

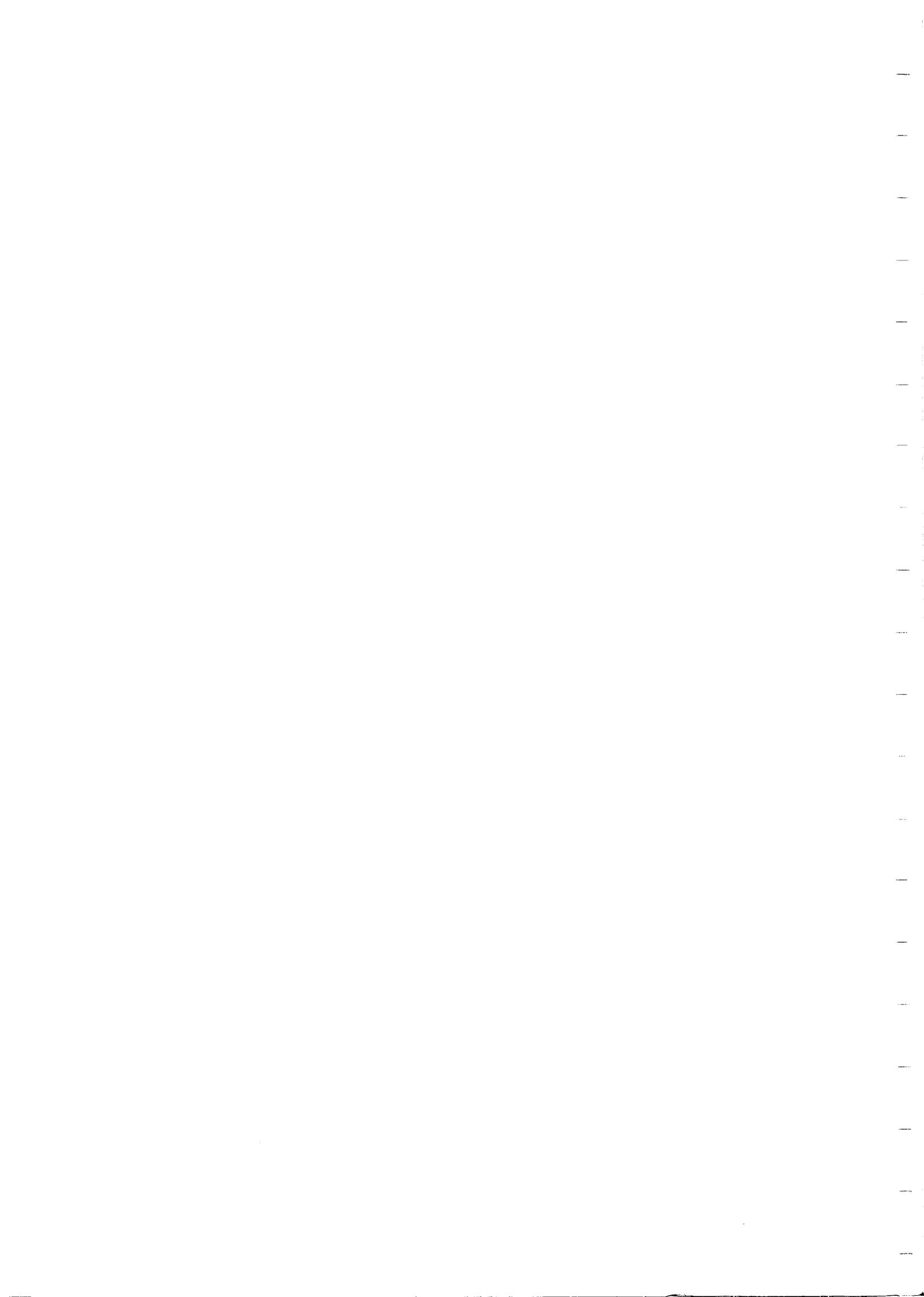
MEMOIRE DE MAGISTERE DE MATHEMATIQUES
DE L'UNIVERSITE DE CONSTANTINE

**UNE PREUVE EFFECTIVE DU
THEOREME DE HEDLUND POUR LES
SURFACES HYPERBOLIQUES CONVEXES,
COMPACTES A BORD**

Meriem Salam BENHASSINE

Soutenu à Constantine, le ,
devant le Jury :

Président: M.BEBOUCHI (U.S.T.H.B),
Rapporteur: M. BENKAFADAR, Maître de Conférences (Université de Constantine),
Examineurs: M. DENECHÉ, Maître de Conférences (Université de Constantine),
M. AIBECHE, Chargé de Cours (Université de Constantine)



Remerciements

Sans Norbert A'CAMPO, ce travail n'aurait pas vu le jour. Le remercier serait insuffisant, devant son apport et son indéfectible disponibilité. J'espère qu'il retrouvera dans ce texte un peu de l'âme mathématique qu'il n'a eu de cesse de m'insuffler durant de longues années.

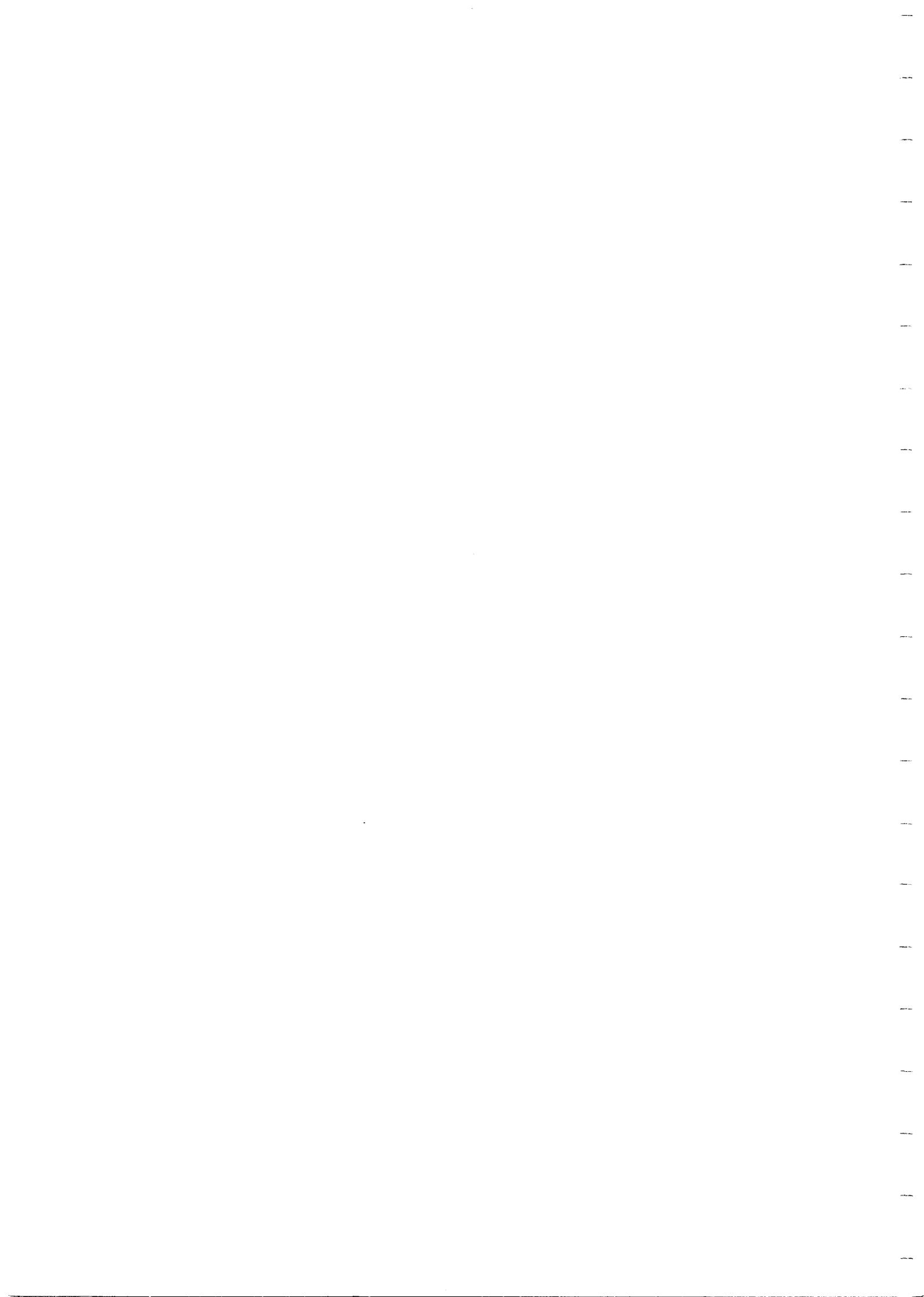
Le Professeur BEBOUCHI m'a fait le grand honneur d'accepter d'être le Président de mon jury, et je l'en remercie vivement.

Je serai éternellement reconnaissante au Professeur BENKAFADAR d'avoir parrainé ce travail. Merci du fond du coeur.

Durant trois années, les Professeurs AIBECHE et DENECHÉ m'ont particulièrement soutenue à travers les méandres administratifs. Je ne peux que m'incliner devant leur générosité.

Je ne peux citer par le nom tous ceux qui m'ont aidée et encouragée. Ils sont nombreux, tant à l'Institut Joseph FOURIER de Grenoble, qu'au Mathématiques Institut de Bâle, qu'au Département de Mathématiques de Constantine, et qu'à l'Ecole Normale Supérieure de Kouba.

Je terminerai par une pensée spéciale à mon fan-club : Abdelhamid AMGHAR, Abdellatif MOSTEFAI, Marianne MUCELLI, Chouki YAHIA-CHEJIF, et en particulier les BENHASSINE de Jijel et de Berkeley.



SOMMAIRE

INTRODUCTION

CHAPITRE I : NOTIONS DE GEOMETRIE RIEMANNIENNE

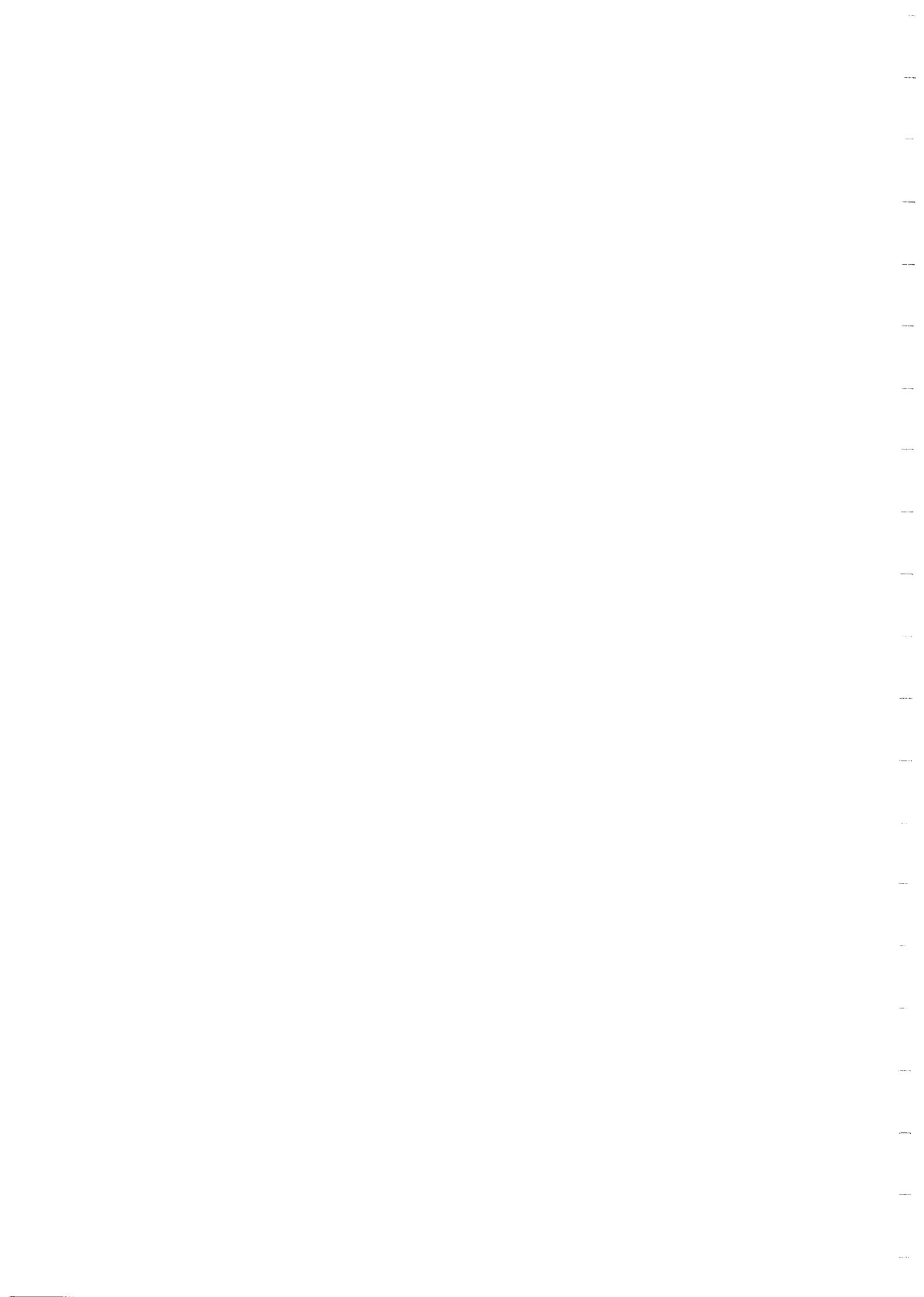
I.1 Variétés riemanniennes - Courbure :.....	01
I.2 Surfaces : formule de GAUSS - BONNET - Lien entre la Topologie et la métrique :.....	16
Bibliographie :.....	25

CHAPITRE II : FLOTS GEODESIQUES ET HOROCYCLIQUES DU FIBRE UNITAIRE TANGENT A UNE SURFACE HYPERBOLIQUE, COMPLETE

II.1 Revêtement universel d'une surface hyperbolique complète :.....	26
II.2 Flot géodésique, flot horocyclique de T^1H^2 :.....	32
II.3 Calculs dans H^2 : éléments remarquables du groupe d'isométries positives :.....	44
II.4 Surfaces hyperboliques complètes :.....	52
II.5 Flot géodésique, flot horocyclique du fibré unitaire tangent à une surface hyperbolique complète :.....	61
II.6 Théorème de HEDLUND : preuve originale :.....	74
Bibliographie :.....	84

CHAPITRE III : PREUVE EFFECTIVE DU THEOREME DE HEDLUND POUR LES SURFACES HYPERBOLIQUES CONVEXES COMPACTES A BORD ET APPLICATIONS

III.1 Preuve effective du Théorème de HEDLUND :.....	85
III.2 Applications :.....	91
III.2.A Non existence d'orbites périodiques du flot horocyclique pour des surfaces hyperboliques admettant une décomposition en pantalons géodésiques :.....	91
III.2.B Non existence d'orbites périodiques du flot horocyclique pour des surfaces hyperboliques i périodiques :.....	96
III.2.C Estimation dans le cas des surfaces compactes à bord, convexes pour une métrique hyperbolique à courbure sectionnelle pincée :.....	101
III.2.D Quelques conséquences du Théorème de RATNER :.....	106
Bibliographie :.....	108



INTRODUCTION

Ce résultat serait passé inaperçu s'il n'était pas le premier cas où la conjecture de Raghunatan s'était vérifiée - Cette conjecture est la suivante :

Conjecture de Raghunatan :

Soit G un groupe de Lie, semi simple , connexe . Γ un réseau de G (c'est à dire un sous groupe discret de G et tel que le quotient Γ/G soit de volume fini) .

Soit H un sous groupe fermé de G engendré par des unipotents (on appelle a élément unipotent , un élément dont toutes les valeurs propres sont égales à 1). Alors :

$$\forall (x \in \Gamma/G) ; \exists (P_x \text{ sous groupe fermé de } G \text{ tel que } P_x \supset H) \text{ et } \overline{xH} = xP_x.$$

On a interprété le flot horocyclique du fibré unitaire tangent T^1S à une surface hyperbolique S comme action d'un groupe unipotent sur le quotient d'un groupe de Lie semi simple connexe par un réseau :

$$U_t \times \Gamma/G \rightarrow \Gamma/G$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Gamma g \rightarrow \Gamma g \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ où } G = \text{PSL}(2, \mathfrak{R})$$

et démontré que le théorème de Hedlund impliquait que pour tout Γg de

$$\Gamma/\text{PSL}(2, \mathfrak{R}) ; \overline{\Gamma g U_t} = \Gamma g U_t \text{ ou } \overline{\Gamma g U_t} = \Gamma/\text{PSL}(2, \mathfrak{R}).$$

Les techniques de la théorie ergodique exposées au chapitre II, ont été développées beaucoup plus pour la conjecture de Raghunatan que pour le théorème de Hedlund en lui même. Elles classifient les mesures ergodiques H invariantes plutôt que les H orbites.

Le but de notre travail est de comprendre la nature géométrique du phénomène décrit par Hedlund et d'aborder le problème en utilisant les rudiments de la géométrie riemannienne : (le chapitre I étant un mini cours de géométrie riemannienne adaptée aux surfaces).

On s'est fixé comme objectif de donner une preuve effective du théorème de Hedlund.

Etant donnée (S, g) une surface hyperbolique compacte , $B(\epsilon)$ une boule de (S, g) de rayon ϵ , on sait (par Hedlund) que tout horocycle

$h: \mathfrak{R} \rightarrow S$ a une intersection non vide avec $B(\epsilon)$. La trace de h sur $S - B(\epsilon)$ est donc une courbe horocyclique de longueur finie $L(h)$. Une preuve effective consiste à donner une estimation pour une borne supérieure pour $L(h)$.

Dans le chapitre III, on fournira une preuve effective pour un cas bien particulier de surface hyperbolique.

Proposition A

Pour $(S, \partial S)$ surface à bord, compacte, hyperbolique convexe, il existe une constante C (ne dépendant que du diamètre de $(S, \partial S)$), telle que $\text{Sup}_{h \in C^1(S, \partial S)} \|h\| < C$.

Nous donnerons une liste d'exemples où cette constante est optimale et nous généraliserons ce résultat au cas des surfaces à bord $(S, \partial S)$ compactes, convexes pour une métrique à courbure sectionnelle négative pincée (c à d $\exists (a > 0); \exists (0 < b < \infty)$ tq $-b^2 \leq K(p) \leq -a^2$, pour tout p de S , $K(p)$ représente la courbure sectionnelle de S au point p).

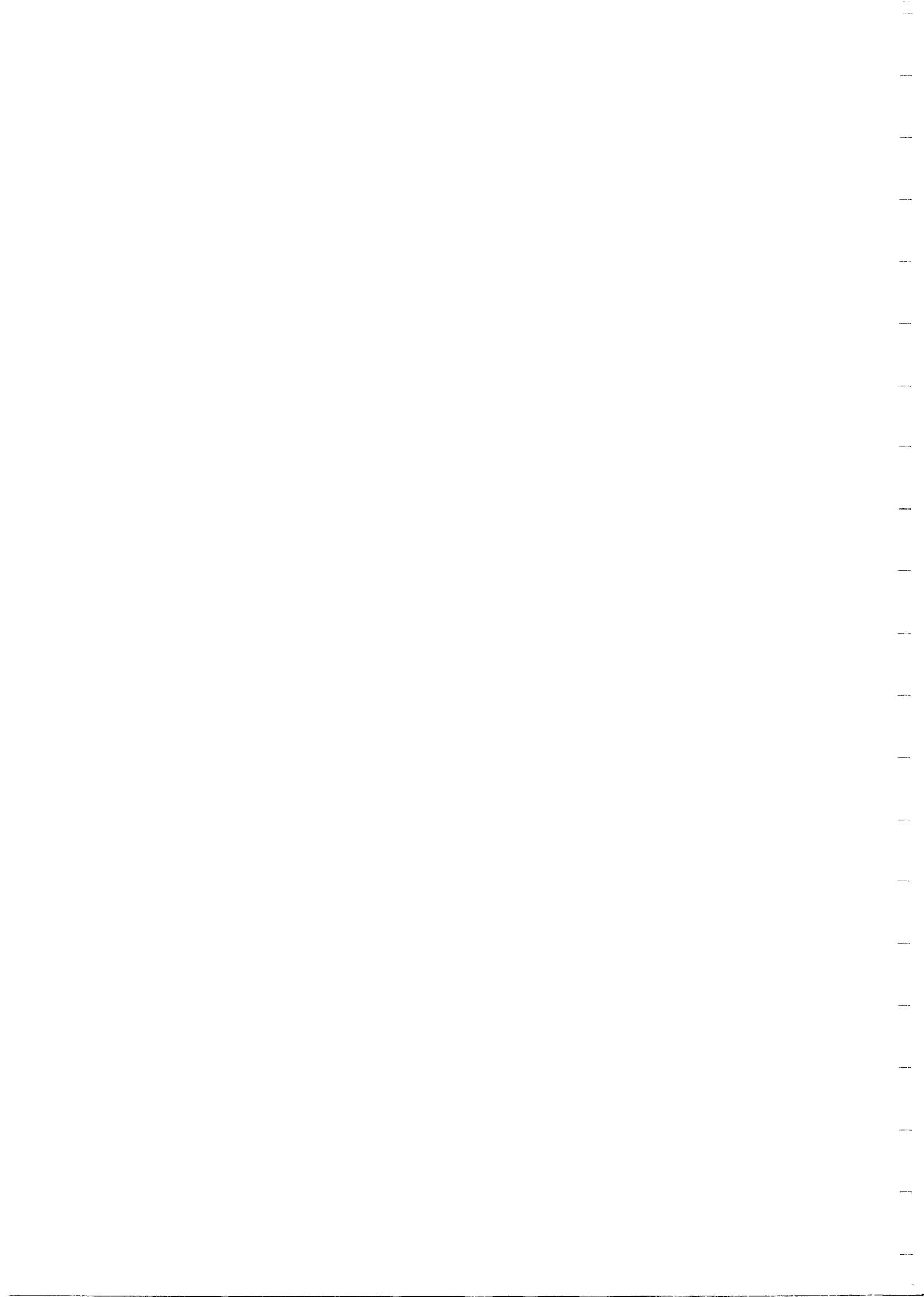
Proposition B

Pour $(S, \partial S)$ surface à bord compacte, convexe à courbure sectionnelle $-b^2 \leq K(p) \leq -a^2$ ($(a > 0); (0 < b < \infty)$), il existe une constante positive C dépendant de b telle que : $\text{Sup}_{h \in C^1(S, \partial S)} \|h\| < C$.

La dernière partie du travail sera consacrée au flot horocyclique du fibré unitaire tangent T^1S à S une surface hyperbolique i périodique. (On appelle S surface hyperbolique i périodique une surface hyperbolique admettant Z^i comme sous groupe d'isométries.).

Proposition C

Il n'existe pas d'orbites périodiques du flot horocyclique du fibré unitaire tangent d'une surface i périodique hyperbolique.



I. Variétés riemanniennes - courbure

I.1.A Variétés différentiables

Soit M un sous ensemble non vide de \mathfrak{R}^n .

I.1.A.1 Définition

On dit que M est une variété différentiable de dim k , s'il existe :

i) Un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de M avec U_i homéomorphe à \mathfrak{R}^k .

ii) $\{\varphi_i \in C^\infty(U_i, \mathfrak{R}^k)\}$, φ_i difféomorphisme

tels que :

$\forall (i \in I) \quad \forall (j \in I) : \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \mathfrak{R}^k \rightarrow \mathfrak{R}^k$ est un difféomorphisme.

(U_i, φ_i) est appelée carte.

$(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ est appelé atlas.

Soit N une variété de dim n , $N \subset \mathfrak{R}^l$ et soit $M \subset \mathfrak{R}^n$ une variété de dim k , $f \in C(M, N)$.

I.1.A.2 Définition

On dit que $f : M \rightarrow N$ est de classe C^∞ ssi :

$\forall (m \in M), \exists (U, \varphi)$ carte autour de m , $\exists (V, \Psi)$ carte autour de $f(m)$ telles que : $\Psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathfrak{R}^k \rightarrow \mathfrak{R}^l$ est de classe C^∞ .

$M \subset \mathfrak{R}^n$, variété de dim k , soit $x \in M$ et (U, φ) une carte autour de x , on a : $D_x \varphi : \mathfrak{R}^k \rightarrow \mathfrak{R}^n$

I.1.A.3 Définition

On définit l'espace tangent en x à M , noté $T_x M$, comme étant :

$\text{Im } D_x \varphi(\mathfrak{R}^k)$.

I.1.A.4 Lemme

Notons $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$, $TM \subset \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n$ est une variété différentiable de dim $2k$.

TM est appelé fibré tangent à M .

Soit $N \subset \mathbb{R}^l$, variété de dim k égale à dim M , et soit $f \in C^\infty(M, N)$

On a: $\forall (x \in M) D_x f: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ et $D_x f \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$

I.1.A.5. Définition

On appelle $y \in N$ valeur régulière de f ssi : $\forall (x \in f^{-1}(y)) \det(D_x f) \neq 0$. Si on suppose M compact et N connexe, on définit le degré de l'application f :

$$\text{Deg } f = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{Sign}(\det(D_x f)), y \text{ valeur régulière}$$

I.1.A.6 Définition

$M \subset \mathbb{R}^n$ étant une variété différentiable, on définit X un champ de vecteur sur M , comme étant un élément de $C^\infty(M, TM)$, et tel que : pour $x \in M$, $X(x) \in T_x M$.

On appelle $x \in M$, zéro du champ de vecteur X si $X(x) = 0$.

Supposons M compacte et soit X un champ de vecteur sur M avec m zéro isolé de X : l'application $\tilde{X}: U - \{m\} \rightarrow S^{k-1}$, U carte

$$x \rightarrow \frac{X(x)}{\|X(x)\|}$$

autour de x , est une application entre deux variétés différentiables de même dimension.

I.1.A.7 Définition

On appelle l'indice de X en m , $I_m X$, le degré de l'application \tilde{X} .

I.1.A.8 Théorème (Poincaré - Hopf) [Milnor]

Soit M une variété compacte de dimension k ; X un champ de vecteur différentiable avec des zéros isolés. On a :

$$\sum_{m \text{ zéro de } X} i_m(X) = \chi(M)$$

où $\chi(M)$ caractéristique d'Euler - Poincaré de M .

On donnera dans le cas des surfaces, une preuve de ce théorème et une identification entre les deux invariants.

I.1.B Variétés riemanniennes.

M est une variété différentiable de dim m .

I.1.B.1 Définition

On appelle métrique riemannienne sur M , notée g , la donnée d'une application $M \rightarrow S^2T^*M$ définie positive, différentiable.

$$S^2T^*M = \{ \text{Formes bilinéaires } TM \times TM \}$$

Expression dans une carte locale :

Soit $x \in M$, (U, φ) une carte locale autour de x . et soit $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq m}$ une famille de champ de vecteurs linéairement indépendants.

Soit $U, V \in T_x M$

$$U = \sum_1^m u^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad V = \sum_1^m v^j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

On pose :

$$g_x(U, V) = \sum_{i,j} g_{ij}(x) u^i v^j, \quad g_{ij}(x) = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

I.1.B.2 Théorème

Supposons M connexe. Il existe au moins une métrique riemannienne sur M .

Preuve

Considérons $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ un atlas sur M et soit $(\rho_\alpha)_{\alpha \in I}$ une partition de l'unité relative à $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$.

Soit q un produit scalaire sur \mathfrak{R}^m .

Sur TU_α , considérons le produit scalaire suivant :

$$x \in U_\alpha, U, V \in T_x U_\alpha : q_\alpha^*(U, V) = q_{\varphi_\alpha(x)}(D_x \varphi_\alpha(U), D_x \varphi_\alpha(V))$$

q_α^* définit un produit scalaire sur TU_α .

Posons $g = \sum \rho_\alpha q_\alpha^*$, g est la métrique cherchée.

I.1.C Connexions Riemanniennes

Soit M une variété riemannienne, connexe, de métrique g et dim $M = n$.

I.1.C.1 Définition

Une connexion ∇ sur M est une \mathfrak{R} forme bilinéaire de $X(M) \times X(M) \rightarrow X(M)$ vérifiant :

$\forall (X \in X(M)) \forall (Y \in X(M)) \forall (f \in C^\infty(M))$ on a :

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$$

$$\nabla_X (fY) = (Xf)Y + f \nabla_X Y \text{ où: } Xf(x) = D_x f(X(x))$$

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

$$\text{où } [X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$$

I.1.C.2 Théorème

Sur (M, g) , il existe une unique connexion compatible avec la métrique g :

$$\forall (X, Y, Z) \in (X(M))^3 \text{ on a: } Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

Cette connexion est dite connexion de Levi - Cevita ou connexion riemannienne.

Preuve du théorème

Passons aux cartes locales:

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dX_i dX_j \quad X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad Y = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + X^i Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right]$$

Posons :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

On a :

$$\nabla_X Y = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x_i} + \sum_{i,k} X^i Y^k \Gamma_{i,k}^j \right) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

La compatibilité avec la métrique donne :

$$\Gamma_{i,j}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n (g_{il})^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} g_{kl} + \frac{\partial}{\partial x_k} g_{lj} + \frac{\partial}{\partial x_l} g_{jk} \right)$$

Si $g_{i1} = 0$, $(g_{i1})^{-1} = 0$. sinon, $(g_{i1})^{-1} = 1/g_{i1}$

Le système de la connexion donne :

$$\Gamma_{i,j}^k = \Gamma_{j,i}^k$$

On se retrouve avec des symboles bien explicites, d'où le théorème.

Les $(\Gamma_{i,j}^k)$ sont appelés symboles de Christoffel.

Soit $\gamma : I \rightarrow M$ une courbe différentiable.

I.1.C.3 Définition

Un champ de vecteur le long de γ est une courbe $X : I \rightarrow TM$ telle que $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$ pour tout t de I .

I.1.C.4 Proposition

Soit (M,g) une variété Riemannienne ; ∇ sa connexion de Levi-Cevita.

Soit $\gamma : I \rightarrow M$ une courbe différentiable; X un champ de vecteur le long de γ .

Il existe un unique opérateur $\frac{D}{dt}$ vérifiant :

$$i) \forall f \in C(I, \mathbb{R}) ; \frac{D}{dt}(fX)(t) = f'(t)X(t) + f(t)\frac{D}{dt}X(t)$$

$$ii) \exists (V \in \mathcal{D}(t_0) \subset I) / X = Y|_{V(t_0) \subset M}, Y \text{ champ de vecteur}$$

De plus :

$$\frac{D}{dt}Y(t_0) = \nabla_{\dot{\gamma}(t_0)}(X(t))|_{t=t_0}$$

Preuve

Passons aux cartes locales :

$$X(t) = \sum_{i=1}^n X^i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$\frac{D}{dt}X(t)$; si $\frac{D}{dt}$ existe; est égal à :

$$\frac{D}{dt}X(t) = \sum_{i=1}^n X^i(t) \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n \dot{X}^i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

(voir les propriétés de connexion).

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{j=1}^n \dot{x}_j(t) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)$ étant entièrement déterminés par les symboles de Christoffel, on a :

$$\frac{D}{dt} X(t) = \sum_{i=1}^n \dot{X}_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i \dot{x}_j(t) X_k(t) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

L'opérateur $\frac{D}{dt}$ est ainsi bien défini.

I.1.C.5 Définition

Un champ de vecteur est dit parallèle à γ si $\frac{D}{dt} X = 0$.

I.1.C.6 Proposition

γ étant une courbe de classe C^1 , $v \in T_{\gamma(0)}M$ il existe un unique champ de vecteur X , parallèle le long de γ et tel que $X(\gamma(0)) = v$.

Preuve

$$\gamma : I \rightarrow M \quad C^1 \quad ; \quad I = [0,1].$$

Subdivisons $I = \{0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = 1\}$ de façon à ce que $\gamma[t_i, t_{i+1}] \subset (U_\alpha, \varphi_\alpha)$ carte de l'atlas.

Considérons $\gamma[0, t_1]$: chercher un champ parallèle X le long de $[0, t_1]$ revient à résoudre :

$$\begin{cases} \dot{X}_i(t) + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i \dot{x}_j(t) X_k(t) = 0 & 0 \leq i \leq n \\ X(0) = v \end{cases}$$

D'où l'affirmation.

I.1.C.7 Définition

On définit le transport parallèle de $\gamma(0)$ à $\gamma(t)$ le long d'une courbe γ de classe C^1 comme étant l'application linéaire: $P_t: T_{\gamma(0)}M \rightarrow T_{\gamma(t)}M$, telle que : $P_t(v) = X_v(t)$, où X_v est le champ de vecteur parallèle le long de γ vérifiant $X_v(0) = v$.

I.1.C.8 Proposition

Pour tout $t \in I$, P_t définit une isométrie.

En effet : $\frac{d}{dt} g(X(t), Y(t)) = g \left\langle \frac{D}{dt} X, Y \right\rangle + g_t \left\langle \frac{D}{dt} Y, X \right\rangle$

$\frac{D}{dt} X = \frac{D}{dt} Y = 0$. Puisque ce sont des champs parallèles le long de γ . D'où:

$\frac{d}{dt} g(X(t), Y(t)) = 0$. Ce qui implique $g(X(t), Y(t)) = g(X(0), Y(0)) \forall (t \in I)$

I.1.D Géodésiques :

(M, g) étant une variété riemannienne de dim n , et ∇ sa connexion de Levi-Cevita.

