

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES**

N° d'ordre :

N° série :

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de :

Magister

Thème

**Processus stochastiques, fractales aléatoires et
introduction aux systèmes de particules**

Par :

Boukhadra Omar

Directeur de la thèse :

Bencherif-Madani Abdellatif

Soutenue le : 2006

Avant-propos

L'étude des propriétés du mouvement Brownien, et plus généralement des processus de Lévy sur R^d a été un des sujets les plus importants dans la théorie des probabilités. La dimension de Hausdorff et la mesure de Hausdorff ont été très utiles pour de telles études depuis le travail de pionnier de Lévy (1953) et Taylor (1953, 1955, 1967).

La naissance de la géométrie fractale due en grande partie au travail de Benoît Mandelbrot, a apporté de nombreuses idées nouvelles et des outils géométriques originaux (tels que la dimension d'empilement, les densités moyennes, les multifractales) servant aux études des propriétés fines des processus stochastiques. Dans la dernière décennie, non seulement divers résultats ont été obtenus sur le mouvement Brownien et sur les processus de Lévy stables, mais il y a eu aussi un grand intérêt pour l'étude d'autres processus de Markov tels que les diffusions sur des fractales (ensembles), les processus de Feller.

L'objectif que nous visons en premier dans ce mémoire qui nécessite des connaissances préalables notamment dans la théorie de la mesure et de l'intégration, la théorie des processus stochastiques, les espaces vectoriels normés et métriques, etc., est d'exposer et de faire la synthèse de travaux récents sur les propriétés fractales des trajectoires des processus de Markov, étudier la dimension de Hausdorff et la dimension d'empilement de l'image d'un processus de Markov en donnant la preuve d'une formule générale pour les deux quantités en termes des fonctions de transition du processus en question, ce qui généralise les résultats bien connus de Pruitt (1969), Taylor (1986b), etc., et enfin de poser quelques problèmes qui restent ouverts. Dans le développement historique de l'étude des propriétés des trajectoires des processus de Markov, des résultats ont été souvent obtenus pour le mouvement Brownien en premier, puis pour les processus stables symétriques d'indice α , et ensuite pour les processus de Lévy généraux ou les processus de Markov. A chaque étape de généralisation, quelques propriétés spéciales du processus sont utilisées. A cause de son importance dans la théorie générale des processus de Markov, nous nous concentrons principalement sur des résultats récents sur les trajectoires des processus de Lévy, en mettant l'accent sur les méthodes applicables à des processus de Markov plus généraux.

Ce mémoire est organisé comme suit. Au chapitre 1, nous rappelons en premier la définition du processus de Markov, établi à l'origine pour la modélisation du mouvement d'une particule qui se meut *sans mémoire* dans un espace mesurable, accompagnée de quelques-unes de ses propriétés basiques. Cette même section sera complétée au chapitre 3. par une autre portant sur différentes classes de processus de Markov, notamment les processus de Lévy et les processus additifs. Nous donnons ensuite une présentation sommaire du mouvement Brownien sur lequel je me permets une réflexion, accompagnée d'une liste très réduite de ses propriétés saisissantes.

Au chapitre 2, nous ferons une rapide présentation assez simpliste des notions de courbes et de dimension (fractale) dans le cas déterministe, accomplissant le rôle de fondement pour une reformulation ultérieure adaptée au cas aléatoire qui nous intéresse, et ornée d'illustrations afin de faciliter l'assimilation de ces concepts faisant office d'outils analytiques servant en fait à essayer de comprendre un tant soit peu de quelle manière une courbe, ou plus généralement un ensemble quelconque, occupe l'espace.

Le chapitre 3, que nous qualifierions de noyau de ce mémoire, est constitué en sections. A la section 2, nous introduisons plusieurs classes de processus de Markov dont les propriétés des trajectoires seront discutées. Nous rappelons leurs définitions et quelques-unes de leurs propriétés basiques qui nous serviront dans la suite. Dans la section 3, nous rappelons les définitions et les propriétés de divers outils de la géométrie fractale ; ceci inclut la mesure de Hausdorff et la dimension de Hausdorff, la mesure d'empilement et la dimension d'empilement, le profil de la dimension d'empilement, capacité, et multifractales. La section 4 étudie

la dimension de Hausdorff et la dimension d'empilement de l'image d'un processus de Markov. Nous donnons la preuve de la formule générale pour la dimension de Hausdorff et la dimension d'empilement de l'image par ce même processus de l'intervalle $[0,1]$ et la dimension de Hausdorff de l'image d'un ensemble E en termes des fonctions de transition du processus, ce qui étend les résultats bien connus de Pruitt (1969) et Taylor (1986).

La section 5 porte sur la mesure de Hausdorff exacte et la mesure d'empilement exacte de l'image par un processus de Markov de l'intervalle $[0,1]$. Quelques techniques utiles pour l'évaluation des mesures de Hausdorff et d'empilement sont discutées.

Les sections 6 et 7 portent sur les propriétés fractales des ensembles dits de niveau et les images inverses. La section 8 traite des résultats sur les dimensions de Hausdorff et d'empilement uniformes pour l'image et l'image inverse d'un processus de Markov.

La section 9 porte sur l'existence des points multiples d'un processus de Markov ou de l'intersection des processus de Markov indépendants, et sur les propriétés fractales de l'ensemble des points multiples et l'ensemble des temps multiples quand ils ne sont pas vides. Diverses approches du problème de l'intersection sont discutées.

Nous signalons que nous avons à regret et pour garder un volume raisonnable à ce mémoire, omis de parler de résultats portant sur les *densités moyennes et les distributions de mesure tangente* et sur l'analyse multifractales des processus de Markov. Toutefois, nous donnons une liste de références exhaustive à la fin du mémoire dans laquelle, nous pouvons toujours trouvé les titres des livres et articles sur le domaine, qui pourraient nous intéresser.

Dans le chapitre 4, nous faisons une brève présentation du calcul stochastique. Nous donnons une construction de l'intégrale de Itô et présentons les techniques de résolution des équations différentielles stochastiques. Ce chapitre nous servira en fait à notre deuxième propos dans ce mémoire portant sur les trajectoires des particules avec bruit Brownien ou quantiques, les équations différentielles stochastiques permettant de mettre en équation le mouvement des particules.

Dans le chapitre 5, nous donnons une rapide présentation de la mécanique classique et de la mécanique quantique où nous introduisons deux notions très importantes dans la mécanique quantique à savoir l'inversion du temps et la dualité. Nous proposons pour finir de caractériser, en utilisant les outils de la géométrie fractale introduits au chapitre 3, les trajectoires quantiques, ce qui nécessite une connaissance encore plus profonde des notions de mécanique quantique et également de bien savoir la construction de la mesure de probabilité temporellement inversée et celle de la mesure de probabilité qui peut être lue dans les deux sens du temps normal et inversé, introduites dans ce même chapitre. Ainsi nous posons deux questions, la première portant sur la représentation de Kolmogorov temporellement inversée, et la seconde qui porte sur la représentation de Schrödinger.

Remerciements. Je remercie naturellement ma famille et mes amis. Mes remerciements vont également aux membres du jury, notamment au Professeur Abdellatif Bencherif-Madani.

TABLE DES MATIERES

Chapitre 1

Processus stochastiques.....	1
1. Processus de Markov.....	1
2. Mouvement Brownien.....	4

Chapitre 2

Courbes et dimension fractale.....	14
1. Notion élémentaires.....	14
2. Recouvrement et dimension.....	15
3. Cas bidimensionnel.....	19
4. Courbes fractales.....	23
5. Dimension de Hausdorff.....	25

Chapitre 3

Fractales aléatoires et processus de Markov.....	27
1. Introduction.....	27
2. Processus de Markov.....	28
2.1. <i>Processus de Lévy</i>	28
2.2. <i>Processus Additifs</i>	33
2.3. <i>Processus de Markov de type Lévy et Opérateurs pseudo-différentiels</i>	34
2.4. <i>Diffusion fractionnaire</i>	36
3. Quelques outils de la géométrie fractale	37
4. Résultats sur la dimension de Hausdorff et d'empilement pour l'image.....	44
5. Mesures de Hausdorff et d'empilement pour l'image et le graphe.....	52
6. Ensembles de niveau des processus de Markov et temps local.....	55
7. Images inverses et probabilités d'entrée.....	60
8. Résultats sur la mesure uniforme et la dimension uniforme.....	62
9. Points multiples et temps local d'auto-intersection.....	64

Chapitre 4

Calcul stochastique

Intégrales et Equations Différentielles Stochastiques.....	70
I. Construction de l'intégrale de Itô.....	70
II. Formule de Itô et théorème de représentation (caractérisation) par les Martingales..	78
II. Exemple. Théorème d'existence et d'unicité pour les EDS.....	79

Chapitre 5

Mouvement d'une particule quantique, inversion du temps et dualité.....	81
1. Processus de Markov.....	81
1.1. <i>Mécanique classique</i>	81
1.2. <i>Mouvement d'une particule avec bruit</i>	82
1.4. <i>Equation de diffusion</i>	84
1.3. <i>Processus de Markov</i>	85
2. Inversion du temps et dualité.....	87
3. Trajectoires des particules quantiques et fractales.....	95
Références.....	97

Résumé. Ce travail fait l'objet d'une synthèse et d'un exposé de travaux récents sur les propriétés fractales des trajectoires des processus de Markov, dans quoi plusieurs questions sont posées, et d'une étude de la dimension de Hausdorff et la dimension d'empilement de l'image d'un processus de Markov, où il est donné la preuve d'une formule générale pour les deux quantités en termes des fonctions de transition du processus en question, ce qui généralise les résultats bien connus de Pruitt (1969) et Taylor (1986). La classe des processus de Markov considérée ici inclut les processus de Lévy dans R^d , les diffusions sur des fractales et sur R^d , les processus de Feller déterminés par des opérateurs pseudo-différentiels, etc.

Le deuxième dessein visé dans ce mémoire est d'introduire deux notions très importantes dans la mécanique quantique à savoir l'inversion du temps et la dualité des processus de Markov, lesquelles servent à déterminer deux représentations de la mesure de probabilité servant à caractériser les trajectoires des particules quantiques, la première étant la mesure de probabilité temporellement inversée et la seconde étant la mesure de probabilité pouvant être lue dans les deux sens du temps, normal et inversé, et ensuite de poser deux problèmes sur la caractérisation fractale des trajectoires quantiques en utilisant ces deux dernières mesures de probabilité.

Mots clés : Processus stochastiques, fractales aléatoires, dimensions de Hausdorff, dimension d'empilement et systèmes de particules.

Abstract. This is a synthesis and a summary on the sample path properties of Markov processes, especially fractal properties of random sets and random measures, in which some questions are posed, and also a study of Hausdorff dimension and packing dimension of the range of Markov process, where is given a proof of a general formula for both quantities in terms of the transition functions of the process, which generalises the well known results of Pruitt (1969) and Taylor (1986). The class of Markov process considered here include Lévy process in R^d , diffusions on fractals and on R^d Feller processes determined by pseudo-differential operators and so on.

The second purpose of this work is to introduce two very important notions in quantum theory of particles, that is, time inversion and duality of Markov processes, which serve to determine two representations of the probability measure serving in characterising quantum paths, the first one being the probability measure temporally inversed and the second one being the probability measure that can be read in the two sense of time, normal and inversed, and then to pose two questions about characterisations of quantum paths in terms of the last two probability measures.

Keys words: Stochastic processes, random fractals, Hausdorff dimension, packing dimension and particles systems.

Chapitre 1. Processus Stochastiques

1. Processus de Markov

Dans cette section nous allons en premier rappeler la définition du processus de Markov, établi à l'origine pour la modélisation du mouvement d'une particule qui se meut *sans mémoire* dans un espace mesurable (S, \mathcal{S}) , accompagnée de quelques-unes de ses propriétés basiques. Cette même section sera complétée au chapitre 3. par une autre portant sur différentes classes de processus de Markov, notamment les processus de Lévy et les processus additifs. Pour la théorie générale des processus de Markov, on se réfère à Blumenthal et Gettoor (1968) et Khoshnevisan (2002).

Soit (S, ρ) un espace métrique complet séparable et compact muni de la σ -algèbre \mathcal{S} . Nous assumons qu'il existe une mesure aléatoire μ sur S qui joue le rôle d'une mesure de référence. Rappelons qu'une mesure aléatoire est une mesure de Borel σ -finie régulière (*i.e.*, $\mu B = \sup_{F \subset B} \mu F = \inf_{G \supset B} \mu G$, avec B un Borélien quelconque, et où F et G sont respectivement un fermé et un ouvert quelconques de S) sur (S, \mathcal{S}) qui est finie sur les ensembles compacts.

Une famille de fonctions $\{P_{s,t}(x, A) : 0 \leq s \leq t\}$, où $P_{s,t}(x, A) : S \times \mathcal{S} \rightarrow R_+ = [0, \infty)$, est appelée un système de fonction de transition sur S si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) Pour tous $0 \leq s < t$ et pour chaque $x \in S$ fixé, $P_{s,t}(x, \bullet)$ est une mesure de probabilité ;
 - (ii) Pour tous $0 \leq s < t$ et pour tout $A \in \mathcal{S}$, $P_{s,t}(x, A)$ est une fonction de x mesurable ;
 - (iii) Pour tous $0 \leq s < t < u$, $x \in S$ et tout $A \in \mathcal{S}$,
- $$(1) \quad P_{s,u}(x, A) = \int_S P_{s,t}(x, dy) P_{t,u}(y, A).$$

La relation (1) est l'équation de Chapman-Kolmogorov. Si, en plus, la fonction de transition $P_{s,t}(x, A)$ satisfait

$$P_{s,t}(x, A) = P_{s,t}(0, A - x)$$

pour tous $0 \leq s < t < u$, $x \in S$ et tout $A \in \mathcal{S}$, alors nous disons que la fonction de transition $P_{s,t}(x, A)$ est *homogène dans l'espace*. En haut, $A - x = \{y - x : y \in A\}$.

Une fonction de transition $P_{s,t}(x, A)$ est dite temporellement homogène s'il existe une famille de fonctions $\{P_{s,t}(x, A), t > 0\}$ telles que $P_{s,t}(x, A) = P_{t-s}(x, A)$ pour tous $0 \leq s < t$. Dans ce cas, l'équation de Chapman-Kolmogorov peut être écrite sous la forme

$$(2) \quad P_{s+t}(x, A) = \int_S P_s(x, dy) P_t(y, A).$$

Plus tard, nous écrirons aussi $P(t, x, A)$ pour $P_t(x, A)$.

Un processus stochastique $X = \{X(t), \mathcal{M}, M_t, P^x\}$ à valeurs dans (S, \mathcal{S}) est appelé un processus de Markov par rapport à la filtration $\{M_t, t \geq 0\}$ (*i.e.*, M_t est une σ -algèbre pour tout $t \geq 0$ et $M_s \subset M_t$ pour tous $0 \leq s < t$) associé en vertu du théorème d'extension de

Kolmogorov à la mesure de probabilité définie dans (4), et ayant $P_{s,t}(x, A)$ comme fonction de transition, dans la mesure où

- (i) X est adapté à $\{\mathcal{M}_t\}$, i.e., $X(t)$ est mesurable par rapport à \mathcal{M}_t pour tout $t \geq 0$;
 - (ii) Pour tous $0 \leq s < t$ et toute fonction mesurable f sur (S, \mathcal{S})
- $$(3) \quad E[f(X(t)) / \mathcal{M}_s] = P_{s,t}f(X(s))$$

où

$$P_{s,t}f(x) = \int_S f(y) P_{s,t}(x, dy)$$

$$(4) \quad P^\mu(dx_0, dx_1, \dots, dx_n) = \mu(dx_0) P_{0,t_1}(x_0; dx_1) \cdots P_{t_{n-1}, t_n}(x_{n-1}; dx_n)$$

Nous avons également la mesure de probabilité associée à l'instant s et de point de départ x

$$P_{(s,x)}(dx_1, \dots, dx_n) = P_{s,t_1}(x; dx_1) P_{t_1, t_2}(x_1; dx_2) \cdots P_{t_{n-1}, t_n}(x_{n-1}; dx_n).$$

En laissant $f = 1_A$ et en prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $X(s)$ dans (3), nous voyons que $P_{s,t}(x, \cdot)$ est la distribution conditionnelle de $X(t)$, sachant $X(s) = x$.

Si la fonction de transition $P_{s,t}(x, A)$ est temporellement homogène, alors X est appelé un processus de Markov *temporellement homogène* par rapport à $\{\mathcal{M}_t\}$. Quand $\mathcal{M}_t \triangleq \sigma\{X(s) : s \leq t\}$ pour tout $t \geq 0$, nous écrivons $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}_+, P^x, x \in S\}$ ou simplement $X = \{X(t), t \geq 0\}$.

Nous assumons que X est régularisé en ce sens que ses trajectoires sont continues à droite avec des limites à gauche (càdlàg), la filtration complétée (ou augmentée) $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ (i.e., \mathcal{S} est complète par rapport à μ en ce sens qu'on lui adjoint tous les ensembles négligeables par rapport à μ , et \mathfrak{F}_0 contient ces mêmes ensembles négligeables) est continue à droite (i.e., $\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathfrak{F}_s$), et que X possède la propriété de Markov forte, c'est-à-dire, pour tout temps d'arrêt U (i.e., une variable aléatoire (v.a) telle que $\{U \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$), nous avons

$$E[f(X(U+t)) / \mathfrak{F}_U] = P_{(U, U+t)}f(X(U)),$$

où $\mathfrak{F}_U = \{B : B \cap (U < t) \in \mathfrak{F}_t\}$. Sauf mention du contraire, nous considérerons toujours les processus de Markov temporellement homogène.

Soit $\{P_t\}$ une famille de fonctions de transition sur (S, \mathcal{S}) . Nous disons que $\{P_t\}$ est honnête (*conservatrice* et *strictement Markovienne* sont aussi utilisés) si la condition de normalité suivante est vérifiée

$$P_t(x, S) = 1, \quad \forall t, x$$

La possibilité $P_t(x, S) < 1$ doit être autorisée dans la théorie (comme c'est le cas dans la théorie stochastique des particules quantiques). La signification intuitive est que $1 - P_t(x, S)$ représente la probabilité que notre particule de Markov soit disparue au temps t . Il est convenable d'adjoindre à S un état de *mort* ∂ générant une extension $S_\partial \triangleq S \cup \partial$. Soit \mathcal{S}_∂ la plus petite σ -algèbre contenant \mathcal{S} et $\{\partial\}$. La famille de fonctions de transition $\{P_t\}$ s'étend de façon naturelle à une famille de fonctions de transition $\{P_t^{+\partial}\}$ sur $(S_\partial, \mathcal{S}_\partial)$: pour $t \geq 0$,

- (i) $P_t^{+\partial}(x, \partial) \triangleq 1 - P_t(x, S) \quad (x \in S, t \geq 0)$;
- (ii) $P_t^{+\partial}(\partial, \bullet) \triangleq \varepsilon_\partial$, la masse unité en ∂ ;
- (iii) $P_t^{+\partial}(\bullet, \bullet) \triangleq P_t(\bullet, \bullet)$ sur $S \times S$.

Soit $B_b(S)$ l'espace de toutes les fonctions mesurables bornées de S vers R . Relativement à la fonction de transition (temporellement homogène) $P_t(x, A)$, nous définissons l'opérateur de transition T_t sur $B_b(S)$ par

$$T_t f(x) = \int f(y) P_t(x, dy) \text{ pour tout } t > 0 \text{ et } f \in B_b(S),$$

et $T_0 f(x) = f(x)$. Alors l'équation de Chapman-Kolmogorov entraîne que $\{T_t, t \geq 0\}$ est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur $B_b(S)$, i.e., $T_s \circ T_t = T_{s+t}$ pour tous $s, t \geq 0$.

Nous disons qu'un processus de Markov X est *symétrique (en dualité dans le contexte de la mécanique quantique, introduit au chapitre 5.)* si pour toutes fonctions $f, g \in C_c(S)$,

$$(6) \quad \int f(x) T_t g(x) \mu(dx) = \int g(x) T_t f(x) \mu(dx),$$

où $C_c(S)$ représente l'espace de toutes les fonctions continues sur S à support compact (i.e., nulles en dehors d'un compact donné).

Maintenant, pour des raisons de simplicité, nous assumons $S \subseteq R^d$ et soit $C_0(R^d)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur R^d qui tendent vers 0 à l'infini, muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\| = \sup_{x \in S} f(x)$.

Définition 1. Un processus de Markov $X = \{X(t), t \in R_+, P^x, x \in S\}$ est appelé un processus de Feller si $\{T_t, t \geq 0\}$ est un semi-groupe de Feller, i.e., pour chaque $f \in C_0(R^d)$,

- (i) $T_t f \in C_0(R^d)$ pour tout $t \geq 0$;
- (ii) $\lim_{t \rightarrow 0} \|T_t f - f\| = 0$.

En outre, si pour tout $t \geq 0$, T_t est une application de $B_b(S)$ vers $C_0(R^d)$, alors $\{T_t, t \geq 0\}$ est appelé un semi-groupe de Feller fort et le processus X est appelé un *processus de Feller fort*.

Le *générateur infinitésimal* A du semi-groupe $\{T_t, t \geq 0\}$ est défini par

$$Au = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t u - u}{t}, \quad \forall u \in D(A),$$

où

$$D(A) = \{u \in C_0(R^d) : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t u - u}{t} \text{ existe par rapport à } \|\bullet\|\}$$

est appelé le *domaine* de A . l'opérateur $(A, D(A))$ est un opérateur défini clos (i.e., son image reste dans $C_0(R^d)$) et dense dans $C_0(R^d)$, et détermine $\{T_t, t \geq 0\}$ de façon unique.

Quand la fonction de transition $P_t(x, \bullet)$ est absolument continue par rapport à la mesure μ (i.e., celle-là s'annule aussi pour chaque Borélien pour lequel celle-ci s'annule) sur (S, \mathcal{S}) , X possède une densité de transition qui sera notée par $p_t(x, y)$. Par conséquent, pour tout $x \in S$, et $A \in \mathcal{S}$,

$$P_t(x, A) = \int p_t(x, y) \mu(dy).$$

Une condition suffisante pour l'existence d'une densité de transition est que X possède la propriété de Feller forte ; voir Hawkes (1972).

En second, nous rappelons la définition des processus de Markov auto-similaires, lesquels étaient en premier introduits et étudiés par Lamperti (1972) pour les processus de Markov sur $[0, \infty)$ sous le nom *semi-stable*. Plus tard, Graversen et Vuolle-Apiala (1986) ont considéré des processus de Markov auto-similaires sur R^d ou $R^d \setminus \{0\}$ et ont cherché les connections entre les processus de Markov auto-similaires multidimensionnelles et les processus de Lévy.

Nous assumerons toujours, sauf mention du contraire, que l'espace des états (S, \mathcal{S}) est R^d , $R^d \setminus \{0\}$ ou R_+^d , munis des σ -algèbre de Borel usuelle. Soit ∂ un point adjoint à S comme point isolé (état de mort) et soit $H > 0$ une constante. Un processus de Markov temporellement Homogène $X = \{X(t), t \in R_+, P^x, x \in S\}$ à valeurs dans $S \cup \{\partial\}$ est appelé *processus de Markov H-auto-similaire* (*H-self-similar Markov process*) si sa fonction de transition $P(t, x, A)$ satisfait :

$$(7) \quad P(0, x, A) = 1_A(x) \quad \text{pour tous } x \in S, A \in \mathcal{S}, \text{ et}$$

$$(8) \quad P(t, x, A) = P(at, a^H x, a^H A) \quad \text{pour tous } t > 0, a > 0, x \in S \text{ et } A \in \mathcal{S},$$

où pour $c \in R$ quelconque $cA \hat{=} \{cx : x \in A\}$. La constante H est appelée l'indice de l'auto-similarité de X . les conditions (7) et (8) sont équivalentes à

$$(9) \quad \{X(t), t \geq 0, P^x, x \in S\} \stackrel{d}{=} \{a^{-H} X(at), t \geq 0, P^{a^H x}, x \in S\}$$

où $X \stackrel{d}{=} Y$ signifie que les processus X et Y possèdent les mêmes distributions de dimension finie. Si (8) est la seule condition vérifiée pour une constante $a > 1$, alors X est dit *semi-auto-similaire* avec indice H . Une telle constante $a > 1$ est dite *époque* du processus (cf. Sato (1999)) et ceci est souvent utile dans les démonstrations des théorèmes de convergence pour X . Voir, par exemple, Fkushima et al. (1999), Wu et Xiao (2002b).

2. Mouvement Brownien

1. (Ω, \mathcal{F}, P) étant un espace de probabilité donné, nous donnons ci-après la définition d'un processus stochastique des plus importants, accompagnée de quelques résultats pour le moins saisissants dont les preuves peuvent être trouvées dans L.C.G. Rogers et D. William (1997).

Tout d'abord, je me permets, avant de présenter la définition de cet objet mathématique qu'est le mouvement Brownien, et quelques-unes de ses propriétés saisissantes, d'oser donner une réflexion sur celui-là : le mouvement Brownien, qui est un processus stochastique, est en raison de sa définition mathématique continu et nulle part différentiable en ce sens que si l'on représentait sa trajectoire comme le déplacement d'une particule ponctuelle sur un plan et dans le temps, alors celle-là ne disparaîtrait jamais du regard de celui qui est en train de l'observer quelque petit qu'il soit, et ne monterait jamais avant d'être descendue. Par conséquent, je le crois, tout comme les courbes fractales (cf. chapitre 2), une illusion mathématique causée par l'adoption des mathématiques modernes de la notion de l'infini qui est en fait inconcevable de quelque manière que ce soit par l'homme ; on ne peut pas, par la définition même mathématique du mouvement Brownien, concevoir l'espace d'un instant ce qu'est sa trajectoire (son mouvement). Cependant, on pourrait dire qu'elle est fort probable passée par tel endroit à tel instant...

Définition 1.1. Un processus stochastique à valeurs dans R (pour le mouvement Brownien dans R^d , voir chapitre 4), $\{B_t : t \in R_+\}$ est un mouvement Brownien s'il a les propriétés :

$$(1.2) \quad (i) \quad B_0(\omega) = 0 ;$$

$$(ii) \quad \text{L'application } t \mapsto B_t(\omega) \text{ est une fonction continue de } t \in R_+ \text{ pour tout } \omega ;$$

(iii) Pour tout $t, h \geq 0, B_{t+h} - B_t$ est indépendante (v.a) de $\{B_u : 0 \leq u \leq t\}$, et a une distribution *Gaussienne* de moyenne 0 et de variance h .

Les conditions (1.2) (ii) et (iii) sont les plus importantes ; si $B = \{B_t : t \in R_+\}$ est un mouvement Brownien, $\{\xi + B_t : t \in R_+\}$ est regardé comme étant un mouvement Brownien *de*

point de départ ξ ; le point de départ ξ peut être une valeur réelle fixe, ou une v.a indépendante de B .

Le fait de savoir ce qu'est un mouvement Brownien est sans doute bien moins important que de savoir ce pour quoi on l'étudie. Il est donné ci-dessous quatre raisons principales justifiant ceci :

- ◇ Virtuellement, toute classe de processus stochastiques intéressantes contient le mouvement Brownien : celui-ci est une martingale, un processus Gaussien, un processus de Markov, une diffusion, un processus de Lévy,...
- ◇ Le mouvement Brownien est suffisamment concret permettant de faire explicitement des calculs.
- ◇ Le mouvement Brownien peut être considéré comme un outil de construction ; en effet, les résultats les plus importants sur le mouvement Brownien disent que généralement, les processus dans certaines classes peuvent être obtenus en faisant une séquence de transformation sur le mouvement Brownien ;
- ◇ La dernière mais pas des moindres, le mouvement Brownien est en soi un beau et riche objet mathématique.

Théorème 1.3. *Existence et unicité*

Il existe un espace de probabilité sur lequel il est possible de définir un processus $(B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ ayant les propriétés suivantes :

- (i) $B_0(\omega) = 0$;
- (ii) L'application $t \mapsto B_t(\omega)$ est une fonction continue de $t \in [0,1]$ pour tout ω ;
- (iii) Pour tout $0 \leq s \leq t \leq 1$, $B_t - B_s$ est indépendante de $\{B_u : 0 \leq u \leq t\}$, et a une distribution Gaussienne $N(0, t - s)$, $t - s$ étant la variance.

Preuve : (cf. [197]). Cette référence nous donne une preuve due à *Ciesielki* qui est en fait l'ultime raffinement de l'idée originale de *Wiener* de représenter le mouvement Brownien comme étant des séries de *Fourier* aléatoires.

Corollaire 1.4. *Il existe un espace de probabilité sur lequel le mouvement Brownien peut être défini.*

L'idée est simple ; nous pouvons construire sur un espace de probabilité donné des copies du processus donné dans le théorème 1.3 et les combiner ensemble pour avoir un processus comme énoncé dans la définition 1.1.

En effet, si l'on note ces copies en question par $(B_t^n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut définir $(B_t)_{t \geq 0}$ comme suit

$$B_t = \sum_{j=0}^{[t]-1} B_1^j + B_{t-[t]}^{[t]} .$$

Note : L'unicité dans le théorème 1.3. est dans le sens des distributions ; le mouvement Brownien peut donc être regardé comme étant un élément aléatoire à valeurs dans $C(R^+, R)$ auquel est associé la mesure de probabilité dite *mesure de Wiener* sur $C(R^+, R)$. ($C(R^+, R)$ étant l'ensemble de toutes les fonctions continues de R^+ dans R).

2. Le mouvement Brownien est une martingale

Soit $\{B_t : t \geq 0\}$ un mouvement Brownien, et définissons $\mathfrak{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$. Alors, nous montrons facilement que $(B_t, \mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ est une martingale, en rappelant qu'un processus

stochastique $X = (\Omega, P, (X_t)_{t \geq 0}, \{F_t\}_{t \geq 0})$ est dit une martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale) si les X_t sont intégrables, adaptées, et on a :

$$(4.10) \quad E(X_{t+s} / F_t) = X_t \text{ p.s. } \forall t, s \geq 0$$

(resp. $E(X_{t+s} / F_t) \geq X_t, E(X_{t+s} / F_t) \leq X_t, \text{ p.s. } \forall s, t \geq 0$)

Puisque $B_t - B_s$ suit une loi normale centrée de variance $t - s$, indépendamment de \mathfrak{F}_s , nous avons

$$E[(B_t - B_s)^2 / \mathfrak{F}_s] = t - s,$$

mais

$$E[(B_t - B_s)^2 / \mathfrak{F}_s] = E[B_t^2 / \mathfrak{F}_s] - B_s^2,$$

Il résulte alors que

$$E(B_t^2 - t / \mathfrak{F}_s) = B_s^2 - s.$$

Nous concluons que

$$(2.1) \quad B_t^2 - t \text{ est une martingale}$$

Ce simple fait est un élément fondateur des intégrales stochastiques (cf. chapitre : 4) ; une fois la théorie développée, il sera possible de prouver la réciproque de (2.1) :

Théorème 2.2. *Lévy.*

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une martingale continue (i.e., à trajectoires continues), $X_0 = 0$ et supposons que

$$X_t^2 - t \text{ est une martingale}$$

Alors X est un mouvement Brownien.

Le théorème 2.1. ne précise pas par rapport à quelle filtration $\{F_t\}_{t \geq 0}$ X est une martingale, ceci n'est pas nécessaire ; si X est une martingale par rapport à $\{F_t\}_{t \geq 0}$ et satisfait les hypothèses du théorème 2.2 alors X est un $\{F_t\}_{t \geq 0}$ -mouvement Brownien en ce sens que X satisfait (1.2) (i) - (ii) et la condition forte :

$$(1.2)(iii)' \quad \text{Quelque soit } t, h \geq 0, X_{t+h} - X_t \text{ est indépendante de } F_t \text{ et a une distribution normale de moyenne nulle et de covariance } h.$$

Un résultat important découlant aussi du théorème 2.2 dit que :

$$P \{ \limsup_{t \rightarrow \infty} B_t = \infty, \liminf_{t \rightarrow \infty} B_t = -\infty \} = 1$$

Nous montrons également et facilement que

$$(2.3) \quad \exp \left[\theta B_t - \frac{1}{2} \theta^2 t \right] \text{ est une martingale.}$$

3. Le mouvement Brownien est un processus Gaussien

Dans le cas général, un processus $(X_t)_{t \in T}$ indexé par un ensemble T (à valeurs dans R) est un processus Gaussien si, pour tout n -uplet $(t_1, \dots, t_n) \in T^n$, la loi de $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ est Gaussienne multivariée (à valeurs dans R^n). La loi de X est ainsi définie par les fonctions :

$$\mu(t) = EX_t, \rho(s, t) = \text{cov}(X_s, X_t)$$

(ceci veut dire que nous pouvons déterminer la loi de $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ pour tous $t_1, \dots, t_n \in T$, une fois μ et ρ données). On assume sans perte de généralité que $\mu = 0$.

Il est évident que $(B_t)_{t \geq 0}$ est Gaussien de moyenne nulle et de covariance

$$(3.1) \quad \rho(s, t) = s \wedge t, s, t \geq 0$$

Réciproquement, nous affirmons que tout processus $(X_t)_{t \geq 0}$ continu à droite à valeurs dans R , qui est Gaussien de moyenne nulle et de covariance (3.1), est un mouvement Brownien. Cette propriété permet de vérifier rapidement si un processus est un mouvement Brownien, et les quatre exemples simples mais importants suivants servent d'illustration à ça :

(3.2) le processus $(-B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien ;

(3.3) pour tout $a \geq 0$, le processus $(B_t - B_a)_{t \geq a}$ est un mouvement Brownien ;

(3.4) pour tout $c \neq 0$, $(cB_{t/c^2})_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien ;

(3.5) le processus $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ défini par

$$\begin{cases} \tilde{B}_0 = 0 \\ \tilde{B}_t = tB_{1/t}, t \geq 0 \end{cases}$$

est un mouvement Brownien.

Les preuves de ces propriétés sont triviales, à l'exception de la preuve de la continuité au point 0 de \tilde{B} . Mais ceci n'est pas difficile, nous avons

$$\tilde{F} = \{ \tilde{B} \rightarrow 0 \} = \bigcap_n \bigcup_m \bigcap_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1/m]} \{ |\tilde{B}_q| \leq 1/n \},$$

puisque \tilde{B} est certainement continu sur $(0, \infty)$. Mais les processus $(\tilde{B}_t)_{t > 0}$ et $(B_t)_{t > 0}$ sont continus et ont la même distribution (il sont Gaussiens de même covariance), donc

$$P(\tilde{F}) = P(F) = 1$$

où $F = \{ B \rightarrow 0 \} = \bigcap_n \bigcup_m \bigcap_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1/m]} \{ |B_q| \leq 1/n \}$, lequel événement, par définition, est certain.

La propriété (3.5) donne le résultat saisissant suivant.

Lemme 3.6. *Nous avons*

$$P(\sup_t B_t = +\infty, \inf_t B_t = -\infty) = 1$$

Le lemme 3.6. implique directement que, presque sûrement, pour tout $a \in R$, $\{ t : B_t = a \}$ n'est pas majoré. Ainsi, le mouvement Brownien est récurrent - il revient à son point de départ.

4. Le mouvement Brownien est un processus de Markov

Le mouvement Brownien est un processus de Markov (homogène dans le temps) ; pour toute fonction Borélienne bornée $f : R \rightarrow R$ et $s, t \geq 0$

$$(4.1) \quad E[f(B_{t+s}) / \mathfrak{F}_s] = P_t f(B_s) \quad P\text{-p.s.},$$

où le semi-groupe de transition $(P_t)_{t \geq 0}$ est défini par

$$P_t f(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} p_t(x, y) f(y) dy & t > 0 \\ f(x) & t = 0, \end{cases}$$

où $p_t(x, y) = (2\pi t)^{-1} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2t}\right]$ est la densité de transition Brownienne. La propriété

de Markov (4.1) est immédiate de la définition du mouvement Brownien. Il est facile de s'assurer que $(P_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe vérifiant l'équation dite de Chapman-Kolmogorov :

$$(4.3) \quad P_{t+s} = P_t P_s = P_s P_t \quad (s, t \geq 0).$$

La propriété de semi-groupe (4.3) entraîne que l'on doit avoir dans un sens

$$(4.4) \quad \frac{dP_t}{dt} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (P_{t+s} - P_t) = P \mathfrak{G} = \mathfrak{G} P,$$

où

$$\mathfrak{G} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (P_s - 1)$$

est le générateur infinitésimal de $(P_t)_{t \geq 0}$. Or, si l'on prend $f \in C_b^2(\mathbb{R})^1$ alors

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (P_t f - f)(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x + y\sqrt{t}) - f(x)}{t} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t} \left\{ y\sqrt{t} f'(x) + \frac{1}{2} f''(x + \theta y\sqrt{t}) \right\} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2} f''(x) \end{aligned}$$

(où $\theta \in (0,1)$ dépend de $y\sqrt{t}$). Ainsi le générateur infinitésimal du mouvement Brownien est

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2},$$

du moins quand il est appliqué à $C_b^2(\mathbb{R})$.

De (4.4), nous trouvons que, pour $f \in C_b^2(\mathbb{R})$,

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t f(x) = \mathfrak{G} P_t f(x) = \frac{1}{2} (P_t f)''(x).$$

Ce qui conduit à l'équation de retour de Kolmogorov (Kolmogorov's backward equation) pour la densité de transition du mouvement Brownien :

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_t(x, y).$$

Utilisant la deuxième partie de (4.4), il nous vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t f(x) = P_t \mathfrak{G} f(x) = \frac{1}{2} P_t f''(x),$$

et en intégrant par partie, nous obtenons l'équation dite *équation d'avancement de Kolmogorov* (pour la densité de transition du mouvement Brownien :

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} p_t(x, y)$$

Cette équation est bien connue en physique ; elle est dite *équation de diffusion* (cf. chapitre :5), parce qu'elle détermine le flux de chaleur physique.

5. Insertion de Skorohod (Skorohod embedding)

Avant tout, nous donnons la définition d'une *marche aléatoire* qui se trouve être une suite de v.a $(S_n)_{n \geq 1}$ telles que, pour $n \geq 0$:

¹ $C_b^2(\mathbb{R})$ est l'ensemble de toutes les fonctions deux fois continûment différentiables bornées.

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i,$$

où les X_n sont des v.a indépendantes et identiquement distribuées, de variance finie.

Dans bien des cas, une marche aléatoire de moyenne nulle et de variance finie se comporte comme un mouvement Brownien et nous allons voir ça plus précisément.

Nous supposons que F est la distribution des déplacements de la marche aléatoire ; ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xF(dx) = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 F(dx) = \sigma^2 < \infty.$$

Le but est de trouver un temps d'arrêt T pour un mouvement Brownien tel que :

$$(5.1) \quad B_T \text{ a une distribution } F \text{ et } ET = \sigma^2$$

Nous donnons tout d'abord la proposition suivante qui en réalité servira d'outil à la démonstration du théorème confirmant l'existence de cette propriété (5.1).

Proposition 5.2. *Si $\tau = \inf \{t : B_t \in (a,b)\}$, où $a < 0 < b$ sont fixés, alors $\tau < \infty$ p.s., et*

$$(5.2) \quad (i) \quad P(B_\tau = b) = \frac{-a}{b-a},$$

$$(ii) \quad E\tau = |ab|.$$

Nous définissons ensuite l'élément aléatoire qui prend le couple de valeurs $\alpha < 0 < \beta$ suivant la distribution

$$\mu(da, db) = \gamma(b-a)F_+(db)F_-(da),$$

où F_\pm sont respectivement les restrictions de F à $[0, \infty)$, $(-\infty, 0)$ et

$$\gamma^{-1} = \int_0^\infty bF_+(db) = - \int_{-\infty}^0 aF_-(da) = \frac{1}{2} \int |x|F(dx).$$

Puis posons,

$$T = \inf \{u : B_u \notin (\alpha, \beta)\}.$$

Théorème 5.3. *Insertion de Skorohod : La loi de B_T est F , et $ET = \sigma^2$*

Nous savons maintenant comment exprimer une marche aléatoire en fonction du mouvement Brownien ; nous prenons $T_1 = T$ comme décrit plus haut, puis effectuons la même construction pour le mouvement Brownien $(B_{T_1+t} - B_{T_1})_{t \geq 0}$ (ce fait énoncé ci-dessous repose sur la propriété de Markov forte du mouvement Brownien) pour obtenir un temps d'arrêt T_2' de moyenne σ^2 et tel que $B_{T_1+T_2'} - B_{T_1}$ possède une distribution F . Maintenant, posons $T_2 = T_1 + T_2'$ et procédons de manière similaire pour le mouvement Brownien $(B_{T_2+t} - B_{T_2})_{t \geq 0}$. Nous arrivons à la fin à construire une suite de temps d'arrêt $T_0 = 0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$, qui vérifie le résultat suivant.

Théorème 5.4. *Le processus $(S_n)_{n \geq 0} = (B(T_n))_{n \geq 0}$ est une marche aléatoire associée à la distribution de déplacement F et $ET_n = n\sigma^2$.*

6. Principe d'invariance de Donker . Soit F une fonction de distribution de moyenne nulle et de variance 1. Utilisons le théorème 5.4. pour obtenir une marche aléatoire associée à F . Maintenant, définissons pour chaque n la fonction aléatoire

$$(6.1) \quad S^n(t) = n^{1/2} \left[(t - k/n)S_{k+1} + \left(\frac{k+1}{n} - t \right) \right], \quad \frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}$$

Ceci est une fonction continue par morceaux linéaires (pour $\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}$, $S^n(t)$ est le segment d'extrémité B_{T_k} et $B_{T_{k+1}}$), égale à $n^{-\frac{1}{2}}S_k$ en chaque point de la forme $t = \frac{k}{n}$.

Théorème 6.2. *Principe d'invariance de Donker.*

Le processus $(S^n(t))_{0 \leq t \leq 1}$ converge faiblement vers $(B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ quand $n \rightarrow \infty$ en ce sens que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $n_0 = n_0(\varepsilon)$ assez grand tel que pour $n \geq n_0$,

$$(6.3) \quad P \left[\sup_{0 \leq t \leq 1} |S^n(t) - B^{(n)}(t)| > \varepsilon \right] \leq \varepsilon$$

où $B^{(n)}$ est un mouvement Brownien ; en fait, nous définissons

$$B_t^{(n)} = n^{-\frac{1}{2}} B_{nt}$$

Note : Ce théorème nous permet pour le moins de saisir intuitivement la notion du mouvement Brownien comme étant une limite faible de marches aléatoires.

7. Martingales exponentielles et les distributions du premier-passage

Nous utiliserons la martingale exponentielle (Brownienne) (2.3) pour en tirer la loi de

$$H_x = \inf \{ t > 0 : X_t = x \} \quad (x > 0),$$

où $X_t = B_t + ct$ est mouvement Brownien (à tendance)

Fixons un $\lambda > 0$. Nous affirmons de (2.3) que

$$\exp(\theta X_t - \lambda t) = \exp[\theta B_t - (\lambda - \theta c)t]$$

est une martingale si tant est que

$$\lambda - \theta c = \frac{1}{2} \theta^2.$$

Ceci étant,

$$\theta = \beta + \sqrt{c^2 + 2\lambda} - c, \text{ ou } \theta = \alpha = -c - \sqrt{c^2 + 2\lambda} \quad (\alpha < 0 < \beta)$$

Ainsi la martingale $\exp(BX_t - \lambda t)$ est bornée sur $[0, H_x]$, donc nous pouvons utiliser le théorème de l'échantillonnage optionnel (voir [196]) pour conclure que

$$1 = E[\exp(BX(H_x) - \lambda H_x)] = e^{\beta x} E e^{-\lambda H_x},$$

de quoi

$$(7.1) \quad E e^{-\lambda H_x} = \exp \left\{ -x \left(\sqrt{c^2 + 2\lambda} - c \right) \right\}$$

La transformée de Laplace* peut être explicitement inversée pour donner

$$P(H_x \in dt) / dt = \frac{x}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp \left[-\frac{(x - ct)^2}{2t} \right]$$

de (7.1), nous concluons en prenant la limite quand $\lambda \downarrow 0$ que :

$$P(H_x < \infty) = \begin{cases} 1 & c \geq 0 \\ e^{-2|c|x} & c < 0 \end{cases}$$

Ainsi, si la *tendance* est négative ($c < 0$), le mouvement Brownien à tendance, avec une probabilité positive, échouera à atteindre le niveau x fixé à l'avance. (ceci n'est en fait pas surprenant, puisque $t^{-1}X_t \xrightarrow{p.s.} c$).

8. Propriété des trajectoires du mouvement Brownien

Les trajectoires du mouvement Brownien sont on ne peut plus fascinantes, et les résultats énoncés ci-dessus attestent de cela.

Théorème 8.1. *Presque sûrement, B n'est nulle part continu Lipchitzien. En particulier, B n'est nullement différentiable partout.*

Par ailleurs, nous avons le résultat suivant (voir Mackean, H.P. *Stochastic integrals*)

8.2 Théorème : Lévy.

$$P \left\{ \limsup_{\delta \downarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{B_{t+\delta} - B_t}{[2\delta \log(1/\delta)]^{\frac{1}{2}}} = 1 \right\} = 1.$$

Ce résultat doit être comparé à la loi du logarithme itéré :

$$P \left\{ \limsup_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{[2t \log \log(1/t)]^{\frac{1}{2}}} = 1 \right\} = 1.$$

Nous énoncerons ce résultat comme théorème; notons que, encore que la loi du logarithme itéré soit vérifiée presque en tout point de la trajectoire, le théorème 8.2 nous assure qu'il y a des endroits où l'oscillation est plus grande que $[2\delta \log \log(1/\delta)]^{\frac{1}{2}}$.

Une autre propriété frappante de la trajectoire du mouvement Brownien se traduit par :

Théorème 8.3. *Presque sûrement, le mouvement Brownien n'a aucun point de croissance :*

$$P(\exists \delta > 0, s > 0 : B_{s-h} \leq B_s \leq B_{s+h}, \forall h \in [0, \delta]) = 0.$$

9. La propriété de Markov forte

Théorème 9.1. *Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, F, \{F_t\}, P)$, et soit T un temps d'arrêt fini. Alors le processus*

$$B_t^{(T)} = B_{T+t} - B_t, t \geq 0$$

est un mouvement Brownien indépendant de F_T .

10. Réflexion. L'idée de base de la réflexion du mouvement Brownien trouve son origine dans la notion de marche aléatoire symétrique simple. Pour $a \in R$, définissons

$$H_x = \inf \{t > 0 : B_t = a\}$$

Théorème 10.1. *Fixons $a \in R$. Le processus*

$$\tilde{B}_t = \begin{cases} B_t & t < H_a \\ 2a - B_t & t \geq H_a \end{cases}$$

est un mouvement Brownien.

