RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ FRÈRES MENTOURI - CONSTANTINE 1
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

N° d'ordre : **54 / D.S / 2020.**
N° de Série : **04 / Maths / 2020.**

THESE

Présentée Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES EN MATHÉMATIQUES

Thème

Sur une Classe de Problèmes aux Limites pour Équations aux Dérivées Partielles

Option :

Équations aux Dérivées Partielles

Par :

Belmouloud Imane

Devant le jury :

Président	M^r.	M. DENCHE	Prof.	Université de Constantine 1
Directeur de Thèse	M^r.	A. MEMOU	M.C.A.	Université de Msila
Examinateur	M^r.	A. BERKANE	M.C.A.	Université de Constantine 1
Examinateur	M^r.	F. ELLAGOUNE	Prof.	Université 8 Mai 1945 Guelma
Examinateur	M^{me}.	N. ABADA	M.C.A.	E.N.S. de Constantine Assia Djebar
Examinateur	M^r.	KH. BESSILA	M.C.A.	Université de Constantine 1

Soutenue le : **15 Octobre 2020**

Remerciements

J'adresse mes remerciements à monsieur Memou Ameur directeur de la thèse

J'adresse l'expression de ma gratitude à notre enseignant le professeur Denche Mohamed qui me fait l'honneur de présider le jury

Mes gratitudes vont aussi à :

Mr Berkane Abd Alhak maître de conférences à l'université de Constantine 1

Mr Ellagoune Fateh professeur à l'université 8 Mai 45-Guelma-

Mme Abada Nadjet maître de conférences à l'ENS Constantine Assia Djebar

Mr Bessila Khaled maître de conférences à l'université de Constantine 1

Qui ont accepté d'examiner cette thèse et être membre dans ce jury

Un remerciement particulier pour mon amie-sœur Aichaoui Houda pour son aide précieuse

Contents

Introduction **3**

1 Rappels et Notions Préliminaires **6**

1.1 Rappel sur les opérateurs de régularisation 7

2 Sur la solvabilité d'une classe d'équations paraboliques non linéaires avec condition intégrale **10**

2.1 Position du problème 11

2.2 Problème linéaire associé 11

2.3 Inégalité énergétique et ses applications 12

2.4 Solvabilité du problème linéaire (2.6 - 2.9) 15

2.5 Etude du problème non linéaire 18

3 La solution forte d'un problème mixte pour une équation parabolique du seconde ordre avec condition intégrale **24**

3.1 L'unicité de la Solution 26

3.2 Solvabilité du problème (3.1-3.5) 34

4 Problème aux limites avec condition intégrale pour une équation parabolique **40**

Bibliographie **52**

Introduction

Plusieurs phénomènes physiques ont été formulés en modèles mathématiques par des équations différentielles partielles soumises à des conditions aux limites non locales ou intégrales. Ce type de condition reflet un sujet physique tel que l'énérgie, la chaleur, la masse...Dans les années soixante, Cannon [7] étudiait un problème mixte combinant une condition classique; qui est la condition de Dirichlet, avec une condition intégrale, pour une équation homogène parabolique, ses résultats ont été généralisés par Kamynim [24]. On peut citer aussi l'équation de la chaleur qui a été étudiée dans les travaux de Samarski [41]. Il y a également la mexité entre une condition locale et une condition intégrale qu'on peut trouver chez Canon Esteva et Van derHoeck [37], Yurchuk [45] et Bouziani [5].

La méthode utilisée dans ce travail est celle des inégalités énergetiques. Le premier aspect de cette méthode est vu chez I.G.Petovsky [38] dans son étude du problème de Cauchy, et a été developpé plus tard par Leray [28] et Garding [22], puis amélioré de plus en plus dans les travaux de Ladyzenskaja [26], Friedricks [21] et Yurchuk [45].

Le but de cette thèse est de développer la méthode de l'inégalité énergétique appelée aussi la méthode d'analyse fonctionnelle, pour une certaine classe de problèmes mixtes avec des conditions intégrales. Cette méthode d'analyse fonctionnelle, basée sur les idées de Leray [28], a également été utilisée pour l'étude de problèmes mixtes (avec des conditions classiques telles que Cauchy, Dirichlet, Neumann) par Benouar [4] et Bouziani [5]. On peut citer également les travaux de Denche-Marhoune [15, 16, 17], Denche-Memou [18, 35, 36] et Latrous-Memou [27].

Les étapes de l'étude des problèmes considérés sont décrites comme suit:

- Le choix du cadre fonctionnel convenable où on peut résoudre le problème posé.
- L'établissement des estimations à priori.
- La densité de l'ensemble image de l'opérateur généré par le problème posé.

Pour plus de précision, on suggère le shéma suivant qui a été donné la première fois par A.A. Dezin [19, 20].

Nous écrivons chacun des problèmes posés sous forme d'opérateur:

$$Lu = \mathfrak{F} \qquad \forall u \in D(L) \tag{a}$$

où l'opérateur L est défini d'un espace de Banach E dans un espace de Hilbert F qui sont bien choisis

Ensuite, nous établissons une estimation à priori pour la solution u

$$\|u\|_E \leq c\,\|Lu\|_F \qquad \forall u \in D(L) \tag{b}$$

L'estimation (b) se réalise d'une part grace à un multiplicateur Mu choisi, et qui est en général un opérateur intégro-différentiel et d'une autre part en utilisant des intégrations appropriées par parties. Jusqu'à présent, il n'y a pas de méthode précise pour construire Mu.

Ensuite, nous montrons que l'opérateur L est fermable. La solution de l'équation opératorielle:

$$\overline{L}u = \mathfrak{F} \qquad \forall u \in D\left(\overline{L}\right) \tag{c}$$

est appelé une solution forte du problème considéré.

Par passage à la limite, nous étendons l'estimation (b) aux solutions fortes, on obtient:

$$\|u\|_E \leq c\left\|\overline{L}u\right\|_F \qquad \forall u \in D\left(\overline{L}\right) \tag{d}$$

Enfin, nous établissons la densité de l'ensemble image de l'opérateur L, $R(L)$ dans F. De l'estimation (d) on déduit que l'opérateur L admet un inverse continu $\overline{L}^{-1}$. Nous montrons que la fermeture de l'ensemble des valeurs de l'opérateur L coïncide avec l'ensemble des valeurs de $\overline{L}$; c'est-à-dire $\overline{R(L)} = R\left(\overline{L}\right)$ par conséquent $R\left(\overline{L}\right) = F$, ainsi $\overline{L}$ est surjectif, d'où l'existence d'une solution forte du problème considéré.

Ce travail est réparti en quatres chapitres. Le premier chapitre est consacré à quelques définitions et notions préliminaires ainsi que quelques propositions qui sont utiles dans la suite de travail.

Le deuxième chapitre traite l'existence et l'unicité d'une solution faible pour une équation parabolique singulière non linéaire avec des conditions aux limites intégrales où nous énonçons le problème linéaire associé, nous introduisons les espaces fonctionnels convenables. Puis on établit une borne à priori à partir de laquelle nous déduisons l'unicité de la solution forte. Pour la solvabilité du problème linéaire associé, nous prouvons que l'ensemble des valeurs de l'opérateur généré par le problème considéré est dense. Après, nous appliquons un processus itératif pour établir l'existence et l'unicité de la solution faible du problème.

Le troisième chapitre est cosacré à étudier l'existence de la solution d'une équation parabolique avec condition intégrale, nous démontrons l'unicité de cette solution puis on étudie la solvabilité du problème considéré.

Le quatrième chapitre nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution forte pour une équation parabolique avec condition aux limites intégrale, la démonstation est basée sur les estimations à priori et la densité de l'image de l'opérateur généré par le problème posé. Le type d'équation étudié dans ce chapitre peut être vu comme une généralisation à celui déja étudié dans le chapitre 3.

Chapter 1

Rappels et Notions Préliminaires

1.1 Rappel sur les opérateurs de régularisation

On considère dans ce qui suit un espace de Hilbert H et un opérateur L défini de $D(L) \subset H \to H$ avec $\overline{D(L)} = H$

Définition 1.1 *L est dit dissipatif si*

$$\operatorname{Re}\langle Lu, u\rangle \leqslant 0, \qquad \forall u \in D(L)$$

Exemple 1.1 *Soit $L = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ avec le domaine de définition*

$$D(L) = \left\{u \in L^2[0,T]\,;\, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial^2}{\partial t^2} \in L^2[0,T], u(0) = 0, \frac{\partial}{\partial t}(T) = 0\right\}$$

L'opérateur L est dissipatif , En effet

$$\operatorname{Re}\langle Lu, u\rangle = \operatorname{Re}\int_0^T \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\overline{u}dt = \operatorname{Re}\frac{\partial u}{\partial t}\overline{u}\,\Big|_0^T - \int_0^T \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dt \leq 0$$

Définition 1.2 *L est dit accrétif si :*

$$\operatorname{Re}\langle Lu, u\rangle \geqslant 0, \qquad \forall u \in D(L)$$

Exemple 1.2 *Prenons*

$$L = \frac{\partial}{\partial t}, \quad G =]0,1[\times]0,T[$$

avec

$$D(L) = \{u \in L_2(G)\,;\; u(0,t) = 0\},$$

l'opérateur L est accrétif.
En effet, on a:

$$\langle Lu, u\rangle + \overline{\langle Lu, u\rangle} = \int_0^1 |u|^2\,|^T\,dx - \int_0^1 |u|^2\,|_0\,dx$$

En prenant en considération que $u(0,t) = 0$, on obtient

$$2\operatorname{Re}\langle Lu, u\rangle = \int_0^1 |u(x,T)|^2\,dx$$

ainsi $\operatorname{Re}\langle Lu, u\rangle \geq 0$.

Définition 1.3 *Si L est dissipatif tel que son extension est L, alors L est dit maximal*

Théorème 1.1 *Soit L défini de $D(L) \subset H \longrightarrow H$ avec $\overline{D(L)} = H$. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

i. *L est dissipatif*

ii. $\|(L - \lambda I)u\| \geq \operatorname{Re}\lambda\,\|u\|$, *pour tout u de $D(L)$ et tout λ avec* $\operatorname{Re}\lambda > 0$

iii. $\|(L - \lambda I)u\| \geq \lambda\,\|u\|$, *pour tout u de $D(L)$ et tout λ avec $\lambda > 0$*

Preuve. Supposons L dissipatif. Soit $u \in D(L)$ et soit λ tel que $\operatorname{Re}\lambda > 0$. On a:

$$\operatorname{Re}\langle Lu - \lambda u, u\rangle \leqslant \operatorname{Re}\langle Lu, u\rangle - \operatorname{Re}\lambda \|u\|^2 \leq -\operatorname{Re}\lambda \|u\|^2,$$

ainsi:

$$\|(L - \lambda I) u\| \|u\| \geq -\operatorname{Re}\langle Lu - \lambda u, u\rangle \geq \operatorname{Re}\lambda \|u\|^2$$

d'où la propriété (ii). la réciproque de (ii) à (i) est claire
Supposons maintenant que la propriété (iii) est vraie. Soit $u \in D(L)$ et $\lambda > 0$. On a:

$$\|Lu\|^2 - 2\lambda \operatorname{Re}\langle Lu, u\rangle = \|Lu - \lambda u\|^2 - \lambda^2 \|u\|^2 \geq 0$$

donc

$$\|Lu\|^2 \geq 2\lambda \operatorname{Re}\langle Lu, u\rangle,$$

comme le choix du nombre positif λ est arbitraire, on déduit $\operatorname{Re}\langle Lu, u\rangle \leq 0$ c'est-à-dire que L est dissipatif ■

Théorème 1.2 *Si L est dissipatif, alors L admet un opérateur prolongement fermé qui est aussi dissipatif.*

Théorème 1.3 *Si L est dissipatif, alors L admet un maximal dissipatif*

Proposition 1.1 *Si L est dissipatif, alors on a les équivalences suivantes:*

- *L est maximal dissipatif*
- $\operatorname{Im}(L - \lambda I) = H$ *pour tout* λ *avec* $\operatorname{Re}\lambda > 0$
- $\operatorname{Im}(L - \lambda I) = H$ *pour certaine* λ *avec* $\operatorname{Re}\lambda > 0$

Théorème 1.4 *Soit L défini de $D(L) \subset H \longrightarrow H$ avec $\overline{D(L)} = H$. Si L est dissipatif, alors on a les équivalences suivantes:*

- *L est maximal dissipatif*
- *L fermé, $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(L)$ et $\left\|(L - \lambda I)^{-1}\right\| \leq (\operatorname{Re}\lambda)^{-1}$*

Théorème 1.5 *Soit L défini de $D(L) \subset H \longrightarrow H$ avec $\overline{D(L)} = H$.*
Si L est dissipatif maximal, alors

- $J_\varepsilon^{-1} \in L(H)$
- $\left\|J_\varepsilon^{-1}\right\| < 1$
- $J_\varepsilon^{-1} u \longrightarrow u$ *quand* $\epsilon \longrightarrow 0$, *pour tout* $u \in H$

avec $J_\varepsilon^{-1} = (I - \varepsilon L)^{-1}, \varepsilon > 0$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, donc

$$\{\varepsilon,\ \varepsilon > 0\} \subset \rho(L)$$

d'où $(I - \varepsilon L)$ est continûment inverssible, ainsi

$$(I - \varepsilon L)^{-1} \in L(H).$$

Comme $\dfrac{1}{\varepsilon} > 0$, donc

$$\left(I - \frac{1}{\varepsilon} L\right)^{-1} \in L(H)$$

c'est-à-dire $\varepsilon J_\varepsilon^{-1} \in L(H)$ d'où $J_\varepsilon^{-1} \in L(H)$ et on déduit que $\left\| \left(I - \frac{1}{\varepsilon} L \right)^{-1} \right\| \leq \varepsilon$, le choix de ε étant arbitraire donc $\left\| J_\varepsilon^{-1} \right\| < 1$
Soit maintenant $u \in D(L)$, on a

$$\left\| J_\varepsilon^{-1} u - u \right\| = \left\| (I - \varepsilon L)^{-1} u - u \right\| = \varepsilon \left\| (I - \varepsilon L)^{-1} L u \right\| \leq \varepsilon \left\| L u \right\|,$$

en faisant tendre ε vers 0, on trouve $J_\varepsilon^{-1} u \to u$ et puisque $\overline{D(L)} = H$ on déduit que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon^{-1} u = 0, \forall u \in H.$$

$\blacksquare$

Posons $J_\varepsilon^{-1} = \left(I - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right)^{-1}$ et $\left(J_\varepsilon^{-1} \right)^* = \left(I + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right)^{-1}$ par rapport à t. Ces opérateurs fournissent la solution du problème :

$$\begin{cases} u_\varepsilon(t) - \varepsilon \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = u(t) \qquad u_\varepsilon(0) = 0 \\ \\ v_\varepsilon^*(t) + \varepsilon \dfrac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial t} = v(t) \qquad v_\varepsilon^*(T) = 0 \end{cases}$$

Proposition 1.2 *Soit $g \in L^2(0, T)$. Alors:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| J_\varepsilon^{-1} g - g \right\|_{L^2(0,T)} = 0$$

et

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| (J_\varepsilon^{-1})^* g - g \right\|_{L^2(0,T)} = 0.$$

Chapter 2

Sur la solvabilité d'une classe d'équations paraboliques non linéaires avec condition intégrale

Dans ce chapitre on étudiera l'existence et l'unicité de la solution d'une équation parabolique non linéaire avec des conditions aux limites intégrales et cela en introduisant le problème linéaire associé au problème posé.

2.1 Position du problème

Dans le rectangle $\Omega = [0,1] \times [0,T]$, on considère l'équation suivante:

$$\pounds u = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}), \tag{2.1}$$

avec la condition initiale

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,1], \tag{2.2}$$

la condition de Dirichlet

$$u(1,t) = 0 \qquad t \in [0,T], \tag{2.3}$$

et la condition intégrale donnée par

$$\int_0^\alpha u(x,t)\,dx + \int_\beta^1 u(x,t)\,dx = 0, \qquad 0 < \alpha \leq \beta \leq 1, \qquad t \in [0,T]. \tag{2.4}$$

Où φ et f sont des fonctions données. Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} \varphi(1) = 0, \\ \displaystyle\int_0^\alpha \varphi(x)\,dx + \int_\beta^1 \varphi(x)\,dx = 0, \end{cases}$$

et qu'il existe une constante positive d tel que

$$|f(x,t,u_1,v_1) - f(x,t,u_2,v_2)| \leq d\,(|u_1-u_2| + |v_1-v_2|) \qquad \text{pour tout } (x,t) \in \Omega. \tag{2.5}$$

Dans ce qui suit, nous commençons par prouver l'existence et l'unicité de la solution forte du problème linéaire associé au problème posé.

