^P + \int_{|x|\leq 1} \left(e^{\phi} - 1\right) \nu^P(dx) + \beta A$$

Proposition 67 *Soit (X, P) un processus de Lévy de triplet caractéristique (A, ν, γ). Il existe une probabilité $Q \sim P$ telle que e^X est une Q-martingale si et seulement si X n'est pas p.s croissant ni p.s décroissant.*

Preuve La partie "seulement si" est triviale.

On va se concentrer sur la partie "si",

Si $A > 0$, on peut obtenir une probabilité équivalente par un simple changement de drift. On suppose que $A = 0$ (sans perte de généralité).

de plus on suppose que $\int_{|x|\geq 1} e^{\theta x} \nu(dx) < \infty$ pour toute θ.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on prend $\nu^Q = e^{\theta x}\nu$ et $\gamma^Q = \gamma + \int\limits_{|x|\leq 1} \left(e^{\theta x} - 1\right)\nu\left(dx\right)$ et soit (X,Q) un processus de Lévy de triplet caractéristique $(0,\nu^Q,\gamma^Q)$. Alors par le théorème précédent, $Q \sim P$. Pour démontrer qu'il existe une probabilité martingale équivalente, il faut trouver un θ tel que :

$$\gamma^Q + \int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^x - 1 - x1_{|x|\leq 1}\right)\nu^Q\left(dx\right) = 0$$

Ce qui est équivalent à

$$f\left(\theta\right) := \gamma + \int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{\theta(x+1)} - e^{\theta x} - x1_{|x|\leq 1}\right)\nu\left(dx\right) = 0$$

La fonction $f\left(\theta\right)$ est croissante de dérivée

$$f^{'}\left(\theta\right) = \int xe^{\theta x}\left(e^x - 1\right)\nu\left(dx\right) \geq 0$$

Si $\nu\left((-\infty,0)\right) > 0$ et $\nu\left((0,\infty)\right) > 0$, la dérivée $f^{'}$ est bornée inférieurement par

$$\min\left(\int\limits_{-\infty}^{0} x\left(e^x - 1\right)\nu\left(dx\right), \int\limits_{0}^{+\infty} x\left(e^x - 1\right)\nu\left(dx\right)\right)$$

Ce qui implique dans ce cas que $f\left(\theta\right) = 0$ a une solution. Supposons donc $\nu\left((-\infty,0)\right) = 0$.

$$\lim_{\theta\to+\infty} f\left(\theta\right) = +\infty$$

et

$$\lim_{\theta\to-\infty} f\left(\theta\right) = \lim_{\theta\to-\infty}\left\{\gamma + \int\limits_{0}^{1} x\left(e^{\theta x} - 1\right)\nu\left(dx\right)\right\}$$

Lorsque $\int\limits_{0}^{1} x\nu\left(dx\right) = \infty$ (processus à variation infinie), cette limite vaut -∞ et donc $f\left(\theta\right) = 0$ a une solution.

Dans le cas contraire, cette limite vaut

$$\gamma - \int\limits_{0}^{1} x\nu\left(dx\right)$$

et $f\left(\theta\right) = 0$ a une solution si et seulement si $\gamma - \int\limits_{0}^{1} x\nu\left(dx\right) < 0$, c'est à dire, le drift du processus doit être négatif.

et comme on a supposé que les sauts sont positifs, alors X ne doit pas être croissant.

De même, on montre que X ne doit pas être décroissant. ■

5.1.2 Call européen dans le modèle exp-Lévy

Dans le modèle exp-Lévy, l'expression du call européen, par stationnarité et indépendance des accroissements, est simplifiée par :

$$
\begin{aligned}
C(t,S,T=t+\tau,K) &= e^{-r\tau}E\left[(S_T-K)\backslash S_t=S\right] \\
&= e^{-r\tau}E\left[\left(Se^{r\tau-X_\tau}-e^{k}\right)^{+}\right] \\
&= Ke^{-r\tau}E\left[\left(e^{x+X_\tau}-1\right)^{+}\right]
\end{aligned}
$$

où x est le log du "forward moneyness" donné par :

$$x=\ln(S/K)+r\tau$$

Définissons le prix d'option "forward" relatif par les variables relatives (x,τ) par

$$u(x,\tau)=\frac{e^{r\tau}C(t,S,T=t+\tau,K)}{K}$$

On conclu que, la structure entière des prix d'options dans les modèles exp-Lévy est paramétrée par deux variables seulement :

$$u(x,\tau)=E\left[\left(e^{x+X_\tau}-1\right)^{+}\right]$$

5.2 Valorisation des options européennes

A l'opposé du cas de Black et Scholes classique, les modèles exp-Lèvy n'ont pas une formule explicite des prix des call, parce que la densité de probabilité du processus de Lévy n'a pas une forme précise.

Méthode de Carr et Madan

Soit $\{X_t\}_{t\geq 0}$ un processus stochastique sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$ tel que e^{X_T} est une martingale, dans l'ordre de calculer le prix d'option call :

$$C(k)=e^{-rT}E\left[\left(e^{rT-X_T}-e^{k}\right)^{+}\right]$$

$k=\ln K$ est le log strike.

