

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Mentouri de Constantine
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

N° d'ordre :

N° de série :

Thèse de Doctorat en Sciences préparée en cotutelle
avec l'Université de Bretagne Sud (France)

Spécialité : Mathématiques

présentée par

Abderrahmane BOUCHAIR

**Etude de quelques propriétés topologiques
des espaces de fonctions continues $C(X)$**

Soutenue publiquement
le 14 /02/2009 à l'Université de Constantine

Jury : Prof. M.N. Benkafadar , Président (Université de Constantine)
Dr. S. Kelaiaia, Rapporteur, (Université de Annaba)
Prof. C. Blanchet , Rapporteur, (Université de Paris 7)
Prof. A. Djoudi , Examineur, (Université de Annaba)
Prof. G. Meiginez , Examineur, (UBS Vannes)
Dr. S. Boughaba, Examineur, (Université de Constantine)

Remerciements

Ce travail a été réalisé, d'une part à l'Université Mentouri de Constantine, et d'autre part au LMAM de l'Université de Bretagne Sud (France).

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Smaïl Kelaiiaia, pour son soutien et ses conseils tout au long de cette thèse. Ensuite, je tiens à remercier Christian Blanchet mon co-encadreur de thèse qui, un jour de printemps 2004 à Marrakech (Maroc) lors de l'école CIMPA, m'a proposé un sujet de recherche aussi passionnant. J'ai pu profiter de son savoir, son sérieux et son gentillesse lors de mon séjour à Vannes, parfois même chez lui à Nantes. Je le remercie, aussi, pour ses encouragements qu'il répète sans cesse. Ce travail présenté dans cette thèse ne pourrait avoir lieu sans l'aide de Christian Blanchet et Smaïl Kelaiiaia, qu'ils trouvent ici toute ma reconnaissance.

Je tiens à remercier M.N. Benkafadar qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

J'adresse mes vifs remerciements à Gaël Meigniez qui m'a fait l'honneur d'avoir, sans hésitation, accepté d'être membre de mon jury et de faire le déplacement pour assister à ma soutenance.

Mes remerciements s'adressent également à, Ahcen Djoudi, qui m'a fait l'honneur de participer au jury. Je tiens à remercier vivement, Soraya Boughaba, d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je voudrais aussi remercier et exprimer ma reconnaissance à tous les membres du LMAM de l'Université de Bretagne Sud, secrétaires et mathématiciens, qui savent créer une atmosphère très agréable et amicale. Je tiens à remercier tout particulièrement, Bertrand Patureau, avec qui j'ai longuement discuté.

Enfin, je remercie ma femme, Farida, pour m'avoir supporté pendant la préparation de cette thèse.

Table des matières

| | | |
|-----------|---|-----------|
| I | α-favorabilité Faible de $C(X)$ muni d'une topologie set open | 10 |
| 1 | Topologies sur $C(X)$ | 11 |
| 1.1 | Définitions, notations | 11 |
| 1.2 | Comparaison entre $C_\gamma^1(X)$, $C_\gamma^2(X)$ et $C_{\gamma,\mu}(X)$ | 15 |
| 1.3 | Comparaison de $C_\gamma^2(X)$ et $C_\zeta^2(X)$ | 17 |
| 1.4 | Fonctions induites | 19 |
| 2 | Jeux topologiques | 23 |
| 2.1 | Jeu de Banach-Mazur Γ_{BM} | 23 |
| 2.2 | Jeu de Gruenhage $\Gamma_{Gr}(X)$ | 29 |
| 2.3 | Jeux pour les espaces de fonctions | 32 |
| 3 | α-favorabilité faible de $C(X)$ muni d'une topologie set-open | 39 |
| 3.1 | Jeu $\Gamma_\gamma^1(X)$ | 39 |
| 3.2 | Jeu $\Gamma_\gamma^2(X)$ | 41 |
| 3.3 | α -favorabilité faible de $C_\gamma(X)$ et sous-familles dénombrables de γ | 45 |
| II | Sur la catégorification des coefficients de la matrice de la représentation de Burau réduite | 48 |
| 4 | Groupes de tresses, et rappels d'algèbre | 49 |
| 4.1 | Tresses géométriques | 49 |
| 4.2 | Diagrammes de tresse | 50 |
| 4.3 | Groupe de difféotopies | 50 |
| 4.4 | Générateurs et relations | 51 |
| 4.5 | Rappels et préliminaires d'algèbre | 52 |
| 4.5.1 | Catégories et foncteurs | 52 |
| 4.5.2 | Modules gradués | 53 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.5.3 | Complexes | 54 |
| 5 | Représentations homologiques, et intersection géométrique | 56 |
| 5.1 | Représentations des groupes de tresses | 56 |
| 5.2 | Généralités sur les courbes | 57 |
| 5.3 | Définition homologique de la représentation de Burau | 59 |
| 5.4 | Intersection géométrique | 64 |
| 6 | Catégorification | 66 |
| 6.1 | Complexe de chaînes | 66 |
| 6.2 | Invariance | 76 |
| 6.3 | Fidélité | 83 |

Introduction

Cette thèse se compose de deux parties indépendantes. La première a été préparée au sein de l'Université Mentouri de Constantine. La deuxième partie quant à elle, a été préparée au sein du Laboratoire de Mathématiques et Applications des Mathématiques (LMAM) de l'Université de Bretagne Sud.

La première partie est consacrée à l'étude de $C(X)$ (l'ensemble des fonctions réelles continues sur un espace topologique X) muni d'une topologie set open. On s'intéresse à certaines propriétés topologiques telles que les propriétés de complétude (espace de Baire, Pseudo-complétude,...) ou les propriétés de dénombrabilité (espace de Fréchet, séquentialité,...), plusieurs techniques peuvent être mises à contribution pour l'étude de ce genre de questions. Parmi ces techniques celle des jeux topologiques qui sont devenus un outil de valeur et beaucoup de jeux sont maintenant bien étudiés.

En 1935, le mathématicien polonais S. Mazur propose l'un des premiers exemples des jeux topologiques lié au théorème de Baire. Originellement ce jeu est défini sur un intervalle fermé de la droite réelle \mathbb{R} . La même année, S. Banach donne une réponse affirmative à une question posée par Mazur. Depuis, le jeu est connu comme le jeu de Banach-Mazur qu'on note Γ_{BM} . En 1969, G. Choquet [Ch69]¹ présente une modification du jeu de Banach-Mazur défini sur un espace topologique arbitraire où il a introduit en terme de ce jeu la notion d'espace α -favorable qui est une notion de complétude. Plus tard, H.E. White [Wh75], introduit une classe plus large que celle des espaces α -favorable qui est la classe des espaces faiblement- α -favorable. White montre que tout espace pseudo-complet [Oxt61] ou α -favorable est un espace faiblement- α -favorable, et tout espace faiblement- α -favorable est un espace de Baire. Ainsi la notion d'espace faiblement- α -favorable s'intègre comme une propriété de complétude intermédiaire entre la pseudo-complétude et la propriété de Baire. Les notions de l' α -favorabilité faible, α -favorabilité

¹Dans [Ch69] Choquet ne cite aucune référence sur les jeux topologiques déjà existés

et pseudo-complétude coincident pour la classe des espaces quasi-réguliers qui ont des sous-espaces métrisables denses [Oxt61]. En particulier, ces notions coincident pour la classe des espaces quasi-réguliers pseudo-métrisables (car tout espace de Baire pseudo-régulier contient un sous espace métrisable dense). En 1976 G. Gruenhagen dans [Gr76a] introduit un jeu topologique qui s'avère utile dans la résolution d'un problème de Zenor concernant les espaces parfaitement continûment normaux (continuously perfectly normal spaces). Ce jeu a été étudié en détail dans [Gr76b], où il a été utilisé pour définir les notions de w -espace et W -espace. Cette dernière notion s'intègre comme une propriété de dénombrabilité intermédiaire entre la vérification du premier axiome de dénombrabilité et espace de Fréchet.

Par la suite, d'autres auteurs tels que J. Gerlits, D. Lutzer et R.A. McCoy se sont intéressés aux jeux topologiques dans le but d'en faire un outil pour l'étude des propriétés topologiques des espaces de fonctions. C'est dans cet esprit que Lutzer et McCoy [LM80] ont adapté cet outil pour l'étude des propriétés de complétude de $C_p(X)$ (l'ensemble des fonctions réelles continues sur X muni de la topologie de la convergence simple). En particulier de savoir quand est un espace de Baire, a été caractérisé en terme d'un jeu topologique défini sur X introduit par les mêmes auteurs. Un peu plus tard, McCoy et I. Ntantu [MN86] ont fait de même pour l'étude des propriétés de complétude de $C_k(X)$ ($C(X)$ muni de la topologie compact-open). ils introduisent deux jeux topologiques notés $\Gamma_k^1(X)$ et $\Gamma_k^2(X)$ définis sur X qui leur permettent d'obtenir une caractérisation (partielle) pour que $C_k(X)$ soit un espace faiblement- α -favorable (et donc de Baire).

Dans notre travail, on considère l'espace $C_\gamma(X)$ obtenu en munissant $C(X)$ d'une topologie set open [MN88]. Cette dernière est engendrée par des ensembles de la forme $[A, V] = \{f \in C(X) : f(A) \subset V\}$ où A varie dans une collection non vide γ constituée de parties de X , et V varie dans une collection \mathcal{G} d'ouverts de \mathbb{R} . Lorsque γ est la collection de tous les compacts de X et \mathcal{G} la collection des ouverts de \mathbb{R} , alors la topologie set open est précisément la topologie compact open. Il est donc naturel de se demander si les jeux $\Gamma_k^1(X)$ et $\Gamma_k^2(X)$ s'adaptent à cette topologie. On définit deux jeux topologiques sur X , notés $\Gamma_\gamma^1(X)$ et $\Gamma_\gamma^2(X)$. Sous certaines restrictions sur les familles γ , en particulier les familles admissibles (une collection γ est admissible si pour tout $A \in \gamma$ et toute collection finie \mathcal{U} d'ouverts de X recouvrant A , il existe une sous-collection finie γ_0 de γ raffinant \mathcal{U} et recouvrant A), ces jeux vont nous permettre d'étendre à $C_\gamma(X)$ les résultats concernant certaines propriétés de complétude (α -favorabilité faible, σ -compact) obtenus

par R.A. McCoy et I. Ntantu [MN86] dans le cadre de $C_k(X)$. Les jeux $\Gamma_\gamma^1(X)$ et $\Gamma_\gamma^2(X)$ (étendant d'une manière naturelle les jeux $\Gamma_k^1(X)$ et $\Gamma_k^2(X)$ de R.A. McCoy et I. Ntantu) montrent qu'ils peuvent s'avérer efficaces pour l'étude de certaines propriétés de complétude sur $C_\gamma(X)$.

La seconde partie porte sur l'étude des représentations des groupes de tresses. On s'intéresse à la catégorification des coefficients de la matrice de la représentation de Burau. Le groupe de tresses sur n brins introduit par Emile Artin en 1925 est un outil pour étudier les noeuds et les entrelacs, à cause du théorème d'Alexander qui dit que tout noeud ou entrelacs peut s'obtenir d'une tresse par le biais d'une certaine opération de fermeture. En dehors de la théorie des noeuds, la notion de tresse est apparue dans plusieurs domaines de mathématiques et de physique telles que la géométrie algébrique, les algèbres d'opérateurs en mécanique quantique, robotique, etc ...

En 1935, W. Burau [Bur36] construit une représentation du groupe de tresses, qui depuis porte son nom, qui envoie le groupe B_n dans le groupe des matrices inversibles de taille $n \times n$ dont les coefficients sont des polynômes sur \mathbb{Z} en une variable t et son inverse t^{-1} . C'est la première représentation non triviale connue du groupe de tresses pour laquelle ont été démontrés des résultats de fidélité. Elle donne lieu au premier des invariants polynomiaux des noeuds, le polynôme d'Alexander.

L'une des définitions équivalentes du groupe de tresses est de considérer comme le groupe des classes d'isotopies d'homéomorphismes (mapping class group) d'un disque privé de n points. En utilisant cette définition, la représentation de Burau peut s'obtenir en faisant agir B_n sur l'homologie d'un certain espace lié au disque troué.

En 2000, Mikhail Khovanov dans son article [Kh00] a introduit un nouvel invariant d'entrelacs. Défini comme l'homologie d'un complexe de chaînes, sa caractéristique d'Euler permet de retrouver le polynôme de Jones (c'est un invariant polynômial d'entrelacs à une variable découvert par V. Jones en 1984, en utilisant les algèbres de Von Neumann). L'homologie de Khovanov est une catégorification du polynôme de Jones.

Le terme *catégorification* introduit pour la première fois par Louis Crane et Igor Frankel [CF94], relève les entiers naturels aux espaces vectoriels ou aux groupes abéliens libres. Dans le sens contraire (décatégorification), on associe à un espace vectoriel de dimension fini sa dimension et à un groupe abélien libre de type fini son rang. Une action d'un groupe G sur une catégorie \mathcal{Q} est une famille de foncteurs $(\mathcal{F}_g)_{g \in G}$ de \mathcal{Q} dans lui-même, tels que \mathcal{F}_e est isomorphe au foncteur identité et les foncteurs $\mathcal{F}_{g_1} \mathcal{F}_{g_2}$ et $\mathcal{F}_{g_1 g_2}$ sont isomorphes

pour tout $g_1, g_2 \in G$. Dans le cas où \mathcal{Q} est une catégorie triangulable et les foncteurs \mathcal{F}_g sont exacts, alors l'action de G sur \mathcal{Q} induit une représentation linéaire de G dans le groupe de Grothendieck $K(\mathcal{Q})$. La procédure inverse, dans laquelle on relève une représentation linéaire à une action de groupe sur une catégorie triangulable est appelée *catégorification de la représentation de groupe*. Une action de G sur \mathcal{Q} est dite fidèle si \mathcal{F}_g n'est pas isomorphe à $id_{\mathcal{Q}}$ pour tout $g \neq 1$.

En 2002, Mikhail Khovanov et Paul Seidel publient un article [KhS02] sa partie algébrique traite de la catégorie $A_n - mod$ des A_n -modules gradués de type fini pour une famille particulière d'anneaux gradués A_n , pour tout $n \geq 1$. Soit $P(A_n - mod)$ la catégorie des complexes de chaînes bornés de A_n -modules projectifs. Les auteurs notent qu'une catégorification de la représentation de Burau est précisément l'action du groupe de tresses sur la catégorie $P(A_n - mod)$. Ils montrent que cette catégorification est fidèle.

Dans notre travail, en se basant sur les idées données dans [KhS02] et d'une manière géométrique, on catégorifie explicitement les coefficients de la matrice de la représentation de Burau. A chaque triplet (h_σ, i, j) , où h_σ est un homéomorphisme représentant une tresse σ et $1 \leq i, j \leq n$, on associe des groupes de cohomologie $(HB^{l,k}(h_\sigma, i, j))_{k,l \in \mathbb{Z}}$. Si h_σ et h'_σ sont deux homéomorphismes isotopes (i.e. représentent la même tresse σ), alors les groupes de cohomologie $HB^{l,k}(h_\sigma, i, j)$ et $HB^{l,k}(h'_\sigma, i, j)$ sont isomorphes. On utilise pour cela l'élimination gaussienne qui est un procédé algébrique qui permet de retirer à un complexe de chaînes des complexes de chaînes acycliques courts du type

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}.a \xrightarrow{\pm 1} \mathbb{Z}.b \rightarrow 0$$

Donc les classes d'isomorphisme de ces groupes de cohomologie sont invariants de tresse par isotopie.

A partir de notre construction de ces groupes de cohomologie, on montre facilement que la caractéristique d'Euler graduée est égal au coefficient de la matrice de Burau réduite en position (i, j) . Finalement, on montre que cette catégorification est fidèle. i.e. les groupes de cohomologie sont isomorphes aux groupes triviaux si et seulement si la tresse est triviale.

Cette thèse est composée de deux parties. La première partie compte trois chapitres. Dans le premier, on introduit une topologie set open sur $C(X)$ engendrée par une famille (admissible) de compacts de X . On donne les principaux théorèmes et définitions qui nous seront utiles par la suite. Dans le

deuxième chapitre, on esquisse un classement des différents jeux topologiques définis sur un espace topologique X ou sur l'espace de fonction $C(X)$. On présente ces jeux en fonction des propriétés topologiques auxquelles ils sont appliqués et on donne les définitions et les propriétés élémentaires y afférentes ainsi que les résultats obtenus dans ce cadre. le troisième chapitre est consacré à l'étude de l' α -favorabilité faible de $C(X)$ muni d'une topologie set open engendrée par une famille (admissible) de parties compactes de X . Cette étude nous a conduit à étendre de nombreux résultats dus à R.A. McCoy et I. Ntantu obtenus dans le cadre de $C_k(X)$ à $C(X)$ muni d'une topologie set open.

En ce qui concerne la deuxième partie, elle se compose de trois chapitres. Dans le quatrième chapitre, on expose les différentes définitions équivalentes du groupe de tresses. On fera des rappels sur les notions d'algèbre utilisées dans ce travail. Dans le cinquième chapitre, on expose les principes fondamentaux qui nous seront utiles concernant les représentations des groupes de tresses. Le sixième chapitre est consacré à la catégorification des coefficients de la matrice de la représentation de Burau. On construit un complexe de chaînes d'une manière élémentaire, à partir de deux courbes particulières sur un disque du plan complexe. La différentielle est définie en comptant des bigones (disques holomorphes) bordés par ces courbes. On montre que l'homologie est invariante de tresse par isotopie. Cela nous permet de retrouver des résultats de fidélité donnés par M. Khovanov et P. Seidel.

Première partie

α -favorabilité Faible de $C(X)$
muni d'une topologie set open

Chapitre 1

Topologies sur $C(X)$

La finalité de ce chapitre est de considérer $C(X)$, l'ensemble des applications continues sur un espace topologique X à valeurs réelles, et munir cet ensemble d'une certaine topologie définie par une famille particulière de sous-ensembles de X et d'étudier quelques propriétés de cette topologie.

Dans toute cette première partie, sauf mention du contraire, les espaces topologiques considérés seront supposés complètement réguliers, i.e. si X désigne un tel espace avec τ sa collection d'ouverts, alors (X, τ) est séparé et pour tout $x \in X$ et tout fermé F ne contenant pas x , il existe une application continue f définie sur X à valeur dans l'intervalle $[0, 1]$ tels que $f(x) = 1$ et $f(F) = \{0\}$.

1.1 Définitions, notations

Soit X un espace topologique. $C(X)$ l'ensemble des applications continues de X dans \mathbb{R} . On dit qu'une topologie sur $C(X)$ est une topologie *set-open* ([Are46],[AD51],...) si elle est engendrée par les ensembles de la forme

$$[A, V] = \{f \in C(X) : f(A) \subset V\},$$

où A varie dans une collection non vide γ de parties de X et V varie dans une collection non vide \mathcal{G} d'ouverts de \mathbb{R} . On note $\tau_{\mathbb{R}}$ la collection des ouverts usuels de \mathbb{R} et $I_{\mathbb{R}}$ la collection des intervalles ouverts bornés de \mathbb{R} .

Dans la suite les collections γ varieront dans l'ensemble des collections non vides de compacts de X . Soit γ une collection non vide de compacts de X . On considèrera sur $C(X)$ les topologies set-open suivantes :

La topologie τ_γ^1 engendrée sur $C(X)$ par la collection $\{[A, V] : A \in \gamma, V \in I_{\mathbb{R}}\}$. On note $C_\gamma^1(X)$ l'espace topologique obtenu.

La topologie τ_γ^2 engendrée sur $C(X)$ par la collection $\{[A, V] : A \in \gamma, V \in \tau_{\mathbb{R}}\}$. On note $C_\gamma^2(X)$ l'espace topologique obtenu.

On écrit $(X, \tau_1) \leq (X, \tau_2)$ pour signifier que la topologie τ_1 est moins fine que la topologie τ_2 . Par exemple, on a $C_\gamma^1(X) \leq C_\gamma^2(X)$.

On définit une structure uniforme sur $C(X)$ à partir de la structure uniforme usuelle de \mathbb{R} notée μ . Pour tout $A \in \gamma$ et $\varepsilon > 0$, soit

$$\langle A, \varepsilon \rangle = \{(f, g) \in C(X) \times C(X) : |f(x) - g(x)| < \varepsilon, \forall x \in A\}.$$

La collection $\{\langle A, \varepsilon \rangle : A \in \gamma, \varepsilon > 0\}$ est une base pour une structure uniforme sur $C(X)$. La topologie induite par cette dernière, noté $\tau_{\gamma, \mu}$, est appelée topologie de la convergence uniforme sur les éléments de γ . $C(X)$ muni de la topologie $\tau_{\gamma, \mu}$ sera noté $C_{\gamma, \mu}(X)$.

Pour tout $f \in C(X)$, $A \in \gamma$ et $\varepsilon > 0$, posons

$$\langle f, A, \varepsilon \rangle = \{g \in C(X) : |f(x) - g(x)| < \varepsilon, \forall x \in A\}.$$

Pour chaque $f \in C(X)$, la collection $\{\langle f, A, \varepsilon \rangle : A \in \gamma, \varepsilon > 0\}$ forme une base de voisinages de f dans $C_{\gamma, \mu}(X)$. Si $\gamma = \{X\}$, alors $\tau_{\gamma, \mu} = \tau_\mu$ est la topologie de la convergence uniforme. $C(X)$ muni de la topologie τ_μ est noté $C_\mu(X)$. Il est clair que $C_{\gamma, \mu}(X) \leq C_\mu(X)$ pour toute famille γ de parties de X .

Lorsque γ est la collection de tous les compacts de X , l'espace $C_\gamma^2(X)$ n'est autre que l'espace $C_k(X)$ obtenu en munissant $C(X)$ de la topologie compact-open. Dans [Are46], Arens a montré que la topologie compact-open est égale à la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de X . Lorsque γ est la collection des parties finies de X , l'espace $C_\gamma^1(X) = C_\gamma^2(X)$ n'est autre de l'espace $C_p(X)$ obtenu en munissant $C(X)$ de la topologie de la convergence simple.

Pour obtenir des caractérisations de certaines propriétés topologiques de $C(X)$ muni d'une topologie set open, on doit imposer une certaine restriction sur les familles γ . Donnons quelques propriétés concernant certaines familles de parties de X .

1. Une famille γ non vide de sous-ensembles de X est appelée *réseau* (network) de X si pour tout $x \in X$ et pour tout voisinage O_x de x , il existe $A \in \gamma$ tel que $x \in A \subset O_x$. Si tous les éléments de γ sont des sous espaces compacts de X , on dit réseau de compacts [Arh59].
2. Soit γ et ζ deux familles non vides de parties de X . On dit que γ raffine ζ ou que γ est un raffinement de ζ , si pour tout $A \in \gamma$ il existe $B \in \zeta$ tel que $A \subset B$.
3. Une famille non vide γ de compacts de X est dite *admissible* si pour tout $A \in \gamma$ et toute suite finie U_1, \dots, U_n d'ouverts de X telle que $A \subset U_1 \cup \dots \cup U_n$, il existe une suite finie A_1, \dots, A_m d'éléments de γ raffinant U_1, \dots, U_n et recouvrant A [MN85].
4. Une famille γ non vide de compacts de X est dite *faiblement-admissible* si pour tout $A \in \gamma$ et toute suite finie U_1, \dots, U_n d'ouverts de X deux à deux disjoints telle que $A \subset U_1 \cup \dots \cup U_n$, il existe une suite finie A_1, \dots, A_m d'éléments de γ raffinant U_1, \dots, U_n et recouvrant A .
5. Si γ et ζ sont deux familles de parties de X , on dit que ζ *approxime* γ si pour tout $A \in \gamma$ et pour tout ouvert U de X tel que $A \subset U$, il existe une famille finie $B_1, \dots, B_n \in \zeta$ telle que $A \subset \cup_{i=1}^n B_i \subset U$ [MN85].

Lemme 1.1.1. *Pour toute collection finie K, K_1, \dots, K_n de compacts de X et toute collection finie V, V_1, \dots, V_n d'ouverts de \mathbb{R} , on a*

1. $\cap_{i=1}^n [K_i, V] = [\cup_{i=1}^n K_i, V]$
2. $\cap_{i=1}^n [K, V_i] = [K, \cap_{i=1}^n V_i]$
3. $\cap_{i=1}^n [K_i, V_i] \subset [\cup_{i=1}^n K_i, \cap_{i=1}^n V_i]$
4. Soit $V \neq \mathbb{R}, K$ un compact de X et supposons que $\phi \neq \cap_{i=1}^n [K_i, V_i] \subset [K, V]$. Alors $K \subset \cup_{i=1}^n K_i$.

Démonstration. (1), (2) et (3) découlent directement de la définition de l'ouvert $[K, V]$. Montrons (4).

Supposons que $K \setminus \cup_{i=1}^n K_i \neq \emptyset$. Soit $x_0 \in K \setminus \cup_{i=1}^n K_i$ et $f \in \cap_{i=1}^n [K_i, V_i]$.

Cas 1. Supposons que $f(x_0) = 0$. Fixons $a \notin V$. Soit $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $g(x_0) = a$ et $g(\cup_{i=1}^n K_i) = \{0\}$. La fonction $f_1 = g + f$ est continue et vérifie :

$$f_1(x) = g(x) + f(x) = f(x) \in V_i \text{ pour tout } x \in K_i, i = 1, \dots, n$$

$$f_1(x_0) = g(x_0) + f(x_0) = g(x_0) = a \notin V.$$

Donc $f_1 \in \cap_{i=1}^n [K_i, V_i]$ et $f_1 \notin [K, V]$, ce qui est impossible.

Cas 2. Si $f(x_0) \neq 0$. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $af(x_0) \notin V$. Nécessairement $a \neq 1$ car $f(x_0) \in V$. Soit $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $g(x_0) = a$ et $g(\cup_{i=1}^n K_i) = \{1\}$. Posons $f_1 = gf$, alors

$$f_1(x) = g(x)f(x) = f(x) \in V_i \text{ pour tout } x \in K_i, i = 1, \dots, n$$

$$f_1(x_0) = g(x_0)f(x_0) = af(x_0) \notin V.$$

Donc $f_1 \in \cap_{i=1}^n [K_i, V_i]$ et $f_1 \notin [K, V]$, ce qui est encore impossible. \square

Remarque 1.1.2. D'après le lemme ci-dessus, on remarque que si γ est une collection de compacts d'un espace topologique X , et γ_0 la collection des unions finies d'éléments de γ , alors

$$C_\gamma^1(X) = C_{\gamma_0}^1(X) \text{ et } C_\gamma^2(X) = C_{\gamma_0}^2(X)$$

Si γ est une collection de parties de l'ensemble X et Y une partie de X , on note $\gamma \cap Y = \{A \cap Y : A \in \gamma\}$.

Lemme 1.1.3. Soit X un espace topologique, Y un sous-espace fermé non vide de X . Si γ est une famille admissible de compacts de X , alors $\gamma \cap Y$ est une famille admissible de compacts de Y .

Démonstration. Il est évident que $\gamma \cap Y$ est une famille de compacts de Y . Montrons qu'elle est admissible.

Soit $B \in \gamma \cap Y$ et G'_1, \dots, G'_n une suite finie d'ouvert de Y recouvrant B . Comme $B \in \gamma \cap Y$, alors il existe $A \in \gamma$ telle que $B = A \cap Y$. D'autre part, pour tout $i = 1, \dots, n$ il existe un ouvert G_i de X tel que $G'_i = G_i \cap Y$. Donc $A \subset \cup_{i=1}^n G_i \subset Y^c$, où Y^c est le complémentaire de Y dans X . Puisque γ est admissible, alors il existe une suite finie K_1, \dots, K_m d'éléments de γ recouvrant A et refinant la famille G_1, \dots, G_n . Considérons la famille $\{K_i \cap Y : i = 1, \dots, m\} \subset \gamma \cap Y$. On a

$$B \subset \cup_{i=1}^m (K_i \cap Y).$$

Montrons que la famille $\{K_i \cap Y : i = 1, \dots, m\}$ refine la famille G'_1, \dots, G'_n . Soit $K_i \cap Y \in \gamma \cap Y$. Il existe G_j tel que $K_i \subset G_j$. Donc $K_i \cap Y \subset G_j \cap Y = G'_j$. Le cas $G_j = Y^c$ ne figure pas, sinon on obtiendrait $G_j \cap Y = \emptyset$. Donc $K_i \cap Y \subset G'_j$, ce qui n'est pas le cas. D'où $\gamma \cap Y$ est une famille admissible de compacts de Y . \square

1.2 Comparaison entre $C_\gamma^1(X)$, $C_\gamma^2(X)$ et $C_{\gamma,\mu}(X)$

Le théorème qui suit permet, pour une certaines collections γ , de ne regarder que les éléments de la forme $[A, V]$ avec $A \in \gamma$ et $V \in I_{\mathbb{R}}$ dans l'étude de $C_\gamma^2(X)$, voir [Ke95] pour plus de détail. Rappelons qu'une famille γ de compacts de X est faiblement-admissible si pour tout $A \in \gamma$ et toute collection finie \mathcal{G} d'ouverts de X deux à deux disjoints recouvrant A , il existe une sous collection finie \mathcal{K} d'éléments de γ recouvrant A et refinant \mathcal{G} .

Théorème 1.2.1. [Ke95] *Soit γ une famille de compacts de X . Alors, $C_\gamma^1(X) = C_\gamma^2(X)$ si et seulement si γ est faiblement-admissible.*

Rappelons qu'une collection ζ de parties de X est un réseau si pour tout point $x \in X$ et tout ouvert G contenant ce point, il existe $A \in \zeta$ tel que $x \in A \subset G$.

Théorème 1.2.2. *Soit γ une famille de compacts de X . Alors $C_p(X) \leq C_\gamma^1(X)$ si et seulement si γ est un réseau dans X .*

Démonstration. Supposons que $C_p(X) \leq C_\gamma^1(X)$ et montrons que γ est un réseau dans X .

