REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI-CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre : … … …
Série : … …. …

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER EN MATHEMATIQUES

THEME

Sur les solutions fortes et faibles des équations différentielles stochastiques gouvernées par un brownien ou un brownien fractionnaire

OPTION :

Mathématiques appliquées

Présenté par :

Azzouz Djemai

Devant le jury :

Président	: **Z. Mohdeb**	**Prof.**	**Univ. Constantine**
Rapporteur	: **L. Abbaoui**	**Prof.**	**Univ. Sétif**
Examinateurs	: **F. L. Rahmani**	**M.C.**	**Univ. Constantine**
	F. Messassi	**M.C.**	**Univ. Constantine**

Soutenu le : … … …

Contents

Introduction.

Une équation différentielle stochastique peut être interprétée comme une équation ordinaire perturbée par un bruit blanc (son intensité $b(t, X_t)$ dépend du temps t et de la position X_t) et donc prend la forme suivante :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \tag{1.1}$$

où b et σ sont des fonctions données, et W_t est un processus de Wiener qui est le modèle mathématique du mouvement brownien.

Par solution d'une équation différentielle stochastique, on entend un processus stochastique continu X_t tel que pour tout $t \geq 0$,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \;\; p.s. \tag{1.2}$$

Il y a deux façons de poser le problème, l'une dite forte et l'autre faible en fonction de ce qui est donné à priori et des propriétés que doit posséder la solution.

Dans le cas d'une solution forte, on donne à priori l'espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$, un processus de Wiener W_t et une variable aléatoire initiale ξ et on cherche un processus stochastique continu X_t satisfaisant l'équation (1.2) avec $X_0 = \xi$. On suppose généralement que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est la plus petite pour laquelle le processus de Wiener W est adapté et ξ est $\mathcal{F}_0$-mesurable.

La condition exigeant que la solution X_t soit adaptée implique alors qu'elle puisse être exprimée en fonction de ξ et de W_t : $X = F(\xi, W_t)$ pour une fonction mesurable appropriée F. Pour précidser la notion de solution forte des équations différentielles stochastiques nécessite de rajouter certaines conditions sur F.

Dans le cas d'une solution faible de l'équation différentielle stochastique, on cherche à déterminer un espace de probabilité filtré, un processus de Wiener, une variable aléatoire initiale et un processus continu et adapté X_t satisfaisant l'équation (1.2). La loi de la variable initiale X_0 est généralement donnée. La filtration satisfait les conditions habituelles seulement de sorte qu'une solution faible X n'est pas nécessairement une fonction du couple (X_0, W). Il est clair que l'existence une solution forte implique toujours l'existence d'une solution faible, mais l'inverse est faux.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'équation différentielle stochastique de la forme :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + dB_t^H, \tag{1.3}$$

où b est une fonction donnée et B^H est un mouvement brownien fractionnaire caractérisé par $B_t^H = \int_0^t K_H(t,r)dW_r$.

Dans le cas où le paramètre de Hurst H est égale à $\frac{1}{2}$, B^H est un mouvement brownien et si $H \neq \frac{1}{2}$, le processus B^H n'est pas une semi-martingale et nous ne pouvons pas appliquer le calcul stochastique de Itô par rapport à B^H. Nous présentons le calcul stochastique par rapport au brownien fractionnaire B^H et nous donnons quelques théorèmes d'existence et d'unicité de l'équation (1.3) inspirés des travaux de Y. Ouknine et de ses collaborateurs.

Le mémoire est organisé comme suit :

Le chapitre 1 constitue un préliminaire sur les processus stochastiques à temps continu. Dans la section 1.1, on définit les martingales, le processus du mouvement brownien, les processus de Markov et les processus de diffusion. Dans la section 1.2, on s'intéresse à l'intégration stochastique et à la formule de Itô ainsi qu'au problème de changement de la mesure et au théorème de Girsanov [08], [09],[10], [11], [12], [18], [19], [20], [21], [22], [23].

Dans le chapitre 2, on définit les différents types de solutions (fortes et faibles) et les différents types d'unicité (en loi et des trajectoires) pour les équations différentielles stochastiques dans le cas classique c'est à dire gouvernés par un processus de Wiener. On expose aussi quelques théorèmes d'existence et d'unicité et principalement le théorème de base de Itô pour les solutions fortes et le théorème de Yamada et Watanabe pour les solutions faibles. On s'intéresse aussi à l'équivalence de la notion de solution faible et du problème de martingale de Stroock et Varadan. On termine ce chapitre par un théorème sur la propriété de Markov forte pour les solutions des EDS, l'expression explicite des solutions des équations différentielles stochastiques linéaires, la formule de Feynman-Kac et quelques exemples [05], [08], [09],[10], [11], [12], [18], [19], [20], [21], [22],[23].

Le chapitre trois est consacré aux équations différentielles stochastiques gouvernées par le mouvement brownien fractionnaire (MBF).

La première section porte sur le calcul fractionnaire, le mouvement brownien fractionnaire, le calcul de Malliavin, l'intégrale stochastique par rapport au MBF et la version de la formule de Itô [01], [02], [04], [06], [07], [14], [17].

Dans la deuxième section, on s'intéresse à la transformation de Girsanov qui est un outil essentiel dans la preuve de l'existence des solutions faibles [03], [13], [15],[16].

Dans la dernière section, on montre l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles stochastiques gouvernées par le MBF [03], [13], [15], [16].

Chapter 1
PRELIMINAIRES.

1.1 Processus stochastiques.

1.1.1 Définitions.

Dans cette section, nous présentons quelques concepts fondamentaux concernant les processus stochastiques à temps continu qui sont nécessaires pour notre travail.

Fixons un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et rappelons qu'une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire si X est une fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la σ-algèbre de Borel de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1

La famille des variables aléatoires $X = (X_t)_{t\geq 0}$ avec $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ s'appelle processus stochastique avec l'ensemble d'indices $I = [0, \infty[$.

Dans toute cette section, nous considérons seulement des processus à valeurs dans $\mathbb{R}$ et l'intervalle de temps $[0, \infty[$.

La définition d'un processus stochastique peut être donnée d'une façon plus générale. Il y a deux types de définitions d'un processus stochastique X :

(a) la famille $X = (X_t)_{t\geq 0}$ décrit des fonctions aléatoires par :

$$\omega \to f(\omega) = (X_t(\omega))_{t\geq 0}\,;$$

la fonction $f(\omega) : t \to X_t(\omega)$ s'appelle réalisation ou trajectoire du processus X.

(b) la famille $X = (X_t)_{t\geq 0}$ décrit un processus, par rapport à la variable de temps t ; la famille des variables aléatoires $t \to X_t$.

Les deux approches diffèrent par les rôles de ω et t.

Définition 1.2

Soient $X = (X_t)_{t\geq 0}$ et $Y = (X_t)_{t\geq 0}$ deux processus stochastiques sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

(i) les processus X et Y sont dits indistinguibles, si l'ensemble $\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega), t \geq 0\}$ contient un ensemble de probabilité 1.

(ii) les processus X et Y sont des modifications l'un de l'autre, si $P(X_t = Y_t) = 1$ pour tout $t \geq 0$.

Définition 1.3

Soient $X = (X_t)_{t\geq 0}$ et $Y = (X_t)_{t\geq 0}$ deux processus stochastiques sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}\right)$, respectivement, alors X et Y ont les mêmes distributions finidimensionnelles si $P\left(\left(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}\right) \in B\right) = \tilde{P}\left((X_{t_1}, \ldots, Xt_{_n}) \in B\right)$ pour tout $0 \leq t_1 < \ldots < t_n < \infty$ et $B \in B(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 1.1

(i) si X et Y sont indistinguibles, alors il sont des modifications l'un de l'autre, mais l'implication inverse n'est pas vraie en général.

(ii) si X et Y sont des modifications l'un de l'autre, alors ils ont les mêmes distributions finidimensionnelles.

(iii) supposons que X et Y soient des modifications l'un de l'autre et que toutes les trajectoires de X et de Y soient continues à gauche (ou continues à droite), alors les processus X et Y sont indistinguibles .

Remarquons qu'on peut construire des exemples de processus stochastiques définis sur le même espace de probabilité ayant les mêmes distributions finidimensionnelles mais qui ne sont pas des modifications de l'un de l'autre.

• Nous avons besoin aussi de différents types de mesurabilité pour les processus stochastiques. Rappelons tout d'abord la notion de filtration.

Définition 1.4

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité. Une famille de σ-algèbres

$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ s'appelle filtration, si $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ pour tous $0 \leq s \leq t < \infty$.

(i) si $\mathcal{F}_{t^-} = \sigma\left(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s\right) = \sigma\left(\mathcal{F}_{t-\varepsilon}, \varepsilon > 0\right) = \mathcal{F}_t$,

on dit que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$est continue à gauche.

(ii) si $\mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon} = \mathcal{F}_t$,

on dit que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$est continue à droite.

(Par convention $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{0^-}$).

Définition 1.5

L'espace de probabilité $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\right)$ satisfait les conditions habituelles si on a:

(i) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est complet,

(ii) $\forall t \geq 0 : A \in \mathcal{F}_t$ si $A \in \mathcal{F}$ tel que $P(A) = 0$,

(iii) la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est continue à droite.

Définition 1.6

Soient $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique.

(i) le processus X est continu si $t \to X_t(\omega)$ est continu pour presque tout $\omega \in \Omega$.

Définition 1.7

Soient $X = (X_t)_{t\geq 0}, X_t : \Omega \to \mathbb{R}^d$ un processus stochastique sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration.

(i) le processus X est dit mesurable si pour tout $A \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$, l'ensemble $\{(t,\omega), X_t(\omega) \in A\}$ appartient à la σ-algèbre produit $\mathcal{B}([0,\infty[) \otimes \mathcal{F}$. En d'autres termes, la fonction :

$$(t,\omega) \to X_t(\omega) : ([0,\infty[\times\Omega, \mathcal{B}([0,\infty[) \otimes \mathcal{F}) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$$

est mesurable.

(ii) le processus X est dit adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, si pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

(iii) le processus X est dit progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, si pour tout $T \geq 0$, la fonction $(t,\omega) \to X_t(\omega)$ est mesurable de $([0,T] \times \Omega, \mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right))$.

Remarque.

On a : **(iv)⇒(iii)⇒(i)+(ii)**

Proposition 1.2

(i) Un processus qui est progressivement mesurable est mesurable et adapté.

(ii) Un processus adapté tel que toutes ses trajectoires soient continues à gauche (ou continues à droite) est progressivement mesurable.

Le temps d'arrêt est un temps aléatoire qui est un outil important dans la théorie des processus stochastiques.

Définition 1.8 (Temps d'arrêt)

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable avec la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Une fonction $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ s'appelle temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, si

$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$.

Exemple.

Soient $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu et adapté et Γ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Définissons le temps d'entrée τ_Γ par : $\tau_\Gamma(.) = \inf\{t \geq 0, X_t(.) \in \Gamma\}$, alors si Γ est un fermé, τ_Γ est un temps d'arrêt.

Intéressons nous maintenant à la notion de martingale.

Martingales.

Définition 1.9

Soient $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus $\mathcal{F}_t$-adapté tel que $E|X_t| < \infty$, pour tout $t \geq 0$.

(i) X s'appelle une martingale, si pour tous $0 \leq s \leq t < \infty$:

$$E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s \text{ p.s.}$$

(ii) X s'appelle une surmartingale, si pour tous $0 \leq s \leq t < \infty$:

$$E(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s \text{ p.s.}$$

(iii) X s'appelle une sous-martingale, si pour tous $0 \leq s \leq t < \infty$:

$$E(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s \text{ p.s.}$$

Mouvement brownien.

Le mouvement brownien bidimensionnel a été observé en 1828 par Robert Brown comme diffusion de grains de pollen dans l'eau. Le mouvement brownien unidimensionnel a été utilisé par la suite par Louis Bachelier en 1900 pour modéliser les marchés financiers et par Albert Einstein en 1905. La première preuve rigoureuse de son existence (mathématique) a été donnée par Norbert Saucisse en 1921.

Dans cette section, nous exposons les deux différentes définitions du mouvement brownien.

Définition 1.10

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilités. On appelle mouvement brownien standard, un processus stochastique $B = (B_t)_{t\geq 0}$ tel que :

(i) $B_0 = 0$,

(ii) pour tous $s < t \in [0, \infty[$, la variable aléatoire $B_t - B_s$ est indépendante de $(B_u)_{u\in[0,s]}$, i.e.

pour tous $0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_n \leq s$ et $A,\ A_1, \ldots,\ A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a :

$$P(B_{s_1} \in A_1, \ldots, B_{s_n} \in A_n, B_t - B_s \in A) =$$

$$P(B_{s_1} \in A_1, \ldots, B_{s_n} \in A_n)\, P(B_t - B_s \in A),$$

(iii) pour tous $0 \leq s < t < \infty$ et pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a :

$$P(B_t - B_s \in A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_A e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx$$

(iv) presque toutes les trajectoires $t \to B_t(\omega)$ sont continues.

Proposition 1.3

Soient $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique tel que presque toutes les trajectoires soient continues et tel que $X_0 = 0$, alors les hypothèses suivantes sont équivalentes :

(i) le processus X est un mouvement brownien standard.

(ii) le processus X est un processus gaussien de moyenne $m_t \equiv 0$ et de covariance $\Gamma(t,s) = \min\{s,t\}$.

Définition 1.11

Soient $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\right)$ un espace de probabilité et $B = (B_t)_{t\geq 0}, B_t : \Omega \to \mathbb{R}$ un processus stochastique adapté. Le processus B s'appelle $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien standard, si on a :

(i) $B_0 = 0$,

(ii) pour tous $0 \leq s < t < \infty$, la variable aléatoire $B_t - B_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$, i.e.

pour tous $C \in \mathcal{F}_t$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a :

$$P(C \cap (B_t - B_s) \in A) = P(C)\, P((B_t - B_s) \in A),$$

(iii) pour tous $0 \leq s < t < \infty$, on a :

$$B_t - B_s \sim N(0, t-s)$$

(iv) pour presque tout $\omega \in \Omega$, les trajectoires $t \longrightarrow B_t(\omega)$ sont continues.

Proposition 1.4

Soient $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard dans le sens de la première définition $\left(\mathcal{F}_t^B\right)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle, c.à.d. $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s : s \in [0,t])$, alors B est un $\mathcal{F}_t^B$-mouvement Brownien.

Soient maintenant $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\right)$ un espace de probabilité filtré et $X = \left\{X_t, \left(\mathcal{F}_t^X\right)_{t\geq 0}\right\}$ un processus stochastique de distribution initiale μ, où $\mathcal{F}_t^X = \sigma\left(X_s, 0 \leq s \leq t\right)$.

Dans l'espace $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^X, P^\mu)$ où $P^\mu\left(X_0 \in A\right) = \mu\left(A\right), A \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$,notons pour tout $t \geq 0$,

$$\mathcal{N}_t^\mu = \left\{F \subseteq \Omega, \exists G \in \mathcal{F}_t^X / F \subseteq G, P^\mu\left(G\right) = 0\right\}$$

et $\mathcal{N}_\infty^\mu$ est la collection des ensembles P^μ-nulle notée simplement $\mathcal{N}^\mu$.

Définition 1.12

Pour tout $t \geq 0$, définissons, la complétion $\tilde{\mathcal{F}}_t^\mu = \sigma\left(\mathcal{F}_t^X \cup \mathcal{N}_t^\mu\right)$ et l'augmentation

$$\mathcal{F}_t^\mu = \sigma\mathcal{F}_t^X \cup \mathcal{N}^\mu$$

de σ-algèbre $\mathcal{F}_t^X$ par P^μ.

Remarque.

Si $t = \infty$ les deux concepts coïncident.

Théorème 1.1

Soit $B = \left\{B_t, \left(\mathcal{F}_t^B\right)_{t\geq 0}\right\}$ un mouvement brownien de d-dimensionnel de distribution initiale μ dans $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^B, P^\mu)$, est un mouvement Brownien relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t^\mu)_{t\geq 0}$, et même pour $\left(\tilde{\mathcal{F}}_t^\mu\right)_{t\geq 0}$.

Processus de Markov et de diffusion.

