

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique  
UNIVERSITÉ FRÈRE MENTOURI - CONSTANTINE  
Faculté des Sciences Exactes  
Département de Mathématiques



N<sup>o</sup> d'ordre : 45/DS/2022  
N<sup>o</sup> de série : 03/Math/2022

# THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de  
**Doctorat en Mathématiques**  
Option : Probabilités et Statistique

Présentée et soutenue par

**Boudada Halima**

Thème

**Estimation non paramétrique pour des données  
fonctionnelles et tronquées**

Soutenue le : 15 Juin 2022

**Devant le jury :**

<i>Présidente :</i>	Mme H. <i>MERABET</i>	PROF.	Université Constantine 1.
<i>Directrice de la thèse :</i>	Mme S. <i>LEULMI</i>	M.C.A.	Université Constantine 1.
<i>Examinatrice :</i>	Mme F. <i>MESSACI</i>	PROF.	Université Constantine 3.
<i>Examinatrice :</i>	Mme S. <i>KHARFOUCHI</i>	PROF.	Université Constantine 3.

# Table des matières

Introduction . . . . .	2
<b>1 Estimation locale linéaire de la fonction de régression généralisée pour des données complètes</b>	<b>12</b>
1.1 Modélisation . . . . .	13
1.2 La convergence presque complète ponctuelle . . . . .	13
1.2.1 Hypothèses et résultats . . . . .	14
1.2.2 Preuves . . . . .	15
1.2.3 Appendix 1 . . . . .	19
1.3 La convergence presque complète uniforme . . . . .	21
1.3.1 Hypothèses et résultats . . . . .	21
1.3.2 Preuves . . . . .	22
1.3.3 Estimateur du quantile conditionnel . . . . .	28
<b>2 Estimation locale linéaire de la fonction de régression généralisée pour des données tronquées à gauche</b>	<b>33</b>
2.1 Modélisation . . . . .	34
2.2 La convergence presque sûre ponctuelle . . . . .	39
2.2.1 Hypothèses et résultats . . . . .	39
2.2.2 Preuves . . . . .	41
2.3 La convergence presque sûre uniforme . . . . .	47
2.3.1 Hypothèses et résultats . . . . .	47
2.3.2 Preuves . . . . .	48
<b>3 Estimation locale linéaire du quantile conditionnel pour des données tronquées à gauche</b>	<b>54</b>
3.1 Modélisation . . . . .	54
3.2 La convergence presque sûre ponctuelle . . . . .	56
3.2.1 Hypothèses et résultats . . . . .	56
3.2.2 Preuves . . . . .	57
3.3 La convergence presque sûre uniforme . . . . .	63
3.3.1 Estimateur de la fonction de distribution conditionnelle . . . . .	63
3.3.2 Estimateur du quantile conditionnel . . . . .	64

3.3.3 Preuves . . . . .	65
<b>4 Application et études de simulation</b>	<b>70</b>
4.1 Application à des données réelles . . . . .	70
4.2 Études de simulation . . . . .	72

## Dédicaces

Je dédie cette thèse à mon défunt père dont le rêve était de me voir doctorante, qu'Allah accorde sa miséricorde, à mon adorable maman qui ne cesse de me soutenir et de m'encourager en étant présente dans les moments difficiles de ma vie.

Cette thèse est dédiée aussi à ma moitié, mon cher époux qui m'est d'une grande aide, merci infiniment.

A mes sœurs, mes frères et mes amis qui m'ont supporté tout au long de mon parcours.

# Remerciements

*Tout d'abord, je tiens à remercier chaleureusement mes dames **Kharfouchi Soumia** et **Leulmi Sarra** pour leur patience, leurs conseils fructueux et leur soutien permanent. Je suis vraiment très heureuse d'avoir eu la chance de travailler avec vous, votre gentillesse m'a beaucoup aidée et je ne pourrai jamais assez vous remercier.*

*Je remercie du fond du cœur les membres de jury :*

**Professeur Merabet Hayet**

*Je tiens à vous exprimer ma gratitude la plus profonde et ma reconnaissance pour avoir accepté de présider ma thèse ainsi que pour l'intérêt porté à mon travail.*

**Professeur Messaci Fatiha**

*C'est un grand honneur pour moi de vous avoir comme examinatrice de mon travail en dépit de vos engagements privés et professionnels.*

**Professeur Kharfouchi Soumia**

*Je vous remercie d'avoir accepté de juger mon travail. Votre présence est un honneur, soyez en remerciée.*

## Articles

1. Boudada, H., Leulmi, S., Kharfouch, S. (2020). 'Rate of the Almost Sure Convergence of a Generalized Regression Estimate Based on Truncated and Functional Data', Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics , Vol. 13, No.4, pp. 1-12.
2. Boudada, H. (2022) 'A nonparametric estimation of the conditional quantile for truncated and functional data', International Journal of Mathematics in Operational Research, Vol. 21, No. 1, pp. 127-140.

## Communications

1. Boudada, H., Leulmi, S. 'Estimation non-paramétrique pour des données tronquées à gauche et fonctionnelles'. Journée de Mathématiques Appliquées JMA'2019, 28 Avril 2019, Mila.
2. Boudada, H., Leulmi, S. ' Local linear estimation of the generalized regression function under truncation model and functional regressors'. 2nd National Seminaire of Mathematics, 2 juin 2021, Mentouri University Constantine 1, Algeria.
3. Boudada, H., Leulmi, S. ' Conditional quantile estimation for functional and truncated data'. 3rd National Seminaire of Mathematics, 26 Mai 2022, Mentouri University Constantine 1, Algeria.

## Résumé

L'étude d'un lien entre deux variables a toujours été un axe qui a attiré l'attention de plusieurs chercheurs dans de nombreux domaines d'application et comme dans beaucoup de ces domaines apparaissent des données fonctionnelles, on trouve des travaux abondants ont été consacrés à cet axe. Ce travail rentre dans ce cadre en proposant des estimateurs non paramétriques de deux fonctions utilisées dans le cadre de prévision ; la fonction de régression généralisée, qui est une généralisation de la fonction de régression basée sur l'espérance conditionnelle et le quantile conditionnel. Pendant ces études nous avons toujours supposé que la variable réponse est réelle et est soumise à une troncature à gauche tandis que la variable explicative est fonctionnelle, c'est à dire à valeurs dans un espace de dimension infinie. Nous avons utilisé une modélisation localement linéaire fonctionnelle pour l'estimation des deux fonctions en considérant un estimateur local linéaire adapté à un polynôme de degré un. Les convergences ponctuelles et uniformes presque sûres avec taux ont été établies pour chaque estimateur et des études de simulations ont été réalisées pour mettre en évidence l'efficacité des estimateurs proposés sur des exemples.

**Mots clés :** Troncature à gauche ; Estimateur local linéaire ; convergence presque sûre ; Analyse fonctionnelle ; Quantile conditionnel ; Fonction de régression.

## Abstract

The study of a link between two variables was and still a challenge for a lot of researchers in many fields of application and as in many of these fields appear functional data, we find many works have been devoted in this axis. In this thesis, we propose nonparametric estimators of two functions used in prevision problem ; the generalised regression function, which is a generalization of the regression function based on the conditional expectation and the conditional quantile. During these studies we have always assumed that the response variable is real and is subjected to a left-truncation while the explanatory variable is functional, i.e with values in a space of infinite dimension. We used a functional locally linear modeling for the estimation of the two functions by considering a local linear estimator adapted to a polynomial of one degree. Almost sur pointwise and uniform convergences with rates have been established for each estimator and simulation studies have been carried out to reinforce the efficiency of the proposed estimators on examples.

**Key words :** Left truncation ; Local linear estimator ; Almost sure convergence ; Functional analysis ; Condiotional quantile ; Regression function.

## Introduction

Les problèmes statistiques liés à l'étude de variables aléatoires fonctionnelles, c'est-à-dire de variables à valeurs dans un espace de dimension infinie, connaissent depuis quelques années un intérêt grandissant dans la littérature. Le développement de ce thème de recherche est en effet motivé par l'abondance de données mesurées sur des grilles de plus en plus fines : c'est par exemple le cas en météorologie, en médecine, en imagerie satellite et dans de nombreux autres domaines d'études. Ainsi, la modélisation statistique de ces données, assimilables à des fonctions aléatoires, ouvre un champ très vaste de recherches visant des aspects théoriques (liés à l'étude de variables aléatoires à valeurs dans un espace de dimension infinie) et appliqués (mise en œuvre d'estimateurs).

Étudiant la relation entre deux variables aléatoires en vue de prédire l'une (la variable expliquée  $Y$ ) étant donné l'autre (la variable explicative  $X$ ) est un des plus importants sujets en analyses des données fonctionnelles. Il existe plusieurs manières d'aborder ce problème de prévision par exemple : la régression qui est basée sur l'espérance conditionnelle, la médiane conditionnelle qui nécessite l'estimation préalable de la fonction de répartition conditionnelle et le mode conditionnel qui nécessite l'estimation de la densité conditionnelle. Ferraty et Vieu ont introduit dans leur travail pionnier [25] des estimateurs à noyaux des fonctions précédentes lorsque la variable aléatoire dépendante est réelle et la variable aléatoire indépendante est de type fonctionnel. Cette méthode fonctionnelle non paramétrique est basée essentiellement sur une extension de l'estimateur à noyau de Nadaraya-Watson étudié pour des variables explicatives vectorielles. Bien que cet estimateur est connu pour avoir de bonnes caractéristiques telles que la simplicité, la flexibilité et la consistance, son biais asymptotique dépend de la dérivée de la fonction de densité marginale. De plus, il est soumis à des effets de bord. Ce qui fait que la méthode localement linéaire est non seulement plus générale mais elle a plutôt de meilleurs avantages. Pour plus de détails concernant les inconvénients de l'estimateur à noyau de Nadaraya Watson et pour plus de comparaisons entre les deux estimateurs nous adressons le lecteur aux articles de Fan [19] et de Fan et Gijbels [20]. En raison de toutes ses caractéristiques asymptotiques, la méthode locale linéaire était toujours attirante pour plusieurs statisticiens. On mentionne, par exemple lorsque la variable réponse est réelle et la variable explicative prend ses valeurs dans un espace semi métrique fonctionnel, Barrientos-Marín et al. [4] qui ont proposé un estimateur local linéaire de la fonction de régression adapté à un polynôme de degré un et ont établi ses propriétés asymptotiques. Cette étude a été suivie par plusieurs travaux intéressants où les convergences presque complètes ponctuelles et uniformes avec taux d'autres estimateurs

non paramétriques locaux linéaires ont été étudiées comme Demongeot et al. [11] et Demongeot et al. [12] pour le mode conditionnel pour les deux cas données indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) et données dépendantes, Ferraty et al. [21], Demongeot et al. [13] et Messaci et al. [43] pour le quantile conditionnel pour des données (i.i.d) et Ferraty et al. [22] pour des données  $\alpha$ -dépendantes. Dans Leulmi et Messaci [38] les résultats de Barrientos-Marín et al. [4] ont été généralisés à la fonction de régression généralisée pour des données (i.i.d) et pour des données dépendantes voir Leulmi et Messaci [37]. La normalité asymptotique de l'estimateur local linéaire de la densité conditionnelle pour des données de séries chronologiques a été étudié par Xiong et al. [52].

Une autre difficulté rencontrée en statistique est le manque d'information durant les différentes observations sur diverses échelles d'études et d'analyses. Ce manque d'information introduit un empêchement lors de l'observation et l'obtention du résultat.