On préfère écrire sa transformée de Fourier en log strike des termes d'une fonction caractéristique $\phi_T(v)$ de X_T et trouver alors, le prix des strike par la transformée de Fourier inverse.

On ne peut pas faire ça directement parce que $C(k)$ n'est pas intégrable (elle tend vers une constante positive quand $k\to-\infty$).

– La méthode de la transformée de Fourier est fondée sur l'observation suivante

Si on soustrait du prix de l'option call sa valeur intrinsèque

$$z_T(k)=e^{-rT}E\left[\left(e^{rT+X_T}-e^{k}\right)^{+}\right]-\left(1-e^{k-rT}\right)^{+} \tag{5.6}$$

alors, la quantité qui reste est, sous certaines conditions, intégrable et on peut évaluer sa transformée de Fourier

$$\xi_T(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ivk}z_T(k)\,dk=e^{ivrT}\frac{\phi_t(v-i)-1}{iv(1+iv)}$$

où ϕ_T est la fonction caractéristique de X_T. Les prix d'options peuvent être évalués en calculant la transformée de Fourier inverse de ξ_T.

Proposition 68 *Soit* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *un processus stochastique sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *tel que* e^{X_T} *est une martingale, et*

$$E\left[e^{(1+\alpha)X_t}\right] < \infty \quad \forall t \tag{5.7}$$

Pour $\alpha > 0$ *la transformée de Fourier des variables du temps d'une option call est donnée par*

$$\xi_T(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivk} z_T(k)\, dk = e^{ivrT} \frac{\phi_t(v-i) - 1}{iv(1+iv)} \tag{5.8}$$

Preuve Premièrement, comme le processus des prix discontinus est une martingale, on peut écrire

$$z_T(k) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_T(dx) \left(e^{rT+x} - e^k\right) \left(1_{k\leq x+rT} - 1_{K\leq rT}\right)$$

où ρ_T est une densité risque neutre de X_T.

La condition (5.7) permet de calculer $\xi_T(v)$ par la permutation des intégrales :

$$\begin{aligned}
\xi_T(v) &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_T(dx)\, e^{ivk} \left(e^{rT+x} - e^k\right) \left(1_{k\leq x+rT} - 1_{K\leq rT}\right) \\
&= e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_T(dx) \int_{x+rT}^{rT} e^{ivk} \left(e^k - e^{rT+x}\right) dk \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_T(dx) \left\{ \frac{e^{ivrT}(1-e^x)}{iv+1} - \frac{e^{ivrT+x}}{iv(1+iv)} + \frac{e^{(iv+1)x+ivrT}}{iv(1+iv)} \right\}
\end{aligned}$$

Le premier terme disparu à cause de la condition des martingales, et après les calculs des deux termes qui restent, on trouve le résultat (5.8). ■

Remarque 69 *La condition des martingales garantie que le numérateur est égal à zéro pour* $v = 0$.

Sous l'hypothèse (5.7) le numérateur devient une fonction analytique et (5.8) a une limite finie quand $v \to 0$, et les prix d'options peuvent être trouver par la transformée de Fourier inverse :

$$\tilde{z}_T(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivk} \tilde{\zeta}_T(v)\, dv$$

$\xi_T(v)$ converge comme $|v|^{-2}$ à l'infini ce qui implique que l'erreur de troncature dans l'évaluation numérique de la transformée de Fourier inverse est grande.

La raison pour laquelle la convergence est lente est que la valeur du temps (5.6) n'est pas différentiable.

On peut diminuer l'erreur de troncature de la transformée de Fourier inverse en remplaçant la valeur intrinsèque de l'option par son prix dans le modèle de Black et Scholes (qui est une fonction différentiable) avec une non zéro volatilité.

On suppose que les hypothèses de la proposition ci-dessus sont satisfaites, et on note

$$\tilde{z}_T(k) = e^{-rT} E\left[\left(e^{rT+X_T} - e^k\right)^+\right] - C_{BS}^{\sigma}(k)$$

où C_{BS}^{σ} est le prix de Black et Scholes d'une option call de volatilité σ et log strike k, et

$$\phi_T^{\sigma}(v) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 T}{2}\left(v^2 + iv\right)\right)$$

alors la transformée de Fourier de $\tilde{z}_T(k)$, notée $\tilde{\zeta}_T(v)$ est donnée par :

$$\tilde{\zeta}_T(v) = e^{ivrT} \frac{\phi_t(v-i) - \phi_T^{\sigma}(v-i)}{iv(1+iv)}$$

Pour presque tous les modèles paramétriques, discutés dans la littérature cette quantité converge vers zéro plus vite que toute puissance de $|v|$ lorsque $|v| \to \infty$, et l'intégrale dans la transformée de Fourier inverse converge plus vite pour toute $\sigma > 0$.