Soit donc $x_0 \in X$ et V un ouvert de X tel que $x_0 \in V$. On doit montrer qu'il existe $A \in \gamma$ tel que $x_0 \in A \subset V$. Comme X est complètement régulier, soit $f : X \rightarrow [0, 1]$ une application continue telle que $f(x_0) = 0$ et $f(V^c) = \{1\}$. Posons $W =]-1, 1[$. On a $f \in [\{x_0\}, W]$ et $[\{x_0\}, W]$ est un ouvert de $C_p(X)$. Comme $C_p(X) \leq C_\gamma^1(X)$, soit A_1, \dots, A_n une suite d'éléments de γ et V_1, \dots, V_n une suite d'intervalles ouverts bornés tels que

$$f \in \bigcap_{i=1}^n [A_i, V_i] \subset [\{x_0\}, W].$$

D'après le lemme 1.1.1, on a $x_0 \in \bigcup_{i=1}^n A_i$. Montrons qu'il existe i_0 tel que $x_0 \in A_{i_0} \subset V$. Posons

$$\mathcal{I} = \{i : x_0 \in A_i \text{ et } A_i \cap V^c \neq \emptyset\}.$$

Montrons que $\mathcal{I}^c \neq \emptyset$. Supposons que $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$. La fonction g constamment égale à 1 est dans $\bigcap_{i=1}^n [A_i, V_i]$ car $1 \in V_i$ pour tout i du fait que $A_i \cap V^c \neq \emptyset$. Mais alors $g \in [\{x_0\}, W]$, on a une contradiction. Donc $\mathcal{I}^c \neq \emptyset$.

Supposons que pour tout $i \in \mathcal{I}^c = \{i : x_0 \notin A_i \text{ ou } A_i \cap V^c = \emptyset\}$ on ait $x_0 \notin A_i$. On construit alors $h : X \rightarrow [0, 1]$ continue telle que $h(x_0) = 1$ et $h(\cup_{i \in \mathcal{I}^c} A_i) = \{0\}$. La fonction $\varphi = \max(f, h)$ est continue et vérifie :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \max(f(x), h(x)) = f(x) \in V_i \text{ pour tout } x \in A_i \text{ avec } i \in \mathcal{I}^c, \\ \varphi(x) &= \max(f(x), h(x)) \in [0, 1] \subset V_i \text{ pour tout } x \in A_i \text{ avec } i \in \mathcal{I}, \text{ car} \\ &\text{dans ce cas on a } A_i \cap V^c \neq \emptyset \text{ et } x_0 \in A_i.\end{aligned}$$

D'où finalement, $\varphi \in \bigcap_{i=1}^n [A_i, V_i]$ et $\varphi \notin [\{x_0\}, W]$ ce qui est impossible. Donc il existe $i_0 \in \mathcal{I}^c$ tel que $x_0 \in A_{i_0} \subset V$.

La condition suffisante est immédiate. \square

Le théorème suivant montre que lorsque γ est une famille admissible, alors la topologie de la convergence uniforme sur les éléments de γ est identique à la topologie set-open engendrée par γ .

Théorème 1.2.3. *Si γ est une famille admissible de compacts de X , alors $C_\gamma^1(X) = C_\gamma^2(X) = C_{\gamma, \mu}(X)$.*

Démonstration. Puisque une famille admissible est faiblement-admissible, on a $C_\gamma^1(X) = C_\gamma^2(X)$ en vertu du Théorème 1.2.1. Montrons que $C_{\gamma, \mu}(X) = C_\gamma^2(X)$.

(\supseteq) : Soit $f \in [A, V]$, où $A \in \gamma$ et V un ouvert de \mathbb{R} . puisque $f(A) \subset V$, alors pour tout $x \in A$ il existe un nombre réel positif ϵ_x telle que

$$]f(x) - \epsilon_x, f(x) + \epsilon_x[\subset]f(x) - 2\epsilon_x, f(x) + 2\epsilon_x[\subseteq V.$$

Comme $f(A)$ est compact, alors il existe une suite finie x_1, x_2, \dots, x_n d'éléments de A telle que

$$f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^n]f(x_i) - \epsilon_{x_i}, f(x_i) + \epsilon_{x_i}[\subseteq V.$$

Posons $\epsilon = \max(\epsilon_{x_i} : i = 1, \dots, n)$. On a alors

$$\langle f, A, \epsilon \rangle = \{g \in C(X) : |f(x) - g(x)| < \epsilon, \forall x \in A\} \subset [A, V].$$

D'où $C_\gamma^2(X) \leq C_{\gamma, \mu}(X)$.

(\subseteq) : Montrons que si γ est admissible alors $C_{\gamma, \mu}(X) \leq C_\gamma^2(X)$.

Soit $f \in \langle f, A, \epsilon \rangle$ avec $A \in \gamma$ et $\epsilon > 0$ un nombre réel. Comme $f(A)$ est compact, on peut choisir une famille finie $\{I_i : i \in \mathcal{I}\}$ d'intervalles ouverts de diamètre inférieur à ϵ telle que $f(A) \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}} I_i$. On a

$$A \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}} f^{-1}(I_i).$$

Comme γ est admissible, soit une famille A_1, \dots, A_n d'éléments de γ recouvrant A et refinant $\{f^{-1}(I_i) : i \in \mathcal{I}\}$. Pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$, soit $i_j \in \mathcal{I}$ telle que $A_j \subset f^{-1}(I_{i_j})$. Montrons que

$$f \in \bigcap_{j=1}^n [A_j, I_{i_j}] \subset \langle f, A, \epsilon \rangle.$$

En effet, soit $g \in \bigcap_{j=1}^n [A_j, I_{i_j}]$. Soit $x \in A$. Pour un $k \in \{1, \dots, n\}$, on a $x \in A_k$ et $g(x) \in I_{i_k}$. Comme $f(x) \in I_{i_k}$, on a $|f(x) - g(x)| < \epsilon$. Donc $g \in \langle f, A, \epsilon \rangle$.

On a bien $C_{\gamma, \mu}(X) \leq C_\gamma^2(X)$. D'où les égalités annoncées. \square

Dans tout ce qui suit, les espaces $C_\gamma^1(X), C_\gamma^2(X)$ coïncident pour une famille admissible γ de compacts de X , et seront notés tout simplement par $C_\gamma(X)$.

1.3 Comparaison de $C_\gamma^2(X)$ et $C_\zeta^2(X)$

Dans ce paragraphe, on va se donner deux familles γ et ζ de compacts de X , et on va comparer à l'aide de leurs propriétés respectives les topologies de $C_\gamma^2(X)$ et $C_\zeta^2(X)$.

Théorème 1.3.1. [MN88] *Soit γ et ζ deux réseaux de compacts de X . Si $C_\gamma^2(X) \leq C_\zeta^2(X)$, alors chaque éléments de γ est inclus dans une union finie d'éléments de ζ .*

Démonstration. Soit $A \in \gamma$. Soit f_0 la fonction identiquement nulle sur X et V un ouvert de \mathbb{R} contenant 0. Alors $[A, V]$ est un voisinage ouvert de f_0 dans $C_\gamma(X)$. Comme $C_\gamma(X) \leq C_\zeta(X)$, il existe une suite B_1, \dots, B_n d'éléments de ζ et une suite V_1, \dots, V_n d'ouverts de \mathbb{R} tel que

$$f_0 \in \bigcap_{i=1}^n [B_i, V_i] \subset [A, V].$$

Le lemme 1.1.1, donne alors que $A \subset \cup_{i=1}^n B_i$. \square

La réciproque du Théorème 1.3.1 est fautive. S. Kelaiaia [Ke95] a donné le contre exemple suivant :

Soit $X = [0, 1]$, $\gamma = \{\{x\} / x \in X\} \cup \{[0, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, 1]\}$ et $\zeta = \{\{x\} / x \in X\} \cup \{[0, 1]\}$. Il est clair que γ et ζ sont des réseaux de X tel que tout élément de γ soit contenu dans un élément de ζ , mais la topologie de $C_\gamma^2(X)$ n'est pas moins fine que celle de $C_\zeta^2(X)$.

Théorème 1.3.2. [Ke95] soit γ et ζ deux familles de compacts de x . Si ζ approxime γ alors $C_\gamma^2(X) \leq C_\zeta^2(X)$. Si de plus ζ est admissible, alors la réciproque est vraie.

Démonstration. Supposons que ζ approxime γ et montrons que $C_\gamma^2(X) \leq C_\zeta^2(X)$.

Soit $f \in C(X)$. Soit $[A, V]$ un voisinage ouvert de f dans $C_\gamma^2(X)$, avec $A \in \gamma$ et V un ouvert de \mathbb{R} . On a $A \subset f^{-1}(V)$. Comme ζ approxime γ , soit $\{B_1, \dots, B_n\} \subset \zeta$ tel que

$$A \subset \cup_{i=1}^n B_i \subset f^{-1}(V).$$

On a donc $f \in \cap_{i=1}^n [B_i, V]$. Comme $\cap_{i=1}^n [B_i, V] \subset [\cup_{i=1}^n B_i, V]$ et que $A \subset \cup_{i=1}^n B_i$ on a

$$\bigcap_{i=1}^n [B_i, V] \subset [A, V].$$

D'où $C_\gamma^2(X) \leq C_\zeta^2(X)$.

Réciproquement supposons ζ admissible et $C_\gamma^2(X) \leq C_\zeta^2(X)$. Montrons que ζ approxime γ .

Soit $A \in \gamma$ et G un ouvert de X tel que $A \subset G$. Soit $f : X \rightarrow [0, 1]$ continue telle que $f(A) = \{0\}$ et $f(G^c) = \{1\}$. Posons $W =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. On a $f \in [A, W]$ et $f^{-1}(W) \subset G$. Comme $C_\gamma^2(X) \leq C_\zeta^2(X)$, soit $\{B_1, \dots, B_n\} \subset \zeta$ et V_1, \dots, V_n des intervalles ouverts bornés tels que

$$f \in \bigcap_{i=1}^n [B_i, V_i] \subset [A, W].$$

On a alors $A \subset \cup_{i=1}^n B_i$. Il suffit de montrer que $\cup_{i=1}^n B_i \subset G$, voir [Ke95] pour le reste de la preuve. \square

Théorème 1.3.3. [MN88] $C_\mu(X) = C_k(X)$ si et seulement si X est compact.

Théorème 1.3.4. Si γ est une famille admissible de compacts de X et $A \in \gamma$, alors $C_{\gamma \cap A}(A) = C_\mu(A)$.

Démonstration. Comme A est compact, alors $C_\mu(A) = C_k(A)$. Donc tout ouvert de $C_{\gamma \cap A}(A)$ est un ouvert de $C_\mu(A)$.

Pour le cas inverse, soit $f \in C_\mu(A)$ et $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe un ouvert dans $C_{\gamma \cap A}(A)$ contenu dans $\langle f, A, \varepsilon \rangle$. La famille

$$\left\{ f^{-1}\left(\left]f(a) - \frac{\varepsilon}{3}, f(a) + \frac{\varepsilon}{3}\right[\right) : a \in A \right\}$$

est un recouvrement ouvert de A . comme A est compact, il existe une partie finie A_1 de A telle que la famille

$$U = \left\{ f^{-1} \left[f(a) - \frac{\varepsilon}{3}, f(a) + \frac{\varepsilon}{3} \right] : a \in A_1 \right\}$$

recouvre A . Par ailleurs γ étant admissible, il existe donc une suite finie β d'éléments de γ qui recouvre A et refine U . Donc, pour tout $B \in \beta$ il existe $a_B \in A$ tel que

$$f(B) \subset V_B = \left] f(a_B) - \frac{\varepsilon}{3}, f(a_B) + \frac{\varepsilon}{3} \right[.$$

Posons $W = \bigcap \{ [A \cap B, V_B] : B \in \beta \}$ qui est un voisinage ouvert de f dans $C_{\gamma \cap A}(A)$. Montrons que $W \subset \langle f, A, \varepsilon \rangle$.

Soit $g \in W$, donc $g(A \cap B) \subset V_B$ pour tout $B \in \beta$. Comme $A \subset \bigcup_{B \in \beta} (A \cap B)$, alors on a

$$g(A) \subset g\left(\bigcup_{B \in \beta} (A \cap B)\right) = \bigcup_{B \in \beta} (g(A \cap B)) \subset \bigcup_{B \in \beta} V_B.$$

Ceci signifie que $g \in \langle f, A, \varepsilon \rangle$. D'où le résultat. \square

1.4 Fonctions induites

Dans ce paragraphe on va traiter quelques applications qu'on pourra définir sur les espaces de fonctions et qui sont fort utiles pour l'étude de certaines propriétés topologiques de ces espaces.

Toute application continue $\Phi : X \longrightarrow Y$ induit une application $\Phi^* : C(Y) \rightarrow C(X)$ définie par $\Phi^*(f) = f \circ \Phi$, pour tout $f \in C(Y)$. Nous allons étudier la continuité de Φ^* et l'ouverture sur son image lorsque $C(X)$ et $C(Y)$ sont munis de topologies set-open définies par deux familles de compacts de X et Y respectivement. Soit $\overline{\Phi(X)}$ la fermeture de $\Phi(X)$ dans Y . notons par $\Phi(\gamma)$ la famille $\{\Phi(A) : A \in \gamma\}$ de sous-ensembles compacts de $\overline{\Phi(X)}$.

Théorème 1.4.1. *Soit γ et ζ deux familles de parties compactes de X et Y respectivement et $\Phi : X \longrightarrow Y$ une fonction continue. Si ζ approxime $\Phi(\gamma)$ alors $\Phi^* : C_\zeta(Y) \longrightarrow C_\gamma(X)$ est continue. Si de plus ζ est admissible la réciproque est vraie.*

Démonstration. Supposons que ζ approxime $\Phi(\gamma)$ et montrons que Φ^* est continue. Soit $f \in C(Y)$, A un élément de γ et V un ouvert de \mathbb{R} tels que $\Phi^*(f) \in [A, V]$. On a $\Phi(A) \subset f^{-1}(V)$. L'hypothèse d'approximation entraîne qu'il existe une collection $\{B_1, \dots, B_n\} \subset \zeta$ telle que

$$\Phi(A) \subset \cup_{i=1}^n B_i \subset f^{-1}(V).$$

On a donc $f \in \cap_{i=1}^n [B_i, V]$. Montrons que $\Phi^*(\cap_{i=1}^n [B_i, V]) \subset [A, V]$. Soit $h \in \cap_{i=1}^n [B_i, V]$ et soit $x \in A$. On a $\Phi(x) \in \cup_{i=1}^n B_i \subset h^{-1}(V)$. Donc $h(\Phi(x)) \in V$ et donc $\Phi^*(h)(x) = h \circ \Phi(x) \in V$. par suite $\Phi^*(h) \in [A, V]$. D'o la continuité de Φ^* .

Supposons que ζ soit admissible et que Φ^* soit continue. Montrons que la topologie de $C_{\Phi(\gamma)}(X)$ est moins fine que la topologie de $C_\zeta(X)$.

Soit $A \in \gamma$, V ouvert de \mathbb{R} et $f \in [\Phi(A), V]$. On a $\Phi^*(f) = f \circ \Phi \in [A, V]$. La continuité de Φ^* entraîne qu'il existe $B_1, \dots, B_n \in \zeta$ et V_1, \dots, V_n des intervalles ouverts dans \mathbb{R} tels que

$$f \in \cap_{i=1}^n [B_i, V] \subset (\Phi^*)^{-1}([A, V]) \subset [\Phi(A), V].$$

D'où la topologie de $C_\zeta(X)$ est plus fine que la topologie de $C_{\Phi(\gamma)}(X)$. D'après le Théorème 1.3.2, on a ζ approxime $\Phi(\gamma)$. \square

Lemme 1.4.2. *Soit X un espace topologique, K un compact non vide de X , F un fermé de X et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(K \cap F) \subset V$ où V est un intervalle ouvert borné. Alors il existe $f_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f_1|_F = f|_F$ et $f_1(K) \subset V$.*

Lemme 1.4.3. *[Ke95] Soit X un espace topologique, Y un sous espace fermé de X , ζ une collection de compacts de X et soit $g \in C(Y)$ une fonction prolongeable en une fonction continue sur X . Soit $B_1, \dots, B_n \in \zeta$ et V_1, \dots, V_n des intervalles ouverts bornés tels que $g(B_i \cap Y) \subset V_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Alors, il existe $g' \in C(X)$ prolongeant g telle que $g'(B_i) \subset V_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$.*

Démonstration. On procède par récurrence.

Soit $g \in C(Y)$, $B \in \zeta$ et V un intervalle ouvert borné tel que $g(B \cap Y) \subset V$. Alors en appliquant le lemme 1.4.2 avec $F = Y$ et $K = B$, on obtient une fonction $g' \in C(X)$ prolongeant g et telle que $g'(B) \subset V$.

Supposons la propriété vraie jusqu'à n . Montrons que si B_1, \dots, B_{n+1} sont des éléments de ζ et V_1, \dots, V_{n+1} sont des intervalles ouverts bornés tels que $g(B_i \cap Y) \subset V_i$ pour tout $i = 1, \dots, n + 1$, alors il existe $g' \in C(X)$ prolongeant g tel que $g'(B_i) \subset V_i$ pour tout $i = 1, \dots, n + 1$.

Par hypothèse on a $g((B_i \cap B_{n+1}) \cap Y) \subset V_i \cap V_{n+1}$ pour tout $i = 1, \dots, n$. L'hypothèse de récurrence entraîne qu'il existe $g'_1 \in C(X)$ prolongeant g et vérifiant $g'_1(B_i \cap B_{n+1}) \subset V_i \cap V_{n+1}$ pour tout i . On pose

$$Y_1 = Y \cup \left(\bigcup_{i=1}^n (B_i \cap B_{n+1}) \right).$$

On a $g'_1(B_i \cap Y_1) \subset V_i$ pour tout $i = 1, \dots, n+1$.

En appliquant le lemme 1.4.2 à $g'_{1|Y_1}$ avec $F = Y_1$ et $K = B_{n+1}$, on obtient une fonction $g'_2 \in C(X)$ prolongeant $g'_{1|Y_1}$ et telle que $g'_2(B_{n+1}) \subset V_{n+1}$. Remarquons que $g'_2(B_i \cap B_{n+1}) \subset V_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

A nouveau on pose $Y_2 = Y_1 \cup B_{n+1}$. On vérifie que $g'_2(B_i \cap Y_2) \subset V_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. L'hypothèse de récurrence appliquée à $B_i \cap Y_2$ pour tout $i = 1, \dots, n$, permet de prolonger $g'_{2|Y_2}$ à tout X en une fonction continue g'_3 vérifiant $g'_3(B_i) \subset V_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et on a

$$g'_3(B_{n+1}) = g'_2(B_{n+1}) \subset V_{n+1}.$$

La fonction $g' = g'_3$ est donc la fonction cherchée. \square

Théorème 1.4.4. *Soit X un espace topologique, Y un sous espace fermé de X , γ une famille faiblement-admissible de compacts de X et ζ une famille admissible de compacts de Y . Soit $i : Y \rightarrow X$ l'injection canonique. Alors $i^* : C_\gamma(X) \rightarrow C_\zeta(Y)$ la fonction induite de i est ouverte sur son image si et seulement si ζ approxime $\gamma \cap Y$.*

Démonstration. Supposons que ζ approxime $\gamma \cap Y$. Soit $\bigcap_{i=1}^n [B_i, V_i]$ un ouvert de base de $C_\gamma(X)$, et soit $f \in i^*(\bigcap_{i=1}^n [B_i, V_i])$ et $f' \in C(X)$ prolongeant f tel que $f' \in \bigcap_{i=1}^n [B_i, V_i]$. Puisque ζ approxime $\gamma \cap Y$, on a pour tout $i = 1, \dots, n$, il existe une sous famille ζ_i de la famille ζ telle que

$$B_i \cap Y \subset \bigcup \{A/A \in \zeta_i\} \subset f^{-1}(V_i).$$

Donc

$$f \in (\bigcap_{i=1}^n \bigcap_{A \in \zeta_i} [A, V_i]) \cap i^*(C(X)) = W.$$

Il est aisé de voir que $W \subset f \in i^*(\bigcap_{i=1}^n [B_i, V_i])$. D'où i^* est ouverte sur son image.

Inversement, soit $B \in \gamma$, G un ouvert de Y tel que $B \cap Y \subset G$ et soit G_1 un ouvert de X tel que $G_1 \cap Y = G$. L'ouvert $G_2 = G_1 \cup (X \setminus Y)$ de X contient B et vérifie $G_2 \cap Y = G_1 \cap Y = G$. Soit $f : X \rightarrow [0, 1]$ continue telle que $f(B) = \{1\}$ et $f(G_2^c) = \{0\}$. Posons $V =]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$. La fonction f vérifie donc

$f^{-1}(V) \subset G_2$. Et donc $f^{-1}|_Y(V) \subset G$.

Considérons dans $C_\gamma(X)$ l'ouvert $[B, V]$. On a alors $f \in [B, V]$. Par hypothèse $i^*([B, V])$ est un ouvert de $i^*(C(Y))$, donc $i^*(f) = f|_Y \in i^*([B, V])$. Alors il existe $A_1, \dots, A_n \in \zeta$ et V_1, \dots, V_n des intervalles ouverts bornés tel que

$$f|_Y \in (\cap_{i=1}^n [A_i, V_i]) \cap i^*(C(Y)) \subset i^*([B, V]).$$

Il est aisé de voir que $B \cap Y \subset \cup_{i=1}^n A_i$. Notons $A = A^1, X \setminus A = A^0$ et $I = \{1, \dots, n\}$ et soit

$$\Delta = \{(\delta_i)_{i \in I} \in \{0, 1\}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\} : (B \cap Y) \cap (\cap_{i \in I} A_i^{\delta_i}) \neq \emptyset\}.$$

Donc

$$B \cap Y \subset \cup \{ \cap_{i=1}^n A_i^{\delta_i} / (\delta_i) \in \Delta \}$$

et $\cap_{\delta_i=1} V_i \subset V$ pour chaque $(\delta_i) \in \Delta$. On en déduit que

$$B \cap Y \subset \cup \{ \cap_{\delta_i=1} A_i / (\delta_i) \in \Delta \} \subset f|_Y^{-1}(V).$$

Par ailleurs, l'admissibilité de ζ nous donne que pour chaque $(\delta_i) \in \Delta$, il existe $\zeta_{(\delta_i)}$ fini $\subset \zeta$ tel que

$$\cap_{\delta_i=1} A_i \subset \cup \{ A / A \in \zeta_{(\delta_i)} \} \subset f|_Y^{-1}(V).$$

D'où

$$B \cap Y \subset \bigcup_{(\delta_i) \in \Delta} \left(\bigcup_{A \in \zeta_{(\delta_i)}} A \right) \subset f|_Y^{-1}(V) \subset G.$$

Donc ζ approxime $\gamma \cap Y$. □

Nous terminons cette partie par donner une condition nécessaire pour que $C_\gamma(X)$ soit un espace de Baire. Rappelons qu'un espace topologique X est de Baire s'il est séparé et si toute intersection dénombrable d'ouverts partout denses dans X est partout dense dans X .

Théorème 1.4.5. *Soit X un espace topologique et γ une famille admissible de compacts de X recouvrant X . Si $C_\gamma(X)$ est un espace de Baire, alors tout point de X admettant une base dénombrable de voisinages admet un élément de γ comme voisinage.*

Chapitre 2

Jeux topologiques

Dans ce chapitre, nous esquissons un classement des différents jeux infinis sur un espace topologique X ou sur l'espace de fonctions $C(X)$. On distingue suivant les propriétés topologiques envisagées différentes catégories de jeux.

On considère toujours des jeux infinis à deux personnes, appelés joueur I et joueur II , où le joueur I commence la partie de jeu. Une stratégie pour le joueur I est une fonction définie pour chaque suite finie de coups du joueur II , une stratégie pour le joueur I est définie d'une manière similaire. Ici la notion de stratégie est celle des jeux infinis à **information parfaite** ; i.e qu'à chaque étape du jeu le joueur I est supposé se souvenir de tous ses coups précédents ainsi que ceux du joueur II , et peut tenir compte de sa mémoire pour établir sa stratégie. Un jeu G est dit déterminé si l'un des deux joueurs possède une stratégie gagnante dans G .

2.1 Jeu de Banach-Mazur Γ_{BM}

Etant donné un espace topologique X . Nous rappelons un jeu infini introduit par S. Banach et S. Mazur. Dans ce jeu que nous noterons $\Gamma_{BM}(X)$, deux joueurs I et II choisissent alternativement des ouverts non vides (U_n) et (V_n) de X avec les conditions :

Le joueur I commence la partie en choisissant un ouvert U_1 , le joueur II doit répondre alors par un ouvert V_1 tel que $V_1 \subset U_1$.

A l'étape $n > 1$, quand I a joué l'ouvert U_n , le joueur II répond par un ouvert V_n inclus dans U_n .

Quand II a joué l'ouvert V_n , le joueur I répond par un ouvert $U_{n+1} \subset V_n$, et ainsi de suite.

Le joueur II gagne la partie si $\bigcap \{U_n : n \in \mathbb{N}^*\} = \bigcap \{V_n : n \in \mathbb{N}^*\} \neq \emptyset$, sinon

le joueur I gagne.

Définition 2.1.1. Une stratégie pour le joueur I ou II dans le jeu $\Gamma_{BM}(X)$ est une application $\sigma : S(\tau^*) \rightarrow \tau^*$, où τ^* est la collection de tous les ouverts non vides de X et $S(\tau^*)$ désigne la collection de tous les suites finies d'éléments de τ^* , telle que $\sigma(U_1, U_2, \dots, U_n) \subset U_n$ pour tout $n \geq 1$.

Une stratégie σ pour le joueur II dans $\Gamma_{BM}(X)$ est dite gagnante si pour toute partie de jeu $U_1, V_1, U_2, V_2, \dots$ tels que $U_1 \supset V_1 = \sigma(U_1) \supset U_2 \supset V_2 = \sigma(U_1, U_2) \supset \dots$ on a $\bigcap \{U_n : n \in \mathbb{N}^*\} \neq \emptyset$.

Eventuellement les stratégies dépendent de tous les coups précédemment joués. Une stratégie σ ne dépendant que du dernier coup joué est dite *stationnaire*, c'est une stratégie telle que $\sigma(U_1, \dots, U_{n-1}, U_n) = \sigma(U_n)$.

H.E. White dans [Wh75] appelle un espace topologique X *faiblement- α -favorable*¹ si le joueur II possède une stratégie gagnante dans $\Gamma_{BM}(X)$. Choquet [Ch69] appelle un espace X *α -favorable* si le joueur II possède une stratégie stationnaire gagnante dans $\Gamma_{BM}(X)$. Des classes plus larges (strictement car ce jeu n'est pas nécessairement déterminé. Un jeu est déterminé si l'un des deux joueurs possède une stratégie gagnante) sont les espaces *faiblement- β -défavorable* et *β -défavorable*. Un espace est dit *faiblement- β -défavorable* (resp, *β -défavorable*) si le joueur I ne possède aucune stratégie (resp, stratégie stationnaire) gagnante dans $\Gamma_{BM}(X)$. Nous ne considérons dans notre présente étude que les espaces faiblement- α -favorables.

Nous verrons dans la suite que le fait pour X d'être faiblement- α -favorable est une propriété qui s'inscrit parmi les propriétés classiques de complétude tel que le fait pour X d'être un espace de Baire ou un espace pseudo-complet. Mais auparavant nous allons traiter la stabilité de cette propriété par passage au sous-espace et par image de certaines applications.

Théorème 2.1.2. Soit X un espace topologique.

1. Soit A une partie non vide dense dans X . Si le sous-espace A est faiblement- α -favorable, alors X est un espace faiblement- α -favorable.
2. Si X est un espace faiblement- α -favorable et U un ouvert non vide de X , alors le sous espace U est faiblement- α -favorable.

Démonstration. Montrons (1), le (2) est évident.

Soit σ une stratégie gagnante pour le joueur II dans $\Gamma_{BM}(A)$. Définissons une stratégie σ' pour le joueur II dans le jeu $\Gamma_{BM}(X)$ comme suit.

¹Choquet [Ch69] appelle β et α les joueurs I et II respectivement.

Soit U_1 un ouvert de X choisi par le joueur I . Puisque A est dense dans X , alors $A \cap U_1$ est un ouvert non vide du sous espace A . Considérons $\sigma(A \cap U_1) = A \cap V_1$, où V_1 est un ouvert non vide de X . définissons $\sigma'(U_1) = U_1 \cap V_1$. Par induction pour $n > 1$, supposons que le joueur I a choisi un ouvert $U_n \subset \sigma(U_1, V_1, \dots, U_{n-1}) = U_{n-1} \cap V_{n-1}$. Alors $A \cap U_n$ est un ouvert non vide du sous espace A . Considérons $\sigma(A \cap U_n) = A \cap V_n$, où V_n est un ouvert non vide de X . Définissons

$$\sigma'(U_n) = U_n \cap V_n.$$

La stratégie σ' est bien définie. Montrons qu'elle est gagnante. Puisque σ est gagnante pour le joueur II dans $\Gamma_{BM}(A)$, par hypothèse, donc

$$\cap \{A \cap U_n : n \in \mathbb{N}^*\} = A \cap (\cap \{U_n : n \in \mathbb{N}^*\}) \neq \phi.$$

Ceci implique que $\cap \{U_n : n \in \mathbb{N}^*\} \neq \phi$. D'où σ' est une stratégie gagnante pour le joueur II dans $\Gamma_{BM}(X)$. Donc X est un espace faiblement- α -favorable. \square

Théorème 2.1.3. *Soit X, Y deux espaces topologiques, et f une application continue ouverte de X dans Y . Si X est un espace faiblement- α -favorable, alors Y est un espace faiblement- α -favorable.*

Démonstration. Supposons que X est un espace faiblement- α -favorable. Donc le joueur II possède une stratégie gagnante σ dans le jeu $\Gamma_{BM}(X)$. Définissons une stratégie σ' pour le joueur II dans $\Gamma_{BM}(Y)$ comme suit : Soit U_1 un ouvert de Y choisi par le joueur I . Puisque f est continue, alors $f^{-1}(U_1)$ est ouvert dans X . Considérons $\sigma(f^{-1}(U_1))$ un ouvert non vide de X tel que $\sigma(f^{-1}(U_1)) \subset f^{-1}(U_1)$. Définissons

$$\sigma'(U_1) = f(\sigma(f^{-1}(U_1))) = V_1.$$

V_1 est un ouvert de Y puisque f est ouverte, de plus $V_1 \subset f(f^{-1}(U_1)) \subset U_1$. Pour $n > 1$, supposons que le joueur I a choisi l'ouvert $U_n \subset V_{n-1}$, et les ouverts $U_1, V_1, \dots, U_{n-1}, V_{n-1}$ sont définis de telle sorte que $U_{i+1} \subset V_i \subset U_i$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$. Puisque f est continue, donc $f^{-1}(U_n)$ est un ouvert de X . Considérons $\sigma(f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_n))$ qui est un ouvert de X telle que $\sigma(f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_n)) \subset f^{-1}(U_n)$. Définissons

$$\sigma'(U_1, V_1, \dots, U_n) = f(\sigma(f^{-1}(U_1), \sigma(f^{-1}(U_1)), \dots, f^{-1}(U_n))) = V_n.$$

Montrons que σ' est gagnante. Puisque σ est gagnante pour le joueur II dans $\Gamma_{BM}(X)$, alors

$$\phi \neq \bigcap_{n \geq 1} \sigma(f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_n)) = \bigcap_{n \geq 1} f^{-1}(U_n) = f^{-1}\left(\bigcap_{n \geq 1} U_n\right).$$

Ceci nous donne $\bigcap_{n \geq 1} U_n$. D'où la stratégie σ' est gagnante dans $\Gamma_{BM}(Y)$. \square

Une application f d'un espace topologique X dans un espace topologique Y est dite *irréductible* si $f(A) \neq Y$ pour toute partie propre fermée A de X .