Dans la terminologie statistique, le plus souvent, on nomme ces manques par les censures et les troncatures qui provoquent quelques troubles au niveau des données observées. La communauté statistique a découvert un remède pour ces fractures. En parlant de la naissance d'un intéressant volet de la statistique "l'analyse des données de survie". Le terme de durée de survie désigne le temps écoulé jusqu'à la survenue d'un événement précis. L'événement étudié (communément appelé "décès") est le passage irréversible entre deux états (communément nommé "vivant" et "décès"). L'événement terminal n'est pas forcément la mort : il peut s'agir de l'apparition d'une maladie (par exemple, le temps avant une rechute ou un rejet de greffe), d'une guérison (temps entre le diagnostic et la guérison), la panne d'une machine (durée de fonctionnement d'une machine, en fiabilité) ou la survenue d'un sinistre (temps entre deux sinistres, en actuariat). L'analyse des données (durées) de survie est l'étude du délai de la survenue de cet événement. Dans le domaine biomédical, on étudie ces durées dans le contexte des études longitudinales comme les enquêtes de cohorte (suivi de patients dans le temps) ou les essais thérapeutiques (tester l'efficacité d'un médicament). La plus fameuse caractéristique de ce volet est l'existence des données incomplètes. Ces dernières dues à l'inaccessibilité de l'information complète. Une caractéristique particulière, souvent présente dans les données de survie est connue sous le nom de censure, qui, de manière générale, se produit lorsque certaines durées de survie ne sont connues que dans certains intervalles. Le reste des vies est connu exactement. Il existe différentes catégories de censure, telles que la censure à droite, censure à gauche et censure par intervalles.

Une deuxième caractéristique qui peut être présente dans certaines études de survie est celui de la troncature. La troncature à gauche se produit lorsque les sujets entrent dans une étude à un âge particulier (pas nécessairement à l'origine de l'événement d'intérêt) et sont suivis de cette heure d'entrée retardée jusqu'à ce que l'événement se produise ou jusqu'à ce que le sujet soit censuré. La troncature à droite se produit lorsque seules les personnes qui ont vécu l'événement d'intérêt sont observables. L'impact principal sur l'analyse, lorsque les données sont tronquées, est que l'investigateur doit utiliser une distribution conditionnelle dans la construction de la vraisemblance.

Un exemple qui explique l'utilisation de telle sorte de données est celui qui a été fait dans Channing House, une maison de retraite située à Palo Alto, en Californie. Les données sur l'âge du décès de 462 personnes (97 hommes et 365 femmes), qui étaient en résidence pendant la période de janvier 1964 à juillet 1975, ont été rapportées par Hyde (1980). Une caractéristique distinctive de ces personnes était qu'elles étaient toutes couvertes par un programme de soins de santé fourni par le centre, ce qui permettait un accès facile aux soins médicaux sans aucune charge financière supplémentaire pour le résident. Les durées de vie

dans cet ensemble de données sont tronquées à gauche parce qu'un individu doit survivre jusqu'à un âge suffisant pour entrer dans la communauté des retraités. Les personnes décédées à un âge précoce sont exclues de l'étude. Pour plus de détails sur cette étude voir Klein et Moeschberger [31].

Depuis le début des années soixante-dix du siècle dernier, de nombreuses études importantes ont été réalisées dans le cas non fonctionnel, nous en mentionnons certaines, Lynden-Bell [41], Woodroffe [51], Stute [50] et He et Yang [26] dont leurs recherches sur les données tronquées à gauche sont considérées comme une base pour les autres études qui ont suivi. N'oubliez pas non plus Lemdani et Ould-Saïd [33] qui ont étudié le comportement asymptotique de l'estimateur à noyau du taux de risque sous des données tronquées et censurées. Ainsi, ils ont étudié les convergences ponctuelle et uniforme de l'estimateur à noyau de la fonction de régression pour des données tronquées à gauche dans le cas i.i.d., lire Ould Saïd et Lemdani [45] et du quantile conditionnel en 2009, voir Lemdani et al. [34]. Alors que le mode a été étudié par Ould Saïd et Tatachak [46]. Pour les données tronquées et dépendantes voir Ould Saïd et Tatachak [47] et Ould Saïd et al. [48]. Aussi, pour les données censurées Ould Saïd [44] a obtenu le taux de convergence uniforme de l'estimateur à noyau du quantile conditionnel sous le cas i.i.d. El Ghouch et Van Keilegom [18] ont établi les propriétés asymptotiques de l'estimateur local linéaire de la fonction de régression pour des données censurées et  $\alpha$ -mélangeantes. Pendant que liang et al. [39] ont étudié la normalité asymptotique d'un estimateur de la fonction moyenne conditionnelle et ses dérivées sous un modèle de troncature en appliquant la régression polynomiale locale. Pour des études plus récentes voir par exemple Boukeloua [9] et Aouicha et Messaci [3].

Lorsque la covariable est fonctionnelle et la variable  $Y$  est soumise à une censure à droite, nous pouvons citer quelques travaux comme El Bahi et Ould Saïd [16] et [17] sur la consistance forte uniforme et la normalité asymptotique de l'estimateur à noyau du quantile conditionnel pour des données i.i.d et pour les données dépendantes, on nomme Horrigue et Ould Saïd [28] et [29]. Concernant les données stationnaires et ergodiques voir Chaouch et Khardani [10]. Les propriétés asymptotiques de l'estimateur à noyau de la fonction de régression non paramétrique sont obtenues par Ling et Liu [40] sous les mêmes données.

En outre, dans le modèle d'index fonctionnel unique pour les données fonctionnelles et  $\alpha$ -mélangeantes sous la censure aléatoire, les convergences ponctuelle et uniforme presque complètes avec taux, sont étudiées par Kadiri et al. [30] pour l'estimateur du quantile conditionnel et Bouchentouf et al. [7] pour l'estimateur de risque conditionnel. Ait Hennania et al. [1] ont donné une famille d'estimateurs non paramétriques robustes pour lesquels les résultats de la consistance et la normalité asymptotique sont établis. Mechab et al. [42] ont examiné la convergence presque complète et la normalité asymptotique de l'estimateur de la régression d'erreur relative dans le cas d'une variable réponse censurée étant donné une variable explicative fonctionnelle. Sous le modèle de troncature, on mentionne Helal et Ould Saïd [27] où l'estimateur à noyau du quantile conditionnel a été proposé et sa convergence uniforme presque sûre a été établie. De même, Derrar et al. [14] ont étudié le taux de la convergence presque complète et la normalité asymptotique des estimateurs non paramétriques pour le modèle  $\psi$ -régression. Les auteurs Altendji et al. [2] ont utilisé l'erreur moyenne quadratique relative pour construire un estimateur non paramétrique pour l'opérateur de régression des données fonctionnelles et tronquées et ont établi sa convergence presque sûre et normalité asymptotique. Le taux de convergence presque complète du

$M$ -estimateur de la fonction de régression non paramétrique et fonctionnelle est établi par Derrar et al. [15] lorsque l'échantillon est une séquence  $\alpha$ -mélangeante.

Malgré l'importance de la méthode locale linéaire mais et au mieux de notre connaissance cette dernière n'a pas été utilisée pour résoudre les problèmes de prévision pour les données incomplètes que pour les données censurées à droite dans la littérature. On parle par exemple sur le travail de Benkhaled et al. [5] où ils ont étudié l'estimation locale linéaire non paramétrique de la densité conditionnelle et établi sous des conditions régulières la convergence ponctuelle presque sûre de l'estimateur proposé pour des données censurées, fonctionnelles et  $\alpha$ -mélangeantes. On mentionne aussi Leulmi [35] qui a concentré son étude sur les convergences ponctuelle et uniforme presque complètes avec taux du quantile conditionnel et a montré en utilisant des études de simulation l'efficacité de la méthode locale linéaire par rapport à la méthode de noyau même pour les données censurées et sur les propriétés asymptotiques du l'estimateur local linéaire de la fonction de régression dans Leulmi [36].

Le but de cette thèse est d'apporter une contribution, dans le cas des données tronquées à gauche, en étudiant les propriétés asymptotiques des estimateurs non paramétriques basés sur la méthode localement linéaire de la fonction de régression généralisée et du quantile conditionnel selon l'organisation suivante :

### *Chapitre 1*

Le chapitre 1 est dédié à l'étude de l'estimation locale linéaire de la fonction de régression généralisée qui généralise l'estimateur de régression étudié par Barrientos Marin et al.[4] où la variable réponse est réelle et complète et la variable explicative est fonctionnelle. Il faut noter que cette étude a été réalisée par Leulmi et Messaci [38] où elles ont aussi proposé et étudié la convergence presque complète uniforme avec taux d'un estimateur du quantile conditionnel.

### *Chapitre 2*

Dans ce chapitre nous proposons un estimateur local linéaire pour la fonction de régression généralisée. La variable à expliquer ici est supposée réelle et tronquée à gauche tandis que la covariable est prend ses valeurs dans un espace semi métrique. Nous établissons les deux convergences presque sûres ponctuelle et uniforme. Les taux de convergences obtenus dans l'étude sont similaires à ceux obtenus pour les données complètes et incomplètes censurées.

### *Chapitre 3*

Ce chapitre est consacré pour présenter l'estimateur local linéaire de la fonction de distribution conditionnelle dans le cas où la variable d'intérêt est toujours soumise à une troncature à gauche par une autre variable aléatoire réelle et la covariable prend des valeurs dans un espace de dimension infinie. Le caractère asymptotique a été examiné en étudiant les convergences presque sûres ponctuelle et uniforme avec taux sous des conditions standards soit pour l'étude fonctionnelle ou pour l'étude des données incomplètes. Après, on déduit la convergence uniforme de l'estimateur obtenu du quantile conditionnel.

### *Chapitre 4*

L'efficacité de la méthode locale linéaire par rapport à la méthode de noyau a déjà

été vérifiée dans de nombreuses publications pour des données complètes et censurées. Et pour cela, le chapitre 4 est dévoué pour approuver cette efficacité même pour les données tronquées à gauche en utilisant deux exemples de simulation pour chaque estimateur étudié dans la thèse. Sans oublier une étude sur des données réelles réalisées par Leulmi et Messaci [38] afin de comparer entre trois méthodes d'estimation non paramétrique de la médiane conditionnelle pour des données complètes.

## Estimation locale linéaire de la fonction de régression généralisée pour des données complètes

La régression est une technique courante pour la prévision. Parmi les méthodes de régression figure la régression linéaire simple. Mais lorsque la linéarité de la relation entre la variable explicative, et la variable dépendante, est mise en défaut. Il est préféré de choisir un modèle plus flexible qui reflète mieux la relation entre les deux variables. On parle ici de la régression non paramétrique

$$Y = m(X) + \epsilon.$$

L'erreur  $\epsilon$  représente la variation de  $Y$  autour de  $X$ . Le fait de considérer que  $\epsilon$  est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et généralement choisie indépendante de  $X$  facilite significativement les calculs et l'étude des propriétés asymptotiques des estimateurs de la fonction de régression  $m$ .

On veut trouver une fonction  $m$  telle que  $m(X)$  soit une bonne approximation de  $Y$  selon un critère donné. Cette proximité se mesure en général par un risque utilisant l'erreur quadratique moyenne et on essaye de déterminer  $\hat{m}(X)$  qui rendra cette erreur la plus petite possible.

En effet, déterminer  $\hat{m}(X)$  revient à calculer  $\arg \min E [(m(X) - Y)^2 | X = x]$  qui nous donne

$$\hat{m}(X) = E(Y | X = x).$$

Cette étude peut se faire dans un cadre plus général en étudiant la fonction de régression généralisée définie par

$$m_\varphi(x) = E(\varphi(Y) | X = x),$$

où la transformation  $\varphi$  peut prendre beaucoup de formes selon nos besoins. Par exemple, en prenant  $\varphi(y) = y$ , on obtient la fonction de régression classique et si on prend  $\varphi(y) = I_{\{y < t\}}$ ,  $m_\varphi(x)$  devient la fonction de distribution conditionnelle de  $Y$  sachant  $X = x$ .

Comme alternative de l'estimateur bien connu de Nadaraya-Watson de la fonction de régression, l'estimateur local linéaire de la régression donne de bons résultats pour des données complètes. Dans ce chapitre, nous présentons le travail réalisé par Leulmi et Messaci [38] où cette dernière méthode a été utilisée et l'étude des propriétés asymptotiques d'estimateur de la fonction de régression généralisée et du quantile conditionnelle dans le cas d'une variable réponse scalaire  $Y$  et une variable aléatoire explicative  $X$  prenant des valeurs dans un espace semi-métrique a été établie.

