République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Frères Mentouri, Constantine

Faculté des **Sciences Exactes**

Département de **Mathématiques**

N^0 d'ordre : **176/DS/2018**

Série : **08/MATH/2018**

THÈSE

Pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

Mention : **MATHÉMATIQUE**

Option : **Analyse fonctionnelle & EDP**

Présentée et soutenue par

Meneceur Bekkar

Intitulée:

Résolutions de quelques équations différentielles fractionnaires sur l'espace d'Heisenberg

Jury:

Mr Dalah Mohamed	**Prof**	**Université des Frères Mentouri**	**Président**
Mr Haouam Kamel	**Prof**	**Université de Tébessa**	**Rapporteur**
Mr Berkane Abdelhak	**MCA**	**Université des Frères Mentouri**	**Examinateur**
Mr Rebiai Belgacem	**Prof**	**Université de Tébessa**	**Examinateur**
Mr Mansour Abdelouahab	**Prof**	**Université d'El-Oued**	**Examinateur**
Mr M Salah Abdelouahab	**MCA**	**Université de Mila**	**Examinateur**

Soutenue publiquement le 25/10/2018 à l'Université des Frères Mentouri, Constantine

حلول بعض المعادلات التفاضليّة الكسريّة

على فضاء هايزنبارغ.

ملخص:

تعنى هذه الأطروحة بدراسة مسألة عدم وجود الحلول الشاملة لجملة من المعادلات و نظم المعادلات التفاضلية الجزئية غيرالخطية ذات رتب كسريّة بالنسبة للزمن على زمره هايزنباغ, حيث ترتكز طريقة تقنيات البراهين أساسا على طريقة الدوال الإختبارية لتعيين الأس الحرجة من نمط فيجيتا.

الكلمات المفتاحية و العبارات الدّالة:

زمرة هايزنارغ - مشتقات كسرية - الأس الحرجة - طريقة التوابع الاختبارية - عدم وجود الحلول - معادلة (متراجحة) تطوريّة .

Resolutions of some fractional differential equations on the Heisenberg space.

Abstract:

This thesis is devoted to the study of the non-existence problems of global solutions for some PDEs and partial differential systems with fractional derivatives with respect to time, the basic idea of proofs is based on the method of the functions test for the determination of the Fujita type exponent.

Key words and phrases:

Heisenberg group - fractional derivative - critical exponent - test function method - evolution equations (inequalities) - non-existence solutions.

Résolutions de quelques équations différentielles fractionnaires sur l’espace d’Heisenberg.

Résumé:

Cette thèse est consacrée à l'étude des problèmes de la non-existence des solutions globales pour certaines EDPs et systèmes des EDPs avec des dérivées fractionnaires par rapport au temps, l'idée de base des preuves repose sur la méthode des fonctions tests pour la détermination l'exposant critique de type Fujita.

Mots-clés et expressions:

Groupe d'Heisenberg - dérivée fractionnaire - exposant critique - méthode des fonctions tests - équations d'évolution (inégalités) - non-existence des solutions.

Remerciement

J'ai exprime ma profonde gratitude à mon directeur de thèse, le professeur **Haouam Kamel**, qui a su me pendant ma thèse. Je le remercie pour l'aide compètent qu'il m'a apporté, pour sa grande patience et son encouragement à finir ce travail.

Je suie très honoré par la présence à mon jury de thèse de doctorat et que je remercie beaucoup :

• Professeur **Dalah Mohamed**, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être président de mon jury de thèse, je tiens à l'assurer de ma profonde reconnaissance pour l'intérêt qu' il porte à ce travail.

• Professeur **Rebiai Belgacem**, pour sa participation à mon jury de thèse en qualité d'examinateur de mon travail et pour toutes ses remarques intéressantes.

• Docteur **Berkane Abdelhak**, pour sa participation à mon jury de thèse, pour le temps consacré à la lecture de cette thèse et pour ses suggestions et ses remarques judicieuses.

• Docteur **Mohamed Salah Abdelouahab**, qui a bien voulu examiner ce travail et je le remercie pour le temps consacré à la lecture de cette thèse ainsi que pour ses commentaires.

• Et spécialement je tiens à exprimer ma reconnaissance au professeur **Mansour Abdelouahab**, pour son soutien permanent dans laboratoire de **TOEDP**.

Enfin je n'oublierai pas tous ceux qui m'ont encouragé pour terminer ce travail du loin ou du près à tous ceux-ci.

Table des matières

Introduction

Le calcul fractionnaire : (calcul d'intégrales et dérivation de tout ordre arbitraire réel ou complexe) a vu une grande expansion durant les trois dernières décennies. Du fait qu'il a plusieurs applications dans beaucoup de domaines aussi bien des mathématiques, de la physique, que des sciences et de la technologie. Ce travail s'inscrit dans le cadre des équations différentielles fractionnaires sur le groupe d'Heisenberg. Rappelons que le groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}^N$ est le groupe $\mathbb{R}^{2N+1}$ muni d'une loi de multiplication non commutative

$$(x, y, \tau) \circ (x', y', \tau') = (x + x', y + y', \tau + \tau' + 2(yx' - y'x)).$$

C'est un groupe de Lie homogène muni d'une structure de dilatations

$$\begin{aligned} \delta_\lambda(x, y, \tau) &= (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 \tau), \quad \lambda > 0, \\ \delta_\lambda &= -\delta_{|\lambda|}, \quad \lambda < 0. \end{aligned} \tag{1}$$

dont la dimension homogène est égale à $Q = 2N + 2$.
Le système de champs de vecteurs suivant

$$X_j = \partial_{x_j} + 2y_j\partial_\tau, \quad Y_j = \partial_{y_j} - 2x_j\partial_\tau, \quad j = 1, ..., N. \tag{2}$$

est invariant à gauche par rapport à la structure du groupe. L'algèbre de Lie de $\mathbb{H}^N$ est engendrée par ce système, et vérifie :

$$[X_j, Y_j] = -4\partial_\tau \equiv -4S, \quad \text{et} \quad [X_j, S] = [Y_j, S] = 0, \quad j = 1, ..., N$$

Le Laplacien du groupe d'Heisenberg $\Delta_{\mathbb{H}}$ s'écrit sous la forme

$$\Delta_{\mathbb{H}} = \sum_{j=1}^{N} \left(X_j^2 + Y_j^2\right) \tag{3}$$

La distance homogène de $\mathbb{H}^N$ est donnée par

$$d_{\mathbb{H}}\left((x, y, \tau); (x', y', \tau')\right) = \rho\left((x', y', \tau')^{-1} \circ (x, y, \tau)\right)$$

où

$$\rho(x,y,\tau)=\left(\left(|x|^2+|y|^2\right)^2+\tau^2\right)^{1/4}. \tag{4}$$

L'objectif principal de cette thèse est d'établir quelques résultats de non-existence de solution pour quelques EDPs non linéaires d'ordres fractionnaires sur le groupe d'Heisenberg. L'idée de base des preuves dans cette thèse repose sur la méthode des fonctions testes choisies convenablement à la recherche des exposants critiques de type Fujuta.
Cette thèse est organisée de la manière suivante.

Le premier chapitre

Le groupe d'Heisenberg est un exemple particulier d'une large classe de groupes de Lie La première partie de ce chapitre rappelle quelques outils de base de groupe de Lie et de l'algèbre de Lie. Quant à la deuxième partie, elle se concentre plus particulièrement sur les groupes d'Heisenberg, aussi que sur certains éléments de base d'analyse sur le groupe d'Heisenberg.

Le deuxième chapitre

Dans ce chapitre, nous allons donner quelques définitions et résultats concernant le calcul intégrale et dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et au sens de Caputo.

Le troisième chapitre

Dans ce chapitre, nous allons établir des résultats de non-existence de solution de système d'inégalités d'évolution fractionnaire non linéaire de type :

$$(FS_\alpha^m):\begin{cases}\mathbf{D}_{0/t}^{\alpha}u_i & - & \Delta_{\mathbb{H}}(a_iu_i)\geq |\,\eta\,|^{\gamma_{i+1}}|\,u_{i+1}\,|^{p_{i+1}}\\ (\eta,t) & \in & \mathbb{H}^N\times]0,+\infty[,\quad 1\leq i\leq m\\ u_{m+1} & = & u_1 \qquad \alpha\in(1,2)\end{cases} \tag{5}$$

où $\mathbf{D}_{0/t}^{\alpha}$ est la dérivée temporelle fractionnaire d'ordre $\alpha\in(1,2)$ au sens de Caputo, $|\,\eta\,|$ est la distance entre η et l'origine de $\mathbb{H}^N$, $m\geq 2$, $p_{m+1}=p_1$, $\gamma_{m+1}=\gamma_1$, et $a_i\in L^\infty(\mathbb{H}^N\times]0,+\infty[)$, $1\leq i\leq m$.
Nous allons montrer sous certaines conditions initiales, que le système (FS_α^m) n'admet pas de solution faible non triviale sur $\mathbb{H}^N$. Si $\alpha=2$ nous obtiendrons les résultats contenus dans [24, 25, 38]. Le travail effectué dans ce chapitre a fait l'objet d'une publication internationale : Systems of semilinear evolution inequalities with temporal fractional derivative on the Heisenberg group, Advances in Dfference Equations, 2017 (2017)-12, 1-15. (voir [35]).

Dans le cas du système de deux inégalités on aura

Théorème 0.1. *Si*

$$Q < Q_\alpha^\bullet = 2\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{p_1p_2-1} max\left((\gamma_1+2)+p_1(\gamma_2+2), p_2(\gamma_1+2)+(\gamma_2+2)\right)$$

alors il n'y a pas de solution faible non triviale (u,v) *de système* (FS_α^2).

Et dans le cas de $m > 2$ inégalités, on aura le résultat suivant

Théorème 0.2. *Supposons que*

$$Q < Q_\alpha^\bullet = 2\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) + max\left(X_1, X_2, ..., X_m\right)$$

alors le système (FS_α^m) *n'admet pas de solution faible non triviale*

où $(X_1, X_2, ..., X_m)^T$ la solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} -1 & p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & p_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & p_{m-1} \\ p_m & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{m-1} \\ X_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1+2 \\ \gamma_2+2 \\ \vdots \\ \gamma_{m-1}+2 \\ \gamma_m+2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Et dans le cas d'une seule inégalité, on aura le théorème suivant

Théorème 0.3. *Soit* $N \geq 1$ *et* $p > 1$ *on suppose que :*

$$\gamma > -2 \quad et \quad 1 < p < \frac{\alpha(Q+\gamma)+2}{\alpha(Q-2)+2} \tag{7}$$

alors le problème $(FI_\alpha) \equiv (FS_\alpha^1)$ *n'admet pas une solution faible globale autre que la solution triviale.*

Le quatrième chapitre

Dans ce chapitre, nous allons présenter certains résultats de non-existence de solution des problèmes hyperboliques non linéaire avec amortissement fractionnaire de type :

$$u_{tt} + \mathbf{D}_{0/t}^\alpha u - \Delta_{\mathbb{H}}(au) = \mid u \mid^p \tag{8}$$

$$\begin{cases} u_{tt} + \mathbf{D}^{\alpha}_{0/t}u - \Delta_{\mathbb{H}}(au) & = & \mid v \mid^{p} \\ v_{tt} + \mathbf{D}^{\delta}_{0/t}v - \Delta_{\mathbb{H}}(bv) & = & \mid u \mid^{q} \end{cases} \tag{9}$$

dans $\mathbb{H}^N \times \mathbb{R}^+$, où $\alpha, \delta \in (0,1)$ et $a, b \in L^{\infty}(\mathbb{H}^N \times \mathbb{R}^+)$.
Dans le cas de l'équation (8) on aura le résultat suivant

Théorème 0.4. *Soit $N \geq 1$ et $p > 1$ on suppose que :*

$$\gamma > -2 \quad et \quad 1 < p < \frac{Q + \frac{2}{\alpha} + \gamma}{Q + 2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)} \tag{10}$$

alors l'équation (8) n'admet pas une solution faible globale autre que la solution triviale.

Si $\alpha = 1$, nous retrouverons le résultat obtenu par B. Ahmad et al [4].
Et dans le cas du système (9), on aura le théorème suivant

Théorème 0.5. *Supposons que*

$$Q < Q^{*}_{e} = max\left\{Q_1, Q_2\right\},$$

où

$$\begin{cases} Q_1 & = & \dfrac{\alpha\left(1 + \frac{\gamma}{2q}\right) + \frac{\delta}{q}\left(1 + \frac{\beta}{2p}\right) - \left(1 - \frac{1}{pq}\right)}{\frac{\alpha}{2q'} + \frac{\delta}{2p'q}}, \\ \\ Q_2 & = & \dfrac{\delta\left(1 + \frac{\beta}{2p}\right) + \frac{\alpha}{p}\left(1 + \frac{\gamma}{2q}\right) - \left(1 - \frac{1}{pq}\right)}{\frac{\delta}{2p'} + \frac{\alpha}{2q'p}}. \end{cases} \tag{11}$$

alors le système (9) n'admet pas une solution faible globale (u, v) autre que la solution triviale.

Si $\alpha = \delta = 1$, nous obtiendrons le résultat de M. Boutefnouchet et M. Kirane [13].

Le dernier chapitre

Dans ce chapitre nous allons établir certains résultats de non-existence de solution des problèmes paraboliques non locales de réaction-diffusion fractionnaire de type :

$$(FRD)_{\alpha,\beta} : \mathbf{D}^{\alpha}_{0/t}u + (-\Delta_{\mathbb{H}})^{\frac{\beta}{2}}\left|u\right|^{m} = \mid u \mid^{p}, \tag{12}$$

$$(SFRD)_{\alpha,\beta,\delta} : \begin{cases} \mathbf{D}^{\alpha}_{0/t}u + (-\Delta_{\mathbb{H}})^{\frac{\beta}{2}}\, u &= \mid v \mid^{p}, \\ \mathbf{D}^{\delta}_{0/t}v + (-\Delta_{\mathbb{H}})^{\frac{\beta}{2}}\, v &= \mid u \mid^{q}. \end{cases} \tag{13}$$

avec m est un entier strictement positif, $\alpha, \delta \in (0,1)$ et $\beta \in (1,2)$. Le travail effectué dans ce chapitre est un sujet d'une publication international : Non-existence of global solutions of non-linear non-local fractional evolution systems on the Heisenberg group (Envoyer)
Dans le cas scalaire on aura le résultat suivant

Théorème 0.6. *Soit $N \geq 1$ et $p > 1$ on suppose que :*

$$1 < m < p < p_{m,\alpha,\beta} = m + \frac{\beta}{\alpha Q}, \tag{14}$$

alors le preblème (12) n'admet pas une solution faible globale autre que la solution triviale.

Et dans le cas du système (13) on aura le théorème suivant

Théorème 0.7. *supposons que*

$$Q < Q^{*}_{e} = \frac{\beta}{pq-1} max \left\{ pq(\alpha-1) + \delta p + 1, pq(\delta-1) + \alpha q + 1 \right\},$$

Alors le système (13) n'admet pas une solution faible globale (u,v) autre que la solution triviale.

Si $\alpha = \delta = 1$ nous généraliserons et améliorerons les résultats obtenus dans [4, 13] pour les cas paraboliques.

Chapitre 1

Le groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}^N$

1.1 Groupe de Lie

Définition 1.1. *Un ensemble $\mathbb{G}$ est dit groupe de Lie si :*
- — $\mathbb{G}$ *est une variété différentiable de classe* $\mathcal{C}^\infty$.
- — $\mathbb{G}$ *munie d'une loi de groupe* $\circ : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{G}$.
- — *Les applications suivantes (produit et inversion de* $\mathbb{G}$*)* $(x, y) \longmapsto x \circ y$ *et* $x \longmapsto x^{-1}$ *sont de classe* $\mathcal{C}^\infty$.

Exemples 1.1. *:*

1. $(\mathbb{R}^d, +)$.
2. $LG(n, \mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}); detM \neq 0\}$ *par rapport au produit des matrices.*
3. $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}); A^T A = I_n\}$.

Définition 1.2. *Soit a est un élément de $\mathbb{G}$. Une translation à gauche sur le groupe de Lie $\mathbb{G}$ est le difféomorphisme défini par*

$$\begin{array}{rcl} L_a : \mathbb{G} & \longrightarrow & \mathbb{G} \\ g & \longmapsto & L_a g = a \circ g. \end{array} \tag{1.1}$$

Définition 1.3. *Soit a est un élément de $\mathbb{G}$. Une translation à droite sur le groupe de Lie $\mathbb{G}$ est le difféomorphisme défini par*

$$\begin{array}{rcl} R_a : \mathbb{G} & \longrightarrow & \mathbb{G} \\ g & \longmapsto & R_a g = g \circ a. \end{array} \tag{1.2}$$

Remarques 1.1. *Soient a et b deux éléments de $\mathbb{G}$, alors on a*

1. $L_a \circ L_b = L_{a \circ b} \in \mathcal{C}^{\infty}$.
2. $R_a \circ R_b = R_{b \circ a} \in \mathcal{C}^{\infty}$.
3. $L_a \circ L_{a^{-1}} = R_a \circ R_{a^{-1}} = I_{\mathbb{G}}$.

Définition 1.4. ***(Champs de vecteurs invariants à gauche)***
Soient $\mathbb{G}$ est un groupe de Lie et L_a le difféomorphisme donné par (1.1). On note par $d(L_a)$ la différentielle de L_a définie par

$$d(L_a)(X_g) = (T_g L_a)(X), \quad \forall a, g \in \mathbb{G},$$

où $T_g\mathbb{G}$ est l'ensemble des vecteurs tangents au point $g \in \mathbb{G}$. Un champ de vecteurs X est invariant à gauche si

$$d(L_a)(X_g) = X_{a \circ g}, \quad \forall a, g \in \mathbb{G}.$$

Définition 1.5. ***(algèbre de Lie)***
Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'une loi interne bilinéaire $[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, appelée le crochet de Lie tels pour tous X,Y et Z dans $\mathfrak{g}$ on a :

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ *(antisymétrique).*
2. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ *(l'identité de Jacobi).*

Proposition 1.1. *Soient X et Y deux champs de vecteurs invariants à gauche. pour tous $a, g \in \mathbb{G}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a*

1. $d(L_a)(X_g + \lambda Y_g) = d(L_a)(X_g) + \lambda d(L_a)(Y_g) = X_{a \circ g} + \lambda Y_{a \circ g} = (X + \lambda Y)_{a \circ g}$.
2. $d(L_a)([X, Y]_g) = [d(L_a)(X_g), d(L_a)(Y_g)] = [X, Y]_{a \circ g}$.

Définition 1.6. ***(algèbre de Lie d'un groupe de Lie)***
Soit $\mathbb{G}$ un groupe de Lie. L'ensemble de tous les champs de vecteurs invariants à gauche de $\mathbb{G}$ muni de l'opération crochet de Lie est une algèbre de Lie du groupe de Lie $\mathbb{G}$, que l'on note $L(\mathbb{G})$.

Théorème 1.1. *Soit $\mathbb{G}$ un groupe de Lie et $L(\mathbb{G})$ son algèbre. Alors, l'application de $L(\mathbb{G}) \longrightarrow T_e\mathbb{G}$ définie par $X \longmapsto X_e$ est un isomorphisme entre $L(\mathbb{G})$ et l'espace tangent $T_e\mathbb{G}$ à $\mathbb{G}$ en e. Donc $dim(L(\mathbb{G})) = dim(T_e\mathbb{G}) = dim(\mathbb{G})$.*

Démonstration. Soit e l'élément neutre de $\mathbb{G}$. Pour tout $X_e \in T_e\mathbb{G}$, un champ vecteurs X_a est définit par

$$X_a \equiv d(L_a)(X_e) \quad \forall a \in \mathbb{G} \tag{1.3}$$

D'autre part on a pour tout $g \in \mathbb{G}$.

$$d(L_g)(X_a) = d(L_g)(d(L_a)(X_e)) = d(L_g L_a)(X_e) = d(L_{g\circ a})(X_e) = X_{g\circ a}$$

Alors X_a est invariant à gauche par conséquent $X_a \in L(\mathbb{G})$. Ainsi pour tout élément de $L(\mathbb{G})$ qui satisfait (1.3), on a isomorphisme entre $L(\mathbb{G})$ et $T_e\mathbb{G}$. $\square$

1.1.1 L'application exponentielle

Définition 1.7. ***(La courbe exponentielle)*** *: Soit $\mathbb{G}$ un groupe de Lie et $L(\mathbb{G})$ son algèbre de Lie. Soient $X \in L(\mathbb{G})$ et $\gamma(t)$ la courbe intégrale de X passant par l'élément neutre de $\mathbb{G}$ à l'instant $t = 0$ définie sur $\mathbb{R}$. On définit l'application $exp_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{G}$ par $exp_X(t) = \gamma(t)$ et qui vérifie*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} exp_X(0) & = & e \\ d_t exp_X\left(\frac{d}{dr}|_{r=t}\right) & = & X_{exp_X(t)}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{array} \right. \tag{1.4}$$

Proposition 1.2. *Soit $(\mathbb{G}, \circ)$ un groupe de Lie et $L(\mathbb{G})$ son algèbre de Lie. Pour tout $X \in L(\mathbb{G})$ on a*

1. $exp_X(t+s) = exp_X(t) \circ exp_X(s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$
2. $exp_X(-t) = (exp_X(t))^{-1}, \forall t \in \mathbb{R}.$
3. $exp_X(0) = e$

Définition 1.8. ***(L'application exponentielle)*** *: Soient $(\mathbb{G}, \circ)$ un groupe de Lie et $L(\mathbb{G})$ son algèbre de Lie. L'application définie par*

$$\begin{array}{rcl} Exp : L(\mathbb{G}) & \longrightarrow & \mathbb{G} \\ X & \longmapsto & exp_X(1) \end{array} \tag{1.5}$$

est appelée l'application exponentielle associée au groupe de Lie $\mathbb{G}$.

Proposition 1.3. *Soit $(\mathbb{G}, \circ)$ un groupe de Lie et $L(\mathbb{G})$ son algèbre de Lie. Pour tout $X \in L(\mathbb{G})$ on a*

1. $Exp(tX) = exp_X(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$
2. $Exp((t+s)X) = Exp(tX) \circ Exp(sX) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$
3. $Exp(-tX) = (Exp(tX))^{-1}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

Démonstration. Pour tout $t \in \mathbb{R}$. Considérons l'application définie par $s \longmapsto \gamma(s) \equiv exp_X(ts)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Comme $\gamma(0) = exp_X(0) = e$ et $\dot{\gamma}(s) = tX_{exp_X(ts)} = tX_{\gamma(s)}$, alors γ la courbe intégrale de tX, d'après la définition 1.7 on a $\gamma(s) = exp_{tX}(s)$. Par conséquent $exp_X(ts) = exp_{tX}(s)$, pour $s = 1$, on obtient $exp_X(t) = exp_{tX}(s) = Exp(tX)$.
D'autre part, on a

$$Exp((t+s)X) = exp_X(t+s) = exp_X(t) \circ exp_X(s) = Exp(tX) \circ Exp(sX).$$

et

$$Exp(-tX) = exp_X(-t) = (exp_X(t))^{-1} = (Exp(tX))^{-1}.$$

□

1.2 Groupe de Carnot

1.2.1 Groupe de Lie homogène

Définition 1.9. *Un groupe de Lie $\mathbb{G}$ est dit homogène, s'il est muni d'une famille de dilatations $\{\delta_a\}_{a>0}$ qui vérifie la propriété suivante : Il existe N entiers $\sigma_1, ..., \sigma_N$ où $1 \leq \sigma_1 \leq .... \leq \sigma_N$ tel que pour tout $a > 0$ l'application*

$$\delta_a : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{G}, \delta_a(x_1, ..., x_N) \equiv (a^{\sigma_1}x_1, ..., a^{\sigma_N}x_N) \tag{1.6}$$

est un automorphisme de groupe.

Remarque 1.1. *Si e l'élément neutre d'un groupe homogène $\mathbb{G}$, alors $\delta_a(e) = e$ pour tout $a > 0$, par conséquent $e = 0$.*

Définition 1.10. *Soit $\mathbb{G}$ un groupe de Lie homogène par rapport à la dilatation 1.6 La demension homogène Q de $\mathbb{G}$ par rapport à la dilatation 1.6 est donnée par la somme des exposants de la dilatation, c'est à dire $Q = \sum_{j=1}^{N} \sigma_j$.*

1.2.2 Algèbre de Lie d'un Groupe de Lie homogène

Soit $\mathbb{G}$ un groupe de Lie homogène par rapport à la dilatation δ_a, et $L(\mathbb{G})$ son algèbre de Lie, comme les exposants de la dilatation δ_a satisfaisant $1 \leq \sigma_1 \leq .... \leq \sigma_N$, donc on peut poser

$$\left\{\begin{array}{lllll} n_1 & = & \sigma_j & \text{pour} & 1 \leq j \leq N_1 \\ n_2 & = & \sigma_j & \text{pour} & N_1 < j \leq N_1 + N_2 \\ \vdots & & & & \\ n_r & = & \sigma_j & \text{pour} & N_1 + ...N_{r-1} < j \leq N_1 + ...N_r \end{array}\right. \tag{1.7}$$

tel que

$$n_1 < n_2 < .... < n_r, \quad N_1 + N_2 + ... + N_r = N$$

soit $\{Z_1, ..., Z_N\}$ une base de $L(\mathbb{G})$ on définit les sous espaces vectoriels de $L(\mathbb{G})$ par :

$$\begin{array}{lll} V_1 & = & \langle Z_j, \quad 1 \leq j \leq N_1\rangle \\ V_i & = & \langle Z_j, \quad N_1 + ...N_{i-1} < j \leq N_1 + ...N_i\rangle \quad \text{pour} \quad i = 2, ..., r \end{array}$$

Alors

$$L(\mathbb{G}) = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i.$$

Définition 1.11. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nous définissons la suite (C_i) par $C_0 = \mathfrak{g}$ et $C_{i+1} = [C_i, \mathfrak{g}]$ S'il existe un entier r tel que $C_{r+1} = \{0\}$, on dit que $\mathfrak{g}$ est nilpotente d'ordre r (r le plus petit entier tel que $C_{r+1} = \{0\}$).*

Définitions 1.1.

1. *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite admettant une stratification s'il existe r sous espaces vectoriels $V_1, ..., V_r$ de $\mathfrak{g}$ tels que :*

   $$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$$

   et

   $$[V_1, V_{i-1}] = V_i, \quad 2 \leq i \leq r \quad [V_1, V_r] = \{0\}.$$

2. *Un groupe de Lie $\mathbb{G}$ est dit stratifié s'il est connexe et simplement connexe, et son algèbre de Lie $L(\mathbb{G})$ admet une stratification.*

Remarque 1.2. *toute algèbre de Lie admet une stratification est nilpotente.*

Définition 1.12. *Soit $\mathbb{G}$ un groupe de Lie et $L(\mathbb{G})$ son algèbre de Lie, $\mathbb{G}$ un groupe de Carnot si :*

1. *$\mathbb{G}$ est connexe et simplement connexe.*

2. *$L(\mathbb{G})$ admet une stratification.*

Théorème 1.2. *(voir [39]) Soit $\mathbb{G}$ un groupe de Carnot et $L(\mathbb{G})$ son algèbre de Lie, alors $L(\mathbb{G})$ un groupe de Lie isomorphe à $\mathbb{G}$ par l'application exponentielle.*

Théorème 1.3. *(voir [39]) Soit $(\mathbb{G}, \circ)$ un groupe de Carnot, alors il existe un groupe de Lie $(\mathbb{R}^n, \star)$ qui est isomorphe à $(\mathbb{G}, \circ)$.*

1.2.3 L'opérateur sous-Laplacien d'un groupe de Lie stratifié

Définition 1.13. *Soient $\mathbb{G}$ un groupe de Lie stratifié et $L(\mathbb{G})$ son algèbre de Lie. S'il existe une stratification de $L(\mathbb{G})$, i.e, $L(\mathbb{G}) = V_1 \oplus V_2 \oplus ...... \oplus V_r$, où $\{Z_1, Z_2, ...Z_m\}$ est une base de V_1, alors l'opérateur différentiel d'ordre 2, $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{m} Z_j^2$ est appelé sous-Laplacien de $\mathbb{G}$.*

Définition 1.14. *(**Hypoellipticité**)*
On dit qu'un opérateur différentiel $\mathcal{L}$ défini sur un ouvert $\Omega \in \mathbb{R}^N$ est hypoelliptique dans Ω si pour tout ouvert $\Omega' \subseteq \Omega$ et pour tout $f \in C^\infty(\Omega', \mathbb{R})$, toute solution de l'équation $\mathcal{L}u = f$ dans Ω' (au sens faible) est de classe $C^\infty(\Omega')$.