2.2 Problème linéaire associé

Dans ce paragraphe, nous étudions un problème linéaire lié à (2.1-2.4) et établissons l'existence et l'unicité de la solution forte.
Considérons dans le rectangle $\Omega =]0,1[\times]0,T[$ l'équation suivante:

$$\pounds u = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(x,t), \tag{2.6}$$

avec la condition initiale

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,1], \tag{2.7}$$

la condition de Dirichlet

$$u(1,t) = 0 \qquad t \in [0,T], \tag{2.8}$$

et la condition intégrale

$$\int_0^\alpha u(x,t)\,dx + \int_\beta^1 u(x,t)\,dx = 0, \qquad 0 < \alpha \leq \beta \leq 1 \qquad t \in [0,T]. \tag{2.9}$$

Soit $L_\rho^2(\Omega)$ l'espace poids des fonctions de carré intégrable muni de la norme finie

$$\|u\|_\rho^2 = \int_\Omega \rho(x)\,|u|^2\,dxdt,$$

et avec le produit scalaire associé

$$(u,v)_{L_\rho^2(\Omega)} = \int_\Omega \rho(x)\,u\overline{v}dxdt.$$

Soit $V^{1,0}(0,1)$ le sous-espace de $L_x^2(0,1)$ avec la norme finie

$$\|u\|_{V^{1,0}(0,1)}^2 = \int_0^1 x^2\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + |u|^2\right)dx,$$

et avec le produit scalaire associé

$$(u,v)_{V^{1,0}(0,1)} = \int_\Omega x^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + u\overline{v}\right)dxdt.$$

Pour cela, on considère la solution du problème (2.6-2.9) comme solution de l'équation opératorielle $Lu = \mathcal{F} = (f,\varphi)$, où L est l'opérateur de domaine de définition $D(L)$ formé des fonctions $u \in L^2(\Omega)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\Omega)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} \in L^2(\Omega)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \in L^2(\Omega)$ et u vérifie les conditions (2.8-2.9). L'opérateur L est considéré de E dans F, où E est l'espace de Banach des fonctions u muni de la norme finie

$$\|u\|_E^2 = \int_\Omega x^2\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2\right)dxdt + \sup_t \int_\Omega x^2\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + |u|^2\right)dx,$$

F est l'espace de Hilbert des fonctions $F = (f,\varphi) \in L_x^2(\Omega) \times V^{1,0}(0,1)$, avec la norme finie

$$\|F\|_F^2 = \int_\Omega x^2\,|f|^2\,dxdt + \int_0^1 x^2\left(\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 + |\varphi|^2\right)dx.$$

Puis nous établissons une inégalité énergétique donnée par l'expression suivante

$$\|u\|_E \leq C\,\|Lu\|_F, \qquad \forall u \in D(L), \tag{2.10}$$

et on montre que l'opérateur L admet une fermeture $\overline{L}$.

2.3 Inégalité énergétique et ses applications

Théorème 2.1 *Il existe une constante positive C, tel que, pour toute fonction $u \in D(L)$ on a*

$$\|u\|_E \leq C\,\|Lu\|_F. \tag{2.11}$$

Preuve. Prenons le produit scalaire dans $L^2(\Omega_s = [0,1]\times[0,s])$ de l'équation (2.6) et de l'opérateur intégro-différentiel

$$e^{-ct}Mu = e^{-ct}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial t} - x\int_0^x \frac{\partial u}{\partial t}(\zeta,t)\,d\zeta + x\int_\alpha^x \frac{\partial u}{\partial t}(\zeta,t)\,d\zeta - x\int_\beta^x \frac{\partial u}{\partial t}(\zeta,t)\,d\zeta\right),$$

où $c>0$. En prenant les parties réelles, on obtient

$$\Phi(u,u) = \operatorname{Re}\int_{\Omega_s} \exp(-ct)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{Mu}dxdt - \operatorname{Re}\int_{\Omega_s} \exp(-ct)\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)\overline{Mu}dxdt. \qquad (2.12)$$

Intégrons par parties chaque terme dans (2.12) par rapport à x et t, en utilisant les conditions (2.7), (2.8) et (2.9), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_s} x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt \;+\; \frac{1}{2}\int_0^s dt\left|\int_0^1 x\frac{\partial u}{\partial t}dx\right|^2 \;+\; \frac{1}{2}\int_{\Omega_s}\frac{\int_0^x\left|\zeta\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 d\zeta}{x^2}dxdt\\
&+\frac{c}{2}\int_{\Omega_s} x^2\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt \;+\; \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\Bigg|_{t=s}\\
&= \operatorname{Re}\int_{\Omega_s}\exp(-ct)\,\pounds u\overline{Mu}dxdt + \int_0^1 \frac{x^2}{2}\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Substituons Mu par son expression dans le premier terme du côté droit de (2.13), on obtient

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\int_{\Omega_s}\exp(-ct)\,\pounds u\overline{Mu}dxdt \;&=\; \operatorname{Re}\int_{\Omega_s} x^2\exp(-ct)\,f\frac{\partial u}{\partial t}dxdt\\
-\operatorname{Re}\int_{\Omega_s}\exp(-ct)\,xf&\left(\int_0^x \frac{\partial u}{\partial t}d\zeta - \int_\alpha^x \frac{\partial u}{\partial t}d\zeta + \int_\beta^x \frac{\partial u}{\partial t}d\zeta\right)dxdt. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

En intégrant le dernier terme dans (2.14) par rapport à x et en utilisant la condition (2.9), on trouve

$$-\operatorname{Re}\int_{\Omega_s}\exp(-ct)\,xf\left(\int_0^x \frac{\partial u}{\partial t}d\zeta - \int_\alpha^x \frac{\partial u}{\partial t}d\zeta + \int_\beta^x \frac{\partial u}{\partial t}d\zeta\right)dxdt = \int_{\Omega_s}\exp(-ct)\frac{\partial u}{\partial t}\int_0^x \zeta f d\zeta dxdt,$$

donc la formule (2.14) devient

$$\operatorname{Re}\int_{\Omega_s}\exp(-ct)\,\pounds u\overline{Mu}dxdt = \operatorname{Re}\int_{\Omega_s} x^2\exp(-ct)\,f\frac{\partial u}{\partial t}dxdt + \int_{\Omega_s}\exp(-ct)\frac{\partial u}{\partial t}\int_0^x \zeta f d\zeta dxdt,$$

De plus, en utilisant les $\varepsilon-$inégalités, nous avons

$$\operatorname{Re}\int_{\Omega_s} x^2\exp(-ct)\,f\frac{\partial u}{\partial t}dxdt \le \frac{\varepsilon_1}{2}\int_{\Omega_s} x^2\exp(-ct)\,|f|^2 dxdt + \frac{1}{2\varepsilon_1}\int_{\Omega_s} x^2\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt,$$

et

$$\int_{\Omega_s}\exp(-ct)\frac{\partial u}{\partial t}\int_0^x \zeta f d\zeta dxdt \le \frac{1}{2\varepsilon_2}\int_{\Omega_s} x^2\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt + \frac{\varepsilon_2}{2}\int_{\Omega_s}\exp(-ct)\frac{\left|\int_0^x \zeta f d\zeta\right|^2}{x^2}dxdt.$$

On montre que

$$\int_{\Omega_s}\exp(-ct)\frac{\left|\int_0^x \zeta f(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2}{x^2}dxdt \;\le\; 4\int_{\Omega_s} x^2\exp(-ct)\,|f|^2 dxdt.$$

Maintenant et à partir des inégalités ci-dessus, la formule (2.13) devient

$$\int_{\Omega_s}\left(1-\frac{1}{2\varepsilon_1}-\frac{1}{2\varepsilon_2}\right)x^2\exp\left(-ct\right)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_0^s dt\left|\int_0^1 x\frac{\partial u}{\partial t}dx\right|^2$$

$$+\int_{\Omega_s}\frac{\int_0^x\left|\zeta\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 d\zeta}{2x^2}dxdt+c\int_{\Omega_s}\frac{x^2}{2}\exp\left(-ct\right)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt+\int_0^1\frac{x^2}{2}\exp\left(-ct\right)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\Big|_{t=s}$$

$$\leq\left(\frac{\varepsilon_1}{2}+2\varepsilon_2\right)\int_{\Omega_s}x^2\exp\left(-ct\right)\left|f\right|^2 dxdt+\int_0^1\frac{x^2}{2}\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx,$$

On prend $\varepsilon_1=\varepsilon_2=2$, alors

$$\int_{\Omega_s}x^2\exp\left(-ct\right)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt+\int_{\Omega_s}x^2\exp\left(-ct\right)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt+\int_0^1 x^2\exp\left(-ct\right)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\Big|_{t=s}$$

$$\leq\frac{10}{\min\left(1,c\right)}\left(\int_{\Omega_s}x^2\exp\left(-ct\right)\left|f\right|^2 dxdt+\int_0^1 x^2\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx\right) \tag{2.15}$$

De (2.6) et (2.15) on déduit que

$$\int_{\Omega_s}x^2\exp\left(-ct\right)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\leq\left(\frac{20}{\min\left(1,c\right)}+2\right)\left(\int_{\Omega_s}x^2\exp\left(-ct\right)\left|f\right|^2 dxdt+\int_0^1 x^2\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx\right).$$

Intégrons le terme $\exp\left(-ct\right)x^2 u\dfrac{\partial u}{\partial t}$ par rapport à t et utilisons (2.15), on obtient

$$\int_0^1 x^2\exp\left(-ct\right)\left|u\right|^2 dx\Big|_{t=s} dx$$

$$\leq\left(\frac{10}{c\min\left(1,c\right)}+1\right)\left(\int_{\Omega_s}x^2\exp\left(-ct\right)\left|f\right|^2 dxdt+\int_0^1 x^2\left(\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2+\left|\varphi\right|^2\right)dx\right).$$

Alors, de l'inégalité ci-dessus et (2.15), nous obtenons

$$\int_{\Omega_s}x^2\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2\right)dxdt+\int_0^1 x^2\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\left|u\right|^2\right)dx\Big|_{t=s}$$

$$\leq C^2\left(\int_{\Omega}x^2\left|f\right|^2 dxdt+\int_0^1 x^2\left(\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2+\left|\varphi\right|^2\right)dx\right) \tag{2.16}$$

Le côté droit de (2.16) est indépendant de s, en prenant la borne supérieure par rapport à t de 0 à T, on obtient l'inégalité souhaitée

$$\left\|u\right\|_E\leq C\left\|Lu\right\|_F,\forall u\in D\left(L\right),$$

où

$$C^2=\left(\frac{30}{\min\left(1,c\right)}+\frac{10}{c\min\left(1,c\right)}+3\right)e^{cT}.$$

■

Lemme 2.1 *L'opérateur L de E dans F admet une fermeture $\overline{L}$.*

Définition 2.1 *On appelle solution forte du problème (2.6-2.9) la solution de l'équation opératorielle $\overline{L}u = \mathcal{F}$*

Le théorème précédent est valable pour une solution forte, alors nous avons l'inégalité

$$\|u\|_E \leq C \left\|\overline{L}u\right\|_F, \qquad \forall u \in D\left(\overline{L}\right).$$

On obtient donc le corollaire suivant

Corollaire 2.1 *Si la solution forte du problème (2.6-2.9) existe, alors elle est unique et dépend continûment de $\mathcal{F}$.*

Corollaire 2.2 *L'ensemble des valeurs $R(\overline{L})$ de l'opérateur $\overline{L}$ est fermé dans F et $R(\overline{L}) = \overline{R(L)}$.*

2.4 Solvabilité du problème linéaire (2.6 - 2.9)

Pour démontrer la solvabilité du problème linéaire (2.6-2.9), il suffit de montrer que $R(L)$ est dense dans F. La démonstration est basée sur le lemme suivant

Lemme 2.2 *Soit $D_0(L) = \{u \in D(L),\ u(x,0) = 0\}$. Si pour $u \in D_0(L)$ et pour une certaine fonction $w \in L^2_{\sqrt{\phi(x)}}(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega \phi(x)\, \pounds u\overline{w}dxdt = 0, \tag{2.17}$$

où

$$\phi(x) = \begin{cases} x^3, & x \in (0,\alpha) \cup (\alpha,\beta), \\ x(x-\beta)^2, & x \in (\beta,1), \end{cases}$$

alors $w = 0$.

Preuve. L'égalité (2.17) peut s'écrire sous la forme

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\overline{Nv}dxdt = \int_\Omega A(t)u\overline{v}dxdt, \tag{2.18}$$

où

$$v = \begin{cases} xw - \displaystyle\int_x^\alpha wd\zeta, & x \in (0,\alpha), \\ x^2 w, & x \in (\alpha,\beta), \\ (x-\beta)\,w - \displaystyle\int_x^1 wd\zeta, & x \in (\beta,1), \end{cases} \tag{2.19}$$

et

$$A(t)u = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\rho(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

où

$$\rho(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,\alpha), \\ 1, & x \in (\alpha,\beta), \\ (x-\beta), & x \in (\beta,1), \end{cases}$$

et

$$Nv=\begin{cases} x^2v+x\displaystyle\int_0^x vd\zeta = x^3w, & x\in(0,\alpha), \\ xv=x^3w, & x\in(\alpha,\beta), \\ x(x-\beta)v-x\displaystyle\int_\beta^x vd\zeta = x(x-\beta)^2 w, & x\in(\beta,1), \end{cases} \tag{2.20}$$

De (2.19), on conclut que $\int_0^\alpha vdx+\int_\beta^1 vdx=0$.

On introduit les opérateurs de régularisation $J_\varepsilon^{-1}=\left(I+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}$ et $\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^*=\left(I-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}$, par rapport à t, alors, ces opérateurs fournissent la solution des problèmes:

$$\begin{cases} u_\varepsilon(t)-\varepsilon\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}=u(t) & u_\varepsilon(0)=0, \\ v_\varepsilon^*(t)+\varepsilon\dfrac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial t}=v(t) & v_\varepsilon^*(T)=0. \end{cases}$$

Nous avons également les propriétés suivantes: pour tout $g\in L^2(0,T)$, les fonctions $J_\varepsilon^{-1}g$, $\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^* g\in W_2^1(0,T)$. Si $g\in D(L)$, alors $J_\varepsilon^{-1}g\in D(L)$ et on a

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left\|J_\varepsilon^{-1}g-g\right\|_{L^2(0,T)}=0, \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left\|\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^* g-g\right\|_{L^2(0,T)}=0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Substituons la fonction u dans (2.18) par la fonction de régularisation u_ε et utilisons la relation

$$A(t)\,u_\varepsilon=J_\varepsilon^{-1}Au$$

on obtient

$$\int_\Omega u\ N\overline{\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial t}}dxdt=-\int_\Omega A(t)\,u\overline{v_\varepsilon^*}dxdt. \tag{2.22}$$

Le côté gauche de (2.22) est une fonction linéaire continue de u. D'où la fonction v_ε^* admet les dérivées $x\rho(x)\dfrac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x\rho(x)\dfrac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}\right)\in L^2(\Omega)$ et les conditions suivantes sont vérifiées:

$$\begin{cases} v_\varepsilon^*|_{x=\alpha}=v_\varepsilon^*|_{x=\beta}=v_\varepsilon^*|_{x=1}=0, \\ \left.\dfrac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}\right|_{x=\alpha}=\left.\dfrac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}\right|_{x=\beta}=x^2\left.\dfrac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\dfrac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}\right|_{x=1}=0. \end{cases} \tag{2.23}$$

Substituons $u=\int_0^t \exp(-c\tau)\,v_\varepsilon^* d\tau$ dans (2.18), où la constante $c<0$, on obtient

$$\int_\Omega \exp(-ct)\,v_\varepsilon^*\overline{Nv}dxdt=\int_\Omega A(t)\,u\overline{v}dxdt. \tag{2.24}$$

En utilisant les propriétés des opérateurs de régularisation, on trouve

$$\int_\Omega \exp(-ct)\,v_\varepsilon^*\overline{Nv}dxdt=\int_\Omega A(t)\,u\overline{v_\varepsilon^*}dxdt-\varepsilon\int_\Omega A(t)\,u\frac{\partial\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial t}dxdt. \tag{2.25}$$

Intégrons par parties le premier terme de (2.25), par raport à x et t, utilisons (2.23) on obtient

$$\operatorname{Re}\int_{\Omega} A(t)\, u\overline{v_{\varepsilon}^{*}}dxdt = -\int_0^1 \frac{x\rho(x)}{2}\exp(ct)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\Bigg|_{t=T} dx + c\int_{\Omega}\frac{x\rho(x)}{2}\exp(ct)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt,$$

Intégrons par parties le second terme de (2.25), par rapport à x et t dans le côté droit de (2.25) on obtient

$$-\varepsilon\int_{\Omega} A(t)\, u\frac{\partial\overline{v_{\varepsilon}^{*}}}{\partial t}dxdt = -\varepsilon\int_{\Omega} x\rho(x)\exp(ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right|^2 dxdt.$$

Pour $c<0$ et selon l'expression donnée ci-dessus, on déduit que

$$\operatorname{Re}\int_{\Omega}\exp(-ct)\, v_{\varepsilon}^{*}\overline{Nv}dxdt \leq 0$$

Substituons l'expression de Nv dans (2.25), on obtient

$$\int_{\Omega}\exp(-ct)\, v_{\varepsilon}^{*}\overline{Nv}dxdt = \int_{\Omega}\exp(-ct)\left(v_{\varepsilon}^{*}-v\right)\overline{Nv}dxdt + \int_{\Omega}\exp(-ct)\, v\overline{Nv}dxdt,$$

Puisque

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\exp(-ct)\, v\overline{Nv}dxdt &= \int_0^T\int_0^{\alpha}\exp(-ct)\, x^2|v|^2 dxdt \\ &+ \int_0^T\int_{\alpha}^{\beta}\exp(-ct)\, x|v|^2 dxdt + \int_0^T\int_{\beta}^{1}\exp(-ct)\, x(x-\beta)|v|^2 dxdt \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^{\alpha}\left|\int_0^x v d\zeta\right|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\beta}^{1}\left|\int_{\beta}^x v d\zeta\right|^2 dxdt,\end{aligned}$$

alors, par passage à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, on obtient $v=0$ et donc $w=0$. ■

Théorème 2.2 *L'ensemble des valeurs $R\left(\overline{L}\right)$ de $\overline{L}$ coïncide avec F.*