Théorème 2.1.4. *Soient X, Y deux espaces topologiques, et f une application continue surjective fermée et irréductible de X dans Y . Alors X est un espace faiblement- α -favorable si et seulement si Y est un espace faiblement- α -favorable.*

Démonstration. Condition nécessaire : Supposons que X est un espace faiblement- α -favorable. Donc le joueur II possède une stratégie gagnante σ_X dans $\Gamma_{BM}(X)$. Montrons que Y est faiblement- α -favorable. A l'aide de σ_X nous allons définir une stratégie σ_Y pour le joueur II dans le jeu $\Gamma_{BM}(Y)$ comme suit :

Soit U_1 un ouvert de Y choisi par le joueur I dans le jeu $\Gamma_{BM}(Y)$. Puisque f est continue, alors $f^{-1}(U_1)$ est un ouvert de X . Considérons $\sigma_X(f^{-1}(U_1)) = V_1$ qui est un ouvert de X contenu dans $f^{-1}(U_1)$. Puisque f est fermé, alors $f(V_1^c) \neq Y$ est un fermé de Y . Définissons

$$\sigma_Y(U_1) = (f(V_1^c))^c.$$

Clairement $\sigma_Y(U_1) \subset U_1$. Pour $n > 1$, supposons que le joueur I a choisi un ouvert non vide U_n de Y tel que $U_n \subset \sigma_Y(U_1, \dots, U_{n-1})$. Donc $f^{-1}(U_n)$ est un ouvert de X .

Considérons $\sigma_X(f^{-1}(U_1), V_1, \dots, f^{-1}(U_n)) = V_n$ et définissons

$$\sigma_Y(U_1, \dots, U_n) = (f(V_n^c))^c.$$

Ainsi σ_Y est définie. Puisque σ_X est gagnante dans $\Gamma_{BM}(X)$, alors

$$\phi \neq \bigcap_{n \geq 1} V_n = \bigcap_{n \geq 1} f^{-1}(U_n) = f^{-1}\left(\bigcap_{n \geq 1} U_n\right).$$

Ceci nous donne $\bigcap_{n \geq 1} U_n \neq \phi$. D'où σ_Y est une stratégie gagnante pour le joueur II dans $\Gamma_{BM}(Y)$.

Condition suffisante : Supposons que Y est faiblement- α -favorable, alors le joueur II possède une stratégie gagnante σ_Y dans $\Gamma_{BM}(Y)$. Définissons une stratégie σ_X pour le joueur II dans $\Gamma_{BM}(X)$ comme suit :

Supposons que le joueur I a choisi un ouvert non vide U_1 de X . Donc $f(U_1^c) \neq Y$ est un fermé de Y . Considérons $\sigma_Y(f(U_1^c)) = V_1$ qui est un ouvert non vide de Y . Définissons

$$\sigma_X(U_1) = f^{-1}(V_1) \subset U_1.$$

Pour $n \succ 1$, supposons que le joueur I a choisi un ouvert non vide U_n de X telle que $U_n \subset \sigma_X(U_1, f^{-1}(V_1), \dots, U_n)$ et $U_1, V_1, \dots, U_{n-1}, V_{n-1}$ sont définis de telle sorte que

$$V_i = \sigma_Y(f(U_i^c)^c), V_i \subset f(U_i^c)^c$$

et

$$\sigma_X(U_1, f^{-1}(V_1), \dots, U_n) \subset U_i \text{ pour tout } i = 1, \dots, n-1$$

$f(U_n^c)$ est fermé de Y . considérons $\sigma_Y(f(U_1^c)^c, V_1, \dots, f(U_n^c)^c) = V_n$ qui est un ouvert non vide de Y inclu dans $f(U_n^c)^c$. Définissons

$$\sigma_X(U_1, f^{-1}(V_1), \dots, U_n) = f^{-1}(V_n) \subset U_n. \quad (2.1)$$

Ainsi la stratégie σ_X est définie. Puisque σ_Y est une stratégie gagnante pour le joueur II dans $\Gamma_{BM}(Y)$, Alors $\bigcap_{n \geq 1} V_n \neq \phi$. Donc

$$\bigcap_{n \geq 1} U_n = \bigcap_{n \geq 1} f^{-1}(V_n) = f^{-1}\left(\bigcap_{n \geq 1} V_n\right) \neq \phi$$

D'où σ_X est une stratégie gagnante, et donc X est faiblement- α -favorable. \square

Nous allons donner dans ce qui suit deux théorèmes qui nous permettent de situer les espaces faiblement- α -favorables parmi les espaces définis par certaines propriétés de complétude. Rappelons qu'un espace topologique X est de *Baire* si et seulement si tout sous espace ouvert de X est non maigre dans lui même.

Théorème 2.1.5. *Un espace topologique est de Baire si et seulement si le joueur I ne possède aucune stratégie gagnante pour le jeu $\Gamma_{BM}(X)$ (i.e un espace faiblement- β -défavorable).*

Démonstration. Soit X un espace topologique. Nous prouvons que si X n'est pas un espace de Baire, le joueur I a une stratégie gagnante pour le jeu $\Gamma_{BM}(X)$. Dans ce cas, il existe un ouvert ω non vide recouvert par la suite $(F_n)_{n \geq 1}$ de fermés rares. Une stratégie σ_1 pour le joueur I est alors définie par

$$U_1 = \omega, U_n = \sigma_1(V_1, \dots, V_{n-1}) = V_{n-1} \setminus F_n, n \geq 1$$

C'est-à-dire que le joueur I commence par jouer ω , et répond au coup V_n du joueur II par $V_n \setminus F_n$. Si le joueur I joue avec la stratégie σ_1 , les coups (V_n) du joueur II vérifieront :

$$V_1 \subset \omega, V_n \subset V_{n-1} \setminus F_{n-1}, n \geq 1,$$

d'où $\cap_1^\infty \subset \omega \setminus \cup_1^\infty F_n = \phi$ ce qui assure le gain du joueur I .

Inversement, nous supposons que si le joueur I possède une stratégie gagnante σ_1 pour le jeu $\Gamma_{BM}(X)$, X n'est pas un espace de Baire. Plus précisément, l'ouvert $\Omega_1 = U_1$ (le premier coup joué par le joueur I en utilisant la stratégie σ_1) est maigre.

On pose $I_1 = \{\phi\}$, $U_\phi^1 = \Omega_1$ et on construit par récurrence pour tout $n \geq 2$ une famille maximale $(U_i^n, V_i^{n-1})_{i \in I_n}$ de couples d'ouverts non vides de X satisfaisant :

Les $(U_i^n)_{i \in I_n}$ sont deux à deux disjoints ;

$\forall n \geq 1 \forall i \in I_{n+1} \exists j \in I_n, V_i^n \subset U_j^n$;

$U_{i_1}^1 \supset U_{i_2}^2 \supset \dots \supset U_{i_n}^n$ implique $U_{i_n}^n = \sigma_1(V_{i_2}^1, \dots, V_{i_n'}^{n-1})$.

On pose alors $\Omega_n = \cup_{i \in I_n} U_i^n$ et on démontre par récurrence que Ω_n est dense dans Ω_1 , ce qui est clair pour $n = 1$. Si cette propriété est vraie pour n , et si W était un ouvert non vide disjoint de Ω_{n+1} , $W \cap \Omega_n$ serait non vide et il existerait un $i_n \in I_n$ tel que $W \cap U_{i_n}^n \neq \phi$. Il existerait alors un unique $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ tel que

$$U_{i_n}^n \subset V_{i_n}^{n-1} \subset U_{i_{n-1}}^{n-1} \subset \dots \subset V_{i_2}^1 \subset U_{i_1}^1.$$

En posant $V^n = W \cap U_{i_n}^n$ et $U^{n+1} = \sigma_1(V_{i_2}^1, \dots, V_{i_2'}^{n-1}, V^n)$ on aurait $U^{n+1} \subset V^n \subset W$, ce qui montre qu'on pourrait adjoindre (U^{n+1}, V^n) à la famille $(U_i^{n+1}, V_i^n)_{i \in I_n}$, contrairement à la maximalité de cette famille.

Il suffit donc de montrer que $\cap_1^\infty \Omega_n = \phi$ pour prouver que Ω_1 est maigre. Or, si x est un point de $\cap_1^\infty \Omega_n$, il existe une unique suite $(i_n) \in \prod_1^\infty I_n$ telle que $x \in \cap_1^\infty U_{i_n}^n$. Mais alors $[(V_{i_{n+1}}^n), (U_{i_n}^n)]$ est une partie de jeu $\Gamma_{BM}(X)$, ce qui prouve que $\cap_1^\infty U_{i_n}^n = \phi$ contrairement à la définition de x et de (i_n) . Donc $\cap_1^\infty \Omega_n$ est vide ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 2.1.6. *Tout espace topologique faiblement- α -favorable est un espace de Baire.*

Définition 2.1.7. [Oxt61] Soit (X, τ) un espace topologique. Une famille d'ouverts $\mathcal{B} \subset \tau - \{\phi\}$ est appelée pseudo-base (ou π -base) si tout élément de $\tau - \{\phi\}$ contient un élément de \mathcal{B} .

une pseudo-base \mathcal{B} est dite σ -disjointe si $\mathcal{B} = \cup \{\mathcal{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$, où \mathcal{B}_n est une famille disjointe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Rappelons qu'un espace topologique X est dit quasi-régulier, si pour tout ouvert U de X il existe un ouvert V tel que $\overline{V} \subset U$.

Définition 2.1.8. [Oxt61] Un espace topologique quasi-régulier X est dit pseudo-complet s'il existe dans X une suite $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pseudo-bases tel que pour toute suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $B_n \in \mathcal{B}_n$ et $\overline{B_{n+1}} \subset B_n$ alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \neq \phi$.

Rappelons qu'un espace Cech-complet est pseudo-complet et qu'un espace pseudo-complet est un espace de Baire.

Théorème 2.1.9. [Wh75] *Tout espace pseudo-complet est un espace faiblement- α -favorable.*

Démonstration. Supposons que X est un espace pseudo-complet, alors il existe dans X une suite $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pseudo-bases tel que pour toute suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $B_n \in \mathcal{B}_n$ et $\overline{B_{n+1}} \subset B_n$ alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \neq \emptyset$. Définissons une stratégie σ pour le joueur II dans $\Gamma_{BM}(X)$ comme suit. Supposons que le joueur I commence la partie en jouant U_1 un ouvert non vide de X . Puisque \mathcal{B}_1 est une π -base, alors il existe $B_1 \in \mathcal{B}_1$ tel que $B_1 \subset U_1$. Définissons

$$\sigma(U_1) = B_1.$$

Soit U_2 un ouvert non vide de X choisit par le joueur I tel que $U_2 \subset B_1$. On peut choisir U_2 de telle façon que $U_2 \subset \overline{U_2} \subset B_1$. Puisque \mathcal{B}_2 est une pseudo-base, alors il existe $B_2 \in \mathcal{B}_2$ telle que $B_2 \subset U_2$. Définissons $\sigma(U_1, B_1, U_2) = B_2$.

Pour $n > 2$, supposons que $U_1, B_1, \dots, U_{n-1}, B_{n-1}$ soient définis. Le joueur I choisit U_n un ouvert non vide de X telle que $U_n \subset \overline{U_n} \subset B_{n-1}$. Puisque \mathcal{B}_n est une pseudo-base, alors il existe $B_n \in \mathcal{B}_n$ tel que $B_n \subset U_n$. Définissons

$$\sigma(U_1, B_1, \dots, U_n) = B_n.$$

Ainsi la stratégie σ est définie. Puisque X est un espace pseudo-complet, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n \neq \emptyset$. D'où la stratégie σ est gagnante, et donc X est faiblement- α -favorable. \square

2.2 Jeu de Gruenhage $\Gamma_{Gr}(X)$

Dans ce paragraphe on va donner une propriété introduite par Gruenhage dans [Gr76a], appelée W -espace, qui se situe entre la propriété d'être espace à bases locales dénombrables et espace de Fréchet. Cette propriété est définie en terme de jeu infini entre deux joueurs.

Etant donnés un espace topologique X et un point $x \in X$. Considérons le jeu infini, noté $\Gamma_{Gr}(X, x)$, où deux joueurs I et II prennent partie comme suit :

Au premier coup, le joueur I choisi un voisinage ouvert U_1 de x , le joueur II répond en choisissant un point $x_1 \in U_1$.

Au n -ième coup, quand le joueur I a choisi un voisinage ouvert U_n de x , le joueur II répond par un point $x_n \in \bigcap_{i \leq n} U_i$ et ainsi de suite. On dit que le joueur I gagne la partie du jeu si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x , sinon le joueur II gagne.

On appelle stratégie pour le joueur I dans $\Gamma_{Gr}(X, x)$, toute application $\sigma : \mathcal{F}(X) \rightarrow \tau_x(X)$, où $\mathcal{F}(X)$ désigne la collection de toutes les parties finies de X et $\tau_x(X)$ est la collection de tous les ouverts de X contenant le point x .

Une stratégie pour le joueur II dans $\Gamma_{Gr}(X, x)$ est une application $\tau : \mathcal{F}(X) \times \tau_x(X) \rightarrow X$ tel que $\tau(F, U) \in U$, pour tout $F \in \mathcal{F}(X)$ et tout voisinage ouvert U de x .

Soit σ une stratégie pour le joueur I dans $\Gamma_{Gr}(X, x)$. Dans [Gr76a], Gruenhage appelle une σ -séquence toute suite de points $\{x_1, x_2, \dots\}$ d'éléments de X tel que $x_{n+1} \in \sigma(\{x_1, \dots, x_n\})$ pour tout $n > 0$, $\sigma(\{x_1, \dots, x_n\})$ représente l'ouvert joué par I quand $\{x_1, \dots, x_n\}$ a été joué par le joueur II . On conviendra que $\sigma(\emptyset) = X$. Donc la stratégie σ pour le joueur I dans $\Gamma_{Gr}(X, x)$ est gagnante si toute σ -séquence converge vers x .

Définition 2.2.1. [Gr76b] *Un espace topologique X est appelé W -espace si le joueur I possède une stratégie gagnante dans $\Gamma_{Gr}(X, x)$ pour tout $x \in X$.*

Rappelons quelques définitions.

(1) Un espace X est dit à *bases locales dénombrables* ou vérifie le *premier axiome de dénombrabilité* si tout point de X possède une base dénombrable de voisinages.

(2) Un espace X est dit *fortement de Fréchet* ou *bi-séquentiel dénombrable* si pour tout $x \in \overline{A_n}$ où A_n est une suite décroissante de sous-ensembles de X il existe une suite $x_n \in A_n$ qui converge vers x .

(3) Un espace X est dit *de Fréchet* si pour tout point x et tout sous-ensemble A de X tel que $x \in \overline{A}$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans A qui converge vers x .

Il est connu que tout espace bi-séquentiel dénombrable² est un espace de Fréchet. La classe des W -espace englobe tous les espaces vérifiant le premier

²Pour plus de détail sur les espaces bi-séquentiels dénombrables, voir E. Michael [Mic72] ou R.C. Olson [Ols74].

axiome de dénombrabilité, ce que nous illustrons par le théorème suivant.

Théorème 2.2.2. *Tout espace à bases locales dénombrables est un W -espace, et tout W -espace est un espace bi-séquentiel dénombrable.*

Démonstration. Supposons que X est un espace topologique qui vérifie le premier axiome de dénombrabilité. Soit $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ une suite décroissante de voisinages ouverts d'un point $x \in X$. La stratégie $\sigma : \mathcal{F}(X) \rightarrow \tau_x(X)$ définie par $\sigma(\{x_1, \dots, x_n\})$ est évidemment gagnante dans $\Gamma_{Gr}(X, x)$. D'où X est un W -espace.

Supposons que X est un W -espace. Soient $x \in X$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles de X tel que $A_n \supset A_{n+1}$ et $x \in \overline{A_n}$, pour tout $n \geq 0$. Le joueur II peut toujours choisir un certain $x_n \in A_n$. S'il y a une stratégie gagnante pour le joueur I dans $\Gamma_{Gr}(X, x)$, alors il doit aussi y avoir une suite $(x_n) \rightarrow x$ tels que $x_n \in A_n$ pour tout n . Donc X est un espace bi-séquentiel dénombrable. \square

Nous traitons dans le théorème suivant la stabilité des W -espaces par passage aux sous-espaces et par image de certains types d'applications. Rappelons qu'une application $f : X \rightarrow Y$ d'un espace topologique X dans un espace topologique Y est dite presque ouverte si pour tout $y \in Y$, il existe $x \in f^{-1}(y)$ tel que x admet une base de voisinages ouverts dans X dont les images par f sont ouvertes dans Y .

Théorème 2.2.3. [Gr76b]

1. *Tout sous-espace d'un W -espace X est un W -espace.*
2. *L'image d'un W -espace par une application presque ouverte est un W -espace.*

Démonstration. 1. Soit A un sous espace non vide de X , et soit $x \in A$. Montrons que le joueur I possède une stratégie gagnante dans $\Gamma_{Gr}(A, x)$. Comme X est un W -espace, alors le joueur I possède une stratégie gagnante $\sigma : \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{V}_x(X)$ dans $\Gamma_{Gr}(X, x)$. définissons une stratégie $\sigma' : \mathcal{S}(A) \rightarrow \mathcal{V}_x(A)$ pour le joueur I dans $\Gamma_{Gr}(A, x)$ par

$$\sigma'(x_1, x_2, \dots, x_n) = A \cap \sigma(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

où $\mathcal{S}(A)$ est la collection des suites finies d'éléments de A et $\mathcal{V}_x(A)$ désigne la collection des voisinages ouverts de x dans le sous-espace A . Clairement σ' est une stratégie gagnante pour le joueur I dans $\Gamma_{Gr}(A, x)$.

2. Soient X un W -espace, Y un espace topologique et $f : X \rightarrow Y$ une application surjective presque ouverte. Montrons que Y est W -espace. Soit $y \in Y$. Montrons que le joueur I possède une stratégie gagnante dans $\Gamma_{Gr}(Y, y)$. Considérons $x \in f^{-1}(y)$. Comme X est un W -espace, alors le joueur I possède une stratégie σ_X gagnante dans $\Gamma_{Gr}(X, x)$. Définissons une stratégie σ_Y pour le joueur I dans $\Gamma_{Gr}(Y, y)$ comme suit. Si y_1 est le premier point choisi par le joueur II dans $\Gamma_{Gr}(Y, y)$, on prend $x_1 \in f^{-1}(y_1)$. On définit

$$\sigma_Y(y_1) = f(\sigma_X(x_1)).$$

Si $\sigma_Y(y_1, \dots, y_n)$ a été défini et le joueur II a choisi y_{n+1} . On prend $x_{n+1} \in f^{-1}(y_{n+1}) \cap \sigma_X(x_1, \dots, x_n)$. On définit

$$\sigma_Y(y_1, \dots, y_{n+1}) = f(\sigma_X(x_1, \dots, x_{n+1})).$$

Ainsi la stratégie σ_Y est définie.

Maintenant, si la suite (y_1, y_2, \dots) est une σ_Y -séquence, alors la suite (x_1, x_2, \dots) est à son tour une σ_X -séquence. D'après l'hypothèse, la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est convergente vers x . D'où la convergence de la suite $(y_n)_{n \geq 0}$ vers y . Donc σ_Y est une stratégie gagnante pour le joueur I dans $\Gamma_{Gr}(Y, y)$.

□

2.3 Jeux pour les espaces de fonctions

Nous allons voir dans cette section de quelle manière un jeu topologique définit sur un espace topologique X nous permet de donner des caractérisations de certaines propriétés topologiques de $C(X)$, lorsqu'il est muni de la topologie de la convergence simple ou de la topologie compact-open. Ces deux espaces sont respectivement notés $C_p(X)$ et $C_k(X)$.

Jeu de Lutzer-McCoy

Dans leurs article [LM80], Lutzer et McCoy introduisent un jeu topologique, noté $\Gamma_{LM}(X)$,³ définit sur un espace topologique X comme suit. Deux joueurs I et II , auxquels est donné un sous ensemble fini de départ S_0 procèdent en choisissant alternativement des termes d'une suite (S_0, S_1, S_2, \dots) de parties

³Dans [LM80] le jeu $\Gamma_{LM}(X)$ est noté $\Gamma(X)$.

finies (peut être vides) deux à deux disjointes de X . La suite S_0, S_1, S_2, \dots est dite partie de jeu dans $\Gamma_{LM}(X)$. Elle est dite gagnante pour le joueur I si et seulement si le sous espace $S_1 \cup S_3 \cup S_5 \cup \dots$ n'est pas fermé discret dans X . i.e., si et seulement si l'ensemble $S_1 \cup S_3 \cup S_5 \cup \dots$ a un point limite dans X . Si le joueur I ne gagne pas la partie, alors le joueur II gagne.

Définition 2.3.1. Une stratégie pour le joueur I dans le jeu $\Gamma_{LM}(X)$ est une application σ qui associe à toute suite finie de sous ensembles finis de X deux à deux disjointes $(S_0, S_1, \dots, S_{2k}), k \geq 0$, un sous ensemble fini S_{2k+1} de X qui est disjoint de $(S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_{2k})$.

Une stratégie pour le joueur II dans $\Gamma_{LM}(X)$ est une application qui associe à chaque suite finie deux à deux disjointes $(S_0, S_1, \dots, S_{2k+1}), k \geq 0$, un ensemble fini S_{2k+2} qui est disjoint de $(S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_{2k+1})$.

Une stratégie σ pour le joueur I dans $\Gamma_{LM}(X)$ est dite gagnante si pour toute partie (S_0, S_1, S_2, \dots) dans le jeu $\Gamma_{LM}(X)$, dans laquelle $S_{2k+1} = \sigma(S_0, \dots, S_{2k})$, pour tout $k \geq 0$, le joueur I gagne cette partie. i.e., l'ensemble $S_1 \cup S_3 \cup S_5 \cup \dots$ a un point limite dans X .

Une stratégie τ pour le joueur II dans $\Gamma_{LM}(X)$ est dite gagnante, si pour toute partie de jeu (S_0, S_1, S_2, \dots) dans laquelle $S_{2k+2} = \tau(S_0, \dots, S_{2k+1})$, pour tout $k \geq 0$, le joueur II gagne la partie. i.e., l'ensemble $S_1 \cup S_3 \cup S_5 \cup \dots$ est un sous espace fermé discret de X .

Nous énonçons maintenant un théorème qui nous donne en terme de jeu $\Gamma_{LM}(X)$, une condition nécessaire pour que $C_p(X)$ soit un espace de Baire.

Théorème 2.3.2. Si $C_p(X)$ est un espace de Baire, alors le joueur I ne possède aucune stratégie gagnante dans le jeu $\Gamma_{LM}(X)$.

Démonstration. Soit τ une stratégie arbitraire pour le joueur I dans le jeu $\Gamma_{LM}(X)$. Utilisons le fait que $C_p(X)$ soit un espace de Baire pour définir une stratégie σ pour le joueur II et un ensemble fini de départ S_0 , tel que le joueur II gagne la partie $(S_0, \tau(S_0), \sigma(S_0, S_1), \dots)$.

Dans la première étape nous définissons les sous-ensembles finis $T(i_1, \dots, i_k)$ de X pour chaque suite finie d'entiers naturels (i_1, \dots, i_k) , par induction sur k . Soit $T(0) = \phi$, et si $T(1), T(2), \dots, T(n-1)$ sont définis, posons

$$T(n) = \tau(T(1) \cup T(2) \cup \dots \cup T(n-1)).$$

Supposons $k \geq 1$ et que $T(i_1, \dots, i_k)$ sont définis pour tout k -tuple d'éléments de \mathbb{N} . Soit $T(i_1, \dots, i_k, 0) = \phi$, et si $T(i_1, \dots, i_k, j)$ sont définis pour tout $0 \leq j \leq n-1$, posons

$$T(i_1, \dots, i_k, n) = \tau(R_0, R_1, \dots, R_{2k-1}, T(i_1, \dots, i_k, 0) \cup \dots \cup T(i_1, \dots, i_k, n-1)),$$

où $R_0 = T(0) \cup \dots \cup T(i_1 - 1)$, $R_1 = T(i_1)$, $R_2 = T(i_1, 0) \cup \dots \cup T(i_1, i_2 - 1)$, $R_3 = T(i_1, i_2), \dots$, $R_{2j-1} = (i_1, \dots, i_j)$ et $R_{2j} = T(i_1, \dots, i_j, 0) \cup \dots \cup T(i_1, \dots, i_j, i_{j+1} - 1)$ pour $j \leq k$.

Dans la deuxième étape, nous allons définir par induction, des sous-ensembles ouverts $\mathcal{W}(i_1, \dots, i_k)$ de $C_p(X)$, pour tout k -tuple d'éléments de \mathbb{N} . Posons $\mathcal{W}(0) = \phi$. Supposons que $\mathcal{W}(1), \dots, \mathcal{W}(n-1)$ sont définis. On définit

$$\mathcal{W}(n) = \cap \{[\{x\}, (0, 1)] : x \in T(n)\} - cl(\mathcal{W}(0) \cup \dots \cup \mathcal{W}(n-1)). \quad (2.2)$$

Où $[\{x\}, (0, 1)]$ est l'ensemble des fonctions continues qui envoient x dans l'intervalle ouvert $(0, 1)$. Supposons que $\mathcal{W}(i_1, \dots, i_k)$ sont définis pour $k \geq 1$. Posons $\mathcal{W}(i_1, \dots, i_k, 0) = \phi$. Supposons que $\mathcal{W}(i_1, \dots, i_k, j)$ sont définis pour tout $j \in \{0, \dots, n-1\}$. On définit

$$\mathcal{W}(i_1, \dots, i_k, n) = \mathcal{W}(i_1, \dots, i_k) \cap (\cap \{[\{x\}, (k-1, k)] : x \in T(i_1, \dots, i_k, n)\}) - E,$$

Où $E = cl(\mathcal{W}(i_1, \dots, i_k, 0) \cup \dots \cup \mathcal{W}(i_1, \dots, i_k, n-1))$.

Maintenant, définissons

$$\mathcal{G}(n) = \cup \{\mathcal{W}(i_1, \dots, i_n) : i_j \in \mathbb{N} \text{ pour tout } 1 \leq j \leq n\}. \quad (2.3)$$

Les ensembles $\mathcal{G}(n)$ sont des ouverts denses dans $C_p(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque ce dernier est un espace de Baire, alors il existe une fonction continue dans $\cap_{n \geq 1} \mathcal{G}(n)$. Puisque les ensembles utilisés pour obtenir chaque $\mathcal{G}(n)$ sont deux à deux disjoints, alors il existe une unique suite i_1, i_2, \dots tel que $f \in \mathcal{W}(i_1, \dots, i_k)$ pour tout $k \geq 1$. Donc

$$f(T(i_1, \dots, i_k)) \subset]k-1, k[.$$

Comme f est continue, alors l'ensemble $\cup_{k \geq 1} T(i_1, \dots, i_k)$ n'a pas de point limite dans X .

A cet étape, nous avons tous les ingrédients nécessaires pour définir la partie du jeu. Considérons la partie de jeu qui démarre par $S_0 = T(0) \cup \dots \cup T(i_1 - 1)$. Puisque le joueur I utilise la stratégie τ , donc $S_1 = \tau(S_0) = T(i_1)$. Le joueur II répond par $S_2 = \sigma(S_0, S_1) = T(i_1, 0) \cup \dots \cup T(i_1, i_2 - 1)$. Le joueur I joue l'ensemble

$$\begin{aligned} S_3 &= \tau(S_0, S_1, S_2) \\ &= \tau(T(0) \cup \dots \cup T(i_1 - 1), T(i_1), T(i_1, 0) \cup \dots \cup T(i_1, i_2 - 1)) \\ &= T(i_1, i_2). \end{aligned}$$

Donc le joueur II répond par

$$\sigma(S_0, S_1, S_2, S_3) = S_4 = T(i_1, i_2, 0) \cup \dots \cup T(i_1, i_2, i_3 - 1),$$

et ainsi de suite. Dans cette partie de jeu on a

$$S_1 \cup S_3 \cup S_5 \cup \dots = \cup_{k \geq 1} T(i_1, \dots, i_k),$$

qui est un ensemble fermé discret. D'où la stratégie τ n'est pas gagnante pour le joueur I . \square

Théorème 2.3.3. [LM80] *Pour tout espace topologique X , l'espace produit \mathbb{R}^X est un espace de Baire. De plus, $C_p(X)$ est un espace de Baire si et seulement si pour toute suite $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ d'ouverts denses dans \mathbb{R}^X , on a*

$$C_p(X) \cap (\cap_{n \geq 1} \Omega_n) \neq \phi. \quad (2.4)$$

Nous énonçons à présent, pour certaines classes d'espaces topologiques X , une caractérisation en terme de jeu $\Gamma_{LM}(X)$ pour que l'espace $C_p(X)$ soit de Baire. Rappelons qu'une famille γ de parties d'un espace topologique X est dite localement finie si tout point de X possède un voisinage qui rencontre un nombre fini d'éléments de γ . Rappelons qu'un espace topologique X est dit paracompact si tout recouvrement ouvert de X admet un raffinement (ouvert) localement fini.