5.3 Couverture des modèles exp-Lévy

La couverture des modèles exp-Lévy est peut être définie comme une stratégie de couverture qui minimise l'erreur de couverture quadratique.

$$\inf_{\phi} E\left[|V_T(\phi) - H|^2\right] \quad \text{où} \quad V_T(\phi) = V_0 + \int_0^T r\phi_t^0 dt + \int_0^T \phi_t dS_t$$

Après l'actualisation du prix sous la probabilité Q, le problème de couverture moyenne-variance comme suit :

$$\inf_{V_0,\phi} E^Q |\varepsilon(V_0,\phi)|^2 = \inf_{A \in \mathcal{A}} \left\|\tilde{H} - A\right\|_{L^2(Q)}^2$$

Donc, le problème de minimiser l'erreur de moyenne quadratique revient à trouver la projection orthogonale de $L^2(Q)$ des pay-off discontinus $\tilde{H}$ sur l'ensemble $\mathcal{A}$.

5.3.1 Couverture quadratique dans le modèle exp-Lévy

Proposition 70 *Considérons la dynamique risque neutre :*

$$Q : d\tilde{S}_t = \tilde{S}_{t^-} dZ_t \tag{5.9}$$

où : Z est un processus de Lévy de mesure ν_Z et coefficient de diffusion $\sigma > 0$.

Pour une option européenne de pay-off $H(S_T)$, $H : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ vérifie :

$$\exists K > 0, |H(x) - H(y)| \leq K|x - y| \tag{5.10}$$

La solution du problème de couverture donné par

$$\inf_{\phi\in L^2(S)} E^Q \left|\tilde{G}_T(\phi)+V_0+\tilde{H}\right|^2 \tag{5.11}$$

est la couverture de risque minimisé, donnée par : $\phi_t=\Delta\left(t,S_{t^-}\right)$

où :

$$\Delta(t,S)=\frac{\sigma^2\frac{\partial C}{\partial S}(t,S)+\frac{1}{2}\int\nu_Z(dy)\,z\left[C\left(t,S(1+z)-C(t,S)\right)\right]}{\sigma^2+\int z^2\nu_Z(dy)} \tag{5.12}$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{G}_T(\phi) &= \int_0^T \phi_t S_{t^-}\sigma dW_t+\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\tilde{J}_X(dt.dx)\,x\phi_t S_{t^-}\\ &= \int_0^T \phi_t S_{t^-}\sigma dW_t+\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\tilde{J}_Z(dt.dz)\,\phi_t S_{t^-}\left(e^z-1\right)\end{aligned}$$

Preuve La valeur terminale du portefeuille qui est une martingale est donnée par :

$$\tilde{V}_T=\int_0^t\phi_t d\tilde{S}_t=\int_0^T\phi_t S_{t^-}dZ_t=\int_0^T\phi_t S_{t^-}\sigma dW_t+\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\tilde{J}_Z(dt.dz)\,z\phi_t\tilde{S}_t \tag{5.13}$$

$C(t,S_t)$ est une martingale de carré intégrable. Comme $\sigma>0$, C est une fonction de $\mathrm{C}^{1,2}$.

On applique la formule d'Itô sur $\tilde{C}(t,S_t)=e^{-rt}C(t,S_t)$ entre 0 et t :

$$\tilde{C}(t,S_t)-\tilde{C}(0,S_0)=\int_0^t\frac{\partial C}{\partial S}(u,S_{u^-})\,\tilde{S}_{u^-}\sigma dW_u+\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\left[C\left(u,S_{u^-}(1+z)\right)-C\left(u,S_{u^-}\right)\right]\tilde{J}_Z(du.dz) \tag{5.14}$$

où bien :

$$\tilde{C}(t,S_t)-\tilde{C}(0,S_0)=\int_0^t\frac{\partial C}{\partial S}(u,S_{u^-})\,\tilde{S}_{u^-}\sigma dW_u+\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\left[C\left(u,S_{u^-}e^x\right)-C\left(u,S_{u^-}\right)\right]\tilde{J}_X(du.dx)$$

Où (X_t) est un processus de Lévy tel que $\tilde{S}_t=exp(X_t)$ pour tout t.

La fonction du pay-off H est Lipchitzienne, C l'est aussi par rapport à la $2^{ème}$ composante.

$$\begin{aligned}C(t,x)-C(t,y) &= e^{-r(T-t)}E\left[H\left(xe^{r(T-t)+X_{T-t}}\right)-H\left(ye^{r(T-t)+X_{T-t}}\right)\right]\\ &\leq K|x-y|\,E\left[e^{X_{T-t}}\right]=K|x-y|\end{aligned}$$

Parce que e^X est une martingale.

Donc, la fonction aléatoire prévisible :

$$\psi(t,z)=\left[C\left(u,S_{t^-}(1+z)\right)-C\left(u,S_{t^-}\right)\right]$$

Vérifie :

$$\begin{aligned}E\left[\int_0^T dt\int_{\mathbb{R}}\nu_Z(dz)\,|\psi(t,z)|^2\right] &\leq E\left[\int_0^T dt\int_{\mathbb{R}}\nu_Z(dz)\left|C\left(t,S_{t^-}(1+z)\right)-C\left(t,S_{t^-}\right)\right|^2\right]\\ &\leq E\left[\int_0^T dt\int_{\mathbb{R}}z^2S_{t^-}^2\nu(dz)\right]<\infty\end{aligned}$$

En appliquant la formule d'isométrie de l'intégrale de Poisson compensé, l'intégrale dans l'équation (5.4) est une martingale de carré intégrable.

