

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES**

N° d'ordre :

N° série :

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de :

Magister

Thème

Simulation du temps local d'un mouvement brownien

Par :

Ameziane Bachir

Directeur de la thèse

Pr A.Bencherif Madani

Devant le jury :

Président :	Z.MOHDEB	Prof	U. Constantine
Rapporteur . :	A.BENCHERIF MADANI	Prof	U. Sétif
Examineurs :	F.MESSACI	MC	U. Constantine
	F.L.RAHMANI	M.C	U. Constantine

Soutenue le : 2007

Table des matières

1	Préliminaire	5
1.1	Généralités	5
2	Eléments de la théorie de la simulation	13
2.1	Simulation et suites de nombres au hasard	13
2.2	Simulation d'une loi uniforme	15
2.2.1	Générateur pseudo-aléatoire	15
2.2.2	Générateurs pseudo-aléatoire congruentiels linéaires	15
2.2.3	Tests d'adéquation à une loi donnée	19
2.2.4	Postulats	21
2.3	Simulation de variables aléatoires	24
2.3.1	Inversion de la fonction de répartition	25
2.3.2	Simulation de lois discrètes	27
2.3.3	Changement de variables	32
2.3.4	Simulation des lois normales	33
2.3.5	Simulation des vecteurs aléatoires gaussiens	34
2.3.6	Méthodes de rejet	36
3	Processus de Markov et processus de Lévy	41
3.1	Généralités	41
3.1.1	Processus stochastiques	41
3.1.2	Loi d'un processus et processus canonique	43
3.2	Processus de Markov	47
3.2.1	Espérance conditionnelle	47
3.2.2	Noyau de transition et fonction de transition	48
3.2.3	Processus de Markov	50
3.3	Processus de Lévy	54
3.3.1	Processus de Lévy	54
3.3.2	Lois infiniment divisibles	56
3.4	Mouvement brownien	60

3.5	Propriétés	61
4	Lois stables	62
4.1	Lois stables, v.a.r. stables	62
4.2	Diverses propriétés	66
4.3	Représentation intégrale de Nolan-Zolotarev	70
4.4	Simulation des lois stables	72
4.5	Vecteurs aléatoires stables	74
4.6	Processus stochastiques α -stable	80
5	Simulation du temps local d'un mouvement brownien	83
5.1	Propriétés des trajectoires browniennes	83
5.2	Simulation du temps local	84
5.3	Annexe	89
	Bibliographie	96

Introduction

Notre mémoire a pour objet la simulation du temps local d'un mouvement brownien. Et pour le faire on a utilisé la simulation de la loi de Bernoulli en se basant sur le théorème démontré par Mr. A. Bencherif [3] qui a donné une discrétisation en temps donnant lieu à une somme de v.a. de Bernoulli.

Le temps local $L(t, x)$ d'un mouvement brownien B à l'instant t au niveau x mesure le temps que passe B dans x . C'est un modèle probabiliste qui nous permet de reconstituer les résolvantes des processus de base par la formule

$$R_\lambda f(x) = E^x \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} f(B_s) ds = E^x \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} ds \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) L(s, y) dy \right).$$

Il nous a semblé bon de définir les processus de Markov et plus spécialement les processus de Lévy α -stables car le théorème de Mr. A. Bencherif passe par une loi forte entropique concernant l'image d'un subordonateur α -stable de Lévy. Ceci nous permet non seulement d'établir un temps local pour le mouvement brownien, mais aussi pour tous les processus semi-stable de Lamperti-Stone.

Ce mémoire est présenté comme suit :

Dans le chapitre 1, nous introduisons divers notions de la théorie des probabilités dont nous aurons besoin dans le développement des idées du mémoire. Dans le chapitre 2, nous parlons de la théorie de la simulation où nous faisons une brève présentation de la simulation d'une loi uniforme sur laquelle est basée la simulation de toute autre v.a. et nous donnons la simulation de quelques lois discrètes comme la loi de Bernoulli et également des lois continues comme la loi normale. Le chapitre 3, porte sur les

processus stochastiques, notamment le processus de Markov, le processus de Lévy et le mouvement brownien. Dans le chapitre 4, nous introduisons les lois stables, les propriétés des lois stables, les représentations intégrales de Nolan-Zolotarev et finalement la simulation des lois stables. En fin dans le chapitre 5, nous présentons une simulation du temps local d'un mouvement brownien auquel nous avons rajouté un annexe dans lequel nous donnons des simulations de quelques processus stochastiques tels que le mouvement brownien.

Pour des raisons de commodité, le lecteur est tenu de consulter le glossaire ainsi les préliminaires concernant les notations et leur signification.

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Généralités

Le principe de probabilité pour la construction d'une modélisation stochastique d'une variable x à valeurs dans \mathbb{R}^n conduit :

(1) à introduire un ensemble Ω dont chaque élément $\omega \in \Omega$ appelé événement élémentaire représente une combinaison des causes dont dépend l'état de x ,

(2) à munir Ω d'une tribu \mathcal{F} dont les éléments sont appelés événements,

(3) à munir l'espace probablisable (Ω, \mathcal{F}) d'une mesure de probabilités, i.e. une mesure de masse totale 1, $P(\Omega) = 1$.

Le triplet (Ω, \mathcal{F}, P) est appelé espace de probabilités ou espace probablisé.

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probablisé. Il existe une application X de Ω dans \mathbb{R}^n qui associe, à chaque combinaison ω des causes, une combinaison $X(\omega)$ des conséquences.

Ce qui conduit :

- (1) à équiper \mathbb{R}^n d'une tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ t.q. X soit une application mesurable,
- (2) à équiper l'espace probabilisable $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ avec la mesure de probabilité $P_X = X(P)$ t.q.

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P_X(B) = P(X \in B).$$

L'application X est appelée v.a. définie sur l'espace de probabilités (Ω, \mathcal{F}, P) , à valeurs dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, et la mesure de probabilité P_X sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ est appelée la loi de probabilités de la v.a. X . La v.a. X est une modélisation stochastique de la variable x .

Si X est une v.a. sur (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ positive ou intégrable sur Ω , alors l'espérance de X notée $E(X)$ est la quantité (finie ou non) :

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} x P_X(dx).$$

Proposition 1.1 Caractérisation d'une loi

Soit μ une probabilité sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ et X une v.a. : $(\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$,

alors

$$\mu = P_X \text{ (ie. } \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu(B) = P_X(B)) \Leftrightarrow$$

$\forall h : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable positive,

$$E(h(X)) = \int_E h(x) \mu(dx),$$

donc la donnée de $E(h(X))$ détermine la loi de X .

Une v.a. X à valeurs dans \mathbb{R}^n est discrète ssi. il existe une partie $D \subset \mathbb{R}^n$ au plus dénombrable t.q. $P(X \in D) = 1$.

Dans ce cas la loi de la v.a. X est :

$$P_X = \sum_{x \in D} P(X = x) \delta_x.$$

On dit aussi que la loi de X est portée par D pour exprimer $P(X \in D) = 1$.

La f.r. de X est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} : F_X(t) = P(X \leq t) = P_X([-\infty, t]).$$

Si X est discrète, alors

$$F_X(x) = \sum_{k, x_k \in X(\Omega), x_k \leq x} P(X = x_k) = \sum_{k, x_k \in X(\Omega), x_k \leq x} P_k.$$

Rappelons que

1. La f.r. est croissante, continue à droite, admet une limite à gauche ($F_X(t_-) = P(X < t)$), $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$.
2. La f.r. caractérise la loi, i.e. $F_X = F_Y$ ssi. $P_X = P_Y$.
3. La f.r. admet au plus un nombre dénombrable de points de discontinuité.
4. si $P_X \ll \lambda_{\mathbb{R}}$ ($\lambda_{\mathbb{R}}$ mesure de Lebesgue), $P_X = f\lambda_{\mathbb{R}}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$ et F_X est continue sur \mathbb{R} .

Moments d'une v.a.

1. (a) Si $X \in L^p(\Omega, F, P)$, $p \in \mathbb{N}^*$, on appelle moment d'ordre p de X , resp. moment centré d'ordre p de X , le nombre réel :

$$m_p = E(X^p), \text{ resp. } m'_p = E(X - m_1)^p.$$

m_2' s'appelle la variance de X et $\sqrt{m_2} = \sigma_X$ s'appelle l'écart type de X

(b) Si X et $Y \in L^2(\Omega, F, P)$, on appelle covariance de X et Y le réel :

$$\text{Cov}(X, Y) = E(X - EX)(Y - E(Y))$$

Il mesure le degré de dépendance entre X et Y . Par exemple, si les v.a. sont normales, $\text{Cov}(X, Y) = 0$ ssi. les v.a. X et Y sont indépendantes.

2. (a) Si X est une v.a. à valeurs \mathbb{R}^n de composantes X_1, X_2, \dots, X_n intégrables sur Ω on appelle espérance de X , le vecteur de \mathbb{R}^n

$$m = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}$$

(b) Si X_1, \dots, X_n sont de carré intégrable, on appelle matrice de covariance de X la matrice carré d'ordre n

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix},$$

où $\sigma_{ij} = E[(X_i - m_i)(X_j - m_j)]$

En notation vectorielle,

$$m = E(X), \quad \Gamma = E[(X - m)(X - m)']$$

La matrice de covariance Γ est symétrique, de type positive, i.e. pour tout $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $u'\Gamma u \geq 0$.

Produit de lois et produit de convolution

Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ un vecteur aléatoire, $X = (X_1, \dots, X_n)$. Rappelons que

$$P(X \leq t) = P(X_1 \leq t_1, \dots, X_n \leq t_n)$$

$$P_{X_i}(A_i) = P(\mathbb{R} \times \dots \times A_i \times \dots \times \mathbb{R}) \quad (\text{la loi marginale de } X_i).$$

$P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}$ (probabilité-produit) est l'unique probabilité sur \mathbb{R}^n t.q. :

$$\forall B_i, i = 1, \dots, n, \quad P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}(B_1 \times \dots \times B_n) = P_{X_1}(B_1) \times \dots \times P_{X_n}(B_n).$$

Le produit de convolution de P_{X_1}, \dots, P_{X_n} est la mesure image de $P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}$ par l'application :

$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_1 + \dots + x_n$ de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on note cette mesure

$$P_{X_1} * \dots * P_{X_n}$$

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad P_{X_1} * \dots * P_{X_n}([X_1 + \dots + X_n \in B]) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} 1_B(x_1 + \dots + x_n) (P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n})(dx_1 \dots dx_n).$$

** est associatif, commutatif, admet δ_0 pour élément neutre et il est distributif par rapport à la somme des mesures.*

Indépendance

Deux v.a. X, Y sont dites indépendantes si pour $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, les événements $\{X \in A\}, \{Y \in B\}$ sont indépendantes :

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \times P(Y \in B).$$

Les m v.a. X_1, \dots, X_m sont dites indépendantes si pour toute $A_{i_1}, \dots, A_{i_p} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ avec $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m$, on a

$$P\left(X_{i_1} \in A_{i_1}, \dots, X_{i_p} \in A_{i_p}\right) = P\left(X_{i_1} \in A_{i_1}\right) \times \dots \times P\left(X_{i_p} \in A_{i_p}\right).$$

Une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de v.a. est dite indépendante si pour toute sous-suite finie de $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la propriété précédente est vraie.

Proposition 1.2 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est à composantes indépendantes ssi. l'une des assertions suivantes est vérifiée :

1. $P_X = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}$.
2. $\forall t_1, \dots, t_n, P(X_1 \leq t_1, \dots, X_n \leq t_n) = P(X_1 \leq t_1) \times \dots \times P(X_n \leq t_n)$.
3. $E\left(\prod_{i=1}^n f_i(X_i)\right) = \prod_{i=1}^n E(f_i(X_i)), \forall f_i$ borélienne bornée (ou positive).

Remarque 1 Si X_1, X_2, \dots, X_n sont des v.a. indépendantes, alors

$$P_{X_1 + \dots + X_n} = P_{X_1} * \dots * P_{X_n}$$

Car, $P_{X_1 + \dots + X_n}(A) = P(X_1 + \dots + X_n \in A) = E(1_A(X_1 + \dots + X_n)) =$

$$\int_{\mathbb{R}^n} 1_A(x_1 + \dots + x_n) dP_{(X_1, X_2, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} 1_A(x_1 + \dots + x_n) P_{X_1}(dx_1) \otimes \dots \otimes P_{X_n}(dx_n) = P_{X_1} * \dots * P_{X_n}(A).$$

Fonction caractéristique

On a déjà vu que la f.r. d'une v.a. X caractérise sa loi. Autrement dit, sur \mathbb{R} par exemple, la donnée de

$$F_X(t) = E(1_{]-\infty, t]}(X)), t \in \mathbb{R}$$

détermine la loi de X . Mais comme les indicatrices sont des fonctions boréliennes bornées, la donnée de $E(\Phi(X))$ pour toute fonction borélienne bornée Φ caractérise la loi P_X . En fait on peut se restreindre aux fonctions \mathcal{C}^∞ bornées, i.e. la donnée

de $E(\Phi(X))$ pour toute fonction C^∞ bornée caractérise P_X . Dans ce paragraphe on prendra la famille des fonctions sinus et cosinus.

Soit X un vecteur aléatoire sur (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans \mathbb{R}^n , on appelle fonction caractéristique (f.c.) de X ou transformée de Fourier de sa loi, et on note Φ_X la fonction à valeurs dans \mathbb{C} :

$$\mathbb{R}^n \ni u \rightarrow \Phi_X(u) = Ee^{i\langle u, X \rangle} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle u, x \rangle} P_X(dx) = E(\cos \langle u, x \rangle) + i.E(\sin \langle u, x \rangle).$$

Propriétés

1. Φ_X est continue, $\Phi(0) = 1$, $|\Phi_X(u)| \leq 1$.
2. La f.c. caractérise la loi, i.e. $\Phi_X = \Phi_Y$ ssi. $P_X = P_Y$. Autrement dit la donnée

de

$$Ee^{i\langle u, X \rangle}, \quad u \in \mathbb{R}^n$$

détermine la loi de X .

3. $\Phi_{aX+b}(u) = e^{i\langle u, b \rangle} \Phi_X(au)$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^n$; $\Phi_{-X}(u) = \overline{\Phi_X(u)}$

Si $P_{-X} = P_X$, Φ_X est réel.

4. Si $\Phi_X \in L^1(\lambda_{\mathbb{R}^n})$, $\mu_X = h\lambda$ avec $h(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle u, x \rangle} \Phi_X(u) du$.

5. Si $E(X^p) < \infty$, alors Φ est p fois dérivable (de classe C^p)

et $\Phi_X^{(p)}(u) = i^p E(X^p e^{i\langle u, X \rangle})$. En particulier,

$$i^p E(X^p) = \Phi_X^{(p)}(0).$$

6. X_1, X_2, \dots, X_n v.a. indépendantes $\Leftrightarrow \Phi_{X_1+\dots+X_n}(u) = \Phi_{X_1}(u) \times \dots \times \Phi_{X_n}(u)$.

ou (théorème de Kac) $\Leftrightarrow \Phi_{(X_1, X_2, \dots, X_n)}(u_1, \dots, u_n) = \Phi_{X_1}(u) \times \dots \times \Phi_{X_n}(u)$,

où

$$\Phi_{(X_1, X_2, \dots, X_n)}(u_1, \dots, u_n) = E \exp \left(i \sum_{j=1}^n \langle u_j, x_j \rangle \right).$$

Convergences

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^n et X une v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^n

(1) $X_n \rightarrow X$ *P-p.s.* si $P \left\{ \omega, X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X(\omega) \right\} = 1$.

(2) $X_n \rightarrow X$ en probabilité (noté $X_n \xrightarrow{P} X$) si $\forall \varepsilon > 0, P \{ |X_n - X| > \varepsilon \} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

(3) $X_n \rightarrow X$ en loi (noté $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$) si $\forall f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n), Ef(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Ef(X)$.

Le résultat suivant, dû à Lévy, est fondamental

Théorème de continuité *La suite de v.a. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la v.a.*

X ssi. $\forall u \in \mathbb{R}^n,$

$$\Phi_{X_n}(u) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Phi_X(u),$$

où Φ_{X_n} est la f.c. de X_n et Φ_X celle de X .

Loi forte des grands nombres de Kolmogorov

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^}$ est une suite de v.a. intégrables, i.i.d. alors*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} E(X_1) \quad \text{P-p.s.}$$

Ce résultat fondamental justifie l'axiomatique des probabilités puisqu'il établit le lien avec l'intuition fréquentiste.

Théorème Central Limite

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^}$ est une suite de v.a. de carrés intégrables, i.i.d. alors la suite*

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - E(X_1) \right)$$

où $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$, converge en loi vers une loi normale centrée réduite.

Chapitre 2

Eléments de la théorie de la simulation

2.1 Simulation et suites de nombres au hasard

Expérimentalement, simuler une v.a. X de loi donnée consistera à faire des tirages x_0, x_1, \dots, x_n indépendantes de telle sorte que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{x_i \in B\}} = P(X \in B).$$

Considérons une suite de nombres x_0, x_1, \dots, x_n obtenue par simulation de la loi uniforme sur $[0, 1]$ (resp. d'entiers entre 0 et 9) peut-on dire qu'elle est constituée de nombres au hasard, c'est à dire plus précisément que ce sont des réalisations $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ indépendantes d'une loi uniforme sur $[0, 1]$ (resp. sur $\{0, \dots, 9\}$)? Et bien dans tout les cas bien sûr. Pour certains, une suite qui peut être générée par

un algorithme n'est pas aléatoire. De ce point de vue, une suite finie n'est jamais aléatoire ! voir N. Bouleau [7], page 73.

De point de vue théorique, on peut dire que cette suite est constituée de nombres au hasard si elle vérifie certains des comportements théoriques des suites de nombres aléatoires, par exemple la loi forte des grands nombres de Kolmogorov :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} E(X_1) \quad P\text{-p.s.}$$

Propriété que l'on ne peut pas vérifier en pratique. La seule conduite pratique que l'on peut raisonnablement tenir, est de vérifier que rien d'in vraisemblable ne se produit. La démarche est ici très empirique, l'intuition nous indique que ce sont les propriétés «statistiques» des suites qui sont importantes, et pas celles d'une suite donnée.

De point de vue informatique, simuler une v.a. X de loi μ donnée consistera à écrire un algorithme (programme informatique) pouvant générer des suites finies dont on considèrera que ce sont des réalisations indépendantes de la loi μ . Bien entendu comme nous ferons appel le plus souvent à des algorithmes déterministes, les suites générées ne sont pas du tout aléatoires. On parlera de suite pseudo-aléatoires. Cependant, elles se montreront suffisantes dans la pratique et l'on vérifiera expérimentalement plus loin quelles ont de «bonnes» propriétés en utilisant des tests statistiques.

La loi uniforme est la première loi que l'on simule. Diverses méthodes permettent ensuite de simuler à partir de la loi uniforme, un grand nombre de lois. Dans la pratique, on met en œuvre des algorithmes rapides de génération de suites pseudo-aléatoires.