11. Mouvement Brownien Réfléchissant et temps local. Si $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien, alors un mouvement Brownien réfléchissant est un processus stochastique

identique en loi à $(|B_t|)_{t \geq 0}$. Celui-là est un processus continu non négatif et est en fait aussi un processus de Markov. La propriété de Markov n'est pas immédiate, parce que nous avons pris une fonction d'un processus de Markov ($x \mapsto |x|$, en l'occurrence), qui n'est pas en général Markovien. Le résultat suivant précise ce fait.

Lemme 11.1. *Soit (S, \mathfrak{F}) et (S', \mathfrak{F}') deux espaces mesurables et supposons que la fonction mesurable $\Phi : (S, \mathfrak{F}) \rightarrow (S', \mathfrak{F}')$ est surjective, que $(P_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de transition de Markov fort et que $(Q_t)_{t \geq 0}$ est une collection de noyaux de probabilité sur S' tels que, pour tout $f \in b S'$ (l'ensemble des fonctions bornées \mathfrak{F}' -mesurable),*

$$(11.2) \quad P_t(f \circ \Phi) = (Q_t f) \circ \Phi.$$

Alors $(Q_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de transition de Markov, et si X est processus de Markov associé au semi-groupe de transition $(P_t)_{t \geq 0}$ alors $\Phi(X)$ Markovien associé au semi-groupe de transition $(Q_t)_{t \geq 0}$.

(Un noyau de probabilité Q sur S' est une application $Q : S' \times \mathfrak{F}' \rightarrow [0,1]$ telle que $Q(x, \bullet)$ est une mesure de probabilité pour chaque $x \in S'$, et $Q(\bullet, A)$ est mesurable pour chaque $A \in \mathfrak{F}'$).

Dans notre cas, le semi-groupe de transition est le semi-groupe Brownien (4.2), et $\Phi(x) = |x|$. Si nous définissons, pour $f \in C_b(R^+)$,

$$Q_t f(x) = \int_0^\infty [P_t(x, y) + P_t(x, -y)] f(y) dy = \int_0^\infty (2\pi t)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2t}\right) 2 \cosh\left(\frac{xy}{t}\right) f(y) dy$$

Alors il est trivial de vérifier (11.2).

La propriété de Markov forte de $|B|$ découle de celle du mouvement Brownien, comme tout temps d'arrêt pour la filtration de $|B|$ est un temps d'arrêt pour la filtration de B .

Maintenant, considérons le processus $(S_t, S_t - B_t)_{t \geq 0}$, lequel est un processus de Markov fort continu dans $(R^+)^2$. ($S_t = \sup(B_u : u \leq t)$). Pour voir la propriété de Markov forte, observons que, pour tout temps d'arrêt fini T ,

$$(11.3) \quad (S_{T+t}, S_{T+t} - B_{T+t}) = (S_T \vee (B_T + \tilde{S}_t), (S_T - B_T) \vee \tilde{S}_t - \tilde{B}_t)$$

où $\tilde{B}_t = B_{T+t} - B_T$ et $\tilde{S}_t = \sup\{\tilde{B}_u : u \leq t\}$. Comme \tilde{B} est indépendant de F_T , la loi du future de $(S, S - B)$ si F_T est donnée, dépend seulement de (S_T, B_T) . On montre en se basant sur les résultat vus précédemment que $S - B$ est simultanément un processus de Markov et un mouvement Brownien réfléchissant associé au même semi-groupe de transition. Nous énonçons maintenant un fait important découvert par Lévy disant qu'en regardant la trajectoire de $S - B$, nous pouvons connaître S . En effet, fixons $\varepsilon > 0$ et définissons

$$T = \inf\{u : S_u - B_u > \varepsilon\}$$

Alors il n'est pas difficile de voir que S_T doit avoir une distribution exponentielle de moyenne ε . Ensuite, définissons

$$T'_1(\varepsilon) = 0, T_n(\varepsilon) = \inf\{u > T'_n(\varepsilon) : S_u - B_u > \varepsilon\}, T'_{n+1} = \inf\{u > T_n(\varepsilon) : S_u - B_u = 0\}, \text{ et}$$

$$U(t, \varepsilon) = \sup\{k : T_k(\varepsilon) \leq t\}$$

Notons que $U(\bullet, \varepsilon)$ est croissante pour tout $\varepsilon > 0$, et qu'en utilisant la propriété de Markov forte les v.a $S(T_1(\varepsilon)), S(T_2(\varepsilon)) - S(T_1(\varepsilon)), S(T_3(\varepsilon)) - S(T_2(\varepsilon)), \dots$ sont indépendante et

² « Soit » étant là une conjonction doit donc rester invariable !

identiquement distribuées de distribution exponentielle de moyenne ε . Ainsi

$$U(H_a, \varepsilon) = \sup\{k : S(T_k(\varepsilon)) \leq a\}$$

aura une distribution de Poisson de moyenne $\frac{a}{\varepsilon}$. Puis pour a fixé, considérons

$$Z_n = 2^{-n} U(H_a, 2^{-n})$$

qui a une moyenne a . Si $\mathfrak{F}_n = \sigma(Z_n : k \geq n)$, nous affirmons que (Z_n, \mathfrak{F}_n) est une martingale inversée (i.e., $E(X_{n-1} / \mathfrak{F}_n) = X_n$), et que

$$Z_n \rightarrow Z_\infty \text{ p.s et en } L^1 \text{ }^3.$$

Ce qui nous assure que $EZ_\infty = a$; mais $\text{var } Z_n = a2^{-n} \rightarrow 0$, $EZ_n = a$, $Z_n \xrightarrow{L^2} a^4$, impliquant que $Z_\infty = a$ p.s. Somme toute,

$$\lim_n 2^{-n} U(H_a, 2^{-n}) = a \text{ p.s.}$$

Il vient alors que

$$P(\lim_n 2^{-n} U(H_a, 2^{-n}) = a \text{ pour tout } a \in Q^+) = 1,$$

et comme $U(\bullet, \varepsilon)$ est croissante, nous concluons que

$$P(\lim_n 2^{-n} U(H_a, 2^{-n}) = S_t \text{ pour tout } t \geq 0) = 1$$

Par ailleurs, $|B|$ ayant la même distribution que $S - B$, nous pouvons alors lui appliquer la même construction, et par conséquent obtenir un processus (unique) appelé **temps local Brownien**.

Théorème 11.4. *Lévy.*

Il existe un (unique) processus croissant continu l tel que $|B_t| - l_t$ est un mouvement Brownien. Le processus l croît seulement quand $|B| = 0$ et peut être exprimé en fonction de $|B|$ par la formule

$$l_t = \lim_n 2^{-n} \tilde{U}(t, 2^{-n})$$

où $\tilde{U}(t, \varepsilon)$ est défini comme précédemment pour $|B|$.

12. Loi du logarithme itéré

Théorème 12.1.

$(B_t)_{t \geq 0}$ étant un mouvement Brownien. Alors, on a

$$P\left\{\limsup_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{[2t \log \log(1/t)]^{\frac{1}{2}}} = 1\right\} = 1$$

ou ce qui revient au même par la propriété (3.5) de l'inversion du temps

$$P\left\{\limsup_{t \uparrow \infty} \frac{B_t}{[2t \log \log(1/t)]^{\frac{1}{2}}} = 1\right\} = 1.$$

³ l'ensemble des fonctions intégrables muni de la norme usuelle

⁴ Cette notation signifie que la convergence est au sens de la norme usuelle de l'ensemble des fonctions de carré intégrable L^2 .

Chapitre 2. Courbes et dimension fractale

Dans ce chapitre basé sur la référence [236] contenant les preuves de tous les résultats et propriétés énoncés ci-dessous, nous ferons une rapide présentation assez simpliste des notions de courbes et de dimension (fractale) dans le cas déterministe, accomplissant le rôle de fondement pour une reformulation ultérieure adaptée au cas aléatoire qui nous intéresse, et ornée d'illustrations afin de faciliter l'assimilation de ces concepts faisant office d'outils analytiques servant en fait à essayer de comprendre un tant soit peu de quelle manière une courbe, ou plus généralement un ensemble quelconque, occupe l'espace. Nous entendrons alors la *mesure* dans le sens de *longueur*, sauf mention du contraire. La longueur d'un intervalle u est $L(u)$.

1. Notions élémentaires

1.1. Ensembles fermés et intervalles contigus

La longueur d'un intervalle $I = [a, b]$ ou $]a, b[$, est

$$L(I) = b - a$$

La longueur $L(V)$ d'un ouvert V se calcule sans plus de difficulté : un tel ensemble est soit un intervalle, soit une réunion d'intervalles ouverts disjoints. Il suffit donc de faire la somme des longueurs de ces intervalles. On en déduit la longueur des ensembles fermés de la façon suivante :

Supposons un tel ensemble, F , inclus dans un intervalle $[a, b]$. Lorsque a est le plus petit élément de F , et b le plus grand, $[a, b]$ est appelé *intervalle fondamental de F* : c'est le plus petit intervalle contenant F . Le complémentaire de F dans son intervalle fondamental est un ensemble ouvert. Il est donc formé d'intervalles ouverts disjoints C_1, C_2, \dots , en quantité finie ou dénombrable. Nous appelons ces intervalles les *contigus*, relatifs à F . Selon la règle de *Borel*, on obtient :

$$L(F) = b - a - \sum_n L(C_n)$$

- Un point d'un ensemble fermé F est dit *isolé* s'il est le centre d'un intervalle ne contenant aucun autre point de F . Un ensemble composé de points isolés est dit discret.

1.2. Ensembles parfaits

Un ensemble *parfait* est un ensemble fermé, sans point isolé.

Un ensemble *nulle part dense* est un ensemble dont la fermeture ne contient aucun intervalle.

Exemple : Ensemble de Cantor ou triadique

C'est à Cantor que revient le crédit d'avoir construit le premier fermé non dénombrable, mais ne contenant aucun intervalle. On l'obtient en ôtant à l'intervalle $[0, 1]$ un premier contigu C_1 , qui est le segment $[1/3, 2/3]$. Il reste deux intervalles fermés $[0, 1/3]$ et $[2/3, 1]$, sur lesquels on répète la même opération, dans le rapport $1/3$, et ainsi de suite. A la n -ème étape, on obtient une réunion de 2^n intervalles fermés disjoints de longueur 3^{-n} , à l'intérieur desquels on retire un contigu, centré au milieu, de longueur 3^{-n-1} .

Nous pouvons donner une généralisation de l'ensemble de Cantor. Ceci est l'opération consistant à ôter d'un segment quelconque, un contigu centré au milieu. Pour que cette construction soit possible, il faut donc que la suite (l_n) des longueurs des contigus à enlever à chaque étape, vérifie

$$\sum_{n \geq 1} 2^{n-1} l_n \leq 1$$

L'ensemble ainsi construit est parfait, dit *symétrique*.

1.3. Représentation des parfaits par des arbres : intervalles blancs

Soit un ensemble parfait F , de segment fondamental $[0,1]$. Pour tout entier n , on peut diviser cet intervalle en 2^n intervalles dyadiques fermés, de longueur 2^{-n} : ce sont les intervalles de rang n . Parmi ceux-là, éliminons ceux dont l'intérieur ne contient aucun point de F . les autres contiennent au moins un point de F à l'intérieur, donc en fait une infinité puisque aucun point de F n'est isolé dans F ; appelons-les les *intervalles blancs*. Ces derniers possèdent quelques propriétés les rendant utilisables graphiquement :

- ◇ Quelque soit n , les intervalles blancs de rang n recouvrent F .
- ◇ Tout intervalle blanc de rang n est inclus dans un intervalle blanc de rang $n-1$, et contient soit un soit deux intervalles blancs de rang $n+1$.

D'où l'idée de représenter les intervalles blancs de rang n par des points, que l'on appelle *sommets*, reliés à ceux du rang $n-1$ par des segments, symbolisant la relation d'inclusion (figure 1)

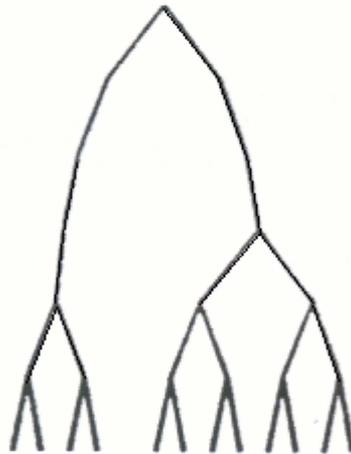


Figure 1.

2. Recouvrement et dimension

2.1. Ensemble de mesure nulle

Un ensemble linéaire est dit de mesure nulle si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver des intervalles u_1, u_2, \dots (en quantité finie ou dénombrable), tels que

$$E \subset \bigcup_n u_n$$

$$\sum_n L(u_n) \leq \varepsilon$$

ou de manière équivalente (cf. [236]), l'ensemble E est dit de mesure nulle, s'il peut être recouvert par une suite (u_n) d'intervalles, dite *recouvrement de Vitali*, telle que

- (i) chaque point de E appartient à une infinité de ces intervalles ;

$$(ii) \quad \sum_n L(u_n) < \infty .$$

2.2. On appelle *ensemble épais* ou saucisse de *Minkowski* de E , la réunion de toutes les boules $B_\varepsilon(x)$ centrés en tout point de E :

$$E(\varepsilon) = \bigcup_{x \in E} B_\varepsilon(x)$$

Sur la droite, ces boules deviennent les intervalles $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$.

2.3. Occupation de l'espace et ordre de croissance

La longueur de la saucisse de *Minkowski*, $L(E(\varepsilon))$, d'un ensemble E , est d'autant plus grande que l'ensemble occupe davantage d'espace, vu à la précision ε . Lorsque E est un ensemble fermé de mesure nulle, cette longueur tend vers 0 avec ε . Etant donné deux ensembles E_1, E_2 de mesure nulle :

L'ensemble E_1 aura un degré d'occupation de l'espace supérieur à celui de E_2 , si $L(E_1(\varepsilon))$ tend moins vite vers 0 que $L(E_2(\varepsilon))$ lorsque ε tend vers 0.

Note :

(i) On dit que la fonction f positive tend vers 0 plus vite que la fonction g positive si

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

On dit aussi : l'ordre de croissance vers 0 de f est plus élevé que celui de g , et on écrit : $f \succ g$ ou $g \prec f$

(ii) On dit que f et g sont équivalentes s'il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que pour tout x ,

$$0 < c_1 < \frac{f(x)}{g(x)} < c_2$$

On dit aussi : les fonctions f et g sont du même ordre de croissance, et on utilise la notation $f \cong g$

(iii) En fin, s'il existe une constante c telle que, pour tout x ,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq c,$$

on écrit

$$f \underline{\underline{\succ}} g \text{ ou } g \underline{\underline{\prec}} f$$

2.4. Ordre de croissance et dimension

Est-il possible de quantifier la notion d'occupation de l'espace ? La réponse est affirmative, à condition de disposer d'une hiérarchie bien déterminée des ordres de croissance. Nous sommes toutefois ramenés à ne considérer qu'une famille restreinte de fonctions bien spécifiées qu'on appellera *échelle de fonctions*.

Une échelle de fonctions au voisinage de 0 est une famille de fonctions définies dans un voisinage de 0, sauf éventuellement en 0, telle que si f, g sont deux fonctions quelconques de cette famille : ou bien $f \cong g$, ou bien $f \succ g$, ou bien $f \prec g$.

Nous pouvons citer quelques exemples d'échelles suivants :

Echelle logarithmique :

$$F = \left\{ f_{\alpha,\beta,n}(x) = x^\alpha \left(\log_n \frac{1}{x} \right)^\beta, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^*, n \in \mathbb{N}, \right\}$$

\log_n signifie que le log est composé n fois. Cette famille peut se révéler utile dans certain cas d'analyse fine de courbes irrégulières, telles que la trajectoire du mouvement Brownien.

Echelle des fonctions puissance :

$$F = \{f_\alpha(x) = x^\alpha, \alpha > 0\}$$

La comparaison entre les fonctions de cette échelle est immédiate, car ceci revient à la comparaison des réels α positifs.

Si l'on choisit cette échelle de référence, il existe un moyen très simple de calculer l'ordre de croissance d'une fonction quelconque, si cet ordre existe : la fonction f a l'ordre de croissance α au voisinage de 0 si

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log f(x)}{\log x} = \alpha$$

Le degré d'occupation de l'espace d'un ensemble linéaire E est d'autant plus grand que l'ordre de croissance vers 0 de la quantité $L(E(\varepsilon))$ est plus petit. Relativement à l'échelle des fonctions puissance, nous définissons donc la **dimension** fractionnaire à partir de l'ordre de croissance, en posant

$$\text{Dimension de } E = 1 - (\text{ordre de croissance de } L(E(\varepsilon)))$$

Lorsque cet ordre de croissance existe. Notant la dimension Δ , nous avons, lorsque la limite existe :

$$\Delta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\log L(E(\varepsilon))}{\log \varepsilon} \right)$$

2.5. Formulation équivalente de la dimension

Supposons que, pour tout ε , E puisse être recouvert par $N(\varepsilon)$ intervalles de longueur ε , d'intérieurs disjoints, rencontrant tous E , si E comporte une infinité de points, ce nombre va tendre vers l'infini lorsque ε tend vers 0. Par ailleurs, Quelle que soit la façon dont les intervalles sont choisis, on trouve

$$\Delta(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{|\log \varepsilon|}.$$

Nous avons également le lemme très utile suivant.

Lemme : Pour toute suite (ε_n) de réels tendant vers 0, telle que

$$\lim_n \frac{\log \varepsilon_n}{\log \varepsilon_{n+1}} = 1,$$

on a

$$\Delta(E) = \lim_n \frac{\log N(\varepsilon_n)}{|\log \varepsilon_n|}$$

Nous avons, par exemple, pour un ensemble parfait F , si l'on appelle $\omega_n = \omega_n(F)$ le nombre d'intervalles blancs, et comme la suite (2^{-n}) vérifie bien la condition ci-dessus,

$$\Delta(F) = \lim_n \frac{\omega_n(F)}{n \log 2}$$

Même formule pour un ensemble E quelconque, à condition de changer légèrement la définition de ω_n : il faut prendre le nombre total d'intervalles dyadiques fermés rencontrant E . On peut aussi prendre des intervalles dyadiques semi ouverts à droite, ou bien à gauche. Ces variations ne changent rien à l'ordre de croissance de ω_n .

2.6. Exemples de calcul de dimension

- Si E est de longueur non nulle, $L(E(\varepsilon)) \geq L(E), \forall \varepsilon$, donc $\Delta(E) = 1$.
- Supposons que E est formé de tous les points de la suite $(n^{-\beta}), n \geq 1$, où β est un paramètre positif fixé. On peut y ajouter le point $\{0\}$ si l'on veut un ensemble fermé. Soit $c_n = n^{-\beta} - (n+1)^{-\beta} \cong n^{-\beta-1}$ les longueurs des contigus. Lorsque $c_{n+1} < 2\varepsilon \leq c_n$

$$L(E(\varepsilon)) \cong \text{longueur de } (0, (1+n)^{-\beta}) + 2n\varepsilon \cong n^{-\beta}$$

D'où l'on tire

$$\Delta(E) = 1 - \frac{\beta}{\beta+1} = \frac{1}{\beta+1}$$

- Si E est un ensemble parfait symétrique, de rapport constant $a < \frac{1}{2}$ i.e. $l_n = (1-2a)a^{n-1}$. E se trouve recouvert par 2^n intervalles de longueurs a^n . Avec $N(a^n) = 2^n$, on obtient

$$\Delta(E) = \frac{\log 2}{|\log a|}$$

2.7. Quelques propriétés de la dimension

Nous supposons que $\Delta(E)$ existe, en tant que limite, pour un ensemble E supposé borné :

1. Δ est monotone : si E_1 est inclus dans E_2 , alors

$$\Delta(E_1) \leq \Delta(E_2)$$

2. Si \bar{E} désigne la fermeture de l'ensemble E :

$$\Delta(\bar{E}) = \Delta(E)$$

3. Δ est stable : étant donnés deux ensembles E_1 et E_2 ,

$$\Delta(E_1 \cup E_2) = \max\{\Delta(E_1), \Delta(E_2)\}$$

4. Pour tout E sur la droite,

$$0 \leq \Delta(E) \leq 1$$

5. Δ est invariante par homothétie : si $T(E) = aE + b$ est une telle transformation de la droite,

$$\Delta(T(E)) = \Delta(E)$$

6. Δ est invariante par un type plus général de transformations : T peut être une application telle qu'en tout point x ,

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ z \rightarrow x}} \frac{\log(T(y) - T(z))}{\log(y - z)} = 1$$

2.8. Dimension supérieure et inférieure

Nous avons supposé jusqu'à maintenant que le rapport

$$\frac{\log L(E(\varepsilon))}{\log \varepsilon}$$

convergeait. De façon générale, nous posons en gardant la notation Δ pour la limite supérieure :

$$\Delta(E) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\log L(E(\varepsilon))}{\log \varepsilon} \right) \quad \text{dimension supérieure}$$

$$\delta(E) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\log L(E(\varepsilon))}{\log \varepsilon} \right) \quad \text{dimension inférieure}$$

3. Cas bidimensionnel

3.1. Courbes de longueur infinie

Dans cette section, nous notons la mesure de Borel dans le plan par A , et nous définissons une courbe Γ comme étant l'image d'un intervalle $[a, b]$ (*intervalle temporel*) par une application continue $\gamma(t)$, injective (pour que Γ soit une courbe simple), à valeurs dans le plan. La variable t qui parcourt $[a, b]$ étant considérée comme le *temps*, $\gamma(t)$ est la position à l'instant t , et Γ est la trajectoire. Lorsque Γ , entièrement parcourue dans le temps fini $b-a$, est de longueur infinie, la vitesse du mouvement le long de Γ est nécessairement non bornée, et infinie en certains points. Il vaut mieux ne plus parler de *vitesse*. Cette notion est remplacée par celle de *mesure* sur Γ (ou *espace du mouvement* dans le contexte de la mécanique quantique, cf. chapitre : 5), mesure induite par la paramétrisation. Nous disons que (cf. [236], chapitre : 6. §2) que

La mesure de toute partie de la trajectoire Γ est le temps passé dans cette partie au cours du mouvement.

Il y a plusieurs façons de déterminer si une courbe est de longueur infinie :

- ◇ Etant donné $k+1$ réels $t_1 = a < t_2 < \dots < t_{k+1} = b$, on appelle *courbe polygonale d'approximation* de Γ la courbe P_k formée de k segments d'extrémités $\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}), i = 1, \dots, k$.

On dira que

Γ est de longueur infinie si la longueur $L(P_k)$ tend vers l'infini.

- ◇ Une autre caractérisation est possible grâce à la saucisse de *Minkowski* vue ci-dessus et définie par

$$\Gamma(\varepsilon) = \bigcup_{x \in \Gamma} B_\varepsilon(x)$$

Nous avons :

Théorème 3.1. *Soit Γ une courbe simple, de longueur finie : sa longueur est donnée par*

$$L(\Gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A(\Gamma(\varepsilon))}{2\varepsilon}$$

On dit donc que :

$$\Gamma \text{ est de longueur infinie si } \frac{A(\Gamma(\varepsilon))}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty$$

3.2. Dimension

Les concepts vus précédemment s'étendent naturellement au plan, de façon à classer entre elles les courbes ou même entre eux tous les ensembles bornés du plan. Nous définissons la **dimension** (*fractale*) d'un ensemble E du plan par

$$\dim E = 2 - (\text{ordre de croissance de } A(E(\varepsilon))),$$

lorsque cet ordre de croissance existe, celui-ci étant la limite du rapport

$$\frac{\log A(E(\varepsilon))}{\log \varepsilon}$$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Nous posons

$$\Delta(E) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(2 - \frac{\log A(E(\varepsilon))}{\log \varepsilon} \right) \quad \text{dimension supérieure}$$

$$\delta(E) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(2 - \frac{\log A(E(\varepsilon))}{\log \varepsilon} \right) \quad \text{dimension inférieure}$$

Note : les quantités $\delta(\cdot)$ et $\Delta(\cdot)$ auxquelles sont adjoints d'autres quantités ou indices introduits dans le chapitre 3, sont souvent appelées les indices d'entropie de Kolmogorov inférieure et supérieure.

On retrouve pour ces indices les mêmes propriétés de monotonie, de fermeture et de stabilité. On a aussi pour E dans le plan

$$0 \leq \Delta \leq 2$$

Δ est également invariante par certaines transformations T du plan (cf. [236]) :

$$\Delta(TE) = \Delta(E)$$

La dimension inférieure possède également ces propriétés sauf celle de stabilité.

3.3. Exemple de courbe de longueur infinie et de calcul de dimension

Soit la spirale Γ (cf. figure :2) définie en coordonnées polaires (ρ, θ) par

$$\begin{cases} \rho(t) = t^\alpha \\ \theta(t) = \frac{2\pi}{t} \end{cases} \quad 0 < t \leq 1,$$

où $0 < \alpha < 1$. On peut ajouter à cette courbe l'origine O (correspondant au paramètre $t = 0$) pour obtenir un ensemble fermé. Chaque spire S_k correspondant aux valeurs

$$\frac{1}{k+1} \leq t \leq \frac{1}{k}$$

du paramètre est de longueur finie, mais plus grande que $\frac{1}{k^\alpha}$; en effet, la courbe coupe l'axe de référence aux points de coordonnées polaires $(\rho, \theta) = (k^{-\alpha}, 2k\pi)$, donc la longueur de chaque spire S_k est plus grande que la distance de O au point $\gamma\left(\frac{1}{k}\right)$ (qui vaut $\frac{1}{k^\alpha}$). Comme la

série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ diverge, la courbe totale est de longueur infinie.

La $k^{\text{ème}}$ spire, S_k , a donc une longueur de l'ordre de $k^{-\alpha}$, et $\text{dist}(S_k, S_{k+1})^1 \cong k^{-\alpha-1}$.

¹ De manière générale, pour deux ensembles E_1 et E_2 , nous écrivons

Donc si $\varepsilon = k^{-\alpha-1}$, la saucisse $\Gamma(\varepsilon)$ se trouve composée :

- (i) D'un « *noyau* » de diamètre équivalent à $k^{-\alpha} = \varepsilon^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$, d'aire équivalente à $\varepsilon^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}$.
- (ii) et d'une « *queue* » d'aire équivalente à $\varepsilon \cdot k^{1-\alpha} = \varepsilon^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}$.

Ainsi, noyau et queue sont du même ordre, et

$$\Delta(\Gamma) = \delta(\Gamma) = 2 - \frac{2\alpha}{\alpha+1} = \frac{2}{\alpha+1}.$$

Lorsque $\alpha \rightarrow 1$, la dimension tend vers 1. Lorsque $\alpha \rightarrow 0$, elle tend vers 2, sans jamais l'atteindre avec ce type particulier de spirale ; pour obtenir $\Delta(\Gamma) = 2$, il faudrait une fonction

$\rho(t)$ qui tend vers 0 moins vite que toutes les fonctions puissance, telle $\rho(t) = \frac{1}{|\log t|}$.

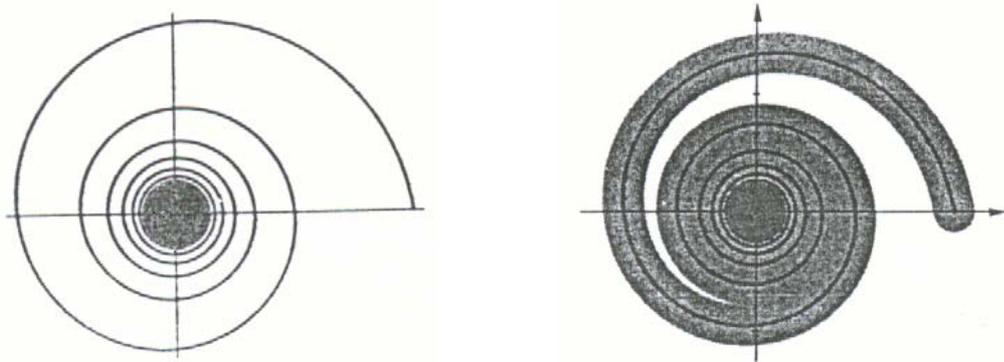


Figure 2.

3.4. Recouvrements classiques : boîtes et boules

Diverses formulations de la dimension ont été présentées dans le cas unidimensionnel pour les ensembles bornés de droite. Nous en donnons au cours de ce paragraphe des équivalentes, dans le contexte du plan.

Nous appelons d la distance euclidienne dans le plan et d_∞ la distance définie par

$$d_\infty = \max \{ |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2| \}$$

où (x_1, x_2) et (y_1, y_2) sont respectivement les coordonnées de x et y .

Les deux ensembles $B_\varepsilon(x) = \{y : d(x, y) \leq \varepsilon\}$ et $C_\varepsilon(x) = \{y : d_\infty(x, y) \leq \varepsilon\}$ désignent donc le disque de centre x , de rayon ε et le carré de centre x , de côtés de longueur ε , parallèles aux axes, que l'on appelle souvent **boîte**.

d et d_∞ étant clairement équivalentes, la dimension d'un ensemble E peut alors s'écrire

$$\text{dist}(E_1, E_2) = \max \left\{ \sup_{x \in E_1} \text{dist}(x, E_2), \sup_{x \in E_2} \text{dist}(x, E_1) \right\}$$

où $\text{dist}(x, E_1) = \inf_{y \in E_1} d(x, y)$ avec d la distance euclidienne. Nous appelons cette quantité **distance de**

Hausdorff entre E_1 et E_2 .

$$\Delta(E) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(2 - \frac{\log A \left(\bigcup_{x \in E} C_\varepsilon(x) \right)}{\log \varepsilon} \right)$$

- **Boîtes disjointes.** Effectuons un quadrillage, ou un pavage, du plan par des carrés de côté ε (voir figure 3), disjoints mais pouvant posséder des frontières communes. Appelons $\omega_\varepsilon(E)$ le nombre de ces carrés qui recouvrent l'ensemble E . Alors, nous avons

$$\Delta(E) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \omega_\varepsilon(E)}{|\log \varepsilon|}$$

Certaines variantes de cette formule utilisent des suites discrètes de valeurs de ε :

Pour toute suite (ε_n) de réels tendant vers 0, telle que le rapport

$$\frac{\log \varepsilon_n}{\log \varepsilon_{n+1}},$$

tend vers 1, on a

$$\Delta(E) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \omega_{\varepsilon_n}}{|\log \varepsilon_n|}$$

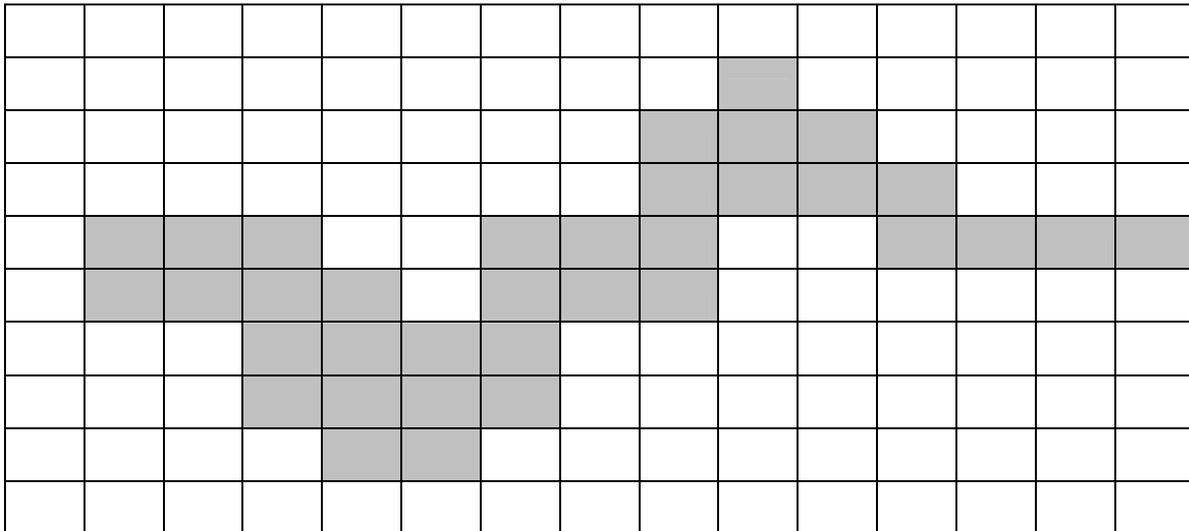


Figure 3. La réunion de toutes les boîtes, rencontrant E , d'un pavage de côté ε , constitue une approximation de la saucisse de Minkowski de E .

En particulier, les boîtes dyadiques d'ordre n sont des carrés du type

$$\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right] \times \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right],$$

où j et k sont des entiers. La dimension, qui est en fait toujours la même,

$$\Delta(E) = \limsup_n \frac{\log \omega_{2^{-n}}}{n \log 2}$$

est parfois appelée *dimension de boîte*.

- **Minimum de boules recouvrantes.** Appelons $N_\varepsilon(E)$ le nombre minimum de disques $B_\varepsilon(x)$, centrés sur E , et qui recouvrent E (figure :4). On a alors

$$\Delta(E) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(E)}{|\log \varepsilon|}$$

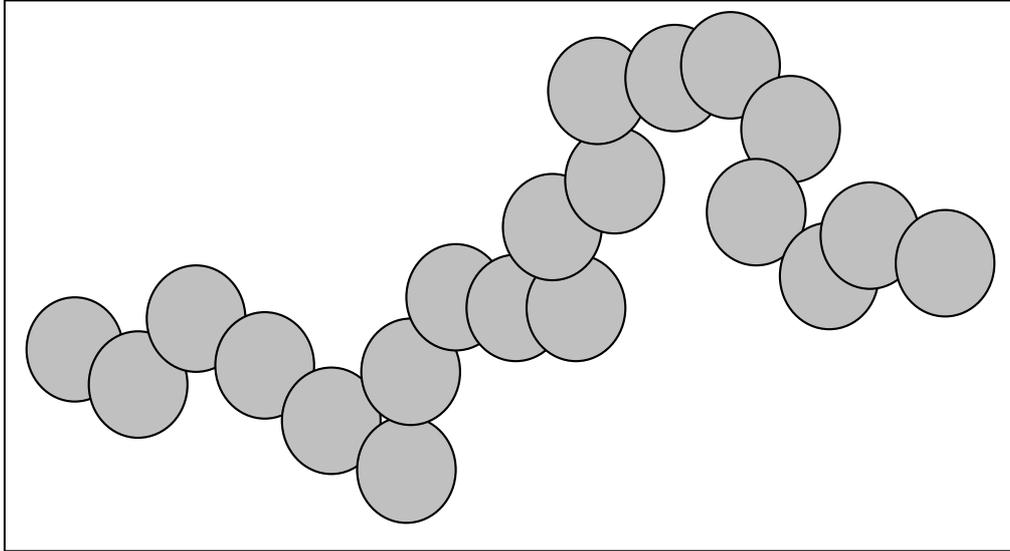


Figure 4. Le recouvrement d'un nombre minimum de disques, centrés sur E , de rayon ε , et recouvrant E , constitue une approximation de la saucisse de Minkowski.

4. Courbes fractales

Les courbes fractales sont caractérisées par deux propriétés. Elles sont :

- (i) Non rectifiable, en ce sens qu'une courbe est non rectifiable si elle est de longueur infinie.
- (ii) Homogènes, en ce sens que chacune des parties d'une courbe fractale est semblable au tout.

4.1. Une courbe fractale n'est nulle part rectifiable

Comme une courbe fractale Γ est à la fois non rectifiable et homogène, cette propriété de non rectifiabilité doit être partout sur Γ , donc sur tout sous-arc de la courbe. Une telle courbe est dite *nulle part rectifiable*.

Posons $\theta_\varepsilon(x_\circ)$ l'angle minimum du cône, appelé *cône local*, centré en x_\circ , un point de Γ , et contenant tous les points de Γ à distance inférieure à ε . Nous donnons alors la caractérisation des courbes fractales suivante :

On dira que Γ n'est nulle part rectifiable si elle possède l'une ou l'autre de ces trois propriétés :

- Tout sous-arc de Γ , non réduit à un seul point, est de longueur infinie.
- En tout point x_\circ de Γ , l'angle $\theta_\varepsilon(x_\circ)$ ne tend pas vers 0, autrement dit :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta_\varepsilon(x_\circ) > 0.$$

- En tout point x_\circ de Γ , le rapport $A[\kappa(x_\circ \cap x)] / \text{diam}^2(x_\circ \cap x)$ ne tend pas vers 0, autrement dit :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} A[\kappa(x_\circ \cap x)] / \text{diam}^2(x_\circ \cap x) > 0.$$

où A est la mesure de Borel sur le plan, $\kappa(x_o \cap x)$ est l'enveloppe convexe² du sous-arc $x_o \cap x$ de Γ , et $diam^2(x_o \cap x)$ est le diamètre³ de ce même sous-arc.

4.2. Caractérisation d'une courbe fractale

On appelle *taille* une fonction d'ensembles, généralement notée $taille(E)$, qui vérifie les trois conditions suivantes :

1. $taille(E)$ est équivalente au *diamètre* (voir la paraphrase ci-dessous) : il existe deux constantes c_1 et $c_2 > 0$, telles que, pour tout ensemble borné E ,

$$c_2 diam(E) \leq taille(E) \leq c_1 diam(E)$$

2. $taille(E)$ est croissante :

$$E_1 \subset E_2 \Rightarrow taille(E_1) \leq taille(E_2)$$

3. $taille(E)$ est continue par rapport à la distance de *Hausdorff* (cf. § 3.3).

Un exemple évident de fonction *taille*, est le diamètre lui-même. Mais il y en a d'autres, par exemple,

$$taille(E) = \text{Longueur du plus petit rectangle de côtés parallèles aux axes qui contient } E.$$

C'est bien une grandeur équivalente au *diamètre*, avec $c_1 = 1$, et $c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Admettant qu'une fonction *taille* ait été choisie. Soit Γ une courbe paramétrée, image par l'application continue γ de l'intervalle $[a, b]$. Ce qu'on appelle *arc local* autour d'un point $\gamma(t)$ quelconque de Γ , est l'image d'un intervalle $[t - \tau, t + \tau]$: celle-ci dépend de τ , demi-largeur de la fenêtre d'observation.

Nous pouvons définir, grâce à cette paramétrisation, une fonction *taille locale*, elle est construite de façon à être continue sur tout l'intervalle $[a, b]$, et à ne pas subir de variations importantes aux bords (aux voisinages de a et de b). Donc, pour $t \in [a, b]$ et $\tau \in]0, (b - a)/2[$, on pose

$$T(t, \tau) = \begin{cases} taille(\gamma(a) \cap \gamma(a + 2\tau)) & \text{si } t - \tau \leq 0; \\ taille(\gamma(t - \tau) \cap \gamma(t + \tau)) & \text{si } a \leq t - \tau < t + \tau \leq b; \\ taille(\gamma(b - 2\tau) \cap \gamma(b)) & \text{si } b \leq t + \tau. \end{cases}$$

La fonction

$$\bar{T}_\tau = \frac{1}{b - a} \int_a^b T(t, \tau) dt$$

est une *taille moyenne locale*, et le rapport $\bar{T}_\tau / 2\tau$ est une évaluation de la vitesse moyenne locale, la variable t étant considérée comme le temps.

On dira que Γ est fractale si le rapport $\frac{T(t, \tau)}{\tau}$ tend vers l'infini lorsque τ tend vers 0, uniformément par rapport à t .

² Pour la définition de l'enveloppe convexe d'un ensemble donné, voir l'annexe de [236] ou un bon livre de topologie générale.

³ De façon générale, pour un ensemble E quelconque, nous appelons *diamètre* de E la quantité $diam(E) = \sup_{x, y \in E} d(x, y)$, où d est la distance euclidienne.

4.3. Exemple de courbe fractale

La courbe Γ que nous allons décrire se construit à l'aide de ses polygones d'approximation.

Etant donné un segment orienté S , et un angle $\phi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, appelons Θ_ϕ l'opération qui consiste à remplacer S par la courbe polygonale $\Theta_\phi(S)$, de même extrémités que S , constituée de quatre segments égaux formant avec S les angles $0, \phi, -\phi$ et 0 respectivement (figure 5). la longueur de chacun de ces segments est donc $L(S)/2(1 + \cos \phi)$.

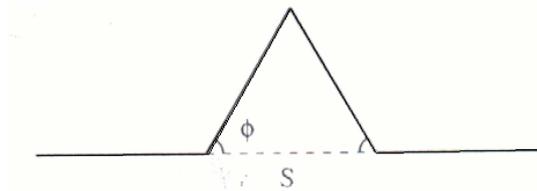


Figure 5. Le segment S est remplacé par la courbe polygonale $\Theta_\phi(S)$ de mêmes extrémités, formée de quatre segments égaux.

On se donne une suite d'angles (ϕ_k) , et l'on part d'un segment initial P_0 de longueur 1. On forme la courbe polygonale $P_1 = \Theta_{\phi_1}(P_0)$. On pratique sur chacun de ses quatre segments l'opération Θ_{ϕ_2} : ceci donne au total une courbe polygonale P_2 faite de 16 segments, et ainsi de suite : P_k est obtenue à partir de P_{k-1} en remplaçant chacun de ses segments au moyen de l'opération Θ_{ϕ_k} . Cette courbe P_k est faite de 4^k segments, tous de longueur

$$l_k = 2^{-k} \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 + \cos \phi_i}.$$

Lorsque k augmente indéfiniment, les courbes P_k , de longueur $L(P_k) = 4^k l_k$, convergent vers une courbe Γ au sens de la distance de Hausdorff. La longueur $L(\Gamma) = \lim L(P_k)$ peut être finie ou infinie selon le choix de la suite (ϕ_k) : si ϕ_k ne tend pas vers 0, Γ est de longueur infinie : il s'agit alors d'une *courbe fractale*.

Remarque : Nous verrons plus loin que de façon générale les ensembles dits fractals sont caractérisés uniquement par leurs indices dit les *indices fractals*, parmi ceux-ci les indices d'entropie de *Kolmogorov* supérieur et inférieur Δ et δ , ainsi que la dimension de *Hausdorff* définie ci-dessous.

5. Dimension de Hausdorff

Définition : On se donne un ensemble E quelconque. En général, on note \mathfrak{R} un recouvrement de E qui est une famille d'intervalles dont la réunion contient E , et $\|\mathfrak{R}\| = \sup_{u \in \mathfrak{R}} l(u)$ la borne supérieure des longueurs d'intervalles de \mathfrak{R} . On considère des recouvrements d'un type spécial appelés *recouvrements de Vitali* de E (cf. § 2.1). On ne considère que des recouvrements dénombrables. On peut les caractériser ainsi : Un recouvrement \mathfrak{R} de E est un recouvrement de *Vitali* s'il peut se décomposer en sous-familles \mathfrak{R}_n , où chaque \mathfrak{R}_n recouvre E et

$$\lim_n \|\mathfrak{R}_n\| = 0.$$

Des recouvrements de ce type ont été utilisés par *E. Borel* pour définir les ensembles de mesure nulle. En continuant dans cette voie, on peut dire qu'un ensemble est plus "rare" qu'un autre s'il peut être recouvert par des familles d'intervalles dont la série des longueurs converge plus vite. Une façon de quantifier cela consiste à définir l'exposant de la convergence de la série des longueurs, soit

$$e(\mathfrak{R}) = \inf \{ \alpha, \sum_{u \in \mathfrak{R}} L(u)^\alpha < \infty \}.$$

En effet, dès que $\|\mathfrak{R}\| \leq 1$, la somme $\sum_{u \in \mathfrak{R}} L(u)^\alpha$ est une fonction décroissante de α ; il existe une valeur critique unique (éventuellement infinie) au-dessus de laquelle la série converge. La *dimension de Hausdorff* est définie à l'aide de ces valeurs critiques :

$$\dim(E) = \inf \{ e(\mathfrak{R}) \text{ où } \mathfrak{R} \text{ est un recouvrement de Vitali de } E \}$$

5.1. Propriétés

1. Pour tout ensemble E de la droite : $0 \leq \dim(E) \leq 1$.

2. \dim est monotone :

$$E_1 \subset E_2 \Rightarrow \dim(E_1) \leq \dim(E_2)$$

3. \dim est σ -stable :

$$\dim\left(\bigcup_k E_k\right) = \sup_k \dim E_k$$

4. Pour tout ensemble E ,

$$\dim(E) \leq \hat{\Delta}(E),$$

où $\hat{\Delta}(E) = \inf \{ \sup \Delta(E_n), \text{ où les } E_n \text{ sont bornés, et } E \subset \bigcup E_n \}$.

Pour tout ensemble borné E

$$\dim(E) \leq \delta(E) \leq \Delta(E).$$

5. Si la dimension est strictement inférieure à 1, la longueur de l'ensemble est nulle. Ou encore :

$$L(E) > 0 \Rightarrow \dim(E) = 1$$

6. \dim est invariante pour toute transformation T de la droite telle que pour tout x , le rapport

$$\frac{\log|T(y) - T(z)|}{\log|y - z|}$$

tend vers 1 lorsque y et z ($y \neq z$) tendent vers x . Dans ce cas $\dim(T(E)) = \dim(E)$ pour tout E .

Note : La dimension de *Hausdorff* et ses propriétés peuvent se généraliser au plan ou à un espace de dimension supérieure à 2 en considérant tout simplement les mesures adéquates.

Chapitre 3. Fractales aléatoires et Processus de Markov

1. Introduction

L'étude des propriétés du mouvement Brownien, et plus généralement des processus de Lévy sur R^d a été un des sujets les plus importants dans la théorie des probabilités. La dimension de Hausdorff et la mesure de Hausdorff ont été très utiles pour de telles études depuis le travail de pionnier de Lévy (1953) et Taylor (1953, 1955, 1967).

La naissance de la géométrie fractale due en grande partie au travail de Benoît Mandelbrot, a apporté de nombreuses idées nouvelles et des outils géométriques originaux (tels que la dimension d'empilement, les densités moyennes, les multifractales) servant aux études des propriétés fines des processus stochastiques. Dans la dernière décennie, non seulement divers résultats ont été obtenus sur le mouvement Brownien et sur les processus de Lévy stables (voir Lawler (1999) pour un bel exposé sur les propriétés fractales du mouvement Brownien), mais il y a eu aussi un grand intérêt pour l'étude d'autres processus de Markov tels que les diffusions sur des fractales (ensembles), les processus de Feller, voir la monographie de Barlow (1998), Jacob (1996) et les références y figurant pour plus d'information.