Définition 1.13 (Processus de Markov)

Soit μ une mesure de probabilité dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right))$ et $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P^\mu)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que X est un processus de Markov avec la distribution initiale μ, si :

(i) $P^{\mu}(X_0 \in A) = \mu(A), \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(ii) pour tout $s, t \geq 0$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$P^{\mu}[X_{t+s} \in A/\mathcal{F}_s] = P^{\mu}[X_{t+s} \in A/X_s]$, p.s.

Définition 1.14

Une famille de Markov est un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ adapté sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F})$ et une famille des probabilités $\{P^x\}_{x \in \mathbb{R}}$ tels que:

(a) pour tout $A \in \mathcal{F}$, la fonction $x \to P^x(A)$ est mesurable.

(b) $P^x(X_0 = x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

(c) pour tous $x \in \mathbb{R}, s, t \geq 0$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$P^x[X_{t+s} \in A/\mathcal{F}_s] = P^x[X_{t+s} \in A/X_s], \quad P$ -p.s.

(d) pour tous $x \in \mathbb{R}, s, t \geq 0$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$P^x[X_{t+s} \in A/X_s] = P^y[X_t \in A], \qquad P^x X_s^{-1}$-p.s.

Définition 1.15 (Processus de diffusion)

Soit $X = \left\{X_t, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\right\}, \{P_x\}_{x\in\mathbb{R}^d}$, une famille de Markov sur $(\Omega, \mathcal{F})$ avec des trajectoires presque sûrement continues. On dit que X est un processus de diffusion, s'il vérifie les conditions suivantes :

(i) $\lim\limits_{t\to s} \frac{1}{t-s} E[X_t - X_s/X_s = x] = b(s, x)$

(ii) $\lim\limits_{t\to s} \frac{1}{t-s} E\left[(X_t - X_s)^2/X_s = x\right] = \sigma^2(s, x), \forall x \in \mathbb{R}$.

où $\sigma, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sont des fonctions mesurables. On appelle $b(s, x)$ le drift et $\sigma^2(s, x)$ le coefficient de diffusion.

En d'autres termes $b\left(s,x\right)$ est une vitesse du mouvement aléatoire modélisé par X et $\sigma\left(s,x\right)$ est une approximation de la moyenne du changement dans la covariance $X_t - x$, pour les petites valeurs de $t > 0$.

Exemple.

Le mouvement Brownien standard est un processus de diffusion avec le drift $b\left(s,x\right) \equiv 0$ et le coefficient de diffusion $\sigma\left(s,x\right) \equiv 1$.

Il y a plusieurs définitions de ce type du processus (probabilité de transition, générateur infinitésimal,...) et plusieurs approches telles que les approches analytiques et les approches probabilistes par les équations différentielles stochastiques qui sont l'objet de notre travail.

1.1.2 Intégrale et calcul stochastiques.

Intégrale stochastique.

Définition 1.16

Soit V l'ensemble des processus stochastiques à valeurs réelles $(Y_t)_{t\geq 0}$ adaptées, mesurables et satisfaisant :

$$\|Y\|_V = \left(\int_0^\infty E\left[Y_t^2\right] dt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Un processus $Y \in V$ s'appelle processus en escalier s'il est de la forme :

$$Y(t,\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} \eta_i(\omega) 1_{[t_i,t_{i+1}[}(\omega),$$

où $(t_i)_{i\geq 0}$est une suite croissante et les variables aléatoires η_i sont $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables.

Pour tout processus $Y \in V$, on pose :

$$\int_0^{\infty} Y_t dW_t = \sum_{i=0}^{\infty} \eta_i \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right) \tag{1.4}$$

Proposition 1.5

Le terme de droite de (1.4) converge dans $L^2(P)$ et par conséquent l'intégrale $\int_0^{\infty} Y(t)\, dW_t$ est une variable aléatoire bien définie P-p.s. De plus, l'isométrie suivante est vraie :

$$\|Y\|_V^2 = \left[\left(\int_0^{\infty} Y(t)\, dW_t\right)^2\right].$$

On peut prolonger l'intégrale d'Itô dans V car l'ensemble des processus en escalier est dense dans V relativement à la semi norme $\|\cdot\|_V$ et utiliser l'isométrie pour définir l'intégrale.

Proposition 1.6

Pour tout processus $Y \in V$, il existe une suite de processus en escalier

$(Y_n)_{n\geq 0}$ dans V tel que $\lim\limits_{n\to\infty} \|Y - Y_n\|_V = 0$

Définition 1.17

Pour tout $Y \in V$, on choisit la suite$(Y^n)_{n\geq 0}$ dans l'ensemble des processus en escalier tel que $\lim\limits_{n\to\infty} \|Y - Y_n\|_V = 0$ et on définit l'intégrale d'Itô par :

$$\int_0^{\infty} Y_t dW_t = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} Y_t^n dW_t$$

dans $L^2(P)$.

• Pour $0 \leq a \leq b$ et $Y \in V$, on a:

$$\int_a^{b} Y_t dW_t = \int_0^{\infty} Y_t 1_{[a,b]}(t) dW_t.$$

Propriétés.

Nous rappelons les propriétés principales de l'intégrale d'Itô sans preuves.

Théorème 1.2

Soit X et Y deux processus dans V, alors :

(a) $E\left[\left(\int\limits_0^\infty X_t dW_t\right)^2\right] = \|X\|_V$. (l'isométrie).

(b) $E\left[\left(\int\limits_0^\infty X_t dW_t \int\limits_0^\infty Y_t dW_t\right)\right] = \int\limits_0^\infty E\left[X_t Y_t\right] dt.$

(c) $\int\limits_a^c X_t dW_t = \int\limits_a^b X_t dW_t + \int\limits_b^c X_t dW_t.\ p.s$ pour tous $0 \leq a \leq b \leq c.$

(d) $\int\limits_0^\infty \left(cX_t + Y_t\right) dW_t = c\int\limits_0^\infty X_t dW_t + \int\limits_0^\infty Y_t dW_t$

(e) $E\left[\int\limits_0^\infty X_t dW_t\right] = 0.$

(f) $\int\limits_0^t X_s dWs$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t \geq 0.$

(g) $\left\{\int\limits_0^t X_s dWs; t \geq 0.\right\}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.

(g) $\left\{\int\limits_0^t X_s dWs; t \geq 0.\right\}$ possède une version continue.

Extension de l'intégrale de Itô.

On prolonge l'intégrale stochastique de Itô à la classe de processus V^* plus générale que V .

Définition 1.18

Soit V^* la classe des processus stochastiques à valeurs réelles $(Y_t)_{t\geq 0}$ adaptées, mesurables et tels que : $P\left(\int\limits_0^\infty Y_t^2 dt < \infty\right) = 1.$

Théorème 1.3

Pour $Y \in V^*$ et $n \in \mathbb{N}$, considérons le temps d'arrêt à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini par :

$\tau_n = \inf \left\{ T \geq 0 / \int\limits_0^T Y(t,\omega)^2 \, dt \geq n \right\}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \infty.$ p.s. et :

$$\int\limits_0^\infty Y_t dW_t = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\tau_n} Y_t dW_t \quad \text{en probabilité.}$$

On a précisément $\int\limits_0^\infty Y_t dW_t = \int\limits_0^{\tau_n} Y_t dW_t$ dans $\left\{ \omega / \int\limits_0^\infty Y(t,\omega)^2 \, dt < n \right\}$.

Grâce à la localisation par les temps d'arrêt (τ_n), on peut obtenir les propriétés de l'intégrale prolongée.

Théorème 1.4

L'intégrale stochastique dans V^* possède les mêmes propriétés que l'intégrale stochastique dans V : linéarité et mesurabilité, mais c'est seulement une $\mathcal{F}_t$ -martingale locale de variation quadratique comme dans **(h)**. De plus, si $Y \in V^*$est continue à gauche et Π est une subdivision de $[0,t]$, alors :

$\int\limits_0^t Y_s dW_s = \lim_{|\Pi|\to 0} \sum\limits_{t_i\in\Pi} Y_{t_i}\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)$ en probabilité.

Colloraire.

Pour tout processus $X \in V$, il existe une version de $\int\limits_0^t X_s dWs$ continue en t ,i.e. un processus continu $(J_t)_{t\geq 0}$ tel que $P\left(J_t = \int\limits_0^t X_s dWs\right) = 1$, pour tout $t \geq 0$.

Intégrale de Stratonovich.

Pour $Y \in V$, on définit l'intégrale de Stratonovich par :

$\int\limits_0^T Y_t \circ dW_t = \lim\limits_{|\Pi| \to 0} \sum\limits_{t_i \in \Pi} \frac{1}{2} \left(Y_{t_{i+1}} + Y_{t_i} \right) \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \right)$ dans $L^2 \left(\Omega \right)$.

Théorème 1.5

Pour tout $Y \in V$, on a :

(i) $\lim\limits_{|\Pi| \to 0} \sum\limits_{t_i \in \Pi} \frac{1}{2} \left(Y_{t_{i+1}} + Y_{t_i} \right) \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \right) = \int\limits_0^T Y_t dW_t + \frac{1}{2} \left\langle Y, W \right\rangle_T$.

(ii) $\int\limits_0^T Y_t \circ dW_t = \int\limits_0^T Y_t dW_t + \frac{1}{2} \int\limits_0^T \frac{\partial Y_t}{\partial x} dt.$

Remarque.

L'intégrale de Stratonovich est linéaire et admet une version continue mais n'est pas une martingale.

Formule de Itô.

La formule de Itô est le théorème fondamental dans le calcul stochastique.

Théorème 1.6

Pour un processus $h \in V^*$ et un processus adapté $(g_t)_{t \geq 0}$,avec $\int\limits_0^T |g_t| \, dt < \infty$ p.s. pour tout le $T > 0$, on pose :

$$X_t = \int\limits_0^t g_s ds + \int\limits_0^t h_s dW_s, t \geq 0.$$

Alors le processus $Y_t = F \left(s, X_s \right), t \geq 0$, tel que la fonction $F \in C^{1,2} \left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \right)$ satisfait :

$$Y_t = Y_0 + \int\limits_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial t} \left(s, X_s \right) + \frac{\partial F}{\partial x} \left(s, X_s \right) g_s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left(s, X_s \right) h_s^2 \right) ds$$

$$+\int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s)\, h_s dW_s, t \geq 0$$

Exemple.

(i) Pour $g \equiv 0; h \equiv 1; F(x) = x^n$, on a :

$$W_t^n = \int_0^t \left(\tfrac{1}{2}n(n-1)W_s^{n-2}\right) ds + \int_0^t nW_s^{n-1} dW_s$$

(ii) Cas $n = 2$: $W_t^2 = W_s^2 + \int_s^t du + \int_s^t 2W_u dW_u$, alors :

$$\int_s^t W_u dW_u = \frac{W_t^2 - W_s^2}{2} - \frac{t-s}{2}.$$

(iii) Pour $g \equiv 0; h \equiv 1; F(t, x) = \exp\left(\lambda x - \frac{\lambda^2 t}{2}\right)$; $X_t \equiv W_t$, alors :

$$\exp\left(\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}\right) = 1 + \int_0^t \left(-\frac{\lambda^2}{2}\exp\left(\lambda W_s - \frac{\lambda^2 s}{2}\right) + \frac{\lambda^2}{2}\exp\left(\lambda W_s - \frac{\lambda^2 s}{2}\right)\right) dt$$
$$+\int_0^t \lambda \exp\left(\lambda W_s - \frac{\lambda^2 s}{2}\right) dW_s.$$

Théorème 1.7

Supposons que :

$$X_t^{(1)} = \int_0^t g_s^{(1)} ds + \int_0^t h_s^{(1)} dW_s$$

et

$$X_t^{(2)} = \int_0^t g_s^{(2)} ds + \int_0^t h_s^{(2)} dW_s; 0 \leq t \leq T;$$

où $h^{(i)} \in V^*$ et $\int_0^T \left|g_t^{(i)}\right| dt < \infty; i = 1, 2$, alors :

$$X_t^{(1)} X_t^{(2)} - X_0^{(1)} X_0^{(2)} = \int_0^t X_s^{(1)} dX_s^{(2)} + \int_0^t X_s^{(2)} dX_s^{(1)} + \int_0^t g_s^{(1)} g_s^{(2)} ds\ .$$

Remarque.

Le dernier terme est appelé le terme de correction d'Itô.

Changement de la mesure.

Définition 1.19

Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace de probabilité et ν et μ deux mesures dans cet espace.

Si Z est une fonction mesurable non négative dans Ω, alors

$\nu(A) = \int_F Zd\mu(A)$ est une mesure sur $\mathcal{F}$ absolument continue par rapport à μ généralement notée $Z = d\nu/d\mu$.

Proposition 1.6

Soient P et Q deux mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telles que $Q \ll P$ avec $Z = dQ/dP$ et soient $\mathcal{S}$ est une sous σ-algèbre de $\mathcal{F}$ et X une variable aléatoire, alors $E_Q |X| < \infty$ si et seulement si $E_P |X| Z < \infty$.

De plus, on a :

$$E_Q [X/\mathcal{S}] = \frac{E_P [XZ/\mathcal{S}]}{E_P [Z/\mathcal{S}]}$$

p.s. par rapport à Q.

Changement de la mesure dans l'espace filtré.

Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace de probabilité, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration satisfaisant les conditions habituelles et P et Q deux mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Les restrictions de P et Q sur $\mathcal{F}_t$ sont notées respectivement P_t et Q_t.

(i) si $Q \ll P$, on a nécessairement toute restriction Q_t de Q sur $\mathcal{F}_t$ est absolument continue par rapport à la restriction P_t de P sur $\mathcal{F}_t$ et la famille des densités (dérivées de Radon-Nikodym) Z est défini par $Z_t = dQ_t/dP_t$.

(ii) le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ est appelé le processus de densité de Q par rapport à P.

Proposition 1.7

Si $Q \ll P$ (dans $\mathcal{F}$) alors le processus de densité Z est une martingale non négative uniformément intégrable par rapport à P et $Z_0 = 1$.

Proposition 1.8

Soient Ω un espace de fonctions réelles continues sur $[0, \infty[$ et X un processus de coordonnées ($X_t(\omega) = \omega(t)$) dans cet espace. Soient $\mathcal{F} = \mathcal{F}^X$, P une mesure de probabilité donnée sur $\mathcal{F}_\infty^X$ et Z une martingale non négative avec $E_P[Z_t] = 1$, alors il existe une seule mesure de probabilité Q sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^X)$ telle que les restrictions Q_t de Q sur $\mathcal{F}_t$ soient absolument continues par rapport aux restrictions P_t de P sur $\mathcal{F}_t$ et $dQ_t/dP_t = Z_t$.

Le théorème suivant est un des outils principaux de l'analyse stochastique.

Théorème de Girsanov.

Soient B un processus d'Itô réel de la forme :

$$dB_t = X_t dt + dW_t, 0 \leq t \leq T, Y_0 = 0,$$

où $T \leq \infty$ est une constante donnée, W un mouvement brownien et $X_t 1_{\{t \leq T\}} \in V^*$, posons :

$$M_t = \mathcal{E}_t(X) = \exp\left(-\int_0^t X_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t X_s^2 ds\right), \quad 0 \leq t \leq T \tag{1.5}$$

et supposons que X satisfait la condition de Novikov :

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T X_s^2 ds\right)\right] < \infty$$

où E est l'espérance par rapport à P.

Définissons la mesure Q dans $(\Omega, \mathcal{F}_T^W)$ par $dQ(\omega) = M_T(\omega)\, dP$, alors B est un mouvement brownien par rapport à Q pour tout $t \leq T$.

Lemme.

Soient $M = \mathcal{E}(X)$, M est une martingale, si X satisfait l'une des conditions suivantes :

(a) X est uniformément borné.

(b) condition de Novikov :

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T X_s^2 ds\right)\right] < \infty$$

(c) condition de Kamazaki :

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T X_s^2 dW_s\right)\right] < \infty$$

Chapter 2
EDS gouvernées par le mouvement brownien.

Dans ce chapitre, nous considérons les équations différentielles stochastiques de la forme :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t. \tag{2.6}$$

où b et σ sont des fonctions données et W est un mouvement brownien. Ces équations sont obtenues à partir des équations différentielles ordinaires $dX_t = b(t, X_t)dt$ perturbée par un bruit blanc.

Par solution de l'équation différentielle stochastique, on entend un processus stochastique continu X tel que pour tout $t \geq 0$:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \quad p.s. \tag{2.7}$$

Le cas quand b et σ sont dépendants de X seulement est un cas spécial qui correspond à l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \tag{2.8}$$

dite équation autonome.