Théorème 1.4. *(voir [10, 29])(**Hörmander**)*
Soient $Z_1, ..., Z_m$ des champs de vecteurs à coefficients de classe C^∞ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$. Si

$$rang(Lie\{Z_1, ..., Z_m\}(x)) = N, \qquad \forall x \in \Omega. \tag{1.8}$$

l'opérateur $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{m} Z_j^2$ est hypoelliptique dans Ω.

1.2.4 Distance de Carnot-Carathéodory

Définition 1.15. *Un système de champs de vecteurs $X = (X_1, ..., X_k)$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est appelé un système de Hörmander si dimspan $\{Y(x)|Y \in Lie(X)\} = N$ pour tout $x \in \Omega$, où $Lie(X)$ est l'algèbre de Lie générée par l'ensemble des champs de vecteurs X.*

Remarque 1.3. *Si $(\mathbb{R}^N, \star)$ est un groupe de Carnot et*

$$B = \left(X_1^1, X_2^1, ..., X_{n_1}^1, X_1^2, ..., X_{n_2}^2, ..., X_1^r, ..., X_{n_r}^r\right)$$

est une base de $\mathfrak{g}$ adaptée à la stratification, alors $X = \left(X_1^1, X_2^1, ..., X_{n_1}^1\right)$ est un système de Hörmander.

Définition 1.16. *Soit $X = (X_1, ..., X_k)$ est un système de Hörmander dans $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Une courbe X-subunitaire est une courbe absolument continue $\Gamma : [0,T] \longrightarrow \Omega$ telle que*

$$\Gamma'(t) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j(t) X_j(\Gamma(t)),$$

pour certaines fonctions réelles α_i avec $\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i(t))^2 \leq 1$. Nous dénotons par $S(x,y)$ l'ensemble de toutes les courbes X-subunitaire joignant x et y.

Théorème 1.5. ***(Théorème de l'accessibilité de Chow [12])*** *Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^N$ et $X = (X_1, ..., X_k)$ est un système de Hörmander sur Ω, alors pour chaque couple $x, y \in \Omega$ il existe une courbe X-subunitaire $\Gamma \in S(x,y)$ rejoindre x et y.*

Définition 1.17. *Si $\Gamma : [0,T] \longrightarrow (\mathbb{R}^N, \star)$ est une courbe X-subunitaire par rapport à $X = \left(X_1^1, X_2^1, ..., X_{n_1}^1\right)$, nous l'appelons courbe subunitaire horizontale et nous définissons sa longueur par $l(\Gamma) = T$.*

Définition 1.18. ***(Distance de Carnot-Carathéodory)*** *Nous définissons la distance de Carnot-Carathéodory sur $(\mathbb{R}^N, \star)$ par :*

$$d_{CC} = inf\,\{l(\Gamma), \Gamma \in S(x,y)\}$$

Proposition 1.4. *Si d la distance de Carnot- Carathéodory sur $\mathbb{R}^N$, on a pour tout $x, y, g \in \mathbb{R}^N$ et $\lambda > 0$*

$$d(L_g(x), L_g(y)) = d(x,y) \tag{1.9}$$
$$d(\delta_\lambda(x), \delta_\lambda(y)) = \lambda d(x,y) \tag{1.10}$$

Démonstration.

• Il suffira de prouver que $\Gamma : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ appartient à $S(x,y)$ si et seulement si $L_g \circ \Gamma : [0,T] \longrightarrow \mathbb{G}$ appartient à $S(L_g(x), L_g(y)$. Depuis L_g est assez régulière alors $L_g \circ \Gamma$ est absolument continue et il est évident que $L_g \circ \Gamma(0) = L_g(x)$ et $L_g \circ \Gamma(T) = L_g(y)$, donc nous pouvons calculer

$$\begin{aligned} (L_g \circ \Gamma)'(t) &= (dL_g)(\Gamma(t)) \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j(t) X_j(\Gamma(t)) \\ &= \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j(t) (dL_g)(\Gamma(t)) X_j(\Gamma(t)) \\ &= \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j(t) X_j(L_g \circ \Gamma(t)) \end{aligned} \tag{1.11}$$

où dans l'égalité (1.11) nous avons utilisé l'invariance à gauche de X_j.

• Pour la deuxième égalité, il suffira de prouver que $\Gamma : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est une courbe X-subunitaire si et seulement si $\Gamma_\lambda : [0,\lambda T] \longrightarrow \mathbb{G}$, $\Gamma_\lambda(t) = \delta_\lambda\left(\Gamma\left(\frac{t}{\lambda}\right)\right)$ est une courbe X-subunitaire, d'une part on a

$$\begin{aligned}
\Gamma'(t) &= \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j(t) X_j\left(\Gamma(t)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j(t) \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\left(\Gamma(t)\right)\partial_{x_i}
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\Gamma'_\lambda(t) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda^{d_i - 1} \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j\left(\frac{t}{\lambda}\right) a_{i,j}\left(\Gamma\left(\frac{t}{\lambda}\right))\right)\partial_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j\left(\frac{t}{\lambda}\right) a_{i,j}\left(\delta_\lambda \circ \Gamma\left(\frac{t}{\lambda}\right))\right)\partial_i \\
&= \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j\left(\frac{t}{\lambda}\right) X_j\left(\Gamma_\lambda(t)\right)
\end{aligned}$$

car $a_{i,j}$ sont homogènes de degré $d_i - 1$. □

Corollaire 1.1. *Si d la distance de Carnot-Carathéodory sur $\mathbb{R}^N$, on a pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$*

$$d(x,y) = d(y^{-1} \circ x, 0) \tag{1.12}$$
$$d(x^{-1},0) = d(x,0) \tag{1.13}$$

Démonstration. En remplaçant g par y^{-1} dans (1.9) on obtient

$$d(x,y) = d(L_{y^{-1}}(x), L_{y^{-1}}(y)) = d(y^{-1} \circ x, y^{-1} \circ y) = d(y^{-1}\circ, 0)$$

et on posant $x = 0$ dans (1.12), on obtient la deuxième égalité. □

Théorème 1.6. *(voir [12]) La distance de Carnot-Carathéodory est continue par rapport à la Topologie euclidienne*

Définition 1.19. *(Norme homogène) Une norme homogène (symétrique) sur $(\mathbb{R}^N, \star)$ est une fonction continue (par rapport à la topologie euclidienne)*

$$|\ \ |_G : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0, +\infty[$$

telle que

1. *$|x|_G = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.*
2. *$|\delta_\lambda(x)|_G = \lambda |x|_G$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et $\lambda > 0$.*
3. *$|x^{-1}|_G = |x|_G$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.*

Remarque 1.4. *La distance de Carnot-Carathéodory définit une norme homogène de la manière suivante*

$$|x|_{CC} = d_{CC}(x, 0).$$

Lemme 1.1. *Si $| \,.\, |_G$ est une norme homogène sur $(\mathbb{R}^N, \star)$, Alors la balle*

$$B_G = \left\{ y \in \mathbb{R}^N / |y|_G = 1 \right\},$$

est compact (par rapport à la topologie euclidienne).

Démonstration. Considérons la fonction $|.|_S : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0, +\infty[$ donnée par :

$$|x|_S = \sum_{i=1}^{N} |x_i|^{\frac{1}{d_i}} \tag{1.14}$$

où d_i est le poids de la coordonnée i. De cette façon $|.|_S$ est une norme homogène. Nous pouvons facilement voir que l'ensemble $B_S = \left\{ y \in \mathbb{R}^N / |y|_S = 1 \right\}$, est compact par rapport à la topologie euclidienne car il est fermé et borné, de plus il ne contient pas 0, alors la fonction $| \,.\, |_G$ atteint un minimum $\nu > 0$ sur cet ensemble, donc

$$\nu \leq |y|_G \quad \text{pour tout} \quad y \in B_S$$

D'après la propriété d'homogénéité que nous avons

$$\nu \leq \left| \delta_{\frac{1}{|x|_S}}(x) \right| = \frac{|x|_G}{|x|_S} \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}^N$$

Cela implique que

$$B_G = \left\{ y \in \mathbb{R}^N / |y|_G = 1 \right\} \subseteq \left\{ y \in \mathbb{R}^N / |y|_S \leq 1 \right\}$$

donc B_G est compact. □

Proposition 1.5. *Chaque norme homogène $| \,.\, |_G$ sur $(\mathbb{R}^N, \star)$ est équivalente à $| \,.\, |_{CC}$*

Démonstration. Depuis d_{CC} est continue d'après le Théorème 1.6, et $B = \left\{y \in \mathbb{R}^N / |y|_G = 1\right\}$ est compact d'après le Lemme 1.1, il existe deux constantes positives m et M telles que

$$m \leq d_{CC}(y,0) \leq M \quad \text{pour tout} \quad y \in B$$

Grâce à l'homogénéité des dilatations 1.10 nous avons

$$m \leq \frac{d_{CC}(x,0)}{|x|_G} = d_{CC}\left(\delta_{\frac{1}{|x|_G}}, 0\right) \leq M \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}^N$$

donc

$$m|x|_G \leq |x|_{CC} \leq M|x|_G \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}^N$$

□

Proposition 1.6. *La mesure de Lebesgue dx est la mesure de Hâar du groupe* $(\mathbb{R}^N, \star)$ *(à savoir il est invariante à gauche et à droite par rapport aux translations de groupe), de plus, nous avons*

$$dx\left(\delta_\lambda(A)\right) = \lambda^Q dx(A) \tag{1.15}$$

pour tout ensemble mesurable A et $\lambda > 0$.

Démonstration. D'une part nous devons prouver d'abord $dx\left(L_g(A)\right) = dx(A) = dx\left(R_g(A)\right)$ pour tout ensemble mesurable A. D'après un changement de variables nous avons

$$dx\left(L_g(A)\right) = \int_{L_g(A)} dx = \int_A \left|det J_{L_g}(x)\right| dx = \int_A dx = dx(A)$$

où la matrice jacobienne a la forme triangulaire inférieure suivante

$$J_{L_g}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ a_{1.2}(x) & 1 & 0 & \ldots 0 \\ a_{1.3}(x) & a_{2.3}(x) & 1 & \ldots 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \vdots \\ a_{1.n}(x) & a_{2.n}(x) & a_{3.n}(x) & \ldots 1 \end{pmatrix}$$

Il en va de même pour la translation à droite de groupe.

D'autre part on voit bien que la matrice jacobienne de la dilatation δ_λ est une matrice diagonale

$$J_{\delta_\lambda} = diag(\lambda, ..., \lambda, \lambda^2, ...\lambda^2, ..., \lambda^r, ...\lambda^r)$$

où $\lambda^i = dim(V_i)$, donc

$$J_{\delta_\lambda} = \lambda^{\sum_{i=1}^r idim(V_i)} = \lambda^Q$$

□

1.3 Le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^N$

Le groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}^N$ de dimension $(2N+1)$ est l'espace

$$\mathbb{R}^{2N+1} = \left\{\eta = (x, y, \tau) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}\right\}$$

muni de loi $''\circ''$ définie par :

$$\eta \circ \widetilde{\eta} = \left(x + \widetilde{x}, y + \widetilde{y}, \tau + \widetilde{\tau} - 2\sum_{i=1}^{N}(x_i \widetilde{y_i} - \widetilde{x}_i y_i)\right) \tag{1.16}$$

où

$$\eta = (x, y, \tau) = (x_1, x_2, ..., x_N, y_1, y_2, ..., y_N, \tau)$$
$$\widetilde{\eta} = (\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{\tau}) = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ..., \widetilde{x}_N, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, ..., \widetilde{y}_N, \widetilde{\tau})$$

Cette loi de multiplication donne à $\mathbb{H}^N$ une stucture de groupe de Lie.
Le laplacien sous-elliptique sur $\mathbb{H}^N$ défini par :

$$\Delta_{\mathbb{H}} = \sum_{i=1}^{N}\left(X_i^2 + Y_i^2\right) \tag{1.17}$$

où

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + 2y_i \frac{\partial}{\partial \tau} \quad \text{et} \quad Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} - 2x_i \frac{\partial}{\partial \tau}$$

avec un calcul simple on peut écrire :

$$\Delta_{\mathbb{H}} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + 4y_i \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial \tau} - 4x_i \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial \tau} + 4(x_i^2 + y_i^2)\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)$$

L'opérateur $\Delta_{\mathbb{H}}$ est un opérateur elliptique dégénéré, il est stable par rapport à la multiplication à gauche dans $\mathbb{H}^N$ c'est à dire :

$$\Delta_{\mathbb{H}}\left(u(\eta \circ \widetilde{\eta})\right) = (\Delta_{\mathbb{H}} u)\left(\eta \circ \widetilde{\eta}\right) \qquad \forall (\eta, \widetilde{\eta}) \in \mathbb{H}^N \times \mathbb{H}^N$$

La distance entre un point η et l'origine dans $\mathbb{H}^N$ définie par :

$$|\eta|_{\mathbb{H}} = \left(\tau^2 + \sum_{i=1}^{N}(x_i^2 + y_i^2)^2\right)^{1/4}$$

L'application $\eta \to |\eta|_{\mathbb{H}}$ est homogène de degré un par rapport au groupe naturel des dilatations

$$\delta_\lambda(\eta) = \left(\lambda x, \lambda y, \lambda^2 t\right) \tag{1.18}$$

On remarque aussi que l'opérateur $\Delta_{\mathbb{H}}$ est homogène de dégré 2 par rapport à la dilataction δ_λ définie dans (1.18), c'est à dire :

$$\Delta_{\mathbb{H}} = \lambda^2 \delta_\lambda \left(\Delta_{\mathbb{H}}\right)$$

Il est facile de voir que l'action de $\Delta_{\mathbb{H}}$ sur les fonctions u dépendant seulement de $\rho = |\eta|_{\mathbb{H}}$:

$$\Delta_{\mathbb{H}} u(\rho) = a(\eta)\left(\frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{Q-1}{\rho}\frac{du}{d\rho}\right)$$

où

$$a(\eta) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i^2 + y_i^2)}{\rho^2}$$

Et $Q = 2N + 2$ est la dimension homogène de $\mathbb{H}^N$.

Nous identifions les points de $\mathbb{H}^N$ avec ceux de $\mathbb{R}^{2N+1}$, Nous rappelons aussi que la mesure naturelle de Hâar dans $\mathbb{H}^N$ est identique à celle de Lebesgue $d\eta = dxdyd\tau$ dans $\mathbb{R}^{2N+1}$.

1.4 Puissances fractionnaires de sous-Laplacien d'un groupe de Lie stratifié

Dans ce qui suit $(\mathbb{G}, \circ)$ est un groupe de Lie stratifié et $\mathcal{L}$ l'opérateur sous-Laplacien de $\mathbb{G}$

Définition 1.20. *Si $\alpha \in \mathbb{C}$. Nous appelons K_α un noyau de type α une distribution qui est lisse à partir de 0 et G-homogène de degré $\alpha - Q$.*

Proposition 1.7. *(voir [18, 19]) Supposons que $0 < \beta < Q$, et nous notons par $h = h(t,x)$ la solution fondamentale de $\mathcal{L} + \partial/\partial t$ (voir [19], Proposition 3.3). Alors l'intégrale*

$$R_\beta(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\beta}{2})}\int_0^\infty t^{\frac{\beta}{2}-1} h(t,x)dt$$

converge absolument pour tout $x \neq 0$. De plus R_β est un noyau de type β. Et on a

i *R_2 est la solution fondamentale de $\mathcal{L}$*

ii *Si $\alpha \in (0,2)$ et $u \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$, Alors*

$$\mathcal{L}^{\frac{\alpha}{2}}u = \mathcal{L}u * R_{2-\alpha}$$

iii *Les noyaux R_α admettent la règle de convolution suivante : si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ on a*

$$R_{\alpha+\beta} = R_\alpha * R_\beta$$

Remarque 1.5. *(voir [18, 19]) Si $\beta < 0$ et $\beta \notin \mathbb{Z}$, Nous avons également*

$$\widetilde{R}_\beta(x) = \frac{\frac{\beta}{2}}{\Gamma(\frac{\beta}{2})}\int_0^\infty t^{\frac{\beta}{2}-1}h(t,x)dt$$

défini une fonction assez régulière dans $\mathbb{G}\backslash\{0\}$, et on a aussi $t \longmapsto h(t,x)$ d'ordre infini quand $t \longrightarrow 0$ si $x \neq 0$, de plus $\widetilde{R}$ est positif et $\mathbb{G}$-homogène de degré $\beta - Q$.

Théorème 1.7. *(voir [18, 19]) L'opérateur $\mathcal{L}$ est un opérateur auto-adjoint positif sur le domaine $W^{2,2}_{\mathbb{G}}(\mathbb{G})$. Si $\{E(\lambda)\}$ la résolution spectrale de $\mathcal{L}$ sur $L^2(\mathbb{G})$, alors si $\alpha > 0$ on a*

$$\mathcal{L}^{\frac{\alpha}{2}} = \int_0^\infty \lambda^{\frac{\alpha}{2}}dE(\lambda)$$

avec le domaine

$$W^{\alpha,2}_{\mathbb{G}}(\mathbb{G}) = \left\{u \in L^2(\mathbb{G}) : \int_0^\infty \lambda^\alpha d\langle E(\lambda)u,u\rangle < \infty\right\}$$

Théorème 1.8. *(voir [18, 19]) Si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{G})$ et $0 < \alpha < 2$, alors $\mathcal{L}^{\frac{\alpha}{2}}u \in L^2(\mathbb{G})$, et on a*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\frac{\alpha}{2}}u(x) &= \int_{\mathbb{G}}(u(x\circ y) - u(x) - \chi(y)\langle\nabla_{\mathbb{G}}u(x), y\rangle)\,\widetilde{R}_{-\alpha}(y)dy \\
&= V.P\int_{\mathbb{G}}(u(y) - u(x))\,\widetilde{R}_{-\alpha}(y^{-1}\circ x)dy
\end{aligned}$$

où χ est la fonction caractéristique de la boule unité $B_\rho(0,1)$ où $\rho(x) = R_{2-\alpha}^{1\backslash(2-\alpha-Q)}$.

et on se ramène aux références suivantes [15, 20, 28, 27, 39, 41, 42] pour plus de détails sur l'analyse dans le groupe d'Heisenberg.

Chapitre 2

Dérivées et intégrales fractionnaires

Ce chapitre est consacré pour les définitions des dérivées et intégrales fractionnaires au sens de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo et les liens entre ces dérivées avec quelques exemples et quelques propriétés complémentaires.

2.1 Fonctions spéciales liées au calcul fractionnaire

Dans cette section, nous présentons quelques fonctions qui constituent l'un des oulils de base dans la théorie du calcul fractionnaire.

2.1.1 La fonction Gamma

Définition 2.1. *La fonction $\Gamma(z)$ est définie par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \quad (Re(z) > 0),$$

où $t^{z-1} = e^{(z-1)log(t)}$. Cette intégrale est convergente pour tout $z \in \mathbb{C}, (Re(z) > 0)$

Proposition 2.1. *La fonction Gamma vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $z \in \mathbb{R}_+^*$:*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.1}$$

2. *En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{2.2}$$

Démonstration. D'une part en faisant une intégration par parties on a

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = \left[-t^z e^{-t}\right]_{t=0}^{t=\infty} + z\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z)$$

D'autre part en utilisant (2.1) par récurrence on aura

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1! \\ \Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2! \\ \Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3! \\ ... & \quad ... \quad ... \\ \Gamma(n+1) &= n.\Gamma(n) = n.(n-1)! = n! \end{aligned} \tag{2.3}$$

□

Remarque 2.1. *D'après (2.1) par récurrence on déduit facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+\alpha)}{x(x+1).......(x+n-1)}$$

. Cette relation permet de définir $\Gamma(x)$ pour x négatif tel que $-n < x < -n+1$.
Donc dans ce cas pour $n = [\alpha]+1$ nous avons $0 < n-\alpha < 1$, c'est à dire $-n < -\alpha < -n+1$, alors

$$\Gamma(-\alpha) = \frac{\Gamma(n-\alpha)}{(-\alpha)(-\alpha+1).......(-\alpha+n-1)}$$

. La fonction $\Gamma(x)$ non définie pas quand $x \in \mathbb{Z}_-$.

Proposition 2.2. *(voir [37])(Représentation de la fonction Gamma sous forme d'une limite)*
La fonction Gamma peut être représentée par la limite :

$$\Gamma(z) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)......(z+n)} \tag{2.4}$$

2.1.2 La fonction Bêta

Définition 2.2. *Pour $z, w \in \mathbb{R}$ tels que $z > 0$ et $w > 0$, la fonction Bêta est définie par :*

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt \tag{2.5}$$

Proposition 2.3. *La relation entre la fonction Bêta d'Euler et Gamma d'Euler est donnée par :*

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \tag{2.6}$$

Démonstration. Considérons l'intégrale suivante

$$h_{z,w}(t) = \int_0^t \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau \tag{2.7}$$

on voit bien que $h_{z,w} = t^{z-1} * (1-t)^{w-1}$ (la convolution des fonctions t^{z-1} et $(1-t)^{w-1}$), et on a $h_{z,w}(1) = B(z,w)$.
Comme la transformée de Laplace de convolution de deux fonctions est égale au produit de leurs transformées de Laplace, en aura :

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(h_{z,w}, s) &= \mathscr{L}\left(t^{z-1} * (1-t)^{w-1}, s\right) \\
&= \mathscr{L}(t^{z-1}, s).\mathscr{L}((1-t)^{w-1}, s) \\
&= \left[\int_0^\infty t^{z-1}e^{-st}dt\right].\left[\int_0^\infty (1-t)^{w-1}s^{-st}dt\right] \\
&= \frac{\Gamma(z)}{s^z}.\frac{\Gamma(w)}{s^w} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

par la transformée de Laplace inverse du côté droit de (2.8) on a

$$h_{z,w}(t) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}t^{z+w+1} \tag{2.9}$$

pour $t = 1$, nous obtenons l'expression (2.6). □

Remarque 2.2. *On voit bien que la formule (2.6) est justifiée que la fonction Bêta est une fonction symétrique.*

2.1.3 La fonction Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffer replonge naturellement l'exponentielle usuelle.

Définition 2.3. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$, on appelle fonction de Mittag-Leffer la fonction définie par*

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \tag{2.10}$$

Remarque 2.3. *On voit bien que E_1 est l'exponentielle usuelle car :*

$$E_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Dans la théorie du calcul fractionnaire, la fonction de Mittag-Leffer à deux paramètres, joue un rôle très important.

Définition 2.4. *La fonction de Mittag-Leffer à deux paramètres est définie par*

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \tag{2.11}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta > 0$.

Exemples 2.1.

1. $$E_{\alpha,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)} = E_\alpha \tag{2.12}$$
2. $$E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \tag{2.13}$$
3. $$E_{1,2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^x-1}{x} \tag{2.14}$$
4. $$E_{1,3}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+3)} = \frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^x-1-x}{x^2} \tag{2.15}$$

et en général (2.16)

5. $$E_{1,p}(x) = \frac{1}{x^{p-1}}\left[e^x - \sum_{k=0}^{p-2} \frac{x^k}{k!}\right] \tag{2.17}$$
6. $$E_{2,1}(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k!} = cosh(x) \tag{2.18}$$
7. $$E_{2,2}(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{sinh(x)}{x} \tag{2.19}$$

2.2 Dérivées fractionnaires au sens de Grünwald-Letnikov

L'idée principale de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov est de donner une généralisation de la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres arbitraires.
La dérivée classique (d'ordre 1) d'une fonction f au point t est définie par :

$$f'(t) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \tag{2.20}$$

Par dérivation successive de la fonction f, on obtient une généralisation de la formule (2.20) l'ordre n (n est un entier positif ou nul) de la forme :

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh) \tag{2.21}$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1).....(n-k+1)}{k!}$$

Si le entier n est positif, la formule (2.21) représente la dérivée d'ordre n, et si n est négatif représente l'intégrale répétée n fois.
D'après la propriété fondamentale $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donc dans le cas où n est négatif ou nul peut être écrit

$$(-1)^k \binom{n}{k} = \frac{-n(1-n).....(k-n-1)}{k!}$$

Définition 2.5. *Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, t]$ les dérivées fractionnaires d'ordre α et d'ordre $(-\alpha)$ au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction f sont définies respectivement par :*

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^{\alpha} f(t) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)} f(t-kh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} \tag{2.22}$$

et

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^{-\alpha} f(t) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h^{-\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} f(t-kh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} \tag{2.23}$$

Remarque 2.4. *Si f de classe C^m (où m la plus petite valeur entière vérifiant $m-1<\alpha<m$), d'après des intégrations par parties de (2.22) et (2.23) nous obtenons*

$$ {}_a^G D_t^{\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \tag{2.24} $$

et

$$ {}_a^G D_t^{-\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m+\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m+\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \tag{2.25} $$

2.2.1 Dérivée fractionnaire de $(t-a)^\alpha$

Proposition 2.4. *La dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov d'ordre q de la fonction polynômiale $f(t)=(t-a)^\alpha$ est donnée par :*

$$ {}_a^G D_t^{q} (t-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(-q+\alpha+1)} (t-a)^{\alpha-q} \tag{2.26} $$

avec

$$ (q<0, \alpha>-1) \quad \textit{ou bien} \quad (0 \le m \le q < m+1, \alpha > m) $$

Démonstration.

- D'une part si $q<0$ et $\alpha>-1$ d'après la formule (2.22) on a

$$ {}_a^G D_t^{q} (t-a)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_a^t (t-\tau)^{-q-1} (\tau-a)^\alpha d\tau \tag{2.27} $$

supposons $\alpha>-1$ donc on a la convergence de l'intégrale située dans (2.27), d'après le changement de variable $\tau = a + \xi(t-a)$ et utilisant la définition (2.2) de fonction Bêta on obtient

$$ \begin{aligned} {}_a^G D_t^{q} (t-a)^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(-q)} (t-a)^{\alpha-q} \int_a^t \xi^\alpha (1-\xi)^{-q-1} d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(-q)} B(-q, \alpha+1)(t-a)^{\alpha-q} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(-q+\alpha+1)} (t-a)^{\alpha-q}. \end{aligned} \tag{2.28} $$

• D'autre part si $0 \leq m \leq q < m+1$, d'après (2.24) on a besoin d'imposer $\alpha > m$ pour la convergence de l'intégrale dans (2.24). Alors

$$ {}_a^G D_t^q (t-a)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(-q+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-q} \frac{d^{m+1}(\tau-a)^\alpha}{d\tau^{m+1}} d\tau \tag{2.29} $$

Comme

$$ \frac{d^{m+1}(\tau-a)^\alpha}{d\tau^{m+1}} = \alpha(\alpha-1)....(\alpha-m)(\tau-a)^{\alpha-m+1} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha-1}(\tau-a)^{\alpha-m+1} $$

et en appliquant le changement de variable $\tau = a + \xi(t-a)$, Nous avons

$$ \begin{aligned} {}_a^G D_t^q (t-a)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(-m)\Gamma(-q+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-q}(\tau-a)^{\alpha-m-1} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)B(-q+m+1, \alpha-m)}{\Gamma(\alpha-m)\Gamma(-q+m+1)}(t-a)^{\alpha-q} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(-q+\alpha+1)}(t-a)^{\alpha-q}. \end{aligned} \tag{2.30} $$

□

2.2.2 Dérivée fractionnaire d'une constante

Proposition 2.5.

La dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov d'ordre α d'une fonction constante $f(t) = C$ est définie par :

$$ {}_a^G D_t^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} \tag{2.31} $$

Démonstration.

Si $f(t) = C$ pour tout α non entier, on a $f^k(t) = 0$ pour $k = 1, 2, ...m$ donc d'après (2.24) en aura

$$ \begin{aligned} {}_a^G D_t^\alpha f(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} \end{aligned} $$

□

Remarque 2.5. *La dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov d'une fonction constante n'est ni nulle, ni constante.*

2.2.3 Composition avec les dérivées d'ordre entier

Proposition 2.6.