Preuve. Puisque F est un espace de Hilbert, alors $R\left(\overline{L}\right)=F$ si et seulement si la relation

$$\int_{\Omega}\exp(-ct)\, v_{\varepsilon}^{*}Nvdxdt = \int_{\Omega}\exp(-ct)\left(v_{\varepsilon}^{*}-v\right)Nvdxdt + \int_{\Omega}\exp(-ct)\, vNvdxdt, \qquad (2.26)$$

$$\int_{\Omega} x^2 \pounds u\overline{F}_1 dxdt + \int_0^1 x^2\varphi\overline{\varphi_1}dx + \int_0^1 x^2\frac{d\varphi}{dx}\overline{\frac{d\varphi_1}{dx}}dx = 0, \qquad (2.27)$$

pour un arbitraire $u\in D(L)$ et $F_1=(g,\varphi_1)\in F$ implique $F_1=0$. Prenons $u\in D_0(L)$ dans (2.27), on obtient $\int_{\Omega} x^2\pounds u\overline{F}_1 dxdt=0$ et utilisons lemme(2.2), on trouve que $\phi(x)\, w = x^2 g$ ce qui implique $g=0$. Par conséquent, pour $u\in D(L)$, on a

$$\int_0^1 x^2\varphi\overline{\varphi_1}dx + \int_0^1 x^2\frac{d\varphi}{dx}\overline{\frac{d\varphi_1}{dx}}dx = 0,$$

Puisque l'ensemble des valeurs de l'opérateur trace est dense dans l'espace de Hilbert avec la norme

$$\int_0^1 x^2\left(\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 + |\varphi|^2\right)dx$$

alors $\varphi=0$. ■

2.5 Etude du problème non linéaire

Dans cette partie, nous prouvons l'existence, l'unicité et la dépendance continue de la solution suivant les données du problème (2.1-2.4).
Si la solution du problème (2.1-2.4) existe, alors elle peut être exprimée sous la forme $u = w+U$, où U est une solution du problème homogène

$$\pounds U = \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0, \tag{2.28}$$

$$lU = U_0 = U\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right), \tag{2.29}$$

$$U\left(1,t\right) = 0, \tag{2.30}$$

$$\int_0^{\alpha} U\left(x,t\right)dx + \int_{\beta}^{1} U\left(x,t\right)dx = 0. \tag{2.31}$$

et w est une solution du problème

$$\pounds w = \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial w}{\partial x}\right) = F\left(x,t,w,\frac{\partial w}{\partial x}\right), \tag{2.32}$$

$$lw = w\left(x,0\right) = 0, \tag{2.33}$$

$$w\left(1,t\right) = 0, \tag{2.34}$$

$$\int_0^{\alpha} w\left(x,t\right)dx + \int_{\beta}^{1} w\left(x,t\right)dx = 0. \tag{2.35}$$

où $F\left(x,t,w,\frac{\partial w}{\partial x}\right) = f\left(x,t,w+U,\frac{\partial\left(w+U\right)}{\partial x}\right)$ et vérifie la condition

$$|F(x,t,u_1,v_1) - F(x,t,u_2,v_2)| \leq d\left(|u_1-u_2| + |v_1-v_2|\right) \qquad \text{pour tout } x,t \in \Omega. \tag{2.36}$$

D'après le théorème (2.1) et le lemme (2.2), le problème (2.28 , 2.31) admet une solution unique qui dépend continûment sur $U_0 \in V^{1,0}\left(0,1\right)$. Nous prouverons que le problème (2.32-2.35) admet une solution faible en utilisant un processus d'approximation puis nous passons à la limite.
Supposons que v et $w \in C^1\left(Q\right)$ et que les conditions suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} v\left(x,T\right) = 0, \\ \int_0^{\alpha} v\left(x,t\right)dx + \int_{\beta}^{1} v\left(x,t\right)dx = 0, \\ w\left(x,0\right) = 0,\ w\left(1,t\right) = 0. \end{cases} \tag{2.37}$$

Prenons le produit scalaire dans $L^2\left(Q\right)$ de l'équation (2.32) avec l'opérateur intégro-différentiel

$$Mv = -x\int_0^{x} v\left(\zeta,t\right)d\zeta + x\int_{\alpha}^{x} v\left(\zeta,t\right)d\zeta - x\int_{\beta}^{x} v\left(\zeta,t\right)d\zeta,$$

En prenant la partie réelle, on obtient

$$\begin{aligned}H(w,v) &= \operatorname{Re}\int_\Omega F\left(x,t,w,\frac{\partial w}{\partial x}\right)\overline{Mv}dxdt \\ &= \operatorname{Re}\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial t}\overline{Mv}dxdt - \operatorname{Re}\int_\Omega \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial w}{\partial x}\right)\overline{Mv}dxdt. \qquad (2.38)\end{aligned}$$

Substituons l'expression de Mv dans chaque terme de (2.38) et intégrons par rapport à x et t, utilisons la condition (2.37), on trouve

$$\operatorname{Re}\int_\Omega F\left(x,t,w,\frac{\partial w}{\partial x}\right)\overline{Mv}dxdt = \operatorname{Re}\int_\Omega v\left[\int_0^x \zeta \overline{F\left(\zeta,t,w,\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)}d\zeta\right]dxdt, \qquad (2.39)$$

et

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial t}\overline{Mv}dxdt \;=\; &\operatorname{Re}\int_\Omega xw\left(\int_0^x \overline{\frac{\partial v}{\partial t}}(\zeta,t)\,d\zeta\right. \\ &\left. - \int_\alpha^x \overline{\frac{\partial v}{\partial t}}(\zeta,t)\,d\zeta + \int_\beta^x \overline{\frac{\partial v}{\partial t}}(\zeta,t)\,d\zeta\right)dxdt. \qquad (2.40)\end{aligned}$$

de plus

$$-\operatorname{Re}\int_\Omega \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial w}{\partial x}\right)\overline{Mv}dxdt = -\operatorname{Re}\int_\Omega x\frac{\partial w}{\partial x}\overline{v}dxdt. \qquad (2.41)$$

Maintenant, de (2.39), (2.40) et (2.41) l'expression donnée par (2.38) devient

$$\begin{aligned}H(w,v) =\; &\operatorname{Re}\int_\Omega v\left[\int_0^x \zeta\overline{F\left(\zeta,t,w,\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)}d\zeta\right]dxdt \\ &= -\operatorname{Re}\int_\Omega x\frac{\partial w}{\partial x}\overline{v}dxdt + \operatorname{Re}\int_\Omega xw\left(\int_0^x \overline{\frac{\partial v}{\partial t}}(\zeta,t)\,d\zeta\right. \\ &\left. - \int_\alpha^x \overline{\frac{\partial v}{\partial t}}(\zeta,t)\,d\zeta + \int_\beta^x \overline{\frac{\partial v}{\partial t}}(\zeta,t)\,d\zeta\right)dxdt. \qquad (2.42)\end{aligned}$$

Définition 2.2 *Une solution faible du problème (2.32-2.35) est une fonction* $w \in L^2\left(0,T : V^{1,0}(0,1)\right)$ *vérifiant la condition intégrale (2.35) et l'identité (2.42).*

Maintenant, nous allons construire une suite récurrente de la manière suivante. Commençons par $w_0 = 0$, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie comme suit: donnons w_{n-1}, donc pour $n \geq 1$, on résout le problème

$$\pounds w_n = \frac{\partial w_n}{\partial t} - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial w_n}{\partial x}\right) = F\left(x,t,w_{n-1},\frac{\partial w_{n-1}}{\partial x}\right), \qquad (2.43)$$

$$lw_n = w_n(x,0) = 0, \qquad (2.44)$$

$$w_n(1,t) = 0, \qquad (2.45)$$

$$\int_0^\alpha w_n(x,t)\,dx + \int_\beta^1 w_n(x,t)\,dx = 0. \qquad (2.46)$$

Du théorème 2.1 et lemme 2.2, on déduit que pour un n fixé, tout problème donné par (2.43-2.46) admet une solution unique $w_n(x,t)$.
Si on pose $V_n(x,t) = w_{n+1}(x,t) - w_n(x,t)$, nous obtenons le nouveau problème donné ci-dessous

$$\pounds V_n = \frac{\partial V_n}{\partial t} - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial V_n}{\partial x}\right) = \sigma_{n-1}, \tag{2.47}$$

$$lV_n = V_n(x,0) = 0, \tag{2.48}$$

$$V_n(1,t) = 0, \tag{2.49}$$

$$\int_0^\alpha V_n(x,t)\,dx + \int_\beta^1 V_n(x,t)\,dx = 0. \tag{2.50}$$

où

$$\sigma_{n-1} = F\left(x,t,w_n,\frac{\partial w_n}{\partial x}\right) - F\left(x,t,w_{n-1},\frac{\partial w_{n-1}}{\partial x}\right). \tag{2.51}$$

Lemme 2.3 *Supposons que la condition (2.36) est vérifiée, alors pour le problème linéarisé (2.47-2.50) il existe une constante positive k, tel que*

$$\|V_n\|_{L^2(0,T:\ V^{1,0}(0,1))} \leq k\,\|V_{n-1}\|_{L^2(0,T:V^{1,0}(0,1))}. \tag{2.52}$$

Preuve. Prenons le produit scalaire dans $L^2(\Omega_s = [0,1]\times[0,s])$ de l'équation (2.47) et l'opérateur intégro-différentiel

$$\exp(-ct)MV_n = \exp(-ct)\left(x^2\frac{\partial V_n}{\partial t} - x\int_0^x \frac{\partial V_n}{\partial t}(\zeta,t)\,d\zeta + x\int_\alpha^x \frac{\partial V_n}{\partial t}(\zeta,t)\,d\zeta - x\int_\beta^x \frac{\partial V_n}{\partial t}(\zeta,t)\,d\zeta\right),$$

où $c > 1$ et prenons les parties réelles, on obtient

$$\begin{aligned}\Phi(V_n,V_n) &= \mathrm{Re}\int_{\Omega_s} \sigma_{n-1}\overline{MV_n}dxdt \\ &= \mathrm{Re}\int_{\Omega_s} x^2\exp(-ct)\frac{\partial V_n}{\partial t}\overline{MV_n}dxdt - \mathrm{Re}\int_{\Omega_s}\frac{1}{x}\exp(-ct)\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial V_n}{\partial x}\right)\overline{MV_n}dxdt.\end{aligned} \tag{2.53}$$

Intégrons par rapport à x et t, utilisons les conditions (2.48), (2.49) et (2.50) on aura

$$\begin{aligned}-\mathrm{Re}\int_{\Omega_s}\exp(-ct)\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial V_n}{\partial x}\right)\overline{MV_n}dxdt &= \frac{c}{2}\int_{\Omega_s} x^2\exp(-ct)\left|\frac{\partial V_n}{\partial x}\right|^2 dxdt \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\exp(-ct)\left|\frac{\partial V_n}{\partial x}\right|^2 dx\Bigg|_{t=s},\end{aligned} \tag{2.54}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\int_{\Omega_s}\exp(-ct)\frac{\partial V_n}{\partial t}\overline{MV_n}dxdt = &\int_{\Omega_s} x^2\exp(-ct)\left|\frac{\partial V_n}{\partial t}\right|^2 dxdt \\ + \int_{\Omega^s}\frac{1}{2x^2}\exp(-ct)\left|\int_0^x \zeta\frac{\partial V_n}{\partial t}d\zeta\right|^2 dxdt + &\frac{1}{2}\int_0^s \exp(-ct)\left|\int_0^1 \zeta\frac{\partial V_n}{\partial t}d\zeta\right|^2 dxdt.\end{aligned} \tag{2.55}$$

Substituons (2.54) et (2.55) dans (2.53), on obtient

$$\int_{\Omega^s} x^2 \exp(-ct) \left|\frac{\partial V_n}{\partial t}\right|^2 dxdt + \frac{c}{2}\int_{\Omega_s} x^2 \exp(-ct) \left|\frac{\partial V_n}{\partial x}\right|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 \exp(-ct) \left|\frac{\partial V_n}{\partial x}\right|^2 dx\right|_{t=s}$$

$$= \operatorname{Re}\int_{\Omega^s} \exp(-ct)\sigma_{n-1}\overline{MV_n}dxdt. \tag{2.56}$$

Intégrons le terme $x^2 e^{-ct} V_n \overline{\dfrac{\partial V_n}{\partial t}}$ par rapport à t et utilisons (2.48), on obtient

$$\operatorname{Re}\int_{\Omega^s} x^2 e^{-ct} V_n \overline{\frac{\partial V_n}{\partial t}} dxdt = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 exp(-ct)\left|V_n\right|^2 dx\Big|_{t=s} + \frac{c}{2}\int_{\Omega_s} x^2 exp(-ct)\left|V_n\right|^2 dxdt,$$

en appliquant les $\varepsilon-$inégalités dans l'égalité ci-dessus, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 \exp(-ct)\left|V_n\right|^2 dx\Big|_{t=s} + \frac{c-1}{2}\int_{\Omega_s} x^2 \exp(-ct)\left|V_n\right|^2 dxdt \leq \int_{\Omega^s} \frac{x^2}{2} exp(-ct)\left|\frac{\partial V_n}{\partial t}\right|^2 dxdt.$$

En suivant la même procédure utilisée pour établir la démonstrartion du théorème 2.1, on trouve

$$\operatorname{Re}\int_{\Omega^s} \exp(-ct)\sigma_{n-1}\overline{MV_n}dxdt \leq 5\int_{\Omega_s} x^2 \exp(-ct)\left|\sigma_{n-1}\right|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_{\Omega_s} x^2 \exp(-ct)\left|\frac{\partial V_n}{\partial t}\right|^2 dxdt,$$

puis et à partir des inégalités ci-dessus et (2.56) on déduit

$$\frac{c-1}{2}e^{-cT}\left(\int_{\Omega_s} x^2 \exp(-ct)\left|V_n\right|^2 dxdt + \int_{\Omega_s} x^2 \exp(-ct)\left|\frac{\partial V_n}{\partial x}\right|^2 dxdt\right) \leq 10\int_{\Omega_s} x^2 \exp(-ct)\left|\sigma_{n-1}\right|^2 dxdt.$$

En combinant l'inégalité, donnée ci-dessus, avec (2.56) et en utilisant (2.36), on aura

$$\left\|V_n\right\|^2_{L^2(0,T:V^{1,0}(0,1))} \leq k^2 \left\|V_{n-1}\right\|^2_{L^2(0,T:V^{1,0}(0,1))}, \tag{2.57}$$

où

$$k^2 = \frac{40d^2}{c-1} exp(cT).$$

Puisque $V_n(x,t) = w_{n+1}(x,t) - w_n(x,t)$, alors la suite $w_n(x,t)$ peut être écrite comme suit

$$w_n(x,t) = \sum_{k=1}^{k=n-1} V_k + w_0(x,t),$$

la suite $w_n(x,t)$ converge vers un élément $w \in L^2\left(0, T : V^{1,0}(0,1)\right)$ si

$$d^2 < \frac{c-1}{40}\exp(-cT).$$

Maintenant, pour prouver que cette fonction limite w est une solution du problème sous les considérations (2.43,2.46), nous devons montrer que w vérifie (2.35) et (2.41).
D'après les problèmes (2.43,2.46) et (2.32,2.35), en intégrant par rapport à x et en utilisant la condition (2.37) on trouve

$$H(w_n - w, v) + H(w,v) = \operatorname{Re}\int_\Omega \overline{v}\left[\int_0^x \eta\left(F\left(\eta, t, w_{n-1}, \frac{\partial w_{n-1}}{\partial \eta}\right) - F\left(\eta, t, w, \frac{\partial w}{\partial \eta}\right)\right)d\eta\, dxdt\right.$$

$$+ \operatorname{Re}\int_\Omega \overline{v}\int_0^x \eta F\left(\eta, t, w, \frac{\partial w}{\partial \eta}\right)d\eta dxdt. \tag{2.58}$$

Utilisons (2.42) et intégrons par rapport à t et x et en utilisant (2.37), on obtient

$$H\left(w_n - w,\, v\right) = -\operatorname{Re}\int_{\Omega} \overline{\frac{\partial v}{\partial t}} \int_0^x \zeta\left(w_n - w\right)(\zeta, t)\, d\zeta dx dt - \operatorname{Re}\int_{\Omega} x \frac{\partial\left(w_n - w\right)}{\partial x} \overline{v} dx dt. \quad (2.59)$$

Chaque terme du côté gauche de (2.59) est majoré par

$$-\operatorname{Re}\int_{\Omega} \overline{\frac{\partial v}{\partial t}} \int_0^x \zeta\left(w_n - w\right)(\zeta, t)\, d\zeta dx dt \leq \left(\int_{\Omega} x^2 \left|w_n - w\right|^2 dx dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} x^2 \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|^2 dx dt\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.60)$$

$$-\operatorname{Re}\int_{\Omega} x \frac{\partial\left(w_n - w\right)}{\partial x} \overline{v} dx dt \leq \left(\int_{\Omega} x^2 \left|\frac{\partial\left(w_n - w\right)}{\partial x}\right|^2 dx dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx dt\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.61)$$

de (2.60),(2.61), on déduit que

$$\left|H\left(w_n - w, v\right)\right| \leq \left\|w_n - w\right\|_{L^2(0,T:V^{1,0}(0,1))} \left(\int_{\Omega} \left(x^2 \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|^2 + |v|^2\right) dx dt\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.62)$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et en utilisant la condition (2.36), on aura

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\int_{\Omega} \overline{v} \left[\int_0^x \eta \left(F\left(\eta, t, w_{n-1}, \frac{\partial w_{n-1}}{\partial \eta}\right) - F\left(\eta, t, w, \frac{\partial w}{\partial \eta}\right)\right) d\eta\, dx dt\right. \\ &\leq\; 2\sqrt{2} d \left\|w_n - w\right\|_{L^2\left(0,T:V_0^1(0,1)\right)} \left(\int_{\Omega} x^2 |v|^2 dx dt\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