Soit $\gamma: \mathcal{R} \rightarrow M$ une courbe de classe C^1 .

I.1.D.1 Définition

On dit que γ est une géodésique ssi on a : $\forall (t \in \mathcal{R}) \quad \nabla_{\dot{\gamma}(t)} (\dot{\gamma}(t)) = 0$

En coordonnées locales:

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

Si γ est une géodésique, ses coordonnées sont solutions du système différentiel suivant :

$$\left\{ \ddot{x}_i(t) + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i(x(t)) \dot{x}_j(t) \dot{x}_k(t) = 0 \right\}_{1 \leq i \leq n}$$

Exemple

Pour $M = \mathcal{R}^n$ on a : $\{(\ddot{x}_i(t) = 0, 1 \leq i \leq n)\} \Rightarrow \gamma(t) = tv + x_0$

I.1.D.2 Théorème

Soit $x_0 \in M$. On a:
 $\exists(U \in \mathcal{O}(x_0)) ; \exists(\varepsilon > 0) / \forall(m \in U); \forall(v \in T_m M, \|v\| \leq \varepsilon) \exists!(\gamma: [-1,1] \rightarrow M / \gamma(0) = m, \dot{\gamma}(0) = v,$
 $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = 0)$

En coordonnées locales, on a :

$$\begin{cases} \ddot{x}_i(t) + \sum_{k,j} \Gamma_{j,k}^i(x(t)) \dot{x}_j(t) \dot{x}_k(t) = 0 \\ | \\ x(0) = m \\ | \\ \dot{x}(0) = v \\ | \end{cases}$$

Le théorème exprime juste l'existence d'une solution - les théorèmes d'existence donnent le U et le ε . De plus, on a :

$\Phi: TU \times [-1,1] \rightarrow M$ est C^∞

$$(v, t) \rightarrow \{ \gamma(t) / (\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) = v \}$$

On notera γ_v l'unique géodésique vérifiant $\gamma_v(0) = m$ et $\dot{\gamma}_v(0) = v$ et soit $\Phi: TM \rightarrow M$

$$(m, v) \rightarrow \gamma_v(1)$$

On notera: $\Phi = \exp_m$

I.1.D.3 Proposition

1) L'application \exp_m est différentiable.

2) L'application $\Psi: TM \rightarrow M \times M$ définit un difféomorphisme
 $(m, v) \rightarrow \Psi(m, v) = (m, \exp_m(v))$

local d'un voisinage de $(m_0, 0)$ dans TM sur un voisinage de (m_0, m_0) dans $M \times M$

Preuve

l'assertion 1) découle du théorème I.1.D.2

l'assertion 2) est une application du théorème d'inversion locale à Ψ .

$$\Psi: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow M \times M$$

$$(m, v) \rightarrow \Psi(m, v) = (m, \exp_m(v))$$

Pour t assez petit, on a: $\Psi(m_0, tv) = (m_0, \gamma_v(t))$

$$D_{m_0,0}\Psi\left[\frac{\partial}{\partial u_i}\right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi(m_0, t \frac{\partial}{\partial u_i}) - \Psi(m_0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(m_0, \gamma_{\frac{\partial}{\partial u_i}}(t)) - (m_0, 0)}{t}$$

$$D_{m_0,0}\Psi\left[\frac{\partial}{\partial u_i}\right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{((0, \gamma_{\frac{\partial}{\partial u_i}}(t)))}{t} = \dot{\gamma}_{\frac{\partial}{\partial u_i}}(0) = \frac{\partial}{\partial u_i}$$

$$D_{m_0,0}\Psi\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi(m_0 + t \frac{\partial}{\partial x_i}, 0) - \Psi(m_0, 0)}{t} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial u_i}\right)$$

D'ou

$$D_{m_0,0}\Psi = \begin{bmatrix} \text{Id} & 0 \\ \text{Id} & \text{Id} \end{bmatrix}$$

Donc Jac $[D_{m_0,0}\Psi] \neq 0$. Par application du théorème d'inversion locale, on a le résultat .

I.1.D.4 Corollaire

Pour $m_0 \in M$, il existe un voisinage U de m_0 , il existe $\varepsilon > 0$, tels que :

- 1) $\forall (x, y) \in U \times U \exists ! (v \in T_x M; |v| < \varepsilon) / y = \exp_x v$.
- 2) $\forall (m \in U)$; l'application \exp_m est un difféomorphisme local entre la boule $B(0, \varepsilon)$ dans $T_m M$ et son image dans M .

I.1.D.5 Définition

$\gamma: I \rightarrow M$ étant une courbe de classe C^1 , on définit la longueur de γ ; $L(\gamma)$, comme étant égale à :

$$L(\gamma) = \int_I \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt$$

I.1.D.6 Théorème

Soit $m_0 \in M$. Il existe un voisinage U de m_0 , il existe $\varepsilon > 0$, tels que :

$$\forall (m \in U) ; \forall (p \in U) ; \exists ! (\gamma: I \rightarrow M, \gamma \text{ géodésique} ; \gamma(0) = m ; \gamma(1) = p ; L(\gamma) \leq \varepsilon)$$

De plus, $L(\gamma) = d(m, p)$.

$$\text{où : } d(m,p) = \inf_{\{c: I \rightarrow M, C^1 \text{ par mor, } c(0)=m, c(1)=p\}} L(c)$$

Preuve du théorème

Soit $m = \gamma(0)$ et soit $U_m = \exp_m [B(0,\epsilon)]$.

Première étape :

Soit $t \rightarrow v(t)$ est une courbe dans $T_m M$ vérifiant $|v(t)|=1$ considérons $t_0 \in \mathfrak{R}$,

$$\gamma_{t_0}: [0, \epsilon] \rightarrow M$$

$$r \rightarrow \exp_m(rv(t_0))$$

Considérons $r_0 \in [0, \epsilon[$

$$\delta_{r_0}: \mathfrak{R} \rightarrow M$$

$$t \rightarrow \exp_m(r_0 v(t))$$

Les courbes $(\gamma_{t_0})_{t_0 \in \mathfrak{R}}$ et $(\delta_{r_0})_{r_0 \in [0, \epsilon[}$ sont orthogonales dans M .

En effet :

L'application $f: [0, \epsilon] \times \mathfrak{R} \rightarrow M$ paramètre une surface dans M

$$r, t \rightarrow \exp_m(rv(t)) = f(r, t)$$

Les courbes $(\gamma_{t_0})_{t_0 \in \mathfrak{R}}$ et $(\delta_{r_0})_{r_0 \in [0, \epsilon[}$ correspondent respectivement aux courbes $(f_{r_0})_{r_0}: t \rightarrow \exp_m(r_0 v(t))$ et $(f_{t_0}): r \rightarrow \exp_m(rv(t_0))$

Pour prouver que les courbes $(\gamma_{t_0})_{t_0 \in \mathfrak{R}}$ et $(\delta_{r_0})_{r_0 \in [0, \epsilon[}$ sont orthogonales, il faut et il suffit que $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial t}$ soient orthogonaux.

$$\frac{\partial}{\partial r} g\left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) = g\left[\frac{D}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t}\right] + g\left[\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{D}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial t}\right]$$

f_r étant une géodésique, on a :

$$\frac{D}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial r} = 0 = \nabla_{\dot{r}(t)}(\dot{r}(t)).$$

$$\frac{D}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial r} + \left[\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right] \quad (\text{symétrie de } \nabla)$$

$$\text{or } \left[\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right] = 0 \quad (\text{Schwartz égalité})$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial r} g \left[\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right] - g \left[\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial r} \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} g \left[\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \right] - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v(t)| = 0$$

$$\Rightarrow g \left[\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{r,t} - g \left[\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{0,0} = 0$$

2ème étape

Soit $C : I \rightarrow U_m$ une courbe C^1 par morceau. On peut écrire :
 $C(t) = \exp_m(r(t), v(t))$. (\exp_m difféo local).

Affirmation

$L(C) \geq |r(1) - r(0)|$, l'égalité réalisée si $v(t) = \text{cste}$ et r est monotone.

$$\text{On a : } L(C) = \int_0^1 \sqrt{g(\dot{C}(t), \dot{C}(t))} dt$$

En reprenant la surface paramétrée de la première étape, on a :

$$C(t) = f(r(t), t)$$

$$\dot{C}(t) = \frac{\partial f}{\partial r} \dot{r}(t) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$g(\dot{C}(t), \dot{C}(t)) = \dot{r}^2(t) \cdot g\left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r}\right) + 2\dot{r}(t) g\left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) + g\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

$$\text{or } \frac{\partial f}{\partial r} \perp \frac{\partial f}{\partial t} \text{ et } \left| \frac{\partial f}{\partial r} \right|^2 = |v(t)|^2 = 1$$

D'où :

$$g(\dot{C}(t), \dot{C}(t)) = |\dot{r}(t)|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|^2 \geq |\dot{r}(t)|^2 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 g^{\frac{1}{2}}(\dot{C}(t), \dot{C}(t)) dt \geq \int_0^1 |\dot{r}(t)| dt = |r(1) - r(0)|$$

On a l'égalité si $\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow v(t) = \text{cste}$.

3ème étape

Soit $C: [0,1] \rightarrow M$ une courbe de classe C^1 , et telle que $C(0) = m$ et $C(1)=p$.

1) C est entièrement contenue dans $\exp_m(B(0,\epsilon)) = U_m$. On a :
 $L(C) \geq |r(1) - r(0)| = \epsilon \geq L(\gamma)$.

2) C n'est pas contenue dans U_m , $C = C_1 \cup C_2$, avec C_1 entièrement contenue dans U_m , et $L(C) \geq L(C_1) \geq L(\gamma)$. cqfd.

I.1.D.7 Corollaire

Soit C une courbe, $C: [0,1] \rightarrow M$, paramétrée par longueur d'arc et telle que C réalise la longueur minimale entre $C(0)$ et $C(1)$, alors C est une géodésique.

I.1.D.8 Théorème

M est compact; $[\gamma]$ est un élément de $\Pi_1(M)$.

Il existe $\alpha \in [\gamma]$, α géodésique fermée, $L(\delta) \geq L(\alpha), \forall([\delta] \in \Pi_1(M)) / [\delta] = [\gamma]$.

preuve

Notons $\inf_{\delta \in [\gamma]} L(\delta) = l$.

M étant compact, $l \neq 0$.

Soit $(\delta_i)_{i \in \mathbb{N}}, \delta_i \in [\gamma]$, δ_i de vitesse constante, paramétrée par longueur d'arc et $L(\delta_i) \rightarrow l, \delta_i: [0,1] \rightarrow M, \|\dot{\delta}_i(t)\| = \text{cte}$.

Subdivisons l'intervalle $[0,1]$ en $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k+1} = 1 / \delta_{[t_k, t_{k+1}]} \subset \exp_{m_k}(B(0,\epsilon))$ de façon à ce que $\delta_{[t_k, t_{k+1}]}$ segment géodésique.

En effet:

il existe α_i segment géodésique liant $\delta_i(t_k)$ à $\delta_i(t_{k+1})$ et $\alpha_i, \delta_{[t_k, t_{k+1}]}$ sont homotopes.

Considérons les suites $(\delta_i(t_k))_{i \in \mathbb{N}}, (\dot{\delta}_i(t_k))_{i \in \mathbb{N}}$. Comme M et S^{n-1} sont compacts, on a :

$$(\delta_i(t_k)) \rightarrow \alpha(t), (\dot{\delta}_i(t_k)) \rightarrow \dot{\alpha}(t) \text{ et } L(\alpha) = l$$

α minimise la longueur localement (c.à.d sur $[t_k, t_{k+1}]$); donc, c'est une géodésique (I.1.D.7).

I.1.E Tenseur courbure

M est une variété riemannienne, ∇ sa connexion de Levi-Civita.

I.1.E.1 Définition

Etant donnés X, Y, Z trois champs de vecteurs sur M ; on définit R le tenseur trilinéaire en X, Y, Z , comme étant :

$$R: X(M) \times X(M) \times X(M) \rightarrow X(M)$$

$$X, Y, Z \rightarrow R(X, Y)(Z)$$

$$\text{où : } R(X, Y)(Z) = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z$$

R est appelé tenseur courbure.

I.1.E.2 Lemme

le tenseur courbure vérifie les relations algébriques suivantes :

$$R(X, Y)(Z) + R(Y, X)(Z) = 0$$

$$R(X, Y)(Z) + R(X, Z)(Y) + R(Z, X)(Y) = 0$$

$$g(R(X, Y)(Z), W) + g(R(X, Y)(W), Z) = 0$$

$$g(R(X, Y)(Z), W) + g(R(Z, W)(X), Y) = 0$$

On utilisera la notation suivante: $R(X, Y, Z, W)$ pour $g(R(X, Y)(Z), W)$.

Considérons x et y dans $T_m M$, linéairement indépendants et posons :

$$K_m(x, y) = \frac{R_m(x, y, x, y)}{g_m(x, x)g_m(y, y) - g_m^2(x, y)}$$

I.1.E.3 Définition

On appelle courbure sectionnelle de la variété riemannienne (M, g) , la fonction $K_m: G^2(TM) \rightarrow \mathfrak{R}$

$$\langle x, y \rangle_m \rightarrow K_m(x, y).$$

$(G^2(TM) = \bigcup_{m \in M} G^2(T_m M), G^2(T_m M))$: ensemble des sous espaces vectoriels de dim 2 dans $T_m M$).

Interprétation de la courbure sectionnelle:

Considérons x, y dans $T_m M$ et supposons les orthonormés, considérons la surface f paramétrée par:

$$f: \mathfrak{R}^2 \rightarrow M$$

$$(t, s) \rightarrow \exp_m(tx + sy)$$

La courbure sectionnelle est juste la courbure gaussienne de la surface [voir Lelong-ferrand].

I.1.E.4 Théorème

la donnée de la courbure sectionnelle d' une variété riemannienne M, détermine complètement le tenseur courbure.

Considérons x, y, z, t et soit $R(x, y, z, t) = f.K(x + \alpha z, y + \beta t)$. On a:

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} (R(x + \alpha z, y + \beta t, x + \alpha z, y + \beta t) - R(x + \alpha t, y + \beta z, x + \alpha t, y + \beta z)) = 6R(x, y, z, t)$$

Donc $R(x, y, z, t)$ est complètement déterminée.

I.1.E.5 Définition

Une variété riemannienne M est dite de courbure constante (positive, négative) si sa courbure sectionnelle est constante (positive, négative).

Exemple

1. \mathbb{R}^n est une courbure constante nulle.

2. Considérons le 1/2 plan de Poincaré :

$$H^2 = \{z = x + iy / \text{Im}z > 0\} \text{ équipé de la métrique } (ds)^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{y^2}.$$

2.1. Calculons les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Cevita.

$$\text{Pour cela, posons } e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, e_2 = \frac{\partial}{\partial y}.$$

On a donc :

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle_{H^2} = g_{22} = \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle_{H^2} = \frac{1}{y^2}$$

$$g_{21} = g_{12} = 0$$

On en déduit que :

$$(g_{11})^{-1} = (g_{22})^{-1} = y^2 \text{ et } (g_{21})^{-1} = (g_{12})^{-1} = 0$$

$$[e_1, e_2] = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right] = 0$$

$$\nabla_{e_1} e_1 = \Gamma_{11}^1 e_1 + \Gamma_{11}^2 e_2$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = \Gamma_{21}^1 e_1 + \Gamma_{21}^2 e_2$$

$$\nabla_{e_1} e_2 = \Gamma_{12}^1 e_1 + \Gamma_{12}^2 e_2$$

$$\nabla_{e_2} e_2 = \Gamma_{22}^1 e_1 + \Gamma_{22}^2 e_2$$

La symétrie de la connexion donne :

$$\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1; \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2$$

La compatibilité avec la métrique donne :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 (g^{il})^{-1} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}) \quad i, j, k \in \{1, 2\}$$

D'où

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \left[(g^{11})^{-1} (\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{11}) + (g^{12})^{-1} (\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{21} - \partial_2 g_{11}) \right]$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} \left[(g^{11})^{-1} (\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}) + (g^{12})^{-1} (\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}) \right]$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \left[(g^{21})^{-1} (\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}) + (g^{22})^{-1} (\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}) \right]$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} \left[(g^{11})^{-1} (\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{21}) + (g^{12})^{-1} (\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{21}) \right]$$

$$\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} \left[(g^{21})^{-1} (\partial_2 g_{11} + \partial_1 g_{21} - \partial_1 g_{21}) + (g^{22})^{-1} (\partial_2 g_{12} + \partial_1 g_{22} - \partial_2 g_{21}) \right]$$

Sachant que :

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{on a :}$$

$$\partial_1 g_{11} = 0 = \partial_1 g_{22} = \partial_1 g_{21} = \partial_1 g_{12} = 0$$

$$\partial_2 g_{11} = \partial_2 g_{22} = \frac{-2}{y}$$

$$\partial_2 g_{21} = \partial_2 g_{12} = 0$$

d'où :

$$\Gamma_{11}^1 = 0 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^1$$

$$\Gamma_{22}^2 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = \frac{-1}{y}$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{y}$$

$$\nabla_{e_1} e_1 = \frac{1}{y} e_2; \quad \nabla_{e_2} e_1 = -\frac{1}{y} e_1; \quad \nabla_{e_1} e_2 = -\frac{1}{y} e_1; \quad \nabla_{e_2} e_2 = -\frac{1}{y} e_2$$

2.2. Calcul de la courbure sectionnelle.

$$\langle R(e_1, e_2)e_1, e_2 \rangle = R(e_1, e_2, e_1, e_2)$$

$$R(e_1, e_2, e_1, e_2) = -g(\nabla_{e_1} \nabla_{e_2} (e_1) - \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} (e_1) + \nabla_{[e_1, e_2]}(e_1), e_2)$$

$$\nabla_{e_1} \nabla_{e_2} e_1 = \nabla_{e_1} \left(-\frac{1}{y} e_1\right) = -\frac{1}{y} \nabla_{e_1} e_1 = -\frac{1}{y^2} e_2$$

$$\nabla_{e_2} \nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_2} \left(-\frac{1}{y} e_1\right) = \frac{1}{y^2} e_2 + \nabla_{e_2} e_2 = -\frac{2}{y^2} e_2$$

$$[e_1, e_2] = 0 \Rightarrow \nabla_{[e_1, e_2]}(e_1) = 0$$

d'où :

$$R(e_1, e_2, e_1, e_2) = -g\left(\frac{2}{y} e_2, e_2\right) = -\frac{1}{y^2} g_{22} = -\frac{1}{y^4}$$

$$K(e_1, e_2) = \frac{R(e_1, e_2, e_1, e_2)}{g(e_1, e_1)g(e_2, e_2) - g^2(e_1, e_2)} = -1$$

On en déduit que : le demi plan de Poincaré équipé de la métrique $(ds)^2$ est de courbure constante -1 .

I.2 Surfaces - formule de Gauss-Bonnet- Lien entre la topologie et la métrique

En se basant sur le théorème de Whitney :

Théorème de Whitney : [Whit]

Toute variété différentiable compacte sans bord de dim n , peut être plongée dans \mathfrak{R}^{2n} .

Si S est une surface orientable, S est plongée dans \mathfrak{R}^3 .

Etudier les surfaces orientables se résume à étudier les surfaces paramétrées.

I.2.1 Définition

Soit $S \subset \mathfrak{R}^3$, on appelle surface paramétrée, la donnée d'une application différentiable $f: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^3$; $S \subset f(\mathfrak{R}^2)$

$$(u, v) \rightarrow f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

et telle que $\text{Jac}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$ soit de rang 2.

I.2.2 Définition

Soit $S \subset \mathfrak{R}^3$; S surface paramétrée. On appelle première forme fondamentale, l'expression suivante:

$$(ds)^2 = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} (du)^2 + 2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} dudv + \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} (dv)^2$$

Ceci définit une métrique intrinsèque sur S avec :

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle_{\mathbb{R}^3}; g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle_{\mathbb{R}^3}; g_{22} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle_{\mathbb{R}^3}$$

Il est facile de vérifier que : $(S, (ds)^2)$ est une surface riemannienne, notons ∇ sa connexion de Levi-cevita . Soit $A \subset S$; on a :

$$\text{Aire } A = \iint_{f^{-1}(A)} \text{Det}[(g_{ij})_{i,j}]^{\frac{1}{2}} dudv$$

Soit $\gamma: I \rightarrow S$ une courbe paramétrée par longueur d'arc , notons v ce paramètre. En utilisant 2) du corollaire I.1.D.4, on a pour tout $\gamma(t)$ de $\gamma(I)$, il existe une unique géodésique orthogonale à γ en $\gamma(0)$. Paramétrons cette géodésique par longueur d'arc u . On sait qu'il existe U ouvert, U voisinage de $\gamma(t)$ où le paramétrage u, v est bien défini.

I.2.3 Définition

Un tel paramétrage est appelé paramétrage géodésique.

I.2.4 Théorème

Si (u, v) est un paramétrage géodésique sur S, la première forme fondamentale est de la forme : $(ds)^2 = (du)^2 + g^2 (dv)^2$; où $g^2 = \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle$

Preuve :

Pour un paramétrage quelconque, $(ds)^2$ est de la forme :

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle (du)^2 + 2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle dudv + \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle (dv)^2.$$

Montrons que dans le cas d'un paramétrage géodésique, on a $\left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle = 0$.

$$\text{Soit } \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle.$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \nabla_{\frac{\partial f}{\partial u}} \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle + \left\langle \nabla_{\frac{\partial f}{\partial u}} \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle.$$

On a :

$$\nabla_{\frac{\partial f}{\partial u}} \frac{\partial f}{\partial v} = \nabla_{\frac{\partial f}{\partial v}} \frac{\partial f}{\partial u} + \left[\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \right]$$

$\left[\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \right]$ étant égal à 0, on a:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle = - \left\langle \nabla_{\frac{\partial f}{\partial v}} \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle + \left\langle \nabla_{\frac{\partial f}{\partial u}} \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle$$

Or:

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial f}{\partial v}} \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} 1 = 0.$$

$\frac{\partial f}{\partial u}$ est un champ géodésique, ce qui entraîne que:

$$\nabla_{\frac{\partial f}{\partial u}} \frac{\partial f}{\partial u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle = 0 \text{ et donc: } \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle = \text{Cte, calculée au point}$$

$\gamma(t)$, cette Cte vaut 0.

I.2.5 Théorème

Si (u, v) est un paramétrage géodésique pour S , l'expression de la courbure sectionnelle est de la forme: $K(S) = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$

preuve

$$R\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \left\langle \nabla_{\frac{\partial f}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial f}{\partial v}} \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle - \left\langle \nabla_{\frac{\partial f}{\partial v}} \nabla_{\frac{\partial f}{\partial u}} \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle \quad (I.2.4)$$

$$\nabla_{\frac{\partial f}{\partial u}} \frac{\partial f}{\partial u} = 0 \Rightarrow$$

$$R\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \left\langle \nabla_{\frac{\partial f}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial f}{\partial v}} \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle$$

On a:

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial f}{\partial u}} \nabla_{\frac{\partial f}{\partial v}} \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right), \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \nabla_{\frac{\partial f}{\partial v}} \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right), \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle - \left\langle \nabla_{\frac{\partial f}{\partial v}} \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right), \nabla_{\frac{\partial f}{\partial u}} \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle$$

Par (I.2.4), on a:

$$\nabla_{\frac{\partial f}{\partial v}} \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = \nabla_{\frac{\partial f}{\partial v}} \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) \Rightarrow$$

$$R\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \nabla_{\frac{\partial f}{\partial v}} \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right), \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle - \left\langle \nabla_{\frac{\partial f}{\partial v}} \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right), \nabla_{\frac{\partial f}{\partial u}} \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) \right\rangle$$

En utilisant les formules pour le calcul des symboles de Christoffel, on a

$$\nabla_{\frac{\partial f}{\partial u}} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right) \frac{\partial f}{\partial v} \Rightarrow$$

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial f}{\partial u}} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right), \nabla_{\frac{\partial f}{\partial u}} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \right\rangle = \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)^2$$

On a:

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial f}{\partial u}} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right), \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right), \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \right\rangle = g \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left\langle \nabla_{\frac{\partial f}{\partial u}} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right), \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \right\rangle = \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)^2 + g \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \right)$$

D'où:

$$R \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) = g \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \Rightarrow$$

$$K(S) = \frac{R \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right)}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle \times \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle} = g^{-1} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$$

Soit $\gamma: I \rightarrow S$, une courbe différentiable, Z un champ de vecteur parallèle le long de γ .

I.2.6 Théorème

Dans un paramétrage géodésique, l'équation $\frac{D}{dt} Z = 0$ se réduit à:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\partial g}{\partial u} \dot{v}(t) \Rightarrow \cos \alpha(t) = \left\langle Z(t), \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle$$

Preuve:

$$Z(t) = \cos \alpha(t) \frac{\partial f}{\partial u} + \sin \alpha(t) g^{-1} \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{DZ}{dt} = \sin \alpha(t) \left[-\frac{\partial f}{\partial u} \dot{\alpha}(t) + \frac{D}{dt} \left(g^{-1} \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right] + \cos \alpha(t) \left[\frac{D}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) + \dot{\alpha}(t) g^{-1} \frac{\partial f}{\partial v} \right]$$

$$\frac{DZ}{dt} = 0 \Rightarrow \left\langle \frac{DZ}{dt}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle = 0 \Rightarrow$$

$$0 = -\dot{\alpha}(t) \sin \alpha(t) + \sin \alpha(t) \left\langle \frac{D}{dt} \left(g^{-1} \frac{\partial f}{\partial v} \right), \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle + \cos \alpha(t) \left\langle \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right), \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle$$

On a :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right), \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} 1 = 0 \Rightarrow \\ \left\langle \frac{DZ}{dt}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle &= \sin \alpha(t) \left[\left\langle \frac{D}{dt} \left(g^{-1} \frac{\partial f}{\partial v} \right), \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle - \dot{\alpha}(t) \right] \\ \left\langle \frac{DZ}{dt}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle &= \sin \alpha(t) \left\langle \frac{D}{dt} \left(g^{-1} \frac{\partial f}{\partial v} \right), g^{-1} \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle + \cos \alpha(t) \left[\left\langle \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right), g^{-1} \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle + \dot{\alpha}(t) \right] \end{aligned}$$

On a :

$$0 = \frac{d}{dt} \left\langle g^{-1} \frac{\partial f}{\partial v}, g^{-1} \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} g^{-1} \frac{\partial f}{\partial v}, g^{-1} \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle$$

Donc, à résoudre :

$$\begin{cases} -\dot{\alpha}(t) + \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{D}{dt} g^{-1} \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle = 0 \\ \dot{\alpha}(t) + \left\langle g^{-1} \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle = 0 \end{cases}$$

On a :

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, g^{-1} \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{D}{dt} g^{-1} \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle + \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial u}, g^{-1} \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle = 0$$

Ce qui donne finalement une seule equation :

$$\dot{\alpha}(t) + \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial u}, g^{-1} \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle = 0$$

On a :

$$f(u(t), v(t)) = \gamma(t)$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma}(t) = \dot{u}(t) \frac{\partial f}{\partial u} + \dot{v}(t) \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \frac{\partial f}{\partial u} = \dot{u}(t) \nabla_{\frac{\partial f}{\partial u}} \frac{\partial f}{\partial u} + \dot{v}(t) \nabla_{\frac{\partial f}{\partial v}} \frac{\partial f}{\partial u}$$

Par (I.2.4), on a :

$$\nabla_{\frac{\partial f}{\partial u}} \frac{\partial f}{\partial u} = 0 \text{ et } \nabla_{\frac{\partial f}{\partial v}} \frac{\partial f}{\partial u} = \nabla_{\frac{\partial f}{\partial u}} \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\Rightarrow \dot{\alpha}(t) + \left\langle g^{-1} \frac{\partial f}{\partial v}, \dot{v}(t) \nabla_{\frac{\partial f}{\partial u}} \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle = 0$$

$$\dot{\alpha}(t) + g^{-1} \dot{v}(t) \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \nabla_{\frac{\partial f}{\partial u}} \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle = 0$$

On a :

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \nabla_{\frac{\partial f}{\partial u}} \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle = g \frac{\partial g}{\partial u}$$

d'où enfin :

$$\dot{\alpha}(t) + \dot{v}(t) \frac{\partial g}{\partial u} = 0 \Rightarrow \dot{\alpha}(t) = -\dot{v}(t) \frac{\partial g}{\partial u}$$

I.2.7 Proposition

Soit $R \subset S$, un borné, de bord ∂R de classe C^∞ . On a :

$$\iint_R -K(S) dR = \int_{\partial R} \text{arc cos} \left(Z(t), \frac{\partial f}{\partial u}(t) \right) dt$$

Z étant un champ parallèle le long de ∂R .

Preuve

On suppose R suffisamment petit pour être contenu dans un domaine où on a un paramétrage géodésique.

$$\int_{\partial R} \dot{\alpha}(t) d(\partial R) = \int_{\partial R} -\frac{\partial g}{\partial u} \dot{v} d(\partial R) \quad (I.2.6)$$

$$\int_{\partial R} -\frac{\partial g}{\partial u} \dot{v} d(\partial R) = -\int_{f^{-1}(\partial R)} \frac{\partial g}{\partial u} dv$$

$$\int_{f^{-1}(\partial R)} \frac{\partial g}{\partial u} dv \stackrel{\text{(Stokes)}}{=} \iint_{f^{-1}(R)} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} du dv$$

$$\iint_{f^{-1}(R)} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} du dv = \iint_R \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \sqrt{\text{Det}(g_{ij})^{-1}} dR$$

$$\sqrt{\text{Det}(g_{ij})^{-1}} = g^{-1}$$

D'où :

$$\int_{\partial R} \dot{\alpha}(t) d(\partial R) = \iint_R \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} g^{-1} \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} g^{-1} = K(S) \quad (I.2.5)$$

Soit S une surface paramétrée, X un champ de vecteur C^∞ et p un zéro de X . Considérons C une courbe fermée autour de p et soit $C(X) = X|_C$. Et supposons C suffisamment petite pour être contenue dans une région où le paramétrage géodésique est assuré.

Soit $\alpha(t) = \angle \left\langle X|_C, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle_{C(t)}$ l'angle entre les deux vecteurs tangents.

I.2.8 Proposition

$$2\pi i(p) = \int_C \dot{\alpha}(t) dt.$$

$i(p)$ étant l'indice du champ de vecteur en p .

Idée de preuve

On peut supposer que :

$$\|X|_C\| = 1 \text{ et } i(p) = \int_S \text{Sign Det}(\text{Jac}X|_C) dS^1 \quad (\text{I.1.A.5})$$

Soit $S^1 \xrightarrow{t} C$ on a :

$$X(t) = \frac{\partial f}{\partial u} \cos \alpha(t) + g^{-1} \frac{\partial f}{\partial v} \sin \alpha(t) = X(f \circ u(t), f \circ v(t))$$

on a :

$$\text{Sign Det} X(f \circ u(t), f \circ v(t)) = \text{Sign} \begin{bmatrix} \sin \alpha(t) \dot{\alpha}(t) & \cos \alpha(t) \\ \cos \alpha(t) \dot{\alpha}(t) & \sin \alpha(t) \end{bmatrix} = \text{Sign } \dot{\alpha}(t)$$

I.2.9 Théorème

$i(p)$ est indépendant du choix de C et du choix de $\frac{\partial f}{\partial u}$.

I.2.10 Théorème

Soit S une surface compacte paramétrée, X un champ de vecteur avec un nombre fini de zéros ; z_1, z_2, \dots, z_k . On a :

$$2\pi \sum_{j=1}^k i(z_j) = \iint_S K(S) dS$$

Preuve

On se base sur le fait suivant :

Il existe une triangulation de S telle que :

- i) Toute face F_i contient une singularité (un zéro).
- ii) ∂F_i ne contient pas de singularité.