2.2 Simulation d'une loi uniforme

2.2.1 Générateur pseudo-aléatoire

Pour effectuer des simulations probabilistes sur ordinateur on utilise un générateur de nombres pseudo-aléatoires. Un tel générateur retourne, dans le jargon des simulateurs, une suite (x_n) de nombres réels compris entre 0 et 1 ; ces réels sont calculés par un algorithme déterministe, mais imitent une réalisation d'une suite de v.a. i.i.d. suivant la loi $\mathcal{U}[0, 1]$.

Tous les langages (ou presque) disposent d'un générateur pseudo-aléatoire. Les syntaxes varient, `ran`, `grand`, `rand`, `Random` ...

Par exemple, Matlab dispose de deux générateurs pseudo-aléatoires :

- `rand` pour la loi uniforme sur $[0, 1]$,
- `randn` pour la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

2.2.2 Générateurs pseudo-aléatoire congruentiels linéaires

La précision des ordinateurs étant finie, les suites les plus courantes retournées par les générateurs sont calculées à partir d'un nombre fini d'entiers $\{0, \dots, M - 1\}$. En divisant par M , on obtient ainsi une suite sur $[0, 1]$. Elle sont construites sur la base de récurrences de la forme

$$u_{n+1} = g(u_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

où g est une fonction de $\{0, \dots, M - 1\}$ dans lui-même et u_0 , appelé graine, est

à initialiser dans $\{0, \dots, M - 1\}$. On pose alors

$$x_n = \frac{u_n}{M} \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

L'exemple le plus simple est celui de la congruence linéaire ou mixte :

$$g(u) = (Au + C) \bmod M,$$

i.e. $g(u)$ et $(Au + C)$ ont même reste dans la division par M , où A et C sont des réels positifs à choisir. Dans le cas $C = 0$, on parle de congruence linéaire multiplicative. Les générateurs congruentiels multiplicatifs (GCM) sont les plus utilisés en pratique.

Rappelons que la période p est le nombre de valeurs possibles de la suite (u_n) et est définie par :

$$p = \min \{k \in \mathbb{N}, \exists n_0 > 0, \forall i \geq n_0, u_{i+k} = u_i\}$$

Propriétés

- (a) $u_i < M$.
- (b) Le nombre maximal de valeurs possibles de la suite est M .
- (c) Dès qu'un nombre est répété, toute la suite recommence.
- (d) Si $p = M$, le générateur est dit de période maximale.

Théorème 2.1 *Un générateur est de période maximale $p = M$ ssi. les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

- i) M et C sont relativement premiers (i.e. C et M n'ont pas de facteurs communs) ;

ii) Tout nombre premier qui divise M divise aussi $A - 1$;

iii) Si 4 divise M , alors 4 divise $A - 1$.

Dans le cas d'un générateur multiplicatif on a le théorème suivant :

Théorème 2.2 *Un générateur multiplicatif ($C = 0$) est de période maximale $p = M - 1$ ssi.*

i) M est premier et

ii) $M - 1$ est le plus petit entier k t.q. $A^k = 1 \pmod{M}$.

Remarque 1 (i) *Un bon générateur*

\Leftrightarrow *Un bon comportement de la suite (u_i) (i.e. les u_i sont proches des réalisations d'une suite i.i.d. $\sim U[0, 1]$)*

\Leftrightarrow *Un bon choix de A , M et C .*

(ii) *Prendre un générateur de période maximale n'assure pas d'avoir un "bon" générateur. On peut montrer que la corrélation entre deux nombres consécutifs d'une suite appartient à l'intervalle :*

$$\rho(X_i, X_{i+1}) \in \frac{a}{m} \pm \left(\frac{1}{a} - \left(\frac{6c}{am} \right) \left(1 - \frac{c}{m} \right) \right)$$

Pour minimiser cette corrélation, on aura donc intérêt à prendre une valeur maximale pour m et petite pour c . On montre aussi que choisir une valeur de a proche de la racine de m est appropriée.

En pratique

. On prendra un M le plus grand possible proche du nombre binaire maximale que l'ordinateur est capable de traiter (précision machine). Exemple $M = 2^{31}$.

. Si $M = 2^\alpha$, on prendra une valeur de C impaire et petite et $A = 2^r + 1$ ou r est proche de $\frac{\alpha}{2}$.

. Si $c = 0$, heureux hasard : $2^{31} - 1 = 2147483647$ est premier!, on prend $M = 2^{31} - 1$ pour un calculateur de 32 bits.

. Il est nécessaire d'initialiser la graine u_0 . Pour obtenir des "tirages" différents, il faut bien évidemment partir d'une graine différente. On peut par exemple initialiser la graine en utilisant l'horloge de l'ordinateur. Ceci doit se faire en tout début de programme.

Exemples.

- . Le langage Matlab utilise GCM avec $A = 7^5 = 16807$, $M = 2^{31} - 1$
- . Le langage SIMULA utilise GCM avec $A = 8192 = 2^{13}$, $M = 67099547$
- . La bibliothèque FORTRAN NAG utilise (fonction g05caf) GCM avec $A = 2^{13}$, $M = 2^{59}$
- . La bibliothèque FORTRAN IMSL utilise (routine GGUBT) GCM avec $A = 397204094$, $M = 2^{31} - 1$
- . Le GCM $A = 7^5$, $M = 2^{31} - 1$ remplace l'ancienne procédure RANDU d'IBM.

Remarque 2 *L'utilisation de tout générateur pseudo-aléatoire doit être validée par la mise en œuvre de tests statistiques dont l'hypothèse nulle est*

$$H_0 : U_1, \dots, U_n \text{ i.i.d. } \sim \mathcal{U}([0, 1]).$$

On peut pour cela considérer des tests classiques d'adéquation à une loi donnée (test de Khi-deux, test de Kolmogorov-Smirnov, etc) et tests d'indépendance.

2.2.3 Tests d'adéquation à une loi donnée

Etant donnée une fonction de répartition F , on souhaite savoir si l'échantillon x_1, \dots, x_n produit par un générateur pseudo-aléatoire peut être considéré comme issu de cette loi. Si l'on note \hat{F} la distribution associée au générateur, le test à mener considère $H_0 : \hat{F} = F$ contre $H_1 : \hat{F} \neq F$.

1. Test de Kolmogorov-Smirnov

Ce test est fondé sur l'utilisation de la f.r. empirique F_n de l'échantillon x_1, \dots, x_n :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq x\}},$$

et sur l'utilisation de la distance $d_K(F_n, F) = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$.

La statistique de test est : $K_n = \sqrt{n}d_K(F_n, F)$.

Avant d'énoncer le théorème de Kolmogorov-Smirnov énonçons le théorème important suivant :

Théorème 2.3 Glivenko-Cantelli

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. i.i.d de f.r. F . On a p.s.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| = 0,$$

où F_n est la f.r. empirique de l'échantillon X_1, \dots, X_n .

Théorème 2.4 Kolmogorov-Smirnov

Si F est continue alors sous H_0 la loi de K_n est indépendante de F et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(K_n \leq x) = H(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j e^{-2j^2 x^2}, \quad x > 0.$$

La série converge très rapidement. En pratique, pour $x > 0,56$, la somme des trois premiers termes donne déjà une approximation avec une erreur inférieure à 10^{-4} .

Il découle du théorème de Glivenko-Cantelli que sous H_1 la statistique de test K_n diverge *p.s.*

La région critique de niveau α du test est $\{K_n > c\}$ où $\alpha = 1 - H(c)$.

Les valeurs de H sont tabluées d'où l'on tire $c = H^{-1}(1 - \alpha)$ à un α donné à l'avance, si $K_n \leq c$ on accepte H_0 et on la rejette dans le cas contraire.

On peut aussi utiliser la p -valeur de ce test qui est $p = 1 - H(K_n)$

On a Rejet de $H_0 \Leftrightarrow p < \alpha$

Dans la pratique $d_K(F_n, F)$ peut se calculer de la façon suivante :

$$d_K(F_n, F) = \max \{d^+(F_n, F), d^-(F_n, F)\}$$

où

$$d^+(F_n, F) = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{i}{n} - F(x_{(i)}) \right\} \text{ et } d^-(F_n, F) = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ F(x_{(i)}) - \frac{i-1}{n} \right\},$$

$x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ représentant la statistique d'ordre associée à x_1, \dots, x_n .

2. Test du Khi-deux

Le test du Khi-deux concerne uniquement les lois discrètes, mais on peut l'utiliser aussi pour des échantillons continus regroupés en classes.

Les observations x_1, \dots, x_n sont réparties en k classes disjointes $[a_{j-1}, a_j]$. L'effectif empirique de chacune des classes est noté n_j . Chacun de ces effectifs est comparé à l'effectif théorique

$$\begin{aligned} np_j &= nP(X \in [a_{j-1}, a_j]) \\ &= n(F(a_j) - F(a_{j-1})). \end{aligned}$$

Sous H_0 ,

$$D^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(n_j - np_j)^2}{np_j} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \chi_{k-1}^2$$

Sous H_1 , $D^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ p.s.

On rejettera H_0 lorsque la distance entre les fréquences observées et théoriques sera grande, ce qui conduit à la région critique de niveau α : $\{D^2 > c\}$ où $\alpha = P(D^2 > c)$.

3. Test des corrélations

Ce test a la particularité de ne pas nécessiter la connaissance de F_X . On calcul simplement les corrélations empiriques de la suite X_i produite. Ce test peut s'appuyer sur le théorème suivant

Théorème 2.5 *Sous H_0 si la suite X_i est de variance finie, alors pour tout $k > 0$, la corrélation empirique \hat{r}_n entre deux échantillons à distance k , basée sur n échantillons, satisfait*

$$\sqrt{n}\hat{r}_n \rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Il s'ensuit que le test qui décide la dépendance si $\sqrt{n}|\hat{r}_n| > x$ a un niveau égale à $2(1 - \Phi(x))$ où Φ est la f.r de $\mathcal{N}(0, 1)$ (probabilité de confiance $2\Phi(x) - 1$).

2.2.4 Postulats

On suppose que l'on dispose d'un bon générateur de nombres pseudo-aléatoires que l'on conviendra de noter `Random` et nous postulerons qu'une succession d'appels

du générateur `Random` peut être modélisée par une suite de v.a. i.i.d $\sim \mathcal{U}[0, 1]$. En d'autres termes :

1. $\forall a, b, 0 \leq a < b \leq 1 \quad P[\text{Random} \in]a, b] = b - a.$
2. *les appels successifs de `Random` sont des v.a. indépendantes.*

Les exemples suivant sont écrits en termes de langage LDFA (Langage de Description Formelle d'Algorithme), cette méthode de structuration des algorithmes est facile à transposer en programmation (pas de déclarations, la grammaire mathématique est celle du Français, \leftarrow désignera l'affectation, ses opérations sont celles des langages habituels), c'est celui que nous allons appliquer à nos simulations.

$$1. X \leftarrow [\text{Random} * 3] * [\text{Random} * 2]$$

La variable X prend les valeurs 0, 1 ou 2.

$$\begin{aligned} P[X = 2] &= P([R_1 * 3] = 2, [R_2 * 2] = 1) \\ &= P(R_1 \in [2/3, 1[\text{ et } R_2 \in [1/2, 1[) \\ &= \left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

On montre de même que $P(X = 1) = 1/6$ et $P(X = 0) = 4/6$.

Contrairement aux apparences, l'algorithme ci-dessus ne retourne pas de valeurs entre 3 et 6. En théorie, la probabilité que `Random` retourne la valeur 1 est nulle. En pratique, les générateurs sont le plus souvent codés de manière à ne retourner ni 0 ni

1.

2. a) Lancer de dé.

$$D \leftarrow [\text{Random} * 6] + 1$$

Pour $k \in \{1, \dots, 6\}$,

$$\begin{aligned} P[D = k] &= P([\text{Random} * 6] = k - 1) \\ &= P([\text{Random} * 6] \in [k - 1, k[) \\ &= P(\text{Random} \in [k - 1/6, k/6[) \\ &= \frac{k}{6} - \frac{k - 1}{6} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

b) Notons $\text{Random}(\{x_1, \dots, x_k\})$ la fonction qui retourne une valeur au “hasard” sur l’ensemble fini $\{x_1, \dots, x_k\}$. Ses appels successifs sont des v.a. indépendantes et le postulat 1 est remplacé par :

$$P(\text{Random}(\{x_1, \dots, x_k\}) = x_i) = \frac{1}{k}, \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Les générateurs permettent de simuler des suites d’expériences aléatoires indépendantes, et donc de calculer de façon approchée des probabilités par application de la loi des grands nombres.

$n_A \leftarrow 0$

Répéter n fois

 expérience

 Si A est réalisé alors $n_A \leftarrow n_A + 1$

 finSi

finRépéter

$f_A \leftarrow n_A/n$.

La variable f_A est la fréquence expérimentale de l’événement A au cours des n expériences.

Exemple. Lancer d'un dé, $A : "D \geq 4"$

$n_A \leftarrow 0$

Répéter n fois

$D \leftarrow \text{Random}(\{1, \dots, 6\})$

Si $D \geq 4$ alors $n_A \leftarrow n_A + 1$

finSi

finRépéter

$f_A \leftarrow n_A/n.$

En sortie de cette algorithm, f_A contient un nombre d'autant plus proche de 0.5 que n est grand. Plus le nombre (fini!) d'expériences est grand, plus précis est le résultat. Il est donc essentiel qu'une boucle de simulation soit la plus rapide possible. Il faut en éliminer toutes les opérations coûteuses ou inutiles.

2.3 Simulation de variables aléatoires

La simulation des v.a. revient souvent à la simulation de la loi uniforme. Le théorème suivant nous assure la possibilité, théorique, de simuler n'importe quelle loi de probabilité sur \mathbb{R}^n à partir de la loi uniforme :

Théorème 2.6 Théorème fondamental de la simulation

Soit $m \geq 1$ un entier et U_1, \dots, U_m des v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour toute loi de probabilité μ sur \mathbb{R}^n , il existe une fonction borélienne $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ dont l'ensemble des points de discontinuité est Lebesgue négligeable t.q. :

$Y = f(U_1, \dots, U_m)$ suit la loi μ .

Il est possible de réaliser ceci en imposant $m = 1$ ou $m = n$ ou encore $m \geq 1$ donné.

Ce théorème donne un résultat théorique intéressant, bien que l'on ne s'en serve pas dans la pratique. On en trouvera une preuve dans N. Bouleau [7], page 267. En lisant la preuve, on s'aperçoit que la fonction f peut être explicitée.

2.3.1 Inversion de la fonction de répartition

La méthode d'inversion est la plus simple des méthodes générales de simulation. Elle consiste à composer un appel de `Random` avec l'inverse de la f.r. de la loi à simuler. Soit F cette f.r. Comme F n'est en général pas une bijection nous convenons de définir son inverse généralisée de la façon suivante.

$$\forall y \in [0, 1], F^{-1}(y) = \inf \{x \in \mathbb{R} ; F(x) \geq y\}.$$

Cette fonction coïncide avec F^{-1} lorsque F est bijective. La méthode de simulation, dite d'inversion (sous entendu de la f.r.) s'appuie sur le résultat suivant.

Théorème 2.7 Soit F une f.r. sur \mathbb{R} et U une v.a. $\sim U([0, 1])$.

La v.a. $X = F^{-1}(U)$ a pour f.r. F .

Preuve. $\forall x \in \mathbb{R}, P[X \leq x] = P[\inf \{y ; F(y) \geq u\} \leq x]$

$$= P[U \leq F(x)]$$

$$= F(x)$$

Alors, si $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$, $F_X^{-1}(U)$ a même loi que X . ■

Ainsi, si l'on tire n nombres aux hasard uniformément répartis entre 0 et 1 (u_1, u_2, \dots, u_n) , la suite (x_1, x_2, \dots, x_n) de loi celle de X sera déterminée par $x_i = F_X^{-1}(u_i)$.

Lorsque F a une expression analytique simple, l'algorithme de simulation par inversion prend la forme suivante

$U \leftarrow \text{Random}$

$X \leftarrow F^{-1}(U)$

Simulation de la loi exponentielle de paramètre λ , $\mathcal{E}(\lambda)$

$$F(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

$$\forall u \in]0, 1[, F(x) = u \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - u).$$

D'où l'algorithme de simulation :

$$X \leftarrow -\log(\text{Random})/\lambda,$$

il est inutile de calculer $-\log(1-\text{Random})/\lambda$ car Random et $1-\text{Random}$ suivent la même loi.

Remarquons que le théorème 2.7 admet une réciproque, mais sous des hypothèses plus fortes, qui jouera un rôle essentiel dans la preuve du théorème de Kolmogorov-smirnov.

Proposition 2.1 *Si la f.r. F d'une v.a.r. X est continue, alors $F(X) \sim \mathcal{U}([0, 1])$.*

2.3.2 Simulation de lois discrètes

La méthode d'inversion permet aussi de simuler les lois discrètes. Commençons par des mesures sur un ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\}$. t.q. $x_1 < \dots < x_n$

Théorème 2.8 Soit $\mu = p_1\delta_{x_1} + \dots + p_n\delta_{x_n}$ une loi de probabilité sur $\{x_1, \dots, x_n\}$,

$U \sim U([0, 1])$. Alors la v.a. suivante a pour loi μ :

$$x_1 1_{\{U < p_1\}} + x_2 1_{\{p_1 \leq U < p_1 + p_2\}} + \dots + x_n 1_{\{p_1 + \dots + p_{n-1} \leq U < 1\}}.$$

La f.r. correspondante est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ p_1 + \dots + p_i = F_i & \text{si } x_i \leq x < x_{i+1} \\ 1 & \text{si } x \geq x_n \end{cases}$$

L'algorithme de simulation par inversion est donc l'algorithme suivant

<pre> i ← 1 U ← Random TantQue (U > F_i) faire i ← i + 1 FinTantQue X ← x_i </pre>	<pre> i ← 1 U ← Random ou Répéter i ← i + 1 Jusqu'à (F_i > U) </pre>
---	---

En sortie de cet algorithme, nous avons bien

$$\forall k = 1, \dots, n, P(X = x_k) = P(F(x_{k-1}) \leq U < F(x_k)) = F(x_k) - F(x_{k-1}) = p_k$$

Remarque 3 Le test d'arrêt dans la boucle "Répéter... Jusqu'à" est $p_1 + \dots + p_i \geq U$. Cela peut s'avérer coûteux en temps de calcul lorsque la série de terme général p_i converge lentement vers 1.

Simulation de la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, $p \in [0, 1]$

$$P(X = 1) = p$$

$$P(X = 0) = 1 - p$$

Si $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$ alors

$$X = 1_{\{U \leq p\}} \sim \mathcal{B}(p). \quad (2.1)$$

En effet X prend les valeurs 0 ou 1 et

$$P(X = 1) = P(U \leq p) = \int_0^1 1_{\{U \leq p\}} du = p.$$

D'où l'algorithme de simulation d'une variable $X \sim \mathcal{B}(p)$:

$U \leftarrow \text{Random}$

Si $U < p$, alors retourner 1, Sinon retourner 0.