Théorème 2.3.4. *Soit X un espace topologique paracompact tel que l'ensemble de ces points d'accumulation, noté X^d , est un sous espace discret. Alors, $C_p(X)$ est un espace de Baire si et seulement si le joueur I ne possède aucune stratégie gagnante dans $\Gamma_{LM}(X)$.*

Démonstration. Supposons que $C_p(X)$ n'est pas de Baire. D'après le théorème 2.3.3, il existe une suite $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ d'ouverts denses dans \mathbb{R}^X , tel que $C_p(X) \cap (\cap_{n \geq 1} \Omega_n) = \phi$. Puisque X^d est discret dans X , alors il existe une partition d'ouverts $\{V_p : p \in X^d\}$ de X telle que $X^d \cap V_p = \{p\}$.

Maintenant, supposons que S_0 est un ensemble fini de départ pour une partie de jeu $\Gamma_{LM}(X)$. Le joueur I considère $f_0 = 0$ et $\varepsilon_0 = 0$. Donc $\langle f_0, S_0, \varepsilon_0 \rangle \cap \Omega_1 \neq \phi$, puisque Ω_1 est un ouvert dense dans $C_p(X)$. Le joueur I choisit un ouvert de base $\langle f_1, T_1, 2\varepsilon_1 \rangle \subset \langle f_0, S_0, \varepsilon_0 \rangle \cap \Omega_1$. Sans perte de généralisation, $\varepsilon_1 \in]0, \frac{1}{2}]$. En outre, élargissant T_1 si nécessaire, on doit supposer que si $V_p \cap S_0 \neq \phi$ alors $p \in T_1$. Le joueur I définira

$$S_1 = \sigma(S_0) = T_1 - S_0.$$

Par hypothèse d'induction sur n , supposons que les ensembles $S_0, S_1, \dots, S_{2n-1}$, les nombres $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{2n-1}$, et les fonctions f_0, \dots, f_{2n-1} sont définis de telle sorte que

1. $\varepsilon_i \in]0, (\frac{1}{2})^i]$;
2. Si $V_p \cap (\cup \{S_i : 0 \leq i \leq 2n - 2\}) \neq \phi$, alors $p \in S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_{2n-1}$;
3. $\langle f_{2j-1}, T_{2j-1}, 2\varepsilon_{2j-1} \rangle \subset \Omega_{2j-1} \cap \langle f_{2j-2}, T_{2j-2}, \varepsilon_{2j-2} \rangle$ si $j \leq n$;
où $T_k = S_0 \cup \dots \cup S_k$;
4.
$$f_{2j}(x) = \begin{cases} f_{2j-1}(p) & \text{si } x \in S_{2j} \cap V_p \text{ pour certains } p \in X^d, \\ f_{2j-1}(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Maintenant, supposons que S_{2n} est un sous-ensemble fini disjoint de $(S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_{2n-1})$. Définissons la fonction f_{2n} par

$$f_{2n}(x) = \begin{cases} f_{2n-1}(p) & \text{si } x \in S_{2n} \cap V_p \text{ pour certains } p \in X^d, \\ f_{2n-1}(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $\varepsilon_{2n} = \frac{1}{2}\varepsilon_{2n-1}$, et $T_{2n} = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_{2n-1} \cup S_{2n}$. Donc l'ouvert $\langle f_{2n}, T_{2n}, \varepsilon_{2n} \rangle$ doit rencontrer l'ouvert Ω_{2n+1} et donc il existe un ouvert

$$\langle f_{2n+1}, T_{2n+1}, \varepsilon_{2n+1} \rangle \subset \Omega_{2n+1} \cap \langle f_{2n}, T_{2n}, \varepsilon_{2n} \rangle.$$

On prend T_{2n+1} suffisamment large et ε_{2n+1} suffisamment petit s'il est nécessaire. On suppose que $\varepsilon_{2n+1} \in]0, (\frac{1}{2})^{2n+1}]$, et que si $V_p \cap T_{2n} \neq \phi$ alors $p \in T_{2n+1}$. Le joueur I définira $S_{2n+1} = T_{2n+1} - T_{2n}$. Ainsi la stratégie σ est définie.

D'après l'hypothèse, pour toute partie du jeu (S_0, S_1, \dots) de $\Gamma_{LM}(X)$ dans lequel $S_{2n+1} = \sigma(S_0, S_1, \dots, S_{2n})$ est définie comme ci-dessus, l'ensemble $(S_1 \cup S_3 \cup S_5 \cup \dots)$ est fermé et discret. Posons $T = \cup_{n \geq 0} S_n$. On a T est fermé et la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction continue $g : T \rightarrow \mathbb{R}$. Comme X est normal et T fermé dans X , alors il existe une fonction $\tilde{g} \in C_p(X)$ prolongeant g . Mais donc

$$\tilde{g} \in C_p(X) \cap (\cap_{n \geq 1} \Omega_n) = \phi.$$

qui est impossible. □

Nous terminons cette partie en énonçant un théorème qui donne une caractérisation par le jeu $\Gamma_{LM}(X)$ d'autres propriétés de complétude de $C_p(X)$ plus fortes que d'être de Baire. Auparavant rappelons quelques définitions.

Un espace topologique est dit *pseudo-normal* si tous deux fermés disjoints de X dont l'un est dénombrable peuvent être séparés par deux ouverts disjoints.

Un sous-ensemble d'un espace topologique est dit G_δ s'il est l'intersection d'une suite dénombrable d'ouverts.

Théorème 2.3.5. *Soit X un espace topologique pseudo-normal. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

1. $C_p(X)$ est pseudo-complet,
2. $C_p(X)$ est faiblement- α -favorable,
3. Le joueur II possède une stratégie gagnante dans $\Gamma_{LM}(X)$,
4. Tout sous ensemble dénombrable de X est fermé,
5. $C_p(X)$ rencontre tout G_δ non vide de \mathbb{R}^X .

Jeu de McCoy-Ntantu pour $C_k(X)$

Dans ce paragraphe nous allons présenter deux jeux topologiques introduits par McCoy et Ntantu [MN86] qui vont nous permettre d'énoncer un théorème dû aux mêmes auteurs pour caractériser quand $C_k(X)$ est un espace faiblement- α -favorable. Nous allons nous inspirer dans la suite de notre travail pour étendre ce résultat à $C(X)$ lorsqu'il est muni d'une topologie set open engendré par une famille admissible de compacts de X .

Rappelons qu'une famille γ de sous-ensembles d'un espace topologique X est dite *discrète* si tout point $x \in X$ possède un voisinage qui rencontre au plus un élément de γ .

le jeu $\Gamma_k^1(X)$ ⁴ définit sur un espace topologique X est un jeu topologique dans lequel deux joueurs I et II prennent partie en choisissant des sous-ensembles compacts de X .

Au n -ième coup, le joueur I choisit un compact A_n . Le joueur II répond par un compact B_n . La seule restriction est sur le joueur I qui doit choisir A_n tel que $A_n \cap (B_1 \cup \dots \cup B_{n-1}) = \emptyset$, pour tout $n > 1$. Le joueur II gagne la partie du jeu si la famille $\{A_n : n \geq 1\}$ est discrète dans X , sinon I gagne.

Dans le jeu $\Gamma_k^2(X)$, les deux joueurs I et II choisissent alternativement des compacts de X sans aucune restriction. Au n -ième coup, le joueur I choisit un compact A_n et le joueur II répond par un compact B_n . Soit $R_1 = A_1$. Pour tout $n > 1$, soit $R_n = A_n \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{n-1})$. Le joueur II gagne la partie si la famille $\{R_n : n \geq 1\}$ est discrète dans X , sinon I gagne.

⁴Dans [MN86], ces jeux sont notés Γ_1 et Γ_2 .

Une stratégie pour le joueur I dans $\Gamma_k^1(X)$ est une application σ qui associe à toute suite finie (B_1, \dots, B_{n-1}) de compacts de X un compact A_n de X qui est disjoint de $(B_1 \cup \dots \cup B_{n-1})$. Une stratégie pour le joueur II dans $\Gamma_k^1(X)$ est une application τ qui associe à toute suite finie (A_1, \dots, A_n) de compacts de X un compact B_n de X .

De la même façon, on définit les stratégies pour les joueurs I et II dans le jeu $\Gamma_k^2(X)$.

On remarque que si le joueur II possède une stratégie gagnante dans $\Gamma_k^2(X)$, alors il a une stratégie gagnante dans $\Gamma_k^1(X)$. Rappelons qu'un espace topologique X est dit normal si tout deux fermés disjoints de X peuvent être séparés par deux ouverts disjoints. Rappelons qu'un espace topologique X est dit q -espace si pour tout point $x \in X$ il existe une suite $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de voisinages de x tel que

Théorème 2.3.6. [MN86] *Soit X un espace topologique normal q -espace, alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. $C_k(X)$ est faiblement- α -favorable,
2. Le joueur II possède une stratégie gagnante dans $\Gamma_k^2(X)$,
3. X est localement compact et le joueur II possède une stratégie gagnante dans $\Gamma_k^1(X)$.

Chapitre 3

α -favorabilité faible de $C(X)$ muni d'une topologie set-open

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté deux jeux topologiques Γ_k^1 et Γ_k^2 définis par McCoy et Ntantu qui permettent d'obtenir des conditions pour que $C_k(X)$ soit faiblement- α -favorable. Nous allons dans ce chapitre définir deux jeux sur X , de la même manière que Γ_k^1 et Γ_k^2 , où le choix des deux joueurs est restreint aux compacts de la famille de compacts γ qui engendre la topologie de $C_\gamma(X)$. Ceci va nous permettre d'étendre à $C_\gamma(X)$ les résultats concernant certaines propriétés de complétude (α -favorabilité faible, σ -compacité) obtenus par McCoy et Ntantu [MN86] dans le cadre de $C_k(X)$.

Dans tout ce chapitre, les collections γ de compacts de X seront supposées **stables pour les unions finies**. Cette condition nous permet de ne pas modifier la topologie de $C_\gamma(X)$ (voir la remarque 1.1.2).

3.1 Jeu $\Gamma_\gamma^1(X)$

Soit X un espace topologique et γ une famille non vide de compacts de X comprenant l'ensemble vide. On définit $\Gamma_\gamma^1(X)$ comme étant le jeu topologique dans lequel deux joueurs notés I et II , au cours d'une partie, jouent alternativement des éléments de la famille γ .

Au n -ième coup, le joueur I choisit un compact $A_n \in \gamma$ et le joueur II répond par un compact B_n de γ , la seule restriction est sur le joueur I qui doit choisir A_n disjoint de $B_1 \cup \dots \cup B_{n-1}$ pour tout $n > 1$. Le joueur II gagne la partie si la famille $\{A_n : n \geq 1\}$ est discrète dans X , sinon le joueur I gagne.

Une stratégie pour le joueur I dans $\Gamma_\gamma^1(X)$ est une application σ qui associe à toute suite finie (B_1, \dots, B_{n-1}) d'éléments de γ un compact $A_n \in \gamma$ tel que $A_n \cap (B_1 \cup \dots \cup B_{n-1}) = \emptyset$. Une stratégie pour le joueur II dans $\Gamma_\gamma^1(X)$ est une application τ qui associe à toute suite finie (A_1, \dots, A_n) d'éléments de γ un compact $B_n \in \gamma$.

Lemme 3.1.1. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Si $\{A_i : i \in I\}$ est une famille de sous-ensembles de X telle que $\{f(A_i) : i \in I\}$ est discrète dans Y , alors la famille $\{A_i : i \in I\}$ est discrète dans X .*

Démonstration. Soit $x \in X$. On veut démontrer qu'il existe un voisinage V de x dans X tel que $V \cap A_i = \emptyset$, sauf pour un i_0 au plus. Puisque la famille $\{f(A_i) : i \in I\}$ est discrète dans Y , alors il existe un voisinage W de $f(x)$ dans Y tel que $W \cap f(A_i) = \emptyset$ sauf pour un i_0 au plus. Il suffit de prendre $V = f^{-1}(W)$ voisinage de x dans X car f est continue. \square

Nous donnons dans la proposition suivante, à l'aide du jeu $\Gamma_\gamma^1(X)$ une condition nécessaire pour que $C_\gamma(X)$ soit faiblement- α -favorable.

Proposition 3.1.2. *Soit X un espace topologique et γ une famille admissible de compacts de X comprenant l'ensemble vide. Si $C_\gamma(X)$ est un espace faiblement- α -favorable, alors le joueur II a une stratégie gagnante dans $\Gamma_\gamma^1(X)$.*

Démonstration. Supposons que $C_\gamma(X)$ soit un espace faiblement- α -favorable, donc le joueur II possède une stratégie gagnante τ dans $\Gamma_{BM}(C_\gamma(X))$. Montrons que le joueur II possède une stratégie gagnante σ dans $\Gamma_\gamma^1(X)$.

Supposons que le joueur I ait choisi un élément A_1 de γ et soit $f_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ l'application telle que $f_1(x) = 1, \forall x \in X$. Considérons $U_1 = \langle f_1, A_1, \frac{1}{2} \rangle$ qui est un ouvert de $C_\gamma(X)$, alors $\tau(U_1)$ est un ouvert de $C_\gamma(X)$ tel que $\tau(U_1) \subset U_1$. Choisissons $V_1 = \langle g_1, B_1, \epsilon_1 \rangle \subset \tau(U_1)$ avec $\epsilon_1 \leq \frac{1}{2}$. Posons $\sigma(A_1) = B_1$.

Supposons que pour $n > 1$ le joueur I ait choisi un élément A_n de γ et que $(k=2, \dots, n-1)$:

$$U_k = \left\langle f_k, A_k \cup B_{k-1}, \frac{\epsilon_{k-1}}{2} \right\rangle, V_k = \langle g_k, B_k, \epsilon_k \rangle.$$

sont définis de telle sorte que

$$V_k \subset \tau(U_1, V_1, \dots, U_{k-1}, V_{k-1}, U_k), \epsilon_k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

et que

$$f_k(x) = \begin{cases} g_{k-1}(x) & \text{si } x \in B_{k-1} \\ k & \text{si } x \in A_k. \end{cases}$$

Définissons l'application continue $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = g_{n-1}(x)$ pour $x \in B_{n-1}$ et $f_n(x) = n$, pour $x \in A_n$. Considérons l'ouvert $U_n = \langle f_n, A_n \cup B_{n-1}, \frac{\epsilon_{n-1}}{2} \rangle \subset V_{n-1}$, alors il existe un ouvert

$$V_n = \langle g_n, B_n, \epsilon_n \rangle \subset \tau(U_1, V_1, \dots, U_{n-1}, V_{n-1}, U_n) \text{ avec } \epsilon_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Posons $\sigma(A_1, A_2, \dots, A_n) = B_n$, et montrons que σ est une stratégie gagnante pour le joueur II dans $\Gamma_\gamma^1(X)$. Puisque $C_\gamma(X)$ est un espace faiblement- α -favorable, alors $\bigcap_{n \geq 1} U_n \neq \emptyset$. Soit $f \in \bigcap_{n \geq 1} U_n$ et $x \in X$, alors

$$|f(x) - f_n(x)| < \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Donc

$$f(A_n) \subset \left] n - \left(\frac{1}{2}\right)^n, n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right[, \text{ pour tout } n \geq 1.$$

La famille $\{f(A_n); n \geq 1\}$ est donc discrète dans \mathbb{R} . Puisque f est continue, alors la famille $\{A_n; n \geq 1\}$ est discrète dans X . Par conséquent, σ est une stratégie gagnante pour le joueur II dans $\Gamma_\gamma^1(X)$. \square

3.2 Jeu $\Gamma_\gamma^2(X)$

Soit X un espace topologique et γ une famille non vide de compacts de X comprenant l'ensemble vide. On définit $\Gamma_\gamma^2(X)$ comme étant le jeu topologique dans lequel deux joueurs notés I et II , au cours d'une partie, jouent alternativement des éléments de la famille γ sans aucune restriction. Au n -ième coup, le joueur I choisit un compact $A_n \in \gamma$ et le joueur II répond par un compact $B_n \in \gamma$. Soit $R_1 = A_1$ et pour $n \geq 2$, $R_n = A_n \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{n-1})$. Le joueur II gagne la partie si la famille $\{R_n; n \geq 1\}$ est discrète dans X , sinon le joueur I gagne.

Les stratégies pour les joueurs I et II dans le jeu Γ_γ^2 sont définies de la même manière que dans le jeu Γ_γ^1 .

Remarquons que si le joueur II possède une stratégie gagnante dans $\Gamma_\gamma^2(X)$, alors il a une stratégie gagnante dans $\Gamma_\gamma^1(X)$. Pour le cas inverse, nous avons la proposition suivante.

Proposition 3.2.1. *Soit X un espace topologique, γ une famille admissible de compacts de X comprenant l'ensemble vide tel que tout point $x \in X$ admet un élément de γ comme voisinage. Si le joueur II a une stratégie gagnante dans $\Gamma_\gamma^1(X)$, alors il a une stratégie gagnante dans $\Gamma_\gamma^2(X)$.*

La démonstration de cette proposition nécessite la démonstration du lemme suivant

Lemme 3.2.2. *Soit X un espace topologique, γ une famille admissible de compacts de X stable pour les unions finies. Soit $C, D, D' \in \gamma$ tels que $D' \subset D^\circ$. Alors, il existe $C' \in \gamma$ tel que $(C \setminus D) \subset C'$ et $C' \cap D' = \phi$.*

Démonstration. (D^c, D°) est un recouvrement ouvert de C . En vertu du fait que γ soit admissible, on peut trouver $E_1, \dots, E_m \in \gamma$ recouvrant C et refinant (D^c, D°) . Soit $C' = \cup \{E_i; E_i \subset D^c\}$. Il est aisé de voir que $(C \setminus D) \subset C'$ et $C' \cap D' = \phi$. \square

Démonstration. Soit σ_1 une stratégie gagnante pour le joueur II dans $\Gamma_\gamma^1(X)$. On définit une stratégie σ_2 pour le joueur II dans $\Gamma_\gamma^2(X)$ comme suit : Soit $A_1 \in \gamma$ le compact choisi par le joueur I au premier coup dans $\Gamma_\gamma^2(X)$. Posons $R_1 = A_1$ et $A'_1 = A_1$. Alors $B'_1 = \sigma_1(A_1)$ est bien défini. Par ailleurs, pour tout $x \in B'_1$ il existe un élément $K_x \in \gamma$ et un voisinage ouvert O_x de x tel que $O_x \subset K_x$. La famille $\{O_x : x \in B'_1\}$ est un recouvrement de B'_1 qui est compact, par conséquent

$$B'_1 \subset \cup \{O_{x_i} : i = 1, \dots, r\} \subset \cup \{K_{x_i} : i = 1, \dots, r\} = B_1.$$

Définissons $\sigma_2(A_1) = B_1$.

Au n -ième coup pour $n \geq 2$, supposons que le joueur I ait choisi A_n de γ . Soient $A_1, B_1, \dots, A_{n-1}, B_{n-1}$ et $A'_1, B'_1, \dots, A'_{n-1}, B'_{n-1}$ les compacts choisis de telle sorte que $B'_i \subset B_i$, et

$$A'_i \cap (B'_1 \cup \dots \cup B'_{i-1}) = \phi,$$

pour tout $i = 1, \dots, n-1$. Maintenant, soit $R_n = A_n \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{n-1})$. Prenant A'_n comme étant un élément de γ qui contient $\overline{R_n}$ dans son intérieur et que l'on peut choisir en vertu de l'admissibilité de γ et du lemme 3.2.2 tel que $A'_n \cap (B'_1 \cup \dots \cup B'_{n-1}) = \phi$. Donc $\sigma_1(A'_1, \dots, A'_n) = B'_n$ est bien définie. Définissons $\sigma_2(A_1, \dots, A_n) = B_n$ comme étant un élément de γ qui contient

B'_n dans son intérieur.

$A'_1, B'_1, A'_2, B'_2, \dots$ étant une partie du jeu $\Gamma_\gamma^1(X)$, donc la famille $\{A'_n : n \geq 1\}$ est discrète dans X . Puisque $R_n \subset A'_n$ pour tout $n \geq 1$, alors la famille $\{R_n : n \geq 1\}$ est discrète dans X et par conséquent σ_2 une stratégie gagnante pour le joueur II dans $\Gamma_\gamma^2(X)$. \square

Lemme 3.2.3. [MN88] *Soit X un espace topologique, γ une famille de sous ensembles compacts de X comprenant l'ensemble vide. Si le joueur II possède une stratégie gagnante σ dans $\Gamma_\gamma^2(X)$ et si (C_n) est une suite d'éléments de γ , alors la stratégie σ' définie par $\sigma'(A_1, \dots, A_n) = \sigma(A_1, \dots, A_n) \cup C_n$ est une stratégie gagnante pour le joueur II .*

Définition 3.2.4. *Une stratégie σ pour le joueur II dans Γ_γ^2 est dite enveloppante si pour tout n , $A_n \subset \sigma(A_1, \dots, A_n)$.*

On remarque que si le joueur II a une stratégie gagnante σ dans Γ_γ^2 , alors il a une stratégie gagnante enveloppante. Ceci résulte du lemme 3.2.3 en posant $C_n = A_n$ pour tout n .

Proposition 3.2.5. *Soit X un espace topologique normal, et γ une famille admissible de compacts de X . Si le joueur II possède une stratégie gagnante dans $\Gamma_\gamma^2(X)$, alors $C_\gamma(X)$ est un espace faiblement- α -favorable.*

Démonstration. Soit σ une stratégie gagnante pour le joueur II dans $\Gamma_\gamma^2(X)$. Alors la stratégie σ' définit dans le lemme 3.2.3 en posant $C_n = A_n$ pour tout n est une stratégie gagnante enveloppante pour le joueur II dans $\Gamma_\gamma^2(X)$.

On définit une stratégie τ pour le joueur II dans le jeu de Banach-Mazur $\Gamma_{BM}(C_\gamma(X))$ comme suit. Soit $B_0 = \phi$. Supposons que le joueur I ait choisi un ouvert U_1 dans $C_\gamma(X)$ et soit $f_1 \in U_1$. Alors, il existe $A_1 \in \gamma$ et un nombre réel positif ϵ_1 tel que le voisinage ouvert $\langle f_1, A_1, \epsilon_1 \rangle$ de f_1 dans $C_\gamma(X)$ est inclus dans U_1 . Comme le joueur II a une stratégie gagnante σ' dans $\Gamma_\gamma^2(X)$, alors quel que soit le choix du joueur I dans ce jeu, le joueur II doit gagner en utilisant cette stratégie. On peut supposer que le joueur I utilise la même stratégie σ' et commence la partie en choisissant $A_1 = \sigma'(B_0)$. Le joueur II répond par $B_1 = \sigma'(A_1)$ dans le jeu $\Gamma_\gamma^2(X)$. Comme une réponse sur le choix du joueur I dans le jeu $\Gamma_{BM}(C_\gamma(X))$, le joueur II choisit $V_1 = \tau(U_1) = \langle f_1, B_1, \epsilon'_1 \rangle$ qui est un voisinage ouvert de f_1 dans $C_\gamma(X)$ avec $\epsilon'_1 = \min(\frac{\epsilon_1}{2}, \frac{1}{2})$. Au n -ième coup, supposons que le joueur I ait choisi un ouvert U_n dans $C_\gamma(X)$ tel que si $n > 1$, alors $U_n \subset \tau(U_1, \dots, U_{n-1})$. Soit $f_n \in U_n$ et soit $\langle f_n, A_n, \epsilon_n \rangle$ un voisinage ouvert de f_n contenu dans U_n . Alors le joueur I choisit $A_n = \sigma'(B_0, \dots, B_{n-1})$ dans le jeu $\Gamma_\gamma^2(X)$ et le joueur II répond par un élément $B_n = \sigma'(A_1, \dots, A_n)$ de la famille γ . Soit $\epsilon'_n = \min(\frac{\epsilon_n}{2}, \frac{1}{2})$. Alors le joueur II doit choisir $V_n = \tau(U_1, \dots, U_n)$ comme étant l'ouvert de base $\langle f_n, B_n, \epsilon'_n \rangle$.

Maintenant, on montre que τ est une stratégie gagnante pour le joueur II dans $\Gamma_{BM}(C_\gamma(X))$, i.e $\cap \{U_n/n \in \mathbb{N}^*\} \neq \phi$. Premièrement notons que puisque σ' est une stratégie enveloppante, alors $A_n \subset B_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $S_n = \overline{A_n \setminus B_{n-1}}$ et $R_n = \overline{B_n \setminus A_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Les deux familles $\{R_n/n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\{S_n/n \in \mathbb{N}^*\}$ sont discrètes dans X , car σ' est gagnante dans le jeu $\Gamma_\gamma^2(X)$, et donc les deux sous ensembles $S = \cup \{S_n/n \in \mathbb{N}^*\}$ et $R = \cup \{R_n/n \in \mathbb{N}^*\}$ sont fermés dans X .

Soit k un entier positif. Considérons les deux suites $\{f_n|_{S_k}/n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\{f_n|_{R_k}/n \in \mathbb{N}^*\}$ respectivement dans $C_{\gamma \cap S_k}(S_k)$ et $C_{\gamma \cap R_k}(R_k)$. Alors ces deux suites sont uniformément de Cauchy. En effet, soit ϵ un nombre réel positif. On distingue deux cas

- Si $\epsilon'_k < \epsilon$. Pour tout $n \geq k$ on a $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon'_k$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in B_k$. puisque S_k est un sous ensemble compact de B_k , on obtient $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon$ pour tout $x \in S_k$.
- Si $\epsilon \leq \epsilon'_k$. Soit n_0 le plus petit entier positif tel que $\langle f_{n_0}, B_{n_0}, \epsilon'_{n_0} \rangle \subset \langle f_k, A_k, \epsilon_k \rangle$ et $\epsilon'_{n_0} < \epsilon$. Pour tout $n \geq n_0$ on a $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in S_k$.

D'où, $\{f_n|_{S_k}/n \in \mathbb{N}^*\}$ est uniformément de Cauchy dans $C_{\gamma \cap S_k}(S_k)$. La démonstration est la même pour la deuxième suite.

Comme $C_{\gamma \cap S_k}(S_k)$ et $C_{\gamma \cap R_k}(R_k)$ sont des espaces uniformément complets, d'après le théorème 1.3.4, alors les deux suites $\{f_n|_{S_k}/n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\{f_n|_{R_k}/n \in \mathbb{N}^*\}$ convergent respectivement vers les fonctions f_{S_k} et f_{R_k} dans $C_{\gamma \cap S_k}(S_k)$ et $C_{\gamma \cap R_k}(R_k)$. Puisque la famille $\{S_n/n \in \mathbb{N}^*\}$ (resp. $\{R_n/n \in \mathbb{N}^*\}$) est discrète, la fonction "combinaison" $\{\nabla f_{S_k}/k \in \mathbb{N}^*\}$ (resp. $\{\nabla f_{R_k}/k \in \mathbb{N}^*\}$) est continue sur S (resp. R). Comme S et R sont continues, alors la fonction combinatoire $f_{S \cup R}$ de $\{\nabla f_{S_k}/k \in \mathbb{N}^*\}$ et $\{\nabla f_{R_k}/k \in \mathbb{N}^*\}$ est continue sur $S \cup R$. Par hypothèse X est normal. Soit f un prolongement continu de $f_{S \cup R}$ sur X . Montrons que $f \in \cap \{\langle f_n, A_n, \epsilon_n \rangle / n \in \mathbb{N}^*\} \subset \cap \{U_n/n \in \mathbb{N}^*\}$.

Soit m un entier positif arbitraire et soit $x \in A_m$. Si $x \in S_m$, alors puisque f est une limite de $(f_n|_{S_m})$ sur S_m ,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n > n_0, |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon_m}{2}. \quad (3.1)$$

Soit k le plus petit entier positif tel que $k > n_0$ et $\langle f_k, A_k, \epsilon_k \rangle \subset \langle f_m, B_m, \epsilon'_m \rangle$. puisque $S_m \subset B_m$, on a

$$|f_k(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon_m}{2}. \quad (3.2)$$

D'après les inégalités (3.1)-(3.2), on obtient

$$|f(x) - f_m(x)| < \epsilon_m, \forall x \in S_m. \quad (3.3)$$

D'une manière similaire, on obtient

$$|f(x) - f_m(x)| < \epsilon_m, \forall x \in B_{m-1}. \quad (3.4)$$

Ceci nous donne $f \in \langle f_m, A_m, \epsilon_m \rangle$. Comme m est arbitraire, alors

$$f \in \cap \{ \langle f_n, A_n, \epsilon_n \rangle / n \in \mathbb{N}^* \} \subset \cap \{ U_n / n \in \mathbb{N}^* \}.$$

D'où τ est une stratégie gagnante pour le joueur II dans $\Gamma_{BM}(C_\gamma(X))$ et donc $C_\gamma(X)$ est faiblement- α -favorable. \square

Théorème 3.2.6. *Soit X un espace topologique normal telle que tout point $x \in X$ admettant une base dénombrable de voisinages. Soit γ une famille admissible de compacts de X comprenant l'ensemble vide et recouvrant X , alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. $C_\gamma(X)$ est faiblement- α -favorable,
2. le joueur II a une stratégie gagnante dans $\Gamma_\gamma^2(X)$,
3. Tout point $x \in X$ admet un élément de γ comme voisinage et le joueur II a une stratégie gagnante dans $\Gamma_\gamma^1(X)$.

Démonstration. découle du théorème 1.4.5 et les propositions 3.1.2, 3.2.1 et 3.2.5. \square

3.3 α -favorabilité faible de $C_\gamma(X)$ et sous-familles dénombrables de γ

Nous donnons dans cette section une condition nécessaire pour l' α -favorabilité faible de $C_\gamma(X)$ à laide des sous-familles dénombrables d'une famille admissible γ .