Soient m un entier strictement positif et q non entier. On a

$$\frac{d^m}{dt^m}\left({}_a^GD_t^q f(t)\right) = {}_a^GD_t^{m+q} f(t) \tag{2.32}$$

et

$${}_a^GD_t^q\left(\frac{d^m}{dt^m}f(t)\right) = {}_a^GD_t^{m+q} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-q-m}}{\Gamma(k-q-m+1)} \tag{2.33}$$

Démonstration. Pour $n-1<q<n$ on a d'une part :

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dt^m}\left({}_a^GD_t^q f(t)\right) &= \sum_{k=0}^{n+m-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-(q+m)}}{\Gamma(k-(q+m)+1)}\\ &+ \frac{1}{\Gamma(n+m-(q+m))}\int_a^t (t-\tau)^{n+m-(q+m)-1} f^{(n+m)}(\tau)d\tau\end{aligned}$$

d'après (2.24) donc

$$\frac{d^m}{dt^m}\left({}_a^GD_t^q f(t)\right) = {}_a^GD_t^{m+q} f(t)$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}{}_a^GD_t^q\left(\frac{d^m}{dt^m}f(t)\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(m+k)}(a)(t-a)^{k-q}}{\Gamma(k-q+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-q)}\int_a^t (t-\tau)^{n-q-1} f^{(n+m)}(\tau)d\tau\\ &= \sum_{k=0}^{n+m-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-(q+m)}}{\Gamma(k-(q+m)+1)}\\ &+ \frac{1}{\Gamma(n+m-(q+m)+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n+m-(q+m)-1} f^{(n+m)}(\tau)d\tau\\ &- \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-q-m}}{\Gamma(k-(q+m)+1)}\end{aligned}$$

alors

$$ {}_a^GD_t^q\left(\frac{d^m}{dt^m}f(t)\right) = {}_a^GD_t^{m+q}f(t) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-q-m}}{\Gamma(k-q-m+1)} $$

□

Remarque 2.6. *la dérivation fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov et la dérivation classique d'ordre m ne commutent que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, ..., m-1$.*

2.2.4 Composition des dérivées fractionnaires

Proposition 2.7. *(voir [37]) Nous avons trois cas distincts :*

1. *Si $q < 0$ et $\forall p \in \mathbb{R}$ on a :*

$$ {}_a^GD_t^p\left({}_a^GD_t^q f(t)\right) = {}_a^GD_t^{p+q}f(t) $$

2. *Si $0 \leq m < q < m+1$, $p < 0$ et la fonction f vérifie les conductions*

$$ f^{(k)}(a) = 0, \quad \textit{pour tout} \quad k = 0, 1, ..., m-1 $$

alors :

$$ {}_a^GD_t^p\left({}_a^GD_t^q f(t)\right) = {}_a^GD_t^{p+q}f(t) $$

3. *Si $0 \leq m < q < m+1$, $0 \leq n < p < n+1$ et la fonction f vérifie les conditions*

$$ f^{(k)}(a) = 0, \quad \textit{pour tout} \quad k = 0, 1, ..., r-1 \quad \textit{où} \quad r = max(m, n) $$

alors :

$$ {}_a^GD_t^p\left({}_a^GD_t^q f(t)\right) = {}_a^GD_t^q\left({}_a^GD_t^p f(t)\right) = {}_a^GD_t^{p+q}f(t) $$

2.3 Intégrales et dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

2.3.1 Intégrales d'ordre arbitraire

Si f est localement intégrable sur $(c, +\infty)$, puis la n-ième intégrale de f est donnée par :

$$ \begin{aligned} D_{c/t}^{-n}[f](t) &= \int_c^t ds_1 \int_c^{s_1} ds_2 .... \int_c^{s_{n-1}} f(s_n)ds_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_c^t (t-s)^{n-1}f(s)ds \end{aligned} $$

Pour presque pas tout t où $-\infty \leq c < t < \infty$ et $n \in \mathbb{N}$, puisque $\Gamma(n) = (n-1)!$. On a une généralisation immédiate qui est l'intégrale de f d'ordre fractionnaire $\alpha > 0$,

Définitions 2.1. *L'intégrale à gauche et l'intégrale à droite au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction $f \in L^1(a,b)$ sont définies par :*

$$I^{\alpha}_{a/t}(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t \in (a,b], \tag{2.34}$$

et

$$I^{\alpha}_{t/b}(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t \in [a,b), \tag{2.35}$$

respectivement

Remarque 2.7. *Lorsque $\alpha = n \in \mathbb{N}$, les définitions (2.34) et (2.35) sont identifiées respectivement avec les n-ième intégrales de la forme :*

$$I^{n}_{t/a}(f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) \tau$$

et

$$I^{n}_{t/b}(f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_t^b (\tau-t)^{n-1} f(\tau) \tau$$

Exemples 2.1. *Considérons la fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}$. Alors*

$$I^{\alpha}_{a/t}(t-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^{\beta} d\tau \tag{2.36}$$

d'après le changement de variable $\tau = a + (t-a)s$, en aura

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{a/t}(t-a)^{\beta} &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta} ds \\ &= \frac{B(\alpha, \beta+1)}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+\beta} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} (t-a)^{\alpha+\beta} \end{aligned} \tag{2.37}$$

Remarques 2.1.

• *On voit bien que c'est une généralisation du cas* $\alpha = 1$ *car :*

$$\begin{aligned} I^1_{a/t}(t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)}(t-a)^{\beta+1} \\ &= \frac{1}{(\beta+1)}(t-a)^{\beta+1} \end{aligned}$$

• *La relation (2.37) justifie que l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre* α *d'une constante est donnée par :*

$$I^\alpha_{a/t}C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^\alpha \tag{2.38}$$

Proposition 2.8. *Soient* α *et* β *deux nombres complexes et* f *continue sur* $[a,b]$. *Alors*

$$i) \quad I^\alpha_{a/t}\left(I^\beta_{a/t}f\right) = I^{\alpha+\beta}_{a/t}f, \quad (Re(\alpha > 0, Re(\beta > 0)) \tag{2.39}$$

$$ii) \qquad \frac{d}{dt}\left(I^\alpha_{a/t}f\right)(t) = \left(I^{\alpha-1}_{a/t}f\right)(t), \quad Re(\alpha > 1) \tag{2.40}$$

$$iii) \qquad \lim_{\alpha \longrightarrow 0^+}\left(I^\alpha_{a/t}f\right)(t) = f(t), \quad Re(\alpha > 0) \tag{2.41}$$

Démonstration.
i) En utilisant le théorème de Fubini. On a

$$\begin{aligned} I^\alpha_{a/t}\left(I^\beta_{a/t}f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\left({}^R_aI^\beta_t f\right)(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^s (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1}f(\tau)d\tau ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(\tau)\left[\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1}ds\right]d\tau. \end{aligned}$$

D'après le changement de variable $s = \tau + (t-\tau)u$ et la fonction Bêta d'Euler, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1}ds &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1} \\ &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

D'où

$$I^{\alpha}_{a/t}\left(I^{\beta}_{a/t}f(t)\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1}d\tau=\left(I^{\alpha+\beta}_{a/t}f\right)(t).$$

ii) Il suffit en utilisant les théorèmes classiques de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre et la relation fondamentale de la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$.

iii) D'après (2.38), si $C=1$, on peut écrire :

$$\left(I^{\alpha}_{a/t}1\right)(t)=\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\longrightarrow 1 \quad \text{quand} \quad \alpha\longrightarrow 0^{+}$$

Alors, pour tout t fixé on a

$$\begin{aligned}\left|\left(I^{\alpha}_{a/t}f\right)(t)-\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}f(t)\right| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(t)d\tau\right|\\ &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}\left|f(\tau)-f(t)\right|d\tau\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t-\delta}(t-\tau)^{\alpha-1}\left|f(\tau)-f(t)\right|d\tau\\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t-\delta}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\left|f(\tau)-f(t)\right|d\tau \qquad (2.42)\end{aligned}$$

D'une part, f est une fonction continue dans $[a,b]$ donc

$$\forall t,\tau\in[a,b]\quad \forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0:\quad |\tau-t|<\delta\Longrightarrow|f(\tau)-f(t)|<\varepsilon$$

ce qui entraîne

$$\int_{t-\delta}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\left|f(\tau)-f(t)\right|d\tau\le\varepsilon\int_{t-\delta}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau=\frac{\varepsilon\delta^{\alpha}}{\alpha} \qquad (2.43)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\int_a^{t-\delta}(t-\tau)^{\alpha-1}\left|f(\tau)-f(t)\right|d\tau &\le \int_a^{t-\delta}(t-\tau)^{\alpha-1}\left|f(\tau)+f(t)\right|d\tau\\ \text{où}\quad M=\sup_{\xi\in[a,t]}|f(\xi)| &\le 2M\int_a^{t-\delta}(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau\\ &= 2M\left(\frac{(t-a)^{\alpha}}{\alpha}-\frac{\delta^{\alpha}}{\alpha}\right) \qquad (2.44)\end{aligned}$$

D'après (2.42),(2.43) et (2.44) on a

$$\begin{aligned}\left|\left(I_{a/t}^{\alpha}f\right)(t)-\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}f(t)\right| &\leq \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left[\varepsilon\delta^{\alpha}+2M\left((t-a)^{\alpha}-\delta^{\alpha}\right)\right]\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\varepsilon\delta^{\alpha}+2M\left((t-a)^{\alpha}-\delta^{\alpha}\right)\right]\end{aligned}$$

quand $\alpha \longrightarrow 0^{+}$, on obtient

$$\lim_{\alpha\longrightarrow 0^{+}}\left|\left(I_{a/t}^{\alpha}f\right)(t)-\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}f(t)\right| \leq \varepsilon$$

autrement dit

$$\left|\lim_{\alpha\longrightarrow 0^{+}}\left(I_{a/t}^{\alpha}f\right)(t)-\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}f(t)\right| \leq \varepsilon, \quad \forall\varepsilon>0$$

c'est-à dire que :

$$\lim_{\alpha\longrightarrow 0^{+}}\left(I_{a/t}^{\alpha}f\right)(t)=f(t)$$

□

2.3.2 Dérivées d'ordre arbitraire

Définitions 2.2. *La dérivée à gauche et la dérivée à droite au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha>0$ de la fonction $f\in L^{1}(0,T)$ sont définies par :*

$$ {}_{a}^{R}D_{t}^{\alpha}(f)(t)=\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[I_{a/t}^{n-\alpha}f\right](t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left(\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-\alpha-1}f(\tau)d\tau\right), \quad n=[\alpha]+1 \tag{2.45}$$

et

$$ {}_{t}^{R}D_{b}^{\alpha}(f)(t)=(-1)^{n}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[I_{t/b}^{n-\alpha}f\right](t)=\frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left(\int_{t}^{b}(\tau-t)^{n-\alpha-1}f(\tau)d\tau\right), \quad n=[\alpha]+1 \tag{2.46}$$

respectivement

En particulier, quand $\alpha=n\in\mathbb{N}$, alors

$$ {}_{a}^{R}D_{t}^{0}f(t)={}_{t}^{R}D_{b}^{0}f(t)=f(t)$$

$$ {}_{a}^{R}D_{t}^{n}f(t)=f^{(n)}(t) \quad \text{et} \quad {}_{t}^{R}D_{b}^{n}f(t)=(-1)^{n}f^{(n)}(t)$$

où $f^{(n)}(t)$ la dérivée classique de $f(t)$ d'ordre n. Si $0 < \alpha < 1$ on a

$$ {}_{a}^{R}D_{t}^{\alpha}(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\left(\int_{a}^{t}(t-\tau)^{-\alpha}f(\tau)d\tau\right), \quad t > a \tag{2.47}$$

et

$$ {}_{t}^{R}D_{b}^{\alpha}(f)(t) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\left(\int_{t}^{b}(\tau-t)^{-\alpha}f(\tau)d\tau\right), \quad t < b \tag{2.48}$$

Remarques 2.2.

- *Les deux opérateurs de l'intégration fractionnaire et la dérivation fractionnaire à gauche (resp-à droite) de Riemann-Liouville, sont utilisés dans le passé (resp-futur) de f.*
- *L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$, c'est tout à fait la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $-\alpha$.*

Exemples 2.2.

Considérons la fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}$. Alors la dérivée de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de f est donné par :

$$\begin{aligned} {}_{a}^{R}D_{t}^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\left(\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta}d\tau\right) \\ &= \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(t-a)^{\beta+n-\alpha}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\left[(t-a)^{\beta+n-\alpha}\right] \end{aligned} \tag{2.49}$$

Comme :

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[(t-a)^{\beta+n-\alpha}\right] = (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)......(\beta-\alpha+1)(t-a)^{\beta-\alpha} \tag{2.50}$$

En remplaçant (2.50)dans (2.49), on obtient :

$$\begin{aligned} {}_{a}^{R}D_{t}^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)......(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)......(\beta-\alpha+1)}{(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)......(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \end{aligned} \tag{2.51}$$

Remarques 2.3.

- *On voit bien que c'est une généralisation du cas $\alpha = 1$ car :*

$$ {}_a^RD_t^1 (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(t-a)^{\beta-1} = \beta(t-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dt}(t-a)^\beta \tag{2.52}$$

- *En remplaçant $\beta = 0$ dans (2.51), on obtient*

$$ {}_a^RD_t^\alpha 1 = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

c'est-à dire que la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une constante est donnée par :

$$ {}_a^RD_t^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} \tag{2.53}$$

donc la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une constante n'est ni nulle, ni constante.

2.3.3 Compositions

Proposition 2.9. *(Composition avec les intégrales fractionnaires)*
Pour $p > 0$ et $t > 0$ on a :

$$ {}_a^RD_t^p \left({}_a^RD_t^{-p} f(t)\right) = {}_a^RD_t^p \left(I_{a/t}^p f(t)\right) = f(t) \tag{2.54}$$

c'est-à dire l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville du même ordre.

Démonstration.

- D'une part si $p = n \in \mathbb{N}^*$, donc

$$\begin{aligned} {}_a^RD_t^n \left(I_{a/t}^n f(t)\right) &= \frac{d^n}{dt^n}\int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)d\tau \\ &= \frac{d}{dt}\int_a^t f(\tau)\tau = f(t) \end{aligned}$$

- D'autre part si $n-1 \leq p < n$ en utilisant la règle (2.39), on a

$$ I_{a/t}^n f(t) = I_{a/t}^{n-p}\left(I_{a/t}^p f(t)\right)$$

D'où

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^p \left(I_{a/t}^p f(t) \right) &= \frac{d^n}{dt^n} \left[I_{a/t}^{n-p} \left(I_{a/t}^p f(t) \right) \right] \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left[I_{a/t}^n f(t) \right] \\ &= f(t) \end{aligned}$$

la preuve de (2.54) est achevée.
Et en générale nous avons :

$$ {}_a^R D_t^p \left(I_{a/t}^q f(t) \right) = {}_a^R D_t^{p-q} f(t) \tag{2.55}$$

□

Proposition 2.10. *Si la dérivée fractionnaire* ${}_a^R D_t^n f(t)$, $(n-1 \leq p < n)$ *de* $f(t)$ *est intégrable, alors :*

$$ I_{a/t}^p \left({}_a^R D_t^p f(t) \right) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} \left[{}_a^R D_t^{p-k} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-k}}{\Gamma(p-k+1)} \tag{2.56}$$

Démonstration. D'une part, d'après la formule (2.34), alors :

$$\begin{aligned} I_{a/t}^p \left({}_a^R D_t^p f(t) \right) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} \left({}_a^R D_\tau^p f(\tau) \right) d\tau \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p \left({}_a^R D_\tau^p f(\tau) \right) d\tau \right] \end{aligned} \tag{2.57}$$

D'autre part, en faisant des intégrations par parties et en utilisant (2.39), on aura :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)^p \left({}_a^RD_\tau^p f(\tau)\right) d\tau &= \frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)^p \frac{d^n}{d\tau^n}\left({}_a^RD_\tau^{-(n-p)} f(\tau)\right) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(p-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{p-n} \left({}_a^RD_\tau^{-(n-p)} f(\tau)\right) d\tau \\
&\quad -\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\left({}_a^RD_t^{-(n-p)} f(t)\right)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-k+1}}{\Gamma(2+p-k)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(p-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{p-n} \left({}_a^RD_\tau^{-(n-p)} f(\tau)\right) d\tau \\
&\quad -\sum_{k=1}^{n}\left[\left({}_a^RD_t^{p-k} f(t)\right)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-k+1}}{\Gamma(2+p-k)} \\
&= {}_a^RD_t^{-(p-n+1)}\left({}_a^RD_t^{-(n-p)} f(t)\right) \\
&\quad -\sum_{k=1}^{n}\left[\left({}_a^RD_t^{p-k} f(t)\right)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-k+1}}{\Gamma(2+p-k)} \\
&= {}_a^RD_t^{-1} f(t) -\sum_{k=1}^{n}\left[\left({}_a^RD_t^{p-k} f(t)\right)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-k+1}}{\Gamma(2+p-k)}
\end{aligned}
\tag{2.58}
$$

En fin on obtient (2.56) par la dérivation de (2.58). □

Remarque 2.8. *La dérivation et l'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, ne commutent pas en général.*

Proposition 2.11. *(Composition avec les dérivées d'ordre entier) Si f est une fonction assez régulière sur l'intervalle $[a,b]$, et $m-1 \leq \alpha < m$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors*

$$ i) \quad \frac{d^n}{dt^n}\left({}_a^RD_t^\alpha f(t)\right) = {}_a^RD_t^{n+\alpha} f(t) \tag{2.59} $$

$$ ii) \quad {}_a^RD_t^\alpha\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) = {}_a^RD_t^{\alpha+n} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(1+k-\alpha-n)} \tag{2.60} $$

Démonstration.

• D'une part en utilisant la définition (2.45) de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, en aura :

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dt^n}\left({}_a^RD_t^\alpha f(t)\right) &= \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dt^m}\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}f(\tau)d\tau\right)\\
&= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}}\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}f(\tau)d\tau\\
&= \frac{1}{\Gamma((n+m)-(n+\alpha))}\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1}f(\tau)d\tau\\
&= {}_a^RD_t^{n+\alpha}f(t) \qquad (2.61)
\end{aligned}$$

• D'autre part, d'après que :

$${}_a^RD_t^\alpha f(t) = {}_a^RD_t^{\alpha+n}\left({}_a^RD_t^{-n}f(t)\right)$$

et

$$\begin{aligned}
{}_a^RD_t^{-n}f^{(n)}(t) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f^{(n)}(\tau)d\tau\\
&= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{\Gamma(k+1)} \qquad (2.62)
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
{}_a^RD_t^\alpha\left(\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right) &= {}_a^RD_t^{\alpha+n}\left({}_a^RD_t^{-n}f^{(n)}(t)\right)\\
&= {}_a^RD_t^{\alpha+n}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{\Gamma(k+1)}\right)\\
&= {}_a^RD_t^{\alpha+n}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(1+k-\alpha-n)} \qquad (2.63)
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.9. *On voit bien que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivée classique d'ordre n ne commutent que si $f^{(k)}(a) = 0$, pour tout $k = 0, 1, 2......, n-1$.*

Proposition 2.12. *(Composition avec les dérivées fractionnaires) Si f est une fonction assez régulière sur l'intervalle $[a,b]$, pour tout $m-1 \leq p < m$, $n-1 \leq q < n$. On a*

$$
{}_a^R D_t^p \left({}_a^R D_t^q f(t)\right) = {}_a^R D_t^{p+q} f(t) - \sum_{k=1}^{n} \left[\left({}_a^R D_t^{q-k} f(t)\right)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-k}}{\Gamma(1-p-k)} \tag{2.64}
$$

Démonstration.

D'après (2.45),(2.56) et (2.74), on aura

$$
\begin{aligned}
{}_a^R D_t^p \left({}_a^R D_t^q f(t)\right) &= \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}_a^R D_t^{-(m-p)} \left({}_a^R D_t^q f(t)\right) \right\} \\
&= \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}_a^R D_t^{p+q-m} f(t) - \sum_{k=1}^{n} \left[\left({}_a^R D_t^{q-k} f(t)\right)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{m-p-k}}{\Gamma(1+m-p-k)} \right\} \\
&= {}_a^R D_t^{p+q} f(t) - \sum_{k=1}^{n} \left[\left({}_a^R D_t^{q-k} f(t)\right)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-k}}{\Gamma(1-p-k)} \qquad (2.65)
\end{aligned}
$$

□

Remarque 2.10. *En permutant p et q dans la relation (2.64), on aura*

$$
{}_a^R D_t^q \left({}_a^R D_t^p f(t)\right) = {}_a^R D_t^{p+q} f(t) - \sum_{k=1}^{m} \left[\left({}_a^R D_t^{p-k} f(t)\right)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-q-k}}{\Gamma(1-q-k)} \tag{2.66}
$$

par comparaison des relations (2.64) et (2.66), donc les opérateurs de dérivées fractionnaires ${}_a^R D_t^p$ et ${}_a^R D_t^q$ ne commutent que si $p = q$ où bien les conditions suivantes sont vérifiées simultanément

$$
\left[{}_a^R D_t^{p-k} f(t)\right]_{t=a} = 0, \quad \textit{pour tout} \quad k = 0, 1, 2, ..., m \tag{2.67}
$$

et

$$
\left[{}_a^R D_t^{q-k} f(t)\right]_{t=a} = 0, \quad \textit{pour tout} \quad k = 0, 1, 2, ..., n \tag{2.68}
$$

Remarque 2.11. *Si $m-1 \leq p < m$, pour tout $f \in C^m$, alors la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov d'ordre p et la dérivée fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville du même ordre p sont équivalentes. Car en faisant des intégrations par parties et des dérivations séquentielles on obtient :*

$$
\begin{aligned}
{}_a^R D_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(m-p)} \frac{d^m}{dt^m} \left(\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau) d\tau \right) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \\
&= {}_a^G D_t^p f(t)
\end{aligned}
$$

2.4 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a joué un rôle très important dans le développement du calcul fractionnaire, dans la modélisation mathématique l'utilisation des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville mène à des conditions initiales contenant les valeurs limites ($t = a,$ ou $t = b$) des dérivées fractionnaires, donc l'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec des dérivées de Caputo acceptent la même forme que les équations différentielles classiques (d'ordre entier), c'est à dire contiennent les valeurs limites des dérivées d'ordres entiers des fonctions inconnues en borne inférieure $t = a$.

Définition 2.6. *Si $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $n = [\alpha] + 1$, pour tout $f \in C^n(a, b)$, alors La dérivée fractionnaire à gauche et la dérivée fractionnaire à droite au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction f en $t \in (a, b)$, sont définies respectivement par :*

$$ {}_a^C\mathbf{D}_t^\alpha(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \tag{2.69}$$

et

$$ {}_t^C\mathbf{D}_b^\alpha(f)(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \tag{2.70}$$

En particulier, si $0 < \alpha < 1$, an aura

$$ {}_a^C\mathbf{D}_t^\alpha(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau. \tag{2.71}$$

et

$$ {}_t^C\mathbf{D}_b^\alpha(f)(t) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau. \tag{2.72}$$

Remarque 2.12. *On voit bien que si $\alpha = m \in \mathbb{N}$, donc*

$$ {}_a^C\mathbf{D}_t^0 f(t) = {}_t^C\mathbf{D}_b^0 f(t) = f(t)$$

$$ {}_a^C\mathbf{D}_t^m f(t) = f^{(m)}(t) \quad et \quad {}_b^C\mathbf{D}_t^m f(t) = (-1)^m f^{(m)}(t)$$

où $f^{(m)}(t)$ la dérivée classique de $f(t)$ d'ordre m.

Exemples 2.2.

• *La dérivée d'une constante au sens de Caputo est nulle. Car pour tout $\alpha > 0$ donc $n = [\alpha] + 1 \neq 0$, alors $D^n C = 0$ c'est-à dire*

$$ {}_a^C\mathbf{D}_t^\alpha C = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} 0 d\tau = 0 $$

- *Si* $f(t) = (t-a)^\beta$ *et* $n = [\alpha]+1$ *avec* $\beta > n-1$*, alors*

$$ f^n(t) \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-n} \tag{2.73} $$

donc

$$ {}_a^C\mathbf{D}_t^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n} d\tau \tag{2.74} $$

en effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$*, on obtient*

$$ \begin{aligned} {}_a^C\mathbf{D}_t^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1) B(n-\alpha, \beta-n-1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \end{aligned} $$

2.4.1 Relation entre les dérivées fractionnaires au sens de Caputo et celles de Riemann-Liouville

Proposition 2.13. *Si* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *et* f *est une fonction assez régulière sur l'intervalle* $[a,b]$*, alors La dérivée fractionnaire à gauche (resp- à droite)de Caputo est liée au La dérivée fractionnaire à gauche (resp- à droite) de Riemann-Liouville par :*

$$ {}_a^C\mathbf{D}_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}, \quad n = [\alpha]+1 \tag{2.75} $$

resp

$$ {}_t^C\mathbf{D}_b^\alpha f(t) = {}_t^R D_b^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (b-t)^{k-\alpha}, \quad n = [\alpha]+1 \tag{2.76} $$

En particulier, quand $0 < \alpha < 1$, *alors*

$$ {}_{a}^{C}\mathbf{D}_{t}^{\alpha} f(t) = {}_{a}^{R}D_{t}^{\alpha} f(t) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} $$

et

$$ {}_{t}^{C}\mathbf{D}_{b}^{\alpha} f(t) = {}_{t}^{R}D_{b}^{\alpha} f(t) - \frac{f(b)}{\Gamma(1-\alpha)}(b-t)^{-\alpha} $$

Démonstration. Le développement de Taylor de f en a est

$$ \begin{aligned} f(t) &= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(t-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + R_{n-1} \end{aligned} $$

où

$$ \begin{aligned} R_{n-1} &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau)d\tau \\ &= I_{a/t}^{n} f^{(n)}(t) \end{aligned} \tag{2.77} $$

En utilisant la linéarité de l'opérateur de dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville on a

$$ \begin{aligned} {}_{a}^{R}D_{t}^{\alpha} f(t) &= {}_{a}^{R}D_{t}^{\alpha}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + R_{n-1}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{a}^{R}D_{t}^{\alpha}(t-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + {}_{a}^{R}D_{t}^{\alpha} R_{n-1} \end{aligned} $$

D'après (2.51),(2.77), on trouve

$$ {}_{a}^{R}D_{t}^{\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + {}_{a}^{R}D_{t}^{\alpha} I_{a/t}^{n} f^{(n)}(t) $$

en utilisant (2.55), on aura

$$
\begin{aligned}
{}_a^R D_t^\alpha f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a) + I_{a/t}^{n-\alpha} f^{(n)}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a) + {}_a^C\mathbf{D}_t^\alpha (f)(t)
\end{aligned}
$$

Il en va de même pour la formule (2.76). □

Remarque 2.13. *les relations (2.75),(2.76) peuvent aussi s'écrire respectivement sous les formes :*

$$
{}_a^C\mathbf{D}_t^\alpha (f)(t) = {}_a^R D_t^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!} (t-a)^k \right], \quad n = [\alpha] + 1 \tag{2.78}
$$

et

$$
{}_t^C\mathbf{D}_b^\alpha (f)(t) = {}_t^R D_b^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(b)}{k!} (b-t)^k \right], \quad n = [\alpha] + 1 \tag{2.79}
$$

En particulier, quand $0 < \alpha < 1$, *alors*

$$
{}_a^C\mathbf{D}_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha \left(f(t) - f(a) \right)
$$

et

$$
{}_t^C\mathbf{D}_b^\alpha f(t) = {}_t^R D_b^\alpha \left(f(t) - f(b) \right)
$$

2.5 Propriétés des dérivées fractionnaires

2.5.1 Linéarité

Proposition 2.14. *Si* D^p *n'importe quel opérateur de dérivée fractionnaire d'ordre* $p > 0$, *pour tout* f *et* g *tels que* $D^p f(t)$ *est* $D^p g(t)$ *existent, on a*

$$
D^p \left(\lambda f(t) + \mu g(t) \right) = \lambda D^p f(t) + \mu D^p g(t) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \tag{2.80}
$$

Démonstration. Par exemple, si D^p l'opérateur de Grünwald-Letnikov, par définition on a

$$\begin{aligned}
{}_a^G D_t^p\left(\lambda f(t)+\mu g(t)\right) &= \lim_{h\longrightarrow 0} h^{-p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)}\left\{\lambda f(t-kh)+\mu g(t-kh)\right\}\\
&= \lambda\left\{\lim_{h\longrightarrow 0} h^{-p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)}f(t-kh)\right\}\\
&\quad +\mu\left\{\lim_{h\longrightarrow 0} h^{-p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)}g(t-kh)\right\}\\
&= \lambda {}_a^G D_t^p f(t)+\mu {}_a^G D_t^p g(t)
\end{aligned}$$

et pour les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre p (où $n-1\leq p<n$), d'après la définition (2.45) et linéarité de l'intégrale classique et la dérivée classique, on a

$$\begin{aligned}
{}_a^R D_t^p\left(\lambda f(t)+\mu g(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}\left(\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}\left(\lambda f(\tau)+\mu g(\tau)\right)d\tau\right)\\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}\left(\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}f(\tau)d\tau\right)\\
&\quad +\frac{\mu}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}\left(\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}g(\tau)d\tau\right)\\
&= \lambda {}_a^R D_t^p f(t)+\mu {}_a^R D_t^p g(t)
\end{aligned}$$

□

2.5.2 Règle de Leibniz

On sait que de la règle de Leibniz pour calculer la dérivée n-ième du produit de deux fonctions $f(t)$, $g(t)$, ce qui est donné par la relation suivante :

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(f(t)g(t)\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t). \tag{2.81}$$

En remplaçant l'entier n par un paramètre réel p, dans le membre à droite de (2.81), on obtient la formule :

$$D^p\left(f(t)g(t)\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}f^{(k)}(t)D^{(p-k)}g(t)-R_n^p,\quad n=[p]+1 \tag{2.82}$$

où

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n!}\Gamma(-p)\int_a^t (t-\tau)^{-p-1}g(\tau)d\tau \int_\tau^t f^{(n+1)}(\xi)(\tau-\xi)^n d\xi, \tag{2.83}$$

telle que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} R_n^p(t) = 0$$

Alors on a une généralisation de la règle de Leibniz d'ordres fractionnaires. Si f et g et tous ses dérivées sont continues sur [a,t], la règle de Leibniz pour la dérivation fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov ou au sens de Riemann-Liouville, s'écrit sous la forme :

$$D^p\left(f(t)g(t)\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k} f^{(k)}(t)D^{(p-k)}g(t) \tag{2.84}$$

Remarque 2.14. *D'après la formule (2.75), donc la règle de Leibniz dans le cas de la dérivée de Caputo, s'écrit sous la forme :*

$${}_a^C\mathbf{D}_t^p\left(f(t)g(t)\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k} f^{(k)}(t)\left({}_a^RD_t^{p-k}g(t)\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(f(t)g(t)\right)^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)}(t-a)^{k-p} \tag{2.85}$$

2.5.3 Intégration par parties

Ce paragraphe est Lié à la formule d'intégration par parties pour les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et celles de Caputo.