Notons ces faces F_1, F_2, \dots, F_k et $\partial F_1, \partial F_2, \dots, \partial F_k$ les bords de ces faces, on a :

$$2\pi i(z_j) = \int_{\partial F_j} \dot{\alpha}_j(t) dt \quad (\text{I.2.8})$$

Soit Y_j un champ de vecteur parallèle le long de ∂F_j :

$$\iint_{F_j} K(S) = - \int_{\partial F_j} \left\langle Y_j, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle$$

On en déduit que :

$$- \iint_{F_j} K(S) = \int_{\partial F_j} \left\langle Y_j, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle$$

On a donc :

$$2\pi i(z_j) - \iint_{F_j} K(S) = \int_{\partial F_j} \left\langle Y_j, X \right\rangle$$

Notons : C_j^1, C_j^2, C_j^3 les arêtes de F_j . On a :

$$2\pi i(z_j) - \iint_{F_j} K(S) dS = \sum_{l=1}^3 \int_{C_j^l} \left\langle Y_j, X \right\rangle$$

$$\sum_{j=1}^k 2\pi i(z_j) - \iint_S K(S) dS = \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^3 \int_{C_j^l} \left\langle Y_j, X \right\rangle$$

Chaque arête étant commune à deux faces , elle est équipée de deux orientations contraires ; on en déduit que :

$$0 = \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^3 \int_{C_j^l} \left\langle Y_j, X \right\rangle$$

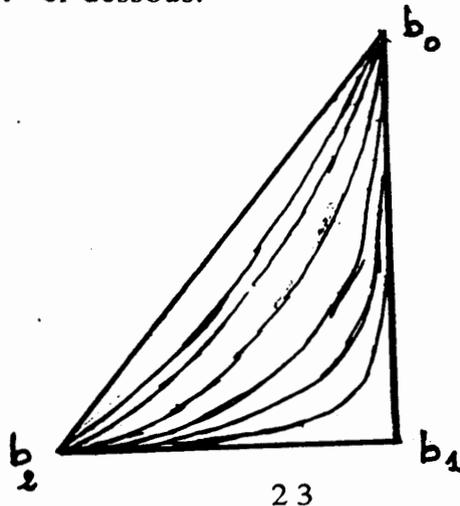
I.2.11 Théorème

Soit S une surface compacte orientable . Il existe X un champ de vecteur sur S avec zéros isolés et tel que :

$$\sum_{y_j \text{ zéro de } X} i(y_j) = \chi(S)$$

Preuve

Soit T une triangulation de S ou une surface combinatoire K .
Considérons la subdivision barycentrique de T , $T^{(1)}$. Dans chaque 2 simplexe de $T^{(1)}$, considérons le champ de vecteur dans les courbes intégrales sont ci-dessous.



où b_0 est un sommet de T , b_1 est un milieu d'arête de T , et b_2 est un barycentre de face de T . On a :

$$i(b_0) = i(b_2) - 1$$

$$i(b_1) = -1$$

$$\sum_{\Delta \text{ simplexe } T^0} i(b_0^\Delta) + i(b_1^\Delta) + i(b_2^\Delta) = \# \text{som}T - \# \text{ar}T + \# \text{Face}T = \chi(S)$$

I.2.12 Théorème (formule de Gauss - Bonnet)

Soit S une Surface compacte orientable, équipée d'une métrique riemannienne de courbure sectionnelle $K(S)$, on a :

$$\iint_S K(S) = 2\pi\chi(S)$$

Preuve:

Par (I.2.11), on a:

$\exists (X \in C^\infty(S, TS))$ avec z_1, z_2, \dots, z_k les zéros de X , et $\sum_{j=1}^k i(z_j) = \chi(S)$

Par le théorème (I.6.10), on a:

$$2\pi \sum_{j=1}^k i(z_j) = \iint_S K(S)$$

$$2\pi\chi(S) = \iint_S K(S)$$

C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 [Lel] Lelong Ferrand - *Cours de mathématiques : géométrie et cinématique* - Dunod Université - 1977.
- 2 [Mil] Milnor - *Topology from the differential point of view* - University Press of Virginia 1965.
- 3 [Whit]: Whitney - *Differentiable manifolds* - *Annals of Math* - 37 - 1936

CHAPITRE II

FLOTS GEODESIQUE ET HOROCYCLIQUES DU

FIBRÉ UNITAIRE TANGENT A UNE SURFACE

HYPERBOLIQUE COMPLETE



II.1. Revêtement universel d'une surface hyperbolique :

Toutes les surfaces qui sont utilisées dans ce chapitre sont orientables et équipées d'une métrique riemannienne.

II.1.1. Définition :

Soit (S_1, g_1) et (S_2, g_2) deux surfaces et soit $p \in C^\infty(S_1, S_2)$. On dit que p est une isométrie locale si pour tout point x de S_1 , il existe un voisinage U tel que $p|_U$ est une isométrie entre $(p(U), g_1)$ et $(p(U), g_2)$.

II.1.2. Proposition :

Soit p une isométrie locale d'une surface complète (S_1, g_1) à une surface (S, g) .

Alors, p est une application de revêtement.

Preuve :

- Précisons ce que veut dire surface complète.

(S_1, g_1) étant une surface riemannienne, on a défini $d_1 : S_1 \times S_1 \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$x, y \rightarrow d_1(x, y) = \inf_{c \in \Omega_{x,y}(S_1)} L(c)$$

Si (S_1, d_1) est un espace métrique complet, on dit que (S_1, g_1) est une surface complète.

- $p : (S_1, g_1) \rightarrow (S, g)$ est une isométrie locale. soit $x \in S$ et considérons $p^{-1}(x) \subset S_1$.

$p^{-1}(x)$ est discret :

En effet, supposons qu'il existe $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite dans $p^{-1}(x)$ convergeant vers y et U un voisinage de x contenant $p(y)$. On a : $d(x, p(y)) = d_1(y_i, y) \rightarrow 0$ [p isométrie locale]
 $i \rightarrow \infty$

d'où : $y \in p^{-1}(x)$.

D'un autre côté : $\exists I_0 \mid d_1(y, y_k) > 0$ et $d(p(y), p(y_k)) = d(x, x) = 0$;

d'où la contradiction.

$p^{-1}(x)$ étant discret, soit $p^{-1}(x) = \{(y_j)_{j \in \mathbb{N}}\}$. Considérons : $U_x = \exp_x(B_{\mathbb{R}^2}(0, r))$

$U_j = \exp_{y_j}(B_{\mathbb{R}^2}(0, r))$, on a : $p^{-1}(U_x) \supset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j$

Soit $w \in T_x S$ | $\|w\| \leq r$ et soit $v = D_{y_j} p(w)$

Considérons : $\gamma : I \rightarrow S$ γ géodésique | $\gamma(0) = x$ et $\dot{\gamma}(0) = w$

et $\tilde{\gamma} : I \rightarrow S_1$ $\tilde{\gamma}$ géodésique | $\tilde{\gamma}(0) = y_j$ et $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = v$ p étant une isométrie locale, on a :

$$\gamma = p \circ \tilde{\gamma} ; \gamma : I \rightarrow S$$

$$\tilde{\gamma} : I \rightarrow S_1$$

$$t \rightarrow \exp_x (tv)$$

$$t \rightarrow \exp_{y_j} (tw)$$

D'autre part : $\exp_x (t D_{y_j} p(w)) = p \circ \exp_x (tw)$

$\exp_x ; \exp_{y_j} ; D_{y_j} p$ étant des difféomorphismes, on en déduit que :

p est un difféomorphisme de : $\exp(B_{y_j}(0,r))$ sur $\exp B_x(0,r)$

Il reste à démontrer que $p^{-1}(U_x) = \bigcup_{j \in J} U_j$. Soit $y \in p^{-1}(U_x)$; notons $p(y)$ dans S et soit γ

l'unique géodésique dans U_x qui relie $p(y)$ à x et posons $v = \dot{\gamma}(0)$, soit $w \in T_y S_1$

$D_y p(v) = w$. et notons $\tilde{\gamma} : I \rightarrow S_1, \tilde{\gamma}(t) = \exp_{y_j}(tw)$. S_1 étant complète, $I = \mathbb{R}$; on a :

$p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ et $p \circ \dot{\tilde{\gamma}}(1) = \dot{\gamma}(1) = p(y)$. En utilisant le fait que p est un difféomorphisme entre U_x et les $(U_j)_j$, on a $\exists i_0$ tq : $\tilde{\gamma}(1) = y_j \in p^{-1}(x)$, d'où l'égalité.

(S_1, S, p) est un triplet de revêtement.

Soit $\gamma : I \rightarrow S$ une géodésique paramétrée par longueur d'arc. $\gamma : [0, L] \rightarrow S$ et $L(\gamma) = L$

II.1.3. Définition

On appelle champ de Jacobi, noté Y , un champ de vecteur différentiable le long de γ vérifiant :

$$\frac{D^2}{dt^2} Y + R(\dot{\gamma}(t), Y)(\dot{\gamma})(t) = 0 \quad t \in [0, L]$$

R étant le tenseur courbure associé à g .

$\frac{D}{dt}$ étant la dérivée covariante.

II.1.4. Théorème

Pour tout $(u, v) \in T_{\gamma(0)} S \times T_{\gamma(0)} S$, il existe un unique champ de Jacobi Y le long de γ vérifiant:

$$1) Y(\gamma(0)) = u$$

$$2) \frac{D}{dt} Y(\gamma(o)) = v$$

Preuve :

Considérons l'espace vectoriel bidimensionnel $T\gamma(o)S$ et choisissons (e_1, e_2) une base orthonormale de $T\gamma(o)S$ tel que $\dot{\gamma}(o) = e_1$. Considérons X_1 , le champ de vecteur tangent à γ . $X_1(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)$. Considérons X_2 , l'unique champ parallèle à γ et tel que : $X_2(\gamma(o)) = e_2$. On a :

$$Y(t) = y_1(t) X_1(t) + y_2(t) X_2(t)$$

$$\frac{DY}{dt} = y_1(t) \frac{D}{dt} X_1 + \dot{y}_1(t) X_1 + y_2(t) \frac{D}{dt} X_2 + \dot{y}_2(t) X_2(t)$$

$$\text{or : } \frac{D}{dt} X_1 = 0 \quad \gamma \text{ étant une géodésique}$$

$$\frac{D}{dt} X_2 = 0 \quad X_2 // \gamma$$

$$\text{d'où : } \frac{DY}{dt} = \dot{y}_1(t) X_1 + \dot{y}_2(t) X_2(t).$$

$$\frac{D^2}{dt^2} Y = \ddot{y}_1(t) X_1(t) + \ddot{y}_2(t) X_2(t)$$

$$R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma} = + \frac{D}{dt} \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} + \nabla_{[\dot{\gamma}, Y]} \dot{\gamma}$$

En calculant, on a :

$$\langle R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma} ; X_1(t) \rangle = \sum_{j=1}^2 R(\dot{\gamma}, X_j, \dot{\gamma}, X_1) y_j$$

$$\langle R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma} ; X_2(t) \rangle = \sum_{j=1}^2 R(\dot{\gamma}, X_j, \dot{\gamma}, X_2) y_j$$

Pour que Y soit un champ de Jacobi, on doit vérifier que :

$$\begin{cases} y''_i + \sum_{j=1}^2 R(\dot{\gamma}, X_j, \dot{\gamma}, X_i) y_j = 0 & 1 \leq i \leq 2 \\ Y(0) = U \\ \dot{Y}(0) = V \end{cases}$$

D'où le théorème.

II.1.5. Définition

Soit $C: I \rightarrow S$ une courbe différentiable.

Une variation de C est une application $H: I \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow S$ telle que $(s, t) \rightarrow H(s, t)$.

$H(s, t) = H_t(s) = C_t(s)$ est une courbe différentiable et $H(s, 0) = C(s)$.

Si γ est une géodésique : $\gamma: I \rightarrow S$, on appelle variation géodésique une variation H qui vérifie que : $\forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \quad H_t: I \rightarrow S$ est une géodésique.

II.1.6. Proposition

$\gamma: [0, L] \rightarrow S$ étant une géodésique paramétrée par longueur d'arc

i) Soit H une variation géodésique de γ ; on a : $Y(s) = \frac{\partial}{\partial t} H(s, 0)$ est un champ de Jacobi le long de γ .

ii) Soit Y un champ de Jacobi le long de γ | $\dot{\gamma}(0) = Y(0)$.

Il existe H une variation géodésique le long de γ telle que : $Y(s) = \frac{\partial}{\partial t} H(s, 0)$

Preuve

$$i) \frac{\partial}{\partial s} Y = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} H(s, 0)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} Y = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} H(s, 0) + \left[\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t} \right] H(s, 0)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} Y = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} H(s, 0) + \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t} \right] H(s, 0)$$

On a :

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} H(s, 0) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial s^2} H(s, 0) + \left[\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{\partial}{\partial s} H(s, 0)$$

$$\text{or : } \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial s^2} H(s, 0) = -R \left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial s} H + \left[\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{\partial}{\partial s} H(s, 0)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t} \right] = 0 \text{ (Paramétrage géodésique), d'où:}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} Y = -R \left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial s} H \quad \text{cqfd}$$

ii) Soit Y un champ de Jacobi tel que : $Y(0) = \dot{\gamma}(0)$, et considérons X_1 le champ le long de γ tel que : $X_1(0) = \dot{\gamma}(0)$. Notons X_0 le champ $\dot{\gamma}$ et soit $X(t) = X_0(t) + t X_1(t)$,

$$H(s, t) = \exp_{\gamma(t)}(s X(t)).$$

H définit une variation géodésique et soit Z le champ de Jacobi le long de γ :

$$Z(s) = \frac{\partial}{\partial t} H(s,0).$$

$$Z(s) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\exp_{\gamma(t)}(sX(t)) - \exp_{\gamma(0)}(s\dot{\gamma}(0))}{t}$$

on a :

$$Z(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\exp_{\gamma(t)}(0) - \exp_{\gamma(0)}(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t}$$

$$Z(0) = \dot{\gamma}(0) = Y(0), \quad \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} H(s,t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} H(s,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} H(s,t) = D_{\gamma(t)} \exp_{\gamma(t)} [X_0(t) + tX_1(t)] = X_0(t) + tX_1(t) \quad (\text{Par définition } \exp_{\gamma(t)}).$$

$$\frac{\partial}{\partial t} X_0(t) + tX_1(t) = \frac{\partial}{\partial t} X_0(t) + X_1(t) + t \frac{\partial}{\partial t} X_1(t).$$

Or γ étant une géodésique ; $\frac{\partial}{\partial t} X_0(t) = 0$, on en déduit que :

$$\dot{Z}(0) = X_1(0) + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} X_1(t) |_{t=0} = X_1(0) = Y(0)$$

Le théorème II.1.4. permet de conclure que : $Z = Y$

II.1.7. Corollaire

Soit x un point de (S,g) ; u, v deux vecteurs de $T_x S$ et soit γ la géodésique

$$\gamma(t) = \exp_x t v.$$

Y étant le champ de Jacobi le long de γ tel que $Y(0) = 0$ et $\dot{Y}(0) = u$, on a :

$$Y(t) = D_{tv} (\exp_x tu)$$

Preuve

$T_x S = \mathbb{R}^2$, équipé de sa métrique euclidienne standard et soit $C_s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, s \rightarrow sv$. C_s est une géodésique de \mathbb{R}^2 . Soit X le champ de Jacobi le long de C_s vérifiant $X(0) = 0$ et $\dot{X}(0) = u$. Considérons $H: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, (s, t) \rightarrow s(v + tu)$ et soit $\exp_x \circ H$ on a $\exp_x \circ H$ est bien une variation géodésique le long de γ .

$$\frac{\partial}{\partial t} \exp_x \circ H(s,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\exp_x H(s,t) - \exp_x H(s,0)}{t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \exp_X \circ H(s,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\exp_X(sv + stu) - \exp_X(sv)}{t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \exp_X \circ H(s,0) = D_{sv} \exp_X(su) = D_{sv} \exp_X(X(s))$$

pour $s = 0$; $\frac{\partial}{\partial t} \exp_X \circ H(s,0) = D_0 \exp_X(0) = 0$

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \exp_X \circ H(s,0) |_{s=0} = u = \dot{Y}(0)$$

D'où la conclusion.

II.1.8. Définition

(S,g) est dite surface hyperbolique si $K(s)$, la courbure sectionnelle de (S,g) est constante égale à -1 .

II.1.9. Théorème

Le revêtement universel de (S,g) hyperbolique est le demi plan de Poincaré

$$\left(H^2, (ds)^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{y^2} \right).$$

Preuve

Soit $x \in S$; $((u,v) \in T_x S \times T_x S \mid \|v\|_{g-1} = \|u\|_g, g(u,v) = 0)$.

Posons $\gamma(t) = \exp_X tv$ et soit U le champ de vecteur parallèle à γ et tel que : $U(0) = u$.

Prenons Y un champ de vecteur de Jacobi le long de γ et vérifiant :

$$Y(0) = 0 \text{ et } Y'(0) = 0.$$

On a : $K(S) = -1 \Rightarrow \ddot{y}_2(t) = y_2(t) \Rightarrow y_2(t) = sht \Rightarrow Y(t) = sht U(t)$.

Soit $y \in H^2$ et soit $f : R^2 = T_x S \rightarrow R^2 = T_y H^2$ une isométrie euclidienne. Posons $u_1 = f(u)$ $v_1 = f(v)$ et soit $\tilde{\gamma}(t) = \exp_y tv_1$. Considérons \tilde{Y} le champ de Jacobi le long de $\tilde{\gamma}$ tel que : $\tilde{Y}(0) = 0$ et $\dot{\tilde{Y}}(0) = u_1$.

La courbure de H^2 est constante égale à -1 on a : $\tilde{Y}(t) = sht \tilde{\nu}(t)$ où $\tilde{\nu}$ est le champ de vecteur parallèle à $\tilde{\gamma}$ tel que $\tilde{\nu}(0) = u_1$. On a : $Y(t) = D_{tv} \exp_X(tu)$,

$$\tilde{Y}(t) = D_{tv_1} \exp_y(tu_1) \quad (\text{II.1.8}).$$

Soit $F = \exp_X \circ f^{-1} \circ \exp_y^{-1}$, on a :

$D_{\exp, (tv_1)} F = D_{f^{-1}(tv_1)} \exp_x \circ D_{\exp, (tv_1)} (f^{-1} \circ \exp y)^{-1}$, $D_{\exp, (tv_1)} F = D_{f^{-1}(tv_1)} \circ f^{-1} \circ D_{\exp, (tv_1)} (\exp y)^{-1}$
 $D_{\exp, (tv_1)} F(\tilde{Y}(t)) = D_{f^{-1}(tv_1)} \circ f^{-1} \circ D_{\exp, (tv_1)} (\exp y)^{-1} (D_{tv_1} (\exp y (tu_1))) = D_{f^{-1}(tv_1)} \circ f^{-1} (tu_1) = Y(t)$;
 on en déduit que F est une isométrie locale. Par II.1.2., on conclue que F est une application de revêtement.

2) Flot géodésique, flot horocyclique de T^1H^2

$$\text{PSL}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) / ad - bc = 1 \right\} / \{ \pm \text{Id} \}$$

Considérons l'action de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ sur H^2 définie comme suit :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}$$

Cette action induit une action sur le fibré unitaire tangent à H^2 , noté T^1H^2 , à savoir :

$$\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \times T^1H^2 \rightarrow T^1H^2$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; (z, \vec{v} = e^{i\phi}) \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} ; \frac{\left(\frac{az + b}{cz + d} \right)'}{\left| \left(\frac{az + b}{cz + d} \right)' \right|} \cdot e^{i\phi}$$

II.1.2. Proposition

$\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ agit librement et transitivement sur T^1H^2 .

Preuve

Soit $v \in T^1H^2$, $v = (z = x + iy, e^{i\alpha})$. On veut prouver l'existence d'un g dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ tel que : $g(v) = (i, e^{i0})$

$$\text{On affirme que : } g = \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & \\ & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{-1/2} & 0 \\ 0 & y^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{En effet, on a : } \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (v) = (z=y, e^{i\alpha}) = v_1 \begin{pmatrix} y^{-1/2} & 0 \\ 0 & y^{1/2} \end{pmatrix} (v_1) = (z=i, e^{i\alpha}) = v_2$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha/2 & -\sin\alpha/2 \\ \sin\alpha/2 & \cos\alpha/2 \end{pmatrix} (v_2) = (z=i, e^{i0}).$$

v étant égale à $g^{-1}(i)$, on a :

$$\text{stab}_v = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) / \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (v) = v \right\}. \text{ On a : } \text{stab}_v = g^{-1} \text{stab}_{(i, e^{i0})} g$$

$$\text{On a : } \text{stab}_{(i, e^{i0})} = \text{Id}$$

On en déduit que $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ agit librement et transitivement sur $T^1\mathbb{H}^2$.

II.2.2. Proposition

$$\text{On a : } \text{Iso}^+(\mathbb{H}^2) = \text{PSL}(2, \mathbb{R})$$

soit $v, w \in T_z\mathbb{H}^2$, $g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Soit $v = (z, e^{i\phi})$, $w = (z, e^{i\alpha})$. On a :

$$\langle D_z g(v), D_z g(w) \rangle_{\mathbb{H}^2} = \frac{\langle g'(z) e^{i\phi}, g'(z) e^{i\alpha} \rangle_{\mathbb{R}^2}}{(\text{img}(z))^2}$$

$$\text{Si on pose } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ on a : } \text{img}(z) = \frac{\text{Im}z}{|cz+d|^2}, |g'(z)| = \frac{1}{|cz+d|^2} \text{ D'où :}$$

$$\langle D_z g(v), D_z g(w) \rangle_{\mathbb{H}^2} = \frac{\langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^2}}{\text{Im}z^2} = \langle v, w \rangle_{\mathbb{H}^2}$$

On a : $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \subset \text{isométries de } \mathbb{H}^2 : \text{Iso } \mathbb{H}^2$.

Soit $g \in \text{Iso}(\mathbb{H}^2)$.

On a g préserve les angles $\Rightarrow g$ est une application conforme de $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{C}$.

g conforme $\Rightarrow g$ holomorphe. [Cartan].

On en déduit que : $\text{Iso}(\mathbb{H}^2) \subset \{\text{biholomorphes de } \mathbb{H}^2\}$.

\mathbb{H}^2 étant biholomorphiquement équivalent au disque unité $D(0,1)$.

$$\left(\mathbb{H}^2 \xrightarrow{f} D; f \text{ biholomorphe } z \rightarrow f(z) = \frac{z-i}{z+i} \right)$$

On a que : $\{\text{biholomorphes de } \mathbb{H}^2\}$ est conjugué par f à $\{\text{biholomorphes de } D(0,1)\}$.

$$[\text{Cartan}] : \{\text{biholomorphes de } D(0,1)\} = \left\{ \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}, |a|^2 - |c|^2 = 1 \right\}. \text{ On en déduit que}$$

$$\{\text{biholomorphes } \mathbb{H}^2\} = \text{PSL}(2, \mathbb{R}).$$

II.2.3. Proposition

$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ une géodésique. Alors, soit :

$$i) \exists (x \in \mathbb{R}) \mid (\forall t \in \mathbb{R}) : \text{Rel}(\gamma(t)) = x$$

$$ii) \exists (R > 0) ; \exists (z_0 \mid \text{im} z_0 = 0) \mid (\forall (t \in \mathbb{R}) ; |\gamma(t) - z_0| = R)$$

est vérifiée.

On note $(\gamma(+\infty), \gamma(-\infty)) = (\gamma(t) \mid |\gamma(t) - z_0| = R) \cap \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \text{im} z = 0\}$

Preuve

Supposons γ paramétrée par longueur d'arc, et considérons $(\gamma(0), \dot{\gamma}(0))$ dans $T^1\mathbb{H}^2$.

Sachant que $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ agit transitivement sur $T^1\mathbb{H}^2$, on peut supposer que

$$(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) = \left(i, \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

γ étant géodésique; γ vérifie donc les équations du second ordre de I.1.D.1, à savoir

$$\begin{cases} \gamma_2(t)\ddot{\gamma}_1(t) + \dot{\gamma}_2(t)\dot{\gamma}_1(t) = 0 \\ \gamma_2(t)\ddot{\gamma}_2(t) - (\dot{\gamma}_1(t))^2 - (\dot{\gamma}_2(t))^2 = 0 \\ \gamma_1(0), \gamma_2(0) = (0, 0) \\ \dot{\gamma}_1(0), \dot{\gamma}_2(0) = (0, 1) \end{cases}$$

On en déduit que $\gamma_2(t) = e^t$ et $\gamma_1(t) = 0$.

On utilise l'action de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ sur γ pour engendrer toutes les autres géodésiques, et on vérifie qu'elles sont complètement décrites par i ou ii.

II.2.4. Proposition

$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ étant une géodésique paramétrée par longueur d'arc, soit $z \in \mathbb{H}^2$; les géodésiques (α_t) liant z à $(\gamma(t))_{t \in \mathbb{R}}$ atteignent une position limite lorsque $t \rightarrow +\infty$

$(t \rightarrow -\infty)$.

Cette position limite est une géodésique liant y à $\gamma(+\infty)$ ($\gamma(-\infty)$). On l'appelle asymptote positive (négative à γ).

Preuve

On rappelle que :

Théorème : [Bear]

Si $(A B C)$ est un triangle géodésique dans H^2 d'angles respectifs A, B, C et de longueurs (a, b, c) , on a : $a^2 + b^2 - 2 ab \cos C \leq c^2$.

Soit γ une géodésique paramétrée par longueur d'arc avec conditions initiales :

$$(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) = (z_0, \vec{u}).$$

Soit δ_1 la géodésique liant y et $\gamma(t_1)$; $\delta_1(0) = y$ et $\dot{\delta}_1(0) = u_1$ et δ_2 la géodésique liant y à $\gamma(t_2)$; $\delta_2(0) = y$ et $\dot{\delta}_2(0) = u_2$.

En appliquant le théorème au triangle géodésique de sommet $y, \gamma_1(t), \gamma_2(t)$, on a :

$$[d(y, \gamma_1(t))]^2 + [d(y, \gamma_2(t))]^2 - [d(\gamma_2(t), \gamma_1(t))]^2 \leq 2 d(y, \gamma_1(t)) d(y, \gamma_2(t)) \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$$

Appliquons l'inégalité triangulaire à $d(y, \gamma_1(t))$, on a :

$$d(y, \gamma_1(t)) \leq d(y, \gamma(0)) + d(\gamma(0), \gamma_1(t)).$$

On en déduit que : $d(\gamma(0), \gamma_1(t)) - d(\gamma(0), y) \leq d(y, \gamma_1(t)) \leq d(y, \gamma(0)) + d(\gamma(0), \gamma_1(t))$.

On a la même chose pour $d(y, \gamma_2(t))$, à savoir :

$$d(\gamma(0), \gamma_2(t)) - d(\gamma(0), y) \leq d(y, \gamma_2(t)) \leq d(y, \gamma(0)) + d(\gamma(0), \gamma_2(t)).$$

quand $t \rightarrow \infty$, on a $d(y, \gamma_i(t)) \sim t + O(1) \quad 1 \leq i \leq 2$

d'où : $\cos(u_1, u_2) \rightarrow 1 \Rightarrow [u_1, u_2] \rightarrow 0$ et $u_i \rightarrow u$ cqfd.

Considérons δ la géodésique obtenue comme étant $\delta(0) = y$ et $\dot{\delta}(0) = u$. δ est bien la position limite.

II.2.5. Définition

Les courbes orthogonales aux asymptotes positives d'une géodésique donnée sont appelées horocycles positifs.

II.2.6. Proposition

$h : \mathbb{R} \rightarrow H^2$ est un horocycle positif si et seulement si il vérifie :

$\nabla_{\dot{h}(t)} \dot{h}(t) = J_{h(t)}(\dot{h}(t))$, J la structure complexe standard.

Preuve

h étant un horocycle, considérons $(h(t), \dot{h}(t))$; on a : $(h(t), J_{h(t)} \dot{h}(t))$ engendre une géodésique (II.2.5 Déf), d'où :

$$\nabla_{J_{h(t)} \cdot \dot{h}(t)} J_{h(t)} (\dot{h}(t)) = 0$$

$$\nabla_{i_{h(t)}} i_{h(t)} \dot{h}(t) = i_{h(t)} \nabla_{i_{h(t)}} \dot{h}(t) + \nabla_{i_{h(t)}} (i_{h(t)}) \dot{h}(t)$$

$$\nabla_{i_{h(t)}} \dot{h}(t) = i_{h(t)} \nabla_{\dot{h}(t)} \dot{h}(t)$$

$$\nabla_{i_{h(t)}} (i_{h(t)}) = \frac{D}{Dt} i_{h(t)} = i_{h(t)}$$

d'où :

$$0 = i_{h(t)} \dot{h}(t) + i_{h(t)}^2 \cdot \nabla_{\dot{h}(t)} \dot{h}(t), \quad i_{h(t)} = J_{h(t)}, \text{ et enfin:}$$

$$J_{h(t)} (\dot{h}(t)) = \nabla_{\dot{h}(t)} \dot{h}(t)$$

II.2.7. Proposition

$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ est un horocycle ; alors, soit :

i) $\exists (y \in \mathbb{R}^+) \mid (\forall (t \in \mathbb{R}) \quad \text{Im } h(t) = y)$

ii) $\exists (x \in \mathbb{R}); \exists (y \in \mathbb{R}^+) \mid \forall (t \in \mathbb{R} \mid |h(t) - (x + iy)| = \frac{y}{2})$

Preuve :

Considérons $(z, v) = (h(0), \dot{h}(0))$, g étant une isométrie de \mathbb{H}^2 , on a : $g \circ h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ est un horocycle vérifiant les conditions initiales : $(g(h(0)), \frac{g'(h(0))}{|g'(0)|} \dot{h}(0))$.

Soit g l'élément tel que : $g(z, v) = (i, \frac{\partial}{\partial x})$; notons $H = g \circ h$. On a :

$$\begin{cases} H_2(t) \dot{H}_1(t) + \dot{H}_1(t) H_2(t) = -\dot{H}_2(t) \cdot H_2(t) \\ H_2(t) \dot{H}_2(t) + (\dot{H}_1(t))^2 - \dot{H}_2(t) = \dot{H}_1(t) \cdot H_2(t) \end{cases} \quad \text{Prop. (II.2.6.)}$$

La courbe $H(t) = (t, 1)$ est la courbe solution satisfaisant à $H(0) = i$ et $\dot{H}(0) = \frac{\partial}{\partial x}$.

Il suffit d'appliquer g^{-1} à H pour avoir h et les 2 possibilités décrites dans II.2.7.

II.2.8. Proposition

Soit $\varphi : \mathbb{R} \times T^1\mathbb{H}^2 \rightarrow T^1\mathbb{H}^2, (t, (z, v)) \rightarrow \varphi(t, z, v) = (\exp_z tv, X(\exp_z tv))$ où X est l'unique champ de vecteur parallèle le long de $\exp_z tv \mid X(0) = v$.

Soit $\psi : \mathbb{R} \times T^1H^2 \rightarrow T^1H^2, (t, (z,v)) \rightarrow \psi(t,z,v) = (h(t), \dot{h}(t))$ avec $h : \mathbb{R} \rightarrow H^2$ l'horocycle positif avec $(h(0), \dot{h}(0)) = (z,v)$.

$\varphi(\psi)$ est une application différentiable vérifiant :

$$\varphi(s+t, z, v) = \varphi(s; \varphi(t,z,v)), \quad \psi(s+t, z, v) = \psi(s; \psi(t,z,v))$$

φ et ψ sont respectivement le flot géodésique et le flot horocyclique de T^1H^2 .

Preuve

La différentiabilité de φ et ψ découle du théorème de l'existence des solutions d'un système différentiel (voir I.1.D.2.).

$$\varphi(s+t, z, v) = \exp_Z(s+t)v, X(\exp_Z(s+t)v))$$

$$\varphi(s, \varphi(t,z,v)) = \exp_{\exp_Z tv} (sX(\exp_Z tv)) ; Y(\exp_{\exp_Z tv} (sX(\exp_Z tv)))$$

où Y est l'unique champ de vecteur parallèle tel que $Y(s=0) = X(\exp_Z tv)$.

On a :

$$\frac{\partial}{\partial t} sX(\exp_Z tv) = s \cdot \frac{D}{dt} X(\exp_Z tv)$$

X étant un champ de vecteur parallèle on a : $\frac{D}{dt} X = 0 \Rightarrow s X (\exp_Z tv) = s X (\exp_Z 0)$

d'où : $s X (\exp_Z tv) = s X(z) = s.v$.

On a donc : $\varphi(s, \varphi(t,z,v)) = (\exp_{\exp_Z tv} (sv)) ; Y(\exp_{\exp_Z tv} (sv))$.

Y étant un champ de vecteur parallèle le long d'une géodésique et X de même. On a :

$$\angle (X(t), Y(t)) = 0.$$

Vu les propriétés des géodésiques, on a : $\exp_{\exp_Z tv} (sv) = \exp_Z (tv + sv)$;

d'où l'affirmation.

Pour ψ en tenant compte que l'horocycle est orthogonal à une famille de courbes géodésiques asymptotes, on démontre facilement la propriété de flot.

Considérons :

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) \mid \det A = 1 \right\}$$

II.2.9. Proposition

$SL(2, \mathbb{R})$ est une variété différentiable et les applications :

$$m: SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$$

$$A, B \rightarrow A.B$$

$$m_1: SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$$

$$A \rightarrow A^{-1}$$

Preuve

Il suffit de remarquer que : $SL(2, \mathbb{R}) \subset GL(2, \mathbb{R}) = \{A \in M(2, \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$

Or \det est différentiable et donc $GL(2, \mathbb{R})$ est un ouvert de $M(2, \mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^4$. d'où

$SL(2, \mathbb{R})$ en tant qu'ensemble de préimages de la valeur régulière 1, et en utilisant le théorème des fonctions implicites, a une structure de variété.