Simulation de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Si U_1, \dots, U_n sont n v.a. i.i.d. $\sim \mathcal{U}([0, 1])$ alors,

$$X = 1_{\{U_1 \leq p\}} + \dots + 1_{\{U_n \leq p\}} = \sum_{i=1}^n 1_{\{U_i \leq p\}} \sim \mathcal{B}(n, p). \quad (2.2)$$

D'après ce qui précède les variables $1_{\{U_i \leq p\}}$, $1 \leq i \leq n$ sont des variables de Bernoulli de paramètre p indépendantes, donc la v.a. X somme de ces n variables $\sim \mathcal{B}(n, p)$.

Pour simuler une v.a. chargeant un ensemble dénombrable, on peut utiliser le théorème 2.8. Cependant, pour certaines lois classiques, comme la loi géométrique ou la loi de Poisson, il existe des astuces plus efficaces.

Simulation de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Pour simuler $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$, on peut recourir à l'approche suivant qui repose sur les liens entre variables de Poisson et variables exponentielles de même paramètre λ ,

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de v.a. $\sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$ indépendantes. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ calculons :

$$P(X_1 + \dots + X_n \leq 1 < X_1 + \dots + X_{n+1}). \quad (I)$$

D'après l'indépendance des X_i la suite (X_1, \dots, X_{n+1}) a pour densité :

$\lambda e^{-\lambda x_1} \times \dots \times \lambda e^{-\lambda x_{n+1}}$ sur $(\mathbb{R}_+)^{n+1}$, donc :

$$\begin{aligned} (I) &= E(1_{\{X_1 + \dots + X_n \leq 1 < X_1 + \dots + X_{n+1}\}}) = \int_{\Omega} 1_{\{X_1 + \dots + X_n \leq 1 < X_1 + \dots + X_{n+1}\}} dP \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} 1_{\{x_1 + \dots + x_n \leq 1 < x_1 + \dots + x_{n+1}\}} \times \lambda e^{-\lambda x_1} \times \dots \times \lambda e^{-\lambda x_{n+1}} dx_1 \dots dx_{n+1} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1} \cap \{x_1 + \dots + x_n \leq 1 < x_1 + \dots + x_{n+1}\}} \lambda e^{-\lambda x_1} \times \dots \times \lambda e^{-\lambda x_{n+1}} dx_1 \dots dx_{n+1} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n \cap \{x_1 + \dots + x_n \leq 1\}} \left[\int_{1 - (x_1 + \dots + x_n)}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x_{n+1}} dx_{n+1} \right] \lambda e^{-\lambda x_1} \times \dots \times \lambda e^{-\lambda x_n} dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n \cap \{x_1 + \dots + x_n \leq 1\}} e^{-\lambda(1 - x_1 - \dots - x_n)} \lambda^n e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_n)} dx_1 \dots dx_{n+1} \\ &= e^{-\lambda} \lambda^n \int_{\mathbb{R}_+^n \cap \{x_1 + \dots + x_n \leq 1\}} dx_1 \dots dx_{n+1} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}. \end{aligned}$$

On en déduit donc que si nous posons :

$$\begin{aligned} X &= 1_{\{X_1 \leq 1 < X_1 + X_2\}} + 2 \cdot 1_{\{X_1 + X_2 \leq 1 < X_1 + X_2 + X_3\}} + \\ &\quad + \dots + n \cdot 1_{\{X_1 + \dots + X_n \leq 1 < X_1 + \dots + X_{n+1}\}} \end{aligned}$$

alors $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

D'autre part si $(U_i)_{i \geq 1}$ est une suite de v.a. i.i.d. $\sim \mathcal{U}([0, 1])$,

$$\text{soit } N = \inf \{n \in \mathbb{N} : U_1 \times \dots \times U_{n+1} \leq e^{-\lambda}\}$$

$$U_1 \times \dots \times U_{n+1} \leq e^{-\lambda} \Leftrightarrow \log(U_1 \times \dots \times U_{n+1}) \leq -\lambda$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda} \log U_1 - \frac{1}{\lambda} \log U_2 - \dots - \frac{1}{\lambda} \log U_{n+1} \geq 1$$

$$X_1 + \dots + X_{n+1} \geq 1, X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

$$\{N = k\} = \{X_1 + \dots + X_n \leq 1 < X_1 \leq X_1 + \dots + X_{n+1}\}$$

$$\text{donc } P(N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, N \sim \mathcal{P}(\lambda).$$

D'où l'algorithme de simulation d'une variable $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$:

$n \leftarrow 0$

$a \leftarrow e^{-\lambda}$

$U \leftarrow \text{Random}$

TantQue ($U > a$) faire

$U \leftarrow U * \text{Random}$

$n = n + 1$

finTantQue

$X = n$

Simulation de la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

$$P(x = n) = p(1 - p)^{n-1}, n \geq 1, p \in]0, 1[$$

Si (U_i) une suite de v.a. i.i.d. $\sim \mathcal{U}([0, 1])$ alors

$$N = \inf \{i \geq 1 : U_i \leq p\} \sim \mathcal{G}(p). \quad (2.3)$$

$$\{N = n\} = \{U_n \leq p\} \cap \{U_1 > p, \dots, U_{n-1} > p\}$$

$$\begin{aligned} P(N = n) &= P(U_n \leq p) \times P(U_1 > p) \times \dots \times P(U_{n-1} > p) \\ &= p \times (1 - p) \times \dots \times (1 - p) = p(1 - p)^{n-1}. \end{aligned}$$

D'où l'algorithme de simulation d'une variable $X \sim \mathcal{G}(p)$:

$n \leftarrow 0$

Répéter

$U \leftarrow \text{Random}$

$n \leftarrow n + 1$

Jusqu'à $U \leq p$

finRépéter

$X = n.$

Outre cette méthode il existe une autre méthode beaucoup plus rapide en terme de temps de calcul qui permet de simuler une variable $\mathcal{G}(p)$ à l'aide d'une seule variable $\mathcal{U}([0, 1])$ et qui repose sur l'interprétation de la loi $\mathcal{G}(p)$ comme version discrète de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Soit X une variable $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Calculons la loi de $N = 1 + [X]$

On sait que $-\frac{1}{\lambda} \log U \sim \mathcal{E}(\lambda)$, puis pour $p \in]0, 1[$ on déduit un λ t.q. :

$$1 + \left[-\frac{1}{\lambda} \log U \right] \sim \mathcal{G}(p)$$

Posons $Y = [X]$, on a :

$$P\{Y = n\} = P\{n \leq X < n + 1\} = \int_n^{n+1} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+1)}$$

$$P\{1 + [X] = n\} = P\{[X] = n - 1\} = e^{-\lambda(n-1)} - e^{-\lambda n} \text{ (loi de } N)$$

Soit $p \in]0, 1[$

$$e^{-\lambda(n-1)} - e^{-\lambda n} = e^{-\lambda(n-1)} (1 - e^{-\lambda})$$

$$\text{Si } e^{-\lambda} = 1 - p \Leftrightarrow \lambda = -\log(1 - p) \text{ alors } e^{-\lambda(n-1)} (1 - e^{-\lambda}) = p(1 - p)^{n-1},$$

$$\text{i.e. } \lambda = -\log(1-p) \Rightarrow 1 + \left[-\frac{1}{\lambda} \log U \right] \sim \mathcal{G}(p).$$

La méthode d'inversion n'est exacte qu'à condition de connaître l'expression explicite de F^{-1} , comme pour la loi exponentielle. C'est rarement le cas. Si on veut appliquer la méthode à la loi normale par exemple, il faudra se donner une table de valeurs de F et procéder par interpolation linéaire. On simulera alors une loi dont la f.r., linéaire par morceaux, n'est qu'une approximation de la vraie f.r. En plus de l'imprécision, cette méthode présente deux autres inconvénients. L'un est l'encombrement de la place mémoire, l'autre est la lenteur due au nombre élevé de tests. Même quand on connaît explicitement F^{-1} , la méthode d'inversion est rarement la plus efficace pour les variables à densité.

2.3.3 Changement de variables

Cette méthode consiste à écrire une v.a. Y comme une fonction g d'une autre v.a. X facilement simulable. Elle repose sur la formule de changement de variables suivante :

Théorème 2.9 *Soit X un vecteur aléatoire de densité f sur \mathbb{R}^n . On suppose que $X \in D$ p.s. où D est un ouvert de \mathbb{R}^n . Soit Ψ un difféomorphisme de D sur un ouvert Δ . Alors $Y = \Psi(X)$ a pour densité*

$$f(\Psi^{-1}(y)) |J_{\Psi^{-1}}(y)| 1_{\Delta}(y).$$

$$\text{où} \quad J_{\Psi}(u) = \det \left(\left[\frac{\partial \Psi_i}{\partial u_i} \right]_{1 \leq i \leq n} \right).$$

Exemples.

Si $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$ alors $X = a + (b - a)U \sim \mathcal{U}([a, b])$.

Si $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$ alors $X = \sigma U + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

2.3.4 Simulation des lois normales**Proposition 2.2 Méthode polaire pour $\mathcal{N}(0, 1)$**

Soient $R \sim \mathcal{E}(\frac{1}{2})$ et $\Theta \sim U([0, 2\pi])$ indépendantes alors

$X = \sqrt{R} \cos \Theta$ et $Y = \sqrt{R} \sin \Theta \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et elles sont indépendantes.

Preuve. On applique la méthode de la fonction muette. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bornée,

on a

$$\begin{aligned} E(f(X, Y)) &= E\left(f\left(\sqrt{R} \cos \Theta, \sqrt{R} \sin \Theta\right)\right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(\sqrt{r} \cos \theta, \sqrt{r} \sin \theta) e^{-r/2} dr d\theta. \end{aligned}$$

Le changement de variable $(x, y) = \varphi(r, \theta) = (\sqrt{r} \cos \theta, \sqrt{r} \sin \theta)$ est une bijection C^1 ainsi que φ^{-1} de $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \geq 0\}$. Sa matrice Jacobienne est

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(r, \theta)}{\partial r} & \frac{\partial \varphi_1(r, \theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi_2(r, \theta)}{\partial r} & \frac{\partial \varphi_2(r, \theta)}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta / (2\sqrt{r}) & -\sqrt{r} \sin \theta \\ \sin \theta / (2\sqrt{r}) & \sqrt{r} \cos \theta \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow dx dy = \frac{1}{2} dr d\theta$. On conclut par la formule du changement de variables que

$$E(f(X, Y)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy.$$

D'après ce qui précède si (U, V) est un couple de v.a. $\sim \mathcal{U}([0, 1])$ indépendantes :

$(-2 \log U, 2\pi V) \stackrel{D}{=} (R, \Theta)$, ce qui entraîne que :

$$\left(\sqrt{-2 \log U} \cos 2\pi V, \sqrt{-2 \log U} \sin 2\pi V \right) \stackrel{D}{=} (X, Y).$$

■

On conclut donc

Proposition 2.3 Algorithme de Box-Muller

Si U, V sont deux v.a.r. i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0, 1])$ alors X et Y définies par

$$\begin{cases} X = \sqrt{-2 \log U} \cos 2\pi V \\ Y = \sqrt{-2 \log U} \sin 2\pi V \end{cases}$$

sont indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

D'où l'algorithme de Box-Muller :

$$R' \leftarrow \text{Sqrt}(-2 * \log(\text{Random}))$$

$$\Theta \leftarrow 2\text{Pi} * \text{Random}$$

$$X \leftarrow R' * \cos \Theta$$

$$Y \leftarrow R' * \sin \Theta$$

2.3.5 Simulation des vecteurs aléatoires gaussiens

Un vecteur (colonne) aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)'$ est dit gaussien si toute combinaison linéaire de ses coordonnées est une v.a. (réelle) gaussienne. Donc si X est un vecteur gaussien, alors toutes ses composantes sont des v.a.r. gaussienne. La réciproque est vraie si X_1, \dots, X_n sont indépendantes. La loi d'un vecteur gaussien

est caractérisé par son (vecteur-) espérance $\mu = (E(X_1, \dots, X_n))'$ et sa matrice de covariance Γ dont les coefficients sont définis par

$$\Gamma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i) E(X_j) = (E(XX') - \mu\mu')_{ij}.$$

On sait que Γ est définie positive.

On note $\mathcal{N}_n(\mu, \Gamma)$ la loi de X .

Nous avons déjà vu (exemple 11) que de la simulation de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ on déduit celle de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ par une transformation affine. La situation est analogue en dimension n quelconque, Tout d'abord si X_1, \dots, X_n sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors le vecteur (X_1, \dots, X_n) est gaussien d'espérance nul et de matrice de covariance unité : $\mathcal{N}_n(0, I)$. On en déduit la simulation d'un vecteur gaussien par la proposition suivante.

Proposition 2.4 *Soit μ un vecteur de \mathbb{R}^n et Γ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique positive. Soit (X_i) un vecteur aléatoire de loi $\mathcal{N}_n(0, I)$ dans \mathbb{R}^n . Soit A une matrice carrée d'ordre n t.q. $AA' = \Gamma$. Alors le vecteur $Y = AX + \mu$ est un vecteur gaussien de moyenne μ et de matrice de covariance Γ .*

En pratique pour déterminer A , on utilise la décomposition de Cholesky : toute matrice symétrique positive Γ peut s'écrire sous la forme $\Gamma = AA'$ avec A triangulaire inférieure.

2.3.6 Méthodes de rejet

De nombreux algorithmes de simulation peuvent être obtenus en imposant à une v.a. X de loi donnée P_X de satisfaire une condition E . L'algorithme en question prendra la forme suivante

Répéter

Simuler X selon la loi P_X

Jusqu'à (E réalisé)

$Y \leftarrow X$

La v.a. obtenue en sortie de cet algorithme admettra pour loi la mesure de probabilité P_X^E définie de la manière suivante

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(X \leq t) = P_X^E([-\infty, t]) = P(X \leq t | E).$$

Le coût d'une telle méthode est lui-même aléatoire, car il dépend du nombre de passages dans la boucle "Répéter... Jusqu'à". Ce nombre suit la loi géométrique de paramètre $P(E)$. Son espérance vaut donc $1/P(E)$.

Exemple. Soit à simuler la loi uniforme sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ en tirant un nombre au hasard sur $[0, 1]$ et en rejetant ce nombre lorsque sa valeur est supérieure à $(\frac{1}{2})$

Répéter

$U \leftarrow \text{Random}$

Jusqu'à ($U \leq 0.5$)

$X \leftarrow U$

En sortie d'un tel algorithme, la f.r. de X est

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, P(X \leq t) &= P(U \leq t | U \leq 0.5) = P(U \leq t \cap U \leq 0.5) / 0.5 \\ &= 2P(U \leq t \cap U \leq 0.5)\end{aligned}$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 2t & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il s'agit bien de la f.r. de la loi $\mathcal{U}([0, \frac{1}{2}])$.

Pour tirer au hasard (loi uniforme) dans un ensemble D on peut tirer au hasard dans un ensemble D' qui le contient et rejeter tout les tirages qui ne tombent pas dans D . Voici un énoncé plus précis pour les domaines de \mathbb{R}^n .

Proposition 2.5 Simulation de lois uniformes

Soit λ_n la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n , D et D' deux boréliens de \mathbb{R}^n t.q.

$D \subset D'$ et $0 < \lambda_n(D) \leq \lambda_n(D') < +\infty$.

Soit X un point aléatoire de loi uniforme sur D' . Alors la loi conditionnelle de X sachant que $X \in D$ est la loi uniforme sur D .

La traduction algorithmique est la suivante.

Répéter

tirer un point au hasard dans D'

Jusqu'à ($X \in D$)

Le nombre de passages dans la boucle suit la loi géométrique $\mathcal{G}(\frac{\lambda_n(D)}{\lambda_n(D')})$ et le nombre

moyen vaut $\frac{\lambda_n(D')}{\lambda_n(D)}$. On a donc intérêt à choisir D' le plus proche possible de D , mais suffisamment simple pour ne pas ralentir la simulation.

Exemple. Loi uniforme sur le disque unité

Répéter

$$X \leftarrow 2 * \text{Random} - 1$$

$$Y \leftarrow 2 * \text{Random} - 1$$

$$S \leftarrow X * X + Y * Y$$

Jusqu'à ($S < 1$)

$$D = \{(x, y) ; x^2 + y^2 \leq 1\} \quad \lambda_2(D) = \pi,$$

$$D' = [-1, 1]^2 \quad \lambda_2(D') = 4,$$

Le nombre moyen de passages dans la boucle est

$$\frac{\lambda_2(D')}{\lambda_2(D)} = \frac{4}{\pi} \simeq 1.27.$$

Proposition 2.6 *Soit f une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n , continue par morceaux, et*

$$D_f = \{(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+; 0 < u < f(x)\}.$$

Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^n et U une v.a.r. Le couple $(X, U) \sim \mathcal{U}(D_f)$ ssi.

1. X a pour densité f ,
2. La loi conditionnelle de U sachant " $X = x$ " est $\mathcal{U}([0, f(x)])$.

Preuve. La densité de $\mathcal{U}(D_f)$ est :

$$f_{(X,U)}(x, u) = \frac{1}{\lambda_n(D_f)} 1_{D_f}(x, u).$$

Cette densité est bien le produit des deux densités :

$$f_{(X,U)}(x, u) = f(x) \left(\frac{1}{f(x)} 1_{[0, f(x)]}(u) \right).$$

En d'autres termes, une v.a. de densité f est l'abscisse d'un point au hasard sous le graphe de f . ■

Proposition 2.7 lois quelconques

Soit λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n , f et g deux densité de probabilités sur (\mathbb{R}^n, λ) telles qu'il existe une constante c vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad cg(x) \geq f(x).$$

Soit X une v.a. de densité g par rapport à λ et U une v.a. $\sim \mathcal{U}([0, 1])$, indépendante de X . Alors la loi conditionnelle de X sachant l'événement $E = \{cUg(x) < f(x)\}$ a pour densité f par rapport à λ .

Cette proposition permet de partir d'une densité g facile à simuler pour simuler une loi de densité f quelconque. L'algorithme est le suivant.

Répéter

 Simuler X de densité g

$U \leftarrow \text{Random}$

Jusqu'à $(cUg(x) < f(x))$

Le nombre de passages dans la boucle suit la loi $\mathcal{G}(\frac{1}{c})$ d'espérance c . On aura donc intérêt à choisir g assez proche de f de sorte que la constante $c = \max \{f(x)/g(x)\}$ soit la plus faible possible.