et en remplaçant (5.13) et (5.14)dans la formule de l'erreur de couverture donnée par

$$\varepsilon\left(V_0,\phi\right)=\tilde{H}-\tilde{V}_T$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\varepsilon\left(V_0,\phi\right) &= \int_0^T\left[\phi_tS_{t^-}-S_{t^-}\frac{\partial C}{\partial S}\left(t,S_{t^-}\right)\right]\sigma dW_t+\\ &\int_0^T dt\int_{\mathbb{R}}\tilde{J}_Z\left(dt.dz\right)\left[z\phi_tS_{t^-}-\left[C\left(t,S_{t^-}\left(1+z\right)\right)-C\left(t,S_{t^-}\right)\right]\right]\end{aligned}$$

Les formules d'isométries nous permettent de calculer la variance d'erreur de couverture :

$$\begin{aligned}E\left[\varepsilon\left(\phi\right)\right]^2 &= E\left[\int_0^T dt\int_{\mathbb{R}}\nu_Z\left(dz\right)\left|C\left(t,S_{t^-}\left(1+z\right)\right)-C\left(t,S_{t^-}\right)-z\phi_t\tilde{S}_t\right|^2\right]+\\ &E\left[\int_0^T\sigma^2\tilde{S}_{t^-}^2\left[\phi_t-\frac{\partial C}{\partial S}\left(t,S_{t^-}\right)\right]^2dt\right]\end{aligned}$$

La couverture optimale (risque minimisé) est obtenue par minimisation de cette expression sous ϕ_t :

$$\sigma^2\tilde{S}_{t^-}^2\left[\phi_t-\frac{\partial C}{\partial S}\left(t,S_{t^-}\right)\right]+\int_{\mathbb{R}}\nu_Z\left(dz\right)z\tilde{S}_{t^-}\left[z\phi_t\tilde{S}_{t^-}-C\left(t,S_{t^-}\left(1+z\right)\right)-C\left(t,S_{t^-}\right)\right]=0$$

$$\phi_t=\frac{\sigma^2\frac{\partial C}{\partial S}\left(t,S\right)+\frac{1}{2}\int\nu_Z\left(dy\right)z\left[C\left(t,S\left(1+z\right)-C\left(t,S\right)\right)\right]}{\sigma^2+\int z^2\nu_Z\left(dz\right)}$$

Où : $S_t=S_0e^{rt+X_t}$. ∎

La couverture quadratique optimale peut être donnée par une mesure de Lévy ν_X par :

$$\Delta\left(t,S\right)=\frac{\sigma^2\frac{\partial C}{\partial S}\left(t,S\right)+\frac{1}{2}\int\nu_X\left(dy\right)\left(e^x-1\right)\left[C\left(t,Se^x-C\left(t,S\right)\right)\right]}{\sigma^2+\int\left(e^X-1\right)^2\nu_X\left(dy\right)}$$

et, on a aussi, la valeur optimale du capitale initial est

$$V_0=E^Q\left[H\left(S_T\right)\right]$$

Le risque résiduel de la stratégie de couverture $\left(\phi_t^0,\phi_t\right)$ est :

$$\begin{aligned}R_T\left(\phi\right) &= E\left[\int_0^T S_{t^-}^2\left[\phi_t-\frac{\partial C}{\partial S}\left(t,S_{t^-}\right)\right]^2dt\right]+\\ &E\left[\int_0^T dt\int_{\mathbb{R}}\nu_Z\left(dz\right)\left[C\left(t,S_{t^-}\left(1+z\right)\right)-C\left(t,S_{t^-}\right)-z\phi_t\tilde{S}_{t^-}\right]^2\right]\end{aligned}$$

Cela nous permet d'examiner s'il y a des cas ou l'erreur de couverture tend vers zéro c'est à dire est ce qu'on peut atteindre une **couverture parfaite ?**

5.4 Couverture parfaite

- Le premier cas où il n'y a pas de sauts ie $\nu = 0$:
Le risque résiduel diminue en :

$$R_T(\phi) = E\left[\int_0^T \left[\phi_t S_{t^-} - S_{t^-}\frac{\partial C}{\partial S}(t, S_{t^-})\right]^2 dt\right]$$

et on peut recouvrer le B-S par $\Delta-$hedging

$$\phi_t = \Delta^{BS}(t, S_t) = \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t)$$

qui donne un $\varepsilon(\phi) = 0 \; p.s.$
- Un autre cas ou $\sigma = 0$, et il y a une seule taille de sauts $\nu = \delta_a$: $X_t = aN_t$ où N un processus de Poisson. Dans ce cas :

$$R_T(\phi) = E\left[\int_0^T S_{t^-}^2 \left[C(t, S_{t^-}(1+a)) - C(t, S_{t^-}) - \phi_t\right]^2 dt\right]$$

et en choisissant :

$$\begin{aligned}\phi_t &= \frac{C(t, S_{t^-}(1+a)) - C(t, S_{t^-})}{S_{t^-}a} \\ \phi_0 &= e^{rt}S_t\phi_t - e^{rt}\int_0^t \phi_t dS_t\end{aligned}$$

on obtient une stratégie autofinancée (ϕ_t^0, ϕ_t) qui est une stratégie de réplication :

$$\phi(S_T) = V_0 + \int_0^T \frac{C(t, S_{t^-}(1+a)) - C(t, S_{t^-})}{S_{t^-}a} dS_t + \int_0^T r\phi_t^0 dt$$

Ce sont les deux seuls cas où la couverture est parfaite.