L'objet de ce chapitre, basé principalement sur l'étude de Xiao publiée en 2004, est d'exposer et de faire la synthèse de travaux récents sur les propriétés des processus de Markov, étudier la dimension de Hausdorff et la dimension d'empilement de l'image d'un processus de Markov en donnant la preuve d'une formule générale pour les deux quantités en termes de fonction de transition du processus en question, ce qui généralise les résultats bien connus de Pruitt (1969), Taylor (1986b) etc., et enfin de poser quelques problèmes qui restent ouverts. Dans le développement historique de l'étude des propriétés des trajectoires des processus de Markov, des résultats ont été souvent obtenus pour le mouvement Brownien en premier, puis pour les processus stables symétriques d'indice α ($0 < \alpha < 2$), et ensuite pour les processus de Lévy généraux ou les processus de Markov. A chaque étape de généralisation, quelques propriétés spéciales du processus sont utilisées. A cause de son importance dans la théorie générale des processus de Markov, nous nous concentrons principalement sur des résultats récents sur les trajectoires des processus de Lévy, en mettant l'accent sur les méthodes applicables à des processus de Markov plus généraux.

Soit $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un processus de Markov à valeurs dans un espace métrique (S, ρ) . Tout au long de ce chapitre, nous nous intéressons aux propriétés des trajectoires de X , c'est-à-dire les propriétés de la fonction $X(t) = X(t, \omega)$ pour $\omega \in \Omega$ fixé. Quand nous disons que les trajectoires du processus X ont une propriété P presque sûrement (avec probabilité positive respectivement (resp.)), cela signifie que l'ensemble $\{\omega \in \Omega : X(\cdot, \omega) \text{ a la propriété } P\}$ est un événement de probabilité 1 (de probabilité positive, resp.). Ce qui suit sont quelques exemples d'ensembles aléatoires générés par X :

Image : $X([0,1]) = \{x \in S : x = X(t) \text{ pour un } t \in [0,1]\}$;

Graphe : $GrX([0,1]) = \{(t, X(t)) \in [0,1] \times S : t \in [0,1]\}$;

Niveau : $X^{-1}(x) = \{t \in R_+ : X(t) = x\}$, $x \in S$;

Image inverse : $X^{-1}(F) = \{t \in R_+ : X(t) \in F\}$, où $F \in S$.

Au cour de ce chapitre, nous utiliserons K pour représenter des constantes finies positives et non spécifiques qui peuvent différer d'une ligne à un autre. Quelques constantes spécifiques sont représentées par K_1, K_2, \dots . La distance Euclidienne et le produit scalaire ordinaire dans R^d sont représentés par $|\bullet|$ et $\langle \bullet, \bullet \rangle$, resp. La mesure de Lebesgue dans R^d est notée par λ_d . Etant donné deux fonctions réelles g et h sur R^d , $g \approx h$ signifie qu'il existe une constante positive et finie K telle que $K^{-1}h(x) \leq g(x) \leq Kh(x)$ pour tout $x \in R^d$. Nous utilisons $A \triangleq B$ pour indiquer que A est défini par B .

2. Processus de Markov

2.1. Processus de Lévy. Les processus de Lévy forment une classe importante des processus de Markov. Outre le mouvement Brownien, on a attaché une importance considérable à l'étude du processus de Lévy général, en théorie tout autant qu'en applications. Pour plus d'information nous nous référons aux livres récents de Bertoin (1996) et Sato (1999) pour la théorie générale et à Bertoin (1999) pour l'étude des subordinateurs. En plus, nombre de propriétés des processus de Markov plus généraux peuvent être obtenues en les comparant à des processus de Lévy appropriés, voir Schilling (1996, 1998 a, b).

Un processus stochastique $X = \{X(t), t \geq 0\}$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ à valeurs dans R^d , est appelé un *processus de Lévy*, si pour chaque $s \geq 0$ et chaque $t \geq 0$, la l'accroissement $X(t+s) - X(t)$ est indépendant du processus $\{X(r), 0 \leq r \leq t\}$ et possède la même distribution que $X(s)$ (*i.e.*, X a des accroissements stationnaires et indépendants), et tel que la fonction $t \mapsto X(t)$ est continue en probabilité (*i.e.*, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $s, \geq 0$, $\lim_{t \rightarrow s} P(|X(t) - X(s)| > \varepsilon) = 0$). En particulier, $P(X(0) = 0) = 1$.

Pour tout $x \in R^d$, la loi du processus $x + X$ sous P est notée par P^x . Nous écrivons indifféremment P ou P^0 . Notez que $P^x(X(0) = x) = 1$, ceci étant, sous P^x , le processus part de x .

Sous P , les distributions de dimension finie d'un processus de Lévy X sont complètement déterminées par la distribution de $X(1)$. Il est bien connu que la classe possible des distributions pour $X(1)$ est précisément la classe des lois infiniment divisibles, lesquelles sont définies comme suit : une mesure de probabilité μ sur R^d est infiniment divisible si, pour chaque n , il existe une mesure de probabilité μ_n telle que si V_1, \dots, V_n sont des éléments aléatoires indépendants de distribution μ_n alors

$$V_1 + \dots + V_n \stackrel{d}{=} \mu.$$

Ceci entraîne que pour tout $t > 0$ la fonction caractéristique de $X(t)$ est donnée par

$$E[\exp i \langle \xi, X(t) \rangle] = e^{-t\psi(\xi)},$$

où en vertu de la formule de Lévy-Khintchine,

$$(2.1) \quad \psi(\xi) = i \langle a, \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \xi, \Sigma \xi \rangle + \int_{R^d} \left[1 - e^{i \langle x, \xi \rangle} + \frac{i \langle x, \xi \rangle}{1 + |x|^2} \right] L(dx), \quad \forall \xi \in R^d,$$

où $a \in R^d$ est fixé, Σ est une matrice $d \times d$ symétrique définie non négative et L est une mesure de Borel sur $R^d \setminus \{0\}$ qui satisfait

$$\int_{R^d} \frac{|x|^2}{1 + |x|^2} L(dx) < \infty.$$

La fonction ψ est appelée l'*exposant de Lévy* de X , et L est la *mesure de Lévy* correspondante. Il y a un bon nombre de différentes caractérisations de ψ . Notez que $\psi(0) = 0$ et par le théorème de Bochner la fonction $\xi \mapsto e^{-t\psi(\xi)}$ est continue et définie positive pour chaque $t \geq 0$ puisque celle-là est la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité (*i.e.*, cette dernière fonction est donnée par $\int e^{i\langle \xi, x \rangle} \mu_t(dx)$, où μ_t représente la distribution de probabilité de $X(t)$). De ce fait, par un théorème de Schoenberg (1938) (voir aussi dans Berg et Prost (1975)), l'exposant de Lévy ψ est une fonction continue définie négative. Nous verrons que l'exposant de Lévy ψ jouera des rôles importants dans l'étude des processus de Lévy et diverses propriétés des trajectoires de X peuvent être décrites en termes de ψ . A cet égard, notons également que

$$\operatorname{Re}\psi(\xi) \geq 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}\psi(-\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d,$$

où la notation Re signifie la partie réelle d'un nombre complexe.

Un processus de Lévy X dans \mathbb{R}^d est appelé *symétrique* si $-X$ et X possèdent les mêmes lois de probabilité de dimension finie sous P . Ceci est en accord avec la propriété de symétrie des processus de Markov disant que pour toutes fonctions f et g continues sur S à support compact, on a

$$\int f(x)T_t g(x)\mu(dx) = \int g(x)T_t f(x)\mu(dx),$$

pour une mesure de Borel μ où T_t représente le semi-groupe associé au processus de Markov.

Il est clair que X est symétrique si et seulement si $\psi(\xi) \geq 0$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Dans ce qui suit nous donnons quelques cas spéciaux de processus de Lévy.

(a) . *Processus de Lévy stable*. Un processus de Lévy X dans \mathbb{R}^d est appelé un processus de Lévy *stable* d'indice $\alpha \in (0, 2]$ si la mesure de Lévy L est de la forme

$$(2.2) \quad L(dx) = \frac{dr}{r^{1+\alpha}} \nu(dy), \quad \forall x = ry, (r, y) \in \mathbb{R}_+ \times S_d,$$

où $S_d = \{y \in \mathbb{R}^d : |y| = 1\}$ est la sphère unité dans \mathbb{R}^d et $\nu(dy)$ est une mesure de Borel finie arbitraire sur S_d . Dans la littérature, les processus de Lévy stables dans \mathbb{R}^d d'indice $\alpha = 1$ sont

aussi appelés *processus de Cauchy*. Il résulte de (2.1) et (2.2) que l'exposant de Lévy ψ_α d'un processus de Lévy stable d'indice $\alpha \in (0, 2]$ peut aussi être écrit sous la forme

$$\psi_\alpha = \int_{S_d} |\langle \xi, y \rangle|^\alpha \left[1 - i \operatorname{sgn}(\langle \xi, y \rangle) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right] M(dy) + i \langle \xi, \mu_0 \rangle \quad \text{si } \alpha \neq 1,$$

$$\psi_\alpha(\xi) = \int_{S_d} |\langle \xi, y \rangle| \left[1 + i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\langle \xi, y \rangle) \log|\langle \xi, y \rangle| \right] M(dy) + i \langle \xi, \mu_0 \rangle,$$

où la paire (M, μ_0) est unique, et la mesure M est appelée la *mesure spectrale* de X . **tan** et **sgn** représentent respectivement la fonction *tangente* et la fonction $\operatorname{sgn} x$ qui prend la valeur 1 si $x > 0$, -1 si $x < 0$ et 0 sinon. Voir Samorodnisky et Taqqu (1994). Quand $d = 1$, ψ_α peut être exprimé sous la forme

$$(2.3) \quad \psi_\alpha = \sigma^\alpha |\xi|^\alpha \left[1 + i\beta \operatorname{sgn}(\xi) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\xi\mu_0 \right] \quad \text{si } \alpha \neq 1$$

$$\psi_1 = \sigma |\xi| \left[1 + i \frac{\pi}{2} \beta \operatorname{sgn}(\xi) \log|\xi| \right] + i\xi\mu_0,$$

où les constantes satisfont $\sigma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ et $\mu_0 \in R$. Nous assumons toujours que toutes les distributions stables¹ sont non dégénérées ; ceci étant, la mesure M n'est pas portée par aucun ensemble de dimension $d-1$ de S_d . alors, il est possible de voir qu'il existe une constante finie et positive K , telle que

$$(2.4) \quad \operatorname{Re} \psi_\alpha(\xi) \geq K |\xi|^\alpha, \quad \xi \in R^d.$$

Un processus de Lévy sable sur R^d d'indice $\alpha \in (0,2]$ est dit strictement stable si son exposant de Lévy ψ_α est de la forme

$$(2.5) \quad \psi_\alpha(\xi) = |\xi|^\alpha \int_{S_d} w_\alpha(\xi, y) M(dy),$$

$$w_\alpha(\xi, y) = \left[1 - i \operatorname{sgn}(\langle \xi, y \rangle) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right] \cdot \left\langle \frac{\xi}{|\xi|}, y \right\rangle^\alpha, \quad \alpha \neq 1$$

où

$$w_1(\xi, y) = \left\langle \frac{\xi}{|\xi|}, y \right\rangle + \frac{2i}{\pi} \langle \xi, y \rangle \log |\langle \xi, y \rangle|$$

Et, en plus, quand $\alpha = 1$, M doit aussi avoir l'origine comme son centre de masse, *i.e.*,

$$(2.6) \quad \int_{S_d} y M(dx) = 0$$

Voir par exemple, Samorodnisky et Taquq (1994). Nous remarquons que les processus de Cauchy *asymétriques* (*i.e.*, les processus de Cauchy dont la mesure spectrale M ne satisfait pas (2.6)) ne sont pas strictement stables. La présence du terme logarithmique est la source de nombreuses difficultés associées à l'étude des propriétés des trajectoires du processus de Cauchy asymétrique, lesquels doivent être étudiés séparément.

Il vient de (2.5) que les processus de Lévy strictement stables d'indice α sont $(1/\alpha)$ -auto-similaires (sous P^x pour tout $x \in R^d$). Réciproquement, un processus de Lévy auto-similaire doit être strictement stable, voir Sato (1999). Une classe particulièrement intéressante s'impose d'elle-même quand on laisse M être la distribution uniforme sur S_d . dans ce cas,

$\psi(\xi) = \sigma^\alpha |\xi|^\alpha$ pour une certaine constante $\sigma > 0$, et X est appelé *processus de Lévy stable isotropique* d'indice α . Notez que les processus isotropiques sont quelques fois appelés, dans la littérature, *processus symétriques*. Il est bien connu que quand $\alpha = 2, 2^{-1/2} \sigma^{-1} X$ est un mouvement Brownien. Ceci est un processus Gaussien avec des trajectoires continues. Tout autre processus de Lévy stable possède des trajectoires discontinues.

Comme il a été découvert par Taylor en (1967), il est naturel de distinguer deux types de processus de Lévy strictement stables : ceux du *type A*, et ceux du *type B*. un processus de Lévy strictement stable est du *type A*, si

$$p(t, y) > 0, \quad \forall t > 0, \quad \forall y \in R^d,$$

où $p(t, y)$ est la densité de $X(t)$; tout autre processus de Lévy stable est du *type B*. Taylor (1967) a montré que si $\alpha \in (0,1)$, et si la mesure M est concentrée sur un hémisphère, alors X est du *type B*, tandis que tout autre processus de Lévy strictement stable d'indice $\alpha \neq 1$ est du *type A*.

¹ Pour une fonction de distribution F de fonction caractéristique φ . Nous disons que F (ou φ) est stable, si pour toute paire de nombres réels positifs b_1 et b_2 il existe des constantes a et $b (>0)$ telles que

$$\varphi(b_1 t) \varphi(b_2 t) = \varphi(b t) e^{i a t}.$$

(b) . *Subordinateur.* Un *subordinateur* est un processus de Lévy dans R ayant des trajectoires croissantes. De façon équivalente, un processus de Lévy X à valeurs réelles est un subordinateur si et seulement si $\Sigma = 0$ dans (2.1) (*i.e.*, X ne possède pas la partie dite *parie Gaussienne*), sa mesure de Lévy L est concentrée sur $[0, \infty)$ et satisfait $\int_0^1 xL(dx) < \infty$. Dans l'étude d'un subordinateur X , il est plus convenable d'utiliser la transformée de Laplace

$$E[\exp(-uX(1))] = \exp(-g(u)),$$

où

$$g(u) = cu + \int_0^{\infty} [1 - \exp(-ur)]L(dr),$$

et $c \geq 0$ est une constante, et L est la même mesure de Lévy. La fonction g est appelée l'*exposant de Laplace* de X . L'on montre (voir Sato (1999)) que si $c = 0$ et $L(R_+) < \infty$, alors X est un *processus de Poisson composé* (nous pouvons dire sans trop s'étendre sur ça qu'un processus de Poisson composé X est un processus stochastique qui s'écrit sous la forme $Y \circ N$ où Y est processus de Markov à temps discret et à valeurs dans un espace dénombrable, et N est un processus de Poisson ordinaire (cf. Kallenberg (1997)) et ses trajectoires sont des fonctions de pas (ou étagées) ; autrement dit, les trajectoires de X sont strictement croissantes.

Mis à part le fait qu'ils soient des objets mathématiques d'un grand intérêt, les subordinateurs sont un outil très important dans l'étude des propriétés fractales des processus de Lévy (par exemple les ensembles dits de niveau 0 ($X = 0$)), ils peuvent aussi être utilisés pour générer un processus de Lévy. Ceci dit, si $\tau = \{\tau_t, t \geq 0\}$ est un subordinateur avec $\tau_0 = 0$ et qu'il est indépendant d'un processus de Lévy X , alors le processus Y défini par $Y(t) = X(\tau_t)$ est aussi un processus de Lévy (ceci est appelé un *subordinateur* au sens de S. Bochner). La fonction de transition de Y peut être exprimée par

$$P(Y(t) \in B) = \int_0^{\infty} P(X(s) \in B)P(\tau_t \in ds).$$

Pour plus d'information, voir Bertoin (1996,1999).

(c) . *Processus de Lévy stable associé un opérateur.* Un processus de Lévy $X = \{X(t), t \geq 0\}$ dans R^d ($d > 1$) est dit *stable associé à un opérateur* si la distribution ν de $X(1)$ est non dégénérée en ce sens qu'elle n'est pas portée par hyperplan de dimension $d - 1$, et ν est strictement stable associée à un opérateur, *i.e.*, il existe un opérateur linéaire A sur R^d tel que

$$\nu^t = t^A \nu \quad \text{pour tout } t > 0,$$

où ν^t représente ce que l'on dira la t -ème puissance de convolution de la loi infiniment divisible ν (*i.e.*, la mesure de probabilité associée à la puissance t -ème de la transformée de Fourier de ν) et $t^A \nu$ est la mesure image de ν associée à l'opérateur linéaire t^A , défini par

$$t^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log t)^n}{n!} A^n.$$

L'opérateur linéaire A est appelé un *exposant* de X . L'ensemble de tous les exposants possibles d'une loi stable associée à un opérateur est caractérisé dans le théorème 7.2.11 de Meerschaert et Sheffler (2001).

D'autre part, un processus stochastique $X = \{X(t), t \geq 0\}$ est dit *auto-similaire associé à un opérateur* s'il existe un opérateur linéaire B sur R^d tel que pour tout $c > 0$

$$\{X(ct), t \geq 0\} \stackrel{d}{=} \{c^B X(t), t \geq 0\},$$

où B est appelé un *exposant de X auto-similaire*.

Hudson et Mason (1982) ont prouvé que si X est un processus de Lévy dans R^d tel que la distribution de $X(1)$ est non dégénérée, alors X est auto-similaire associé à un opérateur si et seulement si la variable aléatoire $X(1)$ est strictement stable associée à un opérateur. Dans ce cas, tout exposant de $X(1)$ est aussi un exposant auto-similaire.

On montre, voir Meerschaert et Sheffler (2001), que tout processus de Lévy strictement stable est associé à un opérateur d'exposant $A = \alpha^{-1}I$, où I est l'opérateur identité sur R^d . Le processus de Lévy $X = \{X(t), t \geq 0\}$ défini par

$$X(t) = (X_1(t), \dots, X_d(t)),$$

où X_1, \dots, X_d sont des processus de Lévy stables indépendants à valeurs dans R d'indices respectifs $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in (0, 2]$, est appelé un *processus de Lévy avec des composantes stables*. Ce type de processus de Lévy a été étudié en premier par Pruitt et Taylor (1969), et il est quelquefois utile dans la construction de contre-exemples (voir Hendricks (1972)). Il est facile de vérifier que X est stable associé à l'opérateur d'exposant A qui a $\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_d^{-1}$ sur la diagonale et 0 ailleurs. Pour mieux connaître ce processus, voir Meerschaert et Sheffler (2001).

Maintenant revenons aux processus de Lévy généraux. Dans le but d'étendre des résultats sur les trajectoires du mouvement Brownien et les processus de Lévy stables aux processus de Lévy généraux dans R^d , Blumenthal et Gettoor (1961) ont introduit les indices suivants β, β' et β'' (voir plus bas pour les définitions) et ont obtenu quelques propriétés des trajectoires en termes de ces indices. Plus tard Pruitt (1969) et Hendricks (1983) ont défini les indices γ et γ' , resp., et ont montré leur lien avec la dimension de Hausdorff de l'image des processus de Lévy. Voir les articles de Taylor (1973, 1986a), Fristed (1974) et Pruitt (1975). Il est un problème intéressant que de comprendre les relations entre ces indices. Des résultats apparentés et des problèmes ouverts peuvent être trouvés dans Pruitt et Taylor (1996).

Pour être plus spécifique, l'indice supérieur β de X est défini en termes de sa mesure de Lévy L comme suit

$$(2.7) \quad \beta = \inf \{ \alpha > 0 : \int_{|y| < 1} |y|^\alpha L(dy) < \infty \} = \inf \{ \alpha > 0 : r^\alpha L\{y : |y| > r\} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty \}.$$

Les paramètres β'' et β' dépendent du comportement de $\operatorname{Re} \psi$ à l'infini,

$$(2.8) \quad \beta'' = \sup \{ \alpha \geq 0 : \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\xi|^{-\alpha} \operatorname{Re} \psi(\xi) = \infty \}$$

$$(2.9) \quad \beta' = \sup \{ \alpha \geq 0 : \int_{R^d} |\xi|^{\alpha-d} \frac{1 - \exp(-\operatorname{Re} \psi(\xi))}{\operatorname{Re} \psi(\xi)} d\xi < \infty \}$$

Blumenthal et Gettoor (1961) ont montré que $0 \leq \beta'' \leq \beta' \leq \beta \leq 2$ et ces indices peuvent être distincts. Cependant, quand le processus X est strictement stable d'indice $\alpha \in (0, 2]$, tous les indices égalent α .

Quand X est un subordonateur d'exposant de Laplace g , Blumenthal et Gettoor (1961) ont défini l'indice

$$(2.10) \quad \sigma = \sup \{ \alpha \leq 1 : \int_1^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{g(u)} du < \infty \},$$

et ont montré que chacun de σ et de l'indice β peut être exprimé en fonction de l'exposant de Laplace g

$$\sigma = \sup \{ \alpha \geq 0 : \lim_{u \rightarrow \infty} u^{-\alpha} g(u) = \infty \},$$

$$\beta = \inf \{ \alpha \geq 0 : \lim_{u \rightarrow \infty} u^{-\alpha} g(u) = 0 \}.$$

Il ont également prouvé que $0 \leq \beta' \leq \sigma \leq \beta \leq 1$. Plus tard, Horowitz (1968) trouva une représentation pour σ par la mesure de Lévy,

$$\sigma = \sup \{ \alpha : x^{\alpha-1} \int_0^x L(y, \infty) dy \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty \};$$

en outre, il a montré que $\dim_H X([0,1]) = \sigma$ p.s., où $\dim_H E$ représente la dimension de Hausdorff de E . voir le paragraphe 3.1. pour sa définition.

En étudiant la dimension de Hausdorff de l'image d'un processus de Lévy général X dans R^d Pruitt (1969) a défini l'indice γ en se basant sur le comportement de la moyenne du temps passé dans une boule de petit diamètre :

$$(2.11) \quad \gamma = \sup \{ \alpha \geq 0 : \limsup_{r \rightarrow 0} r^{-\alpha} \int_0^1 P \{ |X(t)| \leq r \} dt < \infty \}.$$

Pruitt (1969) a montré que pour un subordonateur $\gamma = \sigma$ (ceci est lié au résultat susmentionné de Horowitz (1968)) et pour un processus de Lévy symétrique $\gamma = \min \{ \beta', d \}$, mais en général β' et γ peuvent être différents.

L'indice γ est difficile à calculer de la définition de Pruitt. La question d'exprimer cette indice en termes de l'exposant de Lévy ψ a été posée dans Pruitt (1969,1975) et celui-ci a réussi à obtenir quelques résultats partiels. Ce problème a été récemment résolu par Khoshnevisan, Xiao et Zhong (2003) qui ont montré que

$$(2.12) \quad \gamma = \sup \{ \alpha < d : \int_{\{\xi \in R^d, |\xi| > 1\}} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 + \psi(\xi)} \right) \frac{d\xi}{|\xi|^{d-\alpha}} < \infty \}.$$

Le paramètre γ' est dû à Hendricks (1983),

$$(2.13) \quad \gamma' = \sup \{ \alpha \geq 0 : \liminf_{r \rightarrow 0} r^{-\alpha} \int_0^1 P \{ |X(t)| \leq r \} dt < \infty \}.$$

Taylor (1986b) a prouvé que γ' égale la dimension d'empilement (cf. §3.2) de l'image de X . Pour un subordonateur X , il vient des résultats de Fristedt et Taylor (1992) sur la mesure d'empilement (cf. § 3.2) de l'image $X([0,1])$ que $\gamma' = \beta$; voir aussi Bertoin (1999). Quand (2.13) n'est pas facile d'évaluer pour un processus de Lévy général, il serait utile de représenter γ' en termes de l'exposant de Lévy ψ , comme (2.12) pour γ .

Utilisant les résultats de Blumenthal et Gettoor (1961), Pruitt (1969), Taylor (1986) et Bertoin (1999) sur les dimension de Hausdorff et d'empilement de $X([0,1])$, nous avons les relations suivantes entre les indices γ, γ', β et β' ,

$$0 \leq \beta' \wedge d \leq \gamma \leq \gamma' \leq \beta \wedge d,$$

et pour un subordonateur, $\gamma = \sigma \leq \gamma' = \beta$. Pour plus de résultats sur les relations qui existent entre ces indices, voir Pruitt et Taylor (1996).

2.2. Processus Additifs. Un processus stochastique $X = \{ X(t), t \geq 0 \}$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, à valeurs dans R^d , est appelé un *processus additif* si, pour tous $s, t \geq 0$, l'accroissement $X(t+s) - X(t)$ est indépendant du processus $\{ X(r), 0 \leq r \leq t \}$, $X(0) = 0$ p.s., et tel que la fonction $t \mapsto X(t)$ est continue en probabilité.

Notez qu'un processus additif a des accroissements indépendants, sauf que les accroissements peuvent ne pas être stationnaires. Par conséquent, il n'est pas en général

temporellement homogène. La classe des processus additifs est très large. Par exemple, si X est un processus de Lévy dans R^d et $\tau(s)$ est une fonction non aléatoire qui est croissante et continue à droite, alors $Y(s) = X(\tau(s))$ définit un processus additif.

D'un intérêt particulier est la classe des processus additifs auto-similaires. Nous disons que le processus $X = \{X(t), t \geq 0\}$ auto-similaire au sens large si pour tout $a > 0, a \neq 1$, il existe une constante $b = b(a) > 0$ et une fonction $c(t) : R_+ \rightarrow R^d$ telles que

$$\{X(at), t \in R_+\} \stackrel{d}{=} \{bX(t) + c(t), t \in R_+\}.$$

En vertu du théorème 13.11 dans Sato (1999), nous savons que si un processus additif X est auto-similaire au sens large, alors il existe une constante $H > 0$ telle que $b(a) = a^H$ pour tout $a > 0$. la constante H est dite l'indice de l'auto-similarité de X . Si $c(t) = 0$, X est auto-similaire comme défini précédemment.

Rappelons qu'une mesure de probabilité ν sur R^d est dite auto-décomposable ou de *Classe L* si, pour tout $a > 1$, il existe une mesure de probabilité ρ_a sur R^d telle que

$$\hat{\nu}(\xi) = \hat{\nu}(a^{-1}\xi)\hat{\rho}_a(\xi), \quad \forall \xi \in R^d,$$

où $\hat{\nu}$ est la transformée de Fourier de ν . Il est facile de voir que toute distribution stable sur R^d est auto-similaire (cf. Sato (1999), mais la Classe L est beaucoup plus large que la classe des distributions stables.

Il est bien connu qu'un processus de Lévy X est auto-similaire si et seulement s'il est strictement stable. Pour les processus additifs, il existe un résultat analogue. Ceci est dû à Sato (1991), qui a montré que

- (i) Si $X = \{X(t), t \geq 0\}$ est auto-similaire au sens large, alors pour tout $t \geq 0$, la distribution de $X(t)$ est auto-décomposable.
- (ii) Pour chaque distribution ν sur R^d auto-décomposable et non triviale (ne prenant pas uniquement que les valeurs 0 ou 1) et toute constante $H > 0$, il existe un processus X tel que X est auto-similaire d'indice H et la distribution de $X(t)$ est ν .

De ce fait, les processus additifs auto-similaire sont aussi appelés processus de Classe L . On se réfère à Sato (1999) pour plus d'information sur les processus additifs.

A l'opposé de la riche théorie des processus de Lévy, peu de travaux de recherche ont porté sur les propriétés des trajectoires des processus additifs. Notez que chaque distribution ν de Classe L entraîne deux types de processus à accroissements indépendants, l'un est un processus de Lévy et l'autre est un processus de Classe L . Ces deux processus ont ν comme distribution de probabilité au temps $t = 1$. Il est intéressant de comparer leurs propriétés probabilistes. Quelques résultats s'y rapportant ont été récemment établis. Par exemple, Sato (1991) et Watanabe (1996) ont comparé le comportement asymptotique des processus additifs auto-similaires croissants $X = \{X(t), t \geq 0\}$ quand $t \rightarrow 0$ et $t \rightarrow \infty$ avec ceux des subordinaeurs stables. Yamamuro (2000a, b) a obtenu un critère pour la récurrence et la tendance (comparez de ces deux propriétés les mêmes données pour le mouvement Brownien au premier chapitre) des processus de Classe L , lesquelles diffèrent de celles des processus de Lévy. Cependant, nous pouvons dire que peu de résultats sur les propriétés fractales des trajectoires ont été établis pour les processus de Classe L généraux.

2.3. Processus de Markov de type Lévy et Opérateurs pseudo-différentiels

Dans les dernières années, nombre d'auteurs ont étudié des processus de Markov qui sont dans un certain sens comparables aux processus de Lévy. Dans ce paragraphe, nous discuterons brièvement des processus de Feller associés à des opérateurs pseudo-différentiels

et se référons à Jacob et Schilling (2001) et Kolokoltsov (2001) pour plus d'information.

Pour simplifier, nous prenons $S = R^d$. Soit $C_c^\infty(R^d)$ l'espace des fonctions infiniment différentiables sur R^d à support compact et soit $C_0^\infty(R^d)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur R^d qui tendent vers 0 à l'infini, munis de la norme de la convergence uniforme $\|\bullet\|$. Un opérateur pseudo-différentiel est un opérateur $q(x, D)$ sur $C_c^\infty(R^d)$ de la forme

$$q(x, D)u(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{R^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} q(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi,$$

où la fonction $q : R^d \times R^d \rightarrow C$ (dans l'ensemble des nombres complexes), appelée le *symbole de l'opérateur* $q(x, D)$, est supposée être mesurable en (x, ξ) et de croissance polynomiale en ξ , et où \hat{u} est la transformée de Fourier de u . Celle-ci est donnée dans ce cas par

$$\hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{R^d} e^{-i\langle \xi, x \rangle} u(x) dx.$$

Soit $X = \{X(t), t \in R_+, P^x, x \in R^d\}$ un processus de Feller à valeurs dans R^d . Nous représentons son semi-groupe et son générateur infinitésimal par $\{T_t, t \geq 0\}$ et $(A, D(A))$, resp.

Définissons la fonction $\lambda_t : R^d \times R^d \rightarrow C$ par

$$(2.15) \quad \lambda_t(x, \xi) = E^x[\exp -i\langle \xi, X(t) - x \rangle],$$

laquelle est la fonction caractéristique de l'élément aléatoire $X(t) - x$ sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{F}, P^x)$. Sous certaines conditions de régularité sur X , Jacob (1998) prouve que la restriction de T_t sur $C_c^\infty(R^d)$ est un opérateur pseudo-différentiel de symbole $\lambda_t(x, \xi)$, ceci étant, pour $u \in C_c^\infty(R^d)$,

$$T_t u(x) = (2\pi)^{-d/2} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \lambda_t(x, \xi) \cdot \hat{u}(\xi) d\xi,$$

et si l'espace des fonctions test $C_c^\infty(R^d) \subset D(A)$, alors le générateur infinitésimal $(A, D(A))$ peut être exprimé par

$$(2.16) \quad Au(x) = -(2\pi)^{-d/2} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} q(x, \xi) \cdot \hat{u}(\xi) d\xi, \quad \forall u \in C_0^\infty(R^d)$$

où

$$-q(x, \xi) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda_t(x, \xi) - 1}{t},$$

et $\lambda_t(x, \xi)$ est définie comme dans (2.15). En d'autres mots, A est un opérateur pseudo-différentiel de symbole $q(x, \xi)$.

Il est facile de voir que si X est un processus de Lévy dans R^d d'exposant ψ , alors son opérateur de transition et son générateur infinitésimal sont des opérateurs pseudo-différentiels de symboles $\lambda_t(x, \xi) = e^{-t\psi(\xi)}$ et $q(x, \xi) = \psi(\xi)$, respectivement. Plus précisément,

$$Au(x) = -(2\pi)^{-d/2} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \psi(\xi) \cdot \hat{u}(\xi) d\xi, \quad \forall u \in C_c^\infty(R^d).$$

Notez que les deux symboles sont constants en x et les opérateurs pseudo-différentiels correspondants sont dits *avoir des coefficients constants*.

Plus généralement, un théorème de Courrège (1965) (cf. Jacob (1996)) implique que, si $C_c^\infty(R^d)$ est inclus dans $D(A)$, alors le symbole $q(x, \xi)$ de A est localement borné et pour tout x fixé, celui-ci est donné par la formule de Lévy-Khintchine,

$$(2.17) \quad q(x, \xi) = i\langle a(x), \xi \rangle + \frac{1}{2}\langle \xi, \Sigma(x)\xi \rangle + \int \left[1 - e^{i\langle y, \xi \rangle} + \frac{i\langle y, \xi \rangle}{1 + |y|^2} \right] L(x, dy), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d,$$

où $a(x), \Sigma(x)$ et $L(x, dy)$ satisfont les mêmes conditions que (2.1).

Similaires aux études des processus de Lévy, les méthodes analytiques de Fourier (utilisant les transformées de Fourier) sont très utiles dans l'étude des propriétés probabilistes des processus de Feller associés à un opérateur pseudo-différentiel. Etant donné un tel processus X , une question intéressante est de trouver des propriétés de X en utilisant le symbole $q(x, \xi)$. L'une des approches est de comparer le symbole $q(x, \xi)$ avec une fonction continue définie négative $\psi(\xi)$. Par exemple, Schilling (1998a,b) a montré que, sous des conditions appropriées, $q(x, \xi) \approx \psi(\xi)$ entraîne des évaluations sur le semi-groupe $\{T_t, t \geq 0\}$ de X et celui du processus de Lévy d'exposant $\psi(\xi)$; de quoi des propriétés asymptotiques de la dimension de Hausdorff peuvent être tirées. Le comportement de X est dans un certain sens similaire au comportement du processus de Lévy d'exposant $\psi(\xi)$. Sous des conditions plus restrictives, il est même possible d'obtenir des évaluations des fonctions de transition similaires à celles d'un processus de Lévy d'exposant $\psi(\xi)$; voir Negoro (1994).

Plus généralement, des propriétés des trajectoires des processus de Feller X peuvent être décrites en fonction des propriétés asymptotiques de son symbole $q(x, \xi)$. Schilling (1998a,b) a introduit divers indices en termes de $q(x, \xi)$ similaires à ceux introduits pour les processus de Lévy basés sur ψ , et a étudié les propriétés de la dimension de Hausdorff et de croissance de X .

2.4. Diffusion fractionnaire. Dans le but de donner un traitement unifié des diffusions sur des fractales (ensembles, voir ci-dessous) variées, Barlow (1998) définit la classe des diffusions fractionnaires. Même si les suppositions y figurant sont un peu restrictives, ces processus de Markov peuvent bien faire l'objet d'une analyse utilisant des méthodes Markoviennes et des techniques de la géométrie fractale.

Les définitions suivantes d'un espace métrique fractionnaire et d'une diffusion fractionnaire sont tirées de Barlow (1998).

Définition 2.2. Soit (S, ρ) un espace complet séparable et localement compact et μ une mesure aléatoire sur (S, \mathcal{S}) . Le triplet (S, ρ, μ) est appelé un *espace métrique fractionnaire* (EMF) si les conditions suivantes sont satisfaites :

(a) . (S, ρ) possède la propriété du point central, *i.e.*, pour tous $x, y \in S$ il existe un $z \in S$ tel que

$$\rho(x, z) = \rho(z, y) = \frac{1}{2}\rho(x, y);$$

(b) . Il existe une constante $d_f > 0$ et des constantes positives c_1 et c_2 telles que

$$(2.18) \quad c_1 r^{d_f} \leq \mu(B(x, r)) \leq c_2 r^{d_f} \quad \text{pour tous } x \in S, 0 \leq r \leq r_0 = \text{diam}(S) \text{ (le diamètre de } S, \text{ cf. chapitre 2.)}$$

Entre autres exemples de EMF, nous pouvons citer \mathbb{R}^d muni de la distance euclidienne $|\bullet|$ et de la mesure de Lebesgue λ_d .

Définition 2.3. Soit (S, ρ, μ) un espace métrique fractionnaire. Un processus de Markov $X = \{X(t), t \geq 0, P^x, x \in S\}$ est appelé une *diffusion fractionnaire* sur S si

(a) . X est une diffusion de Feller conservatrice à valeurs dans S .

(b) . X possède une densité de transition symétrique $p(t, x, y) = p(t, y, x)$ ($\forall t > 0; \forall x, y \in S$),

laquelle est, pour tout $t > 0$, continue en (x, y) .

(c) . Il existe des constantes positives $\alpha, \beta, \gamma, c_3, \dots, c_6$ telles que

$$(2.19) \quad c_3 t^{-\alpha} \exp \{ -c_4 \rho(x, y)^{\beta\gamma} t^{-\gamma} \} \leq p(t, x, y) \leq c_5 t^{-\alpha} \exp \{ -c_6 \rho(x, y)^{\beta\gamma} t^{-\gamma} \},$$

pour tous $x, y \in S$ et $0 < t \leq r_0^\beta$.

Nous rappelons qu'une diffusion de Feller est un processus de Feller satisfaisant les quelques propriétés supplémentaires suivantes : nous rappelons que le temps de vie ζ d'un processus X est défini par

$$\zeta = \inf \{ t : X(t) = \partial \} \quad (\partial \text{ étant l'état de mort (cf. chapitre 1.)}).$$

(i) Les trajectoires $t \mapsto X(t)$ sont continues sur $[0, \zeta)$;

(ii) Le domaine $D(A)$ du générateur infinitésimal de X inclut $C_c^\infty(S)$.

Les conditions susmentionnées sont un peu trop restrictives. Pour étudier les propriétés des trajectoires de X , les conditions importantes sont (2.18) et (2.9). On montre (voir Barlow (1998)) que sous ces deux conditions, $\alpha = d_f / \beta$.

Exemple de diffusion fractionnaire. [Processus de diffusion sur R^d]

Pour tout nombre $\lambda \in (0, 1]$, soit $A(\lambda)$ la classe de toutes les fonctions mesurables prenant leurs valeurs dans l'espace des matrices carrées symétriques d'ordre $d \times d$, $a : R^d \rightarrow R^d \otimes R^d$ qui satisfont la condition dite *elliptique*,

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \frac{1}{\lambda} |\xi|^2 \quad \text{pour tous } x, y \in R^d$$

Pour tout $a \in A(\lambda)$, soit $\mathcal{L} = \nabla \cdot (a \nabla)$ l'opérateur différentiel partiel de deuxième ordre correspondant (ici ∇ représente l'opérateur *gradient* du 1^{er} ordre). En vertu du théorème II.3.1. de Strook (1988), nous savons que \mathcal{L} est le générateur infinitésimal d'une diffusion d -dimensionnelle $X = \{ X(t), t \geq 0 \}$, qui est continue forte de Feller. En outre, sa densité de transition $p(t, x, y) \in C((0, \infty) \times R^d \times R^d)$ satisfait l'inégalité

$$\frac{1}{K t^{d/2}} \exp \left(-\frac{K |y-x|^2}{t} \right) \leq p(t, x, y) \leq \frac{K}{t^{d/2}} \exp \left(-\frac{|y-x|^2}{K t} \right)$$

Pour tout $(t, x, y) \in (0, \infty) \times R^d \times R^d$, où $K = K(a, d) \geq 1$ est une constante. L'estimation ci-dessus est due à Aronson (1967) (voir Strook (1988)). Ainsi, X est une diffusion fractionnaire avec $\alpha = d/2, \beta = 2$ et $\gamma = 1$.

Si $S \subset R^d$ et le triplet $(S, |\cdot|, \mu)$ satisfait (2.18), alors S est dit un d -ensemble (voir Chen et Kamagai (2002) pour des études portant sur les diffusions fractionnaires sur lesdits d -ensembles).

3. Quelques outils de la géométrie fractale

Dans cette section, nous rassemblons des définitions et quelques propriétés élémentaires de la mesure et de la dimension de Hausdorff, la mesure et la dimension d'empilement, la capacité, et l'analyse multifractale. Toute ceci nous servira d'outils pour l'analyse finie des propriétés des processus stochastiques discutés dans ce chapitre. Plus d'information sur la géométrie fractale peut être trouvée dans Falconer (1990, 1997).

3.1. Mesure de Hausdorff et dimension de Hausdorff. Soit Φ la classe des fonctions $\varphi : (0, \delta) \rightarrow (0, \infty)$ qui sont continues à droite, monotone croissante avec $\varphi(0_+) = \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0$ et telles qu'il existe une constante finie $K > 0$ telle que

$$(3.1) \quad \frac{\varphi(2s)}{\varphi(s)} \leq K, \text{ pour } 0 < s < \frac{1}{2} \delta.$$

Une fonction dans Φ est souvent appelée une *fonction de mesure*.

Pour $\varphi \in \Phi$, la *mesure φ -Hausdorff* de $E \subseteq R^d$ est définie par

$$(3.2) \quad \varphi - m(E) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \sum_i \varphi(2r_i) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i), r_i < \varepsilon \right\},$$

où $B(x, r)$ représente la boule ouverte de rayon r centrée en x . La suite des boules satisfaisant les deux conditions dans (3.2) est appelée un ε -*recouvrement* de E . Il est bien connu et on le vérifie sans peine que $\varphi - m$ est une mesure extérieure et tout ensemble de Borel dans R^d est $\varphi - m$ -mesurable. Une fonction $\varphi \in \Phi$ est appelée une *fonction de mesure de Hausdorff exacte* (ou *correcte*) pour E si $0 < \varphi - m(E) < \infty$.

Remarque 3.1. Dans (3.2), nous utilisons uniquement des recouvrements de E par des boules, ainsi $\varphi - m$ est souvent appelée une *mesure de Hausdorff sphérique* dans la littérature. Sous (3.1), $\varphi - m$ est équivalente à la mesure de Hausdorff définie en utilisant des recouvrements par des ensembles arbitraires.

La dimension de Hausdorff de E est définie par

$$\dim_H E = \inf \{ \alpha > 0 : s^\alpha - m(E) = 0 \}.$$

Le lemme suivant est souvent utile dans la détermination des bornes supérieures pour les dimensions de Hausdorff de l'image, le graphe et les images inverses. Les preuves des premières inégalités peuvent être trouvées dans Kahane (1985a) ou Falconer (1990). La dernière fut prouvée dans Kaufman (1985) et Monrad et Pitt (1987). Pour la définition du temps local, voir la section 6.1.

Lemme 3.2. Soit $I \subset R^N$ un hypercube (produit de N intervalles, N étant un entier positif quelconque). S'il existe une constante $\alpha \in (0, 1)$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $f : I \rightarrow R^d$ satisfait une condition de Hölder uniforme d'ordre $\alpha - \varepsilon$ sur I , alors pour tout Borélien $E \subset I$,

$$\dim_H f(E) \leq \min \left\{ d, \frac{1}{\alpha} \dim_H E \right\},$$

$$\dim_H \text{Grf}(E) \leq \min \left\{ \frac{1}{\alpha} \dim_H E, \dim_H E + (1 - \alpha) \cdot d \right\}$$

Si, en plus f a un temps local borné sur I , alors pour tout Borélien $F \subset R^d$,

$$\dim_H f^{-1}(F) \leq N - \alpha d + \alpha \dim_H F.$$

Hölder. Nous disons de façon générale que la fonction $f(x)$ est de Hölder uniforme d'ordre (ou d'exposant) H s'il existe une constante c telle que pour tout x' ,

$$|f(x) - f(x')| \leq c|x - x'|^H.$$

La dimension de Hausdorff est intimement liée à la capacité de Bessel-Riesz, comme il a été découvert par Frostman (1935). Plus généralement, soit S un espace métrique quelconque muni de la σ -algèbre de Borel \mathcal{S} . Un noyau κ est une fonction mesurable $\kappa : S \times S \rightarrow [0, \infty]$. Pour une mesure de Borel μ sur S , l'énergie de μ par rapport au noyau κ est définie par

$$I_\kappa(\mu) = \iint_{S \times S} \kappa(x, y) \mu(dx) \mu(dy).$$

Pour $\Lambda \subseteq S$, la *capacité* de Λ par rapport à κ , représentée par $Cap_\kappa(\Lambda)$, est définie par

$$Cap_\kappa(\kappa) = \left[\inf_{\mu \in P(\Lambda)} I_\kappa(\mu) \right]^{-1},$$

où $P(\Lambda)$ est la famille des mesures de probabilité portées par Λ , et par convention $\infty^{-1} = 0$. Notez que $Cap_\kappa(\Lambda) > 0$ si et seulement s'il existe une mesure de probabilité μ sur Λ de κ -énergie finie. Nous considérons principalement le cas où $\kappa(x, y) = f(|x - y|)$, où f est une fonction non négative et non croissante. En particulier, si $f(r) = r^{-\alpha}$, alors le Cap_κ correspondant est appelé la *capacité de Bessel-Riesz* d'ordre α et est notée par Cap_α . La dimension de capacité de Λ est définie par

$$\dim_c(\Lambda) = \sup \{ \alpha > 0 : Cap_\alpha(\Lambda) > 0 \}.$$

Le théorème de Frostman (cf. Kahane (1985a)) dit que pour un compact Λ quelconque dans R^d , $\dim_H(\Lambda) = \dim_c(\Lambda)$. Ce résultat donne un moyen analytique utile pour le calcul de la borne inférieure de la dimension de Hausdorff. Soit $\Lambda \subset R^d$, afin de montrer que $\dim_H(\Lambda) \geq \alpha$, on a seulement besoin de trouver une mesure μ sur Λ telle que la α -énergie de μ est finie. Pour des ensemble aléatoires et déterministes, tels que les ensembles auto-similaires² ou les images d'un processus stochastique, il existe des choix naturels de μ .

Etant donné une fonction de mesure $\varphi \in \Phi$ et un ensemble $E \subset R^d$, il est souvent plus compliqué d'évaluer la mesure de Hausdorff $\varphi - m(E)$. De (3.2) nous voyons qu'afin d'obtenir une borne supérieure pour la φ -mesure de Hausdorff de E , il est suffisant de construire une suite de ε_n -recouvrements de E telle que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ et les sommes correspondantes soient bornées. Cependant, il est plus difficile d'utiliser directement la définition ci-dessus pour obtenir une borne inférieure pour $\varphi - m(E)$, car on a besoin de considérer tous les recouvrements possibles de E par des ensembles de diamètre inférieur à ε . Cette difficulté peut usuellement être contournée en appliquant le théorème de densité suivant dû à Rogers et Taylor (1961), (voir aussi Taylor et Tricot (1985)), lequel est un raffinement du lemme de Frostman (voir Kahane (1985a)).