Exemple. Soit à simuler la loi de densité :

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} 1_{[-1,1]}(x).$$

(loi de l'abscisse d'un point au hasard dans le disque unité). Partons de la loi uniforme sur $[-1, 1]$:

$$g(x) = \frac{1}{2} 1_{[-1,1]}(x).$$

Prenons $c = \frac{4}{\pi}$ (n'importe quelle constante supérieure à $\frac{4}{\pi}$ conviendrait mais il faut choisir c minimale). Voici l'algorithme

Répéter

$$X \leftarrow 2 * \text{Random} - 1$$

$$U \leftarrow \text{Random}$$

$$\text{Jusqu'à } \left(\frac{4}{\pi} U \frac{1}{2} < \frac{2}{\pi} \sqrt{1-X^2} \right)$$

Répéter

$$X \leftarrow 2 * \text{Random} - 1$$

$$U \leftarrow \text{Random}$$

$$\text{Jusqu'à } (U * U < 1 - X * X)$$

On l'écrira :

Cet algorithme revient à tirer X comme l'abscisse d'un point au hasard sur le demi disque supérieur

$$\{(x, u) ; x^2 + y^2 < 1, u \geq 0\}.$$

Ceci n'est pas surprenant au vu de la proposition 2.8.

Chapitre 3

Processus de Markov et processus de Lévy

3.1 Généralités

3.1.1 Processus stochastiques

Soit T un ensemble et (E, \mathcal{E}) en espace mesurable. Un processus stochastique indexé par T à valeurs (E, \mathcal{E}) est une famille de v.a. définies sur le même espace de probabilités (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans (E, \mathcal{E}) .

(E, \mathcal{E}) est appelé l'espace d'état du processus.

Pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $t \rightarrow X_t(\omega)$ s'appelle la trajectoire associée à ω .

. En général on prend $T = \mathbb{R}^+$, $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

. On peut toujours supposer (Ω, \mathcal{F}, P) complet.

Un processus X est à trajectoires continues (resp. à trajectoires *p.s.* continues) si pour tout $\omega \in \Omega$ (resp. pour tout ω hors d'un ensemble négligeable) $t \rightarrow X_t(\omega)$ est continue.

Un processus X est *p.s.* croissant s'il est *p.s.* càd, $X_0 = 0$ et pour tout ω hors d'un ensemble négligeable $t \rightarrow X_t(\omega)$ est croissant.

Soit X et Y deux processus définis sur le même espace de probabilités (Ω, \mathcal{F}, P) .

X est une modification de Y si, pour tout $t \geq 0$ les v.a. X_t et Y_t sont égales *P*-*p.s.* : $\forall t \geq 0, P(X_t = Y_t) = 1$.

X et Y sont indistinguables si, *P*-*p.s.*, les trajectoires de X et de Y sont les même c'est à dire $P(X_t = Y_t, t \geq 0) = 1$.

- . La notion d'indistinguabilité est plus forte que la notion de modification.
- . Si X est une modification de Y et si X et Y sont à trajectoires *p.s.* continues à droite (ou à gauche) alors X et Y sont indistinguables.

Nous travaillons avec une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, i.e. une famille croissante de sous tribus de \mathcal{F} , i.e. pour $s \leq t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. On définit alors $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_t \mathcal{F}_t\right)$ ainsi que pour tout t , $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$.

On dit qu'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est continue à droite si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ pour tout t .

On dit qu'elle vérifie les conditions habituelles si elle est càd et si \mathcal{F}_0 contient tout les ensembles *P*-négligeables de \mathcal{F} noté \mathcal{N} .

On introduit la filtration naturelle de X , $\mathcal{G}_t = \sigma\{X_s; s \leq t\}$. Mais \mathcal{G}_0 ne contient pas \mathcal{N} . C'est pour cela que l'on introduit souvent la filtration naturelle de X augmen-

tée définie par $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{\mathcal{N} \cup \mathcal{G}_t\}$, appelée aussi filtration naturelle de X , par abus de langage.

Un processus X est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si, pour tout t , X_t est \mathcal{F}_t -mesurable.

- . Un processus X est toujours adapté à sa filtration naturelle.
- . Si $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$ et si X est adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ alors toute modification de X est encore adaptée.

3.1.2 Loi d'un processus et processus canonique

Soit $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus stochastique. X peut être vu comme une application :

$$X : \Omega \rightarrow E^{\mathbb{R}_+} = \{\text{fonctions de } \mathbb{R}_+ \text{ dans } E\}$$

$$\omega \rightarrow X_t(\omega),$$

si les trajectoires sont assez régulières

Considérons la famille des sous ensembles $A \subset E^{\mathbb{R}_+}$ dits ensembles cylindriques

$$A = \{f \in E^{\mathbb{R}_+} : f(t_1) \in E_1, \dots, f(t_n) \in E_n\}$$

où $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ et $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}$.

On note $\mathcal{E}^{\mathbb{R}_+}$ la σ -algèbre (produit) sur $E^{\mathbb{R}_+}$ engendrée par cette famille.

Le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est mesurable en tant qu'application :

$X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{E}^{\mathbb{R}_+})$, car ses composantes X_t sont $(\mathcal{F}/\mathcal{E})$ -mesurables, voir L.

La loi image μ de P par cette application, définie par

$$\mu(A) = P(X^{-1}(A)), \quad A \in \mathcal{E}^{\mathbb{R}_+}$$

s'appelle la loi du processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Si pour $t \geq 0$, on note π_t l'application qui à $\omega \in E^{\mathbb{R}_+}$ associe $\omega(t)$, le processus stochastique $(\pi_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ défini sur l'espace de probabilités $(E^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{E}^{\mathbb{R}_+}, \mu)$ s'appelle le processus canonique associé à X . C'est un processus de loi μ .

Nous avons vu qu'un processus stochastique définissait une mesure de probabilité sur l'espace $(E^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{E}^{\mathbb{R}_+})$. Nous allons tout d'abord voir que cette mesure est entièrement déterminée par ce que l'on appelle les lois fini-dimensionnelles du processus.

Définition 3.1 Soit $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$. On note μ_{t_1, \dots, t_n} la loi de la v.a. $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$.

C'est donc une mesure de probabilité portée par \mathbb{R}^n . Cette probabilité s'appelle une loi fini-dimensionnelle (l.f.d.) du processus X .

Proposition 3.1 Soient $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ et $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ deux processus stochastiques éventuellement définis sur des espaces de probabilités différents. Si ces deux processus ont les mêmes lois fini-dimensionnelles, alors ils ont les mêmes lois, i.e. $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \stackrel{\mathcal{D}}{=} (Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Preuve. $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ et $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ont les mêmes l.f.d. $\Leftrightarrow (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ et $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ coïncident sur les cylindres :

$$\{f \in E^{\mathbb{R}_+} : f(t_1) \in E_1, \dots, f(t_n) \in E_n\}.$$

Comme ces cylindres engendrent la σ -algèbre $\mathcal{E}^{\mathbb{R}_+}$, nous en déduisons que X et Y ont

la même loi. ■

L'ensemble des l.f.d. d'un processus vérifient les deux conditions dite de compatibilité :

Soient $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ et τ une permutation de $\{1, \dots, n\}$, on a

$$(1) \mu_{t_1, \dots, t_n} (A_1 \times \dots \times A_n) = \mu_{t_{\tau(1)}, \dots, t_{\tau(n)}} (A_{\tau(1)} \times \dots \times A_{\tau(n)}), \quad A_i \in \mathcal{E}.$$

$$(2) \mu_{t_1, \dots, t_n} (A_1 \times \dots \times A_{n-1} \times \mathbb{R}) = \mu_{t_1, \dots, t_{n-1}} (A_1 \times \dots \times A_{n-1}), \quad A_i \in \mathcal{E}.$$

Le théorème de Kolmogorov affirme que réciproquement, sous certaines conditions de régularité, étant donnée une famille compatible de probabilités définis sur les cylindres de $\mathcal{E}^{\mathbb{R}_+}$, il est toujours possible de construire un processus dans les l.f.d. sont données par ces probabilités.

Théorème 3.1 Kolmogorov 1933

Supposons que E est un espace Polonais (métrique, séparable, complet) et \mathcal{E} sa σ -algèbre borélienne.

Pour tout $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ soit μ_{t_1, \dots, t_n} une probabilité sur (E^n, \mathcal{E}^n) . Supposons que cette famille vérifie les deux conditions de compatibilité, alors il existe une unique probabilité μ sur $(E^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{E}^{\mathbb{R}_+})$ t.q. pour tout $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$:

$$\mu(\pi_{t_1} \in A_1, \dots, \pi_{t_n} \in A_n) = \mu_{t_1, \dots, t_n}(A_1 \times \dots \times A_n).$$

La démonstration de ce théorème s'appuie sur le théorème classique de Carathéodory.

Corollaire 3.1 *Sous les hypothèses du théorème, on peut trouver un espace de probabilités (Ω, \mathcal{F}, P) ainsi qu'un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ défini sur cet espace dont les*

l.f.d. sont les μ_{t_1, \dots, t_n} .

Preuve. Comme espace de probabilités on prend $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (E^{\mathbb{R}^+}, \mathcal{E}^{\mathbb{R}^+}, \mu)$, où μ est la probabilité donnée par le théorème de Kolmogorov. On considère alors le processus $(\pi_t)_{t \geq 0}$ défini sur $E^{\mathbb{R}^+}$ par $\pi_t(\omega) = \omega(t)$. Par construction même ce processus est de loi μ . ■

Convergences du processus

Une suite (X^n) de processus converge vers le processus X dans $L^2(\Omega, [0, T])$ ssi X et (X^n) sont dans $L^2(\Omega, [0, T])$, i.e. $E \int_0^T |X_s^n|^2 ds < \infty$ et $E \int_0^T |X_s|^2 ds < \infty$, et vérifient

$$E \int_0^T |X_s^n - X_s|^2 ds \text{ converge vers } 0.$$

Accroissements du processus

Les v.a. $X_t - X_s$, $t > s \geq 0$ sont appelées des accroissements du processus (X_t) .

Un processus X est dit :

1. *à accroissements indépendants si l'accroissement $X_t - X_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s^X = \sigma(X_r, 0 \leq r \leq s)$, $\forall t > s \geq 0$.*

2. *à accroissements stationnaires si : $X_t - X_s \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_{t-s} - X_0$, $\forall t > s \geq 0$.*

Pour de tels processus, donner la loi de $X_t - X_0$, $\forall t > 0$, ainsi que celle de X_0 suffit à caractériser entièrement le processus.

3.2 Processus de Markov

3.2.1 Espérance conditionnelle

Soient (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilités, \mathcal{G} une sous- σ -algèbre de \mathcal{F} et X une v.a. Si $E(X) < \infty$, soit $E(X|\mathcal{G})$ l'espérance conditionnelle de X . C'est une v.a. \mathcal{G} -mesurable.

L'espérance conditionnelle a les propriétés suivante :

1. $E(E(X|\mathcal{G})) = E(X)$

2. $|E(X|\mathcal{G})| \leq E(|X|\mathcal{G})$

3. Si Y est une v.a. \mathcal{G} -mesurable alors

$$E(XY|\mathcal{G}) = YE(X|\mathcal{G}) \text{ p.s.}$$

4. Si \mathcal{H} est une sous- σ -algèbre de \mathcal{G} alors

$$E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = E(X|\mathcal{H}) \text{ p.s.}$$

5. Si X est indépendante de \mathcal{G} alors $E(X|\mathcal{G}) = E(X)$ p.s.

6. L'application : $E_{\mathcal{G}} : L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ définie par : $E_{\mathcal{G}}(X) = E(X|\mathcal{G})$

est une projection orthogonale.

La propriété suivante nous servira aux structures Markovienne, voir D. Applebaum [2].

Proposition 3.2 *Soit \mathcal{G} une sous- σ -algèbre de \mathcal{F} , si X et Y sont des v.a. à valeurs \mathbb{R}^n t.q. X est \mathcal{G} -mesurable et Y indépendante de \mathcal{G} alors*

$$E(f(X, Y)|\mathcal{G}) = G_f(X) \text{ p.s.}$$

pour tout $f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^{2n})$, où $G_f(x) = E(f(x, Y))$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

3.2.2 Noyau de transition et fonction de transition

Définition 3.2 Soit (E, \mathcal{E}) un espace mesurable. Un noyau de transition N sur E est une application de $E \times \mathcal{E}$ dans $[0, +\infty]$ t.q.

- 1) $x \rightarrow N(x, A)$ est \mathcal{E} -mesurable, pour tout $A \in \mathcal{E}$,
- 2) $A \rightarrow N(x, A)$ est une mesure sur (E, \mathcal{E}) , pour tout $x \in E$.

Si de plus $N(x, A) = 1$, pour tout x , on dit que N est une probabilité de transition.

On écrit aussi N ainsi $N(x, dy)$.

On peut montrer (c'est le théorème de Jirina) que, dès que E Polonais, alors il existe une probabilité de transition N sur E , voir M. Métivier [17], page 142 ou J. Jacod [11].

Si $f \in \mathcal{E}_+$, i.e. $f : (E, \mathcal{E}) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B})$ mesurable, alors on définit la fonction Nf sur E par

$$Nf(x) = \int_E N(x, dy) f(y).$$

La fonction Nf appartient encore à \mathcal{E}_+ . De plus si M, N sont deux noyaux alors MN défini par la composition

$$MN(x, A) = \int_E N(x, dy) N(y, A).$$

est encore un noyau.

La probabilité de transition π induit un mouvement aléatoire dans E qui est décrit de la façon suivante. La particule est en x , la position x_1 au temps 1 sera choisie

selon la mesure de probabilité $\pi(x, \cdot)$, la position x_2 au temps 2 selon la mesure de probabilité $\pi(x_1, \cdot)$, etc. Le processus ainsi obtenu est appelé chaîne de Markov (le temps est discret) homogène (la transition ne dépend pas du temps). Un processus de Markov général est l'analogue en temps continu.

Supposons que le processus X soit t.q. pour tous $s < t$, il existe une probabilité de transition $P_{s,t}$ t.q.

$$P(X_t \in A | \mathcal{F}_s^X) = P_{s,t}(X_s, A) \quad p.s.,$$

alors, pour tout $f \in \mathcal{E}_+$, $E(f(X_t) | \mathcal{F}_s^X) = P_{s,t}f(X_s)$ (argument d'approximation standard).

Soient $s < t < v$, alors

$$\begin{aligned} P_{s,v}(X_s, A) &= P(X_v \in A | \mathcal{F}_s^X) = E(E(1_{\{X_v \in A\}} | \mathcal{F}_t^X) | \mathcal{F}_s^X) \\ &= E(P_{t,v}(X_t, A) | \mathcal{F}_s^X) = \int_E P_{s,t}(X_s, dy) P_{t,v}(y, A). \end{aligned}$$

Ceci nous amène à la définition suivante de la fonction de transition.

Définition 3.3 Une fonction de transition sur (E, \mathcal{E}) est une famille $(P_{s,t})_{0 \leq s < t}$ de transition de probabilité sur (E, \mathcal{E}) t.q. pour tous $s < t < v$, on ait

$$\int_E P_{s,t}(x, dy) P_{t,v}(y, A) = P_{s,v}(x, A), \quad (3.1)$$

pour tous $x \in E$ et $A \in \mathcal{E}$.

La relation 3.1 est appelée équation de Chapman-Kolmogorov. La f.t. est dite homogène si $P_{s,t}$ ne dépend de s et t que par la différence $t - s$. Dans ce cas, on note

P_t pour $P_{0,t}$ et l'équation de Chapman-Kolmogorov s'écrit

$$P_{t+s}(x, A) = \int_E P_s(x, dy) P_t(y, A),$$

pour tous $s, t \geq 0$. On dit que $(P_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe.

3.2.3 Processus de Markov

Définition 3.4 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ un espace de probabilités filtré. Un processus adapté X est un processus de Markov pour la filtration (\mathcal{F}_t) , de fonction de transition $P_{s,t}$ si, pour toute fonction $f \in \mathcal{E}_+$ (ou $b\mathcal{E}$) et $s < t$,

$$E(f(X_t) | \mathcal{F}_s) = P_{s,t}f(X_s) \quad P\text{-p.s.}$$

Le processus X est dit homogène si la f.t. est homogène et la formule précédente s'écrit alors

$$E(f(X_t) | \mathcal{F}_s) = P_{t-s}f(X_s) \quad P\text{-p.s.}$$

La loi de X_0 est appelée la loi initiale de X .

La donnée d'une transition P et d'une loi initiale ν déterminent la loi d'un processus de Markov sur (Ω, \mathcal{F}, P) , à valeurs dans E . Les lois cylindriques (l.f.d.) sont entièrement déterminées par la propriété de conditionnements successifs.

Proposition 3.3 Un processus X est un processus de Markov par rapport à sa filtration (\mathcal{F}_t^X) de f.t. $P_{s,t}$ et de loi initiale ν ssi. pour tous $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$ et

$f_0, \dots, f_k \in \mathcal{E}_+$,

$$E \left(\prod_{i=0}^k f_i(X_{t_i}) \right) = \int_E \nu(dx_0) f_0(x_0) \int_E P_{0,t_1}(x_0, dx_1) f_1(x_1) \quad (3.2)$$

$$\dots \int_E P_{t_{k-1}, t_k}(x_{k-1}, dx_k) f_k(x_k).$$

La relation 3.2 donne

$$P(X_{t_0} \in dx_0, X_{t_1} \in dx_1, \dots, X_{t_k} \in dx_k) = \nu(dx_0) P_{0,t_1}(x_0, dx_1) \dots P_{t_{k-1}, t_k}(x_{k-1}, dx_k).$$

C'est la loi du k -uple (X_1, \dots, X_k) .

Réciproquement, soit $(P_{s,t})$ une f.t. définie sur (E, \mathcal{E}) et soit ν une mesure de probabilité sur (E, \mathcal{E}) . On définit sur $(E^{n+1}, \mathcal{E}^{n+1})$ une famille de mesures μ_{t_0, \dots, t_n} par

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{t_0, \dots, t_n}(A_0 \times \dots \times A_n) = \nu 1_{A_0} P_{t_0, t_1} 1_{A_1} \dots P_{t_{n-1}, t_n} 1_{A_n}, \quad 0 = t_0 \leq \dots \leq t_n \\ \text{et} \\ \mu_{t_1, \dots, t_n}(A_1 \times \dots \times A_n) = \mu_{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)}}(A_{\pi(1)} \times \dots \times A_{\pi(n)}), \quad t_{\pi(1)} \leq \dots \leq t_{\pi(n)}. \end{array} \right.$$

Alors le théorème de Kolmogorov assure qu'il existe un processus de Markov dont les l.f.d. sont données par ces probabilités.

Théorème 3.2 *Soit (E, \mathcal{E}) un espace Polonais muni de sa tribu borélienne, soit $(P_{s,t})$ une f.t. sur (E, \mathcal{E}) et soit ν une mesure de probabilité sur (E, \mathcal{E}) . Alors il existe une unique mesure de probabilité P_ν sur $(E^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{E}^{\mathbb{R}_+})$ t.q. sous P_ν le processus canonique X soit de Markov par rapport à (\mathcal{F}_t^X) , de f.t. $(P_{s,t})$ et de loi initiale ν .*

Dans toute la suite, on se restreint aux processus homogènes en temps.