Proposition 3.3.1. *Soient X un espace topologique, γ une famille de compacts de X comprenant l'ensemble vide et γ_0 une sous-famille dénombrable de γ telle que $X = \overline{\cup \{K : K \in \gamma_0\}}$. Si le joueur II possède une stratégie gagnante dans $\Gamma_\gamma^2(X)$, alors X est une réunion dénombrable d'éléments de γ (alors, X est σ -compact).*

Lemme 3.3.2. *Soient $(A_n)_{n \geq 1}$ et $(B_n)_{n \geq 0}$ deux suites de sous-ensembles de X avec $B_0 = \emptyset$ et soient les suites (R_n) et (S_n) définies par*

$$R_n = A_n \setminus (B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_{n-1}) \text{ pour tout } n \geq 1,$$

$$S_n = B_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Alors

$$(\cup \{R_n : n \geq 1\}) \cup (\cup \{S_n : n \geq 1\}) = (\cup \{A_n : n \geq 1\}) \cup (\cup \{B_n : n \geq 0\}).$$

Démonstration. Il est évident que

$$(\cup \{R_n : n \geq 1\}) \cup (\cup \{S_n : n \geq 1\}) \subset (\cup \{A_n : n \geq 1\}) \cup (\cup \{B_n : n \geq 0\}).$$

Montrons l'autre sens. Soit $x \in (\cup \{A_n : n \geq 1\}) \cup (\cup \{B_n : n \geq 0\})$. soit n_1 respectivement n_2 le plus petit indice tel que $x \in A_{n_1}$ et $x \in B_{n_2}$ avec $n_1 = \infty$ si x n'appartient pas à $(\cup \{A_n : n \geq 1\})$ et $n_2 = \infty$ si x n'appartient pas à $(\cup \{B_n : n \geq 0\})$. Si $n_1 \leq n_2$ alors $x \in R_{n_1}$. Si $n_2 < n_1$, on a $x \in S_{n_2}$. \square

Démonstration. Soit $X = \overline{\cup \{K : K \in \gamma_0\}}$, où $K_i \in \gamma_0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et σ une stratégie gagnante pour le joueur II dans $\Gamma_\gamma^2(X)$. Alors la stratégie σ' définit dans le lemme 3.2.3 en posant $C_n = K_n$ pour tout n , est aussi une stratégie gagnante pour le joueur II dans $\Gamma_\gamma^2(X)$. Soit $B_0 = \phi$, comme le joueur II a une stratégie gagnante σ' dans le jeu $\Gamma_\gamma^2(X)$. Alors quel que soit le choix du joueur I dans la partie du jeu, le joueur II doit gagner en utilisant cette stratégie. A présent, le joueur I lui aussi utilise la stratégie σ' . Le joueur I commence la partie par choisir $A_1 = \sigma'(B_0) = \sigma(B_0) \cup K_0$. Le joueur II répond par $B_1 = \sigma'(A_1) = \sigma(A_1) \cup K_1$. Pour le n -ième coup, définissons A_n et B_n (inductivement) par

$$A_n = \sigma'(B_0, B_1, \dots, B_{n-1}) = \sigma(B_0, B_1, \dots, B_{n-1}) \cup K_{n-1}$$

$$B_n = \sigma'(A_1, A_2, \dots, A_n) = \sigma(A_1, A_2, \dots, A_n) \cup K_n.$$

Pour tout n , on pose

$$R_n = A_n \setminus (B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_{n-1}) \text{ et } S_n = B_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n).$$

Les deux familles $\{R_n : n \geq 1\}$ et $\{S_n : n \geq 1\}$ sont discrètes dans X , car σ' est gagnante dans le jeu $\Gamma_\gamma^2(X)$.

Maintenant, l'ensemble $D = (\cup \{A_n : n \geq 1\}) \cup (\cup \{B_n : n \geq 0\})$ est un sous ensemble σ -compact dense dans X . Montrons que $X = D$.

Soit $x \in X$. Alors il existe un voisinage U de x qui rencontre au plus un R_n et au plus un S_n . Puisque D est dense dans X , alors il existe deux entiers positifs n_0 et n_1 tels que $x \in \overline{R_{n_0}}$ ou $x \in \overline{S_{n_1}}$. Ce qui signifie que $x \in A_{n_0}$ ou $x \in B_{n_1}$ et donc $D = X$. D'où X est une réunion dénombrable d'éléments de γ . \square

Proposition 3.3.3. *Soit X un espace topologique normal, γ une famille admissible de compacts de X comprenant l'ensemble vide et stable pour les unions finies telle que tout point de X admet un élément de γ comme voisinage. $Y = \overline{\cup \{K : K \in \gamma_0\}}$ où γ_0 est une sous-famille dénombrable de γ . Si $C_\gamma(X)$ est faiblement- α -favorable et γ approxime $\gamma \cap Y$, alors Y est σ -compact.*

Démonstration. L'injection canonique $i : Y \rightarrow X$ induit une fonction $i^* : C_\gamma(X) \rightarrow C_\zeta(Y)$, où $\zeta = \gamma \cap Y$. Comme γ approxime ζ par hypothèse alors d'après le Théorème 1.4.1, i^* est continue et donc $i^*(C_\gamma(X))$ est un espace faiblement- α -favorable comme image continue d'un espace faiblement- α -favorable par hypothèse. D'après le Théorème 1.4.4, i^* est ouverte sur son image i.e $i^*(C_\gamma(X))$ est un sous ensemble ouvert faiblement- α -favorable de $C_\zeta(Y)$.

Maintenant, Montrons que $i^*(C_\gamma(X))$ est dense dans $C_\zeta(Y)$. Soit $\cap_{i=1}^n [B_i, V_i]$ un ouvert de base non vide de $i^*(C_\gamma(X))$, où $B_i \in \zeta$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et $\{V_1, \dots, V_n\}$ une famille d'intervalles ouverts bornés de \mathbb{R} et soit $g \in \cap_{i=1}^n [B_i, V_i]$. Pour tout $i = 1, \dots, n$ il existe $A_i \in \gamma$ telle que $B_i = A_i \cap Y$. Puisque Y est fermé dans X qui est normal, par hypothèse, alors g est prolongeable continuellement sur X . D'après le Lemme 1.4.3, on peut prendre cette extension $g_1 \in C_\gamma(X)$ de sorte que $g_1(A_i) \subset V_i$, pour tout $i = 1, \dots, n$. Il est aisé de voir que

$$g \circ i \in i^*(C_\gamma(X)) \cap (\cap_{i=1}^n [B_i, V_i]).$$

Donc $i^*(C_\gamma(X))$ qui est un sous ensemble ouvert faiblement- α -favorable de $C_\zeta(Y)$ est aussi dense dans $C_\zeta(Y)$, d'où $C_\zeta(Y)$ est un espace faiblement- α -favorable. D'après le Théorème 3.2.6, le joueur II possède une stratégie gagnante dans $\Gamma_\zeta^2(Y)$. Donc Y est σ -compact d'après la proposition 3.3.1. \square

Deuxième partie

Sur la catégorification des coefficients de la matrice de la représentation de Burau réduite

Chapitre 4

Groupes de tresses, et rappels d'algèbre

4.1 Tresses géométriques

Définition 4.1.1. On appelle tresse géométrique à n brins b la réunion de n courbes dans $\mathbb{C} \times I$ appelées brins de b reliant les points $(p_1, 0), \dots, (p_n, 0)$ aux points $(p_1, 1), \dots, (p_n, 1)$ et coupant en n points chaque plan horizontal $\mathbb{C} \times \{t\}$ avec $t \in I$.

Deux tresses géométriques à n brins b et b' sont isotopes s'il existe une suite continue de tresses géométriques à n brins b_s ($s \in I$) tel que $b_0 = b$ et $b_1 = b'$. i.e s'il existe une application continue $F : b \times I \rightarrow \mathbb{C} \times I$ tel que pour tout $s \in I$, l'application $F_s : b \rightarrow \mathbb{C} \times I$ qui fait correspondre à $p \in b$ l'élément $F(p, s)$ est un plongement, son image est une tresse géométrique à n brins, $F_0 = id$ et $F_1(b) = b'$. On appelle tresse à n brins une classe d'équivalence de tresses géométriques à n brins vis-à-vis de l'isotopie. Si b est une tresse géométrique, on note par $[b]$ sa classe d'équivalence vis-à-vis de l'isotopie.

Etant donné deux tresses géométriques b et b' . On définit le produit bb' comme étant l'ensemble des points $(p, t) \in \mathbb{C} \times I$ tels que $(p, 2t) \in b$ si $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ et $(p, 2t - 1) \in b'$ si $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. D'une autre façon, bb' est la tresse géométrique obtenu en plaçant b' au-dessus b et en comprimant. Le groupe de tresse B_n est l'ensemble des tresses à n brins muni du produit donné par $[a][b] = [ab]$.

4.2 Diagrammes de tresse

Un diagramme de tresse à n brins est un ensemble $D \subset \mathbb{R} \times I$ qui est la réunion de n courbes appelées les brins de D qui vérifient les trois conditions suivantes :

1. Chaque brin est homéomorphe à l'image de l'intervalle I par la projection $\mathbb{R} \times I \rightarrow I$.
2. Chaque point de l'ensemble $\{1, \dots, n\} \times \{0, 1\}$ est l'extrémité d'un unique brin.
3. Chaque point de $\mathbb{R} \times I$ appartient à au plus deux brins. A chaque point d'intersection de deux brins qu'on appelle "point double", ces brins sont transverses. On indique le brin passant sous l'autre par une légère discontinuité du trait.

Chaque diagramme de tresse représente une classe d'isotopie de tresses géométriques. Deux diagrammes de tresses proviennent d'une même tresse si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie de mouvements, dits de Reidemeister de type *I*, *II* et *III*.

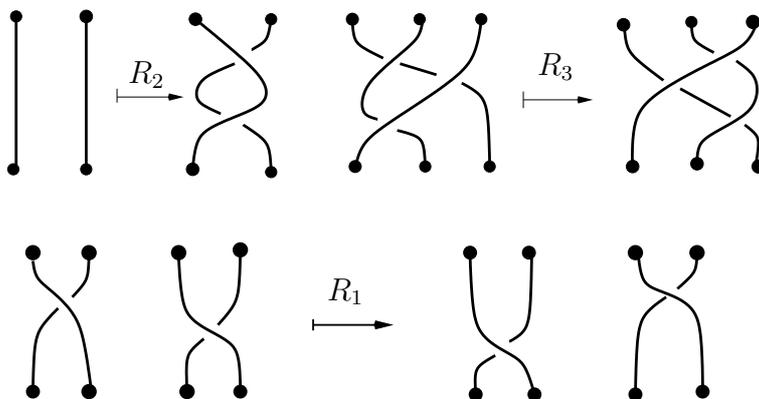


FIG. 4.1 –

4.3 Groupe de difféotopies

Soit Σ une surface orientable compacte connexe éventuellement à bord. Soit P_n un ensemble fini de points distincts dans l'intérieur de Σ , appelés points enlevés. Définissons $\mathcal{H}(\Sigma, P_n)$ comme étant le groupe des homéomorphismes $h : \Sigma \rightarrow \Sigma$ qui préservent l'orientation, laissant le bord fixe point par point et $h(P_n) = P_n$. Ici la loi de composition du groupe, noté multiplicativement,

est la composition des homéomorphismes : $g.h = g \circ h$ pour $g, h \in \mathcal{H}(\Sigma, P_n)$. Le groupe de difféotopies appelés aussi "mapping class group" qu'on note par $\mathcal{M}(\Sigma, P_n)$ est $\pi_0(\mathcal{H}(\Sigma, P_n))$, i.e le groupe quotient de $\mathcal{H}(\Sigma, P_n)$ modulo le sous groupe de tels homéomorphismes dans $\mathcal{H}(\Sigma, P_n)$ qui sont isotopes à l'identité relativement $\partial\Sigma \cup P_n$.

Soit D un disque dans le plan complexe \mathbb{C} et $P_n = \{p_1, \dots, p_n\}$ un ensemble constitué de n points distincts dans l'intérieur de D . Le groupe de difféotopies $\mathcal{M}(D, P_n)$ est isomorphe au groupe de tresses B_n .

L'idée est de considérer une tresse à n brins comme le mouvement de n points du disque. Si $h \in \mathcal{H}(D, P_n)$ représente un élément de $\mathcal{M}(D, P_n)$, il existe une isotopie $h_t : D \rightarrow D$ tel que $h_0 = id_D$ et $h_1 = h$. La tresse géométrique associée à h est formée des images de n points de P_n le long de la déformation i.e l'ensemble des points de la forme $(h_t(p_i), t)$ pour tout $t \in I$ et $i \in \{1, \dots, n\}$. Inversement, supposons σ une tresse géométrique, on peut supposer que σ est dans le cylindre $(D \setminus \partial D) \times I$. Donc σ décrit une isotopie $h_t : P_n \rightarrow D$ de l'inclusion h_0 vers l'application h_1 qui a pour image P_n . Cette isotopie se prolonge à une isotopie $h_t : D \rightarrow D$ relativement le bord ∂D de l'application identique h_0 vers l'application h_1 qui satisfait $h_1(P_n) = P_n$. L'application h_1 représente l'élément de $\mathcal{M}(D, P_n)$ correspond à σ .

4.4 Générateurs et relations

Le groupe de tresses B_n peut être présenté par générateurs et relations. Les générateurs sont $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, les relations entre les générateurs sont :

1. $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ si $|j - i| \geq 2$
2. $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, n - 2$.

La deuxième relation est appelé relation de tresse.

A chaque générateur on associe une tresse géométrique et un élément du groupe de difféotopies $\mathcal{M}(D, P_n)$. Soit $P_n = \{1, \dots, n\}$. On fait correspondre au générateur σ_i la tresse géométrique à extrémités dans $P_n \times \{0, 1\}$ dont tous les brins sont verticaux sauf pour les brins i et $i + 1$ qui se croisent, le brin $i + 1$ passant sous le brin i .

Avant de donner le lien entre les générateurs de B_n et les éléments du groupe de difféotopies $\mathcal{M}(D, P_n)$, nous donnons la définition d'un demi-twist. Soit Σ une surface orientable éventuellement à bord, P_n un ensemble fini de points enlevés dans Σ . On appelle arc tendu (spanning arc) dans

(Σ, P_n) un sous-ensemble de Σ à extrémités dans P_n , qui est homéomorphe à l'intervalle $I = [0, 1]$ et d'intérieur disjoint de $P_n \cup \partial\Sigma$.

Etant donné un arc tendu simple α dans (Σ, P_n) , et un voisinage régulier U de α dans Σ . Identifiant U avec le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ dans le plan complexe \mathbb{C} tels que $\alpha = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et l'orientation de Σ correspond à l'orientation usuelle de \mathbb{C} . Le demi-twist est (la classe d'isotopie de) l'homéomorphisme $\tau_\alpha : \Sigma \rightarrow \Sigma$ définit par

$$\tau_\alpha(z) = \begin{cases} z & \text{si } z \in \Sigma \setminus U, \\ -z & \text{si } |z| \leq \frac{1}{2}, \\ ze^{-2\pi i|z|} & \text{si } \frac{1}{2} \leq |z| < 1. \end{cases}$$

Clairement, $\tau_\alpha \in \mathcal{M}(\Sigma, P_n)$.

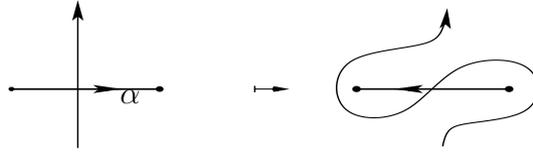


FIG. 4.2 – L'action de τ_α sur une courbe de Σ qui coupe α transversalement en un point.

Soit D un disque dans le plan complexe \mathbb{C} qui contient P_n dans son intérieur, on associe au générateur σ_i l'élément τ_{α_i} de $\mathcal{M}(D, P_n)$, où α_i est l'intervalle $[i, i + 1] \subset D$.

La figure 4.3 illustre la tresse géométrique et l'élément du groupe de difféotopies correspondant au générateur σ_1 dans le groupe B_4 . L'élément de $\mathcal{M}(D, P_n)$ est déterminé par l'image du diamètre principal de D_n par un homéomorphisme de D_n . La tresse géométrique est illustré par sa projection sur $\mathbb{R} \times I$ dont le point double est indiqué par une légère discontinuité du trait.

4.5 Rappels et préliminaires d'algèbre

Le but de ce paragraphe est de faire des rappels sur les notions d'algèbre utilisées dans ce travail.

4.5.1 Catégories et foncteurs

Définition 4.5.1. Une catégorie \mathcal{Q} est la donnée

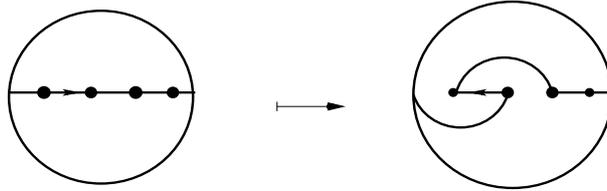


FIG. 4.3 – Le générateur σ_1 de B_4 .

- d'une collection d'objets $\text{Obj}\mathcal{Q}$;
- d'un ensemble $\text{Hom}(A, B)$ de morphismes (ou flèches) $f : A \rightarrow B$, pour tout couple d'objets (A, B) .
- d'un morphisme $\text{id}_A : A \rightarrow A$, pour chaque objet A , appelé identité,
- d'un morphisme $g \circ f : A \rightarrow C$, pour toute paire de morphismes $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$, appelé composée de f et g , tels que
- pour tout morphisme $f : A \rightarrow B$, on ait $\text{id}_B \circ f = f = f \circ \text{id}_A$,
- pour tout triplet de morphismes $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$, et $h : C \rightarrow D$, on ait $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Lorsqu'un morphisme $f : A \rightarrow B$ possède un inverse, c'est à dire un morphisme $g : B \rightarrow A$ telle que $f \circ g = \text{id}_B$ et $g \circ f = \text{id}_A$, on dit que f est un isomorphisme.

Définition 4.5.2. Soit \mathcal{Q} et \mathcal{Q}' deux catégories. Un foncteur covariant $F : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}'$ est la donnée

- pour tout objet A de \mathcal{Q} d'un objet $F(A) \in \text{Obj}\mathcal{Q}'$;
- pour tout morphisme $f \in \text{Hom}(A, B)$ de \mathcal{Q} d'un morphisme $F(f) \in \text{Hom}(F(A), F(B))$ de \mathcal{Q}' pour chaque paire d'objets A, B ;
- tels que
- pour tout objet A de $\text{Obj}\mathcal{Q}$, on ait $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$;
- pour toute paire de morphismes $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ on ait $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

4.5.2 Modules gradués

Soit A un anneau et M un A -module. On dit que M est *gradué* s'il existe une décomposition $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$, où chaque M_i est un sous A -module de

M . On dit alors que les éléments de M_i sont de degré i . On dit que M est *bi-gradué* si M_i est un A -module gradué, pour tout $i \in \mathbb{Z}$. i.e, $M = \bigoplus_{i,j \in \mathbb{Z}} M_{i,j}$ où $M_{i,j}$ est un sous A -module pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$. On dit que les éléments de $M_{i,j}$ sont de degré (i, j) .

Un morphisme de A -modules $f : M \rightarrow M'$ où M et M' sont gradués est dit *homogène* de degré k si, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $f(M_i) \subset M'_{i+k}$. Un morphisme gradué est un morphisme de A -modules homogène de degré 0. On dit également qu'il préserve le degré.

Un morphisme de A -modules $f : M \rightarrow M'$ où M et M' sont bi-gradués est dit *homogène* de degré (k, l) si, pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$, $f(M_{i,j}) \subset M'_{i+k, j+l}$. On dit que f est *bi-gradué* s'il est homogène de degré $(0, 0)$. i.e., $f(M_{i,j}) \subset M'_{i,j}$, pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$.

Proposition 4.5.3. *Soit M et M' des A -modules gradués, alors $M \oplus M' \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (M_i \oplus M'_i)$ et $M \otimes M' \simeq \bigoplus_{p+q=i \in \mathbb{Z}} (M_p \otimes M'_q)$ sont canoniquement gradués.*

Proposition 4.5.4. *Les A -modules gradués dont chaque composante est libre, avec les morphismes homogènes définissent une catégorie additive.*

Définition 4.5.5. *Soit M un A -module gradué dont chaque composante est libre. On définit la dimension graduée de M , noté $\dim_{gr}(M)$, par*

$$\dim_{gr}(M) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} t^i \cdot \dim(M_i) \quad (4.1)$$

4.5.3 Complexes

Définition 4.5.6. *Soit \mathcal{Q} une catégorie additive, un complexe de chaînes C sur \mathcal{Q} est la donnée*

- d'une suite $(C_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ d'objets de $\text{Obj } \mathcal{Q}$,
- d'une suite $(\partial^i : C_i \rightarrow C_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ de morphismes tels que $\partial^{i+1} \circ \partial^i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

On appelle les $(\partial^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ les différentielles (ou opérateurs bord) de C .

Définition 4.5.7. *Soit $C = (C_i, \partial^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ et $C' = (C'_i, \partial^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ deux complexes de chaînes sur une même catégorie \mathcal{Q} . Un morphisme de complexes de chaînes $f : C \rightarrow C'$ est une suite de morphismes $(f_i : C_i \rightarrow C'_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ telles que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on ait*

$$\partial^i \circ f_i = f_{i+1} \circ \partial^i.$$

On dit que f est un isomorphisme de complexes si f_i est un isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Définition 4.5.8. Soit $C = (C_i, \partial^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ un complexe de A -modules gradués dont toutes les composantes de graduation sont libres. On définit sa caractéristique d'Euler graduée par

$$\widehat{\chi}(C) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \dim_{gr}(C_i). \quad (4.2)$$

Soit $C = (C_i, \partial^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ un complexe de A -modules gradués, on définit son homologie $H = (H_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ par

$$H_i(C) = \text{Ker}(\partial^i) / \text{Im}(\partial^{i-1}) \quad (4.3)$$

Un complexe de chaînes C est dit *acyclique* si $H_i(C) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Proposition 4.5.9. Soit $f : C \rightarrow C'$ un morphisme de complexes de A -modules. Alors f induit un morphisme entre les groupes d'homologies de C et C' .

Soient $f, g : C \rightarrow C'$ deux morphismes de complexes de chaînes. Une *homotopie* entre f et g est une suite de morphismes de A -modules $(K_i : C_{i+1} \rightarrow C'_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ telle que, pour tout i dans \mathbb{Z} , on a

$$f_i - g_i = K_i \circ \partial^i + \partial^{i-1} \circ K_{i-1}.$$

On écrit $f \simeq g$ et on dit que f et g sont homotopes s'il existe une homotopie entre eux.

Un morphisme de chaînes $f : C \rightarrow C'$ est appelé *équivalence d'homotopie*, s'il existe un morphisme de chaînes $g : C' \rightarrow C$ tels que $f \circ g \simeq id_{C'}$ et $g \circ f \simeq id_C$. S'il existe une équivalence d'homotopie $f : C \rightarrow C'$, on dit que C et C' sont homotopiquement équivalent.

Théorème 4.5.10. Si C, C' sont deux complexes de chaînes homotopiquement équivalent, alors les groupes d'homologie $H_i(C)$ et $H_i(C')$ sont isomorphes pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Théorème 4.5.11. Si C est un complexe de \mathbb{Z} -modules gradués dont tous les composantes sont libres, alors

$$\widehat{\chi}(C) = \widehat{\chi}(H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}). \quad (4.4)$$

Chapitre 5

Représentations homologiques, et intersection géométrique

5.1 Représentations des groupes de tresses

Une représentation d'un groupe est un homomorphisme du groupe vers le groupe linéaire $GL_n(\Lambda)$, où n est un entier positif et Λ un anneau commutatif. D'une manière équivalente, c'est une action linéaire du groupe sur le Λ -module libre de rang fini. Une représentation est dite fidèle si l'homomorphisme est injectif, un groupe qui admet une représentation fidèle est appelé linéaire.

L'une des représentations classiques des groupes de tresses est la représentation de Burau, définie par Burau en 1936 [Bur36], qui envoie le groupe B_n dans le groupe des matrices inversibles de taille $n \times n$ dont les coefficients sont des polynômes sur \mathbb{Z} en une variable t et son inverse t^{-1} . L'image de σ_i est la matrice

$$I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1}$$

Où I_k désigne la matrice unité de taille $k \times k$.

La représentation de Burau est réductible, voir [Bir74] pour plus de détail, elle se décompose en une représentation de dimension 1 et une représentation irréductible de dimension $n-1$ appelée la représentation de Burau réduite qu'on note par $\tilde{\rho} : B_n \rightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$, définie comme suit :

$$\sigma_i \mapsto I_{i-2} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & -t & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-2}$$

Où $-t$ dans le milieu de la matrice de taille 3×3 est toujours en position (i, i) .

La représentation de Gassner, définie par Gassner [Gas61] en 1961, qui est une généralisation de la représentation de Burau pour les groupes de tresses pures. Le groupe de tresses pures qu'on note par \mathcal{P}_n est définie comme étant le noyau de la projection π de B_n vers le groupe de permutations \mathcal{S}_n qui envoie le générateur σ_i sur la transposition s_i . Les éléments de \mathcal{P}_n sont appelés tresses pures à n brins.

La représentation de Burau est fidèle pour $n \leq 3$, pour la preuve voir [Bir74]. J. Moody [Mo91] a démontré en 1991 qu'elle n'est pas fidèle pour $n \geq 9$. D. Long et M. Paton [LP93] étendent l'argument de Moody pour $n \geq 6$. En 1999, S. Bigelow [Bi99] démontre que cette représentation n'est pas fidèle pour $n = 5$. Le cas $n = 4$ reste ouvert.

5.2 Généralités sur les courbes

Soit Σ une surface orientable compacte connexe éventuellement à bord. Une courbe simple fermée dans Σ est l'image d'un plongement $c : S^1 \rightarrow \Sigma \setminus \partial\Sigma$. On dit que c est essentielle si elle n'est pas homotope à zéro.

Deux courbes simples fermées c_1 et c_2 sont isotopes s'il existe une famille continue d'homéomorphismes $h_t : \Sigma \rightarrow \Sigma$, $t \in I$ tel que $h_0 = id_\Sigma$ et $h_1 \circ c_1 = c_2$. Le fait d'être isotopes est une relation d'équivalence entre courbes dans lequel on note par $c_1 \simeq c_2$. Epstein ([Ep66], Théorème 2.1) a démontré que si deux courbes simples fermées essentielles sont homotopes, alors elles sont isotopes. Le même résultat est vraie pour les courbes non fermées.

Définition 5.2.1. *On appelle bigone élémentaire (ou standard) cobordé par deux courbes c_1 et c_2 un disque $\mathcal{D} \subset \Sigma$ dont le bord est formé d'un arc de c_1 et d'un arc de c_2 dont l'intérieur ne coupe pas $c_1 \cup c_2$.*

Remarque 5.2.2. *Le mot "élémentaire" est ajouté pour distinguer entre cette définition et une définition plus générale donné dans la section 2.3.*

Proposition 5.2.3. *[Ep66] Soit c_1 et c_2 deux courbes simples fermées essentielles et homotopes dans Σ .*

1. *Si $c_1 \cap c_2 \neq \emptyset$, et se coupant transversalement, alors c_1 et c_2 cobordent un bigone élémentaire.*

2. Si $c_1 \cap c_2 = \phi$, alors il existe un cylindre dont les composantes de bord sont c_1 et c_2 .

Démonstration. 1. Soit $\langle c_1 \rangle$ le sous groupe de $\pi_1(\Sigma)$ engendré par c_1 . Considérons le revêtement $p : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ associée à $\langle c_1 \rangle$ tel que $p_{\#}(\pi_1(\tilde{\Sigma})) = \langle c_1 \rangle$. Puisque $p_{\#}$ est injectif, alors $\pi_1(\tilde{\Sigma}) = \langle \tilde{c}_1 \rangle$ où \tilde{c}_1 est un relevé de c_1 . Comme $\tilde{\Sigma}$ est orientable, alors tous les éléments de $\pi_1(\tilde{\Sigma})$ sont sans torsion. Donc $\pi_1(\tilde{\Sigma}) \simeq \mathbb{Z}$. La surface $\tilde{\Sigma}$ est donc homéomorphe au cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$.

Soit \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 deux relevés homotopes de c_1 et c_2 respectivement. Donc les deux relevés \tilde{c}_1 et \tilde{c}_2 séparent $\tilde{\Sigma}$, sinon seront homotopes à zéro. Si $c_1 \cap c_2 \neq \phi$, alors il existe un arc a_2 de $p^{-1}(c_2)$ telle que $a_2 \cap \tilde{c}_1 = \partial a_2$. (Rappelons que les composantes de $p^{-1}(c_2)$ sont des cercles et des droites, puisque le sous groupe $\langle c_1 \rangle$ n'est pas distingué dans $\pi_1(\Sigma)$.) Donc a_2 avec un arc b dans \tilde{c}_1 bordent un disque d dans $\tilde{\Sigma}$. Tous les composantes de $d \cap p^{-1}(c_2)$ sont des arcs à extrémités dans b . Sans perte de généralisation, on peut remplacer a_2 par un plus petit arc qui vérifie ci-dessus. Donc $\text{Int}(d) \cap p^{-1}(c_2) = \phi$. De la même façon on trouve un arc a_1 dans $p^{-1}(c_1)$, pour qu'un sous arc de a_2 avec a_1 bordent un disque $d' \subset d$ dont l'intérieur ne coupe pas $p^{-1}(c_1) \cup p^{-1}(c_2)$.

Maintenant, $p^{-1}(c_1)$ et $p^{-1}(c_2)$ se coupent en plus qu'un point puisque $p(\partial a_2) \subset p^{-1}(c_1) \cap p^{-1}(c_2)$. L'immersion p plonge le bord de d' à cause de la minimalité. Donc p plonge d' , puisque une immersion en codimension 0 qui plonge le bord et dont l'intérieur ne recoupe pas le bord est un plongement.

2. Voir [Ep66]

□

Etant donnés deux courbes simples fermées essentielles c_1 et c_2 . On note par $i(c_1, c_2)$ le nombre minimal de points d'intersection d'un représentant de la classe d'isotopie de c_1 avec un représentant de la classe d'isotopie de c_2 .

$$i(c_1, c_2) = \inf \left\{ |c'_1 \cap c'_2|; c'_1 \simeq c_1, c'_2 \simeq c_2 \right\}.$$

Proposition 5.2.4. *Soient c_1 et c_2 deux courbes simples fermées de Σ , essentielles et se coupant transversalement. Alors $i(c_1, c_2) = |c_1 \cap c_2|$ si et seulement si c_1 et c_2 ne cobordent aucun bigone élémentaire.*

Démonstration. 1 \Rightarrow 2 Si c_1 et c_2 cobordent un bigone élémentaire \mathcal{D} , à travers le bigone, on peut faire une isotopie de c_1 qui diminue son nombre de points d'intersection avec c_2 par deux.