2.1 Solutions fortes.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}; P)$ un espace probabilisé, $W = \left\{W_t, \mathcal{F}_t^W, t \geq 0\right\}$ un mouvement brownien et ξ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$, indépendante de $\mathcal{F}_\infty^W$ de distribution $\mu\left(\Gamma\right) =$

$P(\xi \in \Gamma), \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Définissons la filtration $\mathcal{B}_t$ par :

$$\mathcal{B}_t = \sigma(\xi) \vee \mathcal{F}_t^W = \sigma(\xi, W_{s,} 0 \leq s \leq t), t \geq 0$$

et l'augmentation $\mathcal{F}_t$ de $\mathcal{B}_t$ par :

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{B}_t \cup \mathcal{N}), t \geq 0, \ \ \mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t), \tag{2.9}$$

où $\mathcal{N} = \{N \subset \Omega / \exists G \in \sigma(\cup_{t \geq 0} \mathcal{B}_t)$, avec $N \subset G$ et $P(G) = 0\}$

Remarque.

$W = \{W_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ est aussi un mouvement brownien.

Définition 2.1

Soient $(\Omega, \mathcal{F}; P)$ un espace probabilisé, $W = \{W_t, \mathcal{F}_t^W, t \geq 0\}$ un mouvement brownien et ξ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$,indépendante de W. Un processus X est dit solution forte de l'équation (2.6) avec la condition initiale ξ si $P(X_0 = \xi) = 1$ et X vérifie les conditions suivantes :

(i) X possède des trajectoires continues p.s,

(ii) X est $\mathcal{F}_t$-adapté, (où $\mathcal{F}_t$ est définie par (2.9)),

(iii) X satisfait :

$$P\left[\int_0^t \left(|b(s, X_s)| + |\sigma(s, X_s)|^2\right) ds < \infty\right] = 1,$$

(iv) X satisfait :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s, t \geq 0.$$

• On peut interpréter X comme la sortie d'un système dynamique défini par la paire des coefficients (b, σ), où les entrées sont W et ξ.

Définition 2.2

Soient $(\Omega, \mathcal{F}; P)$ un espace probabilisé, $W = \{W_t, \mathcal{F}_t^W, t \geq 0\}$ un mouvement brownien, ξ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$,indépendante de W et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ défini par (2.9) et soit X et $\bar{X}$ sont deux solutions de (2.6) relativement à W avec la condition initiale ξ. On dit que l'unicité forte est satisfaite pour la paire (b, σ), si on a :

$$P\left(X_t = \bar{X}_t, t \geq 0\right) = 1.$$

Théorème 2.1 (Itô)

Supposons que les coefficients b et σ sont lipschitziens par rapport à la deuxième variable, i.e il existe une constante $K > 0$, telle que :

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|, \forall x, y \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

et satisfait la condition de la restriction sur la croissance linéaire :

$$|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq K\left(1 + |x|^2\right), \forall x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Alors pour toute condition ξ initiale avec $E\xi^2 < \infty$, l'équation (2.6) admet une solution forte unique et $\sup\limits_{t\geq 0} E\left(|X_t|^2\right) < \infty$.

Remarques.

(i) la condition $E\xi^2 < \infty$ est supposée pour simplifier la démonstration. Le théorème reste vrai si elle est omise.

(ii) la condition de restriction sur la croissance linéaire garantit la non explosion de la solution, elle peut être omise si on résoud l'équation sur l'intervalle $[0, \alpha[$, où :

$$\alpha = \inf\left\{t, \left[\int_0^t \left(|b(s,X_s)| + |\sigma(s,X_s)|^2\right) ds = \infty\right]\right\},$$

α est appelé temps d'explosion de la solution. Dans ce cas, sur cet intervalle, la condition de Lipschitz est sufisante pour l'existence et l'unicité de la solution forte.

(iii) On peut poser la condition de restriction sur la croissance linéaire sur $xb(x)$ au lieu de $b(x)$, i.e :

$$|xb(t,x)|^2 \leq K\left(1+|x|^2\right), \forall x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

(iv) On peut remplacer la condition de Lipschitz globale par la condition de Lipschitz locale i.e :

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists K_n > 0,$ tel que $\forall t \geq 0$ et $\forall x, y \in \mathbb{R}$ avec $|x|, |y| \leq n$:

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K_n |x-y|.$$

Le lemme suivant est utilisé dans la preuve du théorème.

Lemme de Gronwall.

Soit $T > 0, c \geq 0$ et $u, v : [0,T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ sont des fonctions mesurables. Si u est bornée et v est intégrable, alors :

$$u(t) \leq c + \int_0^t u(s)\, v(s)\, ds, \quad \forall t \in [0,T]$$

Ce qui implique :

$$u(t) \leq c \exp\left(\int_0^t v(s)\, ds\right).$$

Preuve du lemme :

Supposons $c > 0$ et posons $z(t) = c + \int_0^t u(s)\, v(s)\, ds, t \in [0,T]$, alors $u(t) \leq z(t)$, $z(t)$ est différentiable et $\forall t \in [0,T]$:

$$\tfrac{z'(t)}{z(t)} = \tfrac{u(t)v(t)}{z(t)} \leq v(t),$$

alors :

$$\log(z(t)) \leq \log(z(0)) + \int_0^t v(s)\, ds.$$

Donc :

$$u(t) \leq z(t) \leq c \exp\left(\int_0^t v(s)\, ds\right), t \in [0,T].$$

Pour $c = 0$, on applique l'inégalité pour $c_n > 0$ avec $\lim c_n = 0$ et on passe à la limite.

Preuve du théorème :

1. l'unicité :

Soit X et Y deux solutions fortes de (2.6):

$$X_t - Y_t = \int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s))\, ds + \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, dW_s, \ \ \forall t \in [0,T].$$

On a :

$$(a+b)^2 \leq 2\left(a^2 + b^2\right) \tag{2.10}$$

donc :

$$E\left(|X_t - Y_t|^2\right) \leq 2E\left|\int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s))\, ds\right|^2$$

$$+2E\left|\int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, dW_s\right|^2, \quad \forall t \in [0,T]$$

En utilisant l'négalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\left(\left|\int_0^t f ds\right|^2 \leq t \int_0^t |f|^2\, ds, \quad f : [0,t] \to \mathbb{R}\right)$$

et grace à la propriété de l'intégrale stochastique et la condition de Lipschitz, on a :

$$E\left(|X_t - Y_t|^2\right) \leq 2TE\left(\int_0^t |(b(s, X_s) - b(s, Y_s))|^2\, ds\right)$$

$$+2E\left(\int_0^t |(\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))|^2\, ds\right), \forall t \in [0,T]$$

$$\leq 2TK^2\left(\int_0^t E\left(|X_s - Y_s|^2\right) ds\right) + 2K^2\left(\int_0^t E\left(|X_s - Y_s|^2\right) ds\right), \forall t \in [0,T]$$

$$= C\left(\int_0^t E\left(|X_s - Y_s|^2\right) ds\right),$$

où $C = 2K^2(T+1)$.

Appliquons le lemme de Gronwall pour $u(t) = E\left(|X_t - Y_t|^2\right)$ et $c = 0$, on obtient $E\left(|X_t - Y_t|^2\right) = 0$ donc $X_t = Y_t$ p.s et puisque X et Y sont continues et T est arbitraire, alors $P\left(X_t = Y_t, \forall t \geq 0\right) = 0$ et l'unicité forte est satisfaite pour l'équation (2.6).

2. l'existence :

On utilise la méthode des approximations successives définie par :

$$X_t^{(0)} = X_0$$
$$X_t^{(n+1)} = X_0 + \int_0^t b\left(s, X_s^{(n)}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^{(n)}\right) dW_s, \forall t \geq 0, \forall n \geq 0$$

et établirons la converge de la solution de l'équation (2.6).

$\forall t \geq 0$,$\forall\, n \geq 0$, $X_t^{(n)}$ est continu et $\mathcal{F}_t$ -adapté .

(i) Posons :

$$D_t^{(n)} = E\left(\left|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right|^2\right) \forall n \geq 0, \forall t \in [0, T]$$

et montrons que :

$$D_t^{(n)} \leq \frac{(Mt)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{2.11}$$

tel que M soit dépendant de K, T et X_0.

• Pour $n = 0$,

$$D_t^{(0)} = E\left(\left|X_t^{(1)} - X_t^{(0)}\right|^2\right) = E\left(\left|\int_0^t b(s, X_0)\, ds + \sigma(s, X_0)\, dW_s\right|^2\right)$$
$$\leq 2tE\left(\int_0^t K^2\left(1 + |X_0|^2\right) ds\right) + 2E\left(\int_0^t K^2\left(1 + |X_0|^2\right) ds\right)$$

$\leq tM$, où $M = 2K^2\left(1 + E|X_0|^2\right)(t+1)$ (on a utilisé l'inégalité (2.10), la propriété de l'intégrale stochastique, la condition de restriction sur la croissance linéaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.). Alors l'inégalité (2.11) est satisfaite pour $n = 0$.

Supposons que l'inégalité (2.11) soit satisfait pour $n - 1$. Alors :

$$D_t^{(n)} = E\left(\left|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right|^2\right)$$

$$= E\left(\left|\int_0^t \left(b\left(s, X_s^{(n)}\right) - b\left(s, X_s^{(n-1)}\right)\right) ds + \left(\sigma\left(s, X_s^{(n)}\right) - \sigma\left(s, X_s^{(n-1)}\right)\right) dW_s\right|^2\right)$$

$$\leq 2TK^2 \int_0^t E\left(\left|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}\right|^2\right) ds + 2K^2 \int_0^t E\left(\left|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}\right|^2\right) ds$$

$$\leq 2K^2 (T+1) \int_0^t \frac{M^n s^n}{n!} ds \leq \frac{(Mt)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(ii) en utilisant l'inégalité (2.10), la condition de Lipschitz, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, lapropriété de l'intégrale stochastique et l'inégalité de martingale, on a :

$$\sup_{0\leq t\leq T} E\left(\left|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right|^2\right) \leq 2\left|\int_0^t b\left(s, X_s^{(n)}\right) - b\left(s, X_s^{(n-1)}\right)\right|^2 ds$$

$$+2 \sup_{0\leq t\leq T} \left|\int_0^T \left(\sigma\left(s, X_s^{(n)}\right) - \sigma\left(s, X_s^{(n-1)}\right)\right) dW_s\right|^2,$$

$$\leq 2TK^2 \int_0^T \left|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}\right|^2 ds + 8K^2 \int_0^T \left|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}\right|^2 ds$$

$$\leq \bar{C} \int_0^T \left|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}\right|^2 ds \leq \bar{C}\frac{(MT)^n}{(n)!},$$

où $\bar{C} = 2K^2 (T+4)$.

(iii) Grace à l'inégalité de Chebyshev, on obtient :

$$P\left(\sup_{0\leq t\leq T} \left\|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right\| > \frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq 2^{2(n+1)} E\left(\sup_{0\leq t\leq T} \left\|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right\|^2\right)$$

$$\leq 2^{2(n+1)} \bar{C}\frac{(MT)^n}{(n)!}.$$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2(n+1)} \bar{C}\frac{(MT)^n}{(n)!} < \infty$, alors :

$$P\left(\sup_{0\leq t\leq T} \left\|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right\| > \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 0, \forall n > N(\omega)$$

et grace au lemme de Borel-Cantelli $\sup_{m\geq 0} \sup_{0\leq t\leq T} \left\|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right\| \leq \frac{1}{2^n}$, p.s. La suite $\left\{X_t^{(n)}(\omega), 0 \leq t \leq T\right\}_{n=1}^{\infty}$ est donc de Cauchy dans l'espace $C([0,T], \mathbb{R})$ avec la norme de la convergence uniforme et converge vers une limite $\{X_t(\omega), 0 \leq t \leq T\}$ continue et adaptée.

(iv) On montre que X satisfait l'équation (2.6).

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t \left(b\left(s, X_s^{(n)}\right) - b\left(s, X_s\right)\right) ds\right| &\leq K \int_0^T \left|X_s^{(n)} - X_s\right|^2 ds \\ &\leq KT \sup_{0\leq t\leq T} \left|X_t^{(n)} - X_t\right| \to 0 \text{ p.s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E\left(\int_0^t \left(\sigma\left(s, X_s^{(n)}\right) - \sigma\left(s, X_s\right)\right) dW_s\right)^2 &= E\int_0^t \left(\sigma\left(s, X_s^{(n)}\right) - \sigma\left(s, X_s\right)\right)^2 ds \\ &\leq K^2 \int_0^t E\left(X_s^{(n)} - X_s\right)^2 ds \\ &\leq K^2 T E\left(\sup_{0\leq t\leq T} \left\|X_t^{(n)} - X_t\right\|^2\right) \to 0\end{aligned}$$

(v) On montre que $E\left|X_t\right|^2 < \infty$.

$$\begin{aligned}E\left(\left|X_t^{(n+1)}\right|^2\right) &\leq 3E\left(\left|X_0\right|^2\right) + 3E\left(\left|\int_0^t b\left(s, X_s^{(n)}\right) ds\right|^2\right) \\ &\quad +3E\left(\left|\int_0^t \sigma\left(s, X_s^{(n)}\right) dW_s\right|^2\right) \\ &\leq 3E\left(\left|X_0\right|^2\right) + 3TE\left(\int_0^t \left|b\left(s, X_s^{(n)}\right)\right|^2 ds\right) + 3E\left(\int_0^t \left|\sigma\left(s, X_s^{(n)}\right)\right|^2 ds\right) \\ &\leq 3E\left(\left|X_0\right|^2\right) + 3\left(T+1\right) K^2 E\left(\int_0^t \left(1 + \left|X_s^{(n)}\right|^2\right) ds\right) \\ &\leq 3E\left(\left|X_0\right|^2\right) + 3\left(T+1\right) K^2 T + 3\left(T+1\right) K^2 E\left(\int_0^t \left(\left|X_s^{(n)}\right|^2\right) ds\right) \\ &\leq C\left(1 + E\left(\left|X_0\right|^2\right)\right) + C\int_0^t \left(E\left|X_s^{(n)}\right|^2\right) ds \\ &\leq \left[C + C^2 + ... + C^{n+2}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right]\left(1 + E\left(\left|X_0\right|^2\right)\right) \\ &\leq C\left(1 + E\left(\left|X_0\right|^2\right)\right) \exp Ct, \quad \forall 0 \leq t \leq T\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers ∞, on obtient :

$$E\left|X_t\right|^2 \leq C\left(1 + E\left(\left|X_0\right|^2\right)\right) \exp Ct < \infty, \forall 0 \leq t \leq T. \blacksquare$$

• On peut affaiblir la condition de Lipschitz dans le théorème (2.1) de la manière suivante:

Théorème 2.2 (Yamada, Tanaka)

Supposons que l'équation différentielle stochastique unidimensionnelle :

$$dX_t = b(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dW_t \tag{2.12}$$

vérifie les conditions suivantes :

(i)

$$|b(t,x) - b(t,y)| \leq \rho(x-y),$$

(ii)

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq k(|x-y|), \forall t \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R},$$

où $\rho, k : [0, \infty[\to [0, \infty[$ sont des fonctions strictement croissantes et ρ concave telle que :

$\rho(0) = k(0)$ et $\int\limits_0^\varepsilon \frac{du}{\rho(u)} = \int\limits_0^\varepsilon \frac{du}{k^2(u)} = \infty$, alors l'unicité des trajectoires et l'unicité forte sont satisfaites.

Preuve :

Soient $1 > a_1 > ... > a_n > ... > 0$ tels que :

$$\int\limits_{a_1}^{1} \frac{1}{k^2(u)} du = 1, \int\limits_{a_2}^{a_1} \frac{1}{k^2(u)} du = 2, ..., \int\limits_{a_n}^{a_{n-1}} \frac{1}{k^2(u)} du = n.$$

Il est clair que $a_n \to 0$, si $n \to \infty$. Soit $\Psi_n(u)$, $n \geq 1$, une suite de fonctions continues à support contenu dans $]a_n, a_{n-1}[$ telle que $0 \leq \Psi_n(u) \leq 2k^{-2}(u)/n$ et $\int\limits_{a_n}^{a_{n-1}} \Psi_n(u)\,du = 1$.