Théorème 2.1. *Soient $0<\alpha<1$ et f, g deux fonctions assez régulières sur $[a,b]$, pour tout $t\in(a,b)$. On a*

$$\int_a^t \left[{}_a^RD_\tau^\alpha f(\tau)\right]g(\tau)d\tau = \int_a^t f(\tau)\left[{}_\tau^RD_t^\alpha g(\tau)\right]d\tau \tag{2.86}$$

$$\int_t^b \left[{}_\tau^RD_b^\alpha f(\tau)\right]g(\tau)d\tau = \int_t^b f(\tau)\left[{}_t^RD_\tau^\alpha g(\tau)\right]d\tau \tag{2.87}$$

En particulier :

$$\int_a^b \left[{}_a^RD_\tau^\alpha f(\tau)\right]g(\tau)d\tau = \int_a^b f(\tau)\left[{}_\tau^RD_b^\alpha g(\tau)\right]d\tau \tag{2.88}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\int_a^t \left[{}_a^R D_\tau^\alpha f(\tau)\right] g(\tau)d\tau &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t \frac{d}{d\tau}\left(\int_a^\tau (\tau-s)^{-\alpha} f(s)ds\right) g(\tau)d\tau \\
&= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t \left(\int_a^\tau (\tau-s)^{-\alpha} f(s)ds\right) g'(\tau)d\tau \\
&\quad +\left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} g(\tau)\int_a^\tau (\tau-s)^{-\alpha} f(s)ds\right]_{\tau=a}^{\tau=t} \\
&= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t \left(\int_s^t (\tau-s)^{-\alpha} g'(\tau)d\tau\right) f(s)ds \\
&\quad +g(t)\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s)ds \\
&= \int_a^t f(s)\left[{}_s^C D_t^\alpha g(s)\right] ds \\
&\quad +g(t)\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s)ds \\
&= \int_a^t f(s)\left[{}_s^R D_t^\alpha g(s) - g(t)\frac{(t-s)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right] ds \\
&\quad +g(t)\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s)ds \\
&= \int_a^t f(s)\left[{}_s^R D_t^\alpha g(s)\right] ds \\
&= \int_a^t f(\tau)\left[{}_\tau^R D_t^\alpha g(\tau)\right] d\tau
\end{aligned}$$

La formule (2.87) se démontre de la même façon. □

Remarque 2.15. *Dans le cas de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, on voit bien que, aucun terme de bord n'apparait dans cette formule, mais dans le cas de la dérivée de Caputo on a*

Théorème 2.2. *Soient* $0 < \alpha < 1$ *et* f, g *deux fonctions assez régulières sur* $[a, b]$, *pour tout*

$t \in (a,b)$. On a

$$\int_a^t \left[{}_a^C D_\tau^\alpha f(\tau)\right] g(\tau) d\tau = \int_a^t f(\tau) \left[{}_\tau^C D_t^\alpha g(\tau)\right] d\tau + g(t) I_{a/t}^{1-\alpha} f(t) - f(a) I_{a/t}^{1-\alpha} g(a) \tag{2.89}$$

$$\int_t^b \left[{}_\tau^C D_b^\alpha f(\tau)\right] g(\tau) d\tau = \int_t^b f(\tau) \left[{}_t^C D_\tau^\alpha g(\tau)\right] d\tau + g(t) I_{t/b}^{1-\alpha} f(t) - f(b) I_{t/b}^{1-\alpha} g(b) \tag{2.90}$$

En particulier :

$$\int_a^b \left[{}_a^C D_\tau^\alpha f(\tau)\right] g(\tau) d\tau = \int_a^b f(\tau) \left[{}_\tau^C D_b^\alpha g(\tau)\right] d\tau + g(b) I_{a/b}^{1-\alpha} f(b) - f(a) I_{a/b}^{1-\alpha} g(a) \tag{2.91}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\int_a^t \left[{}_a^C D_\tau^\alpha f(\tau)\right] g(\tau) d\tau &= \int_a^t \left[{}_a^R D_\tau^\alpha f(\tau)\right] g(\tau) d\tau - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (\tau - a)^{-\alpha} g(\tau) d\tau \\
&= \int_a^t f(\tau) \left[{}_\tau^R D_t^\alpha g(\tau)\right] d\tau - f(a) I_{a/t}^{1-\alpha} g(a) \\
&= \int_a^t f(\tau) \left[{}_\tau^C D_t^\alpha g(\tau)\right] d\tau + \frac{g(t)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau \\
&\quad - f(a) I_{a/t}^{1-\alpha} g(a) \\
&= \int_a^t f(\tau) \left[{}_\tau^C D_t^\alpha g(\tau)\right] d\tau + g(t) I_{a/t}^{1-\alpha} f(t) \\
&\quad - f(a) I_{a/t}^{1-\alpha} g(a)
\end{aligned}$$

Il en va de même pour la formule (2.90). □

2.6 Intégrales et dérivées fractionnaires partielles

Dans cette section, nous notons par a_i, b_i et α_i des réels pour tout $i = 1, 2, ..., n$ et $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$ tel que $t \in \Omega_n$, où $\Omega_n = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times .... \times (a_n, b_n)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

Définition 2.7. *Si $t \in \Omega_n$, l'intégrale partielle à gauche et l'intégrale partielle à droite au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha_i > 0$ de la fonction $f \in L^1(\Omega_n)$ sont définies respectivement par :*

$$I^{\alpha_i}_{a_i/t}[f](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_{a_i}^{t_i} (t_i - \sigma)^{\alpha_i - 1} f(t_1, ..., t_{i-1}, \sigma, t_{i+1}, ..., t_n) d\sigma, \quad t_i > a_i, \tag{2.92}$$

et

$$I^{\alpha_i}_{t_i/b_i}[f](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_{t_i}^{b_i} (\sigma - t_i)^{\alpha_i - 1} f(t_1, ..., t_{i-1}, \sigma, t_{i+1}, ..., t_n) d\sigma, \quad t_i < b_i. \tag{2.93}$$

Définition 2.8. *La dérivée partielle à gauche et la dérivée partielle à droite au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha_i > 0$ de la fonction $f \in L^1(\Omega_n)$ sont définies respectivement par :*

$$D^{\alpha_i}_{a_i/t_i}[f](t) = \frac{\partial^{n_i}}{\partial t_i^{n_i}} I^{n_i - \alpha_i}_{a_i/t_i}[f](t), \quad n_i = [\alpha_i] + 1, \tag{2.94}$$

et

$$D^{\alpha_i}_{t_i/b_i}[f](t) = (-1)^{n_i} \frac{\partial^{n_i}}{\partial t_i^{n_i}} I^{n_i - \alpha_i}_{t_i/b_i}[f](t), \quad n_i = [\alpha_i] + 1. \tag{2.95}$$

Définition 2.9. *La dérivée partielle à gauche et la dérivée partielle à droite au sens de Caputo d'ordre $\alpha_i > 0$ de la fonction $f \in L^1(\omega_n)$ sont définies respectivement par :*

$$\mathbf{D}^{\alpha_i}_{a_i/t} f(t) = I^{n_i - \alpha_i}_{a_i/t_i} \left[\frac{\partial^{n_i}}{\partial t_i^{n_i}} f \right](t), \quad n_i = [\alpha_i] + 1, \tag{2.96}$$

et

$$\mathbf{D}^{\alpha_i}_{t_i/b_i} f(t) = (-1)^{n_i} I^{n_i - \alpha_i}_{t_i/b_i} \left[\frac{\partial^{n_i}}{\partial t_i^{n_i}} f \right](t), \quad n_i = [\alpha_i] + 1. \tag{2.97}$$

pour plus de détails sur les dérivées fractionnaires voir par exemple [37, 40]

Chapitre 3

Systèmes d'inégalités d'évolution non linéaire avec dérivée fractionnaire temporelle sur le groupe d'Heisenberg

Résumé

Dans ce chapitre, nous proposons certains résultats de non-existence de solution non triviale du problème :

$$(FS_\alpha^m) : \begin{cases} \mathbf{D}_{0/t}^\alpha u_i & - & \Delta_{\mathbb{H}}(a_i u_i) \geq \mid \eta \mid^{\gamma_{i+1}} \mid u_{i+1} \mid^{p_{i+1}}, \quad (\eta, t) \in \mathbb{H}^N \times]0, +\infty[, \quad 1 \leq i \leq m \\ u_{m+1} & = & u_1 \end{cases}$$

où $\mathbf{D}_{0/t}^\alpha$ est la dérivée temporelle fractionnaire d'ordre $\alpha \in (1,2)$ au sens de Caputo, $\Delta_{\mathbb{H}}$ le Laplacien dans $\mathbb{H}^N$ le groupe d'Heisenberg a dimension $(2N+1)$, $\mid \eta \mid$ est la distance entre η et l'origine de $\mathbb{H}^N$, $m \geq 2$, $p_{m+1} = p_1$, $\gamma_{m+1} = \gamma_1$, et $a_i \in L^\infty(\mathbb{H}^N \times]0, +\infty[), 1 \leq i \leq m$. Ces résultats de non-existance liés à $Q \equiv 2N + 2$ inférieure aux exposants critiques qui dépendent α, p_i et γ_i, $1 \leq i \leq m$. Pour $\alpha = 2$ nous retrouvons les résultats obtenus par El Hamidi-Kirane [24] et El Hamidi- Obeid [25] pour des systèmes hyperboliques. Si m $=$ 1, nous étudions le cas scalaire :

$$(FI_\alpha) : \mathbf{D}_{0/t}^\alpha u - \Delta_{\mathbb{H}}(au) \geq \mid \eta \mid^\gamma \mid u \mid^p$$

où $p > 1$, γ sont des paramètres réels. Dans le dernier cas pour $\alpha = 2$ nous retrouvons les résultats obtenus par Pohozaev-Véron [38] pour les inégalités hyperboliques.

3.1 Introduction

Les résultats de non-existence des solutions d'inégalités hyperboliques semi-linéaires du type :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_{\mathbb{H}}(au) \geq |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}|u|^p \tag{3.1}$$

Ont été étudiés par Pohozaev et Véron [38]. Et ils ont prouvé qu'aucune solution faible non triviale u si

$$\int_{\mathbb{R}^{2N+1}} u_1(\eta)d\eta \geq 0, \quad \gamma > -2 \quad \text{et} \quad 1 < p \leq \frac{Q+1+\gamma}{Q-1} \tag{3.2}$$

Dans [24], El Hamidi et Kirane ont présenté des résultats similaires pour un système de m inégalités hyperboliques semi-linéaires de la forme :

$$(HS^m)\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} & - & \Delta_{\mathbb{H}}(a_i u_i) \geq |\ \eta\ |^{\gamma_{i+1}}|\ u_{i+1}\ |^{p_{i+1}} \\ (\eta,t) & \in & \mathbb{H}^N \times]0,+\infty[, \quad 1 \leq i \leq m \\ u_{m+1} & = & u_1 \end{array}\right. \tag{3.3}$$

Ils ont donné aussi l'exposant de type Fujita (voir [21, 33]), où ils ont montré que le système (HS^m) n'admet aucune solution définie dans $\mathbb{H}^N$ pour tout $Q \leq 1 + max\,(X_1, X_2, ..., X_m)$, où $(X_1, X_2, ..., X_m)^T$ la solution du système linéaire (3.28).
Leurs résultats ont été généralisés, par El Hamidi et Obeid [25], pour un système d'inégalités semi-linéaires avec une dérivée temporelle d'ordre élevé du type :

$$(S_k^m)\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} & - & \Delta_{\mathbb{H}}(a_i u_i) \geq |\ \eta\ |^{\gamma_{i+1}}|\ u_{i+1}\ |^{p_{i+1}} \\ (\eta,t) & \in & \mathbb{H}^N \times]0,+\infty[, \quad 1 \leq i \leq m \\ u_{m+1} & = & u_1 \qquad k = 1,2,3,...... \end{array}\right. \tag{3.4}$$

Où ils ont montré que le système (S_k^m) n'admet aucune solution définie dans $\mathbb{H}^N$ pour tout $Q \leq 2\left(1 - \frac{1}{k}\right) + max\,(X_1, X_2, ..., X_m)$.
Dans ce chapitre, nous généralisons ces résultats (pour (HS^m)) à système d'évolution avec dérivée fractionnaire temporelle de la forme

$$(FS_\alpha^m):\left\{\begin{array}{lcl} \mathbf{D}_{0/t}^{\alpha} u_i & - & \Delta_{\mathbb{H}}(a_i u_i) \geq |\ \eta\ |^{\gamma_{i+1}}|\ u_{i+1}\ |^{p_{i+1}} \\ (\eta,t) & \in & \mathbb{H}^N \times]0,+\infty[, \quad 1 \leq i \leq m \\ u_{m+1} & = & u_1 \qquad \alpha \in (1,2) \end{array}\right. \tag{3.5}$$

Nous montrons sous certaines conditions initiales le système (FS_α^m) n'admet aucune solution définie dans $\mathbb{H}^N$ pour tout $Q < Q_\alpha^\bullet = 2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + max\,(X_1, X_2, ..., X_m)$.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante
• La section 3.2 est consacrée à un rappel de quelques définitions de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et le lien entre les deux définitions, nous rappelons aussi le groupe de Heisenberg et le Laplacien sur le groupe de Heisenberg.
• Dans la section 3.3 nous étudions la non-existence de solution du problème de deux inégalités.
• La section 3.4 est consacrée à l'étude de la non-existence de solution du problème (FS_α^m), où $m > 2$.
• Dans la section 3.5 nous établissons un résultat sur la non-existence de solution pour l'inégalité (FS_α^1).

3.2 Notations et préliminaires

D'abord nous rappelons quelques outils de base concernant la dérivée fractionnaire en temps $\mathbf{D}_{0/t}^\alpha$, le groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}^N$ et l'opérateur $\Delta_{\mathbb{H}}$ laplacien d'Heisenberg, lesquels dans la suite.

La dérivée à gauche et la dérivée à droite au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in (1,2)$ de la fonction $\psi \in L^1(0,T)$ sont définies respectivement par :

$$\left(D_{0/t}^\alpha \psi\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \int_0^t \frac{\psi(\sigma)}{(\sigma-t)^{\alpha-1}} d\sigma$$

$$\left(D_{t/T}^\alpha \psi\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \int_t^T \frac{\psi(\sigma)}{(t-\sigma)^{\alpha-1}} d\sigma$$

Si $\psi'' \in L^1(0,T)$, la dérivée de Caputo d'ordre $\alpha \in (1,2)$ est définie par :

$$\left(\mathbf{D}_{0/t}^\alpha \psi\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{\psi''(\sigma)}{(\sigma-t)^{\alpha-1}} d\sigma$$

La dérivée de Caputo est liée à la dérivée de Riemann-Liouville par :

$$\mathbf{D}_{0/t}^\alpha \psi(t) = D_{0/t}^\alpha \left(\psi(t) - \psi(0) - t\psi'(0)\right)$$

Pour établir les formulations faibles, nous pouvons utiliser les relations (voir (2.30) et (2.31) p. 37 dans [40])

$$D_{o/t}^{1+\alpha} f = D D_{o/t}^\alpha f \quad \alpha \in (0,1) \tag{3.6}$$

$$D_{t/T}^{1+\alpha} f = -D D_{t/T}^\alpha f \quad \alpha \in (0,1) \tag{3.7}$$

Rappelons également la formule d'intégration par parties

Proposition 3.1. *(voir [40] p 46) Si $f, g \in C[a,b]$, où $D^{\alpha}_{0/t}\psi, D^{\alpha}_{t/T}\varphi$ existent pour tout $t \in (0,T)$, alors :*

$$\int_0^T f(t)\left(D^{\alpha}_{0/t}g\right)(t)dt = \int_0^T \left(D^{\alpha}_{t/T}f\right)(t)g(t)dt \qquad \alpha \in (0,1) \tag{3.8}$$

Nous avons aussi la formule suivante (voir le Lemme 2.2, p,35 dans [40]), pour tout $\delta \in (0,1)$:

$$D^{\delta}_{t/T}\psi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\left(\frac{\psi(T)}{(T-t)^{\delta}} - \int_t^T \frac{\psi'(\sigma)}{(\sigma-t)^{\delta}}d\sigma\right) \tag{3.9}$$

Le groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}^N$ de dimension $(2N+1)$ est l'espace

$$\mathbb{R}^{2N+1} = \left\{\eta = (x,y,\tau) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}\right\}$$

muni de loi $''\circ''$ est définie par :

$$\eta \circ \widetilde{\eta} = \left(x + \widetilde{x}, y + \widetilde{y}, \tau + \widetilde{\tau} + 2\sum_{i=1}^{N}(\widetilde{x}_i y_i - x_i \widetilde{y}_i)\right) \tag{3.10}$$

où

$$\eta = (x,y,\tau) = (x_1, x_2, ..., x_N, y_1, y_2, ..., y_N, \tau)$$
$$\widetilde{\eta} = (\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{\tau}) = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ..., \widetilde{x}_N, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, ..., \widetilde{y}_N, \widetilde{\tau})$$

Cette loi de multiplication donne à $\mathbb{H}^N$ une structure de groupe de Lie.
Le laplacien sous-elliptique sur $\mathbb{H}^N$ défini par :

$$\Delta_{\mathbb{H}} = \sum_{i=1}^{N}\left(X_i^2 + Y_i^2\right) \tag{3.11}$$

où

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + 2y_i\frac{\partial}{\partial \tau} \quad \text{et} \quad Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} - 2x_i\frac{\partial}{\partial \tau}$$

avec un calcul simple on peut écrire :

$$\Delta_{\mathbb{H}} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + 4y_i\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial \tau} - 4x_i\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial \tau} + 4(x_i^2 + y_i^2)\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)$$

L'opérateur $\Delta_{\mathbb{H}}$ est un opérateur elliptique dégénéré, il est stable par rapport à la multiplication à gauche dans $\mathbb{H}^N$ c'est à dire :

$$\Delta_{\mathbb{H}}\left(u(\eta \circ \widetilde{\eta})\right) = \left(\Delta_{\mathbb{H}} u\right)(\eta \circ \widetilde{\eta}) \qquad \forall (\eta, \widetilde{\eta}) \in \mathbb{H}^N \times \mathbb{H}^N$$

La distance entre un point η et l'origine dans $\mathbb{H}^N$ définie par :

$$|\eta|_{\mathbb{H}} = \left(\tau^2 + \sum_{i=1}^{N} (x_i^2 + y_i^2)^2\right)^{1/4}$$

L'application $\eta \to |\eta|_{\mathbb{H}}$ est homogène de degré un par rapport au groupe naturel des dilatations

$$\delta_\lambda(\eta) = \left(\lambda x, \lambda y, \lambda^2 t\right) \tag{3.12}$$

On remarque aussi que l'opérateur $\Delta_{\mathbb{H}}$ est homogène de degré 2 par rapport à la distance δ_λ définie dans (3.12), c'est à dire :

$$\Delta_{\mathbb{H}} = \lambda^2 \delta_\lambda\left(\Delta_{\mathbb{H}}\right)$$

Il est facile de voir que l'action de $\Delta_{\mathbb{H}}$ sur les fonctions dépendant seulement de $\rho = |\eta|_{\mathbb{H}}$:

$$\Delta_{\mathbb{H}} u(\rho) = a(\eta)\left(\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{Q-1}{\rho}\frac{du}{d\rho}\right)$$

où

$$a(\rho) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i^2 + y_i^2)}{\rho^2} \quad \text{et} \quad Q = 2N + 2$$

Ce dernier nombre Q est appelé la dimension homogène de $\mathbb{H}^N$.

Nous identifions les points de $\mathbb{H}^N$ avec ceux de $\mathbb{R}^{2N+1}$, Nous rappelons aussi que la mesure naturelle de Hâar dans $\mathbb{H}^N$ est identique à celle de Lebesgue $d\eta = dxdyd\tau$ dans $\mathbb{R}^{2N+1}$.

3.3 Système de deux inégalités

D'abord considérons le système du type :

$$(FS_\alpha^2) : \left\{ \begin{array}{lcll} \mathbf{D}_{0/t}^{\alpha} u - \Delta_{\mathbb{H}}(a_1 u) & \geq & |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_1} |\, v \,|^{p_1} & \text{dans} \quad \mathbb{H}^N \times \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{D}_{0/t}^{\alpha} v - \Delta_{\mathbb{H}}(a_2 v) & \geq & |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_2} |\, u \,|^{p_2} & \text{dans} \quad \mathbb{H}^N \times \mathbb{R}^+ \end{array} \right. \tag{3.13}$$

lorsque $\mathbf{D}^{\alpha}_{0/t}$ désigne la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \in (1,2)$, au sens de Caputo. Les fonctions a_1 et a_2 introduites en (3.13) sont des fonctions mesurables et bornées sur $\mathbb{H}^N \times \mathbb{R}^+$, ainsi que les exposants $p_1, p_2 > 1$ et γ_1, γ_2 sont des nombres réels, dénotant aussi par $D^{\alpha}_{0/t}$ la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \in (1,2)$ au sens de Riemann-Liouville. Nous avons ce qui suit

Définition 3.1. *Une solution faible locale du système (3.13) dans $Q_T = \mathbb{R}^{2N+1} \times (0,T)$ avec les données initiales positives $u_0, v_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2N+1})$, est un couple de fonctions localement intégrables (u,v) tels que $(u,v) \in L^{p_2}(Q_T, |\eta|^{\gamma_2}_{\mathbb{H}} d\eta dt) \times L^{p_1}(Q_T, |\eta|^{\gamma_2}_{\mathbb{H}} d\eta dt)$ satisfaisant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{Q_T} \left(-uD^{\alpha}_{t/T}\varphi + a_1 u \Delta_{\mathbb{H}}\varphi + |\eta|^{\gamma_1}_{\mathbb{H}} |v|^{p_1}\varphi + u_1(\eta) D^{\alpha-1}_{t/T}\varphi \right) d\eta dt + \int_{\mathbb{R}^{2N+1}} u_0(\eta) D^{\alpha-1}_{t/T}\varphi(0) d\eta \leq 0. \\ \displaystyle\int_{Q_T} \left(-vD^{\alpha}_{t/T}\varphi + a_2 v \Delta_{\mathbb{H}}\varphi + |\eta|^{\gamma_2}_{\mathbb{H}} |u|^{p_2}\varphi + v_1(\eta) D^{\alpha-1}_{t/T}\varphi \right) d\eta dt + \int_{\mathbb{R}^{2N+1}} v_0(\eta) D^{\alpha-1}_{t/T}\varphi(0) d\eta \leq 0. \end{array} \right. \tag{3.14}$$

pour toute fonction test positif $\varphi \in C^2_c(Q_T)$, telle que $\varphi(.,T) = D^{\alpha-1}_{t/T}\varphi(.,T) = 0$.

Remarque 3.1. *nous supposons que les intégrales dans (3.14) sont convergentes. Si $T = +\infty$ la solution est dite globale.*

Théorème 3.1. *Supposons que*

$$Q < Q^{\bullet}_{\alpha} = 2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{p_1 p_2 - 1} max\left((\gamma_1 + 2) + p_1(\gamma_2 + 2), p_2(\gamma_1 + 2) + (\gamma_2 + 2) \right)$$

alors il n'y a pas de solution faible non triviale (u,v) du système (FS^2_{α}).