II.2.10. Définition

On définit l'algèbre de Lie de $SL(2, \mathbb{R})$, notée $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, comme étant l'espace tangent à l'identité. Le crochet de Lie de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$; $[\]$, comme étant :

$$[A, B] = AB - BA.$$

II.2.11. Proposition

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \{A \in M(2, \mathbb{R}) \mid \text{Trace de } A = 0\}.$$

Preuve

$$D_I \det(X) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det(I + tX) - \det I}{t}$$

$$\det(I + tX) = \det t(t^{-1}I + X) = t^2 P_X(t; (-t^{-1}))$$

où P_X est le polynome caractéristique de X .

$$P_X(t) = t^2 - t \text{Tr}(X) + \det X \text{ d'où } D_I(\det)(X) = \text{Tr} X$$

$$T_1 \text{SL}(2, \mathbb{R}) = \text{Ker } D_1(\text{Det}) = \{A \in M(2, \mathbb{R}) \mid \text{Tr}X = 0\}.$$

II.2.12 Définition

On appelle ad l'application de $\text{sL}(2, \mathbb{R})$ dans les endomorphismes de $\text{sL}(2, \mathbb{R})$, définie :

$$\text{sL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{End}(\text{sL}(2, \mathbb{R}))$$

$$A \rightarrow \text{ad}A$$

$$\text{ad}A : \text{sL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{sL}(2, \mathbb{R})$$

$$B \rightarrow \text{ad}A(B) = [A, B]$$

On appelle Ad l'application de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ dans les automorphismes de $\text{sL}(2, \mathbb{R})$, définie :

$$\text{Ad} : \text{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Aut}(\text{sL}(2, \mathbb{R}))$$

$$A \rightarrow \text{Ad} A$$

$$\text{Ad} A : \text{sL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{sL}(2, \mathbb{R})$$

$$B \rightarrow A \cdot B \cdot A^{-1} = \text{Ad}A(B)$$

Définissons sur $\text{sL}(2, \mathbb{R})$ l'application bilinéaire suivante :

$$B : \text{sL}(2, \mathbb{R}) \times \text{sL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A, B \rightarrow B(A, B) = \text{Tr}(\text{ad}A \circ \text{ad}B)$$

II.2.13. Proposition

Pour tout g de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$, on a l'invariance de B sous l'action de Ad_g .

Preuve

Il suffit de remarquer que :

$$\text{ad}(\text{Ad}_g A) = \text{Ad}_g \circ \text{ad}A \circ \text{Ad}_{g^{-1}}$$

$$\text{et donc : } \text{ad}(\text{Ad}_g A) \circ \text{ad}(\text{Ad}_g B) = \text{Ad}_g \circ \text{ad}A \circ \text{ad}B \circ \text{Ad}_{g^{-1}}$$

$$\Rightarrow \text{Tr}(\text{ad}(\text{Ad}_g A) \circ \text{ad}(\text{Ad}_g B)) = \text{Tr}(\text{ad}A \circ \text{ad}B).$$

II.2.14. Proposition

$SO(2, \mathbb{R}) = \{A \in SL(2, \mathbb{R}) \mid A^t A = Id\}$ est une variété C^∞ et son espace tangent $T_1 SO(2, \mathbb{R})$ (son algèbre de Lie) est égal à E^+ où E^+ est le sous-espace vectoriel de $sL(2, \mathbb{R})$, associé à la valeur propre 1 pour l'opérateur σ .

$$\sigma : sL(2, \mathbb{R}) \rightarrow sL(2, \mathbb{R}), A \rightarrow \sigma(A) = -tA$$

Preuve

$$A \in SO(2, \mathbb{R}) \Rightarrow A^t A = Id \Rightarrow \text{si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 & \text{d'où } SO(2, \mathbb{R}) \subset M(2, \mathbb{R}) \text{ est un compact} \\ c^2 + d^2 &= 1 \end{aligned}$$

Le fait que $SO(2, \mathbb{R})$ est une variété découle de $SL(2, \mathbb{R})$ est une variété.

$$SO(2, \mathbb{R}) = \{A \in M(2, \mathbb{R}) \mid f(A) = 0\}, f : M(2, \mathbb{R}) \rightarrow M(2, \mathbb{R}), A \rightarrow f(A) = A^t A - Id$$

On a donc : $T_1 SO(2, \mathbb{R}) = \text{Ker } D_1 f$.

$$D_1 f(X) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(I + hX)^t (I + hX) - I^t I}{h}$$

$$D_1 f(X) = X + tX$$

$$\text{d'où : } A \in so(2, \mathbb{R}) \Rightarrow A = -tA = +\sigma(A) \text{ d'où } A \in E^+.$$

II.2.15. Proposition

La forme bilinéaire définie comme suit sur $sL(2, \mathbb{R})$, $sL(2, \mathbb{R}) \times sL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$A ; B \rightarrow \langle A, B \rangle = B(A, \sigma(B)) = \text{Tr}(adA \circ ad(\sigma(B)))$ définit un produit scalaire $Ad(SO(2, \mathbb{R}))$ invariant.

Preuve

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}; \quad \text{On a : } adA = \begin{pmatrix} 0 & c-b & 2a \\ b-c & 0 & -(b+c) \\ 2a & -(b+c) & 0 \end{pmatrix}$$

et $\langle A, A \rangle = 8a^2 + 4b^2 + 4c^2$ d'où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive.

Le fait qu'il soit $Ad(SO(2, \mathbb{R}))$ invariant découle du fait que :

$$\sigma(Ad(k) B) = Ad(k) (\sigma(B)), k \in SO(2, \mathbb{R}) \text{ et que } B \text{ est } Ad(SL(2, \mathbb{R})) \text{ invariante (II.2.13)}$$

en admettant le théorème suivant :

II.2.16. Théorème

1) $SL(2, \mathbb{R}) / SO(2, \mathbb{R})$ est une variété différentiable avec une $SL(2, \mathbb{R})$ action, et

$$T_1 SO(2, \mathbb{R}) (SL(2, \mathbb{R}) / SO(2, \mathbb{R})) = E^- = \{ A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \mid \sigma(A) = -A \}.$$

2) $SL(2, \mathbb{R}) / SO(2, \mathbb{R})$ équipée de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une variété Riemannienne de courbure sectionnelle. $K(Y, Z) = -\frac{1}{4} B([Y, Z], [Y, Z])$ pour $Y, Z \in E^-$ et $\langle Y, Y \rangle = 1$ et $\langle Z, Z \rangle = 1$.

Remarque

Pour 1) voir [MNEI-TESTARD]

Pour 2) voir [CHEEG-EBEIN]

En calculant $K(Y, Z)$ pour $Y = \frac{Y_1}{\|Y_1\|}$ et $Z = \frac{Z_1}{\|Z_1\|}$ avec $Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

on obtient : $K(Y, Z) = -1$.

II.2.17. Théorème

$PSL(2, \mathbb{R}) / SO(2, \mathbb{R})$ s'identifie à H^2 .

Preuve

On a : $K(Y, Z) = -1$ pour Y et Z champs de vecteurs orthogonaux sur $SL(2, \mathbb{R}) / SO(2, \mathbb{R})$

d'où $PSL(2, \mathbb{R}) / SO(2, \mathbb{R})$ est une surface hyperbolique.

Par II.1.9. on a que : H^2 est le revêtement universel de $PSL(2, \mathbb{R}) / SO(2, \mathbb{R})$.

$PSL(2, \mathbb{R})$ agit sur H^2 (voir Déf)

et $\text{stab}_i = SO(2, \mathbb{R})$ d'où H^2 est homéomorphe à $PSL(2, \mathbb{R}) / SO(2, \mathbb{R})$.

d'où $H^2 \approx PSL(2, \mathbb{R}) / SO(2, \mathbb{R})$ et donc : $T^1 H^2 \approx PSL(2, \mathbb{R})$.

Considérons $\text{Id} \in PSL(2, \mathbb{R})$, et soit $(o, i, e^{i\pi/2})$ l'élément de $T^1 H^2$ lui correspondant et soit $\gamma : [a, b] \rightarrow H^2$ la géodésique telle que :

$(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) = (o, i, e^{i\pi/2})$. On a vu déjà que : $\gamma(t) = (o, e^t)$, $\dot{\gamma}(t) = e^{i\pi/2}$, d'où :

$(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} (o, i, e^{i\pi/2})$, d'où le corollaire suivant :

II.2.18. Corollaire

Le flot géodésique du fibré unitaire tangent à H^2 s'identifie à l'action du groupe à 1 paramètre $\left(\begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \right)_{t \in \mathbb{R}}$ sur $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Cette action étant définie comme suit : $\left(\begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}, g \right) \rightarrow \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \cdot g$

Considérons l'horocycle positif h orthogonal à la géodésique $\gamma \mid \gamma(t) = (0, e^t)$.
et soit $v(t) = J_{h(t)} \dot{h}(t)$. On a : $h(t) = t + i$ et $J_{h(t)} \dot{h}(t) = e^{i\pi/2}$

d'où $(h(t), J_{h(t)} \dot{h}(t)) = (t + i, e^{i\pi/2}) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (h(0), J_{h(0)} \dot{h}(0))$

On en déduit le corollaire suivant :

II.2.19. Corollaire :

Le flot horocyclique positif du fibré unitaire tangent à H^2 s'identifie à l'action du groupe à 1 paramètre $\left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)_{t \in \mathbb{R}}$ sur $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)_{t \in \mathbb{R}} \times \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g$$

II.2.20. Corollaire :

On a les égalités suivantes :

$$\text{i) } \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{s/2} & 0 \\ 0 & e^{-s/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{s/2} & 0 \\ 0 & e^{-s/2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & e^{st} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\text{ii) } \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\alpha/2 & \sin\alpha/2 \\ -\sin\alpha/2 & -\cos\alpha/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{s/2} & 0 \\ 0 & e^{-s/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\alpha/2 & \cos\alpha/2 \\ -\cos\alpha/2 & -\sin\alpha/2 \end{pmatrix}$$

avec $\cotg \alpha/2 = \frac{t}{2}$ et $t = 2 \text{ sh}(s/2)$.

Interprétation de ces égalités :

En supposant que toutes les courbes sont paramétrées par longueur d'arc.

On a :

i) Si $v \in T^1H$.

Considérons $\gamma: [0, s] \rightarrow H^2$, γ géodésique tel que $(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) = v$ et soit $(\gamma(s), \dot{\gamma}(s))$.

Considérons $h: [0, t] \rightarrow H^2$, h horocycle positif, tel que $(h(0), \dot{h}(0)) = (\gamma(s), \dot{\gamma}(s))$

et soit $(h(t), \dot{h}(t)) = w \in T^1H$

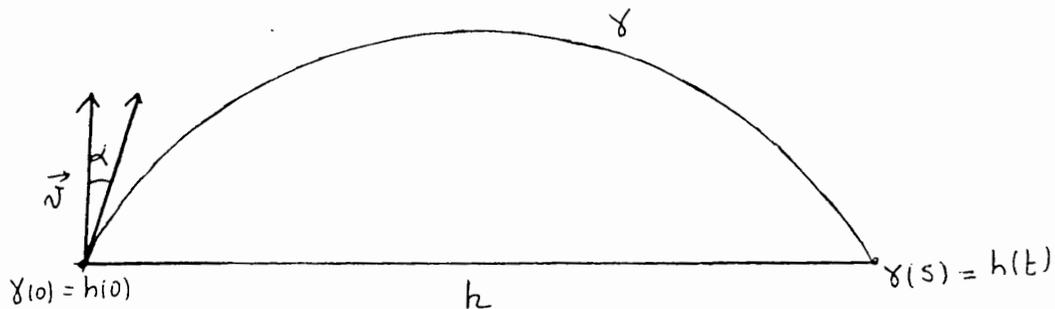
Considérons $h_1: [0, e^s t] \rightarrow H^2$, h_1 horocycle, tel que :

$(h_1(0), \dot{h}_1(0)) = v$. et soit $\gamma_1: [0, s] \rightarrow H^2$, géodésiquement telle que :

$(\gamma_1(0), \dot{\gamma}_1(0)) = (h_1(e^s t), \dot{h}_1(e^s t))$ et soit $(\gamma_1(t), \dot{\gamma}_1(t))$

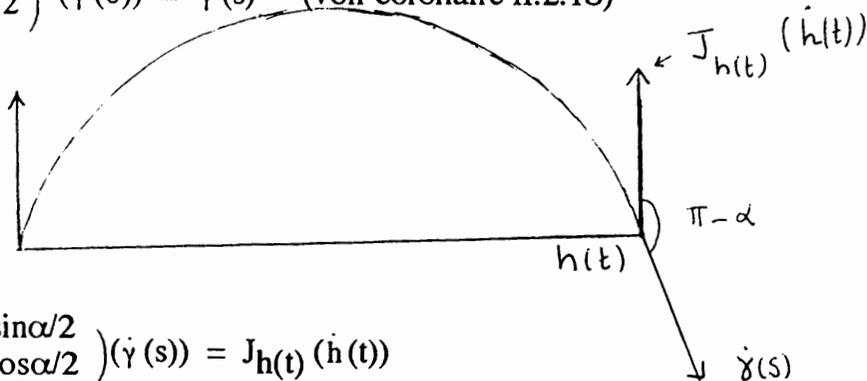
L'égalité (i) dit simplement que: $(\gamma_1(t), \dot{\gamma}_1(t)) = w$.

ii)



On a : $\begin{pmatrix} -\sin\alpha/2 & \cos(-\alpha/2) \\ \cos\alpha/2 & -\sin\alpha/2 \end{pmatrix} (v) = \dot{\gamma}(0)$

$\begin{pmatrix} e^{s/2} & 0 \\ 0 & -e^{-s/2} \end{pmatrix} (\dot{\gamma}(0)) = \dot{\gamma}(s)$ (voir corollaire II.2.18)



$\begin{pmatrix} -\cos\alpha/2 & \sin\alpha/2 \\ -\sin\alpha/2 & \cos\alpha/2 \end{pmatrix} (\dot{\gamma}(s)) = J_{h(t)}(\dot{h}(t))$

$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (v) = J_{h(t)}(\dot{h}(t))$

3- Calculs dans H^2 ; éléments remarquables du groupe d'isométrie :

Considérons le disque unité ouvert $D(0,1)$ et équipons-le de la métrique riemannienne suivante : $(ds)^2 = 4 \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(1 - (x^2 + y^2))^2}$.

II.3.1. Proposition

$(D(0,1), ds)$ est une surface hyperbolique.

II.3.2. Proposition

$(D(0,1), ds)$ s'identifie à $(H^2, (ds))$.

Preuve

$(D(0,1), ds)$ étant une surface hyperbolique, H^2 est son revêtement universel (II.1.9.).

On a :

$$\begin{aligned} f & : H^2 \rightarrow D(0,1) \\ z & \rightarrow \frac{z-i}{z+i} \quad \text{est biholomorphe donc homéomorphisme.} \end{aligned}$$

d'où: $H^2 \cong D(0,1)$

II.3.3. Corollaire

Le groupe d'isométries positives de $(D(0,1), ds)$ est $SU(1,1)$.

$$\text{où: } SU(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & \bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix} \mid |a|^2 - |c|^2 = 1 \right\}$$

Preuve

$h \in \text{Iso}^+(D^2)$; en utilisant II.3.2., on a : $f^{-1} \circ h \circ f : H^2 \rightarrow H^2$ est une isométrie positive; d'où: $f^{-1} \circ h \circ f \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. et de là, on a $h \in SU(1,1)$

avec $SU(1,1), D(0,1) \rightarrow D(0,1)$

$$\begin{pmatrix} a & \bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix}; z \rightarrow \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$$

II.3.4. Corollaire :

Les géodésiques passant par O sont les diamètres du disque.

Esquisse de preuve :

Il suffit de remarquer que les géodésiques passant par O sont les images par f des géodésiques passant par i dans H^2 .

II.3.5. Proposition

P étant un point de $D(0,1)$;

Notons ρ la distance hyperbolique $d_H(0,P)$ et r la distance euclidienne $d(0,P)$, on a :

$$\operatorname{th} \rho/2 = r$$

Preuve

On peut supposer P tel que $\operatorname{Im} P = 0$. On en déduit que $\operatorname{Re} P = r$.

La géodésique liant 0 et P est $\alpha : [0,r] \rightarrow D$ [II.3.4.]

$$t \rightarrow t$$

$$\text{On a : } d_h(0,P) = \int_0^r \frac{\langle \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle^{1/2}}{1 - \|\alpha(t)\|^2} dt$$

$$\text{d'où : } d_h(0,P) = \int_0^r \frac{1}{1-t^2} dt$$

$$\text{d'où : } \rho = 2 \operatorname{argth} r \Rightarrow r = \operatorname{th}(\rho/2)$$

II.3.6. Proposition

Le cercle de centre O et de rayon hyperbolique ρ est d'aire égale à $2\pi(\operatorname{ch}\rho - 1)$ et de périmètre $2\pi \operatorname{sh}\rho$.

Preuve

Soit P appartenant au cercle de centre O et de rayon hyp ρ . On a :

$$d_{\text{hyp}}(0,P) = \rho \Rightarrow d_{\text{EUC}}(0,P) = \operatorname{th} \rho/2 \quad (\text{II.3.5.})$$

donc, P appartient au cercle de centre O et de rayon euclidien $\operatorname{th} \rho/2$, d'où:

$$P = \operatorname{th} \rho/2 \cos\theta + i \operatorname{th} \rho/2 \sin\theta \quad \text{avec } \theta \in [0, 2\pi[.$$

Ceci est une paramétrisation pour le cercle de centre O et de rayon ρ .

$$L_h(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \frac{2\langle \dot{\Gamma}(\theta), \dot{\Gamma}(\theta) \rangle^{1/2} d\theta}{1 - \|\Gamma(\theta)\|^2}$$

donc, $L_h(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \text{shr } d\theta = 2\pi \text{sh } \rho$

L'aire intérieure de Γ est une région paramétrée par :

$$[0, r] \times [0, 2\pi] \rightarrow D$$

$$(t, \theta) \rightarrow \text{th } \frac{t}{2} \cos \theta + i \text{th } \frac{t}{2} \sin \theta$$

d'où: Aire $B(O, \rho) = \int_0^\rho L(C(0, t)) = \int_0^\rho 2\pi \text{Sh } t \, dt = 2\pi (\text{ch } \rho - 1)$

II.3.7. Proposition

1) Un triangle géodésique dans D (dans H^2) d'angles α, β, γ a une aire égale à :

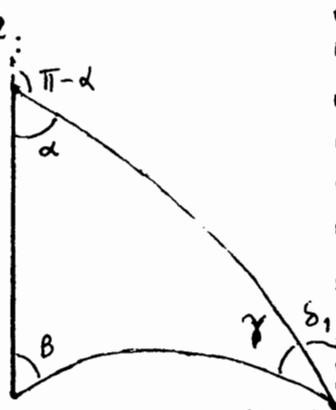
$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

2) Un n gône géodésique d'angle $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ a une aire égale à :

$$(n-2)\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n).$$

Preuve

1) Plaçons-nous dans H^2 :



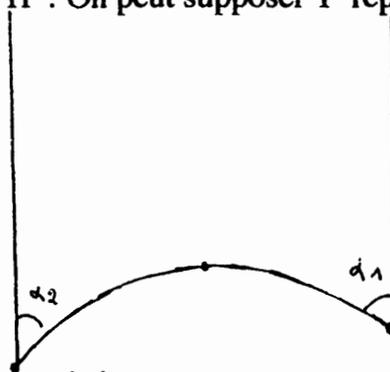
Soit T le triangle de sommets $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma$ d'angles respectifs α, β, γ .

Considérons T_1 le triangle de sommets v_β, v_γ et $y = \infty$ d'angles respectifs $\beta, \gamma + \delta_1, 0$;

T_2 le triangle de sommets v_α, v_γ et $y = \infty$ d'angles respectifs $\pi - \alpha, \delta_1, 0$. On a :

$$\text{Aire } T = \text{Aire } T_1 - \text{Aire } T_2.$$

Soit T' un triangle quelconque de sommets $v_{\alpha_1}, v_{\alpha_2}, y=\infty$ d'angles respectifs $\alpha_1, \alpha_2, 0$. $PSL(2, \mathbb{R})$ étant transitif, sur T^1H^2 . On peut supposer T' représenté comme suit :



$$\text{Aire } T' = \iint_{T'} \frac{dx dy}{y^2} = \int_{\cos(\alpha_2 - \pi/2)}^{\cos(\pi/2 - \alpha_1)} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dx dy}{y^2} \text{ d'où :}$$

$$\text{Aire } T' = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 - (\alpha_2 - \pi/2) = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + 0) \quad \text{cqfd.}$$

On déduit que : Aire $T_1 = \pi - (\beta + (\gamma + \delta_1))$ et Aire $T_2 = \pi - ((\pi - \alpha) + \delta_1)$ et donc :

$$\text{Aire } T = \pi - (\beta + \gamma + \alpha) \quad \text{cqfd.}$$

2) Considérons un n gône géodésique d'angle $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Notons v_1 le sommet d'angle α_1 et relierons-le au sommet v_i d'angle α_i par un segment géodésique. On a construit ainsi une triangulation du n gône, géodésique.

L'aire du n gône étant la somme des aires des triangles de cette triangulation, on a la formule demandée après utilisation de 1) pour calculer l'aire des triangles de la triangulation.

II.3.8. Théorème

Soit $h \neq \text{Id}$ un élément de $\text{Iso}^+(D, ds)$. Alors, on a soit :

- 1) h a un unique point fixe x et $x \notin S^1$. On dira que h est elliptique.
- 2) h a un unique point fixe x et $x \in S^1$. On dira que h est parabolique.
- 3) h a exactement deux points fixes x et y | $(x, y) \in S^1 \times S^1$. On dira que h est hyperbolique.

Preuve

Soit $h \neq \text{Id} \in \text{Iso}^+(D, ds)$. Prolongeons par continuité h sur $\bar{\partial D} = S^1$; \tilde{h} étant ce prolongement, on a $\tilde{h} \in C(\bar{D}, \bar{D})$.

Théorème de Brower [Milnor]

Toute application continue de \bar{D} dans \bar{D} admet au moins un point fixe.

En appliquant Brouwer à \tilde{h} , on a : $\text{card Fix } \tilde{h} \neq 0$. ($\text{Fix } \tilde{h} = \{x \in \bar{D} \mid \tilde{h}(x) = x\}$)

Montrons que $\text{card Fix } \tilde{h} \leq 2$:

Supposons que $\text{card Fix } \tilde{h} = 3$. Notons x, y, z ces trois points fixes.

Affirmation :

On a au moins 2 points parmi x, y, z appartenant à $\partial \overset{\circ}{D}$.

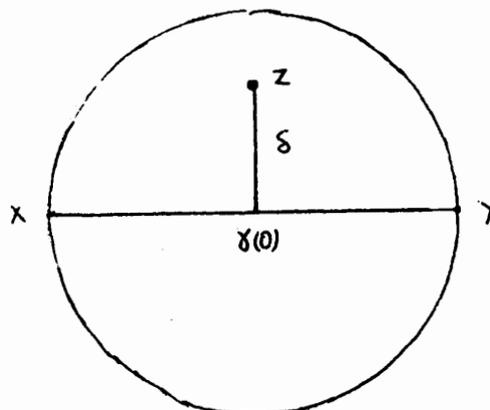
En effet, si on supposait que x et $y \in \overset{\circ}{D}$, et en considérant γ la géodésique liant x et y et en notant $v = (\gamma(0), \dot{\gamma}(0))$ l'élément de $T^1 D$. On a $h(v) = v \Rightarrow h \in \text{stab}_{\text{SU}(1,1)}(v)$.

Or, $\text{SU}(1,1)$ agit librement sur $T^1 D$. [voir II.2.1. - II.3.3.], d'où $h = \text{Id}$ contradiction.

Supposons que x et $y \in \partial \overset{\circ}{D}$, soit γ l'unique géodésique d'extrémités x, y de D , et

soit δ la géodésique $\perp \gamma$ et passant par z .

* (δ et γ sont uniques. On le verra à la fin de la preuve.)*



On a h fixe $(\delta(0), \dot{\delta}(0)) \Rightarrow h = \text{Id}$, d'où $z \in \gamma$. Donc $\exists t_0 \mid z = \gamma(t_0)$. On a : h fixe $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \Rightarrow h = \text{Id}$, d'où $\text{card } \tilde{h} \leq 2$.

Si $\text{card } \tilde{h} = 1$

On a soit h vérifie 1, soit h vérifie 2.

Si $\text{card } \tilde{h} = 2$

Notons x et y ses deux points fixes.

Affirmation :

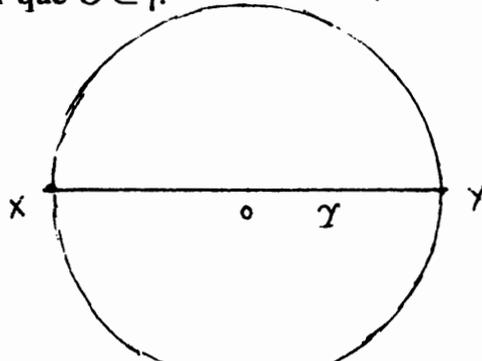
x et $y \in \partial \overset{\circ}{D}$. En effet, si x et $y \in \overset{\circ}{D}$, on a h fixe le segment géodésique liant x et y point par point, d'où $h = \text{Id}$.

Donc si $\text{card } \tilde{h} = 2$, on a h vérifie 3.

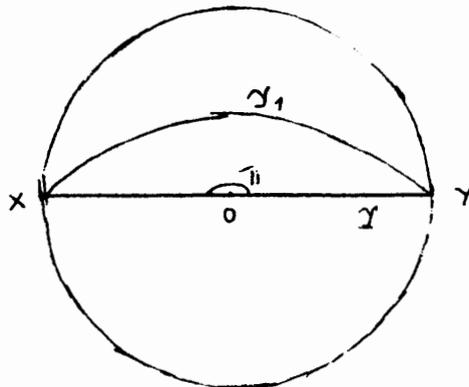
Pour compléter la preuve, il nous reste à prouver l'unicité des géodésiques γ et δ (voir *)

1) Unicité de γ :

On peut supposer que $O \in \gamma$.



et soit γ_1 une géodésique liant x et y , $\gamma_1 \neq \gamma$.



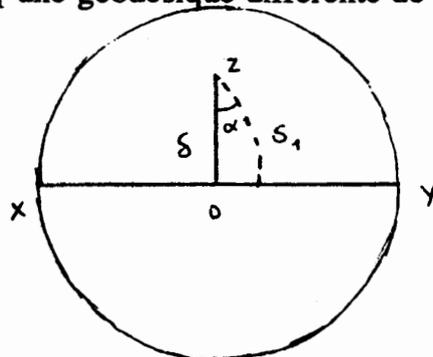
Considérons le triangle géodésique T de sommets O, x, y et d'angles $\pi, 0, 0$.

On a : Aire $T = \pi - (\pi + 0 + 0)$ (voir II.3.7.)

d'où : Aire $T = 0$. Donc, contradiction.

Unicité de δ .

Supposons δ_1 une géodésique différente de δ passant par z et orthogonale à γ .



Considérons le triangle géodésique T_1 de sommets $z, z_\delta, z_{\delta_1}$ et d'angles $\alpha, \pi/2, \pi/2$.

$$\text{Aire } T_1 = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\alpha \rightarrow \text{Aire } T_1 < 0. \text{ Donc, contradiction.}$$

II.3.9. Corollaire

$h \neq \text{Id}$, $h \in \text{Iso}^+(H^2, ds)$. Alors, soit :

- 1) h admet un unique point fixe z tel $\text{Im} z > 0$. On dira que h est elliptique.
- 2) h admet un unique point fixe z tel $\text{Im} z = 0$. On dira que h est parabolique.
- 3) h a exactement deux points fixes z, z_1 , $\text{Im} z_1 = 0$, $\text{Im} z < 0$. On dira que h est hyperbolique.

II.3.10. Remarques

Considérons le cas 1 .

On peut supposer $z = i$. Donc, h est un élément de $\text{SO}(2, \mathbb{R})$.

$$h = \begin{pmatrix} \cos \alpha/2 & -\sin \alpha/2 \\ \sin \alpha/2 & \cos \alpha/2 \end{pmatrix}$$

h agit comme une rotation d'angle α sur tout vecteur unitaire tangent à H^2 en z .

Considérons le cas 2 .

On peut supposer que $z = +\infty$

Considérons toutes les géodésiques positivement asymptotiques à $\gamma(t) = e^{ti}$.

On a h laisse invariant tout horocycle positif orthogonal à cette famille de géodésiques. h agit comme une translation sur cet horocycle.

Considérons le cas 3 .

Supposons que $z_1 = 0$, $z = +\infty$.

On a h laisse invariante la géodésique γ d'extrémités z_1 et z . On appelle γ axe hyperbolique de h .

II.3.11. Corollaire :

$h \neq \text{Id} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. On a :

$$h \text{ elliptique} \Leftrightarrow |\text{trace } h| < 2$$

$$h \text{ hyperbolique} \Leftrightarrow |\text{trace } h| > 2$$

$$h \text{ parabolique} \Leftrightarrow |\text{trace } h| = 2$$

Preuve

Si $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et z_0 est un point fixe de h . Alors, z_0 est racine du polynôme

$cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Le discriminant Δ de ce polynôme est égal à :

$$\Delta = (d-a)^2 + 4bc = (d-a)^2 + 4(ad-1) = (d+a)^2 - 4 = (\text{Tr}h)^2 - 4.$$

Si $|\text{Tr}h| > 2$, on a : $\Delta > 0$ et donc on a deux racines distinctes et de ce fait, h est hyperbolique.

Si $|\text{Tr}h| < 2$, on a : $\Delta < 0$ et donc deux racines complexes conjuguées \Rightarrow un unique point fixe dans H^2 (la racine dont la partie imaginaire est positive) $\Rightarrow h$ est elliptique.

Si $|\text{Tr}h| = 2$, on a une unique racine double réelle $\Rightarrow h$ est parabolique.

Les sens inverses des implications :

Si h est parabolique. On a $(\exists! z \in \text{fixe } h \text{ et } z = \text{Rel } z)$

Il existe un $g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ tel que $g(z) = \infty$.

On a : $g h g^{-1}$ est parabolique et admet ∞ comme point fixe.

$$\text{d'où : } g h g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.3.10.})$$

$$\text{Tr } g h g^{-1} = \text{Tr } h = 2 \quad \text{cqfd.}$$

Si h est elliptique, on a :

$$\exists! (z \in H^2 \mid \text{Im}z > 0 \text{ et } h(z) = z)$$

Soit g un élément de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, tel que $g(z) = i$.

On a : $g h g^{-1}$ est parabolique et d'élément fixe i , donc :

$$g h g^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha/2 & -\sin\alpha/2 \\ \sin\alpha/2 & \cos\alpha/2 \end{pmatrix}_{\alpha \neq 0} \quad (\text{II.3.11.})$$

$$\text{d'où : } \text{Tr } g h g^{-1} = \text{Tr } h = 2 \cos\alpha/2, \text{ d'où : } |\text{Tr } h| = 2 |\cos\alpha/2| < 2.$$

Si h est hyperbolique On a : $\exists (z_i \in H^2, \text{Im}z_i = 0 \text{ et } h(z_i) = z_i) \quad i \in \{1, 2\}$

Soit g un élément de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ tel que : $g(z_1) = 0$ et $g(z_2) = \infty$

On a : $g h g^{-1}$ est un élément hyperbolique fixant 0 et ∞ .

$$\text{d'où : } g h g^{-1} = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}_{t \neq 0} \quad (\text{II.3.11.})$$

$$\text{Tr } h = \text{Tr } g h g^{-1} = e^{t/2} + e^{-t/2} = 2 \text{cht}/2, \text{ d'où : } |\text{Tr } h| = 2 \text{cht}/2 > 2$$

4] Surfaces hyperboliques

Soit S une surface orientable.

II.4.1. Définition

On appelle structure hyperbolique sur S la donnée d'un atlas de cartes $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ vérifiant : $U_\alpha \rightarrow H^2$ φ_α difféomorphisme, et $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ soit la restriction d'un élément de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ à $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$.

II.2.4. Remarque

Les définitions II.4.1. et II.1.1. sont équivalentes : en effet, si S est une surface hyperbolique, on a :

(H^2, S, p) est un revêtement universel de S avec p isométrie locale. On a :

$(p: V_\alpha \rightarrow p(V_\alpha))$ est une isométrie). On choisit $U_\alpha / p^{-1}(U_\alpha) = \cup V_\alpha$ et $p: V_\alpha \rightarrow U_\alpha$ est une isométrie. On pose $\varphi_\alpha: p^{-1}|_{U_\alpha}$ et on a $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ un atlas vérifiant les deux conditions.

II.4.3. Définition

On appelle genre de S , noté g , l'entier naturel vérifiant : $2 - 2g = \chi(S)$ où $\chi(S)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de S .

II.4.4. Lemme

Pour $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, il existe une surface S compacte de genre $g = n$ et S est hyperbolique.

Preuve

Fixons $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Considérons un $4n$ gône géodésique régulier dans $(D(0,1), ds)$.

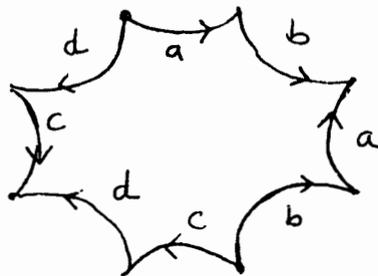
$$\text{On a : } \text{Aire } \Delta = (4n - 2) \pi - 4n \alpha \quad (\text{II.3.7.})$$

On a une famille $(\Delta_\alpha)_{\alpha \in [0, 2\pi]}$ de $4n$ gône géodésique régulier dépendant continûment de α .

Choisissons le Δ_α tel que $4n\alpha = 2\pi$

et construisons la surface combinatoire K , obtenue comme suit :

Cas : $n = 2$



On colle les côtés portant la même lettre avec sens des flèches compatible.

On obtient une surface à 1 sommet, 1 face et $2n$ arêtes.

On a : $\chi(K) = 1 - 2n + 1 = 2 - 2n \Rightarrow g = n$

K est hyperbolique . cqfd.

II.4.5. Lemme

Pour $n = 0$, $n=1$ on n'a pas de structure hyperbolique sur une surface compacte S de genre g égal à n .