D'après (2.62), (2.63) et par passage à la limite dans (2.58) quand $n \to +\infty$, on déduit que

$$H(w, v) = \operatorname{Re}\int_{\Omega} \overline{v} \int_0^x \eta F\left(\eta, t, w, \frac{\partial w}{\partial \eta}\right) d\eta dx dt.$$

Maintenant on montre que (2.35) est vérifiée. Comme $\underset{n\to+\infty}{lim} \|w_n - w\|_{L^2(0,T:V^{1,0}(0,1))} = 0$, alors, on conclut que $\int_0^{\alpha} w dx + \int_{\beta}^1 w dx = 0.$ ■

Ainsi, on a démontré le théorème suivant

Théorème 2.3 *Si la condition (2.36) est vérifiée, alors la solution du problème (2.32-2.35) est unique.*

Preuve. Supposons que $w_1,\, w_2 \in L^2\left(0, T : V^{1,0}(0,1)\right)$ sont deux solutions de (2.32,2.35), la fonction $v = w_1 - w_2$ appartient à $L^2\left(0, T : V^{1,0}(0,1)\right)$ et vérifie

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial v}{\partial x}\right) = G(x, t), \quad (2.64)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad (2.65)$$

$$v(1, t) = 0, \quad (2.66)$$

$$\int_0^{\alpha} v(x, t)\, dx + \int_{\beta}^1 v(x, t)\, dx = 0, \quad (2.67)$$

où

$$G\left(x,\, t\right) = F\left(x, t, w_1, \frac{\partial w_1}{\partial x}\right) - F\left(x, t, w_2, \frac{\partial w_2}{\partial x}\right)$$

.
Prenons le produit scalaire dans $L^2\left(Q\right)$ de l'équation (2.64) et l'opérateur intégro-différentiel

$$Mv = e^{-ct}\left(x^2\frac{\partial v}{\partial t} - x\int_0^x \frac{\partial v}{\partial t}\left(\zeta, t\right) d\zeta + x\int_\alpha^x \frac{\partial v}{\partial t}\left(\zeta, t\right) d\zeta - x\int_\beta^x \frac{\partial v}{\partial t}\left(\zeta, t\right) d\zeta\right),$$

où $c > 1$ et suivons la même procédure utilisée dans la démonstration du lemme 2.3, on aura

$$\left\|v\right\|^2_{L^2(0,\, T:V^{1,0}(0,1))} \leq k^2 \left\|v\right\|^2_{L^2(0,T:V^{1,0}(0,\, 1))}\, .$$

$$k^2 = \frac{40d^2}{c-1}\exp(cT).$$

où $k^2 < 1$. Alors $v = 0$ ce qui implique que $w_1 = w_2 \in L^2\left(0, T : V^{1,0}\left(0,1\right)\right)$. ∎

Chapter 3

La solution forte d'un problème mixte pour une équation parabolique du seconde ordre avec condition intégrale

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'existence et l'unicité de la solution d'une équation parabolique avec condition intégrale, après on passe à la solvabilié du problème considéré.

Dans le rectangle $Q = (0,1) \times (0,T)$ avec $T < +\infty$, on considère l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(x,t), \tag{3.1}$$

avec la condition initiale

$$lu = u(x,0) = \varphi\left(x\right), \quad \forall x \in (0,1), \tag{3.2}$$

la condition aux limites

$$u(0,t) = u(1,t), \quad \forall t \in (0,T), \tag{3.3}$$

et la condition intégrale

$$\int_0^\alpha u(x,t)dx + \int_\beta^1 u(x,t)dx = 0, \qquad \forall t \in (0,T). \tag{3.4}$$

où $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$.
De plus, on suppose que la fonction $a\left(x,t\right)$ et ses derivées vérifient les conditions

$$\begin{cases} 0 < a_0 \leq a(x,t) \leq a_1 & \forall x,\ t \in Q \\ \left|\dfrac{\partial a}{\partial x}\right| \leq b & \forall x,\ t \in Q, \\ a_2 \leq \dfrac{\partial a}{\partial t} \leq a_3, & \end{cases} \tag{3.5}$$

Le problème (3.1-3.4) peut étre considéré comme la résolution de l'équation opératorielle

$$Lu = (\pounds u, lu) = (f,\varphi) = F, \tag{3.6}$$

où l'opérateur L est de domaine de définition $D(L)$; ensemble constitué des fonctions $u \in L^2(Q)$ telle que $\dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \in L^2(Q)$ et vérifient les conditions (3.3) et (3.4).
L'opérateur L est un opérateur défini de E dans F, où E est un espace de Banach dont ses fonctions sont les $u \in L^2(Q)$ muni de la norme

$$\|u\|_E^2 = \int_Q \theta\left(x\right)\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2\right] dxdt + \sup_t \left(\int_0^1 \theta\left(x\right)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx + \int_0^1 |u|^2 dx\right) \tag{3.7}$$

F est un espace de Hilbert formé des fonctions $F = (f,\varphi)$, $f \in L^2(Q)$, $\varphi \in H^1\left(0,1\right)$ muni de la norme

$$\|F\|_F^2 = \int_0^T \int_0^1 \theta\left(x\right)|f|^2 dxdt + \int_0^1 \theta\left(x\right)\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx + \int_0^1 |\varphi|^2 dx \tag{3.8}$$

où

$$\theta\left(x\right) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,\alpha] \\ 1, & x \in [\alpha,\beta] \\ \left(1-x\right)^2, & x \in [\beta,1] \end{cases}$$

3.1 L'unicité de la Solution

Á fin de démontrer l'unicité de la solution du problème considéré, on introduit le théorème suivant

Théorème 3.1 *Il existe une constante positive k, tel que pour toute fonction $u \in D(L)$ on a*

$$\|u\|_E \leq k \|Lu\|_F . \tag{3.9}$$

Preuve. On note Par

$$Mu = \begin{cases} \dfrac{x^2}{a} e^{\lambda x} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{2x}{a} e^{\lambda x} \displaystyle\int_x^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial t} d\zeta & x \in (0, \alpha) \\ \dfrac{\alpha^2}{a} e^{\delta(x-\alpha)+\lambda\alpha} \dfrac{\partial u}{\partial t} & x \in (\alpha, \beta) \\ \dfrac{(1-x)^2}{a} e^{\lambda(1-x)} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 2\dfrac{1-x}{a} e^{\lambda(1-x)} \displaystyle\int_\beta^x \dfrac{\partial u}{\partial t} d\zeta & x \in (\beta, 1), \end{cases}$$

avec $\lambda \geq \dfrac{b}{a_0}$ et

$$\delta = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} \ln \left(\left(\dfrac{1-\beta}{\alpha} \right)^2 \exp\left(\lambda\left(1-\beta-\alpha\right)\right) \right) & \alpha \neq \beta \\ 0 & \alpha = \beta \end{cases}$$

On considère la forme quadratique obtenue en faisant le produit scalaire entre l'équation (3.1) et $\exp(-ct)\overline{Mu}$, avec $0 \leq s \leq T$ et

$$c > \max \left\{ 10a_1 \left(\lambda - \frac{b}{a_0} \right)^2, \alpha^2 a_1 \max \left[\left(\delta - \frac{b}{a_0} \right)^2, \left(\delta - \frac{b}{a_1} \right)^2 \right] \inf_{x \in [\alpha, \beta]} e^{\delta(x-a)}, \right.$$
$$\left. 8\lambda^2 a_1, \left(a_1 + 8\frac{a_1}{a_0^2} \right) \left(\lambda + \frac{b}{a_0} \right)^2 \right\}. \tag{3.10}$$

Intégrons sur $\Omega^s = [0, 1] \times [0, s]$ et prenons la partie réelle

$$\Phi(u, u) = \operatorname{Re} \int_{\Omega^s} \exp(-ct) f(x, t) \overline{Mu} dx dt$$

$$= \operatorname{Re} \int_{\Omega^s} \exp(-ct) \frac{\partial u}{\partial t} \overline{Mu} dx dt - \operatorname{Re} \int_{\Omega^s} \exp(-ct) \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \overline{Mu} dx dt. \tag{3.11}$$

En substituant Mu par son expression dans le membre droit de (3.11) et en intégrant par parties par rapport à x, on trouve

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{Re}\int_0^\alpha \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\overline{Mu}dx \;=\; & \operatorname{Re}\int_0^\alpha x^2 e^{\lambda x}\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}}dx + \; 2\operatorname{Re}\int_0^\alpha e^{\lambda x}u\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dx \\
& + \operatorname{Re}\int_0^\alpha \left(\lambda - \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)x^2 e^{\lambda x}\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dx \\
& + 2\operatorname{Re}\int_0^\alpha \left(\lambda - \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)x e^{\lambda x}\frac{\partial u}{\partial x}\int_x^\alpha \overline{\frac{\partial u}{\partial t}}d\zeta dx \\
& - 2\operatorname{Re}\int_0^\alpha \lambda e^{\lambda x}u\int_x^\alpha \overline{\frac{\partial u}{\partial t}}d\zeta dx \\
& - \alpha^2 e^{\lambda\alpha}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}\right|_{x=\alpha} - \; 2u\left(0\right)\int_0^\alpha \overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dx, \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

de plus

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{Re}\int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\overline{Mu}dx \;=\; & \operatorname{Re}\int_\alpha^\beta \alpha^2 e^{\delta(\alpha - x)}\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}}dx \\
& - \alpha^2\operatorname{Re}\int_\alpha^\beta \left(\delta - \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)e^{\delta(\alpha - x)}\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dx \\
& - \alpha^2 e^{\delta(\beta-\alpha)}\operatorname{Re}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}\right|_{x=\beta} + \alpha^2\operatorname{Re}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}\right|_{x=\alpha}, \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{Re}\int_\beta^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\overline{Mu}dx \;=\; & \operatorname{Re}\int_\beta^1 \left(1-x\right)^2 e^{\lambda(1-x)}\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}}dx \; + \; 2\operatorname{Re}\int_\beta^1 e^{\lambda(1-x)}u\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dx \\
& - \operatorname{Re}\int_\beta^1 \left(\lambda + \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)\left(1-x\right)^2 e^{\lambda(1-x)}\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dx \\
& - 2\operatorname{Re}\int_\beta^1 \left(\lambda + \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)\left(1-x\right)e^{\lambda(1-x)}\frac{\partial u}{\partial x}\int_\beta^1 \overline{\frac{\partial u}{\partial t}}d\zeta dx \\
& - 2\operatorname{Re}\int_\beta^1 \lambda e^{\lambda(1-x)}u\int_\beta^x \overline{\frac{\partial u}{\partial t}}d\zeta dx \\
& - 2\operatorname{Re}u\left(1\right)\int_\beta^1 \overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dx \; + \; \left(1-\beta\right)^2 e^{\lambda(1-\beta)}\operatorname{Re}\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}\right)\right|_{x=\beta}. \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

de (3.12)-(3.14), en utilisant la condition (3.3) et la condition intégrale (3.4), on obtient

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{Re}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\overline{Mu}dx = {} & \operatorname{Re}\int_0^\alpha x^2 e^{\lambda x}\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}}dx \ + \ \operatorname{Re}\int_\alpha^\beta \alpha^2 e^{\delta(x-\alpha)+\lambda\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}}dx \\
& + \ \operatorname{Re}\int_\beta^1 (1-x)^2 e^{\lambda(1-x)}\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}}dx \ + \ 2\operatorname{Re}\int_0^\alpha e^{\lambda x}u\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dx \\
& + 2\operatorname{Re}\int_\beta^1 e^{\lambda(1-x)}u\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dx \ + \ \operatorname{Re}\int_0^\alpha\left(\lambda-\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)x^2 e^{\lambda x}\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dx \\
& + \alpha^2\operatorname{Re}\int_\alpha^\beta\left(\delta-\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)e^{\delta(x-\alpha)+\lambda\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dx \\
& - \ \operatorname{Re}\int_\beta^1\left(\lambda+\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)(1-x)^2 e^{\lambda(1-x)}\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dx \\
& + 2\operatorname{Re}\int_0^\alpha\left(\lambda-\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)xe^{\lambda x}\frac{\partial u}{\partial x}\int_x^\alpha\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}d\zeta dx \\
& - 2\operatorname{Re}\int_0^\alpha \lambda e^{\lambda x}u\int_x^\alpha\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}d\zeta dx \ - \ 2\operatorname{Re}\int_\beta^1\lambda e^{\lambda(1-x)}u\int_\beta^x\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}d\zeta dx \\
& - 2\operatorname{Re}\int_\beta^1\left(\lambda+\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)(1-x)e^{\lambda(1-x)}\frac{\partial u}{\partial x}\int_\beta^1\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}d\zeta dx \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

Intégrons par rapport à x, on aura

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\int_0^1\frac{\partial u}{\partial t}\overline{Mu}dx = {} & \int_0^\alpha\frac{x^2}{a}e^{\lambda x}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx+\int_\alpha^\beta\frac{\alpha^2}{a}\exp\left(\delta\left(x-\alpha\right)+\lambda\alpha\right)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx \\
& + \int_\beta^1\frac{(1-x)^2}{a}e^{\lambda(1-x)}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx+\int_0^\alpha\left(\frac{1}{a}+\frac{\lambda a-\frac{\partial a}{\partial x}}{a^2}x\right)e^{\lambda x}\left|\int_x^\alpha\frac{\partial u}{\partial t}d\zeta\right|^2 dx \\
& + \int_\beta^1\left(\frac{1}{a}+\frac{\lambda a+\frac{\partial a}{\partial x}}{a^2}(1-x)\right)e^{\lambda(1-x)}\left|\int_\beta^x\frac{\partial u}{\partial t}d\zeta\right|^2 dx. \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

Additionons (3.15) avec (3.16), on trouve

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\int_0^1 f(x,t)\overline{Mu}dx = \; & \operatorname{Re}\int_0^\alpha x^2 e^{\lambda x}\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}}dx \;+\; \operatorname{Re}\int_\alpha^\beta \alpha^2 e^{\delta(x-\alpha)+\lambda\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}}dx \\
& +\; \operatorname{Re}\int_\beta^1 (1-x)^2 e^{\lambda(1-x)}\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}}dx \;+\; 2\operatorname{Re}\int_0^\alpha e^{\lambda x}u\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dx \\
& + 2\operatorname{Re}\int_\beta^1 e^{\lambda(1-x)}u\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dx \;+\; \operatorname{Re}\int_0^\alpha\left(\lambda-\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)x^2e^{\lambda x}\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dx \\
& + \alpha^2\operatorname{Re}\int_\alpha^\beta\left(\delta-\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)e^{\delta(x-\alpha)+\lambda\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dx \\
& -\; \operatorname{Re}\int_\beta^1\left(\lambda+\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)(1-x)^2e^{\lambda(1-x)}\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dx \\
& + 2\operatorname{Re}\int_0^\alpha\left(\lambda-\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)xe^{\lambda x}\frac{\partial u}{\partial x}\int_x^\alpha\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}d\zeta dx \\
& - 2\operatorname{Re}\int_\beta^1\left(\lambda+\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)(1-x)\,e^{\lambda(1-x)}\frac{\partial u}{\partial x}\int_\beta^x\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}d\zeta dx \\
& +\; \int_0^\alpha\frac{x^2}{a}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dx+\int_\alpha^\beta\frac{\alpha^2}{a}\exp\left(\lambda\left(x-\alpha\right)+\lambda\alpha\right)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dx \\
& +\; \int_\beta^1\frac{(1-x)^2}{a}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dx+\int_0^\alpha\frac{a-x\dfrac{\partial a}{\partial x}}{a^2}\left|\int_x^\alpha\frac{\partial u}{\partial t}d\zeta\right|^2dx \\
& +\; \int_\beta^1\frac{a+(1-x)\dfrac{\partial a}{\partial x}}{a^2}\left|\int_\beta^x\frac{\partial u}{\partial t}d\zeta\right|^2dx
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Intégrons les cinq premiers termes dans (3.17) par rapport à t, on obtient

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\int_0^s\int_0^\alpha x^2e^{\lambda x}\exp\left(-ct\right)\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}}dxdt &= \frac{c}{2}\int_0^s\int_0^\alpha x^2e^{\lambda x}\exp\left(-ct\right)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dxdt \\
&+\int_0^\alpha\frac{x^2}{2}e^{\lambda x}\exp\left(-ct\right)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dx\bigg|_{t=s}-\int_0^\alpha\frac{x^2}{2}e^{\lambda x}\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2dx,
\end{aligned}
$$

et

$$\operatorname{Re}\int_0^s\int_\alpha^\beta \alpha^2 e^{\delta(x-\alpha)+\lambda\alpha}\exp(-ct)\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}}dxdt \;=\; \frac{c}{2}\int_0^s\int_\alpha^\beta \alpha^2 e^{\delta(x-\alpha)+\lambda\alpha}\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt$$

$$+\;\int_\alpha^\beta \frac{\alpha^2}{2}e^{\delta(x-\alpha)+\lambda\alpha}\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\bigg|_{t=s} - \int_\alpha^\beta \frac{\alpha^2}{2}e^{\delta(x-\alpha)+\lambda\alpha}\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx,$$

de plus

$$\operatorname{Re}\int_0^s\int_\beta^1 (1-x)^2 e^{\lambda(1-x)}\exp(-ct)\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}}dxdt = \frac{c}{2}\int_0^s\int_\beta^1 (1-x)^2 e^{\lambda(1-x)}\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_\beta^1 (1-x)^2 e^{\lambda(1-x)}\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\bigg|_{t=s} - \frac{1}{2}\int_\beta^1 (1-x)^2 e^{\lambda(1-x)}\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx,$$

d'un autre côté

$$2\operatorname{Re}\int_0^s\int_0^\alpha e^{\lambda x}\exp(-ct)\,u\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dxdt = c\int_0^s\int_0^\alpha e^{\lambda x}\exp(-ct)\,|u|^2\,dxdt$$

$$+\int_0^\alpha e^{\lambda x}\exp(-ct)\,|u|^2\,dx\bigg|_{t=s} - \int_0^\alpha e^{\lambda x}|\varphi|^2\,dx$$

et

$$2\operatorname{Re}\int_0^s\int_\beta^1 e^{\lambda(1-x)}\exp(-ct)\,u\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dxdt = c\int_0^s\int_\beta^1 e^{\lambda(1-x)}\exp(-ct)\,|u|^2\,dxdt$$

$$+\int_\beta^1 e^{\lambda(1-x)}\exp(-ct)\,|u|^2\,dx\bigg|_{t=s} - \int_\beta^1 e^{\lambda(1-x)}|\varphi|^2\,dx$$

