REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre : . . . . .
N° série : . . . . . .

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Thème

Etude Spectrale d'une Classe de Problèmes aux Limites non Locaux

Option
EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Par :
ABDELHAK BERKANE

<u>Devant le jury :</u>

Président:	**A.L.MARHOUNE**	**Prof**	**Univ. Constantine**
Rapporteur:	**M.DENCHE**	**Prof**	**Univ. Constantine**
Examinateurs:	**A.AIBECHE**	**Prof**	**Univ. Setif**
	B.SAADALLAH	**Prof**	**E.N.S.Kouba**
	L.CHORFI	**Prof**	**Univ. Annaba**
	N.HAMRI	**Prof**	**Univ.Constantine**

Soutenue le . . . .

Remerciements

C'est tout naturellement que mes premiers remerciements s'adressent à monsieur le professeur M. DENCHE pour l'attention et la disponibilité dont il a su faire preuve au cours de ces années de thèse.

Je voudrais également remercier les membres de mon jury Mr A. L. MARHOUNE professeur à l'université de Constantine, Mr A.AIBECHE professeur à l'université de Setif, Mr B. SAADALLAH professeur à l'ENS Kouba, Mr L. CHORFI professeur à l'université de Annaba et Mr N.HAMRI professeur à l'université de Constantine pour l'honneur qu'ils m'ont fait en portant leur attention sur ce travail.

Enfin je terminerai en remerciant mon épouse pour le soutien moral dont elle a su me gratifier durant cette période.

الملخص

يخصص هذا العمل لدراسة مسألة حدية لمعادلة تفاضلية خطية مجردة من الرتبة الأولى، تحت شرط حدي من النمط التكاملي.

نثبت شروط ضرورية و كافية تضمن وجود و وحدانية الحل للمسألة محل الدراسة، بعدها نثبت أن الحل مرتبط استمراريا بطرف ثاني.

نبين كذلك أن المؤثر المولد من المسألة المدروسة هو مؤثر فريدولم.

أخيرا، نعتبر المسألة المطروحة أين المعامل المؤثر يشتت بواسطة مؤثر محدود و نبين أن الحل لهذه المسألة المشتتة هو حل مستقر.

Résume

Ce travail est consacré à l'étude d'un problème aux limites pour une équation différentielle abstraite du premier ordre avec condition aux limites du type intégrale. On établit des conditions nécessaires et suffisantes qui garantissent l'existence et l'unicité de la solution du problème en question, puis on établit une estimation à priori. On montre aussi que l'opérateur engendré par le problème étudie est un opérateur de Fredholm. Enfin on considère le problème abordé dont le coefficient opératoriel est perturbé par un opérateur borné, et on montre que la solution du problème perturbé est stable.

Mots clés. Equation Différentielle Abstraite, Semi-groupe analytique, Propriété de Fredholm, Condition Intégrale, Problème bien posé.

Abstract

This work is devoted to the study of a problem for abstract first order linear differential equation with integral boundary conditions. We obtain necessary and sufficient conditions for the unique solvability and well-posedness. We also study the Fredholm solvability. Finally, we obtain a result of the stability of solution with respect to small perturbation.

Keywords. Abstract Differential Equation, Analytic Semigroup, Fredholm Property, Integral condition, Well-posed Problem.

Table des matières

INTRODUCTION

Le premier papier consacré à un problème aux limites non local avec conditions aux limites du type intégrales revient à [1]. Les conditions non locales plus générales pour différents types d'équations aux dérivées partiellles ont été considérées plus tard dans [2, 3, 4, 5, 6, 10]. Pour les modèles physiques de tels problèmes voir [1, 10, 11, 17], et les références qui s'y trouvent. Ce travail est consacré à l'étude de certaines classes de problèmes aux limites pour une équation différentielle abstraite du premier ordre avec condition aux limites de type intégrale. Il est composé d'une introduction et de trois chapitres.

On commence tout d'abord au premier chapitre par un bref rappel sur les principales notions utilisées tout le long de ce travail, à savoir les semi-groupes fortement continus, analytiques, les opérateurs de Fredholm et les lattis de Banach.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'un problème aux limites pour une équation différentielle abstraite du premier ordre avec condition aux limites du type intégrale. L'étude est basée sur la réduction du problème posé à une équation opératorielle, on établit des conditions nécessaires et suffisantes qui permettent de garantir l'existence et l'unicité de la solution du problème en question, puis on établit une estimation à priori. On montre aussi que l'opérateur engendré par le problème étudie est un opérateur de Fredholm. Enfin on considère le problème abordé dont le coefficient opératoriel est perturbé par un opérateur borné, et on montre que la solution du problème perturbé est stable.

Au troixième chapitre on étudié une équation différentielle abstraite du premier ordre avec une condition aux limites du type intégrale contenant en plus de la fonction inconnue sa dérivée. On montre l'existence et l'unicité de la solution et on établit une estimation à priori. On montre aussi que l'opérateur engendré par le problème étudie est un opérateur de Fredholm. Enfin on montre que la solution du problème perturbé est stable.

Chapitre 1

Notions Preliminaires.

Rappellons certaines résultats qui seront utilisés tout le long de ce travail.

1.1 Rappels sur les semi-groupes

La plupart des résultats exposés dans cette section se trouvent dans [9, 12, 18].

1.1.1 Semi-groupe fortement continu

Soit E un espace de Banach, muni de la norme $\|.\|$. Dans toute la suite, on notera par I, l'opérateur identité sur E.

Définition 1.1 *Etant donnée une famille $(U(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur E, nous dirons que cette famille est un semi-groupe fortement continu sur E si et seulement si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i) $U(t+s) = U(t)U(s)$ pour $t \geq 0$ et $s \geq 0$,

(ii) $U(0)x = x$, pour tout $x \in E$,

(iii) Pour tout $x \in E$ fixé, l'application : $t \mapsto U(t)x$ est continu sur $[0, \infty[$.

Un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés est aussi appelé C_0 semi-groupe.

Au semi-groupe $U(t)$, on fait correspondre la famille d'opérateurs A_h, pour $h > 0$, définie par

$$A_h\varphi = \frac{1}{h}(U(h)\varphi - \varphi), \text{pour } h > 0 \text{ et pour } \varphi \in E.$$

Cette famille nous permet de définir le générateur infinitésimal d'un semi-groupe.

Définition 1.2 *Le générateur infinitésimal du semi-groupe $(U(t))_{t\geq 0}$ est l'opérateur A définit sur le domaine*

$$D(A) = \left\{x \in E, \lim_{h\to 0} A_h x \text{ existe}\right\},$$

par

$$\text{pour } x \in D(A), Ax = \lim_{h\to 0} A_h x \ .$$

L'espace $D(A)$ est muni de la norme du graphe $\|v\|_{D(A)} = \|v\| + \|Av\|$.

Exemple 1.1 *Si A est un opérateur borné, alors A est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(U(t))_{t\geq 0}$, où*

$$U(t) = \exp(At) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n. \tag{1.1}$$

Dans ce cas, $t \to U(t)$ est continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{L}(E)$ et est une famille des isomorphismes, réciproquement tout semi-groupe à famille des isomorphismes continu au sens de la norme d'opérateurs s'écrit sous la forme (1.1) et son générateur infinitésimal est compact. Nous allons rappeler des propriétés fondamentales d'un semi-groupe fortement continu $(U(t))_{t\geq 0}$ de générateur infinitésimal A, qui serviront pour la suite. Les preuves de ces résultats se trouvent entre autres dans les ouvrages [9, 12, 18].

Théorème 1.1 *Soient $(U(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur E et A son générateur infinitésimal. Alors on a les propriétés suivantes :*

(i) $t \to \|U(t)\|$ est bornée sur tout intervalle compact $[0, T]$.

(ii) Pour tout $x \in E$, la fonction $t \to U(t)x$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(iii) $U(t)$ est exponentiellement borné, c'est-à-dire : il existe deux constantes réelles M et ω telles que : pour tout $t \geq 0$,

$$\|U(t)\| \leq M \exp(\omega t).$$

L'ensemble des nombres ω admissibles admet une borne inférieure ω_0 $(-\infty \leq \omega_0 \leq +\infty)$, appelé taux de croissance exponentielle du semi-groupe.

ω_0 est donné par la formule suivante :

$$\omega_0 = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \log \|U(t)\| = \inf_{t > 0} \frac{1}{t} \log \|U(t)\|.$$

(iv) Pour tout $x \in E$ et $t \geq 0$, on a

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_t^{t+h} U(s)x ds = U(t)x.$$

(v) Pour tout $x \in E$ et $t \geq 0$, on a

$$\int_0^t U(s)x ds \in D(A).$$

et

$$A \int_0^t U(s)x ds = U(t)x - x.$$

(vi) Pour tout $x \in D(A)$ et $t \geq 0$, $U(t)x \in D(A)$, donc $U(t)x$ est dérivable et on a

$$\frac{dU(t)x}{dt} = AU(t)x = U(t)Ax.$$

(vii) Pour tout $x \in D(A)$ et $t \geq 0, s \geq 0$,

$$U(t)x - U(s)x = \int_s^t U(\tau)Axd\tau = \int_s^t AU(\tau)xd\tau.$$

Corollaire 1.1 *Si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(U(t))_{t\geq 0}$ sur E, alors $D(A)$ est dense dans E et A est un opérateur fermé.*

Remarque 1.1 *D'après le corollaire, le graphe de A est un sous espace fermé du produit $E \times E$. Alors, on peut munir $D(A)$ d'une structure d'espace de Banach en considérant sur $D(A)$ la norme, dite norme du graphe, définie par :*

Pour tout $x \in D(A)$,

$$|||v|||_{D(A)} = \|v\| + \|Av\|.$$

Il est clair qu'un semi-groupe définit au plus un générateur infinitésimal. Le résultat suivant montre que la réciproque est vraie et qu'un semi-groupe linéaire est en fait caracterisé par son générateur infinitésimal, d'où l'expression :

Théorème 1.2 *Soient $(U(t))_{t\geq 0}$et $(V(t))_{t\geq 0}$ deux semi-groupes fortement continus de même générateur infinitésimal A. Alors $U(t) = V(t)$ pour tout $t \geq 0$. Le lien entre le semi-groupe et son générateur infinitésimal, est établi au moyen de la résolvante du générateur.*

Théorème 1.3 *Soient E un espace de Banach et A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $U(t)$ sur E, tel que $\|U(t)\| \leq M\exp(\omega t)$. Si B est un opérateur linéaire borné sur E, alors $A + B$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $S(t)$de classe C_0 sur E, qui vérifie*

$$\|S(t)\| \leq M\exp(\omega + M\|B\|)\,t.$$

Définition 1.3 *Soit A un opérateur linéaire fermé dans E.*

(a) *L'ensemble résolvant de A, noté $\rho(A)$ est*

$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} / (\lambda I - A)^{-1}$existe et borné dans $E\}$, i.e. l'ensemble des λ pour lesquels les trois propriétés suivantes sont vérifiés :

(i) $(\lambda I - A)$ est injectif,

(ii) $R(\lambda I - A) = E$,

(iii) $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur borné.

Pour un opérateur fermé le théorème du graphe fermé donne (iii) à partir de (i) et (ii). On définit pour$\lambda \in \rho(A)$, la résolvante de A par

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$$

(b) Le spectre de A est l'ensemble $\sigma(A) = C \backslash \rho(A)$.

Théorème 1.4 *(Hille-Yosida) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur fermé A, à domaine dense $D(A)$, soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu, est qu'il existe deux réels M et ω tels que : $\forall \lambda \in R$, $\lambda > \omega$,on a $\lambda \in \rho(A)$ et*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq M \frac{1}{(\lambda - \omega)^n}, \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Théorème 1.5 *Soient $(U(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur E, ω_0 le taux de croissance exponentielle de $U(t)$ dont le générateur infinitésimal est A. Alors,*

(1) Pour tout $x \in E$ et $\lambda > \omega_0$, $p = \lambda + i\mu$, on a

$$R(p, A)x = \int_0^\infty \exp(-pt)\, U(t) x dt.$$

(2) Pour tout $x \in D(A)$ et $\gamma > max(0, \omega)$, on a

$$\int_0^t U(s) x ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \exp(pt)\, R(p, A) \frac{dp}{p}.$$

1.1.2 Semi-groupe compact

Définition 1.4 *Un C_0 semi-groupe $(U(t))_{t \geq 0}$ sur E est dit compact pour tout $t > t_0$ si $U(t) : X \to X$ est un opérateur compact pour tout $t > t_0$; $(U(t))_{t \geq 0}$ sur E est dit compact si $U(t)$ est compact pour tout $t > 0$.*

Remarque 1.2 *Si $(U(t))_{t\geq 0}$ est compact, alors en particulier I est compact et E est nécessairement de dimension finie. Si $U(t_1)$ est compact pour un certain $t_1 > 0$, alors $U(t)$ est compact pour tout $t \geq t_1$.*

Théorème 1.6 *Soit $(U(t))_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe. Si $U(t)$ est compact pour tout $t > t_0$, alors $U(t)$ est continu au sens de la norme d'opérateurs pour tout $t > t_0$.*

Théorème 1.7 *Soit $(U(t))_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe et A son générateur infinitésimal. $(U(t))_{t\geq 0}$ est compact si et seulement si $U(t)$ est continu au sens de la norme d'opérateurs pour tout $t > 0$ et $R(\lambda, A)$ est compact pour un $\lambda \in \rho(A)$.*

Théorème 1.8 *Un opérateur linéaire A avec $\rho(A) \neq \emptyset$, est à résolvante compacte si $R(\lambda, A)$ est compact pour un $\lambda \in \rho(A)$.*

Théorème 1.9 *Soient $(U(t))_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe et A son générateur infinitésimal de domaine $D(A)$ avec $\rho(A) \neq \emptyset$, on pose $E_1 = (D(A), |||.|||_{D(A)})$ les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) A est à résolvante compacte.

(ii) L'injection canonique $i : E_1, \rightarrow E$ est compacte.