2 \Rightarrow 1 Supposons que c_1 et c_2 ne cobordent pas un bigone élémentaire. choisissons une courbe simple fermée c'_1 isotope à c_1 qui se coupent transversalement tel que

$$i(c_1, c_2) = |c'_1 \cap c_2|.$$

Nous démontrons par induction sur le nombre de points d'intersection de c'_1 avec c_1 que

$$i(c_1, c_2) = |c_1 \cap c_2| = |c'_1 \cap c_2|.$$

On distingue deux cas.

Cas1 : si $c'_1 \cap c_1 = \emptyset$, alors il existe un cylindre dans Σ dont le bord est réunion de c_1 et c'_1 . Chaque arc d'intersection de c_2 avec le cylindre doit aller de l'une des composantes de bord à l'autre comme dans la figure 5.1, puisque ni c_1, c_2 ni c'_1, c_2 cobordent des bigones élémentaires. Donc $i(c_1, c_2) = |c_1 \cap c_2| = |c'_1 \cap c_2|$.

Cas2 : si $c'_1 \cap c_1 \neq \emptyset$, il existe un bigone élémentaire cobordé par c_1 et c'_1 ,

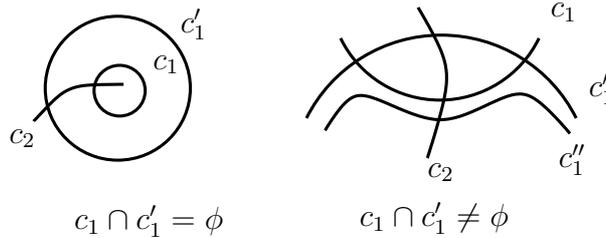


FIG. 5.1 –

d'après la proposition (5.2.3). Donc chaque arc d'intersection de c_2 avec le bigone doit avoir l'une des extrémités dans c_1 et l'autre dans c'_1 comme sur la figure 5.1, encore puisque ni c_1, c_2 ni c'_1, c_2 cobordent bigones élémentaires. On pousse c'_1 à travers le bigone pour obtenir une nouvelle courbe c''_1 isotope à c_1 et qui vérifié

$$|c''_1 \cap c_1| = |c'_1 \cap c_1| - 2 \text{ et } i(c_1, c_2) = |c'_1 \cap c_2| = |c''_1 \cap c_2|.$$

Donc selon l'hypothèse inductive $|c_1 \cap c_2| = |c''_1 \cap c_2| = i(c_1, c_2)$. \square

La démonstration ci-dessus a été donné par Paris et Rolfsen dans [PR00], une autre preuve se trouve dans [FLP79].

5.3 Définition homologique de la représentation de Burau

Soit Σ une surface orientable connexe éventuellement à bord. Le groupe de difféotopies $\mathcal{M}(\Sigma)$ est l'ensemble des classes d'isotopies d'homéomorphismes

de Σ dans lui même préservant l'orientation et laissant fixe le bord $\partial\Sigma$ point par point, voir la section 1.3, où on prend $P_n = \phi$. Un tel homéomorphisme induit un automorphisme de groupe d'homologie $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$. Comme deux homéomorphismes isotopes sont aussi homotopes, alors ils induisent le même automorphisme de groupe $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$. Ceci définit un homomorphisme de groupe $\mathcal{M}(\Sigma) \rightarrow \text{Aut}(H_1(\Sigma, \mathbb{Z}))$, appelé la représentation homologique de $\mathcal{M}(\Sigma)$.

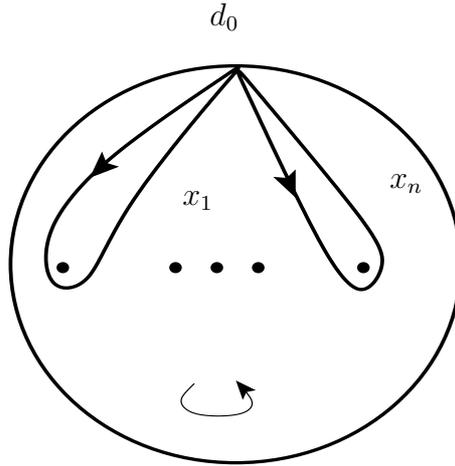


FIG. 5.2 – les lacets x_1, \dots, x_n dans D_n .

Nous donnons dans ce paragraphe une définition homologique de la représentation de Burau. Considérons la définition de B_n comme le groupe de difféotopies d'un disque du plan privé de n points (voir la section 1.3). Soient D le disque unité dans le plan complexe \mathbb{C} , $P_n = \{p_1, \dots, p_n\}$ un ensemble de n points dans l'intérieur de D . Notons que pour tout point p dans l'intérieur de D , le groupe $H_1(D - \{p\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ est engendré par la classe d'homologie d'un petit lacet qui tourne dans le sens direct autour de p . Chaque lacet x dans $D - \{p\}$ représente k fois ce générateur, où k est le nombre de tour de x autour de p .

Posons $D_n = D \setminus P_n$. Soit d_0 un point base sur le bord de D . Le groupe $\pi_1(D_n, d_0)$ est libre, engendré par n générateurs x_1, \dots, x_n , où x_i représente un lacet dans D_n basé en d_0 qui tourne dans le sens direct autour du point p_i , voir la figure (5.2). Soit l'épimorphisme de groupe $\varphi : \pi_1(D_n, d_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ défini par

$$\gamma = x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} \dots x_{i_r}^{n_r} \longmapsto \varphi(\gamma) = \sum_{i=1}^r n_i.$$

L'entier $\varphi(\gamma)$ s'appelle le nombre algébrique total de tour de γ , défini comme étant la somme des nombres de tours de γ autour des points enlevés p_1, p_2, \dots, p_n .

Soit \tilde{D}_n le revêtement régulier associé au noyau de l'homomorphisme φ . Le groupe de transformations de revêtement \tilde{D}_n est isomorphe à \mathbb{Z} , engendré par t . Notons par Λ l'anneau de groupe $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Le groupe d'homologie $H_1(\tilde{D}_n)$ a une structure de Λ -module, où t agit par transformations de revêtement.

Comme Λ -module, $H_1(\tilde{D}_n)$ est libre de rang $n - 1$. En effet, Notons que le graphe $\Gamma \subset D_n$ formé d'un seul sommet d_0 et n arêtes x_1, \dots, x_n est un rétracte par déformation forte de D_n . Le revêtement cyclique \tilde{D}_n se rétracte par déformation forte au graphe infini $\tilde{\Gamma}$ dont les sommets sont $\{t^k \tilde{d}_0 : k \in \mathbb{Z}\}$ et les arêtes $\{t^k \tilde{x}_i : k \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n\}$, où $t^k \tilde{x}_i$ va de $t^k \tilde{d}_0$ vers $t^{k+1} \tilde{d}_0 = t(t^k \tilde{d}_0)$. Soit \mathcal{G}_1 le Λ -module libre engendré par $\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n\}$, et soit \mathcal{G}_0 le Λ -module libre engendré par $\{\tilde{d}_0\}$. Définissons l'application $\Theta : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0$ par

$$\tilde{x}_i \longmapsto \Theta(\tilde{x}_i) = (t - 1)\tilde{d}_0.$$

$H_1(\tilde{D}_n)$ est le noyau de l'application Θ . Donc $H_1(\tilde{D}_n)$ est un Λ -module libre dont une base est $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$, où $v_j = \tilde{x}_{j+1} - \tilde{x}_j$.

Soit $h \in \mathcal{H}(D, P_n)$. h représente un élément de B_n . Puisque $h(P_n) = P_n$, alors h préserve le nombre total de tours des lacets de D_n , i.e.,

$$\varphi \circ h_{\#} = \varphi. \quad (5.1)$$

h se relève d'une manière unique à un automorphisme $\tilde{h} : \tilde{D}_n \rightarrow \tilde{D}_n$ qui fixe \tilde{d}_0 . L'égalité (5.1) assure que \tilde{h} commute avec l'action de groupe de transformations sur \tilde{D}_n . Donc \tilde{h} fixe la fibre au dessus de d_0 point par point

$$\tilde{h}(g.\tilde{d}_0) = g.\tilde{h}(\tilde{d}_0) = g.\tilde{d}_0 \text{ pour tout } g \in \text{Aut}(\tilde{D}_n).$$

Soit $\tilde{h}_* : H_1(\tilde{D}_n) \rightarrow H_1(\tilde{D}_n)$ l'automorphisme induit par \tilde{h} . Puisque \tilde{h} commute avec l'action de groupe de transformations sur \tilde{D}_n , alors l'automorphisme \tilde{h}_* devient Λ -linéaire. L'application $h \longmapsto \tilde{h}_*$ définit un homomorphisme de groupes

$$\rho_{n-1} : \mathcal{M}(D, P_n) \rightarrow \text{Aut}(H_1(\tilde{D}_n, \mathbb{Z}))$$

équivalent à la représentation de Burau réduite $\tilde{\rho}$ définie dans la section 1.5, i.e il existe un isomorphisme de groupes $\eta : GL_{n-1}(\Lambda) \rightarrow \text{Aut}(H_1(\tilde{D}_n, \mathbb{Z}))$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} B_n & \longrightarrow & \mathcal{M}(D, P_n) \\ \tilde{\rho} \downarrow & & \downarrow \rho_{n-1} \\ GL_{n-1}(\Lambda) & \xrightarrow{\eta} & \text{Aut}(H) \end{array}$$

Etant donnés α, β deux arcs tendus (spanning arcs) transverses (i.e. $\partial\alpha \cap \partial\beta = \emptyset$ et se coupant transversalement en un nombre fini de points) dans (D, P_n) . Définissons l'intersection algébrique $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ de ces arcs comme suit : Considérons les deux arcs $\alpha \cap D_n$ et $\beta \cap D_n$ dans D_n . Orientons ces deux arcs arbitrairement et choisissons deux relevés $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \subset \tilde{D}_n$ de α et β respectivement muni de l'orientation induite. Posons

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (t^k \tilde{\beta} \cdot \tilde{\alpha}) t^k, \quad (5.2)$$

où $(t^k \tilde{\beta} \cdot \tilde{\alpha}) \in \mathbb{Z}$ est le nombre algébrique d'intersection standard des arcs orientés $t^k \tilde{\beta}$ et $\tilde{\alpha}$ dans \tilde{D}_n i.e $t^k \tilde{\beta} \cdot \tilde{\alpha} = +1$ si les vecteurs tangents de $t^k \tilde{\beta}$ et $\tilde{\alpha}$ au point d'intersection forme une base directe, et -1 sinon.

Les arcs $\tilde{\alpha}$ et $t^k \tilde{\beta}$ sont non compacts. Donc ils ont un nombre fini de points d'intersection, et donc la somme dans le côté droit de (5.2) est finie. Puisque la projection $\tilde{D}_n \rightarrow D_n$ envoie bijectivement $\tilde{\alpha}$ sur α et $(\cup_{k \in \mathbb{Z}} t^k \tilde{\beta}) \cap \tilde{\alpha}$ sur l'ensemble fini $\alpha \cap \beta$. Ceci montre que chaque point $p \in \alpha \cap \beta$ se relève en un point d'intersection de $t^k \tilde{\beta}$ avec $\tilde{\alpha}$ pour un unique $k = k_p \in \mathbb{Z}$. Donc

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon_p t^{k_p}, \quad (5.3)$$

où $\varepsilon_p = \pm 1$ est le signe d'intersection de β avec α au point p .

Dans [Bi99], S. Bigelow donne la remarque suivante qui permet de calculer les exposants $(k_p)_p$. On se servira de cette remarque par la suite.

Remarque 5.3.1. *Soit $p, q \in \alpha \cap \beta$ et soit k_p (resp. k_q) l'exposant du monôme au point p (resp. q). Soit α' et β' deux arcs de p à q le long de α et β respectivement telle que $\alpha' \cap \beta' = \{p, q\}$. Si $\alpha' \cup \beta'$ borde un disque privé de k' points, alors $|k_p - k_q| = k'$.*

Autrement dit, $k_p - k_q$ est le nombre total de tours du lacet qui va de p à q le long de α et de q à p le long de β .

L'intersection algébrique de deux arcs est une forme bilinéaire sequi-symétrique

$$\forall \theta \in \Lambda : \langle \theta\beta, \alpha \rangle = \theta \langle \beta, \alpha \rangle = \langle \beta, \bar{\theta}\alpha \rangle,$$

où $\bar{\theta}$ est l'image de θ par l'automorphisme de Λ qui envoie t sur t^{-1} .

Dans son article [Bi99], S. Bigelow a démontré que la représentation de Burau est non fidèle pour $n = 5$. L'idée de la preuve est contenue dans le théorème suivant

Théorème 5.3.2. *Pour $n \geq 3$, la représentation de Burau $\tilde{\rho} : B_n \rightarrow GL_{n-1}(\Lambda)$ n'est pas fidèle si et seulement s'il existe deux arcs α, β plongés dans D_n et qui vérifient les conditions suivantes :*

1. $\partial\alpha = \{p_1, p_2\}$ et $\partial\beta = \{d_0, p_3\}$ ou $\{p_3, p_4\}$.
2. Il n'existe pas d'isotopie relativement aux extrémités qui pousse α en dehors de β .
3. Pour certain choix de deux relevés $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$, on a $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$.

Le cas où $\partial\beta = \{d_0, p_3\}$, s'obtient directement du théorème 1.5 de [LP93]. S. Bigelow donne un exemple explicite d'arcs α et β qui vérifient les critères du théorème ci-dessus dans le cas $n = 5$.

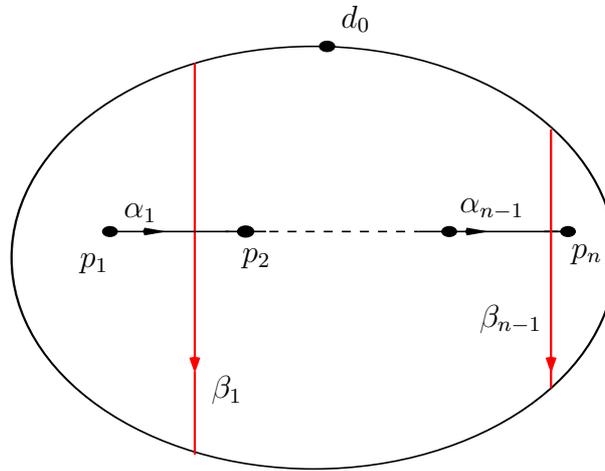


FIG. 5.3 –

A l'aide de la notion d'intersection algébrique de deux courbes, nous donnons dans ce paragraphe une manière de calculer les coefficients de la matrice de Burau réduite $\tilde{\rho}(\sigma) = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-1}$ associée à un élément σ de B_n . Soit σ une tresse vue comme un élément du groupe de difféotopies $\mathcal{M}(D, P_n)$. Pour tout $i = 1, \dots, n-1$, soit α_i une ligne droite de p_i vers p_{i+1} , et soit β_i une corde verticale à extrémités dans le bord ∂D , orienté de haut en bas et qui passe entre les points enlevés p_i et p_{i+1} , voir la figure 5.3. choisissons $\tilde{d}_0 \in \partial \tilde{D}_n$ un point au dessus de d_0 et choisissons deux relevés $\tilde{\sigma}\alpha_j, \tilde{\beta}_i \subset \tilde{D}_n$ de $\sigma\alpha_j$ et β_i respectivement. Alors

$$b_{ij} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (t^k \tilde{\beta}_i \cdot \tilde{\sigma}\alpha_j) t^k, \quad (5.4)$$

Où $(t^k \tilde{\beta}_i \cdot \tilde{\sigma}\alpha_j) \in \mathbb{Z}$ est le nombre algébrique d'intersection standard des arcs orientés $t^k \tilde{\beta}_i$ et $\tilde{\sigma}\alpha_j$ dans \tilde{D}_n .

5.4 Intersection géométrique

Soit Σ une surface orientable compacte connexe éventuellement à bord. Une courbe de (Σ, P_n) est un sous ensemble c dans Σ qui est soit une courbe simple fermée de $\Sigma \setminus (\partial\Sigma \cup P_n)$ et essentielle, soit l'image d'un plongement

$$\gamma : I \rightarrow \Sigma$$

transverse au bord telle que $\gamma^{-1}(\partial\Sigma \cup P_n) = \{0, 1\}$. On note par \mathbf{C} l'ensemble des courbes de (Σ, P_n) .

Deux courbes c_1, c_2 dans \mathbf{C} sont isotopes s'il existe une isotopie dans $\mathcal{H}(\Sigma, \partial\Sigma; P_n)$ qui envoie c_1 sur c_2 . Notons que les extrémités sur $\partial\Sigma$ restent fixe le long de l'isotopie.

Soit c_1, c_2 deux courbes dans (Σ, P_n) . On dit que c_1 et c_2 ont l'intersection minimale [KhS02] s'ils intersectent transversalement, $c_1 \cap c_2 \cap \partial\Sigma = \emptyset$ et la condition suivante est vérifié : Soient z_1, z_2 deux points quelconques dans $c_1 \cap c_2$ ne sont pas les deux dans P_n , et soit $\alpha_1 \subset c_1, \alpha_2 \subset c_2$ deux arcs d'extrémités z_1, z_2 tel que $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \{z_1, z_2\}$. Soit K une composante connexe dans $\Sigma \setminus (c_1 \cup c_2)$ bordé par $\alpha_1 \cup \alpha_2$. Si K est topologiquement un disque ouvert, alors il contient au moins un point de P_n .

Etant donné deux courbes c_1, c_2 dans (Σ, P_n) avec $c_1 \cap c_2 \cap \partial\Sigma = \emptyset$. Dans leurs papier [KhS02], M. Khovanov et P. Seidel définissent le nombre géométrique d'intersection de deux courbes comme une application I de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ à valeur dans $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, défini comme suit : $I(c_1, c_2) = 2$ si c_1, c_2 sont deux courbes simples fermées isotopes, et

$$I(c_1, c_2) = \inf\{|(c_1 \cap c'_2) \setminus P_n| + \frac{1}{2}|c_1 \cap c'_2 \cap P_n|; c'_2 \simeq c_2\}, \quad (5.5)$$

sinon. Le nombre géométrique d'intersection I est une généralisation de i , le nombre minimum de points d'intersection défini dans la section (5.2).

Proposition 5.4.1. [Ep66] *Supposons que Σ est une surface à bord. Soient c_1 et c_2 deux arcs simples de Σ , isotopes et se coupant transversalement telle que $c_1 \cap \partial\Sigma = \partial c_1 = \partial c_2 = c_2 \cap \partial\Sigma$. Alors c_1 et c_2 cobordent un bigone élémentaire.*

Démonstration. De la même façon que la proposition 5.2.3. □

Théorème 5.4.2. [Ep66] *Si Σ est une surface à bord et si c_1, c_2 sont deux arcs plongés dans l'intérieur de Σ avec $\partial c_1 = \partial c_2 = c_1 \cap \partial\Sigma = c_2 \cap \partial\Sigma$, homotopes à extrémités fixes, alors c_1 et c_2 sont isotopes relativement aux extrémités.*

Proposition 5.4.3. *Soient c_1 et c_2 deux courbes dans $\Sigma \setminus P_n$, se coupant transversalement avec $\partial c_1 \cap \partial c_2 = \emptyset$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. $I(c_1, c_2) = |c_1 \cap c_2|$.
2. c_1 et c_2 ne cobordent pas un bigone élémentaire.

Démonstration. La démonstration est la même que celle donnée dans la proposition 5.2.4, sauf pour le cas $c'_1 \cap c_1 = \emptyset$, à la place du cylindre, on prend la surface bordée par les courbes c_1 et c'_1 . \square

Chapitre 6

Catégorification

6.1 Complexe de chaînes

Etant donnée une tresse à n brins σ . Choisissons $h_\sigma \in \mathcal{H}(D, P_n)$ un représentant de σ . A chaque triplet (h_σ, i, j) , $1 \leq i, j \leq n-1$, on associe un complexe de chaînes $(C^{l,k}(h_\sigma, i, j), \partial^{l,k})$, $l, k \in \mathbb{Z}$. Prenant deux arcs α_j, β_i donnés dans la figure 5.3 (section 2.1). $C^{l,k}(h_\sigma, i, j)$ est le groupe abélien libre engendré par les points d'intersections de β_i avec $\sigma\alpha_j$.

Rappelons que l'intersection algébrique de $\sigma\alpha_j$ et β_i est donnée par la formule

$$\langle \beta_i, \sigma\alpha_j \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (t^k \tilde{\beta}_i \cdot \tilde{\sigma}\alpha_j) t^k$$

où $(t^k \tilde{\beta}_i \cdot \tilde{\sigma}\alpha_j) \in \mathbb{Z}$ est le nombre algébrique d'intersection standard des arcs orientés $t^k \tilde{\beta}_i$ et $\tilde{\sigma}\alpha_j$ dans \tilde{D}_n .

On munit l'ensemble des générateurs d'un degré d'Alexander $A(x) = k$.

On appelle *Fourchette* dans (D, P_n) un arbre F plongé dans D formé de trois arêtes et quatre sommets d_0, p_i, p_j et z tels que $F \cap \partial D = \{d_0\}$, $F \cap P_n = \{p_i, p_j\}$, et les trois arêtes ont z comme sommet commun. L'arête $M(F)$ qui joint les deux sommets d_0 et z s'appelle le *manche* de F . L'union des deux autres arêtes est un arc plongé à extrémités $\{p_i, p_j\}$, appelé les *dents* de F noté $d(F)$. On oriente $d(F)$ d'une façon pour que le manche M se trouve à droite de $d(F)$.

Pour tout $j = 1, \dots, n-1$, notons par F_j la fourchette dans (D, P_n) qui a comme dents l'arc α_j et $\partial M(F_j) = \{d_0, z_j\}$.

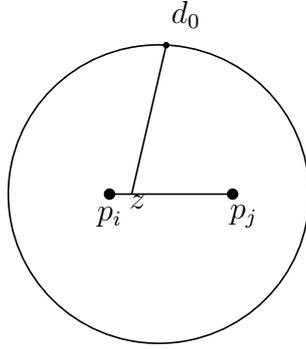


FIG. 6.1 – Une fourchette F

Etant donnée un générateur x . Définissons un chemin plongé dans D_n paramétré par $\gamma : I \rightarrow D_n$ comme suit.

Notons par γ_1 l'arc de d_0 à z_j le long de $M(F_j)$.

γ_2 l'arc de z_j vers x le long de $\sigma\alpha_j$.

γ_3 l'arc de x à d_0 le long de β_i .

Posons $\gamma = \gamma_1\gamma_2\gamma_3$. γ est C^1 régulier par morceaux. On déforme légèrement les courbes β_i et $\sigma\alpha_j$ au voisinage des points x, z_j de sorte que les angles au points d'intersection seront droits ($\pm\frac{\pi}{2}$). On munit l'ensemble des générateurs d'un degré de Maslov μ défini par

$$\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 d(\arg(\gamma'(t)))$$

Où $\arg(\gamma'(t))$ est l'argument du vecteur tangent $\gamma'(t)$. Autrement dit, $\mu(x)$ est le nombre de demi-tours faits par le vecteur tangent $\gamma'(t)$.

Soit D^2 le disque unité dans le plan complexe \mathbb{C} . Notons par $D_+^2 = \{z \in D^2; \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ le demi disque unité.

Définition 6.1.1. *Etant donnés deux générateurs x et y dans $\beta_i \cap \sigma\alpha_j$. On appelle bigone de x vers y co-bordé par β_i et $\sigma\alpha_j$ l'image par une immersion "orientée" g de D_+^2 dans D_n qui vérifie les conditions suivantes :*

- $g(-i) = x$,
- $g(i) = y$,
- $g([-i, i]) \subset \beta_i$,
- $g(S_+^1) \subset \sigma\alpha_j$.

On note par $M(x, y)$ l'ensemble des bigones de x vers y .

On note par α_{xy} et β_{xy} les sous arcs de $\sigma\alpha_j$ et β_i respectivement, qui bordent le bigone de x vers y .

Soit \mathcal{D} un bigone dans $M(x, y)$. Dans tout le texte sauf mention du contraire, on suppose que β_{xy} est une corde verticale. On associe à \mathcal{D} un signe $\varepsilon(\mathcal{D})$, où $\varepsilon(\mathcal{D}) = 1$ si l'orientation du vecteur $\overrightarrow{xy} \subset \beta_{xy}$ est la même de celle de β_i et $\varepsilon(\mathcal{D}) = -1$ dans le cas contraire. On se servira de la remarque suivante.

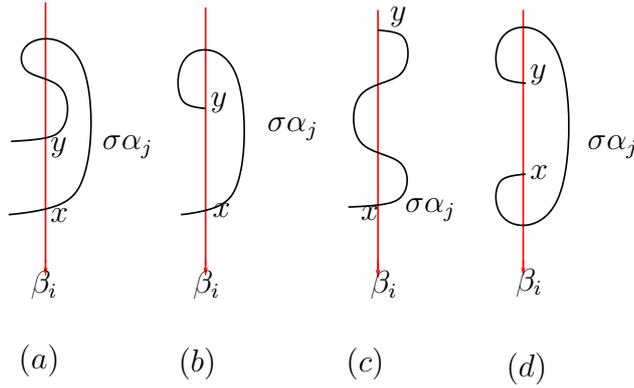


FIG. 6.2 –

Remarque 6.1.2. *Etant donnés deux points x et y dans $\beta_i \cap \sigma\alpha_j$ et un bigone de x vers y . L'intersection de l'intérieur du bigone avec $\beta_i \cup \sigma\alpha_j$ peut être non vide. Dans la figure 6.2, (a) est un bigone de x vers y , par contre (b), (c) et (d) ne sont pas des bigones.*

Soit \mathcal{D} un bigone de x vers y , et g l'immersion associé à \mathcal{D} . On appelle nombre de multiplicité par rapport à \mathcal{D} d'un point $w \in D_n$ le nombre de points dans l'image réciproque de w par g . On note ce nombre par $n_g(w)$,

$$n_g(w) = \#g^{-1}(w).$$

Remarque 6.1.3. *Le comportement du nombre de multiplicité près des arcs β_{xy} et $\sigma\alpha_{xy}$ est comme suit. Si on traverse $\sigma\alpha_{xy}$ (resp. β_{xy}), de la droite vers la gauche, le nombre de multiplicité effectue un saut de 1 (resp. baisse de 1). Si on traverse $\sigma\alpha_{xy}$ (resp. β_{xy}), de la gauche vers la droite, le nombre de multiplicité baisse de 1 (resp. s'augmente par 1).*

Près des points x et y , le nombre de multiplicité est égal à 1 à l'intérieur du bigone et 0 ailleurs (voir la figure 6.3), comme le prouve le lemme suivant.

Lemme 6.1.4. *Soit \mathcal{D} un bigone de x vers y et $g : D_+ \rightarrow D_n$ l'immersion associée à \mathcal{D} . Alors $n_g(x) = n_g(y) = 1$.*

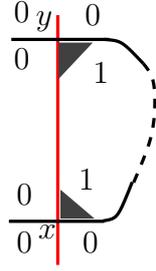


FIG. 6.3 – Le nombre de multiplicité près des points x et y .

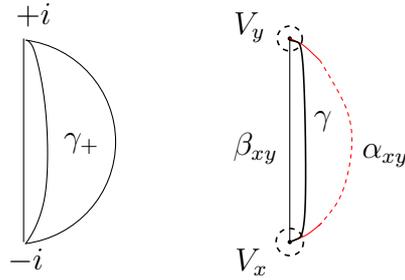


FIG. 6.4 –

Démonstration. Soit γ un arc plongé dans D_n d'extrémités x et y telle que $\gamma \cup \beta_{xy}$ borde un petit disque, noté \mathcal{D}' , dans D_n . On voit \mathcal{D}' comme l'image de la surface bordé par $[-i, i] \cup \gamma_+$ dans D_+^2 par un plongement g' . Soit V_x et V_y deux voisinages de x et y respectivement, on peut choisir ces voisinages suffisamment petits de telle sorte que

$$\gamma \cap V_x = \alpha_{xy} \cap V_x, \quad (6.1)$$

$$\gamma \cap V_y = \alpha_{xy} \cap V_y. \quad (6.2)$$

Alors les arcs obtenus de γ et α_{xy} dans la surface D_n privée de V_x et V_y sont homotopes à extrémités fixes (ici l'homotopie vient du fait que S_+ et γ_+ sont homotopes dans D_+^2 , où γ_+ est un arc dans D_+^2 envoyé par g' sur γ). Donc d'après le théorème 5.4.2, ces arcs sont isotopes à extrémités fixes. Donc on peut réduire le nombre de multiplicité à l'extérieur des deux voisinages V_x et V_y sans le changer à l'intérieur. D'où

$$n_g(w) = n_{g'}(w) = 1, \quad \forall w \in V_x \cap \mathcal{D}' \quad (6.3)$$

□

Remarque 6.1.5. Etant donné un bigone \mathcal{D} de x vers y , V_x et V_y deux petits voisinages dans D_n de x et y respectivement.

Si $\varepsilon(\mathcal{D}) = -1$, alors

- $\Im(x) < \Im(y)$, où $\Im(x)$ est la partie imaginaire de x .
- $V_x \cap \alpha_{xy}, V_y \cap \alpha_{xy}$ coupent la courbe β_{xy} du côté droit.
- $V_x \cap \text{Int}(\mathcal{D})$ et $V_y \cap \text{Int}(\mathcal{D})$ seront des quadrants du même côté. Les angles seront en face, voir la figure 6.5, (a).