En utilisant les $\varepsilon-$inégalités, on trouve que les cinq termes suivants sont contrôlés comme suit :

D'une part

$$\operatorname{Re}\int_0^\alpha\left(\lambda-\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)x^2e^{\lambda x}\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dx \;\le\; \frac{1}{2\varepsilon_1}\int_0^\alpha a\left(\lambda-\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 x^2e^{\lambda x}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx$$

$$+\frac{\varepsilon_1}{2}\int_0^\alpha \frac{x^2}{a}e^{\lambda x}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx,$$

et

$$\operatorname{Re}\int_\alpha^\beta \alpha^2\left(\delta-\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)e^{\delta(x-\alpha)+\lambda\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dx \;\le\; \frac{1}{2\varepsilon_2}\int_\alpha^\beta \alpha^2 a\left(\delta-\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 e^{\delta(x-\alpha)+\lambda\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx$$

$$+\frac{\varepsilon_2}{2}\int_\alpha^\beta \frac{\alpha^2}{a}e^{\delta(x-\alpha)+\lambda\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx,$$

D'une autre part

$$\operatorname{Re}\int_\beta^1\left(\lambda+\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)(1-x)^2 e^{\lambda(1-x)}\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dx \ \leq \frac{1}{2\varepsilon_3}\int_\beta^1 a\left(\lambda+\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2(1-x)^2 e^{\lambda(1-x)}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx$$

$$+\ \frac{\varepsilon_3}{2}\int_\beta^1\frac{(1-x)^2}{a}e^{\lambda(1-x)}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx,$$

et

$$2\operatorname{Re}\int_0^\alpha\left(\lambda-\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)xe^{\lambda x}\frac{\partial u}{\partial x}\int_x^\alpha\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}d\zeta dx \ \leq \frac{1}{\varepsilon_4}\int_0^\alpha\left(\lambda-\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 x^2 e^{\lambda x}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx$$

$$+\,\varepsilon_4\int_0^\alpha e^{\lambda x}\left|\int_x^\alpha\frac{\partial u}{\partial t}d\zeta\right|^2 dx$$

de plus

$$2\operatorname{Re}\int_\beta^1\left(\lambda+\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)(1-x)\,e^{\lambda(1-x)}\frac{\partial u}{\partial x}\int_\beta^x\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}d\zeta dx$$

$$\leq\ \frac{1}{\varepsilon_5}\int_\beta^1\left(\lambda+\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2(1-x)^2 e^{\lambda(1-x)}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx+\varepsilon_5\int_\beta^1 e^{\lambda(1-x)}\left|\int_\beta^x\frac{\partial u}{\partial t}d\zeta\right|^2 dx.$$

On a également le coté gauche de (3.17) qui est contrôlé comme suit :

$$\operatorname{Re}\int_0^\alpha f(x,t)\overline{Mu}\ dx\leq\int_0^\alpha\left(\frac{1}{2\varepsilon_6 a_0}+\frac{1}{\varepsilon_7 a_0^2}\right)x^2 e^{\lambda x}\left|f\right|^2 dx$$

$$+\ \frac{\varepsilon_6}{2}\int_0^\alpha\frac{1}{a}x^2 e^{\lambda x}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx+\frac{\varepsilon_7}{2}\int_0^\alpha e^{\lambda x}\left|\int_x^\alpha\frac{\partial u}{\partial t}d\zeta\right|^2 dx,$$

et

$$\operatorname{Re}\int_\alpha^\beta f(x,t)\overline{Mu}\ dx\ \leq\ \frac{1}{2\varepsilon_8 a_0}\int_\alpha^\beta\alpha^2 e^{\delta(x-\alpha)+\lambda\alpha}\left|f\right|^2 dx+\frac{\varepsilon_8}{2}\int_\alpha^\beta\frac{\alpha^2}{a}e^{\delta(x-\alpha)+\lambda\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx,$$

de plus

$$\operatorname{Re}\int_\beta^1 f(x,t)\overline{Mu}dx\ \leq\ \int_\beta^1\left(\frac{1}{2\varepsilon_9 a_0}+\frac{1}{\varepsilon_{10}a_0^2}\right)(1-x)^2 e^{\lambda(1-x)}\left|f\right|^2 dx$$

$$+\frac{\varepsilon_9}{2}\int_\beta^1\frac{1}{a}(1-x)^2 e^{\lambda(1-x)}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx+\frac{\varepsilon_{10}}{2}\int_\beta^1 e^{\lambda(1-x)}\left|\int_\beta^x\frac{\partial u}{\partial t}d\zeta\right|^2 dx.$$

Des inégalités précédentes, on déduit

$$\int_0^s \int_0^\alpha \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{\varepsilon_6}{2}\right) \frac{x^2}{a} e^{-ct+\lambda x} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt + \alpha^2 \int_0^s \int_\alpha^\beta \frac{1}{a}\left(1 - \frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{\varepsilon_8}{2}\right) \frac{e^{\delta(x-\alpha)-ct}}{a} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt$$

$$+ \int_0^s \int_\beta^1 \left(1 - \frac{\varepsilon_3}{2} - \varepsilon_9\right) \frac{(1-x)^2}{a} e^{-ct+\lambda(1-x)} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt$$

$$+ \int_0^s \int_0^\alpha \left(\frac{c}{2} - \frac{1}{\varepsilon_1} a \left(\lambda - \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{a^2 \varepsilon_4}\left(\lambda - \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2\right) e^{-ct} \frac{x^2}{2} e^{\lambda x} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt$$

$$+ \int_0^s \int_\alpha^\beta \left(\frac{c}{2} - \frac{a}{2\varepsilon_2}\left(\delta - \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2\right) \frac{\alpha^2 e^{\delta(x-\alpha)+\lambda\alpha-ct}}{2} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt$$

$$+ \int_0^s \int_\beta^1 \left(\frac{c}{2} - \frac{a}{2\varepsilon_3}\left(\lambda + \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{a^2\varepsilon_5}\left(\lambda a + \frac{\partial a}{\partial x}\right)^2\right) (1-x)^2 e^{-ct+\lambda(1-x)} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt$$

$$+ c \int_0^s \int_0^\alpha e^{\lambda x - ct} |u|^2 dxdt + c \int_0^s \int_\beta^1 e^{\lambda(1-x)-ct} |u|^2 dxdt$$

$$+ \int_0^s \int_0^\alpha \left(\frac{1}{a} + \frac{\lambda a - \frac{\partial a}{\partial x}}{a^2} x - \varepsilon_4 - \varepsilon_7\right) e^{\lambda x - ct} \left|\int_x^\alpha \frac{\partial u}{\partial t} d\zeta\right|^2 dxdt$$

$$+ \int_0^s \int_\beta^1 \left(\frac{1}{a} + \frac{\lambda a + \frac{\partial a}{\partial x}}{a^2}(1-x) - \varepsilon_5 - \varepsilon_{10}\right) e^{\lambda(1-x)-ct} \left|\int_\beta^x \frac{\partial u}{\partial t} d\zeta\right|^2 dxdt$$

$$+ \int_0^\alpha \left(\frac{x^2}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + |u|^2\right) dx \Big|_{t=s} + \int_\beta^1 \left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + |u|^2\right) dx \Big|_{t=s}$$

$$+ \int_\alpha^\beta \frac{\alpha^2 \exp\left(\lambda\left(x-\alpha\right) + \lambda\alpha\right)}{2} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx \Big|_{t=s}$$

$$\leq \int_0^s \int_0^1 \theta(x)|f|^2 dxdt + \int_0^\alpha \left(\frac{x^2}{2}\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 + |\varphi|^2\right) dx + \int_{\alpha_4}^1 \left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 + |\varphi|^2\right) dx$$

$$+ \int_\alpha^\beta \frac{\alpha^2 \exp\left(\lambda\left(x-\alpha\right) + \lambda\alpha\right)}{2} \left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx. \tag{3.18}$$

on prend

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_2=\varepsilon_3=\frac{1}{2}\\ \varepsilon_6 &= \varepsilon_8=\varepsilon_9=\frac{1}{2}\\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_5=\varepsilon_7=\varepsilon_{10}=\frac{1}{4a_1},\end{aligned}$$

En utilisant (3.5)-(3.10) et les les inégalités précédentes, (3.18) devient

$$\begin{aligned}&\int_0^s\int_0^1\theta\left(x\right)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dxdt+\int_0^s\int_0^1\theta\left(x\right)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dxdt+\int_0^{\alpha}\left(x^2\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\left|u\right|^2\right)dx\,\Bigg|_{t=s}\\ &+\int_{\beta}^1\left((1-x)^2\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\left|u\right|^2\right)dx\Bigg|_{t=s}+\int_{\alpha}^{\beta}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dx\,\Bigg|_{t=s}\\ \leq\ & K_1\left[\int_0^T\int_0^1\theta\left(x\right)\left|f\right|^2dxdt+\int_0^{\alpha}\left(x^2\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2+\left|\varphi\right|^2\right)dx+\int_{\alpha}^{\beta}\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2dx\right.\\ &\left.+\int_{\beta}^1\left((1-x)^2\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2+\left|\varphi\right|^2\right)dx\right].\end{aligned}\tag{3.19}$$

$$K_1=\frac{\max\left(\left(\frac{1}{a_0}+\frac{8a_1}{a_0^2}\right)\sup\left(e^{\lambda\alpha},e^{\lambda(1-\beta)},\alpha^2\sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]}e^{\delta(x-\alpha)+\lambda\alpha}\right),1\right)}{\min\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2a_1},\frac{\alpha^2}{2a_1},\frac{\alpha^2}{2},c-8\lambda^2a_1,\delta_1,\delta_2\right)}\,e^{cT},$$

où

$$\begin{cases}\delta_1=\dfrac{c}{2}-5a_1\left(\lambda+\dfrac{b}{a_0}\right)^2\\ \\ \delta_2=\dfrac{c}{2}-\alpha^2a_1\max\left[\left(\delta-\dfrac{b}{a_0}\right)^2,\left(\delta-\dfrac{b}{a_1}\right)^2\right]\inf\limits_{x\in[\alpha,\beta]}e^{\delta(x-\alpha)}\end{cases}$$

Comme s est arbitraire, on tire de (3.19)

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_0^1\theta\left(x\right)\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right)dxdt+\sup_t\left(\int_0^1\theta\left(x\right)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dx+\int_0^{\alpha}\left|u\right|^2dx+\int_{\beta}^1\left|u\right|^2dx\right)\\ \leq\ & K_1\left[\int_0^T\int_0^1\theta\left(x\right)\left|f\right|^2dxdt+\int_0^1\theta\left(x\right)\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2dx+\int_0^{\alpha}\left|\varphi\right|^2dx+\int_{\beta}^1\left|\varphi\right|^2dx\right].\end{aligned}\tag{3.20}$$

Il est facile de vérifier que

$$\sup_t\int_{\alpha}^{\beta}|u|^2dx\leq K_1\left[\int_0^T\int_0^1\theta\left(x\right)\left|f\right|^2dxdt+\int_0^1\theta\left(x\right)\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2dx+\int_0^1\left|\varphi\right|^2dx\right]$$

Alors

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_0^1\theta\left(x\right)\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right)dxdt+\sup_t\left(\int_0^1\theta\left(x\right)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dx+\int_0^1\left|u\right|^2dx\right)\\ \leq\ & 2K_1\left[\int_0^T\int_0^1\theta(x)|f|^2dxdt+\int_0^1\theta(x)\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2dx+\int_0^1\left|\varphi\right|^2dx\right]\end{aligned}$$

De plus de (3.1) et (3.20), on trouve

$$\int_0^T\int_0^1 \theta(x)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 dxdt \ \leq \frac{\left(\left(4b^2+4\right)K_1+2\right)}{a_0^2}\left[\int_0^T\int_0^1 \theta(x)\left|f\right|^2 dxdt\right.$$
$$\left.+\int_0^1 \theta(x)\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx+\int_0^{\alpha}\left|\varphi\right|^2 dx+\int_{\beta}^1\left|\varphi\right|^2 dx\right].$$

Alors, en combinant la dernière inégalité et (3.20), il résulte

$$\int_0^T\int_0^1 \theta(x)\left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right)dxdt+\sup_t\left[\int_0^1 \theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx+\int_0^1\left|u\right|^2 dx\right]$$
$$\leq \ k\left[\int_0^T\int_0^1 \theta(x)\left|f\right|^2 dxdt+\int_0^1 \theta(x)\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx+\int_0^1\left|\varphi\right|^2 dx\right],$$

avec $k^2=\left(\frac{\left(\left(4b^2+4\right)K_1+2\right)}{a_0^2}+2K_1\right)$. ■

On peut démontrer que l'opérateur L: $E\to F$ est fermable. Soit $\overline{L}$ sa fermeture avec le domaine de définition $D\left(\overline{L}\right)$.

Définition 3.1 *La solution de l'équation opératorielle $\overline{L}u=\mathcal{F}$ est appelée solution forte du problème (3.1-3.4).*

L'estimation (3.9) reste valable pour la solution forte. Alors, on a

$$\left\|u\right\|_E\leq c\left\|\overline{L}u\right\|_F,\quad \forall u\in D\left(\overline{L}\right).$$

cette dernière nous donne les corollaires suivants

Corollaire 3.1 *Si la solution forte du problème (3.1-3.4) existe, elle est unique et dépend continûment de la fonction $\mathcal{F}=(f,\varphi)$.*

Corollaire 3.2 *L'image $R\left(\overline{L}\right)$ de $\overline{L}$ est fermé dans F et on a $\overline{R(L)}=R\left(\overline{L}\right)$.*

Du Corollaire (3.2) on déduit que pour prouver l'existence de la solution forte du problème (3.1-3.4) pour un arbitraire $\mathcal{F}$, il suffit de prouver que $R\left(\bar{L}\right)$ est dense dans F.

3.2 Solvabilité du problème (3.1-3.5)

Pour la solvabilité du problème (3.1)-(3.5) il suffit de démontrer la densité de $R(L)$ dans F. La preuve se base sur le lemme suivant:

Lemme 3.1 *On suppose que la fonction $a(x,t)$ et ses derivées sont bornées.*
Soit

$$u\in D_0(L)=\{u\in D(L),u(x,0)=0\}.$$

Si pour $u\in D_0(L)$ et pour certaines fonctions $w(x,t)\in L^2(Q)$, on a

$$\int_Q \Phi(x)\, f\overline{\omega}dxdt=0, \tag{3.21}$$

avec

$$\Phi(x) = \begin{cases} (\alpha - x)^2 & x \in (0, \alpha), \\ 1 & x \in \ (\alpha, \beta), \\ (x - \beta)^2 & x \in (\beta, 1). \end{cases}$$

Alors, la fonction w s'anulle presque partout.