1.1.3 Opérateurs sectoriels ou du type (φ,M)

Définition 1.5 *Soit A un opérateur linéaire sur E. On dit que A est sectoriel si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

(1) A est fermé, à domaine $D(A)$ dense dans E,

(2) $\exists \varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\exists M \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}$, tels que :

$$S_{a,\varphi} = \{\lambda \in C \backslash \lambda \neq a \text{ et } \varphi \leq |arg(\lambda - a)| \leq \pi\} \subseteq \rho(A)$$

et

$$\forall \lambda \in S_{a,\varphi}, \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|}.$$

On dit aussi que A est de type (φ, M).

Exemple 1.2 *Si A est un opérateur linéaire et borné sur E. Alors, A est sectoriel.*

Si A est un opérateur auto-adjoint à domaine dense dans un espace de Hilbert, alors A est sectoriel.

Proposition 1.1 *Si A est sectoriel sur E et B est un opérateur linéaire tel que :*

(i) $D(A) \subset D(B)$,

(ii) $\forall x \in D(A), \forall \varepsilon > 0, \exists k(\varepsilon) > 0$

$$\|B(x)\| \leq \varepsilon \|A(x)\| + k(\varepsilon) \|x\|$$

Alors, $A + B$ est sectoriel sur E.

1.1.4 Semi-groupe analytique

Définition 1.6 *Un semi-groupe $(U(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach E, est dit semi-groupe analytique, si pour tout $t \geq 0$, les opérateurs $U(t)$ sont linéaires continus et vérifient :*

(i) $U(0) = I$, pour tout $t \geq 0$ et $s \geq 0, U(t+s) = U(t)U(s)$,

(ii) $\forall x \in E \lim\limits_{t\to 0^+} U(t)x = x$,

(iii) $\forall x \in E$, l'application : $t \to U(t)x$ est analytique sur $]0, \infty[$.

Théorème 1.10 *Si $-A$ est un opérateur sectoriel sur E, alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique, noté $(U(t))_{t\geq 0}$, avec*

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp(\lambda t) R(\lambda, A) d\lambda,$$

où Γ est un contour dans $\rho(A)$ avec : $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} arg\lambda = \pm\theta$, pour un certain $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Et alors, $U(t)$ est analytique sur un secteur :

$$S = \{t \neq 0; |argt| < \varepsilon\},$$

contenant l'axe réel positif, et si $\forall\lambda \in \sigma(A)$, $Re\lambda > 0$, alors :

$$\|U(t)\| \leq c \exp(-at),$$

et

$$\|AU(t)\| \leq \frac{c}{t} \exp(-at).$$

Ici c et a sont des constantes, indépendantes de t. Réciproquement, si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique, alors $-A$ est sectoriel.

Proposition 1.2 *Pour qu'un semi-groupe $(U(t))_{t\geq 0}$ soit analytique sur E, il suffit qu'il soit différentiable et que sa dérivée vérifie*

$$\forall t \in]0, T], \|D_t U(t) u\| \leq c\frac{\|u\|}{t}, \text{ pour un certain } T > 0.$$

1.1.5 Rappels d'Analyse Fonctionnelle

Théorème 1.11 *Soit $A : E \to F$ un opérateur linéaire borné, où E et F sont deux espaces de Banach sur le même corps $\mathbb{k}$. Si l'opérateur inverse $A^{-1} : F \to E$ existe, alors il est borné.*

Théorème 1.12 *Soient un espace de Banach E et un opérateur $A \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|A\| < 1$. Alors $I - A$ est continûment inversible et vérifie la majoration*

$$\left\|(I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Théorème 1.13 *Soient un espace de Banach E et deux opérateurs A, $B \in \mathcal{L}(E)$. Supposons que A soit continûment inversible et que $\|B - A\| \leq \left\|A^{-1}\right\|^{-1}$. Alors B est continûment inversible et vérifie la majoration*

$$\left\|B^{-1}\right\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|B - A\| \|A^{-1}\|}.$$

Définition 1.7 *Soient E et F deux espaces de Banach sur le même corps $\Bbbk$. Un opérateur linéaire borné $A : E \to F$ est appelé un opérateur de Fredholm si* $\dim N(A) < \infty$ *et* $co\dim R(A) < \infty$. *Nous noterons $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble de tous les opérateurs de Fredholm de E dans F.*

Définition 1.8 *L'indice d'un opérateur de Fredholm est la fonction à valeurs entières suivante :*

$$\begin{aligned} ind &: \mathcal{F}(E, F) \to \mathbb{Z} \\ A &\longmapsto ind(A) = \dim N(A) - co\dim R(A). \end{aligned}$$

Proposition 1.3 *Soit $A : E \to F$ un opérateur linéaire de Fredholm, où E et F sont deux espaces de Banach sur le même corps $\Bbbk$. Alors*

(1) A est surjectif si, et seulement si $ind(A) = \dim N(A)$.

(2) A est injectif si, et seulement si $\dim N(A) = 0$.

(3) A est bijectif si, et seulement si $ind(A) = \dim N(A) = 0$.

(4) L'équation $Au = b$, $u \in E$, est bien posée si, et seulement si $ind(A) = \dim N(A) = 0$.

Théorème 1.14 *Soient E et F deux espaces de Banach sur le même corps $\Bbbk$. Alors l'opérateur*

$B + C : E \to F$ est de Fredholm d'indice zero sous les conditions suivantes :

(i) L'opérateur linéaire $B : E \to F$ est borné et bijectif,

(ii) L'opérateur linéaire $C : E \to F$ est compact.

1.1.6 Lattis de Banach

Définition 1.9 *Un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, muni d'une relation de l'ordre $\leqq$, est appelé un espace vectoriel ordonné si ces axiomes sont satisfaits*

(LO)$_1$ $x \leqq y \Longrightarrow x+z \leqq y+z$ pour tout $x, y, z \in E$,

(LO)$_2$ $x \leqq y \Longrightarrow \lambda x \leqq \lambda y$ pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Un lattis vectoriel est un espace vectoriel ordonné tels que $x \vee y = \sup\{x, y\}$ et $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ existent pour tout $x, y \in E$.

Un lattis vectoriel est appelé aussi un espace de Riesz ou un lattis linéaire. Si $(E, \leqq)$ est un espace vectoriel ordonné, le sous ensemble $E_+ = \{x \in E : x \geqq 0\}$ est appelé un cône positif de E. Les éléments $x \in E_+$ sont appelés positifs.

Définition 1.10 *Soit E un lattis vectoriel. Pour tout $x \in E$, on définit $x^+ = x \vee 0, x^- = (-x) \vee 0$, $|x| = x \vee (-x)$. x^+, x^-et $|x|$ sont appelés la partie positive, la partie négative, et le module (ou la valeur absolu) de x, respectivement.*

Proposition 1.4 *Soit E un lattis vectoriel. Pour tout $x \in E$, on a $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.*

Définition 1.11 *Soit E, F deux espaces vectoriels ordonnés et soit $T : E \to F$ un opérateur linéaire. T est appelé positif (dans le symbole : $T \geqq 0$) si $Tx \geqq 0$ pour tout $x \geqq 0; T$ est appelé strictement positif (dans le symbole : $T \gg 0$) si $Tx > 0$ pour tout $x > 0$.*

Proposition 1.5 *Si E, F sont des espaces vectoriels ordonnés, l'ensemble $K \subset \mathcal{L}(E, F)$ de tous les opérateurs linéaires positifs satisfait $K + K \subset K$ et $\lambda K \subset K$ pour tout $\lambda \geqq 0$. Si $K \cap -K = \{0\}$, alors K est le cône positif pour un ordre appelé ordre canonique de $\mathcal{L}(E, F)$; si $F \neq \{0\}, K \cap -K = \{0\}$ est équivalente à $E = E_+ - E_-$ est vérifiée, en particulier, toutes les fois E est un lattis vectoriel.*

Définition 1.12 *Soit E un lattis vectoriel. Une semi-norme (norme) p sur E est appelée une lattis semi-norme (lattis norme) si $|x| \leq |y|$ implique $p(x) \leq p(y)$ pour tout x, $y \in E$. Si p est une lattis norme sur E, la paire (E, p) est appelée un lattis vectoriel normé si, de plus, (E, p) est complet il est appelé un lattis de Banach.*

CHAPITRE II

Problème aux Limites pour une Equation Différentielle Abstraite du Premier Ordre avec Condition Intégrale.

Chapitre 2

Problème aux Limites pour une Equation Différentielle Abstraite du Premier Ordre avec Condition Intégrale.

2.1 Introduction

Le premier papier consacré à l'étude d'un problème aux limites non local avec des condition du types intégrales revient à [1]. Les conditions non locales plus générales pour différents types d'équations aux dérivées partiellles ont été considérées plus tard dans [2, 3, 4, 5, 6, 10]. Ce chapitre est consacré à l'étude d'un problème aux limites pour une équation différentielle abstraite du premier ordre avec condition aux limites du type intégrale. L'étude est faite par la réduction du problème à une équation opératorielle, on établit sous certaines conditions imposées sur le coefficient opératoriel des conditions nécessaires et suffisantes qui garantissent l'existence et l'uncité de la solution, puis on établit une estimation à priori. On montre aussi que l'opérateur engendré par le problème étudié est un opérateur de Fredholm. Enfin on considère le cas où le coefficient opératoriel est perturbé par un opérateur borné, et on montre que la solution du problème perturbé est stable.

2.2 Position du Problème

Dans l'espace de Banach E on considère l'equation différentielle

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \ 0 \leq t \leq T, \tag{2.1}$$

où A est un opérateur fermé définit de E dans E à domaine dense $D(A)$ et générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $U(t)$, $0 \leq t \leq T$.

Définition 2.1 *La fonction $u(t) = U(t)f$, $0 \leq t \leq T$, correspondante a un certain élément $f \in E$ est dite solution généralisée de l'équation (2.1). Si, de plus , $f \in D(A)$, alors la solution $u(t) = U(t)f$ est dite solution classique.*

Remarque 2.1 *Dans le cas où $f \in D(A)$, f coincide avec l'état initial $u(0)$ de la solution corréspondante $u(t)$.*

Supposons que l'élément f est inconnue, et qu'à l'équation (2.1), on associe la condition supplémentaire

$$\int_0^T w(t)u(t)dt = g, \tag{2.2}$$

où $g \in E$ est donnée. Ici $w(t)$ est une fonction scalaire mesurable à variation bornée sur l'intervalle $[0, T]$.

Remarque 2.2 *L'intégrale figurant dans (2.2) est bien définie au sens de Bochner pour toute fonction $u(t) = U(t)f$.*

Définition 2.2 *On appelle solution généralisée du problème (2.1), (2.2) toute fonction $u(t) = U(t)f$, $0 \leq t \leq T$, correspondante à un certain élément $f \in E$ et vérifiant la* *condition (2.2). Si, de plus, $f \in D(A)$, alors la solution correspondante $u(t) = U(t)f$ du problème(2.1), (2.2) est dite solution classique.*

2.3 Existence et unicité de la solution

Il est clair qu'une solution généralisée de l'équation (2.1) peut être representée sous la forme $u(t) = U(t)f$, où $f \in E$. Par conséquent, la fonction $u(t) = U(t)f$ est une solution généralisée du problème (2.1), (2.2) si elle vérifie l'équation

$$\int_0^T w(t)U(t)f dt = g. \tag{2.3}$$

Notation. On note par B l'opérateur définit de E dans E par

$$Bf = g, \tag{2.4}$$

où

$$Bf = \int_0^T w(t)U(t)f dt.$$

Remarque 2.3 *L'opératuer B est borné de E dans E.*

Ainsi on a le lemme suivant.

Lemme 2.1 *L'opérateur B applique E dans $D(A)$.*

Démonstration. Tout d'abord si $f \in D(A)$, alors $u(t) = U(t)f$ est une solution classique de l'équation (2.1) et

$$U(t)Af = AU(t)f = \frac{d}{dt}(U(t)f).$$

Par conséquent

$$BAf = \int_0^T w(t)U(t)Af dt = \int_0^T w(t)AU(t)f dt.$$

Comme A est un opérateur fermé, il s'ensuit que

$$\int_0^T w(t)AU(t)fdt = A\int_0^T w(t)U(t)fdt = ABf.$$

D'où $Bf \in D(A)$, et en plus

$$ABf = \int_0^T w(t)\frac{d}{dt}(U(t)f)dt = \int_0^T w(t)d(U(t)f).$$

En utilisant une intégration par parties, on obtient

$$\int_0^T w(t)d(U(t)f) = w(T)U(T)f - w(0)f - \int_0^T U(t)fd(w(t)).$$

Considérons maintenant le cas où f est un élément arbitraire de E, comme $D(A)$ est dense dans E alors il existe une suite $\{f_n\} \subset D(A)$ convergente vers f.