5.5 Problème du smile

L'utilisation du modèle et de la formule B-S est très répandue sur les marchés financiers, à tel point que certaines cotations se donnent en niveau de volatilité plutôt qu'en prix absolu. En effet, les autres paramètres du modèle (durée à l'échéance, prix d'exercice, taux d'intérêt sans risque et prix du sous-jacent) sont facilement observables sur les marchés. Cependant, celui ne permet pas de modéliser précisément le monde réel. L'expérience montre qu'en réalité la volatilité dépend du prix d'exercice et de la maturité. Le modèle de B-S suppose une volatilité constante or cela n'est absolument pas le cas dans la réalité.

La question posée est pour quoi on s'intéresse à établir une formule donnant la valeur d'un contrat d'option à chaque instant de son existence, alors qu'il existe un marché négociable dont la raison d'être est précisément de fixer cette valeur par le jeu de l'offre et de la demande ?

Donc le point essentiel est la présence du paramètre de volatilité qui n'est pas observable à chaque instant sur le marché, alors il faut l'extraire. Une voie naturelle est de l'estimer statistiquement à partir de l'observation des cours, ce qui est essentiellement ignorée par les financiers qui ont beaucoup confiance dans le marché que dans le modèle. Forts de cette conviction, ils **inversent** le problème, qui peut donc être calibré à partir d'un seul prix d'option.

5.5.1 Volatilité implicite

La volatilité implicite est trés utilisée pour le calcul des ratios de couverture des options européennes.

Dans le modèle de Black et Scholes continu $\upsilon = 0$ et les prix d'une option call sont uniquement données par la formule définie par

$$C^{BS}\left(t, S_t\right) = x\varphi\left(d_1\right) - Ke^{-r\theta}\varphi\left(d_2\right)$$

Si tous les autres paramètre sont fixés, alors l'équation est une fonction continue croissante définie de $]0, \infty[$ dans $\left]\left(S_t - Ke^{-r\theta}\right)^+, S_t\right[$.

Donc, on donne le prix du marché $C_t^*\left(T, K\right)$ d'une option call qui pourra toujours invertir en $C^{BS}\left(t, S_t\right)$ et on trouve la valeur du paramètre de volatilité qui donne le prix correcte d'option :

$$\exists ! \sum\nolimits_t \left(T, K\right) > 0; \quad C^{BS}\left(S_t, K, \tau, \sum\nolimits_t \left(T, K\right)\right) = C_t^*\left(T, K\right)$$

La solution unique de cette équation est appelée **la volatilité implicite** d'option.

- Le modèle B-S implique que la volatilité implicite dénote les options sur le même sous jacent doit être la même, et égale à la volatilité historique du sous jacent.
- La volatilité implicite est toujours supérieure à la volatilité des sous jacents.
- La volatilité implicite de différentes options sur le même sous jacent dépendent de leurs strikes et maturités.
- Pour presque tous les strikes, la volatilité implicite décroît en fonction de srike (phénomène de skew).
- **Le phénomène de skew** est dû au fait que le modèle B-S sous-estime la probabilité d'un grand mouvement du prix général.
- Pour des grands strikes on observe parfois une légère remonté de la volatilité implicite (phénomène de smile).
- **Le phénomène de smile** peut être expliqué par les primes de liquidité qui sont plus élevées pour les options loin de la monnaie.

Ces deux phénomènes sont les plus prononcés pour les options de courte maturité.

5.5.2 Surface de volatilité implicite

La fonction $\sum_t : (T, K) \rightarrow \sum_t (T, K)$ est appelée **la surface de volatilité implicite** au temps t.

En pratique, la surface de volatilité (la volatilité implicite en fonction du prix d'exercice et de la maturité) n'est pas plate. Souvent, pour une maturité donnée, la volatilité implicite par rapport au prix d'exercice a une forme de sourire (appelé **le smile de volatilité**) : "à la monnaie", la volatilité implicite est la plus basse et plus on s'éloigne de la monnaie, plus elle est élevée. On constate par ailleurs que le smile n'est souvent pas symétrique sur le marché des actions : plus haut du coté put que du coté call. Cela est dû au fait que les acteurs de marché sont plus sensibles au risque de baisse qu'au risque de hausse de l'action.