Démonstration. On prouve par l'absurde. Supposons que (u,v) est une solution faible non-triviale qui existe globalement en temps. Donc (u,v) existe dans $(0,T^*)$ pour T^* arbitraire. soient T et R deux réels positifs tels que $0 < TR < T^*$.
Comme les conditions initiales u_0, v_0 sont positives, et $D^{\alpha-1}_{t/T}\varphi \geq 0$ (d'après (3.9)) la formulation variationnelle (3.14) entraîne

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{Q_{TR}} |\eta|^{\gamma_1}_{\mathbb{H}} |v|^{p_1}\varphi d\eta dt \leq \int_{Q_{TR}} uD^{\alpha}_{t/TR}\varphi d\eta dt - \int_{Q_{TR}} a_1 u \Delta_{\mathbb{H}}\varphi d\eta dt. \\ \displaystyle\int_{Q_{TR}} |\eta|^{\gamma_2}_{\mathbb{H}} |u|^{p_2}\varphi d\eta dt \leq \int_{Q_{TR}} vD^{\alpha}_{t/TR}\varphi d\eta dt - \int_{Q_{TR}} a_2 v \Delta_{\mathbb{H}}\varphi d\eta dt. \end{array} \right.$$

d'après l'inégalité de Hôlder nous avons

$$\left\{\begin{aligned} \int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_1}|v|^{p_1}\varphi d\eta dt \leq \left(\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_2}|u|^{p_2}\varphi d\eta dt\right)^{\frac{1}{p_2}} \left(\int_{Q_{TR}} \left|D_{t/TR}^{\alpha}\varphi\right|^{p_2'} (|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_2}\varphi)^{-\frac{p_2'}{p_2}} d\eta dt\right)^{\frac{1}{p_2'}} \\ + \|a_1\|_{\infty} \left(\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_2}|u|^{p_2}\varphi d\eta dt\right)^{\frac{1}{p_2}} \left(\int_{Q_{TR}} |\Delta_{\mathbb{H}}\varphi|^{p_2'} (|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_2}\varphi)^{-\frac{p_2'}{p_2}} d\eta dt\right)^{\frac{1}{p_2'}} \end{aligned}\right.$$

et

$$\left\{\begin{aligned} \int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_2}|u|^{p_2}\varphi d\eta dt \leq \left(\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_1}|v|^{p_1}\varphi d\eta dt\right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_{Q_{TR}} \left|D_{t/TR}^{\alpha}\varphi\right|^{p_1'} (|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_1}\varphi)^{-\frac{p_1'}{p_1}} d\eta dt\right)^{\frac{1}{p_1'}} \\ + \|a_2\|_{\infty} \left(\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_1}|v|^{p_1}\varphi d\eta dt\right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_{Q_{TR}} |\Delta_{\mathbb{H}}\varphi|^{p_1'} (|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_1}\varphi)^{-\frac{p_1'}{p_1}} d\eta dt\right)^{\frac{1}{p_1'}} \end{aligned}\right.$$

Dans la suite on désignera par C une constante qui peut varier d'une ligne à une autre mais ne dépend pas des termes qui prendront place dans n'importe quel passage à la limite. Et donc nous avons

$$\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_1}|v|^{p_1}\varphi d\eta dt \leq C \left(\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_2}|u|^{p_2}\varphi d\eta dt\right)^{\frac{1}{p_2}} \mathcal{A} \tag{3.15}$$

et

$$\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_2}|u|^{p_2}\varphi d\eta dt \leq C \left(\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_1}|v|^{p_1}\varphi d\eta dt\right)^{\frac{1}{p_1}} \mathcal{B} \tag{3.16}$$

lorsque

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left(\int_{Q_{TR}} \left|D_{t/TR}^{\alpha}\varphi\right|^{p_2'} (|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_2}\varphi)^{-\frac{p_2'}{p_2}} d\eta dt\right)^{\frac{1}{p_2'}} + \left(\int_{Q_{TR}} |\Delta_{\mathbb{H}}\varphi|^{p_2'} (|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_2}\varphi)^{-\frac{p_2'}{p_2}} d\eta dt\right)^{\frac{1}{p_2'}} \\ \mathcal{B} &= \left(\int_{Q_{TR}} \left|D_{t/TR}^{\alpha}\varphi\right|^{p_1'} (|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_1}\varphi)^{-\frac{p_1'}{p_1}} d\eta dt\right)^{\frac{1}{p_1'}} + \left(\int_{Q_{TR}} |\Delta_{\mathbb{H}}\varphi|^{p_1'} (|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_1}\varphi)^{-\frac{p_1'}{p_1}} d\eta dt\right)^{\frac{1}{p_1'}} \end{aligned}$$

d'après (3.15),(3.16) on a

$$\left(\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_1}|v|^{p_1}\varphi d\eta dt\right)^{1-\frac{1}{p_1p_2}} \leq C\mathcal{B}^{\frac{1}{p_2}}\mathcal{A}. \tag{3.17}$$

$$\left(\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_2}|u|^{p_2}\varphi d\eta dt\right)^{1-\frac{1}{p_1p_2}} \leq C\mathcal{A}^{\frac{1}{p_1}}\mathcal{B}. \tag{3.18}$$

Maintenant, nous prenons

$$\varphi(\eta,t)=\varphi(x,y,\tau,t)=\Phi\left(\frac{\tau^{2\theta}+|x|^{4\theta}+|y|^{4\theta}+t^4}{R^4}\right) \tag{3.19}$$

où $\Phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$, est une fonction positive régulière et décroissante vérifiant $0\leq\Phi\leq 1$ et

$$\Phi(r)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad r\geq 2 \\ 1 & \text{si} \quad 0\leq r\leq 1\end{cases} \tag{3.20}$$

avec $\theta>1$, qui sera déterminé plus loin.
Alors

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbb{H}}\varphi(\eta,t)=\dfrac{4\theta\Phi'(\rho)}{R^4}\left[(N+2(2\theta-1))\left(|x|^{2(2\theta-1)}+|y|^{2(2\theta-1)}\right)+2(2\theta-1)\tau^{2(\theta-1)}\left(|x|^2+|y|^2\right)\right] \\ +\dfrac{16\theta^2\Phi''(\rho)}{R^8}\left[|x|^{2(4\theta-1)}+|y|^{2(4\theta-1)}+2\tau^{2\theta-1}\langle x,y\rangle\left(|x|^{2(2\theta-1)}-|y|^{2(2\theta-1)}\right)+\tau^{2(2\theta-1)}\left(|x|^2+|y|^2\right)\right]\end{cases}$$

lorsque

$$\rho=\frac{\tau^{2\theta}+|x|^{4\theta}+|y|^{4\theta}+t^4}{R^4}$$

pour estimer $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ (dans (3.17),(3.18)) nous appliquons le changement des variables : $(\eta,t)=(x,y,\tau,t)\longmapsto(\widetilde{\eta},\widetilde{t})=(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{\tau},\widetilde{t})$ lequel

$$\widetilde{x}=R^{-\frac{1}{\theta}}x,\quad \widetilde{y}=R^{-\frac{1}{\theta}}y,\quad \widetilde{\tau}=R^{-\frac{2}{\theta}}\tau,\quad \widetilde{t}=R^{-1}t. \tag{3.21}$$

On Choisissons

$$\Omega=\left\{(\widetilde{\eta},\widetilde{t})=(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{\tau},\widetilde{t})\in\mathbb{H}^N\times\mathbb{R}^+ : \widetilde{\tau}^{2\theta}+|\widetilde{x}|^{4\theta}+|\widetilde{y}|^{4\theta}+\widetilde{t}^4<2\right\}$$

donc

$$\left|\Delta_{\mathbb{H}}\varphi(\widetilde{\eta},\widetilde{t})\right|\leq\frac{C}{R^{\frac{2}{\theta}}}\quad\forall(\widetilde{\eta},\widetilde{t})\in\Omega \tag{3.22}$$

Comme $d\eta dt = R^{\frac{2N+2}{\theta}+1} d\widetilde{\eta}d\widetilde{t}$ et $|\eta|_{\mathbb{H}} = R^{\frac{1}{\theta}}|\widetilde{\eta}|_{\mathbb{H}}$, nous établissons les estimations suivantes

$$\int_{Q_{TR}} \left|D^{\alpha}_{t/TR}\varphi\right|^{p_2'} (|\eta|^{\gamma_2}_{\mathbb{H}}\varphi)^{-\frac{p_2'}{p_2}}\, d\eta dt = R^{-\alpha p_2' - \frac{\gamma_2 p_2'}{\theta p_2} + \frac{2N+2}{\theta}+1} \int_{\Omega} \left|D^{\alpha}_{\widetilde{t}/T}\Phi\circ\widetilde{\rho}\right|^{p_2'} (|\widetilde{\eta}|^{\gamma_2}_{\mathbb{H}}\Phi\circ\widetilde{\rho})^{-\frac{p_2'}{p_2}}\, d\widetilde{\eta}d\widetilde{t} \tag{3.23}$$

et

$$\int_{Q_{TR}} |\Delta_{\mathbb{H}}\varphi|^{p_2'} (|\eta|^{\gamma_2}_{\mathbb{H}}\varphi)^{-\frac{p_2'}{p_2}}\, d\eta dt \leq CR^{-\frac{2}{\theta}p_2' - \frac{\gamma_2 p_2'}{\theta p_2} + \frac{2N+2}{\theta}+1} \int_{\Omega} (|\widetilde{\eta}|^{\gamma_2}_{\mathbb{H}}\Phi\circ\widetilde{\rho})^{-\frac{p_2'}{p_2}}\, d\widetilde{\eta}d\widetilde{t} \tag{3.24}$$

nous choisissons θ que le membre droit de (3.23) et (3.24) sont du même ordre dans R. Pour cela, prenons $\theta = \frac{2}{\alpha}$, donc

$$\mathcal{A} \leq CR^{-\alpha - \frac{\alpha\gamma_2}{2p_2} + \frac{\alpha}{2}\frac{2N+2}{p_2'} + \frac{1}{p_2'}}$$

De la même façon, nous pouvons également obtenir

$$\mathcal{B} \leq CR^{-\alpha - \frac{\alpha\gamma_1}{2p_1} + \frac{\alpha}{2}\frac{2N+2}{p_1'} + \frac{1}{p_1'}}$$

d'après (3.17) et (3.18) il en résulte

$$\begin{aligned}
\left(\int_{Q_{TR}} |\eta|^{\gamma_1}_{\mathbb{H}} |v|^{p_1}\varphi d\eta dt\right)^{1-\frac{1}{p_1p_2}} &\leq CR^{-\alpha - \frac{\alpha\gamma_2}{2p_2} + \frac{\alpha}{2}\frac{2N+2}{p_2'} + \frac{1}{p_2'} + \frac{1}{p_2}\left[-\alpha - \frac{\alpha\gamma_1}{2p_1} + \frac{\alpha}{2}\frac{2N+2}{p_1'} + \frac{1}{p_1'}\right]} \\
\left(\int_{Q_{TR}} |\eta|^{\gamma_2}_{\mathbb{H}} |u|^{p_2}\varphi d\eta dt\right)^{1-\frac{1}{p_1p_2}} &\leq CR^{-\alpha - \frac{\alpha\gamma_1}{2p_1} + \frac{\alpha}{2}\frac{2N+2}{p_1'} + \frac{1}{p_1'} + \frac{1}{p_1}\left[-\alpha - \frac{\alpha\gamma_2}{2p_2} + \frac{\alpha}{2}\frac{2N+2}{p_2'} + \frac{1}{p_2'}\right]}
\end{aligned}$$

Donc, il suffit de supposer

$$\left\{\begin{array}{lcl}
-\alpha - \frac{\alpha\gamma_2}{2p_2} + \frac{\alpha}{2}\frac{2N+2}{p_2'} + \frac{1}{p_2'} + \frac{1}{p_2}\left[-\alpha - \frac{\alpha\gamma_1}{2p_1} + \frac{\alpha}{2}\frac{2N+2}{p_1'} + \frac{1}{p_1'}\right] & < & 0 \\
\text{ou bien} & & \\
-\alpha - \frac{\alpha\gamma_1}{2p_1} + \frac{\alpha}{2}\frac{2N+2}{p_1'} + \frac{1}{p_1'} + \frac{1}{p_1}\left[-\alpha - \frac{\alpha\gamma_2}{2p_2} + \frac{\alpha}{2}\frac{2N+2}{p_2'} + \frac{1}{p_2'}\right] & < & 0
\end{array}\right. \tag{3.25}$$

Cette condition est équivalente à

$$Q < Q_\alpha^\bullet = 2\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{p_1p_2-1} max\left((\gamma_1+2)+p_1(\gamma_2+2), p_2(\gamma_1+2)+(\gamma_2+2)\right)$$

Finalement quand $R \to \infty$ et d'après des estimations (3.15) et (3.18) ou bien (3.16) et (3.17), ensuite en appliquant le lemme de Fatou on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^{2N+1}} \int_{\mathbb{R}^+} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_2} |u|^{p_2} d\eta dt \leq 0. \tag{3.26}$$

$$\int_{\mathbb{R}^{2N+1}} \int_{\mathbb{R}^+} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_1} |v|^{p_1} d\eta dt \leq 0. \tag{3.27}$$

On conclut alors que $u \equiv 0$ et $v \equiv 0$ ce qui est une contradiction. □

Corollaire 3.1. *Supposons que*

$$Q < Q_\alpha^\bullet = 2\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) + max\left(X_1, X_2\right)$$

où le vecteur $(X_1, X_2)^T$ *est la solution du système linéaire*

$$\begin{pmatrix} -1 & p_1 \\ p_2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1+2 \\ \gamma_2+2 \end{pmatrix}$$

alors il n'y a pas de solution faible non triviale (u, v) *du système* (FS_α^2).

Démonstration. puisque le vecteur $(X_1, X_2)^T$ est donné par

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & p_1 \\ p_2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_1+2 \\ \gamma_2+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{p_1p_2-1} \begin{pmatrix} (\gamma_1+2)+p_1(\gamma_2+2) \\ p_2(\gamma_1+2)+(\gamma_2+2) \end{pmatrix}$$

□

3.4 Système de $m > 2$ inégalités

Si $(X_1, X_2, ..., X_m)^T$ la solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} -1 & p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & p_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & p_{m-1} \\ p_m & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{m-1} \\ X_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1+2 \\ \gamma_2+2 \\ \vdots \\ \gamma_{m-1}+2 \\ \gamma_m+2 \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

lorsque $p_i > 1$ et γ_i sont des nombres réels donnés
, $i \in \{1, 2, ..., m\}$.
Considérons le système

$$(FS_\alpha^m) : \begin{cases} \mathbf{D}_{0/t}^\alpha u_i & - & \Delta_{\mathbb{H}}(a_i u_i) \geq |\ \eta\ |^{\gamma_{i+1}} |\ u_{i+1}\ |^{p_{i+1}} \\ (\eta, t) & \in & \mathbb{H}^N \times]0, +\infty[, \quad 1 \leq i \leq m \\ u_{m+1} & = & u_1 \end{cases}$$

où $p_{m+1} = p_1$, $\gamma_{m+1} = \gamma_1$, et les conditions initiales

$$\begin{cases} u_i(\eta, 0) & = & u_i^{(0)} \quad 1 \leq i \leq m \\ \frac{\partial u_i}{\partial t}(\eta, 0) & = & u_i^{(1)} \quad 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

Définition 3.2. *Si a_i, $i \in \{1, 2, ..., m\}$ sont m fonctions mesurables bornées dans $Q_T = \mathbb{R}^{2N+1} \times (0, T)$. Une solution faible de système (FS_α^m) avec les conditions initiales positives $\left(u_i^{(0)}, u_i^{(1)}\right) \in \left(L_{loc}^1(\mathbb{R}^{2N+1})\right)^2$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$ est un vecteur des fonctions localement intégrables $(u_1, ..., u_m)$ telle que $u_i \in L^{p_i}(Q_T, |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_i} d\eta dt)$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, satisfaisant*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{Q_T} \left(-u_i D_{t/T}^\alpha \varphi + a_i u \Delta_{\mathbb{H}} \varphi + |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_{i+1}} |u_{i+1}|^{p_{i+1}} \varphi + u_i^{(1)}(\eta) D_{t/T}^{\alpha-1} \varphi\right) d\eta dt \\ \qquad + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{2N+1}} u_i^{(0)}(\eta) D_{t/T}^{\alpha-1} \varphi(0) d\eta \leq 0. \qquad i \in \{1, 2, ..., m-1\} \end{cases} \tag{3.29}$$

et

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{Q_T} \left(-u_m D_{t/T}^\alpha \varphi + a_m u \Delta_{\mathbb{H}} \varphi + |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_1} |u_1|^{p_1} \varphi + u_m^{(1)}(\eta) D_{t/T}^{\alpha-1} \varphi\right) d\eta dt \\ \qquad + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{2N+1}} u_m^{(0)}(\eta) D_{t/T}^{\alpha-1} \varphi(0) d\eta \leq 0. \end{cases} \tag{3.30}$$

pour toute fonction test positif $\varphi \in C_c^2(Q_T)$, vérifiant $\varphi(., T) = D_{t/T}^{\alpha-1} \varphi(., T) = 0$.

Théorème 3.2. *Supposons que*

$$Q < Q_\alpha^\bullet = 2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + max\left(X_1, X_2, ..., X_m\right)$$

alors le système (FS_α^m) n'admet pas de solution faible non triviale.

Démonstration. la preuve est limitée au cas $m = 3$, le cas général peut être établie de la même façon. On suppose que (u_1, u_2, u_3) est une solution non triviale de (FS_α^3), comme dans la démonstration du théorème 3.1 d'après la positivité des conditions initiales et $D^{\alpha-1}_{t/T}\varphi \geq 0$, l'inégalité (3.29) et (3.30) implique

$$\begin{cases} \int_{Q_{TR}} |\eta|^{\gamma_1}_{\mathbb{H}} |u_1|^{p_1} \varphi d\eta dt \leq \int_{Q_{TR}} u_3 D^{\alpha}_{t/TR}\varphi d\eta dt - \int_{Q_{TR}} a_3 u_3 \Delta_{\mathbb{H}}\varphi d\eta dt. \\ \int_{Q_{TR}} |\eta|^{\gamma_2}_{\mathbb{H}} |u_2|^{p_2} \varphi d\eta dt \leq \int_{Q_{TR}} u_1 D^{\alpha}_{t/TR}\varphi d\eta dt - \int_{Q_{TR}} a_1 u_1 \Delta_{\mathbb{H}}\varphi d\eta dt. \\ \int_{Q_{TR}} |\eta|^{\gamma_3}_{\mathbb{H}} |u_3|^{p_3} \varphi d\eta dt \leq \int_{Q_{TR}} u_2 D^{\alpha}_{t/TR}\varphi d\eta dt - \int_{Q_{TR}} a_2 u_2 \Delta_{\mathbb{H}}\varphi d\eta dt. \end{cases}$$

d'après l'inégalité de Hôlder, on a

$$\int_{Q_{TR}} |\eta|^{\gamma_1}_{\mathbb{H}} |u_1|^{p_1} \varphi d\eta dt \leq C \left(\int_{Q_{TR}} |\eta|^{\gamma_3}_{\mathbb{H}} |u_3|^{p_3} \varphi d\eta dt \right)^{\frac{1}{p_3}} \mathcal{A}_3 \tag{3.31}$$

$$\int_{Q_{TR}} |\eta|^{\gamma_2}_{\mathbb{H}} |u_2|^{p_2} \varphi d\eta dt \leq C \left(\int_{Q_{TR}} |\eta|^{\gamma_1}_{\mathbb{H}} |u_1|^{p_1} \varphi d\eta dt \right)^{\frac{1}{p_1}} \mathcal{A}_1 \tag{3.32}$$

et

$$\int_{Q_{TR}} |\eta|^{\gamma_3}_{\mathbb{H}} |u_3|^{p_3} \varphi d\eta dt \leq C \left(\int_{Q_{TR}} |\eta|^{\gamma_2}_{\mathbb{H}} |u_2|^{p_2} \varphi d\eta dt \right)^{\frac{1}{p_2}} \mathcal{A}_2 \tag{3.33}$$

où

$$\mathcal{A}_i = \left(\int_{Q_{TR}} \left| D^{\alpha}_{t/TR}\varphi \right|^{p_i'} \left(|\eta|^{\gamma_i}_{\mathbb{H}} \varphi \right)^{-\frac{p_i'}{p_i}} d\eta dt \right)^{\frac{1}{p_i'}} + \left(\int_{Q_{TR}} \left| \Delta_{\mathbb{H}}\varphi \right|^{p_i'} \left(|\eta|^{\gamma_i}_{\mathbb{H}} \varphi \right)^{-\frac{p_i'}{p_i}} d\eta dt \right)^{\frac{1}{p_i'}}, \quad i = 1, 2, 3$$

depuis (3.31),(3.32) et 3.33 on aura

$$\left(\int_{Q_{TR}} |\eta|^{\gamma_1}_{\mathbb{H}} |u_1|^{p_1} \varphi d\eta dt \right)^{1-\frac{1}{p_1 p_2 p_3}} \leq C \mathcal{A}_1^{\frac{1}{p_2 p_3}} \mathcal{A}_2^{\frac{1}{p_3}} \mathcal{A}_3. \tag{3.34}$$

$$\left(\int_{Q_{TR}} |\eta|^{\gamma_2}_{\mathbb{H}} |u_2|^{p_2} \varphi d\eta dt \right)^{1-\frac{1}{p_1 p_2 p_3}} \leq C \mathcal{A}_2^{\frac{1}{p_1 p_3}} \mathcal{A}_3^{\frac{1}{p_1}} \mathcal{A}_1. \tag{3.35}$$

$$\left(\int_{Q_{TR}} |\eta|^{\gamma_3}_{\mathbb{H}} |u_3|^{p_3} \varphi d\eta dt \right)^{1-\frac{1}{p_1 p_2 p_3}} \leq C \mathcal{A}_3^{\frac{1}{p_1 p_2}} \mathcal{A}_1^{\frac{1}{p_2}} \mathcal{A}_2. \tag{3.36}$$

Nous utilisons maintenant la fonction test φ (3.19), et le changement des variables (3.21), défini dans la preuve du théorème (3.1), Nous avons ce qui suit

$$\mathcal{A}_i \leq CR^{\sigma_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

où

$$\sigma_i = -\alpha - \frac{\alpha\gamma_i}{2p_i} + \frac{\alpha}{2p_i'}Q + \frac{1}{p_i'}, \quad i = 1, 2, 3$$

d'après (3.34), (3.35) et (3.36) on déduit que

$$\left(\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_1} |u_1|^{p_1} \varphi d\eta dt\right)^{1-\frac{1}{p_1p_2p_3}} \leq CR^{\sigma_3+\frac{\sigma_2}{p_3}+\frac{\sigma_1}{p_2p_3}}. \tag{3.37}$$

$$\left(\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_2} |u_2|^{p_2} \varphi d\eta dt\right)^{1-\frac{1}{p_1p_2p_3}} \leq CR^{\sigma_1+\frac{\sigma_3}{p_1}+\frac{\sigma_2}{p_1p_3}}. \tag{3.38}$$

$$\left(\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma_3} |u_3|^{p_3} \varphi d\eta dt\right)^{1-\frac{1}{p_1p_2p_3}} \leq CR^{\sigma_2+\frac{\sigma_1}{p_2}+\frac{\sigma_3}{p_1p_2}}. \tag{3.39}$$

Finalement, les exposants de R dans (3.37), (3.38) et (3.39) sont strictement inférieurs à zéro si et seulement si $Q < 2(1 - 1/\alpha) + max(X_1, X_2, X_3)$, où le vecteur $(X_1, X_2, X_3)^T$ est la solution de

$$\begin{pmatrix} -1 & p_1 & 0 \\ 0 & -1 & p_2 \\ p_3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 + 2 \\ \gamma_2 + 2 \\ \gamma_3 + 2 \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

c'est-à dire $(u_1, u_2, u_3) \equiv (0, 0, 0)$. La preuve est achevée. □

3.5 Cas d'une seule inégalité

Enfin, nous considérons l'inégalité du type :

$$(FI_\alpha) : \begin{cases} \mathbf{D}^\alpha_{0/t}(u) - \Delta_{\mathbb{H}}(au) \geq |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}|u|^p \ , \text{ pour } \quad \text{tout } (\eta, t) \in \mathbb{H}^N \times \mathbb{R} \\ u(\eta, 0) = u_0(\eta) \geq 0 \ , \ \frac{\partial u}{\partial t}(\eta, 0) = u_1(\eta) \geq 0, \text{ pour } \quad \text{tout } \eta \in \mathbb{H}^N \end{cases} \tag{3.41}$$

où $a = a(\eta, t)$ est une fonction définie et mesurable sur $\mathbb{R}^{2N+1} \times \mathbb{R}^+$, et γ, $p > 1$, $\alpha \in (1, 2)$ sont des nombres réels.

Définition 3.3. *Une solution faible locale u de l'inégalité différentielle (3.41) sur $Q_T = \mathbb{R}^{2N+1} \times (0,T)$ avec les conditions initiales positives $u_0, u_1 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2N+1})$, est une fonction localement intégrable telle que $u \in L^p(Q_T, |\eta|^\gamma_{\mathbb{H}} d\eta dt)$ satisfaisant :*

$$\int_{Q_T} \left(-uD^\alpha_{t/T}\varphi + au\Delta_{\mathbb{H}}\varphi + |\eta|^\gamma_{\mathbb{H}}|u|^p\varphi + u_1(\eta)D^{\alpha-1}_{t/T}\varphi\right) d\eta dt + \int_{\mathbb{R}^{2N+1}} u_0(\eta)D^{\alpha-1}_{t/T}\varphi(0)d\eta \leq 0. \tag{3.42}$$

pour toute fonction test positif $\varphi \in C^2_c(Q_T)$ telle que $\varphi(.,T) = D^{\alpha-1}_{t/T}\varphi(.,T) = 0$.

Remarque 3.2. *Comme dans la définition 3.1, nous supposons que les intégrales contenues dans (3.42) sont supposées convergentes. Si dans la définition 3.3 $T = +\infty$, la solution est dite globale.*

Théorème 3.3. *Soit $N \geq 1$ et $p > 1$ on suppose que :*

$$\gamma > -2 \quad \textit{and} \quad 1 < p < \frac{\alpha(Q+\gamma)+2}{\alpha(Q-2)+2} \tag{3.43}$$

alors le problème (FI_α) n'admet pas une solution faible globale autre que la solution triviale.

Démonstration.

La preuve est basée sur un choix convenable d'une fonction test. Supposons que le problème (3.41) admet une solution faible globale non triviale u, soient T, $R > 1$ et $\theta > 1$ trois réels positifs et soit φ une fonction test assez régulière, comme les conditions initiales u_0, u_1 sont positives et $D^{\alpha-1}_{t/T}\varphi \geq 0$ (d'après (3.9)). Par conséquent, la formulation variationnelle (3.42) implique :

$$\int_{Q_{TR^{4/\theta}}} |\eta|^\gamma_{\mathbb{H}}|u|^p\varphi d\eta dt \leq \int_{Q_{TR^{4/\theta}}} uD^\alpha_{t/TR^{4/\theta}}\varphi d\eta dt - \int_{Q_{TR^{4/\theta}}} au\Delta_{\mathbb{H}}\varphi d\eta dt. \tag{3.44}$$

La fonction test φ est choisie doit vérifier que :

$$\int_{Q_{TR^{4/\theta}}} \left(\left|D^\alpha_{t/T}\varphi\right|^{p'} + |\Delta_{\mathbb{H}}\varphi|^{p'}\right) \left(|\eta|^\gamma_{\mathbb{H}}\varphi\right)^{-p'/p} d\eta dt < \infty$$

Pour estimer le membre de droite de (3.44), on applique l'inégalité de Young pour $\varepsilon > 0$, arbitraire. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}\int_{Q_{TR^{4/\theta}}} uD^\alpha_{t/TR^{4/\theta}}\varphi d\eta dt &= \int_{Q_{TR^{4/\theta}}} u\left(|\eta|^\gamma_{\mathbb{H}}\varphi\right)^{\frac{1}{p}}\left(|\eta|^\gamma_{\mathbb{H}}\varphi\right)^{-\frac{1}{p}} D^\alpha_{t/TR^{4/\theta}}\varphi d\eta dt \\ &\leq \varepsilon\int_{Q_{TR^{4/\theta}}} |\eta|^\gamma_{\mathbb{H}}|u|^p\varphi d\eta dt + C_\varepsilon\int_{Q_{TR^{4/\theta}}} \left|D^\alpha_{t/TR^{4/\theta}}\varphi\right|^{p'}\left(|\eta|^\gamma_{\mathbb{H}}\varphi\right)^{-\frac{p'}{p}} d\eta dt\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{Q_{TR^{4/\theta}}} au\Delta_{\mathbb{H}}\varphi d\eta dt &= \int_{Q_{TR^{4/\theta}}} au\left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}\varphi\right)^{\frac{1}{p}}\left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}\varphi\right)^{-\frac{1}{p}}\Delta_{\mathbb{H}}\varphi d\eta dt\\ &\leq \varepsilon\int_{Q_{TR^{4/\theta}}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}|u|^{p}\varphi d\eta dt + C_{\varepsilon}\left\|a\right\|_{\infty}^{p'}\int_{Q_{TR^{4/\theta}}} |\Delta_{\mathbb{H}}\varphi|^{p'}\left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}\varphi\right)^{-\frac{p'}{p}} d\eta dt\end{aligned}$$

On choisit ε suffisamment petit on aura

$$\int_{Q_{TR^{4/\theta}}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}|u|^{p}\varphi d\eta dt \leq C_{\varepsilon}\int_{Q_{TR^{4/\theta}}} \left(\left|D^{\alpha}_{t/TR^{4/\theta}}\varphi\right|^{p'} + |\Delta_{\mathbb{H}}\varphi|^{p'}\right)\left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}\varphi\right)^{-\frac{p'}{p}} d\eta dt \tag{3.45}$$

Prendrons maintenant :

$$\varphi(\eta,t) = \varphi(x,y,\tau,t) = \Phi\left(\frac{\tau+|x|^{2}+|y|^{2}+t^{\theta}}{R^{4}}\right)$$

où $\Phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{+})$ vérifie $0\leq\Phi\leq 1$ et (3.20) donc :

$$\Delta_{\mathbb{H}}\varphi(\eta,t) = \frac{4N\Phi'(\rho)}{R^{4}} + \frac{8\Phi''(\rho)}{R^{8}}\left[|x|^{2}+|y|^{2}\right] \tag{3.46}$$

où

$$\rho = \frac{\tau+|x|^{2}+|y|^{2}+|t|^{\theta}}{R^{4}}$$

Pour estimer le membre droite dans (3.45), nous appliquons le changement des variables

$$\widetilde{t} = R^{-4/\theta}t,\quad \widetilde{\tau} = R^{-4}\tau,\quad \widetilde{x} = R^{-2}x,\quad \widetilde{y} = R^{-2}y$$

Nous prenons également

$$\widetilde{\rho} = \widetilde{\tau} + |\widetilde{x}|^{2} + |\widetilde{y}|^{2} + \widetilde{t}^{\theta}$$

aussi pour assurer $supp\Phi\subseteq\Omega$ il faut supposer que :

$$\Omega = \left\{(\widetilde{\eta},\widetilde{t}) = (\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{\tau},\widetilde{t})\in\mathbb{R}^{2N+1}\times\mathbb{R},\quad \widetilde{\rho}\leq 2\right\}$$

donc

$$\left|\Delta_{\mathbb{H}}\varphi(\widetilde{\eta},\widetilde{t})\right| \leq \frac{C}{R^{4}}\quad \forall(\widetilde{\eta},\widetilde{t})\in\Omega \tag{3.47}$$