Comme B est un opérateur borné, alors $Bf_n \to Bf$ et

$$ABf_n = w(T)U(T)f_n - w(0)f_n - \int_0^T U(t)f_n d(w(t)) \to$$

$$w(T)U(T)f - w(0)f - \int_0^T U(t)fd(w(t)), \text{pour } n \to \infty.$$

De nouveau comme A est un opérateur fermé, il s'ensuit que $Bf \in D(A)$ et

$$ABf = w(T)U(T)f - w(0)f - \int_0^T U(t)fd(w(t)). \tag{2.5}$$

Donc, pour tout $f \in E$ on conclut que $Bf \in D(A)$. ■

Remarque 2.4 *Si $g \in E \setminus D(A)$, alors le problème (2.1), (2.2) n'admet pas de solution généralisée.*

Remarque 2.5 *La solution f est classique i.e, $f \in D(A)$ si, et seulement $g \in D(A^2)$.*

Démonstration. Notons par

$$E_1 = \{g \in E;\ u(t) = U(t)f,\ \text{où } f \in D(A)\},$$

et montrons que $E_1 = D(A^2)$. On a

$$E_1 = B\left(D(A)\right) = B\left((\lambda I - A)^{-1} E\right) = B\left(R_\lambda\left(A\right)E\right).$$

Tout d'abord montrons que $R_\lambda\left(A\right)$ et B commuttent.En effet soit $f \in E$, on a

$$BR_\lambda\left(A\right)f = \int\limits_0^T w\left(t\right)U\left(t\right)R_\lambda\left(A\right)fdt = \int\limits_0^T w\left(t\right)R_\lambda\left(A\right)U\left(t\right)fdt,$$

et comme $R_\lambda\left(A\right)$ est fermé, alors

$$BR_\lambda\left(A\right)f = R_\lambda\left(A\right)\left(\int\limits_0^T w\left(t\right)U\left(t\right)fdt\right) = R_\lambda\left(A\right)Bf.$$

Donc

$$BR_\lambda\left(A\right)f = R_\lambda\left(A\right)Bf \;\forall f \in E.$$

D'où

$$BR_\lambda\left(A\right) = R_\lambda\left(A\right)B.$$

D'ici on a

$$\begin{aligned} E_1 &= B\left(D(A)\right) = B\left((\lambda I - A)^{-1} E\right) \\ &= B\left(R_\lambda\left(A\right)E\right) = R_\lambda\left(A\right)BE \\ &= R_\lambda\left(A\right)D\left(A\right) = D\left(A^2\right), \end{aligned}$$

d'où le resultat. ∎

Lemme 2.2 *Pour tout $g \in D\left(A\right)$, la fonction $u(t) = U(t)f$ est une solution généralisée du problème (2.1), (2.2) si, et seulement si l'élément f satisfait l'équation opératorielle*

$$Uf = \Psi, \tag{2.6}$$

où

$$U \equiv J - K + \lambda L, \tag{2.7}$$

avec J, K, et L sont des opérateurs bornés définis par

$$J \equiv w(0)I, \tag{2.8}$$

$$K \equiv w(T)U(T) + \int_0^T U(t)d(-w(t)), \tag{2.9}$$

$$L \equiv \int_0^T w(t)U(t)dt, \tag{2.10}$$

et l'élément $\Psi \in E$ dans l'équation (2.6) à la forme

$$\Psi = (\lambda I - A)g \tag{2.11}$$

Remarque 2.6 *Les intégrales des fonctions opératorielles sont définies au sens de la topologie forte de $\mathcal{L}(E)$.*

Démonstration du Lemme 2.2. Supposons que pour tout $g \in D(A)$ la fonction $u(t) = U(t)f$ est une solution généralisée du problème (2.1), (2.2), alors la fonction $u(t) = U(t)f$ vérifie l'équation

$$\int_0^T w(t)U(t)fdt = g.$$

En appliquant l'opérateur $(\lambda I - A)$, où $\lambda \in \rho(A)$ à cette dernière, on obtient

$$(\lambda I - A)\int_0^T w(t)U(t)fdt = (\lambda I - A)\, g.$$

Comme l'opérateur A est fermé, il s'ensuit que

$$= \lambda \int_0^T w(t)U(t)fdt - \int_0^T w(t)AU(t)fdt = (\lambda I - A)\, g, \tag{2.12}$$

d'autre part, comme la fonction $u(t) = U(t)f$ est une solution généralisée de l'équation (2.1), on a

$$\lambda \int_0^T w(t)U(t)fdt - \int_0^T w(t)AU(t)fdt = \lambda \int_0^T w(t)U(t)fdt - \int_0^T w(t)\frac{d}{dt}\left(U(t)f\right)dt$$

$$= \lambda \int_0^T w(t)U(t)f dt - \int_0^T w(t)d\left(U(t)f\right) = (\lambda I - A)\, g.$$

En intégrant par parties le terme

$$\int_0^T w(t)d\left(U(t)f\right),$$

on obtient

$$\int_0^T w(t)d\left(U(t)f\right) = w(T)U(T)f - w(0)f - \int_0^T U(t)f d\left(w(t)\right). \tag{2.13}$$

De (2.12) et (2.13) on trouve

$$\lambda \int_0^T w(t)U(t)f dt - w(T)U(T)f + w(0)f - \int_0^T U(t)f d\left(-w(t)\right) = (\lambda I - A)\, g$$

Ainsi donc on a bien l'équation opératorielle pour l'élément f

$$Uf = Jf - Kf + \lambda Lf = \Psi. \tag{2.14}$$

où J, K, et L sont des opérateurs linéaires définis par les formules (2.8), (2.9), (2.10) respectivement et l'élement Ψ est definit par (2.11).

Il reste maintenant à montrer que les opérateurs définis par les formules (2.8), (2.9), (2.10) sont bornés.

Il est clair que l'opérateur J est un opérateur borné.

D'autre part de (2.9) on a pour tout $f \in E$

$$\|Kf\| = \left\| w(T)U(T)f + \int_0^T U(t)f d\left(-w(t)\right) \right\| \leq \|w(T)U(T)f\| + \left\| \int_0^T U(t)f d\left(-w(t)\right) \right\|$$

$$\leq |w(T)| \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|U(t)f\| \right) + \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|U(t)f\| \right) Var\left\{(-w(t))\right\} |_0^T)$$

$$\leq \left(|w(T)| \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|U(t)\| \right) + \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|U(t)\| \right) Var\left\{(-w(t))\right\} |_0^T \right) \|f\| \leq C \|f\|,$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de f. Ainsi l'opérateur K est borné.

De (2.10) on a pour tout $f \in E$

$$\|Lf\| = \left\| \int_0^T w(t)U(t)f dt \right\| \leq T \sup_{0\leq t\leq T} |w(t)| \sup_{0\leq t\leq T} \|U(t)f\|$$

$$\leq \left(T \sup_{0\leq t\leq T} |w(t)| \sup_{0\leq t\leq T} \|U(t)\| \right) \|f\| \leq C \|f\| .$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de f. D'où l'opérateur L est borné.

Réciproquement supposons que pour tout $g \in D(A)$ l'élément f est une solution de l'équation opératorielle

$$Uf = Jf - Kf + \lambda Lf = \Psi,$$

i.e.,

$$w(0)f - w(T)U(T)f - \int_0^T U(t)fd(-w(t)) + \lambda \int_0^T w(t)U(t)fdt = (\lambda I - A) g. \qquad (2.15)$$

De nouveau en intégrant par parties le terme

$$-w(T)U(T)f + w(0)f - \int_0^T U(t)fd(-w(t)),$$

on obtient

$$-w(T)U(T)f + w(0)f + w(T)U(T)f - w(0)f - \int_0^T w(t)d(U(t)f) = - \int_0^T w(t)d(U(t)f).$$

D'ici et de (2.15), résulte que

$$\lambda \int_0^T w(t)U(t)fdt - \int_0^T w(t)d(U(t)f) = (\lambda I - A) g,$$

d'où

$$\lambda \int_0^T w(t)U(t)fdt - \int_0^T w(t)\frac{d}{dt}(U(t)f) dt = (\lambda I - A) g.$$

De nouveau comme A est un opérateur fermé et la fonction $u(t) = U(t)f$ est une solution généralisée de l'équation (2.1) alors on a

$$\lambda \int_0^T w(t)U(t)fdt - A\int_0^T w(t)U(t)fdt = (\lambda I - A)\, g,$$

d'où

$$(\lambda I - A)\int_0^T w(t)U(t)fdt = (\lambda I - A)\, g,$$

comme $\lambda \in \rho(A)$ alors

$$(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)\int_0^T w(t)U(t)fdt = (\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)\, g,$$

d'où

$$\int_0^T w(t)U(t)fdt = g.$$

Ainsi la fonction $u(t) = U(t)f$ est une solution généralisée du problème (2.1), (2.2). D'où le lemme est démontré.

Remarque 2.7 *Dans la définition de l'opérateur U et l'élément Ψ, on a choisit le paramètre λ arbitrairement dans $\rho(A)$ et ce pour montrer l'équivalence entre le problème (2.1), (2.2) et l'équation opératorielle (2.6). Puisque ce choix ne joue pas un rôle important dans le raisonnement ci-dessus. D'où par la suite on va considérér λ fixé dans $\rho(A)$ pour que l'opérateur U et l'élément Ψ, soient déterminés d'une manière unique.*

Théorème 2.1 *Pour tout $g \in D(A)$ le problème (2.1), (2.2) admet une solution généralisée unique si, et seulement si $U^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.*

Démonstration. L'équivalence du problème (2.1), (2.2) et l'équation (2.6) découle du Lemme 2.2. Montrons que pour l'éxistence et l'unicité de la solution généralisée du problème (2.1), (2.2) il est nécessaire et suffisant que $U^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.

La suffisance est évidente, en effet, si $U^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, alors la fonction $u(t) = U(t)f$, où $f = U^{-1}\Psi$, et Ψ est défini par (2.11), sera la solution généralisée unique du problème

(2.1), (2.2).

Nécessité : Supposons que pour tout $g \in D(A)$ le problème (2.1), (2.2) admet une solution généralisée unique. Alors pour tout Ψ défini par (2.11) il existe une solution unique de (2.6). D'autre part si $g \in D(A)$, alors l'élément $\Psi \in E$. Par conséquent, (2.6) admet une solution unique f pour tout Ψ dans E, i.e., l'opérateur inverse $U^{-1} : E \to E$ existe, puisque l'opérateur U est borné, par le théorème de Banach sur l'homoemorphisme, $U^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, ainsi le théorème est démontré. ■

2.4 Estimation à priori

Maintenant on montre que pour la solution du problème (2.1), (2.2) on a l'estimation à priori suivante.

Théorème 2.2 *Supposons que pour tout $g \in D(A)$ le problème (2.1), (2.2) admet une solution généralisée unique. Alors pour cette solution on a l'estimation*

$$\|u(t)\| \leq C(\||g|\|) \tag{2.16}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de g.

Démonstration. Spposons que le problème (2.1), (2.2) admet une solution généralisée unique. Alors en vertu du Théorème 2.1 cette solution s'écrit sous la forme

$$u(t) = U(t)f, \text{ où } f = U^{-1}\Psi, \ U^{-1} \in \mathcal{L}(E),$$

et l'élément Ψ est donné par la formule (2.11). Par conséquent,

$$\|f\| \leq \left\|U^{-1}\right\| \|\Psi\|.$$

D'ici, on a

$$\|u(t)\| = \|U(t)f\| \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \|U(t)f\| \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \|U(t)\| \|f\|$$

$$\leq \sup_{0\leq t\leq T} \|U(t)\| \left\|U^{-1}\right\| \|\Psi\| = \sup_{0\leq t\leq T} \|U(t)\| \left\|U^{-1}\right\| \|(\lambda I - A)\, g\|$$

$$\leq C\,(\|g\| + \|Ag\|) = C(\||g|\|)$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de g. Ainsi le théorème est démontré. ■

Remarque 2.8 *Dans l'estimation (2.16) en general* $\|Ag\|$ *ne peut pas être remplacé par* $\|g\|$ *plus exactement on ne peut pas avoir l'éstimation* $\|u\,(t)\| \leq C\,\|g\|$, *pour tout choix de la constante* $C > 0$.

En effet, soit $E = BU\,(-\infty, +\infty)$ l'espace de fonctions uniformement continues et bornées sur $\mathbb{R}$ munit de la norme usuelle, $\|.\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |.|$. Considérons le problème suivant :

$$\frac{\partial u\,(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u\,(x,t)}{\partial x} - u\,(x,t)\,,\ \ x \in \mathbb{R},\ \ t \in [0,T]\,; \tag{2.17}$$

$$\int_0^T u\,(x,t)\,dt = g\,(x)\,,\ \ x \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

Il est clair que le problème (2.17), (2.18) s'écrit sous la forme

$$\frac{du\,(t)}{dt} = Au\,(t) \tag{2.19}$$

$$\int_0^T u\,(t)\,dt = \overline{g}, \tag{2.20}$$

où $u(x,.) : [0,T] \longrightarrow BU(-\infty,+\infty)$

$$t \longmapsto u(x,t) = u(t)$$

$A = \left(\frac{d}{dx} - I\right)$, $\overline{g} = g(x)$ et $u(t) = u(x,t)$.

Il est clair aussi que l'opérateur A est le générateur infinitésimal du C_0 semi-groupe $(U(t))_{t\geq 0}$ défini par $(U(t)f)(x) = \exp(-t)f(x+t)$, où $f \in E = BU(-\infty,+\infty)$. Car A est fermé, à domaine dense, $\{\lambda; \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(A)$ et $D(A) = C^1(-\infty,+\infty)$.

En effet on a :

$$D(A) = \left\{ f \in E : \lim_{h\to 0} \frac{(U(h)-I)}{h}(f) \text{ existe} \right\},$$

comme

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \tfrac{(U(h)-I)}{h}(f)(x) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{U(h)(f)(x)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{\exp(-h)f(x+t)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{\exp(-h)f(x+t)-f(x+h)+f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{\exp(-h)-1}{h} f(x+h) + \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x+h)-f(x)}{h}
\end{aligned}$$

vu le fait que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(-h)-1}{h} f(x+h) = -f(x),$$

car f est continue, et

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).$$

Ainsi

$$D(A) = \left\{ f \in E : f' \in E \right\} = C^1(-\infty,+\infty).$$

Estimons maintenant $U(t)$

Pour tout $f \in E$ $f \neq 0$ on a

$$\|U(t)f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |(U(t)f)(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\exp(-t)f(x+t)| \leq \exp(-t) \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|,$$

d'où

$$\|U(t)f\| \leq \exp(-t)\|f\|, \forall f \in Ef \neq 0,$$

ainsi

$$\frac{\|U(t)f\|}{\|f\|} \leq \exp(-t), \forall f \in E \; f \neq 0,$$

alors

$$\sup_{f\neq 0} \frac{\|U(t)f\|}{\|f\|} \leq \exp(-t),$$

donc

$$\|U(t)\| \leq \exp(-t).$$

Posons

$$\begin{aligned} g(x) &= g_n(x) = \frac{1}{n^2+1}\left[\sin(nx) - \exp(-T)\sin(n(x+T))\right] \\ &\quad + \frac{n}{n^2+1}\left[\cos(nx) - \exp(-T)\cos(n(x+T))\right], \end{aligned}$$

et notons par

$$u(x,t) = u_n(x,t) = \exp(-t)\sin(n(x+t))$$

la solution correspondante du problème (1), (2) En vertu du Théorème 2.1 cette solution est unique pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet on a :

$$\int_0^T u_n(x,t)\,dt = \int_0^T \exp(-t)\sin(n(x+t))\,dt.$$

En faisant une intégration par partie deux fois on obtient :

$$\int_0^T u_n(x,t)\,dt = g_n(x).$$

D'autre part

$$\|g_n\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| \leq \frac{2(n+1)}{n^2+1} \to 0, n \to +\infty.$$

mais

$$\|u_n(.,t)\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x,t)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\exp(-t)\sin(n(x+t))| = \exp(-t) \neq 0 \;\forall t \geq 0.$$

Ce qui montre que l'estimation

$$\|u(.,t)\| \leq C\|g\|$$

n'a pas lieu pour tout choix de C.