Pour une mesure de Borel μ quelconque sur R^d et $\varphi \in \Phi$, la φ -densité supérieure de μ en $x \in R^d$ est définie par

$$\bar{D}_\mu^\varphi(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{\varphi(2r)}.$$

Lemme 3.3. *Etant donné $\varphi \in \Phi$, il existe une constante positive K telle que pour une mesure de Borel μ quelconque sur R^d avec $0 < \|\mu\| \triangleq \mu(R^d) < \infty$ et tout Borélien $E \subseteq R^d$, nous avons*

$$(3.3) \quad K^{-1} \mu(E) \inf_{x \in E} \{ \bar{D}_\mu^\varphi(x) \}^{-1} \leq \varphi - m(E) \leq K \|\mu\| \sup_{x \in E} \{ \bar{D}_\mu^\varphi(x) \}^{-1}.$$

Remarque 3.4. On peut définir la mesure de Hausdorff sur un espace métrique quelconque (S, ρ) en remplaçant dans (3.2) la distance euclidienne par ρ . Nous utiliserons cette remarque dans la section 7, quand on étudiera les intersections de l'image d'un processus de Markov avec un ensemble de Borel dans l'espace des états. De toute évidence, la seconde inégalité dans le dernier lemme peut ne pas être vraie dans un espace métrique général. Une

² Un ensemble est dit auto-similaire s'il est construit de parties qui sont géométriquement similaires à tout l'ensemble. Par exemple, si C représente l'ensemble de Cantor (cf. ch. 2), alors $C = C_1 \cup C_2$ où $C_1 = C \cap [0, 1/3]$ et $C_2 = C \cap [2/3, 1]$ sont des copies similaires de C , vues à l'échelle 1/3.

condition suffisante pour (3.3) est que S possède une dimension structurelle finie, *i.e.*, pour tout $0 < a < 1$, il existe une constante M telle que chaque sous-ensemble de S avec un diamètre suffisamment petit δ peut être recouvert par M ensembles de diamètre pas plus grand que $a\delta$. Nous nous référons à Howroyd (1994) pour plus d'information sur les mesures de Hausdorff sur les espaces métriques généraux.

3.2. Dimension d'empilement et mesure d'empilement.

La mesure d'empilement et la dimension d'empilement, qui peuvent respectivement égaler la mesure de Hausdorff et la dimension de Hausdorff, ont été introduites par Taylor (1982), Taylor et Tricot (1985), comme concept dual à la mesure de Hausdorff et la dimension de Hausdorff. Afin de caractériser la structure géométrique d'un ensemble (fractal, en ce sens que toutes les dimensions définies au cours de cet exposé sont égales), il est plus avantageux d'établir des résultats sur les quatre quantités.

Pour $\varphi \in \Phi$, définissons la fonction d'ensemble $\varphi - P(E)$ sur R^d par

$$(3.4) \quad \varphi - P(E) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \sum_i \varphi(2r_i) : \bar{B}(x_i, r_i) \text{ sont disjointes, } x_i \in E, r_i < \varepsilon \right\},$$

où \bar{B} représente la fermeture de B . Une suite de boules fermées satisfaisant les conditions dans (3.4) et appelée un ε -empilement de E . Contrairement à $\varphi - m$, $\varphi - P$ n'est pas une mesure extérieure. Toutefois, nous pouvons en construire une notée $\varphi - p$ en la définissant comme suit

$$(3.5) \quad \varphi - p(E) = \inf \left\{ \sum_n \varphi - P(E_n) : E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right\}.$$

La quantité $\varphi - p(E)$ est appelée la *mesure d'empilement de E* . Taylor et Tricot (1985) ont prouvé que $\varphi - p(E)$ est une mesure extérieure métrique ; ainsi tout Borélien dans R^d est $\varphi - p$ mesurable. Si $\varphi(s) = s^\alpha$, $s^\alpha - p(E)$ est appelée la *mesure d'empilement α -dimensionnelle* de E . La *dimension d'empilement de E* est définie par

$$(3.6) \quad \dim_p E = \inf \{ \alpha > 0 : s^\alpha - p(E) = 0 \}.$$

Il vient de (3.5) que pour tout $E \subset R^d$,

$$(3.7) \quad \varphi - p(E) \leq \varphi - P(E).$$

Ainsi nous pouvons appliquer (3.7) pour déterminer une borne supérieure pour $\varphi - p(E)$. Cependant, il n'est pas souvent facile de déterminer $\varphi - P(E)$ parce que nous avons besoin de considérer tous les empilements possibles dans (3.4). Une borne inférieure pour $\varphi - p(E)$ peut être obtenue en utilisant le théorème sur la densité suivant (pour une preuve, voir Taylor et Tricot (1985)).

Lemme 3.5. *Pour une fonction $\varphi \in \Phi$ donnée, il existe une constante $K > 0$ telle que pour une mesure de Borel quelconque sur R^d avec $0 < \|\mu\| = \mu(R^d) < \infty$ et un ensemble de Borel quelconque $E \subseteq R^d$,*

$$(3.8) \quad K^{-1} \mu(E) \inf_{x \in E} \{ \underline{D}_\mu^\varphi(x) \}^{-1} \leq \varphi - p(E) \leq K \|\mu\| \sup_{x \in E} \{ \underline{D}_\mu^\varphi(x) \}^{-1},$$

où

$$\underline{D}_\mu^\varphi(x) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{\varphi(2r)}$$

est la φ -densité inférieure de μ en x .

Il y a une définition équivalente pour $\dim_p E$ qui est quelques fois plus convenable à utiliser. Pour tout $\varepsilon > 0$ et un ensemble borné quelconque $E \subseteq R^d$, soit

$N_1(E, \varepsilon) =$ le plus petit nombre de boules de rayon ε nécessaires pour recouvrir E et

$N_2(E, \varepsilon)$ = le plus grand nombre de boules disjointes de rayon ε centrées sur E .
Alors nous avons

$$N_2(E, \varepsilon) \leq N_1(E, \varepsilon) \leq N_2(E, \varepsilon/2).$$

Pour simplifier la notation, nous écrivons indifféremment $N(E, \varepsilon)$ pour $N_1(E, \varepsilon)$ ou $N_2(E, \varepsilon)$.

Alors les dimensions de boîtes de E supérieure et inférieure (introduites au deuxième chapitre sous les notations Δ et δ) sont définies par

$$\overline{\dim}_B E = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(E, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}, \text{ et}$$

$$\underline{\dim}_B E = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(E, \varepsilon)}{-\log \varepsilon},$$

respectivement. Si $\overline{\dim}_B E = \underline{\dim}_B E$, la valeur commune est appelée la *dimension de boîtes*. Il est facile de vérifier que

$$(3.9) \quad 0 \leq \dim_H E \leq \underline{\dim}_B E \leq \overline{\dim}_B E \leq d, \text{ et} \\ 0 \leq \dim_p E \leq \overline{\dim}_B E \leq d,$$

Pour tout ensemble borné $E \subseteq R^d$. Ainsi $\overline{\dim}_B E$ et $\underline{\dim}_B E$ peuvent être utilisées pour déterminer des bornes supérieures pour $\dim_H E$ et $\dim_p E$.

Le désavantage avec $\overline{\dim}_B$ et $\underline{\dim}_B$, comme il a été mentionné au chapitre 2, est qu'elles ne sont pas en tant que dimension σ -stables (cf. Tricot (1982)). On peut obtenir des indices σ -stables en posant

$$\overline{\dim}_{MB} E = \inf \left\{ \sup_n \overline{\dim}_B E_n, E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right\},$$

$$\underline{\dim}_{MB} E = \inf \left\{ \sup_n \underline{\dim}_B E_n, E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right\}.$$

En suivant Falconer (1990), nous appelons $\overline{\dim}_{MB} E$ et $\underline{\dim}_{MB} E$ les *dimensions de boîtes supérieure et inférieure modifiées de E* . Tricot (1982) a prouvé que $\dim_p E = \overline{\dim}_{MB} E$. Par conséquent, pour un ensemble $E \subseteq R^d$ quelconque,

$$(3.10) \quad 0 \leq \dim_H E \leq \underline{\dim}_{MB} E \leq \overline{\dim}_{MB} E = \dim_p E \leq d.$$

Ainsi, si $\dim_H E = \dim_p E$, alors les dimensions dans (3.10) coïncident.

Puisque la dimension de boîtes supérieure $\overline{\dim}_B$ d'un ensemble est plus facile à déterminer, le lemme suivant de Tricot (1982) est utile pour le calcul de la dimension d'empilement d'un ensemble. Rappelons que $\overline{\dim}_B$ est dite *uniforme* sur E s'il existe une constante c telle que, pour tout $x \in \overline{E}$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \overline{\dim}_B (E \cap B(x, r)) = c.$$

Lemme 3.6. *Si un ensemble E est compact et $\overline{\dim}_B$ est uniforme sur E , alors*

$$\overline{\dim}_B E = \dim_p E.$$

Il est facile de voir que les bornes supérieures analogues dans le lemme 3.2. restent vraies si l'on remplace \dim_H par \dim_p . Toutefois, contrairement aux cas de la dimension de Hausdorff, si f est une projection de R^N dans R^d ($d < N$) ou f est un mouvement Brownien dans R , ces bornes supérieures ne sont plus pertinentes. En fait, Talagrand et Xiao (1996) ont

montré que pour toute fonction $f : R^N \rightarrow R^d$ satisfaisant une condition de Hölder uniforme d'ordre α sur, disons, $[0,1]^N$, il existe des ensembles compacts $E \subset [0,1]^N$ tels que

$$\dim_p f(E) < \frac{1}{\alpha} \dim_p E.$$

Pour plus d'information sur la dimension d'empilement des projections, voir Falconer et Howroyd (1997) et les références y figurant.

3.3. Profil de la dimension d'empilement

Dans ce paragraphe, nous rappelons brièvement les définitions des dimensions d'empilement des mesures et lesdits profils de la dimension d'empilement introduits par Falconer et Howroyd (1997), et énonçons quelques-unes de leurs propriétés élémentaires. Voir Howroyd (2001) pour des développements récents.

La *dimension d'empilement* d'une mesure μ sur R^d est définie par

$$(3.11) \quad \dim_p \mu = \inf \{ \dim_p E : \mu(E) > 0 \text{ et } E \subseteq R^d \text{ est un Borélien} \}.$$

La dimension d'empilement supérieure est définie par

$$(3.12) \quad \dim_p^* \mu = \inf \{ \dim_p E : \mu(R^d \setminus E) = 0 \text{ et } E \subseteq R^d \text{ est un Borélien} \}.$$

Les dimensions de Hausdorff supérieure et inférieure de μ peuvent être définies de façon similaire. Celles-ci sont notées $\dim_H^* \mu$ et $\dim_H \mu$, respectivement. Pour plus d'information sur ces dernières quantités, voir Falconer (1997).

Pour une mesure de Borel finie μ sur R^d et pour tout $s > 0$, définissons le potentiel

$$F_s^\mu(x, r) = \int_{R^d} \min \{ 1, r^s |y - x|^{-s} \} \mu(dy)$$

Les définitions équivalentes de $\dim_p \mu$ et $\dim_p^* \mu$ en termes du potentiel $F_d^\mu(x, r)$ sont données par Falconer et Howroyd (1997) :

$$(3.13) \quad \dim_p \mu = \sup \{ t > 0 : \liminf_{r \rightarrow 0} r^{-t} F_d^\mu(x, r) = 0, \mu - \text{presque partout } (\mu - \text{p.p.}), x \in R^d \}, \text{ et}$$

$$(3.14) \quad \dim_p^* \mu = \inf \{ t > 0 : \liminf_{r \rightarrow 0} r^{-t} F_d^\mu(x, r) = \infty, \mu - \text{p.p.}, x \in R^d \}.$$

Comme extensions des quantités susmentionnées, Falconer et Howroyd (1997) utilisent le potentiel s -dimensionnel $F_s^\mu(x, r)$ pour définir le potentiel de la dimension d'empilement de μ par

$$(3.15) \quad \text{Dim}_s \mu = \sup \{ t \geq 0 : \liminf_{r \rightarrow 0} r^{-t} F_s^\mu(x, r) = 0, \mu - \text{p.p.}, x \in R^d \},$$

et le profil de la dimension d'empilement supérieure de μ par

$$(3.16) \quad \text{Dim}_s^* \mu = \inf \{ t > 0 : \liminf_{r \rightarrow 0} r^{-t} F_s^\mu(x, r) > 0, \mu - \text{p.p.}, x \in R^d \},$$

Respectivement. Il est facile de voir que

$$0 \leq \text{Dim}_s \mu \leq \text{Dim}_s^* \mu \leq s,$$

et que si $s \geq d$,

$$\text{Dim}_s \mu = \dim_p \mu, \quad \text{Dim}_s^* \mu = \dim_p^* \mu ;$$

voir Falconer et Howroyd (1997).

Pour un ensemble de Borel $E \subseteq R^d$, soit $M_c^+(E)$ la famille de toutes les mesures de Borel finies à support compact inclus dans E . alors $\dim_p E$ peut être caractérisée par la dimension d'empilement des mesure portées par E ,

$$\dim_p E = \sup \{ \dim_p \mu : \mu \in M_c^+(E) \} ;$$

Voir Hu et Taylor (1994) pour un preuve. Motivés par ceci, Falconer et Howroyd (1997) définissent le profil de la dimension d'empilement de $E \subseteq R^d$ par

$$(3.17) \quad \text{Dim}_s E = \sup \{ \text{Dim}_s \mu : \mu \in M_c^+(E) \}.$$

On montre facilement que pour des ensembles de Borel $E \subseteq R^d$, $0 \leq \text{Dim}_s E \leq s$ et pour tout $s \geq d$, $\text{Dim}_s E = \dim_p E$.

Le lemme suivant tiré de Xiao (1998a) donne des bornes supérieures pour $\text{Dim}_s \mu$, $\text{Dim}_s^* \mu$ et $\text{Dim}_s E$.

Lemme 3.8. *Soit I un hypercube dans R^N et soit $f : I \rightarrow R^d$ une fonction continue satisfaisant une condition de Hölder uniforme de tout ordre inférieur à α . Pour une mesure de Borel finie μ quelconque sur R^N à support inclus dans I et tout Borélien $E \subset I$, nous avons*

$$(3.18) \quad \dim_p \mu_f \leq \frac{1}{\alpha} \text{Dim}_{\text{ad}} \mu, \quad \dim_p^* \mu_f \leq \frac{1}{\alpha} \text{Dim}_{\text{ad}}^* \mu,$$

où μ_f est la mesure image de μ par f , et

$$\dim_p f(E) \leq \frac{1}{\alpha} \text{Dim}_{\text{ad}} E.$$

3.4. Analyse multifractale

Dans la géométrie fractale, les multifractales étaient à l'origine utilisées pour analyser la concentration des mesures et, en particulier, pour quantifier leur structure de singularité. Actuellement, elles sont devenues un des outils les plus basiques qui peuvent être utilisés pour étudier les propriétés fines des fonctions ou des processus stochastiques.

Soit (S, \mathcal{S}) un espace mesurable et $h : S \rightarrow R$ une fonction mesurable. Soit D une fonction mesurable définie sur S . alors le spectre par rapport aux fonctions h et D est défini par

$$(3.19) \quad H(\theta) = D(\{x \in S : h(x) = \theta\})$$

Dans l'analyse multifractale, la fonction d'ensemble $D(\bullet)$ est souvent prise comme la dimension de Hausdorff ou d'empilement. Alors le problème basique est de calculer les valeurs de la fonction $H(\theta)$.

Dans ce qui suit, nous donnons quelques exemples de spectre multifractal.

Exemple 3.9. Soit μ une mesure de Borel localement finie sur (S, \mathcal{S}) , et soit $h(x)$ la dimension locale de μ en x , ceci étant,

$$(3.20) \quad h(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r},$$

si la limite existe. Pour tout $\theta > 0$, soit

$$E_\theta = \{x \in S : h(x) = \theta\}.$$

Notez que, pour la plus part des mesures d'intérêt, E_θ est dense dans $\text{supp}(\mu)$, le support de μ , pour des valeurs de θ pour lesquelles E_θ est non trivial. Ainsi les dimensions de boîtes $\overline{\dim}_B$ et $\underline{\dim}_B$ sont de peu d'usage dans la caractérisation dimensionnelle de E_θ . Il est plus naturel de laisser $D(\bullet)$ être la dimension de Hausdorff ou la dimension d'empilement, alors $H(\theta) = D(E_\theta)$ est le spectre multifractal usuel $f_\mu(\theta)$ et $F_\mu(\theta)$ de μ , respectivement.

Si la limite dans (3.20) n'existe pas, alors on peut considérer les dimensions locales inférieure et supérieure de μ définies par

$$\underline{h}(x) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r}, \text{ et}$$

$$\bar{h}(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r},$$

respectivement. Quand μ est la mesure d'occupation (cf. § 6.1) d'un subordinateur, ce type de spectre multifractal pour μ a été étudié par Hu et Taylor (1997,2000).

Nous donnons ci-après quelques exemples.

Exemple 3.10. Soit $f : R^N \rightarrow R^d$ (N un entier positif) une fonction continue. Définissons son exposant de Hölder local en $t_0 \in R^N$ par

$$h_f(t_0) = \sup \{ \alpha > 0 : f \in C^\alpha(t_0) \},$$

où $f \in C^\alpha(t_0)$ signifie qu'il existe une constante $K > 0$ et un polynôme P_{t_0} de degré au plus égal à $[\alpha]$ (i.e., la partie entière de α) tels que dans un voisinage de t_0 ,

$$(3.21) \quad |f(t) - P_{t_0}(t)| \leq K|t - t_0|^\alpha.$$

Notez que si f est continûment différentiable d'ordre $[\alpha]$ dans un voisinage de t_0 , alors le polynôme $P_{t_0}(t)$ est exactement le développement de Taylor de f en t_0 d'ordre $[\alpha]$. Toutefois, (3.21) peut être vérifié pour une grande valeur de α même si f n'est pas différentiable dans un voisinage de t_0 .

Pour $S_\theta = \{t : h_f(t) = \theta\}$, la fonction $d(\theta) = \dim_H(S_\theta)$ est appelé le spectre des singularités de f . ceci donne une information géométrique sur la distribution des singularités de f . une fonction f est appelée multifractale quand son spectre des singularités est défini au moins sur un ensemble d'intérieur non vide. Voir Jacob (2001) pour des études portant sur les fonctions multifractales.

Exemple 3.11. Soit $W = \{W(t), t \in R_+\}$ le mouvement Brownien standard dans R . On montre que l'exposant local de W est $1/2$ partout sur sa trajectoire. Définissons

$$h(t) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|W(t + \varepsilon) - W(t)|}{\sqrt{2\varepsilon|\log \varepsilon|}}.$$

Alors, pour $\theta \in (0,1]$, $F(\theta) = \{t \in [0,1], h(t) = \theta\} \neq \emptyset$, et est appelé l'ensemble des *points θ -rapides*. Soit $D = \dim_H$, alors $H(\theta)$ est la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points θ -rapides étudié en premier par Orey et Taylor (1974). La dimension d'empilement de $F(\theta)$ égale toujours 1. Voir Peres et Xiao (2000) pour des détails.

4. Résultats sur les dimensions de Hausdorff et d'empilement pour l'image.

Le premier résultat sur la dimension de Hausdorff a été obtenu par Taylor (1953) qui a déterminé $\dim_H W([0,1])$ pour un mouvement Brownien dans R^d ($d \geq 2$); voir aussi Lévy (1953). Depuis lors nombre de travaux portant sur le calcul de la mesure de Hausdorff exacte de l'image d'un mouvement Brownien ou d'un processus de Lévy ont été publiés. On se réfère à Taylor (1986a) et les références y figurant pour plus d'information.

Dans cette section, nous discutons les dimensions de Hausdorff et d'empilement de l'image $X([0,1])$ d'un processus de Markov à valeurs dans S . les dimensions de Hausdorff et d'empilement de $X(R_+)$ peuvent être similairement étudiées. En particulier, pour les processus de Markov quelconque satisfaisant les conditions du théorème 4.2., la propriété de Markov et le fait que $\dim_H X(R_+) = \sup_{n \geq 0} X([n, n+1])$ entraînent que

$$\dim_H X(R_+) = \dim_H X([0,1]) \text{ p.s.}$$

4.1. Résultats sur la dimension de Hausdorff pour l'image.

En premier, nous résumons quelques techniques usuelles pour déterminer des bornes supérieure et inférieure pour la dimension de Hausdorff de l'image $X([0,1])$, ou plus généralement, $X(E)$, où $E \subset B(R_+)$ (un Borélien).

Afin d'obtenir une borne supérieure pour $\dim_H X(E)$, nous pouvons utiliser :

- *Une méthode de recouvrement* : trouver une suite de recouvrement de $X(E)$, et montrer que les sommes correspondantes dans (3.2) sont bornées. Quand X est continu de Hölder, par exemple, le mouvement Brownien sur R^d ou sur des fractales, alors ceci est donné par le lemme 3.2. Avec l'aide du lemme 4.1. ci-dessous, des méthodes utilisant l'espérance conditionnelle sont souvent suffisantes pour des processus de Markov généraux.
- *Des méthodes dites de co-dimension* : la théorie du potentiel* pour les processus de Lévy implique que si $X(E)$ est *polaire* pour un processus stable symétrique Y dans R^d d'indice β qui est indépendant de X , alors $\dim_H X(E) \leq d - \beta$; voir la proposition 4.11. pour un résultat général. Nous employons le qualificatif *polaire* ci-dessus en ce sens que Y ne prend pas presque sûrement les valeurs dans $X(E)$.

Pour prouver les bornes inférieures pour la dimension de Hausdorff de $X(E)$, on peut utiliser les méthodes suivantes :

- Des méthodes, utilisant la capacité, basées sur le théorème de Frostman. Dans le but de montrer que $\dim_H X(E) \geq \gamma$, nous construisons une mesure de Borel aléatoire μ sur $X(E)$ et montrons que μ a une γ -énergie finie. Une mesure aléatoire naturelle sur $X(E)$ est la mesure d'occupation. Ces méthodes sont souvent utilisées pour les ensembles de niveau et les temps d'auto-intersection, où les mesures aléatoires sont déterminées par les temps locaux et les temps locaux d'auto-intersection (voir les sections 8 et 9).
- *Des méthodes dites de co-dimension* : si $X(E)$ n'est pas polaire pour un processus strictement stable Y dans R^d d'indice β qui est indépendant de X , alors $\dim_H X(E) \geq d - \beta$, voir la proposition 4.11. ci-dessous.

Soit $K_1 > 0$ une constante fixée. Une collection $\Lambda(a)$ de boules de rayon (diamètre) a dans un espace métrique (S, ρ) est dite K_1 -recouvrante si aucune boule de rayon a dans S ne peut intercepter plus de K_1 boules de $\Lambda(a)$. Clairement, si $S = R^d$, alors pour chaque entier $n \geq 1$, la collection des cubes dyadiques d'ordre n dans R^d est K_1 -recouvrante avec $K_1 = 3^d$.

Le lemme suivant a été prouvé en premier pour les processus de Lévy dans R^d par Pruitt et Taylor (1969). Pour une preuve voir Liu et Xiao (1998).

Lemme 4.1. Soit $X = \{X(t), t \geq 0, P^x\}$ un processus de Markov fort temporellement homogène dans S de fonction de transition $P(t, x, A)$ et soit $\Lambda(a)$ une collection K_1 -recouvrante fixée de boules de rayon a ($0 < a \leq 1$) dans S . Pour tout $u \geq 0$, nous représentons par $M_u(a, s)$ le nombre de boules de $\Lambda(a)$ par lesquelles passe $X(t)$ à un instant $t \in [u, u + s]$. Alors pour tout $x \in S$,

$$E^x[M_u(a, s)] \leq 2K_1 s \left[\inf_{y \in S} \left(\int_0^s 1_{B(y, a/3)}(X(t)) dt \right) \right]^{-1},$$

où 1_B est la fonction indicatrice de l'ensemble B . (la notation E^x signifie que l'intégration se fait par rapport à la mesure de probabilité P^x).

Pour simplifier, nous assumons que $S = R^d$. Le théorème et les lemmes suivants sont tirés de Xiao (2004).

Théorème 4.2. Soit $X = \{X(t), t \geq 0, P^x\}$ un processus de Markov dans R^d de fonction de transition $P(t, x, A)$ satisfaisant les conditions suivantes :

(4.1) On suppose que sur un intervalle $[0, r_0]$, en partant d'un point quelconque x , le temps moyen passé à l'intérieur de la boule $B(x, r)$, est non nul pour tout $r \in [0, r_0]$.

(4.2) $P(t, x, B(x, r)) \approx P(t, 0, B(0, r))$ pour tous $t > 0, x \in R^d, 0 \leq r \leq r_0$.

Alors $\dim_H X([0, 1]) = \gamma_{low} P^x - p.s.$, pour tout $x \in R^d$, où γ_{low} est défini par

$$\gamma_{low} = \sup \left\{ \alpha \geq 0 : \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^\alpha} \int_0^1 P(t, 0, B(0, r)) dt < \infty \right\}.$$

Remarque (4.3). (i). Comme dans le théorème de Pruitt (1969), nous pouvons exprimer l'indice γ_{low} en fonction des moments de $X(t)$:

$$\gamma_{low} = \sup \left\{ \alpha \geq 0 : \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^\alpha} \int_0^1 E \left(|X(t)|^{-\alpha} \right) dt < \infty \right\}.$$

(i). Tous les processus de Markov homogènes dans l'espace satisfont la condition (4.2) avec l'égalité.

La preuve de la borne inférieure dans le théorème 4.2. est basée sur les lemmes 4.4. et 4.5. ci-dessous. Pour tout $t_0 \in [0, 1]$ et tout $r > 0$, soit

$$T(t_0, r) = \int_{[0, 1]} 1_{\{|X(t) - X(t_0)| \leq r\}} dt$$

le temps de séjour de X dans la boule $B(X(t_0), r)$.

Lemme 4.4. Il existe une constante $\delta > 0$ telle que pour tous $t_0 \in [0, 1], r > 0$, tout $\lambda > 0$ et $x \in R^d$,

$$(4.3) \quad P^x \{T(t_0, r) \geq \lambda \tau(2r)\} \leq \exp - \delta \lambda,$$

où $\tau(r) = E[T(0, r)]$.

Preuve : Pour simplifier, nous assumons $t_0 = 0$ et écrivons $T(r)$ à la place de $T(0, r)$.

Notons d'abord que (4.2) implique que pour tous $x \in R^d$ et $r > 0$

$$E^x [T(r)] = \int_0^1 P(t, x, B(x, r)) dt \approx \tau(r).$$

Pour tout entier $n \geq 2$ et tout $x \in R^d$, le théorème de Fubini et la propriété de Markov de X impliquent que

$$\begin{aligned} E^x [T(r)^n] &= E^x \left[\int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{j=1}^n 1_{\{|X(s_j) - X(0)| \leq r\}} ds_1 \cdots ds_n \right] \\ &= n! \int_{0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_n \leq 1} P^x \left[\bigcap_{j=1}^n \{|X(s_j) - X(0)| \leq r\} \right] ds_1 \cdots ds_n \\ &\leq n! \int_{0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_n \leq 1} P^x \left[\bigcap_{j=1}^{n-1} \{|X(s_j) - X(0)| \leq r\} \right] \cdot P(s_n - s_{n-1}, x_{n-1}, B(x_{n-1}, 2r)) ds_1 \cdots ds_n \\ &\leq K^n n! [E(T(2r))]^n, \end{aligned}$$

où la dernière étape est obtenue par récurrence et $K > 0$ est une constante. Ainsi il existe une constante positive $\delta > 0$ telle que

$$E^x \left[\exp \left(\delta \frac{T(r)}{\tau(2r)} \right) \right] \leq 2.$$

Finalement, (4.3) résulte de l'inégalité de Chébyshev.

En utilisant (4.3) et le théorème de Borel-Cantelli standard, nous avons

Lemme 4.5. *Sous les mêmes hypothèses du lemme 4.4. Alors pour tout $t_0 \in [0,1]$,*

$$(4.4) \quad \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{T(t_0, r)}{\tau(2r) \log \log \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\delta} \quad P^x - \text{p.s.},$$

où $\delta > 0$ est la même constante dans le lemme 4.4.

Preuve du théorème 4.2. : Pour prouver la borne inférieure, nous notons que le lemme 4.5., le théorème de Fubini et le lemme 3.3. impliquent que

$$(4.5) \quad \varphi_1 - m(X[0,1]) \geq K \quad P^x - \text{p.s.}, \text{ pour tout } x \in R^d,$$

où $\varphi_1(r) = \tau(2r) \log \log(1/r)$. Ainsi $\dim_H X([0,1]) \geq \gamma_{low} \quad P^x - \text{p.s.}$

Maintenant, nous prouvons la borne supérieure. Pour tout $\beta > \gamma_{low}$, nous choisissons $\alpha \in (\gamma_{low}, \beta)$. Alors, par la définition de γ_{low} , il existe une suite (r_n) de nombre positifs telle que $r_n \downarrow 0$ et $\tau(r_n) \geq r_n^\alpha$ pour tout $n \geq 1$. En vertu du lemme 4.1., nous voyons que pour chaque $n \geq 1$, $X([0,1])$ peut être recouvert par $M_0(r_n, 1)$ cubes dans $\Lambda(r_n)$ et

$$E^x [M_0(r_n, 1)] \leq \frac{K}{\tau(r_n)} \leq K r_n^\alpha.$$

Ainsi nous avons $s^\beta - m(X([0,1])) < \infty \quad P^x - \text{p.s.}$, et par conséquent, le théorème 4.2. est prouvé.

Remarque 4.6. En regardant la preuve nous voyons que le théorème 4.2. peut être appliqué à un processus de Markov qui n'est pas temporellement homogène, pourvu que sa fonction de transition $P_{s,t}(x, A)$ soit comparable à une fonction $P(t-s, x, A)$ satisfaisant les conditions (4.1) et (4.2).

Remarque 4.7. Le théorème 4.2 entraîne que si les fonctions de transitions respectives de processus de Markov sont comparables, alors les dimensions de Hausdorff de leurs images sont égales. Ceci est lié aux résultats de Schilling (1996). Une question naturel est que si un processus de Markov X à valeurs dans R^d est comparable à un processus de Lévy stable Y , les résultats sur la mesure de Hausdorff et la dimension uniforme (cf. section 8) pour Y restent-ils vrais pour X ? Voir les sections 5 et 8 pour des résultats liés.

Le théorème 4.2. peut être convenablement appliqué à des processus de Markov dont les fonctions de transition peuvent être estimées, par exemple les processus de Lévy stables, les mouvements Browniens sur des fractales (Barlow 1998), des processus de Feller associés à des opérateurs pseudo-différentiels (Schilling 1998), etc. dans bien des cas, γ_{low} peut être calculé en termes de caractéristiques plus explicites du processus de Markov X .

Corollaire 4.8. [Barlow 1998] *Soit X une diffusion fractionnaire de la définition 2.3., alors*

$$\dim_H X([0,1]) = \min \{ d_f, \beta \}$$

Quand $X = \{ X(t), t \geq 0 \}$ est un processus de Lévy général dans R^d , Pruitt (19669) a prouvé que $\dim_H X([0,1]) = \gamma$ p.s., où l'indice γ est défini dans (2.11). Comme (2.11) peut se révéler

difficile à calculer, il est plus approprié de représenter γ en termes de l'exposant de Lévy ψ de X . Pruitt (1969) propose l'issue suivante qui donne une évaluation de γ :

$$\gamma \geq \sup \{ \alpha < d : \int_{|\xi| \geq 1} \frac{1}{|\psi(\xi)|} \frac{d\xi}{|\xi|^{d-\alpha}} < \infty \}.$$

En outre, on montre que si, en plus $\operatorname{Re} \psi(\xi) \geq 2 \log|\xi|$ (pour de grandes valeurs de $|\xi|$), alors

$$\gamma = \sup \{ \alpha < d : \int_{R^d} \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{-\psi(\xi)}}{\psi(\xi)} \right) \frac{d\xi}{|\xi|^{d-\alpha}} < \infty \}.$$

Voir Fristedt (1974) pour une discussion plus en détail du travail de Pruitt sur ce domaine. Récemment, Khoshnevisan, Xiao et Zhong (2003) ont résolu complètement le problème.

Théorème 4.9. *Si X représente un processus de Lévy dans R^d d'exposant de Lévy ψ , alors*

$$\gamma = \sup \{ \alpha < d : \int_{|\xi| > 1} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 + \psi(\xi)} \right) \frac{d\xi}{|\xi|^{d-\alpha}} < \infty \}.$$

Remarque 4.10. Récemment, en utilisant le résultat de Pruitt (1969), Becker-Kern, Meerschaert et Scheffler (2002) ont calculé $\dim_H X([0,1])$ pour une classe de processus de Lévy stables dans R^d . Leur argumentation implique diverses estimations probabilistes techniques de processus de Lévy stables et requiert quelques restrictions sur les densités de transition des processus stochastiques. Le théorème 4.9. donne une façon analytique différente de résoudre le problème.

La preuve du théorème 4.9. dans Khoshnevisan, Xiao et Zhong (2003) repose sur la théorie du potentiel d'une classe de fonctions aléatoires multiparamétrique de Lévy, appelées les processus additifs, ce qui ne doit pas être confondu avec l'appellation antérieure, et une méthode dite de co-dimension. Ce que nous expliquons ci-dessous.

Soit $X_\alpha = \{ X_\alpha(t), t \geq 0 \}$ un processus de Lévy stable isotropique dans R^d d'indice $\alpha \in (0,2]$. Si $\alpha < d$, il est connu qu'un compact $F \subset R^d$ est polaire pour X_α , i.e.,

$$P \{ X_\alpha(t) \in F \text{ pour un } t > 0 \} = 0$$

Si seulement si la capacité de Riesz-Bessel $\operatorname{Cap}_{d-\alpha}(F) = 0$. Kanda (1976) a prouvé que ceci est vrai pour les processus de Lévy strictement stables dans R^d . Au sujet de la théorie du potentiel des processus de Lévy, voir Sato (1999).

Puisque la capacité de Riesz-Bessel est liée à la dimension de Hausdorff, Taylor (1966) a proposé d'utiliser l'image $X_\alpha(R_+)$ d'un processus de Lévy stable comme moyen de mesurer la dimension de Hausdorff d'un Borélien quelconque $F \subset R^d$. Plus précisément, Taylor (1966) a montré que pour un Borélien quelconque $F \subset R^d$, avec $\dim_H F \geq d - 2$,

$$(4.6) \quad \dim_H F = d - \inf \{ \alpha > 0 : F \text{ n'est pas polaire pour } X_\alpha \},$$

et il a appliqué cette méthode pour calculer la dimension d Hausdorff de l'ensemble des points multiples (cf. section 9) des processus de Lévy strictement stables (cf. Fristedt (1967)).

Avec l'aide de la théorie du potentiel des processus additifs étudiés dans Khoshnevisan, et Xiao (2002, 2003a,b) et Khoshnevisan, Xiao et Zhong (2003), la restriction peut être supprimée. Rappelons qu'un processus stable additif N -paramétrique d'indice $\alpha \in (0,2]$, noté

$X_{\alpha,N} = \{ X_{\alpha,N}(t), t \in R_+^N \}$, est défini par

$$X_{\alpha,N} = X_1(t_1) + \dots + X_N(t_N),$$

où X_1, \dots, X_N sont des processus stables isotropiques indépendants d'indice α . Nous avons

Proposition 4.11. Pour un Borélien quelconque $F \subset R^d$,

$$\dim_H F = d - \inf \{ N\alpha > 0 : F \text{ n'est pas polaire pour } X_{\alpha,N} \},$$

Cette méthode de trouver $\dim_H F$ (voir Khoshnevisan et Shi (2000)) est dite de *co-dimension*. Comme application, nous considérons l'exemple suivant.

Exemple 4.12. $[0,1]^d$ étant muni de la σ -algèbre de Borel, supposons que $F = F(\omega)$ est un ensemble aléatoire dans $[0,1]^d$ (i.e., $1_{F(\omega)}(x)$ est mesurable pour x et ω) tel que pour tout compact $E \subset [0,1]^d$, nous avons

$$(4.7) \quad P(F \cap E \neq \emptyset) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dim_H E > \gamma \\ 0 & \text{si } \dim_H E < \gamma \end{cases}$$

Alors en prenant $E = X_{\alpha,N}(R_+^N)$ pour un α et un N bien choisis, et en appliquant la proposition 4.11, nous voyons que $\dim_H F = d - \gamma$ p.s.

Maintenant, nous retournons à l'étude des propriétés fractales de l'image d'un processus de Markov X . une fois la quantité $\dim_H X([0,1])$ déterminée, deux questions naturelles s'imposent à nous ; (i) peut-on déterminer $\dim_H X(E)$ pour tout Borélien $E \subset R_+$?

(ii) y a-t-il une fonction de mesure de Hausdorff exacte pour $X([0,1])$?

Nous discutons la question (ii) pour les processus de Lévy et des processus de Markov plus généraux dans la section 5. Dans ce qui suit, nous résumons quelques résultats sur la question (i).

Soit X un processus de Lévy dans R^d d'indice $\alpha \in (0,2]$. Alors, pour un Borélien quelconque $E \subset R_+$, (cf. Blumenthal et Gettoor (1960a,b))

$$(4.8) \quad \dim_H X(E) = \min \{ d, \alpha \dim_H E \} \text{ p.s.}$$

Pour un processus de Lévy général X , Blumenthal et Gettoor (1961) ont établi les bornes supérieure et inférieure suivantes pour $\dim_H X(E)$ en termes des indices β, β' et β'' introduits au début : pour tout $E \subset R_+$, presque sûrement,

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \dim_H X(E) &\leq \beta \dim_H E \text{ si } \beta < 1 \\ \dim_H X(E) &\geq \begin{cases} \beta' \dim_H E & \text{si } \beta' \leq d, \\ \min \{ 1, \beta'' \dim_H E \} & \text{si } \beta' > d = 1 ; \end{cases} \end{aligned}$$

si, en plus, X est un subodinateur, alors

$$\sigma \dim_H E \leq \dim_H X(E) \leq \beta \dim_H E \text{ p.s.}$$

Blumenthal et Gettoor (1961) ont aussi conjecturé qu'il existe une fonction $f : [0,1] \rightarrow [0,d]$ dépendant uniquement de X telle que

$$(4.10) \quad \dim_H X(E) = f(\dim_H E) \text{ p.s.,}$$

et ils ont suspecté que (4.10) peut être vérifié par la fonction linéaire simple

$$f(x) = \dim_H X([0,1])x.$$

Cependant, Hendricks (1972) a donné un exemple de processus de Lévy à accroissements stables pour lequel (4.10) ne peut pas être vrai pour aucune fonction linéaire f . En fait,

Hawker et Pruitt (1974) ont prouvé un résultat qui montre qu'en général $\dim_H X(E)$ ne peut pas être déterminée par la dimension de Hausdorff de E seulement ; ainsi la conjecture (4.10) ne peut pas être vraie pour toute fonction f . Quand X est un subordinateur, Hawker (1978b) a prouvé que $\dim_H X(E)$ est presque sûrement égale la dimension de type-Hausdorff de E , laquelle est définie par $\inf \{ \alpha > 0 : h^\alpha - m(E) = 0 \}$, où h est une fonction déterminée par l'exposant de Laplace de X et est liée à la fonction de mesure de Hausdorff exacte de l'image $X([0,1])$ obtenue par Fristedt et Pruitt (1971). Soit X un processus de Lévy arbitraire dans R^d d'exposant ψ , Khoshnevisan et Xiao (2003b) ont récemment établi une formule générale pour $\dim_H X(E)$ en termes de ψ pour un Borélien quelconque $E \subset R_+$. En particulier, si X est symétrique ou il a l'indice inférieur $\beta'' > 0$, alors

$$\dim_H X(E) = \sup \{ \gamma \in (0, d) : \text{Cap}_{\kappa_\gamma}(E) > 0 \},$$

où κ_γ est le noyau défini par

$$\kappa_\gamma(x, y) = \int \exp(-|x - y|\psi(\xi)) |\xi|^{-\gamma} d\xi, \quad \forall x, y \in R^d$$

Il serait intéressant de voir pour quel type de processus de Markov les résultats de Khoshnevisan et Xiao (2003b) peuvent être étendus.

D'autre part, Lin et Xiao (1998) ont étudié la question (i) pour des processus de Markov qui sont approximativement auto-similaire (1998). Nous avons le résultat :

Théorème 4.14. *Soit $X = \{ X(t), t \geq 0, P^x \}$ un processus de Markov temporellement homogène fort dans R^d de fonction de transition $P(t, x, A)$. Assumons qu'il existe des constantes positives r_0, K_2 et K_3 telles que*

$$(4.11) \quad P(t, x, B(x, r)) \geq K_2 \min \left\{ 1, \left(\frac{r}{t^\alpha} \right)^d \right\} \quad \forall x \in R^d, 0 \leq r \leq r_0, \text{ et}$$

$$P(t, x, B(y, r)) \leq K_3 \min \left\{ 1, \left(\frac{r}{t^\alpha} \right)^d \right\},$$

pour tous $x, y \in R^d$ avec $|x - y| \leq r_0$ et tout $0 \leq r \leq r_0$. Alors pour un Borélien quelconque $E \subset R_+$,

$$(4.13) \quad \dim_H X(F) = \min \left\{ d, \frac{1}{\alpha} \dim_H E \right\} \quad P^x - \text{p.s.}$$

Les conditions (4.11) et (4.12) peuvent être satisfaites par des processus de Markov introduits dans la section 2.

4.2. Résultat sur la dimension d'empilement pour l'image.

Le premier résultat sur la dimension d'empilement et la mesure d'empilement de fractales aléatoires a été obtenu par Taylor et Tricot (1985), dans lequel ils ont étudié la mesure d'empilement de l'image d'un mouvement Brownien dans R^d avec $d \geq 3$. Taylor (1980b) prouve que pour un processus de Lévy quelconque X , $\dim_p X([0,1]) = \gamma'$ p.s., où γ' est l'indice défini dans (2.13). Quand X est un subordinateur, Fristedt et Taylor (1992) déterminent la mesure d'empilement exacte de l'image $X([0,1])$. Il vient de leurs résultats que si X est un subordinateur, alors $\dim_p X([0,1]) = \beta$ p.s., où β est l'indice dans (2.7). Ainsi, pour un subordinateur $\gamma' = \beta$.

Dans le but d'obtenir une borne supérieure pour $\dim_p F$, F étant un Borélien, nous pouvons utiliser l'inégalité $\dim_p F \leq \overline{\dim}_B F$ pour chercher des recouvrements de F de boules de rayons égaux. Le théorème de Taylor et Tricot (1985) (cf. lemme 3.5) demeure l'outil principal pour trouver une borne inférieure pour $\dim_p F$. Une méthode alternative est d'utiliser le profil de la dimension d'empilement.

Le théorème suivant, tiré de Xiao (2004), est une extension du résultat de Taylor (1986b) sur les processus de Lévy à des processus de Markov plus généraux et il est l'analogue du théorème 4.2.

Théorème 4.15. *Soit $X = \{X(t), t \geq 0, P^x\}$ un processus de Markov dans R^d de fonction de transition $P(t, x, A)$ satisfaisant les conditions (4.1) et (4.2) du théorème 4.2. Alors*

$$\dim_p X([0,1]) = \gamma_{up} \quad P^x - \text{p.s.},$$

où γ_{up} est défini par

$$\gamma_{up} = \sup \left\{ \alpha \geq 0 : \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^\alpha} \int_0^1 P(t, 0, B(0, r)) dt < \infty \right\}.$$

Preuve : La preuve est similaire à celle de Taylor (1986b). La borne inférieure $\dim_p X([0,1]) \geq \gamma_{up}$ vient du lemme 3.5. et la définition de γ_{up} . Nous notons que, puisque nous employons la \liminf , tout ce dont on aura besoin est le lemme de Fatou et les méthodes utilisant les premiers moments. D'autre part, afin de prouver la borne supérieure $\dim_p X([0,1]) \leq \gamma_{up}$, il est suffisant de montrer que $\overline{\dim}_B X([0,1]) \leq \gamma_{up}$ p.s., ce qui résulte du lemme 4.1.

Pour des applications de ce théorème, voir Chen et Kumagai (2002). Le théorème 4.15. peut être également appliqué aux diffusions fractionnaires sur un espace fractionnaires S pour trouver

$$\dim_H X([0,1]) = \dim_p X([0,1]) = \min \{d_f, \beta\} \quad P^x - \text{p.s.}$$

Cependant, la question naturelle suivante sur les processus de Lévy reste ouverte :

Question 4.16. Soit X un processus de Lévy dans R^d d'exposant ψ , l'indice γ' , et par conséquent $\dim_p X([0,1])$, peut-il être représenté en termes de ψ ?

Pruitt et Taylor (1996), en cherchant la relation entre γ, γ' et d'autres indices, sont arrivés à se poser quelques questions entre autres :

Question 4.17. Pour un processus de Lévy X dans R^d , est-il vrai que

$$\gamma' = \inf \left\{ \alpha \geq 0 : \lim_{r \rightarrow 0} r^{-\alpha} T(r) = \infty \quad \text{p.s.} \right\}$$

Nous considérons maintenant la dimension d'empilement de $X(E)$ pour un Borélien quelconque $E \subset R_+$. En premier nous notons que si X satisfait les conditions du théorème 4.14. et E possède la propriété $\dim_H E = \dim_p E$, alors le lemme 4.1. et le théorème 4.14. impliquent

$$(4.14) \quad \dim_H X(E) = \dim_p X(E) = \min \left\{ d, \frac{1}{\alpha} \dim_p E \right\} \quad P^x - \text{p.s.}$$

Quand X est un processus de Lévy strictement stable dans R^d d'indice $\beta \in (0,2]$, Perkins et Taylor (1987) ont prouvé que si $\beta < d$, alors presque sûrement

$$(4.15) \quad \dim_p X(E) = \beta \dim_p E \quad \text{pour tout Borélien } E \subset R_+.$$

ce résultat est plus fort que (4.14) puisque l'événement nul ne dépend pas de E , aussi (4.15) est dit un résultat de dimension uniforme, voir section 8. Cependant, quand $\beta > d$ (i.e., $d = 1$, et $\beta > 1$), (4.14) n'est pas vérifié pour un mouvement Brownien W . Talagrand et Xiao (1990) construisent un ensemble compact $E \subset \mathbb{R}_+$ tel que $\dim_p W(E) < 2 \dim_p E$ p.s. Xiao (1997a) résout le problème de trouver $\dim_p W(E)$ en montrant que

$$(4.16) \quad \dim_p W(E) = 2 \text{Dim}_{1/2} E \text{ p.s.},$$

où $\text{Dim}_s E$ est donné dans (3.17).