Remarquons que l'on a alors

$$P_\nu(X_0 \in A_0, X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_k} \in A_k) =$$

$$\int_{A_0} \nu(dx_0) \int_{A_1} P_{t_1}(x_0, dx_1) \int_{A_2} P_{t_2-t_1}(x_1, dx_2) \dots \int_{A_k} P_{t_k-t_{k-1}}(x_{k-1}, dx_k).$$

En particulier, pour $x \in E$ soit P_{δ_x} pour $\nu = \delta_x$ que nous noterons P_x , alors on a $P_x(X_0 = x) = 1$, P_x est la loi du processus X issu de x .

Soit Z une v.a. \mathcal{F}_∞^X -mesurable positive ou bornée, nous noterons son espérance par rapport à P_x (resp. P_ν) $E_x(Z)$ (resp. $E_\nu(Z)$). En particulier, si $Z = 1_{\{X_t \in A\}}$, on obtient

$$E_x(Z) = P_x(X_t \in A) = \int_E \delta_x(dy) P_t(y, A) = P_t(x, A).$$

Ceci prouve que la fonction $x \rightarrow P_x(X_t \in A)$ est mesurable.

Cela peut s'interpréter intuitivement de la façon suivante : on imagine qu'une particule "se promène" dans E . Cette particule se trouve en X_0 au temps $t = 0$ (on dit qu'elle visite l'état $X_0 \in E$), $P_x(X_t \in A)$ est la probabilité que la particule partant de x sera trouvé en A à l'instant t .

Il est possible d'exprimer $E_\nu(Z)$ en fonction de $x \rightarrow E_x(Z)$, l'espérance de Z sous la loi initiale ν est la moyenne, pondérée par ν , des espérances de Z sous la loi de mesure initiale δ_x .

Proposition 3.4 *Si Z est \mathcal{F}_∞^X -mesurable positive (ou bornée) alors l'application : $x \rightarrow E_x(Z)$ est \mathcal{E} -mesurable et*

$$E_\nu(Z) = \int_E \nu(dx) E_x(Z).$$

Preuve. Argument de classes monotones. ■

Donnons maintenant la définition de processus de Markov la plus générale.

Soit (\mathcal{F}_t^X) et soit $(\theta_t)_{t \geq 0}$ une famille d'applications (opérateurs de translation) de $E^{\mathbb{R}^+}$ dans lui même t.q. : $\theta_0 = I$, $\theta_{s+t} = \theta_s \circ \theta_t$, $X_{s+t} = X_s \circ \theta_t$, $\forall s, t \geq 0$.

On se donne une famille $(P_x)_{x \in E}$ de probabilités sur (Ω, \mathcal{F}) t.q. $x \rightarrow P_x(A)$ soit \mathcal{E} -mesurable pour tout $A \in \mathcal{F}$, et vérifiant $P_x(X_0 = x) = 1$. On définit

$$P_\mu(A) = \int_E P_x(A) \mu(dx).$$

Définition 3.5 *Le terme $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^X, (\mathcal{F}_t^X), (\theta_t), (X_t), (P_x))$ est un processus de Markov de fonction de transition (P_t) si, pour tout $x \in E$, tous $s, t \geq 0$ et toute $f \in \mathcal{E}_+$ (ou $\in b\mathcal{E}$),*

$$E_x(f(X_{t+s}) | \mathcal{F}_s^X) = P_t f(X_s) \quad P_x\text{-p.s.}$$

Remarquons que P_t vérifie : $P_t f(x) = E_x(f(X_t) | X_0 = x) = E_x f(X_t) \quad P_x\text{-p.s.}$

Proposition 3.5 *Si X est un processus de Markov, pour toute probabilité ν sur (E, \mathcal{E}) la loi de X_0 sous P_ν (loi initiale) est ν . De plus, pour tout $t \geq 0$ et toute v.a.r. Y sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^X)$, positive ou bornée, la v.a. $Y \circ \theta_t$ est \mathcal{F}_∞^X -mesurable et on a :*

$$E_\nu(Y \circ \theta_t | \mathcal{F}_t^X) = E_{X_t} Y \quad P_\nu\text{-p.s.}$$

où $E_{X_t} Y$ désigne $x \rightarrow E_x Y$ évaluée au point X_t , donc mesurable d'après la proposition 3.4.

La démonstration est Détaillée dans H. V. Zanten [26].

3.3 Processus de Lévy

3.3.1 Processus de Lévy

Définition 3.6 *Un processus de Lévy (X_t) par rapport à (\mathcal{F}_t) est un processus à valeurs \mathbb{R}^n , adapté avec $X_0 = 0$ p.s. et vérifiant :*

(i) *Les accroissements de X sont indépendants du passé, i.e.*

Pour tous $0 \leq s < t$, la v.a. $X_t - X_s$ est indépendante de \mathcal{F}_s .

(ii) *X est à accroissements stationnaires :*

Pour tous $0 \leq s < t$, $X_t - X_s$ a même loi que X_{t-s} .

(iii) *X est continu en probabilité : $\lim_{t \rightarrow s} X_t \stackrel{P}{=} X_s$ ($\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \lim_{t \downarrow 0} P(|X_t| > \varepsilon) = 0$).*

Exemple. *Un processus X continu en probabilité, issu de 0 et à accroissements indépendants et stationnaires est un processus de Lévy par rapport à (\mathcal{F}_t^X) .*

Théorème 3.3 *Soit X un processus de Lévy. Il existe une unique modification Y de X qui est càdlàg; de plus Y est un processus de Lévy.*

La démonstration est détaillée dans A. Janicki and A. Weron [12], pages 76-78.

Donc on peut toujours supposer qu'un processus de Lévy est càdlàg.

Théorème 3.4 *Soit X un (\mathcal{F}_t) -processus de Lévy et μ_t la loi de X_t .*

1. *La famille $(\mu_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de convolution ce qui signifie que pour tous $s, t \geq 0$, $\mu_{t+s} = \mu_t * \mu_s$.*

2. *Le processus X satisfait la propriété de Markov relativement à (\mathcal{F}_t) et avec le*

semi-groupe de transition (P_t) défini par :

$$P_t(x, A) = \int 1_A(x+y) \mu_t(dy). \quad (3.3)$$

Preuve. Comme $X_{t+s} = X_t + (X_{t+s} - X_t)$ et comme les v.a. X_t et $X_{t+s} - X_t$ sont indépendantes et de lois respectives μ_t et μ_s , (1) est évident.

On définit P_t par 3.3 Il est évident que chaque P_t est une probabilité de transition sur \mathbb{R}^n . De plus :

$$\begin{aligned} P_{t+s}(x, A) &= \int 1_A(x+y) \mu_{t+s}(dy) = \int \int 1_A(x+u+v) \mu_t(du) \mu_s(dv) \\ &= \int \mu_t(du) \left(\int 1_A(x+u+v) \mu_s(dv) \right) = \int \mu_t(du) P_s(x+u, A) = P_t P_s(x, A), \end{aligned}$$

donc (P_t) est un semi-groupe. En fin on a

$$\begin{aligned} E(f(X_{t+s}) | \mathcal{F}_t) &= E(f(X_t + (X_{t+s} - X_t)) | \mathcal{F}_t) \\ &= \int \mu_s(dy) f(X_t + y) = P_s f(X_t), \end{aligned}$$

où la seconde égalité provient des points (i) et (ii) dans la définition. ■

Soit X un processus de Lévy. Alors X a les propriétés suivantes :

1. Soit P_x la loi sous laquelle X est de Markov de f.t. (P_t) et de loi initiale δ_x .

On a $P_x(X_t \in A) = P(x + X_t \in A)$ (X est de Lévy sous P)

$$\Rightarrow P_0(X_t \in A) = P(X_t \in A) \Rightarrow P(x + X_t \in A) = P_0(x + X_t \in A).$$

Donc sous P_0 , X est de Lévy. Et comme :

$$E_x f(X_t) = P_t f(x) = E_0 f(x + X_t),$$

la loi de X sous P_x égale à la loi de $x + X_t$ sous P_0 .

2. Soit $f(t) = E(e^{iuX_t})$, alors d'après (i) et (ii)

$$f(s+t) = E e^{iu((X_{t+s}-X_t)+X_t)} = E e^{iuX_s} \cdot E e^{iuX_t} = f(s) \cdot f(t).$$

D'après (iii) f est continue, alors la f.c. de X_t a la forme

$$Ee^{iuX_t} = f(t) = e^{t\varphi(u)}. \quad (3.4)$$

d'après l'équation fonctionnelle de Cauchy puis qu'on a des solutions régulières,

où $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue, $\varphi(0) = 0$,

La fonction φ est unique et est dite l'exposant caractéristique du processus de Lévy.

3. Si X_t est intégrable alors φ est dérivable et $EX_t = it\varphi'(0)$.

Si $E(X_t)^2 < \infty$ on a $VarX_t = \sigma^2t$, $\sigma^2 \geq 0$.

3.3.2 Lois infiniment divisibles

Définition 3.7 Une mesure de probabilité μ sur \mathbb{R}^n est dite *infiniment divisible* si pour tout entier $n \geq 1$ il existe une mesure de probabilité μ_n sur \mathbb{R}^n t.q.

$$\mu_n^{*n} = \mu,$$

où $\mu_n^{*n} = \mu_n * \dots * \mu_n$ (n -fois).

On note $\mu_n = \mu^{*1/n}$.

De manière équivalente, la mesure μ est *infiniment divisible* si pour tout $n \geq 1$, sa fonction caractéristique peut s'écrire : $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_n)^n$, pour tout $n \geq 1$.

En terme de variable aléatoire :

La loi P_X d'une v.a. X à valeurs \mathbb{R}^n est *infiniment divisible* si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

il existe des v.a. à valeurs \mathbb{R}^n i.i.d. $X_1^{(1/n)}, \dots, X_n^{(1/n)} \sim Y$ t.q. :

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_1^{(1/n)} + \dots + X_n^{(1/n)}.$$

\Leftrightarrow

$$\Phi_X(u) = (\Phi_Y(u))^n, \quad \forall n,$$

\Leftrightarrow

$$\Phi_Y(u) = (\Phi_X(u))^{1/n}.$$

On note Y par $X^{*1/n}$, on a :

$$\Phi_{X^{*1/n}}(u) = (\Phi_X(u))^{1/n},$$

Ceci nous amène au théorème équivalent suivant, voir K. I. Sato [23] :

Théorème 3.5 X est infiniment divisible ssi. pour tout $t > 0$, il existe une v.a.

X^{*t} t.q. $\Phi_{X^{*t}} = \Phi_X^t$.

X^{*t} est alors infiniment divisible.

Exemples. Beaucoup de lois connues sont infiniment divisibles.

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\Phi_X(u) = \exp\left\{i\mu u - \frac{u^2\sigma^2}{2}\right\} = \left[\exp\left\{i\frac{\mu}{n}u - \frac{u^2\frac{\sigma^2}{n}}{2}\right\}\right]^n = \left(\Phi_{X^{(1/n)}}(u)\right)^n,$$

où $X^{(1/n)} \sim \mathcal{N}\left(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

$X \sim \mathcal{C}(a)$ (la loi de Cauchy)

$$\Phi_X(u) = \exp(-a|u|) = \left[\exp\left(-\frac{a}{n}|u|\right)\right]^n = \left(\Phi_{X^{(1/n)}}(u)\right)^n, \quad \text{où } X^{(1/n)} \sim \mathcal{C}\left(\frac{a}{n}\right).$$

$X \sim \Gamma(r, \lambda)$ (loi Gamma)

$$\Phi_X(u) = \frac{1}{(1-\frac{iu}{\lambda})^r} = \left(\frac{1}{(1-\frac{iu}{\lambda})^{r/n}} \right)^n = \left(\Phi_{X^{(1/n)}}(u) \right)^n, X^{(1/n)} \sim \Gamma\left(\frac{r}{n}, \lambda\right).$$

Il en va de même pour la loi exponentielle $\Gamma(1, \lambda)$ et la loi $\chi_m^2 \Gamma\left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (*Poisson*)

$$\Phi_X(u) = \exp[\lambda(e^{iu} - 1)] = \left[\exp\left[\frac{\lambda}{n}(e^{iu} - 1)\right] \right]^n = \left(\Phi_{X^{(1/n)}}(u) \right)^n,$$

$$X^{(1/n)} \sim \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{n}\right).$$

contre exemples :

Une loi à support borné (hormis la Dirac en un point) n'est pas infiniment divisible,

Un mélange fini de lois normales n'est pas infiniment divisible.

Regardons de plus près la formule (3.4) et donnons maintenant un théorème essentiel qui caractérise les lois infiniment divisibles dit (Formule de Lévy-Khinchine), dans cette formule apparaît une mesure dite mesure de Lévy de la loi ν . Avant d'énoncer le théorème, donnons la définition d'une mesure de Lévy.

Définition 3.8 Une mesure de Lévy est une mesure ν sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ t.q.

$\nu(\{0\}) = 0$ et t.q. $\int_{\mathbb{R}^n} (|x|^2 \wedge 1) \nu(dx) < +\infty$, i.e. j'intègre la parabole au voisinage de zéro.

Une mesure de Lévy est σ -finie.

La condition $\int_{\mathbb{R}^n} (|x|^2 \wedge 1) \nu(dx) < +\infty$ peut être remplacée par $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2}{1+|x|^2} \nu(dx) < +\infty$.

Enonçons maintenant la formule de Lévy-Khinchine.

Théorème 3.6 formule de Lévy-Khinchine

Une loi μ sur \mathbb{R}^n est une loi infiniment divisible ssi. sa transformée de Fourier

s'écrit sous la forme $\hat{\mu} = e^\Psi$ où $\forall u \in \mathbb{R}^n$,

$$\Psi(u) = i\langle b, u \rangle - \frac{1}{2}\langle u, Au \rangle + \int_{\mathbb{R}^n} (e^{i\langle u, x \rangle} - 1 - i\langle u, x \rangle 1_{\{|x| < 1\}}) \nu(dx)$$

avec $b \in \mathbb{R}^n$, A une matrice symétrique positive et ν mesure de Lévy.

b et A dépendent de $1_{\{|x| < 1\}}$ mais ν n'en dépend pas.

ν est appelée mesure de Lévy de la loi μ , le terme (b, A, ν) est appelé le triplet caractéristique.

Considérons maintenant un processus de Lévy à valeurs \mathbb{R}^n (bien qu'il est clair du Théorème 3.4 (1) que pour tout t , la loi de X_t est infiniment divisible), voyons cela en utilisant les v.a.:

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$

$$X_t = X_{t/n} + (X_{2t/n} - X_{t/n}) + \dots + (X_t - X_{(n-1)t/n}),$$

par la stationnarité et l'indépendance des accroissements on peut conclure que,

$\forall t \geq 0$, X_t est infiniment divisible avec $X_t^{*1/n} \sim X_{t/n}$. En particulier, pour $t = 1$ dans

3.4 on obtient :

$$\begin{cases} Ee^{iuX_1} = e^\varphi \\ Ee^{iuX_1} = e^\Psi \end{cases} \quad \varphi \stackrel{\text{unique}}{\Rightarrow} \varphi = \Psi.$$

Donc on a pour tout processus de Lévy

$$Ee^{iuX_t} = \exp \left[t \left(i\langle b, u \rangle - \frac{1}{2}\langle u, Au \rangle + \int_{\mathbb{R}^n} (e^{i\langle u, x \rangle} - 1 - i\langle u, x \rangle 1_{\{|x| < 1\}}) \nu(dx) \right) \right].$$

Réciproquement : par le théorème de Kolmogorov sur l'espace des trajectoires on

a :

Proposition 3.6 Soit μ une loi infiniment divisible d'exposant caractéristique Ψ .

Il existe un unique (en loi) processus de Lévy t.q. $\mathcal{L}(X_1) = \mu$. De plus

$$\forall t \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}^n, E(e^{i\langle u, X_t \rangle}) = e^{t\Psi(u)}.$$

3.4 Mouvement brownien

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilités.

Définition 3.9 Un mouvement brownien standard (m.b.s.) est un processus stochastique $(B_t)_{t \geq 0}$ à valeurs réels t.q.

i) $B_0 = 0$ p.s.

ii) $t \rightarrow B_t$ est p.s. continue.

iii) $\forall t, h \geq 0$, $B_{t+h} - B_t$ est indépendante de $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_u, u \leq t)$ et $\sim \mathcal{N}(0, h)$,

$\forall h$.

Si (B_t) est un m.b. alors $(x + B_t)_{t \geq 0}$, $x \in \mathbb{R}$ est un m.b. issu de x .

De cette définition il suit que pour $t \geq s \geq 0$,

$B_t - B_s \sim B_{t-s} \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, i.e. $(B_t)_{t \geq 0}$ est à accroissements stationnaires.

$E(B_t - B_s) = 0$ et $E(B_t - B_s)^2 = t - s$.

Définition 3.10 (\mathcal{F}_t) -m.b.

On dit que B est un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -m.b. si B est un processus continu, adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ vérifiant :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \forall 0 \leq s \leq t, E(e^{iu(B_t - B_s)} | \mathcal{F}_s) = e^{-u^2(t-s)/2}.$$

Le deuxième point de cette définition prouve que $\sigma(X_u, u \leq t) \subset \mathcal{F}_t$. De plus il est facile de vérifier qu'un \mathcal{F}_t -m.b. est un m.b. par rapport à sa filtration naturelle.

3.5 Propriétés

Soit (B_t) un (\mathcal{F}_t) -m.b. alors

1. (B_t) est un processus gaussien (i.e. tout ses l.f.d. sont gaussiennes) d'espérance 0 et de fonction d'autocovariance

$$\rho(s, t) = \text{Cov}(B_s, B_t) = s \wedge t.$$

2. (B_t) est un processus de Markov relativement à (\mathcal{F}_t^B) .

Soit $s, t \geq 0$ et f mesurable positive. Remarquons que :

$$E(B_{t+s} | \mathcal{F}_s^B) = E((B_{t+s} - B_s) + B_s | \mathcal{F}_s^B) = E(B_{t+s} - B_s) + B_s = B_s.$$

Car $B_{t+s} - B_s$ est indépendante de \mathcal{F}_s^B et B_s est \mathcal{F}_s^B -mesurable.

$$E((B_{t+s} - B_s)^2 | \mathcal{F}_s^B) = E(B_{t+s} - B_s)^2 = |t + s - s| = t.$$

Donc sachant \mathcal{F}_s^B , la v.a. B_{t+s} est $\mathcal{N}(B_s, t)$, il vient donc

$$E(f(B_{t+s}) | \mathcal{F}_s^B) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(B_s - y)^2}{t}} f(y) dy = P_t f(B_s).$$

où P_t est définie sur \mathbb{R} par : $P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) p_t(x, y) dy$,

$$p_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-y)^2}{t}}.$$

3. Si (B_t) est un (\mathcal{F}_t) -m.b.s. alors (B_t) est un processus de Lévy.

Chapitre 4

Lois stables

4.1 Lois stables, v.a.r. stables

On va considérer une classe particulière de lois infiniment divisibles.