Preuve

On a $\chi(S) = 2 - 2g = 2 - 2n$. Pour $n = 0$ ou $n = 1$, on a : $\chi(S) \geq 0$.

Par Gauß-Bonnet (I.6.12), on a : $\int_S K(S) ds = 2\pi \chi(S)$, d'où : $\int_S K(S) ds \geq 0$.

Si S admettait une structure hyperbolique, on a : $K(S) = -1$ et donc :

– Aire (S) ≥ 0 Contradiction.

II.4.6. Théorème

Soit S une surface compacte hyperbolique, alors : $S = H^2 / \Gamma$ où Γ est un sous groupe discret de $PSL(2, R)$ et tel que : $\forall (\gamma \in \Gamma - \{e\})$, γ est hyperbolique.

Preuve

En se basant sur le théorème II.1.9, on a : $H^2 \xrightarrow{p} S$ est un revêtement universel

$\Gamma = \Pi_1(S)$ est isomorphe à $Aut(H^2, S, p)$. (Voir [God])

p étant une isométrie locale, on a : $Aut(H^2, S, p) \subset PSL(2, R)$

d'où $S = H^2 / \Gamma$ où Γ agit proprement et librement sur H^2 . [God]

Affirmation

Γ agit proprement et librement sur H^2 implique :

$$\exists (\epsilon > 0) \mid \forall (x \in H^2), \forall (g \in \Gamma - \{e\}) \quad d_h(x, g(x)) \geq \epsilon.$$

En effet :

Γ agit proprement et librement sur H^2 implique que :

$$\forall (x \in H^2), \exists (U \in \mathcal{V}(x)) \text{ tel que : } g(U) \cap U = \emptyset \text{ pour } g \neq e. \quad [\text{God}]$$

Posons $U = B(x, \epsilon)$ où B est la boule hyperbolique de centre x et de rayon ϵ .

S étant une surface compacte, le choix de ϵ est uniforme pour tous les x .

On a alors : $g(B(x, \epsilon)) \cap B(x, \epsilon) = \emptyset \quad g \in \Gamma - \{e\} \Rightarrow$

$$g(x) \notin B(x, \epsilon) \Rightarrow d_{\text{hyp}}(x, g(x)) \geq \epsilon.$$

Pour un élément γ parabolique, on a : $\forall \epsilon > 0, \exists (x \in H^2) \mid d_{\text{hyp}}(\gamma(x), x) \leq \epsilon.$

En effet :

On peut supposer $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (voir II.3.11).

Soit $z = y_i \in H^2$, on a : $\gamma(z) = 1 + y.i$

$$d_h(z, \gamma(z)) = \arg \operatorname{ch} \left(1 + \frac{|\gamma(z) - z|^2}{2 \operatorname{Im} \gamma(z) \operatorname{Im} z} \right) \quad \text{ou} \quad d_h(z, \gamma(z)) = \arg \operatorname{ch} \left(1 + \frac{1}{2y^2} \right)$$

On peut trouver y tel que $\arg \operatorname{ch} \left(1 + \frac{1}{2y^2} \right) < \epsilon$. cqfd.

Γ agit librement $\Rightarrow \forall g \neq e$; $\operatorname{Fix} g \cap \overset{\circ}{H}^2 = \emptyset \Rightarrow g$ n'est pas elliptique.

d'où : $\forall g \in \Gamma - \{e\}$; g est hyperbolique.

Soit Γ un sous groupe discret de $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$.

II.4.7. Définition

On appelle polygone fondamental pour l'action de Γ , une partie fermée $P \subset H^2$ vérifiant :

$$1) \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma P = H^2$$

$$2) \gamma \overset{\circ}{P} \cap \overset{\circ}{P} = \emptyset \text{ si } \gamma \neq e.$$

3) Pour tout côté s de P , il existe \bar{s} un autre côté de P et γ un élément de Γ différent du neutre, tel que : $\gamma(\bar{s}) = s$.

4) Pour tout compact $K \subset H^2$, il n'existe qu'un nombre fini de γ dans Γ tel que :

$$K \cap \gamma(P) \neq \emptyset.$$

II.4.8. Proposition

Il existe un point $a \in H^2$ tel que $\gamma(a) \neq a$ pour tout γ différent du neutre.

Preuve

Considérons f la fonction définie sur H^2 par :

$$f: H^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \rightarrow \inf_{\gamma \in \Gamma - \{e\}} d_h(x, \gamma(x))$$

et supposons que : $\forall (x \in H^2), \exists (\gamma \in \Gamma \text{ tq } \gamma(x) = x)$. On en déduit :

$$\exists (\gamma_n \in \Gamma)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tq } d_h(x, \gamma_n x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow \gamma_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} I_d, \text{ d'où contradiction avec } \Gamma$$

discret. (Il suffit de choisir certaines valeurs pour x pour obtenir $\gamma_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} I_d$)

Notons pour ce a choisi, $H_{\gamma(a)}^+ = \{x \in H^2; d_h(x, a) \leq d_h(x, \gamma(a))\}$ et considérons $D_a = \bigcap_{\gamma \in \Gamma - \{e\}} H_{\gamma(a)}^+$. On a $D_a \neq \emptyset$, (il contient au moins a .)

II.4.9. Proposition

D_a est un polygône fondamental. On l'appelle polygône de Poincaré.

Preuve

1) Soit $y \in H^2$, considérons : $\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$

$$\gamma \rightarrow d(y, \gamma(a))$$

Γ étant discret, cette fonction admet un minimum. Notons γ_0 l'élément où ce minimum est atteint.

$$d_h(\gamma_0^{-1} y, a) = d_h(y, \gamma_0 a) = \inf_{\gamma} d_h(y, \gamma(a))$$

$$d_h(\gamma_0^{-1} y, \gamma(a)) = d_h(y, \gamma_0 \gamma(a)) \quad \forall \gamma \in \Gamma - \{e\}$$

$$\text{or: } d_h(y, \gamma_0 \gamma a) \geq d_h(y, \gamma_0(a)) = d_h(\gamma_0^{-1} y, a)$$

On a : $\forall (\gamma \in \Gamma - \{e\}) ; d_h(\gamma_0^{-1} y, \gamma(a)) \geq d_h(y, \gamma_0(a)) = d_h(\gamma_0^{-1} y, a)$. D'où : $\gamma_0^{-1} y \in D_a$

On a démontré que : $\forall y \in H^2, \exists (\gamma_0 \in \Gamma) \mid \gamma_0^{-1} y \in D_a$ d'où $H^2 = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma D_a$

2) Soit $x \in \overset{\circ}{D}_a$, on a : $\gamma x \in \gamma \overset{\circ}{D}_a$ or :

$$\gamma \overset{\circ}{D}_a = \left\{ x \in H^2 \mid d_h(x, \gamma(a)) < d(x, \gamma(\gamma_0(a))), \gamma_0 \neq e \right\}$$

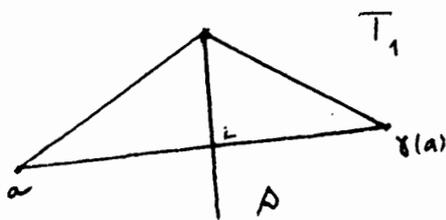
Posons : $\gamma_0 = \gamma^{-1}$ et $y = \gamma x \in \gamma \overset{\circ}{D}_a$, donc : $d_h(y, \gamma^{-1}(a)) < d_h(y, a) \Rightarrow y \notin \overset{\circ}{D}_a$

d'où : $\overset{\circ}{D}_a \cap \gamma \overset{\circ}{D}_a = \emptyset$ pour $\gamma \neq e$.

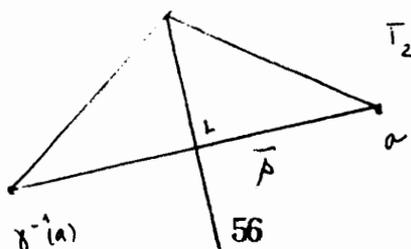
3) Premièrement, remarquons si z et $\gamma(z) \in D_a$ pour $\gamma \neq e$ alors, $d_h(z, a) = d_h(\gamma(z), a)$

On appelle médiatrice de $[a, \gamma(a)]$ l'ensemble $\{z \in H^2 \mid d_h(a, z) = d_h(\gamma(a), z)\}$

Si s est un côté de D_a , il existe un $\gamma \in \Gamma$ tel que s soit inclus dans la médiatrice de $[a, \gamma(a)]$. Considérons la médiatrice de $[a, \gamma^{-1}(a)]$. On sait que $[a, \gamma^{-1}(a)]$ porte un côté \bar{s} de D_a . Considérons T_1 le triangle géodésique représenté ci-dessous.



et T_2 le triangle géodésique représenté ci-dessous.



γ^{-1} envoie T_1 sur T_2 . Notons h_1 la hauteur de T_1 portée par s ; h_2 la hauteur de T_2 portée par s^{-1} . Soit $z \in h_1$; suite à la remarque faite au début, on a :

$$d_h(z, a) = d_h(\gamma^{-1}(z), a) \Rightarrow \gamma^{-1} \text{ envoie } h_1 \text{ sur } h_2.$$

Considérons les triangles T_3 et T_4 décrits ci-dessous :



Notons h_3 et h_4 les hauteurs de T_3 et T_4 portées respectivement par s et \bar{s} .

On a : $\gamma^{-1}(h_3) = h_4$

$s = h_1 \cup h_3$ on a : $\gamma^{-1}(s) = \bar{s}$; $\bar{s} = h_2 \cup h_4$.

4) K un compact de H^2 . $K \subset \bigcup_{x \in H^2} V_x$; où V_x est un voisinage ouvert quelconque de x . K étant compact, il existe un sous recouvrement fini de K par les V_x . Il suffit donc de démontrer que : $\forall x \in H^2, \exists (V \in V(x))$, tel que : $\gamma(D_a) \cap V \neq \emptyset$ pour un nombre fini de γ . Suite à la propriété 1, il suffit de se restreindre aux $x \in D_a$.

On a donc trois cas à étudier :

1) $x \in \overset{\circ}{D}_a$.

Il suffit de prendre $V = \overset{\circ}{D}_a$.

2) $x \in \partial D_a$ et x n'est pas un sommet.

$x \in \partial D_a \Rightarrow \exists \gamma \in \Gamma - \{e\}$ tq: $x \in D_a$ et $x \in \gamma D_a$.

Il suffit de prendre $V = D_a \cup \gamma D_a$

3) $x \in \partial D_a$, x est sommet.

Γ étant discret, on a : $\exists B(x, \epsilon)$: Boule de centre x et de rayon ϵ tq: $\gamma B \cap D_a \neq \emptyset$ pour un nombre fini de $\gamma \in \Gamma$.

Posons : $V = \bigcup_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma B \cap D_a \neq \emptyset}} \gamma D_a$,

Dans les trois cas, V vérifie *. cqfd.

II.4.10. Remarque

Soit S une surface compacte sans bord, hyperbolique; Γ sous groupe de Poincaré. Considérons D_a le polygone de Poincaré associé à Γ .

1) On a : $\forall x \in D_a ; d_h(x, a) < D$, D ne dépend que de la surface S .

2) ∂D_a est une collection finie de segments géodésiques.

En effet :

1) S étant compacte, notons D le diamètre de S . c'est à dire $D = \sup_{(x,y) \in S \times S} d_h(x,y)$

Soit $y \in H^2$, on a : $\exists \gamma \in \Gamma$ tq : $d_h(y, \gamma(a)) \leq D$.

Notons : $a_1 = p(a)$ où $p: H^2 \rightarrow S$ et $y_1 = p(y)$.

On a : $d_h(y_1, a_1) \leq D$, d'où l'affirmation.

Pour $y \in D_a$, on a :

$$d_h(y, a) \leq d_h(y, \gamma(a)) \quad \forall (\gamma \in \Gamma - \{e\})$$

En choisissant γ tel que γ vérifie $d_h(y, \gamma(a)) \leq D$, on a : $\forall y \in D_a : d_h(y, a) < D$

2) On a : $\partial D_a \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma - \{e\}} \partial H_\gamma^+$, Γ étant discret, l'ensemble $\{\gamma a, \gamma \in \Gamma\}$ est discret.

On a : $\text{card} \{\gamma \in \Gamma \mid d_h(a, \gamma(a)) \leq 2D\} < \infty$

$$z \in \partial H_\gamma^+ \Rightarrow d_h(z, a) = d_h(z, \gamma(a)). \text{ Si } z \in \partial D_a \Rightarrow d_h(z, a) < D$$

d'où : $d_h(a, \gamma(a)) \leq 2D$, d'où : $\partial D_a \subset \bigcup_{\gamma \text{ fini}} \partial H_\gamma^+ \Rightarrow \partial D_a$ est une union finie d'arcs géodésiques portés par les médiatrices de $[a, \gamma(a)]$.

On remarque que S a une représentation en surface combinatoire, à savoir : D_a où les paires de côtés s et \bar{s} sont identifiées.

II.4.11. Théorème

Une surface S complète, non compacte, hyperbolique, d'aire finie est homéomorphe à une surface compacte sans bord, moins un nombre fini de points.

De plus, Aire $(S) = -2 \pi \chi(S)$.

Preuve

Considérons $\Gamma = \Pi_1(S)$ et soit D_a son polygone de Poincaré.

Affirmation

Notons V l'ensemble des sommets de D_a ; on a : $\text{Card}(V \cap \partial(D(0,1)), ds) < \infty$

Soit v_1, \dots, v_n n sommets de $V \cap \partial(D(0,1))$.

Considérons le polygone géodésique P de sommet v_1, \dots, v_n . On a D_a étant convexe, D_a contient ce polygone, donc : $\text{Aire } P \leq \text{Aire } D_a$.

On a $\text{Aire } P = (n-2)\pi$, d'où $(n-2)\pi \leq \text{Aire } D_a = \text{Aire } S < \infty$. d'où $n < \infty$.

Considérons maintenant $V \cap D(0,1)$.

Affirmation

$\text{Card } V \cap D(0,1) < \infty$

En effet, Soit v un sommet de $V \cap D(0,1)$, on a :

$\exists \varepsilon > 0 / \gamma_B(v, \varepsilon) \cap D_a \neq \emptyset$ pour un nombre fini de γ dans Γ ; ceci implique qu'il n'y a qu'un nombre fini de géodésiques dans un voisinage de v et qui sont bord de D_a .

Considérons deux telles géodésiques qui passent par v et notons α_v l'angle en v formé par ces deux géodésiques. On a α_v est strictement inférieur à π .

Prenons v_1, \dots, v_n dans $V \cap D(0,1)$ et construisons un polygone géodésique P de sommets v_1, \dots, v_n , P inclus dans D_a .

On a : $\text{Aire } P = (n-2)\pi - \sum_{i=1}^n \beta_i$ (II.3.7), d'où : $2\pi + \text{Aire } P = \sum_{i=1}^n (\pi - \beta_i)$

$\beta_i \leq \alpha_{v_i}$, on a : $2\pi + \text{Aire } P \geq \sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_{v_i})$ d'où : $2\pi + \text{Aire } D_a \geq \sum_{v \in D(0,1) \cap V} (\pi - \alpha_v)$

Décomposons $V \cap D(0,1)$ en deux parties disjointes A et B , à savoir :

$$A = \left\{ v \in D(0,1) \cap V / \alpha_v \leq \frac{2\pi}{3} \right\}, B = \left\{ v \in D(0,1) \cap V / \alpha_v > \frac{2\pi}{3} \right\}$$

Et soit la relation d'équivalence suivante :

$v_1 \in D(0,1) \cap V$ est équivalent à $v_2 \in D(0,1) \cap V$ ssi $p(v_1) = p(v_2)$

($p: D(0,1) \rightarrow S$ l'application de revêtement).

on a : $\sum_{v \in V} \alpha_v = 2\pi$

On en déduit que :

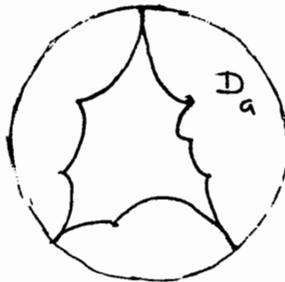
$\forall (v \in D(0,1) \cap V) \exists$ (au plus) $v_1, v_2 \in B / [v_1] = [v_2] = [v]$

$\forall (v \in D(0,1) \cap V) \exists$ (au moins) $v_3 \in A / [v_3] = [v]$

De plus, la relation : $2\pi + \text{Aire } D_a \geq \sum_{v \in D(0,1) \cap V} (\pi - \alpha_v)$ implique que : $\text{Card } A < \infty$.

On en déduit que $\text{Card } V \cap D(0,1) < \infty$

En effectuant les identifications des côtés de D_a , on construit S .



et considérons D'_a obtenu comme étant :



$D_a - (v \in \partial D(0,1) \cap V) \cup (s_v, \bar{s}_v) \dots$

on obtient ainsi une surface compacte S' et $S = S' - \{v \in \partial D(0,1)\}$. d'où l'affirmation.

II.4.12 Remarque

Pour S surface de volume fini, on a démontré que D_a admet des sommets sur

$S^1 = \partial D(0,1)$. Remarquer que :

$\text{Stab}_\Gamma(v) = \{\gamma \in \Gamma / \gamma(v) = v\}$ pour $v \in S^1$ et v sommet de D_a , est engendré par un

élément parabolique.

5) Flot géodésique et Flot horocyclique d'une surface hyperbolique complète d'aire finie :

Via les identifications de H^2 et de $PSL(2,R)/SO(2,R)$, de T^1H^2 et de $PSL(2,R)$ on a :

II-5-1- Proposition :

Soit S une surface complète hyperbolique, connexe et non simplement connexe, on a : $S = \Gamma \backslash PSL(2,R) / SO(2,R)$ où Γ est un sous groupe discret non trivial de $PSL(2,R)$ agissant librement et proprement sur H^2 .

Le fibré unitaire tangent T^1S s'identifie à $\Gamma \backslash PSL(2,R)$.

II-5-2- Definition :

On définit le flot géodesique du fibré unitaire tangent à une surface complète hyperbolique S comme étant l'action du groupe à 1 paramètre, $\left\{ \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix} \right\}_{s \in \mathbb{R}}$ sur

sur $\Gamma \backslash PSL(2,R)$, définie comme suit : $\left\{ \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix} \right\}_{s \in \mathbb{R}} \times \Gamma \backslash PSL(2,R) \rightarrow \Gamma \backslash PSL(2,R)$

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix}; \Gamma g \rightarrow \Gamma g \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix}$$

II-5-3- Definition :

On définit le flot horocyclique positif du fibré unitaire tangent à une surface complète hyperbolique S comme étant l'action du groupe à 1 paramètre $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & \wedge \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{\wedge \in \mathbb{R}}$

sur $\Gamma \backslash PSL(2,R)$, définie comme suit : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & \wedge \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{\wedge \in \mathbb{R}} \times \Gamma \backslash PSL(2,R) \rightarrow \Gamma \backslash PSL(2,R)$

$$\begin{pmatrix} 1 & \wedge \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \Gamma g \rightarrow \Gamma g \begin{pmatrix} 1 & \wedge \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II.5.4. Definition :

On appelle orbite du flot géodésique du fibré unitaire tangent à une surface

hyperbolique S complète l'ensemble $\left\{ \Gamma g \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix} \right\}_{s \in \mathbb{R}}$, g fixé dans $PSL(2,R)$.

On dira que cette orbite est périodique de période T , s'il existe $T > 0$ tel que :

$$\forall (s \in \mathbb{R}) \text{ on a : } \Gamma_g \begin{pmatrix} e^{\frac{(s+T)}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{(s+T)}{2}} \end{pmatrix} = \Gamma_g \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix}$$

II.5.5. Definition :

On appelle orbite du flot horocyclique positif du fibré unitaire tangent à une surface hyperbolique S complète l'ensemble $\left\{ \Gamma_g \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{t \in \mathbb{R}}$ g fixé dans $PSL(2, \mathbb{R})$.

On dira que cette orbite est périodique de période T , s'il existe $T > 0$ tel que :

$$\forall (t \in \mathbb{R}) \text{ on a : } \Gamma_g \begin{pmatrix} 1 & t+T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Gamma_g \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II.5.6. Proposition :

L'ensemble des orbites périodiques du flot géodésique du fibré unitaire tangent à une surface hyperbolique compacte est non vide.

Preuve

S étant compacte, on a : $\exists (\gamma \in \Gamma)$ tel que γ soit hyperbolique (II.4.6)

$$\text{On peut supposer que } \gamma = \begin{pmatrix} e^{\frac{s_0}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s_0}{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{II.3.11})$$

$$\text{Considérons l'orbite : } \left\{ \Gamma \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix} \right\}_{s \in \mathbb{R}}$$

$$\text{On a : } \Gamma \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix} \cdot \Gamma \begin{pmatrix} e^{\frac{s_0}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s_0}{2}} \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} e^{\frac{(s+s_0)}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{(s+s_0)}{2}} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix} \cdot \Gamma \begin{pmatrix} e^{\frac{s_0}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s_0}{2}} \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} e^{\frac{s_0}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s_0}{2}} \end{pmatrix} \cdot \Gamma \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix}, \text{ on a :}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} e^{\frac{s+s_0}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s+s_0}{2}} \end{pmatrix} = \Gamma \cdot \gamma \cdot \Gamma \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix} \text{ et donc : } \Gamma \begin{pmatrix} e^{\frac{s+s_0}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s+s_0}{2}} \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix}$$

d'où $\left\{ \left\{ \Gamma \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix} \right\}_{s \in \mathbb{R}} \right\}$ est périodique.

II.5.7. Proposition :

L'ensemble des orbites périodiques du flot horocyclique positif du fibré unitaire tangent à une surface hyperbolique compacte est vide.

Preuve :

Supposons que $\left\{ \Gamma_g \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{t \in \mathbb{R}}$ est une orbite périodique de période T .

Considérons $\left\{ \Gamma_g \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{s_0}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s_0}{2}} \end{pmatrix} \right\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Sachant que $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{s_0}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s_0}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{s_0}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s_0}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{s_0} t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a que $\left\{ \Gamma_g \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{s_0}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s_0}{2}} \end{pmatrix} \right\}_{t \in \mathbb{R}}$ est une orbite périodique du flot

horocyclique de période $e^{s_0} T$.

En faisant tendre $s_0 \rightarrow -\infty$, on obtient des orbites périodiques de périodes de plus en plus courtes. La compacité de S implique l'existence d'un point fixe par $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où l'existence d'un élément parabolique; contradiction avec II.4.6.

II.5.8. Proposition :

L'ensemble des orbites périodiques du flot géodésique du fibré unitaire tangent à une surface complète d'aire finie est non vide.

Preuve :

Il suffit de montrer l'existence d'un élément hyperbolique dans Γ et de reprendre la démonstration de II.5.6. Prouvons l'existence d'un élément hyperbolique; procédons par l'absurde. Supposons que tous les éléments de Γ sont paraboliques.

Soit $\gamma_1 \in \Gamma$, on peut supposer $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $g \in \Gamma$, $g \neq \gamma_1$ et $g \neq \gamma_1^{-1}$. On a :

$$g \cdot \gamma_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}, g \gamma_1 \in \Gamma \Rightarrow \text{Tr}(g\gamma_1) = 2 = \text{Tr}g = 2.$$

d'où: $c = 0$.

Donc g commute à γ_1 d'où $\Gamma \approx Z = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

On a donc: S est homéomorphe à $S^1 \times [0,1]$.

d'où: $\chi(S) = 2$, et g le genre de S est égal à zéro, donc contradiction avec II.4.7.

II.5.9. Proposition :

L'ensemble des orbites périodiques du flot horocyclique positif du fibré unitaire tangent à une surface complète d'aire finie est non vide.

Preuve :

En se basant sur la remarque II.4.12, on a : $\exists \gamma$ parabolique appartenant à Γ . On peut

supposer $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Considérons : $\left\{ \Gamma \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{t \in \mathbb{R}}$. On a :

$$\Gamma \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} 1 & t+T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Gamma \gamma \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où: $\Gamma \begin{pmatrix} 1 & t+T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \forall (t \in \mathbb{R})$.

$S = \Gamma \backslash \text{PSL}(2, \mathbb{R}) / \text{SO}(2, \mathbb{R})$ avec S est d'aire finie.

II.5.10. Définition

On dira que l'orbite $\left\{ \Gamma g \begin{pmatrix} \frac{s}{e^2} & \\ 0 & e^{\frac{s}{2}} \end{pmatrix} \right\}_{s \in \mathbb{R}}$ est dense si et seulement si son

adhérence $\overline{\left\{ \Gamma g \begin{pmatrix} \frac{s}{e^2} & \\ 0 & e^{\frac{s}{2}} \end{pmatrix} \right\}_{s \in \mathbb{R}}}$ est égale à $\Gamma \backslash \text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

II.5.11. Définition

On dira l'orbite $\left\{ \Gamma g \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{t \in \mathbb{R}}$ est dense si et seulement si son adhérence

$$\overline{\left\{ \Gamma g \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{t \in \mathbb{R}}} \text{ est } \Gamma \backslash \text{PSL}(2, \mathbb{R}).$$

Dans ce qui suit, nous allons présenter et utiliser une technique permettant d'établir l'existence d'orbites denses aussi bien pour le flot horocyclique, que le flot géodésique du fibré unitaire de S . Cette technique est la théorie ergodique. Pour des détails complets, on renvoie à [Ma].

$$\text{Considérons } \text{SL}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 \right\}.$$

II.5.12. Notation :

On appelle translation L_g à gauche (R_g à droite) de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ l'action suivante de g sur $\text{SL}(2, \mathbb{R})$:

$$L_g : \text{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$$

$$g_1 \rightarrow L_g(g_1) = g \cdot g_1$$

$$R_g : \text{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$$

$$g_1 \rightarrow R_g(g_1) = g_1 \cdot g^{-1}$$

II.5.13. Définition :

On appelle μ , mesure invariante à gauche (à droite), si elle existe, sur $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ un élément du dual de $C[\text{SL}(2, \mathbb{R}); \mathbb{R}]$ vérifiant : $L_g \mu = \mu$ ($R_g \mu = \mu$) $\forall (g \in \text{SL}(2, \mathbb{R}))$ où :

$$L_g \mu : C[\text{SL}(2, \mathbb{R}); \mathbb{R}] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \rightarrow L_g \mu(f) = \mu(L_g f) \text{ avec } L_g f(g_1) = f(L_g g_1)$$

$$R_g \mu : C[\text{SL}(2, \mathbb{R}); \mathbb{R}] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \rightarrow R_g \mu(f) = \mu(R_g f) \text{ où : } R_g f(g_1) = f(R_g g_1).$$

II.5.14. Proposition :

Il existe une mesure non nulle invariante à gauche sur $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ et cette mesure est unique à scalaire près.

Preuve :

Considérons $sL(2,R) = T_{Id}SL(2,R)$ et soit ϖ une trois forme différentielle non nulle sur $sL(2,R)$. Soit $g \in SL(2,R)$, on a $L_{g^{-1}}$ est un difféomorphisme de $SL(2,R)$ et donc induit un isomorphisme entre $T_g SL(2,R)$ et $sL(2,R)$. Pour $v_1, v_2, v_3 \in T_g SL(2,R)$ définissons:

$$\varpi_g(v_1, v_2, v_3) = \omega_e(L_{g^{-1}}(v_1), L_{g^{-1}}(v_2), L_{g^{-1}}(v_3)).$$

ϖ ainsi définie est une section du fibré $\Lambda^3(SL(2,R))$, invariante à gauche.

Soit $f : SL(2,R) \rightarrow R$ continue à support compact. Définissons $\mu(f) = \int_{SL(2,R)} f(g) \cdot \varpi(g)$, μ est invariante à gauche, donc :

$$L_{g_1} \cdot \mu(f) = \mu(L_{g_1} f) = \mu(L_{g_1} f) = \int_{SL(2,R)} f(g_1 g) \cdot \varpi(g) = \int_{SL(2,R)} f(h) \cdot \varpi(g_1^{-1} h).$$

ϖ est invariante à gauche, on a : $\varpi(g_1^{-1} h) = \varpi(h)$. d'où $L_{g_1} \mu(f) = \mu(f)$.

Définissons un produit scalaire sur $T_{Id}SL(2,R) = sL(2,R)$ et considérons la structure Riemanienne sur $SL(2,R)$ induite par un produit scalaire biinvariant. La forme volume associée est la mesure de lesbegue sur $SL(2,R)$, notons la ν .

Considérons μ_1 une mesure sur $SL(2,R)$ invariante à gauche et soit $\frac{d\mu_1}{d\nu}$ la dérivée de radon Nycodim: $\frac{d\mu_1}{d\nu}(g) = f(g)$ et $f(g) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_1(B(g,r))}{\nu(B(g,r))}$ où $B(g,r)$ est la boule de centre g et de rayon r respectivement à la métrique citée. μ_1 et ν étant invariantes à gauche, on a f est constante, d'où ν et μ_1 sont égales, à constante près.

II.5.15 Remarque

On a exactement la même proposition pour les mesures invariantes à droite.

II.5.16. Proposition :

Sur $SO(2,R)$, il existe une unique mesure de probabilité non nulle invariante à gauche. Cette mesure est appelée mesure de Haar et elle est invariante à droite.

preuve.

En utilisant exactement les techniques de la proposition II.5.14, on démontre l'existence d'une mesure invariante à gauche sur $SO(2,R)$ et qu'à scalaire près, ces mesures sont uniques. Imposer à μ d'être une mesure de probabilité veut dire $\mu(SO(2,R)) = 1$.

Soit μ une mesure invariante à gauche; $SO(2,R)$ étant compact, on a : $\mu(SO(2,R)) < \infty$.

En posant $\nu = \frac{\mu}{\mu(\text{SO}(2, \mathbb{R}))}$ on a ν est de probabilité et invariante à gauche. Si ν_1 est une autre mesure de probabilité invariante à gauche: $\nu_1 = \nu$ (en effet II.5.14) $\Rightarrow \nu_1 = \rho\nu$ avec $\rho \in \mathbb{R}^+$ or $1 = \nu_1(\text{SO}(2, \mathbb{R})) = \rho\nu(\text{SO}(2, \mathbb{R})) = \rho \Rightarrow \rho = 1$.

Notons cette mesure de Haar ν , et montrons qu'elle est invariante à droite. Posons :

$\mu(A) = \nu(R_{g^{-1}}A)$ pour toute partie A mesurable de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$. On a :

$$L_{g_1^{-1}}\mu(A) = \mu(L_{g_1^{-1}}A) = \nu(R_{g_1^{-1}} \circ L_{g_1^{-1}}(A)) = \nu(L_{g_1^{-1}} \circ R_{g_1^{-1}}(A))$$

ν étant invariante à gauche, on en déduit que : $\nu(L_{g_1^{-1}} \circ R_{g_1^{-1}}(A)) = \nu(R_{g_1^{-1}}(A))$. d'où $L_{g_1^{-1}}\mu(A) = \nu(R_{g_1^{-1}}(A))$. Ceci démontre que μ est invariante à gauche; de plus, μ est une mesure de probabilité, on a donc : $\mu = \nu$ par unicité de la mesure de Haar et donc :

$$\forall (g \in G), \forall (A \text{ mesurable de } G = \text{PsL}(2, \mathbb{R})) \text{ on a : } \mu(A) = \nu(A) = \nu(R_{g^{-1}}A).$$

II.5.17. Corollaire :

La mesure de lesbegue de $\text{SO}(2, \mathbb{R})$ est égale à $d\theta$ où $d\theta$ est la mesure de lesbegue de S^1 :

Preuve :

$S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est homéomorphe à $\text{SO}(2, \mathbb{R})$.

$S^1 \xrightarrow{\varphi} \text{SO}(2, \mathbb{R}), \quad \phi \text{ homéomorphisme}$

$$\theta \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

$(\phi^{-1})^*(d\theta)$ est une mesure invariante à gauche et à droite sur $\text{SO}(2, \mathbb{R})$. Par unicité, cette mesure $(\phi^{-1})^*(d\theta)$ est la mesure de lesbegue.

En se basant sur II.2.1, on a démontré que: $\text{SL}(2, \mathbb{R}) \xrightarrow{\varphi} \text{N.A. } \text{SO}(2, \mathbb{R})$ est un

homéomorphisme avec: $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{t \in \mathbb{R}}, A = \left\{ \begin{pmatrix} Y^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & Y^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \right\}_{Y \in \mathbb{R}^+}$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & Y^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Cette décomposition est appelée décomposition d'Iwasawa de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$.

Proposition II.5.18.

$$dg = \frac{dx \cdot dy \cdot d\theta}{y^2} \text{ est la mesure de lesbegue sur } SL(2, \mathbb{R}).$$

En utilisant les relations du corollaire II.2.20, on démontre que dg est biinvariante (invariante à gauche et à droite). Soit v la mesure de lesbegue sur SL(2,R), on a :

$$v \text{ et } dg \text{ étant invariantes à gauche } \frac{d(dg)}{dv} = \rho_1(g). \quad \text{Proposition (II.5.14)}$$

$$v \text{ et } dg \text{ étant invariantes à droite } \frac{d(dg)}{dv} = \rho_1(g). \quad \text{Proposition (II.5.14)}$$

avec ρ_1 une fonction invariante à gauche et à droite.

En théorie de représentation de groupes de lie [Kiri], ρ_1 est ce qu'on appelle un caractère modulaire. Or, SL(2,R) est unimodulaire [Kiri], d'où $\rho_1=1$, ce qui démontre la proposition.