Comme $d\eta dt = R^{4N+4+4/\theta}d\widetilde{\eta}d\widetilde{t}, \quad |\eta|_{\mathbb{H}} = R^2|\widetilde{\eta}|_{\mathbb{H}}$, et $\left|D^{\alpha}_{t/TR^{4/\theta}}\varphi\right| = R^{\frac{-4\alpha}{\theta}}\left|D^{\alpha}_{\widetilde{t}/T}\varphi\right|$ on déduit de (3.45) que :

$$\int_{Q_{TR^{4/\theta}}} |\Delta_{\mathbb{H}}\varphi|^{p'}\left(|\eta|^{\gamma}_{\mathbb{H}}|u|^p\right)^{-\frac{p'}{p}} d\eta dt \leq R^{-4p'+4N+4+\frac{4}{\theta}-2\gamma\frac{p'}{p}} \int_{\Omega} |\Delta_{\mathbb{H}}\Phi\circ\widetilde{\rho}|^{p'}\left(|\widetilde{\eta}|^{\gamma}_{\mathbb{H}}\Phi\circ\widetilde{\rho}\right)^{-\frac{p'}{p}} d\widetilde{\eta}d\widetilde{t} \tag{3.48}$$

et

$$\int_{Q_{TR^{4/\theta}}} \left|D^{\alpha}_{t/TR^{4/\theta}}\varphi\right|^{p'}\left(|\eta|^{\gamma}_{\mathbb{H}}|u|^p\right)^{-\frac{p'}{p}} d\eta dt \leq R^{-\frac{4\alpha}{\theta}p'+4N+4+\frac{4}{\theta}-2\gamma\frac{p'}{p}} \int_{\Omega} \left|D^{\alpha}_{\widetilde{t}/T}\Phi\circ\widetilde{\rho}\right|^{p'}\left(|\widetilde{\eta}|^{\gamma}_{\mathbb{H}}\Phi\circ\widetilde{\rho}\right)^{-\frac{p'}{p}} d\widetilde{\eta}d\widetilde{t} \tag{3.49}$$

Pour obtenir le même exposant de R dans (3.48) et (3.49) doit être $\theta = \alpha$, donc

$$\int_{Q_{TR^{4/\alpha}}} |\eta|^{\gamma}_{\mathbb{H}}|u|^p\varphi d\eta dt \leq CR^{-4p'+4N+4+\frac{4}{\alpha}-2\gamma\frac{p'}{p}} \tag{3.50}$$

avec

$$C = C_{\varepsilon}\int_{\Omega}\left(\left|D^{\alpha}_{\widetilde{t}/T}\Phi\circ\widetilde{\rho}\right|^{p'} + |\Delta_{\mathbb{H}}\Phi\circ\widetilde{\rho}|^{p'}\right)\left(|\widetilde{\eta}|^{\gamma}_{\mathbb{H}}\Phi\circ\widetilde{\rho}\right)^{-\frac{p'}{p}} d\widetilde{\eta}d\widetilde{t}.$$

Maintenant dans le cas où

$$1 < p < \frac{\alpha(Q+\gamma)+2}{\alpha(Q-2)+2}$$

l'exposant de R dans (3.50) est négatif. Alors quand $R \longrightarrow +\infty$, et en utilisant le lemme de Fatou, on obtient

$$\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^{2N+1}} |\eta|^{\gamma}_{\mathbb{H}}|u|^p d\eta dt = 0. \tag{3.51}$$

par conséquent que $u \equiv 0$, ceci contredit le fait que u est solution faible non-triviale de (3.41). □

Remarque 3.3. *la condition de positivité sur les données initiales peut être affaiblie et remplacée par :*

$$\int_{Q_T} u_1(\eta)D^{\alpha-1}_{t/T}\varphi d\eta dt + \int_{\mathbb{R}^{2N+1}} u_0(\eta)D^{\alpha-1}_{t/T}\varphi(0)d\eta \geq 0.$$

Remarque 3.4. *La condition* $\gamma > -2$ *et* $1 < p < \frac{\alpha(Q+\gamma)+2}{\alpha(Q-2)+2}$ *est équivalente* $Q < 2\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{\gamma+2}{p-1}$*, ce qui justifie que le théorème 3.3 est un cas particulier du théorème 3.2 (c'est à dire* $(FI_{\alpha}) \equiv (FS^1_{\alpha})$*).*

Remarque 3.5. *Si $\alpha = 2$ il couvre le cas de l'inégalité hyperbolique de type :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_{\mathbb{H}}(au) \geq |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}|u|^p$$

étudiée par POHOZAEV *et* VÉRON *[38].*

Remarque 3.6. *quand $\alpha \to \infty$ nous trouvons l'exposant critique bien connu $p_\infty = \frac{Q+\gamma}{Q-2}$ de l'inégalité elliptique [16, 38].*

Chapitre 4

Non-existence de solution du système d'équations hyperboliques non linéaire avec amortissement fractionnaire sur le groupe d'Heisenberg

Résumé

Dans ce chapitre nous notons par $\mathbf{D}^{\alpha}_{0/t}$ la dérivée fractionnaire en temps d'ordre α ($\alpha \in (0,1)$) au sens de Caputo et $\Delta_{\mathbb{H}}$ l'opérateur Laplacien sur le groupe d'Heisenberg de dimension $(2N+1)$, nous allons montrer certains résultats de non-existence de solution des problèmes de type :

$$u_{tt} + \mathbf{D}^{\alpha}_{0/t} u - \Delta_{\mathbb{H}}(au) = \mid u \mid^{p}$$

$$\begin{cases} u_{tt} + \mathbf{D}^{\alpha}_{0/t} u - \Delta_{\mathbb{H}}(au) & = & \mid v \mid^{p} \\ v_{tt} + \mathbf{D}^{\delta}_{0/t} v - \Delta_{\mathbb{H}}(bv) & = & \mid u \mid^{q} \end{cases}$$

dans $\mathbb{H}^N \times \mathbb{R}^+$, où $a, b \in L^{\infty}(\mathbb{H}^N \times \mathbb{R}^+)$.

Si $\alpha = 1$ (dans le cas d'une équation), nous retrouvons le résultat obtenu par B. Ahmad et al [4]. Et si $\alpha = \delta = 1$ (dans le cas de système de deux équations), nous obtenons le résultat de M. Boutefnouchet et M. Kirane [13].

4.1 Introduction

D'abord nous rappelons quelques outils de base concernant la dérivée fractionnaire en temps $\mathbf{D}^{\alpha}_{0/t}$, le groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}^N$ et l'opérateur $\Delta_{\mathbb{H}}$ laplacien d'Heisenberg, lesquels dans la suite.

La dérivée à gauche et la dérivée à droite au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in (0,1)$ de la fonction $\psi \in L^1(0,T)$ sont définies respectivement par :

$$\left(D^{\alpha}_{0/t}\psi\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)\int_0^t \frac{\psi(\sigma)}{(t-\sigma)^{\alpha}}d\sigma.$$

$$\left(D^{\alpha}_{t/T}\psi\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)\int_t^T \frac{\psi(\sigma)}{(\sigma-t)^{\alpha}}d\sigma.$$

Si $\psi^{'} \in L^1(0,T)$, la dérivée de Caputo d'ordre $\alpha \in (0;1)$ est définie par :

$$\left(\mathbf{D}^{\alpha}_{0/t}\psi\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{\psi^{'}(\sigma)}{(t-\sigma)^{\alpha}}d\sigma.$$

La dérivée de Caputo est liée à la dérivée de Riemann-Liouville par :

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{0/t}\psi(t) = D^{\alpha}_{0/t}\left(\psi(t)-\psi(0)\right).$$

Rappelons aussi la formule d'intégration par parties si $0<\delta<1$:

$$\int_0^T \varphi(t)\left(D^{\delta}_{0/t}\psi\right)(t)dt = \int_0^T \left(D^{\delta}_{t/T}\varphi\right)(t)\psi(t)dt$$

Les résultats de non-existence de solutions faibles des équations hyperbolique avec amortissement linéaire de type :

$$u_{tt} + u_t - \Delta_{\mathbb{H}}(u) = |u|^p \tag{4.1}$$

ont été établis par B. Ahmed et al [4], et ils prouvent que si :

$$1 < p \leq \frac{Q+2}{Q} \tag{4.2}$$

l'inégalité (4.1) n'admet pas une solution faible positive.

Dans ce chapitre nous allons étudier l'équation hyperbolique non linéaire de type :

$$u_{tt} + \mathbf{D}^{\alpha}_{0/t}(u) - \Delta_{\mathbb{H}}(au) = |\eta|^{\gamma}_{\mathbb{H}}|u|^p \quad \text{où} \quad \alpha \in (0,1) \tag{4.3}$$

Nous allons prouver qu'il n'existe de fonction localement intégrable u définie sur $\mathbb{H}^N \times \mathbb{R}^+$ telle que $u \in L^p_{loc}(\mathbb{H}^N \times \mathbb{R}^+, |\eta|^\gamma_{\mathbb{H}} d\eta dt)$, vérifiant (4.3) pour tout $\alpha \in (0,1)$ arbitraire, quand $\gamma > -2$ et $1 < p < \frac{Q+\frac{2}{\alpha}+\gamma}{Q+2\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)}$, pour $\alpha = 1$ et $\gamma = 0$ on obtient l'exposant critique introduit dans (4.2).

4.2 Cas d'une seule équation

Considérons l'équation de type :

$$\begin{cases} u_{tt} + \mathbf{D}^\alpha_{0/t}(u) - \Delta_{\mathbb{H}}(au) = |\eta|^\gamma_{\mathbb{H}} |u|^p \ , \ \text{pour} \ (\eta, t) \in \mathbb{H}^N \times \mathbb{R} \\ u(\eta, 0) = u_0(\eta) \geq 0 \ , \ u_t(\eta, 0) = u_1(\eta) \geq 0, \text{ pour } \eta \in \mathbb{H}^N \end{cases} \tag{4.4}$$

où $a = a(\eta, t)$ est une fonction définie et mesurable dans $\mathbb{R}^{2N+1} \times \mathbb{R}^+$, et γ, $p > 1$, $\alpha \in (0,1)$ sont des réels.

Définition 4.1. *Une solution faible locale de l'équation différentielle (4.4) dans $Q_T = \mathbb{R}^{2N+1} \times (0,T)$ avec les données initiales positives $u_0, u_1 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2N+1})$, est une fonction localement intégrable $u \in L^p(Q_T, |\eta|^\gamma_{\mathbb{H}} d\eta dt)$ vérifie :*

$$\int_{Q_T} \left(-u\varphi_{tt} - uD^\alpha_{t/T}\varphi + au\Delta_{\mathbb{H}}\varphi + |\eta|^\gamma_{\mathbb{H}}|u|^p\varphi + u_0(\eta)D^\alpha_{t/T}\varphi\right) d\eta dt$$
$$- \int_{\mathbb{R}^{2N+1}} u_0\varphi_t(\eta, 0) d\eta + \int_{\mathbb{R}^{2N+1}} u_1\varphi(\eta, 0) d\eta \ = 0 \quad . \tag{4.5}$$

pour toute fonction test positif $\varphi \in C^2_c(Q_T)$ vérifiant $\varphi(., T) = 0$.

Remarque 4.1. *Les intégrales dans la définition ci-dessus sont supposées convergentes. Si $T = +\infty$ la solution est dite globale.*

Théorème 4.1. *Soit $N \geq 1$ et $p > 1$ on suppose que :*

$$\gamma > -2 \quad et \quad 1 < p < \frac{Q + \frac{2}{\alpha} + \gamma}{Q + 2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)}, \tag{4.6}$$

alors le problème (4.4) n'admet pas une solution faible globale autre que la solution triviale.

Démonstration.

La preuve est basée sur un choix convenable d'une fonction test. Supposons que le problème (4.4) admet une solution faible globale non triviale u, soient T ,$R > 1$ et $\theta > 1$ trois réels positifs et soit φ une fonction test assez régulière. Comme les conditions initiales u_0, u_1 sont positives la formulation variationnelle (4.5) entraine :

$$\begin{aligned}\int_{Q_{TR^{4/\theta}}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma} |u|^p \varphi d\eta dt - \int_{\mathbb{R}^{2N+1}} u_0 \varphi_t(\eta,0) d\eta \ \leq \ & \int_{Q_{TR^{4/\theta}}} u\varphi_{tt} d\eta dt + \int_{Q_{TR^{4/\theta}}} u D^{\alpha}_{t/TR^{4/\theta}} \varphi d\eta dt, \\ & - \int_{Q_{TR^{4/\theta}}} au\Delta_{\mathbb{H}} \varphi d\eta dt. \end{aligned} \tag{4.7}$$

La fonction test φ est choisie doit vérifier que :

$$\int_{Q_{TR^{4/\theta}}} \left(|\varphi_{tt}|^{p'} + \left| D^{\alpha}_{t/T} \varphi \right|^{p'} + |\Delta_{\mathbb{H}} \varphi|^{p'} \right) \left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma} |u|^p \right)^{-p'/p} d\eta dt < \infty$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^{2N+1}} u_0 \varphi_t(\eta,0) d\eta \leq 0$$

pour estimer le membre de droite de (4.7), on applique l'inégalité de Young pour $\varepsilon > 0$ arbitraire. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}\int_{Q_{TR^{4/\theta}}} u D^{\alpha}_{t/TR^{4/\theta}} \varphi d\eta dt \ &= \ \int_{Q_{TR^{4/\theta}}} u \left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma} \varphi \right)^{\frac{1}{p}} \left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma} \varphi \right)^{-\frac{1}{p}} D^{\alpha}_{t/TR^{4/\theta}} \varphi d\eta dt \\ &\leq \ \varepsilon \int_{Q_{TR^{4/\theta}}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma} |u|^p \varphi d\eta dt + C_{\varepsilon} \int_{Q_{TR^{4/\theta}}} \left| D^{\alpha}_{t/TR^{4/\theta}} \varphi \right|^{p'} \left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma} \varphi \right)^{-\frac{p'}{p}} d\eta dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{Q_{TR^{4/\theta}}} u\varphi_{tt} d\eta dt \ &= \ \int_{Q_{TR^{4/\theta}}} u \left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma} \varphi \right)^{\frac{1}{p}} \left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma} \varphi \right)^{-\frac{1}{p}} \varphi_{tt} d\eta dt \\ &\leq \ \varepsilon \int_{Q_{TR^{4/\theta}}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma} |u|^p \varphi d\eta dt + C_{\varepsilon} \int_{Q_{TR^{4/\theta}}} |\varphi_{tt}|^{p'} \left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma} \varphi \right)^{-\frac{p'}{p}} d\eta dt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{Q_{TR^{4/\theta}}} au\Delta_{\mathbb{H}}\varphi d\eta dt &= \int_{Q_{TR^{4/\theta}}} au\left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}\varphi\right)^{\frac{1}{p}}\left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}\varphi\right)^{-\frac{1}{p}}\Delta_{\mathbb{H}}\varphi d\eta dt\\ &\leq \varepsilon\int_{Q_{TR^{4/\theta}}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}|u|^{p}\varphi d\eta dt + C_{\varepsilon}\left\|a\right\|_{\infty}^{p'}\int_{Q_{TR^{4/\theta}}} |\Delta_{\mathbb{H}}\varphi|^{p'}\left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}\varphi\right)^{-\frac{p'}{p}} d\eta dt.\end{aligned}$$

On choisit ε suffisamment petit en aura :

$$\int_{Q_{TR^{4/\theta}}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}|u|^{p}\varphi d\eta dt \leq C_{\varepsilon}\int_{Q_{TR^{4/\theta}}} \left(|\varphi_{tt}|^{p'} + \left|D^{\alpha}_{t/TR^{4/\theta}}\varphi\right|^{p'} + |\Delta_{\mathbb{H}}\varphi|^{p'}\right)\left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}|u|^{p}\right)^{-\frac{p'}{p}} d\eta dt \tag{4.8}$$

Prendrons maintenant :

$$\varphi(\eta,t) = \varphi(x,y,\tau,t) = \Phi\left(\frac{\tau^2+|x|^4+|y|^4+t^{\theta}}{R^4}\right)$$

où $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ vérifie $0 \leq \Phi \leq 1$ et

$$\Phi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r \geq 2,\\ 1 & \text{si} \quad 0 \leq r \leq 1.\end{cases} \tag{4.9}$$

Donc

$$\begin{aligned}&\Delta_{\mathbb{H}}\varphi(\eta,t) = \frac{4(N+4)\Phi'(\rho)}{R^4}\left[|x|^2+|y|^2\right]\\ &+\frac{16\Phi''(\rho)}{R^8}\left[\left(|x|^6+|y|^6\right)+\tau^2\left(|x|^2+|y|^2\right)+2\tau\langle x,y\rangle\left(|x|^2-|y|^2\right)\right]\end{aligned} \tag{4.10}$$

où

$$\rho = \frac{\tau^2+|x|^4+|y|^4+|t|^{\theta}}{R^4}$$

Afin d'estimer le membre de droite dans (4.8), on applique le changement de variable suivant

$$\widetilde{t} = R^{-4/\theta}t, \quad \widetilde{\tau} = R^{-2}\tau, \quad \widetilde{x} = R^{-1}x, \quad \widetilde{y} = R^{-1}y.$$

Posons

$$\widetilde{\rho} = \widetilde{\tau}^2 + |\widetilde{x}|^4 + |\widetilde{y}|^4 + \widetilde{t}^{\theta}.$$

et pour nous assurons que $supp\Phi \subseteq \Omega$ prendrons

$$\Omega = \left\{(\widetilde{\eta}, \widetilde{t}) = (\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{\tau}, \widetilde{t}) \in \mathbb{R}^{2N+1} \times \mathbb{R}, \quad \widetilde{\tau}^2 + |\widetilde{x}|^4 + |\widetilde{y}|^4 + \widetilde{t}^\theta \leq 2\right\}.$$

Alors

$$\left|\Delta_{\mathbb{H}}\varphi(\widetilde{\eta}, \widetilde{t})\right| \leq \frac{C}{R^2} \quad \forall (\widetilde{\eta}, \widetilde{t}) \in \Omega. \tag{4.11}$$

Comme $d\eta dt = R^{2N+2+4/\theta} d\widetilde{\eta} d\widetilde{t}$, $\quad |\eta|_{\mathbb{H}} = R|\widetilde{\eta}|_{\mathbb{H}}$, et $\left|D^\alpha_{t/TR^{4/\theta}}\varphi\right| = R^{\frac{-4\alpha}{\theta}} \left|D^\alpha_{\widetilde{t}/T}\varphi\right|$ on déduit de (4.8) que :

$$\int_{Q_{TR^{4/\theta}}} |\Delta_{\mathbb{H}}\varphi|^{p'} \left(|\eta|^\gamma_{\mathbb{H}}|u|^p\right)^{-\frac{p'}{p}} d\eta dt \leq R^{-2p'+2N+2+\frac{4}{\theta}-\gamma\frac{p'}{p}} \int_\Omega |\Delta_{\mathbb{H}}\Phi \circ \widetilde{\rho}|^{p'} \left(|\widetilde{\eta}|^\gamma_{\mathbb{H}}\Phi \circ \widetilde{\rho}\right)^{-\frac{p'}{p}} d\widetilde{\eta} d\widetilde{t} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}\int_{Q_{TR^{4/\theta}}} |\varphi_{tt}|^{p'} \left(|\eta|^\gamma_{\mathbb{H}}|u|^p\right)^{-\frac{p'}{p}} d\eta dt \quad &\leq \quad R^{-\frac{8}{\theta}p'+2N+2+\frac{4}{\theta}-\gamma\frac{p'}{p}} \int_\Omega \left|\frac{d^2}{dR^2}\Phi \circ \widetilde{\rho}\right|^{p'} \left(|\widetilde{\eta}|^\gamma_{\mathbb{H}}\Phi \circ \widetilde{\rho}\right)^{-\frac{p'}{p}} d\widetilde{\eta} d\widetilde{t} \\ \text{Car} \quad \alpha \in (0,1) \qquad &\leq \quad R^{-\frac{4\alpha}{\theta}p'+2N+2+\frac{4}{\theta}-\gamma\frac{p'}{p}} \int_\Omega \left|\frac{d^2}{dR^2}\Phi \circ \widetilde{\rho}\right|^{p'} \left(|\widetilde{\eta}|^\gamma_{\mathbb{H}}\Phi \circ \widetilde{\rho}\right)^{-\frac{p'}{p}} d\widetilde{\eta} d\widetilde{t}\end{aligned} \tag{4.13}$$

et

$$\int_{Q_{TR^{4/\theta}}} \left|D^\alpha_{t/TR^{4/\theta}}\varphi\right|^{p'} \left(|\eta|^\gamma_{\mathbb{H}}|u|^p\right)^{-\frac{p'}{p}} d\eta dt \leq R^{-\frac{4\alpha}{\theta}p'+2N+2+\frac{4}{\theta}-\gamma\frac{p'}{p}} \int_\Omega \left|D^\alpha_{\widetilde{t}/T}\Phi \circ \widetilde{\rho}\right|^{p'} \left(|\widetilde{\eta}|^\gamma_{\mathbb{H}}\Phi \circ \widetilde{\rho}\right)^{-\frac{p'}{p}} d\widetilde{\eta} d\widetilde{t} \tag{4.14}$$

Pour obtenir le même exposant de R dans (4.12),(4.13) et (4.14) doit être $\theta = 2\alpha$ donc

$$\int_{Q_{TR^{4/\theta}}} |\eta|^\gamma_{\mathbb{H}}|u|^p\varphi d\eta dt \leq CR^{-2p'+2N+2+\frac{2}{\alpha}-\gamma\frac{p'}{p}} \tag{4.15}$$

avec

$$C = C_\varepsilon \int_\Omega \left(\left|\frac{d^2}{dR^2}\Phi \circ \widetilde{\rho}\right|^{p'} + \left|D^\alpha_{\widetilde{t}/T}\Phi \circ \widetilde{\rho}\right|^{p'} + |\Delta_{\mathbb{H}}\Phi \circ \widetilde{\rho}|^{p'}\right) \left(|\widetilde{\eta}|^\gamma_{\mathbb{H}}\Phi \circ \widetilde{\rho}\right)^{-\frac{p'}{p}} d\widetilde{\eta} d\widetilde{t}.$$

Maintenant dans le cas où

$$1 < p < \frac{2N + 2 + \gamma + \frac{2}{\alpha}}{2N + \frac{2}{\alpha}} = \frac{Q + \frac{2}{\alpha} + \gamma}{Q + 2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)}$$

l'exposant de R dans (4.15) est négatif. Alors quand $R \longrightarrow +\infty$ et en utilisant le lemme de Fatou, on obtient que

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{2N+1}} |\eta|_{\mathbb{H}}^\gamma |u|^p d\eta dt = 0 \tag{4.16}$$

par conséquent que $u \equiv 0$, ceci contredit le fait que u est solution faible non-triviale de (4.4). La preuve est achevée. $\square$

Remarque 4.2. *Si $\alpha = 1$ on recouvre le cas d'équation hyperbolique avec amortissement linéaire de type :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_{\mathbb{H}}(u) + \frac{\partial u}{\partial t} = |u|^p \tag{4.17}$$

étudiée par B. Ahmad, et al [4].

4.3 Système de deux équations

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} u_{tt} + \mathbf{D}_{0/t}^\alpha u - \Delta_{\mathbb{H}}(au) & = & |\eta|_{\mathbb{H}}^\beta | \; v \; |^p \quad \text{dans} \quad \mathbb{H}^N \times \mathbb{R}^+ \\ v_{tt} + \mathbf{D}_{0/t}^\delta v - \Delta_{\mathbb{H}}(bv) & = & |\eta|_{\mathbb{H}}^\gamma | \; u \; |^q \quad \text{dans} \quad \mathbb{H}^N \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{4.18}$$

où $\mathbf{D}_{0/t}^\alpha$ $(resp.\mathbf{D}_{0/t}^\delta)$ désigne la dérivée fractionnaire en temps d'ordre $\alpha \in (0,1)$ $(resp \quad \delta \in (0,1))$, au sens de Caputo. Les fonctions a et b introduites dans (4.18) sont supposées mesurables et bornées dans $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}^+$. Quand $p, q > 1$ et β, γ ce sont des nombres réels. En notant aussi par $D_{0/t}^\alpha$, $(resp D_{0/t}^\delta)$ la dérivée fractionnaire en temps d'ordre α, $(resp \quad \delta)$ au sens de Riemann-Liouville. Nous avons ce qui suit

Définition 4.2. *Une solution faible locale du système (4.18) dans $Q_T = \mathbb{R}^{2N+1} \times (0,T)$ avec les données initiales positives $u_0, u_1, v_0, v_1 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2N+1})$, est un couple de fonctions localement intégrables (u,v) tel que $(u,v) \in L^q(Q_T, |\eta|_{\mathbb{H}}^\gamma d\eta dt) \times L^p(Q_T, |\eta|_{\mathbb{H}}^\beta d\eta dt)$ satisfaisant :*

$$\int_{Q_T} \left(-u\varphi_{tt} - uD_{t/T}^\alpha \varphi + au\Delta_{\mathbb{H}}\varphi + |\eta|_{\mathbb{H}}^\gamma |v|^p \varphi + u_0(\eta) D_{t/T}^\alpha \varphi\right) d\eta dt$$
$$- \int_{\mathbb{R}^{2N+1}} u_0 \varphi_t(\eta, 0) d\eta + \int_{\mathbb{R}^{2N+1}} u_1 \varphi(\eta, 0) d\eta \;\; = 0, \tag{4.19}$$

et

$$\int_{Q_T} \left(-v\varphi_{tt} - vD^{\alpha}_{t/T}\varphi + av\Delta_{\mathbb{H}}\varphi + |\eta|^{\gamma}_{\mathbb{H}}|u|^p\varphi + v_0(\eta)D^{\alpha}_{t/T}\varphi\right) d\eta dt$$
$$- \int_{\mathbb{R}^{2N+1}} v_0\varphi_t(\eta,0)d\eta + \int_{\mathbb{R}^{2N+1}} v_1\varphi(\eta,0)d\eta \ = 0. \qquad (4.20)$$

Pour toute fonction test positif $\varphi \in C^2_c(Q_T)$ *vérifiant* $\varphi(.,T) = 0$.

Remarque 4.3. *Comme la définition 4.1, nous supposons que les intégrales dans (4.19) et (4.20) sont convergentes. Si* $T = +\infty$ *la solution est dite globale.*

Théorème 4.2. *supposons que*

$$Q < Q^*_e = max\left\{Q_1, Q_2\right\}.$$

où

$$\begin{cases} Q_1 &= \dfrac{\alpha\left(1+\frac{\gamma}{2q}\right) + \frac{\delta}{q}\left(1+\frac{\beta}{2p}\right) - \left(1-\frac{1}{pq}\right)}{\frac{\alpha}{2q'} + \frac{\delta}{2p'q}}, \\ \\ Q_2 &= \dfrac{\delta\left(1+\frac{\beta}{2p}\right) + \frac{\alpha}{p}\left(1+\frac{\gamma}{2q}\right) - \left(1-\frac{1}{pq}\right)}{\frac{\delta}{2p'} + \frac{\alpha}{2q'p}}. \end{cases} \qquad (4.21)$$

Alors le système (4.18) n'admet pas une solution faible globale (u,v) *autre que la solution triviale.*

Démonstration.