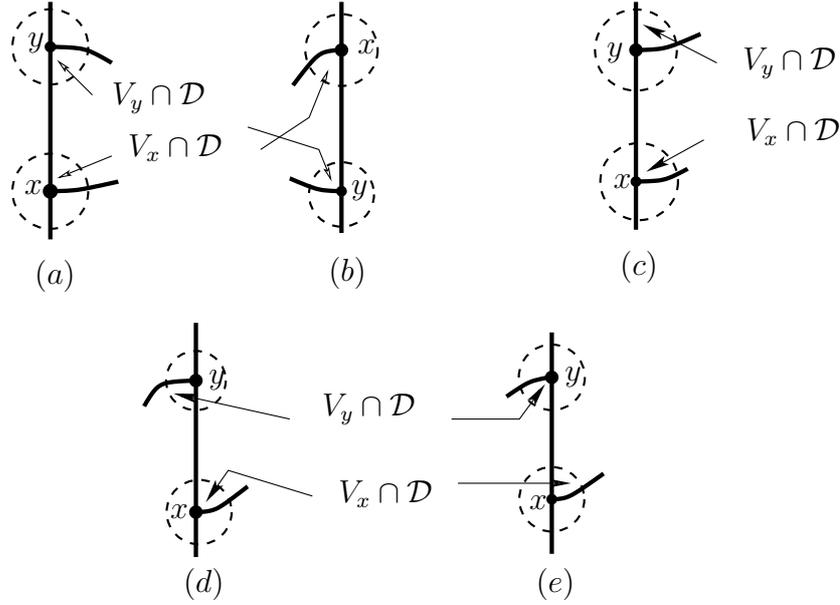


FIG. 6.5 – Les cas (c),(d) et (e) ne sont pas des bigones.

Si $\varepsilon(\mathcal{D}) = 1$, alors

- $\Im(x) > \Im(y)$.
- $V_x \cap \alpha_{xy}, V_y \cap \alpha_{xy}$ coupent la courbe β_{xy} du côté gauche.
- $V_x \cap \text{Int}(\mathcal{D})$ et $V_y \cap \text{Int}(\mathcal{D})$ seront des angles en face, voir la figure 6.5, (b).

La différentielle $\partial : C(h_\sigma, i, j) \rightarrow C(h_\sigma, i, j)$ est définie sur un générateur x par

$$\partial x = \sum_{\substack{y \in \beta_i \cap \sigma \alpha_j \\ \mathcal{D} \in M(x, y)}} \varepsilon(\mathcal{D}) \cdot y.$$

Proposition 6.1.6. *La différentielle ∂ augmente le degré de Maslov par un et respecte le degré d'Alexander.*

Démonstration. Soit x, y deux générateurs de $C^{l, k}(h_\sigma, i, j)$.

Si \mathcal{D} est un bigone élémentaire (voir la section 1.6 pour la définition) de x vers y , alors le vecteur tangent fait un demi-tour le long de α_{xy} . Donc on a $\mu(x, y) = \mu(y) - \mu(x) = 1$.

Si \mathcal{D} n'est pas un bigone élémentaire de x vers y , alors $\mu(x, y) = 1$ vient du fait que le nombre de demi-tours est un invariant par isotopie. Car un entier qui se déforme d'une manière continue est forcément constant.

Montrons que ∂ respecte le degré d'Alexander k . Supposons que $A(x) = k$ et $A(y) = k'$. D'après la remarque 5.3.1, $k - k'$ est le nombre de tours que l'on fait en parcourant la courbe qui va de x à y le long de $\sigma\alpha_j$ et de y à x le long de β_i . Mais cette courbe borde un bigone. Donc $k - k' = 0$. D'où $k = k'$. \square

La proposition suivante montre que ∂ est une différentielle de complexe de chaînes.

Proposition 6.1.7. *L'homomorphisme ∂ est une différentielle. i.e $\partial \circ \partial = 0$.*

Pour démontrer la proposition 6.1.7, nous avons besoin des lemmes qui suivent.

Lemme 6.1.8. *Etant donnés trois points x, y_0, z dans $\beta_i \cap \sigma\alpha_j$, un bigone \mathcal{D}_0 de x vers y_0 , et un bigone \mathcal{D} de y_0 vers z telle que $z \in \beta_{xy_0}$. Soit y_1 un point de β_{y_0z} . S'il existe un bigone de x vers y_1 , alors $y_0 \in \alpha_{xy_1}$.*

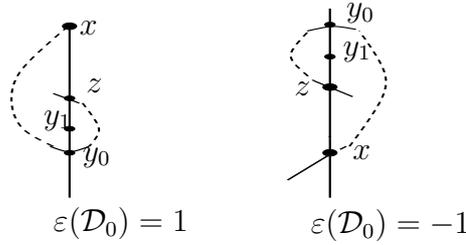


FIG. 6.6 –

Démonstration. Supposons qu'il existe un bigone de x vers y_1 telle que $y_0 \notin \alpha_{xy_1}$. Si $\varepsilon(\mathcal{D}_0) = -1$, alors d'après la remarque 6.1.5, on a $\mathfrak{S}(x) > \mathfrak{S}(y_1)$. Mais ceci est contradictoire avec l'hypothèse (voir la figure 6.6).

Si $\varepsilon(\mathcal{D}_0) = 1$, on obtient $\mathfrak{S}(x) < \mathfrak{S}(y_1)$. Ceci est impossible. Donc $y_0 \in \alpha_{xy_1}$. \square

Lemme 6.1.9. *Etant donnés trois points distincts x, y_0, z dans $\beta_i \cap \sigma\alpha_j$, un bigone \mathcal{D}_0 de x vers y_0 , et un bigone \mathcal{D} de y_0 vers z telle que $z \notin \beta_{xy_0}$. Si y_1 est un point de β_{xy_0} , alors $M(z, y_1) = \phi$.*

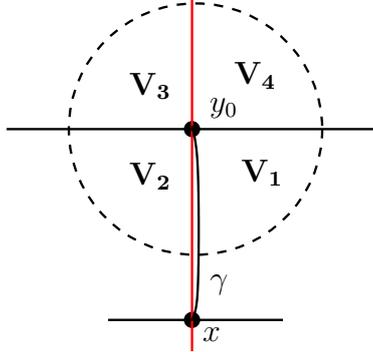


FIG. 6.7 –

Démonstration. De la même manière que le lemme 6.1.8. □

Lemme 6.1.10. *Etant donnés trois points distincts x, y_0 et y_1 dans $\beta_i \cap \sigma\alpha_j$ et un bigone de x vers y_0 . Alors*

1. *S'il existe un bigone de x vers y_1 tel que α_{xy_1} contient le point y_0 , alors $y_1 \in \beta_{xy_0}$.*
2. *S'il existe un bigone de y_1 vers y_0 tel que $\alpha_{y_1y_0}$ contient x , alors $y_1 \in \beta_{xy_0}$.*

Démonstration. 1. Soient \mathcal{D}_0 un bigone de x vers y_0 , \mathcal{D}_1 un bigone de x vers y_1 et $g_0, g_1 : D_+^2 \rightarrow D_n$ les immersions associées. Supposons que $y_0 \in \alpha_{xy_1}$. Soit V_{y_0} un petit voisinage de y_0 dans D_n . Alors $V_{y_0} \cap (D_n - (\sigma\alpha_i \cup \beta_j))$ est formé de quatre composante V_1, V_2, V_3 et V_4 , Voir la figure 6.7. Montrons d'abord que $n_{g_1}(y_0) = 1$. Supposons que le nombre de multiplicité de y_0 par rapport à \mathcal{D}_1 est égal à $m + 1$, où $m \in \mathbb{N}$. Soit γ une courbe plongée dans D_n d'extrémités x et y_0 , comme dans la figure 6.7. D'après la remarque 6.1.3, m est égal à la somme algébrique de points d'intersection de γ avec la courbe α_{xy_1} . Puisque $n_{g_0}(x) = n_{g_0}(y_0) = 1$, d'après le lemme 6.1.4, alors la somme algébrique de points d'intersection de γ avec α_{xy_0} est égal à 0. Par ailleurs, en utilisant la principe de Jordan pour les courbes simples fermées dans le plan, on obtient que la somme algébrique de points d'intersection de γ avec $\alpha_{xy_1} \setminus \alpha_{xy_0}$ est égal aussi à 0. D'où $m = 0$.

La composante V_1 est inclu dans l'intérieur de bigone \mathcal{D}_0 . Donc $n_{g_1}(w_1) = 1$ pour tout $w_1 \in V_1$. Soit w_2 un point de V_2 . alors $n_{g_1}(w_2) = 1$ ou 0. Mais le deuxième cas est impossible, sinon le nombre de multiplicité par rapport à \mathcal{D}_1 des points de V_3 sera -1 . Donc le nombre de

multiplicité par rapport à \mathcal{D}_1 des points des deux composantes voisines V_1 et V_2 ne change pas. Donc $V_{y_0} \cap \beta_{xy_0}$ n'est pas inclu dans β_{xy_1} . D'où $\beta_{xy_1} \subset \beta_{xy_0}$.

2. Le deuxième cas se fait de la même manière que le cas 1 au voisinage du point x .

□

Lemme 6.1.11. Soient x, y_0, z trois points dans $\beta_i \cap \sigma\alpha_j$, $\mathcal{D}_0 \in M(x, y_0)$ et $\mathcal{D} \in M(y_0, z)$. Alors il existe un points y_1 dans $\beta_i \cap \sigma\alpha_j$, un bigone \mathcal{D}' de y_1 vers z , un bigone \mathcal{D}_1 de x vers y_1 tel qu'on a l'une des inégalités suivantes

$$\varepsilon(\mathcal{D}_0) = \varepsilon(\mathcal{D}_1) = \varepsilon(\mathcal{D}') \neq \varepsilon(\mathcal{D}). \quad (6.4)$$

$$\varepsilon(\mathcal{D}_0) \neq \varepsilon(\mathcal{D}_1) = \varepsilon(\mathcal{D}') = \varepsilon(\mathcal{D}). \quad (6.5)$$

Le point y_1 est unique, dans le sens : si y_2 un point dans $\beta_i \cap \sigma\alpha_j$ avec $M(x, y_2) \neq \phi$ alors $M(y_2, z) = \phi$.

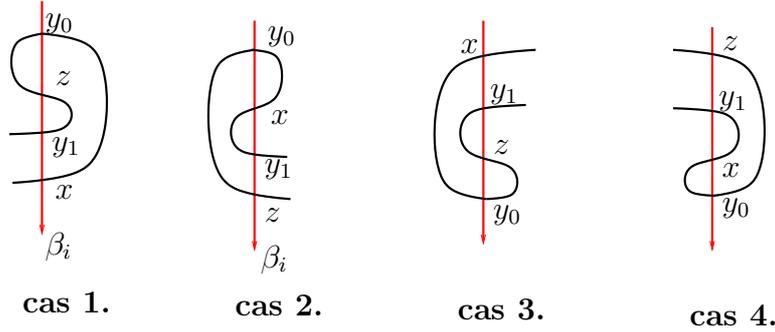


FIG. 6.8 –

Démonstration. Existence de y_1 : L'existence de y_1 vient du fait que l'intérieur des deux bigones \mathcal{D} et \mathcal{D}_0 ne contiennent pas des points enlevés, donc la courbe $\sigma\alpha_j$ doit couper la courbe β_i en un point y_1 . Les inégalités (6.4) et (6.5) se découlent directement (voir la figure 6.8).

Unicité de y_1 : Supposons qu'il existe un point y_2 qui vérifie le lemme et montrons que $y_2 = y_1$. On distingue plusieurs cas illustrés par la figure 6.8.

cas 1. $\varepsilon(\mathcal{D}_0) = \varepsilon(\mathcal{D}') = -1$ et $\varepsilon(\mathcal{D}) = 1$.

Soit y_2 un point dans $\beta_i \cap \sigma\alpha_j$ telle que $M(y_2, z) \neq \phi$. Alors l'arc α_{y_2z} doit passer par l'un des deux points x ou y_1 . Mais le premier cas est impossible, supposons que $x \in \alpha_{y_2z}$. Donc α_{y_2z} contient le point y_0 . D'après le lemme (6.1.10), y_2 est un point de β_{y_0z} . Mais

dans ce cas, l'arc qui lie les deux points x et y_2 le long de $\sigma\alpha_j$ ne contient pas le point y_0 . Donc $M(x, y_2) = \phi$ d'après le lemme 6.1.8, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $y_1 \in \alpha_{y_2z}$. D'après le lemme (6.1.10), le point y_2 appartient à l'arc β_{y_1z} . D'autre part, $M(x, y_2) = \phi$ pour $y_2 \in \beta_{y_1z} - \{y_1\}$ encore d'après le lemme 6.1.10. D'où $y_2 = y_1$.

cas 2. $\varepsilon(\mathcal{D}_0) = -1$ et $\varepsilon(\mathcal{D}) = \varepsilon(\mathcal{D}') = 1$.

Supposons qu'il existe un bigone de x vers un point y_2 . Alors l'arc α_{xy_2} contient soit le point y_1 ou le point z , mais le deuxième cas est impossible, supposons que $z \in \alpha_{xy_2}$. Donc α_{xy_2} contient le point y_0 . D'après le lemme 6.1.10, on a $y_2 \in \beta_{xy_0}$. Donc l'arc qui joint les deux points z et y_2 le long de $\sigma\alpha_j$ ne passe pas par le point y_0 . En utilisant le lemme 6.1.9, on obtient $M(z, y_2) = \phi$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. Donc $y_1 \in \alpha_{xy_2}$. En utilisant le lemme (6.1.10), on a $y_2 \in \beta_{xy_1}$. D'autre part, $M(y_2, z) = \phi$ si $y_2 \in \beta_{xy_1} - \{y_1\}$. D'où $y_2 = y_1$.

cas 3. $\varepsilon(\mathcal{D}_0) = \varepsilon(\mathcal{D}') = 1$ et $\varepsilon(\mathcal{D}) = -1$.

Se fait de la même manière que le cas 1.

cas 4. $\varepsilon(\mathcal{D}_0) = 1$ et $\varepsilon(\mathcal{D}) = \varepsilon(\mathcal{D}') = -1$. Similaire au cas 2. □

Démonstration. (Démonstration de la proposition 6.1.7). Considérons un point $x \in \beta_i \cap \sigma\alpha_j$, comme un générateur de $C(h_\sigma, i, j)$. On a

$$\partial \circ \partial(x) = \sum_{\substack{y \in \beta_i \cap \sigma\alpha_j \\ \mathcal{D} \in M(x, y)}} \sum_{\substack{z \in \beta_i \cap \sigma\alpha_j \\ \mathcal{D}_0 \in M(y, z)}} \varepsilon(\mathcal{D}) . \varepsilon(\mathcal{D}_0) . z.$$

En utilisant le lemme (6.1.11), pour chaque couple (y_0, z) de points de $\beta_i \cap \sigma\alpha_j$, il existe un point y_1 tel que $\varepsilon(\mathcal{D}) . \varepsilon(\mathcal{D}_0) \neq \varepsilon(\mathcal{D}') . \varepsilon(\mathcal{D}_1)$. Donc

$$\sum_{\substack{y \in \beta_i \cap \sigma\alpha_j \\ \mathcal{D} \in M(x, y)}} \sum_{\substack{z \in \beta_i \cap \sigma\alpha_j \\ \mathcal{D}_0 \in M(y, z)}} \varepsilon(\mathcal{D}) . \varepsilon(\mathcal{D}_0) = 0.$$

D'où $\partial \circ \partial(x) = 0$. □

On définit $HB^l(h_\sigma, i, j)$ comme étant le l -ième groupe de cohomologie du complexe de chaînes $C(h_\sigma, i, j)$. C'est un \mathbb{Z} -module gradué de type fini. On définit $HB^{l,k}(h_\sigma, i, j)$ comme étant le l -ième groupe de cohomologie du sous complexe de degré k de $C(h_\sigma, i, j)$. Donc on a la décomposition

$$HB^l(h_\sigma, i, j) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} HB^{l,k}(h_\sigma, i, j). \quad (6.6)$$

On note par $HB^{l,k}(\sigma, i, j)$ la classe d'isomorphisme de $HB^{l,k}(h_\sigma, i, j)$.

Théorème 6.1.12. *Si σ est une tresse à n brins, alors pour chaque couple d'indice (i, j) , $i, j \in \{1, \dots, n\}$, la classe d'isomorphisme $HB^{l,k}(\sigma, i, j)$ est invariante par isotopie.*

La démonstration de ce théorème occupe la section 2.4. Montrons d'abord que le coefficient de la matrice de Burau réduite est égal à la caractéristique d'Euler graduée de cette cohomologie.

Lemme 6.1.13. *Soit x un point dans $\beta_i \cap \sigma\alpha_j$. Alors $\mu(x)$ est pair si et seulement si $\text{sign}(x) = +1$, où $\text{sign}(x)$ est le signe d'intersection des courbes orientées β_i et $\sigma\alpha_j$ au point x .*

Démonstration. Supposons que β_i et $\sigma\alpha_j$ se coupent au point x à un angle droit ($\pm\frac{\pi}{2}$), l'intersection au point z est de même. Soit $\tilde{\gamma}$ une courbe simple donné comme dans la figure 6.9. On lisse la courbe γ au points x et z . On obtient $\tilde{\gamma}\gamma$ une courbe simple fermée. On distingue deux cas.

cas1 : Si le signe d'intersection au point x est positif, alors

$$\int d(\arg((\tilde{\gamma}\gamma)'(t))) = \int d(\arg(\gamma'(t))) + \int d(\arg(\tilde{\gamma}'(t))) + \pi,$$

$$2n\pi = \int d(\arg(\gamma'(t))) + 2\pi,$$

où n est le degré de l'application $\tilde{\gamma}\gamma : S^1 \rightarrow S^1$. Alors $\mu(x) = 2n - 2$.

cas2 : Si le signe d'intersection au point x est négatif, alors

$$\int d(\arg((\tilde{\gamma}\gamma)'(t))) = \int d(\arg(\gamma'(t))) + \int d(\arg(\tilde{\gamma}'(t))).$$

Donc $\mu(x) = 2n - 1$.

□

Théorème 6.1.14. *Soit σ une tresse à n brins et h_σ un homéomorphisme représentant σ . Pour chaque couple d'indice (i, j) , $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$, il existe un complexe de chaînes bigradué $(C^{l,k}(h_\sigma, i, j), \partial^{l,k})_{l,k \in \mathbb{Z}}$ tel que*

$$b_{ij} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^l \cdot t^k \cdot \dim_{\mathbb{Q}} (HB^{l,k}(h_\sigma, i, j) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}).$$

Où b_{ij} est le coefficient de la matrice de Burau $\tilde{\rho}(\sigma)$ en position (i, j) .

Démonstration. C'est une conséquence directe du lemme 6.1.13 et la formule (5.4) donnée dans la section (2.1). □

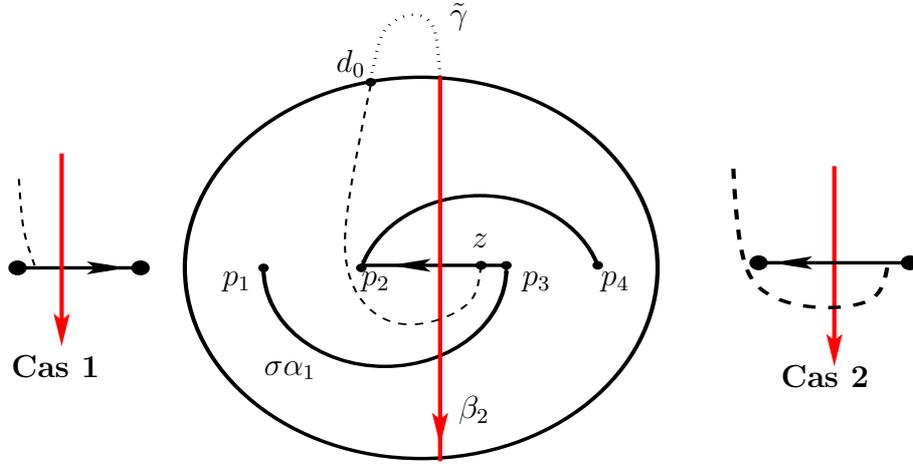


FIG. 6.9 –

6.2 Invariance

Dans cette section nous démontrons que l'homologie construite à la section (2.3) est invariante par isotopie. Dans tout ce qui suit, σ et σ' sont deux tresses isotopes par une isotopie qui ne fait apparaître qu'un bigone élémentaire d'un point x vers un point y . Notons par \mathcal{C} et \mathcal{C}' les deux complexes de chaînes associée à σ et σ' respectivement. Auparavant nous allons donner les lemmes suivants :

Lemme 6.2.1. (Elimination Gaussienne [BN07]) Soit $\mathcal{C} = (C^*, \partial)$ un complexe de chaînes sur \mathbb{Z} librement engendré. Soit $x \in C^l$ (resp. $y \in C^{l+1}$) telle que $C^l = \mathbb{Z}.x \oplus A$ (resp. $C^{l+1} = \mathbb{Z}.y \oplus B$). Si $\varphi : \mathbb{Z}.x \rightarrow \mathbb{Z}.y$ est un isomorphisme de \mathbb{Z} -modules, alors le segment de complexe de \mathcal{C}

$$\dots [C^{l-1}] \xrightarrow{\begin{pmatrix} \kappa \\ \zeta \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ A \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \varphi & \delta \\ \lambda & \xi \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} y \\ B \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \theta & \nu \end{pmatrix}} [C^{l+2}] \dots \quad (6.7)$$

est isomorphe au segment de complexe de chaînes suivant

$$\dots [C^{l-1}] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ \zeta \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ A \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \xi - \lambda\varphi^{-1}\delta \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} y \\ B \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \nu \end{pmatrix}} [C^{l+2}] \dots \quad (6.8)$$

ces deux complexes sont homotopiquement équivalent au segment de complexe

$$\dots [C^{l-1}] \xrightarrow{(\zeta)} [A] \xrightarrow{(\xi - \lambda\varphi^{-1}\delta)} [B] \xrightarrow{(\nu)} [C^{l+2}] \dots \quad (6.9)$$

Ici on utilise la notation matricielle pour la différentielle ∂ .

Lemme 6.2.2. Soit x, y, z et u quatre points d'intersection dans $\beta_i \cap \sigma' \alpha_j$.

Supposons que

- il existe un bigone élémentaire de x vers y ,
- il existe un bigone de z vers y ,
- il existe un bigone de z vers u dans \mathcal{C} et \mathcal{C}' .

Alors $M(x, u) = \phi$.

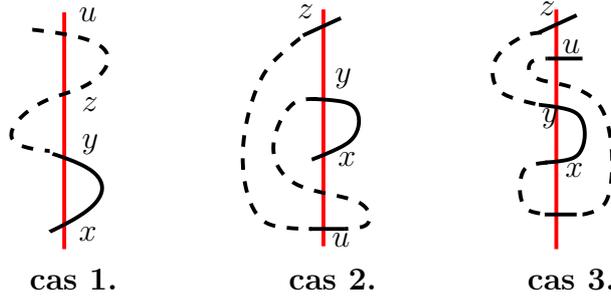


FIG. 6.10 –

Démonstration. Raisonnons sur la position des points x, y, z et u sur l'arc β_i . On suppose que $\mathfrak{S}(x) < \mathfrak{S}(y)$. Le cas inverse se démontre de la même manière. La courbe α_{zy} ne passe pas par le point x . Car si on avait $x \in \alpha_{zy}$, d'après le lemme 6.1.10, on aurait $z \in \beta_{xy}$, ce qui est contradictoire avec le fait que le bigone de x vers y est élémentaire. Comme $M(z, y) \neq \phi$ et l'arc β_{xy} ne contient aucun point d'intersection, en vertu de la remarque 6.1.5, on obtient

$$\mathfrak{S}(x) < \mathfrak{S}(y) < \mathfrak{S}(z), \quad (6.10)$$

Maintenant, supposons qu'il existe un bigone de x vers u . Donc la courbe α_{xu} ne doit passer pas par le point y , sinon $u \in \beta_{xy}$. On distingue trois cas illustré par la figure 6.10.

cas 1. $\mathfrak{S}(x) < \mathfrak{S}(y) < \mathfrak{S}(z) < \mathfrak{S}(u)$. En vertu de la remarque 6.1.5, on obtient $\mathfrak{S}(u) < \mathfrak{S}(x)$. Ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

cas 2. $\mathfrak{S}(u) < \mathfrak{S}(x) < \mathfrak{S}(y) < \mathfrak{S}(z)$. Comme la courbe α_{xu} ne passe pas par le point y , alors la courbe formé de $\alpha_{xy} \cup \alpha_{xu}$ union la courbe qui joint les deux points y et u le long de $\sigma \alpha_j$ est fermée. Ce qui est impossible.

cas 3. $\mathfrak{S}(x) < \mathfrak{S}(y) < \mathfrak{S}(u) < \mathfrak{S}(z)$. De la même façon que le cas 1.

□

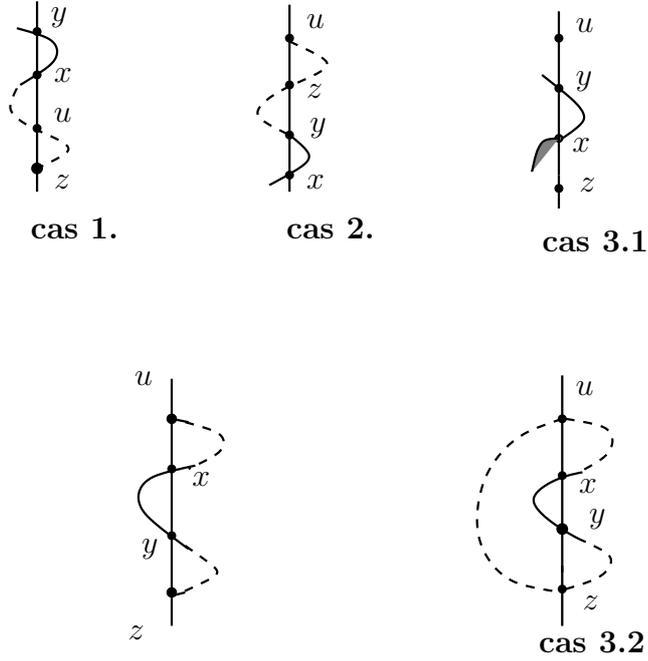


FIG. 6.11 –

Lemme 6.2.3. Soit x, y, z et u quatre points d'intersection dans $\beta_i \cap \sigma' \alpha_j$ telle que $M(z, u) = \phi$ dans le complexe \mathcal{C} . S'il existe un bigone élémentaire de x vers y dans \mathcal{C}' , alors

$$M(z, y) = \phi \text{ ou } M(x, u) = \phi$$

dans le complexe \mathcal{C}' .

Démonstration. Supposons que $\mathfrak{S}(z) < \mathfrak{S}(u)$, le cas contraire se démontre de la même méthode. Il y a plusieurs cas illustré par la figure 6.11.

Cas 1. Si $\mathfrak{S}(z) < \mathfrak{S}(u) < \mathfrak{S}(x), \mathfrak{S}(y)$. Supposons qu'il existe un bigone de x vers u . Il résulte du lemme (6.1.10, (1)) que

$$\mathfrak{S}(u) < \mathfrak{S}(x) < \mathfrak{S}(y).$$

Par ailleurs, s'il existe un bigone de z vers y , alors la courbe α_{zy} passe par le point x . Donc $z \in \beta_{xy}$ i.e $\mathfrak{S}(x) < \mathfrak{S}(z) < \mathfrak{S}(y)$, encore d'après le lemme 6.1.10. Ceci est contradictoire avec l'hypothèse. D'où $M(z, y) = \phi$ ou $M(x, u) = \phi$.

Cas 2. Si $\mathfrak{S}(x), \mathfrak{S}(y) < \mathfrak{S}(z) < \mathfrak{S}(u)$. Supposons qu'il existe un bigone de z vers y . Alors $\mathfrak{S}(x) < \mathfrak{S}(y) < \mathfrak{S}(z)$. S'il existe un bigone de x vers u , alors la courbe α_{xu} doit passer par le point y . En se servant du lemme 6.1.10, on obtient $u \in \beta_{xy}$ ce qui est impossible. D'où $M(z, y) = \phi$ ou $M(x, u) = \phi$.

Cas 3. Si $\mathfrak{S}(z) < \mathfrak{S}(x), \mathfrak{S}(y) < \mathfrak{S}(u)$.

Si α_{xy} n'est pas un sous arc de la courbe qui lie les points z et u le long de $\sigma\alpha_j$. On a

1. Si $\mathfrak{S}(z) < \mathfrak{S}(x) < \mathfrak{S}(y) < \mathfrak{S}(u)$. Supposons qu'il existe un bigone de x vers u , alors l'arc α_{xu} ne passe pas par le point y (voir la figure 6.11, cas 3.1), car sinon, d'après le lemme 6.1.10, on aurait $u \in \beta_{xy}$ ce qui n'est pas vrai. Puisque $y \notin \alpha_{xu}$, alors d'après la remarque 6.1.5, on obtient $\mathfrak{S}(u) < \mathfrak{S}(x)$. C'est absurde par hypothèse.
2. Si $\mathfrak{S}(z) < \mathfrak{S}(y) < \mathfrak{S}(x) < \mathfrak{S}(u)$. Supposons qu'il existe un bigone de x vers u , alors l'arc α_{xu} ne passe pas par le point y (sinon $u \in \beta_{xy}$). S'il existe un bigone de z vers y , le seul cas possible est illustré par la figure 6.11 (cas 3.2). Donc l'arc qui lie les points z et u le long de $\sigma\alpha_j$ union $\alpha_{xy} \cup \alpha_{xu} \cup \alpha_{zy}$ sera une courbe fermée, ce qui est absurde.

Si α_{xy} est inclu dans la courbe qui joint les deux points z et u le long de $\sigma\alpha_j$. Notons par \mathcal{D}_0 le bigone de x vers y . Supposons qu'il existe un bigone \mathcal{D}_1 de z vers y et un bigone \mathcal{D}_2 de x vers u . Dans ce cas on aura $\mathfrak{S}(y) < \mathfrak{S}(x)$, voir la figure 6.11. Soit $g_1 : D_+^2 \rightarrow D_n$ (resp. g_2) l'immersion associée à \mathcal{D}_1 (resp. \mathcal{D}_2). Prenant R un petit rectangle dans D_n qui contient le bigone \mathcal{D}_0 dans son intérieur. Posons

$$\mathcal{D}'_1 = g_1 (D_+^2 \cap \{z \in D_+^2 : \mathfrak{S}(z) < 1 - \epsilon\}) \quad (6.11)$$

$$\mathcal{D}'_2 = g_2 (D_+^2 \cap \{z \in D_+^2 : \mathfrak{S}(z) > -1 + \epsilon\}) \quad (6.12)$$

Où ϵ est un nombre réel positif. On peut faire une isotopie des courbes β_i et $\sigma'\alpha_j$ à l'intérieur du rectangle R qui fait disparaître le bigone \mathcal{D}_0 et on obtient la situation illustrée par la figure 6.12.