Nous avons aussi la question suivante.

Question 4.18. Soit X un processus de Markov comme celui donné dans le théorème 4.14. Trouver une formule générale pour $\dim_p X(E)$.

Nous signalons aussi que si X est un processus de Lévy à accroissements stables dans \mathbb{R}^d ou un processus de Lévy stable associé à un opérateur à valeurs dans \mathbb{R}^d , la formule générale pour la dimension d'empilement de $X(E)$ n'a pas encore été établie.

5. Mesures de Hausdorff et d'empilement pour l'image.

5.1. Mesure de Hausdorff de X ($[0,1]$).

L'étude de la mesure de Hausdorff exacte de X ($[0,1]$) ou GrX ($[0,1]$) consiste en deux parties : borne supérieure et borne inférieure. Pour un processus de Markov X , il est relativement facile d'obtenir une borne inférieure pour la mesure de Hausdorff de X ($[0,1]$). Il résulte de la LLI (la loi du logarithme itéré) pour la mesure d'occupation de X (cf. lemme 4.5) et du lemme 3.3. que

$$(5.1) \quad \varphi_1 - m(X[0,1]) \geq K \quad P^x - \text{p.s.},$$

où $\varphi_1(r) = \tau(2r) \log \log 1/r$, et $\tau(r) = E(T(0,r))$ est défini dans le lemme 4.4. et $K > 0$ est une constante. Dans bien des cas tels que X est un processus de Lévy stable de type A, la fonction φ_1 est en fait une fonction de mesure de Hausdorff exacte pour X ($[0,1]$) : voir Wu et Xiao (2002a,b).

Comme pour obtenir une borne supérieure, on a besoin de construire des recouvrements de l'image de X . cela est le plus utilisé parce qu'un recouvrement économique de X ($[0,1]$) doit refléter la structure fine, comme par exemple le comportement de l'oscillation local des trajectoires de X . puisque l'oscillation de X peut changer d'un point à un autre, les ensembles (cubes ou boules) dans un recouvrement économique doivent être de dimensions (diamètre, surface, côté) différentes. Il y a deux approches différentes dans la littérature. Toutes les deux utilisent les points dits « bons » et les points dits « mauvais ». L'une implique l'espace des états tandis que l'autre implique l'espace de paramètre (le temps).

a. Dans le but de construire un recouvrement de l'image ou du graphe de X , Taylor (1964,1967) a classifié les points dans l'espace des états \mathbb{R}^d en points dits *bons* et des points dits *mauvais*, selon le temps de séjour du processus stochastique passé au voisinage de ces points. Des résultats sur les probabilités d'arriver à un niveau (cf. section 6) et la propriété de Markov forte sont nécessaires pour estimer le nombre de cubes dyadiques qui contiennent les points mauvais.

b. Dans la construction d'un recouvrement économique pour l'image d'un mouvement Brownien fractionnaire (MBf). Talagrand (1995) a classifié de même les points dans l'espace de paramètre (ou des indices $[0, \infty)$) en temps dits *bons* et en temps dits *mauvais* suivant le comportement asymptotique local du mouvement Brownien en ces points. Le temps $t_0 \in [0,1]$ est dit *bon* si l'oscillation de X autour de $X(t_0)$ est faible sur une suite d'intervalles

$[t_0 - r_n, t_0 + r_n]$, où $r_n \downarrow 0$ si bien que $X([t_0 - r_n, t_0 + r_n])$ peut être recouvert par des boules de petit rayon. C'est pourquoi l'évaluation des probabilités des petites boules est utile dans le calcul de la mesure de Hausdorff de l'image et le graphe de X (voir Li et Shao (2001)). L'avantage avec l'approche de Talagrand est que les probabilités d'arriver à un niveau de X , ce qui est difficile à établir puisque le MBf n'est pas Markovien, ne sont pas utiles. Cette méthode peut être appliquée à des processus de Markov continus tels que les diffusions fractionnaires (voir Wu et Xiao (2002a,b)).

Nous énonçons maintenant un théorème (cf. Wu et Xiao (2002b)) sur la mesure de Hausdorff de l'image et du graphe d'une classe de processus de Feller incluant certaines diffusions fractionnaires. Laissant $S = R^d$ ou un sous-ensemble fermé muni de la distance euclidienne et la σ -algèbre de Borel \mathcal{S} . Soit μ une mesure aléatoire positive σ -finie sur (S, \mathcal{S}) qui satisfait la condition (2.18) dans la définition 2.2. Rappelons que pour un processus de Markov satisfaisant les conditions (b) et (c) des définitions 2.2. et 2.3. respectivement, on a $\alpha = d_f / \beta$.

Théorème 5.1. *Soit X un processus de Markov sur S satisfaisant les conditions (b) et (c) dans les définitions 2.2. et 2.3. respectivement. Si $\alpha > 1$, alors il existe une constante $K \geq 1$ telle que pour $x \in S$, P^x - p.s.,*

$$(5.2) \quad K^{-1}t \leq \varphi_2 - m(X[0, t]) \leq \varphi_2 - m(GrX[0, t]) \leq Kt,$$

pour tout $t > 0$, où $\varphi_2 - m(r) = r^{d_f/\alpha} \log \log 1/r$. Si $\alpha < 1$, alors pour tout $x \in S$, P^x - p.s.,

$$(5.3) \quad K^{-1}t \leq \varphi_3 - m(GrX[0, t]) \leq Kt,$$

pour tout $t > 0$, où $\varphi_3 - m(r) = r^{1-\alpha+d_f} (\log \log 1/r)^\alpha$.

Pour finir, nous mentionnons que récemment Li, Peres et Xiao (2002) ont trouvé une fonction de mesure de Hausdorff exacte pour l'image $W(E)$ d'un mouvement Brownien, où $E \subset R_+$ est un ensemble auto-similaire. Il est intéressant d'étudier le problème pour des processus ou des ensembles E plus généraux.

5.2. Mesure d'empilement pour $X([0,1])$. L'étude de la mesure d'empilement exacte de l'image d'un processus stochastique a une histoire plus récente, Taylor et Tricot (1985) ont prouvé le théorème suivant sur le mouvement Brownien dans R^d ($d \geq 3$).

Théorème 5.2. *Soit $W = \{W(t), t \geq 0\}$ un mouvement Brownien dans R^d avec $d \geq 3$. Alors il existe une constante positive et finie K telle qu'avec probabilité 1,*

$$(5.4) \quad \varphi_4 - p(W[0,1]) = Kt \quad \forall t > 0,$$

où $\varphi_4(r) = r^2 / (\log |\log r|)$.

Comme il est le cas dans divers résultats sur les mesures de Hausdorff, la preuve du théorème 5.2. se scinde en deux parties : la borne inférieure et la borne supérieure. Pour prouver la borne inférieure, Taylor et Tricot (1985) font appel au théorème de la densité inférieure (cf. lemme 3.5), qui conduit à prouver

$$(5.5) \quad \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{T_1(r) + T_2(r)}{\varphi_4(r)} = 2 \quad \text{p.s.},$$

où T_1 et T_2 sont deux copies indépendantes du processus du temps de séjour $T = \{T(r), r \geq 0\}$. Nous notons que (5.5) repose sur la probabilité des petites boules de $T(r)$, i.e., $P(T(r) \leq x)$, qui, en retour, est liée à $M_1 = \max_{t \in [0,1]} |W(t)|$. Voir Taylor et Tricot (1985) pour plus de détails.

Dans le but de prouver la borne supérieure dans (5.4), Tylor et Tricot (1985) utilisent les *bons* et les *mauvais* points. Une autre méthode basée sur l'oscillation locale des trajectoires du processus peuvent être trouvée dans Xiao (1996,2003).

Pour le mouvement Brownien dans le plan, le Gall et Taylor (1986) prouvent que pour une fonction quelconque φ , la mesure d'empilement $\varphi - p(W[0,t])$ est ou bien 0 ou bien ∞ , et ils donnent le critère suivant :

Théorème 5.3. Soit $W = \{W(t), t \geq 0\}$ un mouvement Brownien dans R^d . Si $\varphi(r) = r^2 \log(1/r)h(r)$, où $h : [0,1] \rightarrow [0,1]$ est croissante, alors avec probabilité 1,

$$(5.6) \quad \varphi - p(W[0,t]) = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \quad \text{selon que } \sum_{n=1}^{\infty} h(2^{-2^n}) \begin{cases} < \infty \\ = \infty \end{cases}.$$

Comme pour la mesure d'empilement du graphe $GrW([0,1])$ d'un mouvement Brownien dans R^d , Rezkhanlou et Taylor (1988) ont prouvé que si $d \geq 3$, alors φ_4 dans le théorème 5.2. est aussi une fonction de mesure d'empilement pour $GrW([0,1])$ (cf. Xiao (2003) pour une preuve différente). Cependant, si $d = 1$ ou 2, alors similairement à (5.6), pour toute fonction de mesure $\varphi \in \Phi$, $\varphi - p(W[0,t])$ est soit 0 soit ∞ .

Taylor (1986b) a prouvé un résultat similaire à (5.6) pour l'image d'un processus de Lévy stable dans R^d d'indice $\alpha < d$. D'autres résultats sur le processus de Cauchy asymétrique et les subordinateurs ont été établis par Rezkhanlou et Taylor (1988), et Fristedt et Taylor (1992).

Depuis lors aucun résultat sur les mesures d'empilement n'a été établi pour des processus de Markov autres que ceux mentionnés ci-dessus. Il serait intéressant d'étudier la mesure d'empilement exacte de l'image et du graphe d'une diffusion fractionnaire et autre processus de Feller.

Finalement, il est important de mentionner que la mesure de Hausdorff et la mesure d'empilement associées à une fonction φ de l'image d'une fonction f sont intimement liées aux variations faibles et fortes de f par rapport à φ , respectivement. Voir Taylor et Tricot (1985). Les variations fortes et faibles ont été étudiées pour le mouvement Brownien par Taylor (1972), Fristedt et Taylor (1973) pour les processus de Lévy stables, Xiao (1997c) pour certains processus de Gauss, et Marcus et Rosen (1994) pour les temps locaux des processus de Markov. Il serait intéressant d'étudier les variations fortes et faibles de processus de Feller plus généraux tels que les processus de diffusion sur des fractales.

5.3. Autres questions sur l'image. Nous posons ci-dessous quelques problèmes irrésolus sur la dimension de Hausdorff et la dimension d'empilement de l'image d'un processus de Markov X . Le problème 5.4 a été posé par Taylor (1986a) et reste toujours ouvert en général.

Question 5.4. Pour un processus de Lévy général dans R^d , montrer qu'il existe toujours une fonction de mesure correcte $\varphi \in \Phi$ qui rend $\varphi - m(X[0,1])$ finie et positive, et donner une méthode pour construire cette fonction φ .

Quelques résultats partiels sur les bornes inférieures et supérieures pour la mesure de Hausdorff de l'image d'un processus de Lévy symétrique dans R ont été obtenus par Dupuis (1974). Il résulte du lemme 4.5. que, pour la fonction $\varphi_1(r) = \tau(2r) \log \log 1/r$, la φ_1 - mesure de Hausdorff de $X([0,1])$ est toujours minorée par une constante positive. Cependant, la mesure de Hausdorff $\varphi_1 - m(X[0,1])$ ne peut pas être nécessairement finie, comme c'est le cas

pour un processus de Lévy stable de type B d'indice $\alpha \in (0,1)$, pour lequel une fonction de mesure de Hausdorff correcte pour X ($[0,1]$) a été prouvée par Taylor (1967) qu'elle égale $\varphi(r) = r^\alpha (\log \log 1/r)^{1-\alpha}$. Ainsi la forme d'une fonction de mesure de Hausdorff correcte peut également être sensible aux propriétés de $h(t,r) = P\{|X(t)| \leq r\}$, non seulement la moyenne $\tau(r) = E(T(r))$.

Il serait aussi intéressant de déterminer les fonctions de mesure de Hausdorff exactes pour l'image et autres ensembles aléatoires d'un processus de Feller X correspondant un opérateur pseudo-différentiel de symbole $q(x, \xi)$. Nous avons les questions suivantes :

Question 5.5. Sous quelles conditions sur $q(x, \xi)$ peut-on déterminer une fonction de mesure de Hausdorff exacte φ pour X ($[0,1]$) ? Comment la fonction φ est-elle liée à $q(x, \xi)$? On pourrait pour un premier essai considérer un symbole $q(x, \xi)$ qui est comparable à celui associé à un processus de Lévy stable.

Question 5.6. Trouver les fonctions de mesure de Hausdorff et d'empilement exactes pour l'image et le graphe d'un processus de Lévy stable dans R^d . Les dimensions de Hausdorff et d'empilement de X ($[0,1]$), sous quelques conditions additionnelles, ont été obtenues par Becker-Kern et al. (2002).

Fristedt et Taylor (1992) croient que si un processus de Lévy X est suffisamment proche du mouvement Brownien, alors son image possède une fonction de mesure d'empilement exacte. La question suivante est motivée par leurs remarques.

Question 5.7. Trouver des conditions sur l'exposant de Lévy ψ ou la mesure de Lévy L d'un processus de Lévy symétrique X dans R^d ($d \geq 3$) de telle sorte que X ($[0,1]$) possède une fonction de mesure d'empilement exacte.

6. Ensembles de niveau des processus de Markov et temps local.

Soit $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un processus de Markov à valeurs dans S . Dans cette section, nous considérons l'ensemble dit de niveau x_0 .

$$X^{-1}(x_0) = \{t \geq 0 : X(t) = x_0\}, \quad x_0 \in S.$$

Comme nous nous intéressons à ses propriétés fractales, il est nécessaire en premier de voir si $X^{-1}(x_0)$ est vide ou non. Pour des processus de Lévy, ce problème a été complètement résolu par Kesten (1969) et Bretagnolle (1971).

Pour étudier les propriétés fractales des ensembles de niveau aussi bien que celles des images inverses $X^{-1}(F)$ d'un processus stochastique X , nous avons besoin d'avoir une mesure (aléatoire) portée par $X^{-1}(x_0)$. Une telle mesure peut être étendue du temps local $l(x_0, t)$ de X (voir (6.2) ci-dessous) quand $l(x, t)$ possède une version qui est continue en (x, t) ; voir Adler (1981). Pour un processus de Markov X , le temps local donne plus d'information sur les ensembles de niveau, voir les propriétés (TL) ci-dessous.

6.1. Temps local : existence et régularité. Notre intérêt particulier pour le temps local d'un processus stochastique X est de l'utiliser pour étudier les propriétés fractales fines des trajectoires de X .

Pour un ensemble de Borel $I \subseteq R_+$, nous définissons la mesure d'occupation d'un processus $X = \{X(t), t \geq 0\}$ à valeurs dans R^d , sur I par :

$$(6.1) \quad \mu_t(B) = \lambda_1 \{ t \in I : X(t) \in B \}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(R^d).$$

Si μ_t est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ_d dans R^d , nous disons que $X(t)$ possède un temps local sur I , et définissons ce temps local, $l(\bullet, I)$, comme la dérivée de Randon-Nikodym de μ_t par rapport à λ_d , i.e.,

$$(6.2) \quad l(x, I) = \frac{d\mu_t}{d\lambda_d}(x), \quad \forall x \in R^d.$$

Dans les notation ci-dessus, x est dit la variable spatial et I est la variable du temps. Quelquefois, nous écrivons $l(x, t)$ à la place de $l(x, [0, t])$.

On montre que les temps locaux ont une modification mesurable qui satisfait la formule de densité d'occupation : pour un Borélien $I \subseteq R_+$, et pour toute fonction mesurable $f : R^d \rightarrow R$,

$$(6.3) \quad \int_I f(X(t))dt = \int_{R^d} f(x)l(x, I)dx,$$

Voir Bertoin (1996) pour une étude des temps locaux d'un processus de Lévy et Barlow et al. (1986a) pour une étude sur les temps locaux d'un processus de Markov plus général.

Les propriétés principales des temps locaux d'un processus de Markov qui sont d'un intérêt particulier pour nous à utiliser sont les suivantes, lesquelles seront notées (TL) pour s'y référer facilement.

- (i) L'inverse de $l(x, \bullet)$ est un subordonateur (voir Blumenthal et Gettoor (1968)). Quand X est un processus de Lévy dans R d'exposant ψ , alors l'exposant de Laplace g du subordonateur correspondant est

$$(6.4) \quad g(u) = \left[\int_R \operatorname{Re} \left(\frac{1}{u + \psi(x)} \right) dx \right]^{-1}.$$

- (ii) L'image de ce subordonateur diffère de $X^{-1}(x)$ par au plus un ensemble dénombrable de points.

Voir Bertoin (1996) pour une preuve de (TL) quand X est un processus de Lévy.

Pour un processus de Lévy $X = \{ X(t), t \geq 0 \}$ dans R , une condition nécessaire et suffisante pour l'existence du temps local de X est que

$$(6.5) \quad \int_R \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 + \psi(\xi)} \right) d\xi < \infty.$$

Ceci est prouvé par Hawkes (1986) et est basé sur le résultat remarquable de Kesten (1969, théorème 2).

Dans ce qui suit, nous considérons les propriétés de régularité des temps locaux quand ces derniers existent.

(a) *Continuité.* Gettoor et Kesten (1972) ont prouvé la nécessité et suffisance de certaines conditions pour le temps local d'un processus de Markov d'avoir une version, encore notée $l(x, t)$, qui est continue en (x, t) (aussi $l(x, t)$ est dit doublement continu). Leurs résultats ont été adaptés par Barlow au cas spécial des processus de Lévy. Plus tard, une condition suffisante en termes de mesure de majoration ont été obtenus par Barlow et Hawkes (1985), laquelle condition a été prouvée nécessaire par Barlow (1988). Le théorème dans la forme donné ci-dessous est pris de Bertoin (1996). Soit

$$m(\varepsilon) = \lambda_1 \left\{ a \in R : \frac{1}{\pi} \int_R (1 - \cos(a\xi)) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\psi(\xi)} \right) d\xi < \varepsilon \right\}.$$

Théorème 6.1. Soit un processus de Lévy dans R d'exposant ψ satisfaisant (6.5). Assumons en plus que 0 est régulier³ pour lui-même. Alors X possède un temps local $l(x, t)$ continu en (x, t) si et seulement si

$$\int_{0_+} \sqrt{\log \frac{1}{m(\varepsilon)}} d\varepsilon < \infty.$$

Pour d'autres approches, voir Marcus et Rosen (1992).

Dans une autre approche également, basée sur l'estimation des moments, Berman (1985) a prouvé la suffisance de quelques conditions pour la continuité double des temps locaux des processus de Markov, en termes de leurs fonctions de densité de transition. Cette méthode est appliquée aux diffusions fractionnaires. Cependant, pour les mouvement Brownien définis sur l'ensemble de Sierpinski (*Sierpinski gasket*, un ensemble fractal construit de façon similaire à la construction de l'ensemble de Cantor introduit au chapitre 2. Nous pouvons le voir, par exemple, comme ce qui reste de l'opération récurrente consistant à enlever indéfiniment de la surface d'un triangle équilatéral initial la surface du triangle semblable aux sommets centrés au milieu de chaque côté du premier), beaucoup plus pourrait être fait (voir Barlow (1998)).

Le temps local $l(x, t)$ d'un processus de Markov X est intimement lié à la structure de la fermeture de l'image $R_t = \overline{X([0, t])}$. On montre que si pour un $t > 0$ fixé, $l(x, t)$ est continu par rapport à x , alors l'ensemble ouvert $\{x : l(x, t) > 0\} \subseteq R_t$. Nombre d'auteurs ont étudié la structure de R_t pour les processus de Lévy (voir Kesten (1976), Barlow (1981) Mountfort et Port (1991)). Cependant, le problème de déterminer quand R_t n'est nulle part dense n'a pas été complètement résolu. En particulier le problème suivant de Barlow et al. (1986a) reste ouvert.

Question 6.2. Supposons $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un processus de Lévy dans R de mesure de Lévy L telle que $L(-\infty, 0) = L(0, \infty) = \infty$,

$$\int_R (|x| \wedge 1) L(dx) = \infty \quad \text{et} \quad \int_R \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 + \psi(\xi)} \right) d\xi < \infty.$$

Si presque sûrement il n'existe aucune version continue de $l(x, t)$, s'ensuit-il que l'image R_t n'est nulle part dense ?

(b) les lois du logarithme itéré et du module de continuité. Notons $l(x, t)$ le temps local du mouvement Brownien W dans R . les lois du logarithmes itéré (LLI) suivantes pour $l(0, t)$ et le temps local maximum $l^*(t) = \sup_{x \in R} l(x, t)$ de W ont été établies par Kesten (1965) :

$$(6.6) \quad \limsup_{t \rightarrow 0_+} \frac{l(0, t)}{\sqrt{t \log \log t^{-1}}} = \limsup_{t \rightarrow 0_+} \frac{l^*(t)}{\sqrt{t \log \log 1/t}} = \sqrt{2} \quad \text{p.s., et}$$

$$(6.7) \quad \liminf_{t \rightarrow 0_+} \left(\frac{\log \log t^{-1}}{t} \right)^{1/2} l^*(t) = K_4 \quad \text{p.s.,}$$

où $K_4 > 0$ est une constante. Comme application de leurs méthodes de déviation large, Donker et Varadhan (1977) ont montré la LLI suivante similairement à (6.6) pour le temps local $l(x, t)$ d'un processus de Lévy stable symétrique d'indice $\alpha \in (1, 2]$:

$$(6.8) \quad \limsup_{t \rightarrow 0_+} \frac{l(0, t)}{t^{1-1/\alpha} (\log \log t^{-1})^{1/\alpha}} = \limsup_{t \rightarrow 0_+} \frac{l^*(t)}{t^{1-1/\alpha} (\log \log 1/t)^{1/\alpha}} c(\alpha) \quad \text{p.s.,}$$

³ On dit qu'un point x est régulier pour lui-même si $\tau_x = 0$, P^x - p.s., avec $\tau_x = \inf \{t > 0 : X(t) = x\}$.

où $c(\alpha) > 0$ est une constante explicite. Marcus et Rosen (1994) ont étendu les résultats susmentionnés à tout processus de Lévy symétrique d'exposant de Lévy ψ , qui varie régulièrement, d'indice $\alpha \in (1,2]$. Voir aussi Bertoin (1995) pour une autre approche basée sur les subordinateurs.

De l'inégalité

$$t = \int l(x,t) dx \leq 2l^*(t) \sup_{0 \leq s \leq t} |X(s)|,$$

On peut voir que les résultats de la forme (6.8) sur les temps locaux sont intimement liés aux propriétés d'oscillation des trajectoires du processus X . Pour un processus de type A d'indice α , Taylor (1967) a montré que

$$(6.9) \quad \liminf_{t \rightarrow 0_+} \left(\frac{\log \log 1/t}{t} \right)^{1/\alpha} \sup_{0 \leq s \leq t} |X(s)| = K_5 \text{ p.s.}$$

Sa preuve est basée sur les estimations des probabilités $P \{ \sup_{0 \leq s \leq t} |X(s)| \leq \varepsilon \}$. Nous mentionnons qu'il existe aussi une version uniforme de (6.9) pour le mouvement Brownien (cf. Csögo et Révész (1978)) et autres processus de Lévy (cf. Hawkes (1971c)).

Lacey (1990) a considéré des estimations des déviations larges pour le temps local maximum $l^*(1)$ d'un processus de Lévy stable (strictement) X d'indice $\alpha \in (1,2]$ et a prouvé que

$$(6.10) \quad \log P \{ l^*(1) > u \} \sim -K_6 u^\alpha \text{ quand } u \rightarrow \infty,$$

où $K_6 > 0$ est une constante explicite, qui égale $c(\alpha)$ dans (6.8) quand X est symétrique. (6.10) est pareil au résultat sur $P \{ l(0,1) > u \}$, obtenu par Hawkes (1971c). Wu (1997) et Blackburn (2000) ont étendu (6.10) au processus de Lévy d'indice $\alpha \in (1,2]$ et d'exposant ψ , qui varie régulièrement au point 0.

Pour un processus de Lévy X dans R , le module de continuité du temps local $l(x,t)$ en x a été établi par Barlow (1985, 1988), et Marcus et Rosen (1992), par différentes méthodes. (Pour le temps local d'un mouvement Brownien, les résultats sont dus à McKean (1962) et Ray (1963)). Le résultat suivant pour un processus de Lévy stable est de Barlow (1988) : si X est un processus de Lévy stable dans R d'indice $\alpha > 1$, alors presque sûrement pour tout intervalle $I \subset R$ et tout $t > 0$,

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\substack{a, b \in I, |b-a| < \delta \\ 0 \leq s \leq t}} \frac{|l(b,s) - l(a,s)|}{|b-a|^{(\alpha-1)/2} \left(\log \left(\frac{1}{|b-a|} \right) \right)^{1/2}} = c_\alpha \left(\sup_{x \in I} l(x,t) \right)^{1/2},$$

où $c_\alpha > 0$ est une constante explicite dépendant de l'indice α et du paramètre β (voir (2.5)) de $X(1)$ seulement.

La liminf du logarithme itéré (6.7) pour le temps local maximum du mouvement Brownien a été étendue à un processus de Lévy stable symétrique X dans R par Griffin (1985) et à des processus de Lévy plus généraux par Wu (1992).

Il semble que peu de travail a été fait sur les temps locaux de processus de Feller associés à des opérateurs pseudo-différentiels. Il serait donc intéressant de voir jusqu'où l'on pourrait étendre les résultats susmentionnés pour ce type de processus de Feller.

6.2. Dimension fractale et des résultats sur la mesure. (a). *Résultats sur la mesure.* La dimension de Hausdorff de l'ensemble $X^{-1}(0)$ a été obtenue par Taylor (1955) pour le

mouvement Brownien dans R et par Blumenthal et Gettoor (1962) pour les processus de Lévy stables symétriques dans R d'indice $\alpha > 1$. Ils ont prouvé que

$$\dim_H X^{-1}(0) = 1 - \frac{1}{\alpha} \text{ p.s.}$$

Pour un processus de Lévy général dans R , Blumenthal et Gettoor (1964) ont obtenu des bornes inférieures pour $\dim_H X^{-1}(x)$ en termes des indices β et β'' .

Dans le cas d'un processus de Lévy X dans R d'exposant ψ , Hawkes (1974) a étudié la dimension de Hausdorff de l'ensemble $X^{-1}(0)$ directement et a prouvé la formule suivante en fonction de ψ .

$$(6.11) \quad \dim_H X^{-1}(0) = 1 - 1/b \text{ p.s.},$$

où $\frac{1}{b} = \inf \{ \gamma \leq 1 : (1 + \operatorname{Re} [\psi^\gamma]) \in L^1(R) \}$ ($L^1(R)$ étant l'ensemble des fonctions intégrables),

et l'élément inférieur (inf) de l'ensemble vide est pris comme 1 dans ce cas. Il est important de signaler que Hawkes a montré que le paramètre b est indépendant des autres indices des processus de Lévy donnés dans le paragraphe 2.1 et a obtenu quelques résultats sur la relation entre b et β, β', γ .

Les dimensions de Hausdorff et d'empilement des ensembles $X^{-1}(x)$ d'un processus de Markov tel que le mouvement Brownien défini sur des fractales ont été considérées par Liu et Xiao (1998), Bertoin (1999).

(b). *Mesures de Hausdorff et d'empilement des ensembles de niveau.* Une approche directe pour évaluer les mesures de Hausdorff et d'empilement d'un processus de Markov X est d'utiliser le temps local comme une mesure naturelle sur l'ensemble $X^{-1}(x)$. Alors LLI pour $l(x, \bullet)$ de la forme

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{l(x, t+r) - l(x, t-r)}{\varphi(r)} \leq K \text{ p.s.},$$

et le lemme 3.3. donnent une borne inférieure positive pour $\varphi - m(X^{-1}(x))$. Dans le but d'obtenir une borne supérieure, on peut utiliser une méthode de recouvrement similaire à celle discutée dans le paragraphe 5.1. voir Xiao (1997b).

Comme la mesure d'empilement de l'image d'un subordonateur quelconque a été étudiée par Fristedt et Taylor (1992), on peut évaluer la mesure d'empilement des ensembles de niveau d'un processus de Markov en utilisant (TL) et les résultats dans Fristedt et Taylor (1992). Il serait intéressant de trouver des conditions sur un processus de Lévy X qui assurent que $\varphi - p(X^{-1}(0))$ est 0, positive et finie ou ∞ , respectivement.

Question 6.3. Trouver une fonction de mesure de Hausdorff exacte pour les ensembles de niveau des processus de Feller déterminés par des opérateurs pseudo-différentiels. Etudier la mesure d'empilement de leurs ensembles de niveau.

Finalement, nous mentionnons que l'ensemble des points zéro ($X^{-1}(0)$) d'un processus de Markov est aussi lié au problème de collision des processus de Markov. Soit X_1, \dots, X_k , k processus de Markov à valeurs dans S . le problème de collision concerne les questions suivantes :

- (i) Sous quelles conditions existe-il un $t > 0$ tel que
$$X_1(t) = X_2(t) = \dots = X_k(t) ?$$
- (ii) Si les X_1, \dots, X_k entrent en collision, quelles sont les dimensions de Hausdorff et d'empilement de l'ensemble des points de collision.

$$C_k = \{x : X_1(t) = \dots = X_k(t) = x \text{ pour un } t > 0\},$$

et l'ensemble des temps de collision

$$D_k = \{t > 0 : X_1(t) = \dots = X_k(t)\} ?$$

Ces deux derniers problèmes ont été considérés par Jain et Pruitt (1969) dans le cas de deux processus de Lévy stables dans R d'indices α_1 et α_2 . Assumons que $\alpha_2 \leq \alpha_1$, par commodité. Jain et Pruitt (1969) ont montré que des collisions existent presque sûrement si $1 < \alpha_2 \leq \alpha_1 \leq 2$. Cette condition a été affaiblie par Hawkes (1971b,c) à $\alpha_1 > 1$. Ils ont obtenu les dimensions :

$$\dim_H C_2 = 1 - \frac{1}{\alpha_1}, \quad \dim_H D_2 = \alpha_2 \left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right) \text{ p.s.}$$

Ces résultats ont été généralisés aux cas des processus de Lévy dans R par Shieh (1989) et aux processus de Markov par Shieh (1995).

Le problème suivant n'a pas été résolu, même pour les processus de Lévy stables.

Question 6.4. Trouver, si elles existent, les fonctions de mesure de Hausdorff et d'empilement pour C_k et D_k .

7. Images inverses et probabilité d'entrée.

Soit $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un processus de Markov à valeurs dans un espace métrique R^d . Cette section traite de la question de déterminer quand $X^{-1}(F) \cap E \neq \emptyset$ avec une probabilité positive, où $E \subset (0, \infty)$ et $F \subset R^d$ sont des Boréliens, et de calculer des dimensions de Hausdorff et d'empilement de $X^{-1}(F) \cap E$.

7.1. Conditions pour $X^{-1}(F) \cap E \neq \emptyset$. Soit $E \subset R_+$ et $F \subset R^d$ des ensembles compacts. La question de déterminer quand $P\{X^{-1}(F) \cap E \neq \emptyset\} = 0$ est lié à l'étude des processus de Markov particulier $\{(t, X(t)), t \geq 1\}$ à valeurs dans $R_+ \times R^d$ (voir chapitre 5). Quelques conditions nécessaires et suffisantes pour $P\{X^{-1}(F) \cap E \neq \emptyset\} = 0$ ont été obtenues par Kaufman (1972) pour le mouvement Brownien, par Hawkes (1978a) pour des subordinateurs stables et par Khan (1983, 1985b) pour les processus de Lévy stables symétriques dans R^d . Les conditions sont mieux exprimées en termes de mesure de Hausdorff et de capacité sur l'espace produit $R_+ \times R^d$ muni d'une distance appropriée.

Pour tout $0 < \eta \leq 1$, nous définissons une distance sur $R_+ \times R^d$ par

$$\rho_\eta((s, x), (t, y)) = \max\{|s - t|^\eta, |x - y|\}.$$

Pour toute fonction de mesure $\varphi \in \Phi$, la mesure de Hausdorff associée à φ sur l'espace métrique $(R_+ \times R^d, \rho_\eta)$, est notée $\varphi - m_\eta$. La dimension de Hausdorff correspondante est notée \dim_η .

Pour des idées de démonstration du théorème suivant, voir Testard (1987) et Xiao (1999) ;

Théorème 7.1. Soit $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un processus de Lévy strictement stable dans R^d d'indice α . Soit $E \subset (0, \infty)$ et $F \subset R^d$ des ensembles compacts. Soit $\eta = \alpha$ si $0 < \alpha \leq 1$, et $\eta = \alpha^{-1}$ si $1 < \alpha \leq 2$.

- (i) Si $s^d - m_\eta(E \times F) = 0$, alors $P\{X^{-1}(F) \cap E \neq \emptyset\} = 0$;
- (ii) Si $Cap_h(E \times F) > 0$, alors $P\{X^{-1}(F) \cap E \neq \emptyset\} > 0$;

où
$$h(s, t; x, y) = [\rho_\eta((s, x), (t, y))]^{-d}.$$

Un résultat de Kaufman et Wu (1982), dit que si X est un mouvement Brownien dans R , $E \subset (0, \infty)$ est un compact et que $F = \{x_0\}$, alors

$$P\{X^{-1}(F) \cap E \neq \emptyset\} > 0 \text{ si et seulement si } Cap_h(E \times F) > 0.$$

Ceci nous donne l'idée de croire que la condition (ii) peut être effectivement une condition nécessaire et suffisante.

7.2. Résultat sur la dimension de $X^{-1}(F) \cap E$. Nous donnons ci-après un théorème prouvé par Hawkes (1971a) pour les processus de Lévy stables isotropiques. Pour une preuve, voir théorème 1 de Kanda (1976) (voir aussi Bertoin (1999)).

Théorème 7.2. *Soit X un processus de Lévy strictement stable dans R^d d'indice α : soit Γ un support de la distribution de $X(1)$. Si $\alpha \geq d$, alors pour tout Borélien $F \subset \Gamma$,*

$$(7.1) \quad \dim_H X^{-1}(F) = \frac{\alpha + \dim_H F - d}{\alpha} \text{ p.s ;}$$

et si $\alpha < d$, alors

$$\|\dim_H X^{-1}(F)\|_\infty = \frac{\alpha + \dim_H F - d}{\alpha},$$

où $\|\bullet\|_\infty$ est la L^∞ - norme dans l'espace correspondant.

Le problème de trouver la dimension d'empilement de $X^{-1}(F)$, quand X est un processus de Lévy strictement stable dans R^d , n'a pas encore été complètement résolu. Quand $\alpha > d = 1$, il est possible de prouver un résultat analogue à (7.1), dans le sens uniforme, voir section 8. Cependant, quand $\alpha < d$, on suspecte qu'un résultat analogue à (7.2) ne peut pas être vérifié en général et que $\dim_p F$ seule ne suffit pas à déterminer $\dim_p X^{-1}(F)$. Il serait intéressant d'étudier la question.

Peu de travail portant sur $\dim_H X^{-1}(F)$ a été fait pour un processus de Lévy général ou autre processus de Markov. La question suivante semble intéressante.

Question 7.4. Soit X un processus de Lévy dans R^d d'exposant ψ . Est-il possible de donner une formule pour $\dim_H X^{-1}(F)$ en termes de ψ et de $\dim_H F$?

Maintenant, nous retournons à la dimension de Hausdorff de l'intersection $X^{-1}(F) \cap E$. Quand $X = \{X(t), t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien dans R , les dimensions de Hausdorff de $X^{-1}(F) \cap E$ et $X(E) \cap F$ ont été considérées par Kaufman (1972). Hawkes (1978a) généralise des résultats de Kaufman à des subordinateurs stables. Leurs résultats peuvent être énoncés comme suit

$$\|\dim_H X^{-1}(F) \cap E\|_\infty = \dim_\alpha(E \times F) - \frac{1}{\alpha},$$

où $\alpha = 2$ si X est un mouvement Brownien dans R et par convention, le fait que la dimension soit négative signifie que l'ensemble $X^{-1}(F) \cap E$ est vide. Ce résultat peut être prouvé être vrai pour les processus de Lévy strictement stables. Cependant, la dimension de $X^{-1}(F) \cap E$ est inconnue même pour le mouvement Brownien.

Une autre question liée est de trouver la dimension de Hausdorff de l'ensemble le plus petit $F \subset R^d \setminus \{0\}$ qui rencontre le mouvement Brownien ou un processus de Lévy stable $X =$

$\{X(t), t \geq 0\}$ dans R^d , quand t est restreint au Borélien $E \subset R_+$. Pour être plus précis, étant donné $E \subset R_+$, déterminer l'élément inférieur :

$$\inf \{ \dim_H F : F \in B(R^d), P(X^{-1}(F) \cap E) > 0 \}.$$

Cette question a été posée par Y. Peres en 1996 en fonction de la dimension de Hausdorff seulement. Cependant, la dimension d'empilement est utile pour la résoudre.

Xiao (1999) a résolu ce problème et autres qui lui sont relatifs pour un mouvement Brownien dans R^d et a prouvé que pour tout compact $E \subset (0, \infty)$,

$$\inf \{ \dim_H F : F \in B(R^d), P(X^{-1}(F) \cap E) = \emptyset \} = d - 2 \dim_p E.$$

La mesure de Hausdorff exacte de $X^{-1}(F)$ semble difficile à étudier en général. Il est raisonnable de considérer en premier la cas où X est un mouvement Brownien et que $F \subset R^d$ est un ensemble auto-similaire. D'autre part, il est possible d'évaluer la capacité de $X^{-1}(F)$ en termes de X et de la capacité de F . le problème a été considéré par Hawkes (1998) pour un processus stable symétrique dans R d'indice $\alpha \in (0, 2]$ et par Khoshnevisan et Xiao (2003b) pour un processus de Lévy plus général.

8. Dimension uniforme et des résultats de mesure.

Nous notons que les événements exceptionnels de probabilité nulle dans (4.13) et (7.1) dépendant de E et $F \subset R^d$, respectivement. Dans bien des applications, nous avons un ensemble aléatoire $E(\omega)$ ou $F(\omega) \subset R^d$ et voulons savoir les dimensions fractales et les mesures fractales de $X(E(\omega), \omega)$ et $X^{-1}(F(\omega), \omega)$. Par exemple, pour un Borélien quelconque $F \subset R^d$, nous pouvons écrire l'intersection $X(R_+) \cap F$ comme $X(X^{-1}(F))$, l'ensemble C_k des points de collision comme $X(D_k)$ et l'ensemble M_k des points dits k -multiples de X comme $X(L'_k)$, où L'_k est la projection de L_k sur R_+ , voir le paragraphe 9.1. Pour de tels problèmes, les résultats de la forme (4.13) et (7.1) ne donnent aucune information.

8.1. Résultats de dimension uniforme pour l'image. Kaufman (1968) a été le premier à montrer que si W est un mouvement Brownien dans le plan, alors

$$(8.1) \quad P \{ \dim_H W(E) = 2 \dim_H E \text{ pour tout Borélien } E \subset R_+ \} = 1.$$

Puisque l'événement exceptionnel de probabilité nulle dans (8.1) ne dépend pas de E , on s'y réfère comme étant un *résultat de dimension uniforme*. Pour un mouvement Brownien dans R , (8.1) n'est pas vérifié. Ceci peut être vu pour $E = W^{-1}(0)$. Kaufman (1989) a montré qu'avec probabilité 1,

$$\dim W(E+t) = \min \{1, 2 \dim_H E\},$$

pour tout Borélien $E \subset R_+$ et presque tout $t > 0$. Ici l'événement de probabilité nulle ne dépend pas de t ni de E .

Nombre d'auteurs ont travaillé sur le problème d'établir des résultats de dimension uniforme pour l'image des processus de Lévy stables et autres processus de Markov. Voir l'article de Taylor (1986a) pour plus d'information. Nous mentionnons juste que Hawkes et Pruitt (1974) ont prouvé que pour un processus de Lévy strictement stable X dans R^d d'indice $\alpha \leq d$, on a

$$(8.2) \quad P \{ \dim_H X(E) = \alpha \dim_H E \text{ pour tout Borélien } E \subset R_+ \} = 1.$$

Ils ont aussi montré que pour un processus de Lévy quelconque X dans R^d d'indice supérieur β ,

$$P \{ \dim_H X(E) \leq \beta \dim_H E \text{ pour tout Borélien } E \subset R_+ \} = 1,$$

et si en outre, X est un subordonateur, alors

$$(8.3) \quad P \{ \sigma \dim_H E \leq \dim_H X(E) \leq \beta \dim_H E \text{ pour tout Borélien } E \subset R_+ \} = 1.$$

Pour un processus de Lévy symétrique X dans R^d , une borne inférieure uniforme pour $\dim_H X(E)$ en termes des indices β'' , γ et γ' a été donnée par Hendricks (1983) :

$$P \{ \dim_H X(E) \geq \beta''(d - \gamma')(d - \gamma)^{-1} \dim_H E \text{ pour tout Borélien } E \subset R_+ \} = 1.$$

Il s'ensuit que pour un tel processus avec $\gamma = \gamma'$, la borne inférieure uniforme pour $\dim_H X(E)$ est $\beta'' \dim_H E$. En utilisant les processus de Lévy stables d'accroissements stables, on peut montrer que les deux bornes inférieure et supérieure peuvent être déduites, voir Hendricks (1983).

Il est intéressant, étant donné un processus de Lévy X , de déterminer s'il est possible de trouver une fonction f et une large classe C de Boréliens $E \subset R_+$ telles que presque sûrement

$$(8.4) \quad \dim_H X(E) = f(\dim_H E) \text{ pour tout Borélien } E \in C.$$

Hawkes et Pruitt (1974) ont étudié cette question pour des subordonateurs et ont montré que pour tout subordonateur X d'indice σ ,

$$(8.5) \quad P \{ \dim_H X(E) = \sigma \dim_H E \text{ pour tout Borélien } E \in C \} = 1,$$

où $C = \{ E \subset R_+ : \dim_H E = \dim_p E \}$ (leur définition de C est différente. On peut toutefois montrer en regardant Talagrand et Xiao (1996), que les deux définitions sont équivalentes). Il serait intéressant de trouver la classe la plus large C pour laquelle (8.5) est vérifié.

Clairement, il est utile d'étendre les résultats susdits sur les dimensions de Hausdorff et d'empilement uniformes à des processus de Markov plus généraux. Si X satisfait une condition de Hölder uniforme, alors des bornes supérieures pour $\dim_H X(E)$ et $\dim_p X(E)$ peuvent être obtenues en utilisant le lemme 3.2. Pour un processus de Markov général, nous énonçons les deux lemmes suivants qui peuvent être utilisés pour trouver des bornes inférieure et supérieure uniforme pour $\dim_H X(E)$ et $\dim_p X(E)$ (voir Pruitt (1975)).

Nous avons besoin de quelques notations. Soit $\{ t_n, n \geq 1 \}$ une suite de nombres réels positifs tels que $\sum_{n=1}^{\infty} t_n^p < \infty$ pour un $p > 0$, et soit C_n une classe de N_n intervalles dans R_+ de longueur t_n avec $\log N_n = O(1)|\log t_n|$ (i.e., $\log N_n$ est dominé par $\log t_n$; notation de Landau). Par exemple, nous pouvons prendre $t_n = 2^{-n}$ et C_n la classe des intervalles dyadiques d'ordre n dans, disons, $[0,1]$.

Lemme 8.1. [Pour prouver la borne supérieure]

Soit $X = \{ X(t), t \geq 0, P^x \}$ un processus de Markov fort dans R^d (ou S). S'il existe une suite (θ_n) de nombres positifs telle que pour un certain $\delta > 0$,

$$(8.6) \quad P^x \{ \max_{0 \leq s \leq t_n} |X(s) - x| \geq \theta_n \} \leq K_7 t_n^\delta, \quad \forall x \in R^d,$$

où K_7 est une constante positive, alors il existe un entier positif K_8 dépendant de p et δ seulement, tel qu'avec probabilité 1, pour de grande valeurs de n , $X(I)$ peut être recouvert par K_8 boules de rayon θ_n pour tout $I \in C_n$.

Pour des résultats utilisant le lemme 8.1. sur différents types de processus stochastiques (voir KoloKotsov) (2002) et Chen et Kumagai (2002)).

Afin d'obtenir des bornes inférieures uniformes pour $\dim_H X(E)$ et $\dim_p X(E)$, nous pouvons utiliser le lemme suivant.

Lemme 8.2. [Pour prouver la borne inférieure]

Soit $X = \{X(t), t \geq 0, P^x\}$ un processus de Markov fort dans R^d (ou S). Soit $\{r_n, n \geq 1\}$ une suite de nombres positifs avec $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^p < \infty$ pour un $p > 0$, et soit D_n une classe de N_n boules de diamètre r_n dans R^d avec $\log N_n = O(1)|\log r_n|$. S'il existe une suite (t_n) de nombres positifs et des constantes K_9 et $\delta > 0$ tels que

$$(8.7) \quad P^x \left\{ \inf_{t_n \leq s < \infty} |X(s) - x| \geq r_n \right\} \leq K_9 r_n^\delta, \quad \forall x \in R^d,$$

Alors il existe une constante K_{10} , dépendant de p et δ seulement telle que pour de assez grande valeurs de n , $X^{-1}(B)$ peut être recouvert par au plus K_{10} intervalles de longueur r_n pour tout $B \in D_n$.

8.2. Ensembles de niveau et image inverse. Des résultats sur les dimensions de Hausdorff et d'empilement uniformes pour les ensembles de niveau de processus de Lévy stables dans R d'indice $\alpha \in (1, 2]$ découlent directement des résultats de dimension uniforme pour les images des subordinateurs stables. En fait, pour les ensembles de niveau $(x) X^{-1}(x)$ d'une classe de processus de Lévy, des résultats de dimension uniforme (*i.e.*, l'évènement de probabilité nulle ne dépend pas de x) sur la mesure de Hausdorff exacte de $X^{-1}(x)$ ont été déterminés.

Quand X est un mouvement Brownien dans R , Perkin (1981) a prouvé qu'avec probabilité 1,

$$\varphi_5 - m(X^{-1}(x)) = l(x, t) \quad \forall (t, x) \in R_+ \times R,$$

où $\varphi_5(r) = (2r \log \log 1/r)^{1/2}$. Le résultat a été étendu par Barlow, Perkins et Taylor (1986b) à une classe de processus de Lévy d'exposants qui varient régulièrement à ∞ . Ceci inclut les processus de Lévy strictement stables d'indice $\alpha > 1$, des processus de Lévy d'accroissements Browniens et des processus de Lévy qui sont proches des processus de Cauchy.