Posons :

$$\Phi_n(x) = \int\limits_0^{|x|} dy \int\limits_0^{y} \Psi_n(u)\,du, x \in \mathbb{R}.$$

Il est clair que $\Phi_n \in C^2(\mathbb{R}), |\Phi_n'(x)| \leq 1$ et $\Phi_n(x) \to |x|$ si $n \to \infty$ et $\Phi_n(x)$ est non décroissante.

Supposons que X^1 et X^2 soient deux solutions de l'équation (2.12) sur le même espace de probabilité avec la même condition initiale et la même filtration, alors :

$$X_t^1 - X_t^2 = \int_0^t \left(b\left(s, X_s^1\right) - b\left(s, X_s^2\right)\right) ds + \int_0^t \left(\sigma\left(s, X_s^1\right) - \sigma\left(s, X_s^2\right)\right) dW_s.$$

En appliquant la formule d'Itô pour Φ_n, on obtient :

$$\begin{aligned}\Phi_n\left(X_t^1 - X_t^2\right) &= \int_0^t \Phi_n'\left(X_t^1 - X_t^2\right)\left(b\left(s, X_s^1\right) - b\left(s, X_s^2\right)\right) ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \Phi_n''\left(X_t^1 - X_t^2\right)\left(\sigma\left(s, X_s^1\right) - \sigma\left(s, X_s^2\right)\right)^2 ds \\ &+ \int_0^t \Phi_n'\left(X_t^1 - X_t^2\right)\left(\sigma\left(s, X_s^1\right) - \sigma\left(s, X_s^2\right)\right) dW_s,\end{aligned}$$

L'espérance de la troisième intégrale dans le terme droit est nulle, alors :

$$\begin{aligned}E\left[\Phi_n\left(X_t^1 - X_t^2\right)\right] &= E\left[\int_0^t \Phi_n'\left(X_t^1 - X_t^2\right)\left(b\left(s, X_s^1\right) - b\left(s, X_s^2\right)\right) ds\right] \\ &+ \frac{1}{2}E\left[\int_0^t \Phi_n''\left(X_t^1 - X_t^2\right)\left(\sigma\left(s, X_s^1\right) - \sigma\left(s, X_s^2\right)\right)^2 ds\right] \\ &= I_1 + I_2 \\ |I_1| &\leq \int_0^t E\left|b\left(s, X_s^1\right) - b\left(s, X_s^2\right)\right| ds \leq \int_0^t E\left(\rho\left(|x-y|\right)\right) ds \\ &\leq \int_0^t \rho\left(E\left|x-y\right|\right) ds\end{aligned}$$

(on a utilisé $|\Phi_n'| \leq 1$ et la condition (i)).

D'autre part, on a $E\int_0^t \Phi_n''\left(X_t^1 - X_t^2\right) k^2\left(X_t^1 - X_t^2\right) ds \leq 2t/n$, alors $I_2 \leq t/n \to 0$ si $n \to \infty$ et :

$$E\left[\Phi_n\left(X_t^1 - X_t^2\right)\right] \to E\left(\left|X_t^1 - X_t^2\right|\right)$$

donc :

$$E\left(\left|X_t^1 - X_t^2\right|\right) \leq \int_0^t \rho\left(E\left|x-y\right|\right) ds.$$

La condition **(ii)** implique que $E\left(\left|X_t^1 - X_t^2\right|\right) = 0$ d'où $X_t^1 = X_t^2$ .p.s. $\forall t \geq 0$. Puisque X^1 et X^2 sont continues, alors l'unicité des trajectoires est satisfaite ainsi que l'unicité forte (car la démonstration est indépendante de la filtration). ■

Remarque.

Si σ satisfait la condition de Hölder d'ordre α :

$$|\sigma(t,x) - \sigma(s,y)| \leq C|x-y|^{\alpha}, t \geq 0, x, y \in \mathbb{R}$$

où $C < \infty, \alpha > 0$, alors pour $\alpha \geq \frac{1}{2}$, la condition (i) est satisfaite.

Proposition 2.1 (Zvonkin)

Soit l'EDS unidimensionnelle :

$$dX_t = b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t, X_0 = x_0$$

où le coefficient b est mesurable et borné, le coefficient σ est continu et borné et il existe des constantes $C > 0$, $\varepsilon > 0$ telles que :

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq C\sqrt{|x-y|}, t \geq 0, x, y \in \mathbb{R}$$
$$|\sigma(t,x)| \geq \varepsilon, t \geq 0, x \in \mathbb{R}.$$

Alors l'existence forte et l'unicité des trajectoires sont satisfaites.

Théorème 2.3

Supposons que b et σ vérifient les conditions de théorème (2.1), alors la solution forte X de (2.6) est représentée par $X = F(\xi, W)$ où F satisfait la propriété de mesurabilité $\forall t \geq 0, F_{\mu}^{-1}(\mathcal{H}_t) \subset \mathcal{F}_t$ et pour tout $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, la fonction $x \to F(x, f)$ est continue. De plus pour tout espace de probabilité, tout mouvement brownien W et toute variable aléatoire ξ, la solution forte X est obtenue par $X = F(\xi, W)$ avec la même fonction F.

2.2 Solutions faibles.

2.2.1 Définitions et théorèmes.

Définition 2.3

La solution faible de l'équation différentielle stochastique (2.12) est la construction de l'espace $(\Omega, \mathcal{F}; P)$, et la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, qui satisfait les conditions habituelles et la paire du processus (X, W) sur cet espace adaptés et continus, tel que W soit un $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien et :

(i) $P\left[\int\limits_0^t \left(|b(s, X_s)| + \sigma^2(s, X_s)\right) ds < \infty\right] = 1, \forall t \geq 0,$

(ii) $X_t = X_0 + \int\limits_0^t b(s, X_s)\, ds + \int\limits_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s, t \geq 0,$ p.s.

• On note la solution faible par $(\Omega, \mathcal{F}; P), (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (X, W)$.

2.2.2 Deux concepts d'unicité.

Il y a deux types d'unicité associés à la notion de solution faible : l'unicité des trajectoires qui est la généralisation de l'unicité forte et l'unicité en loi qui est importante dans le cadre des solutions faibles.

Définition 2.4

Supposons que $(\Omega, \mathcal{F}; P), (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (X, W)$ et $(\Omega, \mathcal{F}; P), \left(\tilde{\mathcal{F}}_t\right)_{t\geq 0}, \left(\tilde{X}, W\right)$ sont deux solutions faibles de l'équation différentielle stochastique (2.6) avec le même mouvement brownien W, le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}; P)$ et la même condition initiale i.e.

$P\left(X_0 = \tilde{X}_0\right) = 1$. On dit que l'unicité des trajectoires est satisfaite pour l'équation (2.6) si on a :

$P\left(X_t = \tilde{X}_t, \forall t \geq 0\right) = 1.$

Définition 2.5

On dit que l'unicité en loi est satisfaite pour l'équation (2.6), si pour tout couple de solutions faibles $(\Omega, \mathcal{F}; P), (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (X, W)$ et $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}; \tilde{P}), \left\{\tilde{\mathcal{F}}_t\right\}_{t\geq 0}, \left(\tilde{X}, \tilde{W}\right)$ avec la même distribution initiale i.e.

$$P(X_0 \in A) = \tilde{P}\left(\tilde{X}_0 \in A\right), \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

les deux processus $X, \tilde{X}$ possèdent la même loi.

Proposition 2.2

L'unicité des trajectoires implique l'unicité en loi.

Preuve :

Soit $(\Omega^i, \mathcal{F}^i; P^i), \{\mathcal{F}_t^i\}_{t\geq 0}, (X^i, W^i), i = 1, 2$ deux solutions faibles. On pose $S = \mathbb{R} \times C([0, \infty[\times\mathbb{R}) \times C([0, \infty[\times\mathbb{R})$. Soit $\mathcal{S}$ la σ-algèbre borélienne de S et considérons la mesure image $Q^i(A) = P^i[(X_0^i, W^i, X^i) \in A], A \in \mathcal{S}, i = 1, 2$. On a X_t^i est $\mathcal{F}_t^i$-mesurable et X_0^i est P^i-indépendant de W^i. Si μ est la P^i-loi de X_0^i, alors la mesure produit $\mu \otimes P^W$ est la P^i-loi des deux premières coordonnés (X_0^i, W^i) (où P^W est la mesure de Wiener). On a $\forall k \geq 1, C\left([0, \infty[\times\mathbb{R}^k\right)$ est un espace polonais, alors la distribution conditionnelle régulière K^i de X^i sachant (X_0^i, W^i) existe sous P^i et on peut écrire pour tout borélien $F \in \mathbb{R} \times C([0, \infty[\times\mathbb{R}), G \in C([0, \infty[\times\mathbb{R})$:

$$Q^i(F \times G) = \int_F K^i(x, w, G)\, \mu(dx)\, P^W(dw).$$

Soient $T = S \times C([0, \infty[\times\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}$ sa σ-algèbre borélienne. Définissons sur cet espace la mesure de probabilité :

$$Q\left(d\left(x,w,y_1,y_2\right)\right) = K^1\left(x,w,dy_1\right)K^2\left(x,w,dy_2\right)\mu\left(dx\right)P^W\left(dw\right),$$

et posons $\breve{\mathcal{T}}_t = \sigma\left(x, w\left(s\right), y_1\left(s\right), y_2\left(s\right), s \leq t\right)$ et soit $\mathcal{T}_t$ la version de $\breve{\mathcal{T}}_t$ qui satisfait les conditions habituelles, alors la projection de la première coordonnée est la loi sous Q de la distribution initiale de X^i et la deuxième coordonnée est un $\mathcal{T}_t$-mouvement brownien (relativement à Q). De plus la distribution de la projection (w, y_i) (sous Q) est la même que celle de (W^i, X^i) (relativement à P^i). En construisant deux solutions faibles sur le même espace de probabilité avec la même condition initiale et le même mouvement brownien, alors l'unicité des trajectoires implique que $Q\left(\left(x, w, y_1, y_2\right) \in T \,/\, y_1 = y_2\right) = 1$ et on a :

$$P^1\left(\left(W^1, X^1\right) \in A\right) = Q\left(\left(w, y_1\right) \in A\right) = Q\left(\left(w, y_2\right) \in A\right) = P^2\left(\left(W^2, X^2\right) \in A\right).$$

Ainsi l'unicité en loi est satisfaite. ■

Théorème 2.4 (Unicité des trajectoires)

Supposons que b et σ vérifient la condition de Lipschitz locale, alors l'unicité des trajectoires est satisfaite pour l'équation (2.6).

Preuve :

Dans le preuve du théorème (2.1), nous n'utilisons pas la filtration, alors la preuve de cet théorème est la même.■

Théorème 2.5 (Nakao, Le Gall)

Considérons l'EDS unidimensionnelle autonome :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \tag{2.13}$$

et supposons que b et σ sont des fonctions mesurables et bornées et qu'il existe une fonction croissante et bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

(i) $\sigma(x) \geq \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $(\sigma(x) - \sigma(y))^2 \leq |f(x) - f(y)|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Alors l'unicité des trajectoires est satisfaite.

Remarque.

Si σ et σ^{-1} sont bornées et σ est à variations bornées sur tout compact alors les conditions (i) et (ii) sont satisfaites.

Théorème 2.6 (Sonoc)

Supposons qu' il existe une fonction continue $u(t)$ sur $[0, T]$ avec $u(t) > 0$ pour $t > 0$, de dérivée $u'(t) \in L^1[0, T]$, $u'(t) > 0$ pour $t > 0$ et $\lim_{t \to 0^+} u'(t) = \infty$ telle que pour $0 < t \leq T$ et $x, y \in \mathbb{R}^d$:

(i) $|f(t, x) - f(t, y)|^2 + |g(t, x) - g(t, y)|^2 \leq \frac{u'(t)}{2u(t)} |x - y|^2$.

(ii) $|f(t, x)|^2 + |g(t, x)|^2 \leq L + M |x|^2$.

Si $c \in L^4$ est indépendante de W_t pour tout $t \geq 0$ et b et σ sont continus, alors l'unicité des trajectoires est satisfaite pour l'équation (2.6).

Théorème 2.7 (Yamada et Watanabe)

Supposons que l'existence de la solution faible et l'unicité des trajectoires soient satisfaites pour l'équation (2.6) pour une distribution initiale fixée μ, alors l'unicité en loi et l'existence forte sont satisfaite pour l'équation (2.6) avec la même distribution initiale. De plus, il existe une fonction mesurable $F_\mu : \mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ telle que toute solution avec la distribution initiale μ s'écrit $X = F_\mu(X_0, W)$, p.s.

Théorème 2.8 (Ikeda et Watanabe)

Supposons que l'existence de la solution faible et l'unicité des trajectoires soient satisfaites pour l'équation (2.6) pour toute mesure de probabilité μ,telle que la loi de X_0 coïncide avec μ, alors l'unicité en loi et l'existence forte sont satisfaites pour l'équation (2.6).De plus, il existe une fonction mesurable $F : \mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ telle que toute solution s'écrit $X = F(X_0, W)$, p.s.

Théorème 2.9 (Kallenberg)

Supposons que l'existence de la solution faible et l'unicité des trajectoires sont satisfaites pour l'équation 2.12 débutant en des points arbitraires fixes, alors l'unicité en loi et l'existence forte sont satisfaites pour l'équation 2.12. De plus, il existe une fonction universelle prévisible $F : \mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ telle que toute solution s'écrit $X = F(X_0, W)$, p.s.

Théorème 2.10 (Existence faible) (Skorokhod)

Si $b, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions bornées et continues et ν est une mesure de probabilité dans $\mathbb{R}$, alors il existe un espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$, un mouvement brownien W et un processus continu et adapté X satisfait l'équation autonome (2.8) tels que ν soit la loi de X_0 .

Les conditions du théorème (2.10) ne garantissent ni l'existence forte ni l'unicité en loi.

Problème de martingale.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}; P), (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (X, W)$ une solution faible de l'équation (2.6). Grace à la formule d'Itô :

$$f(t,X_t) - f(t,X_0) = \int_0^t \sigma(s,X_s) f'(s,X_s)\, dW_s + \int_0^t \left[\tfrac{1}{2}\sigma^2 f'' + bf\right](s,X_s)\, ds.$$

Posons :

$$(\mathcal{A}_t f)(t,x) = \tfrac{1}{2}\sigma^2(t,x)\tfrac{d^2}{dx^2} + b(t,x)\tfrac{d}{dx}.$$

On peut écrire la formule précédente sous la forme :

$$f(t,X_t) - f(t,X_0) = \int_0^t \sigma(s,X_s) \acute{f}(s,X_s)\, dW_s + \int_0^t (\mathcal{A}_t f)(s,X_s)\, ds.$$

Si on pose :

$$M_t^f = f(t,X_t) - f(t,X_0) - \int_0^t (\mathcal{A}_t f)(s,X_s)\, ds,$$

alors :

$$M^f = \left\{M_t^f, \mathcal{F}_t, t \geq 0\right\} \in \mathcal{M}^{c,loc}, \forall f \in C^{1,2}([0,\infty[\times\mathbb{R}) \tag{2.14}$$

(resp. $\in \mathcal{M}_2^c$ si $f \in C_K^{1,2}([0,\infty[\times\mathbb{R})$ et b,σ sont bornées sur le support de f.)

• On dit que P est la solution du problème de martingale locale (resp. problème de martingale.) pour (b,σ).

Proposition 2.3

L'existence de la solution faible de l'équation (2.6) est équivalente à l'existence la solution P du problème de martingale locale (2.14) et $P = PX^{-1}$, où PX^{-1} est la loi de X sur $(C([0,\infty[\times\mathbb{R}), \mathcal{B}(C([0,\infty[\times\mathbb{R})))$.

Proposition 2.4

L'existence de la solution faible unique en loi de l'équation (2.6) est équivalente à ce que le problème de martingale locale correspondant ait une solution unique P, pour une condition initiale donnée.

Proposition 2.5 (Stroock, Varadhan)

Supposons que le coefficient b est mesurable et borné, le coefficient σ est continu et borné et pour tout $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, il existe une constante $\varepsilon(t,x) > 0$ tels que $|\sigma(t,x)\lambda| \geq \varepsilon(t,x)|\lambda|$, alors l'EDS (2.6) admet une solution faible et unique en loi.

2.3 Solutions via le théorème de Girsanov.

Proposition 2.5

Soit l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = b(t, X_t)\,dt + dW_t, 0 \leq t \leq T \tag{2.15}$$

où $T > 0, W$ est un mouvement brownien et $b(t,x)$ est une fonction mesurable sur $[0,T] \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$|b(t,x)| \leq K(1+|x|), 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}, K > 0.$$

Alors pour toute mesure μ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, l'équation (2.15) admet une solution faible avec la distribution initiale μ.