Comme dans la preuve du Théorèm 4.1, on prouve par l'absurde. Supposons que (u,v) est une solution faible non-triviale qui existe globalement en temps. Donc (u,v) existe dans $(0,T^*)$ pour T^* arbitraire. soient T et R deux réels positifs tels que $0 < TR < T^*$.
Comme les conditions initiales u_0, u_1, v_0, v_1 sont positives, la formulation variationnelle (4.19),(4.20) entraîne

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{Q_{TR}} |\eta|^{\beta}_{\mathbb{H}}|v|^p\varphi d\eta dt - \int_{\mathbb{R}^{2N+1}} u_0\varphi_t(\eta,0)d\eta \leq \int_{Q_{TR}} u\varphi_{tt}d\eta dt + \int_{Q_{TR}} uD^{\alpha}_{t/TR}\varphi d\eta dt \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \displaystyle - \int_{Q_{TR}} au\Delta_{\mathbb{H}}\varphi d\eta dt. \\ \displaystyle\int_{Q_{TR}} |\eta|^{\gamma}_{\mathbb{H}}|u|^q\varphi d\eta dt - \int_{\mathbb{R}^{2N+1}} v_0\varphi_t(\eta,0)d\eta \leq \int_{Q_{TR}} v\varphi_{tt}d\eta dt + \int_{Q_{TR}} vD^{\delta}_{t/TR}\varphi d\eta dt \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \displaystyle - \int_{Q_{TR}} bv\Delta_{\mathbb{H}}\varphi d\eta dt. \end{cases}$$

La fonction test φ qui est choisie doit vérifier que :

$$\int_{\mathbb{R}^{2N+1}} u_0\varphi_t(\eta,0)d\eta \leq 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^{2N+1}} v_0\varphi_t(\eta,0)d\eta \leq 0$$

donc

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\beta}|v|^p\varphi d\eta dt \leq \int_{Q_{TR}} u\varphi_{tt}d\eta dt + \int_{Q_{TR}} uD^{\alpha}_{t/TR}\varphi d\eta dt - \int_{Q_{TR}} au\Delta_{\mathbb{H}}\varphi d\eta dt. \\ \displaystyle\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}|u|^q\varphi d\eta dt \leq \int_{Q_{TR}} v\varphi_{tt}d\eta dt + \int_{Q_{TR}} vD^{\delta}_{t/TR}\varphi d\eta dt - \int_{Q_{TR}} bv\Delta_{\mathbb{H}}\varphi d\eta dt. \end{array}\right.$$

D'après l'inégalité de Hôlder on aura

$$\left\{\begin{array}{rl} \displaystyle\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\beta}|v|^p\varphi d\eta dt \leq & \displaystyle\left(\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}|u|^q\varphi d\eta dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{Q_{TR}} |\varphi_{tt}|^{q'}\left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}\varphi\right)^{-\frac{q'}{q}}d\eta dt\right)^{\frac{1}{q'}} \\ & \displaystyle + \left(\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}|u|^q\varphi d\eta dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{Q_{TR}} \left|D^{\alpha}_{t/TR}\varphi\right|^{q'}\left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}\varphi\right)^{-\frac{q'}{q}}d\eta dt\right)^{\frac{1}{q'}} \\ & \displaystyle + \|a\|_{\infty}\left(\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}|u|^q\varphi d\eta dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{Q_{TR}} |\Delta_{\mathbb{H}}\varphi|^{q'}\left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}\varphi\right)^{-\frac{q'}{q}}d\eta dt\right)^{\frac{1}{q'}} \end{array}\right.$$

et

$$\left\{\begin{array}{rl} \displaystyle\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}|u|^q\varphi d\eta dt \leq & \displaystyle\left(\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\beta}|v|^p\varphi d\eta dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_{TR}} |\varphi_{tt}|^{p'}\left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\beta}\varphi\right)^{-\frac{p'}{p}}d\eta dt\right)^{\frac{1}{p'}} \\ & \displaystyle + \left(\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\beta}|v|^p\varphi d\eta dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_{TR}} \left|D^{\delta}_{t/TR}\varphi\right|^{p'}\left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\beta}\varphi\right)^{-\frac{p'}{p}}d\eta dt\right)^{\frac{1}{p'}} \\ & \displaystyle + \|b\|_{\infty}\left(\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\beta}|v|^p\varphi d\eta dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_{TR}} |\Delta_{\mathbb{H}}\varphi|^{p'}\left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\beta}\varphi\right)^{-\frac{p'}{p}}d\eta dt\right)^{\frac{1}{p'}} \end{array}\right.$$

Dans la suite désignera par C une constante qui peut varier d'une ligne à une autre mais ne dépend pas des termes qui prendront place dans n'importe quel passage à la limite. Et donc nous avons.

$$\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\beta}|v|^p\varphi d\eta dt \leq C\left(\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}|u|^q\varphi d\eta dt\right)^{\frac{1}{q}}\mathscr{A} \tag{4.22}$$

et

$$\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}|u|^q\varphi d\eta dt \leq C\left(\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\beta}|v|^p\varphi d\eta dt\right)^{\frac{1}{p}}\mathscr{B} \tag{4.23}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \left(\int_{Q_{TR}} |\varphi_{tt}|^{q'}\left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}\varphi\right)^{-\frac{q'}{q}} d\eta dt\right)^{\frac{1}{q'}} + \left(\int_{Q_{TR}} \left|D_{t/TR}^{\alpha}\varphi\right|^{q'}\left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}\varphi\right)^{-\frac{q'}{q}} d\eta dt\right)^{\frac{1}{q'}} \\
&\quad + \left(\int_{Q_{TR}} |\Delta_{\mathbb{H}}\varphi|^{q'}\left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}\varphi\right)^{-\frac{q'}{q}} d\eta dt\right)^{\frac{1}{q'}}, \\
\mathscr{B} &= \left(\int_{Q_{TR}} |\varphi_{tt}|^{p'}\left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\beta}\varphi\right)^{-\frac{p'}{p}} d\eta dt\right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int_{Q_{TR}} \left|D_{t/TR}^{\delta}\varphi\right|^{p'}\left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\beta}\varphi\right)^{-\frac{p'}{p}} d\eta dt\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\quad + \left(\int_{Q_{TR}} |\Delta_{\mathbb{H}}\varphi|^{p'}\left(|\eta|_{\mathbb{H}}^{\beta}\varphi\right)^{-\frac{p'}{p}} d\eta dt\right)^{\frac{1}{p'}}.
\end{aligned}$$

En combinant (4.22),(4.23) en aura

$$\left(\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\beta}|v|^p\varphi d\eta dt\right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq C\mathscr{B}^{\frac{1}{q}}\mathscr{A}, \tag{4.24}$$

$$\left(\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}|u|^q\varphi d\eta dt\right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq C\mathscr{A}^{\frac{1}{p}}\mathscr{B}. \tag{4.25}$$

Posons maintenant

$$\varphi(\eta,t) = \varphi(x,y,\tau,t) = \Phi\left(\frac{\tau^{2\theta_j} + |x|^{4\theta_j} + |y|^{4\theta_j} + t^4}{R^4}\right), \quad j = 1,2 \tag{4.26}$$

Donc $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ est une fonction positive régulière et décroissante vérifiant (4.9),
et $\theta_j > 1$, $j = 1,2$, sera déterminés plus tard.
Alors

$$\left\{\begin{array}{l}
\Delta_{\mathbb{H}}\varphi(\eta,t) = \dfrac{4\theta_j\Phi'(\rho)}{R^4}\Big\{ (N + 2(2\theta_j - 1))\left(|x|^{2(2\theta_j-1)} + |y|^{2(2\theta_j-1)}\right) + 2(2\theta_j - 1)\tau^{2(\theta_j-1)}\left(|x|^2 + |y|^2\right) \Big\} \\
+\dfrac{16\theta_j^2\Phi''(\rho)}{R^8}\Big\{ |x|^{2(4\theta_j-1)} + |y|^{2(4\theta_j-1)} + 2\tau^{2\theta_j-1}\langle x,y\rangle\left(|x|^{2(2\theta_j-1)} - |y|^{2(2\theta_j-1)}\right) + \tau^{2(\theta_j-1)}\left(|x|^2 + |y|^2\right) \Big\}
\end{array}\right.$$

où

$$\rho=\frac{\tau^{2\theta_j}+|x|^{4\theta_j}+|y|^{4\theta_j}+t^4}{R^4}.$$

Pour estimer $\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$ (dans (4.24),(4.25)) nous appliquons le changement des variables : $(\eta,t)=(x,y,\tau,t)\longmapsto(\widetilde{\eta},\widetilde{t})=(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{\tau},\widetilde{t})$ avec

$$\widetilde{x}=R^{-\frac{1}{\theta_j}}x,\quad \widetilde{y}=R^{-\frac{1}{\theta_j}}y,\quad \widetilde{\tau}=R^{-\frac{2}{\theta_j}}\tau,\quad \widetilde{t}=R^{-1}t. \tag{4.27}$$

Posons

$$\Omega=\left\{(\widetilde{\eta},\widetilde{t})=(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{\tau},\widetilde{t})\in\mathbb{H}^N\times\mathbb{R}^+ : \widetilde{\tau}^{2\theta_j}+|\widetilde{x}|^{4\theta_j}+|\widetilde{y}|^{4\theta_j}+\widetilde{t}^4<2\right\}.$$

Alors il suit que

$$\left|\Delta_{\mathbb{H}}\varphi(\widetilde{\eta},\widetilde{t})\right|\leq\frac{C}{R^{\frac{2}{\theta_j}}}\quad\forall(\widetilde{\eta},\widetilde{t})\in\Omega. \tag{4.28}$$

Comme $d\eta dt=R^{\frac{2N+2}{\theta_j}+1}d\widetilde{\eta}d\widetilde{t}$ et $|\eta|_{\mathbb{H}}=R^{\frac{1}{\theta_j}}|\widetilde{\eta}|_{\mathbb{H}}$, nous établissons les estimations suivantes :

• Pour $j=1$ nous choisissons θ_1 tel que le membre de droite de

$$\int_{Q_{TR}}\left|D^{\alpha}_{t/TR}\varphi\right|^{q'}(|\eta|^{\gamma}_{\mathbb{H}}\varphi)^{-\frac{q'}{q}}\,d\eta dt=R^{-\alpha q'-\frac{\gamma q'}{\theta_1 q}+\frac{2N+2}{\theta_1}+1}\int_{\Omega}\left|D^{\alpha}_{\widetilde{t}/T}\Phi\circ\widetilde{\rho}\right|^{q'}(|\widetilde{\eta}|^{\gamma}_{\mathbb{H}}\Phi\circ\widetilde{\rho})^{-\frac{q'}{q}}\,d\widetilde{\eta}d\widetilde{t}$$

$$\begin{aligned}\int_{Q_{TR}}|\varphi_{tt}|^{q'}(|\eta|^{\gamma}_{\mathbb{H}}\varphi)^{-\frac{q'}{q}}\,d\eta dt &= R^{-2q'-\frac{\gamma q'}{\theta_1 q}+\frac{2N+2}{\theta_1}+1}\int_{\Omega}\left|\frac{d^2}{dR^2}\Phi\circ\widetilde{\rho}\right|^{q'}(|\widetilde{\eta}|^{\gamma}_{\mathbb{H}}\Phi\circ\widetilde{\rho})^{-\frac{q'}{q}}\,d\widetilde{\eta}d\widetilde{t}\\ \text{Car}\quad\alpha\in(0,1)\qquad &\leq R^{-\alpha q'-\frac{\gamma q'}{\theta_1 q}+\frac{2N+2}{\theta_1}+1}\int_{\Omega}\left|\frac{d^2}{dR^2}\Phi\circ\widetilde{\rho}\right|^{q'}(|\widetilde{\eta}|^{\gamma}_{\mathbb{H}}\Phi\circ\widetilde{\rho})^{-\frac{q'}{q}}\,d\widetilde{\eta}d\widetilde{t}\end{aligned}$$

et

$$\int_{Q_{TR}}|\Delta_{\mathbb{H}}\varphi|^{q'}(|\eta|^{\gamma}_{\mathbb{H}}\varphi)^{-\frac{q'}{q}}\,d\eta dt\leq CR^{-\frac{2}{\theta_1}q'-\frac{\gamma q'}{\theta_1 q}+\frac{2N+2}{\theta_1}+1}\int_{\Omega}(|\widetilde{\eta}|^{\gamma}_{\mathbb{H}}\Phi\circ\widetilde{\rho})^{-\frac{q'}{q}}\,d\widetilde{\eta}d\widetilde{t}$$

sont du même ordre dans R, pour cela on prend $\theta_1=\frac{2}{\alpha}$ on obtient

$$\mathscr{A}\leq CR^{-\alpha-\frac{\alpha\gamma}{2q}+\frac{\alpha}{2}\frac{2N+2}{q'}+\frac{1}{q'}}$$

- Pour $j=2$, de la même manière en prenant $\theta_2 = \frac{2}{\delta}$ on aura

$$\mathscr{B} \leq CR^{-\delta-\frac{\delta\beta}{2p}+\frac{\delta}{2}\frac{2N+2}{p'}+\frac{1}{p'}}$$

Ainsi de (4.24) et (4.25) il suit

$$\left(\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\beta}|v|^p\varphi d\eta dt\right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq CR^{-\alpha-\frac{\alpha\gamma}{2q}+\frac{\alpha}{2}\frac{2N+2}{q'}+\frac{1}{q'}+\frac{1}{q}\left[-\delta-\frac{\delta\beta}{2p}+\frac{\delta}{2}\frac{2N+2}{p'}+\frac{1}{p'}\right]} \tag{4.29}$$

$$\left(\int_{Q_{TR}} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}|u|^q\varphi d\eta dt\right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq CR^{-\delta-\frac{\delta\beta}{2p}+\frac{\delta}{2}\frac{2N+2}{p'}+\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}\left[-\alpha-\frac{\alpha\gamma}{2q}+\frac{\alpha}{2}\frac{2N+2}{q'}+\frac{1}{q'}\right]} \tag{4.30}$$

Et donc il suffit de supposer que

$$\left\{\begin{array}{lcl} -\alpha-\frac{\alpha\gamma}{2q}+\frac{\alpha}{2}\frac{2N+2}{q'}+\frac{1}{q'}+\frac{1}{q}\left[-\delta-\frac{\delta\beta}{2p}+\frac{\delta}{2}\frac{2N+2}{p'}+\frac{1}{p'}\right] & < & 0, \\ \text{ou bien} & & \\ -\delta-\frac{\delta\beta}{2p}+\frac{\delta}{2}\frac{2N+2}{p'}+\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}\left[-\alpha-\frac{\alpha\gamma}{2q}+\frac{\alpha}{2}\frac{2N+2}{q'}+\frac{1}{q'}\right] & < & 0. \end{array}\right. \tag{4.31}$$

Cette condition est équivalente à

$$Q < Q_e^* = max\{Q_1, Q_2\}$$

où Q_1 et Q_2 sont définies dans (4.21)

Finalement quand $R \to \infty$ et d'après des estimations (4.22) et (4.25) ou bien (4.23) et (4.24), nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}^{2N+1}}\int_{\mathbb{R}^+} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\gamma}|u|^q d\eta dt \leq 0. \tag{4.32}$$

$$\int_{\mathbb{R}^{2N+1}}\int_{\mathbb{R}^+} |\eta|_{\mathbb{H}}^{\beta}|v|^p d\eta dt \leq 0. \tag{4.33}$$

On conclut alors que $u \equiv 0$ et $v \equiv 0$ ce qui est une contradiction. □

Remarque 4.4. *si $\alpha=\delta=1$ on recouvre le cas de système hyperbolique avec amortissement linéaire de type :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta_{\mathbb{H}}(u)+\frac{\partial u}{\partial t} & = & |\, v\,|^p \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\Delta_{\mathbb{H}}(v)+\frac{\partial v}{\partial t} & = & |\, u\,|^q \end{array}\right. \tag{4.34}$$

étudiée par M. Boutefnouchet, et M. Kirane [13].

Chapitre 5

Non-existence de solution du système d'équations de réaction-diffusion fractionnaires non linéaires sur le groupe d'Heisenberg

Résumé

Dans ce chapitre nous notons par $\mathbf{D}^{\alpha}_{0/t}$ la dérivée fractionnaire en temps d'ordre $\alpha \in (0,1)$ au sens de Caputo et $\left(\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}\right)$ l'opérateur Laplacien fractionnaire d'ordre $0 < \beta \leq 2$ sur le groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}^N$ de dimension $(2N+1)$. Nous allons montrer certains résultats de non-existence de solution des problèmes de type :

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{0/t} u - \left(\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}\right)(|u|^m) = |\ u\ |^p$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{D}^{\alpha}_{0/t} u - \left(\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}\right)(u) & = & |\ v\ |^p \\ \mathbf{D}^{\delta}_{0/t} v - \left(\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}\right)(v) & = & |\ u\ |^q \end{array}\right.$$

dans $\mathbb{H}^N \times \mathbb{R}^+$.

Si $\alpha = 1$ (dans le cas d'une équation), nous retrouvons le résultat obtenu par B. Ahmad, et al [4].

Si $\alpha = \delta = 1$ (dans le cas de système de deux équations), nous généralisons et améliorons le résultat de M. Boutefnouchet et M. Kirane [13].

5.1 Introduction

Pohozaev et Véron [38] ont établis la question des résultats de non-existence pour des solutions d'inégalités paraboliques semi-linéaires du type :

$$(FPI) : \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_{\mathbb{H}}(au) \geq |u|^p \tag{5.1}$$

Ils ont démontré qu'aucune solution faible non triviale u si :

$$\int_{\mathbb{R}^{2N+1}} u_0(\eta)d\eta \geq 0 \quad \text{et} \quad 1 < p \leq \frac{Q+2}{Q} \tag{5.2}$$

Leurs résultats ont été généralisés, par B. Ahmed et al [4] à l'équation de la forme :

$$(NLPE) : \frac{\partial u}{\partial t} - (\Delta_{\mathbb{H}})^{\beta/2}(|u|^m) = |u|^p \tag{5.3}$$

où ils ont montré que l'équation (NLPE) n'admet aucune solution définie sur $\mathbb{H}^N$ si

$$1 < p < m + \frac{\beta}{Q} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^{2N+1}} u_0(\eta)d\eta \geq 0. \tag{5.4}$$

Dans [13] M. Boutefnouchet et M. Kirane, ont établis le résultat de non-existence de solution pour le système parabolique non linéaire non locale du type :

$$(NLPS) : \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}(u) & = & \mid v \mid^p \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}(v) & = & \mid u \mid^q \end{cases} \tag{5.5}$$

où ils ont prouvé que le système (NLPS) n'admet aucune solution définie dans $\mathbb{H}^N \times \mathbb{H}^N$ pour tout

$$Q \leq \frac{\beta}{pq-1} max\{p, q\} \tag{5.6}$$

Dans ce chapitre, nous généralisons ce résultat à une équation d'évolution avec dérivée fractionnaire du type :

$$(FNLE) : \mathbf{D}_{0/t}^{\alpha} u - (\Delta_{\mathbb{H}})^{\beta/2}(|u|^m) = \mid u \mid^p \tag{5.7}$$

et nous montrons sur certaines conditions initiales que l'équation (FNLE) n'admet aucune solution définie dans $\mathbb{H}^N$ si

$$1 < p < m + \frac{\beta}{\alpha Q} \tag{5.8}$$

aussi nous montrons dans le cas de deux équations le système

$$(FNLS) : \begin{cases} \mathbf{D}^{\alpha}_{0/t} u - \left(\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}\right)(u) & = & \mid v \mid^{p} \\ \mathbf{D}^{\delta}_{0/t} v - \left(\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}\right)(v) & = & \mid u \mid^{q} \end{cases} \tag{5.9}$$

n'admet aucune solution dans $\mathbb{H}^N \times \mathbb{H}^N$ si

$$Q < Q^*_e = \frac{\beta}{pq-1} max \left\{pq(\alpha-1)+\delta p+1, pq(\delta-1)+\alpha q+1\right\} \tag{5.10}$$

Ce chapitre est organisé de la façon suivante

• Dans la section 5.2, nous rappelons quelques notations et préliminaires cités dans ce chapitre.

• La section 5.3 est consacrée à l'étude de la non-existence de solution du problème (FNLE).

• Dans la section 5.4 nous établissons un résultat sur la non-existence de solution pour le système (FNLS).

5.2 Notations et préliminaires

Dérivée fractionnaire.

La dérivée à gauche et la dérivée à droite au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in (0,1)$ de la fonction $\psi \in L^1(0,T)$ sont définies respectivement par :

$$\left(D^{\alpha}_{0/t}\psi\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)\int_0^t \frac{\psi(\sigma)}{(t-\sigma)^{\alpha}}d\sigma$$

$$\left(D^{\alpha}_{t/T}\psi\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)\int_t^T \frac{\psi(\sigma)}{(\sigma-t)^{\alpha}}d\sigma$$

Si $\psi^{'} \in L^1(0,T)$, la dérivée de Caputo d'ordre $\alpha \in (0;1)$ est définie par :

$$\left(\mathbf{D}^{\alpha}_{0/t}\psi\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{\psi^{'}(\sigma)}{(t-\sigma)^{\alpha}}d\sigma$$

La dérivée de Caputo est liée à la dérivée de Riemann-Liouville par :

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{0/t}\psi(t) = D^{\alpha}_{0/t}\left(\psi(t)-\psi(0)\right)$$

Rappelons aussi la formule d'intégration par parties pour tout $0<\delta<1$ on a :

$$\int_0^T \varphi(t)\left(D^{\delta}_{0/t}\psi\right)(t)dt = \int_0^T \left(D^{\delta}_{t/T}\varphi\right)(t)\psi(t)dt$$

Puissances fractionnaires de sous-Laplacien.

Ici, nous recueillons quelques résultats sur les puissances fractionnaires du sous-Laplacien dans le groupe d'Heisenberg, Pour commencer caractérisons de $(-\Delta_{\mathbb{H}})^s$ comme la résolution spectrale de $\Delta_{\mathbb{H}}$ dans $L^2(\mathbb{H})$

Définition 5.1. *Si* $\alpha \in (0,2)$ *et* $u \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^N)$, *Alors*

$$\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\alpha}{2}} u = \Delta_{\mathbb{H}} u * R_{2-\alpha}$$

où

$$R_\beta(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\beta}{2})} \int_0^\infty t^{\frac{\beta}{2}-1} h(t,x)dt$$

et $h(t,x)$ *la solution fondamentale de* $\Delta_{\mathbb{H}} + \partial/\partial t$.

Théorème 5.1. *(voir [18, 19]) L'opérateur* $\Delta_{\mathbb{H}}$ *est un opérateur auto-adjoint positif sur le domaine* $W^{2,2}(\mathbb{H}^N)$. *Si* $\{E(\lambda)\}$ *la résolution spectrale de* $\Delta_{\mathbb{H}}$ *sur* $L^2(\mathbb{H}^N)$, *pour tout* $\alpha > 0$ *on a*

$$\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\alpha}{2}} = \int_0^\infty \lambda^{\frac{\alpha}{2}} dE(\lambda)$$

avec le domaine

$$H^\alpha(\mathbb{H}^N) = W^{\alpha,2}(\mathbb{H}^N) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{H}^N) : \int_0^\infty \lambda^\alpha d\langle E(\lambda)u, u\rangle < \infty \right\}$$

muni de la norme de graphe.

5.3 Cas d'une seule équation

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha_{0/t}(u) - \left(\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}\right)(|u|^m) = |u|^p \ , \ \text{pour} \ (\eta,t) \in \mathbb{H}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^+ \\ u(\eta,0) = u_0(\eta) \geq 0, \ \text{pour} \ \eta \in \mathbb{H}^{\mathbb{N}} \end{cases} \tag{5.11}$$

où $p > 1$, $\alpha \in (0,1)$ sont des réels et $m \in \mathbb{N}$.

Définition 5.2. *Une solution faible locale de problème (FNLE) dans* $Q_T = \mathbb{R}^{2N+1} \times (0,T)$ *avec la condition initiale positive* $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2N+1})$*, est une fonction localement intégrable* $u \in L^{max(p,m)}_{loc}(Q_T)$ *vérifie :*

$$\int_{Q_T} \left(-uD^{\alpha}_{t/T}\varphi + |u|^m \left(\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}} \right)(\varphi) + |u|^p \varphi + u_0(\eta) D^{\alpha}_{t/T}\varphi \right) d\eta dt = 0. \tag{5.12}$$

Pour toute fonction test positive $\varphi \in C^1\left((0,T]; H^{\beta}(\mathbb{H}^N)\right)\right) \cap C\left((0,T]; H^{\beta}(\mathbb{H}^N)\right)$ *vérifiant* $\varphi(.,T) = 0$.

Les intégrales dans la définition ci-dessus sont supposées convergentes. Si $T = +\infty$ la solution est dite globale.

Théorème 5.2. *Soit* $N \geq 1$ *et* $p > 1$ *on suppose que :*

$$1 < m < p < p_{m,\alpha,\beta} = m + \frac{\beta}{\alpha Q} \tag{5.13}$$

alors le problème (FNLE) n'admet pas une solution faible globale autre que la solution triviale.

Démonstration.
La preuve est basée sur un choix convenable d'une fonction test. Supposons que le problème (5.11) admet une solution faible globale non triviale u, soient T, R et $\mu > 1$ (qui sera déterminé plus tard) trois réels positifs et soit φ une fonction test assez régulière. Comme la condition initiale u_0 est positive la formulation variationnelle (5.12) entraine :

$$\int_{Q_{TR^{\mu}}} |u|^p \varphi d\eta dt \leq \int_{Q_{TR^{\mu}}} uD^{\alpha}_{t/TR^{\mu}}\varphi d\eta dt + \int_{Q_{TR^{\mu}}} |u|^m \left(-\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}} \right) \varphi d\eta dt. \tag{5.14}$$

La fonction test φ qui est choisie doit être donnée pour s'assurer que :

$$\int_{Q_{TR^{\mu}}} \left(\left| D^{\alpha}_{t/TR^{\mu}}\varphi \right|^{\frac{p}{\alpha(p-1)}} (\varphi)^{-\frac{p}{\alpha(p-1)}} + \left| \left(-\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}} \right)(\varphi) \right|^{\frac{p}{\alpha(p-m)}} (\varphi)^{-\frac{p}{\alpha(p-m)}} \right) \varphi d\eta dt < \infty$$

pour estimer le membre de droite de (5.14), on applique l'inégalité de Young pour $\varepsilon > 0$ arbitraire. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}
\int_{Q_{TR^\mu}} u D^\alpha_{t/TR^\mu}\varphi d\eta dt &= \int_{Q_{TR^\mu}} u\,(\varphi)^{\frac{p(1-\alpha)+\alpha}{p}}\,(\varphi)^{-\frac{p(1-\alpha)+\alpha}{p}}\,D^\alpha_{t/TR^\mu}\varphi d\eta dt \\
&\leq \varepsilon \int_{Q_{TR^\mu}} |u|^{\frac{p}{p(1-\alpha)+\alpha}}\varphi d\eta dt \\
&\quad + C_\varepsilon \int_{Q_{TR^\mu}} \left|D^\alpha_{t/TR^\mu}\varphi\right|^{\frac{p}{\alpha(p-1)}}\,(\varphi)^{1-\frac{p}{\alpha(p-1)}}\,d\eta dt
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{Q_{TR^\mu}} |u|^m \left(-\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}\right)(\varphi) d\eta dt &= \int_{Q_{TR^\mu}} |u|^m\,(\varphi)^{\frac{p(1-\alpha)+\alpha m}{p}}\,(\varphi)^{-\frac{p(1-\alpha)+\alpha m}{p}}\left(-\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}\right)(\varphi) d\eta dt \\
&\leq \varepsilon \int_{Q_{TR^\mu}} |u|^{\frac{mp}{p(1-\alpha)+\alpha m}}\varphi d\eta dt \\
&\quad + C_\varepsilon \int_{Q_{TR^\mu}} \left|\left(-\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}\right)(\varphi)\right|^{\frac{p}{\alpha(p-m)}}\,(\varphi)^{1-\frac{p}{\alpha(p-m)}}\,d\eta dt
\end{aligned}$$

On choisit ε suffisamment petit on aura :

$$\int_{Q_{TR^\mu}} |u|^p \varphi d\eta dt \leq C_\varepsilon \int_{Q_{TR^\mu}} \left(\left|D^\alpha_{t/TR^\mu}\varphi\right|^{\frac{p}{\alpha(p-1)}}(\varphi)^{1-\frac{p}{\alpha(p-1)}} + \left|\left(-\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}\right)(\varphi)\right|^{\frac{p}{\alpha(p-m)}}(\varphi)^{1-\frac{p}{\alpha(p-m)}}\right) d\eta dt \tag{5.15}$$

Prendrons maintenant :

$$\varphi(\eta,t) = \varphi_1(\eta).\varphi_2(t) = \Phi\left(\frac{\tau^2+|x|^4+|y|^4}{R^4}\right).\Phi\left(\frac{t}{R^\mu}\right)$$

où $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ vérifie $0 \leq \Phi \leq 1$ et

$$\Phi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; r \geq 2 \\ 1 & \text{si } \; 0 \leq r \leq 1 \end{cases} \tag{5.16}$$

Afin d'estimer le membre de droite dans (5.15), on applique le changement de variable suivant

$$\widetilde{\tau} = R^{-2}\tau, \quad \widetilde{x} = R^{-1}x, \quad \widetilde{y} = R^{-1}y, \quad \widetilde{t} = R^{-\mu}t$$

Nous adoptons la notation $X \lesssim Y$ pour désigner l'estimation $X \leq CY$ pour certaines constantes $C \geq 0$.