Preuve. De (3.21) on a

$$\int_Q \Phi(x) \frac{\partial u}{\partial t} \overline{\varpi} dx dt = \int_Q \Phi(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \overline{\varpi} dx dt, \tag{3.22}$$

L'égalité (3.22) peut s'écrire sous la forme

$$\int_Q \frac{\partial u}{\partial t} \overline{Nv} dx dt = \int_Q A(t) u \overline{v} dx dt \tag{3.23}$$

où

$$A(t) u = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho(x) a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

tel que

$$\rho(x) = \begin{cases} \alpha - x, & x \in (0, \alpha), \\ 1, & x \in (\alpha, \beta), \\ x - \beta, & x \in (\beta, 1), \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} (\alpha - x) \omega - \int_0^x \omega d\zeta, & x \in 0, \alpha, \\ \omega, & x \in (\alpha, \beta), \\ (x - \beta) \omega - \int_x^1 \omega d\zeta, & x \in (\beta, 1). \end{cases}$$

et

$$Nv = \begin{cases} (\alpha - x) v + \int_0^x v d\zeta = (\alpha - x)^2 \omega, & x \in (0, \alpha), \\ v = \omega, & x \in \ (\alpha, \beta), \\ (x - \beta) v - \int_\beta^x v d\zeta = (\beta - x)^2 \omega, & x \in (\beta, 1). \end{cases}$$

On introduit les opérateurs de régularisation $J_\varepsilon^{-1} = \left(I - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right)^{-1}$ et $\left(J_\varepsilon^{-1} \right)^* = \left(I + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right)^{-1}$, par rapport à t, alors, ces opérateurs sont la solution du problème :

$$\begin{cases} u_\varepsilon(t) - \varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = u(t) & u_\varepsilon(0) = 0, \\ v_\varepsilon^*(t) + \varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial t} = v(t) & v_\varepsilon^*(T) = 0. \end{cases} \tag{3.24}$$

De plus, on a les propriétés suivantes: pour toute fonction $g \in L^2(0,T)$, les fonctions $J_\varepsilon^{-1}g$, $\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^* g \in W_2^1(0,T)$. Si $g \in D(L)$, alors $J_\varepsilon^{-1}g \in D(L)$ et on a

$$\begin{cases} \lim \left\| J_\varepsilon^{-1}g - g \right\|_{L^2(0,T)} = 0, & \text{pour } \varepsilon \to 0, \\ \\ \lim \left\| \left(J_\varepsilon^{-1}\right)^* g - g \right\|_{L^2(0,T)} = 0, & \text{pour } \varepsilon \to 0. \end{cases} \tag{3.25}$$

Substituons la fonction u dans (3.23) par sa fonction régularisée u_ε, en utilisant la relation

$$A(t)\,u_\varepsilon = J_\varepsilon^{-1}A(t)\,u - \varepsilon J_\varepsilon^{-1}B_\varepsilon(t)u_\varepsilon,$$

où $B_\epsilon(t)u_\varepsilon = \dfrac{\partial A(t)}{\partial t}u_\epsilon$, on trouve

$$-\int_Q u\overline{\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial t}}dxdt = \int_Q \left(A(t)u - \varepsilon B_\varepsilon(t)u\right)\overline{v_\varepsilon^*}dxdt. \tag{3.26}$$

L'opérateur $A(t)$ admet un inverse $A^{-1}(t)$ continu dans l'espace $L^2(0,1)$, cet inverse est donné par

$$A^{-1}(t)\,g = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{\int_\alpha^\zeta g d\eta}{(\alpha-\zeta)\,a}d\zeta + C_1, & x \in (0,\alpha), \\ \\ \displaystyle -\int_\alpha^x \frac{\int_\alpha^\zeta g d\eta}{a}d\zeta + C_2\int_\alpha^x \frac{1}{a}d\zeta + C_3, & x \in (\alpha,\beta), \\ \\ \displaystyle -\int_x^1 \frac{\int_\beta^\zeta g d\eta}{(\zeta-\beta)\,a}d\zeta + C_1, & x \in (\beta,1). \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \frac{-\displaystyle\int_0^\alpha dx\int_0^x \frac{\int_\zeta^\alpha g d\eta}{(\alpha-\zeta)\,a}d\zeta + \int_\beta^1 dx\int_x^1 \frac{\int_\beta^\zeta g d\eta}{(\zeta-\beta)\,a}d\zeta}{1+\alpha-\beta}, \\ C_2(t) &= -\frac{\displaystyle\int_0^\alpha \frac{\int_x^\alpha g(\eta)d\eta}{(\alpha-\zeta)\,a}dx + \int_\beta^1 \frac{\int_\beta^\zeta g(\eta)d\eta}{(\zeta-\beta)\,a}d\zeta + \int_\alpha^\beta \frac{\int_\alpha^\zeta g(\eta)d\eta}{a}d\zeta}{\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{d\zeta}{a(\zeta,t)}}, \\ C_3(t) &= C_1(t) + \int_0^\alpha \frac{\int_\alpha^x g(\eta)d\eta}{(\alpha-\zeta)\,a}dx. \end{aligned}$$

Alors, on a $\displaystyle\int_0^\alpha A^{-1}(t)udx + \int_\beta^1 A^{-1}(t)udx = 0.$
La fonction $J_\varepsilon^{-1}u = u_\varepsilon$ peut s'écrire sous la forme

$$u_\varepsilon = J_\varepsilon^{-1}A^{-1}(t)A(t)u.$$

Ainsi, l'égalité (3.26) devient

$$-\int_Q u\overline{\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial t}}dxdt = \int_Q A(t)u\overline{h_\varepsilon}dxdt, \tag{3.27}$$

où $h_\varepsilon = v_\varepsilon^* - \varepsilon B_\varepsilon^*(t)v_\varepsilon^*$. et

$$B_\varepsilon^*(t)\,v = \begin{cases} \dfrac{(J_\varepsilon^{-1})^*\left(\dfrac{\partial a}{\partial t}v\right)}{a} + G_{1\varepsilon}(x)v, & x\in(0,\alpha),\\[2ex] -\dfrac{(J_\varepsilon^{-1})^*\left(\dfrac{\partial a}{\partial t}v\right)}{a} + G_{2\varepsilon}(x)v - c(t)G_{2\varepsilon}(\alpha), & x\in(\alpha,\beta),\\[2ex] \dfrac{(J_\varepsilon^{-1})^*\left(\dfrac{\partial a}{\partial t}v\right)}{a} - G_{3\varepsilon}(x)v, & x\in(\beta,1),\end{cases}$$

avec

$$G_{1\varepsilon}(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{a^2}\frac{\partial a}{\partial \zeta}(J_\varepsilon^{-1})^*\left(\frac{\partial a}{\partial t}v\right) - \frac{(J_\varepsilon^{-1})^*\left(\dfrac{\partial^2 a}{\partial\zeta\partial t}v\right)}{a}\right)d\zeta, \quad x\in(0,\alpha),$$

$$G_{2\varepsilon}(x) = \int_x^\beta \left(\frac{1}{a^2}\frac{\partial a}{\partial \zeta}(J_\varepsilon^{-1})^*\left(\frac{\partial a}{\partial t}v\right) - \frac{(J_\varepsilon^{-1})^*\left(\dfrac{\partial^2 a}{\partial\zeta\partial t}v\right)}{a}\right)d\zeta, \quad x\in(\alpha,\beta),$$

$$G_{3\varepsilon}(x) = \int_x^1 \left(\frac{1}{a^2}\frac{\partial a}{\partial \zeta}(J_\varepsilon^{-1})^*\left(\frac{\partial a}{\partial t}v\right) - \frac{(J_\varepsilon^{-1})^*\left(\dfrac{\partial^2 a}{\partial\zeta\partial t}v\right)}{a}\right)d\zeta, \quad x\in(\beta,1),$$

Le membre gauche de (3.27) est une forme linéaire continue en u, donc la fonction h_ε et ses derivées $\rho\dfrac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\rho a\dfrac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}\right) \in L^2(Q)$. De plus, les conditions suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} h_\varepsilon(0,t) = h_\epsilon(\alpha,t) = h_\varepsilon(\beta,t) = h_\varepsilon(1,t) = 0,\\[1ex] \dfrac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}(1,t) = 0,\\[1ex] \dfrac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}(\alpha,t) = \dfrac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}(\beta,t) = 0.\end{cases}$$

Comme l'opérateur $B_\varepsilon^*(t)$ est borné dans $L^2(Q)$ donc pour ε assez petit, on aura $\|\varepsilon B_\varepsilon^*(t)\|_{L^2(Q)} < 1$. Ainsi, l'opérateur $I - \varepsilon B_\varepsilon^*(t)$ admet un inverse borné dans $L^2(Q)$. On conclut que $\rho\dfrac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}$,

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\rho\dfrac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}\right)\in\ L^2(Q)$, et

$$\begin{cases} v_\varepsilon^*(0,t)=v_\varepsilon^*(1,t)=v_\varepsilon^*(\alpha,t)=v_\varepsilon^*(\beta,t)=0, \\ \dfrac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}(0,t)+\dfrac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}(1,t)=0, \\ \dfrac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}(\alpha,t)=\dfrac{\partial v_\epsilon^*}{\partial x}(\beta,t)=0. \end{cases} \tag{3.28}$$

On pose

$$u=\int_0^t \exp(c\tau)v_\varepsilon^* d\tau, \tag{3.29}$$

avec

$$a_3\leq ca_0 \tag{3.30}$$

dans (3.23), on obtient

$$\int_Q \exp(ct)v_\varepsilon^*\overline{Nv}dxdt=\int_Q A(t)u\overline{v_\varepsilon^*}dxdt+\varepsilon\int_Q A(t)u\overline{\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial t}}dxdt, \tag{3.31}$$

Intégrons par rapport à x dans le membre droit de (3.31), utilisons (3.28) on obtient

$$\int_Q A(t)u\overline{v_\varepsilon^*}dxdt=-\int_Q\rho\left(x\right)a\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial v_\epsilon^*}{\partial x}}dxdt=-\int_Q\rho\left(x\right)\exp(-ct)a\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}}dxdt$$

et

$$\varepsilon\int_Q A(t)u\overline{\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial t}}dxdt=-\varepsilon\int_Q\rho\left(x\right)a\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial^2 v_\epsilon^*}{\partial t\partial x}}dxdt$$

Intégrons par rapport à t,

$$\begin{aligned}-\operatorname{Re}\int_Q\rho\left(x\right)\exp(-ct)a\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}}dxdt=&\int_Q\frac{\rho\left(x\right)}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial t}-ca\right)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dxdt\\ &-\int_0^1\frac{\rho\left(x\right)}{2}a\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dx\bigg|_{t=T}\end{aligned}$$

et

$$-\varepsilon\int_Q\rho\left(x\right)a\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial^2 v_\varepsilon^*}{\partial t\partial x}}dxdt=\varepsilon\int_Q\rho\left(x\right)a\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2dxdt+\varepsilon\int_Q\rho\left(x\right)\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}}dxdt$$

En utilisant les inégalités élémentaires, on trouve

$$\begin{aligned}-\varepsilon\int_Q\rho\left(x\right)a\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial^2 v_\epsilon^*}{\partial t\partial x}}dxdt\ \leq&\ \frac{3\varepsilon}{2}\int_Q\rho\left(x\right)a\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2dxdt\\ &+\frac{\varepsilon}{2}\int_Q\frac{\rho\left(x\right)}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)^2\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dxdt\end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}\int_Q\exp(ct)v_\varepsilon^*\overline{Nv}dxdt=\operatorname{Re}\int_Q\exp(-ct)\left(v_\varepsilon^*-v\right)\overline{Nv}dxdt+\int_Q\exp(ct)\rho\left(x\right)\left|v\right|^2dxdt$$

de la dernière inégalité, on déduit

$$\begin{aligned}\int_Q \exp(ct)\rho(x)|v|^2\,dxdt \leq & \int_Q \frac{\rho(x)}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial t}-ca+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)^2\right)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt \\ & - \operatorname{Re}\int_Q \exp(-ct)\left(v_\varepsilon^*-v\right)\overline{Nv}dxdt \\ & + \frac{3\varepsilon}{2}\int_Q \rho(x)\,a\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2 dxdt \\ & - \left.\int_0^1 \frac{\rho(x)}{2}a\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right|_{t=T}\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$ et en ultilisant (3.30) on aura

$$\int_Q \exp(ct)\rho(x)|v|^2\,dxdt \leq 0$$

Alors, $v=0$ a.e., par conséquent $\omega=0$. ■

Théorème 3.2 *L'image $R\left(\overline{L}\right)$ de l' opérateur $\overline{L}$ coïncide avec F.*

Preuve. Comme F est un espace de Hilbert, on a $R\left(\overline{L}\right)=F$ si et seulement si la relation

$$\int_Q \theta(x)\,f\overline{g}dxdt+\int_0^1 \theta(x)\frac{dlu}{dx}\frac{\overline{d\varphi}}{dx}dx+\int_0^1 lu\overline{\varphi}dx=0 \tag{3.32}$$

pour $u\in D(L)$ arbitraire et $(g,\ \varphi)\in F$, alors $g=0$ et $\varphi=0$.
On pose $u\in D_0(L)$ dans (3.32), ainsi du lemme 3.1, on conclut $\theta(x)\,g=\Phi(x)\,\omega=0$,a.e. D'où $g=0$.
Prenons $u\in D(L)$ dans (3.32), il résulte

$$\int_0^1 \theta(x)\frac{dlu}{dx}\frac{\overline{d\varphi}}{dx}dx+\int_0^1 lu\overline{\varphi}dx=0,$$

L'image de l'opérateur trace l est dense dans l'espace de Hilbert muni de la norme

$$\int_0^1 \theta(x)\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx+\int_0^1 |\varphi|^2\,dx,$$

Alors, $\varphi=0$. ■

Chapter 4

Problème aux limites avec condition intégrale pour une équation parabolique

Ce chapitre est considéré comme une généralisation du chapitre 3; nous poursuivons l'étude du problème aux limites. En utilisant la méthode des inégalités énergétiques, nous résolvons le problème suivant:

Sur le domaine $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ avec $T < +\infty$, trouver une solution $u(x,t)$ pour

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(x,t), \quad (4.1)$$

qui vérifie les conditions

$$lu = u(x,0) = \varphi(x), \quad \forall x \in (0,1), \quad (4.2)$$

$$u(0,t) = u(\alpha_2,t) = u(\alpha_3,t) = u(1,t), \quad \forall t \in (0,T), \quad (4.3)$$

et $\int_0^{\alpha_1} u(x,t)\,dx + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} u(x,t)\,dx + \int_{\alpha_4}^{1} u(x,t)\,dx = 0 \quad \forall t \in (0,T). \quad (4.4)$

$$0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4 < 1.$$

De plus, nous supposons que la fonction $a(x,t)$ et ses dérivées vérifient les conditions

$$\begin{cases} 0 < a_0 \leq a(x,t) \leq a_1, & \forall (x,t) \in \Omega_T \\ 0 \leq \frac{\partial a}{\partial x} \leq b, & \forall (x,t) \in \Omega_T, \\ a_2 \leq \frac{\partial a}{\partial t} \leq a_3. \end{cases} \quad (4.5)$$

Où $\varphi(x)$ est une fonction donnée tel que

$$\begin{cases} \varphi(0) = \varphi(\alpha_2) = \varphi(\alpha_3) = \varphi(1), \\ \int_0^{\alpha_1} \varphi(x)\,dx + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \varphi(x)\,dx + \int_{\alpha_4}^{1} \varphi(x)\,dx = 0. \end{cases}$$

Ce qui est nouveau dans ce travail, est le type de la condition intégrale aux limites (4.4) où α_1, α_2, α_3, α_4 sont non spécifiés.

Soit $L^2_\rho(\Omega)$ l'espace poids des fonctions de carré intégrable muni de la norme

$$\|u\|^2_{\sqrt{\rho}} = \int_{\Omega_T} \rho(x)\,|u|^2\,dxdt,$$

et avec le produit scalaire associé

$$(u,v)_{L^2_{\sqrt{\rho}}(\Omega_T)} = \int_{\Omega_T} \rho(x)\,uv\,dxdt.$$

Le problème (4.1-4.4) peut être considéré comme une résolution de l'équation opératorielle

$$Lu = (\mathcal{L}u, lu) = (f, \varphi) = \mathcal{F}, \quad (4.6)$$

où l'opérateur L est de domaine de définition $D(L)$ constitué des fonctions $u \in L^2(\Omega_T)$ tel que $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \in L^2(\Omega_T)$ et vérifiants les conditions (4.3) et (4.4).

L'opérateur L est défini de E dans F, où E est l'espace de Banach des fonctions $u \in L^2(\Omega_T)$, avec la norme finie

$$\|u\|_E^2 = \int_{\Omega_T} \theta(x)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2\right] dxdt + \sup_t \left(\int_0^1 \theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx + \int_0^1 |u|^2 dx\right). \quad (4.7)$$

F est l'espace de Hilbert des fonctions $F = (f, \varphi)$, $f \in L^2_{\sqrt{\theta(x)}}(\Omega_T)$, $\varphi \in H^1(0, 1)$ muni de lanorme finie

$$\|F\|_F^2 = \int_{\Omega_T} \theta(x)\, |f|^2 dxdt + \int_0^1 \theta(x)\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx + \int_0^1 |\varphi|^2 dx. \quad (4.8)$$

où

$$\theta(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, \alpha_1], \\ (\alpha_3 - x)^2 + (\alpha_2 - x)^2, & x \in [\alpha_2, \alpha_3], \\ (1 - x)^2, & x \in [\alpha_4, 1], \\ 1, & x \in [\alpha_1, \alpha_2] \cup [\alpha_3, \alpha_4]. \end{cases}$$

4.1 Inégalité énergétique et ses applications

L'unicité de la solution se base sur le théorème suivant

Théorème 4.1 *Il existe une constante positive k indépendante de u, tel que pour toute fonction $u \in D(L)$ on a*

$$\|u\|_E \le k\, \|Lu\|_F. \quad (4.9)$$

Preuve. Soit

$$Mu = \begin{cases} x^2 a e^{\lambda x}\frac{\partial u}{\partial t} + 2x a e^{\lambda x}\int_{\alpha_1}^{x}\frac{\partial u}{\partial t} d\zeta & x \in (0, \alpha_1) \\ \alpha_{21} a e^{\lambda x}\frac{\partial u}{\partial t} & x \in (\alpha_1, \alpha_2) \\ e^{\lambda_1(x-\alpha_2)}\frac{(\alpha_2-x)^2}{2a}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{x-\alpha_2}{a}\int_{\alpha_3}^{x}\frac{\partial u}{\partial t} d\zeta\right) + e^{\lambda_1(\alpha_3-x)}\left(\frac{(\alpha_3-x)^2}{2a}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\alpha_3-x}{a}\int_{\alpha_2}^{x}\frac{\partial u}{\partial t} d\zeta\right) & x \in (\alpha_2, \alpha_3) \\ \alpha_{21} a\, e^{\lambda\alpha_2} e^{\delta(x-\alpha_3)}\frac{\partial u}{\partial t} & x \in (\alpha_3, \alpha_4) \\ (1-x)^2 a e^{\lambda(1-x)}\frac{\partial u}{\partial t} + 2(1-x) a e^{\lambda(1-x)}\int_{\alpha_4}^{x}\frac{\partial u}{\partial t} d\zeta & x \in (\alpha_4, 1), \end{cases}$$

où $\begin{cases} \alpha_{21} e^{\lambda\alpha_2} = \frac{(\alpha_2-\alpha_3)^2}{2} e^{\lambda_1(\alpha_3-\alpha_2)}, \\ \lambda, \lambda_1 \ge b a_0 \end{cases}$

.