Preuve :

On a $X = \left\{X_t, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}\right\}, (\Omega, \mathcal{F}), \{P^x\}_{x\in\mathbb{R}}$ est une famille de brownien, alors $M_t = \exp\left\{\int\limits_0^t b(s, X_s)\,dX_s - \frac{1}{2}\int\limits_0^t |b(s, X_s)|^2\,ds\right\}$, est une P^x-martingale, $\forall x \in \mathbb{R}$. Alors le théorème de Girsanov implique que le processus :

$$W_t = X_t - X_0 - \int\limits_0^t b(s, X_s)\,ds \quad, 0 \leq t \leq T \tag{2.16}$$

est un Q^x-mouvement Brownien avec $Q^x[W_0 = 0] = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, tel que Q^x soit donnée par $\frac{dQ^x}{dP^x} = M_T$. On écrit (2.16) plus simplement sous la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b\left(s, X_s\right) ds \ + W_t, \ 0 \leq t \leq T,$$

alors $(\Omega, \mathcal{F}; Q^\mu), \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, (X, W)$ est une solution faible de l'équation (2.6) où :

$$Q^\mu\left(A\right) = \int_{\mathbb{R}^d} Q^x\left(A\right) \mu\left(dx\right).$$

Proposition 2.6

Supposons que $X = \left\{X_t, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}\right\}$ soit une solution forte sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de l'équation différentielle stochastique $dX_t = b\left(t, X_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t\right) dW_t$, $0 \leq t \leq T$, pour tout $T > 0$ et supposons que $u(x,t) := -c(x,t)/\sigma(x,t)$, avec c mesurable et :

$$M = \left\{ M_t = \exp\left(-\int_0^t u\left(s, X_s\right) dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t u^2\left(s, X_s\right) ds \right), \mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T \right\}$$

est une martingale. Alors l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = \left(b\left(s, X_s\right) + c\left(s, X_s\right)\right)dt + \sigma\left(s, X_s\right) dW_t, 0 \leq t \leq T, Y_0 = X_0$$

admet une solution faible $(X, \hat{W}), (\Omega, \mathcal{F}, Q), (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, où $\hat{W}$ est un Q-mouvement brownien défini par $\hat{W}_t = W_t + \displaystyle\int_0^t u\left(s, X_s\right) ds, t \geq 0$ et la probabilité Q est donnée par :

$$Q(d\omega) = M_T P(d\omega).$$

Proposition 2.7

Soient $(X^{(j)}, W^{(j)}), (\Omega^{(j)}, \mathcal{F}^{(j)}, P^{(j)}), \left(\mathcal{F}^{(j)}\right)_{t\geq 0}, j = 1, 2$ deux solutions faibles de l'équation (2.15) avec la même distribution initiale i.e.

$$P_1\left(X_0 \in B\right) = P_2\left(X_0 \in B\right), B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$$

où $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est P_1, P_2-mesurable. Si

$$P_{(j)}\left[\int_0^T \left|b\left(s, X_s^{(j)}\right)\right|^2 ds < \infty\right], j = 1, 2$$

alors (X^1, W^1) et (X^2, W^2) possèdent la même loi relativement aux mesures de probabilité respectives .

En particulier, si b est uniformément bornée, alors l'unicité en loi est satisfaite.

2.4 Formule de Feynman-Kac.

Théorème 2.11

Supposons que $b(t, x) = b(x)$ et $\sigma(t, x) = \sigma(x)$ satisfont les conditions de théorème (2.1) et soient f et K des fonctions continues telles que $K \geq 0$ et $f(x) = o(|x|)$ si $|x| \to \infty$,alors la fonction $u(t, x)$ définie par :

$$u(t, x) = E^x \exp\left(-\int_0^t K(X_s)\, ds\right) f(X_t) \tag{2.17}$$

satisfait l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A}_t u - K u \tag{2.18}$$

avec la condition initiale :

$$u(0, x) = f(x)$$

2.5 Exemples.

Exemple 2.1 (prix de l'option d'achat)

On note P_t le prix de l'option au temps $t.$ On peut modéliser l'évolution de P_t dans le temps t par l'EDS :

$$\frac{dP_t}{P_t} = \mu dt + \sigma dW_t \tag{2.19}$$

où $\frac{dP_t}{P_t}$ est le taux de croissance moyen instantané, $\mu > 0$ est le drift de l'option et σ est la volatilité du prix, alors l'équation (2.19) équivaut à :

$$dP_t = \mu P_t dt + \sigma P_t dW_t.$$

En utilisant la formule de Itô, on obtient :

$$d\left(\ln\left(P_t\right)\right) = \frac{dP_t}{P_t} - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 P_t^2}{P_t^2}dt = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_t.$$

Donc :

$$P_t = P_0 \exp\left(\sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)$$

Le prix devant toujours être positif, on prend P_0 positif. D'autre part, on a :

$$P_t = \int_0^t \mu P_s ds + \int_0^t \sigma P_s dW_s$$

et donc :

$$E\left(P_t\right) = P_0 + \int_0^t \mu E\left(P_s\right) ds$$

car :

$$E\left(\int_0^t \sigma P_s dW_s\right) = 0$$

Finalement $E\left(P_t\right) = P_0 \exp\left(\mu t\right); t \geq 0.$ Par conséquent l'espérance de la valeur du prix coïncide avec la solution de l'équation (2.19) avec $\sigma = 0$ (cas déterministe).

Le processus P est appelé mouvement brownien géométrique.

Exemple 2.2

Soient $W_t = (W_t^1, ..., W_t^d)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$, alors la solution de l'équation $dX_t = dW_t - AX_t dt$, où $A \geq 0$ est une matrice $d \times d$ (matrice de drift) est $X_t = (\exp -At\,) X_0 + \int\limits_0^t (\exp - (t-s)\,A\,) \, dW_t, t \geq 0$. Le processus X est appelé processus de Ornstein-Uhlenbeck.

Exemple 2.3

Considérons l'EDS :

$$dX_t = -sgn\,(X_t)\,dt, \qquad X_0 = 0. \tag{2.20}$$

on n'a pas de solution forte. Il existe une solution faible et l'unicité en loi est satisfaite mais pas l'unicité des trajectoires.

Preuve :

Soient B un mouvement Brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Posons :

$$X_t = B_t, W_t = \int\limits_0^t sgn\,(B_s)\,dB_s, t \geq 0 \tag{2.21}$$

et prenons $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^B$. Evidemment (X, W) est une solution de 3.64 sur

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. Si (X, W) est une solution de 3.64 sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$, alors X est une martingale. Ceci implique l'unicité en loi. Si (X, W) est une solution de 3.64, alors :

$$W_t = \int\limits_0^t sgnX_s dX_s, t \geq 0,$$

ce qui implique que $\mathcal{F}_t^W = \mathcal{F}_t^{|X|}$. Par conséquent, il n'existe aucune solution forte.

Tout processus adapté satisfaisant **(??)** est une martingale locale continue de variation quadratique $\langle X_t \rangle = t$. En utilisant le théorème de caractérisation de P. Lévy, on montre que X est un mouvement brownien et l'unicité en loi est satisfaite. si X est une solution, alors $(-X, W)$ est aussi une solution et donc il n'y a pas d'unicité des trajectoires.

Exemple 2.4

Considérons l'EDS :

$$dX_t = \sigma(t, X_t) dW_t, \qquad X_0 = 0, \tag{2.22}$$

où

$$\sigma(t, x) = \begin{cases} sgn(x) & \text{si } t \leq 1 \\ I(x \neq 1) sgn(x) & \text{si } t > 1 \end{cases}. \tag{2.23}$$

Alors on a l'existence faible seulement.

Preuve :

Si B est un mouvement brownien, alors la paire :

$$X_t = B_t, W_t = \int_0^t sgn(B_s) dB_s, t \geq 0 \tag{2.24}$$

est une solution de l'équation 2.22. Soit (X, W) la solution donnée par 2.24 et posons $\tau = \inf\{t \geq 1, X_t = 1\}$, $\tilde{X}_t = X_{t \wedge \tau}$, alors $(\tilde{X}, W)$ est une autre solution. Ainsi il n'y a pas d'unicité en loi ni d'unicité des trajectoires.

Si (X, W) est une solution de 2.24, alors :

$$X_t = \int_0^t sgn(X_s) dW_s, t \leq 1$$

utilisé dans l'exemple (2.3) prouve que (X, W) n'est pas une solution forte.

Exemple 2.5

Considérons l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = 3X_t^{\frac{1}{3}} dt + 3X_t^{\frac{2}{3}} dW_t \tag{2.25}$$

avec la condition initiale $X_0 = 0$. Il est clair que le processus $X_t = 0$ est une solution forte, mais $X_t = W_t^3$ est aussi une solution. Le problème dans cet exemple est que le coefficient $\sigma(t; x) = 3x^{\frac{2}{3}}$ satisfait le théorème (2.2) mais $b(t; x) = 3x^{\frac{1}{3}}$ non.

Chapter 3
EDS gouvernées par le mouvement brownien fractionnaire.

Introduction.

Le mouvement brownien fractionnaire (MBF) de paramètre $H \in]0,1[$ est un processus gaussien centré $B^H = \left\{B_t^H, t \geq 0\right\}$ de fonction de covariance :

$$R_H(t,s) = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}\right) \tag{3.26}$$

avec les propriétés suivantes :

(i) B^H possède des trajectoires α-Hölder continues pour tout $\alpha < H$. En effet d'après (3.26) $E\left|B_t^H - B_s^H\right|^2 = |t-s|^{2H}$.

(ii) les $\frac{1}{H}$-variations dans $[0,t]$ sont finies et les variations quadratiques sont nulles si $H > \frac{1}{2}$ et infinies si $H < \frac{1}{2}$.

(iii) il existe un mouvement brownien $\{W_s, s \in [0,T]\}$ tel que :

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t,r)dW_r$$

où $K_H(t,r)$ sera défini ultérieurement.

(iv) la covariance du MBF est positive si $H > \frac{1}{2}$ et négative si $H < \frac{1}{2}$.

Si $H = \frac{1}{2}$, on a $R_{\frac{1}{2}}(t,s) = t \wedge s$ et B^H est un processus de Wiener et si $H \neq \frac{1}{2}$, le processus B^H n'est ni un processus de Markov ni une semi-martingale et on ne peut pas appliquer le calcul stochastique développé par Itô en vue de définir l'intégrale stochastique relativement à B^H. Différentes approches sont résumées dans cette section. Dans la deuxième section, on expose le théorème de Girsanov pour le MBF qui a un rôle fondamental dans les preuves des théorèmes d'existence et d'unicité des solutions abordés dans la troisième section.

3.1 Intégration par rapport au mouvement brownien fractionnaire.

Différentes méthodes ont été utilisées pour construire le calcul stochastique par rapport à un MBF B^H. Citons les contributions suivantes :

• Lin, Dai et Heide ont défini l'intégrale stochastique par rapport à un MBF B^H de paramètre $H > \frac{1}{2}$ en utilisant la méthode des trajectoires de Riemann-Stieltjes. Dans ce cas, la fonction à intégrer doit être de p-variation finie, où $\frac{1}{p} + H > 1$.

• En utilisant les notions d'intégration et de dérivation fractionnaires, Zähle a défini l'intégrale stochastique trajectorielle par rapport à un MBF B^H de paramètre $H \in \,]0, 1[$. Si la fonction à intégrer possède des trajectoires λ-Hölder continues avec $\lambda > 1 - H$, alors cette intégrale peut être interprétée comme une intégrale de Riemann-Stieltjes.

• Decreusefond, Üstünel, Carmona, Coutin, Alòs, Mazet, Nualart, Duncan, Pasik, Hu et Øksendal ont développé le calcul des variations stochastique par rapport à un processus gaussien B. Ce calcul est un outil puissant qui peut être utilisé pour définir l'intégrale stochastique. Plus précisément, comme dans le cas du processus de Wiener, l'opérateur de divergence par rapport à B peut être interprété comme une intégrale stochastique. L'intégrale construite par cette méthode possède une moyenne nulle et peut être obtenue comme la limite de sommes de Riemann.

3.1.1 Calcul fractionnaire.

Nous rappelons ici les définitions et les propriétés de base du calcul fractionnaire.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. Pour $f \in L^1([a,b])$ et $\alpha > 0$, les intégrales fractionnaires gauche et droite de Riemann-Liouville de f d'ordre α sur (a,b) sont données pour presque tout x par :

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y)\, dy,$$

et :

$$I_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (y-x)^{\alpha-1} f(y)\, dy, \tag{3.27}$$

où Γ est la fonction d'Euler. Cette intégrale prolonge les intégrales itérées d'ordre n habituelles de f pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$.

Nous avons la première formule de composition :

$$I_{a+}^{\alpha}\left(I_{a+}^{\beta} f\right) = I_{a+}^{\alpha+\beta} f.$$

La dérivée fractionnaire peut être définie comme l'opération inverse. Supposons que $0 < \alpha < 1$ et $p > 1$, et soient $I_{a+}^{\alpha}(L^p)$ (resp. $I_{b-}^{\alpha}(L^p)$) l'image de $L^p([a,b])$ par l'opérateur I_{a+}^{α} (resp. I_{b-}^{α}).

Si $f \in I_{a+}^{\alpha}(L^p)$ (resp. $f \in I_{b-}^{\alpha}(L^p)$), alors la fonction ϕ telle que $f = I_{a+}^{\alpha}\phi$ (resp. $f = I_{b-}^{\alpha}\phi$) est unique dans L^p et coïncide avec la dérivée gauche (resp. droite) de Riemann-Liouville de f d'ordre α définie par :

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(x)}{(x-a)^{\alpha}} + \alpha \int_a^x \frac{f(x)-f(y)}{(x-y)^{\alpha+1}} dy \right) \tag{3.28}$$

et :

$$D_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(x)}{(b-x)^{\alpha}} + \alpha \int_x^b \frac{f(x)-f(y)}{(y-x)^{\alpha+1}} dy \right),$$

où la convergence des intégrales pour la singularité $x = y$ est satisfaite au sens de L^p.

Quand $\alpha p > 1$ toute fonction dans $I_{a+}^{\alpha}(L^p)$ est Hölder continue d'ordre $\left(\alpha - \frac{1}{p}\right)$. D'un autre côté, toute fonction continue de Hölder d'ordre $\beta > \alpha$ admet une dérivée fractionnaire d'ordre α, c'est-à-dire $C^{\beta}([a,b]) \subset I_{a+}^{\alpha}(L^p)$ pour tout $p > 1$.

Pour $f \in I_{a+}^{\alpha}(L^p)$, on a $I_{a+}^{\alpha}\left(D_{a+}^{\alpha} f\right) = f$ et pour $f \in L^1([a,b])$, on a $D_{a+}^{\alpha}\left(I_{a+}^{\alpha} f\right) = f$. On a des formules d'inversion analogues pour les opérateurs I_{b-}^{α} et D_{b-}^{α}.

Si $f \in I_{a+}^{\alpha+\beta}(L^1), \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha+\beta \leq 1,$ on a la deuxième formule de composition

$$D_{a+}^{\alpha}\left(D_{a+}^{\beta} f\right) = D_{a+}^{\alpha+\beta} f$$

On a la formule de l'intégration par parties :

$$\int_a^b \left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(s)\, g(s)\, ds = \int_a^b f(s) \left(D_{b-}^{\alpha} g\right)(s)\, ds, \tag{3.29}$$

pour tout $f \in I_{a+}^{\alpha}(L^p)\,, g \in I_{b-}^{\alpha}(L^q)\,, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

Si $W = \{W_t, t \in [0,T]\}$ est un processus de Wiener unidimensionnel pour $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, on a :

$$\int_0^t (t-s)^{-\alpha} dW_s = \frac{W_t}{t^{\alpha}} + \alpha \int_0^t \frac{W_t - W_s}{(t-s)^{\alpha+1}} ds = \Gamma(1-\alpha)\, D_{0+}^{\alpha} W_t. \tag{3.30}$$

i.e le processus $\int_0^t (t-s)^{-\alpha} dW_s$ coïncide avec la dérivée fractionnaire gauche du processus de Wiener avec le facteur de temps $\Gamma(1-\alpha)$.