Comme pour l'image inverse $X^{-1}(F)$ d'un processus de Markov X , un résultat de dimension uniforme a été seulement établi dans le cas du Mouvement Brownien. Kaufman (1985) a montré qu'avec probabilité 1,

$$\dim_H W^{-1}(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \dim_H F \quad \text{pour tout Borélien } F \subset R.$$

Pour un processus de Lévy strictement stable X dans R d'indice $\alpha \in (1, 2)$, le résultat analogue pour $X^{-1}(F)$ devrait être aussi vrai. En fait en vertu des travaux de Kaufman avec les conditions de Hölder pour le temps local de X établi par Donsker et Varadhan (1977), on peut montrer que

$$\dim_H X^{-1}(F) \geq 1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \dim_H F \quad \text{pour tout Borélien } F \subset R.$$

9. Points multiples et temps locaux d'auto-intersection.

Depuis les années 1980, un grand progrès a été fait dans l'étude des points multiples. Divers problèmes et conjectures dans Taylor (1986a) relatifs aux processus de Lévy ont été résolus par Le Gall (1987a,b), Le Gall et al. (1989), Evans (1987a), Fitzsimons et Salisbury (1989). Dans cette section, nous discutons quelques-uns de leurs résultats.

9.1. Existence des points multiples. Soit $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un processus stochastique dans espace métrique (S, ρ) . Un point $x \in S$ est dit un *point k -multiple* de X s'il existe k instants distincts $t_1, \dots, t_k \in R_+$ tels que

$$X(t_1) = \dots = X(t_k) = x.$$

Si $k = 2$ (ou 3), alors x est aussi dit un point *double* (ou *triple*).

L'ensemble des points k -multiples est noté par M_k (ou $M_k^{(d)}$ si $S = R^d$) et l'ensemble des temps k -multiples est noté par

$$L_k = \{(t_1, \dots, t_k) \in R_+^k, t_1, \dots, t_k \text{ sont distincts et } X(t_1) = \dots = X(t_k) = x\}.$$

Quand $S = R^d$, nous pouvons également écrire $L_k^{(d)}$ pour L_k .

Etant donné un processus de Markov X , il existe plusieurs façons d'étudier l'existence des points k -multiples de X , nous en citons quelques-unes ci-après.

(a) La théorie du potentiel pour X (voir Taylor (1986) et les références y figurant).

(b) Les temps locaux d'auto-intersection (Geman et al. (1984), Dynkin (1985), Le Gall, Rosen et Snieh (1989), Rogers (1989), Snieh (1992), etc.). L'idée est que les intersections des processus de Markov peuvent être formulées comme le problème de l'ensemble de niveau (0) d'un processus (fonction) aléatoire, disons, Y , lequel peut être effectivement étudié par des méthodes des temps locaux. Les temps locaux de Y sont appelés les *temps locaux d'auto-intersection de X* . L'intérêt particulier est de les utiliser pour définir une mesure aléatoire sur l'ensemble L_k des temps multiples. En utilisant cette approche (en citant Y.Xiao), on peut outre que de prouver l'existence des points multiples, montrer des résultats sur les dimensions de Hausdorff et d'empilement de L_k et M_k .

(c) Théorie du potentiel des processus multiparamétriques (Evan (1987a,b), Fitzsimmons et Salisbury (1989), Khoshnevisan et Xiao (2002).

Pour connaître d'autres méthodes voir Peres (1996a,1999) et Le Gall (1986b,1987a,b).

Le Gall, Rosen et Shieh (1989) donnent une condition suffisante pour l'existence des points k -multiples d'un processus de Lévy en construisant une mesure aléatoire sur L_k . Ils supposent l'existence des fonctions de densité de transition.

Pour énoncer quelques-uns des résultats des auteurs susnommés, nous avons besoin de quelques notations. Soit X un processus de Lévy dans R^d de fonction de transition $P(t, x, A) : R_+ \times R^d \times B(R^d) \rightarrow [0,1]$. Pour tous $q > 0, z \in R^d$ et $B \in B(R^d)$, posons

$$U^q(z, B) = \int_0^\infty e^{-qs} P(s, z, B) ds.$$

Cette dernière fonction est dite *résolvante* de la fonction de transition $P(t, x, A)$. Sous la condition que X possède un opérateur de résolvante de Feller fort (comprendre de cette appellation la même chose que pour l'opérateur de transition introduit au premier chapitre), il existe pour $q > 0$ une fonction unique mesurable u^q telle que

$$(i) \quad U^q(z, B) = \int_B u^q(y - z) dy \text{ pour tout } B \in B(R^d);$$

(ii) Pour tout y , la fonction $z \mapsto u^q(y - z)$ est q -excessive.

(iii) $u^q - u^r = (r - q)u^r * u^q$ (produit de convolution).

Voir Bertoin (1996). La famille de fonctions $\{u^q, q > 0\}$ est appelée la famille des *densités de résolvante canonique*.

Note : Nous disons en (ii) " q -excessive" en ce sens qu'en général la fonction mesurable f vérifie :

(i) f est bornée ;

(ii) f satisfait : $0 \leq e^{-\lambda t} T_t f(x) \leq f(x), \forall t > 0, \forall x \in R^d$;

(iii) $(e^{-\lambda t} T_t f(x) - f(x)) \rightarrow 0$ quand $t \downarrow 0$.

On dit " uniformément q – excessive " si à la place de (iii) nous avons

(iii') $\|e^{-\lambda t} T_t f - f\| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$. (nous considérons toujours la norme de la convergence uniforme).

Théorème 9.1. Soit X un processus de Lévy dans R^d de densités de résolvante canonique $\{u^q, q > 0\}$ et $u^1(0) > 0$. Alors, pour tout entier $k \geq 2$, les trajectoires de X possèdent des points k – multiples presque sûrement si et seulement si

$$\int_{|x| < 1} [u^1(x)]^k dx < \infty.$$

Rogers (1989) a étendu la partie de suffisance des conditions du théorème 9.1. à certains processus de Markov sur un espace métrique complet. Ses résultats peuvent être appliqués aux diffusions fractionnaires (cf. Barlow (1998)). Il n'est pas établi si sa condition est aussi nécessaire pour l'existence des points k – multiples dans ce résultat plus général.

Il existe par ailleurs deux autres méthodes pour étudier l'existence des points k – multiples d'un processus de Markov. La première consiste à restreindre le temps t à certains ensembles (fractals). Kahan (1983) considère l'intersection de $X(E)$ et $X(F)$, où $E, F \subset R_+ \setminus \{0\}$ sont deux ensembles compacts disjoints et X est un processus de Lévy stable symétrique. Il donne des conditions nécessaires et suffisantes pour $P\{X(E) \cap X(F) \neq \emptyset\} > 0$. Une condition nécessaire et suffisante en termes de la capacité de $E \times F$ a été récemment obtenue par Khoshnevisan et Xiao (2003b).

Nous mentionnons aussi qu'en utilisant les temps locaux, Shieh (1992), prouve la suffisance de conditions pour $X(E)$ de contenir des points k – multiples, où X peut être un processus de Lévy dans R^d ou autre processus stochastique.

La seconde consiste à se demander quel ensemble $\Lambda \subset R^d$ peut contenir des points k – multiples de X . autrement dit, quand peut-on avoir $P\{\Lambda \cap M_k = \emptyset\} > 0$?

Quand X est un mouvement Brownien dans R^d ($d = 2, 3$), cette question a été considérée par Evans (1987b) et Tongring (1988), qui ont prouvé la suffisance de certaines conditions pour $P\{\Lambda \cap M_k = \emptyset\} > 0$. Fitzsimmons et Salisbury (1989) ont prouvé que les conditions suffisantes de Evans (1987b) et Tongring (1988) sont aussi nécessaires pour le mouvement Brownien dans le plan. Peres (1999) a prouvé le résultat plus général suivant.

Théorème 9.2. Supposons que $\{A_i\}_{i=1}^k$ sont des ensembles fermés aléatoires de $[0,1]^d$ et qu'il existe une constante $1 \leq K < \infty$ telle que

$$K^{-1} Cap_{g_i}(\Lambda) \leq P\{A_i \cap \Lambda \neq \emptyset\} \leq K Cap_{g_i}(\Lambda),$$

pour tout ensemble fermé $\Lambda \subset [0,1]^d$ et certaines fonctions non croissantes et non négatives g_i ($i = 1, \dots, k$). Alors,

$$P\{A_1 \cap \dots \cap A_k \cap \Lambda \neq \emptyset\} > 0 \Leftrightarrow Cap_{g_1, \dots, g_k}(g) > 0.$$

Pour des résultats similaires ; voir Khoshnevisan et Xiao (2002).

9.2. Dimension de Hausdorff et mesure de Hausdorff de L_k et M_k . Les dimensions de Hausdorff de l'ensemble M_k des points k – multiples d'un mouvement Brownien dans R^d ont été obtenues par Taylor (1966) pour $d = 2$ (et $k \geq 2$) et Fristedt (1967) pour $d = 3$ (et $k = 2$). Ces résultats peuvent aussi être prouvés en trouvant $\dim_H L'_k$ en premier (rappelons que L'_k est la projection de L_k sur R_+) et ensuite en utilisant le résultat de dimension de

Hausdorff uniforme (8.2). Si X est un mouvement Brownien dans R^2 ou un processus de Cauchy symétrique dans R , il existe des points de multiplicité \mathfrak{c} , où \mathfrak{c} représente la puissance du continu. Le Gall (1986a, 1987b) a prouvé que pour tout ensemble discret $E \subset R_+$, il existe presque sûrement un $z \in R^2$ tel que $W^{-1}(z)$ possède la même structure d'ordre que E . En particulier, il y a des points de multiplicité \aleph_0 (cardinal des nombres entiers positifs) pour X . quant à la taille de $W^{-1}(z)$, Taylor (1986a) a posé la question de déterminer une fonction de mesure $\varphi \in \Phi$ telle que presque sûrement $\varphi - m(W^{-1}(z)) = 0$ pour tout $z \in R^2$. Ce problème n'a pas encore été résolu. Taylor (1986a) a montré que les résultats dans Perkins et Taylor (1987) impliquent que si $b > 2$, alors presque sûrement $(\log 1/r)^{-b} - m(W^{-1}(z)) = 0$ pour tout $z \in R^2$, il conjectura que la valeur critique pour b est 1. Cela dit, la fonction $\varphi_b(r) = (\log 1/r)^{-b}$ satisfait la condition plus haut pour $b > 1$, mais pas pour $0 < b < 1$.

La dimension de Hausdorff de M_k a été étudiée par Hawkes (1978c) pour un processus de Lévy isotropique possédant un fonction de densité de transition, et par Henricks (1974) et Shieh (1998) pour une classe spéciale de processus de Lévy stables associés à des opérateurs. Différents travaux étaient faits sur le calcul de dimensions de Hausdorff et d'empilement pour M_k , toutefois le problème général reste ouvert. Ainsi, la question suivante est intéressante :

Question 9.3. Soit X un processus de Lévy dans R^d . Trouver une formule générale pour $\dim_H M_k$ et pour $\dim_p M_k$.

Maintenant, nous retournons au problème de trouver la fonction de mesure de Hausdorff exacte pour M_k . Pour un mouvement Brownien $W = \{W(t), t \geq 0\}$, le problème a été complètement résolu par Le Gall (1986b, 1987a, 1989). Pour énoncer ses résultats dans Le Gall (1989), soit

$$h_k(r) = r^2 \left(\log \frac{1}{r} \log \log \frac{1}{r} \right)^k, \quad k \geq 2, \text{ et}$$

$$\tilde{h}_2(r) = r \left(\log \log \frac{1}{r} \right)^2.$$

Soit $l_k^{(d)}(\bullet)$ la mesure image du temps local d'auto-intersection $\alpha_k^{(d)}$ d'ordre k de W (notons que $\alpha_k^{(d)}$ est une mesure aléatoire sur L_k) par l'application $(t_1, \dots, t_k) \rightarrow W(t_1)$. Ceci est une mesure aléatoire portée par $M_k^{(d)}$ et elle est dite la *projection* du temps local d'auto-intersection.

Théorème 9.4. Soit $W = \{W(t), t \geq 0\}$ un mouvement Brownien dans R^d ,

(i) Si $d = 2$, alors pour tout entier $k \geq 2$, il existe une constante positive c_k telle que p.s.,

$$h_k - m(F \cap M_k^{(2)}) = c_k l_k^{(2)}(F) \text{ pour tout } F \in B(R^2).$$

(ii) Si $d = 3$, alors il existe une constante K_{11} positive telle que p.s.,

$$\tilde{h}_2 - m(F \cap M_2^{(3)}) = K_{11} l_2^{(3)}(F) \text{ pour tout } F \in B(R^3).$$

Des résultats pareils sur la mesure de Hausdorff de M_k pour des processus de Lévy plus généraux ont été aussi obtenus par Le Gall (1987b). Son approche consiste en deux parties : dans la première partie, il considère l'ensemble N_k des points d'intersection de X_1, \dots, X_k ,

lesquels sont des copies indépendantes de X , et construit directement une mesure aléatoire μ_k sur N_k par :

$$\mu_k(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [C(\varepsilon)]^{-k} \lambda_d(S_1(\varepsilon) \cap \dots \cap S_k(\varepsilon) \cap A),$$

où $C(\varepsilon)$ est la capacité de la boule $B(0, \varepsilon)$ et $S_i(\varepsilon)$ est la ε -saucisse de X_i définie par

$$S_i(\varepsilon) = \bigcup_{s \in R} (X_i(s) + B(0, \varepsilon)).$$

Ensuite il établit des bornes sur les moments de $\mu_k(A)$ et les applique pour déduire des bornes supérieures par la mesure de Hausdorff de N_k . Plus précisément, il a trouvé des fonctions de mesure φ^* et ψ^* telles que

$$\begin{aligned} \varphi^* - m(N_k \cap I) &< \infty \text{ pour tout compact } I \subset R^d, \text{ et} \\ \psi^* - m(N_k \cap A) &\geq K\mu_k(A) \text{ pour tout Borélien } A \subset R^d, \end{aligned}$$

où $K > 0$ est constante dépendant de d, k et la loi de X seulement. La seconde partie de son argumentation se résume par : puisque M_k peut être identifié à l'ensemble des points d'intersection des copies indépendantes X_1, \dots, X_k de X de points de départ différents. Le résultat sur M_k en découle. Cependant, il n'est pas connu quand $\varphi^* \approx \psi^*$. Ainsi aucune fonction de mesure de Hausdorff exacte pour M_k n'a été déjà déterminée.

La dimension de Hausdorff d'ensemble $L_k^{(d)}$ des points multiples pour un mouvement Brownien W dans R^d ($d = 2, 3$) a été obtenue par Rosen (1983) comme suit :

$$(9.1) \quad \dim_H L_2^{(3)} = \frac{1}{2} \text{ et } \dim_H L_k^{(2)} = 1 \text{ pour tout } k \geq 2.$$

Il a aussi conjecturé qu'une fonction de mesure de Hausdorff exacte pour $L_k^{(d)}$ est

$$\varphi_k^{(d)}(r) = r^{2-d/2} (\log \log \frac{1}{r})^{d(k-1)/2}.$$

Zhou (1994) a vérifié cette conjecture pour $d = 3$; i.e., une fonction de mesure de Hausdorff exacte pour $L_2^{(3)}$ est

$$\varphi_2^{(3)}(r) = r^{1/2} (\log \log \frac{1}{r})^{3/2}.$$

Pour $d = 2$, le problème analogue reste ouvert.

En général, la dimension de Hausdorff de L_k n'est pas connue pour les processus de Lévy. Cependant, si X est un processus de Lévy symétrique dans $L^1(R^d)$, alors $\dim_H L_k$ peut être déduite des résultats de Khoshnevisan et Xiao (2002) :

$$\dim_H L_k = \sup \{ b > 0 : \int_{[0,1]^k} \frac{1}{|s|^b} \varphi(s) ds < \infty \},$$

où φ est une fonction de mesure sur R^k définie par

$$\varphi(s) = (2\pi)^{-d} \int_{R^{(k-1)d}} \exp(-\sum_{j=1}^k |s_j| \psi(\xi_j - \xi_{j-1})) \cdot d\xi,$$

Pour $s = (s_1, \dots, s_k) \in R^d$. En particulier, si X est un processus de Lévy stable symétrique dans R^d d'indice $\alpha \in (0, 2]$ et tel que $\alpha k > (k-1)d$ (i.e., $L_k \neq \emptyset$), alors

$$\dim_H L_k = k - \frac{(k-1)d}{\alpha}.$$

Ceci généralise le résultat de Rosen (9.2).

Puisque le problème 5.4. n'a pas été encore résolu, il pourrait être plus facile de considérer le problème moins général suivant.

Question 9.5. Soit un processus de Lévy strictement stable dans R^d ou une diffusion fractionnaire. Trouver des fonctions de mesure de Hausdorff h et φ telles que

$$0 < h - m(M_k) < \infty \text{ et } 0 < \varphi - m(L_k) < \infty.$$

Relativement à ce problème, Le Gall (1987b) a conjecturé que si X est un processus de Lévy stable symétrique dans R^d d'indice α , alors une fonction de mesure de Hausdorff pour M_k est

$$h(r) = r^a \left(\log \log \frac{1}{r}\right)^k,$$

si $\alpha < d$ et $a = k\alpha - (k-1)d > 0$, et pour $\alpha = d = 1$,

$$h(r) = r \left(\log \frac{1}{r} \log \log \log \frac{1}{r}\right)^k.$$

Finalement, nous considérons la mesure d'empilement exacte de M_k . Le Gall (1987b) prouve que, si X est un mouvement Brownien dans le plan, alors pour tout entier $k \geq 2$, $M_k^{(2)}$ ne possède pas de fonction de mesure d'empilement exacte et il donne un test intégral pour $\varphi - p(M_k^{(2)}) = 0$ ou ∞ . Plus précisément, nous avons le théorème 5.1 de Le Gall (1987b).

Théorème 9.6. *Supposons que $f : (0, \infty) \rightarrow R_+$ est une fonction décroissante telle que la fonction $r \mapsto r^k f(r)$ est croissante pour des valeurs assez grandes de r . Soit*

$$\varphi(r) = r^2 \left(\log \frac{1}{r}\right)^k f\left(\log \frac{1}{r}\right).$$

Alors

$$\varphi - p(M_k^{(2)}) = \begin{cases} 0 \\ \text{selon que } \sum_{n=1}^{\infty} f(2^n) \\ \infty \end{cases} \begin{cases} < 0 \\ \\ = \infty, \end{cases}$$

Pour un mouvement Brownien dans R^3 , Le Gall (1987b) a seulement obtenu le résultat partiel suivant sur la mesure d'empilement de $M_2^{(3)}$:

Pour $\beta > 0$, soit

$$\varphi_\beta(r) = r \left(\log \frac{1}{r}\right)^{-\beta},$$

alors (i) il existe une constante $\beta > 0$ telle que $\varphi_\beta - p(M_2^{(3)}) = \infty$ p.s., et (ii) $\varphi_\beta - p(M_2^{(3)}) = 0$ p.s, si $\beta > 1$.

Le problème de trouver les fonctions de mesure d'empilement pour $M_2^{(3)}$ et $L_k^{(d)}$ n'a toujours pas été résolu. Il est possible en citant Y.Xiao que pour le cas du mouvement Brownien, $M_2^{(3)}$ possède une fonction de mesure d'empilement exacte, contrairement à $L_k^{(d)}$ ($d = 2$ et 3).

Remarque : Nous signalons que nous avons à regret et pour garder un volume raisonnable à ce mémoire, omis de parler de résultats portant sur les *densités moyennes et les distributions de mesure tangente* et sur l'analyse multifractales des processus de Markov. Toutefois, nous donnons une liste de références exhaustive à la fin du mémoire dans laquelle, nous pouvons toujours trouvé les titres des livres et articles sur le domaine, qui pourraient nous intéresser.

Chapitre 4. Calcul Stochastique

Intégrales et Equations Différentielles Stochastiques

I. Construction de l'intégrale de Itô

Nous obtenons souvent en acceptant le caractère stochastique de quelques coefficients d'une équation différentielle, des modèles mathématiques plus réalistes de la situation. Prenons à titre d'exemple le cas suivant : considérons le modèle de croissance de population simple

$$\frac{dN}{dt} = a(t)N(t), \quad N(0) = N_0 \text{ (constante)}$$

où $N(t)$ est de la population au temps t , et $a(t)$ est le taux de croissance relatif à l'instant t . il se peut dans bien des cas que $a(t)$ ne soit pas complètement connu mais est sujet à des effets environnementaux aléatoires si bien que nous avons

$$a(t) = r(t) + \text{"bruit"}$$

où nous ne savons du *bruit* que sa distribution de probabilité. La fonction $r(t)$ est considérée comme étant certaine (non aléatoire).

De façon générale, les équations différentielles dont certains coefficients peuvent être considérés comme stochastiques en raison des effets environnementaux aléatoires, sont dites *équations différentielles stochastiques* (EDS), et ce chapitre est voué à être une présentation sommaire et introductive des méthodes probabilistes de résolution de ce type d'équations. Nous pouvons dire par conséquent qu'une solution d'une EDS doit entraîner une certaine incertitude en ce sens que nous pouvons seulement espérer dire quelque chose sur les distributions de ces solutions.

1. Mouvement Brownien multivariable (à valeurs dans R^n)

Considérons le système projectif de mesures de probabilité $\nu_{t_1, t_2, \dots, t_k}$ sur R^{nk} définies par

$$(1.1) \quad \nu_{t_1, t_2, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = \int_{F_1 \times \dots \times F_k} p(t_1, x, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) dx_1 \dots dx_k$$

$$\text{où } p(t, x, y) = (2\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right) \text{ pour } x \in R^n \text{ fixé, } y \in R^n, t > 0 \text{ et } 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k.$$

Nous utilisons $dy = dy_1 \dots dy_k$ pour la mesure de Lebesgue et la convention que $p(0, x, y) = \delta_x(y)$, la masse unité ponctuelle (ou mesure de Dirac) au point x .

Nous affirmons par le théorème ô combien connu d'extension de *Kolmogorov* qu'il existe un espace de probabilité (Ω, F, P^x) et un processus stochastique $B = (B_t)_{t \geq 0}$ sur Ω tels que les distributions finies de B sont données par (1.1)

$$(1.2) \quad P^x(B_{t_1} \in F_1, \dots, B_{t_k} \in F_k) = \int_{F_1 \times \dots \times F_k} p(t_1, x, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) dx_1 \dots dx_k$$

Définition 1.2. Un tel processus est appelé (une version de) mouvement Brownien multi-varié de point de départ x . (notez que $P^x(B_0 = x) = 1$).

Nous pouvons dire de façon imagée que les propriétés du mouvement Brownien unidimensionnel données précédemment restent vraies dans le cas présent. Notamment, les trajectoires de B sont continues par le théorème de *Kolmogorov* suivant.

Théorème 1.4. *Théorème de continuité de Kolmogorov*

Supposons que le processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ satisfait la condition suivante : pour tout $T > 0$ (réel), il existe des constantes positives α, β, D telles que

$$E(|X_t - X_s|^\alpha) \leq D \cdot |t - s|^{1+\beta}; 0 \leq s, t \leq T$$

Alors il existe une version continue de X . Nous rappelons que deux processus stochastiques sont dits versions l'un de l'autre si

$$P(X_t = Y_t) = 1 \quad \forall t.$$

Pour une preuve, voir par exemple Strook et Varadhan (1979, p : 51)

Pour le mouvement Brownien B , il n'est pas difficile de prouver

$$E(|B_t - B_s|^4) = n(n+2)|t-s|^2$$

Notons finalement que si $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^n)$ est un mouvement Brownien n -dimensionnel, alors les processus unidimensionnels $(B_t^{(j)})_{t \geq 0}, 1 \leq j \leq n$ sont des mouvements Browniens unidimensionnels indépendants.

2. Intégrales de Itô

Considérons de façon générale les EDS de la forme

$$(2.1) \quad \frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot W_t$$

où b et σ sont deux fonctions données, et $W = (W_t)_{t \geq 0}$ est regardé comme étant un processus stochastique représentant le bruit (effets environnementaux aléatoires). Se basant sur diverses situations, par exemple en ingénierie, nous sommes conduits à admettre que W doit posséder pour le moins les propriétés suivantes :

- (i) $t_1 \neq t_2 \Rightarrow W_{t_1}$ et W_{t_2} (v.a) sont indépendantes ;
- (ii) W est stationnaire, i.e la distribution conjointes de $(W_{t_1+t}, \dots, W_{t_k+t})$ ne dépend pas de t ;
- (iii) $EW_t = 0$ pour tout t .

Cependant, il se révèle qu'il n'existe pas de processus stochastique *raisonnable* satisfaisant (i) et (ii) : un tel W ne peut pas avoir des trajectoires continues.

Nous sommes de ce fait conduits à suivre, entre autres, la construction intuitive suivante suggérant un remplacement de W par un processus stochastique propre : soit $t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ et considérons une version discrète de (2.1) :

$$(2.2) \quad X_{k+1} - X_k = b(t_k, X_k) \Delta t_k + \sigma(t_k, X_k) W_k \Delta t_k$$

où $X_j = X(t_j), W_k = W_{t_k}, \Delta t_k = t_{k+1} - t_k$

Nous abandonnons la W_k -notation et remplaçons $W_k \Delta t_k$ par $\Delta V_k = V_{k+1} - V_k$, où

$V = (V_t)_{t \geq 0}$ est processus stochastique approprié. Les conditions (i), (ii) et (iii) sur W suggèrent que V devrait être à accroissements indépendants avec une moyenne nulle. Il se trouve que le seul processus convenable avec des trajectoires continues soit le mouvement Brownien B (voir Knight .1981). Ainsi nous posons $V_t = B_t$ et obtenons de (2.2) :

$$(2.3) \quad X_k = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} b(t_j, X_j) \Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, X_j) \Delta B_j$$

Il reste maintenant à espérer que la limite du côté droit de (2.3) existe dans un certain sens quand $\Delta t_j \rightarrow 0$. Si c'est le cas, alors en appliquant la notation usuelle de l'intégration nous devrions aboutir à

$$(2.4) \quad X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s,$$

et nous adopterons comme convention que (2.1) signifie que $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est un processus satisfaisant (2.4). Ainsi, dans le reste de ce paragraphe, nous exposerons sommairement la preuve de l'existence dans un certain sens de

$$\int_0^t f(s, \omega) dB_s(\omega)$$

où $B_t(\omega)$ est un mouvement Brownien unidimensionnel de point départ l'origine, pour une classe à déterminer de fonctions $f : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow R$.

Définition 2.5. Soit $\Psi = \Psi(S, T)$ la classe de fonctions

$$f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow R$$

telles que

(i) $(t, \omega) \mapsto f(t, \omega)$ est $B \times F$ -mesurable, où B représente la σ -algèbre de Borel sur $[0, \infty)$.

(ii) $f(t, \omega)$ est F_t -adaptée. (pour tout $t, \omega \mapsto f(t, \omega)$ est F_t -mesurable).

(iii) $E \left[\int_S^T f(t, \omega)^2 dt \right] < \infty$. ($0 \leq S < T \in R$).

⊗ Intégrale de Itô

Pour des fonctions $f \in \Psi$ nous allons montrer comment définir l'intégrale de Itô

$$I[f](\omega) = \int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega)$$

où B_t est un mouvement Brownien unidimensionnel.

Nous appelons $\varphi \in \Psi$ une fonction élémentaire si elle est de la forme

$$(2.6) \quad \varphi(t, \omega) = \sum_j e_j(\omega) 1_{[t_j, t_{j+1}]}(t)$$

Notons que puisque $\varphi \in \Psi$, chaque e_j doit être F_{t_j} -mesurable et définissons pour une telle fonction l'intégrale comme suit

$$(2.7) \quad \int_S^T \varphi(t, \omega) dB_t(\omega) = \sum_j e_j(\omega) [B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](\omega)$$

Maintenant, nous faisons la remarque importante suivante.

Lemme 2.8. *Isométrie de Itô*

Si $\varphi(t, \omega)$ est élémentaire borné, alors

$$(2.9) \quad E \left[\int_S^T \varphi(t, \omega) dB_t(\omega) \right]^2 = E \left[\int_S^T \varphi(t, \omega)^2 dt \right]$$

Preuve : immédiate des propriétés de B_t .

L'idée est maintenant d'utiliser l'isométrie (2.9) pour étendre la définition d'une fonction élémentaire à une fonction dans Ψ . Pour ce faire, nous procédons en trois étapes :

Étape 1 : Soit $g \in \Psi$ une fonction continue et bornée pour chaque ω . Alors, il existe des fonctions élémentaires $\varphi_n \in \Psi$ telles que

$$E \left[\int_S^T (g - \varphi_n)^2 dt \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Preuve : Prendre $\varphi_n(t, \omega) = \sum_j g(t_j, \omega) \cdot 1_{[t_j, t_{j+1})}(t)$.

Étape 2 : Soit $h \in \Psi$ une fonction bornée. Alors, il existe des fonctions $g_n \in \Psi$ telles que $g_n(\bullet, \omega)$ est continue pour tout ω et tout n , et

$$E \left[\int_S^T (h - g_n)^2 dt \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Preuve : Prendre $g_n(t, \omega) = \int_0^t \psi_n(s-t)h(s, \omega)ds$, où ψ_n sont des fonctions non négatives continues dans R telles que

(i) $\psi_n(x) = 0$ pour $x \leq -\frac{1}{n}$ et $x \geq 0$.

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)dx = 1$.

Étape 3 : Soit $f \in \Psi$. Alors, il existe une suite $(h_n) \subset \Psi$ telle que h_n est bornée pour chaque n et

$$E \left[\int_S^T (f - h_n)^2 dt \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Preuve : Prendre $h_n(t, \omega) = (-n) \vee (f(t, \omega) \wedge n)$.

Nous concluons donc que si $f \in \Psi$, nous choisissons, en vertu des étapes 1-3, des fonctions élémentaires $\varphi_n \in \Psi$ telles que

$$E \left[\int_S^T (f - \varphi_n)^2 dt \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Alors, définissons

$$I[f](\omega) = \int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) = \lim_n \int_S^T \varphi_n(t, \omega) dB_t(\omega)$$

La limite existe dans $L^2(P)$, puisque $\left(\int_S^T \varphi_n(t, \omega) dB_t(\omega) \right)$ forme une suite de Cauchy dans

$L^2(P)$, par (2.9).

Nous résumons ceci comme suit :

Définition 2.10. *Intégrale de Itô.*

Soit $f \in \Psi(S, T)$. Alors l'intégrale de Itô de f (de S à T) est définie par

$$(2.11) \quad \int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) = \lim_n \int_S^T \varphi_n(t, \omega) dB_t(\omega) \quad (\text{limite dans } L^2(P)),$$

où (φ_n) est une suite de fonctions telles que

$$(2.12) \quad E \left[\int_S^T (f(t, \omega) - \varphi_n(t, \omega))^2 dt \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Notons que, en vertu de (2.9), la limite (2.11) existe et ne dépend pas du choix de (φ_n) dont l'existence est garantie par les étapes 1-3, tant que (2.12) est vérifié. En outre, de (2.9) et (2.11) nous avons

Lemme 2.13. *Isométrie de Itô*

$$(2.14) \quad E \left[\left(\int_S^T f(t, \omega) dB_t \right)^2 \right] = E \left[\int_S^T f^2(t, \omega) dt \right] \quad \text{pour tout } f \in \Psi(S, T).$$

Corollaire 2.15. *Si $f \in \Psi(S, T)$ et $f_n \in \Psi(S, T)$ pour $n = 1, 2, \dots$ et*

$$E \left[\int_S^T (f(t, \omega) - f_n(t, \omega))^2 dt \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ alors}$$

$$\int_S^T f_n(t, \omega) dB_t(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) \quad \text{dans } L^2(P)$$

2.16. Quelques Propriétés de l'Intégrale de Itô

Théorème 2.17. *Soit $f, g \in \Psi(0, T)$ et soit $0 \leq S < U < T$. Alors*

- (i) $\int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t$ p.s.
- (ii) $\int_S^T (cf + g) dB_t = c \int_S^U f dB_t + \int_U^T g dB_t$ p.s. ($c \in \mathbb{R}$)
- (iii) $E \left[\int_S^T f dB_t \right] = 0$
- (iv) $\int_S^T f dB_t$ est F_T -mesurable.

Preuve : Utiliser la méthode standard d'approximation par des fonctions élémentaires.

Théorème 2.18. *Intégrale de Doob pour les martingales*

Si (M_t) est une martingale telle que $t \rightarrow M_t(\omega)$ soit continue p.s., alors pour tous $p \geq 1, T \geq 0$ (réels) et tout $\lambda > 0$

$$P \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t| \geq \lambda \right] \leq \frac{1}{\lambda^p} E \left[|M_T|^p \right]$$

Preuve : (voir Revuz and Yor (1991))

En utilisant le théorème (2.18), nous arrivons à montrer :

Théorème 2.19. *Soit $f \in \Psi(0, T)$. Alors il existe une version continue en t de*

$$\int_0^t f(s, \omega) dB_s(\omega) , \quad 0 \leq t \leq T$$

i.e. il existe un processus stochastique continu J_t sur (Ω, F, P) tel que

$$P\left(J_t = \int_0^t f dB_t\right) = 1 \quad \text{pour tout } t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Preuve : (cf. [173]).

Nous assumerons dorénavant que le processus $\left(\int_0^t f(t, \omega) dB_s(\omega)\right)_{t \geq 0}$ est à trajectoires continues.

Corollaire 2.20. Soit $f \in \Psi(0, T)$ pour tout T . alors

$$M_t(\omega) = \int_0^t f(s, \omega) dB_s(\omega)$$

est une martingale associée à la filtration $(F_t)_{t \geq 0}$ ($F_t = \sigma(B_s; s \leq t)$) et

$$(2.21) \quad P\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t| \geq \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda^2} E\left[\int_0^T f(s, \omega)^2 ds\right] \quad \lambda, T > 0.$$

Preuve : Ceci découle de la continuité de M_t , du théorème 2.18. Combiné avec l'isométrie de Itô et la martingale continue :

$$I_n(t, \omega) = \int_0^t \varphi_n(s, \omega) dB_s(\omega)$$

qui converge uniformément sur $[0, T]$ p.s. vers $J_t = \int_0^t f dB_t$.

3. Extension de l'intégrale de Itô

L'intégrale de Itô $\int f dB$ peut être définie pour une classe de fonctions plus large que Ψ . En premier, la condition de mesurabilité (ii) de la définition 2.5. peut être affaiblie à celle-ci :

(ii)' Il existe une famille croissante de σ -algèbres $H = \{H_t\}_{t \geq 0}$ telle que

a) $(B_t)_{t \geq 0}$ est une martingale par rapport à H et

b) f_t est H_t -mesurable.

Notez que a) implique $F_t \subset H_t$. Nous pouvons alors effectuer une construction similaire à celle décrite plus haut pour définir l'intégrale de Itô étendue.

Il vient de cette nouvelle construction qu'en posant, par exemple, $F_t^{(n)} = \sigma(B_1(s_1, \cdot), \dots, B_n(s_n, \cdot); s_k \leq t)$, où $B = (B_1, \dots, B_n)$ est un mouvement Brownien multidimensionnel, nous pouvons définir les intégrales suivantes :

$$\int B_2 dB_1 \quad \text{ou} \quad \int \sin(B_1^2 + B_2^2) dB_2,$$

étant donné que $B_k(t, \bullet)_{t \geq 0}$ est une martingale par rapport à $(F_t^n)_{t \geq 0}$.

Ceci nous conduit à définir l'intégrale de Itô comme suit :

Définition 3.1. Soit $B = (B_1, \dots, B_n)$ un mouvement Brownien n -dimensionnel. $\Psi_H^{m \times n}(S, T)$ représente l'ensemble des matrices $v = (v_{ij}(t, \omega))$ d'ordre $m \times n$ où chaque élément v_{ij} satisfait (i) et (iii) de la définition 2.5. et (ii)', par rapport à une filtration $H = \{H_t\}_{t \geq 0}$.

Si $v \in \Psi_H^{m \times n}(S, T)$, nous définissons, utilisant la notation matricielle

$$\int_S^T v dB = \int_S^T \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{m1} & \cdots & v_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_1 \\ \vdots \\ dB_n \end{pmatrix}$$

Comme étant le vecteur colonne $m \times 1$ dont la $i^{ème}$ composante est la somme des intégrales de Itô étendues unidimensionnelles suivante :

$$\sum_{j=1}^n \int_S^T v_{ij}(s, \omega) dB_j(s, \omega)$$

La deuxième extension de l'intégrale de Itô consiste en l'affaiblissement de la condition (2.5) (iii) à celle-ci :

$$(iii)' \quad P\left(\int_S^T f(t, \omega)^2 ds < \infty\right) = 1$$

Définition 3.2. $W_H(S, T)$ représente la classe des processus $f(t, \omega) \in R$ satisfaisant (i) de la définition 2.5. et (ii)', (iii)'. Nous posons $W_H = \bigcap_{T>0} W_H(0, T)$, et dans le cas des matrices, nous écrivons $W_H^{m \times n} = \bigcap_{T>0} W_H(0, T)$. Si $H = F^{(n)}$, nous écrivons tout simplement $W(S, T)$.

Ainsi nous pouvons définir :

$$(3.3) \quad \int_0^t f(s, \omega) dB_s(\omega) = \lim_n \int_0^t f_n(s, \omega) dB_s(\omega) \text{ (limite en probabilité) pour tout } f \in W_H$$

en suivant le même type de construction d'approximation standard décrit ci-dessus. La limite dans (3.3) est indépendante de la suite (f_n) .

Comme précédemment, il existe une version continue de cette intégrale (voir Friedman (1975) ou McKean (1969) pour plus de détails). Cependant, il faut noter que cette intégrale n'est pas en général une martingale (voir par exemple B. Oksendal (2000) théorème de Dubey. Elle est toutefois une martingale *locale* (voir Karatzas et Shreve (1991)).

II. Formule de Itô et Théorème de Représentation (Caractérisation) par les Martingales

1. Formule de Itô

L'intégrale de Itô, comme le montre l'exemple suivant

$$(1.1) \quad \int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t$$

n'est pas pratique pour l'évaluation d'une intégrale donnée, aussi a été établie la formule de Itô servant de moyen pour le calcul direct de certaines intégrales.

Définition 1.2. Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien unidimensionnel sur (Ω, F, P) . Un processus de Itô (unidimensionnel) (ou intégrale stochastique) est un processus stochastique $X = (X_t)_{t \geq 0}$ sur (Ω, F, P) de la forme

$$(1.3) \quad X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s$$

où $v \in W_H$, tel que

$$P\left(\int_0^t v(s, \omega)^2 ds < \infty, \forall t > 0\right) = 1$$

Nous assumons également que u est H_t -adapté (où H_t est comme dans (ii)', section I.3) et que

$$P\left(\int_0^t |u(v, \omega)| ds < \infty, \forall t > 0\right) = 1$$

L'équation (1.3) est souvent écrite sous la forme différentielle

$$dX_t = udt + vdB_t$$

De (1.1), nous pouvons écrire par exemple

$$d\left(\frac{1}{2} B_t^2\right) = \frac{1}{2} dt + B_t dB_t$$

Nous sommes maintenant en position d'énoncer le premier résultat important de cette partie :

Théorème 1.4.: *La formule de Itô unidimensionnelle*

Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Itô donné par

$$dX_t = udt + vdB_t$$

Soit $g(t, x) \in C^2([0, \infty) \times R)$ (i.e. g est deux fois continûment différentiable sur $[0, \infty) \times R$).

Alors,

$$Y_t = g(t, X_t)$$

est également un processus de Itô, et

$$(1.5) \quad dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \cdot (dX_t)^2$$

où $(dX_t)^2 = (dX_t) \cdot (dX_t)$ est calculé suivant les règles :

$$(1.6) \quad dt \cdot dt = dB_t \cdot dt = dt \cdot dB_t = 0, \quad dB_t \cdot dB_t = dt.$$

Preuve : (cf. [173]).

Remarque. Notez qu'il est suffisant que $g(t, x)$ soit C^2 sur $[0, \infty) \times U$, si $U \subset R$ est un ouvert tel que $X_t \in U$ pour tous $t \geq 0, \omega \in \Omega$. En outre, il est suffisant que $g(t, x)$ est C^1 par rapport à t , et C^2 par rapport à x .

1.5. La Formule de Itô Multidimensionnelle

Soit $B = (B_1, \dots, B_m)$ un mouvement Brownien m -dimensionnel. Si chacune des fonctions aléatoires $u_i(t, \omega)$ et $v_{ij}(t, \omega)$ satisfait les conditions données dans la définition 1.2. ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$), alors nous avons les n processus de Itô :

$$\begin{cases} dX_1 = u_1 dt + v_{11} dB_1 + \dots + v_{1m} dB_m \\ \vdots \\ dX_n = u_n dt + v_{n1} dB_1 + \dots + v_{nm} dB_m \end{cases}$$

Ou, sous la notation matricielle

$$dX(t) = udt + vdB(t)$$

où

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nm} \end{bmatrix}, dB(t) = \begin{bmatrix} dB_1(t) \\ \vdots \\ dB_m(t) \end{bmatrix}$$

Théorème 1.6. *La formule de Itô générale*

Soit

$$dX(t) = udt + vdB(t)$$

Un processus de Itô n - dimensionnel. Soit $g(t, x) = (g_1(t, x), \dots, g_p(t, x))$ dans $C^2([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ à valeurs dans \mathbb{R}^p . Alors, le processus

$$Y_t = g(t, X_t)$$

est à nouveau un processus de Itô, dont la $k^{\text{ème}}$ composante, Y_k , est donnée par

$$dY_k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, X_t)dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, X_t)dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t)dX_i dX_j$$

où $dB_i dB_j = \delta_{ij} dt$, $dB_i \cdot dt = dt \cdot dB_i = 0$ (δ_{ij} est le symbole de Kronecker).

La preuve est similaire à celle du théorème 1.4.

2. Le Théorème de Représentation (Caractérisation) par les Martingales

Si $B = (B_1, \dots, B_n)$ un mouvement Brownien n -dimensionnel, nous avons vu (corollaire I.2.20) que si $v \in \Psi^n = \bigcap_{T>0} \Psi^{n \times 1}(0, T)$ alors l'intégrale de Itô

$$X_t = X_0 + \int_0^t v(s, \omega) dB_s; t \geq 0$$

est toujours une martingale par rapport à la filtration $F^{(n)}$. Dans ce paragraphe, nous énoncerons le théorème attestant de la réciproque : toute $F^{(n)}$ – martingale peut être représentée comme une intégrale de Itô. Ce résultat est dit « *le théorème de représentation par les martingales* ».

En premier, nous énonçons deux lemmes servant d'outils pour la preuve du théorème susnommé.

Lemme 2.1. *Fixons $T > 0$. L'ensemble des v.a*

$$\{\varphi(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}), t_i \in [0, T], \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), n = 1, 2, \dots\}$$

est dense dans $L^2(F_T, P)$: l'ensemble des v.a F_T – mesurables de carré intégrable.

Lemme 2.2. *L'espace des combinaisons linéaires des v.a. du type*

$$\exp\left(\int_0^T h(t) dB_t - \frac{1}{2} \int_0^T h^2(t) dt\right) ; h \in L^2[0, T] \text{ (non aléatoire).}$$

est dense dans $L^2(F_T, P)$.

Théorème 2.3. *Théorème de représentation de Itô*

Soit $F \in L^2(F_T^{(n)}, P)$. Alors, il existe un unique processus stochastique $f(t, \omega) \in \Psi^n(0, T)$ tel que

$$F = EF + \int_0^T f(t, \omega) dB(t)$$

Théorème 2.4. *Théorème de représentation par les martingales*

Soit $B = (B_1, \dots, B_n)$ un mouvement Brownien n -dimensionnel. Supposons que $M = (M_t)_{t \geq 0}$ est une $F^{(n)}$ -martingale et que $M_t \in L^2(P)$ pour tout $t \geq 0$. Alors, il existe un unique processus stochastique $g(t, \omega)$ tel que $g \in \Psi^n(0, t)$ pour tout $t \geq 0$ et

$$M_t = EM_0 + \int_0^t g(s, \omega) dB(s) \text{ p.s. pour tout } t \geq 0$$

Pour des preuves de ces résultats, cf. [173].

III. Exemple. Théorème d'Existence et d'Unicité pour les EDS.

3.1 Revenons à notre exemple de modèle de croissance de population où l'on suppose r_t une valeur fixe. Nous avons alors l'équation différentielle stochastique suivante, écrite sous forme différentielle :

$$dN_t = rN_t dt + \alpha N_t dB_t \text{ (avec } N_0 = \text{constante positive)}$$

ou

$$\frac{dN_t}{N_t} = rdt + \alpha dB_t \quad (*)$$

Ainsi

$$\int_0^t \frac{dN_s}{N_s} = rt + \alpha B_t \quad (B_0 = 0)$$

Utilisant la formule de Itô pour la fonction

$$g(s, x) = \ln x ; \quad x > 0$$

nous obtenons

$$\frac{d(\ln N_t)}{N_t} = \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2} \alpha^2 dt$$

Il vient alors que

$$\frac{dN_t}{N_t} = d(\ln N_t) + \frac{1}{2} \alpha^2 dt$$

De (*) nous concluons que

$$\ln \frac{N_t}{N_0} = \left(r - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) t + \alpha B_t$$

ou

$$N_t = N_0 \exp \left[\left(r - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) t + \alpha B_t \right]$$

Nous énonçons maintenant le théorème d'existence et d'unicité pour les EDS.

Théorème 3.2. Soit $T > 0$ (réel) et $b(\cdot, \cdot): [0, T] \times R^n \rightarrow R^n$, $\sigma(\cdot, \cdot): [0, T] \times R^n \rightarrow R^{n \times m}$ deux fonctions mesurables vérifiant

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|); \quad x \in R^n, t \in [0, T]$$

pour une constante C , (où $|\sigma|^2 = \sum |\sigma_{ij}|^2$) et telles que

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y| ; \quad x, y \in R^n, t \in [0, T]$$

Pour une constante D . Soit Z une v.a. qui est indépendante de la σ -algèbre $F_\infty^{(m)}$ générée par $(B_s(\cdot); s \geq 0)$ et telle que

$$E|Z|^2 < \infty$$

Alors l'équation différentielle stochastique

$$(3.3) \quad dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad 0 \leq t < T, X_0 = Z$$

a une solution continue unique $X_t(\omega)$ possédant la propriété que X_t est adaptée à la filtration F_t^Z générée par Z et $B_s(\cdot); s \leq t$, et

$$E \int_0^T |X_t|^2 dt < \infty.$$

Preuve : (cf. [173]).