Définition 2.3 *On dira que le problème (2.1), (2.2) est bien posé, si pour tout* $g \in D(A)$ *le problème (2.1), (2.2) admet une soluton générlisée unique* $u(t) = U(t)f$*, où* $f \in E$*, et que cette solution dépend continûment du second membre.*

Corollaire 2.1 *Le problème (2.1), (2.2) est bien posé si, et seulement si* $U^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.

2.5 Propriété de Fredholm du problème

On montre maintenant que sous certaines conditions ; imposées sur le coeficient opératoriel A et la fonction poids figurant dans la condition intégrale ; l'opérateur engendré par le problème en question est un opérateur de Fredholm.

Définition 2.4 *Le noyau du problème (2.1), (2.2) est l'ensemble des éléments* $u(t) = U(t)f$, $f \in E$ *qui sont solutions du problème homogène suivant*

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t), \; 0 \leq t \leq T, \\ \int\limits_0^T w(t)u(t)dt = 0. \end{cases}$$

Si cet ensemble contient seulement l'élément nul, alors le noyau du problème (2.1), (2.2) est dit trivial.

Lemme 2.3 *Le noyau du problème (2.1), (2.2) coincide avec le noyau de l'opérateur* U*. C'est un sous espace fermé de* E*.*

Lemme 2.4 $\forall g \in D(A)$ *le problème (2.1), (2.2) admet une solution généralisée unique si, et seulement si son noyau est trivial.*

Corollaire 2.2 *Le problème (2.1), (2.2) est bien posé si, et seulement si son noyau est trivial.*

Enonçons maintenant le résultat princpal de cette section.

Théorème 2.3 *Supposons que le le semigroupe $U(t)$ est compact pour $t > 0$, et que la fonction $w(t)$ est continue à droite au point $t = 0$ et $w(0) \neq 0$. Alors pour le problème (2.1), (2.2) on a*

1. *Son noyau est de dimension finie ;*
2. *Si son noyau est trivial, alors $\forall g \in D(A)$ ce problème est bien posé.*

La démonstration du Théorème 2.3 est basée sur le lemme suivant.

Lemme 2.5 *Sous les mêmes conditions du théorème précédent. Les opérateurs K et L définis par les formules (2.9) et (2.10) sont compacts.*

Démonstration. En premier lieu, montrons la compacité de L.

Soit $\varepsilon > 0$, et

$$L_\varepsilon \equiv \int_\varepsilon^T w(t)U(t)dt.$$

Puisque $U(t)$ est un opérateur compact pour chaque $t > 0$, L_ε est compact et pour tout $f \in E$ on a l'éstimation

$$\begin{aligned} \|Lf - L_\varepsilon f\| = \left\| \int_0^\varepsilon w(t)U(t)dt \right\| &\leq \varepsilon(\sup_{0\leq t\leq\varepsilon} \|U(t)f\| \sup_{0\leq t\leq T} |w(t)|) \\ &\leq \varepsilon(\sup_{0\leq t\leq\varepsilon} \|U(t)\| \sup_{0\leq t\leq T} |w(t)|) \|f\| \end{aligned}$$

de plus,

$$\varepsilon(\sup_{0\leq t\leq\varepsilon} \|U(t)\| \sup_{0\leq t\leq T} |w(t)|) \|f\| \to 0 \text{ quand } \varepsilon \to 0^+.$$

Par conséquent l'opérateur L est compact comme étant une limite uniforme d'une suite d'opérateurs compacts. Montrons maintenant la compacité de l'opérateur K. Ecrivons l'opérateur K sous la forme

$$K = K_1 + K_2,$$

où

$$K_1 \equiv w(T)U(T),$$

$$K_2 \equiv \int_0^T U(t)d(-w(t)).$$

Puisque l'opérateur $U(T)$ est compact, alors l'opérateur K_1 est compact. Pour l'opérateur K_2 soit $\varepsilon > 0$ et

$$K_{2\varepsilon} \equiv \int_\varepsilon^T U(t)d(-w(t)).$$

De nouveau puisque l'opérateur $U(t)$ est compact pour chaque $t > 0$, $K_{2\varepsilon}$ est compact, et pour tout $f \in E$ on a l'éstimation

$$\|K_2 f - K_{2\varepsilon} f\| = \left\| \int_0^\varepsilon U(t) f d(-w(t)) \right\|$$

$$\leq \left(\sup_{0 \leq t \leq \varepsilon} \|U(t)f\| \right) Var \left\{ (-w(t)) \right\} |_0^\varepsilon$$

$$\leq \left(\sup_{0 \leq t \leq \varepsilon} \|U(t)\| \right) Var \left\{ (-w(t)) \right\} |_0^\varepsilon \|f\|$$

$$\leq C Var \left\{ -w(t) \right\} |_0^\varepsilon \|f\|,$$

de plus $Var \{-w(t)\} |_0^\varepsilon \to 0$ quand $\varepsilon \to 0^+$, et par conséquent K_2 est compact comme étant une limite uniforme d'une suite d'opérateurs compacts. Comme la somme de deux opérateurs compacts est compact il s'ensuit que l'opérateur K est compact, ainsi le lemme est démontré. ■

Démonstration du Théorème 2.3. Comme $w(0) \neq 0$, alors $J^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. D'autre part du lemme précédent les opérateurs K et L sont compacts, donc l'opérateur $U = J - K + \lambda L$ est un opérateur de Fredholm. D'où son noyau est de dimension finie. Ainsi 1 est démontré. Maintenant montrons 2. Si le noyau du problème est trivial, alors en vertu du Lemme 2.3 le noyau de l'opérateur U est trivial donc $U^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ car l'opérteur U est de Fredholm. D'où le problème (2.1), (2.2) est bien posé. Ainsi le théorème est démontré.

Remarque 2.9 *Le Théorème 2.3 montre que l'opérateur U engendré par le problème (2.1), (2.2) est de Fredholm d'indice zéro.*

2.6 Applications

Maintenant on va illustrer les résultats obtenus par des exemples.

Théorème 2.4 *Soit $w(t)$ une fonction non négative non croissante pour $t \in [0, T]$ telle que $w(t) > 0$ quand $t \to 0^+$, et supposons que le semi-groupe $U(t)$ satisfait l'estimation*

$$\|U(t)\| \leq M \exp(-\beta t),$$

avec les constantes $M \geq 1$, $\beta > 0$.

Alors le problème (2.1), (2.2) est bien posé.

Avant d'aborder la démonstration de ce théorème on a besoin du lemme suivant.

Lemme 2.6 $\|.\|_1$ *et* $\|.\|$, *sont équivalentes, où* $\|.\|_1$ *est définit par*

$$\|h\|_1 = \sup_{t \geq 0} \|\exp(\beta t) U(t) h\| , \ \ h \in E,$$

de plus on a

$$\|U(t)\|_1 \leq \exp(-\beta t).$$

Démonstration. On a pour tout $h \in E$

$$\|h\| \leq \|h\|_1 = \sup_{t \geq 0} \|\exp(\beta t) U(t) h\| = \sup_{t \geq 0} \exp(\beta t) \|U(t) h\|$$

$$\leq \sup_{t \geq 0} \exp(\beta t)\, M \exp_{t \geq 0}(-\beta t) \|h\| \leq M \|h\|$$

On a donc, pour cette norme équivalente

$$\|U(t)h\|_1 = \sup_{s \geq 0} \|\exp(\beta s)(U(s)U(t)h\| = \sup_{s \geq 0} \exp(\beta s) \|(U(s+t)h\|$$

$$= \sup_{s \geq 0} [\exp(-\beta t) \exp(\beta (s+t))] \|(U(s+t)h\| \leq \exp(-\beta t) \|h\|_1$$

car $\{s + t \geq 0\} \subset \{s \geq 0\}$. Ainsi le lemme est démontré.

■

Remarque 2.10 *Sous les conditions du théorème précédent le spectre $\sigma(A)$ de l'opérateur A est contenu dans le demi-plan $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda \leq -\beta < 0\}$, ce qui implique que $0 \in \rho(A)$,ainsi le problème (2.1), (2.2) est équivalent à l'équation opératorielle,*

$$(w(0)I - K)f = \Psi,$$

où l'opérateur Kest donné par(2.9).et $\Psi = -Ag$.

Montrons maintenant le théorème.

Démonstration du Théorème 2.4. Le but de la démonstration est de montrer que $(w(0)I - K)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, pour cela il suffit de montrer que

$$\|K\|_1 < w(0).$$

Estimons maintenant l'opérateur K.

Pour tout $f \in E$ on a

$$\begin{aligned}
\|Kf\|_1 &= \left\| w(T)U(T)f + \int_0^T U(t)fd\left(-w(t)\right) \right\|_1 \\
&\leq \|w(T)U(T)f\|_1 + \left\| \int_0^T U(t)fd\left(-w(t)\right) \right\|_1 \\
&\leq \left(w(T)\exp(-\beta T)\right)\|f\| + \left(\int_0^T \exp(-\beta t)d(-w(t)) \right)\|f\| .
\end{aligned}$$

En intégrant par parties le second membre de cette dernière inégalité, on obtient que

$$\begin{aligned}
\|Kf\|_1 &\leq \left(w(T)\exp(-\beta T)\right)\|f\| - \left(w(T)\exp(-\beta T)\right)\|f\| \\
&+ w(0)\|f\| - \left(\beta \int_0^T \exp(-\beta t)w(t)dt \right)\|f\| \\
&= w(0)\|f\| - \left(\beta \int_0^T \exp(-\beta t)w(t)dt \right)\|f\| .
\end{aligned}$$

Puisque $\beta \int\limits_0^T \exp(-\beta t) w(t) dt$ est positive sous les hypothèses du théorème, il s'ensuit que

$$w(0) - \beta \int\limits_0^T \exp(-\beta t) w(t) dt < w(0),$$

donc

$$\|Kf\|_1 \leq w(0) \|f\|,$$

ainsi

$$\|K\|_1 \leq w(0).$$

Par conséquent en vertu du Théorème 2.1 le problème (2.1), (2.2) est bien posé. Ainsi le théorème est démontré.

Remarque 2.11 *Dans le cas où $T = +\infty$ ce résultat coincide avec [21].*

Dans toute la suite nous supposerons que E est un espace de Banach ordonné par un cône fermé E_+. Si $L \in \mathcal{L}(E)$ est un opérateur positif, i.e., $L(E_+) \subset E_+$, nous écrirons $L \geq 0$. Un semigroupe $U(t)$ est dit positif si $U(t)$ est positif pour tout $t \geq 0$.

Théorème 2.5 *Soit $w(t)$ une fonction non négative non croissante pour $t \in [0, T]$, telle que $w(t) > 0$ quand $t \to 0^+$, et supposons que le semi-groupe $U(t)$ engendré par l'opérateur A est positif et compact pour $t > 0$. Supposons que le spectre de l'opérateur A est contenu dans le demi-plan*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}.$$

Alors le problème (2.1), (2.2) est bien posé.

Remarque 2.12 *Si le semi-groupe $U(t)$ est positif, alors $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est une fonction opératorielle positive pour tout $\lambda \in \rho(A)$. Notons par*

$$s(A) \equiv \sup \{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$$

la limite spéctrale de A.

Remarque 2.13 *Si $U(t)$ est compact, la condition*

$$\|U(t)\| \leq M \exp(-\beta t)$$

est équivalente à $s(A) < 0$.

Remarque 2.14 *Si $s(A) < 0$, alors $0 \in \rho(A)$.*

Remarque 2.15 *Si $U(t)$ est positif et $s(A) < 0$, alors le problème (2.1), (2.2) est équivalente à l'équation opératorielle*

$$Uf = \Psi,$$

où

$$U = J - K,$$

avec

$$J = w(0)I,$$

$$K = w(T)U(T) + \int_0^T U(t)d(-w(t)).$$

Démonstration du Théorème.2.5 En premier lieu, on montre l'unicité de la solution du problème homogène associe au problème (2.1), (2.2), puis, on conclut la démnstration du théorème à l'aide du Théorème 2.3. Fixons un élément $u(t) = U(t)f$ appartenant au noyau du problème (2.1), (2.2) et montrons que $u(t) = 0$, i.e., $f = 0$. En utilisant le fait que l'espace E est un lattis, l'élément f s'écrit sous la forme $f = f^+ - f^-$, où $f^+ = \sup(f, 0)$, $f^- = \sup(-f, 0)$. Il est clair que l'on a, $f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$ et $\inf(f^+, f^-) = 0$. De plus, il est évident que la fonction $u(t) = U(t)f$ vérifie

$$\int_0^T w(t)U(t)f^+dt = \int_0^T w(t)U(t)f^-dt. \tag{2.21}$$

Notons par φ l'élément de E définit par l'un des membres de l'égalité (2.21).
De (2.21) on obtient facilement

$$A\varphi + Jf^+ = Kf^+, A\varphi + Jf^- = Kf^-, \tag{2.22}$$

où les opérateurs J, K sont donnés par (2.8), (2.9) respectivement. On a

$$A\varphi + Jf^+ \geq 0, A\varphi + Jf^- \geq 0,$$

cela résulte du faite que le semi-groupe $U(t)$ et l'opérateur K sont positifs, d'où

$$-A\varphi \leq \inf(Jf^+, Jf^-). \tag{2.23}$$

Posons $x \equiv \inf(Jf^+, Jf^-)$. Comme $J \equiv w(0)I \geq 0$, alors $x \geq 0$. De plus, puisque $J^{-1} \geq 0$, les inégalités $Jf^+ \geq x$, $Jf^- \geq x$ impliquent $J^{-1}x \leq \inf(f^+, f^-) = 0$, donc $x \leq 0$, on obtient forcément que, $x = 0$. D'ici et de (2.22), on conclut que $A\varphi \geq 0$. De la Remarque 2.10 on déduit que $\varphi \leq 0$. D'autre part de la définition de φ on a

$$\varphi = \int_0^T w(t)U(t)f^+dt \geq 0.$$

Donc, $\varphi = 0$, i.e., $w(T)U(T)f^+ = 0$, d'où $U(T)f^+ = 0$. D'ici et de l'éxpression de l'opérateur K, il s'ensuit que $Kf^+ = 0$, et donc $Jf^+ = 0$, puisque J est inversible, alors $f^+ = 0$. De la même manière on montre que $f^- = 0$, et donc $f = f^+ - f = 0$. Maintenant en utilisant la compacité de $U(t)$, et le Théorème 2.4 on obtient le résultat. Par conséquent le problème (2.1), (2.2) est bien posé. D'où le théorème est démontré.