3.1.2 Représentation du mouvement brownien fractionnaire.

Soit $B^H = \left\{B_t^H, t \in [0,T]\right\}$ un mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in]0,1[$ défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Pour tout $t \in [0,T]$, notons par $\mathcal{F}_t^{B^H}$ la σ-algèbre générée par les variables aléatoires $\left\{B_s^H, s \in [0,t]\right\}$ et les ensembles de probabilité nulle.

Notons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions étagées sur $[0,T]$ et soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert défini comme la fermeture de $\mathcal{E}$ relativement au produit scalaire définie initialement par :

$$\left\langle 1_{[0,t]}, 1_{[0,s]} \right\rangle_{\mathcal{H}} = R_H(t,s).$$

L'application $1_{[0,t]} \to B_t^H$ peut être prolongée à une isométrie entre $\mathcal{H}$ et l'espace Gaussien $H_1(B^H)$ notée B^H. Pour $\varphi \in \mathcal{H}$, on peut interpréter $B^H(\varphi)$ comme l'intégrale de Wiener de φ par rapport à B^H et écrire $B^H(\varphi) = \int_0^T \varphi dB^H$.

(i) Cas $H > \frac{1}{2}$.

Le noyau de covariance $R_H(t,s)$ peut être écrit sous la forme :

$$R_H(t,s) = \alpha_H \int_0^t \int_0^s |r-u|^{2H-2} \, dudr, \tag{3.31}$$

où $\alpha_H = H(2H-1)$ et la formule (3.31) implique que pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{E}$:

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{H}} = \alpha_H \int_0^T \int_0^T |r-u|^{2H-2} \varphi_r \psi_u dudr.$$

Considérons le noyau de carré intégrable donné par :

$$K_H(t,s) = c_H s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}} u^{H-\frac{1}{2}} du, \tag{3.32}$$

où $c_H = \left[\frac{H(2H-1)}{\beta\left(2-2H, H-\frac{1}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$ et $t > s$.

Ce noyau vérifie l'égalité suivante :

$$\int_0^{t\wedge s} K_H(t,u)\,K_H(s,u)\,du = R_H(t,s) \tag{3.33}$$

qui implique que le noyau R_H est défini non négatif et fournit une représentation explicite pour sa racine carrée en tant qu'opérateur.

A partir de (3.32), on obtient :

$$\frac{\partial K_H}{\partial t}(t,s) = c_H\left(\frac{t}{s}\right)^{H-\frac{1}{2}}(t-s)^{H-\frac{3}{2}}, \tag{3.34}$$

Considérons l'opérateur linéaire K_H^* défini de $\mathcal{E}$ dans $L^2([0,T])$ par :

$$(K_H^*\phi)(s) = \int_s^T \phi(t)\,\frac{\partial K_H}{\partial t}(t,s)\,dt, \tag{3.35}$$

Notons que :

$$\left(K_H^* 1_{[0,t]}\right)(s) = K_H(t,s)\,1_{[0,t]}(s)\,. \tag{3.36}$$

L'opérateur K_H^* est une isométrie entre $\mathcal{E}$ et $L^2([0,T])$ et peut donc être prolongé à l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

En effet, à partir de (3.31) et (3.33), on a pour tout $s,t\in[0,T]$:

$$\left\langle K_H^* 1_{[0,t]}, K_H^* 1_{[0,s]}\right\rangle_{L^2([0,T])} = \left\langle 1_{[0,t]}, 1_{[0,s]}\right\rangle_{\mathcal{H}}$$

En utilisant (3.34),(3.35) et (3.27), on peut représenter l'opérateur K_H^* à l'aide de l'intégrale fractionnaire par :

$$(K_H^*\phi)(s) = c_H\Gamma\left(H-\frac{1}{2}\right)s^{\frac{1}{2}-H}\left(I_{T^-}^{H-\frac{1}{2}}u^{H-\frac{1}{2}}\varphi(u)\right)(s)\,.$$

Pour tout $c \in [0,T]$, la fonction indicatrice $1_{[0,c]}$ appartient a l'image de K_H^* et en appliquant les règles du calcul fractionnaire, on obtient :

$$(K_H^*)^{-1}\left(1_{[0,c]}\right)(s)=\frac{1}{c_H\Gamma\left(H-\frac{1}{2}\right)}s^{\frac{1}{2}-H}\left(D_{c^-}^{H-\frac{1}{2}}u^{H-\frac{1}{2}}\right)(s)\,1_{[0,c]}(s).$$

Considérons maintenant le processus $W=\{W_t,t\in[0,T]\}$ défini par :

$$W_t=B^H\left((K_H^*)^{-1}\left(1_{[0,t]}\right)\right) \tag{3.37}$$

alors W est un processus de Wiener et le processus B^H admet une représentation intégrale et unique de la forme :

$$B_t^H=\int_0^t K_H(t,s)\,dW_s. \tag{3.38}$$

En effet, pour tout $s,t\in[0,T]$, on a :

$$\begin{aligned}E(W_tW_s)&=E\left(B^H\left((K_H^*)^{-1}\left(1_{[0,t]}\right)\right)B^H\left((K_H^*)^{-1}\left(1_{[0,s]}\right)\right)\right)\\&=\left\langle(K_H^*)^{-1}\left(1_{[0,t]}\right),(K_H^*)^{-1}\left(1_{[0,s]}\right)\right\rangle_{\mathcal{H}}\\&=\left\langle 1_{[0,t]},1_{[0,s]}\right\rangle_{L^2([0,T])}=t\wedge s.\end{aligned}$$

De plus, pour tout $\varphi\in\mathcal{H}$, on a :

$$B^H(\varphi)=\int_0^T (K_H^*\phi)(t)\,dW_t.$$

On peut montrer que les deux processus génèrent la même filtration et en déduire que le processus de Wiener garantissant la représentation (3.38) est unique.

Les éléments de $\mathcal{H}$ peuvent ne pas être des fonctions mais des distributions d'ordre négatif. En fait, $\mathcal{H}$ coïncide avec l'espace des distributions f tel que $s^{\frac{1}{2}-H}I_{0^+}^{H-\frac{1}{2}}\left(f(u)\,u^{H-\frac{1}{2}}\right)(s)$ est une fonction de carrée intégrable.

Nous pouvons trouver un sous-espace vectoriel de fonctions de $\mathcal{H}$ de la manière suivante.

Soit $|\mathcal{H}|$ le sous-espace des fonctions mesurables sur $[0,T]$, tels que :

$$\|\varphi\|_{|\mathcal{H}|}^{2}=\int_{0}^{T}\left(\int_{s}^{T}|\varphi_{r}|\,\tfrac{\partial K_{H}}{\partial r}(r,s)dr\right)^{2}ds=\alpha_{H}\int_{0}^{T}\int_{0}^{T}|\varphi_{r}|\,|\varphi_{u}|\,|r-u|^{2H-2}\,drdu<\infty.$$

On a $\left(|\mathcal{H}|\,,\|\cdot\|_{|\mathcal{H}|}\right)$ est un espace de Banach et $\mathcal{E}$ est dense dans $|\mathcal{H}|$.

D'autre part, $|\mathcal{H}|$ muni du produit scalaire $\langle\varphi,\psi\rangle_{\mathcal{H}}$ n'est pas complet et il est isométrique à un sous-espace de $\mathcal{H}$ et on a l'estimation :

$$\|\varphi\|_{|\mathcal{H}|}\leq b_{H}\,\|\varphi\|_{L^{\frac{1}{H}}([0,T])} \tag{3.39}$$

pour une certaine constante $b_{H}>0$.

Cette estimation implique que $L^{2}\left([0,T]\right)\subset L^{\frac{1}{H}}\left([0,T]\right)\subset|\mathcal{H}|\subset\mathcal{H}$.

Ceci signifie que l'intégrale du type Wiener $\int_{0}^{T}\varphi\left(t\right)dB_{t}^{H}$ (qui égal à $B^{H}\left(\varphi\right)$, par définition) peut être défini pour les fonctions $\varphi\in|\mathcal{H}|$ et :

$$\int_{0}^{T}\varphi\left(t\right)dB_{t}^{H}=\int_{0}^{T}\left(K_{H}^{*}\phi\right)\left(t\right)dW_{t}.$$

(ii) Cas $H<\frac{1}{2}$.

Dans ce cas, le noyau K_{H} défini par :

$$K_{H}\left(t,s\right)=c_{H}'\left[\left(\tfrac{t}{s}\right)^{H-\frac{1}{2}}\left(t-s\right)^{H-\frac{1}{2}}-\left(H-\tfrac{1}{2}\right)s^{\frac{1}{2}-H}\int_{s}^{t}u^{H-\frac{3}{2}}\left(u-s\right)^{H-\frac{1}{2}}du\right],$$

où $c_{H}'=\left[\frac{2H}{(1-2H)\beta\left(1-2H,H+\frac{1}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$, $t>s$, satisfait :

$$R_{H}\left(t,s\right)=\int_{0}^{t\wedge s}K_{H}\left(t,u\right)K_{H}\left(s,u\right)du. \tag{3.40}$$

En utilisant (3.40), on montre que :

$$\frac{\partial K_{H}}{\partial t}(t,s)=c_{H}'\left(H-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{t}{s}\right)^{H-\frac{1}{2}}\left(t-s\right)^{H-\frac{3}{2}}, \tag{3.41}$$

Le noyau K_{H} peut être exprimé par l'intermédiaire de la dérivée fractionnaire par :

$$K_H(t,s) = c'_H \Gamma\left(H+\tfrac{1}{2}\right) s^{\frac{1}{2}-H} \left(D_{t^-}^{\frac{1}{2}-H} u^{H-\frac{1}{2}}\right)(s)$$

Considérons l'opérateur linéaire K_H^* de $\mathcal{E}$ à $L^2([0,T])$ définie par :

$$(K_H^*\phi)(s) = K_H(T,s)\,\phi(s) + \int_s^T (\phi(r)-\phi(s))\,\tfrac{\partial K_H}{\partial r}(r,s)\,dr.$$

On a :

$$\left(K_H^* 1_{[0,t]}\right)(s) = K_H(t,s)\,1_{[0,t]}(s) \tag{3.42}$$

A partir de (3.40) et (3.42), on déduit, comme dans le cas $H > \frac{1}{2}$, que l'opérateur K_H^* est une isométrie entre $\mathcal{E}$ et $L^2([0,T])$ et peut être prolongé à l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

L'opérateur K_H^* peut être exprimé par l'intermédiaire de la dérivée fractionnaire :

$$(K_H^*\phi)(s) = c'_H \Gamma\left(H+\frac{1}{2}\right) s^{\frac{1}{2}-H} \left(D_{T^-}^{\frac{1}{2}-H} u^{H-\frac{1}{2}} \varphi(u)\right)(s) \tag{3.43}$$

$\mathcal{H}$ coïncide avec l'espace $I_{T^-}^{\frac{1}{2}-H}(L^2)$ et on a $C^\gamma([0,T]) \subset \mathcal{H}$ si $\gamma > \frac{1}{2} - H$.

Comme dans le cas $H > \frac{1}{2}$, nous pouvons montrer que le processus W défini par :

$$W_t = B^H\left((K_H^*)^{-1}\left(1_{[0,t]}\right)\right) \tag{3.44}$$

est un processus de Wiener et le processus B^H admet la représentation intégrale :

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t,s)\,dW_s,$$

Par conséquent, l'intégrale du type Wiener $\int_0^T \varphi(t)\,dB_t^H$ peut être définie pour les fonctions $\varphi \in I_{T^-}^{\frac{1}{2}-H}(L^2)$ et on a :

$$\int_0^T \varphi(t)\,dB_t^H = \int_0^T (K_H^*\phi)(t)\,dW_t.$$

Définition 3.1 (MBF)

Soit est une famille de tribus croissante et continues à gauche sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tel que $\mathcal{F}_0$ contient les ensembles de probabilité zéro. Le mouvement brownien fractionnaire $\left\{B^H = B^H, t \in [0,T]\right\}$ est dit $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien fractionnaire si le processus (3.37), $H > \frac{1}{2}$ et (3.44), $H < \frac{1}{2}$ est $\mathcal{F}_t$-processus de Wiener.

3.1.3 Calcul de Malliavin (ou calcul stochastique des variations par rapport au MBF).

Le processus $B^H = \left\{B_t^H, t \geq 0\right\}$ est gaussien et on peut donc développer un calcul stochastique des variations (ou calcul de Malliavin).

Rappelons les notions de base de ce calcul.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de variables aléatoires régulières et cylindriques de la forme :

$$F = f(B^H(\varphi_1), ..., B^H(\varphi_n)) \tag{3.45}$$

où $n \geq 1$, $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ (f et toutes ses dérivées partielles sont bornées) et $\varphi_i \in \mathcal{H}$. L'opérateur de dérivation D d'une variable aléatoire régulière et cylindrique F de la forme (3.45) est définie comme la variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{H}$:

$$DF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(B^H(\varphi_1), ..., B^H(\varphi_n))\varphi_i$$

L'opérateur de dérivation D est un opérateur fermé de $L^p(\Omega)$ dans $L^p(\Omega, \mathcal{H})$ pour tout $p \geq 1$. Pour tout nombre entier $k \geq 1$, notons D^k l'itération de l'opérateur de dérivation et pour tout $p \geq 1$, définissons l'espace de Sobolev $\mathbb{D}^{k,p}$ comme la fermeture de $\mathcal{S}$ par rapport à la norme :

$$\|F\|_{k,p}^p = E\left(|F|^p\right) + \sum_{i=1}^{k} \left(\left\|D^j F\right\|_{\mathcal{H}^{\otimes j}}^p\right)$$

De la même manière, pour un espace de Hilbert V, notons $\mathbb{D}^{k,p}(V)$ l'espace de Sobolev correspondant des variables aléatoires à valeurs dans V.

L'opérateur de la divergence δ est l'adjoint de l'opérateur D.

On dit que la variable aléatoire u dans $L^2(\Omega;\mathcal{H})$ appartient au domaine de δ (noté par $Dom\ \delta$), s'il existe une constante c vérifiant :

$$\left|E\left(\langle DF,u\rangle_{\mathcal{H}}\right)\right|=\left|E\int_0^T D_tFu_tdt\right|\leq c\left\|F\right\|_{L^2(\Omega)}$$

pour tout $F\in\mathcal{S}$.

Dans ce cas $\delta\left(u\right)$ est défini par la relation de dualité :

$$E(F\delta(u))=E\left(\langle DF,u\rangle_{\mathcal{H}}\right)=E\int_0^T D_tFu_tdt,$$

pour tout $F\in\mathbb{D}^{1,2}$.

On a les deux propriétés de base de l'opérateur de divergence :

i) $\mathbb{D}^{1,2}\left(\mathcal{H}\right)\subset Dom\ \delta$ et pour tout $u\in\mathbb{D}^{1,2}\left(\mathcal{H}\right)$:

$$E(\delta(u)^2)=E\left(\|u\|_{\mathcal{H}}^2\right)+E\left(\langle Du,(Du)^*\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}}\right),$$

où $(Du)^*$ est l'adjoint de (Du) dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$.

ii) Pour tout F dans $\mathbb{D}^{1,2}$ et tout $u\in Dom\ \delta$ tels que Fu et $F\delta(u)+\langle DF,u\rangle_{\mathcal{H}}$ sont de carré intégrable, on a :

$$Fu\in Dom\ \delta \text{ et } \delta\left(Fu\right)=F\delta(u)-\langle DF,u\rangle_{\mathcal{H}}$$

(i) Pour tout $F\in\mathbb{D}_W^{1,2}=\mathbb{D}^{1,2}$, on a $K_H^*DF=D_WF$,

où D_W désigne l'opérateur dérivée par rapport à W et $\mathbb{D}_W^{1,2}$ est l'espace de Sobolev correspondant.

(ii) $Dom\ \delta=(K_H^*)^{-1}(Dom\ \delta_W)$ et pour toute variable aléatoire u de $Dom\ \delta$ à valeurs dans $\mathcal{H}$, on a $\delta(u)=\delta_W(K_H^*u)$, où δ_W est l'opérateur de divergence par rapport au processus W.

3.1.4 Intégrale stochastique par rapport au MBF.

L'intégrale de Skorohod est une extension de l'intégrale de Itô au sens que l'ensemble des processus adaptés de carré intégrable $L_{\mathbf{a}}^2([0,T]\times\Omega)$ est inclus dans $Dom\ \delta$ et la restriction de l'opérateur δ à $L_a^2([0,T]\times\Omega)$ coïncide avec l'intégrale stochastique de Itô.