Définition 4.1 Une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^n est dite stable si pour tout réel $a > 0$, il existe des réels $b > 0$ et $c \in \mathbb{R}^n$, t.q.

$$\hat{\mu}(u)^a = \hat{\mu}(bu) \cdot e^{i\langle c, u \rangle}, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^n.$$

Cette loi est dite strictement stable si pour tout $a > 0$, il existe $b > 0$, t.q.

$$\hat{\mu}(u)^a = \hat{\mu}(bu), \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^n.$$

En fait, pour tout a , le réel b correspondant dans la définition est une puissance de a , $b = a^{1/\alpha}$, $\alpha \in (0, 2]$, voir L. Chaumont [9].

En termes de v.a.r. ceci est équivalente à

Définition 4.2 Une v.a. X suit une loi stable sur \mathbb{R} si pour tous $A > 0$ et $B > 0$,

il existe $C > 0$ et $D \in \mathbb{R}$ t.q.

$$AX_1 + BX_2 \stackrel{\mathcal{D}}{=} CX + D, \quad (4.1)$$

où X_1 et X_2 sont deux copies de X indépendantes.

Théorème 4.1 *Pour toute v.a.r. stable, il existe un $\alpha \in (0, 2]$ t.q. le réel C dans 4.1 satisfait : $C^\alpha = A^\alpha + B^\alpha$, le réel α est dit l'indice de stabilité. Une v.a. stable d'indice α est dite α -stable.*

La démonstration est détaillée dans G. Samorodnitsky and M.S. Taqqu [22].

Définition 4.3 (équivalente à Déf 4.2)

Une v.a.r. suit une loi stable si, il existe $\alpha \in (0, 2]$ t.q. pour tout $n \geq 1$, on peut trouver $d_n \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} n^{1/\alpha}X + d_n, \quad (4.2)$$

où X_i , $i = 1, \dots, n$, sont des copies de X indépendantes.

Si $D = 0$ ($d_n = 0$), alors X est dite strictement stable.

Si $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} -X$, alors X est dite symétrique stable.

Notons qu'une v.a.r. symétrique α -stable est toujours strictement α -stable.

Exemples.

Toute v.a. X dégénérée, i.e. $X = C$ p.s. est α -stable. Nous supposons toujours que X est non dégénérée.

Toute v.a. gaussienne est 2-stable (i.e. $\alpha = 2$)

En effet, si X_1 et $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, indépendantes, alors

$$AX_1 + BX_2 \sim \mathcal{N}((A+B)\mu, (A^2 + B^2)\sigma^2),$$

on a $C = (A^2 + B^2)^{1/2} \Rightarrow \alpha = 2$.

$$D = (A + B - C)\mu.$$

Le théorème suivant est à l'origine de la notion de loi stable

Théorème 4.2 T.C.L Généralisé et domaine d'attraction

Une v.a. suit une loi stable ssi. X possède un domaine d'attraction $D(X)$, i.e. il existe des suites (a_n) , (b_n) avec $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ et une suite (Y_n) de v.a.r. i.i.d. t.q.

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{a_n} + b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X.$$

On dit aussi que Y_1, Y_2, \dots appartiennent au domaine d'attraction d'une v.a. X α -stable, $\alpha \in (0, 2]$.

La suite (a_n) est à variation régulière d'indice $1/\alpha$ (i.e. $a_n = n^{1/\alpha}h(n)$, où $h = h(x)$, $x \geq 0$ est à variation lente, i.e. pour tout $a > 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(ax)}{h(x)} = 1$). Si $a_n = n^{1/\alpha}$, alors on dit que (Y_i) appartiennent au domaine d'attraction normal de X .

Le théorème peut se voir dans A. Janicki and A. Weron [12], page 23.

Remarquons que si $Var(Y_i) < \infty$, alors X est gaussienne on reconnaît donc le T.C.L.

Il découle de la formule 4.2 :

$$[\Phi_X(u)]^n = e^{iu.b_n} \Phi_X(n^{1/\alpha}u).$$

Toute v.a. stable est infiniment divisible avec $X^{*1/n} \sim n^{-1/\alpha}X - \frac{d_n}{n}$ et son triplet caractéristique de Lévy-Khinchine est donné par le résultat suivant :

Théorème 4.3 Une v.a.r. X est stable ssi. il existe $\sigma > 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ et $\mu \in \mathbb{R}$

t.q. pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_X(u) = \begin{cases} \exp \left\{ i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 \right\} & \text{si } \alpha = 2 \\ \exp \left\{ i\mu u - \sigma^\alpha |u|^\alpha \left(1 - i\beta \tan \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \text{sign}(u) \right) \right\} & \text{si } \alpha \neq 1, 2 \\ \exp \left\{ i\mu u - \sigma |u| \left(1 + i\beta \frac{2}{\pi} \text{sign}(u) \log |u| \right) \right\} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

Son triplet caractéristique est alors, $b = \mu$, $A = 0$ et la mesure de Lévy est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} et a pour densité

$$\nu(dx) = \frac{c_1}{x^{1+\alpha}} 1_{]0, +\infty[}(x) dx + \frac{c_2}{|x|^{1+\alpha}} 1_{]-\infty, 0[}(x) dx,$$

où c_1 et c_2 sont des constantes positives vérifiant : $\beta = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}$.

En fait ce théorème découle des théorèmes : théorème (3.6) et un théorème concernant la mesure spectrale que nous allons voir avec les lois stables multi-dimensionnelles.

α : indice de stabilité, $\alpha \in (0, 2]$. Il caractérise les queues de distribution. Plus α diminue, plus les queues sont lourdes. C'est pourquoi on dit lois α -stable ;

μ : paramètre de position. Il caractérise la moyenne de la loi (lorsque $\alpha > 1$) ;

σ : paramètre d'échelle $\sigma > 0$;

β : paramètre de symétrie, $-1 \leq \beta \leq 1$. Il caractérise le degré d'asymétrie de ν .

On note $X \sim \mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. Si $X \sim \mathcal{S}_\alpha(1, \beta, 0)$ X est dit standard.

On peut réécrire 4.3 à l'aide du paramètre γ défini par

$$\gamma = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{2} & \text{si } \alpha = 2 \\ \sigma^\alpha & \text{si } \alpha \neq 2 \end{cases},$$

$$\Phi_X(u) = \begin{cases} \exp \{i\mu u - \gamma |u|^\alpha (1 - i\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) \text{sign}(u))\} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp \{i\mu u - \gamma |u| (1 + i\beta \frac{2}{\pi} \text{sign}(u) \log |u|)\} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

ou encore

$$\Phi_X(u) = \exp \{i\mu u - \gamma |u|^\alpha [1 + j\beta \text{sign}(u) \omega(u, \alpha)]\}$$

où

$$\omega(u, \alpha) = \begin{cases} \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \log |u| & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

γ : mesure la dispersion de la distribution autour du paramètre de position μ et est dit paramètre de dispersion. Notons que γ est la moitié de la variance dans le cas où $\alpha = 2$.

On écrit $X \sim \mathcal{S}_\alpha(\gamma, \beta, \mu)$.

Si X est symétrique, i.e. $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} -X$, on a $\Phi_{-X}(u) = \overline{\Phi_X(u)} = \Phi_X(u)$,

alors $\Phi_X(u) = \exp(-\rho^\alpha |u|^\alpha)$, pour tout $0 < \alpha \leq 2$, où $\rho = \sigma$ ($0 < \alpha < 2$) et $\rho = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$ si $\alpha = 2$. On note $X \sim \mathcal{S}_\alpha \mathcal{S}$.

4.2 Diverses propriétés

Densité de probabilité : Pour les lois stables il n'existe pas une expression explicite de la densité de probabilité dans le cas général. Cependant on peut obtenir

une expression sous forme d'une intégral de la f.d. à l'aide de Fourier inverse de la f.c.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu.x} \Phi(u) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-u^\alpha) \cos[xu + \beta u^\alpha \omega(u, \alpha)] du. \end{aligned}$$

Quand la distribution représentée par cette densité est symétrique ($\beta = 0$) autour de zéro ($\mu = 0$), la f.c. est une fonction réelle et paire, ce qui permet de simplifier l'expression de la densité de probabilité

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-\gamma |u|^\alpha) \cos(ux) du.$$

La densité de probabilité d'une loi α -stable est bornée et de classe C^∞ .

$$\text{Support : } \text{Supp } f_S(x|\alpha, \beta, \sigma, \mu) = \begin{cases} [\mu, +\infty) & \alpha < 1 \text{ et } \beta = 1 \\ (-\infty, \mu] & \alpha < 1 \text{ et } \beta = -1 \\ (-\infty, +\infty) & \text{sinon} \end{cases}$$

La forme explicite de la densité des lois α -stables n'existe que dans les trois cas importants suivants :

1. La loi de Gauss $\mathcal{S}_2(\gamma, 0, \mu)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\gamma}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{4\gamma}\right\}.$$

2. La loi de Cauchy $\mathcal{S}_1(\gamma, 0, \mu)$:

$$f(x) = \frac{\gamma}{\pi(\gamma^2 + (x-\mu)^2)}.$$

3. La loi de Lévy $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}(\gamma, 1, \mu)$:

$$f(x) = \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(x-\mu)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\gamma^2}{2(x-\mu)}\right\}.$$

qui est concentrée sur $[\mu, \infty)$ et qui caractérise les processus de Lévy croissants appelés subordonateurs.

Reflection : Soit $X_1 \sim \mathcal{S}_\alpha(1, \beta, 0)$, $X_2 \sim \mathcal{S}_\alpha(1, -\beta, 0)$, alors $X_2 \stackrel{\mathcal{D}}{=} -X_1$, et donc $f_2(x) = f_1(-x)$ et $F_2(x) = 1 - F_1(-x)$. On en déduit que si $\beta = 0$ alors \mathcal{S} est symétrique.

Queues lourdes : Formellement une v.a.r. a une queue lourde si elle a une queue algébrique : il existent $c, \alpha > 0$ t.q. $P(|X| > x) \sim cx^{-\alpha}$, quand $x \rightarrow \infty$.

Soit X une v.a.r. $\mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ avec $0 < \alpha < 2$, on a les deux résultats suivants

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha P(X > x) = \gamma C_\alpha \frac{1 + \beta}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha P(X < -x) = \gamma C_\alpha \frac{1 - \beta}{2}, \end{cases}$$

où,

$$C_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} x^{-\alpha} \sin x dx \right)^{-1} = \frac{2}{\pi} \Gamma(\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{2}.$$

L'égalité précédente nous fait penser à la caractérisation des lois de Pareto.

Une v.a.r. suit une loi de type Pareto si : $P(X \geq x) = x^{-\alpha} h(x)$, où $h(x)$ est une fonction à variation lente.

Moments : Soit $X \sim \mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, alors

Si $\alpha = 2$, $\forall p, E|X|^p < +\infty$.

Si $\alpha < 2$, $E|X|^p < +\infty \Leftrightarrow 0 < p < \alpha$.

Dès que α est strictement inférieur à 2, la variance d'une loi α -stable est infinie.

Dès que α est strictement inférieur à 1 c'est la moyenne qui devient infinie.

Si $\alpha > 1$, la moyenne d'une loi α -stable est μ .

Standardisation : Soit $Z \sim \mathcal{S}_\alpha(1, \beta, 0)$ alors

$$X = \begin{cases} \sigma Z + \mu & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \sigma Z + \left(\mu + \beta \frac{2}{\pi} \sigma \log \sigma\right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \sim \mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu).$$

Pour $\alpha \neq 1$, nous avons l'équivalence suivant

$$X \sim \mathcal{S}_\alpha(\gamma, \beta, \mu) \Leftrightarrow Z = \frac{X - \mu}{\gamma^{1/\alpha}} \sim \mathcal{S}_\alpha(1, \beta, 0).$$

Combinaison linéaire

Proposition 4.1 (i) Si $X \sim \mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, alors pour tous $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$

$$aX + b \sim \begin{cases} \mathcal{S}_\alpha(|a|\sigma, \text{sign}(a)\beta, a\mu + b) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \mathcal{S}_1(|a|\sigma, \text{sign}(a)\beta, a\mu + b - \frac{2}{\pi}\beta\sigma a \log|a|) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

(ii) Si $X_1 \sim \mathcal{S}_\alpha(\sigma_1, \beta_1, \mu_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{S}_\alpha(\sigma_2, \beta_2, \mu_2)$ sont indépendantes, alors

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu),$$

$$\text{où } \beta = \frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}, \quad \sigma^\alpha = \sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha \text{ et } \mu = \mu_1 + \mu_2$$

Par induction, soit $X_j \sim \mathcal{S}_\alpha(\sigma_j, \beta_j, \mu_j)$, $j = 1, \dots, n$, indépendantes

et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, alors $a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n \sim \mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, t.q.

$$\sigma^\alpha = \sum_{j=1}^n |a_j\sigma_j|^\alpha, \quad \beta = \frac{\sum_{j=1}^n \beta_j \text{sign}(a_j) |a_j\sigma_j|^\alpha}{\sigma^\alpha}$$

et

$$\mu = \begin{cases} \sum_j a_j\mu_j & \alpha \neq 1 \\ \sum_j a_j\mu_j - \frac{2}{\pi} \sum \beta_j a_j \sigma_j \log|a_j| & \alpha = 1 \end{cases}$$

Notons que si $\beta_j, \forall j$, alors $\beta = 0$ et $\mu = \sum_j a_j\mu_j$.

Enonçons le cas important suivant dit propriété d'échelle pour les v.a. stables :

Si X_j i.i.d. $\sim \mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, alors $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{S}_\alpha(n^{1/\alpha}\sigma, \beta, n\mu)$.

Nous reconnaissons donc la définition (4.3) de la loi stable.

Proposition 4.2 Caractérisation des lois strictement stables

Soit $X \sim \mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$,

(i) Si $\alpha \neq 1$, alors X est strictement stable ssi. $\mu = 0$.

(ii) Si $\alpha = 1$, alors X est strictement stable ssi. $\beta = 0$.

4.3 Représentation intégrale de Nolan-Zolotarev

Comme nous avons déjà vu la densité f_X d'une loi stable ne peut être écrite qu'à l'aide de la transformée inverse de la f.c.

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu.x} \Phi(u) du.$$

Zolotarev (1986) a obtenu des représentations intégrales pour des fonctions de densités et répartitions de variables aléatoires stables, mais son implémentation n'est pas efficace à cause de problèmes numériques. Nolan (1997) obtient des formule similaires qui permettent de calculer de façon précise les f.d., et f.r. dans tout l'espace paramétrique.

Pour écrire la représentation intégrale des fonctions de densité et répartition on

définit :

$$\zeta = \zeta(\alpha, \beta) = \begin{cases} -\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ 0 & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\theta_0 = \theta_0(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \arctan(\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}) & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$c_1(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} (\frac{\pi}{2} - \theta_0) & \text{pour } \alpha < 1 \\ 0 & \text{pour } \alpha = 1 \\ 1 & \text{pour } \alpha > 1 \end{cases}$$

$$V(\theta; \alpha, \beta) = \begin{cases} (\cos \alpha \theta_0)^{\frac{1}{\alpha-1}} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \alpha(\theta_0 + \theta)} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \frac{\cos[\alpha\theta_0 + (\alpha-1)\theta]}{\cos \theta} & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \left(\frac{\frac{\pi}{2} + \beta\theta}{\cos \theta} \right) \exp \left(\frac{1}{\beta} \left(\frac{\pi}{2} + \beta\theta \right) \tan \theta \right) & \text{pour } \alpha = 1, \beta \neq 0 \end{cases}$$

La représentation intégrale de Nolan Zolotarev s'obtient à partir du résultat suivant :

Théorème 4.4 *Si $X \sim \mathcal{S}_\alpha(1, \beta, 0)$ alors les fonctions de densité et répartition de X sont données par :*

(a) *Quand $\alpha \neq 1$ et $x > \zeta$,*

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\alpha(x - \zeta)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{\pi |\alpha - 1|} \int_{-\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} V(\theta; \alpha, \beta) \exp \left(-(x - \zeta)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} V(\theta; \alpha, \beta) \right) d\theta$$

et

$$F(x; \alpha, \beta) = c_1(\alpha, \beta) + \frac{\text{sign}(1 - \alpha)}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \exp \left(-(x - \zeta)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} V(\theta; \alpha, \beta) \right) d\theta$$

(b) Quand $\alpha \neq 1$ et $x = \zeta$,

$$f(\zeta; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cos \theta_0}{\pi (1 + \zeta^2)^{\frac{1}{2\alpha}}}$$

et

$$F(\zeta; \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right)$$

(c) Quand $\alpha \neq 1$ et $x < \zeta$,

$$f(x; \alpha, \beta) = f(-x; \alpha, -\beta)$$

et

$$F(x; \alpha, \beta) = 1 - F(-x; \alpha, -\beta)$$

(d) Quand $\alpha = 1$,

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{2|\beta|} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V(\theta; \alpha, \beta) \exp\left(e^{-\frac{\pi x}{2\beta}} V(\theta; \alpha, \beta)\right) d\theta & \text{pour } \beta \neq 0 \\ \frac{1}{\pi(1+x^2)} & \text{pour } \beta = 0 \end{cases}$$

et

$$F(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(e^{-\frac{\pi x}{2\beta}} V(\theta; \alpha, \beta)\right) d\theta & \text{pour } \beta > 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x & \text{pour } \beta = 0 \\ 1 - F(x; \alpha, -\beta) & \text{pour } \beta < 0 \end{cases}$$

La démonstration du théorème peut se voir dans J. P. Nolan [20]

4.4 Simulation des lois stables

Une première solution au problème de génération de variables aléatoires stables a été trouvée par Kanter, il a développé une méthode directe pour la génération de

variables de loi $\mathcal{S}_\alpha(1, 1, 0)$ pour $\alpha < 1$. Puis cette méthode a été étendue au cas général. Chambers et al. [8] ont été les premier à obtenir cette formule en se basant sur la représentation de la densité.

Théorème 4.5 Soient $V \sim \mathcal{U}\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ et $W \sim \mathcal{E}(1)$ indépendantes, alors

1) Pour $\alpha \neq 1$,

$$X = S_{\alpha,\beta} \times \frac{\sin(\alpha(V + B_{\alpha,\beta}))}{(\cos(V))^{1/\alpha}} \times \left(\frac{\cos(V - \alpha(V + B_{\alpha,\beta}))}{W}\right)^{(1-\alpha)/\alpha} \sim \mathcal{S}_\alpha(1, \beta, 0),$$

où

$$B_{\alpha,\beta} = \frac{\arctan\left(\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\alpha}, \quad S_{\alpha,\beta} = \left[1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\pi\alpha}{2}\right]^{1/(2\alpha)}$$

2) Pour $\alpha = 1$,

$$X = \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \beta V\right) \tan V - \beta \log \left(\frac{\frac{\pi}{2} W \cos V}{\frac{\pi}{2} + \beta V}\right) \right] \sim \mathcal{S}_1(1, \beta, 0).$$

L'algorithme de simulation d'une v.a. $X \sim \mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ est le suivant :

Générer une v.a. $V \sim \mathcal{U}\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ et une v.a. $W \sim \mathcal{E}(1)$ indépendantes par

$$V = \pi(U_1 - \frac{1}{2}), \quad W = -\log U_2, \quad U_1 \text{ et } U_2 \sim \mathcal{U}([0, 1]) \text{ indépendantes}$$

Pour $\alpha \neq 1$, calculer, $B_{\alpha,\beta}$, $S_{\alpha,\beta}$ et X dans 1

Pour $\alpha = 1$, calculer, X dans 2

$$Y = \begin{cases} \sigma X + \mu & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \sigma X + (\mu + \beta \frac{2}{\pi} \sigma \log \sigma) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}.$$

Notons que dans le cas d'une loi $\mathcal{S}\alpha\mathcal{S}$ (i.e. $\beta = 0$), nous avons

$$X = \frac{\sin \alpha V}{(\cos V)^{1/\alpha}} \times \left(\frac{\cos(1 - \alpha)V}{W}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

Plus particulièrement, dans le cas où $\alpha = 2$, nous avons

$$X = \frac{\sin 2V}{\sqrt{\cos V}} \left(\frac{\cos V}{W} \right)^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{W} \sin V.$$

Nous reconnaissons la représentation de Box-Müller.