Pour un prix d'exercice donné, la différence entre la volatilité implicite observée et celle à la monnaie s'appelle **le skew.**

En utilisant la "moneyess" $m = K/S_t$ de l'option , on peut aussi représenter la surface de volatilité implicite comme une fonction de "moneyess" et du temps à l'échéance :

$$I_t(\tau, m) = \sum\nolimits_t (t + \tau, mS(t))$$

5.5.3 Volatilité implicite d'un exp-Lévy

Dans le modèle exponentiel de Lévy l'évolution dans le temps de la volatilité implicite est particulièrement simple, comme l'indique la proposition suivante :

Proposition 71 *quand la dynamique risque neutre est donnée par une exponentielle de Lévy, la volatilité implicite pour une moneyess $m = K/S_t$ et le temps à l'échéance τ ne dépend pas du temps.*

$$\forall t \geq 0, \; I_t(\tau, m) = I_0(\tau, m)$$

Preuve

$$\begin{aligned} \frac{C_t(S_t, K, T)}{S_t} &= me^{-r\tau} E\left(m^{-1} e^{r\tau + X_\tau} - 1\right)^+ \\ &= g(\tau, m) \end{aligned}$$

qui est, le ratio du prix d'option d'un actif dépend seulement de la moneyess et le temps jusqu'a l'échéance.

La même relation est vraie pour le modèle Black et.Scholes :

$$\frac{C^{BS}(t, S_t, T, K, \sigma)}{S_t} = g_{BS}(\tau, m, \sigma)$$

La volatilité implicite $I_t(\tau, m)$ est définie par la résolution de l'équation

$$C^{BS}(t, S_t, T, K, \sigma) = S_t g(\tau, m) \Longleftrightarrow g_{BS}(\tau, m, I_t(\tau, m)) = g(\tau, m)$$

puisque chaque cotation dépend seulement de (τ, m) et non pas de t, on conclu que la volatilité implicite de "moneyess" donnée m et un temps à l'échéance τ ne dépend pas du temps.

$$\forall t \geq 0, \; I_t(\tau, m) = I_0(\tau, m)$$

■

Notons que la volatilité implicite d'un "strik" donné n'est pas constante dans le temps, c'est une solution stochastique de :

$$\sum\nolimits_t (T, K) = I_0(K/S_t, T - t)$$

Remarque 72 *Pour plus de détails voir [4].*

Conclusion

Ce travail est consacré à l'étude des modèles de Black et Scholes dans le cas continu et avec saut, dans le but de leur application en finance. Pour cela, on a commencé par un rapel des outils mathématiques nécessaires, à savoir le mouvement Brownien, les martingale, les processus de Lévy, les mesures aléatoires de Poisson, et les semi-martingales qui jouent un rôle essentiel dans le calcul stochastique (continu et avec sauts). Dans le modèle de Black et Scholes continu, les formules des prix des options européennes sont explicites, la couverture est parfaite, et la stratégie de couverture a un risque résiduel égale à zéro. Par contre dans le cas du modèle de black et Scholes avec sauts, et comme le processus est basé essentiellement sur les sauts, et que la distribution des sauts n'a pas une formule explicite, les prix des options sont implicites (transformée de Fourrier), il n'y a pas de couverture parfaite : les options sont des investissements risqué, et la stratégie de couverture est donnée par la solution du problème d'optimisation du portefeuille.

"Les outils mathématiques sont devenus déterminants en finance. Ils ont initialement contribué avec Black et Scholes à l'explosion des activités du marché et, aujourd'hui, la demande en profils hautement techniques reste importante, malgré les crises financières.
Donc, que l'on s'en réjouisse ou qu'on le déplore, le calcul stochastique et par extension, les probabilités et les mathématiques appliqués sont devenus « la voie » d'accès de la filière scientifique aux métiers de la finance de marché. A l'heure actuelle, c'est une autoroute, l'avenir dira ce qu'il en est."
E.Gobet, G.Pagès, M.Yor

Chapitre 6

Petit lexique : Anglais-Français

A

action (share stock) : est un titre de propriété délivré par une société de capitaux (i.e. une société anonyme ou Société en commandite par actions). Elle confère à son détenteur la propriété d'une partie du capital, avec les droits qui y sont associés : Intervenir dans la gestion de l'entreprise et en retirer un revenu appelé **dividende**.

arbitrage : est une opération financière assurant un gain positif ou nul de manière certaine.

absence d'opportunité d'arbitrage

On dit qu'il existe une **opportunité d'arbitrage (arbitrage opportunity, free lunch)** sur le marché financier lorsqu'il existe une stratégie sans risque d'achat et de vente de titres qui peut rapporter des gains strictement positifs.Ce qu'il n'existe en pratique que dans un temps très court.

arbitragistes : acteurs sur les marchés dont le rôle est de détecter ce type d'opportunités et d'en profiter

asset : actif financier, valeur.

at the money : à la monnaie, à parité : se dit d'une option dont le prix d'exercice est égal au prix à terme de l'actif sous-jacent $\neq$ s'oppose à **in the money** et à **out of the money.**

attainable : atteignable, simulable (pour un marché).

average option :=Asian option, option asiatique.

C

call (option) : option d'achat.

cash flow : flux de trésorie, ou elle est souvent utilisée dans le sens de "capacité d'autofinancement ".

claim : demande, réclamation.

contingent claim (actif contingent) : ou actif conditionnel, il s'agit d'un contrat entre agents ou instituants spécifiant des conditions pour qu'une certaine transaction financière soit réalisée.

En mathématique financière, c'est un synonyme de **dérivative security.**

couverture (hedging) : protection contre le risque généré par une position.

coupon : revenu perçu par le détenteur d'une obligation "**intérêt**" ou d'une action "**dividende**".

currency : unité monétaire, monnaie, devise.