La mesure dg étant biinvariante par passage au quotient par Γ , on a une mesure μ sur $\Gamma \backslash \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ invariante à droite. S étant d'aire finie, on a : $\mu(\Gamma \backslash \text{PSL}(2, \mathbb{R})) < \infty$.

II.5.19. Définition :

Soit (X, μ) un espace mesurable, μ mesure de probabilité, et soit G un groupe topologique agissant mesurablement sur (X, μ) , et supposons μ G invariante.

On dira que G agit ergodiquement sur (X, μ) si et seulement si il n'existe pas de partition de X en sous ensembles mesurables G invariants de mesure strictement positive.

Exemples :

1) $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; $d\theta$ la mesure de lesbegue, considérons $\alpha \notin \mathbb{Q}$. et soit $\rho_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$

$$[t] \rightarrow [t+\alpha].$$

$\langle \rho_\alpha \rangle$ agit ergodiquement sur $(S^1, d\theta)$.

2) $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, μ la mesure de lesbegue et soit : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$.

$$f_A : T^2 \rightarrow T^2$$

$$[(x,y)] \rightarrow [A(x,y)] = f_A[(x,y)]$$

f_A agit ergodiquement sur (T^2, μ) .

II.5.20. Proposition :

Soit (X, μ) un espace de probabilité. On a équivalence entre :

- 1) G agit ergodiquement sur (X, μ) .
- 2) $f \in L^2(X, \mu)$; f G invariante, alors f est constante presque partout.

Preuve :

2 \Rightarrow 1.

Considérons $A \subset X$; A G invariant et A mesurable. Notons χ_A la fonction caractéristique de A .

χ_A est un élément de $L^2(X, \mu)$; G invariant, ce qui donne que χ_A est constant presque partout, d'où :

soit : $\forall (x \in X); \chi_A(x) = 1$ ou $\forall (x \in X); \chi_A(x) = 0$.

On en déduit que: $\mu(A) = 1$ ou $\mu(A) = 0$.

Si $X = A_1 \cup A_2$ avec A_1, A_2 mesurables, G invariants et $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. $\mu(A_1) = 0$ ou $\mu(A_2) = 0$. D'où $2 \Rightarrow 1$.

1 \Rightarrow 2

Soit $f \in L^2(X, \mu)$, f G invariante, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ considérons $A_\varepsilon = \{x \in X \text{ tel que } : f(x) = \varepsilon\}$.

A_ε sont G invariants et mesurables et $X = \dot{\cup} A_\varepsilon$. ($\dot{\cup}$: union disjointe)

G agit ergodiquement sur $(X, \mu) \Rightarrow \exists \varepsilon_0$ tel que : $\mu(A_{\varepsilon_0}) = 1$

Ce qui démontre que : $\forall x \in X, f(x) = \varepsilon_0$, d'où f est presque partout constante.

II.5.21. Proposition :

Soit X un espace topologique, équipé d'une mesure de probabilité μ dans la classe de la mesure de Lebesgue et soit G un groupe agissant continument sur X .

G agit ergodiquement sur $(X, \mu) \Rightarrow \exists (x \in X)$ tq : $\overline{Gx} = X$.

Preuve :

Considérons toutes les orbites disjointes sous l'action de G , on a : $X = \dot{\bigcup}_{x \in X} Gx$.

Gx est un ensemble mesurable G invariant, G agit ergodiquement sur (X, μ) ; on a :

$\exists (x \in X)$ tq $\mu(Gx) = 1$. Si on supposait que cette orbite n'était pas dense, on a :

$\exists (y \in X) \exists (\varepsilon > 0). B(y, \varepsilon) \cap Gx = \emptyset$ (μ dans la classe de la mesure de Lebesgue).

or, $\mu_B(y, \varepsilon) > 0$ d'où $\mu(Gx) \neq 1$; ce qui'il fallait demontrer.

II.5.22. Théorème :

S étant une surface hyperbolique, complète, connexe, d'aire finie. Presque toute orbite du flot géodesique du fibré unitaire tangent T^1S est dense.

Preuve :

S étant hyperbolique, complète, d'aire finie, on a : $T^1S = \Gamma \backslash \text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Le flot géodésique s'interprète comme une action du groupe à un paramètre

$\left\{ \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix} \right\}_{s \in \mathbb{R}}$ sur $\Gamma \backslash \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. μ étant la mesure de Haar normalisée sur $\Gamma \backslash \text{PSL}(2, \mathbb{R})$

et $\left\{ \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix} \right\}_{s \in \mathbb{R}}$ agissant mesurablement sur $\Gamma \backslash \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Il suffit de démontrer que

$\left\{ \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix} \right\}_{s \in \mathbb{R}}$ agit ergodiquement sur $\Gamma \backslash \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. pour affirmer l'existence d'orbite

dense (II.5.21)

Soit $f \in L^2(\Gamma \backslash \text{PSL}(2, \mathbb{R}), \mu)$; f invariante sous l'action du flot géodésique. On a :

$$\int f(\Gamma g) f\left(\Gamma g \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) d\mu = \int f\left(\Gamma g \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix}\right) f\left(\Gamma g \begin{pmatrix} e^{-\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{s}{2}} \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d\mu$$

Les relations du corollaire (II.2.20) donnent :

$$\int f\left(\Gamma g \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix}\right) f\left(\Gamma g \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d\mu = \int f\left(\Gamma g \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix}\right) f\left(\Gamma g \begin{pmatrix} 1 & te^{-s} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix} d\mu$$

l'invariance de f donne que :

$$\int f(\Gamma g) f\left(\Gamma g \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) d\mu = \int f\left(\Gamma g \begin{pmatrix} 1 & te^{-s} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) d\mu$$

pour $s \rightarrow +\infty$, on a : $\int f(\Gamma g) f\left(\Gamma g \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) d\mu = \int f^2(\Gamma g) d\mu$. En utilisant l'inégalité de

Cauchy Schwartz, on a : $f\left(\Gamma g \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = f(\Gamma g)$ presque partout.

Il suffit de remarquer que la relation suivante est vraie :

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ te^{-s} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix} \text{ pour démontrer que :}$$

$$f(\Gamma g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}) = f(\Gamma g) \text{ presque partout.}$$

On a: $SL(2, \mathbb{R})$ est engendré par $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \right\}_{t, t' \in \mathbb{R}^2}$ d'où :

f est $SL(2, \mathbb{R})$ invariante $\Rightarrow f(\Gamma g) = f(\Gamma e)$ PP partout $\Rightarrow f$ est constante PP.

En utilisant (II.5.20), on a l'ergodicité, c.q.f.d.

II.5.23. Théorème :

S étant une surface hyperbolique, complète, connexe, d'aire finie. Presque toute orbite du flot horocyclique positif est dense.

Preuve :

Le flot horocyclique positif s'interprétant comme l'action du groupe à 1 paramètre $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{t \in \mathbb{R}}$ sur $(\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})) \mu$, il suffit donc de montrer qu'il agit ergodiquement pour avoir le résultat.

Soit $f \in L^2(\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R}), \mu)$; f invariante sous l'action de $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Et soit $\Phi : (SL(2, \mathbb{R})) \rightarrow \mathbb{R}$

$$g \rightarrow \Phi(g) = \int f(\Gamma g_1 g) f(\Gamma g_1) d\mu$$

(Remarque qu'on peut considérer Γ dans $SL(2, \mathbb{R})$ et ce, quitte à prendre $\Gamma = \Gamma \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

$$\text{on a : } \Phi(g) = \Phi\left(g \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g\right).$$

$$\text{En effet : } \Phi\left(g \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \int f(\Gamma g_1) f(\Gamma g_1 g \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) d\mu$$

f étant invariante sous l'action de $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $f(\Gamma g_1 g \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = f(\Gamma g_1 g)$. d'où :

$$\Phi\left(g \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \Phi(g).$$

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) = \int f(\Gamma g_1) f\left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) d\mu$$

$$f(\Gamma g_1) = \int f\left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) d\mu \quad (f \text{ invariante}), \text{d'où :}$$

$$\int f(\Gamma g_1) f\left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) d\mu = \int f\left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) f\left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) d\mu \quad \text{et donc}$$

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) = \Phi(g).$$

Φ est continue comme composé d'une forme linéaire continue sur L^2 et d'une application continue sur $SL(2, \mathbb{R})$.

Nous allons montrer que Φ est invariante par action à droite de $\left\{ \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix} \right\}_{s \in \mathbb{R}}$

Φ étant continue sur $SL(2, \mathbb{R})$, et invariante par action à gauche et à droite de $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{t \in \mathbb{R}}$, Φ peut s'interpréter comme fonction continue sur $SL(2, \mathbb{R})/H$ invariante sous l'action de H à gauche.

On a $SL(2, \mathbb{R})$ agissant linéairement sur \mathbb{R}^2 , H étant le stabilisateur de $(1, 0)$ pour cette action, on a : $SL(2, \mathbb{R})/H = SL(2, \mathbb{R}) \cdot (1, 0) = \mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$.

L'action à gauche de H sur $SL(2, \mathbb{R})/H = \mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$ étant l'action linéaire, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ty \\ y \end{pmatrix}.$$

Φ étant une fonction continue sur $SL(2, \mathbb{R})/H$, invariante sous l'action à gauche de H , on a : $\Phi(x, y) = \Phi(x + ty, y) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

d'où Φ est une fonction en la variable y .

(en effet si $y \neq 0$, on a pour $t = -\frac{x}{y}$, $\Phi(x, y) = \Phi(0, y) \quad \forall x \in \mathbb{R}$).

Ce qui démontre que Φ est une fonction en y ; par continuité de Φ , on a l'affirmation pour $y = 0$.

Ce qui démontre que Φ est constante sur $\{(x, 0)\}_{x \in \mathbb{R}}$ et donc sur

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix} \cdot (1, 0) \right\}_{s \in \mathbb{R}}$$

d'où Φ est constante sous l'action de $\left\{ \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix} \right\}_{s \in \mathbb{R}}$; on en déduit que :

$$\Phi(g) = \Phi \left| \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix} \right| \quad \forall (g \in \text{SL}(2, \mathbb{R}))$$

$$\text{d'où: } \int f(\Gamma g_1) \cdot f(\Gamma g_1 g) = \int f(\Gamma g_1) \cdot f(\Gamma g_1 g) \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix}$$

$$\text{Pour } g = \text{Id}, \text{ on a } \int f^2(\Gamma g_1) d\mu = \int f(\Gamma g_1) \cdot f(\Gamma g_1) \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix} d\mu$$

On en déduit que :

$$f(\Gamma g_1) = f(\Gamma g_1) \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{s}{2}} \end{pmatrix} \quad \text{Presque partout.}$$

En utilisant II.5.22, on a f est constante et de ce fait, on a ergodicité.

On termine ce paragraphe par un tableau comparatif, S étant une surface hyperbolique complète, connexe d'aire finie.

	flot géodésique du fibré unitaire tangent à S	flot horocyclique du fibré
Orbites périodiques	Il en existe. leur union est un ensemble dense [Bow]	Il en existe. pas de particularité
Orbites denses	Il en existe. l'ensemble des orbites denses est de mesure pleine	Il en existe. et cet ensemble est de mesure pleine
Orbites particulières	Il existe des orbites dont l'adhérence est bien compliquée [Mor]	De telles orbites sont inexistantes.

Les orbites du flot géodésique sont dynamiquement très compliquées, par contre, la dynamique du flot horocyclique est complètement décrite par :

II.5.24. Théorème de Hedlund :

S étant une surface complète d'aire finie hyperbolique, connexe.

Une orbite du flot horocyclique du fibré unitaire tangent T^1S est soit périodique, soit dense.

Si on suppose S compacte, toute orbite du flot horocyclique est dense.

II.6 Théorème de Hedlund : Preuve originale

Sauf mention du contraire, S est une surface hyperbolique, complète connexe, d'aire finie et Γ son groupe de Poincaré.

Dans ce qui suit, nous allons exposer la preuve originale de Hedlund parue en 1936 sous le titre de "Fuchsian groups and transitive horocycles".

S s'identifie naturellement à Γ/D , où :

$$D = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\} \text{ équipé de la métrique } \frac{4(dz)^2}{(1-|z|^2)^2} = (ds)^2$$

Γ un sous groupe discret de $SU(1,1)$ agissant librement et proprement sur D . Cette action se prolonge par continuité à : $\partial D = S^1 = \{z \in \mathbb{C} / |z|=1\}$.

On notera O le point de D tel que : $|O| = 0$

II.6.1 Définition

z_1 et z_2 deux points de S^1 sont dits Γ équivalents si et seulement si il existe $\alpha \in \Gamma$ tel que : $\alpha z_1 = z_2$

On notera $[z_1] = \{y \in S^1, y \Gamma \text{ équivalent à } z_1\}$

Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow D$, h horocycle.

II.6.2 Définition (Hedlund)

h est dit Γ transitif si et seulement si : $H_\Gamma = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \alpha(h(t); \dot{h}(t))$ est dense dans $T^1 D$.

II.6.3 Proposition

Le flot horocyclique du fibré unitaire tangent T^1S admet des orbites denses si et seulement si il existe des horocycles : h, sur D , Γ transitifs.

Preuve

Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow S$ un horocycle et (D, S, p) le triplet de revêtement universel. Prenons \tilde{h} un relèvement de h à D . Donc :

$\tilde{h} : \mathbb{R} \rightarrow D$ est une courbe différentiable .

De plus, on sait que p est une isométrie locale . (II.1.9) d'ou :

$$\nabla_{\dot{\tilde{h}}(t)}(\ddot{\tilde{h}}(t)) = J_{\dot{\tilde{h}}(t)}(\ddot{h}(t)).$$

∇ étant la connexion de Levi cevita associée à ds et J la structure complexe standard sur D . d'où $\tilde{h} : \mathbb{R} \rightarrow D$ est un horocycle de D .

Si \tilde{h}_1 est un autre relèvement de h , on a : $\exists(\alpha \in \Gamma)$ tel que : $\alpha(\text{Im}\tilde{h}) = \text{Im}\tilde{h}_1$

Considérons : \tilde{H}_Γ et soit $\overline{\tilde{H}_\Gamma}$ son adhérence dans $T^1 D$:

On a d'une manière évidente que : $P(\overline{\tilde{H}_\Gamma}) = \overline{\{(h(t); \dot{h}(t))\}_{t \in \mathbb{R}}}$

On en déduit que : si $\{(h(t); \dot{h}(t))\}$ est une orbite dense dans $T^1 S$, \tilde{h} est Γ transitif et vice versa.

II.6.4 Corollaire

Γ étant le groupe de Poincaré de S , il existe des horocycles Γ transitifs sur D .

Preuve

L'existence d'orbites denses du flot horocyclique du fibré unitaire $T^1 S$ étant établie en (II.5.23), On a existence d'horocycles Γ transitifs en appliquant II.6.3. On rappelle que si $h : \mathbb{R} \rightarrow D$ est un horocycle, $\text{Im}h$ est un cercle inscrit dans D et tangent à ∂D en un point z . On notera ce point:

$$z = h(\infty) .$$

II.6.5 Définition

$z \in S^1$ est h transitif si et si seulement si il existe $h : \mathbb{R} \rightarrow D$, h horocycle Γ transitif tel que $z = h(\infty)$

II.6.6 Théorème (Hed 1)

z étant un point de ∂D h transitif, tout h de $\mathbb{R} \rightarrow D$ tel que : $z = h(\infty)$ est Γ transitif.

Preuve

z étant un point h transitif; soit $h_1 : \mathbb{R} \rightarrow D$ tel que : h_1 soit Γ transitif et $h_1(\infty) = z$. Montrons que h est Γ transitif.

Tout d'abord, considérons $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow D$ une géodésique perpendiculaire à h_1 en z_1 . En utilisant II.5.2, on a:

$$\gamma(+\infty) = z \text{ et } \gamma \text{ est orthogonal à } h \text{ en } z_2. \text{ Soit } d_h(z_1, z_2)$$

Affirmation

$d_h(z_1, z_2)$ ne dépend pas du choix de γ .

En effet :

Soit $\delta : \mathbb{R} \rightarrow D$ une géodésique positivement asymptotique à γ . Notons :

$$y_1 = \text{Im} \delta \cap \text{Im} h_1 \text{ et } y_2 = \text{Im} \delta \cap \text{Im} h.$$

En utilisant le fait que $SU(1,1)$ agit transitivement sur $T^1 D$, On peut supposer $z = (1,0) = h(\infty)$ et $y_1 = 0$. On a :

$$\text{Im} h_1 = \left\{ z \in D \mid \left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \right\} \text{ et } \text{Im} h_2 = \{ z \in D \mid |z - r| = r \} \quad \begin{array}{l} r \text{ étant positif.} \\ r < 1/2 \end{array}$$

$$d_h(y_1, y_2) = d_h(0, y_2) = 2 \operatorname{argth} |y_2| \text{ or : } |y_2| = (1 - 2r). \text{ d'ou :}$$

$$d_h(y_1, y_2) = 2 \operatorname{arth} (1 - 2r).$$

Les mêmes raisonnements et résultats sont valables pour toute géodésique positivement asymptotique à δ , donc vraie pour γ .

Affirmation 2

h est Γ transitif.

Soit $d_{T^1 D}$ la métrique produit $d_h \times d$ où d est la métrique induite par \mathbb{R}^2 sur S^1 . Soit $\vartheta \in T^1 D$, tel que : $((h(0); \dot{h}(0))) = \vartheta$ et soit $y = h(\infty)$.

Notons γ_1 l'unique géodésique tel que : $\gamma_1(0) = h(0)$, $\dot{\gamma}_1(0)$ est orthogonal à ϑ et tel que $\gamma_1(+\infty) = y$. Paramétrons-la par longueur d'arc. Notons ϑ_1

l'élément de T^1D tel que : $\vartheta_1 = \frac{D\vartheta}{dt} /_{t=2\operatorname{arcth}(1-2r)}$ $X = \frac{D\vartheta}{dt}$ désignant l'unique champ parallèle le long de γ_1 tel que : $X(0) = \vartheta_1$.

On note le transport parallèle le long de γ_1 de $\gamma_1(0)$ jusqu'à $\gamma_1(t)$; P_t .

h_1 étant Γ transitif, on a :

$$\forall (\varepsilon > 0) ; \exists (\alpha \in \Gamma) ; \exists (t_0 \in \mathbb{R}) \text{ tel que } d_{T^1D}(\vartheta, \alpha(h_1(t_0); \dot{h}_1(t_0))) \leq \varepsilon$$

Le transport $P_{t=2\operatorname{arcth}(1-2r)}$ étant une isométrie, on a :

$$d_{T^1D}(P_t^{-1}(\vartheta_1) ; P_t^{-1}\alpha((h_1(t_0); \dot{h}_1(t_0))) < \varepsilon$$

$$\text{Or : } d_{T^1D}[P_t^{-1}(\vartheta_1) ; P_t^{-1}\alpha((h_1(t_0); \dot{h}_1(t_0)))] = d_{T^1D}(\vartheta, \alpha(h(t_0); \dot{h}(t_0))) < \varepsilon$$

On a démontré que : $\forall (\vartheta \in T^1D) ; \forall (\varepsilon > 0) , \exists (\alpha \in \Gamma) / d_{T^1D}(\vartheta, \alpha(h(t_0); \dot{h}(t_0))) < \varepsilon$

d'où h est Γ transitif.

II.6.7 Remarques

1) z h transitif étant un fait indépendant du choix de l'horocycle, on dira que z est Γ transitif.

2) si z est Γ transitif, on a tout y dans $[z]$ et Γ transitif.

Notons $S_\Gamma^1 = \{z \in S^1, \text{ tel que } z \text{ soit } \Gamma \text{ transitif}\}$ et soit S_Γ^1 / Γ le quotient de S_Γ^1 par Γ .

II.6.8 Proposition

L'ensemble des orbites denses du flot horocyclique du fibré unitaire T^1S est bijectivement équivalent à S_Γ^1 / Γ .

Preuve

$z \in S_\Gamma^1 / \Gamma$. Considérons $\tilde{h} : \mathbb{R} \rightarrow D$ tel que $\tilde{h}(\infty) = z$, \tilde{h} horocycle, on a :

$$\overline{\tilde{H}_\Gamma} = T^1 D [z \text{ étant } h \text{ transitif}] \quad p(\tilde{H}_\Gamma) = T^1 D = \text{orbite du flot horocyclique (II.6.3)}$$

Notons $f : [z] \rightarrow f([z]) = p(\tilde{H}_\Gamma)$

Soit $(h(t); \dot{h}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ une orbite horocyclique dense sur T^1S et soit \tilde{h} un relèvement de h , notons $y = \tilde{h}(\infty)$. On définit : $f^{-1} : \{(h(t), \dot{h}(t))\}_{t \in \mathbb{R}} \rightarrow y$

Le travail de Hedlund consiste à détecter les points Γ transitifs et

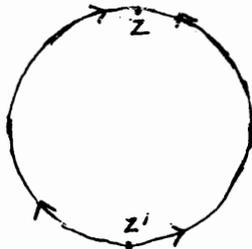
à démontrer que dans le cas où S est compacte, tout point de ∂D est Γ transitif alors que si S est d'aire finie, non compacte, il existe un nombre fini de points dans S^1/Γ non Γ transitifs. La partie qui suit détaille complètement cette approche.

II.6.9 Théorème (Hed 2)

Soit α un élément hyperbolique de Γ , z, z' ses points fixes, z et z' sont Γ transitifs.

Preuve

L'action de α sur S^1 est complètement décrite : z étant un pôle attracteur (répulsif) et z' étant un pôle répulsif (attracteur), On a :



$\forall (z_1 \notin \text{fix } \alpha) ; \forall (U \in \mathcal{O}_{S^1}(z)) ; \exists (n_0 \in \mathbb{N} [n_0 \in Z] \text{ cas } z \text{ répulsif})$ tel que :

Choisissons z_1 Γ transitif. (un tel choix est possible grâce à II.6.4). Notons A_α l'axe hyperbolique associé à α et $h : \mathbb{R} \rightarrow D$ un horocycle, tel que $h(\infty) = z_1$.

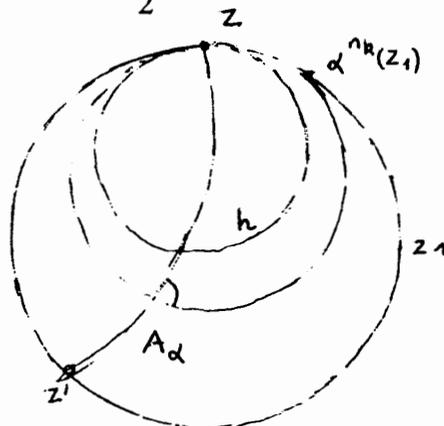
Quitte à rétrécir le voisinage U de z , on construit une suite :

$n_{k_{i \in \mathbb{N}}} \subset \mathbb{N} [n_{k_{i \in \mathbb{N}}} \subset Z \text{ cas } z \text{ répulsif}]$, telle que :

i) $\exists (r > 0)$ tel que : $r_k = \text{rayon euclidien } \text{Im}(\alpha^{n_k} h) > r \forall k$

ii) $\text{Im}(\alpha^{n_k} h) \cap A_\alpha \neq \emptyset$

iii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \angle(\text{Im}(\alpha^{n_k} h) \cap A_\alpha) = \frac{\pi}{2}$



Les conditions i, ii, iii $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Im}(\alpha^{n_k} h) = \text{Im} h_1$ où $h_1 : \mathbb{R} \rightarrow D$ tel que $h_1(\infty) = z$.

On en déduit que h_1 est Γ transitif comme limite de $(\alpha^{n_1} h)_{n_1}$ où $\alpha^{n_1} h$ est Γ transitif.

II.6.10 Théorème (Hed 3)

$z \in S^1 / \Gamma$ tq $\exists (h: \mathbb{R} \rightarrow D, h(\infty) \neq 0) \exists (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Gamma$ et vérifiant $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1, r_n$ rayon euclidien de $\text{im}(\alpha_n(h))$.

Un tel z est Γ transitif.

Preuve

Notons $z_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n(z))$ (S^1 étant compact, z_1 existe)

Soit $\beta \in \Gamma / \beta$ hyperbolique et $z \notin S^1 - \text{fix } \beta$ [voir [Bow] pour l'existence de β] et notons A_β l'axe hyperbolique associé à β .

Affirmation

Pour x de A_β , la fonction $d_{\text{hyp}}(x; \beta x)$ est constante et donc indépendante du choix de x .

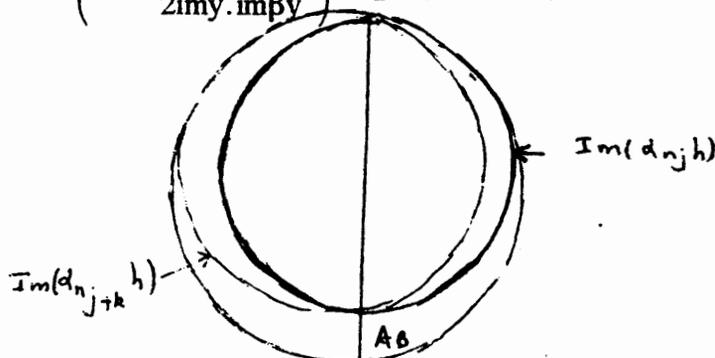
En effet, pour des raisons de calculs moins ardues, nous transposons le problème à $H^2 = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im} z > 0\}$.

Supposons $\text{Fix } \beta = \{0, +\infty\}$ ($\text{PsL}(2, \mathbb{R})$ est transitif sur $T^1 H^2$) alors : $\beta = \begin{pmatrix} e^{s_0/2} & 0 \\ 0 & e^{-s_0/2} \end{pmatrix}$ et

$$A_\beta = \{e^t \cdot i\}_{t \in \mathbb{R}}$$

Soit $y = e^t i$, on a :

$$d_h(y, \beta y) = \text{argch} \left(1 + \frac{|y - \beta y|^2}{2 \text{Im} y \cdot \text{Im} \beta y} \right), d_h(y, \beta y) = \text{argch}[che^{s_0}] = s_0$$



$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1 \Rightarrow \exists (\alpha_{n_i})_{n_i \in \mathbb{N}}$ sous suite de $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ /

$$i) \exists (\text{Im}(\alpha_{n_k} h) \cap A_\beta \neq \emptyset$$

$$ii) r_{n_k} > m \quad \forall n_k \quad m > 0$$

$$iii) \angle(\text{Im}(\alpha_{n_k} h), A_\beta) \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}$$

$$D'où: (\text{Im}(\alpha_{n_k} h) \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} \text{Im } h_1$$

$h_1: \mathbb{R} \rightarrow D$, horocycle et $h_1(\infty) \in \text{fix } \beta$. II.6.9 implique h_1 est Γ transitif.

II.6.11 Théorème (Hed 4)

Soit :

$(z \in S^1) / [\exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite réelle positive divergente / $\exists (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Gamma / (d_h(O, \alpha_n(\gamma(t_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ soit borné], γ étant la géodésique liant O et z . Alors, z est Γ transitif.

Preuve

Notons $h: \mathbb{R} \rightarrow D$ l'horocycle tel que : $\text{Im } h = \left\{ y \in D / \left| y - \frac{1}{2}z \right| = \frac{1}{2} \right\}$

Affirmation

$\forall (\varepsilon \geq M) \exists (n_0 \in \mathbb{N}) / d_{\text{hyp}}(O, \text{Im}(\alpha_n h)) > \varepsilon - M, \sup_{n \in \mathbb{N}} d_h(O, \alpha_n(\gamma(t_n))) = M$

En effet : $d_{\text{hyp}}(\alpha_n(\gamma(t_n)), \text{Im}(\alpha_n h)) = d_{\text{hyp}}(\gamma(t_n), \text{Im } h)$ (α_n isométrie)

$$d_{\text{hyp}}(\alpha_n(\gamma(t_n)), \alpha_n h) \leq d_{\text{hyp}}(\alpha_n(\gamma(t_n)), O) + d_{\text{hyp}}(O, \text{Im}(\alpha_n h)) \quad (\text{ing triangulaire})$$

On a : $d_{\text{hyp}}(\alpha_n(\gamma(t_n)), O) \leq M$ et $d_{\text{hyp}}(\gamma(t_n), \text{Im } h) = d_{\text{hyp}}(\alpha_n(\gamma(t_n)), O)$

(Il suffit de transposer le pb à H^2 et de calculer).

D'où : $d_h(O, \alpha_n(\text{Im } h)) \geq d_{\text{hyp}}(\gamma(t_n), O) - M$

$(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une suite divergente ; $d_h(O, \gamma(t_n)) = t_n \rightarrow \infty$

$d_h(O, \alpha_n(\text{Im } h)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ affirme que le rayon r_n euclidien de $\alpha_n(\text{Im } h)$ tend

vers 1 quand $n \rightarrow \infty$.

On retrouve ainsi les hypothèses du théorème II.6.10, ce qui permet de

conclure que z est Γ transitif.

II.6.12. Théorème [Hed 5]

Toute orbite du flot horocyclique du fibré unitaire tangent à une surface hyperbolique, connexe, compacte sans bord, est dense; autrement dit, le flot horocyclique est minimal.

Preuve

Considérons $h : \mathbb{R} \rightarrow S$, h horocycle.

Soit $\tilde{h} : \mathbb{R} \rightarrow D$ un relèvement de h et notons $z = \tilde{h}(\infty)$

Affirmation

z est Γ transitif.

En effet :

Soit D_0 le polygone de Poincaré associé à Γ . En se basant sur II.4.10, on a : D_0 est compacte de diamètre D . Considérons $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow D$ la géodésique tq $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(\infty) = z$. Notons $y_n = \gamma(n)$, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$D = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} \alpha D_0 \quad (\text{II.4.7}).$$

On en déduit : $\forall (n \in \mathbb{N}) \exists (\alpha_n \in \Gamma / \alpha_n^{-1} y_n = \alpha_n^{-1}(\gamma(n)) \in D_0$ et $d_1(O, \alpha_n^{-1}(\gamma(n))) < D$.

z vérifie donc les hypothèses de II.6.11 ; donc, il est Γ transitif. z étant Γ transitif, par II.6.8, on a : $\overline{\{(h(t), \dot{h}(t))\}_{t \in \mathbb{R}}} = T^1 S$ d'où : h est une orbite dense du flot horocyclique.

II.6.13 Théorème [Hed 7]

Une orbite du flot horocyclique du fibré unitaire tangent à une surface S connexe, hyperbolique complète, d'aire finie est soit dense, soit périodique.

Preuve

Considérons $h : \mathbb{R} \rightarrow S$, h horocycle.

Soit $\tilde{h} : \mathbb{R} \rightarrow D$ un relèvement de h et notons $z = \tilde{h}(\infty)$, on a :

soit z est un point de :

i) $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} \alpha \{v_1, \dots, v_n\}$ où v_i est un sommet de D_0 le domaine de Poincaré et de S^1 et ce pour tout i .

ii) Complémentaire dans S^1 de $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} \alpha \{v_1, \dots, v_n\}$.

Dans le cas i), on a : $z = \alpha(v_k)$ avec $\alpha \in \Gamma$ et $v_k \in D_0$.

v_k étant un point fixe d'une transformation parabolique β . z est un point fixe de $\alpha\beta\alpha^{-1}$ qui est parabolique. $\Rightarrow \exists (t_0 \in \mathbb{R}^+) / \tilde{h}(t_0) = \alpha\beta\alpha^{-1}(\tilde{h}(0))$ et donc $h(t_0) = h(0)$, ce qui démontre que h est périodique.

Dans le cas ii) : Notons $A = S^1 - \bigcup_{\alpha \in \Gamma} \alpha \{v_1, \dots, v_n\}$, alors $z \in A$.

Affirmation

$\forall y \in A$, y est Γ transitif

Preuve

Considérons $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow D$ la géodésique tq : $\gamma(0) = O$ et $\gamma(\infty) = y$.

$\exists (t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ divergente et vérifiant :

$\forall k \in \mathbb{N} \exists i \in \{1, \dots, n\}$, $\exists (\alpha \in \Gamma) / \gamma \cap \alpha(\text{Im}h_i) = \gamma(t_k)$

$h_i : \mathbb{R} \rightarrow D$ horocycle tq $h_i(\infty) = v_i$ et r_i le rayon euclidien de $\text{Im}h_i$ est presque égal à 1.