Enfin, dans le cas où $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, nous avons

$$X = \tan V,$$

formule connue, qui permet de simuler une loi de Cauchy.

4.5 Vecteurs aléatoires stables

Nous avons déjà donné la définition des lois stables sur \mathbb{R}^n . Nous donnons maintenant des définitions équivalentes en terme de vecteurs aléatoires.

Définition 4.4 *Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ est dit stable sur \mathbb{R}^n , si pour tous $A > 0$, $B > 0$, il existe $C > 0$ et un vecteur $D \in \mathbb{R}^n$, t.q.*

$$AX^{(1)} + bX^{(2)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} CX + D,$$

où $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ sont deux copies de X indépendantes.

On dit aussi que, X suit une loi stable sur \mathbb{R}^n , ou une loi stable multivariée.

Définition 4.5 (équivalente à Déf 4.4)

$X \in \mathbb{R}^n$ suit une loi stable si, il existe $\alpha \in (0, 2]$ t.q. pour tout $n \geq 1$, on peut trouver $D^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ vérifiant : $X^{(1)} + \dots + X^{(n)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} n^{1/\alpha}X + D^{(n)}$,

où $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ sont des copies de X indépendantes.

Si $D = 0$ ($D^{(n)} = 0$), alors X est dit strictement stable.

Si $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} -X$, alors X est dit symétrique stable.

Comme dans \mathbb{R} , un vecteur symétrique α -stable est strictement α -stable.

Remarquons que l'égalité en distribution des vecteurs précédents entraîne l'égalité en distribution de chaque composante, c'est à dire

$$X_j^{(1)} + \cdots + X_j^{(n)} = n^{1/\alpha} X_j + D_j^{(n)},$$

i.e. si X est un vecteur α -stable, alors ses composantes sont α -stable.

Proposition 4.3 *Pour X un vecteur α -stable, toute combinaison linéaire des composantes de X est une v.a.r. α -stable.*

Preuve. Soit $Y = \sum_{j=1}^n l_j X_j$. Prenons alors k copies $Y_1 = \sum_{j=1}^n l_j X_j^{(1)}, \dots, Y_n = \sum_{j=1}^n l_j X_j^{(k)}$ de Y et calculons la distribution de la somme des Y_j :

$$\begin{aligned} Y_1 + \cdots + Y_n &\stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{j=1}^n l_j X_j^{(1)} + \cdots + \sum_{j=1}^n l_j X_j^{(k)} \\ &\stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{j=1}^n l_j \left(X_j^{(1)} + \cdots + X_j^{(k)} \right) \\ &\stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{j=1}^n l_j \left(n^{1/\alpha} X_j + D_j^{(k)} \right) \quad \text{d'après la remarque précédente} \\ &\stackrel{\mathcal{D}}{=} n^{1/\alpha} \sum_{j=1}^n l_j X_j + \sum_{j=1}^n l_j D_j^{(k)} \\ Y_1 + \cdots + Y_n &\stackrel{\mathcal{D}}{=} n^{1/\alpha} Y + d_n. \end{aligned}$$

D'après la définition (4.3), la v.a.r. Y est bien α -stable. ■

Théorème 4.6 *Soit X un vecteur α -stable, on a les résultats suivants.*

1. *Si toute combinaison linéaire des composantes de X a une distribution strictement stable, alors X est un vecteur strictement stable.*

2. Si toute combinaison linéaire des composantes de X a une distribution $\mathcal{S}\alpha\mathcal{S}$, alors X est un vecteur $\mathcal{S}\alpha\mathcal{S}$.

3. Si toute combinaison linéaire des composantes de X a une distribution α -stable, où $\alpha \geq 1$, alors X est un vecteur α -stable.

La démonstration est détaillée dans Samorodnitsky et Taqqu [22], pages 59-62.

Proposition 4.4 Soit $0 < \alpha < 2$, X est un vecteur α -stable si sa fonction caractéristique s'écrit pour tout $u \in \mathbb{R}^n$,

$$\Phi_X(u) = \begin{cases} \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle u, x \rangle|^\alpha \left(1 - i \operatorname{sign} \langle u, x \rangle \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) d\mu_{S^{n-1}}(x) + i \langle u, \mu^0 \rangle \right\}, & \alpha \neq 1 \\ \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle u, x \rangle| \left(1 + i \frac{2}{\pi} \operatorname{sign} \langle u, x \rangle \log |\langle u, x \rangle| \right) d\mu_{S^{n-1}} + i \langle u, \mu^0 \rangle \right\}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

où $\begin{cases} \mu^0 \text{ est un vecteur de } \mathbb{R}^n, \\ \text{et } \mu_{S^{n-1}} \text{ est une mesure finie sur l'ensemble des boréliens de la sphère unité.} \\ \text{Cette mesure est aussi appelée «mesure spectrale»} \end{cases}$

La paire $(\mu_{S^{n-1}}, \mu^0)$ est unique.

La démonstration est détaillée dans Kuelbs [13].

Remarques.

1. Pour $\alpha = 2$, on obtient le même résultat à savoir que la fonction caractéristique s'écrit pour tout $u \in \mathbb{R}^n$,

$$\Phi_X(u) = E(e^{i\langle u, X \rangle}) = \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} (\langle u, x \rangle)^2 d\mu_{S^{n-1}}(x) + i \langle u, \mu^0 \rangle \right\}.$$

La seule différence avec le résultat précédent réside dans le fait que pour $\alpha = 2$, il n'y a pas forcément unicité de la mesure spectrale.

2. Lorsque $n = 1$, on retrouve la forme de la f.c. du cas univarié avec :

$$\alpha = \alpha, \quad \gamma = \mu_{S^0}(1) + \mu_{S^0}(-1), \quad \mu = \mu_1^0, \quad \beta = \frac{\mu_{S^0}(1) - \mu_{S^0}(-1)}{\mu_{S^0}(1) + \mu_{S^0}(-1)}.$$

Proposition 4.5 Soit $0 < \alpha < 2$. Les v.a.r. X_1, \dots, X_n , où pour tout $j = 1, \dots, n$ X_j a pour loi $\mathcal{S}_\alpha(\gamma_j, \beta_j, \mu_j)$, sont n v.a.r. indépendantes ssi. le vecteur (X_1, \dots, X_n) est α -stable et sa mesure spectrale est discrète et concentrée sur les points d'intersection des axes avec la sphère unité.

Lemme 4.1 Considérons la mesure spectrale suivante (discrète et concentrée sur les points d'intersection des axes avec la sphère unité) :

$$\mu_{S^{n-1}} = \sum_{k=1}^n a_k \delta(0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k^{\text{ème}} \text{ place}}}{1}, 0, \dots, 0) + \sum_{j=1}^n b_j \delta(0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ j^{\text{ème}} \text{ place}}}{-1}, 0, \dots, 0) \text{ où } a_k \geq 0 \text{ et } b_j \geq 0.$$

On a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle u, x \rangle|^\alpha \left(1 - i \operatorname{sign} \langle u, x \rangle \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) d\mu_{S^{n-1}}(x) + i \langle u, \mu^0 \rangle \right\} \\ &= \exp \left\{ - \sum_{j=1}^n |u_j|^\alpha \left[(a_j + b_j) - i (a_j - b_j) \operatorname{sign}(u_j) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right] + i \sum_{j=1}^n u_j \mu_j^0 \right\}. \end{aligned}$$

Preuve du Lemme 4.1. D'après la forme de la mesure spectrale, on a :

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle u, x \rangle|^\alpha \left(1 - i \operatorname{sign} \langle u, x \rangle \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) d\mu_{S^{n-1}}(x) + i \langle u, \mu^0 \rangle \right\} \\ &= \left\{ \exp - \sum_{k=1}^n a_k |u_k|^\alpha \left(1 - i \operatorname{sign}(u_k) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{j=1}^n b_j |-u_j|^\alpha \left(1 - i \operatorname{sign}(-u_j) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) + i \sum_{j=1}^n u_j \mu_j^0 \right\} \\ &= \exp \left\{ - \sum_{j=1}^n |u_j|^\alpha \left[(a_j + b_j) - i (a_j - b_j) \operatorname{sign}(u_j) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right] + i \sum_{j=1}^n u_j \mu_j^0 \right\}. \blacksquare \end{aligned}$$

Preuve de la proposition 4.5. *Condition nécessaire* : Si les v.a.r. X_j sont indépendantes et de loi $\mathcal{S}_\alpha(\gamma_j, \beta_j, \mu_j)$, la f.c. du vecteur s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
\Phi_X(u) &= \prod_{j=1}^n \Phi_{X_j}(u_j) = \prod_{j=1}^n \exp \left\{ i\mu_j u_j - \gamma_j |u_j|^\alpha \left[1 - i\beta_j \operatorname{sign}(u_j) \tan \frac{\alpha\pi}{2} \right] \right\} \\
&= \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \left(i\mu_j u_j - \gamma_j |u_j|^\alpha \left[1 - i\beta_j \operatorname{sign}(u_j) \tan \frac{\alpha\pi}{2} \right] \right) \right\} \\
\Phi_X(u) &= \exp \left\{ - \sum_{j=1}^n |u_j|^\alpha \left[\gamma_j - i\gamma_j \beta_j \operatorname{sign}(u_j) \tan \frac{\alpha\pi}{2} \right] + i \sum_{j=1}^n \mu_j u_j \right\}.
\end{aligned}$$

Posons $a_k = \gamma_k \left(\frac{1+\beta_k}{2} \right)$, $b_j = \gamma_j \left(\frac{1-\beta_j}{2} \right)$ et $\mu_j^0 = \mu_j$. Remarquons que a_k et b_j sont

positifs ou nuls et que :

$$\begin{cases} a_j + b_j = \gamma_j \\ a_j - b_j = \gamma_j \beta_j \end{cases}$$

Le Lemme 4.1 nous donne alors l'égalité suivante :

$$\Phi_X(u) = \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle u, x \rangle|^\alpha \left(1 - i \operatorname{sign}(\langle u, x \rangle) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) d\mu_{S^{n-1}}(x) + i \langle u, \mu^0 \rangle \right\},$$

qui est bien la f.c. d'un vecteur α -stable dont la mesure spectrale est discrète et concentrée sur les points d'intersection des axes avec la sphère unité.

Condition suffisante : Si (X_1, \dots, X_n) est un vecteur α -stable dont la mesure spectrale est discrète et concentrée sur les points d'intersection des axes avec la sphère unité, le lemme 4.1 dit que la f.c. de X s'écrit

$$\Phi_X(u) = \exp \left\{ - \sum_{j=1}^n |u_j|^\alpha \left[(a_j + b_j) - i(a_j - b_j) \operatorname{sign}(u_j) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right] + i \sum_{j=1}^n u_j \mu_j^0 \right\}$$

Posons alors $\gamma_j = a_j + b_j$, $\beta_j = \frac{a_j - b_j}{a_j + b_j}$ et $\mu_j = \mu_j^0$. L'équation précédente s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\Phi_X(u) &= \exp \left\{ - \sum_{j=1}^n |u_j|^\alpha \left[\gamma_j - i\gamma_j \beta_j \operatorname{sign}(u_j) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right] + i \sum_{j=1}^n \mu_j u_j \right\} \\
&= \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \left(i\mu_j u_j - \gamma_j |u_j|^\alpha \left[1 - i\beta_j \operatorname{sign}(u_j) \right] \tan \frac{\alpha\pi}{2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$= \prod_{j=1}^n \exp \left\{ i\mu_j u_j - \gamma_j |u_j|^\alpha \left[1 - i\beta_j \operatorname{sign}(u_j) \tan \frac{\alpha\pi}{2} \right] \right\} = \prod_{j=1}^n \Phi_{X_j}(u_j).$$

Les v.a.r. sont donc bien indépendantes et l'on reconnaît pour chaque X_j , la f.c. d'une loi $\mathcal{S}_\alpha(\gamma_j, \beta_j, \mu_j)$. ■

Théorème 4.7 *Soit $0 < \alpha < 2$. Le vecteur X est symétrique α -stable ($\mathcal{S}_\alpha\mathcal{S}$) ssi. sa f.c. s'écrit*

$$\Phi_X(u) = \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle u, x \rangle|^\alpha d\mu_{S^{n-1}}(x) \right\}. \quad (4.4)$$

Remarquons que la mesure spectrale d'un tel vecteur est forcément symétrique.

Preuve. Nous savons que :

$$\begin{aligned} \Phi_X(u) &= \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle u, x \rangle|^\alpha \left(1 - i \operatorname{sign} \langle u, x \rangle \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) d\mu_{S^{n-1}}(x) + i \langle u, \mu^0 \rangle \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle u, x \rangle|^\alpha d\mu_{S^{n-1}}(x) \right\} \\ &\times \exp \left\{ i \left(\int_{S^{n-1}} \operatorname{sign} \langle u, x \rangle \tan \frac{\pi\alpha}{2} d\mu_{S^{n-1}}(x) + \langle u, \mu^0 \rangle \right) \right\}. \\ \Phi_X(u) &= \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle u, x \rangle|^\alpha d\mu_{S^{n-1}}(x) \right\} \exp \{ iA(u, \mu^0, \alpha) \}. \end{aligned}$$

On voit que $A(-u, \mu^0, \alpha) = -A(u, \mu^0, \alpha)$. On en déduit alors que la f.c. du vecteur $-X$ s'écrit :

$$\Phi_{-X}(u) = \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle u, x \rangle|^\alpha d\mu_{S^{n-1}}(x) \right\} \exp \{ -iA(u, \mu^0, \alpha) \}.$$

Pour que le vecteur X soit $\mathcal{S}_\alpha\mathcal{S}$ il faut et il suffit que la loi de X soit la même loi que la loi de $-X$, ce qui revient à avoir l'égalité des f.c. On a alors :

$$\begin{aligned} \Phi_X(u) = \Phi_{-X}(u) &\Leftrightarrow \exp \{ iA(u, \mu^0, \alpha) \} = \exp \{ -iA(u, \mu^0, \alpha) \} \\ &\Leftrightarrow A(u, \mu^0, \alpha) = 0. \end{aligned}$$

On retrouve alors la forme de l'équation 4.4.

Montrons maintenant que cette mesure est forcément symétrique. Si l'on pose,

pour tout $A \in \mathcal{B}(S^{n-1})$, $\tilde{\mu}_{S^{n-1}} = \frac{1}{2}(\mu_{S^{n-1}}(A) + \mu_{S^{n-1}}(-A))$, il est clair que cette mesure est symétrique et nous avons :

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle u, x \rangle|^\alpha d\tilde{\mu}_{S^{n-1}}(x) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle u, x \rangle|^\alpha \frac{1}{2} d\mu_{S^{n-1}}(x) - \int_{S^{n-1}} |\langle u, x \rangle|^\alpha \frac{1}{2} d\mu_{S^{n-1}}(-x) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle u, x \rangle|^\alpha \frac{1}{2} d\mu_{S^{n-1}}(x) - \int_{S^{n-1}} |\langle u, y \rangle|^\alpha \frac{1}{2} d\mu_{S^{n-1}}(y) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle u, x \rangle|^\alpha d\mu_{S^{n-1}}(x) \right\}. \end{aligned}$$

Par unicité de la mesure spectrale, on obtient $\tilde{\mu}_{S^{n-1}} = \mu_{S^{n-1}}$. ■

Proposition 4.6 *Soit M une matrice $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ et X un vecteur $\mathcal{S}\alpha\mathcal{S}$ de dimension n , alors $Y = MX$ est un vecteur $\mathcal{S}\alpha\mathcal{S}$ de dimension m .*

De plus, si les (X_j) sont n v.a.r. indépendantes deux à deux de loi $\mathcal{S}\alpha(\gamma_j, \beta_j, \mu_j)$, alors la mesure spectrale de Y est discrète.

La démonstration est détaillée dans Samorodnitsky et Taqqu [22], page 69.

Remarque. *Pour les vecteurs $\mathcal{S}\alpha\mathcal{S}$, nous retrouvons toutes les propriétés des vecteurs gaussiens hormis celles concernant la matrice de variances-covariances (qui définit les vecteurs gaussiens). En effet nous avons déjà vu que dès que α est strictement inférieur à 2, les moments d'ordre 2 sont infinis pour les lois stables et donc la matrice de variances-covariances n'existe pas.*

4.6 Processus stochastiques α -stable

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus stochastique. Rappelons que les lois fini dimensionnelle (l.f.d.) du processus X sont les lois des vecteurs $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$, $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$.

Définition 4.6 *Le processus stochastique X est stable si toutes ses (l.f.d.) sont stables, il est strictement stable (resp. symétrique stable) si toutes ses (l.f.d.) sont strictement stables (resp. symétrique stables).*

Si les (l.f.d.) sont stables, alors par le théorème de Kolmogorov, elles doivent avoir toutes le même indice de stabilité α , voir Samorodnitsky et Taqqu [22].

Le théorème suivant est une conséquence du théorème (4.6).

Théorème 4.8 *Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus stochastique*

1. (X_t) est strictement stable ssi. toute combinaison linéaire :

$$\sum_{k=1}^n b_k X_{t_k}, n \geq 1, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R} \quad (4.5)$$

est strictement stable.

2. (X_t) est symétrique stable ssi. toute combinaison linéaire 4.5 est symétrique stable.

3. Si $\alpha \geq 1$, alors (X_t) est α -stable ssi. toute combinaison linéaire 4.5 est α -stable.

Le processus α -stable le plus connu est le processus de Lévy α -stable (dit α -stable Lévy motion en Anglais).

Définition 4.7 *Un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit processus de Lévy α -stable standard si*

1) $X_0 = 0$ p.s. ;

2) X est à accroissements indépendants ;

3) $X_t - X_s \sim \mathcal{S}_\alpha((t-s)^{1/\alpha}, \beta, 0)$, pour tous $0 \leq s < t < \infty$.

Remarquons que X est à accroissements stationnaires. X est un m.b. lorsque $\alpha = 2$. X est $\mathcal{S}\alpha\mathcal{S}$ lorsque $\beta = 0$. X est $1/\alpha$ auto-similaire (hormis $\alpha = 1, \beta = 0$), i.e. pour tout $c > 0$, $(X_{ct})_{t \geq 0} \stackrel{\mathcal{D}}{=} (c^{1/\alpha} X_t)_{t \geq 0}$.