Nous considérons la forme quadratique

Φ (*u, u*) = ReZΩₛexp(−*ct*)*f*(*x, t*)*Mudxdt*= ReZΩₛexp(−*ct*)∂*u*

∂*t*

Mudxdt −ReZΩₛ*exp*(−*ct*) ∂

∂*xa*(*x, t*)∂*u*

∂*x*!*Mudxdt.* (4.10)

avec 0 ≤ *s* ≤ *T* et la constante *c* tel que

c >104*a*1max0@λ + *ba*0!2,λ1 + *ba*0!2,δ + *ba*0!2, λ2, λ211A. (4.11)

Substituons *Mu* par son expression dans le côté droit de (4.10), intégrons par parties parrapport à *x*, en utilisant la condition aux limites (4.3) et la condition intégrale (4.4), on obtient

−ReZ 10∂∂*xa*(*x, t*)∂*u*∂*x*!*Mudx* = ReZ α10*x*2*e*λ*x* ∂*u*∂*x*∂2*u*∂*x*∂*tdx* + α21 ReZ α2

α1*e*λ*x* ∂*u*∂*x*∂2*u*∂*x*∂*tdx*+ ReZ 1α4(1 −*x*)2*e*λ(1−*x*) ∂*u*∂*x*∂2*u*∂*x*∂*tdx* + ReZ α3α2(α2 −*x*)2

2 *e*λ1(*x*−α2) ∂∂*x*

∂2*u*∂*x*∂*tdx*+ ReZ α3α2(α3 −*x*)22 *e*λ1(α3−*x*) ∂*u*∂*x*∂2*u*∂*x*∂*tdx* + ReZ α4α3α21*e*λα2*e*δ(*x*−α3) ∂*u*∂*x*∂2*u*∂*x*∂*tdx*

+ 2 ReZ α10*e*λ*xu*∂*u*∂*tdx* + 2 Ree*λ*1(*x*−α2)*u*∂*u*∂*tdx* + 2 ReZ α3α2*e*λ1(α3−*x*)*u*∂*u*∂*tdx*+ 2 ReZ 1α4*e*λ(1

x)*u*∂*u*∂*tdx* −ReZ α10 λ −1*a*∂*a*∂*x*!*x*2*e*λ*x* ∂*u*∂*x*∂*u*∂*tdx*−α21 ReZ α2α1 λ −1*a*∂*a*∂*x*!*e*λ*x* ∂*u*∂*x*∂*u*∂*t*−ReZ 1

α4 λ + 1*a*∂*a*∂*x*!(1 −*x*)2*e*λ(1−*x*) ∂*u*∂*x*∂*u*∂*tdx*Z α3α2λ1 −1*a*∂*a*∂*x*! (α2 −*x*)22 *e*λ1(*x*α2)∂*u*∂*x*∂*u*∂*tdx*ReZ

α3α2 λ1 + 1*a*∂*a*∂*x*! (α3 −*x*)22 *e*λ1(α3−*x*) ∂*u*∂*x*∂*u*∂*tdx*+ α21*e*λα2 ReZ α4α3 δ −1*a*∂*a*∂*x*

!*e*δ(*x*−α3) ∂*u*∂*x*∂*u*∂*tdx*−ReZ α10λ −1*a*

∂*a*∂*x*!*xe*λ*x* ∂*u*∂*x*Z α1*x*∂*u*∂*td*ζ*dx*Z α3α λ1 − 1

a∂*a*∂*x*!(α2 −*x*)*e*λ1(α2) ∂*u*∂*x*Z α3*x*∂*u*∂*td*ζ*dx*−ReZ α3α2 λ1 + 1*a*∂*a*∂*x*!(α3 −*x*) *e*λ1(α3−*x*)

∂*u*∂*x*Z *x*α2∂*u*∂*td*ζ*dx*−ReZ 1α4λ +1*a*∂*a*

∂*x*!(1 −*x*) *e*λ(1−*x*) ∂*u*∂*x*Z *x*α4∂*u*∂*td*ζ*dx*−2 ReZ α10λ*e*λ*x*uZ α1*x*∂*u*∂*t*

*d*ζ*dx* + λ1 ReZ α3α2*e*λ1(*x*−α2)uZ α3*x*∂*u*∂*td*ζ*dx*−λ1 ReZ α3α2*e*λ1(α3−*x*)uZ *x*α2∂*u*∂*td*ζ*dx* −ReZ 1α4λ*e*λ(1−*x*)uZ

*x*α4∂*u*

∂*t*

*d*ζ*dx,* (4.12)

et

$$\mathrm{Re}\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} M u\, dx = \int_0^{\alpha_1} x^2 a e^{\lambda x}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \alpha_1^2 a e^{\lambda x}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx$$

$$+\int_{\alpha_3}^{\alpha_4} \alpha_1^2 e^{\lambda \alpha_2} a \exp\left(\delta\left(x-\alpha_3\right)\right)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{(\alpha_2 - x)^2}{2} a e^{\lambda_1 (x-\alpha_2)}\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|^2 dx$$

$$+\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{(\alpha_3 - x)^2}{2} a e^{\lambda_1 (\alpha_3-x)}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx + \int_{\alpha_4}^{1} (1 - x)^2 a e^{\lambda (1-x)}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx$$

$$+\int_0^{\alpha_1}\left(\frac{1}{a}+\frac{\lambda a-\frac{\partial a}{\partial x}}{a^2}\, x\right) e^{\lambda x}\left|\int_{\alpha_1}^{x}\frac{\partial u}{\partial t} d\zeta\right|^2 dx+\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}\left(\frac{1}{2a}+\frac{\lambda_1 a-\frac{\partial a}{\partial x}}{a^2}\,\frac{(x-\alpha_2)}{2}\right) e^{\lambda_1 (x-\alpha_2)}\left|\int_{\alpha_3}^{x}\frac{\partial u}{\partial t} d\zeta\right|^2 dx$$

$$+\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}\left(\frac{1}{2a}+\frac{\lambda_1 a+\frac{\partial a}{\partial x}}{a^2}\,\frac{(\alpha_3-x)}{2}\right) e^{\lambda_1 (\alpha_3-x)}\left|\int_{\alpha_3}^{x}\frac{\partial u}{\partial t} d\zeta\right|^2 dx$$

$$+\int_{\alpha_4}^{1}\left(\frac{1}{a}+\frac{\lambda a+\frac{\partial a}{\partial x}}{a^2}\,(1-x)\right) e^{\lambda (1-x)}\left|\int_{x}^{\alpha_4}\frac{\partial u}{\partial t} d\zeta\right|^2 dx. \quad (4.13)$$

Intégrons les dix premiers termes par rapport à t dans (4.12) et appliquons les $\varepsilon-$

inégalités

dans les autres termes, en combinant le résultat obtenu avec (4.5), (4.11) et (4.13),

on tire

$$\int_0^s\int_0^1 \theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx dt + \int_0^s\int_0^1 \theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx dt + \int_0^{\alpha_1}\left(\frac{x^2}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + |u|^2\right)dx\Big|_{t=s}$$

$$+\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}\left(\frac{\alpha_1^2 + (\alpha_2 - x)^2}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + |u|^2\right)dx\Big|_{t=s}$$

$$+\int_{\alpha_4}^{1}\left(\frac{(1 - x)^2}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + |u|^2\right)dx\Big|_{t=s}$$

$$+\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\Big|_{t=s}$$

$$+\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\Big|_{t=s}$$

$$\le K_1\left[\int_0^T\int_0^1 \theta(x)\,\|f\|^2 dx dt + \int_0^{\alpha_1}\left(\frac{x^2}{2}\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 + |\varphi|^2\right)dx + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3}\left(\frac{\alpha_1^2 + (\alpha_2 - x)^2}{2}\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 + |\varphi|^2\right)dx + \int_{\alpha_4}^{1}\left(\frac{(1 - x)^2}{2}\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 + |\varphi|^2\right)dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx + \int_{\alpha_3}^{\alpha_4}\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx\right]. \quad (4.14)$$

où

K1 =max 1a0+ 1a20,α21a0,1a0+ 32a1a20,(1 −α4) 2a0supx∈[α3,α4]eλ(x−α4), α21!min0B@14a1,α214a1

, (1 −α4) 24a1infx∈[α3,α4]eλ(x−α4),(1 −α4) 2 infx∈[α3,α4]eλ(x−α4) 2 , α212 , 1, δ11CA

où

δ1 = c −104a1max0@ λ + ba0!2, λ1 + ba0!2,δ + ba0!21A.

Il est facile de vérifier que

Z α2α1/u/2dx___t=s+Z α4α3/u/2dx___t=s≤ 2K124Z T0Z 10θ (x) /f/2dxdt +Z α10@x22_____dφdx_____2+

/φ/21Adx+Z α3α20@α21 + (α2 −x) 22_____dφdx_____2+ /φ/21Adx +Z 1α40@ (1 −x) 22_____dφdx

_____2+ /φ/21Adx+Z α2α10@_____dφdx_____2+ /φ/21Adx +Z α4α30@_____dφdx_____2+

/φ/21Adx35 .

Utilisons maintenant le fait que le choix de *s* est arbitraire, donc (4.14) devient

Z T0Z 10θ (x) _____∂u∂x_____2dxdt +Z T0Z 10θ (x)

_____∂u∂t_____2dxdt + supt24Z α10@x22_____∂u∂x_____2+ /u/21Adx

+Z α3α20@α21 + (α2 −x) 22_____∂u∂x_____2+ /u/21Adx +Z 1α40@ (1 −x) 22_____∂u∂x_____2+

/u/21Adx

+Z α2α10@_____∂u∂x_____2+ /u/21Adx +Z α4α30@_____∂u∂x_____2+ /u/21Adx

≤ 3K124Z T0Z 10θ (x) /f/2dxdt +Z α10@x22_____dφdx_____2+ /φ/21Adx

+Z α3α20@α21 + (α2 −x) 22_____dφdx_____2+ /φ/21A dx

+Z 1α40@ (1 −x) 22_____dφdx_____2+ /φ/21Adx+Z α2α10@_____dφdx_____2+ /φ/21Adx +

Z α4α30@_____dφdx_____2+ /φ/21Adx35 . (4.15)

De (4.1) et l'inégalité précédente, nous avons
Z T0Z 10θ (x) 0@_____∂2u∂x2_____2+_____∂u∂t_____21

Adxdt + sup$_t$24Z α10@x22_____∂u∂x_____2+ |u|21Adx

+Z α3α20@α21 + (α2 − x) 22_____∂u∂x_____2+ |u|21Adx +Z 1α40@ (1 − x) 22_____∂u∂x_____2

+ |u|21Adx

+Z α2α10@_____∂u∂x_____2+ |u|21Adx +Z α4α30@_____∂u∂x_____2+ |u|21Adx
35
≤ k24Z T0Z 10θ (x) |f|2dxdt +Z α10@x22_____dφdx_____2+ |φ|21Adx +Z α3α20@α21 + (α2 − x) 2

2_____dφdx_____2+ |φ|21A dx+Z 1α40@ (1 − x) 22_____dφdx_____2+ |φ|21Adx +Z α2α10@_____

dφdx_____2+ |φ|21Adx +Z α4α30@_____dφdx_____2+ |φ|21Adx35 .
où $k_2 = ((4b_2 + 4) K_1 + 2) a_{20} + 3K_1$!.
D'où l'estimation (4.9)

Définition 4.1 *on appelle solution forte du problème (4.1-4.4) la solution de l'équation opératorielle*
Lu = F.
L'estimation (4.9) reste vraie pour la solution forte. D'où
$\|u\|_E \leq c\|Lu\|_F, \ \forall u \in D$_L_
.
Ainsi on a les résultats suivants

Corollaire 4.1 *Si la solution forte du problème (4.1-4.4) existe, elle est unique et dépend continûment de la fonction $F = (f, \varphi)$.*

Corollaire 4.2 *L'image R_L_de L est fermé dans F et on a $R(L)$ = R_L_*
.
D'après le Corollaire (4.2) on déduit que pour démontrer l'existence de la solution forte du problème (4.1-4.4) pour un F arbitraire il suffit de confirmer la densité de R
_
L
_
dans F.

4.2 Solvabilité du problème

A fin de démontrer la solvabilité du problème (4.1)-(4.4) il suffit de montrer que $R(L)$ est dense

dans F. La démonstration est basée sur le lemme suivant.

Lemme 4.1 *Soit* $u \in D_0(L) = \{u \in D(L), u(x,0) = 0\}$. *Si pour* $u \in D_0(L)$ *et certaines fonctions* $w(x,t) \in L^2_{\sqrt{\Phi(x)}}(\Omega_T)$,
on a

$$\int_{\Omega_T} \Phi(x)\, f\omega\, dxdt = 0, \quad (4.16)$$

où

$$\Phi(x) = \begin{cases} (\alpha_1 - x)^2 & x \in (0, \alpha_1), \\ 1 & x \in (\alpha_1, \alpha_2), \\ (\alpha_3 - x)^2 + (\alpha_2 - x)^2 & x \in (\alpha_2, \alpha_3), \\ 1 & x \in (\alpha_3, \alpha_4), \\ (\alpha_4 - x)^2 & x \in (\alpha_4, 1). \end{cases}$$

Alors $w = 0$.

Preuve. L'égalité (4.16) peut être exprimée comme suit:

$$\int_{\Omega_T} \frac{\partial u}{\partial t} N v\, dxdt = \int_{\Omega_T} A(t)\, u v\, dxdt \quad (4.17)$$

où

$$A(t)\, u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho(x)\, a(x,t) \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

tel que

$$\rho(x) = \begin{cases} \alpha_1 - x & x \in (0, \alpha_1), \\ 1 & x \in (\alpha_1, \alpha_2), \\ \alpha_3 - x & x \in (\alpha_2, \alpha_3), \\ 1 & x \in (\alpha_3, \alpha_4), \\ \alpha_4 - x & x \in (\alpha_4, 1). \end{cases}$$

et

$$v = \begin{cases} (\alpha_1 - x)\, \omega - \int_0^x \omega\, d\zeta & x \in (0, \alpha_1), \\ \omega & x \in (\alpha_1, \alpha_2), \\ (\alpha_3 - x)\, \omega - \int_{\alpha_2}^x \omega\, d\zeta & x \in (\alpha_2, \alpha_3), \\ \omega & x \in (\alpha_3, \alpha_4), \\ (\alpha_4 - x)\, \omega + \int_x^1 \omega\, d\zeta & x \in (\alpha_4, 1). \end{cases}$$

et

$$Nv = \begin{cases} (\alpha_1 - x)\, v - \int_0^x v\, d\zeta = (\alpha_1 - x)^2 \omega & x \in (0, \alpha_1), \\ \omega & x \in (\alpha_1, \alpha_2), \\ (\alpha_3 - x)\, v - \int_{\alpha_2}^x v\, d\zeta = (\alpha_3 - x)^2 \omega & x \in (\alpha_2, \alpha_3), \\ \omega & x \in (\alpha_3, \alpha_4), \\ (\alpha_4 - x)\, v + \int_{\alpha_4}^x v\, d\zeta = (\alpha_4 - x)^2 \omega & x \in (\alpha_4, 1). \end{cases}$$

Nous introduisons les opérateurs de régularisation $J_\varepsilon^{-1} = \left(I - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}$ et $J_\varepsilon^{*-1} = \left(I + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}$,

par rapport à t. Alors, ces opérateurs assurent la solution du problème:

$$\begin{cases} u_\varepsilon(t) - \varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = u(t) & u_\varepsilon(0) = 0, \\ v_\varepsilon^*(t) + \varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial t} = v(t) & v_\varepsilon^*(T) = 0. \end{cases} \tag{4.18}$$

Nous avons également les propriétés suivantes $g \in L_2(0, T)$, les fonctions $J_\varepsilon^{-1} g, J_\varepsilon^{*-1} g \in W_2^1(0, T)$.