## 1.1 Modélisation

On appelle variable aléatoire fonctionnelle  $X$ , toute application mesurable sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et à valeurs dans un espace probabilisable  $(\mathcal{F}, \mathcal{B}_{\mathcal{F}})$ , où  $\mathcal{F}$  est un espace de dimension infinie et  $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$  est une tribu sur  $\mathcal{F}$ . Ce type de variables se retrouvent dans de nombreux domaines, comme la météorologie, la chimie quantitative, la biométrie, l'économétrie ou l'imagerie médicale. Pour ce travail, on prend  $\mathcal{F}$  un espace semi métrique muni d'une semi métrique  $d$ .

Considérons  $n$  paires de v.a.s  $(X_i, Y_i)_{i=1, \dots, n}$  indépendantes de même loi que le vecteur  $(X, Y)$  à valeurs dans  $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$ , où  $(\mathcal{F}, d)$  est un espace semi métrique. L'estimateur local linéaire de la régression généralisée définie par

$$m_{\varphi}(x) = E(\varphi(Y)|X = x),$$

où  $\varphi$  est une fonction réelle borélienne connue,

peut être regardé comme la solution du problème de moindres carrés pondérés suivant

$$\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^n (\varphi(Y_i) - a - b\beta(X_i, x))^2 K(h^{-1}d(X_i, x)),$$

où  $\beta(\cdot, \cdot)$  est une fonction réelle connue, définie sur  $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que,  $\forall x \in \mathcal{F}, \beta(x, x) = 0$ , la fonction  $K$  est un noyau et  $h := h_n$  est une suite de nombres réels strictement positifs qui joue un rôle de paramètre de lissage.

Alors, on peut écrire

$$\hat{m} = e_1'(C_{\beta}'WC_{\beta})^{-1}C_{\beta}'W\varphi(Y), \quad (1.1)$$

$$\text{où } C' = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \beta(X_1, x) & \dots & \beta(X_n, x) \end{bmatrix}, \quad \varphi(Y) = \begin{bmatrix} \varphi(Y_1) \\ \dots \\ \varphi(Y_n) \end{bmatrix}$$

$W = \text{diag}(K(h^{-1}d(X_1, x)), \dots, K(h^{-1}d(X_n, x)))$  et  $e_1 = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ .

Des calculs simples donnent la formule suivante de l'estimateur

$$\hat{m}_{\varphi}(x) = \frac{\sum_{i,j=1}^n W_{ij}(x)\varphi(Y_j)}{\sum_{i,j=1}^n W_{ij}(x)} \quad \left( \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} := 0 \right),$$

où

$$W_{ij}(x) = \beta(X_i, x) (\beta(X_i, x) - \beta(X_j, x)) K(h^{-1}d(X_i, x))K(h^{-1}d(X_j, x)). \quad (1.2)$$

Donc pour  $l \in \{0, 1\}$ , on a

$$\sum_{i,j=1}^n W_{ij}(x)\varphi^l(Y_j) = \sum_{i < j} \{ (\beta(X_i, x) - \beta(X_j, x)) (\beta(X_i, x)\varphi^l(Y_j) - \beta(X_j, x)\varphi^l(Y_i)) K(h^{-1}d(X_i, x))K(h^{-1}d(X_j, x)) \}.$$

## 1.2 La convergence presque complète ponctuelle

Soit  $x$  un point fixé de  $\mathcal{F}$ , pour tout réel positif  $h$ ,  $B(x, h) := \{y \in \mathcal{F} / d(x, y) \leq h\}$  notée une boule fermée de  $\mathcal{F}$  de centre  $x$  et rayon  $h$ . On définit aussi  $\Phi_x(r_1, r_2) := P(r_1 \leq$

$d(X, x) \leq r_2$ ), où  $r_1$  et  $r_2$  sont deux nombres réels.

Leulmi et Messaci [38] ont étudié le caractère asymptotique de l'estimateur local linéaire  $\hat{m}_\varphi$ , sous les hypothèses suivantes.

### 1.2.1 Hypothèses et résultats

(H1.1) Pour tout  $h > 0$ ,  $\Phi_x(h) := \Phi_x(0, h) > 0$ .

(H1.2)  $m_\varphi \in \{f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}, \lim_{d(x, x') \rightarrow 0} f(x') = f(x)\}$

(H1.2')  $m_\varphi \in \{f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}, \exists b > 0, \forall x' \in \mathcal{F}; |f(x) - f(x')| \leq C_x d^b(x, x')\}$ , où  $C_x$  est une constante positive dépend de  $x$ .

(H1.3) La fonction  $\beta(., .)$  est telle que :

$$\exists 0 < M_1 < M_2, \forall x' \in \mathcal{F}, M_1 d(x, x') \leq |\beta(x, x')| \leq M_2 d(x, x').$$

(H1.4) Le noyau  $K$  est une fonction positive et différentiable sur son support  $[0, 1]$ .

(H1.5) La fenêtre  $h$  satisfait :  $\lim_{n \rightarrow \infty} h = 0$ , et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n \Phi_x(h)} = 0$ .

(H1.6) Il existe un entier  $n_0$ , tel que

$$\forall n > n_0, \frac{1}{\Phi_x(h)} \int_0^1 \Phi_x(zh, h) \frac{d}{dz} (z^2 K(z)) dz > C > 0$$

et

$$h \int_{B(x, h)} \beta(u, x) dP_X(u) = o \left( \int_{B(x, h)} \beta^2(u, x) dP_X(u) \right),$$

où  $dP_X$  est la distribution de  $X$ .

(H1.7)  $\forall m \geq 2; \sigma_m : x \rightarrow E(|\varphi(Y)|^m | X = x)$  est un opérateur continue sur  $\mathcal{F}$ .

**Remarque 1.1** *Les hypothèses (H1.2)–(H1.5) et (H1.7) sont standards dans le contexte de la régression fonctionnelle non paramétrique et étendre ce qui est habituellement supposé dans la littérature non paramétrique classique de dimension  $p$  (Ferraty et Vieu [25]). La première partie de l'hypothèse (H1.6) précise le comportement de la fenêtre  $h$  par rapport aux probabilités de petite boule et la fonction noyau  $K$ . Cette hypothèse n'est pas restrictive car on peut voir facilement que les processus fractals le satisfont pour une large classe de fonctions du noyau (voir la remarque sur l'hypothèse (H1.6) pour plus de détails). La nouvelle hypothèse clé est la deuxième partie de (H1.6) sur le comportement local de l'opérateur  $\beta$  qui modélise la forme locale de la régression. Par exemple, dans le cas particulier où  $\beta = d$ , cette hypothèse signifie que l'espérance locale de  $\beta$  est suffisamment petite par rapport à son moment de second ordre. Si, en plus, la vraie v.r.  $\beta(X, x)$  admet une densité dérivable (autour de 0) par rapport à la mesure de Lebesgue alors la deuxième partie de (H1.6) est satisfaite. L'hypothèse (H1.6) a été déjà utilisée par Barrientos-Marin et al. [4]).*

**Théorème 1.1** (c.f. Théorème 1 Leulmi et Messaci [38])

Supposons que les conditions (H1.1), (H1.3)–(H1.7) sont satisfaites.

(i) Sous l'hypothèse (H1.2), on a

$$\hat{m}_\varphi(x) - m_\varphi(x) = o_{p.co.}(1).$$

(ii) Et si l'hypothèse (H1.2') est satisfaite, on obtient

$$\hat{m}_\varphi(x) - m_\varphi(x) = O(h^b) + O_{p.co.} \left( \sqrt{\frac{\ln n}{n \Phi_x(h)}} \right).$$

## 1.2.2 Preuves

Soit  $C$  une constante strictement positive et pour tout  $x \in \mathcal{F}$  et pour tout  $i = 1, \dots, n$  :

$$K_i(x) := K(h^{-1}d(X_i, x)) \text{ et } \beta_i(x) := \beta(X_i, x).$$

La preuve de ce théorème est basée sur une décomposition standard donnée pour tout  $x \in \mathcal{F}$ , par

$$\widehat{m}_\varphi(x) - m_\varphi(x) = \frac{1}{m_0(x)} [(m_1(x) - Em_1(x)) - (m_\varphi(x) - Em_1(x))] - \frac{m_\varphi(x)(m_0(x) - 1)}{m_0(x)} \quad (1.3)$$

où, pour  $l = 0, 1$

$$m_l(x) = \frac{1}{n(n-1)EW_{12}(x)} \sum_{i \neq j} W_{ij}(x) \varphi^l(Y_j). \quad (1.4)$$

Et l'application des lemmes suivants.

**Lemme 1.1** *Sous les hypothèses (H1.1), (H1.3)-(H1.5), on a*  
*(i) L'hypothèse (H1.2) permet d'écrire :*

$$m_\varphi(x) - Em_1(x) = o(1).$$

*(ii) La condition (H1.2') donne*

$$m_\varphi(x) - Em_1(x) = O(h^b).$$

**Preuve du Lemme 1.1** *On a*

$$Em_l(x) = \frac{1}{E(W_{12}(x))} E(W_{12}(x) \varphi^l(Y_2)),$$

et  $Em_1(x)$  peut être écrite par

$$Em_1(x) = E(E(m_1(x)|X_2)) = \frac{1}{E(W_{12}(x))} E(W_{12}(x) E(\varphi(Y_2)|X_2)).$$

qui nous permet d'écrire, sous l'hypothèse (H4)

$$\begin{aligned} |m_\varphi(x) - Em_1(x)| &= \frac{1}{|E(W_{12}(x))|} |E(W_{12}(x)(m_\varphi(x) - m_\varphi(X_2)))| \\ &\leq \sup_{x' \in B(x, h)} |m_\varphi(x) - m_\varphi(x')|. \end{aligned}$$

On a besoin de prendre en compte l'hypothèse (H1.2) pour obtenir le lemme 1.1-(i). Cependant, si on utilise (H1.2') au lieu de (H1.2), on obtient facilement

$$\sup_{x' \in B(x, h)} |m_\varphi(x) - m_\varphi(x')| = O(h^b).$$

qui nous amène au Lemme 1.1-(ii).

Pour traiter la convergence presque complète ponctuelle de  $\widehat{m}_\varphi(x)$ , nous avons besoin du lemme technique préliminaire suivant.

**Lemme 1.2** (c.f Lemme A.1 Barrientos-Marin et al. [4])

Sous les hypothèses (H1.1), (H1.3)–(H1.6), nous obtenons

i)  $\forall (p, l) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ ,  $E \left( K_1^p(x) |\beta_1(x)|^l \right) \leq Ch^l \Phi_x(h)$ .

ii)  $E [K_1(x) \beta_1^2(x)] > Ch^2 [\Phi_x(h)]$  pour  $n$  suffisamment grand.

**Preuve du Lemme 1.2 :**

i) Commençant d'utiliser (H1.3) qui implique

$$K_1^p(x) |\beta_1(x)|^l h^{-l} \leq CK_1^p(x) d(X_1, x)^l h^{-l},$$

et comme le noyau  $K$  est borné sur  $[0, 1]$ , on obtient

$$K_1^p(x) |\beta_1(x)|^l h^{-l} \leq Cd(X_1, x)^l h^{-l} 1_{[0,1]}(h^{-1}d(X_1, x)),$$

donc, on a

$$E \left( K_1^p(x) |\beta_1(x)|^l h^{-l} \right) \leq C \Phi_x(h),$$

qui est le résultat revendiqué.

ii) En utilisant (H1.3), il est facile de voir que

$$E [K_1(x) \beta_1^2(x)] > CE [K_1(x) d^2(X_1, x)].$$

De plus, on peut écrire

$$\begin{aligned} E \left( K_1(x) \frac{d^2(X_1, x)}{h^2} \right) &= \int_0^1 t^2 K(t) dP^{d(X,x)/h}(t) \\ &= \int_0^1 \left[ \int_0^t \left( \frac{d}{du} (u^2 K(u)) \right) du \right] dP^{d(X,x)/h}(t) \\ &= \int_0^1 \left[ \int_0^1 1_{[u,1]}(t) dP^{d(X,x)/h}(t) \right] \frac{d}{du} (u^2 K(u)), \end{aligned}$$

la dernière équation arrive directement du théorème de Fubini. De plus, il est facile de vérifier que

$$\int_0^1 1_{[u,1]}(t) dP^{d(X,x)/h}(t) = P(uh \leq d(X, x) \leq h).$$

Alors,

$$E \left( K_1(x) \frac{d^2(X_1, x)}{h^2} \right) = \int_0^1 \Phi_x(uh, h) \frac{d}{du} (u^2 K(u)) du.$$

Il reste d'utiliser (H1.6) pour avoir la borne inférieure désirée, qui finit la preuve du Lemme 1.2-(ii).