D

default risk : risque de défaut.

discounted price : prix actualisé.

dividende : c'est le revenue tiré d'un placement en titres de capital (action, certificats d'investissement,...).

Le dividende est généralement versé chaque année et varie en fonction des bénéfices réalisés par l'entreprise.

E

equity : action, capital, fonds propres.

exchange : bourse. − **rate** : taux de change.

F

fair price : juste prix.

fixed income market : marché obligataire.

forex, foreign exchange : marché des changes.

forward price : prix à terme.

free lunch : synonyme d'opportunité d'arbitrage.

futures (contrat à terme) : le vendeur du contrat s'engage à acheter ou à vendre à l'échéance du contrat une quantité minimum (ou un multiple de ce minimum) à un cours négocié sur le marché organisé.

G

gain : synonyme de pay off.

greeks : lettres grecques.

H

hedging : couverture.

holder : acheteur (d'un titre), détenteur.

I

in the money : Une option est dite **dans la monnaie** (in the money) lorsque son exercice procure un gain à son détenteur. Elle est dite hors de la monnaie (**out of the money**) dans le cas contraire. Enfin, si l'acheteur est indifférent, l'option est à la monnaie (**at the money**).

L

levrage : financement par emprunt.

liability : responsabilité, dette, passif.

M

maturity (maturité) : date d'échéance, date d'expiration (d'une option).

mark to market : maquer au marché, évaluer au prix du marché.

montant : c'est la quantité d'actifs sous jacent à acheter ou à vendre.

O

obligation (bond) : un titre de dette remboursable, que l'émetteur du titre doit rembourser au détenteur du titre à une certaine échéance.

option abandonnée : Si l'option n'a pas été exercée à la date d'échéance.

option asiatique : La valeur à l'échéance d'une option asiatique découle du prix moyen du sous-jacent sur la durée de l'option. Elles coûtent moins cher que les options vanilles car la valeur moyenne d'un sous-jacent est moins volatile que sa valeur à un instant donné.

option à barrière ou parisienne

L'**option à barrière activante (knock-in option)** à une valeur à l'échéance dépendant du fait que les sous jacents atteigne ou non un certain niveau de cours dit barrière, pendant la durée de vie de l'option. L'option n'est active que si elle atteint la barrière, et, dans ce cas, à l'échéance sa valeur est la même qu'une option standard. En revanche elle coûte moins cher qu'une option vanille puisqu'elle est plus risquée.

L'**option à barrière désactivante (knock-out option)** fonctionne de la même manière que l'option à barrière activante sauf que l'option à barrière est désactivée lorsque l'actif sous-jacent atteint un certain niveau.

option simulable (ou réplicable) : une option est dite simulable si sa valeur à l'échéance est égale à la valeur finale d'une stratégie admissible.

P

pay off : Le résultat d'une option à son échéance (appelé couramment pay off) ne dépend que du prix du sous-jacent, c'est la valeur terminale d'une option =gain.

portefeuille (portefilio) : ensemble des titres détenus par une personne.

position : position, situation : groupe de titres détenus par un agent.

prime (preminum) : C'est le droit d'acheter ou de vendre ou se négocie, sur un marché d'options spécialisé (géré par une bourse, ou au gré à gré), contre un certain prix, c'est le prix d'option elle même.

prix d'exercice (strike price) : le prix (fixé d'avance) auquel se fait la transaction en cas d'exercice de l'option.

Produits dérivés (deravative product) : un titre dont la valeur dépend d'un autre titre, ce sont : **contrats à terme, futures et options.**

put (option) : option de vente.

R

risk assesment : évaluation du risque.

risk-neutral probability (probabilité risque -neutre) : est la probabilité sous laquelle le rendement instantané moyen de l'actif égal à celui de l'actif sans risque. L'existence d'une telle probabilité est liée à l'une des hypothèses d'efficience du marché **"l'absence d'opportunité d'arbitrage".**

S

share : action.

share holder : actionnaire.

security : titre, valeur. **derivative security,** produit dérivé.

settlement price : forward price.

scénario (senario) : c'est une séquence d'actions qui illustrent un comportement**.**

short position : on est dans cette position si on est acheteur ou vendeur de contrat.

short position selling (vendre à découvert) : vente par un agent d'un actif qu'il ne possède pas encore, l'agent espère que le prix de l'actif va baisser, ce qu'il permettra de l'acheter plus tard à un prix inférieur au prix de vente fixé.

short rate : taux à court terme.

simulable (ou réplicable) : voir option**.**

skew : la différence entre la volatilité implicite observée et celle à la monnaie, pour un prix d'exercice donné, c'est la pente du smile à la monnaie ie lorsque le strike est le prix à terme.

smile (de volatilité) : graphe de la volatilité en fonction du prix d'exercice en forme de sourire (courbe généralement convexe).

swap (échange) : cela consiste en un échange de flux financiers (taux d'intérêt ; dettes, devises,.....) à une échéance fixée à l'avance.

T

trader : négociant.

time value : voir valeur temps.