Il suffit de remarquer que :

$\bigcup_{\alpha \in \Gamma} \left(\bigcup_{i=1}^n \alpha \{ \text{Im}h_i \} \right) = \overset{\circ}{D}$. comme : $\gamma(t_k) \in \alpha(\text{Im}h_i)$ on a : $\alpha\gamma(t_k) = \text{Im}h_i$

v_i étant un point fixe d'une transformation parabolique β_i , on a :

$\exists (n_i \in \mathbb{Z}) / d_h(\beta_i^{n_i} \cdot \alpha(\gamma(t_k)), O) < M_i$, M_i étant une constante positive ne dépendant que de h_i

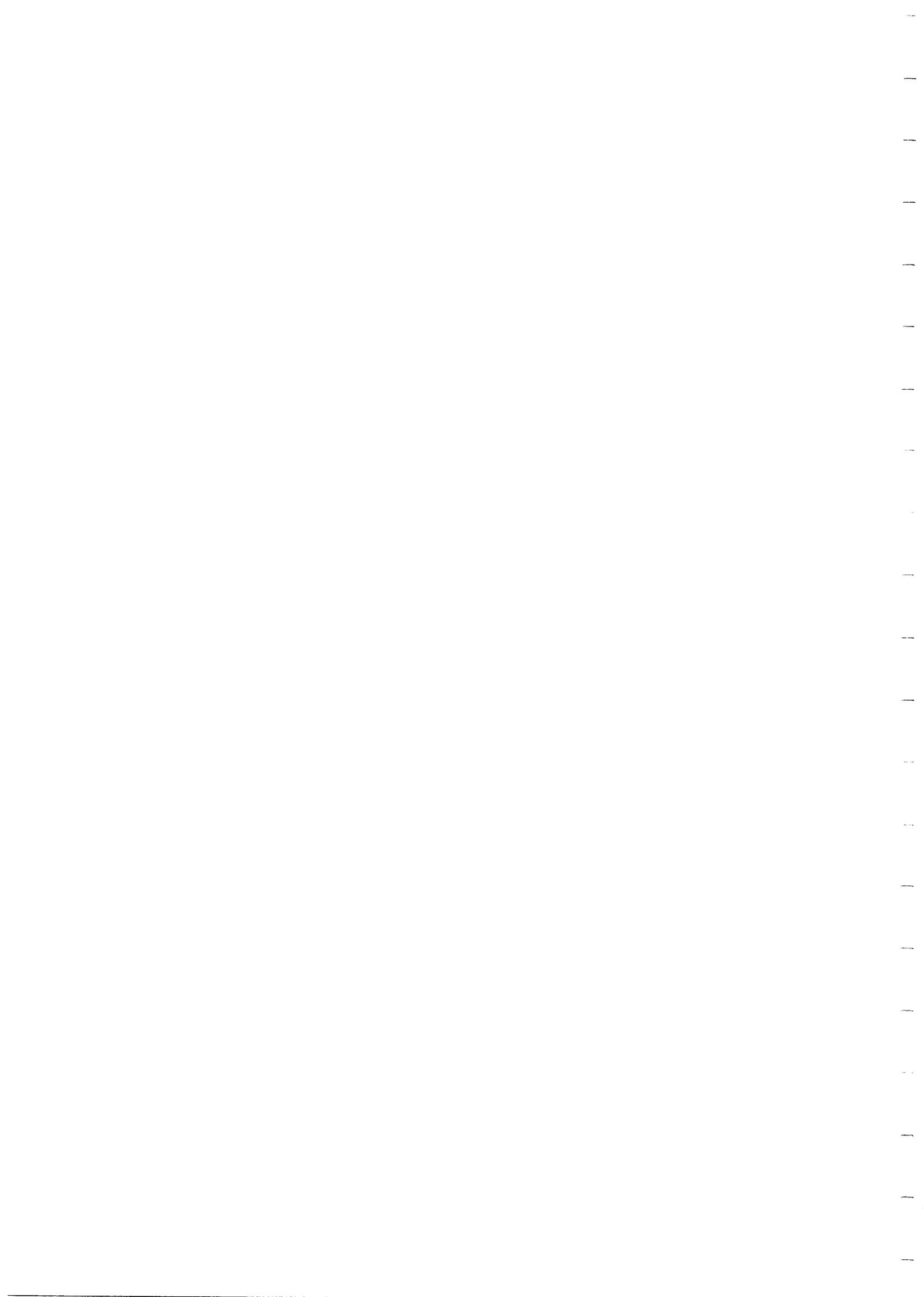
Posons $M = \sup_{1 \leq i \leq n} \{M_i\}$.

En rassemblant bout à bout nos affirmations, on a :

$y \in A \exists (t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ divergente / : $\exists (\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Gamma$ vérifiant $d_h(\alpha_k(\gamma(t_k)), O) < M$ et ce, pour tout k de \mathbb{N} .

γ étant la géodésique telle que $\gamma(0) = O$ et $\gamma(\infty) = y$, y vérifie ainsi les hypothèses de II.6.11, donc il est Γ transitif.

On en déduit que dans le cas où : $z \in A$, z est Γ transitif et donc : $\{h(t), \tilde{h}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ est dense dans T^1S . cqfd.



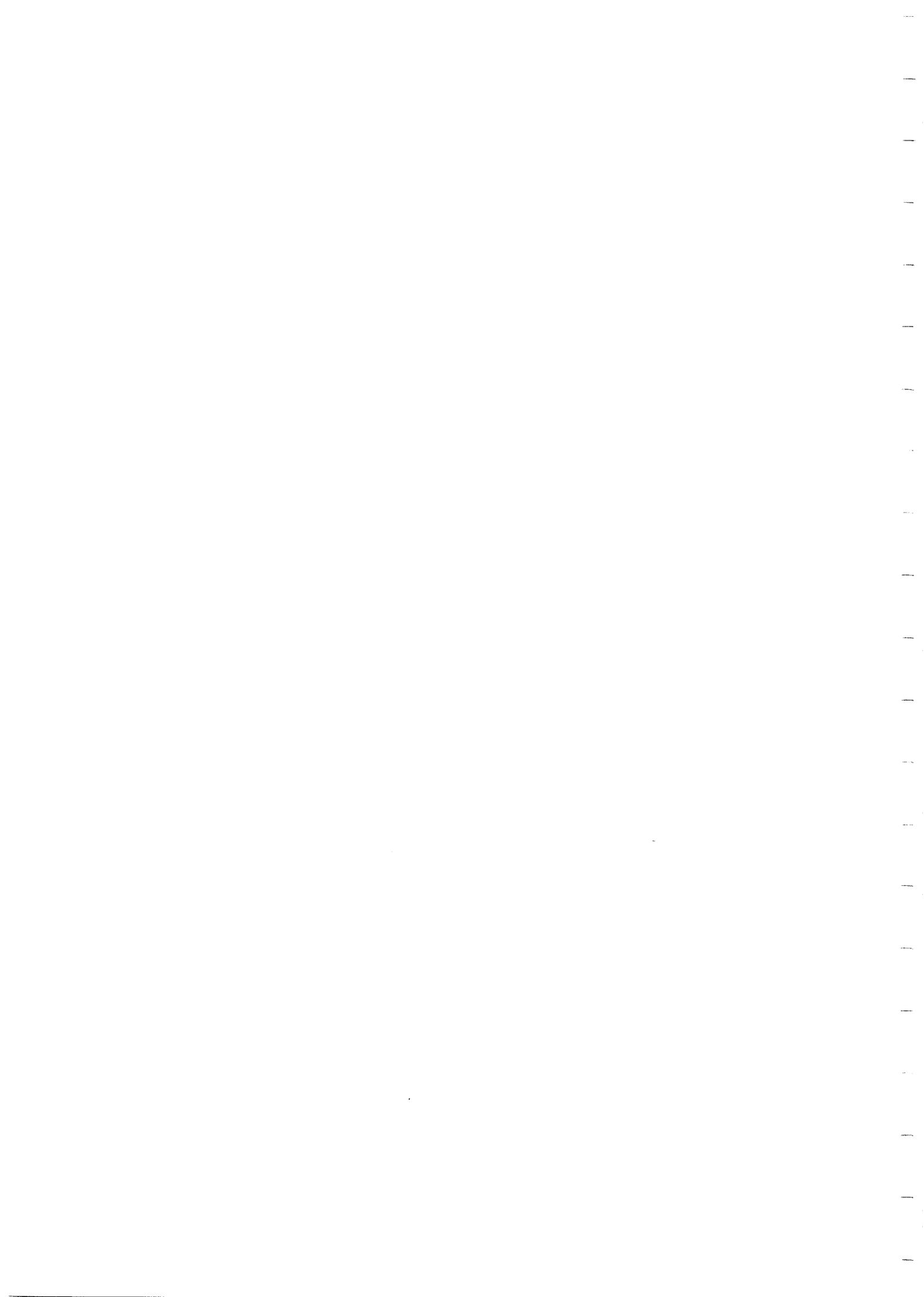
BIBLIOGRAPHIE

1. [Bear] Beardon - *The geometry of discrete groups* - Spriger. Verlag - 1983.
2. [Bow] Bowen - *Periodic orbits for hyperbolic flows*- Am. Journal of math.1972.
3. [Car] Cartan - *Fonctions analytiques à une variable*- Collection **Ĉ**. Methodes.
4. [Cheeg-Eb]: Cheeger-Ebin: - *Comparaison theorems in riemaniann geometry* - North Holland - Amsterdam.
5. [Hed] Hedlund - *Fushian groups and transitive horocycles*- Duke Math Journal. 2. 1936.
6. [Kiri] Kirilov - *Eléments de la théorie des représentations*- Edition Mir - 1974.
7. [Ma] Mañe - *Ergodic theory and differentiable systems*- Springer Verlag
8. [Mil] Milnor - *Topology from the differential point of view*- University Press of Virginia 1965.
9. [Mne - Tes] Mneimné - Testard - *Groupes de Lie Classiques*- Collection Methodes - Herman - 1986.
10. [Mor] Morse - *Reccurent geodesics one a surface of negative curvature*- Tran.American. Math Society. 22. 1921.



CHAPITRE III

**PREUVE EFFECTIVE DU THEOREME DE HEDLUND POUR
LES SURFACES COMPACTES A BORD, HYPERBOLIQUES
CONVEXES ET APPLICATIONS**



III.1 Preuve effective du théorème de Hedlund pour les surfaces hyperboliques , convexes, compactes à bord

S est une surface compacte sans bord, connexe hyperbolique; $B(\epsilon)$ une boule hyperbolique ouverte de rayon ϵ (choisi).

III.1.1 Lemme

Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow S$ un horocycle, alors : $\text{Im}h \cap B(\epsilon) \neq \emptyset$.

Preuve

$h : \mathbb{R} \rightarrow S$ un horocycle.

D'après (II.6.12), on a : $\overline{\{h(t); \dot{h}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}} = T^1S$

T^1S le fibré unitaire tangent à S étant un fibré en cercle de base S , on en déduit que :

$\forall (x \in T^1S) \exists (\epsilon > 0)$ tel que $\exists (t \in \mathbb{R})$ tel que : $(h(t); \dot{h}(t)) \in B(\epsilon) \times S^1$

S^1 désignant le cercle unitaire du plan complexe \mathbb{C} ,

$(h(t); \dot{h}(t)) \in B(\epsilon) \times S^1 \Rightarrow h(t) \in B(\epsilon)$

III.1.2 Lemme

Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow S$ un horocycle, on a : $\text{card}(\text{Im}h \cap B(\epsilon)) \geq 2$

Preuve

Par III.1.1 on sait que : $\text{card}(\text{Im}h \cap B(\epsilon)) \geq 1$

Supposons que $\text{card}(\text{Im}h \cap B(\epsilon)) = 1$ et soit $B(\epsilon/2)$ la boule concentrique avec $B(\epsilon)$, de rayon $\epsilon/2$

On a : $(\text{Im}h \cap B(\epsilon/2)) = \emptyset$, ce qui contredit (II.6.12).

Notons S' la surface hyperbolique $S - B(\epsilon)$.

Soit x un élément de T^1S' et $h^x : \mathbb{R} \rightarrow S$ l'horocycle sur S vérifiant : $(h(0); \dot{h}(0)) = x$.

Notons t_1 , le plus petit réel positif tel $h^X(t_1)$ appartienne à $B(\epsilon)$ et t_{-1} le plus grand réel négatif vérifiant $h^X(t_{-1})$ élément de $B(\epsilon)$.

III.1.3 Définition

$h^X [t_{-1} ; t_1] \rightarrow S'$ définit une courbe horocyclique et sa longueur $L(h^X)$ est égale à :

$$L(h^X) = \int_{t_{-1}}^{t_1} g^{1/2}(h^X(t); \dot{h}^X(t)) dt .$$

g étant la métrique induite par celle de S à S' .

Considérons la fonctionnelle suivante : $f : T^1 S \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$x \rightarrow f(x) = L(h^x)$$

III.1.4 Lemme

Il existe une constante C ne dépendant que de S , telle que : $\sup_{x \in T^1 S} f(x) \leq C$.

Preuve

Procédons par l'absurde. Supposons donc $\forall (n \in \mathbb{N}^*); \exists (x_n \in T^1 S) / L(h^{x_n}) = n$.

$T^1 S'$ étant compact, on a :

$$\exists (x_{n_k}) \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}} / x_{n_k} \rightarrow_{n_k \rightarrow \infty} x \text{ et } L(h^{x_{n_k}}) \rightarrow L(h^x)$$

On en déduit que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \chi_{B(\epsilon)}(h^x(t)) dt \rightarrow 0, \chi_{B(\epsilon)}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \chi_{B(\epsilon)}(h^x(t)) dt = \text{Vol } B(\epsilon) \text{ [Dani Smillie]}$$

D'où contradiction. On en déduit que : $\exists (C > 0)$ tel que : $\sup_{x \in T^1 S} f(x) \leq C$

III.1.5 Commentaire

Une preuve effective du théorème de Hedlund consisterait à donner une

estimation pour la borne supérieure pour la longueur des courbes horocycliques de la surface $S' = S - B(\epsilon)$.

En fait, une telle preuve démontre une version affaiblie du théorème de Hedlund, à savoir la densité sur la surface S au lieu de la densité sur T^1S .

Dans ce qui suit, nous allons donner une telle preuve pour un cas restreint de surfaces à bords, compactes, à savoir : les surfaces compactes, à bord, hyperboliques convexes.

III.1.6 Définition

Soit A une partie non vide de H^2

On dit que A est convexe si et seulement si quelque soit x et y deux points de A , il existe un segment géodésique $\gamma : [0, t] \rightarrow H^2$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(t) = y$.

Exemples

- 1) Une boule ouverte (fermée) hyperbolique est convexe.
- 2) Une courbe équidistante à une géodésique de H^2 n'est pas convexe.

III.1.7 Définition

Soit S une surface équipée d'une métrique g à courbure constante négative -1 .

On dira que (S, g) est convexe si et seulement si la propriété(*) est vérifiée.

(*) $\forall (x, y) \in S \times S, \exists (\gamma : [0, 1] \rightarrow S)$ (γ géodésique pour la métrique g , $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$).

III.1.8 Remarque

La convexité est une notion qui dépend du choix de la métrique.

En effet, si on équipe H^2 de la métrique de Poincaré, la courbe équidistante à une géodésique n'est pas convexe ; par contre, si H^2 est équipé de la métrique euclidienne induite de \mathbb{R}^2 , une courbe équidistante à une géodésique est convexe.

III.1.9 Définition

$(S, \partial S)$ étant une surface compacte à bord, convexe, équipée d'une métrique hyperbolique g , on définit le rayon intérieur $R(S, \partial S)$ comme étant :

$$R(S, \partial S) = \sup_{x \in (S, \partial S)} (\rho(x))$$

- i) $\rho(x)$ est le rayon de la plus grande boule immergée dans S de centre x .

ii) $(S, \partial S)$ désignant l'intérieur de $(S, \partial S)$.

Equipons $(S, \partial S)$ d'une métrique g , telle que $(S, \partial S)$ soit convexe et notons $C^h(S, \partial S)$ l'ensemble des courbes horocycliques sur $(S, \partial S)$.

On rappelle que si h est un élément de $C^h(S, \partial S)$; $h : [0, t_0] \rightarrow (S, \partial S)$;

$$L(h) = \int_0^{t_0} g^{1/2}(\dot{h}(t) ; \dot{h}(t)) dt ; \text{ désigne sa longueur.}$$

III.1.10 Théorème

Pour $(S, \partial S)$ compacte à bord, équipée d'une métrique g hyperbolique pour laquelle $(S, \partial S)$ est convexe, il existe une constante C ne dépendant que du rayon intérieur $R^{(S, \partial S)}$, telle que : $\sup_{h \in C^h(S, \partial S)} L(h) < C$

Preuve

Soit h un élément de $C^h(S, \partial S)$.

Supposons que $h : [0, T] \rightarrow (S, \partial S)$ est une paramétrisation telle que :

$$\forall (t \in [0, T]) ; g(\dot{h}(t) ; \dot{h}(t)) = 1$$

On a donc : $L(h) = T$.

Notons $p_0 = h(0)$ et $p_T = h(T)$.

$(S, \partial S)$ étant convexe, il existe $\gamma : [0, L(\gamma)] \rightarrow (S, \partial S)$ γ segment géodésique tel que :

$$\gamma(0) = p_0 \text{ et } \gamma(L(\gamma)) = p_T.$$

Considérons S' la surface délimitée par Imh et $Im\gamma$. S' en tant que partie de $(S, \partial S)$, équipée de la métrique induite par g , est une surface compacte à bord, hyperbolique convexe de rayon intérieur $R^{(S, \partial S')}$ plus petit que $R^{(S, \partial S)}$.

Calculons $R^{(S, \partial S')}$.

Pour cela, passons au revêtement universel, H^2 , et notons \tilde{h} un relèvement de h , $\tilde{p}_0 = \tilde{h}(0)$, $\tilde{p}_T = \tilde{h}(T)$ et soit $\tilde{\gamma}$ le relèvement associé à γ .

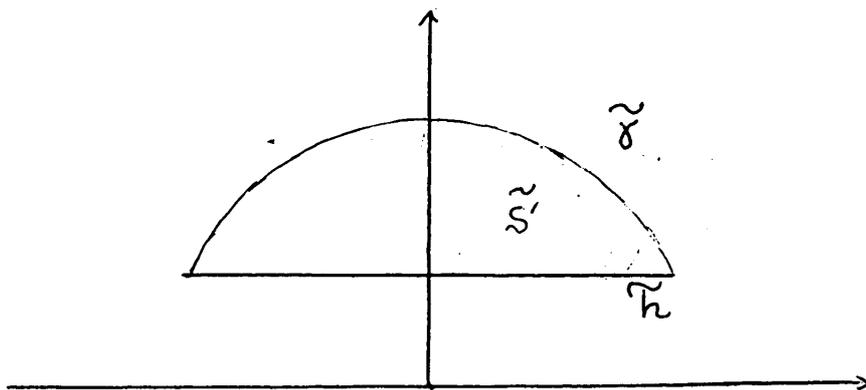
A isométries près (II.2.1), on peut supposer que :

$$\tilde{h}: \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right] \rightarrow \mathbb{H}^2$$

$$t \rightarrow \tilde{h}(t) = t + i$$

$$\tilde{\gamma}: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{H}^2$$

$$t \rightarrow \tilde{\gamma}(t) = \sqrt{\frac{T^2}{4} + 1} \cdot e^{it}$$



$$2R^{(s, \partial s')} = 2R^{(\tilde{s}, \partial \tilde{s}')}$$

$$2R^{(\tilde{s}, \partial \tilde{s}')} = \arg \operatorname{ch} \left[1 + \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{T^2}{4} + 1} \right)^2}{2\sqrt{\frac{T^2}{4} + 1}} \right] \Rightarrow \operatorname{ch} 2R^{(\tilde{s}, \partial \tilde{s}')} = \frac{1}{2} \frac{\frac{T^2}{4} + 2}{\sqrt{\frac{T^2}{4} + 1}}$$

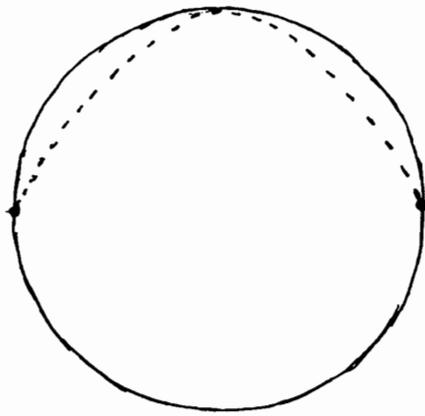
$$R^{(s, \partial s')} < R^{(s, \partial s)} \text{ d'où :}$$

III.1.11 Exemples explicites

1) Boule hyperbolique de rayon ε .

La constante obtenue de dépend que de la taille de la boule. $C = 2 \operatorname{Sh} \varepsilon$.

Elle est optimale et réalisable par toute courbe horocyclique liant deux points diamétralement opposés.



2) n gône géodésique

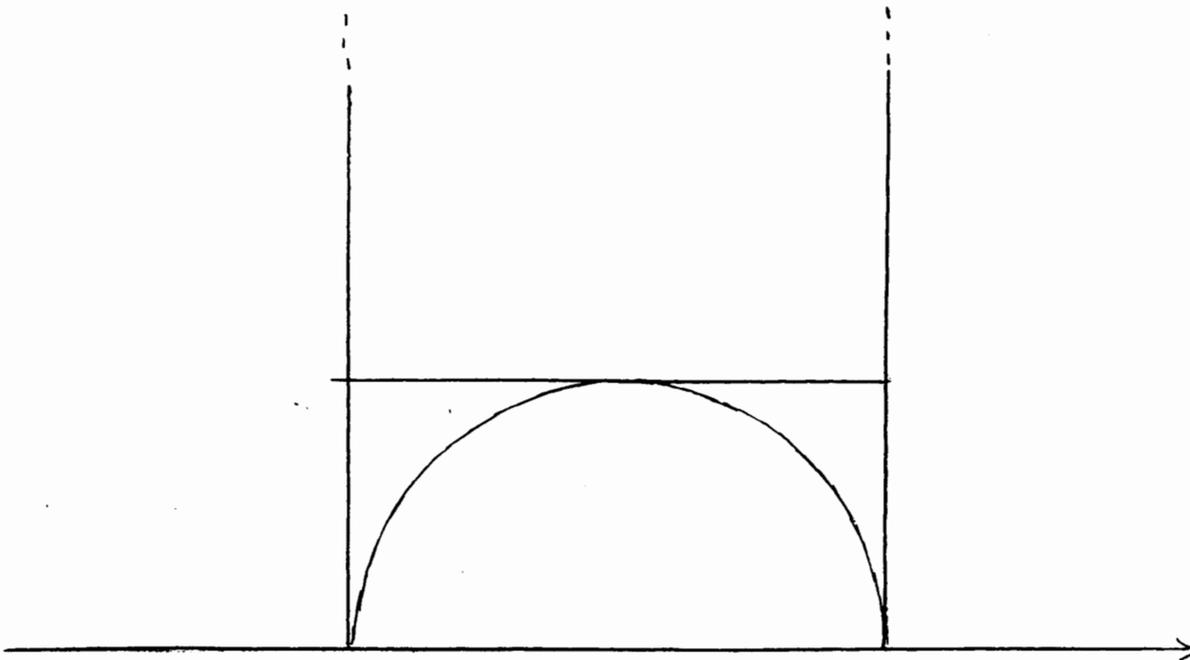
La constante obtenue ne dépend que de la combinatoire du polygone à savoir :

$$C = 2(n - 1).$$

Elle est optimale dans le cas d'un n gône idéal et est réalisable par des courbes horocycliques tangentes à (n - 2) côtés.

III.1.11.2 Définition

On appelle un n gône idéal un n gône dont tous les sommets sont à l'infini.

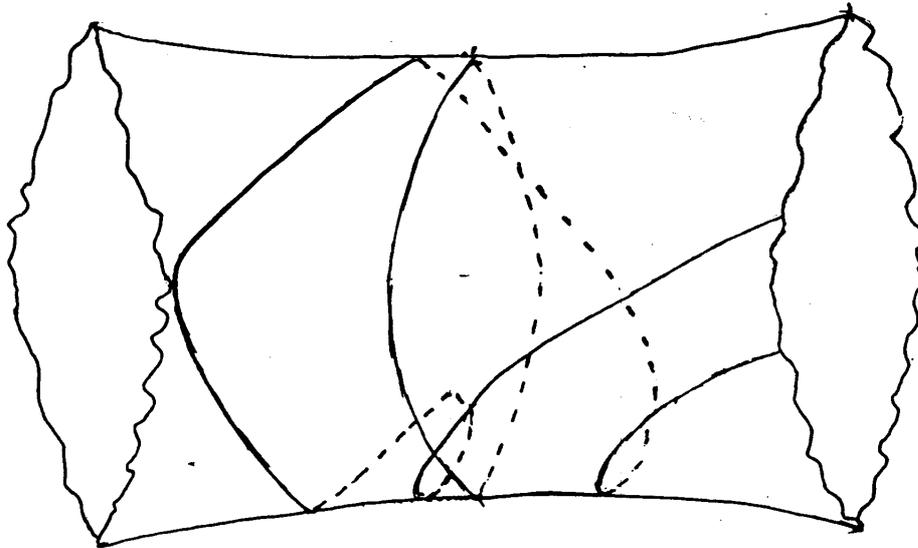


3) Voisinage ϵ tubulaire d'une géodésique fermée

La constante ne dépend que de la taille du voisinage en question .

$$C = 4e^{\epsilon/2} \cdot (\text{sh}\epsilon)^{1/2}.$$

Elle est optimale et réalisable par des courbes horocycliques tangentes à l'une des deux composantes bord.



Dans ce qui suit, nous allons citer trois applications du théorème précédent.

III.2.A Non existence d'orbites périodiques du flot horocyclique pour des surfaces hyperboliques, admettant une décomposition en pantalons géodésiques

Soit S une surface compacte sans bord, orientable, de genre n .

III.2.A.1 Lemme

Le groupe fondamental $\Pi_1(S)$, a une présentation finie.

$$\Pi_1 S = \left\langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n / \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = 1 \right\rangle$$

Preuve

Procédons par récurrence.

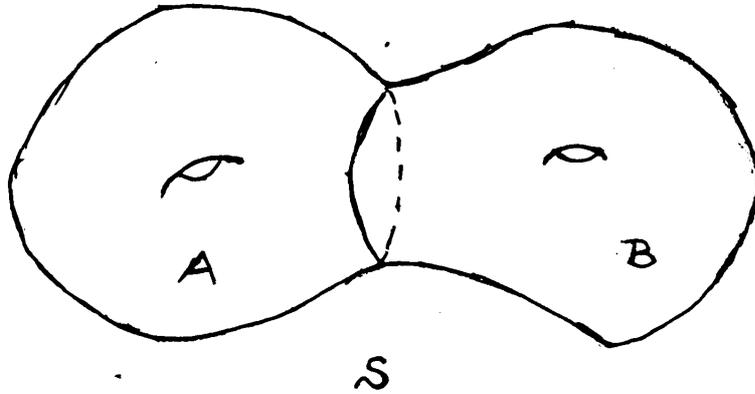
Pour $n = 1$

$$S = T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2.$$

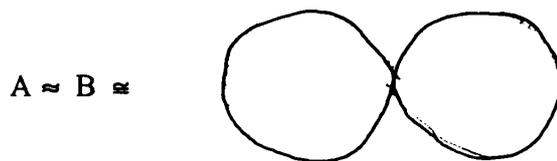
On en déduit que : $\Pi_1(S) = Z^2 = \langle a, b, aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$

Pour $n = 2$

$$S = A \cup B \quad ; \quad A \cap B = S^1 = R/Z$$



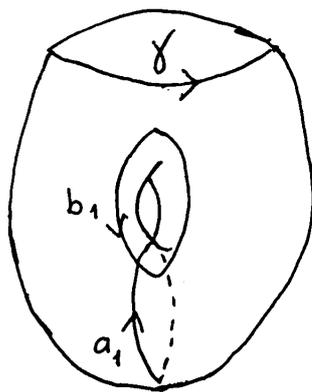
A; (B), est homéomorphe à un bouquet de deux cercles, ou ce qu'on appelle un huit.



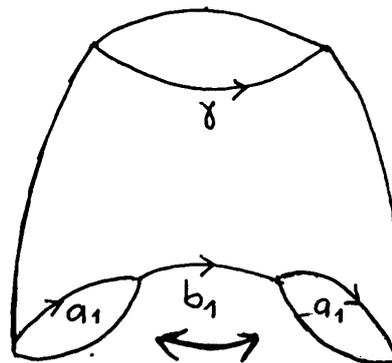
En appliquant le théorème de Van Kampen [God], on a : $\Pi_1(A) = \langle a_1, b_1 \rangle$ et

$$\Pi_1(B) = \langle a_2, b_2 \rangle$$

Considérons γ le lacet dans A.



A



A

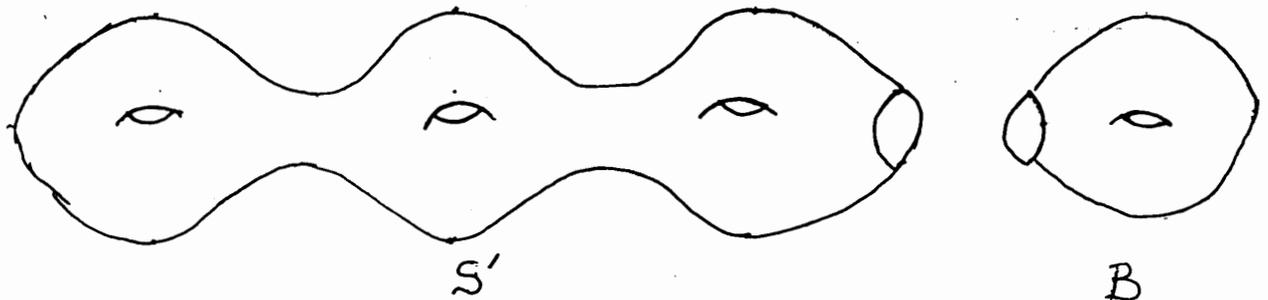
on a γ s'écrit dans $\Pi_1(A)$ de la manière suivante : $\gamma = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$; de la même manière, on a : $\gamma^{-1} = a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$ dans $\Pi_1(B)$:

En utilisant une nouvelle fois le théorème de Van Kampen [God], on a :

$$\Pi_1(S) = \Pi_1(A) \underset{\Pi_1(S') \rightarrow \langle \gamma \rangle}{*} \Pi_1(B). \text{ d'ou : } \Pi_1(S) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, [a_1, b_1], [a_2, b_2] = 1 \rangle.$$

genre $S = n$

$$S = S \cup B$$



et S' est une surface à une seule composante bord, de genre $n - 1$.

On sait que $\Pi_1(B)$ est un groupe libre à deux générateurs . Etudions $\Pi_1(S)$.

Considérons S'' une surface compacte sans bord , de genre $n - 1$; on a : $S' = S'' - D$

où D est un disque ouvert . En utilisant la recurrence d'une part, on a :

$$\Pi_1(S'') = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{n-1}, b_{n-1} ; \prod_{i=1}^{n-1} [a_i, b_i] = 1 \rangle$$

et d'autre part Van Kampen on a :

$$\Pi_1(S'') = \Pi_1(S') \underset{\Pi_1(S')}{*} \Pi_1(S')$$

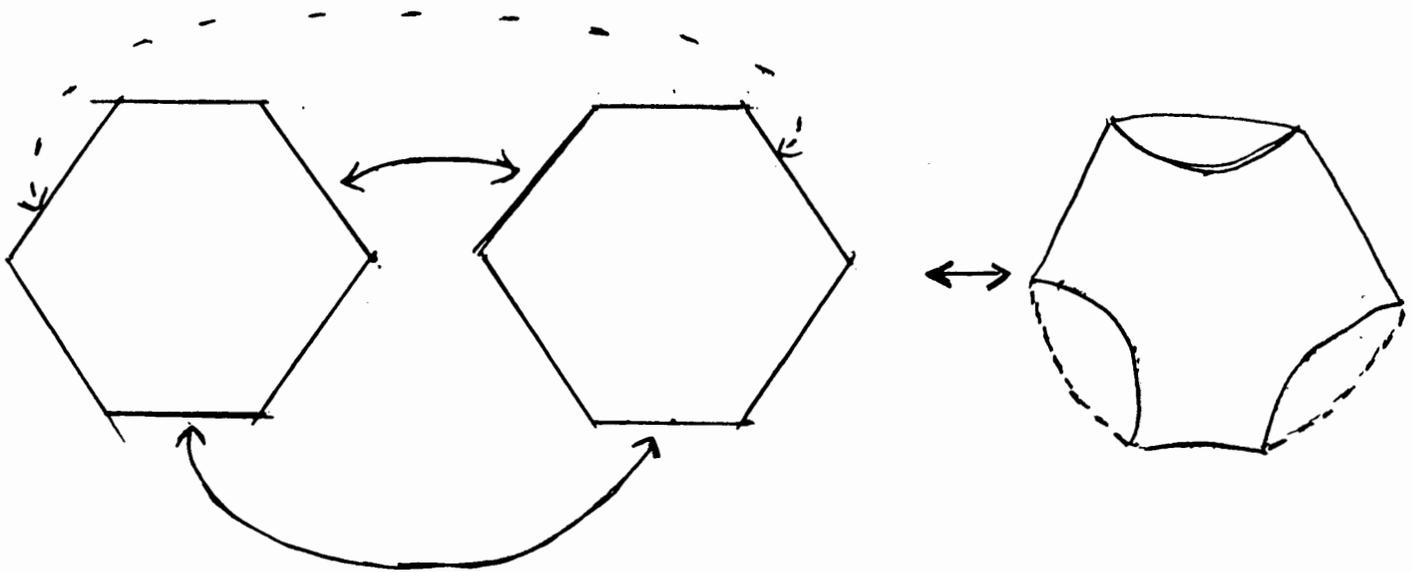
On en déduit que : $\Pi_1(S)$ qui est $\Pi_1(S') \underset{\Pi_1(S')}{*} \Pi_1(B)$ a la présentation suivante :

$$\Pi_1(S) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n ; \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = 1 \rangle$$

Il suffit pour cela de remarquer que $\Pi_1(S)$ a la présentation de $\Pi_1(S'')$, mais avec la relation : $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = \partial S'$.