Et pour s'assurer que $supp\varphi \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ nous devons choisir

$$\Omega_1 = \left\{(\widetilde{\eta} \in \mathbb{H}^N, \quad 0 \leq \widetilde{\tau}^2 + |\widetilde{x}|^4 + |\widetilde{y}|^4 \leq 2\right\}$$

et

$$\Omega_2 = \left\{\widetilde{t} \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq \widetilde{t} \leq 2\right\}$$

Alors

$$\left|\left(-\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}\right)(\varphi)(\widetilde{\eta}, \widetilde{t})\right| \lesssim R^{-\beta} \quad \forall(\widetilde{\eta}, \widetilde{t}) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \tag{5.17}$$

Comme $d\eta dt = R^{Q+\mu}d\widetilde{\eta}d\widetilde{t}$, et $\left|D^{\alpha}_{t/TR^{\mu}}\varphi\right| = R^{-\mu\alpha}\left|D^{\alpha}_{\widetilde{t}/T}\varphi\right|$ on déduit d'après (5.15) que :

$$\int_{Q_{TR^{\mu}}} \left|D^{\alpha}_{t/TR^{\mu}}\varphi\right|^{\frac{p}{\alpha(p-1)}} (\varphi)^{1-\frac{p}{\alpha(p-1)}}\, d\eta dt \lesssim R^{-\frac{\mu p}{(p-1)}+Q+\mu} \tag{5.18}$$

et

$$\int_{Q_{TR^{\mu}}} \left|\left(-\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}\right)(\varphi)\right|^{\frac{p}{\alpha(p-m)}} (\varphi)^{1-\frac{p}{\alpha(p-m)}}\, d\eta dt \lesssim R^{-\frac{\beta p}{\alpha(p-m)}+Q+\mu} \tag{5.19}$$

Pour obtient le même exposant de R dans (5.18) et (5.19) doit être $\mu = \frac{\beta(p-1)}{\alpha(p-m)}$ donc

$$\int_{Q_{TR^{\mu}}} |u|^p\varphi d\eta dt \lesssim R^{Q-\frac{\beta}{\alpha(p-m)}} \tag{5.20}$$

Maintenant dans le cas où

$$Q - \frac{\beta}{\alpha(p-m)} < 0 \Longleftrightarrow 1 < m < p < p_{m,\alpha,\beta} = m + \frac{\beta}{\alpha Q}$$

l'exposant de R dans (5.20) est négatif. Alors quand $R \longrightarrow +\infty$ en utilisant le lemme de Fatou, on obtient

$$\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^{2N+1}} |u|^p d\eta dt = 0 \tag{5.21}$$

par conséquent que $u \equiv 0$, ceci contredit le fait que u est solution faible non-triviale de (5.11). $\square$

Remarque 5.1. *Si $\alpha = 1$ on recouvre le résultat d'équation parabolique non locale de type :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \left(\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}\right)(|u|^m) = |u|^p$$

étudiée par B. Ahmad et al [4]

5.4 Système de deux équations

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \mathbf{D}^{\alpha}_{0/t}u - \left(\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}\right)(u) & = & \mid v \mid^p \quad \text{dans} \quad \mathbb{H}^N \times \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{D}^{\delta}_{0/t}v - \left(\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}\right)(v) & = & \mid u \mid^q \quad \text{dans} \quad \mathbb{H}^N \times \mathbb{R}^+ \\ u(\eta,0) = u_0(\eta) \geq 0 & & v(\eta,0) = v_0(\eta) \geq 0. \end{cases} \tag{5.22}$$

où $\mathbf{D}^{\alpha}_{0/t}$ ($resp.\mathbf{D}^{\delta}_{0/t}$) désigne la dérivée fractionnaire en temps d'ordre $\alpha \in (0,1)$ ($resp \quad \delta \in (0,1)$), au sens de Caputo, et $p, q > 1$ sont des nombres réels. En notant aussi par $D^{\alpha}_{0/t}$ ($resp D^{\delta}_{0/t}$) la dérivée fractionnaire en temps d'ordre α ($resp \quad \delta$) au sens de de Riemann-Liouville. Nous avons ce qui suit

Définition 5.3. *Une solution faible locale du système (5.22) dans $Q_T = \mathbb{R}^{2N+1} \times (0,T)$ avec les données initiales positives $u_0, v_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2N+1})$, est un couple de fonctions localement intégrables (u,v) tel que $(u,v) \in L^q(Q_T) \times L^p(Q_T)$ satisfaisant :*

$$\int_{Q_T} \left(-uD^{\alpha}_{t/T}\varphi + u\left(\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}\right)(\varphi) + |v|^p\varphi + u_0(\eta)D^{\alpha}_{t/T}\varphi\right) d\eta dt = 0 \tag{5.23}$$

et

$$\int_{Q_T} \left(-vD^{\delta}_{t/T}\varphi + v\left(\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}\right)(\varphi) + |u|^q\varphi + v_0(\eta)D^{\delta}_{t/T}\varphi\right) d\eta dt = 0 \tag{5.24}$$

Pour toute fonction test positive $\varphi \in C^1\left((0,T]; H^{\beta}(\mathbb{H}^N)\right) \cap C\left((0,T]; H^{\beta}(\mathbb{H}^N)\right)$ vérifiant $\varphi(.,T) = 0$.

Comme la Définition 5.2, nous supposons que les intégrales dans (5.23) et (5.24) sont convergentes. Si $T = +\infty$ la solution est dite globale.

Théorème 5.3. *supposons que*

$$Q < Q_e^* = \frac{\beta}{pq-1} max\left\{pq(\alpha-1)+\delta p+1, pq(\delta-1)+\alpha q+1\right\}.$$

Alors le système (5.22) n'admet pas une solution faible globale (u,v) autre que la solution triviale.

Démonstration.

Comme dans la preuve du Théorèm 5.2, on prouve par l'absurde. Supposons que (u,v) est une solution faible non-triviale qui existe globalement en temps. Donc (u,v) existe dans $(0,T^*)$ pour T^* arbitraire. Soient T, R et $\mu > 1$ (qui sera déterminé plus tard) trois réels positifs tels que $0 < TR^\mu < T^*$.
Comme les conditions initiales u_0, v_0 sont positifs, la formulation variationnelle (5.23), (5.24) entraîne

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{Q_{TR^\mu}} |v|^p\varphi d\eta dt \leq \int_{Q_{TR^\mu}} uD^\alpha_{t/TR^\mu}\varphi d\eta dt - \int_{Q_T} u\left(\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}\right)(\varphi) d\eta dt \\ \displaystyle\int_{Q_{TR^\mu}} |u|^q\varphi d\eta dt \leq \int_{Q_{TR^\mu}} vD^\delta_{t/TR^\mu}\varphi d\eta dt - \int_{Q_T} v\left(\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}\right)(\varphi) d\eta dt \end{array}\right.$$

D'après l'inégalité de Hôlder on aura

$$\left\{\begin{array}{rl} \displaystyle\int_{Q_{TR^\mu}} |v|^p\varphi d\eta dt \leq & \displaystyle\left(\int_{Q_{TR^\mu}} |u|^q\varphi d\eta dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{Q_{TR^\mu}} \left|D^\alpha_{t/TR^\mu}\varphi\right|^{q'} (\varphi)^{-\frac{q'}{q}} d\eta dt\right)^{\frac{1}{q'}} \\ & \displaystyle+\left(\int_{Q_{TR^\mu}} |u|^q\varphi d\eta dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{Q_{TR^\mu}} \left|\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}(\varphi)\right|^{q'} (\varphi)^{-\frac{q'}{q}} d\eta dt\right)^{\frac{1}{q'}} \end{array}\right.$$

et

$$\left\{\begin{array}{rl} \displaystyle\int_{Q_{TR^\mu}} |u|^q\varphi d\eta dt \leq & \displaystyle\left(\int_{Q_{TR^\mu}} |v|^p\varphi d\eta dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_{TR^\mu}} \left|D^\delta_{t/TR^\mu}\varphi\right|^{p'} (\varphi)^{-\frac{p'}{p}} d\eta dt\right)^{\frac{1}{p'}} \\ & \displaystyle+\left(\int_{Q_{TR^\mu}} |v|^p\varphi d\eta dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_{TR^\mu}} \left|\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}(\varphi)\right|^{q'} (\varphi)^{-\frac{p'}{p}} d\eta dt\right)^{\frac{1}{p'}} \end{array}\right.$$

Dans la suite nous adoptons aussi la notation $X \lesssim Y$ pour désigner l'estimation $X \leq CY$ pour certaines constantes $C \geq 0$. Et donc nous avons

$$\int_{Q_{TR^\mu}} |v|^p \varphi d\eta dt \lesssim \left(\int_{Q_{TR^\mu}} |u|^q \varphi d\eta dt \right)^{\frac{1}{q}} \mathscr{A} \tag{5.25}$$

et

$$\int_{Q_{TR^\mu}} |u|^q \varphi d\eta dt \lesssim \left(\int_{Q_{TR^\mu}} |v|^p \varphi d\eta dt \right)^{\frac{1}{p}} \mathscr{B} \tag{5.26}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \left(\int_{Q_{TR^\mu}} \left| D^\alpha_{t/TR^\mu} \varphi \right|^{q'} (\varphi)^{-\frac{q'}{q}} \, d\eta dt \right)^{\frac{1}{q'}} + \left(\int_{Q_{TR^\mu}} \left| \Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}(\varphi) \right|^{q'} (\varphi)^{-\frac{q'}{q}} \, d\eta dt \right)^{\frac{1}{q'}} \\
\mathscr{B} &= \left(\int_{Q_{TR^\mu}} \left| D^\delta_{t/TR^\mu} \varphi \right|^{p'} (\varphi)^{-\frac{p'}{p}} \, d\eta dt \right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int_{Q_{TR^\mu}} \left| \Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}(\varphi) \right|^{p'} (\varphi)^{-\frac{p'}{p}} \, d\eta dt \right)^{\frac{1}{p'}}
\end{aligned}$$

En combinant (5.25) avec (5.26) on aura

$$\left(\int_{Q_{TR^\mu}} |v|^p \varphi d\eta dt \right)^{1-\frac{1}{pq}} \quad \lesssim \quad \mathscr{B}^{\frac{1}{q}} \mathscr{A}. \tag{5.27}$$

$$\left(\int_{Q_{TR^\mu}} |u|^q \varphi d\eta dt \right)^{1-\frac{1}{pq}} \quad \lesssim \quad \mathscr{A}^{\frac{1}{p}} \mathscr{B}. \tag{5.28}$$

Posons maintenant

$$\varphi(\eta, t) = \varphi(x, y, \tau, t) = \Phi\left(\frac{\tau^2 + |x|^4 + |y|^4 + t^{\frac{4}{\mu}}}{R^4} \right) \tag{5.29}$$

telle que $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ est une fonction positive régulière et décroissante vérifiant (5.16). Alors pour d'estimer $\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$ (dans (5.27),(5.28)) nous appliquons le changement des variables : $(\eta, t) = (x, y, \tau, t) \longmapsto (\widetilde{\eta}, \widetilde{t}) = (\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{\tau}, \widetilde{t})$ avec

$$\widetilde{x} = R^{-1}x, \quad \widetilde{y} = R^{-1}y, \quad \widetilde{\tau} = R^{-2}\tau, \quad \widetilde{t} = R^{-\mu}t. \tag{5.30}$$

Pour s'assurer que $supp(\varphi) \subseteq \Omega$ posons

$$\Omega = \left\{ (\widetilde{\eta}, \widetilde{t}) = (\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{\tau}, \widetilde{t}) \in \mathbb{H}^N \times \mathbb{R}^+ : \widetilde{\tau}^2 + |\widetilde{x}|^4 + |\widetilde{y}|^4 + \widetilde{t}^{\frac{4}{\mu}} < 2 \right\}$$

Alors il suit que

$$\left| \left(-\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}} \right) (\varphi)(\widetilde{\eta}, \widetilde{t}) \right| \lesssim R^{-\beta} \quad \forall (\widetilde{\eta}, \widetilde{t}) \in \Omega \tag{5.31}$$

Comme $d\eta dt = R^{Q+\mu} d\widetilde{\eta} d\widetilde{t}$, et $\left| D^{\alpha}_{t/TR^{\mu}} \varphi \right| = R^{-\mu\alpha} \left| D^{\alpha}_{\widetilde{t}/T} \varphi \right|$, nous établissons les estimations suivantes :

$$\int_{Q_{TR^{\mu}}} \left| D^{\alpha}_{t/TR^{\mu}} \varphi \right|^{q'} (\varphi)^{-\frac{q'}{q}} \, d\eta dt \lesssim R^{-\alpha\mu q' + Q + \mu} \tag{5.32}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{Q_{TR^{\mu}}} \left| \Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}} \varphi \right|^{q'} (\varphi)^{-\frac{q'}{q}} \, d\eta dt \quad & \lesssim \quad R^{-\beta q' + Q + \mu} \\ \text{Car} \quad \alpha \in (0,1) \qquad & \lesssim \quad R^{-\alpha\beta q' + Q + \mu} \end{aligned} \tag{5.33}$$

Pour obtenir le même l'exposant de R dans (5.32) et (5.33), nous choisissons $\mu = \beta$, donc on aura

$$\mathscr{A} \lesssim R^{-\alpha\beta + \frac{Q}{q'} + \frac{\beta}{q'}}$$

De la même façon, nous obtenons que

$$\mathscr{B} \lesssim R^{-\delta\beta + \frac{Q}{p'} + \frac{\beta}{p'}}$$

Ainsi de (5.27) et (5.28) il suit

$$\left(\int_{Q_{TR^{\mu}}} |v|^p \varphi d\eta dt \right)^{1 - \frac{1}{pq}} \quad \lesssim \quad R^{-\alpha\beta + \frac{Q}{q'} + \frac{\beta}{q'} + \frac{1}{q} \left[-\delta\beta + \frac{Q}{p'} + \frac{\beta}{p'} \right]} \tag{5.34}$$

$$\left(\int_{Q_{TR^{\mu}}} |u|^q \varphi d\eta dt \right)^{1 - \frac{1}{pq}} \quad \lesssim \quad R^{-\delta\beta + \frac{Q}{p'} + \frac{\beta}{p'} + \frac{1}{p} \left[-\alpha\beta + \frac{Q}{q'} + \frac{\beta}{q'} \right]} \tag{5.35}$$

Et donc il suffit de supposer que

$$\left\{\begin{array}{lcl} -\alpha\beta+\frac{Q}{q'}+\frac{\beta}{q'}+\frac{1}{q}\left[-\delta\beta+\frac{Q}{p'}+\frac{\beta}{p'}\right] & < & 0 \\ \\ \quad\text{ou bien} & & \\ \\ -\delta\beta+\frac{Q}{p'}+\frac{\beta}{p'}+\frac{1}{p}\left[-\alpha\beta+\frac{Q}{q'}+\frac{\beta}{q'}\right] & < & 0 \end{array}\right. \tag{5.36}$$

Cette condition est équivalente à

$$\left\{\begin{array}{lcl} Q & < & \dfrac{\beta pq(\alpha-1)+\beta\delta p+\beta}{pq-1} \\ \\ \quad\text{ou bien} & & \\ \\ Q & < & \dfrac{\beta pq(\delta-1)+\beta\alpha q+\beta}{pq-1} \end{array}\right. \tag{5.37}$$

C'est à dire

$$Q<Q_e^*=\frac{\beta}{pq-1}max\left\{pq(\alpha-1)+\delta p+1,pq(\delta-1)+\alpha q+1\right\} \tag{5.38}$$

Finallement quand $R\to\infty$ et d'après des estimations (5.25) et (5.28) ou bien (5.26) et (5.27), nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}^{2N+1}}\int_{\mathbb{R}^+}|u|^q d\eta dt \;\leq\; 0. \tag{5.39}$$

$$\int_{\mathbb{R}^{2N+1}}\int_{\mathbb{R}^+}|v|^p d\eta dt \;\leq\; 0. \tag{5.40}$$

On conclut alors que $u\equiv 0$ et $v\equiv 0$ ce qui est une contradiction. □

Remarque 5.2. *Si $\alpha=\delta=1$ nous améliorons l'exposant critique de système parabolique non locale de type :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial u}{\partial t}-\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}(u) & = & \mid v\mid^p \\ \frac{\partial v}{\partial t}-\Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{\beta}{2}}(v) & = & \mid u\mid^q \end{array}\right. \tag{5.41}$$

étudiée par M. Boutefnouchet et M. Kirane [13], car

$$\frac{\beta}{pq-1}max\left\{p+1,q+1\right\}\geq\frac{\beta}{pq-1}max\left\{p,q\right\}.$$

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse nous avons étudié le problème de non-existence des solutions globales pour certaines équations (resp-inégalités) et systèmes d'équations (resp-inégalités) différentielles fractionnaires sur le groupe d'Heisenberg, où nous avons prouvé l'existence des exposants critiques de type Fujita, en utilisant les techniques des fonctions tests.

• Un extension éventuelle est l'étude de la non-existence des solutions pour d'équations et des systèmes différentielles fractionnaires sur le groupe d'Heisenberg avec des termes de réaction plus généraux, ainsi avec des termes non linéaires plus généraux.

• Le problème d'existence des solutions pour les équations et les systèmes différentielles partielles d'ordre fractionnaires sur le groupe d'Heisenberg reste parmi les importants problèmes qui nécessitent beaucoup plus de recherche.

Annexe A

Annexe

A.1 Inégalités utiles

Proposition A.1. (Inégalité de Young)

Soient a, b deux réels positifs, et $1 \leq p, q < \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Proposition A.2. (Inégalité de ϵ-Young)

Soient a, b deux réels positifs, et $1 \leq p, q < \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, alors pour tout $\epsilon > 0$ on a

$$ab \leq \epsilon a^p + C_\epsilon b^q.$$

Théorème A.1. (Inégalité de Hölder)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, alors $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |fg| \, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

A.2 Quelques théorèmes de convergence

Lemme A.1. (Lemme de Fatou)

Soit (f_n) une suite de fonctions dans $L^1(\Omega)$ telle que

1. *pour tout* n $f_n \geq 0$ *p.p sur* Ω
2. $\sup\limits_n \int\limits_\Omega f_n < \infty$

pour tout $x \in \Omega$ *on pose* $f(x) = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} inf(f_n(x))$ *alors* $f \in L^1(\Omega)$, *et on a* $\int\limits_\Omega f(x) \leq \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} inf \int\limits_\Omega f_n$.

Théorème A.2. (Théorème de convergence monotone de Beppo levi)

Soit (f_n) *une suite croissante de fonctions dans* $L^1(\Omega)$ *telle que* $\sup\limits_n \int\limits_\Omega f_n < \infty$ *alors* $f_n \longrightarrow f$ *p.p sur* Ω, *avec* $f \in L^1(\Omega)$, *et on a* $\|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$.

Théorème A.3. (Théorème de convergence dominée de Lebesgue)

Soit (f_n) *une suite de fonctions dans* $L^1(\Omega)$ *suppose que*

1. $f_n \longrightarrow f$ *p p sur* Ω
2. *il existe une fonction* $g \in L^1(\Omega)$ *telle que pour tout* n $|f_n(x)| \leq g(x)$ *p p sur* Ω

Alors $f \in L^1(\Omega)$, *et on a* $\|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$.

Bibliographie

[1] S. Abbas, M. Benchohra, and G. M. N Guerekata : *Topics in Fractional differential equations*, Springer, New York, 2012.

[2] T. Abdeljawad, D. Baleanu : *Discrete fractional dfferences with nonsingular discrete Mittag-Lffler kernels*, Advances in Dfference Equations, 2016(1) (2016) 232.

[3] R. P. Agarwal, M. Benchohra, J. J. Nieto, and A. Ouahab : *Fractional differential equations and Inclusions*, Springer, Berlin, Germany, 2010.

[4] B. Ahmad, A. Alsaedi and M. Kirane : *Nonexistence of global solutions of some nonlinear space-nonlocal evolution equations on the Heisenberg group*, Electroni Journal of differential Equations, Vol.2015 (2015), No. 227, p 1-10.

[5] A. Atangana, D. Baleanu : *New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel Theory and application to heat transfer model*,Thermal Science, 20(2) (2016), p 763-769.

[6] A. Atangana, I. Koca : *Chaos in a simple nonlinear system with Atangana-Baleanu derivatives with fractional order*, Chaos, Solitons and Fractals, 89 (2016), p 447-454.

[7] A. Atangana : *Derivative with two fractional orders a new avenue of investigation toward revolution in fractional calculus*, The European Physical Journal Plus, 131(10) (2016) 373.

[8] H. Berestycki, I. Capuzzo Dolcetta, and L. Nirenberg : *Problèmes elliptiques indéfinis et théorèmes de liouville non-linéaires*, C.R.Acad.Sci.Paris, Série I.Vol 317, 1993, p 945-950.

[9] H. Berestycki, I. Capuzzo Dolcetta, and L. Nirenberg : *Superlinear indefinite elliptic proplems and nonlinear Liouville theorems*,Topological Methods in Nonlinear Analysis,Vol 4.1, 1995, p 59-78.

[10] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, and F. Uguzzoni : *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their Sub-Laplacians.*,Birkhäuser-Verlag, Springer-New York , 2007.

[11] S. Bordoni, R. Filippucci, and P. Pucci : *Nonlinear elliptic inequalities with gradient terms on the Heisenberg group*, Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications, 121 (2015) 262-279.

[12] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni : *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin (2007).

[13] M. Boutefnouchet, M. Kirane : *Nonexistence of solutions of some nonlinear non-local evolution systems on the Heisenberg group*, Journal of Fractional Calculus and Applied Analysis .Vol 18 N6, 2015, p 1336-1349.

[14] H. Brézis : *Analyse fonctionnelle théorie et appliation*, MASSON, Paris, 1987.

[15] L. Capogna, D. Danielli, S.D. Pauls, and J.T. Tyson : *An introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem*, Birkhäuser-Verlag, Berlin, 2007.

[16] I. Brindelli, I. Capuzzo Dolcetta, A. Cutri : *Lioville theomem for semilinear equation on the Heisenberg group*, Annales de l' I.H.P section C Tome 14-3, 1997, p 295-308.

[17] A. Debbouche, D. Baleanu, and R.P. Agarwal : *Nonlocal nonlinear integro-differential equations of fractional orders*, Boundary Value Prob. 2012(78) (2012) 10 pp.

[18] F. Ferrari, B. Franchi : *Harnack inequality for fractional sub-Laplacian in Carnot groups*, Mathematische Zeitschrift, 2015, pp 435-458.

[19] G.B. Folland : *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups*, Ark. Mat volume 13-2, **1975**, p 161-207.

[20] G.B. Folland : *Harmonic analysis in phase space*,volume 122. Princeton University Press, 1989.

[21] H. Fujita : *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for* $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, *J. Fac. Sci. Univ Tocyo Set*, J13. **1966** 109-124.

[22] N. Garofalo, E. Canconelli : *Existence and nonexistence results for semilinear equation on the Heisenberg group*, Indiana Univ Math J 41-1 .1992, p 91-97.

[23] B.Guo, X.Pu and F.Huang : *Fractional partial differential equations and their numerical solutions*, World Scientific, 2015.

[24] A. El Hamidi, M. Kirane : *Nonexistence results of solutions to systems of semilinear differential inqualities on the Heisenberg group*, Abstr. Appl. Anal. 2004(2) 155-164, 2004.

[25] A. El Hamidi, A. Obeid : *Systems of semilinear higher order evolution inqualities on the Heisenberg group*, J Math. Anal Appl. 208. 2003 no 1 p 77-90.

[26] K. Haouam, M. Sfaxi : *Nonexistence rerults of solutions of semilinear differential inequatlties with temperal fractonal derivative on the Heisenberg group*, Journal of Fractional Calculus and Applied Analysis, 2009.

[27] J. Heinonen : *Calculus on carnot groups*, volume 68. Fall School in Analysis, 1995. 1-31.

[28] J. Heinonen : *Lectures on analysis on metric spaces*, Springer-Verlag, 2001.

[29] L. Hörmander : *Hypoelliptic second order differential equation*, Acta.Math. 119, 1967, 147-171.

[30] A.G. Kartsatos, V.V Kurta : *On a comparision principale and the critical exponents for solutions of semilinear parabolic inequalities*, J London Math.Soc.66 No2. 2002 p 351-360.

[31] R. Kellil, M. Kirane : *Nonexistence of global weak solutions of a system of wave equations on the Heisenberg group*, J. Nonlinear Sci. Appl. 9 (2016), p 3279-3286.

[32] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo : *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier Science B.V, Amsterdam, 2006.

[33] M. Kirane, Y. Laskri, and N.E. Tatar : *Critical exponents of Fujita type for certain evolution equations and systems with spatio-temporal fractional derivatives*, J Math. Anal Appl, 312, 2005, p488–511.

[34] A.B. Malinowika, T. Odzijewica and D.F.M. Torres : *Advanced Methods in Fractinal Calculus of Variationl*, Springer Briefs Applied Sciences and Technology, 2015.

[35] B.Meneceur, K.Haouam and A. Debbouche : *Systems of semilinear evolution inequalities with temporal fractional derivative on the Heisenberg group*, Advances in Dfference Equations, 2017(12) (2017), p 1-15.

[36] H. Mokrani : *Study of a class of Semilinear Partial differential equations on the Heisenberg Group*, thése de Docterat-Université de Rouen, 2009.

[37] I. Podlubny : *Fractional differential equations*, Math, Sci Engrg. Acadmic Press, New York, 1999.

[38] S. Pohozaev, L. Véron : *Nonexistence results of semilinear differential inqualities on the Heisenberg group*, manusripta math 102, 2000, p 85-99.

[39] D. Ricciotti : *p-Laplace equation in the Heisenberg group regularity of solutions*, Springer Briefs in Mathematics, 2015.

[40] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.L. Marichev : *Fractional integrals and derivatives theory and applications*, Gordon and Breach, Amsterdam, 1993.

[41] S. Semmes : *An introduction to Heisenberg groups in analysis and geometry*, Notices.

[42] E.M. Stein : *Harmonic Analysis, Real variable methods, orthogonality and oscillatory integrals*, Princeton University Press, 1993.

[43] S. Suganya, D. Baleanu, P. Kalamani, and M.M. Arjunan : *On fractional neutral integro-differential systems with state-dependent delay and non-instantaneous impulses*, Advances in Difference Equations, 2015(1) (2015) 1-39.

[44] N. Tatar : *Nonexistence results for a fractional problem arisig in thermal diffusion in fractal media*, chaos solutios and fractals Vol 36, 2008, p 1205-1214.

[45] Y. Zhou : *Basic theory of fractional differential equations*, World Sc Pu, 2014.

ملخص:

تعنى هذه الأطروحة بدراسة مسألة عدم وجود الحلول الشاملة لجملة من المعادلات و نظم المعادلات التفاضلية الجزئية غيرالخطية ذات رتب كسريّة بالنسبة للزمن على زمره هايزنباغ, حيث ترتكز طريقة تقنيات البراهين أساسا على طريقة الدوال الإختبارية لتعيين الأس الحرجة من نمط فيجيتا.

الكلمات المفتاحية و العبارات الدّالة:

زمرة هايزنارغ - مشتقات كسرية - الأس الحرجة - طريقة التوابع الاختبارية - عدم وجود الحلول - معادلة (متراجحة) تطوريّة .

Abstract:

This thesis is devoted to the study of the non-existence problems of global solutions for some PDEs and partial differential systems with fractional derivatives with respect to time, the basic idea of proofs is based on the method of the functions test for the determination of the Fujita type exponent.

Key words and phrases:

Heisenberg group - fractional derivative - critical exponent - test function method - evolution equations (inequalities) - non-existence solutions.

Résumé :

Cette thèse est consacrée à l'étude des problèmes de la non-existence des solutions globales pour certaines EDPs et systèmes des EDPs avec des dérivées fractionnaires par rapport au temps, l'idée de base des preuves repose sur la méthode des fonctions tests pour la détermination l'exposant critique de type Fujita.

Mots-clés et expressions :

Groupe d'Heisenberg - dérivée fractionnaire - exposant critique - méthode des fonctions tests - équations d'évolution (inégalités) - non-existence des solutions.