**Lemme 1.3** Sous les suppositions (H1.1), (H1.2), (H1.3)–(H1.6), on obtient (i)

$$m_0(x) - 1 = O_{p.co.} \left( \sqrt{\frac{\ln n}{n \Phi_x(h)}} \right).$$

(ii) De plus, si (H1.7) est satisfaite, on a

$$m_1(x) - Em_1(x) = O_{p.co.} \left( \sqrt{\frac{\ln n}{n \Phi_x(h)}} \right).$$

**Preuve du Lemme 1.3 ii)** Remarquons que

$$m_1(x) = Q(x) [S_{2,1}(x)S_{4,0}(x) - S_{3,1}(x)S_{3,0}(x)], \quad (1.5)$$

où, pour  $p = 2, 3, 4$ , et  $l = 0, 1$ ,

$$S_{p,l}(x) = \frac{1}{n\Phi_x(h)} \sum_{i=1}^n \frac{K_i(x)\beta_i^{p-2}(x)\varphi^l(Y_i)}{h^{p-2}}$$

et

$$Q(x) = \frac{n^2 h^2 \Phi_x^2(h)}{n(n-1)E(W_{12}(x))}.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} m_1(x) - E(m_1(x)) &= Q(x) \{S_{2,1}(x)S_{4,0}(x) - E(S_{2,1}(x)S_{4,0}(x)) \\ &\quad - [S_{3,1}(x)S_{3,0}(x) - E(S_{3,1}(x)S_{3,0}(x))]\}, \end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned} S_{2,1}(x)S_{4,0}(x) - E(S_{2,1}(x)S_{4,0}(x)) &= (S_{2,1}(x) - E(S_{2,1}(x)))(S_{4,0}(x) - E(S_{4,0}(x))) \\ &\quad + (S_{2,1}(x) - E(S_{2,1}(x)))E(S_{4,0}(x)) \\ &\quad + (S_{4,0}(x) - E(S_{4,0}(x)))E(S_{2,1}(x)) \\ &\quad + E(S_{2,1}(x))E(S_{4,0}(x)) - E(S_{2,1}(x)S_{4,0}(x)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{3,1}(x)S_{3,0}(x) - E(S_{3,1}(x)S_{3,0}(x)) &= (S_{3,1}(x) - E(S_{3,1}(x)))(S_{3,0}(x) - E(S_{3,0}(x))) \\ &\quad + (S_{3,1}(x) - E(S_{3,1}(x)))E(S_{3,0}(x)) \\ &\quad + (S_{3,0}(x) - E(S_{3,0}(x)))E(S_{3,1}(x)) \\ &\quad + E(S_{3,1}(x))E(S_{3,0}(x)) - E(S_{3,1}(x)S_{3,0}(x)). \end{aligned}$$

On doit montrer que pour  $p \in \{2, 3, 4\}$  et  $l \in \{0, 1\}$

$$Q(x) = O(1),$$

$$ES_{p,l}(x) = O(1),$$

$$E(S_{2,1}(x))E(S_{4,0}(x)) - E(S_{2,1}(x)S_{4,0}(x)) = O\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h)}}\right),$$

$$E(S_{3,1}(x))E(S_{3,0}(x)) - E(S_{3,1}(x)S_{3,0}(x)) = O\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h)}}\right),$$

$$S_{p,l}(x) - ES_{p,l}(x) = O_{p.co.}\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h)}}\right).$$

• *Traitement du terme  $Q(x)$*

On a

$$\begin{aligned} EW_{12}(x) &= E[\beta_1^2(x)K_1(x)K_2(x)] - E[\beta_1(x)\beta_2(x)K_1(x)K_2(x)] \\ &= E[\beta_1^2(x)K_1(x)]E(K_2(x)) - (E[\beta_1(x)K_1(x)])^2, \end{aligned}$$

ensemble avec

$$hE[\beta_1(x)K_1(x)] \leq Ch \int_{B(x,h)} \beta(u,x) dP_{X_1}(u)$$

et (H1.6) impliquent que

$$hE[\beta_1(x)K_1(x)] = o\left(\int_{B(x,h)} \beta^2(u,x) dP_{X_1}(u)\right).$$

En appliquant le Lemme 1.2-(i), avec  $K = 1_{[0,1]}$ ,  $p = 1$  et  $l = 2$  on obtient

$$\int_{B(x,h)} \beta^2(u,x) dP_{X_1}(u,t) \leq Ch^2 \Phi_x(h),$$

ce qui implique

$$E[\beta_1(x)K_1(x)] = o(h\Phi_x(h)).$$

Maintenant, le Lemme 1.2-(ii) et le dernier résultat permettent d'écrire

$$EW_{12}(x) > Ch^2 [\Phi_x(h)]^2. \quad (1.6)$$

Donc, pour  $n$  suffisamment grand

$$Q(x) = O(1)$$

- Il est facile de voir que sous (H1.1)–(H1.4), pour  $p \in \{2, 3, 4\}$  et  $l \in \{0, 1\}$ , nous avons

$$\begin{aligned} ES_{p,l}(x) &= h^{2-p} \Phi_x(h)^{-1} E[K_1(x) \varphi^l(Y_1) \beta^{p-2}] \\ &= h^{2-p} \Phi_x(h)^{-1} E[K_1(x) m_\varphi^l(X_1) \beta^{p-2}], \end{aligned}$$

et comme  $m_\varphi(X_1) = m_\varphi(x) + o(1)$  (sous (H1.2)), on a  $ES_{p,l}(x) = O(1)$ .

- Traitement du terme  $E(S_{2,1}(x))E(S_{4,0}(x)) - E(S_{2,1}(x)S_{4,0}(x))$

D'un côté, on a

$$\begin{aligned} E(S_{2,1}(x))E(S_{4,0}(x)) &= \frac{1}{n^2 h^2 [\Phi_x(h)]^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(K_i(x) \beta_i^2(x)) E(K_j(x) \varphi(Y_j)) \\ &= \frac{1}{h^2 [\Phi_x(h)]^2} E(K_1(x) \beta_1^2(x)) E(K_1(x) \varphi(Y_1)), \end{aligned}$$

et d'autre côté, on obtient

$$\begin{aligned} E(S_{2,1}(x)S_{4,0}(x)) &= \frac{1}{n^2 h^2 [\Phi_x(h)]^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(K_i(x) \beta_i^2(x) K_j(x) \varphi(Y_j)) \\ &= \frac{1}{n^2 h^2 [\Phi_x(h)]^2} \left( \sum_{i=j=1}^n E(K_i^2(x) \beta_i^2(x) \varphi(Y_i)) + \sum_{i \neq j} E(K_i(x) \beta_i^2(x) K_j(x) \varphi(Y_j)) \right) \\ &= O((n\Phi_x(h))^{-1}) + \frac{n^2 - n}{n^2 h^2 [\Phi_x(h)]^2} E(K_1(x) \beta_1^2(x)) E(K_1(x) \varphi(Y_1)), \end{aligned}$$

qui nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} E(S_{2,1}(x))E(S_{4,0}(x)) - E(S_{2,1}(x)S_{4,0}(x)) &= \left(1 - \frac{n(n-1)}{n^2}\right) h^{-2} \Phi_x(h)^{-2} E[K_1(x) \beta_1^2(x)] \\ &\quad E[K_1(x) \varphi(Y_1)] + O((n\Phi_x(h))^{-1}). \end{aligned}$$

En utilisant des argument similaires comme précédemment, on aura

$$E(S_{2,1}(x))E(S_{4,0}(x)) - E(S_{2,1}(x)S_{4,0}(x)) = O\left((n\Phi_x(h))^{-1}\right).$$

qui est négligeable par rapport à  $O\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h)}}\right)$ , sous (H1.5).

• Par des arguments similaires, on peut dire que

$$E(S_{3,1}(x))E(S_{3,0}(x)) - E(S_{3,1}(x)S_{3,0}(x)) = O\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h)}}\right).$$

• Traitement du terme  $S_{p,l}(x) - ES_{p,l}(x)$

Nous avons

$$S_{p,l}(x) - ES_{p,l}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^{(p,l)}(x),$$

où

$$Z_i^{(p,l)}(x) = \frac{1}{h^{p-2}\Phi_x(h)} \left\{ K_i(x)\beta_i^{p-2}(x)\varphi^l(Y_i) - E\left[K_i(x)\beta_i^{p-2}(x)\varphi^l(Y_i)\right] \right\}. \quad (1.7)$$

Afin d'appliquer l'inégalité exponentielle, on concentre sur les moments absolus des v.a.r.s.  $Z_i(x)$

$$\begin{aligned} E|\{Z_i^{(p,l)}(x)\}^m| &= h^{(-p+2)m}\Phi_x(h)^{-m} E\left|\sum_{k=0}^m c_k^m (-1)^{m-k} (K_i(x)\beta_i^{p-2}(x)\varphi^l(Y_i))^k (E[K_i(x)\beta_i^{p-2}(x)\varphi^l(Y_i)])^{m-k}\right| \\ &\leq h^{(-p+2)m}\Phi_x(h)^{-m} \sum_{k=0}^m c_k^m E[K_i^k(x)\beta_i^{(p-2)k}(x)\sigma_k^l(X_i)] |E[K_i(x)\beta_i^{p-2}(x)m_\varphi^l(X_i)]|^{m-k}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

la dernière inégalité est obtenue en conditionnant sur  $X_1$ . De plus, (H1.2) implique que  $m_\varphi(X_1) = m_\varphi(x) + o(1)$  d'où on obtient  $\sigma_k(X_1) = \sigma_k(x) + o(1)$  quand (H1.7) est vérifiée. Cela, combinant avec (1.8) et Lemme 1.2-(i), nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} E|\{Z_i^{(p,l)}(x)\}^m| &= O\left(h^{(-p+2)m}[\Phi_x(h)]^{-m} \sum_{k=0}^m E[K_i^k(x)\beta_i^{(p-2)k}(x)] E[K_i(x)\beta_i^{p-2}(x)]^{m-k}\right) \\ &= O\left(\max_{k \in \{0, \dots, m\}} [\Phi_x(h)]^{-k+1}\right) \\ &= O\left([\Phi_x(h)]^{-m+1}\right). \end{aligned}$$

Finalement, il reste d'appliquer le Corollaire A.8-ii dans Ferrtay et Vieu [25] (Proposition 5 dans l'Annexe) avec  $a_n^2 = [\Phi_x(h)]^{-1}$  pour obtenir, pour  $p \in \{2, 3, 4\}$  et  $l \in \{0, 1\}$

$$S_{p,l}(x) - ES_{p,l}(x) = O_{p.co.} \left( \sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h)}} \right),$$

### 1.2.3 Appendix 1

#### Remarque sur la première partie de (H1.6)

Étudiant ici le cas spécial où la variable fonctionnelle  $X$  est un processus fractal d'ordre  $k$  ( $k > 0$ ) tel que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{\Phi_x(t\varepsilon)}{t^k \varepsilon^k} - C_x \right| = 0,$$

où  $C_x$  est une constante qui ne dépend pas de  $t$  et  $\varepsilon$ . Cela implique que, pour tout  $\varepsilon$  suffisamment petit,  $\Phi_x(\varepsilon) \sim C_x \varepsilon^k$ . On a

$$\begin{aligned}\Phi_x(uh, h) &= P(uh \leq d(x, X) \leq h) \\ &= P(d(x, X) \leq h) - P(d(x, X) \leq uh) \\ &= \Phi_x(h) - \Phi_x(uh) \\ &= C_x h^k (1 - u^k) + o(1).\end{aligned}$$

Donc, il est facile de dire

$$\int_0^1 \Phi_x(uh, h) \frac{d}{du} (u^2 K(u)) du = C_x h^k \int_0^1 (1 - u^k) \frac{d}{du} (u^2 K(u)) du + o(h^k).$$

Maintenant, on considère la famille des noyaux indexés par  $\alpha > 0$  et définis par  $K_\alpha(u) = \frac{\alpha+1}{\alpha} (1 - u^k) 1_{[0,1]}(u)$ . Cette famille de noyaux contient des noyaux asymétriques standards (triangle, quadratique). Il vient avec de calculs triviales que

$$\int_0^1 \Phi_x(uh, h) \frac{d}{du} (u^2 K(u)) du = \frac{(\alpha + 1)k}{(k + 2)(\alpha + k + 2)} C_x h^k + o(h^k),$$

qui nous conduit à l'hypothèse (H1.6) lorsque  $h$  est suffisamment petite ( i.e. lorsque  $n$  est assez grand). De la même manière, (H1.6) tient quand on considère le noyau uniforme  $1_{[0,1]}(\cdot)$ .