2.7 Problème perturbé

Cette partie est consacrée à l'étude du problème (2.1), (2.2) où le coefficient opératoriel est perturbé par un opérateur borné, plus exactement considérons le problème suivant :

$$\frac{du(t)}{dt} = (A + B)u(t), \ 0 \leq t \leq T, \tag{2.24}$$

$$\int_0^T w(t)u(t)dt = g, \tag{2.25}$$

où $B \in \mathcal{L}(E)$. Introduisons la notation suivante $\widetilde{A} = A + B$. Comme B est un opérateur linéaire borné, l'opérateur $\widetilde{A}$ avec $D(\widetilde{A}) = D(A)$ est générateur d'un C_0 semi-groupe $\widetilde{U}(t)$

[18]. On montre que le problème perturbé est bien posé. Plus exactement on a le théorème suivant :

Théorème 2.6 *Supposons que le problème (2.1), (2.2) est bien posé. Alors il existe un nombre $\delta > 0$, dépendant seulement de A et $w(t)$, tel que si $\|B\| \leq \delta$ pour $0 \leq t \leq T$, alors le problème (2.24), (2.2) est bien posé. Pour tout $\varepsilon > 0$ le nombre δ peut être choisit tel que*

$$\left\|\widetilde{u}(t) - u(t)\right\| \leq \varepsilon(\||g|\|), \tag{2.26}$$

où

$$\widetilde{u}(t) = \widetilde{U}(t)\widetilde{f} \text{ et } u(t) = U(t)f,$$

sont des solutions des problèmes (2.1), (2.2) et (2.24), (2.25), respectivement correspondant à $g \in D(A)$ donné.

Remarque 2.16 *De l'estimation (2.26) résulte que $\left\|\widetilde{u}(t) - u(t)\right\| \to 0$ quand $\|B\| \to 0$. Ainsi, la solution du problème bien posé (2.1), (2.2) est stable par rapport aux faibles perturbations de l'opérateurA.*

Démonstration. Sans restreindre du cas général on peut supposer que $\delta \leq 1$. Nous choisissons les constantes M et α ($M \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$) telles que l'estimation

$$\|U(t)\| \leq M\exp(\alpha t),$$

est vérifiée pour le semi-groupe $U(t)$. Dans ce cas les relations suivantes sont vérifiées pour le semi-groupe perturbé $\widetilde{U}(t)$ [18].

$$\left\|\widetilde{U}(t)\right\| \leq M\exp((\alpha + M\|B\|)t),$$

$$\left\|\widetilde{U}(t) - U(t)\right\| \leq M\exp(\alpha t)\left[\exp(M\|B\|t - 1\right].$$

Puisque $\|B\| \leq \delta \leq 1$, pour $0 \leq t \leq T$ on a

$$\left\|\widetilde{U}(t)\right\| \leq M_1, \left\|\widetilde{U}(t) - U(t)\right\| \leq M_2(\exp(MT\delta) - 1). \tag{2.27}$$

(Les constantes $M_1, M_2, ...$ sont des constantes dépendantes seulement des données du problème (2.1), (2.2), i.e., de A, et $w(t)$).

Par un raisonement analogue à celui du Lemme 2.2, on montre que le problème (2.24), (2.25) est équivalente a l'équation opératorielle $\widetilde{U}\widetilde{f} = \widetilde{\Psi}$, où $\widetilde{U} = \widetilde{J} - \widetilde{K} + \lambda\widetilde{L}$ avec les opérateurs $\widetilde{J}$, $\widetilde{K}$, $\widetilde{L}$ définis par les formules (2.8), (2.9), (2.10) en remplaçant $U(t)$ par $\widetilde{U}(t)$, et le paramètre λ est choisit le même dans $\rho\left(\widetilde{A}\right) \cap \rho(A)$.

En effet, comme

$$s(A) \leq \alpha \text{ et } s(A+B) \leq \alpha + M\|B\| \leq \alpha + M,$$

alors on peut choisir $\lambda = \alpha + M + 1$.

En utilisant la forme explicite des opérateurs U, $\widetilde{U}$, et l'estimation (2.27), il est facile de montrer que

$$\left\|\widetilde{U} - U\right\| \leq M_3((\exp(MT\delta) - 1)). \tag{2.28}$$

En effet pour tout $f \in E$ on a

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\widetilde{U} - U\right)(f)\right\| &= \left\|\left(\widetilde{J}f - \widetilde{K}f + \lambda\widetilde{L}f\right) - (Jf - Kf + \lambda Lf)\right\| \\
&= \left\|Kf - \widetilde{K}f + \lambda\widetilde{L}f - \lambda Lf\right\|
\end{aligned}$$

car $\widetilde{J}f = Jf$.

D'où

$$\left\|\left(\widetilde{U} - U\right)(f)\right\| \leq |w(T)| \left\|\widetilde{U}(T) - U(T)\right\| \|f\|$$

$$+ \int_0^T \left\|\widetilde{U}(t) - U(t)\right\| \|f\| \, d(-w(t)) + + |\lambda| \int_0^T |w(t)| \left\|\widetilde{U}(t) - U(t)\right\| \|f\| \, dt$$

$$\leq (|w(T)| M_2(\exp(MT\delta) - 1) + TM_2 Var\{(-w(t))\}|_0^T (\exp(MT\delta) - 1) +$$

$$+ |\lambda| TM_2 \sup_{0 \leq t \leq T} |w(t)| (\exp(MT\delta) - 1)) \|f\| \leq$$

$$\leq M_3((\exp(MT\delta) - 1)) \|f\|,$$

d'où l'inégalité cherchée.

De l'estimation (2.28) résulte que $\left\| \widetilde{U} - U \right\| \to 0$ quand $\delta \to 0$. Par conséquent, pour δ suffisamment petit, $\left\| \widetilde{U} - U \right\|$ peut être choisit aussi petit que l'on veut. D'autre part comme le problème (2.1), (2.2) est bien posé, alors, $U^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. Choisissons δ telle que

$$\left\| \widetilde{U} - U \right\| \leq \left\| U^{-1} \right\|^{-1},$$

d'où on déduit que $\widetilde{U}^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. Ce qui implique que le problème (2.24), (2.25) est bien posé.

Montrons l'estimation (2.26), il est clair que

$$f = U^{-1}\Psi, \text{et } \widetilde{f} = \widetilde{U}^{-1}\widetilde{\Psi},$$

où Ψ, et $\widetilde{\Psi}$ sont définis par la formule (2.11). En utilisant la forme explicite de $\widetilde{\Psi}$, Ψ et le faite que

$$\left\| \widetilde{\Psi} - \Psi \right\| \leq \delta(\|g\|),$$

par conséquent

$$\left\| \widetilde{\Psi} \right\| \leq \|\Psi\| + \left\| \widetilde{\Psi} - \Psi \right\| \leq M_4(\||g|\|).$$

D'où

$$\begin{aligned}
\left\| \widetilde{f} - f \right\| &\leq \left\| \widetilde{U}^{-1} - U^{-1} \right\| \left\| \widetilde{\Psi} \right\| + \left\| U^{-1} \right\| \left\| \widetilde{\Psi} - \Psi \right\| \\
&\leq M_4 \left\| \widetilde{U}^{-1} - U^{-1} \right\| \||g|\| + +\delta \left\| U^{-1} \right\| \|g\| \\
&\leq M_5 \left[\left\| \widetilde{U}^{-1} - U^{-1} \right\| + \delta \right] (\||g|\|). \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

En combinant (2.29) et (2.27), on obtient

$$\begin{aligned}
\left\| \widetilde{u}(t) - u(t) \right\| &= \left\| \widetilde{U}(t)\widetilde{f} - U(t)f + \widetilde{U}(t)f - \widetilde{U}(t)f \right\| \\
&= \left\| \widetilde{U}(t)(\widetilde{f} - f) + \left(\widetilde{U}(t) - U(t) \right) f \right\| \\
&\leq \left\| \widetilde{U}(t) \right\| \left\| (\widetilde{f} - f) \right\| + \left\| \widetilde{U}(t) - U(t) \right\| \|f\| \\
&\leq M_6 \left[\left\| \widetilde{U}^{-1} - U^{-1} \right\| + \delta \right] (\||g|\|) + CM_2(\exp(MT\delta) - 1)(\||g|\|).
\end{aligned}$$

Comme

$$\left\|\widetilde{U}^{-1} - U^{-1}\right\| \to 0 \text{ quand } \delta \to 0,$$

cela résulte du faite que

$$\left\|\widetilde{U} - U\right\| \to 0 \text{ quand } \delta \to 0.$$

Alors on a l'estimation cherchée. Ainsi le théorème est démontré. ■

CHAPITRE III

Problème aux Limites pour une Equation Différentielle Abstraite du Premier Ordre avec Condition Intégrale Générale.

Chapitre 3

Problème aux Limites pour une Equation Différentielle Abstraite du Premier Ordre avec Condition Intégrale Générale.

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un problème aux limites pour une équation différentielle abstraite du premier ordre avec une condition aux limites du type intégrale contenant en plus de la fonction inconnue sa dérivée. L'étude est faite par la réduction du problème posé à une équation opératorielle. On montre sous certaines conditions imposées sur le coefficient opératoriel et les fonctions poids figurants dans la condition intégrale que le problème en question est equivalent à une équation opératorielle. On établit des conditions nécéssaires et suffisantes qui garantissent l'éxistence et l'unicité de la solution, puis on établit une éstimation à priori. On montre aussi que l'opérateur engendré par le probléme est un Fredholm. Enfin on considère le cas où le coefficient opératoriel est perturbé par un opérateur borné, et on montre que la solution du problème perturbé est stable.

3.2 Formulation du problème

Dans l'espace de Banach E on considère l'equation différentielle

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \; 0 \leq t \leq T \tag{3.1}$$

où A est un operateur fermé définit de E dans E à domaine dense $D(A)$ et générateur infinitésimal d'un analytique C_0 semi groupe $U(t)$, $0 \leq t \leq T$.

Définition 3.1 *La fonction $u(t) = U(t)f$, $0 \leq t \leq T$, correspondante a un certain élément $f \in E$ est dite solution généralisée de l'équation (3.1). Si, de plus, $f \in D(A)$, alors la solution $u(t) = U(t)f$ est dite classique.*

Remarque 3.1 *Dans le cas où $f \in D(A)$, f coincide avec l'état initiale $u(0)$ de la solution correspondante $u(t)$.*

Supposons que l'état initial f est inconnue, et à l'équation (3.1) on associe la condition supplémentaire

$$\int_0^T w_1(t)u(t)dt + \int_0^T w_2(t)\frac{du(t)}{dt}dt = g \tag{3.2}$$

où $g \in E$ est donnée. Ici $w_1(t)$ est une fonction scalaire mesurable à variation bornée sur l'intervalle $[0, T]$, et $w_2(t) \in C^1[0, T]$. Partout dans ce chapitre on suppose que $w_2(0) = 0$.

Remarque 3.2 *Sous les conditions précédentes l'intégrale qui figurant dans (3.2) est bien définie au sens de Bochner pour toute fonction $u(t) = U(t)f$.*

Définition 3.2 *On appelle solution généralisée du problème (3.1), (3.2) toute fonction $u(t) = U(t)f$, $0 \leq t \leq T$, correspondante à certain élément $f \in E$ et vérifiant la relation (3.2). Si, de plus, $f \in D(A)$, alors la solution correspondante $u(t) = U(t)f$ du probleme(3.1), (3.2) est dite solution classique.*

3.3 Existence et unicité de la solution

Il est clair qu'une solution généralisée de l'équation (3.1) peut être représentée sous la forme $u(t) = U(t)f$,où $f \in E$

Par conséquent, la fonction $u(t) = U(t)f$ est une solution du problème (3.1), (3.2) si elle vérifie l'équation

$$\int_0^T w_1(t)U(t)f dt + \int_0^T w_2(t)\frac{dU(t)f}{dt}dt = g.$$

En faisant une intégration par parties, on obtient

$$w_2(T)U(T)f + \int_0^T (w_1(t) - w_2'(t))U(t)f dt = g. \tag{3.3}$$

Notation. On note par B l'opérateur définit de E dans E, par

$$Bf = w_2(T)U(T)f + \int_0^T (w_1(t) - w_2'(t))U(t)f dt$$

Remarque 3.3 *La relation (3.3) s'écrit sous la forme*

$$Bf = g.$$

Ainsi on a le lemme suivant.

Lemme 3.1 *L'opérateur B est borné et applique E dans $D(A)$.*

Démonstration. Pour tout $f \in E$ on a

$$\|Bf\| = \left\| w_2(T)U(T)f + \int_0^T (w_1(t) - w_2'(t))U(t)f dt \right\|$$

$$\leq \|w_2(T)U(T)f\| + \left\| \int_0^T (w_1(t) - w_2'(t))U(t)f dt \right\|$$

$$\leq |w_2(T)| \, \|U(T)f\| + \int_0^T \left|(w_1(t) - w_2'(t))\right| \|U(t)f\| \, dt$$

$$\leq |w_2(T)| \, \|U(T)\| \, \|f\| + \left(\int\limits_0^T \left| (w_1(t) - w_2^{'}(t)) \right| dt \right) \sup_{0 \leq t \leq T} \|U(t)f\|$$

$$\leq \left(|w_2(T)| \, \|U(T)\| + \left(\int\limits_0^T \left| (w_1(t) - w_2^{'}(t)) \right| dt \right) \sup_{0 \leq t \leq T} \|U(t)\| \right) \|f\|$$

$$\leq \left(|w_2(T)| \, \|U(T)\| + T \sup_{0 \leq t \leq T} \left| (w_1(t) - w_2^{'}(t)) \right| \sup_{0 \leq t \leq T} \|U(t)\| \right) \|f\|$$

$$\leq C \, \|f\| \, ,$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de f. D'où l'opérateur B est borné.