III.2.A.2 Définition

On appelle pantalon P la surface compacte à bord obtenue en collant deux hexagones le long de trois côtés non adjacents deux à deux .



III.2.A.3 Définition

Soit S une surface connexe, orientable. On appelle décomposition en pantalons de S , la représentation de S comme union de pantalons.

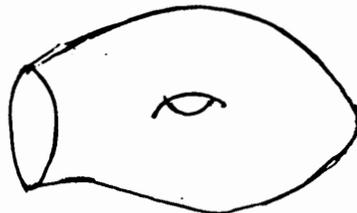
III.2.A.4 Lemme

Soit S une surface compacte sans bord, orientable. S admet une décomposition en pantalons.

Preuve

S étant compacte sans bord, orientable, on a : Le genre de S est fini et on peut supposer genre $S = n$. On en déduit que S peut être représentée sous forme d'union de A, B et S' , où :

i) $A =$



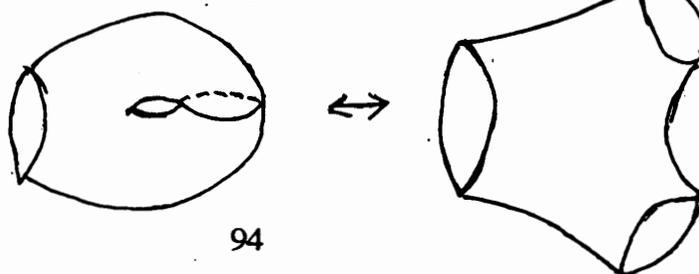
ii) $B =$

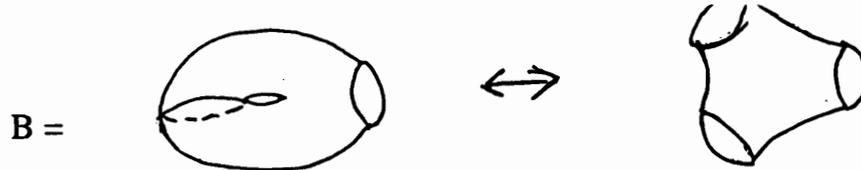


iii) S' est une surface de genre $n - 2$, à bord admettant deux composantes connexes.

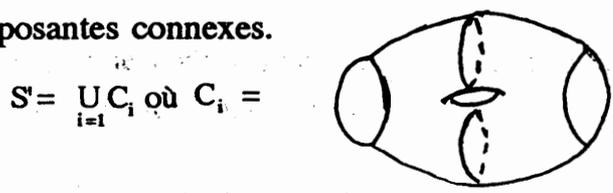
1. A, B admettent une décomposition en pantalons à savoir :

$A =$

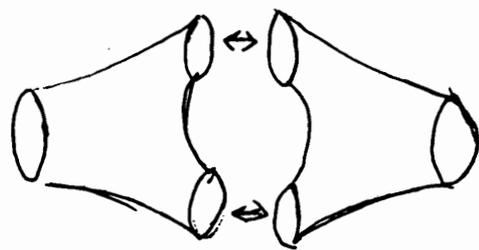




2. S' s'écrit comme union finie de C_i ; où C_i est une surface de genre 1 , à bord ayant deux composantes connexes.



C_i admet une décomposition en pantalons, à savoir : $C_i =$



III.2.A.5 Définition

Soit S une surface connexe, orientable , équipée d'une métrique hyperbolique g_0 et soit $\bigcup_{i \in I} P_i$ une décomposition en pantalons de S .

On dira que les P_i sont totalement géodésiques, si pour tout i de I , (P_i, g_0) en tant que surface hyperbolique est convexe.

III.2.A.6 Lemme

Une surface S compacte , sans bord , orientable, équipée d'une métrique hyperbolique g_0 , admet une décomposition en pantalons totalement géodésique.

Preuve

Considérons la décomposition en pantalons décrite dans la preuve du Lemme III.2.A.4. Cette décomposition est une décomposition en pantalons d'intérieur, deux à deux disjoints. On a donc : $S = \bigcup_{i \in I} P_i$.

Pour tout i de I , $\partial P_i = \{\alpha_i; \beta_i; \gamma_i\}$ où $\alpha_i; \beta_i; \gamma_i$ sont des lacets. Dans $\Pi_1(S)$ considérons leurs classes d'homotopie libre respectives, notées : $[\alpha_i]$, $[\beta_i]$, $[\gamma_i]$.

En utilisant le théorème I.1.D.8 , on a existence de $\alpha_i^1; \beta_i^1; \gamma_i^1$ dans $[\alpha_i]$, $[\beta_i]$, $[\gamma_i]$ avec $\alpha_i^1; \beta_i^1; \gamma_i^1$ sont des courbes géodésiques.

Notons P_i^1 l'enveloppe convexe de $\alpha_i^1; \beta_i^1; \gamma_i^1$. En tant que surface, P_i^1 est un pantalon totalement géodésique. De plus $S = \bigcup_{i \in I} P_i^1$.

III.2.A.7 Théorème

Soit (S, g_0) une surface hyperbolique connexe, admettant une décomposition en pantalons compacts totalement géodésiques, d'intérieur deux à deux disjoints.

Alors, pour toute métrique à courbure strictement négative sur S , il n'existe pas d'orbites périodiques du flot horocyclique.

Preuve.

$$S = \bigcup_{i \in I} P_i \quad / \quad P_i \cap P_j = \emptyset \quad i \neq j \text{ et } \forall (i \in I), P_i \text{ est convexe pour } g_0.$$

$$\text{Notons } \partial P_i = \{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}.$$

Considérons g_1 une métrique à courbure strictement négative, non isométrique à g_0 .

Les courbes fermées $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ étant, par hypothèse, deux à deux disjointes pour la métrique g_0 , elles restent disjointes pour la métrique g_1 [Fathi - Lau - Poen].

Quitte à passer à $\{\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\gamma}_i\}$ les uniques courbes géodésiques fermées pour la métrique g_1 , qui sont de la même classe d'homotopie que $\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}$, on peut supposer la décomposition $S = \bigcup_{i \in I} P_i$ géodesique pour g_1 . Il suffit de démontrer la proposition pour (S, g_0) .

Procédons par l'absurde.

Supposons donc qu'il existe une orbite périodique O pour le flot horocyclique. Il existerait alors une surface S' incluse dans S à bord géodésique, convexe, contenant O .

Par III.1.10 appliqué à $(S', \partial S')$, on a contradiction avec le temps de séjour O dans $(S', \partial S')$ borne :

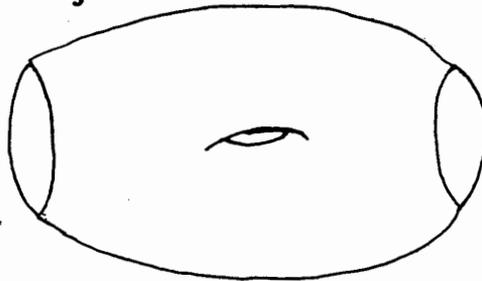
III.2.B Non existence d'orbites périodiques du flot horocyclique pour des surfaces i périodiques ($i = 1,2$).

III.2.B.1 Définition

On appelle surface hyperbolique i périodique une surface hyperbolique admettant Z^i comme sous groupe d'isométries.

III.2.B.2 Procédé de construction d'une surface hyperbolique 1 périodique

Soit S_1 une surface compacte, connexe de genre 1, à bord constitué de deux courbes fermées simples disjointes.



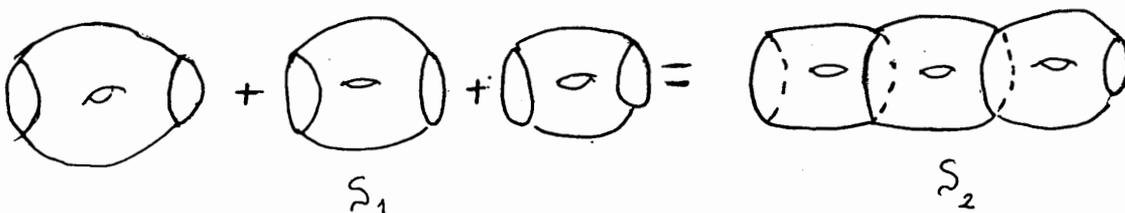
Equipons S_1 d'une métrique g à courbure négative constante -1 et telle que ∂S_1 soit totalement géodesique.

III.2.B.2.1 Définition

(S_1, g) étant une surface hyperbolique.

On dira que ∂S_1 est totalement géodesique, ssi toute composante connexe de ∂S_1 est convexe pour g .

Le long de chaque courbe bord, collons un exemplaire isométrique à S_1 .



Le long des composantes bord de S_1 , collons deux exemplaires isométriques à S_1 et réitérons indéfiniment le processus le long des composantes bord de la surface obtenue à l'étape précédente.

La surface S aussi obtenue est une surface 1périodique, hyperbolique de volume infini.

III.2.B.3 Procédés de construction d'une surface hyperbolique

III.2.B.3.1 Définition

On appelle graphe Γ , un complexe simplicial de dim 1 dans \mathbb{R}^2 .

III.2.B.3.2 Définition

Soit G un groupe à génération finie (ayant un nombre fini de générateurs); on appelle graphe de Cayley, le graphe Γ obtenu comme suit :

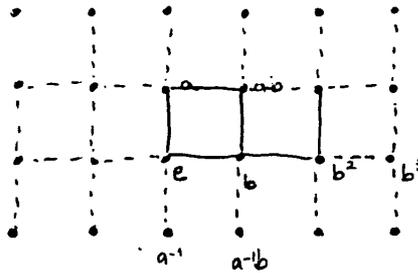
Sommets de Γ = éléments de G

Arêtes de Γ = générateurs de G et leurs puissances

Exemples

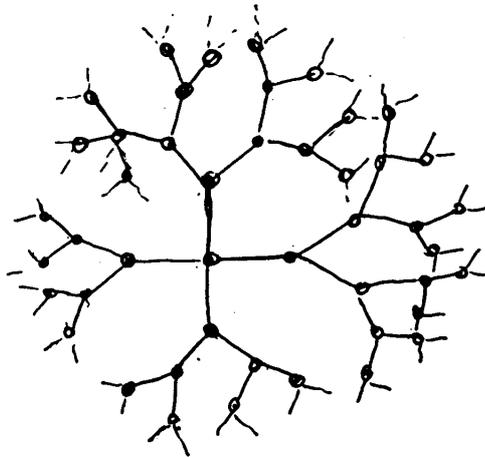
$$G = \mathbb{Z}^2 = \langle a, b / ab a^{-1} b^{-1} = 1 \rangle$$

Γ :



$G = \langle a, b \rangle$ le groupe libre à deux générateurs .

Γ :

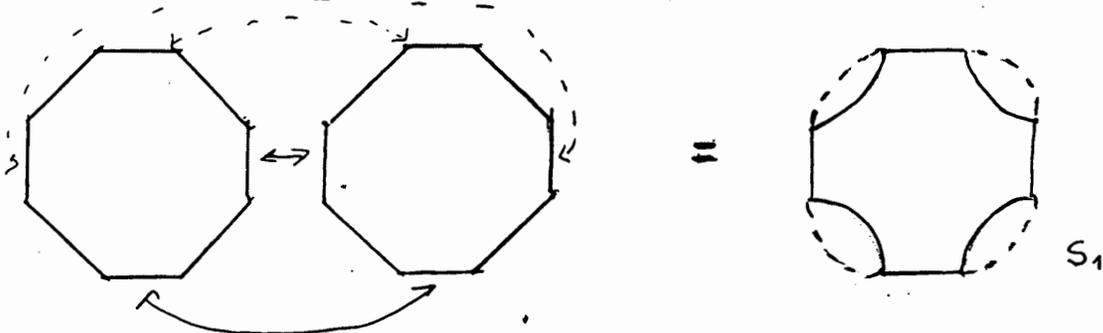


III.2.B.3.3 Présentation d'un procédé de construction

Soit Z^2 le réseau standard dans R^2 , Γ son graphe de Cayley et P un plongement de Γ dans R^3 . Sur le bord ∂v d'un voisinage tubulaire de $P(\Gamma)$, on induit une métrique à courbure négative -1 . $(\partial v, g)$ est une surface hyperbolique, 2 périodique.

III.2.B.3.4 Construction géométrique

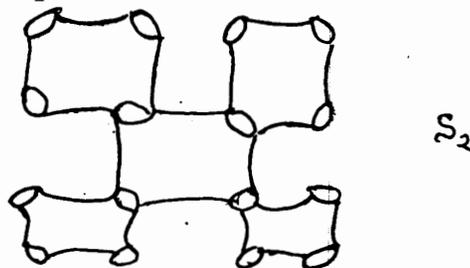
Soit deux octogones hyperboliques, isométriques, à angles droits recollés le long de quatre côtés, deux à deux non-adjacents.



On obtient une surface S_1 hyperbolique ayant quatre composantes bord disjointes, totalement géodésiques.

Le long de chaque composante bord, on colle un exemplaire isométrique à S_1 .

On obtient ainsi une surface S_2 hyperbolique ayant des composantes bord disjointes, totalement géodésiques.



Le long de chaque composante bord de S_2 , on colle un exemplaire isométrique à S_1 et on réitère indéfiniment le processus le long de chaque composante bord de la surface obtenue à l'étape précédente de la construction.

La surface S obtenue par cette construction est hyperbolique, doublement périodique, de genre infini.

III.2.B.4 Théorème

Il n'existe pas d'orbites périodiques du flot horocyclique sur une surface i périodique hyperbolique, $i \in (1, 2)$.

Preuve

Procédons par l'absurde:

Supposons qu'il existe une orbite périodique du flot horocyclique, notée O . Alors, il existe une partie K de S , K compacte à bord, convexe, contenant O .

En appliquant III.1.10 à K , on obtient une contradiction.

Considérons S une surface hyperbolique deux périodique, obtenue par le procédé de constructions III.2.B.3.3. Soit Π l'application de S sur \mathbb{R}^2 , définie comme suit :

- 1) Π (un octogone) = un sommet de Γ
- 2) Π (deux octogones) = arête de Γ

Soit D_1 et D_2 deux droites parallèles dans \mathbb{R}^2 et U la région délimitée par D_1, D_2 .

III.2.B.5 Proposition

Il existe une constante C ne dépendant que de U , telle que : pour tout horocycle sur S , le temps de séjour dans $\Pi^{-1}(U)$ est inférieur ou égal à C .

Preuve

Soit U' la plus petite région connexe de \mathbb{R}^2 , contenant U et telle que $\partial U'$ soit inclus dans Γ . $\Pi^{-1}(U')$ la préimage de U' est une surface hyperbolique convexe à bord, dont le rayon intérieur $R^{\Pi^{-1}(U')}$ est borné par une constante C dépendant de U .

Par le théorème III.1.10, on sait que toute courbe horocyclique sur une surface convexe à bord est plus petite qu'une constante dépendant du rayon intérieur.

En appliquant le théorème à $\Pi^{-1}(U')$, on a : le temps de séjour d'un horocycle dans $\Pi^{-1}(U')$ est borné, il sera d'autant plus court dans $\Pi^{-1}(U)$ qui est strictement incluse dans $\Pi^{-1}(U')$.

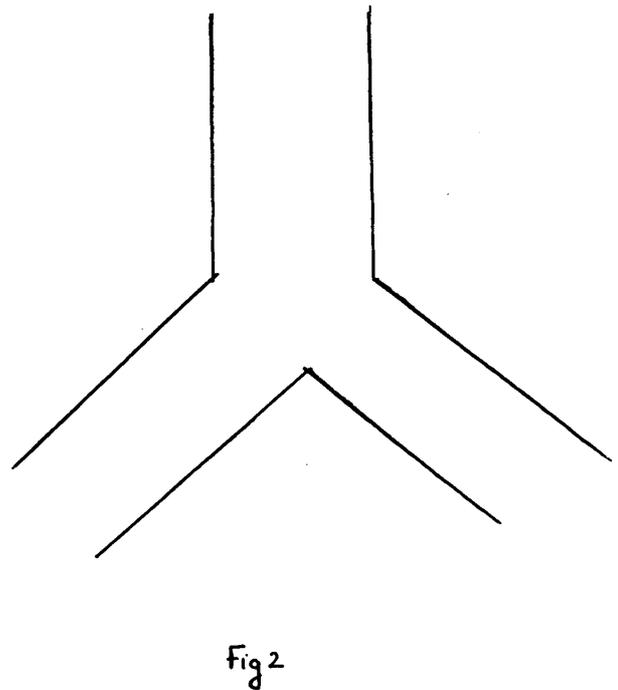
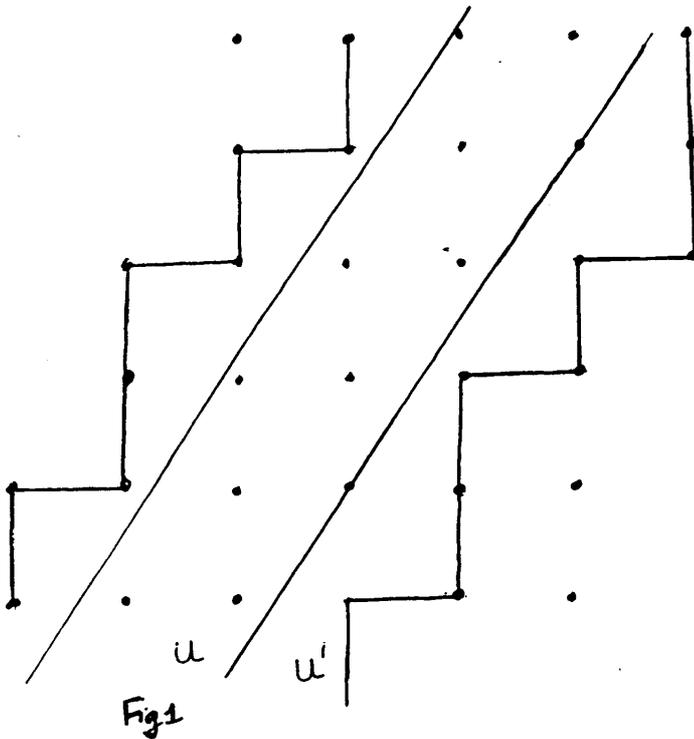
III.2.B.6 Corollaire

Tout horocyclé quitte $\Pi^{-1}(U)$, où U est une union finie de région délimitée par des droites parallèles.

Preuve

Conséquence immédiate de III.2.B.5.

Figures



III.2.C Estimation dans le cas des surfaces compactes à bord convexes pour une métrique à courbure sectionnelle pincée

III.2.C.1 Définition

(M, g) une variété riemannienne complète, 1 connexe, à courbure sectionnelle K négative.

Pour $i \in \{1, 2\}$ on donne $\gamma_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow M$, γ_i géodésique et $\|\dot{\gamma}_i(t)\| = 1$ pour tout t de \mathbb{R}^+ .

On dit que γ_1 est asymptotique à γ_2 , noté $\gamma_1 \sim \gamma_2$, si et seulement si il existe une constante positive C , telle que pour tout t de \mathbb{R}^* , on ait $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) < C$.

III.2.C.2 Exemple

Soit $M = H^2$, g la métrique de Poincaré.

$$\gamma_1: \mathbb{R}^+ \rightarrow H^2$$

$$t \rightarrow e^t i$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, considérons $\gamma_x: \mathbb{R}^+ \rightarrow H^2$.

$$t \rightarrow e^t i + x.$$

$$\text{On a : } \text{ch}[d(\gamma_1(t), \gamma_x(t))] = 1 + \frac{x^2}{2e^{2t}}$$

d'où :

$$d(\gamma_1(t), \gamma_x(t)) \leq \text{argch} \left(1 + \frac{x^2}{2} \right)$$

On en déduit que γ_x est asymptotique à γ_1 .

Démontrons que toute géodésique asymptotique à γ_1 est de la forme γ_x pour un x bien déterminé. Soit δ une géodésique asymptote à γ_1 , on sait que :

$$\exists (C > 0) / \forall (t \in \mathbb{R}^+) \quad d(\delta(t), \gamma_1(t)) < C.$$

$$\text{Pour } t \rightarrow \infty \text{ on a : } d(\delta(\infty), \gamma_1(\infty)) < C.$$

$$\text{d'où : } \gamma_1(\infty) = \delta(\infty) = \infty.$$

En se basant sur II.3.10, on a δ est de la forme γ_x .

III.2.C.3 Corollaire

La relation "asymptotique à" induit une relation d'équivalence sur les semi-géodésiques positives d'une variété riemannienne (M, g) complète, 1 connexe.

Preuve

La preuve est une conséquence immédiate des propriétés de la distance.

Notons $M(\infty) = \{\gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow M, \|\dot{\gamma}(t)\| = 1 \forall (t \in \mathbb{R}^+)\} / \sim$

III.2.C.4 Définition

(M, g) étant une variété riemannienne, complète 1 connexe, à courbure négative.

$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ une géodésique paramétrée par longueur d'arc.

On appelle horoboule de centre $z = \gamma(\infty)$, l'ensemble $HB(z)$ obtenu comme union des

$\{B(\gamma(t), t)\}_{t>0}$ où $B(\gamma(t), t)$ est la boule de centre $\gamma(t)$ de rayon t pour la métrique g .

$$HB(z) = \bigcup_{t>0} B(\gamma(t), t)$$

III.2.C.5 Exemple

Soit $M = H^2$, g la métrique de Poincaré.

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow H^2$$

$$t \rightarrow e^t i$$

Pour $t \in \mathbb{R}^+$, considérons $B(\gamma(t), t)$

$$B(\gamma(t), t) \cap \{z \in H^2, \text{Im}z < 1\} = \emptyset$$

En effet, si on supposait que cette intersection serait non vide, il existerait :

$z_0 = ie^{t_1}$, $t_1 < 0$ et $z_0 \in B(\gamma(t), t)$. d'où : $d(\gamma(t), z_0) = t - t_1 > t$, donc contradiction.

Affirmation

$$i \in B(\gamma(t), t) \text{ car } d(\gamma(t), i) = t$$

En conclusion, on a :

$$HB(\infty) = \{z \in H^2 / \text{Im}z \geq 1\}$$

III.2.C.6 Définition

(M, g) étant une variété riemannienne, complète, 1 connexe, à courbure sectionnelle négative, γ étant une géodésique paramétrée par longueur d'arc. On appelle horosphère de centre $z = \gamma(\infty)$ l'ensemble $\partial HB(z)$ où $HB(z)$ est l'horoboule de centre z par rapport à γ .

III.2.C.7 Proposition

Pour (H^2, ds) , ds étant la métrique de Poincaré, les horosphères sont identiques aux horocycles.

Preuve

Soit $HB(z)$ un horosphère et soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow H^2$ telle que :

$$z = \gamma(\infty) \text{ et } HB(z) = \bigcup_{t > 0} B(\gamma(t), t)$$

$PSL(2, \mathbb{R})$ étant transitif sur les géodésiques de H^2 , on peut supposer :

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow H^2 & \text{et } z &= \infty \\ t &\rightarrow e^t i \end{aligned}$$

d'où, par III.2.C.5, $HB(z) = \{z \in H^2 / \text{im}z \geq 1\}$

donc, $\partial HB(z) = \{z \in H^2 / \text{im}z = 1\}$ qui est un horocycle.

III.2.C.8 Définition

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte à courbure négative. On appelle horosphère sur (M, g) l'image par l'application revêtement d'un horosphère sur (\tilde{M}, \tilde{g}) où \tilde{M} est le revêtement universel de M .

On rappelle le résultat suivant :

III.2.C.9 théorème [Hein - Im.Hof]

Soit (\tilde{M}, \tilde{g}) une variété de Hadamard, à courbure sectionnelle K , $-b^2 \leq K \leq -a^2$ où $0 \leq a < \infty$ et $0 \leq b \leq \infty$

Soit h une horosphère de (\tilde{M}, \tilde{g}) . Pour tout couple (p, q) appartenant à h , on a :

$$\frac{2}{a} \text{sh}[a \cdot d(p, q)] \leq d_h(p, q) \leq \frac{2}{b} \text{sh}[b \cdot d(p, q)]$$

d_h désigne la distance sur h , h étant équipée de la métrique induite par \tilde{g} .

III.2.C.10 Remarques

On précise que :

1) Une variété riemannienne (\tilde{M}, \tilde{g}) est dite de Hadamard si et si seulement si (\tilde{M}, \tilde{g}) est complète, simplement connexe, à courbure sectionnelle négative.

2) Si on considère (\tilde{M}, g_a) une variété de Hadamard, à courbure négative constante $-a^2$, $a > 0$, h une horosphère sur (\tilde{M}, g_a) et p, q deux points de h , on a :

$$d_h(p, q) = \frac{2}{a} \operatorname{sh}[a \cdot d(p, q)]$$

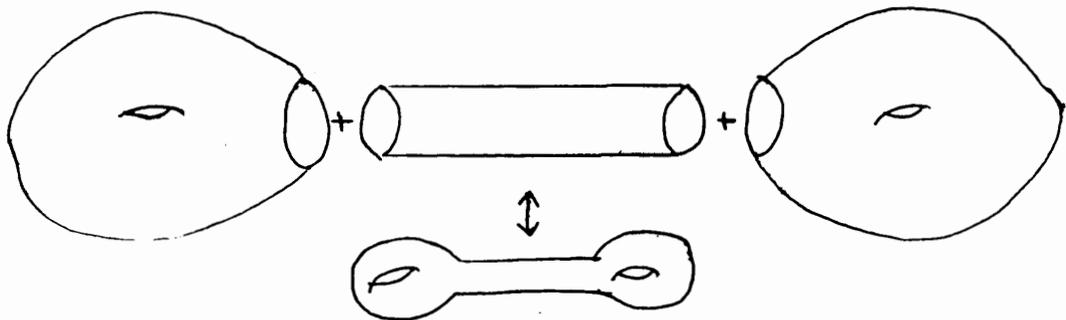
3) Si $(S; g)$ est une surface riemannienne, compacte, à courbure sectionnelle négative, on fera l'abus suivant : On utilisera le mot "horocycle" pour "horosphère", par analogie au cas de courbure négative constante -1 [III.2.C.7]

III.2.C.11 Définition

On dira qu'une variété riemannienne (M, g) est à courbure sectionnelle $K(s)$ pincée si et si seulement si il existe une constante C , telle que : $|K(s)| \leq C^2$

III.2.C.12 Exemples

- 1) Les variétés riemanniennes à courbure constante.
- 2) Les surfaces obtenues comme suit :



on a : $|K(s)| = 1$

III.2.C.13 Proposition

Pour $(S, \partial S)$ surface à bord compacte, convexe à courbure sectionnelle $-b^2 \leq K \leq -a^2$ ($a > 0$ et $0 < b < \infty$), il existe une constante positive C dépendant de b , telle que :

$$\sup_{h \in C_{(S, \partial S)}^h} \|h\| \leq C.$$

Preuve

Soit $h \in C_{(S, \partial S)}^h$; \tilde{h} un relèvement de h dans $D(0,1)$ équipé d'une métrique \tilde{g} à courbure K ; $-b^2 \leq K \leq -a^2$.

D'après III.2.C.9, on a : $\|\tilde{h}\|_{\tilde{g}} \leq \|h\|_g$,

g_b désignant une métrique à courbure constante négative $-b$.

En projetant (\tilde{h}, g_b) sur $((S, \partial S), g_b)$, on obtient un élément de $(C_{(S, \partial S)}^h, g_b)$, et en

appliquant III.1.10 à cet élément, on obtient que :

$$\|h\|_{g_b} \leq C(R^{(S, \partial S)}, g_b) \text{ d'ou } \|h\| \leq C(R^{(S, \partial S)}, g_b).$$

III.2.D Quelques conséquences immédiates du théorème de Ratner

III.2.D.1 Théorème [Rat]

Soit Γ un sous groupe discret de $PSL(2; \mathbb{R})$ tel que : $\mu(\Gamma \backslash PSL(S, \mathbb{R}))$ soit infini, μ étant la mesure de Haar sur $PSL(2, \mathbb{R})$.

Toute mesure de probabilité de $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ invariante et ergodique pour le flot horocyclique est concentrée sur une orbite périodique.

Comme conséquences immédiates de III.2.D.1, on a :

III.2.D.2 Corollaire

Il n'existe pas de mesure de probabilité ergodique invariante par le flot horocyclique sur le fibré unitaire d'une surface i périodique $i \in \{1, 2\}$, hyperbolique.

Preuve

Il suffit d'appliquer III.2.D.1 et III.2.B.4

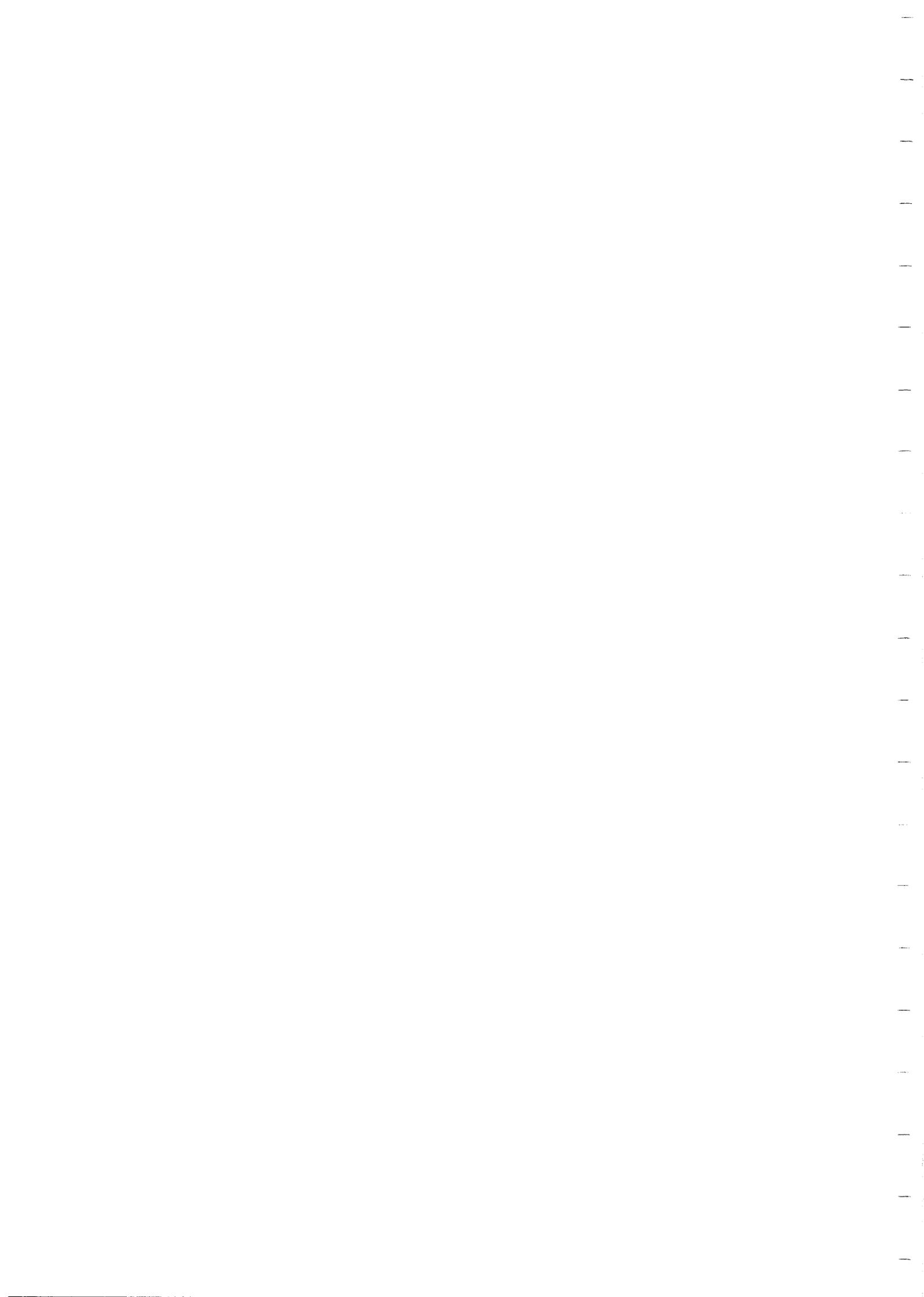
III.2.D.3 Corollaire

Soit (S, g_0) une surface hyperbolique connexe, admettant une décomposition dénombrable en pantalons géodésiques, deux à deux d'intérieur disjoints.

Pour T^1S , il n'existe pas de mesure de probabilité ergodique invariante par le flot horocyclique.

Preuve

Il suffit d'appliquer III.2.D.1 et III.2.A.7



BIBLIOGRAPHIE

1. [Dan - Smi] Dani - Smillie - *Uniform distribution of horocyclic orbits for Fuchsian groups*. - **Duke Math Journal** . 51. 1984.
2. [Fat - Lau - Poe] Fathi-Laudenbach-Poenaru - *Travaux de Thurston sur les surfaces* - **Astérisque**. 66 - 67. 1979.
3. [God] Godbillon - *Eléments de topologie algébrique* - **Collection Méthodes** - Herman - 1970.
4. [Gro - Ball - Sch] Gromov - Ballman - Schroeder - *Manifolds of non positive curvature* - **Birkhäuser - Progress in mathematics** . Vol. 61. 1985.
5. [Hei - Im] Heintz - Im Hof - *Geometry of horospheres* - **Journal of differential geometry**. 12 . 1977.
6. [Rat] Ratner - *On measure rigidity of unipotents subgroups of semisimple groups* - **Acta mathematica**. 165 . 1990.