(H1.6) est satisfaite pour une classe beaucoup plus large de variables aléatoires fonctionnelles (i.e. des variables Hilbertiennes de carré intégrable) dès que on considère une semi métrique appropriée  $d$  (pour plus de détails, voir Lemme 13.6 de Ferraty et Vieu [25], p.213).

## Remarque sur la deuxième partie de (H1.6)

Dans le cas spécial où  $\beta = d$ , et le v.a.r.  $Z := \beta(x, X)$  admet une densité différentiable  $f_Z$  (autour de 0) par rapport à la mesure de Lebesgue et telle que  $f_Z(0) \neq 0$ , qui implique

$$\exists \alpha > 0 \ f_Z(z) \neq 0; \ \forall z \in [-\alpha, \alpha],$$

alors l'hypothèse (H1.6) est satisfaite. En effet, on a, pour tout  $x \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned}h \int_{B(x,h)} \beta(u, x) dP_X(u) &= h \int_{\mathcal{F}} \beta(u, x) 1_{B(x,h)}(u) dP_X(u) \\ &= h \int_{\Omega} Z(w) 1_{\{|Z(w)| \leq h\}} dP(w) \\ &= h \int_{\mathbb{R}} z 1_{\{|z| \leq h\}} dP_Z(z) \\ &= h \int_{-h}^h z f_Z(z) dz \\ &= h \int_0^h z (f_Z(z) - f_Z(-z)) dz,\end{aligned}$$

$f_Z$  est une densité différentiable autour 0 telle que  $f_Z(0) \neq 0$  et en utilisant la formule de Taylor-Young ( $f_Z(z) = f_Z(0) + z f'_Z(0) + z \varepsilon(z)$  où  $\varepsilon(z) \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow 0$ ), on obtient, pour

un  $\alpha > 0$  tel que  $\alpha > h$

$$\begin{aligned} h \left| \int_{B(x,h)} \beta(u,x) dP_X(u) \right| &= \left| 2hf'_Z(0) \int_0^h z dz + h \int_0^h z \varepsilon(z) dz \right| \\ &\leq \frac{2h(f'_Z(0) + 1)}{\inf_{z \in [0,\alpha]} f_Z(z)} \int_0^h z^2 f_Z(z) dz \\ &\leq \frac{2h(f'_Z(0) + 1)}{\inf_{z \in [0,\alpha]} f_Z(z)} \int_{B(x,h)} \beta^2(u,x) dP_X(u). \end{aligned}$$

## 1.3 La convergence presque complète uniforme

### 1.3.1 Hypothèses et résultats

La convergence presque complète uniforme de  $\widehat{m}_\varphi$  est établie sur un sous ensemble  $S_{\mathcal{F}}$  de  $\mathcal{F}$  qui peut être recouvert par un nombre fini de boules. Ce nombre doit être lié au rayon de cette boule (voir hypothèse (U1.5)).

Pour cela, on donne la définition suivante.

**Définition 1** Soient  $\mathcal{S}$  un sous ensemble de l'espace semi métrique  $\mathcal{F}$  et  $\epsilon > 0$ . Un ensemble fini des points  $x_1, x_2, \dots, X_{d_n}$  dans  $\mathcal{F}$  est appelé un  $\epsilon$ -net pour  $\mathcal{S}$  si  $\mathcal{S} = \cup_{k=1}^{d_n} B(x_k, \epsilon)$ . La quantité  $\psi_{\mathcal{S}}(\epsilon) = \ln(d_n)$ , où  $d_n$  est le nombre minimal des boules ouvertes dans  $\mathcal{F}$  de rayon  $\epsilon$  qui est nécessaire pour couvrir  $\mathcal{S}$ , s'appelle " $\epsilon$ -entropie de Kolmogorov de l'ensemble  $\mathcal{S}$ ".

On se réfère à Kolmogorov et Tikhomirov [32] et Ferraty et al. [23] pour plus de détails sur ce contexte.

Dans cette étude, on a besoin des hypothèses suivantes.

(U1.1) Il existe une fonction différentiable  $\Phi$  et des constantes strictement positives  $C, C_1$  et  $C_2$  telles que

$$\forall x \in S_{\mathcal{F}}, \forall h > 0; 0 < C_1 \Phi(h) \leq \Phi_x(h) \leq C_2 \Phi(h) < \infty$$

et

$$\exists \eta_0 > 0, \forall \eta < \eta_0, \Phi'(\eta) < C,$$

où  $\Phi'$  est la dérivée première de  $\Phi$  avec  $\Phi(0) = 0$ .

(U1.2) La fonction de régression généralisée  $m_\varphi$  satisfait :

$$\exists C > 0, \exists b > 0, \forall x \in S_{\mathcal{F}}, x' \in B(x, h), |m_\varphi(x) - m_\varphi(x')| \leq Cd^b(x, x').$$

(U1.3) La fonction  $\beta(.,.)$  satisfait (H3) uniformément sur  $x$  et la condition de Lipschitz suivante

$$\exists C > 0, \forall x_1 \in S_{\mathcal{F}}, x_2 \in S_{\mathcal{F}}, x \in \mathcal{F}, |\beta(x, x_1) - \beta(x, x_2)| \leq Cd(x_1, x_2).$$

(U1.4) Le noyau  $K$  vérifie (H1.4) et est Lipschitzienne sur  $[0, 1]$ .

(U1.5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} h = 0$ , et pour  $r_n = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$  et on a pour  $n$  suffisamment grand :

$$\frac{(\ln n)^2}{n\Phi(h)} < \ln d_n < \frac{n\Phi(h)}{\ln n},$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{1-\beta} < \infty,$$

pour certain  $\beta > 1$ .

(U1.6) La fenêtre  $h$  satisfait :  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists C > 0$ , tels que

$$\forall n > n_0, \forall x \in S_{\mathcal{F}}, \frac{1}{\Phi_x(h)} \int_0^1 \Phi_x(zh, h) \frac{d}{dz} (z^2 K(z)) dz > C > 0$$

et

$$h \int_{B(x,h)} \beta(u, x) dP_X(u) = o \left( \int_{B(x,h)} \beta^2(u, x) dP_X(u) \right)$$

uniformément sur  $x$ .

(U1.7)  $\exists C > 0$  tel que  $\forall m \geq 2 : E(|\varphi(Y)|^m / X = x) < \delta_m(x) < C < \infty$  avec  $\delta_m(\cdot)$  continue sur  $S_{\mathcal{F}}$ .

**Remarque 1.2** Ces hypothèses sont une version uniforme des conditions du cas ponctuel et ils ont déjà utilisées dans la littérature. On réfère à Messaci et al. [43] pour les conditions (U1.1), (U1.3), (U1.4) et (U1.6) et à Ferraty et al. [23] pour les conditions (U1.2), (U1.5) et (U1.7).

Le résultat revendiqué est comme suit.

**Théorème 1.2** (c.f. Théorème 2 Leulmi et Messaci [38])

Sous les hypothèses (U1.1)–(U1.7), on a

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |\widehat{m}_{\varphi}(x) - m_{\varphi}(x)| = O(h^b) + O_{p.co.} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}} \right).$$

**Remarque 1.3** On peut facilement déduire la convergence uniforme de l'estimateur étudié dans Barrientos-Marin et al. [4] pour lequel, à notre connaissance, seule la convergence ponctuelle a été étudiée.

Ce résultat montre que, contrairement au cas fini, le taux de convergence obtenu peut différer de celui de la convergence ponctuelle, il est en fonction de l'entropie du sous-ensemble sur lequel on étudie la convergence uniforme.

### 1.3.2 Preuves

Il est clair que la preuve du Théorème 1.2 est une conséquence directe de la décomposition (1.3) et les lemmes suivants.

**Lemme 1.4** Supposons que les hypothèses (U1.1), (U1.2) et (U1.4) sont vérifiées, donc :

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |m_{\varphi}(x) - Em_1(x)| = O(h^b).$$

**Preuve du Lemme 1.4** *On a*

$$Em_l(x) = \frac{1}{E(W_{12}(x))} E(W_{12}(x)\varphi^l(Y_2)),$$

et  $Em_1(x)$  peut être écrite aussi comme

$$Em_1(x) = E(E(m_1(x)|X_2)) = \frac{1}{E(W_{12}(x))} E(W_{12}(x)E(\varphi(Y_2)|X_2)).$$

Alors, on obtient sous la condition (U1.4)

$$\begin{aligned} |m_\varphi(x) - Em_1(x)| &= \frac{1}{|E(W_{12}(x))|} |E(W_{12}(x)(m_\varphi(x) - m_\varphi(X_2)))| \\ &\leq \sup_{x' \in B(x, h)} |m_\varphi(x) - m_\varphi(x')|. \end{aligned}$$

Nous avons besoin de prendre en compte l'hypothèse (U1.2) pour obtenir

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |m_\varphi(x) - Em_1(x)| = O(h^b).$$

**Lemme 1.5** (cf Lemme 4.1 Messaci et al. [43])

Sous les conditions (U1.1), (U1.3), (U1.4) et (U1.6), on obtient que :

- (i)  $\forall (p, l) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} E(K_1^p(x)|\beta_1(x)^l|) \leq Ch_K^l \Phi(h_K)$
- (ii)  $\inf_{x \in S_{\mathcal{F}}} E(K_1(x)\beta_1^2(x)) > Ch_K^2 \Phi(h_K)$ .

**Preuve du Lemme 1.5** *Ce Lemme est la version uniforme du Lemme 1.2 dont la preuve fonctionne exactement de la même manière que celle du Lemme cité.*

**Lemme 1.6** *Sous les suppositions du Théorème 1.2, on obtient que :*

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |m_1(x) - Em_1(x)| = O_{p.co.} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}} \right).$$

**Preuve du Lemme 1.6** *On utilise une autre fois la décomposition suivante*

$$m_1(x) = Q(x) [S_{2,1}(x)S_{4,0}(x) - S_{3,1}(x)S_{3,0}(x)],$$

où, pour  $p = 2, 3, 4$ , et  $l = 0, 1$ ,

$$S_{p,l}(x) = \frac{1}{n\Phi_x(h)} \sum_{i=1}^n \frac{K_i(x)\beta_i^{p-2}(x)\varphi^l(Y_i)}{h^{p-2}}$$

et

$$Q(x) = \frac{n^2 h^2 \Phi_x^2(h)}{n(n-1)E(W_{12}(x))}.$$

En suivant les mêmes étapes comme la preuve du 1.3, et en utilisant le Lemme 1.5 au lieu du Lemme 1.2, on obtient sous les suppositions (U1.1)–(U1.4) et (U1.6),

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} Q(x) = O(1), \quad \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} E(S_{p,l}(x)) = O(1),$$

pour  $p = 2, 3, 4$ ,  $l = 0, 1$ ,

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |E(S_{2,1}(x))E(S_{4,0}(x)) - E(S_{2,1}(x)S_{4,0}(x))| = O\left(\frac{1}{n\Phi(h)}\right),$$

et

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |E(S_{3,1}(x))E(S_{3,0}(x)) - E(S_{3,1}(x)S_{3,0}(x))| = O\left(\frac{1}{n\Phi(h)}\right),$$

qui est, en vue de l'hypothèse (U1.5), égal à  $O\left(\sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}}\right)$ .