Si $g \in D(L)$, alors $J_\varepsilon^{-1} g \in D(L)$ et on a

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \to 0} \left\| J_\varepsilon^{-1} g - g \right\|_{L_2(0,T)} = 0, \\ \lim_{\varepsilon \to 0} \left\| J_\varepsilon^{*-1} g - g \right\|_{L_2(0,T)} = 0. \end{cases} \tag{4.19}$$

Substituons la fonction u dans (4.17) par la fonction de régularisation u_ε et utilisons la relation

$$A(t)\, u_\varepsilon = J_\varepsilon^{-1} A(t)\, u - \varepsilon J_\varepsilon^{-1} B_\epsilon(t) u_\varepsilon,$$

où $B_\varepsilon(t) = \frac{\partial A(t)}{\partial t} u_\varepsilon$. On obtient

$$-\int_{\Omega_T} u \frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial t} dx dt = \int_{\Omega_T} \left(A(t) u - \varepsilon B_\varepsilon(t) u\right) v_\varepsilon^* dx dt. \tag{4.20}$$

L'opérateur $A(t)$ admet un inverse continu dans $L_2(0,1)$ défini par

$$A^{-1}(t)\,g = \begin{cases} \int_0^x \int_{\zeta}^{\alpha_1} g\,d\eta\,(\alpha_1-\zeta)\,a\,d\zeta + C_1 & x\in(0,\alpha_1), \\ \int_{\alpha_2}^x \int_0^{\zeta} g\,d\eta\,a\,d\zeta + C_2\int_{\alpha_2}^x 1\,a\,d\zeta + C_1 & x\in(\alpha_1,\alpha_2), \\ -\int_{\alpha_2}^x \int_{\zeta}^{\alpha_3} g\,d\eta\,(\alpha_3-\zeta)\,a\,d\zeta + C_1 & x\in(\alpha_2,\alpha_3), \\ \int_{\alpha_3}^x \int_{\alpha_3}^{\zeta} g\,d\eta\,a\,d\zeta + C_3\int_{\alpha_3}^x 1\,a\,d\eta + C_4 & x\in(\alpha_3,\alpha_4), \\ -\int_x^1 \int_{\zeta}^1 g\,d\eta\,(1-\zeta)\,a\,d\zeta + C_1 & x\in(\alpha_4,1). \end{cases}$$

où

$$C_1(t) = \int_0^{\alpha_1} dx \int_0^x \int_{\zeta}^{\alpha_1} g\,d\eta\,(\alpha_1-\zeta)\,a\,d\zeta + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} dx \int_{\alpha_2}^x \int_{\zeta}^{\alpha_3} g\,d\eta\,(\alpha_3-\zeta)\,a\,d\zeta + \int_{\alpha_4}^1 dx \int_x^1 \int_{\zeta}^1 g\,d\eta\,(1-\zeta)\,a\,d\zeta \quad \alpha_1+\alpha_3-\alpha_2-\alpha_4+1,$$

$$C_2(t) = -\int_0^{\alpha_1} \int_x^{\alpha_1} g(\eta)\,d\eta\,(\alpha_1-\zeta)\,a\,dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_0^{\zeta} g(\eta)\,d\eta\,a\,d\zeta \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\zeta\,a(\zeta,t),$$

$$C_3(t) = -\int_{\alpha_4}^1 \int_{\zeta}^1 g\,d\eta\,(1-\zeta)\,a\,d\zeta + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \int_{\zeta}^{\alpha_3} g\,d\eta\,(\alpha_3-\zeta)\,a\,d\zeta - \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} \int_{\alpha_3}^{\zeta} g\,d\eta\,a\,d\zeta \quad \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} d\zeta\,a,$$

$$C_4(t) = C_2(t) - \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \int_{\zeta}^{\alpha_3} g\,d\eta\,(\alpha_3-\zeta)\,a\,d\zeta.$$

Alors, on a

$\int_0^{\alpha_1} A^{-1}(t)\,u\,dx + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} A^{-1}(t)\,u\,dx + \int_{\alpha_4}^1 A^{-1}(t)\,u\,dx = 0$. Par conséquent, la fonction

$J_{\varepsilon}^{-1}u = u_{\varepsilon}$ peut être représentée sous la forme

$$u_{\varepsilon} = J_{\varepsilon}^{-1} A^{-1}(t) A(t)\,u.$$

Ainsi, l'égalité (4.20) devient

$$-\int_{\Omega_T} u \frac{\partial v^*_{\varepsilon}}{\partial t}\,dx\,dt = \int_{\Omega_T} A(t)\,u\,h_{\varepsilon}\,dx\,dt, \quad (4.21)$$

où $h_{\varepsilon} = v^*_{\varepsilon} - \epsilon B^*_{\varepsilon}(t)\,v^*_{\varepsilon}$.

Le côté gauche de (4.21) est une fonction linéaire continue de u, d'où la fonction h_{ϵ} a ses dérivées

$\rho\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho a\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}\right) \in L_2(\Omega_T)$ et les conditions suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} h_\varepsilon(0,t) = h_\varepsilon(\alpha_i,t) = h_\varepsilon(1,t) = 0 \quad i = 1-4, \\ \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}(\alpha_2,t) = \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}(1,t) = 0, \\ \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}(\alpha_1,t) = \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}(\alpha_3,t) = \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}(\alpha_4,t) = 0. \end{cases}$$

Puisque l'opérateur $B_\varepsilon^*(t)$ est borné dans $L_2(\Omega_T)$, pour ε suffisamment petit, on a $\|\varepsilon B_\varepsilon^*(t)\|_{L_2(\Omega_T)} < 1$.

Donc l'opérateur $I - \varepsilon B_\varepsilon^*(t)$ admet un inverse borné dans $L_2(\Omega_T)$.
On conclut que $\rho\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}\right) \in L_2(\Omega_T)$ et que les conditions suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} v_\varepsilon^*(0,t) = v_\varepsilon^*(\alpha_i,t) = v_\varepsilon^*(1,t) = 0 \quad i = 1-4, \\ \frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}(\alpha_2,t) = \frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}(1,t) = 0, \\ \frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}(\alpha_1,t) = \frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}(\alpha_3,t) = \frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}(\alpha_4,t) = 0. \end{cases} \tag{4.22}$$

En mettant

$$u = \int_0^t \exp(\mu\tau)\, v_\varepsilon^*\, d\tau, \tag{4.23}$$

dans (4.17), où μ est une constante positive et vérifie $a_3 \le \mu a_0$, nous obtenons

$$\int_{\Omega_T} \exp(\mu t)\, v_\varepsilon^* N v\, dxdt = \int_{\Omega_T} A(t)u\, v_\varepsilon^*\, dxdt + \varepsilon\int_{\Omega_T} A(t)u\, \frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial t}\, dxdt, \tag{4.24}$$

Intégrons par rapport à x et t dans le côté droit de (4.24), utilisons (4.22), (4.23) on aura

$$\int_{\Omega_T} A(t)u\, v_\varepsilon^*\, dxdt = -\mathrm{Re}\int_{\Omega_T} \rho(x)\exp(-\mu t)\, a\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\, dxdt$$
$$= \int_{\Omega_T} \frac{\rho(x)}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial t} - \mu a\right)\exp(-\mu t)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt - \int_0^1 \frac{\rho(x)}{2}\, a\exp(-\mu t)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\Big|_{t=T}, \tag{4.25}$$

$$\varepsilon\int_{\Omega_T} A(t)u\,\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial t}\, dxdt = -\varepsilon\int_{\Omega_T} \rho(x)\, a\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v_\varepsilon^*}{\partial t\partial x}\, dxdt$$
$$= \varepsilon\int_{\Omega_T} \rho(x)\, a\exp(-\mu t)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2 dxdt + \varepsilon\int_{\Omega_T} \rho(x)\exp(-\mu t)\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\, dxdt, \tag{4.26}$$

Grâce à l'inégalité élémentaire, nous trouvons

$$\varepsilon\int_{\Omega_T} \rho(x)\, a\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\, dxdt \le \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega_T} \rho(x)\, a\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2 dxdt + \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega_T} \rho\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)^2 \exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt$$

De l’inégalité précédente et (4.25) et (4.26) et comme

$$\mathrm{Re}\int_{\Omega_T}\exp(ct)\, v_\varepsilon^{*} N v\,dxdt = \mathrm{Re}\int_{\Omega_T}\exp(ct)\,(v_\varepsilon^{*}-v)\, N v\,dxdt + \mathrm{Re}\int_{\Omega_T}\exp(ct)\, v N v\,dxdt$$

alors

$$\int_{\Omega_T}\exp(ct)\,\rho(x)\,|v|^2 dxdt \leq$$

$$\int_{\Omega_T}\rho(x)\left(\frac{\partial a}{\partial t}-\mu a+\varepsilon\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)^2\right)\exp(-\mu t)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt-\mathrm{Re}\int_{\Omega_T}\exp(-\mu t)\,(v_\varepsilon^{*}-v)\,N v\,dxdt+\frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega_T}\rho(x)\,a\exp(-\mu t)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2 dxdt$$
$$-\int_0^1\frac{\rho(x)}{2}\,a\exp(-\mu t)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\Big|_{t=T},$$

Par passage à la limite quand $\varepsilon\to 0$, et en utilisant (4.23) on aura

$$\int_{\Omega_T}\exp(ct)\,\rho(x)\,|v|^2 dxdt \leq 0$$

D’où $v = 0$ a.e., Ainsi $\omega = 0$.

Théorème 4.2 *L’image $R(L)$ de l’opérateur L coïncide avec F.*

Preuve. Puisque F est un espace de Hilbert, on a $R(L) = F$ si et seulement si la relation

$$\int_{\Omega_T}\theta(x)\, f g\,dxdt+\int_0^1\theta(x)\,\frac{dlu}{dx}\frac{d\varphi}{dx}dx+\int_0^1 lu\,\varphi\,dx \quad (4.27)$$

pour un arbitraire $u\in D(L)$ et $(g,\varphi)\in F$, implique que $g = 0$ et $\varphi = 0$.

En mettant $u\in D_0(L)$ dans (4.27), on conclut d’après le lemme 4.1 que

$$\sqrt{\theta(x)}\,g=\sqrt{\Phi(x)}\,w = 0,$$

a.e. D’où $g = 0$.

En prenant $u\in D(L)$ dans (4.27) on trouve

$$\int_0^1\theta(x)\,\frac{dlu}{dx}\frac{d\varphi}{dx}dx+\int_0^1 lu\,\varphi\,dx = 0,$$

l’image de l’opérateur trace l est partout dense dans l’espce de Hilbert avec la norme

$$\int_0^1\theta(x)\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx+\int_0^1|\varphi|^2 dx,$$

Ainsi, $\varphi = 0$.

Résumé

Ce travail est consacré à la solvabilité, l'existence et l'unicité de la solution de certaines classes de problèmes aux limites pour équations aux dérivées partielles du type parabolique, combinant des conditions aux limites non locales et intégrale.
La méthode proposée est basée sur la construction d'espaces convenables, des estimations à priori et la densité de l'ensemble image de l'opérateur engendré par le problème considéré. Les résultats obtenus peuvent être vus comme une amélioration de la méthode des inégalités énergétiques

Abstract

This work is devoted to the solvability, the existence and the uniqueness of the solution of certain classes of boundary problems for partial differential equations of the parabolic type, combining non-local boundary conditions; integral type with classical conditions; Dirichlet - Newmann.

The proposed method is based on the construction of suitable spaces, a priori estimates and the density of the image set of the operator generated by the problem considered. The results obtained can be seen as an improvement of the energy inequality method

ملخص

هذا العمل مخصص لدراسة قابلية الحل، وجود الحل و وحدانية الحل لبعض الأصناف من المعادلات التفاضلية الجزئية من نوع القطع المكافئ ، والجمع بين شروط حد ية غيرمحلية وتكاملية.
تعتمد الطريقة المقترحة على بناء فضاءات مناسبة، تقديرات مسبقة وكثافة مجموعة صور المؤثر المتولد عن المسألة المراد حلها. النتائج التي تم الحصول عليها يمكن اعتبارها إثراء لمنهج المتراجحات الطاقوية.

Bibliography

[1] Allegretto W., Lin Y. and Zhou A., *A box scheme for coupled systems resulting from microsensor thermistorproblems*. Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems, **5** (1999), 573-578.

[2] Batten G. W. Jr., *Second-order correct boundary conditions for the numerical solution of mixed boundary problem for parabolic equations*. Math. Comp., **17** (1963), 405-413.

[3] Beilin A. B., *Existence of solutions for one-dimensional wave equation with a nonlocal condition*. Electron. J. Diff. Equa., **2001** (2001), 1-8.

[4] Benouar N. E. and Yurchuk N. I., *Mixed problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessel operator*. Differ. Equ., **27** (1991), 1482-1487.

[5] Bouziani A. and Benouar N. E., *Mixed problem with integral conditions for a third order parabolic equation*. Kobe J. Math., **15** (1998), 47-58.

[6] Cahlon B., Kulkarni D. M. and Shi P., *Stepwise stability for the heat equation with nonlocal constraint*. SIAM J. Numer. Anal., **32** (1995), 571-593.

[7] Cannon J. R., *The solution of the heat equation subject to the specification of energy*. Quart. Appl. Math., **21** (1963), 155-160.

[8] Cannon J. R., *The One-dimensional heat equation*. Encyclopedia of Mathematics ant its Applications, vol. 23, Addison-Wesley Publishing, Massachusets, (1984).

[9] Cannon J. R., Lin Y. and Wang S., *An implicite finite difference scheme for the diffusion equation subject to mass specification*. Internat. J. Engrg. Sci., **28** (1990), 573-578.

[10] Cannon J. R. and Matheson A. L., *A numerical procedure for diffusion subject to the specification of mass*. Internat. J. Engrg. Sci., **31** (1993), 347-355.

[11] Cappasso V. and Kunish K., *A reaction-diffusion system arising in modelling man-environment diseases*. Quart. Appl. Math., **46** (1988), 431-450.

[12] Choi Y. S. and Chan K. Y., *A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electrochemistry*. Nonlinear Anal., **18** (1992), 317-331.

[13] Cushman J. H. and Ginn T. R., *Nonlocal dispersion in porous media with continuously evolving scales of heterogeneity*. Transp. Porous Media, **13** (1993), 123-138.

[14] Cushman J. H., Xu H. and Deng F., *Nonlocal reactive transport with physical and chemical heterogeneity: localization error*. Water Ressources Res., **31** (1995), 2219-2237.

[15] Denche M. and Marhoune A. L., *High order mixed-type differential equations with weighted integral boundary conditions*. Electron. J. Differential. Equations, **2000** (2000), 1-10.

[16] Denche M. and Marhoune A. L., *Mixed problem with nonlocal boundary conditions for a third order partial differential equation of mixed type*. Int. J. Math. Math. Sci., **26** (2001), 417-426.

[17] Denche M. and Marhoune A. L., *Mixed problem with integral boundary condition for a high order mixed type partial differential equation*. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, **16** (2003), 69-79.

[18] Denche M. and Memou A., *Boundary problem with integral conditions for a linear third order equation*. Journal of Applied Mathematics, **11** (2003), 553-567.

[19] Dezin, A. A., General questions in theory of boundary value problems. Mosocow-Nauka, 1980 English trans, Springer Verlag.

[20] Dezin, A. A., Theoremes d'existence et d'unicité de la solution pour les problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionnels. Usp. Math. Naouk, T.14, 3(87), 22-73

[21] Friedricks K., *Symmetric hyperbolic linear differential equations*. comm. Pure. Appl. Math., **7** (1954), 345-392.

[22] Garding, L., Cauchy problem for hyperbolic equations of chicago, Lecture notes, 1957

[23] Ionkin N. I., *The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclasical boundary condition*. Differ. Uravn., **13** (1977), 294-304 (Russian).

[24] Kamynin N. I., *A boundary value problem in the theory of the heat conduction with non classical boundary conditions*. U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys., **4** (1964), 33-59.

[25] Kartynnik A. V., *A three-point boundary-value problem with an integral space-varaible condition for a second-order parabolic equations*. Differ. Equ., **26** (1990), 1160-1166.

[26] Ladyzenskaja O. A., Mixed problem for hyperbolic equation. Edition Mir Nauka, 1974

[27] Latrous C. and Memou A., *A Three- point Boundary Value Problem with an Integral condition for a third order partial differential equation*. Abstract and Applied Analysis., **1** (2005), 33-43.

[28] Leray J., Lecture on hyperbolic differential equations with variable coefficients. Princeton, Just for Adv. Study,1952

[29] Marhoune A. L., *A three-point boundary value problem with an integral two-space-variables condition for parabolic equations*. Computers and Mathematics with Applications., **53**

(2007), 940-947.

[30] Marhoune A. L. and Bouzit M., *High order differential equations with integral boundary condition*. Far East J. Math. Sci. (FJMS), **18** (2005), 341-450.

[31] Marhoune A. L. and Hameida A., *Mixed Problem With an Integral Space Variable Condition for a Third Order Parabolic Equation of Mixed Type*. Far East J. Math. Sci. (FJMS), **29** (2008), 409-418.

[32] Marhoune A. L. and Lakhal F., *A Boundary Value Problem with Multivariables Integral Type Condition for Parabolic Equations*. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis Volume 2009, 13 pages.

[33] Marhoune A. L. and Lakhal F., *An integral two space-varables condition for parabolic Equations*. Journal of Mathematics and statistics. Sciences Publications, **8** (2012) 185-190 .

[34] Marhoune A. L. and Latrous C., *A strong solution of a high order mixed type partial differential equation with integral conditions*. Applicable analysis Vol. 87, No. **6** (June 2008), 625-634.

[35] Memou. A and Denche M., *On a Mixed Nonlocal Problem with Integral Condition For a Second Order Parabolic Equation*. Analele Universitatii Oradea Fasc. Matematica, **2** (2014), 159-168.

[36] Memou. A and Denche M., *On a Mixed Quasilinear Nonlocal Problem With Integral Condition for a Second Order Parabolic Equation*. Sohag Journal of Mathematics, **2** (2015), 67-74.

[37] Perez Esteva and Van Der Hoek J., *A Galerkin procedure for the diffusion equation subject to the specification of mass*. Siam J. Numer. Anal., **24** (1987), 499-515.

[38] Petovsky, I. G., *Uber das Cauchyshe problem fur system von linearm partiallen diferentialgeichungen in Gebit der nichtanalystischen funktionen*. Bull. Univ. detat, Moscow, **7** (1938), 1-74.

[39] Pulkina L. S., *A non-local problem with integral conditions for hyperbolic equations*. Electron. J. Differential Equations, **1999** (1999), 1-6.

[40] R.E. Ewing and T. Lin, *A class of parameter estimation techniques for fluid flow in porous media*. Adv. Water Ressources, **14** (1991), 89-97.

[41] Samarski A. A., *Some problems in the modern theory of differential equations*. Differ. Uravn., **16** (1980), 1221-1228 (Russian).

[42] Shi P., *Weak solution to evolution problem with a nonlocal constraint*. SIAM J. Math. Anal., **24** (1993), 46-58.

[43] Shi P. and Shillor M., *Design of Contact Patterns in One Dimentional Thermoelasticity.* in Theoretical Aspects of Industrial Design, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1992.

[44] Volkodavov V. F. and Zhukov V. E., *Two problems for the string vibration equation with integral conditions and special matching conditions on the characteristic.* Differ. Equ., **34** (1998), 501-505.

[45] Yurchuk N. I., *Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations.* Differ. Equ., **22** (1986), 1457-1463.