Maintenant soit $f \in D(A)$, alors $u(t) = U(t)f$ est une solution classique de l'équation (3.1) et $U(t)Af = AU(t)f = \frac{d}{dt}(U(t)f)$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} BAf &= w_2(T)U(T)Af + \int\limits_0^T (w_1(t) - w_2^{'}(t))U(t)Af dt \\ &= w_2(T)AU(T)f + \int\limits_0^T (w_1(t) - w_2^{'}(t))AU(t)f dt. \end{aligned}$$

Comme A est un opérateur fermé, il s'ensuit que

$$\begin{gathered} w_2(T)AU(T)f + \int\limits_0^T (w_1(t) - w_2^{'}(t))AU(t)f dt \\ = A(w_2(T)U(T)f + \int\limits_0^T (w_1(t) - w_2^{'}(t))U(t)f dt) \\ = ABf \end{gathered}$$

D'où $Bf \in D(A)$, et

$$\begin{aligned} ABf &= w_2(T)AU(T)f + \int\limits_0^T (w_1(t) - w_2^{'}(t))\tfrac{d}{dt}(U(t)f)dt \\ &= w_2(T)AU(T)f + \int\limits_0^T (w_1(t) - w_2^{'}(t))d(U(t)f). \end{aligned}$$

En utilisant une intégration par parties, on obtient que

$$\begin{gathered}ABf = w_2(T)AU(T)f + (w_1(T) - w_2'(T))U(T)f \\ -(w_1(0) - w_2'(0))f - \int_0^T U(t)fd(w_1(t) - w_2'(t)).\end{gathered}$$

Considérons maintenant le cas où f est un élément arbitraire de E, comme $D(A)$ est dense dans E alors il existe une suite $\{f_n\} \subset D(A)$ convergente vers f. Comme B est un opérateur borné, alors $Bf_n \to Bf$ et

$$\begin{gathered}ABf_n = w_2(T)AU(T)f_n + (w_1(T) - w_2'(T))U(T)f_n \\ -(w_1(0) - w_2'(0))f_n - \int_0^T U(t)f_n d(w_1(t) - w_2'(t)) \to \\ w_2(T)AU(T)f + (w_1(T) - w_2'(T))U(T)f \\ -(w_1(0) - w_2'(0))f - \int_0^T U(t)fd(w_1(t) - w_2'(t)), \text{ quand } n \to \infty.\end{gathered}$$

De nouveau comme A est un opérateur fermé, il s'ensuit que $Bf \in D(A)$ et

$$\begin{gathered}ABf = w_2(T)AU(T)f + (w_1(T) - w_2'(T))U(T)f \\ -(w_1(0) - w_2'(0))f - \int_0^T U(t)fd(w_1(t) - w_2'(t)).\end{gathered} \tag{3.4}$$

Donc, pour toute $f \in E$ on conclut que $Bf \in D(A)$. ∎

Remarque 3.4 *Si $g \in E \diagdown D(A)$, alors le problème (3.1), (3.2) n'admet pas de solution généralisée.*

Lemme 3.2 *Pour tout $g \in D(A)$, la fonction $u(t) = U(t)f$ est une solution généralisée du problème (3.1), (3.2) si, et seulement si l'élément f satisfait l'équation opératorielle*

$$Uf = \Psi,$$

où

$$Uf = Jf - Kf + \lambda Lf.$$

avec J, K, L sont des opérateurs linéaires bornés définis par les formules

$$Jf = (w_1(0) - w_2'(0))f - w_2(T)AU(T)f, \tag{3.5}$$

$$Kf = \left(w_1(T) - w_2'(T)\right) U(T)f + \int_0^T U(t)fd - \left(\left(w_1(t) - w_2'(t)\right)\right), \tag{3.6}$$

$$Lf = w_2(T)U(T)f + \int_0^T \left(w_1(t) - w_2'(t)\right) U(t)fdt, \tag{3.7}$$

et

$$\Psi = (\lambda I - A)g. \tag{3.8}$$

Remarque 3.5 *Les intégrales des fonctions opératorielles sont définies dans la topologie forte de* $\mathcal{L}(E)$

Démonstration du Lemme 2.3 Supposons que pour tout $g \in D(A)$ la fonction $u(t) = U(t)f$ est une solution généralisée du problème (3.1), (3.2), alors la fonction $u(t) = U(t)f$ vérifie l'équation

$$\int_0^T w_1(t)U(t)fdt + \int_0^T w_2(t)\frac{dU(t)f}{dt}dt = g.$$

En intégrant par parties le terme

$$\int_0^T w_2(t)\frac{dU(t)f}{dt}dt,$$

on obtient

$$w_2(T)U(T)f + \int_0^T (w_1(t) - w_2'(t))U(t)fdt = g.$$

En appliquant l'opérateur $(\lambda I - A)$, où $\lambda \in \rho(A)$ à cette dernière on obtient

$$(\lambda I - A)\left(w_2(T)U(T)f + \int_0^T (w_1(t) - w_2'(t))U(t)fdt\right) = (\lambda I - A)\,g.$$

Comme l'opérateur A est fermé, il s'ensuit que

$$\lambda w_2(T)U(T)f - w_2(T)AU(T)f + \lambda \int_0^T (w_1(t) - w_2'(t))U(t)$$

$$- \int_0^T (w_1(t) - w_2'(t))AU(t)fdt = (\lambda I - A)\,g, \tag{3.9}$$

d'autre part, comme la fonction $u(t) = U(t)f$ est une solution généralisée de l'équation (3.1), on a

$$\lambda w_2(T)U(T)f - w_2(T)AU(T)f + \lambda \int_0^T (w_1(t) - w_2^{'}(t))U(t)f dt$$

$$- \int_0^T (w_1(t) - w_2^{'}(t))AU(t)f dt$$

$$= \lambda w_2(T)U(T)f - w_2(T)AU(T)f + \lambda \int_0^T (w_1(t) - w_2^{'}(t))U(t)f dt$$

$$- \int_0^T (w_1(t) - w_2^{'}(t))\frac{dU(t)f}{dt} dt$$

$$= \lambda w_2(T)U(T)f - w_2(T)AU(T)f + \lambda \int_0^T (w_1(t) - w_2^{'}(t))U(t)f dt$$

$$- \int_0^T (w_1(t) - w_2^{'}(t))d\left(U(t)f\right) \tag{3.10}$$

$$= \left(\lambda I - A\right) g.$$

Ainsi on obtient que (3.9) est équivalente à (3.10).

De nouveau en intégrant par parties le terme

$$\int_0^T (w_1(t) - w_2^{'}(t))d\left(U(t)f\right),$$

on obtient

$$\int_0^T \left(w_1(t) - w_2^{'}(t)\right) d\left(U(t)f\right) = \left(w_1(T) - w_2^{'}(T)\right) U(T)f$$

$$- \left(w_1(0) - w_2^{'}(0)\right) f - \int_0^T U(t)f d\left(w_1(t) - w_2^{'}(t)\right) \tag{3.11}$$

De (3.10) et (3.11) on trouve

$$\left(w_1(0) - w_2^{'}(0)\right) f - w_2(T)AU(T)f - \left(w_1(T) - w_2^{'}(T)\right) U(T)f$$

$$-\int_0^T U(t)fd\left(-\left(w_1(t)-w_2^{'}(t)\right)\right)+\lambda w_2(T)U(T)f+\lambda\int_0^T (w_1(t)-w_2^{'}(t))U(t)fdt$$

$$=(\lambda I-A)\,g.$$

Ainsi donc on a bien l'équation opératorielle pour l'élément f

$$Uf=Jf-Kf+\lambda Lf=\Psi. \tag{3.12}$$

Il reste maintenant à montrer que les opérateurs définis par les formules (3.6), (3.7), et (3.8)) sont bornés.

Il est clair que l'opérateur J est un opérateur borné, car pour tout $f\in E$ on a

$$\begin{aligned}\|Jf\| &= \left\|(w_1(0)-w_2^{'}(0))f-w_2(T)AU(T)f\right\|\\ &\leq \left|(w_1(0)-w_2^{'}(0))\right|\|f\|+|w_2(T)|\frac{c}{T}\|f\|\\ &\leq \left(\left|(w_1(0)-w_2^{'}(0))\right|+|w_2(T)|\frac{c}{T}\right)\|f\|\\ &\leq C\|f\|,\end{aligned}$$

où $C>0$ est une constante indépendante de f.

D'autre part de (3.6) on a pour tout $f\in E$

$$\|Kf\|=\left\|\left(w_1(T)-w_2^{'}(T)\right)U(T)f+\int_0^T U(t)fd\left(-\left(w_1(t)-w_2^{'}(t)\right)\right)\right\|$$

$$\leq\left\|\left(w_1(T)-w_2^{'}(T)\right)U(T)f\right\|+\left\|\int_0^T U(t)fd\left(-\left(w_1(t)-w_2^{'}(t)\right)\right)\right\|$$

$$\leq\left|\left(w_1(T)-w_2^{'}(T)\right)\right|\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|U(t)f\|\right)+\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|U(t)f\|\right)Var\left\{-\left(w_1(t)-w_2^{'}(t)\right)\right\}|_0^T)$$

$$\leq\begin{pmatrix}\left|\left(w_1(T)-w_2^{'}(T)\right)\right|\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|U(t)\|\right)+\\ \left(\sup_{0\leq t\leq T}\|U(t)\|\right)Var\left\{-\left(w_1(t)-w_2^{'}(t)\right)\right\}|_0^T\end{pmatrix}\|f\|$$

$$\leq C \|f\|,$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de f. Ainsi l'opérateur K est borné. De (3.7) on a pour tout $f \in E$

$$\|Lf\| = \left\| w_2(T)U(T)f + \int_0^T \left(w_1(t) - w_2^{'}(t)\right) U(t)f dt \right\|$$

$$\leq \|w_2(T)U(T)f\| + \left\| \int_0^T \left(w_1(t) - w_2^{'}(t)\right) U(t)f dt \right\|$$

$$\leq \left(|w_2(T)| \, \|U(T)\| + T \sup_{0\leq t\leq T} \left| \left(w_1(t) - w_2^{'}(t)\right) \right| \sup_{0\leq t\leq T} \|U(t)\| \right) \|f\|$$

$$\leq C \|f\|,$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de f. D'où l'opérateur L est borné.

Réciproquement supposons que pour tout $g \in D(A)$ l'élément f est une solution de l'équation opératorielle

$$Uf = Jf - Kf + \lambda Lf = \Psi,$$

i.e.,

$$\left(w_1(0) - w_2^{'}(0)\right) f - w_2(T)AU(T)f - \left(w_1(T) - w_2^{'}(T)\right) U(T)f$$

$$- \int_0^T U(t)fd\left(-\left(w_1(t) - w_2^{'}(t)\right)\right) + \lambda w_2(T)U(T)f + \lambda \int_0^T (w_1(t) - w_2^{'}(t))U(t)fdt \quad (3.13)$$

En intégrant par parties le troixième terme de l'éxpression suivante

$$\left(w_1(0) - w_2^{'}(0)\right) f - \left(w_1(T) - w_2^{'}(T)\right) U(T)f - \int_0^T U(t)fd\left(-\left(w_1(t) - w_2^{'}(t)\right)\right),$$

on obtient

$$\left(w_1(0) - w_2^{'}(0)\right) f - \left(w_1(T) - w_2^{'}(T)\right) U(T)f + \left(w_1(T) - w_2^{'}(T)\right) U(T)f$$

$$- \left(w_1(0) - w_2^{'}(0)\right) f - \int_0^T \left(w_1(t) - w_2^{'}(t)\right) d\left(U(t)f\right)$$

$$= -\int_0^T \left(w_1(t) - w_2'(t)\right) d\left(U(t)f\right)$$

D'ici et de (3.13), on obient

$$\lambda w_2(T)U(T)f - w_2(T)AU(T)f + \lambda \int_0^T (w_1(t) - w_2'(t))U(t)f dt$$

$$-\int_0^T \left(w_1(t) - w_2'(t)\right) d\left(U(t)f\right) = (\lambda I - A)\, g,$$

d'où

$$\lambda w_2(T)U(T)f - w_2(T)AU(T)f + \lambda \int_0^T (w_1(t) - w_2'(t))U(t)f dt$$

$$-\int_0^T \left(w_1(t) - w_2'(t)\right) \frac{d}{dt}\left(U(t)f\right) dt = (\lambda I - A)\, g.$$

De nouveau comme A est un opérateur fermé et la fonction $u(t) = U(t)f$ est une solution généralisée de l'équation (3.1) alors on a

$$\lambda w_2(T)U(T)f - w_2(T)AU(T)f + \lambda \int_0^T (w_1(t) - w_2'(t))U(t)f dt$$

$$-A\int_0^T \left(w_1(t) - w_2'(t)\right) \left(U(t)f\right) dt = (\lambda I - A)\, g,$$

d'où

$$(\lambda I - A)\left(w_2(T)U(T)f + \int_0^T (w_1(t) - w_2'(t))U(t)f dt\right) = (\lambda I - A)\, g,$$

comme $\lambda \in \rho(A)$ alors

$$(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)\left(w_2(T)U(T)f + \int_0^T (w_1(t) - w_2'(t))U(t)f dt\right)$$

$$= (\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)\, g,$$

donc

$$w_2(T)U(T)f + \int_0^T (w_1(t) - w_2'(t))U(t)f dt = g,$$

d'où, de nouveau en faisant une intégration par parties on obtient

$$\int_0^T w_1(t)U(t)f dt + \int_0^T w_2(t)\frac{dU(t)f}{dt}dt = g$$

Ainsi la fonction $u(t) = U(t)f$ est une solution généralisée du problème (3.1), (3.2).

D'où le lemme est démontré.

Remarque 3.6 *Dans la définition de l'opérateur U et l'élément Ψ, on a choisit le paramètre λ arbitrairement dans $\rho(A)$ et ce pour montrer l'équivalence entre le problème (3.1), (3.2) et l'équation opératorielle (3.6). D'où par la suite on va considérér λ fixé dans $\rho(A)$ pour que l'opérateur U et l'élément Ψ, soient déterminés d'une manière unique.*

Théorème 3.1 *Pour tout $g \in D(A)$ le problème (3.1), (3.2) admet une solution généralisée unique si, et seulement si $U^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.*

Démonstration. L'équivalence du problème (3.1), (3.2) et l'équation (3.6) découle du Lemme 3.2.