• On a besoin de vérifier que pour  $p = 2, 3, 4$  et  $l = 0, 1$ ,

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |S_{p,l}(x) - E(S_{p,l}(x))| = O_{p.co.} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}} \right).$$

Pour atteindre cet objet, posant

$$j(x) = \arg \min_{j \in \{1, 2, \dots, d_n\}} d(x, x_j)$$

et considérant la décomposition suivante

$$\begin{aligned} \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |S_{p,l}(x) - ES_{p,l}(x)| &\leq \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |S_{p,l}(x) - S_{p,l}(x_{j(x)})| \\ &+ \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |S_{p,l}(x_{j(x)}) - ES_{p,l}(x_{j(x)})| \\ &+ \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |ES_{p,l}(x_{j(x)}) - ES_{p,l}(x)| := F_1^{p,l} + F_2^{p,l} + F_3^{p,l}. \end{aligned}$$

Étudiant maintenant chaque terme  $F_k^{p,l}$  pour  $k = 1, 2, 3$ .

L'étude des termes  $F_1^{p,l}$  et  $F_3^{p,l}$ .

D'abord, on commence par analyser le terme  $F_1^{p,l}$ . Comme le support de  $K$  est  $[0, 1]$  et selon (U1.1), on peut écrire pour tout  $p = 2, 3, 4$

$$\begin{aligned} F_1^{p,l} &\leq \frac{C}{nh^{p-2}\Phi(h)} \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^n \left| K_i(x) \beta_i^{p-2}(x) \varphi^l(Y_i) 1_{B(x,h)}(X_i) - K_i(x_{j(x)}) \beta_i^{p-2}(x_{j(x)}) \varphi^l(Y_i) 1_{B(x_{j(x),h})}(X_i) \right| \\ &\leq \frac{C}{nh^{p-2}\Phi(h)} \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^n K_i(x) 1_{B(x,h)}(X_i) |\varphi^l(Y_i)| \left| \beta_i^{p-2}(x) - \beta_i^{p-2}(x_{j(x)}) 1_{B(x_{j(x),h})}(X_i) \right| \\ &+ \frac{C}{nh^{p-2}\Phi(h)} \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^n \beta_i^{p-2}(x_{j(x)}) 1_{B(x_{j(x),h})}(X_i) |\varphi^l(Y_i)| |K_i(x) 1_{B(x,h)}(X_i) - K_i(x_{j(x)})| \\ &:= F_{1.1}^{p,l} + F_{1.2}^{p,l}. \end{aligned}$$

Analysant le terme  $F_{1.1}^{p,l}$ .

D'après l'hypothèse (U1.3), on obtient

$$\begin{aligned} &1_{B(x,h)}(X_i) \left| \beta_i(x) - \beta_i(x_{j(x)}) 1_{B(x_{j(x),h})}(X_i) \right| \\ &\leq Cr_n 1_{B(x,h) \cap B(x_{j(x),h})}(X_i) + Ch 1_{B(x,h) \cap \overline{B(x_{j(x),h)}}}(X_i) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}_{B(x,h)}(X_i) \left| \beta_i^2(x) - \beta_i^2(x_{j(x)}) \mathbf{1}_{B(x_{j(x),h})}(X_i) \right| \\ & \leq Cr_n h \mathbf{1}_{B(x_{j(x),h}) \cap B(x,h)}(X_i) + Ch^2 \mathbf{1}_{B(x,h) \cap \overline{B(x_{j(x),h)}}}(X_i). \end{aligned}$$

En regroupant les cas  $p = 3$  et  $p = 4$ , on trouve

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}_{B(x,h)}(X_i) \left| \beta_i^{p-2}(x) - \beta_i^{p-2}(x_{j(x)}) \mathbf{1}_{B(x_{j(x),h})}(X_i) \right| \\ & \leq Cr_n h^{p-3} \mathbf{1}_{B(x_{j(x),h}) \cap B(x,h)}(X_i) + Ch^{p-2} \mathbf{1}_{B(x,h) \cap \overline{B(x_{j(x),h)}}}(X_i). \end{aligned}$$

Qui donne l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} F_{1.1}^{p,l} & \leq \frac{Cr_n}{nh\Phi(h)} \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^n |\varphi^l(Y_i)| K_i(x) \mathbf{1}_{B(x,h) \cap B(x_{j(x),h})}(X_i) \\ & + \frac{C}{n\Phi(h)} \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^n |\varphi^l(Y_i)| K_i(x) \mathbf{1}_{B(x,h) \cap \overline{B(x_{j(x),h)}}}(X_i). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Analysant le terme  $F_{1.2}^{p,l}$ .

En utilisant l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}_{B(x_{j(x),h})}(X_i) \left| K_i(x) \mathbf{1}_{B(x,h)}(X_i) - K_i(x_{j(x)}) \mathbf{1}_{B(x,h) \cup \overline{B(x,h)}}(X_i) \right| \\ & \leq \mathbf{1}_{B(x,h) \cap B(x_{j(x),h})}(X_i) |K_i(x) - K_i(x_{j(x)})| + K_i(x_{j(x)}) \mathbf{1}_{B(x_{j(x),h}) \cap \overline{B(x,h)}}(X_i) \end{aligned}$$

et d'après les hypothèses (U1.3) et (U1.4), on obtient

$$\begin{aligned} & |\beta_i^{p-2}(x_{j(x)}) \mathbf{1}_{B(x_{j(x),h})}(X_i) |K_i(x) \mathbf{1}_{B(x,h)}(X_i) - K_i(x_{j(x)})| \\ & \leq Ch^{p-2} \left[ \frac{r_n}{h} \mathbf{1}_{B(x,h) \cap B(x_{j(x),h})}(X_i) + K_i(x_{j(x)}) \mathbf{1}_{B(x_{j(x),h}) \cap \overline{B(x,h)}}(X_i) \right], \end{aligned}$$

cela mène à

$$\begin{aligned} F_{1.2}^{p,l} & \leq \frac{Cr_n}{nh\Phi(h)} \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^n |\varphi^l(Y_i)| \mathbf{1}_{B(x,h) \cap B(x_{j(x),h})}(X_i) \\ & + \frac{C}{n\Phi(h)} \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^n |\varphi^l(Y_i)| K_i(x_{j(x)}) \mathbf{1}_{\overline{B(x,h)} \cap B(x_{j(x),h})}(X_i). \end{aligned}$$

Cette dernière combinée avec (1.9) nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} F_1^{p,l} & \leq \frac{Cr_n}{nh\Phi(h)} \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^n |\varphi^l(Y_i)| \mathbf{1}_{B(x,h) \cap B(x_{j(x),h})}(X_i) \\ & + \frac{C}{n\Phi(h)} \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^n |\varphi^l(Y_i)| K_i(x_{j(x)}) \mathbf{1}_{B(x_{j(x),h}) \cap \overline{B(x,h)}}(X_i) \\ & + \frac{C}{n\Phi(h)} \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^n |\varphi^l(Y_i)| K_i(x) \mathbf{1}_{B(x,h) \cap \overline{B(x_{j(x),h)}}}(X_i). \end{aligned}$$

Prenant en compte l'hypothèse (U1.4), on trouve

$$F_1^{p,l} \leq \frac{Cr_n}{nh\Phi(h)} \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^n |\varphi^l(Y_i)| 1_{B(x,h) \cup B(x_{j(x)},h)}(X_i).$$

Soit

$$Z_i = \frac{Cr_n |\varphi^l(Y_i)|}{h\Phi(h)} \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} 1_{B(x,h) \cup B(x_{j(x)},h)}(X_i).$$

La condition (U1.7) implique que

$$E|Z_1^m| \leq \frac{Cr_n^m}{h^m \Phi(h)^{m-1}}, \quad (1.10)$$

alors, en appliquant le corollaire A.8 dans Ferraty et Vieu [25], avec  $a_n^2 = \frac{r_n}{h\Phi(h)}$ , (voir Proposition 5)

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i = EZ_1 + O_{p.co.} \left( \sqrt{\frac{r_n \ln n}{nh\Phi(h)}} \right).$$

En appliquant (1.10) une autre fois (for  $m = 1$ ), on obtient

$$F_1^{p,l} = O\left(\frac{r_n}{h}\right) + O_{p.co.} \left( \sqrt{\frac{r_n \ln n}{nh\Phi(h)}} \right).$$

Combinant ça avec la supposition (U1.5) et la deuxième partie de l'hypothèse (U1.1), on obtient

$$F_1^{p,l} = O_{p.co.} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}} \right). \quad (1.11)$$

Deuxièmement, puisque

$$F_3^{p,l} \leq E \left( \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |S_{p,l}(x) - S_{p,l}(x_{j(x)})| \right),$$

on déduit que

$$F_3^{p,l} = O_{p.co.} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}} \right). \quad (1.12)$$

**Etude du terme  $F_2^{p,l}$ .**

Pour tout  $\eta > 0$ , on a que

$$\begin{aligned} P \left( F_2^{p,l} > \eta \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}} \right) &= P \left( \max_{j \in \{1, \dots, d_n\}} |S_{p,l}(x_{j(x)}) - E(S_{p,l}(x_{j(x)}))| > \eta \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}} \right) \\ &\leq d_n \max_{j \in \{1, \dots, d_n\}} P \left( |S_{p,l}(x_{j(x)}) - E(S_{p,l}(x_{j(x)}))| > \eta \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}} \right). \end{aligned}$$

Laisser nous mettre pour  $p = 2, 3, 4$  que

$$\Delta_{p,i} = \frac{1}{h^{p-2}\Phi_x(h)} [K_i(x_{j(x)})\beta_i^{p-2}(x_{j(x)})\varphi^l(Y_i) - E(K_i(x_{j(x)})\beta_i^{p-2}(x_{j(x)})\varphi^l(Y_i))].$$

L'utilisation du théorème binomial, le Lemme 1.5 et hypothèses (U1.1), (U1.2) et (U1.7), donnent pour  $p = 2, 3, 4$ ,

$$E|\Delta_{p,i}|^m = O(\Phi^{-m+1}(h)).$$

On peut appliquer l'inégalité de type Bernstein comme fait dans le corollaire A-8 de Ferraty et Vieu [25], pour obtenir

$$P\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^n \Delta_{p,i}\right| > \eta\sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}}\right) \leq 2\exp(-C\eta^2 \ln d_n).$$

Donc, par choisir  $\beta$  tel que  $C\eta^2 = \beta$ , on obtient

$$P\left(F_2^{p,l} > \eta\sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}}\right) \leq Cd_n^{1-\beta}. \quad (1.13)$$

Alors, l'hypothèse (U1.5) nous permet d'écrire

$$F_2^{p,l} = O_{p.co.}\left(\sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}}\right). \quad (1.14)$$

Finalement, le résultat du Lemme 1.6 découle des relations (1.11), (1.12) et (1.14).

**Lemme 1.7** Si les hypothèses (U1.1), (U1.3)–(U1.6) sont satisfaites, on obtient :

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |m_0(x) - 1| = O_{p.co.}\left(\sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}}\right)$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\inf_{x \in S_{\mathcal{F}}} m_0(x) < \frac{1}{2}\right) < \infty.$$

**Preuve du Lemme 1.7** La première partie des résultats revendiqués peut être déduire directement d'après la preuve du Lemme 1.6 en prenant, pour tout  $i$ ,  $\varphi(Y_i) = 1$ .