La définition suivante de l'intégrale stochastique symétrique a été introduite par Russo et Vallois. On suppose que tout les processus et les fonctions sont nuls à l'extérieur de l'intervalle $[0,T]$.

Définition 3.2

Soit $u=\{u_t, t\in[0,T]\}$ un processus stochastique avec des trajectoires intégrables. L'intégrale symétrique de u par rapport au MBF B^H est définie comme la limite en probabilité lorsque ε tend vers zéro de :

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T u_s\left(B_{s+\varepsilon}^H - B_{s-\varepsilon}^H\right)ds$$

si cette limite existe et on la note par $\int_0^T u_t dB_t^H$.

(i) Cas $H>\frac{1}{2}$.

La proposition suivante donne les conditions suffisantes pour l'existence de l'intégrale symétrique et fournit une représentation de l'opérateur de divergence comme intégrale stochastique.

Proposition 3.1

Soit $u=\{u_t, t\in[0,T]\}$ un processus stochastique dans l'espace $\mathbb{D}^{1,2}(|\mathcal{H}|)$, et supposons aussi que :

$$\int_0^T\int_0^T |D_s u_t|\,|t-s|^{2H-2}\,dsdt<\infty \quad \text{p.s.}, \tag{3.46}$$

alors l'intégrale symétrique existe et on a :

$$\int_0^T u_t dB_t^H = \delta(u) + \alpha_H \int_0^T \int_0^T D_s u_t |t-s|^{2H-2} dsdt.$$

Remarque 1.

Sous les hypothèses de la proposition, l'intégrale $\int_0^T u_t dB_t^H$ coïncide aussi avec les intégrales forward et backward.

Remarque 2.

Une condition suffisante pour que (3.46) soit vérifiée est :

$$\int_0^T \left(\int_0^T |D_s u_t|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} ds < \infty$$

pour un certain $p > \frac{1}{2H-1}$.

Proposition 3.2

Soit $u = \{u_t, t \in [0,T]\}$ un processus stochastique dans l'espace $\mathbb{D}^{1,2}(|\mathcal{H}|)$ tel que la condition (3.46) soit satisfaite, alors pour tout $t \in [0,T]$, le processus $u1_{[0,t]} \in \mathbb{D}^{1,2}(|H|)$ vérifie aussi la condition (3.46) et on a :

$$\int_0^t u_s dB_s^H = \delta\left(u1_{[0,t]}\right) + \alpha_H \int_0^t \int_0^T D_r u_s |s-r|^{2H-2} drds.$$

Formule de Itô.

Si F est une fonction de la classe C^2, alors l'intégrale trajectorielle de Riemann-Stieljes $\int_0^t F'(B_s^H)dB_s^H$ existe pour tout $t \in [0,T]$ (grace au théorème de Young). De plus,on a la formule de changement du variables suivante :

$$F(B_t^H) = F(0) + \int_0^t F'(B_s^H)dB_s^H. \tag{3.47}$$

Soit F une fonction de la classe $C^2(\mathbb{R})$ telle que :

$$\max\{|F(x)|, |F'(x)|, |F''(x)|\} \le ce^{\lambda x^2}, \tag{3.48}$$

où c et λ sont des constantes positives telles que $\lambda < \frac{1}{4T^{2H}}$, alors le processus $F'(B_t^H) \in \mathbb{D}^{1,2}(|H|)$ vérifie la condition (3.46) et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^t F'(B_s^H)dB_s^H &= \int_0^t F'(B_s^H)\delta B_s^H + H(2H-1)\int_0^t\int_0^s F''\left(B_s^H\right)(s-r)^{2H-2}\,drds \qquad (3.49)\\ &= \int_0^t F'(B_s^H)\delta B_s^H + H\int_0^t F''\left(B_s^H\right)s^{2H-1}ds.\end{aligned}$$

En utilisant (3.58) et (3.49), on déduit la formule de Itô suivante pour le processus de divergence :

$$F(B_t^H) = F(0) + \int_0^t F'(B_s^H)\delta B_s^H + H\int_0^t F''\left(B_s^H\right)s^{2H-1}ds \tag{3.50}$$

On donne maintenant la version générale de la formule de Itô.

Théorème 3.1

Soit F une fonction de classe $C^2(\mathbb{R})$. On suppose que $u = \{u_t \in [0,T]\}$ est un processus dans $\mathbb{D}_{loc}^{2,2}(|\mathcal{H}|)$ tel que l'intégrale indéfinie $X_t = \int_0^t u_s\delta B_s^H$ soit continue p.s. et que $\|u\|_2 \in \mathcal{H}$. Alors pour tout $t \in [0,T]$, on a la formule suivante :

$$\begin{aligned}F(X_t) &= F(0) + \int_0^t F'(X_t)u_s\delta B_s^H \qquad (3.51)\\ &+\alpha_H\int_0^t F''(X_s)\,u_s\left(\int_0^T|s-\sigma|^{2H-2}\left(\int_0^s D_\sigma u_\theta\delta B_\theta^H\right)d\sigma\right)ds\\ &+\alpha_H\int_0^t F''(X_s)\,u_s\left(\int_0^s u_\theta(s-\theta)^{2H-2}d\theta\right)ds.\end{aligned}$$

(ii) Cas $H < \frac{1}{2}$:

L'extension des résultats précédents n'est pas trvial dans le cas $H < \frac{1}{2}$. On remarque par exemple que l'intégrale forward $\int_0^T B_t^H dB_t^H$ au sens de Russo et Vallois (avec la convergence dans L^2) n'existe pas.

Rappelons que pour $H < \frac{1}{2}$ l'opérateur K_H^* donné par (3.43) est une isométrie entre l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et $L^2([0,T])$ et on a l'estimation :

$$\left|\frac{\partial K}{\partial t}(t,s)\right| \leq c'_H \left(\frac{1}{2} - H\right)(t-s)^{H-\frac{3}{2}}.$$

Considérons la semi-norme définie sur $\mathcal{E}$ par :

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_K^2 &= \int_0^T \varphi^2(s) K(T,s)^2 ds \\ &+ \int_0^T \left(\int_s^T |\varphi(t) - \varphi(s)| (t-s)^{H-\frac{3}{2}} dt\right)^2 ds.\end{aligned}$$

On note par $\mathcal{H}_K$ le complété de $\mathcal{E}$ par rapport à cette semi-norme. L'espace $\mathcal{H}_K$ est continûment inclus dans $\mathcal{H}$.

Proposition 3.4

Soit $u = \{u_t, t \in [0,T]\}$ un processus stochastique dans l'espace $\mathbb{D}^{1,2}(\mathcal{H}_K)$. Supposons que la trace définie comme la limite en probabilité :

$$\mathrm{Tr}Du := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T \left\langle Du_s, 1_{[s-\varepsilon, s+\varepsilon]}\right\rangle_{\mathcal{H}} ds$$

existe et que :

$$E\left(\int_0^T u_s^2 \left(s^{2H-1} + (T-s)^{2H-1}\right) ds\right) < \infty,$$

$$E\left(\int_0^T \int_0^T (D_r u_s)^2 \left(s^{2H-1} + (T-s)^{2H-1}\right) ds dr\right) < \infty,$$

alors l'intégrale stochastique symétrique de u par rapport au MBF existe et :

$$\int_0^T u_t dB_t^H = \delta(u) + \mathrm{Tr}Du.$$

Transformation de Girsanov.

Soient B^H un mouvement Brownien fractionnaire avec le paramètre de Hurst $0 < H < 1$ et $\left\{\mathcal{F}_t^{B^H}, t \in [0,T]\right\}$ sa filtration naturelle.

Etant donné un processus adapté avec des trajectoires intégrables $u = \{u_t, t \in [0,T]\}$.

Considérons la transformation :

$$\tilde{B}_t^H = B_t^H + \int_0^t u_s ds \tag{3.52}$$

Nous pouvons écrire :

$$\tilde{B}_t^H = B_t^H + \int_0^t u_s ds = \int_0^t K_H(t,s)\, dW_s + \int_0^t u_s ds = \int_0^t K_H(t,s)\, d\tilde{W}_s$$

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \left(K_H^{-1} \left(\int_0^{\bullet} u_s ds \right)(r) \right) dr \tag{3.53}$$

Notons que $K_H^{-1}\left(\int_0^{\cdot} u_s ds\right) \in L^2([0,T])$ p.s. si et seulement si :

$$\int_0^{\cdot} u_s ds \in I_{0^+}^{H+\frac{1}{2}}\left(L^2([0,T])\right).$$

On a la version suivante du théorème de Girsanov pour le mouvement brownien fractionnaire :

Théorème 3.2

Considérons le processus de décalage (3.52) défini par un processus $u = \{u_t, t \in [0,T]\}$ avec des trajectoires intégrables et supposons que :

i) $\int_0^{\cdot} u_s ds \in I_{0^+}^{H+\frac{1}{2}}\left(L^2([0,T])\right)$ (*Im*K_H), p.s.

ii) $E(\xi_T) = 1$, où $\xi_T = \exp\left(\int\limits_0^T \left(K_H^{-1} \int\limits_0^{\cdot} u_s ds\right)_s dW_s + \int\limits_0^T \left(K_H^{-1} \int\limits_0^{\cdot} u_s ds\right)_s^2 ds\right)$,

alors le processus de décalage $\tilde{B}^H$ est un $\mathcal{F}_t^{B^H}$-mouvement Brownien fractionnaire avec le paramètre de Hurst H relativement à la nouvelle probabilité $\tilde{P}$ définie par $\frac{d\tilde{P}}{dP} = \xi_T$.

- On peut remplacer la condition **ii)** par la condition de Novikov :

ii') $E \exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^T \left(K_H^{-1} \int\limits_0^{\cdot} u_r dr\right)^2 (s)\, ds\right) < \infty.$

• On peut montrer que l'opérateur inverse K_H^{-1} est donné par :

$$\left(K_H^{-1}h\right)(s) = s^{H-\frac{1}{2}} D_{0^+}^{H-\frac{1}{2}} \left(r^{\frac{1}{2}-H} h'(r)\right)(s),\ \text{si } H > \frac{1}{2} \tag{3.54}$$

$$\left(K_H^{-1}h\right)(s) \ = s^{\frac{1}{2}-H} D_{0^+}^{H-\frac{1}{2}} s^{H-\frac{1}{2}} D_{0^+}^{2H} h(s),\ \text{si } H < \frac{1}{2} \tag{3.55}$$

pour tout $h \in I_{0^+}^{H+\frac{1}{2}}\left(L^2([0,T])\right)$.

Si h est différentiable (ou absolument continue) K_H^{-1} est donné grace à (3.55) par :

$$K_H^{-1}h = s^{H-\frac{1}{2}} I_{0^+}^{\frac{1}{2}-H} s^{\frac{1}{2}-H} h' \tag{3.56}$$

3.2 EDS gouvernées par le mouvement brownien fractionnaire.

3.2.1 Existence de la solution faible.

Soient $B^H = \left\{B_t^H, t \in [0,T]\right\}$ un mouvement brownien fractionnaire avec le paramètre de Hurst $H \in]0,1[$; considérons l'équation stochastique suivante :

$$X_t = x_0 + B_t^H + \int\limits_0^t b(s, Xs) ds \tag{3.57}$$

où $b : [0,T] \times \mathbb{R}$ est une fonction mesurable.

Définition 3.3

Une solution faible de l'équation (3.57) est un couple de processus continus et adaptés $\left(X, B^H\right)$ sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\})$, tel que :

i) B^H est un $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien fractionnaire dans le sens de la définition (3.1).

ii) X et B^H satisfont (3.57).

Théorème 3.3

Supposons que $b(t,x)$ satisfait la condition sur la croissance linéaire **($\mathbf{H}_1$) :**

$$|b(t,x)| \leq C(1+|x|),$$

si $H < \frac{1}{2}$ (cas singulier) ou la condition de Hölder de continuité **($\mathbf{H}_2$)**, d'ordre $1 > \alpha > 1 - \frac{1}{2H}$ en x et d'ordre $\gamma > H - \frac{1}{2}$ en t :

$$|b(t,x) - b(s,y)| \leq C\left(|x-y|^\alpha + |t-s|^\gamma\right),$$

si $H > \frac{1}{2}$ (cas régulier),

alors l'équation (3.57) admet une solution faible.

Preuve :

Posons $\tilde{B}_t^H = B_t^H - \int\limits_0^t b(s, B_s^H + x)ds$ et supposons que le processus

$u_s = -b(s, B_s^H + x)$ satisfait les conditions i) et ii) du théorème (3.2),alors $\tilde{B}^H$ est un $\mathcal{F}_t^{B^H}$-mouvement Brownien fractionnaire relativement à la mesure de probabilité $\tilde{P}$ et $\left(B^H, \tilde{B}^H\right)$ est une solution faible de (3.57) sur l'espace de probabilité filtrée $\left(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{P}, \left\{\mathcal{F}_t^{B^H}, t \in [0,T]\right\}\right)$.

Posons $v_s = -K_H^{-1}\left(\int\limits_0^{\cdot} b(r, B_r^H + x_0)dr\right)(s)$.

On montre que le processus v satisfait les conditions i) et ii) du théorème (3.2).

Cas $H < \frac{1}{2}$:

En utilisant (3.56) et la propriété de croissance linéaire de b, on obtient :

$$\begin{aligned} |v_s| &= \left| s^{H-\frac{1}{2}} I_{0+}^{\frac{1}{2}-H} s^{\frac{1}{2}-H} b(s, B_s^H + x) \right| \\ &= c_H s^{H-\frac{1}{2}} \left| \int_0^s (s-r)^{-H-\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}-H} b(r, B_r^H + x) dr \right| \end{aligned}$$

$$\leq c_H C \left(1 + |x| + \left\| B^H \right\|_\infty \right) s^{H-\frac{1}{2}}. \tag{3.58}$$

L'opérateur $(K_H)^{-1}$ préserve la propriété d'adaptation et par conséquent, le processus v est adapté. Ainsi la condition ii) peut être démontrée en utilisant le critère de Novikov. il suffit de prouver qu' il existe une constante $\lambda > 0$ telle que :

$$\sup_{0 \leq s \leq T} E\left(\exp\left(\lambda v_s^2\right)\right) < \infty. \tag{3.59}$$

Cas $H > \frac{1}{2}$:

En utilisant la relation (3.54), on montre que le processus v est adapté et on obtient :

$v_s = -s^{H-\frac{1}{2}} D_{0+}^{\frac{1}{2}-H} s^{\frac{1}{2}-H} b(s, B_s^H + x) = -c_H \left(\alpha(s) + \beta(s)\right),$

où α et β s'expriment en fonction de b et de B^H.

En faisant des estimations des fonctions α et β, on montre que la condition ii) du théorème (3.2) est satisfaite en utilisant le critère de Novikov.■

Considérons maintenant l'équation différentielle stochastique suivante :

$$X_t = x_0 + B_t^H + \int_0^t (b_1(s, X_s) + b_2(s, X_s)) ds, \tag{3.60}$$

où $b_1, b_2 : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions mesurables, $H > \frac{1}{2}$ et $B^H = \left\{B_t^H, t \in [0, T]\right\}$ un mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

Théorème 3.4

Soit $H > \frac{1}{2}$ et supposons que b_1 et b_2 sont des fonctions mesurables sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions **(C$_1$), (C$_2$) et (C$_3$)** ou bien **(C$_1$), (C$'_2$) et (C$'_3$)** suivantes:

(C$_1$) b_1 est Hölder continue d'ordre $1 > \alpha > \frac{1}{1-2H}$ en x et d'ordre $\gamma > H - \frac{1}{2}$ en t:

$$|b_1(t,x) - b_1(s,y)| \leq C\left(|x-y|^{\alpha} + |t-s|^{\gamma}\right). \tag{3.61}$$

(C$_2$) $\sup\limits_{s\in[0,T]} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |b_2(s,x)| \leq M < \infty$.

(C$_3$) $\forall s \in [0,T]$, $b_2(s,\cdot)$ est non décroissante et continue à gauche (ou à droite).

(C$'_2$) $\sup\limits_{s\in[0,T]} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |b_2(s,x)| \leq M(1+|x|)$.

(C$'_3$) Pour tout $s \in [0,T]$, $b_2(s,\cdot)$ est une fonction non décroissante et continue.

Alors l'équation (3.60) admet une solution faible.