U

underlying asset (actif sous-jacent : une quantité donnée d'un actif financier (action, obligation, indice boursier, devise, matière première, autre produit dérivé, etc.).

Les sous-jacents : actions, taux de change, obligations et taux d'intérêt.

V

valeur temps (time value) : La valeur temps d'une option est la survaleur que le marché lui attribue en sus de sa valeur intrinsèque.

valeur intrinsèque : La différence entre le prix d'exercice d'une option et la valeur de marché de l'actif sous-jacent. Les options qui sont dans la monnaie ou en dehors la monnaie n'ont pas de valeur intrinsèque.

value at risk : mesure de risque d'un portefeuille sur une période donnée.

vanilla :

plain vanilla : se dit d'un produit ordinaire (simple et standard).

vanilla option : option ordinaire (européenne ou américaine).

valorisation : pricing.

venture capital : capital-risque.

volatilité (volatility) :

volatilité historique : c'est l'amplitude de variation d'un titre, d'un fonds, d'un marché ou d'un indice sur une période donnée.

volatilité implicite : Un chiffre dérivé du prix du marché d'une option. On peut analyser la volatilité implicite comme une mesure du risque d'un instrument ou d'un portefeuille au jour d'aujourd'hui, et non pas à un moment donné du passé (ce qui serait la volatilité historique).

W

warrant : bon de souscription d'actions ; les warrant sont souvent émis par les compagnies sur leurs propres actions.

writer : vendeur (d'un titre).

Y

yield : taux de retour d'investissement.

Bibliographie

[1] D. Applebaum, Lévy prosses and stochastic calculus, Cambridge university Press, New york 2004.

[2] R.F. Bass, Stochastic Differential equations with Jumps. Septembre 2003.

[3] R. ELIE, Calcul stochastique appliqué à la finance , ENSAE Avril 2006.

[4] J. Gatheral, foreword by Nassim Nicholas Taleb, The volatility surface : a practioner's guide, John Willy and sons 2006.

[5] A. Gerschenfeld & C. Nadal, Lois indéfiniment divisibles et processus de Lévy, DMA, Ecole Normale Supérieure, 24 juin 2006.

[6] E. Gobet, G. Pagès, M.Yor, Mathématiques et finance.

[7] E. Janvresse, S. Pergamenchtchikov, P. R.de Fitte, Mathématiques pour la finance et l'assurance.

[8] T.G. Kurtz, Lectures on Stochastic Analysis, Departments of Mathematics and Statistics University of Wisconsin - Madison, Revised September 7, 2001.

[9] D. Lamberton, B. Lapeyer. Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance, Ellipses(2nd. ed.1997).

[10] J-P. Laurent, Modèles de Prix de Produits Financiers, 14 octobre 1996.

[11] P.E. Protter, Stochastic Integration and Differential equations, Springer (1990,2nd. ed.2003).

[12] N. Rousseau, Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance Laboratoire Dieudonné, Université de Nice - Sophia Antipolis January 29, 2007.

[13] A. Sulem, B. Oksendal,Applied Stochastique Control of Jump Diffusions, Springer. August 2004.

[14] P. Tankov, Lévy Processes in Finance : Inverse Problems and Dependence Modelling, Theèse soutenue septembre2004, Ecole Polytechnique.

[15] P. Tankov, R. Cont. Financial Modelling with Jump Processes, Chapman & Hall CRC press, 2004.

Résumé

Le but de ce travail est la modélisation des marchés financiers par le modèle de Black et Scholes en utilisant le calcul stochastique dans le cas continu et discontinu. Le cas discontinu qui s'apprête mieux à la modélisation des marchés financiers avec sauts (crash boursier) est largement étudié. En introduisant la notion d'intégrale stochastique par rapport à une semi martingale, on retrouve les formules des prix des options (transformées de Fourrier) européennes, et une stratégie de couverture pour éliminer ou au moins minimiser les risques.

Mots clés : Martingales, Semi Martingales, Mouvement Brownien, Processus de Lévy, Formule d'Itô.

Abstract

The aim of this work is the modelling of financial markets with the Black-Scholes model by using stochastic calculus in the continuous and discontinuous cases. The discontinuous case witch is better to modelling financial markets with jumps (stock market crash) is widely studied. By introducing the notion of stochastic integral over a semi martingale, we find the formulas of the (Fourier transformed) European options prices, and a hedging strategy to eliminate or at least minimize the risks.

Key-words : Martingales, Semi Martingales, Brownian motion, Lévy processes, Itô-formula.

ملخص النماذج المالية بقفزات

إن الهدف من هدا العمل هو تمثيل السوق المالية بنموذج بلاك و شولز باستعمال الحساب العشوائي في الحالة المستمرة و غير المستمرة.

الحالة المستمرة تتناسب أفضل مع نماذج الأسواق الملية يمكن أن تعرف قفزات انهيار سوق الوراق المالية والتي قد درست على نطاق واسع.

وباستعمال مفهوم التكامل العشوائي بالنسبة ل نصف المرتنجال نحصل على صيغ أثمان العقود الأوروبية تحويلة فورييه، و إستراتجية تغطية للقضاء أو على الأقل الحد من المخاطر.