Note : Cette solution est dite solution forte. Cependant, s'il nous est seulement donné les fonctions $b(t, x)$ et $\sigma(t, x)$, et nous cherchons une paire de processus $((\tilde{X}_t, \tilde{B}_t), H_t)$, sur un espace de probabilité (Ω, H, P) , telle que l'équation (3.3) soit vérifiée, alors la solution \tilde{X}_t (ou plus précisément $(\tilde{X}_t, \tilde{B}_t)$) est appelée une solution faible. Ici $(H_t)_{t \geq 0}$ est une famille de σ -algèbres croissantes, telle que \tilde{X}_t est H_t -adapté et \tilde{B}_t est un mouvement Brownien associé à $(H_t)_{t \geq 0}$ (cf. section .3).

Chapitre 5. Mouvement d'une particule quantique

Inversion du temps et Dualité

1. Processus de Markov (généralisé)

Nous introduisons en début de cette section (§ 1.1.) le cadre conceptuel de la mécanique classique dans le dessein de fixer les notations, et de clarifier que la notion de *vitesse* joue un rôle crucial dans la mécanique classique et que, exactement à cause de ce fait, nous devons quitter le cadre classique, quand on parle du mouvement des particules avec un bruit (Brownien) parce que la notion de *vitesse* ne s'applique plus pour un tel mouvement de particules.

1.1. Mécanique classique

Nous prenons une seule particule pour simplifier, la généralisation à un *système de particules* étant routinière. Une particule se meut dans un espace d'états temporel appelé *espace-temps* ;

$$(t, x) \in [a, b] \times R^d, \quad -\infty < a < b < \infty.$$

Pour un *espace de vitesse* donné

$$v(t, x): (t, x) \in [a, b] \times R^d \rightarrow R^d,$$

nous considérons les solutions $x(t)$ de

$$(1.1.1) \quad \frac{dx}{dt} = v(t, x)$$

où $x(t)$ représente la position d'une particule dans R^d à l'instant $t \in [a, b]$. Autrement dit,

$$(1.1.2) \quad x(t) = x(a) + \int_a^t v(s, x(s)) ds,$$

avec $x(a)$: la position initiale de la particule.

En résolvant l'équation intégrale, nous pouvons immédiatement voir *le mouvement d'une particule (ou particules) dans l'espace de vitesse*. L'équation (1.1.1), ce qui est la même chose, l'équation (1.1.2) est *l'équation de la dynamique*.

Si nous assumons que l'espace de vitesse est indépendant de la variable $x(t)$, l'équation (1.1.2) se réduit à

$$(1.1.3) \quad x(t) = x(a) + \int_a^t v(s) ds,$$

Dans ce cas, nous appelons simplement $v(t)$ *la vitesse du mouvement* $x(t)$. Pour déterminer l'espace de vitesse, nous avons besoin de la dite *équation du mouvement*.

Sous l'hypothèse que la *vitesse* $v(t)$ est bien définie, le *Lagrangien* est donné par

$$L(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 - V(x),$$

où m représente la masse d'une particule et

$$(1.1.4) \quad V(x): R^d \rightarrow R$$

est *l'espace potentiel* ; en outre, nous introduisons le *Hamiltonien*

$$(1.1.5) \quad H(x, p) = \frac{1}{2m} p^2 + V(x),$$

où

$$p(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$$

représente $p = mv$. L'équation de *Hamilton* du mouvement est en fait une paire d'équations

$$(1.1.6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p^i} &= \frac{dx^i}{dt} \\ \frac{\partial H}{\partial x^i} &= -\frac{dp^i}{dt} \end{aligned}$$

Où $p = (p^1, \dots, p^d)$ et $x = (x^1, \dots, x^d)$; c'est-à-dire, la 1^{ème} équation (1.1.6) qui s'accorde avec l'équation (1.1.3) est l'équation de la dynamique, et la seconde équation (1.1.6) est l'équation du mouvement, laquelle implique que la fonction potentielle détermine la vitesse (espace) $v(t)$ par l'équation de *Newton du mouvement*,

$$m \frac{dv}{dt} = -\text{grad}V(x) = -\nabla V(x)$$

∇ est l'opérateur vectoriel $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^d} \right)$.

Fixer un intervalle de temps fermé $[a, b]$ n'est pas nécessaire en mécanique classique. Nous avons besoin seulement de fixer un instant $t = a$ pour imposer une condition initiale, mais un intervalle de temps fermé est nécessaire dans la *mécanique quantique* *.

Le fait le plus important à retenir à ce moment est que l'équation de *Hamilton* du mouvement de la mécanique classique comprend une paire d'équations, l'équation du mouvement et l'équation de la dynamique, et que nous pouvons obtenir la vitesse d'une particule dans un espace potentiel $V(x)$ en intégrant l'équation du mouvement. Une fois la vitesse connue, nous pouvons avoir les trajectoires $x(t)$ en intégrant l'équation de la dynamique (ou simplement en intégrant deux fois l'équation du mouvement). A l'opposé, nous ne pouvons pas immédiatement avoir l'espace de *vitesse* (ou de déplacement) des particules quantiques, même si nous intégrons l'équation du mouvement. Nous soulignons que la description du mouvement des particules quantiques nécessite l'introduction du calcul stochastique, c'est-à-dire la théorie des processus stochastiques (notamment les processus de Markov), quand la cinématique des particules classiques est un calcul différentiel classique. En d'autres mots, pour obtenir les trajectoires des particules quantiques, on doit clarifier la relation entre l'équation du mouvement et l'équation de la dynamique, ce qui n'est pas une chose aisée comme en mécanique classique. Nous avons besoin sur ce sujet de faire une investigation attentive de la cinématique des particules quantiques, c'est-à-dire, la théorie des processus de Markov.

1.2. Mouvement d'une particule avec bruit

Soit une fonction

$$a(t, x): (t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$$

Une telle fonction fut appelée ci-dessus *espace de vitesse*. Cependant, quand on considère le mouvement de particule(s) avec un bruit (Brownien) $\sigma \mathcal{B}_t$, cette appellation se trouve être inappropriée. De ce fait, nous appelons $a(t, x)$ un *espace de mouvement* dans ce qui suit, et utilisons la notation $a(t, x)$ à la place de $v(t, x)$ pour éviter une quelconque confusion. Si le

bruit est inopérant, *i.e.* $\sigma = 0$, l'espace de mouvement $a(t, x)$ coïncide avec l'espace de vitesse $v(t, x)$.

Pour un espace de mouvement donné $a(t, x)$, considérons l'équation de la dynamique

$$(1.2.1) \quad X_t = X_a + \int_a^t a(s, X_s) ds + \sigma(B_t - B_a)$$

où $B_t = B_t(\omega)$ représente un mouvement Brownien d -dimensionnel (cf. chapitre 4.) défini sur l'espace de probabilité (Ω, \mathbf{B}, P) . L'Equation (1.2.1) est une généralisation de l'équation (1.1.2).

Considérons un cas simple avec une vitesse constante v et $\sigma = 1$,

$$X_t = X_0 + vt + B_t$$

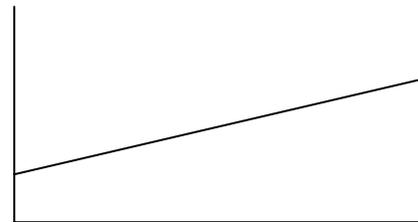
Nous pouvons interpréter ça comme un mouvement unique uniforme avec une vitesse constante

$$x(t) = x(0) + vt,$$

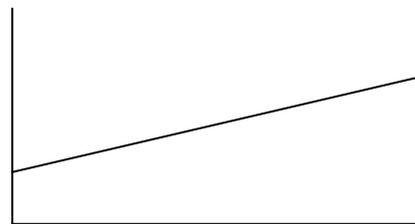
perturbé par le bruit Brownien B_t .



B_t



$x(t) = x(0) + vt$



$X_t = X_0 + vt + B_t$

En généralisant l'équation (1.2.1), nous considérons l'équation différentielle stochastique :

$$(1.2.2) \quad X_t = X_a + \int_a^t a(s, X_s) ds + \int_a^t \sigma(s, X_s) dB_s,$$

ou sous la forme différentielle

$$(1.2.3) \quad dX_t = a(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t,$$

où X_a est une v.a. à valeurs dans R^d .

$$\sigma(t, x): [a, b] \times R^d \rightarrow R^d \times R^d.$$

Nous assumerons que σ est constante pour des raisons de simplicité, sauf mention du contraire. L'équation de la dynamique détermine un processus de *diffusion* (voir la suite) qui décrit le mouvement d'une particule(s) avec un bruit. Notons que l'EDS (1.2.1) se réduit à l'équation classique (1.1.2), si σ disparaît. Plus précisément, nous avons,

Lemme 1.2.1. Soit X_t et x_t des solutions des équations (1.2.1) et (1.1.2) resp.

Si $a(t, x)$ est Lipchitzienne continue et $X_a = x(a)$, alors

$$E \left[\sup_{t \in [a, b]} |X_t - x_t| \right] \leq 2\sigma \sqrt{(b-a)} e^{K(b-a)} \quad (K \text{ étant une constante}).$$

Note.: Sauf mention du contraire, tous les résultats énoncés dans ce chapitre peuvent être trouvés dans [171].

Le lemme 1.2.1. nous affirme que le mouvement X_t avec bruit converge dans L^1 vers la trajectoire déterministe x_t , si $\sigma \downarrow 0$. Toutefois, l'espace de mouvement $a(t, x)$ n'est pas souvent Lipchitzien continu dans la théorie stochastique des particules quantiques.

Soit $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)$ un mouvement Brownien d -dimensionnel. Avec l'aide de la formule de Lévy introduite au chapitre 4, nous avons,

$$dB_t^i dB_t^j = \delta^{ij} dt.$$

Par conséquent

$$\left(\frac{dB_t^i}{dt} \right)^2 = \frac{dt}{(dt)^2} = \frac{1}{dt} = \infty,$$

C'est-à-dire, un mouvement Brownien B_t n'est pas différentiable (cf. chapitre 1. th. 8.1.), ou en d'autres mots, il n'a pas de *vitesse*. Comme solution de l'équation différentielle (1.2.2) (ou 1.2.3), le mouvement X_t avec bruit Brownien n'a pas aussi de *vitesse*, puisque

$$(1.2.4) \quad \left(\frac{dX_t}{dt} \right)^2 = \infty .$$

Ceci est la raison (une bonne raison) pour quoi nous n'appelons pas $a(t, x)$ *espace de vitesse*.

1.3. Processus de Markov

Pour décrire mathématiquement le mouvement d'une particule avec bruit (ou quantique), nous avons besoin des processus stochastiques, en particulier le processus (diffusion) de Markov. Sur cette question, nous nous référons au premier chapitre. Cependant, nous aurons besoin de faire quelques adaptations nécessaires au développement des idées de ce chapitre.

Nous considérons alors dans cette section les fonctions de transition $Q(s, x; t, B)$,

$a \leq s \leq t \leq b$, $x \in R^d$, $B \in B(R^d)$ (un borélien), satisfaisant l'équation de Chapman-Kolmogorov,

$$(1.3.1) \quad Q(s, x; t, B) = \int_{R^d} Q(s, x; r, dy) Q(r, y; t, B) \quad s \leq r \leq t$$

et

$$(1.3.2) \quad Q(s, x; t, R^d) = 1$$

La fonction (probabilité) de transition $Q(s, x; t, B)$ est la probabilité qu'une particule de point de départ un point $x \in R^d$ à l'instant $s \in [a, b]$ sera trouvée dans le sous ensemble $B \subset R^d$ à l'instant $t \geq s$.

Nous posons $X = \{ X_t, t \geq 0 \}$ le processus de Markov associé à la mesure de probabilité Q donnée dans (1.3.3) et définie par les fonction de transition $Q(s, x; t, B)$,

$$(1.3.3) \quad Q(X_a \in dx_0, X_{t_1} \in dx_1, \dots, X_{t_{n-1}} \in dx_{n-1}, X_b \in dx_n) = \mu_a(dx_0) Q(a, x_0; t_1, dx_1) Q(t_1, x_1; t_2, dx_2) \cdots \\ \cdots Q(t_{n-1}, x_{n-1}; b, dx_n).$$

où μ_a est prise comme distribution initiale relative à l'instant $t = a$.

Nous noterons la représentation de la mesure de probabilité donnée dans (1.3.3) par

$$(1.3.4) \quad Q = [\mu_a Q \gg]$$

et nous l'appellerons la **représentation de Kolmogorov** de la mesure de probabilité Q .

La notation dans (1.3.4) indique que la mesure de probabilité Q est définie par l'équation (1.3.3) avec une distribution initiale μ_a relative à l'instant $t = a$, avec une probabilité de transition $Q(s, x; t, B)$, et une évolution temporelle (dans le temps) normale de l'instant initiale $t = a$ à l'instant $t = b$. L'évolution temporelle normale est extrêmement importante dans l'équation (1.3.3), autrement dit, la représentation de Kolmogorov n'est pas symétrique dans l'inversion du temps. Nous verrons ultérieurement qu'en plus de la représentation de Kolmogorov, il y a une autre façon (*temporellement symétrique*) de représenter la mesure probabilité Q , appelée **la représentation de Schrödinger** et ce fait se révèle être d'une importance capitale dans la théorie quantique.

Nous conviendrons de noter l'espérance (conditionnelle) par rapport une mesure de probabilité Q aussi par Q et posons $\{F_s^t\}$ la filtration (toujours supposée continue à droite) générée par $\{X_r; s \leq r \leq t\}$. Alors nous avons un processus de Markov $\{X_t, t \in [a, b], F_a^t, Q\}$ associé aux probabilités de transition $Q(s, x; t, B)$.

Si la mesure de probabilité Q est définie sur $\Omega_c = C([a, b], R^d)$ (*i.e.*, l'espace de toutes les fonctions continues à droite de $[a, b]$ vers R^d), par la représentation de Kolmogorov, avec une probabilité de transition $Q(s, x; t, B)$, et que la propriété de Markov forte est vérifiée, c'est-à-dire pour un temps d'arrêt S par rapport à $\{F_a^t\}_{t \in [a, b]}$, nous avons

$$(1.3.5) \quad Q[f(X_{S+t}) / F_a^S] = Q_{(S, X_S)}[f(X_{S+t})]$$

où

$$F_a^S = \{B : B \cap \{S < t\} \in F_a^t, \text{ pour tout } t \in [a, b]\}.$$

alors le processus de Markov $\{X_t, t \in [a, b], F_s^t, Q\}$ est appelé un **processus de diffusion**.

Une fonction $\omega(t)$, $t \in [a, b]$, est appelée une trajectoire du processus, et $X_t(\omega)$ représente le mouvement stochastique d'une particule(s) pour un $\omega \in \Omega_c$ fixé (*resp.* Ω_d , *i.e.*, l'espace de toutes les fonctions continues de $[a, b]$ vers R^d). Dans la théorie quantique, si une particule est dans un état *stationnaire*, alors le mouvement de la particule peut être décrit avec une probabilité de transition temporellement homogène (voir [171] section 3.2, chapitre 4. et section 7.3.).

1.4. Equation de diffusion

Les processus de diffusion peuvent être, en vertu d'une méthode analytique célèbre de Kolmogorov (1931), caractérisés par les équations de diffusion. Soit une densité de probabilité de transition $q(s, x; t, y)$ sur R^d , qui satisfait l'équation de *Chapman-kolmogorov*

$$(1.4.1) \quad q(s, x; t, z) = \int q(s, x; r, y) dy q(r, y; t, z)$$

pour $s \leq r \leq t$ et $x, z \in R^d$, et la condition de normalité

$$(1.4.2) \quad \int_{R^d} q(s, x; t, y) dy = 1$$

Alors nous avons,

Théorème 1.4.1. (Kolmogorov 1936)

Soit $q(s, x; t, y)$ une densité de probabilité de transition dans R^d , vérifiant

$$(1.4.3) \quad \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{U_\varepsilon(x)^c} q(t, x; t+h, y) dy = 0$$

$$(1.4.4) \quad \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{U_\varepsilon(x)^c} q(t, x; t+h, y) (y^i - x^i) dy = a^i(t, x)$$

$$(1.4.5) \quad \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{U_\varepsilon(x)^c} q(t, x; t+h, y) (y^i - x^i) dy = (\sigma^2)^{ij}(t, x)$$

où $x \in \mathbb{R}^d$, et $U_\varepsilon(x)^c$ représente le complémentaire du voisinage $U_\varepsilon(x) = \{y : |x - y| < \varepsilon\}$ de $x \in \mathbb{R}^d$. Pour $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$, posons

$$(1.4.6) \quad u(t, x) = \int q(t, x; t, y) f(y) dy,$$

et assumons que $u(t, x)$, $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x^i}$ et $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^i \partial x^j}$ sont continues en (t, x) . Alors $u(t, x)$ satisfait l'équation de diffusion

$$(1.4.7) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (\sigma^2)^{ij}(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^d a^i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x^i}.$$

Le deuxième et le troisième termes dans les $(\sigma^2)^{ij}(t, x)$ et les $a^i(t, x)$, resp. dans l'équation (1.4.7) sont souvent notés Δu et ∇u .

Posons $q(s, x; t, y)$ la solution du problème de valeur terminale* de l'équation (1.4.8) et du problème de valeur initiale* de l'équation (1.4.9). La paire d'équations de diffusion est en parfaite dualité :

$$(1.4.8) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \Delta u + a(t, x) \cdot \nabla u = 0$$

$$(1.4.9) \quad -\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \Delta \mu - \nabla(a(t, x)\mu) = 0$$

Cela étant,

$$(1.4.10) \quad u(t, x) = \int q(t, x; b, y) f(y) dy, \text{ et}$$

$$(1.4.11) \quad \mu(t, x) = \int f(z) dz \cdot q(a, z; t, x)$$

On montre (cf. Dressel 1940) que sous certaines conditions de régularité $q(s, x; t, y)$ satisfait

$$(1.4.12) \quad q(s, x; t, y) \leq \kappa (t-s)^{-d/2} \exp -\lambda |x-t|^2 / (t-s)$$

avec des constantes $\kappa, \lambda > 0$ dans n'importe quel intervalle de temps fini, et par conséquent nous avons

$$(1.4.13) \quad Q(|X_t - X_s|^4) \leq \kappa \int x^4 (t-s)^{-d/2} \exp -\lambda |x|^2 / (t-s) dx = c(t-s)^2, \quad s, t \in [a, b]$$

Ceci est la condition de continuité de Kolmogorov (cf. chapitre 4, th 1.4.) qui entraîne que la mesure de probabilité Q définie par (1.3.3) est portée par $\Omega_c = ([a, b], \mathbb{R}^d)$.

Avec $q(s, x; t, y)$ nous définissons la probabilité de transition $Q(s, x; t, y)$ par

$$(1.4.14) \quad \begin{aligned} Q(s, x; t, B) &= \int q(s, x; t, y) \mathbb{1}_B(y) dy, \text{ pour } s < t \\ &= \mathbb{1}_B(x), \text{ pour } s = t \end{aligned}$$

Dans ce cas, on note souvent la représentation de Kolmogorov également par

$$Q = [\mu_a q \gg],$$

et on appelle le processus de Markov $\{X_t, t \in [a, b], F_s^t, Q\}$ un *processus de diffusion* de densité de transition $q(s, x; t, y)$.

Remarque. On montre que la densité de probabilité de transition $q(s, x; t, y)$ d'un processus de diffusion X_t (le mouvement continu d'une particule avec un bruit Brownien) est la solution fondamentale des équations de diffusion (1.4.8) et (1.4.9) avec un espace de mouvement $a(t, x)$. Réciproquement, la solution fondamentale définit un processus de diffusion X_t .

2. Inversion du temps et Dualité

2.1. Inversion du temps des processus de Markov et dualité

Dans cette section, nous discuterons de l'inversion du temps des processus de Markov définis sur Ω_d (i.e. nous assumerons la continuité à droite des trajectoires). En effectuant l'inversion du temps, nous obtenons la dualité entre les semi-groupes des processus dans une évolution temporelle normale et inversée, respectivement. La relation de dualité nous procure alors une quantité additionnelle importante (*fonction de phase**) qui est absolument nécessaire dans la théorie quantique.

Nous considérons dans cette section la probabilité de transition homogène dans le temps $P_t(x, B), t \geq 0, x \in R^d$, à laquelle est associé le semi-groupe P_t sur l'espace $B(R^d)$ des fonctions mesurables bornées,

$$(2.1.1) \quad P_t f(x) = \int P_t(x, dy) f(y).$$

Si une mesure de probabilité (ou σ -finie) $m(dx)$ satisfait

$$(2.1.2) \quad \int P_t f(x) m(dx) = \int f(x) m(dx)$$

pour tout $t \geq 0$ et pour toute fonction non négative $f \in B(R^d)$, elle est appelée *mesure Invariante* du semi-groupe P_t . Une mesure σ -finie $m(dx)$ est dite une *mesure excessive* si elle satisfait l'équation (2.1.2) avec l'inégalité ' \leq ' à la place de l'égalité.

Avec une distribution initiale donnée μ , nous définissons un processus de Markov homogène $[X_t, t \in [0, \infty), P_\mu]$, où

$$P_\mu[F] = \int \mu(dx) P_x[F]$$

S'il y a une mesure invariante $m(dx)$, et que nous la choisissons comme distribution initiale, l'équation (2.1.2) implique

$$(2.1.3) \quad P_m[X_t \in B] = m(B)$$

Ce qui signifie que la distribution du processus X_t est indépendante (invariante) du temps, i.e. stationnaire. Dans ce cas le processus de Markov $[X_t, t \in [0, \infty), P_m]$ est dit *Stationnaire*.

Soit $m(dx)$ une mesure invariante (ou excessive) du semi-groupe P_t . Si un autre semi-groupe \hat{P}_t satisfait

$$(2.1.4) \quad \int P_t f(x) g(x) m(dx) = \int f(x) \hat{P}_t g(x) m(dx)$$

pour toutes fonctions Boréliennes à support compact, alors \hat{P}_t est appelé le *semi-groupe associé* au semi-groupe P_t par rapport à $m(dx)$, ou nous disons que les semi-groupes P_t et \hat{P}_t sont *en dualité* par rapport à la mesure $m(dx)$.

Si un processus de Markov a une mesure invariante $m(dx)$, nous considérons

$[X_t, t \in [0, T], P_m]$ où $T > 0$ est une constante. Nous définissons alors l'*inversion du temps* du processus à partir de $T > 0$ par

$$\hat{X}_t = X_{T-t}$$

Ainsi nous définissons le **processus temporellement inversé** (ou inversé dans le temps) $[\hat{X}_t = X_{T-t}, t \in [0, T], P_m]$ du processus stationnaire $[X_t, t \in [0, T], P_m]$. Nous notons \hat{P}_t la probabilité de transition de \hat{X}_t . Alors, nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.1.1. *Le processus temporellement inversé $[\hat{X}_t, t \in [0, T], P_m]$ est Markovien homogène dans le temps de semi-groupe \hat{P}_t qui est l'associé du semi-groupe P_t par rapport à la mesure invariante $m(dx)$.*

Dans cette référence, on suppose pour la preuve l'existence des densités, ce qui facilite la tâche, et nous aurons alors, si nous notons $p_t(x, y)$ la densité de P_t :

$$\hat{p}_t(x, y) = m(y)p_t(y, x) \frac{1}{m(x)}$$

la densité de transition de \hat{P}_t .

Ainsi nous avons la représentation de Kolmogorov de $[\hat{X}_t, t \in [0, T], P_m]$

$$P_m [f(\hat{X}_0, \hat{X}_{t_1}, \dots, \hat{X}_T)] = \int m(x_0) \hat{p}_{t_1}(x_0, x_1) dx_1 \cdots \hat{p}_{T-t_{n-1}}(x_{n-1}, x_n) dx_n f(x_1, \dots, x_n)$$

Remarque : Si le processus de Markov a une distribution initiale arbitraire μ , alors le théorème 2.1.1. n'est plus vérifié. Nous devons alors modifier l'assertion comme suit :

Le processus temporellement inversé $[\hat{X}_t, t \in [0, T], P_\mu]$, est un processus de Markov temporellement non homogène avec une densité de transition

$$\hat{p}(s, x; t, y) = \mu_t(y) p_{t-s}(y, x) \frac{1}{\mu_s(x)}.$$

où $\mu_t(x)$ représente la densité de transition de X_t par rapport à P_μ .

L'existence d'une mesure invariante n'est pas toujours garantie, toutefois, nous pouvons avoir une mesure excessive $m(B)$ dans (2.1.5). Il est de ce fait possible de discuter de la dualité dans (2.1.4) par rapport à la mesure excessive $m(B)$.

Lemme 2.1.1. *Définissons une mesure $m(B)$ par*

$$(2.1.5) \quad m(B) = \int_0^\infty dr \int \mu(dx) P_r(x, B)$$

Alors, c'est une mesure excessive.

Preuve : pour une fonction non négative $f \in B(R^d)$,

$$\begin{aligned} \int P_t f(x) m(dx) &= \int_0^\infty dr \int \mu(dx) P_t P_r f(x) = \int_0^\infty dr \int \mu(dx) P_{t+r} f(x) \\ &= \int_t^\infty dr \int \mu(dx) P_r f(x) \leq \int_0^\infty dr \int \mu(dx) P_r f(x) \\ &= \int f(x) m(dx). \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve.

***L*-temps d'arrêt.** Une variable aléatoire non négative $L(\omega), \omega \in \Omega$ est dite *L*-temps d'arrêt si elle satisfait

$$(2.1.6) \quad \{s < L-t\} = \{s < L \circ \theta_t\}, \quad t, s > 0$$

où θ_t est l'opérateur de changement de temps¹. Cette variable-ci est en fait le dernier temps d'occurrence d'un événement ('*L*' vient du mot anglais *Last*).

(2.1.6) est équivalente à

- (i) $t < L(\omega) \Rightarrow L(\omega) = t + L(\theta_t \omega)$;
- (ii) $t \geq L(\omega) \Rightarrow L(\theta_t \omega) = 0$.

La propriété (ii) dit que si un événement se produit au temps $L(\omega)$ avant t , alors il ne se reproduira plus après t , *i.e.* $L(\theta_t \omega) = 0$. Un exemple typique est le temps de sortie d'un sous-ensemble B d'un processus X_t

$$L_B(\omega) = \sup \{t, X_t(\omega) \in B\} (=0, \text{ si } \{t, X_t(\omega) \in B\} = \emptyset)$$

L'inversion du temps d'un processus de Markov ($X_t, t \in [0, \infty), P_\mu$) à partir *L*-temps d'arrêt $L(\omega)$ est défini par

$$Y_t(\omega) = X_{L(\omega)-t}(\omega), \text{ si } 0 < t < L(\omega) \\ = \Delta \quad \text{si } L(\omega) \leq t \text{ ou } L(\omega) = \infty$$

Et $Y_0(\omega) = X_{L(\omega)}(\omega)$, si $0 < L(\omega) < \infty$, et $Y_0(\omega) = \Delta$ sinon.

Nous avons le résultat suivant clarifiant la signification probabiliste de la dualité, *i.e.* :

Théorème 2.1.2. (Nagasawa 1964)

Soit $(X_t, t \in [0, \infty), P_\mu)$ un processus de Markov (diffusion) temporellement homogène avec un semi-groupe de transition P_t , et soit $L(\omega)$ un *L*-temps d'arrêt. Alors, le processus temporellement inversé $(Y_t, t \in [0, \infty), P_\mu)$ est un processus de Markov (diffusion) temporellement homogène avec le semi-groupe de transition \hat{P}_t , ceci étant, pour toutes fonctions f et g à support compact,

$$(2.1.7) \quad \int P_t f(x) g(x) m(dx) = \int f(x) \hat{P}_t g(x) m(dx)$$

est vérifiée (l'égalité) par rapport à la mesure excessive $m(dx)$ définie par (2.1.5).

Note : Le semi-groupe \hat{P}_t du processus temporellement inversé ne dépend pas du *L*-temps d'arrêt, mais dépend de la distribution initiale μ via la mesure excessive $m(dx)$ définie par (2.1.5). Nous devons donc fixer une distribution initiale quand on parle de l'inversion du temps.

2.2. Processus de Markov et Dualité spatiotemporels

Les processus de Markov (en particulier les diffusions) temporellement non-homogène (PMTNH) apparaissent naturellement dans la physique quantique. Pour parler de la dualité des PMTNH (diffusion), il est techniquement plus approprié de considérer ledit *processus de Markov (diffusion) spatiotemporel* (t, X_t) sur l'espace-temps $[a, b] \times R^d$, à la place du PMTNH (diffusion) $\{X_t, t \in [a, b], Q\}$ défini sur R^d , parce que le processus de Markov spatiotemporel est temporellement homogène. Le truc est le suivant.

¹ $\theta_t : \Omega \rightarrow \Omega \quad \theta_t \omega(s) \hat{=} \omega(t+s)$.

Soit $Q(s, x; t, B)$ une probabilité de transition. Nous définissons une probabilité de transition temporellement homogène sur l'espace-temps $[a, b] \times R^d$

$$(2.2.1) \quad P_r((s, x), dtdy) = Q(s, x; t, dy) \delta_{s+r}(dt), \quad a \leq s \leq s+r \leq b. \\ = 0, \quad \text{ailleurs}$$

où $\delta_r(dt)$ représente la mesure (masse) de *Dirac* en r . Il est facile de voir que le processus de Markov spatiotemporel $\{(t, X_t), t \in [a, b], Q\}$ possède la probabilité de transition homogène dans le temps $P_r((s, x), dtdy)$, laquelle est la probabilité qu'une particule partant du point spatiotemporel $(t, x) \in [a, b] \times R^d$ sera trouvée dans une région spatiotemporelle $dtdy \subset [a, b] \times R^d$ après un temps écoulé r . En fait

$$(2.2.2) \quad Q_{(s,x)}[f(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})] = \int Q(s, x; t, dx_1) \cdots Q(t_{n-1}, x_{n-1}; b, dx_n) f(x_0, \dots, x_n) \\ = \int P_{t-s}((s, x), dt, dx_1) P_{t_2-t_1}((t_1, x_1), dt_2, dx_2) \cdots \\ \cdots P_{t_n-t_{n-1}}((t_{n-1}, x_{n-1}), dt_n, dx_n) f(x_0, \dots, x_n).$$

Pour le semi-groupe du processus spatiotemporel nous avons

$$(2.2.3) \quad P_r f(s, x) = \int P_r((s, x), dtdy) f(t, y) \\ P_r f(s, x) = \int Q(s, x; s+r, dy) f(s+r, y) \\ = 0, \quad \text{ailleurs,}$$

pour toute fonction mesurable et bornée f sur $[a, b] \times R^d$.

La propriété de semi-groupe de P_r découle de celle de la propriété de Markov de $Q_{(s,x)}$ défini précédemment.

Soit $\{X_t, t \in [a, b], Q\}$ un processus de Markov temporellement non homogène de probabilité de transition $Q(s, x; t, B)$ et une distribution initiale μ , i.e. $Q = Q_\mu$ et soit $\{(t, X_t), t \in [a, b], Q\}$ le processus spatiotemporel. Notons $\mu_t(B)$ la distribution de X_t i.e.

$$(2.2.4) \quad \mu_t(B) = Q(X_t \in B)$$

Nous définissons, en appliquant l'équation (2.1.5), une mesure excessive $m(dtdx)$ par

$$(2.2.5) \quad \int m(dtdx) f(t, x) = \int_0^{b-a} dr \int \mu(dx) P_r f(a, x)$$

Ainsi nous avons

Lemme 2.2.1. *La mesure excessive $m(dtdx)$, définie par l'équation (2.2.5), de la probabilité de transition spatiotemporelle $P_r((s, x), dtdy)$ (i.e. du processus spatiotemporel $\{(t, X_t), t \in [a, b], Q\}$) est donnée par*

$$(2.2.6) \quad m(dtdx) = dt \mu_t(dx)$$

$$\text{où} \quad \mu_t(B) = Q[X_t \in B].$$

En vertu de l'homogénéité temporelle du processus spatiotemporel, nous pouvons donc parler de la dualité spatiotemporelle par rapport à $m(dtdx)$. La dualité spatiotemporelle joue un rôle clé dans la théorie quantique.

Nous assumerons pour éviter une complexité technique que $Q(s, x; t, B)$ possède une densité de transition $q(s, x; t, y)$. Ainsi

$$\mu_t(x) = \int \mu(dz) q(a, z; t, x), \quad t > a$$

Le semi-groupe spatiotemporel peut être représenté par

$$(2.2.7) \quad P_r f(s, x) = \int q(s, x; s+r, y) dy f(s+r, y), \quad \text{si } a \leq s < s+r \leq b \\ = 0, \quad \text{ailleurs.}$$

Avec la convention que $P_0 = 1$.

En outre, nous définissons

$$(2.2.8) \quad \hat{q}(s, x; t, y) = \mu_s(x) q(s, x; t, y) \frac{1}{\mu_t(y)}, \quad \text{si } \mu_t(y) > 0 \\ = 0, \quad \text{ailleurs.}$$

Ce qui est la densité de transition temporellement inversée. Nous définissons également

$$(2.2.9) \quad \hat{Q}(s, dx; t, y) = dx \cdot \hat{q}(s, x; t, y) \quad s < t.$$

et la probabilité de transition spatiotemporelle inversée

$$(2.2.10) \quad \hat{P}_r(dsd x, (t, y)) = \delta_{t-r}(ds) \hat{Q}(s, dx; t, y), \quad t-r \geq 0 \\ = 0, \quad \text{ailleurs.}$$

Il est clair que $\hat{P}_r(dsd x, t, y)$ est la probabilité que si l'on remonte le temps en partant de la position spatiotemporelle $(t, y) \in [a, b] \times R^d$, nous trouvons notre particule dans une région infinitésimale $dsd x \subset [a, b] \times R^d$, où $s < t$.

Nous pouvons alors définir le semi-groupe \hat{P}_r spatiotemporel inversé par

$$(2.2.11) \quad \hat{P}_t g(t, y) = \int g(s, x) \hat{P}_r(dsd x, (t, y)) = \int g(t-r, x) dx \cdot \hat{q}(t-r, x; t, y), \quad \text{si } a \leq t-r < t \leq b \\ = 0, \quad \text{ailleurs.}$$

Avec la convention que $\hat{P}_0 = 1$, où \hat{P}_r s'applique à $g(s, x)$ en partant de la droite. Nous avons alors.

Théorème 2.2.2. *Les semi-groupes spatiotemporels P_r et \hat{P}_r sont en dualité spatiotemporelle par rapport à la mesure excessive spatiotemporelle $m(dtdx)$ définie par l'équation (2.2.5), i.e,*

$$(2.2.12) \quad \int g(t, x) P_r f(t, x) m(dtdx) = \int \hat{P}_r g(t, x) f(t, x) m(dtdx)$$

pour toutes fonctions $f, g \in B([a, b] \times R^d)$.

Nous conviendrons de noter le processus de Markov à évolution temporelle normale par $(X_t, t \uparrow \in [a, b], Q)$ et le processus de Markov temporellement inversé par $(X_t, t \downarrow \in [a, b], Q)$. Nous avons alors

Théorème 2.2.3. *Le processus temporellement inversé $(X_t, t \downarrow \in [a, b], Q)$ a une représentation de Kolmogorov temporellement inversé avec la probabilité de transition*

$\hat{Q}(s, dx; t, y) = dx \cdot \hat{q}(s, x; t, y)$, où $\hat{q}(s, x; t, y)$ représente la densité de transition temporellement inversée donnée dans (2.2.8); ceci étant, pour $a < t_1 < \dots < t_{n-1} < b$ et toute fonction mesurable $f(x_0, \dots, x_n)$ sur l'espace produit $(R^d)^{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$

$$(2.2.13) \quad Q[f(X_a, X_{t_1}, \dots, X_{t_{n-1}}, X_b)] = \\ \int f(x_0, \dots, x_n) \hat{Q}(a, dx_0; t, x_1) \hat{Q}(t_1, dx_1; t_2, x_2) \dots \\ \dots \hat{Q}(t_{n-2}, dx_{n-2}; t_{n-1}, x_{n-1}) \hat{Q}(t_{n-1}, dx_{n-1}; b, x_n) \mu_b(dx_n).$$

Ce qui doit être lu de droite à gauche inversement à l'écoulement de temps normal.

L'équation (2.2.13) est la **représentation de Kolmogorov temporellement inversée** de la mesure de probabilité Q , et sera notée par

$$(2.2.14) \quad Q = \lll \hat{Q} \mu_b \rrr,$$

en opposition avec la notation dans (1.3.6).

la notation (2.2.14) indique que Q est définie par la formule intégrale à droite de l'équation (2.2.13) avec une distribution terminale donnée μ_b et la probabilité de transition temporellement inversée $\hat{Q}(s, B; t, y)$, et que le temps avance inversement à l'écoulement normal $t = a \ll t = b$.

Note: La formule de dualité dans (2.2.12) joue un rôle prépondérant dans la description du mouvement des particules quantiques (*relativiste et non relativiste* *).

2.3. Inversion du temps et représentation de Schrödinger

La condition de normalité (1.3.2) a été supposée vérifiée jusqu'à maintenant, ou du moins nous avons assumé qu'une probabilité de transition $Q(s, x; t, B)$ satisfait

$$Q(s, x; t, R^d) \leq 1,$$

sur laquelle on peut effectuer une opération de compactification en lui adjoignant un point limite ∂ (cf. chapitre 1). Cependant, la condition de normalité n'est pas toujours vérifiée, comme c'est le cas dans la théorie quantique, c'est-à-dire, on peut avoir

$$(2.3.1) \quad Q(s, x; t, R^d) > 1$$

Prenons un cas typique simple. L'équation de diffusion avec une fonction potentielle $V(x)$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma^2 \Delta u + V(x) \cdot u.$$

joue un rôle important (c'est l'équation du mouvement des particules quantiques non relativistes *) où une fonction potentielle $V(x)$ peut prendre des valeurs positives et négatives. De ce fait, la solution fondamentale $p_t(x, y)$ de l'équation ne satisfait pas la condition de normalité. En fait, l'inégalité (2.3.1) peut se produire à cause du terme potentiel $V(x)$ dans l'équation.

L'existence de la densité de transition est toujours assumée. Quand celle-ci ne vérifie pas la condition de normalité, la représentation de Kolmogorov dans (1.3.3) n'est plus applicable à la densité de transition pour construire une mesure de probabilité Q . Il paraît alors sans espoir de construire un processus stochastique à partir de $q(s, x; t, y)$. Cependant, en suivant *Schrödinger* (1936), nous pouvons construire un processus stochastique $(X_t, t \in [a, b], Q)$.

Pour ce faire, nous avons besoin d'une paire de fonction $\{\hat{\phi}_a, \phi_b\}$, que l'on convient d'appeler la *loi entrée-sortie* (traduction littérale de l'anglais *entrance-exist law*), laquelle satisfait

$$(2.3.2) \quad \int \hat{\phi}_a(x) dx \cdot p(a, x; b, y) \phi_b(y) dy = 1$$

à la place de

$$\int p(s, x; t, y) dy = 1.$$

Nous définissons dès lors une paire de fonctions $\phi(t, x)$ et $\hat{\phi}(t, x)$ par

$$(2.3.3) \quad \begin{aligned} \phi(t, x) &= \int p(t, x; b, y) \phi_b(y) dy \\ \hat{\phi}(t, x) &= \int \hat{\phi}_a(z) dz \cdot p(a, z; t, x) \end{aligned}$$

où nous assumons la continuité quand $t \uparrow b$ et $t \downarrow a$, respectivement. En outre, nous requérons

$$(2.3.4) \quad \hat{\phi}(t, x) \phi(t, x) \geq 0$$

Alors la condition dans (2.3.2), avec l'équation de Chapman-Kolmogorov, implique

$$(2.3.5) \quad \int \hat{\phi}(t, x) \phi(t, x) dx = 1$$

Ce qui est une condition de normalité. En plus, nous obtenons un *flux de densités de distribution*

$$(2.3.6) \quad \mu(t, x) = \hat{\phi}(t, x)\phi(t, x).$$

Avec le triplet $\{ p(s, x; t, t), \hat{\phi}_a, \phi_b \}$ nous construisons un processus stochastique $(X_t, t \in [a, b], Q)$ de densité de distribution $\mu(t, x)$ définie dans (2.3.6).

Suivant une idée de *Schrödinger* (1931), nous définissons une mesure de probabilité Q , en termes d'un triplet donné $\{ p(s, x; t, y), \hat{\phi}_a, \phi_b \}$, par

$$(2.3.7) \quad Q[f(X_a, X_{t_1}, \dots, X_{t_{n-1}}, X_b)] = \\ = \int dx_0 \hat{\phi}_a(x_0) p(a, x_0; t_1, x_1) dx_1 p(t_1, x_1; t_2, x_2) dx_2 \cdots \\ \cdots p(t_{n-1}, x_{n-1}; b, x_n) \phi_b(x_n) dx_n f(x_0, \dots, x_n),$$

où $a < t_1 < \cdots < t_{n-1} < b$ et $f(x_0, \dots, x_n)$ est une fonction mesurable bornée sur $(\mathbb{R}^d)^{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$. Pour des raisons de simplicité, nous assumerons que $\hat{\phi}_a$ et ϕ_b sont non négatives, encore qu'elles puissent prendre des valeurs négatives dans le cas général. La condition de normalité dans (2.3.2) et l'équation de *Chapman-Kolmogorov* pour $p(s, x; t, y)$ garantissent que (2.3.7) définit une mesure de probabilité sur $\Omega = (\mathbb{R}^d)^{[a, b]}$.

Prenant pour garanti que la mesure de probabilité construite ci-dessus est bien définie sur Ω_a ou Ω_c , (pour la construction complète, cf. [171], chapitre 5), nous la représentons par

$$(2.3.8) \quad Q = [\hat{\phi}_a p \gg \ll p \phi_b]$$

et appelons ceci **la représentation de Schrödinger** de la mesure de probabilité Q . *i.e.*, du processus stochastique $(X_t, t \in [a, b], Q)$. Cette représentation (cf. [171], Chapitre 3) est exclusivement pour l'*équation du mouvement*.

Le fait à retenir, qui est exprimé par la représentation dans (2.3.8), est que la mesure de probabilité Q est définie dans une forme temporellement symétrique. En fait, nous lisons la formule dans (2.3.8) dans le sens temporellement inversé de droite à gauche ou dans le sens de l'évolution temporelle normale de gauche à droite. Nous devons, de plus, prêter attention au fait que l'équation (2.3.7) contient des données $\hat{\phi}_a$ relatives à l'instant initiale $t = a$ et aussi ϕ_b relatives à l'instant terminale $t = b$; autrement dit, *les états intermédiaires à n'importe quel instant $t \in (a, b)$ dépendent tout autant des états futures que des états passés*, et par conséquent l'équation (2.3.7) n'exprime pas la propriété de Markov (il y a perte de cette propriété). De toute évidence, nous prédisons un état intermédiaire X_t à l'instant $t \in (a, b)$ en se basant sur les données (l'information) $F_a^r \vee F_s^b$ où $r < t < s$. Nous appelons

$$(X_t, t \in [a, b], F_a^r \vee F_s^b, Q)$$

le **Processus de Schrödinger**. (pour une construction plus détaillée de ce processus, voir [171], chapitre 5).

Assumons que l'on dispose des densités de distribution initiale et terminale $\mu_a(x)$ et $\mu_b(x)$ comme données expérimentales. Combinant les équations (2.3.3) et (2.3.6), nous voyons que la paire de fonctions $\hat{\phi}_a$ et ϕ_b doit satisfaire un système d'équations Intégrales non linéaires

$$(2.3.9) \quad \mu_a(x) = \hat{\phi}_a(x) \left(\int p(a, x; b, y) \phi_b(y) dy \right) \\ \mu_b(x) = \left(\int \hat{\phi}_a(z) dz \cdot p(a, z; b, x) \right) \phi_b(x)$$

La résolution de ce système dont l'existence était assumée par *Schrödinger*, n'est pas chose aisée (ce fait est discuté au chapitre 5, dans [171]).

Le processus de *Schrödinger* $(X_t, t \in [a, b], F_a^r \vee F_s^b, Q)$ est défini par une forme symétrique par rapport à l'inversion du temps, mais n'exprime pas la propriété de Markov parce qu'il dépend de la loi *entrée-sortie* $\{\hat{\phi}_a, \phi_b\}$, autrement dit, nous adoptons la filtration $F_a^r \vee F_s^b$ d'interpolation. Par ailleurs, un processus stochastique défini par la représentation de Kolmogorov n'a pas de forme symétrique, mais possède la propriété de Markov. Nous devons donc clarifier la relation entre les deux représentations. La mesure de probabilité Q possède en fait les deux représentations simultanément comme il sera énoncé ci-dessous dans le théorème 2.3.1. Cela signifie que si nous construisons des processus de *Schrödinger*, nous obtenons un processus de Markov. Cependant, pour la propriété de Markov nous avons besoin d'une autre filtration F_a^t à la place de $F_a^r \vee F_s^b$.

Supposons donnée une mesure de probabilité sous la forme de la représentation de *Schrödinger* (2.3.7). Pour la représentation de Kolmogorov, nous définissons une paire de densités de transition par

$$(2.3.10) \quad q(s, x; t, y) = \frac{1}{\phi(s, x)} p(s, x; t, y) \phi(t, y), \text{ et}$$

$$(2.3.11) \quad \hat{q}(s, x; t, y) = \hat{\phi}(s, x) p(s, x; t, y) \frac{1}{\hat{\phi}(t, y)}$$

Nous pouvons alors formuler l'un des théorèmes fondamentaux de la théorie de l'inversion du temps des processus de Markov.

2.3.1. Théorème (Nagasawa (1993))

La mesure de probabilité d'un processus (de Markov) stochastique $(X_t, t \in [a, b], Q)$ possède trois représentations

$$\begin{aligned} Q &= [\hat{\phi}_a p \gg \ll p \phi_b] \\ &= [\hat{\phi}_a \phi_a q \gg] \\ &= \ll \hat{q} \hat{\phi}_b \phi_b \end{aligned}$$

où la première ligne symbolise la représentation de Schrödinger, la seconde est la représentation de Kolmogorov, et la troisième est la représentation de Kolmogorov temporellement inversée.

Le théorème ci-dessus annonce le fait que nous pouvons choisir trois types de prédiction associés aux filtrations $\{F_a^r \vee F_s^b\}$, $\{F_a^t\}$ et $\{F_t^b\}$. Toutefois, nous devons prendre garde au fait que nous avons besoin d'une fonction de transition différente pour chaque type de prédiction.