Preuve :

La preuve est analogue à celle du théorème précédent. Pour plus de détails voir [03].■

Considérons l'équation :

$$X_t = x_0 + B_t^H + \int_0^t b(X_s)ds, 0 \leq t \leq T, \tag{3.62}$$

où $H \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ et la fonction $b(x)$ est Hölder continue d'ordre $\alpha \in \left]1 - \frac{1}{2H}, 1\right[$ dans un nombre fini d'intervalles $]-\infty, a_1[\,,]a_1, a_2[\,, \ldots..,]a_{N-1}, a_N[\,,]a_N, \infty[$ avec un saut de discontinuité dans chacun des points $a_i, i = 1, \ldots.., N$: $b(a_i^-) \neq b(a_i^+) = b(a_i)$. La fonction $b(x)$ n'est pas continue et on ne peut pas appliquer le théorème (3.3).

On a le théorème suivant :

Théorème 3.5

Soient $B^H = (B_t^H)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in \left]\frac{1}{2}, H_0\right[$, où $H_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, alors l'équation (3.62) admet une solution faible.

Preuve :

Pour prouver le théorème, on a besoin du lemme et de la proposition suivants [13] :

Lemme.

Supposons que $b_i(t,x)$, $i = 1, ..., N$ sont des fonctions mesurables t.q :

$$E\exp\left(\lambda\int_0^T\left(K^{-1}\int_0^{\cdot} b_i(r, r+B_r^H)dr\right)^2(s)\,ds\right)<\infty \tag{3.63}$$

pour tout $\lambda > 0$ et $i = 1, ..., N$, alors la fonction $b(t,x) = \sum_{i=1}^{N} b_i(t,x)$ satisfait aussi la condition (3.63) pour tout $\lambda > 0$ et l'équation (3.57) admet une solution faible.

Proposition 3.5

Soit $B^H = (B_t^H)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in \left]\frac{1}{2}, H_0\right[$, où $H_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $b(x) = sgn(x-a)$ satisfait la condition (3.63) pour tout $\lambda > 0$.

Preuve du théorème :

On peut décomposer la fonction $b(x)$ comme suit :

$$b(x) = d(x) + \sum_{i=1}^{N} c_i sgn\left(x - a_i\right),$$

où la fonction d est Hölder continue d'ordre $\alpha \in \left]1 - \frac{1}{2H}, 1\right[$ et $c_i \in \mathbb{R}$. Alors, en utilisant le théorème (3.3) et la proposition (3.5), on montre que les fonctions $d(x)$ et $sgn(x - a_i)$ satisfont la condition (3.63) pour tout $\lambda > 0$. Ainsi, nous pouvons appliquer le lemme à ces fonctions. ■

Proposition 3.6

Considérons une suite de fonctions mesurables $b_n(t;X)$ uniformément bornées par C, telles que :

$$\lim_{n\to\infty} b_n(t;x) = b(t;x)$$

pour presque tous $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ et supposons aussi que les solutions correspondantes $X_t^{(n)}$ des équations :

$$X_t^{(n)} = x + B_t^H + \int_0^t b(s, X_s^{(n)})ds; 0 \leq t \leq T$$

convergent p.s. à un certain processus X_t pour tout $t \in [0, T]$; alors le processus X_t est une solution de l'équation (3.57).

3.2.2 Unicité en loi et unicité des trajectoires.

Théorème 3.5

Supposons que $b(t, x)$ satisfait les conditions sur la croissance linéaire **(H$_1$)** et la condition de Hölder continu **(H$_2$)**; alors l'unicité en loi et l'unicité des trajectoires sont satisfaites pour l'équation (3.57).

Preuve :

Unicité en loi :

Soient (X, B^H) une solution faible de l'équation stochastique (3.57) définie dans l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\})$. On définit un processus u_s et une mesure de probabilité $\tilde{P}$ par :

$$u_s = (K_H)^{-1} \left(\int_0^{\cdot} b(r, X_r)dr \right)(s)$$

$$\frac{d\tilde{P}}{dP} = \exp\left(-\int_0^T u_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T u_s^2 ds \right) \tag{3.64}$$

Le processus u_s satisfait les conditions i) et ii) du théorème (3.2). En effet, il est adapté et puisque X_t possède les mêmes propriétés de régularité que le MBF, on déduit que $\int\limits_0^T u_s^2 ds < \infty$ p.s.

Finalement, on peut appliquer le critère de Novikov pour montrer que $E\left(\frac{d\tilde{P}}{dP}\right) = 1$, car le lemme de Gronwall nous permet d'écrire :

$$\|X\|_\infty \leq \left(x + \left\|B^H\right\|_\infty + CT\right) e^{CT}$$

et :

$$|X_t - X_s| \leq \left|B_t^H - B_s^H\right| + C\,|t-s|\,\|X\|_\infty .$$

Le théorème de Girsanov permet d'affirmer que le processus

$$\tilde{W}_t = W_t + \int\limits_0^t u_s ds$$

est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien relativement à la probabilité $\tilde{P}$.

On a la représentation :

$$X_t = x + \int\limits_0^t K_H(t,s) d\tilde{W}_s$$

et par conséquent, $X - x$ est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien fractionnaire, relativement à la probabilité $\tilde{P}$, de paramètre de Hurst H. En conséquence, les processus $X - x$ et $\tilde{B}_t^H$ ont la même distribution relativement à la probabilité P.

En effet, on peut facilement montrer que si Ψ est une fonctionnelle mesurable bornée sur $C([0,T])$, alors :

$$E_P\left(\Psi\left(X - x\right)\right) = E_P\left(\Psi\left(\tilde{B}^H\right)\right)$$

Unicité des trajectoires :

Soient X_1 et X_2 deux solutions faibles définies sur le même espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\})$ par rapport au même mouvement brownien fractionnaire, alors $\sup(X_1, X_2)$ et $\inf(X_1, X_2)$ sont ainsi des solutions. Elles possèdent donc les mêmes lois et donc $X_1 = X_2$.■

Théorème 3.6

Soient b_1 et b_2 des fonctions mesurables sur $[0,T] \times \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions **($\mathbf{C}_1$)** **($\mathbf{C}_2$)** et **($\mathbf{C}_3$)** (resp. **($\mathbf{C}_1$)**, **($\mathbf{C}_2'$)** et **($\mathbf{C}_3'$)**) du théorème d'existence, alors l'unicité en loi et l'unicité des trajectoires sont satisfaites pour l'équation (3.60).

Preuve :

La preuve est analogue à celle du théorème précédent. Pour plus de détails voir [3].■

3.2.3 Existence de la solution forte.

Définition 3.4

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, B^H un mouvement brownien fractionnaire. Un processus X est une solution forte de l'équation (3.57) si :

i) X est continu et $\mathcal{F}_t^{B^H}$-adapté.

ii) X et B^H satisfont (3.57).

- Soient $p, \beta > 1$, on dit que la fonction mesurable $F : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ appartient à $L_{p,\beta}$, si :

$$\|F\|_{p,\beta} = \left(\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}} |F(t,x)|^p \, dx \right)^{\frac{\beta}{p}} dt \right)^{\frac{1}{\beta}} < \infty.$$

Théorème 3.7

Supposons que $b(t,x)$ satisfait la condition de croissance linéaire (H_1) du théorème (3.3). Si $H<\frac{1}{2}$, alors l'équation (3.57) admet une solution forte unique.

Preuve :

Pour tout $R>0$, posons $b_R(t,x)=b(t,(x\wedge R)\vee(-R))$. La condition de croissance linéaire implique que b_R est une fonction mesurable bornée. Soit ρ une fonction régulière non négative de support compact dans $\mathbb{R}$ telle que

$\int_{\mathbb{R}}\rho\,(z)\,dz=1.$

Pour $j\in\mathbb{N}$, posons $b_{R,j}(t,x)=j\int_{\mathbb{R}}b_R(t,z)\rho\,(j\,(x-z))\,dz.$

Soient pour $k\leq n,\ \tilde{b}_{R,n,k}=\bigwedge\limits_{j=n}^{k}b_{R,j}$ et $\tilde{b}_{R,n}=\bigwedge\limits_{j=n}^{\infty}b_{R,j}.$

Il est clair que $\tilde{b}_{R,n,k}$ est lipschitzienne relativement à la variable x uniformément en t, $\tilde{b}_{R,n,k}\downarrow\tilde{b}_{R,n}$, si $k\to\infty$ et $\tilde{b}_{R,n}\uparrow b_R$, si $n\to\infty$, pour presque tout x et pour tout t.

L'équation obtenue en remplaçant $b(t,x)$ par $(\tilde{b}_{R,n,k})$ dans l'équation (3.57) admet une solution unique $\tilde{X}_{R,n,k}$. En utilisant le critère de comparaison pour les équations différentielles ordinaires, on montre que la suite $\tilde{X}_{R,n,k}$ décroit avec k, par conséquent elle admet une limite $\tilde{X}_{R,n}$. Grace au théorème de comparaison $\tilde{X}_{R,n,k}$ (et par conséquent $\tilde{X}_{R,n}$) est bornée supérieurement (resp. inférieurement) par la solution avec un coefficient constant R (resp. $-R$) et de plus $\tilde{X}_{R,n}$ est croissante et converge donc vers une limite X_R, qui est une solution de l'équation obtenue en remplaçant $b(t,x)$ par b_R dans l'équation (3.57). En augmentant R,on obtient le résultat.

L'unicité est une conséquence du théorème 5 de [16].■

Théorème 3.8

Supposons que $b\,(t,x)$ satisfait la condition de croissance :

$$b(t,x)^2 \leq K + F(t,x)$$

pour presque tous $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, où $K > 0$ est une constante et F est une fonction non négative dans $L_{p,\beta}$ pour tout $p > 1$, $\beta > \frac{p}{p-H}$, et $H < \frac{1}{2}$.

Alors l'équation (3.57) admet une solution forte unique.

Preuve :

Pour tout $n > 0$, posons $b_n\,(t,x) = (b\,(t,x) \vee (-n)) \wedge n.$

Il est clair que $b_n\,(t,x)^2 \leq C + F\,(t,x)$, où $F \in L_{p,\beta}$, $p > 1$ et $\beta > \frac{p}{p-H}$.

De plus $\lim\limits_{n \to \infty} b_n\,(t,x) = b\,(t,x)$

Notons que $b_n$est une fonction mesurable bornée et donc l'équation obtenue en remplaçant $b(t,x)$ par b_n dans l'équation (3.57) admet une solution forte unique. Comme b_n est croissante et le théorème de comparaison implique que $X_t^{(n)}$ est croissant p.s. et converge donc vers un processus X_t qui est une solution de l'équation (3.57). L'unicité est une conséquence du théorème 5 de [16]. Pour plus de détails, voir [15].■

Théorème 3.9

Supposons que $b_1 \equiv 0$ et b_2 satisfait les conditions **(C$_2$)** et **(C$_3$)** (resp.**(C$'_2$)** et **(C$'_3$)**), alors il existe une solution forte (resp. solution forte unique) pour l'équation :

$$X_t = x_0 + B_t^H + \int_0^t b_2(s,X_s)ds, 0 \leq t \leq T \tag{3.65}$$

Preuve :

Supposons que $b_2 : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, bornée, non décroissante et continue à gauche et posons pour tout $n \geq 1$: $b_n\,(s,x) = \int\limits_{x-\frac{1}{n}}^{x} b_2\,(s,y)\,dy$. Les fonctions $b_n\left(s,x\right)$ sont non décroissantes et bornées uniformément. En utilisant [16,proposition.7], on montre que l'équation :

$$X_t^{(n)} = x_0 + B_t^H + \int_0^t b_n(s, X_s^{(n)})ds, 0 \leq t \leq T$$

admet une solution forte notée $X^{(n)}$. Soient $n > m$, notons $\Delta_t = X_t^n - X_t^m$. En utilisant la monotonie de b_n, on obtient :

$$\Delta_t \geq \int_0^t \left(b_m(s, X_s^n) - b_m(s, X_s^m)\right) ds$$

$$\geq \int_0^t \left(b_m(s, X_s^n) - b_m(s, X_s^m)\right) I_{\{\Delta_s \leq 0\}} ds \tag{3.66}$$

$$\geq 2mM \int_0^t \Delta_s I_{\{\Delta_s \leq 0\}} ds \geq -2mM \int_0^t \Delta_s^- ds.$$

Et donc :

$$\Delta_t^- \leq 2mM \int_0^t \Delta_s^- ds \tag{3.67}$$

Grace au lemme de Gronwall, on obtient que pour presque tout ω et pour tout $t \in [0, T]$, la suite $(X_t^n(\omega))$ est une fonction non décroissante de n, bornée (puisque b_n est borné). Par conséquent, elle admet une limite quand $n \to \infty$ et on pose :

$$\lim_{n \to \infty} X_t^n(\omega) = X_t(\omega),$$

ce qui nécessite en particulier que X soit $\mathcal{F}^{B^H}$-adapté. En appliquant le résultat de convergence de [16,proposition.7] et la bornétude des b_n ainsi que le théorème de la convergence dominé de Lebesgue, on obtient :

$$X_t = x + B_t^H + \int_0^t b_2(s, X_s)ds. \blacksquare$$

References.

[01] E. Alòs, O. Mazet et D. Nualart. Stochastic calculus with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter lesser than $\frac{1}{2}$. (2000). Stoch. Proc. Appl. 86, 121-139.Springer.

[02] E. Alòs et D. Nualart. Stochastic integration with respect to the fractional Brownian motion. Stochastics and Stochastics Reports 75, 129-152, 2003.

[03] B. Boufoussi et Y. Ouknine. On a SDE driven by A fractional Brownian motion with and monotone drift. Elect. Comm. in Probab. 8 (2003)122-134.

[04] P. Cheridit et D. Nualart. Stochastic integral of divergence type with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter H$\in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

[05] A. S. Cherny et H. J. Engelbert. Singular Stochastic Differential Equations. Springer-Verlag Berlin (2005).

[06] L. Decreusefond. Stochastic integration with respect tofractional Brownian motion.

http://perso.enst.fr/~decreuse/recherche/fbm_survey.pdf

[07] T. E. Duncan, Y. Hu et B. Pasik-Duncan, 1998. Stochastic calculus for fractional Brownian motion I. Theory.

[08] L. C. Evans. An introduction to Stochastic Differential Equations.

www.rpi.edu./~pearsy/sde.pdf

[09] S. Geiss. Stochastic Processes in continuous time (05/2006).

www.math.jyu.fi/~geiss/scripts/stochastic-sde.pdf

[10] N. Ikeda et S. Watanabe. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. North-Holland (1981).

I. Karatzas et S.E. Shreve. Brownian motion and stochastic calculus. Springer-Verlag, Berlin.(1988).

[11] P.E.Kloeden et E.Platen, (1992): Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer-Verlag.

[12] Y. Mishura et D. Nualart. Weak solution for stochastic differential equations driven by a fractional Brownian motion with parameter H $>\frac{1}{2}$ and discontinuous drift.IMUB No 319. 2003.

[14] D. Nualart et Y. Ouknine. Besov regularity of stochastic integrals with respect to the fractional Brownian motion with parameter H$>\frac{1}{2}$.Journal of Theoretical Probability 16, 451-470, 2003.

[15] D. Nualart et Y. Ouknine. Stochastic differential equations with additive fractional noise and locally unbounded drift. Progress in Probability 56, 353-365, 2003

[16] D. Nualart et Y. Ouknine. Regularization of differential equations by fractional noise. Stoch. Proc. Appl. 102 (2002), 103-116.

[17] D. Nualart, G. Via.Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion and applications. 2003. http://www.mat.ub.es/~nualart/fbm.pdf

[18] B. Oksendal. Stochastic Differential Equations. 5th Edition, Springer-Verlag Heidelberg New York. (2000).

[19] Z. Qian. Stochastic Differential Equations. (05/2006).

www.maths.ox.ac.uk/ qianz/ private/SDE05.htm.

[20] M. Reiß. Stochastic Differential Equations. 2003/04.

www.mathematik.hu-berlin.de/ reiss

[21] L. C. G. Rogers et D. Williams. Diffusions, Markov Processes and Martingales, Volume 2.

Cambridge University Press (2000).

[22] P.J.C. Spreij. Stochastic integration (05/2006).

www.science.uva.nl/~spreij/onderwijs/master/si2006.html

[23] A.W. Van der Vaart. Martingales, Diffusions, and Financial Mathematics.

www.math.vu.nl/sto/onderwijs/fw/stochint.pdf.