La suffisance est évidente, en effet, si $U^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, alors la fonction $u(t) = U(t)f$, où $f = U^{-1}\Psi$, et Ψ est défini par (3.5), sera la solution généralisée unique du problème (3.1), (3.2).

Nécessité : Supposons que pour tout $g \in D(A)$ le problème (3.1), (3.2) admet une solution généralisée unique. Alors pour tout Ψ défini par (3.5) il existe une solution unique de (3.6). D'autre part si $g \in D(A)$, alors l'élément $\Psi \in E$. Par conséquent, (3.6) admet une solution unique f pour tout Ψ dans E, i.e., l'opérateur inverse $U^{-1} : E \to E$ existe, puisque l'opérateur U est borné, par le théorème de Banach sur l'homoemorphisme, $U^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, ainsi le théorème est démontré. ■

3.4 Estimation à priori

Dans cette partie on va montrer que pour la solution du problème (3.1), (3.2) on a l'estimation à priori suivante.

Théorème 3.2 *Supposons que pour tout $g \in D(A)$ le problème (3.1), (3.2) admet une solution généralisée unique. Alors pour cette solution on a l'estimation*

$$\|u(t)\| \leq C(\||g|\|) \tag{3.14}$$

où la constante $C > 0$ est indépendante de g.

Démonstration. Supposons que le problème (3.1), (3.2) admet une solution généralisée unique. Alors du Théorème 3.1 cette solution s'écrit sous la forme $u(t) = U(t)f$, où

$f = U^{-1}\Psi$, $U^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, et l'élément Ψ est donné par la formule (3.8).

Par conséquent

$$\|f\| \leq \left\|U^{-1}\right\| \|\Psi\|.$$

Ainsi on a

$$\|u(t)\| = \|U(t)f\| \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \|U(t)f\| \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \|U(t)\| \|f\|$$

$$\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \|U(t)\| \left\|U^{-1}\right\| \|\Psi\| = \sup_{0 \leq t \leq T} \|U(t)\| \left\|U^{-1}\right\| \|(\lambda I - A)g\|$$

$$\leq C(\|g\| + \|Ag\|) = C(\||g|\|)$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de g. Ainsi le théorème est démontré. ■

Définition 3.3 *On dira que le problème (3.1), (3.2) est bien posé, si pour tout $g \in D(A)$ le problème (3.1), (3.2) admet une solution généralisée unique $u(t) = U(t)f$, où $f \in E$, et que cette solution dépend continûment du second membre.*

Corollaire 3.1 *Le problème (3.1), (3.2) est bien posé si, et seulement si $U^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.*

Dans la suite nous utilisons constamment ce fait, sans mention spéciale.

3.5 Propriété de Fredholm du problème

Dans cette partie on va montrer que sous certaines conditions imposées sur les données du problème(3.1), (3.2) l'opérateur engendré par le problème en question est un opérateur de Fredholm.

Définition 3.4 *Le noyau du problème (3.1), (3.2) est l'ensemble d'élément* $u(t) = U(t)f$, $f \in E$ *qui sont solutions du problème homogène suivant*

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t), \ 0 \leq t \leq T, \\ \int\limits_0^T w_1(t)u(t)dt + \int\limits_0^T w_2(t)\frac{du(t)}{dt}dt = 0. \end{cases}$$

Si cet ensemble contient seulement l'élément nul, alors le noyau du problème (3.1), (3.2) est dit trivial.

Lemme 3.3 *Le noyau du problème (3.1), (3.2) coincide avec le noyau de l'opérateur* U. *C'est un sous espace fermé de* E.

Lemme 3.4 $\forall g \in D(A)$ *le problème (3.1), (3.2) admet une solution généralisée unique si, et seulement si son noyau est trivial.*

Corollaire 3.2 *Le problème (3.1), (3.2) est bien posé si, et seulement si son noyau est trivial.*

Enonçons maitenant maintenant le résultat principal de cette partie.

Théorème 3.3 *Supposons que le semi-groupe* $U(t)$ *est compact pour* $t > 0$ *et que la fonction* $w_1(t) - w_2'(t)$ *est continue à droite au point* $t = 0$, *et soit* $J^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. *Alors pour le problème (3.1), (3.2) on a*

1. *Son noyau est de dimension finie ;*
2. *Si Son noyau est trivial, alors* $\forall g \in D(A)$ *ce problème est bien posé.*

La démonstration du Théorème 3 3 est basée sur le lemme suivant.

Lemme 3.5 *Supposons que le semi-groupe $U(t)$ est compact pour $t > 0$ est que la fonction $w_1(t) - w_2^{'}(t)$ est continue à droite au point $t = 0$ et $J^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. Alors les opérateurs K et L définis par les formules (3.6) et (3.7) sont compacts.*

Démonstration. En premier lieu, nous montrons la compacité de L. Soit $\varepsilon > 0$, et

$$L_\varepsilon = w_2(T)U(T)f + \int_\varepsilon^T (w_1(t) - w_2^{'}(t))U(t)f dt.$$

Puisque $U(t)$ est un opérateur compact pour chaque $t > 0$, L_ε est compact.

De plus comme l'éstimation

$$\|Lf - L_\varepsilon f\| = \left\| \int_0^\varepsilon (w_1(t) - w_2^{'}(t))U(t)f dt \right\|$$

$$\leq \varepsilon (\sup_{0 \leq t \leq \varepsilon} \|U(t)f\| \sup_{0 \leq t \leq T} \left| w_1(t) - w_2^{'}(t) \right|)$$

$$\leq \varepsilon (\sup_{0 \leq t \leq \varepsilon} \|U(t)\| \sup_{0 \leq t \leq T} \left| w_1(t) - w_2^{'}(t) \right|) \|f\|$$

est vérifié pour tout $f \in E$ et

$$\varepsilon (\sup_{0 \leq t \leq \varepsilon} \|U(t)\| \sup_{0 \leq t \leq T} \left| (w_1(t) - w_2^{'}(t)) \right|) \|f\| \to 0 \text{ quand } \varepsilon \to 0^+$$

alors on déduit que l'opérateur L est compact, cela résulte du faite qu'il est limite uniforme d'une suite d'opérateurs compacts. Ecrivons l'opérateur K sous la forme

$$K = K_1 + K_2,$$

où

$$K_1 \equiv (w_1(T) - w_2^{'}(T))U(T),$$

$$K_2 \equiv \int_0^T U(t)d(-(w_1(t) - w_2^{'}(t))).$$

Puisque l'opérateur $U(T)$ est compact, alors l'opérateur K_1 est compact. Pour l'opérateur K_2 soit $\varepsilon > 0$ et considérons

$$K_{2\varepsilon} \equiv \int_{\varepsilon}^{T} U(t)d(-(w_1(t) - w_2^{'}(t)))$$

De nouveau puisque l'opérateur $U(t)$ est compact pour chaque $t > 0$, $K_{2\varepsilon}$ est compact, et pour tout $f \in E$ on a l'éstimation

$$\|K_2 f - K_{2\varepsilon} f\| = \left\| \int_{0}^{\varepsilon} U(t) f d(-(w_1(t) - w_2^{'}(t))) \right\|$$

$$\leq \left(\sup_{0 \leq t \leq \varepsilon} \|U(t)f\| \right) Var \left\{ -(w_1(t) - w_2^{'}(t)) \right\} |_0^{\varepsilon}$$

$$\leq \left(\sup_{0 \leq t \leq \varepsilon} \|U(t)\| \right) Var \left\{ -(w_1(t) - w_2^{'}(t)) \right\} |_0^{\varepsilon} \|f\|$$

$$\leq C Var \left\{ -(w_1(t) - w_2^{'}(t)) \right\} |_0^{\varepsilon} \|f\| ,$$

de plus $Var \left\{ -(w_1(t) - w_2^{'}(t)) \right\} |_0^{\varepsilon} \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0^{+}$, et par conséquent K_2 est compact comme étant une limite uniforme d'une suite d'opérateurs compacts. Comme la somme de deux opérateurs compacts est compact il s'ensuit que l'opérateur K est compact, ainsi le lemme est démontré.

■

Démonstration du Théorème 3.3 D'aprés le lemme précédent les opérateurs K et L sont compacts et comme $J^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ (par hypothése) alors il s'ensuit que l'opérateur $U = J - K + \lambda L$ est un opérateur de Fredholm. D'où son noyau est de dimenssion finie, ainsi 1 est démontré. Montrons maintenant 2. Si le noyau du problème (3.1), (3.2) est trivial, alors en vertu du Lemme 3.3, le noyau de l'opérateur U est trivial, donc $U^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, car l'opérateur U est de Fredholm. D'où le problème (3.1), (3.2) est bien posé. Ainsi le théorème est démontré.

Remarque 3.7 *LeThéorème 3.3 montre que l'opérateur U correspondant au problème (3.1), (3.2) est de Fredholm d'indice zéro.*

3.6 Applications

Dans cette partie on va illustrer les résultats obtenus par des exemples.

Théorème 3.4 *Soit $w_1(t)$ une fonction à variation bornée sur $[0,T]$, et que $w_2(t) \in C^1[0,T]$ telles que $w_2(0) = w_2(T) = 0$; $w_1(t) - w_2'(t)$ non négative non croissante ; continue à droite à $t = 0$ telle que $w_1(0) - w_2'(0) > 0$ et supposons que le semi-groupe $U(t)$ engendré par l'opérateur A satisfait l'estimation $\|U(t)\| \leq M \exp(-\beta t)$ avec les constantes $M \geq 1$, $\beta > 0$. Alors le problème (3.1), (3.2) est bien posé.*

Démonstration. Considérons l'équation opératorielle (3.6), sous les conditions du théorème cette dernière est de la forme $\left(\left(w_1(0) - w_2'(0)\right) I - K\right) f = \Psi$, cela résulte du faite que le spectre $\sigma(A)$ est contenu dans le demi-plan $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda \leq -\beta < 0\}$, d'où $0 \in \rho(A)$. Le but de la démonstration est de montrer que $\left(\left(w_1(0) - w_2'(0)\right) I - K\right)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ pour cela il suffit de montrer que

$$\|K\|_1 < w_1(0) - w_2'(0)$$

par rapport à une certaine norme $\|.\|_1$ équivalente à $\|.\|$, où

$$\|h\|_1 = \sup_{t \geq 0} \|U(t) \exp(\beta t)\|, h \in E$$

ll est facile de montrer que $\|U(t)\|_1 \leq \exp(-\beta t)$. Donc, pour cette norme équivalente, on a pour tout $f \in E$

$$\|Kf\|_1 = \left\| (w_1(T) - w_2'(T))U(T)f + \int_0^T U(t) f d\left(-(w_1(t) - w_2'(t)\right) \right\|_1$$

$$\leq \left\| (w_1(T) - w_2'(T))U(T)f \right\|_1 + \left\| \int_0^T U(t) f d\left(-(w_1(t) - w_2'(t)\right) \right\|_1$$

$$\leq \left((w_1(T) - w_2'(T)) \exp(-\beta T) \right) \|f\| + \left(\int_0^T \exp(-\beta t) d(-(w_1(t) - w_2'(t))) \right) \|f\| .$$

En intégrant par parties le second membre de cette dernière inégalité, on obtient que

$$\|Kf\|_1 \leq (w_1(T) - w_2^{'}(T))\exp(-\beta T)\|f\| - (w_1(T) - w_2^{'}(T))\exp(-\beta T)\|f\|$$
$$+(w_1(0) - w_2^{'}(0))\|f\| - \beta\left(\int_0^T \exp(-\beta t)(w_1(t) - w_2^{'}(t))dt\right)\|f\|$$
$$= \left((w_1(0) - w_2^{'}(0)) - \beta\int_0^T \exp(-\beta t)(w_1(t) - w_2^{'}(t))dt\right)\|f\|.$$

Puisque $\beta\int_0^T \exp(-\beta t)(w_1(t) - w_2^{'}(t))dt$ est positive sous les hypothèses du théorème, il s'ensuit que

$$(w_1(0) - w_2^{'}(0)) - \beta\int_0^T \exp(-\beta t)(w_1(t) - w_2^{'}(t))dt < w_1(0) - w_2^{'}(0).$$

donc

$$\|Kf\|_1 < \left(w_1(0) - w_2^{'}(0)\right)\|f\|_1,$$

ainsi

$$\|K\|_1 < w_1(0) - w_2^{'}(0).$$

Par conséquent le problème (3.1), (3.2) est bien posé, d'où le théorème est démontré. ■

Remarque 3.8 *Dans le cas où $T = +\infty$ et $w_2(t) \equiv 0$ ce résultat coincide avec [21].*

Dans toute la suite nous supposerons que E est un espace de Banach ordonné par un cône fermé E_+. Si $L \in \mathcal{L}(E)$ est un opérateur positif, i.e., $L(E_+) \subset E_+$, nous écrirons $L \geq 0$. Un semi-groupe $U(t)$ est dit positif si $U(t)$ est positif pour tout $t \geq 0$.