Chapitre 5

Simulation du temps local d'un mouvement brownien

Avant d'entamer cette simulation donnons d'abord quelques propriétés concernant les trajectoires browniennes.

5.1 Propriétés des trajectoires browniennes

1. $P \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} B_t = +\infty, \liminf_{t \rightarrow \infty} B_t = -\infty \right\} = 1$, i.e. *P-p.s.* B_t passe une infinité de fois par tout point. C'est la récurrence du m.b. en dimension 1.

2. Le m.b. est localement Höldérien d'indice α , $\forall \alpha, 0 < \alpha < \frac{1}{2}$, i.e.

$\forall T > 0, \exists K = K(T) : |B_t - B_s| \leq K |t - s|^\alpha$ pour tout $0 \leq s < t \leq T$, p.s.

3. Pour presque tout ω , $t \rightarrow B_t(\omega)$ est nulle part différentiable, i.e.

$$P\{\omega : \exists t_0, t \rightarrow B_t(\omega) \text{ différentiable en } t_0\} = 0.$$

4. Pour presque tout ω , $t \rightarrow B_t(\omega)$ n'a pas de points de croissance, i.e.

$$P\{\omega : t \rightarrow B_t(\omega) \text{ est monotone sur un intervalle}\} = 0.$$

5. Loi des grands nombres, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{t} = 0$ p.s.

6. Loi du logarithme itéré, $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1$ p.s.

7. Ensemble des zéros : Pour tout ω , on définit l'ensemble \mathcal{L}_ω par

$$\mathcal{L}_\omega(0) = \{t \in \mathbb{R}_+, B_t(\omega) = 0\}.$$

Théorème 5.1 L'ensemble \mathcal{L}_ω , P -p.s.

1. est de mesure de Lebesgue λ nulle.
2. est fermé et non borné.
3. a un point d'accumulation en $t = 0$.
4. n'a pas de point isolé, i.e. un ensemble parfait.

5.2 Simulation du temps local

On sait par le théorème précédent que la mesure de Lebesgue de l'ensemble

$$\mathcal{L}_\omega(x) = \{0 \leq t < \infty, B_t(\omega) = x\}$$

est nulle (P -p.s.). Il faut trouver un autre outil pour mesurer le temps passé en x .

Idée de Lévy : On introduit le temps local en x comme mesure du voisinage

$$L(t, x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \lambda\{0 \leq s \leq t, |B_s - x| < \varepsilon\},$$

qui peut s'écrire

$$L(t, x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(|B_s - x| < \varepsilon)} ds.$$

Cette limite existe, est finie et non nulle *p.s.* Le processus $L(t, x)$ peut être choisi continu en (t, x) , et, à x fixé, croissant en t et constant sur chaque intervalle du complémentaire de $\mathcal{L}_\omega(x)$, sur ces intervalles le m.b. ne coupe pas l'axe des temps : c'est ce qu'on appelle une excursion. La dérivée en temps de $L_t(x)$ existe donc *p.p.* par rapport à la mesure de Lebesgue et est nulle pour presque tout t (par rapport à la mesure de Lebesgue). C'est donc une fonction singulière du type escalier de Cantor.

Le temps local d'un processus n'existe pas toujours son existence dépend du choix du processus. Par exemple, si X est de Lévy et Ψ son exposant caractéristique alors pour $x \in \mathbb{R}$,

$$L(t, x) \text{ existe} \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Re} \frac{1}{1 - \Psi(\theta)} d\theta < \infty,$$

voir L. C. G. Rogers and D. Williams [21], page 83.

Le temps local nous permet de reconstituer les résolvantes des processus de base par la formule

$$E^x \int_0^T f(B_s) ds = E^x \int_0^T ds \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) L(s, y) dy$$

et donc

$$R_\lambda f(x) = E^x \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} f(B_s) ds = E^x \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} ds \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) L(s, y) dy \right).$$

Il existe de nombreuses constructions du temps local. Celle de Mr. A. Bencherif [3] nous permettra de simuler efficacement le temps local d'un m.b. en 0. Exposons cette méthode d'abord en donnant des exemples, voir les figures.

Pour simplifier la simulation, nous prendrons $t = 1$.

Soit $N(n, 1)$ le nombre de boîtes $I_{n,k} = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$ qui contiennent un zéro de notre m.b., i.e. $\exists t \in I_{n,k}$ t.q. $B(t) = 0$.

Alors Mr. A. Bencherif [3] a démontré que, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$P^0 \left\{ \lim_{n \uparrow \infty} \frac{N(n, 1)}{\sqrt{2^n}} = cL(1, x) \right\} = 1.$$

Ici, nous prenons $x = 0$ pour simplifier. Notons alors que le premier intervalle est toujours compris dans la statistique $N(n, 1)$ puisque $B(0) = 0 \in [0, 2^{-n}[$.

La preuve de ce théorème passe par une loi forte entropique pour l'inverse de $L(t, 0)$ puisqu'on a une liberté de se mouvoir dans le temps et l'édification d'une loi forte est beaucoup plus facile. L'inverse de $L(t, 0)$, noté $S(t)$ est un processus α -stable de Lévy d'indice $\alpha = \frac{1}{2}$, de plus $S(t)$ est croissant.

Nous avons

$$N(n, 1) = \sum_{k=0}^{2^n-1} q_k,$$

où

$$q_k = 1_{\{\exists t \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[, B(t)=0\}}.$$

Les v.a. q_k sont des v.a. de Bernoulli de paramètre

$$p_k = P \{ \exists t \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[, B(t) = 0 \}.$$

Nous avons : voir P. Lévy [15], Théorème 44.1, page 200,

$$p_k = \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{k2^{-n}}{(k+1)2^{-n}}} = \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{k}{k+1}}.$$

Puisque à la fin du compte nous allons aboutir à la génération de nombres aléatoire qui sont de toute façon obtenus d'une manière indépendante, nous prendrons les U_k indépendantes, d'où la formule de simulation de $L(1)$, en vertu de simulation de la loi de Bernoulli 2.1, on a donc le résultat suivant :

Théorème 5.2 Avec les notations ci-dessus

$$L(1, 0) = \frac{\sum_{k=0}^{2^n-1} 1_{\{U_k \leq p_k\}}}{c\sqrt{2^n}}.$$

Il serait intéressant de vérifier par simulation que le théorème suivant est vrai

Théorème 5.3 Avec les notations plus haut, il existe une constante absolue $c > 0$

t.q.

$$P^0 \left\{ \forall x \in \mathbb{R}, \forall T \geq 0, \lim_{n \uparrow \infty} \frac{N^x(n, T)}{\sqrt{2^n}} = cL(T, x) \right\} = 1.$$

La difficulté semble ici de passer outre le fait que le théorème est déjà vrai pour $x \in \mathbb{Q}$ par le théorème de Mr. A. Bencherif [3]. Plus précisément il faut concilier la théorie des ensembles non-dénombrables avec la pratique courante au plus dénombrable qu'on utilise en simulation pour la génération de nombres aléatoires.

Signalons que la simulation donnée ici est une simulation d'une v.a $L(1, 0)$, puis la simulation de toute la trajectoire du processus $L(t, x)$ s'en déduit. L'annexe suivant nous donne des méthodes de simulation de processus plus généraux que $L(t, x)$, par soucis de complétude.

5.3 Annexe

Les méthodes décrites dans le Chapitre 2 permettent de simuler une v.a., en particulier la valeur d'un processus stochastique à un instant donné. On a parfois besoin de savoir simuler toute la trajectoire d'un processus. Ce paragraphe propose quelques procédés élémentaires permettant de simuler des trajectoires de processus.

Insistons sur le fait que chaque "trajectoire simulée" obtenue par ces procédés correspond plutôt à une réalisation $(X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_n}(\omega))$, pour un ω donné, de la loi fini-dimensionnelle du processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ aux instants t_1, \dots, t_n . Simuler la véritable loi du processus n'a pas beaucoup de sens car il s'agirait alors d'obtenir une courbe $t \in \mathbb{R}_+ \rightarrow X_t(\omega)$.

Or \mathbb{R} est infini donc inaccessible dans sa totalité sur un ordinateur. La loi d'un processus est entièrement caractérisée par ses marginales de rang fini. On simule

donc des lois marginales f.d. de la v.a. à valeurs fonctionnelles ($\omega \in \Omega \rightarrow (t \in \mathbb{R}_+ \rightarrow X_t(\omega))$). Elle sont à percevoir comme des discrétisations de trajectoires probables du processus.

Nous Donnerons ici quelques méthodes de simulation du m.b. et qui peuvent s'appliquer aux processus plus généraux.

Sauf dans la méthode de Karhunen-Loève, les trajectoires ne sont calculées qu'en un nombre fini de points. Le reste des valeurs s'en déduit si besoin est par interpolation linéaire.

1. Méthode de Cholesky

Rappelons que pour simuler un couple de v.a. $\sim \mathcal{N}(0, 1)$ indépendantes (resp. une v.a. $\sim \mathcal{N}(0, 1)$) on utilise la formule (resp. l'une des formule) : $X_1 = \sqrt{-2 \log U} \cos 2\pi V$ et $X_2 = \sqrt{-2 \log U} \sin 2\pi V$ où U_1 et U_2 sont deux v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$ et que si $X \sim \mathcal{N}(0, I_n)$, alors on simule une réalisation de $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \Gamma_n)$, en posant $Y = AX + \mu$, où A est d'ordre n , $AA' = \Gamma$. Soit $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un m.b. on sait que $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus gaussien. Les marginales d'un processus gaussien sont caractérisées par le vecteur moyen μ et la matrice de covariance Γ . Pour $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ on a $\mu = 0$ et $\Gamma_{i,j} = t_i \wedge t_j$.

Pour simuler une trajectoire d'un mouvement brownien, on simule donc une réalisation de $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ en posant $B = AX$, $AA' = (\Gamma_{i,j})$. Cette méthode peut être utilisée pour simuler la loi d'un processus gaussien quelconque $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ à partir de sa fonction de covariace $(t, s) \in \mathbb{R}_+^2 \rightarrow Cov(X_t, X_s)$.

2. Méthode des incréments

Le m.b. étant à accroissements indépendants, il satisfait, comme nous avons déjà vu, la propriété de Markov. En d'autres termes, le futur du processus est indépendant du passé lorsque l'on connaît le présent. Il a donc une mémoire courte en quelque sorte. Ainsi, pour prolonger une trajectoire simulée, on peut utiliser la même méthode à partir du dernier point de cette trajectoire, ce qui n'est pas possible avec des processus à mémoire longue. Ainsi on a pour un m.b. standard $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$:

$$B_{t_{i+1}} = B_{t_i} + \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{L}} Y_i,$$

où $t_i = iT/L$, $i = 1, \dots, L$ et Y_1, \dots, Y_L est une suite de v.a.r. i.i.d. $\sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Ceci est bien conforme à l'intuition que l'on peut avoir du m.b. : une succession de petits sauts gaussiens indépendants. Cette méthode est beaucoup plus efficace que la précédente mais repose de façon cruciale sur l'indépendance des accroissements du m.b., propriété que n'a pas forcément un processus gaussien quelconque.

Cette méthode s'applique à n'importe quel processus à accroissements indépendants.

3. Méthode de Karhunen-Loève

Soit $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Soit

$$\phi_n(t) = \frac{2\sqrt{2T}}{(2n+1)\pi} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi t}{2T}\right),$$

On peut montrer que dans $L^2(\Omega \times [0, T])$, on a

$$B_t = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \phi_n(t).$$

Il existe donc une sous-suite de la suite des sommes partielles de la série de droite qui converge *p.s.* vers B . On en déduit une méthode d'approximation par troncature de la série.

on peut en théorie appliquer cette méthode à tout processus t.q. $E \left[\int_0^T X_s^2 ds \right]$ soit fini. En pratique, il faut pouvoir caractériser la loi des Z_n , en particulier ce n'est applicable pratiquement que si ces variables sont indépendantes.

4. Méthode du point médian

On prend pour N une puissance de 2. On part de $B_0 = 0$ et $B_T = Z_0$, où $Z_0 \sim \mathcal{N}(0, T)$.

En suite, on prend $B_{T/2} = (B_0 + B_T + Z_1) / 2$

où $Z_1 \sim \mathcal{N}(0, T)$ indépendantes de Z_0 .

Pour tous les points de rang i c'est à dire de la forme $t = k2^{-i}T$ avec k impair dans $\{1, \dots, 2^i\}$, on pose

$$B_{k2^{-i}T} = (B_{(k-1)2^{-i}T} + B_{(k+1)2^{-i}T} + Z_{i,k}) / 2,$$

où les $Z_{i,k}$ sont des v.a. gaussiennes centrées indépendantes de variance $T2^{-(i-1)}$ et indépendantes des $Z_{j,l}$ pour $j < i$.

Avec quelques modifications, cette méthode s'applique à n'importe quel processus markovien.

Glossaire

(Ω, \mathcal{F}, P) : espace probabilisé.

$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$: filtration.

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$: tribu borélienne sur \mathbb{R}^n .

$\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$: ensemble des fonctions réelles continues et bornées sur \mathbb{R} .

$a \wedge b$: le minimum de a et b .

\mathcal{F}_t^X : tribu engendrée par $(X_u, u \leq t)$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: le produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^n .

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices carrées à coefficients réels.

1_A : indicatrice de A .

δ_x : mesure de Dirac en x .

$[x]$: partie entière de x .

$\hat{\mu}$: fonction caractéristique de la loi μ .

γ : mesure de Lévy.

Notation

i.e. : c'est à dire.

ssi. : si et seulement si.

càd : continu à droite.

càg : continu à gauche.

càdlàg : continu à droite pourvu de limite à gauche.

v.a. : variable aléatoire.

v.a.r. : variable aléatoire réelle.

p.s. : presque sûrement.

i.i.d. : indépendantes identiquement distribuées.

$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$: X_n converge en loi vers X .

$X_n \xrightarrow{P} X$: X_n converge en probabilité vers X .

f.c. : fonction caractéristique.

f.r. : fonction de répartition.

f.d. : fonction de densité.

f.t. : fonction de transition.

l.f.d. : loi fini dimensionnelle.

m.b. : mouvement brownien.

$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} Y$: la variable aléatoire X admet la même distribution que la variable aléatoire Y .

$X \sim Y$: la variable aléatoire X suit la loi de la variable aléatoire Y .

$\mu \ll \nu$: μ est absolument continue par rapport à ν .

$\mu * \nu$: produit de convolution des mesures μ et ν .

Bibliographie

- [1] A. AÏSSANI et D. AÏSSANI - *Méthodes Statistiques en Fiabilité*, Cours de Post-Graduation, Université Mentouri Constantine, 2005.
- [2] D. APPLEBAUM - *Lectures on Lévy Processes in Euclidean Spaces and Groups*, University of Greifswald, 2003.
- [3] A. BENCHERIF-MADANI - *Une nouvelle construction du temps local d'un processus semi-stable*, C. R. Acad. Sci. Paris, t321, Série I, 1995, p. 1509-1511.
- [4] J. BERTOIN - *Lévy Processes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [5] R. M. BLUMENTHAL and R.K. GETTOOR - *Markov Processes and Potential Theory*, Academic Press, 1968.
- [6] S. BORAK, W. HÄRDLE and R. WERON - *Stable Distributions*, Technical University of Wrocław, Poland, 2005.
- [7] N. BOULEAU - *Variables aléatoires et simulation*, Hermann, 1986.
- [8] J. M. CHAMBERS, C. L. MALLOWS, and B. W. STUCK - *A Method for simulating stable random variables*, American statistical association 71, 1976.

- [9] L. CHAUMONT - *Introduction aux processus auto-similaires*, Proba Jussieu, 2005-2006.
- [10] P. L'ECUYER - *Random Number Generation*, Chapter 4 of the Handbook on Simulation, Université de Montréal, Wiley, 1998.
- [11] J. JACOD - *Chaines de Markov, Processus de Poisson et applications*, DEA de Probabilités et Applications, Proba Jussieu, 2003-2004.
- [12] A. JANICKI and A. WERON - *Simulation and Chaotic Behavior of α -Stable Stochastic Processes*, Marcel Dekker, New York, 1994.
- [13] J. KUELBS - *A representation theorem for symmetric stable processes and stable measures on H* . *Z. Gebiete*, Vol. 26, 1973.
- [14] D. LAMBERTON et B. LAPEYRE - *Introduction au calcul stochastique*, ENPC, 1999.
- [15] P. LÉVY - *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Gauthier-Villars & C^{ie}, Paris, 1965.
- [16] F. MALRIEU - *Processus de Markov et inégalités fonctionnelles*, Cours de Master 2, Université de Rennes 1, 2005-2006.
- [17] M. MÉTIVIER - *Notions fondamentales de la théorie des probabilités*, DUNOD, Paris, 1972.
- [18] T. MORGAN and J. BYRON - *Elements of simulation*, Mathematical Institute, University of Kent, Canterbury, UK.

- [19] J. P. NOLAN - *Stable Distributions Models for Heavy Tailed Data*. Chapter 1, American University Washington, 2005.
- [20] J. P. NOLAN - *Numerical approximation of stable densities and distribution functions*. Preprint, American University Washington, 1996.
- [21] L. C. G. ROGERS and D. WILLIAMS - *Diffusions, Markov Processes and Martingales*, Volume 1, University of Bath.
- [22] G. SAMORODNITSKY and M.S. TAQQU - *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman and Hall, New York, 1994.
- [23] K. I. SATO - *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1999.
- [24] R. WERON - *On the Chambers-Mallows-Stuck method for simulating skewed stable random variables*, Technical University of Wroclaw, Poland, 1995.
- [25] B. YCART - *Méthodes de Monte-Carlo*, UFR Mathématiques et Informatique, Université René Descartes, Paris.
- [26] H. V. ZANTEN - *An Introduction to Stochastic Processes in Continuous Time*, Vrije Universiteit Amsterdam, 2004.
- [27] V. M. ZOLOTAREV - *One-dimensional stable distributions*, Translations of Mathematical Monographs, volume 65, American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

Résumé :

Le temps local d'un mouvement brownien à l'instant t au niveau x mesure le temps que passe le mouvement brownien dans x . C'est un modèle probabiliste qui nous permet de reconstituer les résolvantes des processus de base.

Dans ce travail, nous donnons une simulation du temps local d'un mouvement brownien. Pour cela on a utilisé la simulation de la loi de Bernoulli en se basant sur le théorème démontré par Mr. A. Bencherif qui a donné une discrétisation en temps donnant lieu à une somme de v.a. de Bernoulli.

Summary :

A local time of Brownian motion at an instant t and at a level x is the amount of time that Brownian motion spends at x , up to time t . It is a probabilistic model which can be used to recover the resolvents of basic processes.

In this work, we give a simulation of local time of Brownian motion. To achieve this we have used the simulation of Bernoulli distribution, following a the theorem proved by Mr. A. Bencherif which uses a time discretization by means of Bernoulli random variables.