Pour la deuxième partie, ça arrive directement de

$$\inf_{x \in S_{\mathcal{F}}} m_0(x) < \frac{1}{2} \Rightarrow \exists x \in S_{\mathcal{F}} \text{ tel que } 1 - m_0(x) > \frac{1}{2} \Rightarrow \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |1 - m_0(x)| > \frac{1}{2}$$

Selon la première partie du Lemme 1.7, on obtient

$$P\left(\inf_{x \in S_{\mathcal{F}}} m_0(x) < \frac{1}{2}\right) \leq P\left(\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |1 - m_0(x)| > \frac{1}{2}\right).$$

Par conséquent

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\left(\inf_{x \in S_{\mathcal{F}}} m_0(x) < \frac{1}{2}\right) < \infty,$$

### 1.3.3 Estimateur du quantile conditionnel

Comme un cas particulier de l'estimateur  $m_\varphi$  avec  $\varphi(t) = 1_{]-\infty, y]}(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , nous pouvons estimer la fonction de répartition conditionnelle

$$F^x(y) = P(Y \leq y \mid X = x),$$

par

$$\widehat{F}^x(y) = \frac{\sum_{i,j=1}^n W_{ij}(x) 1_{\{Y_j \leq y\}}}{\sum_{i,j=1}^n W_{ij}(x)}, \quad (1.15)$$

où  $W_{ij}(x)$  est défini dans (1.2).

Puisque le quantile conditionnel d'ordre  $\alpha$  ( $\alpha \in (0, 1)$ ) est  $t_\alpha(x) = \inf\{y \in \mathbb{R}, F^x(y) \geq \alpha\}$  on déduit de  $\widehat{F}^x$ , un estimateur naturel du quantile conditionnel donné par

$$\widehat{t}_\alpha(x) = \inf\{y \in \mathbb{R}, \widehat{F}^x(y) \geq \alpha\}. \quad (1.16)$$

Rappelons que  $t_{1/2}(x)$  est la médiane conditionnelle.

Pour établir la convergence de  $\widehat{F}^x(y)$ , nous avons besoin des hypothèses suivantes

(U2)'  $\exists \delta > 0, C > 0$  et  $b > 0$ , tels que pour tout  $x \in S_{\mathcal{F}}, x' \in B(x, h)$  et  $y \in [t_\alpha(x) - \delta, t_\alpha(x) + \delta]$ , nous avons

$$|F^{x'}(y) - F^x(y)| \leq C d^b(x, x').$$

(U5)'  $\lim_{n \rightarrow \infty} h = 0$ , et pour  $r_n = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ , on a pour  $n$  assez grand

$$\frac{(\ln n)^2}{n\Phi(h)} < \ln d_n < \frac{n\Phi(h)}{\ln n},$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{(\xi+1/2)} d_n^{(1-\beta)} < \infty,$$

pour certain  $\beta > 1$  et  $\xi > 0$ .

Le théorème suivant donne la convergence de  $\widehat{F}^x(y)$ .

**Théorème 1.3** (c.f. Théorème 3 Leulmi et Messaci [38])

Sous les conditions (U1.1), (U2)', (U1.3), (U1.4), (U5)' et (U1.6), nous avons

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [t_\alpha(x) - \delta, t_\alpha(x) + \delta]} |\widehat{F}^x(y) - F^x(y)| = O(h^b) + O_{p.co.} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}} \right).$$

La démonstration de ce théorème est basée sur la décomposition suivante

$$\widehat{F}^x(y) - F^x(y) = \frac{1}{m_0(x)} \left[ \left( \widehat{F}_N^x(y) - E\widehat{F}_N^x(y) \right) \left( F^x(y) - E\widehat{F}_N^x(y) \right) \right] - \frac{F^x(y)}{m_0(x)} (m_0(x) - 1) \quad (1.17)$$

où

$$\widehat{F}_N^x(y) = \frac{1}{n(n-1)EW_{12}(x)} \sum_{i \neq j} W_{ij}(x) 1_{\{Y_j \leq y\}}$$

et  $m_0(x)$  est donné par (1.4). Ainsi, ce théorème est une conséquence directe du Lemme 1.7 et des lemmes suivants.

**Lemme 1.8** *Sous les conditions (U1.1), (U2)' et (U1.4), nous avons*

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [t_{\alpha}(x) - \delta, t_{\alpha}(x) + \delta]} \left| F^x(y) - E\widehat{F}_N^x(y) \right| = O(h^b).$$

**Preuve du Lemme 1.8** *On a*

$$E\widehat{F}_N^x(y) = \frac{1}{EW_{12}(x)} E [W_{12}(x) 1_{\{Y_2 \leq y\}}]$$

et  $E\widehat{F}_N^x(y)$  peut être écrite comme

$$E\widehat{F}_N^x(y) = E \left[ E(\widehat{F}_N^x(y) | X_2) \right] = \frac{1}{EW_{12}(x)} E [W_{12}(x) E(1_{\{Y_2 \leq y\}} | X_2)].$$

Alors, nous obtenons sous l'hypothèse (U1.4)

$$\left| F^x(y) - E\widehat{F}_N^x(y) \right| = \frac{1}{|EW_{12}(x)|} \left| E \left\{ W_{12}(x) [F^x(y) - F^{X_2}(y)] \right\} \right| \leq \sup_{x' \in B(x, h)} |F^x(y) - F^{x'}(y)|.$$

On doit tenir en compte la condition (U2)' pour avoir

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [t_{\alpha}(x) - \delta, t_{\alpha}(x) + \delta]} \left| F^x(y) - E\widehat{F}_N^x(y) \right| = O(h^b).$$

**Lemme 1.9** *Sous les conditions du Théorème 1.3, nous obtenons*

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [t_{\alpha}(x) - \delta, t_{\alpha}(x) + \delta]} \left| \widehat{F}_N^x(y) - E\widehat{F}_N^x(y) \right| = O_{p.co.} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}} \right).$$

**Preuve du Lemme 1.9** *Premièrement, on écrit*

$$m_1(x) = Q(x) [T_{2,1}^x(y)T_{4,0}^x(y) - T_{3,1}^x(y)T_{3,0}^x(y)], \quad (1.18)$$

où, pour  $p = 2, 3, 4$ , et  $l = 0, 1$ ,

$$T_{p,l}^x(y) = \frac{1}{n\Phi_x(h)} \sum_{i=1}^n \frac{K_i(x) \beta_i^{p-2}(x) 1_{\{Y_i \leq y\}}^l}{h^{p-2}}$$

et  $Q(x)$  est définie en (1.5). En suivant les mêmes étapes que dans la preuve du Lemme 1.6, et utilisant le Lemme 1.5 au lieu du Lemme 1.2, nous obtenons sous les conditions (U1.1)–(U1.4) et (U1.6),

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} Q(x) = O(1), \quad \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [t_{\alpha}(x) - \delta, t_{\alpha}(x) + \delta]} E(T_{p,l}^x(y)) = O(1),$$

pour  $p = 2, 3, 4$ ,  $l = 0, 1$ ,

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [t_{\alpha}(x) - \delta, t_{\alpha}(x) + \delta]} |E(T_{2,1}^x(y))E(T_{4,0}^x(y)) - E(T_{2,1}^x(y)T_{4,0}^x(y))| = O\left(\frac{1}{n\Phi(h)}\right),$$

et

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [t_{\alpha}(x) - \delta, t_{\alpha}(x) + \delta]} |E(T_{3,1}^x(y))E(T_{3,0}^x(y)) - E(T_{3,1}^x(y)T_{3,0}^x(y))| = O\left(\frac{1}{n\Phi(h)}\right),$$

qui est, selon l'hypothèse (U5)', égale à  $O\left(\sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}}\right)$ .

Nous avons besoin d'établir que pour  $p = 2, 3, 4$  et  $l = 0, 1$ ,

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [t_\alpha(x) - \delta, t_\alpha(x) + \delta]} |T_{p,l}^x(y) - E(T_{p,l}^x(y))| = O_{a.co.} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}} \right).$$

A cet objet, on peut couvrir le compact  $[t_\alpha(x) - \delta, t_\alpha(x) + \delta]$  par  $s_n$  intervalles ouverts de centres  $y_j$  et rayons  $l_n = n^{-\xi-1/2}$  et  $s_n = Cl_n^{-1}$  (i.e.  $[t_\alpha(x) - \delta, t_\alpha(x) + \delta] = \cup_{j=1}^{s_n} ]y_j - l_n, y_j + l_n[$ ). Posant  $t_y = \min_{t \in \{1, \dots, s_n\}} |y - t|$  et considérant la décomposition suivante

$$\begin{aligned} \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [t_\alpha(x) - \delta, t_\alpha(x) + \delta]} |T_{p,l}^x(y) - ET_{p,l}^x(y)| &\leq \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [t_\alpha(x) - \delta, t_\alpha(x) + \delta]} |T_{p,l}^x(y) - T_{p,l}^{x_j(x)}(y)| \\ &+ \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [t_\alpha(x) - \delta, t_\alpha(x) + \delta]} |T_{p,l}^{x_j(x)}(y) - T_{p,l}^{x_j(x)}(t_y)| \\ &+ \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [t_\alpha(x) - \delta, t_\alpha(x) + \delta]} |T_{p,l}^{x_j(x)}(t_y) - ET_{p,l}^{x_j(x)}(t_y)| \\ &+ \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [t_\alpha(x) - \delta, t_\alpha(x) + \delta]} |ET_{p,l}^{x_j(x)}(t_y) - ET_{p,l}^{x_j(x)}(y)| \\ &+ \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [t_\alpha(x) - \delta, t_\alpha(x) + \delta]} |ET_{p,l}^{x_j(x)}(y) - ET_{p,l}^x(y)| \\ &:= L_1^{p,l} + L_2^{p,l} + L_3^{p,l} + L_4^{p,l} + L_5^{p,l}. \end{aligned}$$

Étudiant maintenant chaque terme  $L_k^{p,l}$  pour  $k \in \{1, \dots, 5\}$ .

**Commençant par le terme  $L_3^{p,l}$ .**

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} P\left(L_3^{p,l} > \eta\right) &= \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [t_\alpha(x) - \delta, t_\alpha(x) + \delta]} P\left(|T_{p,l}^{x_j(x)}(t_y) - E(T_{p,l}^{x_j(x)}(t_y))| > \varepsilon\right) \\ &\leq d_n N_{r_n}(S_{\mathcal{F}}) \max_{j \in \{1, \dots, d_n\}} \max_{t_y \in \{t_1, \dots, t_{s_n}\}} P\left(|T_{p,l}^{x_j(x)}(t_y) - E(T_{p,l}^{x_j(x)}(t_y))| > \varepsilon\right) \\ &\leq d_n N_{r_n}(S_{\mathcal{F}}) \max_{j \in \{1, \dots, d_n\}} \max_{t_y \in \{t_1, \dots, t_{s_n}\}} P\left(\left|\sum_{i=1}^n \Delta_{i,p,l}^{x_j(x)}(t_y)\right| > n\varepsilon\Phi(h)\right), \end{aligned}$$

où

$$\Delta_{i,p,l}^{x_j(x)} = \frac{1}{h^{p-2}} [K_i(x_j(x))\beta_i^{p-2}(x_j(x))1_{\{Y_i \leq y\}}^l - E(K_i(x_j(x))\beta_i^{p-2}(x_j(x))1_{\{Y_i \leq y\}}^l)].$$

Nous posons  $\varepsilon = \eta \sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\frac{\ln n}{n})}{n\Phi(h)}}$  avec  $\eta > 0$ . Par des arguments à ceux invoqués pour l'étude de  $F_2^{p,l}$  et combiné avec (U5)' et  $s_n = n^{\xi+1/2}$ , on aura

$$L_3^{p,l} = O_{a.co.} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}} \right).$$

**Étudiant les termes  $L_2^{p,l}$  et  $L_4^{p,l}$ .**

D'abord, on analyse le terme  $L_2^{p,l}$ , on a

$$\begin{aligned} L_2^{p,l} &= \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [t_\alpha(x) - \delta, t_\alpha(x) + \delta]} \frac{1}{n\Phi_{x_j(x)}(h)} \sum_{i=1}^n \frac{K_i(x_{x_j(x)})\beta_i^{p-2}(x_{x_j(x)})}{h^{p-2}} |1_{\{Y_i \leq y\}}^l - 1_{\{Y_i \leq t_y\}}^l| \\ &\leq l_n \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \frac{1}{n\Phi_{x_j(x)}(h)} \sum_{i=1}^n \frac{K_i(x_{x_j(x)})\beta_i^{p-2}(x_{x_j(x)})}{h^{p-2}} \\ &\leq l_n \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} S_{p,0}(x_{j(x)}). \end{aligned}$$

Voyant les relations (1.13) et  $ES_{p,0}(x_{j(x)}) = O\left(\frac{r_n}{h}\right)$  et combiné avec (U5)', le fait que  $l_n = n^{-\xi-1/2}$ , on peut déduire

$$L_2^{p,l} = O_{a.co.} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}} \right).$$

En plus, comme

$$L_4^{p,l} \leq E \left( \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |T_{p,l}^{x_{j(x)}}(y) - T_{p,l}^{x_{j(x)}}(t_y)| \right),$$

on déduit que

$$L_4^{p,l} = O_{a.co.} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}} \right). \quad (1.19)$$

**Analysant des termes  $L_1^{p,l}$  et  $L_5^{p,l}$ .**

Grâce à la bornitude de  $1_{\{Y_i \leq y\}}^l$ , l'étude du terme  $L_1^{p,l}$  est exactement la même que du terme  $F_1^{p,l}$ . D'où on obtient

$$L_1^{p,l} = O_{a.co.} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}} \right),$$

ce qui implique

$$L_5^{p,l} = O_{a.co.} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}} \right).$$

Pour obtenir la convergence uniforme du quantile conditionnel, nous avons besoin des conditions suivantes (qui sont utilisées dans Messaci et al. [43]).