Théorème 3.5 *Soit $w_1(t)$ une fonction à variation bornée sur $[0,T]$ et $w_2(t) \in C^1[0,T]$ telles que $w_2(0) = 0, w_2(T) > 0,$ et $w_1(t) - w_2^{'}(t)$ non négative non croissante ; continue à droite au point $t = 0$ telle que $w_1(0) - w_2^{'}(0) > 0$. Supposons que $J^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, $J^{-1} \geq 0$. Supposons aussi que le semi-groupe $U(t)$ engendré par l'operator A est positif et compact pour $t > 0$. Finallement, nous supposons aussi que le spectre de l'opérateur A est contenu dans le demi-plan $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$. Alors le problème (3.1), (3.2) est bien posé.*

Remarque 3.9 *Si le semi-groupe $U(t)$ est positif et $s(A) < 0$, alors le problème (3.1), (3.2) est équivalent à l'équation opératorielle*

$$Uf = \Psi,$$

où

$$U = J - K,$$

avec

$$J = (w_1(0) - w_2^{'}(0))I - w_2(T)AU(T), \tag{3.15}$$

$$K = (w_1(T) - w_2^{'}(T))U(T) + \int_0^T U(t)d(-(w_1(t) - w_2^{'}(t))). \tag{3.16}$$

Démonstration du Théorème.3.5 Montrons tout d'abord l'unicité de la solution du problème homogène associe au problème (3.1), (3.2), puis, on conclut la démonstration à l'aide du Théorème 3.3. Fixons un élément $u(t) = U(t)f$ appartenant au noyau du problème (3.1), (3.2) et montrons que $u(t) = 0$, i.e., $f = 0$. En utilisant le fait que l'espace E est un lattis, l'élément f s'écrit sous la forme $f = f^+ - f^-$, de plus, il est évident que la fonction $u(t) = U(t)f$ vérifie

$$\begin{aligned} w_2(T)U(T)f^+ + \int_0^T (w_1(t) - w_2^{'}(t))U(t)f^+dt = \\ = w_2(T)U(T)f^- + \int_0^T (w_1(t) - w_2^{'}(t))U(t)f^-dt. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Notons par φ l'élément de E défint par l'un des membres de l'égalité (3.17). En appliquant l'opérateur A à (3.17) on obtient facilement

$$A\varphi + Jf^+ = Kf^+, A\varphi + Jf^- = Kf^-, \tag{3.18}$$

où les opérateurs J et K sont définis dans (3.15), (3.16) respectivement. Comme le semi-groupe $U(t)$ et l'opérateur K sont positifs, alors, $A\varphi + Jf^+ \geq 0$, $A\varphi + Jf^- \geq 0$, et, par conséquent,

$$-A\varphi \leq \inf(Jf^+, Jf^-). \tag{3.19}$$

Posons $x \equiv \inf(Jf^+, Jf^-) \geq 0$. Comme $J \equiv (w_1(0) - w_2'(0))I - w_2(T)AU(T) \geq 0$, alors $x \geq 0$. De la même manière comme $J^{-1} \geq 0$ par hypothèse, alors les inégalités $Jf^+ \geq x$, $Jf^- \geq x$ impliquent que $J^{-1}x \leq \inf(f^+, f^-) = 0$. Donc $x \leq 0$. Ainsi $x = 0$. D'où de (3.19), on conclut que $A\varphi \geq 0$. De la Remarque 3.9 on déduit que $\varphi \leq 0$.

D'autre part de la définition de φ on a

$$\varphi = w_2(T)U(T)f^+ + \int_0^T (w_1(t) - w_2'(t))U(t)f^+dt \geq 0.$$

Donc, $\varphi = 0$, i.e., $w_2(T)U(T)f^+ = 0$ et $\int_0^T (w_1(t) - w_2'(t))U(t)f^+dt = 0$, d'où $U(T)f^+ = 0$. D'ici et de (3.16), il s'ensuit que $Kf^+ = 0$, et donc $Jf^+ = 0$, puisque J est inversible, alors $f^+ = 0$. De la même manière on montre que $f^- = 0$, d'où $f = f^+ - f = 0$. Maintenant en utilisant la compacité de $U(t)$ et le Théorème 3.3 et la Remarque 3.9 on obtient le résultat. Par conséquent le problème (3.1), (3.2) est bien posé. Ainsi le théorème est démontré.

3.7 Problème perturbé

Cette partie est consacrée à l'étude du problème (3.1), (3.2) où le coeficient opératoriel est perturbé par un opérateur borné, plus exactement considérons le problème suivant

$$\frac{du(t)}{dt} = (A + B)u(t), \ 0 \leq t \leq T, \tag{3.20}$$

$$\int_0^T w_1(t)u(t)dt + \int_0^T w_2(t)\frac{du(t)}{dt}dt = g \tag{3.21}$$

où $B \in \mathcal{L}(E)$. Introduisons $\widetilde{A} = A + B$. Puisque B est un opérateur lineaire borné, l'opérateur $\widetilde{A}$ avec $D(\widetilde{A}) = D(A)$ est générateur d'un analytique C_0 semi-groupe $\widetilde{U}(t)$ [18]. On montre que le problème perturbé est bien posé. Plus exactement on a le théorème suivant

Théorème 3.6 *Supposons que le problème (3.1), (3.2) est bien posé. Alors il existe un nonbre $\delta > 0$, qui dépend seulement de A, $w_1(t)$, et $w_2(t)$ tel que si $\|B\| \leq \delta$ pour $0 \leq t \leq T$*

et $w_2(T) = 0$, alors le problème (3.20), (3.21) est bien posé. Pour tout $\varepsilon > 0$ le nombre δ peut être choisit tel que

$$\left\| \widetilde{u}(t) - u(t) \right\| \leq \varepsilon \left\| |g| \right\|, \tag{3.22}$$

où $\widetilde{u}(t) = \widetilde{U}(t)\widetilde{f}$ et $u(t) = U(t)f$ sont des solutions des problèmes (3.1), (3.2) et (3.20), (3.21), respectivement correspondant à $g \in D(A)$ donné.

Remarque 3.10 *De l'estimation (3.22) résulte que $\left\| \widetilde{u}(t) - u(t) \right\| \to 0$ quand $\|B\| \to 0$. Donc, la solution du problème bien posé (3.1), (3.2) est stable par rapport aux faibles perturbations de l'opérateur A.*

Démonstration. Sans restreindre le cas général on peut supposer que $\delta \leq 1$. Nous choisissons les constantes M et α ($M \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$) telles que l'estimation $\|U(t)\| \leq M \exp(\alpha t)$ est vérifiée pour le semi-groupe $U(t)$. Dans ce cas les relations suivantes sont vérifiées pour le semi-groupe perturbé $\widetilde{U}(t)$ [18] :

$$\left\| \widetilde{U}(t) \right\| \leq M \exp((\alpha + M \|B\|)t),$$

$$\left\| \widetilde{U}(t) - U(t) \right\| \leq M \exp(\alpha t) \left[\exp\left(M \|B\| t\right) - 1 \right].$$

Puisque $\|B\| \leq \delta \leq 1$, pour $0 \leq t \leq T$ on a

$$\left\| \widetilde{U}(t) \right\| \leq M_1, \left\| \widetilde{U}(t) - U(t) \right\| \leq M_2(\exp(MT\delta) - 1). \tag{3.23}$$

(Les constantes $M_1, M_2, ...$ sont dépendantes seulement des données du problème (3.1), (3.2) ,i.e., de A, $w_1(t)$, et $w_2(t)$.)

Par un raisonement analogue à celui du Lemme 3.2, om montre que le problème (3.20), (3.21) est équivalente à l'équation opératorielle $\widetilde{U}\widetilde{f} = \widetilde{\Psi}$, où $\widetilde{U} = \widetilde{J} - \widetilde{K} + \lambda\widetilde{L}$ avec les opérateurs $\widetilde{J}$, $\widetilde{K}$, $\widetilde{L}$ définis par les formules (3.5), (3.6), et (3.7) en remplaçant $U(t)$ par $\widetilde{U}(t)$ et le parametre λ est choisit dans $\rho\left(\widetilde{A}\right) \cap \rho\left(A\right)$. En effet, comme $s(A) \leq \alpha$ et $s(A+B) \leq \alpha + M\|B\| \leq \alpha + M$, alors on peut choisir que, par exemple, $\lambda = \alpha + M + 1$.

En utilisant la forme explicite des opérateurs U et $\widetilde{U}$, l'estimation (3.23), on montre facilement que

$$\left\|\widetilde{U}-U\right\| \leq M_3((\exp(MT\delta)-1)). \tag{3.24}$$

De l'estimation (3.24) résulte que $\left\|\widetilde{U}-U\right\| \to 0$ quand $\delta \to 0$. Par conséquent, comme δ est suffisamment petit, $\left\|\widetilde{U}-U\right\|$ peut être choisit aussi petit que l'on veut. D'autre part comme le problème (3.1), (3.2) est bien posé, alors, $U^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. Choisissons δ telle que $\left\|\widetilde{U}-U\right\| \leq \left\|U^{-1}\right\|^{-1}$, on obtient que $\widetilde{U}^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. D'où le problème (3.20), (3.21) est bien posé

Montrons maintenant l'éstimation (3.22), remarquons que $f = U^{-1}\Psi$, $\widetilde{f} = \widetilde{U}^{-1}\widetilde{\Psi}$, où Ψ, et $\widetilde{\Psi}$ sont définis par la formule (3.8). En utilisant la forme explicite de $\widetilde{\Psi}$, Ψ et la relation $\|B\| \leq \delta$, on obticnt

$$\left\|\widetilde{\Psi}-\Psi\right\| \leq \delta \|g\|,$$

et, par conséquent

$$\left\|\widetilde{\Psi}\right\| \leq \|\Psi\| + \left\|\widetilde{\Psi}-\Psi\right\| \leq M_4 \||g|\|.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{f}-f\right\| &\leq \left\|\widetilde{U}^{-1}-U^{-1}\right\| \left\|\widetilde{\Psi}\right\| + \left\|U^{-1}\right\| \left\|\widetilde{\Psi}-\Psi\right\| \\
&\leq M_4 \left\|\widetilde{U}^{-1}-U^{-1}\right\| \||g|\| + +\delta \left\|U^{-1}\right\| \|g\| \\
&\leq M_5 \left[\left\|\widetilde{U}^{-1}-U^{-1}\right\| + \delta\right] \||g|\|.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

En combinant (3.25) et (3.24), on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{u}(t)-u(t)\right\| &= \left\|\widetilde{U}(t)\widetilde{f} - U(t)f + \widetilde{U}(t)f - \widetilde{U}(t)\, f\right\| \\
&= \left\|\widetilde{U}(t)(\widetilde{f}-f) + (\widetilde{U}(t)-U(t))f\right\| \\
&\leq \left\|\widetilde{U}(t)\right\| \left\|\widetilde{f}-f\right\| + \left\|\widetilde{U}(t)-U(t)\right\| \|f\| \\
&\leq M_6 \left[\left\|\widetilde{U}^{-1}-U^{-1}\right\| + \delta\right] \||g|\| + CM_2(\exp(MT\delta)-1) \||g|\|.
\end{aligned}$$

Comme

$$\left\| \widetilde{U}^{-1} - U^{-1} \right\| \to 0 \text{ quand } \delta \to 0.$$

car

$$\left\| \widetilde{U} - U \right\| \to 0 \text{ quand } \delta \to 0.$$

Alors on a l'estimation cherchée. Ainsi le théorème est démontré. ■

Bibliographie

[1] J. R. Cannon, *The solution of the heat equation subject to the specification of energy*, Quartcrly of Applied Mathematics **21** (1963), no. 2, 155-160.

[2] M. Chipot and B. Lovat, S*ome remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems*, Nonlinear Analysis **30** (1997), no. 7, 4619-4627.

[3] M. Denche and Marhoune A.L., *Mixed problem with nonlocal boundary conditions for a third-order partial differential equation of mixed type.* IJMMS **26** (2001), no. 7, 417-426.

[4] M. Denche and Marhoune, A.L., *Mixed problem with integral boundary condition for a high-order partial mixed type partial differential equation.* J. Appl. Math. Stoch. Anal. **16** (2003), no. 1, 69-79.

[5] M. Denche and A. Memou, *Boundary value problm with integral conditions for a linear third-order equation.* Journal of Applied Mathematics. **11** (2003) 533-567.

[6] M. Denche and A. Kourta, *Boundary value problem for second-order differential operators with integral conditions*, Applicable Analysis **84** (2005), no. 12, 1247-1266.

[7] M. Denche and A. Berkane, *Boundary value problem for abstract first order differential equation with integral condition*, J. Math. Anal. Appl. 333 (2007) 657-666.

[8] M. Denche and A. Berkane, *On abstract first order differential equation with a nonlocal integral condition.* Accepted for publication in Kobe Journal of Mathematics.

[9] K.J. Engel, R. Nagel, One-Parameter Semigroup for Linear Evolution Equations, Graduate xts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, (2000).

[10] D. Gordeziani and G. Avalishvili, *Investigation in the nonlocal initial boundary value problems for some hyperbolic equations*, Hiroshima Mathematical Journal **31** (2001), no. 3, 345-366.

[11] A. K. Gushchin and V. P. Mikhailov, *On the solvability of nonlocal problems for a second-order elliptic equation*, Mathematicheskii Sbornik **185** (1994), no. 1, 101-136.

[12] D. Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lect. Notes. in Math., Springer-Verlag, New York, 840 (1981)

[13] A. D. Iskenderov, *Some inverse problems on determining the right-hand sides of differential equations.* (Russian) Izv. Akad. Nauk Azerba\u\i d\v zan. SSR Ser. Fiz.-Tehn. Mat. Nauk 1976, no. 2, 58–63.

[14] A. Khauidarov, *A class of inverse problems for elliptic equations.* (Russian) Differentsial\cprime nye Uravneniya **23** (1987), no. 8, 1376–1383, 1470.

[15] W. E. Olmstead and C. A. Roberts, *The One-Dimensional Heat Equation with a Nonlocal Initial Condition,* Appl. Math. Lett. **10** (3), pp. 89-94, (1997).

[16] D. G. Orlovskii, *An inverse problem for a second-order differential equation in a Banach space.* (Russian) Differentsial\cprime nye Uravneniya **25** (1989), no. 6, 1000–1009, 1099; translation in Differential Equations **25** (1989), no. 6, 730–738.

[17] B. P. Paneyakh, *Some nonlocal boundary value problems for linear differential operators,* Mathematicheskie Zametki **35** (1984), no. 3, 425-434 (Russian).

[18] A. Pazy, *Semigroups of Linear operators and applications to partial differential equations,* Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[19] H. H. Schaefer, Banach Lattices and Positive Operators, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1974).

[20] I. V.Tikhonov, On the connection between inverse problems and final and integral overdetermination, Uspekhi Mat. Nauk **47** (1992), no. 4 (286), 211-212; translation in Russian Mat. Surveys **47** (1992), no. 4, 232-233.

[21] I. V. Tikhonov, *Solvability of a problem with a nonlocal integral condition for differential equation in a Banach space,* Differ. Uravn. **34** (1998), 841-843; Englist transl., Differential Equations **34** (1998), 841-844.