Donc on obtient un bigone \mathcal{D} de z vers u dans le complexe \mathcal{C} , ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

□

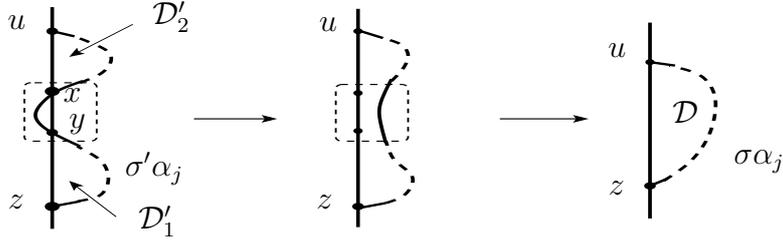


FIG. 6.12 –

Lemme 6.2.4. Soit $z, u \in \beta_j \cap \sigma\alpha_i$ et \mathcal{D} un bigone de z vers u dans le complexe \mathcal{C} . Si \mathcal{D} est disparu après une isotopie qui fait apparaître un bigone élémentaire d'un point x vers un point y , alors

$$\varepsilon(\mathcal{D}) = -\varepsilon(\mathcal{D}_0) \cdot \varepsilon(\mathcal{D}_1) \cdot \varepsilon(\mathcal{D}_2).$$

Où $\mathcal{D}_0 \in M(x, y)$, $\mathcal{D}_1 \in M(z, y)$ et $\mathcal{D}_2 \in M(x, u)$ dans \mathcal{C}' .



FIG. 6.13 –

Démonstration. Supposons que \mathcal{D} a disparu après une isotopie qui fait apparaître un bigone élémentaire \mathcal{D}_0 d'un point x vers un point y . Donc il existe un bigone \mathcal{D}_1 de z vers y et \mathcal{D}_2 de x vers u (voir la figure 6.13). On obtient directement

$$\varepsilon(\mathcal{D}) = -\varepsilon(\mathcal{D}_0) \cdot \varepsilon(\mathcal{D}_1) \cdot \varepsilon(\mathcal{D}_2).$$

□

Lemme 6.2.5. Soit σ, σ' deux tresses géométriques isotopes, et $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ les complexes de chaînes associée à σ et σ' respectivement. Si on passe de σ à σ' par une isotopie qui ne fait apparaître qu'un bigone élémentaire, alors \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont homotopiquement équivalents.

Démonstration. Considérons le complexe de chaînes \mathcal{C} associé à σ

$$\dots [C^{l-1}] \xrightarrow{(\partial)} [C^l] \xrightarrow{(\partial)} [C^{l+1}] \xrightarrow{(\partial)} [C^{l+2}] \dots \quad (6.13)$$

Posons

$$E = C^{l-1} = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}.e_i,$$

$$A = C^l = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}.a_i,$$

$$B = C^{l+1} = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}.b_i, \text{ et } F = C^{l+2} = \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{Z}.f_i.$$

Le complexe de chaînes \mathcal{C}' associée à σ' est de la forme

$$\dots [C^{l-1}] \xrightarrow{\begin{pmatrix} \kappa \\ \zeta \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ C^l \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \varphi & \delta \\ \lambda & \xi \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} y \\ C^{l+1} \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \theta & \nu \end{pmatrix}} [C^{l+2}] \dots \quad (6.14)$$

où les lettres grecques sont des matrices d'homomorphismes de \mathbb{Z} -modules définis comme suit

* $\varphi : \mathbb{Z}.x \rightarrow \mathbb{Z}.y$ définie par $\varphi(x) = \varepsilon(\mathcal{D})y = \pm y$ où $\mathcal{D} \in M(x, y)$.

* $\xi = (\xi_{ij})$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ où $\xi_{ij} : \mathbb{Z}.a_j \rightarrow \mathbb{Z}.b_i$ définie par

$$\xi_{ij}(a_j) = \begin{cases} \varepsilon(\mathcal{D})b_i & \text{si } \mathcal{D} \in M(a_j, b_i), \\ 0 & \text{si } M(a_j, b_i) = \phi. \end{cases}$$

* $\delta = (\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_n)$ où $\delta_j : \mathbb{Z}.a_j \rightarrow \mathbb{Z}.y$ définie par

$$\delta_j(a_j) = \begin{cases} \varepsilon(\mathcal{D})y & \text{si } \mathcal{D} \in M(a_j, y), \\ 0 & \text{si } M(a_j, y) = \phi. \end{cases}$$

* $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$ où $\lambda_i : \mathbb{Z}.x \rightarrow \mathbb{Z}.b_i$ définie par

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} \varepsilon(\mathcal{D})b_i & \text{si } \mathcal{D} \in M(x, b_i), \\ 0 & \text{si } M(x, b_i) = \phi. \end{cases}$$

* $\kappa = (\kappa_1 \ \kappa_2 \ \dots \ \kappa_r)$ où $\kappa_i : \mathbb{Z}.e_i \rightarrow \mathbb{Z}.x$ définie par

$$\kappa_i(e_i) = \begin{cases} \varepsilon(\mathcal{D})x & \text{si } \mathcal{D} \in M(e_i, x), \\ 0 & \text{si } M(e_i, x) = \phi. \end{cases}$$

* $\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_s \end{pmatrix}$ où $\theta_i : \mathbb{Z}.y \rightarrow \mathbb{Z}.f_i$ définie par

$$\theta_i(y) = \begin{cases} \varepsilon(\mathcal{D})f_i & \text{si } \mathcal{D} \in M(y, f_i), \\ 0 & \text{si } M(y, f_i) = \phi. \end{cases}$$

* $\zeta = \partial$ et $\nu = \partial$ définies dans le complexe \mathcal{C} .

Montrons que $\partial_{ij} = \xi_{ij} - \lambda_i \varphi^{-1} \delta_j : \mathbb{Z}.a_j \rightarrow \mathbb{Z}.b_i$ pour tout $i = \overline{1, m}$ et $j = \overline{1, n}$. Soit $a_j \in A, i \in \{1, \dots, m\}$ et $b_i \in B, j \in \{1, \dots, n\}$. il y a deux cas qui figure

1. S'il y a pas de bigone de a_j vers b_i dans le complexe \mathcal{C} et \mathcal{C}' . donc, d'après le lemme 6.2.3, on a $\delta_j(a_j) = 0$ ou $\lambda_i(x) = 0$. Donc $\lambda_i \varphi^{-1} \delta_j(a_j) = 0$. D'où

$$\partial_{ij}(a_j) = (\xi_{ij} - \lambda_i \varphi^{-1} \delta_j)(a_j) = 0.$$

2. il y a un bigone \mathcal{D} de a_j vers b_i dans le complexe \mathcal{C} . Donc $\partial_{ij}(a_j) = \varepsilon(\mathcal{D})b_i$. Dans ce cas, on a

* : si le bigone \mathcal{D} a disparu lors du passage de σ à σ' par isotopie i.e $\xi_{ij}(a_j) = 0$. Alors la disparition de \mathcal{D} fait apparaître un bigone \mathcal{D}_1 de a_j vers y et un bigone \mathcal{D}_2 de x vers b_i . Donc par définition on a $\lambda_i \varphi^{-1} \delta_j(a_j) = \varepsilon(\mathcal{D}_0). \varepsilon(\mathcal{D}_1). \varepsilon(\mathcal{D}_2). b_i$. D'après le lemme 6.2.4, on a

$$(\xi_{ij} - \lambda_i \varphi^{-1} \delta_j)(a_j) = -\varepsilon(\mathcal{D}_0). \varepsilon(\mathcal{D}_1). \varepsilon(\mathcal{D}_2). b_i = \varepsilon(\mathcal{D}). b_i$$

D'où $\partial_{ij} = \xi_{ij} - \lambda_i \varphi^{-1} \delta_j$.

** : Si le bigone \mathcal{D} n'a pas disparu. Donc $\xi_{ij}(a_j) = \varepsilon(\mathcal{D})b_i$. D'après le lemme 6.2.2, si $\delta_j(a_j) \neq 0$ alors $\lambda_i(x) = 0$. Ceci implique que $\lambda_i \varphi^{-1} \delta_j(a_j) = 0$ et donc $\partial_{ij} = \xi_{ij} - \lambda_i \varphi^{-1} \delta_j$.

D'après ci-dessus on a $\partial = \xi - \lambda \varphi^{-1} \delta$. D'après le lemme d'élimination gaussienne les deux complexes de chaînes (6.13) et (6.14) sont homotopiquement équivalents. \square

Preuve du théorème 6.1.12. . Soit σ et σ' deux tresses géométriques isotopes. Soit C, C' les complexes de chaînes associée à σ et σ' respectivement. On passe de σ à σ' par une isotopie qui fait apparaître ou disparaître un nombre n de bigones élémentaires. Raisonnons par induction sur le nombre de bigones.

Si $n = 1$, alors d'après le lemme 6.2.5 les deux complexes C et C' sont homotopiquement équivalents.

Si $n > 1$, on réapplique le lemme 6.2.5. On obtient que C et C' sont homotopiquement équivalents. Donc les groupes de cohomologie $HB^*(\sigma, i, j)$ et $HB^*(\sigma', i, j)$ sont isomorphes. \square

6.3 Fidélité

Dans ce paragraphe, on montre que l'homologie construite à la section (2.3) détecte la tresse triviale. Dans tout ce qui suit, on fixe une collection de courbes $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ comme dans la figure 6.14.

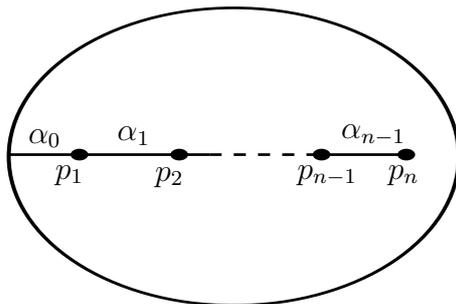


FIG. 6.14 – La collection de courbes

Proposition 6.3.1. [KhS02] Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ une famille de courbes comme dans le figure 6.14. Si h est un élément de $\mathcal{H}(D, P_n)$ satisfait $h(\alpha_i) \simeq \alpha_i$ pour tout i , alors $h \simeq id$.

Démonstration. L'idée est qu'on peut toujours rendre h isotope à une application g qui vérifie $g(\alpha_i) = \alpha_i$, pour tout $i = 1, \dots, n$. \square

Une courbe c dans (D, P_n) est dite **admissible** [KhS02] si elle est l'image de α_i par un élément h de $\mathcal{H}(D, P_n)$ pour un certain $i \in \{0, \dots, n - 1\}$.

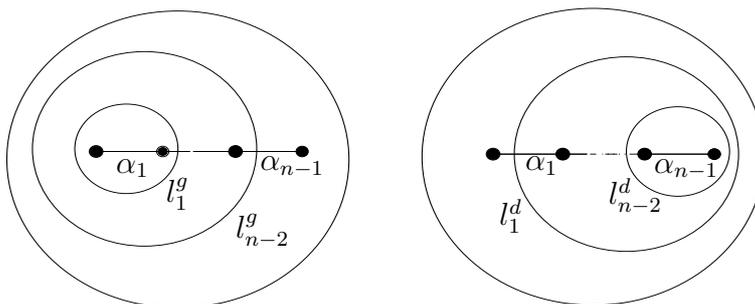


FIG. 6.15 –

Proposition 6.3.2. Soit c une courbe admissible dans (D, P_n) . Supposons qu'il existe $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ tel que $I(\alpha_i, c) = I(\alpha_i, \alpha_k)$ pour tout $i =$

$1, \dots, n-1$. Alors on a

$$c \simeq \begin{cases} \alpha_1 \text{ ou } \tau_{d,1}^{\pm 1}(\alpha_1) & \text{si } k = 1, \\ \alpha_k \text{ ou } \tau_{d,k}^{\pm 1}(\alpha_k), \tau_{g,k}^{\pm 1}(\alpha_k), \tau_{d,k}\tau_{g,k}^{-1}(\alpha_k) \text{ ou } \tau_{d,k}^{-1}\tau_{g,k}(\alpha_k) & \text{si } 2 \leq k < n-2, \\ \alpha_{n-1} \text{ ou } \tau_{g,n-1}^{\pm 1}(\alpha_{n-1}) & \text{si } k = n-1. \end{cases}$$

Où $\tau_{d,1}, \dots, \tau_{d,n-2}$ sont les twists de Dehn positif le long des courbes fermées l_1^d, \dots, l_{n-2}^d et $\tau_{g,1}, \dots, \tau_{g,n-2}$ sont les twists le long des courbes l_1^g, \dots, l_{n-2}^g , voir la figure 6.15

Démonstration. Montrons le résultat pour le cas $k = 1$, les autres cas se démontrent d'une manière similaire. D'après l'hypothèse, on a $I(\alpha_2, c) = I(\alpha_2, \alpha_1) = \frac{1}{2}$. Donc les courbes c et α_1 ont un seul point commun qui est $\alpha_1 \cap \alpha_2$ ou $\alpha_2 \cap \alpha_3$, mais le deuxième cas est impossible puisque $I(\alpha_3, c) = I(\alpha_3, \alpha_1) = 0$. D'autre part, on a $I(\alpha_1, c) = I(\alpha_1, \alpha_1) = 1$. Ceci signifie que les courbes c et α_1 ont les mêmes extrémités. Maintenant on peut supposer que l'intersection de c avec tous les b_i est minimal. Encore par hypothèse d'intersection géométrique, c ne rencontre $\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_{n-1}$ que aux points p_1, p_2 . Maintenant on coupe la surface D^2 le long de $\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_{n-1}$.

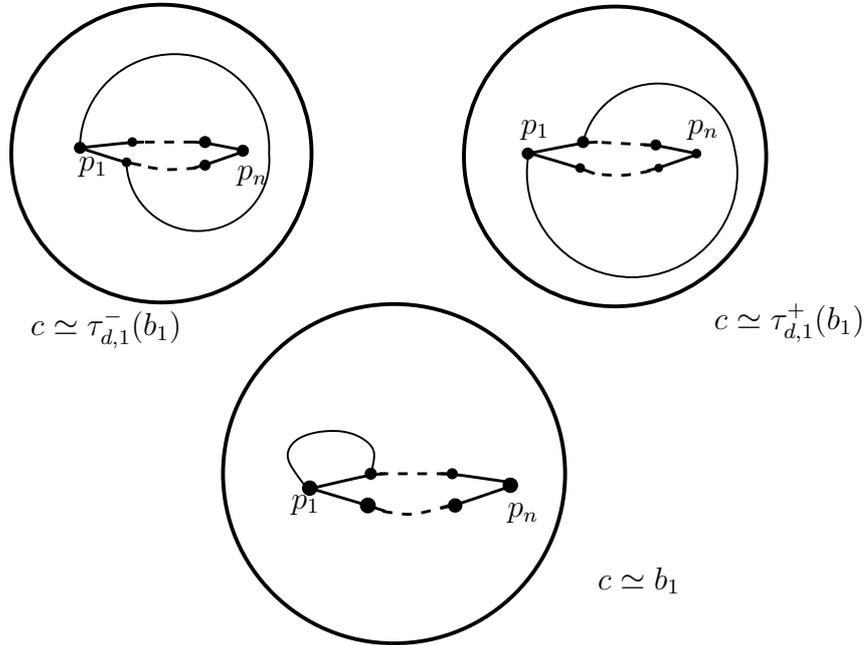


FIG. 6.16 –

On considère la courbe c sur cette nouvelle surface, on obtient 3 cas possibles, voir la figure 6.16. D'où le résultat. \square

Théorème 6.3.3. *Soit σ une tresse dans B_n . Supposons que pour tout couple d'indice (i, j) , $i, j \in \{1, \dots, n\}$, il existe un isomorphisme bigradué de $HB^{l,k}(\sigma, i, j)$ vers $HB^{l,k}(id, i, j)$. Alors σ est la tresse triviale.*

Démonstration. Supposons que $HB^{l,k}(\sigma, i, j)$, $HB^{l,k}(id, i, j)$ sont isomorphes. Alors pour tout $i = 1, \dots, n-1$, $HB^{l,k}(\sigma, i, i)$ est isomorphe au groupe abélien libre engendré par l'élément x_{ii} , où x_{ii} est le point d'intersection de β_i avec $\sigma\alpha_i$, et $HB^{l,k}(\sigma, i, j) \simeq 0$ si $i \neq j$. Alors

$$I(\beta_i, \sigma\alpha_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (6.15)$$

Donc $\alpha_j, \sigma\alpha_j$ ont les mêmes extrémités pour tout $j = 1, \dots, n-1$. Ceci implique que

$$I(\alpha_k, \sigma\alpha_j) = I(\alpha_k, \alpha_j), \text{ pour tout } k = 1, \dots, n-1.$$

Appliquons la proposition (6.3.2) pour $c = \sigma\alpha_j$, on obtient

$$\sigma\alpha_j \simeq \alpha_j \text{ ou } \tau_{d,j}^{\pm 1}(\alpha_j) \text{ ou } \tau_{g,j}^{\pm 1}(\alpha_j).$$

Puisque $I(\beta_i, \sigma\alpha_j) = 0$ pour tout $i \neq j$, alors $\sigma\alpha_j \simeq \alpha_j, \forall j = 1, \dots, n-1$. D'après la proposition (6.3.1) on a $\sigma \simeq (\tau_0)^m$, où $m \in \mathbb{Z}$ et τ_0 est le twist de Dehn positif le long du bord ∂D_n . Comme l'isomorphisme entre les groupes d'homologie $HB^{l,k}(\sigma, i, j)$ et $HB^{l,k}(id, i, j)$ est bigradué pour tout $i, j = 1, \dots, n-1$, alors $m = 0$. D'où σ est la tresse triviale. \square

Bibliographie

- [AL73] J.M. Aarts, D.J. Lutzer, *Pseudo-completeness and the product of Baire spaces*, Pacific J. Math, 48(1973), 1–10.
- [AL74] J.M. Aarts, D.J. Lutzer, *Completeness properties designed for recognizing Baire spaces*, Dissertationes. Math, 116(1974).
- [Are46] R. Arens, *A topology of spaces of transformations*, Annals of Math, 47 (1946), 480–495.
- [AD51] R. Arens, J. Dugundji, *Topologies for function spaces*, Pacific J. Math. 1, (1951) 5–31.
- [Arh59] A.V. Arhangel'skii, *An addition theorem for the weight of sets lying in bicomacts*, (Russian) Dokl. Akad. Nauk. SSSR 126 (1959), 239–241.
- [Arh89] A.V. Arhangel'skii, *General topology III*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol 51 (1989).
- [Art25] E. Artin, *Theorie der Zöpfe*, Abh. Math. Sem. Hambourg, 4 (1925), 47–72
- [AK08] M. Asaeda, M. Khovanov, *Notes in link homology*, arXiv :0804.1279v1.
- [BN07] D. Bar-Natan, *Fast Khovanov homology computations*, J. Knot Theory Ramifications, 16 (2007), N0 3, 243–255.
- [Bi99] S. Bigelow, *The Burau representation is not faithful for $n = 5$* , Geom. Topol. 3 (1999) 397–404 .
- [Bi01] S. Bigelow, *braid groups are linear*, J. Amer. Math. Sco. 14 No. 2,(2001), 471–486.
- [Bi02] S. Bigelow, *representations of braid groups*, Proceeding of the ICM, Vol. II, Higher Ed. Press, Beijing (2002), 37–45.
- [Bir74] J.S. Birman, *Braids, links, and mapping class groups*, Ann. Math. Stud. vol **82**, Princeton University Press, N.J, 1974.
- [BB05] J.S. Birman, T.E. Brendle, *Braids : a survey*, in HandBook of knot theory, 19–103, Elsevier B.V., Amsterdam, 2005.

- [BK03] A. Bouchair, S. Kelaiaia, *Applications de jeux topologiques à l'étude de $C(X)$ muni d'une topologie set-open*, Révue Sciences et Technologie, Univ de Constantine, A N0 20(2003), 17–20
- [BK05] A. Bouchair, S. Kelaiaia, *α -favorability of $C(X)$ with a set-open topology*, Far East J. Math. Sci(FJMS), 18 (3)(2005), 305–312.
- [BK06] A. Bouchair, S. Kelaiaia, *α -favorability of $C(X)$ with a set-open topology II*, Far East J. Math. Sci(FJMS), 22 (2)(2006), 175–184.
- [Bre93] G.E. Bredon, *Topology and geometry*, Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics, **139** (1993).
- [Bur36] W. Burau, *Über zopfgruppen und gleichsinning verdrillte Verkettungen*, Abh. Math. Sem. Ham. II, (1936) pages 171–178.
- [BuZ85] G. Burde, H. Zeischang, *Knots*, de Gruyter, Berlin and New York, (1985).
- [CGGA06] J. Cao, D. Gauld, S. Greenwood, and A. Mohamad, *Games and metrisability of manifolds*, preprint.
- [CP04] J. Cao, Z. Piotrowski, *Two variations of the Choquet game*, Kyungpook Math. J. 44(2004), 495–504.
- [Ch69] G. Choquet, *Lectures in analysis*, Benjamin New York and Amsterdam, 1 (1969).
- [CF94] L. Crane, I. Frenkel, *Four dimensional topological quantum field theory, Hopf categories, and the canonical bases*, J. Math. Phys. 35(1994), 5136–5154.
- [D80] G. Debs, *Quelques propriétés des espaces α -favorables et applications aux convexes compacts*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 30, 2 (1980), 29–43.
- [D88] G. Debs, *Espaces héréditairement de Baire*, Fund. Math, 129 (1988), 199–206.
- [Eng77] R. Engelking, *General topology*, Polish scientific publishing, (1977).
- [Ep66] D. Epstein, *Curves on 2-manifolds and isotopies*, Acta Math. **115** (1966), 83–107.
- [FLP79] A. Fathi, F. Laudenbach, et V. Poénaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque, vol. 66–67, Soc. Math. France, 1979.
- [FM97] A.T. Fomenko, S.V. Matveev, *Algorithmic and computer methods for three-manifolds*, Kluwer academic publishers, (1997).
- [For96] E. Formanek, *Braid group representations of low dergee*, Proc. London Math. Sco, Vol **73**, (1996), no.2, 279–322.

- [Fo45] R.H. Fox, *On the topologies for function spaces*, Bull. Amer. Math. Sco, 51 (1945), 429–432.
- [Gas61] B.J. Gassner, *On braid groups*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 25 (1961), 10–22.
- [GM06] D. Gauld, *Metrisability of manifolds*, preprint.
- [GM05] D. Gauld, F. Mynard, *Metrisability of manifolds in terms of function spaces*, Houston J. Math, 31(2005), 199–214.
- [Ger83] J. Gerlits, *Some properties of $C(X)$, II*, Topology Appl. 15 (1983), 255–262.
- [GN82] J. Gerlits, Zs. Nagy, *Some properties of $C(X)$, I*, Topology Appl. 14 (1982), 151–161.
- [Gr76a] G. Gruenhage, *Continuously perfectly normal spaces and some generalisations*, Trans. Amer. Math. Sco. 224 (1976), 323–338.
- [Gr76b] G. Gruenhage, *Infinite games and generalizations of first countable spaces*, Gen. Top. Appl. 6 (1976), 339–352.
- [Gr86] G. Gruenhage, *Games, covering properties and Eberlein compacts*, Topology Appl. 23 (1986), 291–297.
- [Gr08] G. Gruenhage, *the story of a topological game*, Rocky Mountain J. Math, 36 NO. 6 (2006), 1885–1914.
- [GMa97] G. Gruenhage, D. K. Ma, *Baireness of $C_k(X)$ for locally compact space X* , Topology Appl. 80 (1997), 131–139.
- [Hat02] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, (2002).
- [HM77] R.C. Hayworth, R.A. McCoy, *Baire space*, Dissertationes Math. 141 (1977).
- [Iva02] N. Ivanov, *Mapping class groups*, pages 523–633 of Handbook of Geometric Topology, Editors R. Daverman and R. Sher, Elsevier Science 2002.
- [Jon87] V. Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Annals of Math. **126** (1987), 335–388.
- [Ke95] S. Kelaiaia, *Propriétés de certaines topologies set-open sur $C(X)$* , Thèse de doctorat de l’université de Rouen, (1995).
- [Kel55] J.L. Kelley, *General topology*, Van Nostrand, New York, (1955).
- [Kh00] M. Khovanov, *A categorification of the Jones polynomial*, Duke Math. J. **101**, (2000), no.3, 359–426.
- [KhS02] M. Khovanov, et P. Seidel, *Quivers, Floer cohomology, and braid group actions*, J. Amer. Math. Sco., **15**, (2002), no.1, 203–271.

- [Kr00] D. Krammer, *The Braid group B_4 is linear*, Invent. Math., **142** (2000), 451–486.
- [Kr02] D. Krammer, *The Braid groups are linear*, Annal of Math. **155** (2002), 131–156.
- [KM] S. Kundu, R.A. McCoy, *Topologies between compact and uniform convergence on function spaces*, Inter. J. Math. and Math. Sci. **16** (1993), no.1, 101–110.
- [Law90] R. Lawrence, *Homological representations of the Hecke algebra*, Comm. Math. Phys. **135** (1990), no.1, 141–191.
- [Lon94] D.D. Long, *Constructing representations of braid groups*, Comm. Math. Anal.Geom. **2**(1994), 217–238.
- [LP93] D.D. Long, M. Paton, *The Burau representation is not faithful for $n \geq 6$* , Topology **32**, no. 2, 439–447 (1993).
- [LM80] D.J. Lutzer, R.A.McCoy, *Category in function spaces I*, Pacific J. Math. **90**(1980) 145–168.
- [Ma93] D. K. Ma, *The cantor tree, the γ -property, and Baire function spaces*, Proc. Amer. Math. Sco, **119** (1993), 903–913.
- [MN85] R.A. McCoy, I. Ntantu, *Countability properties of function spaces with set-open topology*, Top. Proc, **10** (1985), 329–345.
- [MN86] R.A. McCoy, I. Ntantu, *Completeness properties of function spaces with set-open topology*, Top. and Appl, **2** (1986), 191–206.
- [MN88] R.A. McCoy, I. Ntantu, *Topological properties of spaces of continuous functions*, Lecture Note in Math, N0 1315, Springer-Verlag Germany, (1988).
- [Mic51] E.A. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Sco. **17** (1951), 152–182.
- [Mic72] E.A. Michael, *A quintuple quotient quest*, General Topology and Appl. **2** (1972), 91–138.
- [Mo91] J.A. Moody, *The Burau representation of the braid group B_n is unfaithful for large n* , Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **25**, no. 2, 379–384 (1991).
- [Ols74] R.C. Olson, *Bi-quotient maps, countably bi-sequential spaces, and related topics*, General Topology and Appl. **4** (1974), 1–28.
- [Oxt61] J.C. Oxtoby, *Cartesian products of Baire spaces*, Fund. Math. **49** (1961), 157–166.
- [PR00] L. Paris, et D. Rolfsen, *Geometric subgroups of mapping class groups*, J. reine angew. Math. **521** (2000), 47–83.

- [PS97] V.V. Prasolov, A.B. Sossinsky, *Knots, links, and three manifolds*, American Mathematical Society, (1997).
- [SR83] J. Saint-Raymond, *Jeux topologiques et espaces de Namioka*, Proc. Amer. Math. Soc, 87 (1983), 499–504.
- [Te75] R. Telgarsky, *Spaces defined by Topological games*, Fund. Math, 88 (1975), No 3, 193–223.
- [Te87] R. Telgarsky, *Topological games : on the 50th anniversary of the Bannach-Mazur game*, Rocky Mountain J. Math, Vol 17 (2), (1987) 227–276.
- [Tu02] V. Turaev, *Faithful linear representations of the braid groups*, Séminaire Bourbaki, (1999–2000), Astérisque, Vol. **276**, (2002), 389–409.
- [Wh75] H. E. White, *Topological spaces that are α -favorable for a player with perfect information*, Proc. Amer. Math. Soc, 50 (1975), 477–482.
- [Zs98] L. Zsilinszky, *Topological games and hyperspace topologies*, Set-Valued Anal. 6 (1998), 187–207.

Résumé : Cette thèse porte sur la théorie des jeux topologiques et sur l'étude des représentations des groupes de tresses. Dans une première partie, on présente différentes catégories de jeux topologiques sur un espace topologique X . On montre de quelle manière ces jeux peuvent être utilisés pour caractériser certaines propriétés topologiques de dénombrabilité et de complétude. Dans un espace topologique X , on considère une famille γ de parties compactes. À l'aide de cette famille, on munit $C(X)$ (l'ensemble des fonctions réelles continues sur X) d'une topologie set open. $C(X)$ muni de cette topologie sera noté $C_\gamma(X)$. On définit deux jeux topologiques sur X introduits par R.A. McCoy et I. Ntantu que nous les utilisons pour caractériser quand $C_\gamma(X)$ est un espace faiblement- α -favorable. La deuxième partie porte sur la catégorification des coefficients de la matrice de la représentation de Burau. On associe à chaque tresse σ un complexe de chaînes dont la caractéristique d'Euler graduée de son homologie est égal au coefficient de la matrice de Burau. Cela nous permet de retrouver des résultats de fidélité donnés par M. Khovanov et P. Seidel.

Mots clés : Jeux topologiques, espace de fonctions, topologie set open, faiblement- α -favorable, représentation de Burau, catégorification

Summary : This PhD thesis deals with the topological games theory and the study of the braid group representations. In the first part, we present many categories of topological games on a topological space X . We show how this games can be used to characterize some topological properties of countability and completeness. given a topological space X , we consider a non empty family γ of compact subsets of X , with this family we provide $C(X)$ (the set of all real valued continuous functions on X) with a set open topology. This space will be denoted by $C_\gamma(X)$. After we define two topological games introduced by R.A. McCoy and I. Ntantu which will be used to characterize when $C_\gamma(X)$ is weakly- α -favorable space. The second part deals with the categorification of the coefficients matrix representation of Burau. We assign to each braid σ , a chain complex such that the graded Euler characteristic of its homology is equal to the coefficient of the Burau matrix. This will allow us to find the faithfulness results given by M. Khovanov and P. Seidel.

Key words : Topological games, function space, set open topology, weakly- α -favorable, Burau representation, categorification.