Note historique

Historiquement, en 1931 les travaux de Schrödinger portaient sur l'inversion du temps, plus précisément sur « *une formule symétrique dans l'inversion du temps* » (du mouvement Brownien en particulier), et il réussit à découvrir par là la représentation de Schrödinger. Alors, motivé par ce dernier résultat, Kolmogorov en 1936-1937 donna une caractérisation de l'inversion du temps en termes de la dualité de probabilité de transition des processus de Markov par rapport à une mesure invariante, où il a naturellement considéré le problème sous la représentation de Kolmogorov, et prouva son célèbre théorème sur la relation entre *le coefficient de déplacement** et la densité de distribution d'un processus de diffusion. Il est important de faire remarquer qu'il existait une correspondance personnelle directe entre les

deux hommes à cette époque. Pour généraliser le théorème de Kolmogorov de l'inversion du temps, les L -temps d'arrêt furent introduits et la dualité par rapport à des mesures excessives d'un type particulier fut prouvée par M.Nagasawa 1964 et dès lors l'équivalence des représentations de Kolmogorov et de Schrödinger fut démontrée en termes de processus de Markov spatiotemporels (cf. Nagasawa 1993). Il est important de noter que les deux représentations sont indispensables pour développer la théorie stochastique des particules quantiques, plus précisément, la représentation de Schrödinger est pour l'équation du mouvement et la représentation de Kolmogorov est pour l'équation de la dynamique.

3. Trajectoires des particules quantiques et fractales.

Dans l'interprétation stochastique de Nelson de la mécanique d'onde, la trajectoire $x(t)$ d'une particule de masse m est une fonction continue non différentiable. R.P. Feynman a montré, sans utilisé le terme fractal introduit par Mandelbrot en 1975, en se basant sur l'approche de Abbot et Wise (1981) que les trajectoires quantique sont fractales de dimension 2.

Une courbe fractale est une courbe continue non différentiable, générée par une série d'opérations infinies qui font croître la longueur par un facteur donné. La courbe de Koch par exemple (cf. figure 5, chapitre 2), augmente la longueur d'un segment droit dans chaque opération par un facteur $4/3$ quand Δx devient $1/3 \Delta x$ si bien que la courbe finale obtenue après une suite infinie d'opérations a une longueur infinie.

Nous donnons ci-après des idées de la démonstration de Nelson et nous renvoyons le lecteur à la référence [171] pour connaître plus en détail l'interprétation stochastique de Nelson de la mécanique quantique. Dans cette démonstration, il est donné une autre formulation intéressante de la dimension de Hausdorff.

Hausdorff a défini une longueur fractale associée à une résolution Δx et un coefficient de dimension fractale D ($\neq 1$) en posant :

$$(3.1) \quad L = l(\Delta x)^{D-1}$$

Le coefficient D est déterminé par le fait que L doit être indépendante de la résolution Δx , au moins quand $\Delta x \rightarrow 0$.

Par une courbe fractale D -dimensionnelle, nous nous référons à une courbe continue non différentiable satisfaisant la condition de Hausdorff pour $D \neq 1$.

La discrétisation de la trajectoire quantique en n éléments Δt donnera une longueur moyenne de la trajectoire quantique

$$\langle l \rangle = n \langle \Delta l \rangle \text{ avec } t_f - t_i = n \Delta t.$$

L'élément avec la longueur moyenne couvert par une particule quantique est déterminé par la relation d'incertitude de Heisenberg

$$(3.2) \quad \langle l \rangle \sim \frac{\bar{h}}{\langle \Delta p \rangle} = \frac{\bar{h}}{m} \left\langle \frac{\Delta t}{\Delta x} \right\rangle = \frac{\bar{h}}{mn} \frac{(t_f - t_i)}{\langle \Delta x \rangle},$$

où \bar{h} , m et p sont respectivement une constante qui égale à $h/2$ avec h la constante de Planck que l'on retrouve dans la relation d'Einstein de l'énergie $E = hv$ où v est dite la fréquence de la lumière ou de propagation, m est la masse de la particule et p est égale à h/λ où $\lambda = u/v$ est dite la longueur de l'onde avec u la vitesse.

On peut expliquer brièvement le principe d'incertitude de Heisenberg comme suit : on peut montrer que si deux observables, qui sont aussi représentés par des opérateurs, c'est-à-dire des valeurs d'un système que l'on peut mesurer (C'est le cas de la position d'une particule, de sa vitesse, de sa charge électrique, etc.), ne commutent pas (*i.e.*, on ne peut pas intervertir les mesures indifféremment), alors il est impossible d'avoir un état ayant une valeur précise et unique pour les deux observables à la fois (cela est lié à l'ordre des mesures). C'est le principe d'incertitude qui est une des conséquences les plus extraordinaires de la physique

quantique. Par exemple, la vitesse et la position sont deux opérateurs qui ne commutent pas. Ils sont donc sujets au principe d'incertitude. Celui-ci dit qu'il est impossible de mesurer avec précision aussi grande que voulue à la fois la vitesse et la position d'une particule. Plus précisément, si Δx est l'incertitude sur la position (dans une direction donnée) et Δv l'imprécision sur la mesure de la vitesse (dans la même direction). Alors on aura

$$\Delta x \Delta v \geq \frac{h}{2\pi m},$$

où m est la masse et h la constante de Planck.

Revenons maintenant à la preuve. Cela donnera donc la longueur fractale moyenne $\langle L \rangle$ avec (3.1) et (3.2),

$$\langle L \rangle = \langle l \rangle \langle \Delta x \rangle^{D-1} = \frac{h (t_f - t_i)}{m \langle \Delta x \rangle} \langle \Delta x \rangle^{D-1}.$$

Pour que la longueur de Hausdorff soit indépendante de Δx , il est nécessaire et suffisant d'avoir $D = 2$, ce qui montre que la trajectoire quantique est une courbe fractale de dimension fractale 2.

Nous proposons de caractériser, en utilisant les outils de la géométrie fractale introduits précédemment, les trajectoires quantiques, ce qui nécessite une connaissance encore plus profonde des notions de mécanique quantique pour lesquelles nous nous référons à Elbaz (1998) et également de bien savoir la construction de la mesure de probabilité temporellement inversée et celle de la mesure de probabilité qui peut être lue dans les deux sens du temps, introduites plus haut, pour lesquelles nous nous référons à Nagasawa (2000). Ainsi nous posons les deux questions suivantes, la première portant sur la représentation de Kolmogorov temporellement inversée, et la seconde qui porte sur la représentation de Schrödinger.

Question 3.1. Caractériser en calculant la dimension de Hausdorff ou la dimension d'empilement ou autre dimension vue plus haut, la trajectoire d'une particule quantique en utilisant la représentation de Kolmogorov de la mesure de probabilité temporellement inversée.

Question 3.2. Caractériser en calculant la dimension de Hausdorff ou la dimension d'empilement ou autre dimension vue plus haut, la trajectoire d'une particule quantique en utilisant la représentation de Schrödinger de la mesure de probabilité qui peut être lue dans les deux sens du temps normal et inversé.

Références

- [1] R. J. Adler (1981), *The Geometry of Random Fields*. Wiley, New York.
- [2] C. Bandt (1992), The tangent distribution for self-similar measures. Lecture at the 5th Conference on Real Analysis and Measure Theory, Capri.
- [3] C. Bandt (2001), Local geometry of fractals given by tangent measure distributions. *Monatsh. Math.* 133, 265-280.
- [4] M. T. Barlow (1981), Zero-one laws for the excursions and range of a Lévy process. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 55, 149-163.
- [5] M. T. Barlow (1985), Continuity of local times for Lévy processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 69, 23-35.
- [6] M. T. Barlow (1988), Necessary and sufficient conditions for the continuity of local time of Lévy processes. *Ann. Probab.* 16, 1389-1427.
- [7] M. T. Barlow (1998), Diffusions on fractals. In: *Lectures on Probability Theory and Statistics (Saint Flour, 1995)*, pp. 1-121, Lecture Notes in Math., 1690, Springer-Verlag, Berlin.
- [8] M. T. Barlow and R. F. Bass (1989), The construction of Brownian motion on the Sierpinski carpet. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Statist.* 25, 225-257.
- [9] M. T. Barlow and R. F. Bass (1990), Local times for Brownian motion on the Sierpinski carpet. *Probab. Th. Rel. Fields* 85, 91-104.
- [10] M. T. Barlow and R. F. Bass (1992), Transition densities for Brownian motion on the Sierpinski carpet. *Probab. Th. Rel. Fields* 91, 307-330.
- [11] M. T. Barlow and R. F. Bass (1999), Brownian motion and harmonic analysis on Sierpinski carpets. *Canad. J. Math.* 51, 673-744.
- [12] M. T. Barlow and J. Hawkes (1985), Application de l'entropie métrique à la continuité des temps locaux des processus de Lévy. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 301, 237-239.
- [13] M. T. Barlow and E. A. Perkins (1988), Brownian motion on the Sierpinski gasket. *Probab. Th. Rel. Fields* 79, 543-623.
- [14] M. T. Barlow, E. A. Perkins and S. J. Taylor (1986a), The behaviour and construction of local times for Lévy processes. In: *Seminar on Stochastic Processes, (Evanston, Ill., 1984)*, pp. 23-54, Progr. Probab. Statist., 9, Birkhäuser Boston, MA.
- [15] M. T. Barlow, E. A. Perkins and S. J. Taylor (1986b), Two uniform intrinsic constructions for the local time of a class of Lévy processes. *Illinois J. Math.*, 30, 19-65.
- [16] R. F. Bass (1988a), Uniqueness in law for pure jump Markov processes. *Probab. Th. Rel. Fields* 79, 271-287.
- [17] R. F. Bass (1988b), Occupation time densities for stable-like processes and other pure jump Markov processes. *Stochastic Process. Appl.* 29, 65-83.
- [18] R. F. Bass, K. Burdzy and D. Khoshnevisan (1994), Intersection local time for points of infinite multiplicity. *Ann. Probab.* 22, 566-625.
- [19] R. F. Bass and T. Kumagai (2000), Laws of the iterated logarithm for some symmetric diffusion processes. *Osaka J. Math.* 37, 625-650.
- [20] P. Becker-Kern, M. M. Meerschaert and H. P. Scheffer (2002), Hausdorff dimension of operator stable sample paths. *Monatsh. Math.*, to appear.
- [21] T. Bedford and A. M. Fisher (1992), Analogues of the Lebesgue density theorem for fractal sets of reals and integers. *Proc. London Math. Soc.* (3) 64, 95-124.
- [22] C. Berg and G. Forst (1975), *Potential Theory on Locally Compact Abelian Groups*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg.
- [23] S. M. Berman (1985), Joint continuity of the local times of Markov processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 69, 37-46.
- [24] J. Bertoin (1995), Some applications of subordinators to local times of Markov processes. *Forum Math.* 7, 629-644.
- [25] J. Bertoin (1996), *Lévy Processes*. Cambridge Univ. Press.
- [26] J. Bertoin (1999), Subordinators: examples and applications. In: *Lectures on Probability Theory and Statistics (Saint-Flour, 1997)*, pp. 1-91, Lecture Notes in Math., 1717, Springer-Verlag, Berlin.

- [27] R. Blackburn (2000), Large deviation of local times of Lévy processes. *J. Theoret. Probab.* 13, 825-842.
- [28] R. M. Blumenthal and R. Gettoor (1960a), Some theorems on stable processes. *Trans. Amer. Math. Soc.* 95, 263-273.
- [29] R. M. Blumenthal and R. Gettoor (1960b), A dimension theorem for sample functions of stable processes. *Illinois J. Math.* 4, 370-375.
- [30] R. M. Blumenthal and R. Gettoor (1961), Sample functions of stochastic processes with stationary independent increments. *J. Math. Mech.* 10, 493-516.
- [31] R. M. Blumenthal and R. Gettoor (1962), The dimension of the set of zeros and graph of a symmetric stable process. *Illinois J. Math.* 6, 308-316.
- [32] R. M. Blumenthal and R. Gettoor (1964), Local times for Markov processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 3, 50-74.
- [33] R. M. Blumenthal and R. Gettoor (1968), *Markov Processes and Potential Theory*. Academic Press, New York.
- [34] J. Bretagnolle (1971), Résultats de Kesten sur les processus à accroissements indépendants, *Séminaire de Probabilités V*, pp. 21-36, Lecture Notes in Math., 191, Springer-Verlag, Berlin.
- [35] R. Cawley and R. D. Mauldin (1992), Multifractal decomposition of Moran fractals. *Adv. Math.* 92, 196-236.
- [36] Z.-Q. Chen and T. Kumagai (2002), Heat kernel estimates for stable-like processes on d -sets. *Preprint*.
- [37] Z. Ciesielski and S. J. Taylor (1962), First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path. *Trans. Amer. Math. Soc.* 103, 434-450.
- [38] M. Csörgő and P. Révész (1978), How small are the increments of a Wiener process? *Stoch. Process. Appl.* 8, 119-129.
- [39] P. Deheuvels and M. A. Lifshits (1997), On the Hausdorff dimension of the set generated by exceptional oscillations of a Wiener process. *Studia Sci. Math. Hungar.* 33, 75-110.
- [40] P. Deheuvels and M. D. Mason (1998), Random fractal functional laws of the iterated logarithm. *Studia Sci. Math. Hungar.* 34, 89-106.
- [41] C. Dellacherie, B. Maisonneuve and P. A. Meyer (1992), *Probabilités et Potentiel*, vol. V, Herman, Paris.
- [42] A. Dembo, Y. Peres, J. Rosen and O. Zeitouni (1999), Thick points for transient symmetric stable processes. *Electron. J. Probab.* 4, No. 10, 13 pp.
- [43] A. Dembo, Y. Peres, J. Rosen and O. Zeitouni (2000a), Thick points for spatial Brownian motion: multifractal analysis of occupation measure. *Ann. Probab.* 28, 1-35.
- [44] A. Dembo, Y. Peres, J. Rosen and O. Zeitouni (2000b), Thin points for Brownian motion. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Statist.* 36, 749-774.
- [45] A. Dembo, Y. Peres, J. Rosen and O. Zeitouni (2001), Thick points for planar Brownian motion and the Erdős-Taylor conjecture on random walk. *Acta Math.* 186, 239-270.
- [46] A. Dembo, Y. Peres, J. Rosen and O. Zeitouni (2002), Thick points for intersections of planar sample paths. *Trans. Amer. Math. Soc.* 354, 4969-5003.
- [47] A. Deng and L. Liu (1999), Dimension results for Ornstein-Uhlenbeck type Markov process. *Acta Math. Sci. (Chinese)* 19, 417-424.
- [48] D. Dolgopyat and V. Sidorov (1995), Multifractal properties of the sets of zeros of Brownian paths. *Fund. Math.* 147, 157-171.
- [49] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan (1977), On laws of the iterated logarithm for local times. *Comm. Pure Appl. Math.* 30, 707-753.
- [50] C. Dupuis (1974), Mesure de Hausdorff de la trajectoire de certains processus à accroissements indépendants et stationnaires. *Séminaire de Probabilités VIII*, pp. 37-77, Lecture Notes in Math., 381, Springer-Verlag, Berlin.
- [51] E. B. Dynkin (1985), Random fields associated with multiple points of the Brownian motion. *J. Funct. Anal.* 62, 397-434.
- [52] G. Edgar (1998), Integral, Probability, and fractal measures. American Mathematical Society, Volume 37, Number 4, Pages 481-498.
- [53] W. Ehm (1981), Sample function properties of multi-parameter stable processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 56, 195-228.
- [54] E. Elbaz (1998), *The Quantum Theory of Particles, Fields, and Cosmology*. Springer.

- [55] S. N. Evans (1987a), Multiple points in the sample paths of a Lévy process. *Probab. Th. Rel. Fields* 76, 359-367.
- [56] S. N. Evans (1987b), Potential theory for a family of several Markov processes. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Statist.* 23, 499-530.
- [57] K. J. Falconer (1990), *Fractal Geometry - Mathematical Foundations and Applications*. Wiley & Sons, Chichester.
- [58] K. J. Falconer (1997), *Techniques in Fractal Geometry*, Wiley & Sons, Chichester.
- [59] K. J. Falconer (2002a), Tangent fields and the local structure of random fields. *J. Theoret. Probab.* 15, 731-750.
- [60] K. J. Falconer (2002b), The local structure of random processes. *J. London Math. Soc.*, to appear.
- [61] K. J. Falconer and J. D. Howroyd (1997), Packing dimensions for projections and dimension profiles. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* 121, 269-286.
- [62] K. J. Falconer and Y. Xiao (1995), Average densities of the image and zero set of stable processes. *Stoch. Process. Appl.* 55, 271-283.
- [63] P. J. Fitzsimmons, B. M. Hambly and T. Kumagai (1994), Transition density estimates for Brownian motion on affine nested fractals. *Comm. Math. Phys.* 165, 595-620.
- [64] P. J. Fitzsimmons and T. S. Salisbury (1989), Capacity and energy for multiparameter processes. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Statist.* 25, 325-350.
- [65] B. E. Fristedt (1974), Sample functions of stochastic processes with stationary, independent increments. *Adv. in Probab. III*, pp. 241-396, Dekker.
- [66] B. E. Fristedt and W. E. Pruitt (1971), Lower functions for increasing random walks and subordinators. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 18, 167-182.
- [67] B. E. Fristedt and W. E. Pruitt (1972), Uniform lower functions for subordinators. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 24, 63-70.
- [68] B. Fristedt and S. J. Taylor (1973), Strong variation for the sample functions of a stable process. *Duke Math. J.* 40, 259-278.
- [69] B. Fristedt and S. J. Taylor (1992), The packing measure of a general subordinator. *Probab. Th. Rel. Fields* 92, 493-510.
- [70] M. Fukushima, T. Shima and M. Takeda (1999), Large deviations and related LIL's for Brownian motions on nested fractals. *Osaka J. Math.* 36, 497-537.
- [71] D. Geman, J. Horowitz and J. Rosen (1984), A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. *Ann. Probab.* 12, 86-107.
- [72] R. Gettoor and H. Kesten (1972), Continuity of local times for Markov processes. *Compositio Math.* 24, 277-303.
- [73] S. Graf (1995), On Bandt's tangential distribution for self-similar measures. *Monatsh. Math.* 120, 223-246.
- [74] S. E. Graversen and J. Vuolle-Apiala, α -self-similar Markov processes. *Probab. Th. Rel. Fields* 71 (1986), 149-158.
- [75] P. S. Griffin (1985), Laws of the iterated logarithm for symmetric stable processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 68, 271-285.
- [76] J. Hawkes (1971a), On the Hausdorff dimension of the intersection of the range of a stable process with a Borel set. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 19, 90-102.
- [77] J. Hawkes (1971b), Some dimension theorems for the sample functions of stable processes. *Indiana Univ. Math. J.* 20, 733-738.
- [78] J. Hawkes (1971c), A lower Lipschitz condition for the stable subordinator. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 17, 23-32.
- [79] J. Hawkes (1973), The measure of the range of a subordinator. *Bull. London Math. Soc.* 5, 21-28.
- [80] J. Hawkes (1974), Local times and zero sets for processes with infinitely divisible distributions. *J. London Math. Soc. (2)* 8, 517-525.
- [81] J. Hawkes (1975), On the potential theory of subordinators. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 33, 113-132.
- [82] J. Hawkes (1978a), Measures of Hausdorff type and stable processes. *Mathematika* 25, 202-210.
- [83] J. Hawkes (1978b), Image and intersection sets for subordinators. *J. London Math. Soc. (2)* 17, 567-576.
- [84] J. Hawkes (1978c), Multiple points for symmetric Lévy processes. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* 83, 83-90.
- [85] J. Hawkes (1979), Potential theory of Lévy processes. *Proc. London Math. Soc. (3)* 38,

335-352.

- [86] J. Hawkes (1998), Exact capacity results for stable processes. *Probab. Th. Rel. Fields* 112, 1-11.
- [87] J. Hawkes and W. E. Pruitt (1974), Uniform dimension results for processes with independent increments. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 28, 277-288.
- [88] W. J. Hendricks (1972), Hausdorff dimension in a process with stable components-an interesting counterexample. *Ann. Math. Statist.* 43, 690-694.
- [89] W. J. Hendricks (1973), A dimension theorem for sample functions of processes with stable components. *Ann. Probab.* 1, 849-853.
- [90] W. J. Hendricks (1974), Multiple points for a process in R^2 with stable components. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 28, 113-128.
- [91] W. J. Hendricks (1983), A uniform lower bound for Hausdorff dimension for transient symmetric Lévy processes. *Ann. Probab.* 11, 589-592.
- [92] W. Hoh (1998), A symbolic calculus for pseudo-differential operators generating Feller semigroups. *Osaka J. Math.* 35, 789-820.
- [93] W. Hoh (2000), Pseudo differential operators with negative definite symbols of variable order. *Rev. Mat. Iberoamericana* 16, 219-241.
- [94] J. Horowitz (1968), The Hausdorff dimension of the sample path of a subordinator. *Israel J. Math.* 6, 176-182.
- [95] J. D. Howroyd (1994), On the theory of Hausdorff measures in metric spaces. *Ph.D. Thesis*, University of London.
- [96] J. D. Howroyd (2001), Box and packing dimension of projections and dimension profiles. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* 130, 135-160.
- [97] X. Hu and S. J. Taylor (1994), Fractal properties of products and projections of measures in R^d . *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* 115, 527-544.
- [98] X. Hu and S. J. Taylor (1997), The multifractal structure of stable occupation measure. *Stoch. Process. Appl.* 66, 283-299.
- [99] X. Hu and S. J. Taylor (2000), Multifractal structure of a general subordinator. *Stoch. Process. Appl.* 88, 245-258.
- [100] W. N. Hudson and J. D. Mason (1982), Operator-self-similar processes in a finite-dimensional space. *Trans. Amer. Math. Soc.* 273, 281-297.
- [101] N. Ikeda and S. Watanabe (1981), *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. North-Holland Publishing Co., New York.
- [102] N. Jacob (1996), *Pseudo-differential Operators and Markov Processes*. Mathematical Research, 94. Akademie Verlag, Berlin.
- [103] N. Jacob (1998), Characteristic functions and symbols in the theory of Feller processes. *Potential Analysis* 8, 61-68.
- [104] N. Jacob and R. L. Schilling (2001), Lévy-type processes and pseudo-differential operators. In: *Lévy Processes: Theory and Applications*, pp. 139-168, (O. E. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch and S. I. Resnick, eds.), Birkhäuser, Boston, MA.
- [105] S. Jaffard (1999), The multifractal nature of Lévy processes. *Probab. Th. Rel. Fields* 114, 207-227.
- [106] S. Jaffard (2001), Wavelet expansions, function spaces and multifractal analysis. In: *Twentieth Century Harmonic Analysis-a Celebration (Il Ciocco, 2000)*, pp. 127-144, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 33, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.
- [107] N. C. Jain and S. E. Pruitt (1968), The correct measure function for the graph of a transient stable process. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 9, 131-138.
- [108] N. C. Jain and S. E. Pruitt (1969), Collision of stable processes. *Illinois J. Math.* 13, 141-148.
- [109] M. Järvenpää (1994), On the upper Minkowski dimension, the packing dimension, and orthogonal projections. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A Dissertat.* 99, 34 pp.
- [110] J.-P. Kahane (1983), Points multiples des processus de Lévy symétriques stables restreints un ensemble de valeurs du temps. *Seminar on Harmonic Analysis, 1981-1982*, pp. 74-105, *Publ. Math. Orsay* 83, 2, Univ. Paris XI, Orsay.
- [111] J.-P. Kahane (1985a), *Some Random Series of Functions*. 2nd edition. Cambridge Univ. Press.
- [112] J.-P. Kahane (1985b), Ensembles aléatoires et dimensions. In: *Recent Progress in Fourier Analysis (El Escorial, 1983)*, pp. 65-121, North-Holland Math. Stud., 111, North-Holland, Amsterdam.
- [113] O. Kallenberg (1997), *Foundations of Modern Probability*. Edit. Springer.

- [114] M. Kanda (1976), Two theorems on capacity for Markov processes with stationary independent increments. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 35, 159-165.
- [115] R. Kaufman (1968), Une propriété métrique du mouvement brownien. *C. R. Acad. Sci. Paris* 268, 727-728.
- [116] R. Kaufman (1972), Measures of Hausdorff-type, and Brownian motion. *Mathematika* 19, 115-119.
- [117] R. Kaufman (1975), Large increments of Brownian motion. *Nagoya Math. J.* 56, 139-145.
- [118] R. Kaufman (1985), Temps locaux et dimensions. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 300, 281-282.
- [119] R. Kaufman (1989), Dimensional properties of one-dimensional Brownian motion. *Ann. Probab.* 17, 189-193.
- [120] R. Kaufman and J. M. Wu (1982), Parabolic potential theory. *J. Differential Equations* 43, 204-234.
- [121] T. Kawada and N. Kôno (1973), On the variation of Gaussian processes. In: *Proceedings of the Second Japan-USSR Symposium on Probability Theory (Kyoto, 1972)*, pp. 176-192. Lecture Notes in Math., 330, Springer-Verlag, Berlin.
- [122] H. Kesten (1965), An iterated logarithm law for local time. *Duke Math. J.* 32, 447-456.
- [123] H. Kesten (1969), Hitting probabilities of single points for processes with stationary independent increments. *Mem. Amer. Math. Soc.* 93, 129 pp.
- [124] H. Kesten (1976), Lévy processes with a nowhere dense range. *Indiana Univ. Math. J.* 25, 45-64.
- [125] D. Khoshnevisan (2002), *Multi-Parameter Processes: An Introduction to Random Fields*. Springer-Verlag, Berlin.
- [126] D. Khoshnevisan (2003), Intersections of Brownian motions. *Expos. Math.* 21, 97-114.
- [127] D. Khoshnevisan, Y. Peres and Y. Xiao (2000), Limsup random fractals. *Electron. J. Probab.* 5, No.5, 24 pp.
- [128] D. Khoshnevisan and Z. Shi (2000), Fast sets and points for fractional Brownian motion. *Séminaire de Probabilités XXXIV*, pp. 393-416, Lecture Notes in Math., 1729, Springer-Verlag, Berlin.
- [129] D. Khoshnevisan and Y. Xiao (2002), Level sets of additive Lévy processes. *Ann. Probab.* 30, 62-100.
- [130] D. Khoshnevisan and Y. Xiao (2003a), Weak unimodality of finite measures, and an application to potential theory of additive Lévy processes. *Proc. Amer. Math. Soc.* 131, 2611-2616.
- [131] D. Khoshnevisan and Y. Xiao (2003b), Lévy processes: capacity and Hausdorff dimension. *Preprint*.
- [132] D. Khoshnevisan, Y. Xiao and Y. Zhong (2003), Measuring the range of an additive Lévy processes. *Ann. Probab.* 31, 1097-1141.
- [133] J. Kigami (1989), A harmonic calculus on the Sierpinski spaces. *Japan J. Appl. Math.* 6, 259-290.
- [134] J. Kigami (1993), Harmonic calculus on p.c.f. self-similar sets. *Trans. Amer. Math. Soc.* 335, 721-755.
- [135] J. Kigami (2001), *Analysis on Fractals*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [136] K. Kikuchi and A. Negoro (1997), On Markov processes generated by pseudo-differential operator of variable order. *Osaka J. Math.* 34, 319-335.
- [137] V. Kolokoltsov (2000), Symmetric stable laws and stable-like jump-diffusions. *Proc. London Math. Soc.* (3) 80, 725-768.
- [138] W. Käonig and P. Möorters (2002), Brownian intersection local times: upper tail asymptotics and thick points. *Ann. Probab.* 30, 1605-1656.
- [139] N. Kôno (1977), The exact Hausdorff measure of irregularity points for a Brownian path. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 40, 257-282.
- [140] T. Kumagai (1993), Estimates of transition densities for Brownian motion on nested fractals. *Probab. Th. Rel. Fields* 96, 205-224.
- [141] J. Lamperti (1972), Semi-stable Markov processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 22, 205-225.
- [142] G. F. Lawler (1999), Geometric and fractal properties of Brownian motion and random walk paths in two and three dimensions. In: *Random Walks (Budapest, 1998)*, pp. 219-258, Bolyai Soc. Math. Stud., 9, Budapest.
- [143] J.-F. Le Gall (1986a), Le comportement du mouvement brownien entre les deux instants où il passe par un point double. *J. Funct. Anal.* 71, 246-262.
- [144] J.-F. Le Gall (1986b), Sur la saucisse de Wiener et les points multiples du mouvement Brownien. *Ann. Probab.* 14, 1219-1244.
- [145] J.-F. Le Gall (1987a), The exact Hausdorff measure of Brownian multiple points. In: *Seminar on Stochastic Processes (Charlottesville, Va., 1986)*, (E. Cinlar, K. L. Chung, R. K. Gettoor, eds.), pp. 107-137, Progr. Probab. Statist., 13, Birkhäuser, Boston, MA.

- [146] J.-F. Le Gall (1987b), Temps locaux d'intersection et points multiples des processus de Lévy. *Séminaire de Probabilités, XXI*, pp. 341-374, Lecture Notes in Math., 1247, Springer-Verlag, Berlin.
- [147] J.-F. Le Gall (1989), The exact Hausdorff measure of Brownian multiple points. II. In: *Seminar on Stochastic Processes (Gainesville, FL, 1988)*, pp. 193-197, Progr. Probab., 17, Birkhäuser Boston, MA.
- [148] J.-F. Le Gall (1990), Wiener sausage and self-intersection local times. *J. Funct. Anal.* 88, 299-341.
- [149] J.-F. Le Gall, J. Rosen and N.-R. Shieh (1989), Multiple points of Lévy processes. *Ann. Probab.* 17, 503-515.
- [150] J.-F. Le Gall and S. J. Taylor (1987), The packing measure of planar Brownian motion. In: *Seminar on Stochastic Processes (Charlottesville, Va., 1986)*, pp. 139-147, Progr. Probab. Statist., 13, Birkhäuser Boston, MA.
- [151] P. Lévy (1953), La mesure de Hausdorff de la courbe du mouvement brownien. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 16, 1-37.
- [152] W. V. Li, Y. Peres and Y. Xiao (2002), Small ball probabilities of Brownian motion on thin sets and their applications. *Preprint*.
- [153] W. V. Li and Q.-M. Shao (2001), Gaussian processes: inequalities, small ball probabilities and applications. In: *Stochastic Processes: Theory and Methods*. Handbook of Statistics, 19, (C. R. Rao and D. Shanbhag, eds.), pp. 533-597, North-Holland, Amsterdam.
- [154] T. Lindstrom (1990), Brownian motion on nested fractals. *Mem. Amer. Math. Soc.* 83, No. 420, 128 pp.
- [155] L. Liu and Y. Xiao (1998), Hausdorff dimension theorems for self-similar Markov processes. *Probab. Math. Statist.* 18, 369-383.
- [156] A. Lucas (2002), Hausdorff-Besicovitch measure for random fractals of Chung's type. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* 133, 487-513.
- [157] M. B. Marcus and J. Rosen (1992), Sample path properties of the local times of strongly symmetric Markov processes via Gaussian processes. *Ann. Probab.* 20, 1603-1684.
- [158] M. B. Marcus and J. Rosen (1994), Laws of the iterated logarithm for the local times of symmetric Levy processes and recurrent random walks. *Ann. Probab.* 22, 626-658.
- [159] M. B. Marcus and J. Rosen (2001), Gaussian processes and the local times of symmetric Levy processes. In: *Lévy Processes and Their Applications* (O. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch and S. Resnick, eds.) pp. 67-89, Birkhäuser Boston, MA.
- [160] L. Marsalle (1999), Slow points and fast points of local times. *Ann. Probab.* 27, 150-165.
- [161] P. Mattila (1995), *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [162] M. M. Meerschaert and H.-P. Scheffer (2001), *Limit Distributions for Sums of Independent Random Vectors*. John Wiley & Sons, New York.
- [163] P. W. Millar (1971), Path behavior of processes with stationary independent increments. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 17, 53-73.
- [164] D. Monrad and L. D. Pitt (1987), Local nondeterminism and Hausdorff dimension. In: *Seminar on Stochastic Processes (Charlottesville, Va., 1986)*, (E. Cinlar, K. L. Chung, R. K. Gettoor, eds.), pp. 163-189, Progr. Probab. Statist., 13, Birkhäuser Boston, MA.
- [165] P. Mörters (1998a), The average density of the path of planar Brownian motion. *Stoch. Process. Appl.* 74, 133-149.
- [166] P. Mörters (1998b), Average densities, tangent measures and rectifiability. *Period. Math. Hungar.* 37, 65-79.
- [167] P. Mörters (2000), Almost sure Kallianpur-Robbins laws for Brownian motion in the plane. *Probab. Th. Rel. Fields* 118, 49-64.
- [168] P. Mörters and D. Preiss (1998), Tangent measure distributions of fractal measures. *Math. Ann.* 312, 53-93.
- [169] P. Mörters and N.-R. Shieh (1999), Small scale limit theorems for the intersection local times of Brownian motion. *Electron. J. Probab.* 4, no. 9, 23 pp.
- [170] T. S. Mountford and S. C. Port (1991), The range of a Lévy process. *Ann. Probab.* 19, 221-225.
- [171] M. Nagasawa (2000), *Stochastic Processes in Quantum Physics*. Birkhäuser Verlag.
- [172] A. Negoro (1994), Stable-like processes: construction of the transition density and the behavior of sample paths near $t = 0$. *Osaka J. Math.* 31, 189-214.
- [173] B. Oksendal (2000), *Stochastic Differential Equations. An introduction with applications*. Fifth edition. Springer-Verlag Heidelberg New York.

- [174] L. Olsen (1995), A multifractal formalism. *Adv. Math.* 116, 82-196.
- [175] L. Olsen (2000), Multifractal geometry. In: *Fractal Geometry and Stochastics II* (C. Bandt et al., eds.), pp. 3-37, Progress in Probability, 46, Birkhäuser Boston, MA.
- [176] N. Patzschke and M. Zähle (1992), Fractional differentiation in the self-affine case. I. Random functions. *Stoch. Process. Appl.* 43, 165-175.
- [177] N. Patzschke and M. Zähle (1993), Fractional differentiation in the self-affine case. II. Extremal processes. *Stoch. Process. Appl.* 45, 61-72.
- [178] N. Patzschke and M. Zähle (1994), Fractional differentiation in the self-affine case. IV. Random measures. *Stochastics Stochastics Rep.* 49, 87-98.
- [179] R. Pemantle, Y. Peres, and J. W. Shapiro (1996), The trace of spatial Brownian motion is capacity-equivalent to the unit square. *Probab. Th. Rel. Fields* 106, 379-399.
- [180] Y. Peres (1996a), Intersection-equivalence of Brownian paths and certain branching processes. *Comm. Math. Phys.* 177, 99-114.
- [181] Y. Peres (1996b), Remarks on intersection-equivalence and capacity-equivalence. *Ann. Inst. Henri Poincaré Phys. Théor.* 64, 339-347.
- [182] Y. Peres (1999), Probability on trees: an introductory climb. In: *Lectures on Probability Theory and Statistics (Saint-Flour, 1997)*, pp. 193-280, Lecture Notes in Math., 1717, Springer-Verlag, Berlin.
- [183] E. A. Perkins (1981), The exact Hausdorff measure of the level sets of Brownian motion. *Z. Wahrsch. Verw Gebiete* 58, 373 -388.
- [184] E. A. Perkins (1986), On the continuity of the local time of stable processes. In: *Seminar on Stochastic Processes, 1984*, pp. 151-164, Progr. Probab. Statist., 9, Birkhäuser Boston, MA.
- [185] E. A. Perkins and S. J. Taylor (1987), Uniform measure results for the image of subsets under Brownian motion. *Probab. Th. Rel. Fields* 76, 257-289.
- [186] E. A. Perkins and S. J. Taylor (1998), The multifractal structure of super-Brownian motion. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Statist.* 34, 97-138.
- [187] S. C. Port and C. J. Stone (1969), The asymmetric Cauchy process on the line. *Ann. Math. Statist.* 40, 137-143.
- [188] S. C. Port and R. A. Vitale (1988), Positivity of stable densities. *Proc. Amer. Math. Soc.* 102, 1018-1023.
- [189] W. E. Pruitt (1969), The Hausdorff dimension of the range of a process with stationary independent increments. *J. Math. Mech.* 19, 371-378.
- [190] W. E. Pruitt (1975), Some dimension results for processes with independent increments. In: *Stochastic Processes and Related Topics (Proc. Summer Res. Inst. on Statist. Inference for Stochastic Processes)*, pp. 133-165, Academic Press, New York.
- [191] W. E. Pruitt and S. J. Taylor (1969), Sample path properties of processes with stable components. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 12, 267-289.
- [192] W. E. Pruitt and S. J. Taylor (1985), The local structure of the sample paths of asymmetric Cauchy processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 70, 535-561.
- [193] W. E. Pruitt and S. J. Taylor (1996), Packing and covering indices for a general Lévy process. *Ann. Probab.* 24, 971-986.
- [194] F. Rezakhanlou and S. J. Taylor (1988), The packing measure of the graph of a stable process. *Astérisque* 157-158, 341-361.
- [195] C. A. Rogers and S. J. Taylor (1961), Functions continuous and singular with respect to a Hausdorff measure. *Mathematika* 8, 1-31.
- [196] L. C. G. Rogers (1989), Multiple points of Markov processes in a complete metric space. *Séminaire de Probabilités, XXIII*, pp. 186-197, Lecture Notes in Math., 1372, Springer-Verlag, Berlin.
- [197] L.C.G. Rogers, D. William (1997), Diffusion, Markov Processes and Martingales. Volume one: Foundations, second edition. Wiley.
- [198] L. Rohatgi (1979), Probability. Wiley.
- [199] J. Rosen (1983), A local time approach to the self-intersections of Brownian paths in space. *Comm. Math. Phys.* 88, 327-338.
- [200] J. Rosen (1987), Joint continuity of the intersection local times of Markov processes. *Ann. Probab.* 15, 659-675.
- [201] J. Rosen (2000), Capacity moduli for Lévy processes and intersections. *Stoch. Process. Appl.* 89, 269-285.

- [202] X. Saint Raymond and C. Tricot (1988), Packing regularity of sets in n -space. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* 103, 133-145.
- [203] G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu (1994), *Stable non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*. Chapman & Hall, New York.
- [204] K. Sato (1991), Self-similar processes with independent increments. *Probab. Th. Rel. Fields* 89, 285-300.
- [205] K. Sato (1999), *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [206] K. Sato, T. Watanabe, K. Yamamuro and M. Yamazato (1996), Multidimensional process of Ornstein-Uhlenbeck type with nondiagonalizable matrix in linear drift terms. *Nagoya Math. J.* 141, 45-78.
- [207] K. Sato, T. Watanabe and M. Yamazato (1994), Recurrence conditions for multidimensional processes of Ornstein-Uhlenbeck type. *J. Math. Soc. Japan* 46, 245-265.
- [208] K. Sato and M. Yamazato (1984), Operator-self-decomposable distributions as limit distributions of processes of Ornstein-Uhlenbeck type. *Stoch. Process. Appl.* 17, 73-100.
- [209] R. L. Schilling (1996), Comparable processes and the Hausdorff dimension of their sample paths. *Stochastics and Stochastics Rep.* 57, 89-110.
- [210] R. L. Schilling (1998a), Growth and Hölder conditions for the sample paths of Feller processes. *Probab. Th. Rel. Fields* 112, 565-611.
- [211] R. L. Schilling (1998b), Feller processes generated by pseudo-differential operators: on the Hausdorff dimension of their sample paths. *J. Theoret. Probab.* 11, 303-330.
- [212] I. J. Schoenberg (1938), Metric spaces and positive definite functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 44, 522-536.
- [213] M. Sharpe (1988), *General Theory of Markov Processes*. Academic Press, Boston, MA.
- [214] N.-R. Shieh (1989), Collisions of Lévy processes. *Proc. Amer. Math. Soc.* 16, 503-506.
- [215] N.-R. Shieh (1992), Multiple points of sample paths of Markov processes. *Ann. Probab.* 20, 553-562.
- [216] N.-R. Shieh (1995), Collisions of Markov processes. *Tokyo J. Math.* 18, 111-121.
- [217] N.-R. Shieh (1998), Multiple points of dilation-stable Lévy processes. *Ann. Probab.* 26, 1341-1355.
- [218] N.-R. Shieh and S. J. Taylor (1998), Logarithmic multifractal spectrum of stable occupation measure. *Stoch. Process. Appl.* 75, 249-261.
- [219] T. Shiga (1990), A recurrence criterion for Markov processes of Ornstein-Uhlenbeck type. *Probab. Th. Rel. Fields* 85, 425-447.
- [220] D. W. Stroock (1988), Diffusion semigroups corresponding to uniformly elliptic divergence form operators. *Séminaire de Probabilités XXII*, pp. 316-347, Lecture Notes in Math. 1321, Springer-Verlag, Berlin.
- [221] M. Talagrand (1987), Regularity of Gaussian processes. *Acta. Math.* 159, 99-149.
- [222] M. Talagrand (1995), Hausdorff measure of trajectories of multiparameter fractional Brownian motion. *Ann. Probab.* 23, 767-775.
- [223] M. Talagrand (1998), Multiple points of trajectories of multiparameter fractional Brownian motion. *Probab. Th. Rel. Fields* 112, 545-563.
- [224] M. Talagrand and Y. Xiao (1996), Fractional Brownian motion and packing dimension. *J. Theoret. Probab.* 9, 579-593.
- [225] S. J. Taylor (1953), The Hausdorff α -dimensional measure of Brownian paths in n -space. *Proc. Camb. Philos. Soc.* 49, 31-39.
- [226] S. J. Taylor (1955), The α -dimensional measure of the graph and set of zeros of a Brownian path. *Proc. Camb. Philos. Soc.* 51, 265-274.
- [227] S. J. Taylor (1967), Sample path properties of a transient stable process. *J. Math. Mech.* 16, 1229-1246.
- [228] S. J. Taylor (1972), Exact asymptotic estimates of Brownian path variation. *Duke Math. J.* 39, 219-241.
- [229] S. J. Taylor (1973), Sample path properties of processes with stationary independent increments. In: *Stochastic Analysis (a Tribute to the Memory of Rollo Davidson)*, pp. 387-414, Wiley, London.
- [230] S. J. Taylor (1986a), The measure theory of random fractals. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* 100, 383-406.
- [231] S. J. Taylor (1986b), The use of packing measure in the analysis of random sets. In: *Stochastic Processes and Their Applications (Nagoya, 1985)*, pp. 214-222, Lecture Notes in Math. 1203, Springer-Verlag, Berlin.

- [232] S. J. Taylor and C. Tricot (1985), Packing measure and its evaluation for a Brownian path. *Trans. Amer. Math. Soc.* 288, 679-699.
- [233] F. Testard (1987), Polarité, points multiples et géométrie de certains processus gaussiens. *Thèse de doctorat*, Orsay.
- [234] N. Tongring (1988), Which sets contain multiple points of Brownian motion? *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* 103, 181-187.
- [235] C. Tricot (1982), Two definitions of fractional dimension. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* 91, 57-74.
- [236] C. Tricot (1999), *Courbes et dimension fractale*. Edit. Springer.
- [237] Y. Wang (1996), On the dimensions of the ranges for a class of Ornstein-Uhlenbeck type Markov processes. *Chinese J. Appl. Probab. Statist.* 12, 1-9.
- [238] T. Watanabe (1996), Sample function behavior of increasing processes of class L . *Probab. Th. Rel. Fields* 104, 349-374.
- [239] T. Watanabe (1998), Sato's conjecture on recurrence conditions for multidimensional processes of Ornstein-Uhlenbeck type. *J. Math. Soc. Japan* 50, 155-168.
- [240] I. S. Wee (1988), Lower functions for processes with stationary independent increments. *Probab. Th. Rel. Fields* 77, 551-566.
- [241] I. S. Wee (1992), The law of the iterated logarithm for local time of a Lévy process. *Probab. Th. Rel. Fields* 93, 359-376.
- [242] I. S. Wee (1997), Tail probability estimates for maximum local time of Lévy processes. *Japan J. Math.* 23, 163-178.
- [243] J. Wu and Y. Xiao (2002a), The exact Hausdorff measure of the graph of Brownian motion on the Sierpinski gasket. *Acta Sci. Math. (Szeged)* 68, 849-871.
- [244] J. Wu and Y. Xiao (2002b), Hausdorff measure of the sample paths of Markov processes with applications to Brownian motion on fractals. *Preprint*.
- [245] Y. Xiao (1996), Packing measure of the sample paths of fractional Brownian motion. *Trans. Amer. Math. Soc.* 348, 3193-3213.
- [246] Y. Xiao (1997a), Packing dimension of the image of fractional Brownian motion. *Statist. Probab. Lett.* 33, 379-387.
- [247] Y. Xiao (1997b), Hausdorff measure of the graph of fractional Brownian motion. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* 122, 565-576.
- [248] Y. Xiao (1997c), Weak variation of Gaussian processes. *J. Theoret. Probab.* 10, 849-866.
- [249] Y. Xiao (1997d), Hölder conditions for the local times and the Hausdorff measure of the level sets of Gaussian random fields. *Probab. Th. Rel. Fields* 109, 129-157.
- [250] Y. Xiao (1998), Asymptotic results for self-similar Markov processes. In: *Asymptotic Methods in Probability and Statistics (Ottawa, ON, 1997)*, pp. 323-340, North-Holland, Amsterdam.
- [251] Y. Xiao (1999), Hitting probabilities and polar sets for fractional Brownian motion. *Stochastics and Stochastics Rep.* 66, 121-151.
- [252] Y. Xiao (2003), The packing measure of the trajectories of multiparameter fractional Brownian motion. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, to appear.
- [253] Y. Xiao (2004), Random Fractals and Markov Processes. Appeared in: *A Jubilee of Benoit Mandelbrot*, (Michel L. Lapidus and Machiel van Frankenhuysen, editors), pp. 261-338, American Mathematical Society.
- [254] K. Yamamuro (1998), On transient Markov processes of Ornstein-Uhlenbeck type. *Nagoya Math. J.* 149, 19-32.
- [255] K. Yamamuro (2000a), On recurrence for self-similar additive processes. *Kodai Math. J.* 23, 234-241.
- [256] K. Yamamuro (2000b), Transience conditions for self-similar additive processes. *J. Math. Soc. Japan* 52, 343-362.
- [257] M. Zähle (1997), Fractional differentiation in the self-affine case. V. The local degree of differentiability. *Math. Nachr.* 185, 279-306.
- [258] U. Zähle (1988), Self-similar random measures. I. Notion, carrying Hausdorff dimension, and hyperbolic distribution. *Probab. Th. Rel. Fields* 80, 79-100.
- [259] X. Zhou (1994), On the multiple times set of Brownian motion. *Chinese Ann. Math.* 15B, 225-234. Department of Statistics and Probability, Michigan State University, East Lansing, MI 48824.