(U1.8)  $\forall \epsilon > 0, \exists \xi > 0$  tels que pour toute fonction  $g_\alpha$  de  $S_{\mathcal{F}}$  dans  $[t_\alpha(x) - \delta, t_\alpha(x) + \delta]$ , nous avons

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |t_\alpha(x) - g_\alpha(x)| \geq \epsilon \quad \text{implique} \quad \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |F^x(t_\alpha(x)) - F^x(g_\alpha(x))| \geq \xi.$$

(U1.9)  $\exists j > 1, \forall x \in S_{\mathcal{F}}, F^x \in C^j([t_\alpha(x) - \delta, t_\alpha(x) + \delta])$  par rapport à  $y$  et satisfait  $F^{x^{(l)}}(t_\alpha(x)) = 0$  si  $0 \leq l < j$ ,  $F^{x^{(j)}}(t_\alpha(x)) > C > 0$  et  $F^{x^{(j)}}$  est continue uniformément en  $[t_\alpha(x) - \delta, t_\alpha(x) + \delta]$  où  $F^{x^{(l)}}$  est la dérivée d'ordre  $l$  de  $F^x$ .

Une méthode connue peut être appliquée pour obtenir le résultat suivant à partir du Théorème 1.3, voir par exemple la preuve du Corollaire 3.1 dans Messaci et al. [43].

**Corollaire 1** *Sous les conditions du Théorème précédent et si (U1.8) et (U1.9) sont satisfaites, nous obtenons*

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |\widehat{t}_{\alpha}(x) - t_{\alpha}(x)| = O(h^b) + O_{p.co.} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}} \right).$$

**Proof of corollary 1** Comme

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |F^x(t_{\alpha}(x)) - F^x(\widehat{t}_{\alpha}(x))| = \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |\widehat{F}^x(\widehat{t}_{\alpha}(x)) - F^x(\widehat{t}_{\alpha}(x))| \leq \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [t_{\alpha}(x) - \delta, t_{\alpha}(x) + \delta]} |\widehat{F}^x(y) - F^x(y)|,$$

alors la condition (U1.8), avec le Théorème 1.3, impliquent que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\widehat{t}_{\alpha}(x) - t_{\alpha}(x)| = 0, \quad p.co. \quad (1.20)$$

Maintenant en utilisant le développement du Taylor de la fonction  $F^x$ , on obtient sous l'hypothèse (U1.9), que

$$\begin{aligned} F^x(\widehat{t}_{\alpha}(x)) - F^x(t_{\alpha}(x)) &= \sum_{l=1}^{j-1} \frac{F^{x(l)}(t_{\alpha}(x))}{l!} [\widehat{t}_{\alpha}(x) - t_{\alpha}(x)]^l + \frac{F^x(t'_{\alpha}(x))}{j!} [\widehat{t}_{\alpha}(x) - t_{\alpha}(x)]^j \\ &= \frac{F^x(t'_{\alpha}(x))}{j!} [\widehat{t}_{\alpha}(x) - t_{\alpha}(x)]^j, \end{aligned}$$

où  $t'_{\alpha}(x)$  est entre  $t_{\alpha}(x)$  et  $\widehat{t}_{\alpha}(x)$ .

Grâce à (1.20) et la continuité uniforme de  $F^{x(j)}$ , on aura que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |F^{x(j)}(t'_{\alpha}(x)) - F^{x(j)}(t_{\alpha}(x))| = 0, \quad p.co. \quad (1.21)$$

Donc, il existe un réel positif  $\tau$  tel que

$$\sum_{n=0}^{\infty} P \left( \inf_{x \in S_{\mathcal{F}}} F^{x(j)}(t'_{\alpha}(x)) < \tau \right) < \infty.$$

D'où

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |\widehat{t}_{\alpha}(x) - t_{\alpha}(x)|^j \leq \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [t_{\alpha}(x) - \delta, t_{\alpha}(x) + \delta]} |\widehat{F}^x(y) - F^x(y)|.$$

Il vient d'appliquer le résultat du Théorème 1.3 pour obtenir le résultat revendiqué.

## Estimation locale linéaire de la fonction de régression généralisée pour des données tronquées à gauche

UNE durée de vie est une variable aléatoire souvent supposée positive, de manière générale c'est le temps écoulé pour passer entre deux états. Des fois la valeur exacte d'une durée de vie ne soit pas complètement observée, dans ce cas les techniques classiques ne s'adaptent pas correctement aux données incomplètes. La littérature est beaucoup plus riche par les travaux réalisés sous la censure que la troncature qui est plus récente. Les données censurées modélisent des cadres d'études expérimentales pour certaines maladies, où les patients peuvent être perdus de vue suite à un déménagement ou suite à un décès qui n'a aucune relation à la maladie comme un accident de la route.

Les troncatures diffèrent des censures au sens où elles concernent l'échantillonnage lui-même. Ainsi, une variable  $Z$  est tronquée par un sous ensemble éventuellement aléatoire  $\mathbf{A}$  de  $\mathbb{R}^+$  si au lieu de  $Z$ , on observe  $Z$  uniquement si  $Z \in \mathbf{A}$ . Les points de l'échantillon "tronqué" appartiennent tous à  $\mathbf{A}$ . Il ne faut pas confondre censure et troncature. S'il y a troncature, une partie des individus ne sont pas observables et on n'étudie qu'un sous-échantillon. Il y a différentes catégories de troncature, telles que la troncature à gauche, à droite et la troncature par intervalle. La plus fameuse dans littérature est celle à gauche. Un exemple de ce type ; si la durée de vie d'une population est étudiée à partir d'une cohorte tirée au sort dans cette population, seule la survie des sujets vivants à l'inclusion pourra être étudiée (il y a troncature à gauche car seuls les sujets ayant survécu jusqu'à la date d'inclusion dans la cohorte sont observables).

Dans ce chapitre, nous présentons premièrement le modèle aléatoire de troncature à gauche. Ensuite, on va proposer une estimation locale linéaire pour la fonction de régression généralisée. La variable aléatoire de réponse est soumise à une troncature à gauche et la covariance prend ses valeurs dans un espace de dimension infinie. Les convergences presque sûres ponctuelle et uniforme avec taux seront traitées.

## 2.1 Modélisation

Considérant une suite de variables aléatoires indépendantes  $Y_1, \dots, Y_N$  de même fonction de répartition (f.r.) inconnue  $F$ . Ces variables aléatoires sont regardées comme les durées de vie des sujets étudiés.

Soit  $T_1, \dots, T_N$  une suite de variables aléatoires indépendantes de même f.r. inconnue  $G$ . On suppose aussi que chaque  $T_i$  est indépendante de  $Y_i$ . La taille de l'échantillon  $N$  est déterministe mais inconnue.

Dans le modèle de troncature à gauche,  $(Y_i, T_i)$  est observé seulement lorsque  $Y_i \geq T_i$ , si non rien n'est observé.

Pour éviter la confusion, on note  $\{(Y_i, T_i), i = 1, \dots, n\}$  ( $n \leq N$ ) l'échantillon vraiment observé (i.e  $Y_i \geq T_i$ ).

On note par

$\mathbb{P}$  : la probabilité relative au  $N$ -échantillon.

$\mathbf{P}$  : la probabilité relative au  $n$ -échantillon.

Une conséquence de la troncature, la taille de l'échantillon vraiment observé  $n$  est une variable aléatoire distribuée selon la loi Binomiale de paramètres  $N$  et  $\mu$  où  $\mu = \mathbb{P}(\mathbf{Y} \geq \mathbf{T})$ . Il est clair que si  $\mu = 0$ , aucune donnée peut observé. Pour cela, nous supposons, dorénavant, que  $\mu \neq 0$ .

Par la loi forte des grands nombres on a, lorsque  $N$  tend vers  $\infty$

$$\widehat{\mu}_n := \frac{n}{N} \rightarrow \mu, \mathbb{P} - p.s.$$

La propriété i.i.d de l'échantillon observé de taille  $n$  déduite de celle de l'échantillon de taille  $N$  a été prouvé par Lemdani et Ould Saïd [33].

Sous le modèle de troncature à gauche la distribution conjointe conditionnelle (Stute[50]) d'un  $(Y, T)$  observé devient

$$\begin{aligned} J^*(y, t) &= \mathbf{P}(Y \leq y, T \leq t) \\ &= \mathbb{P}(Y \leq y, T \leq t | Y \geq T) \\ &= \frac{\mathbb{P}(Y \leq y, T \leq t, Y \geq T)}{\mathbb{P}(Y \geq T)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(Y \leq y, T \leq t, T \leq y)}{\mathbb{P}(Y \geq T)} \\ &= \mu^{-1} \int_{-\infty}^y G(t \wedge u) dF(u), \end{aligned}$$

où  $t \wedge u := \min(t, u)$ .

Les distributions marginales sont donc définies par

$$\begin{aligned} F^*(y) &= J^*(y, \infty) \\ &= \mu^{-1} \int_{-\infty}^y G(u) dF(u) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
G^*(t) &= J^*(\infty, t) \\
&= \mu^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} G(t \wedge u) dF(u) \\
&= \mu^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t \wedge u} dG(v) dF(u) \\
&= \mu^{-1} \int_{-\infty}^t dG(v) \int_v^{\infty} dF(u) \\
&= \mu^{-1} \int_{-\infty}^t (1 - F(v)) dG(v),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\mu &= \mathbb{P}(Y \geq T) \\
&= \mathbb{E}(1_{\{Y \geq T\}}) \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}(1_{\{Y \geq T\}} | Y)] \\
&= \int \mathbb{E}(1_{\{Y \geq T\}} | Y = s) dF(s) \\
&= \int \mathbb{P}(Y \geq T | Y = s) dF(s) \\
&= \int \mathbb{P}(T \leq s) dF(s) \\
&= \int G(s) dF(s)
\end{aligned}$$

Il est facile de montrer aussi que

$$\mu = \int (1 - F(s-)) dG(s).$$

Les fonctions  $F^*$  et  $G^*$  peuvent être estimées respectivement par

$$F_n^*(y) = n^{-1} \sum_{i=1}^n 1_{\{Y_i \leq y\}} \quad \text{et} \quad G_n^*(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n 1_{\{T_i \leq t\}}.$$

Il faut signaler que  $F_n^*$  et  $G_n^*$  sont les estimateurs de  $F^*$  et  $G^*$  mais ne sont en aucun cas des estimateurs de  $F$  et  $G$ . Pour celles-ci, Lynden-Bell [41] a obtenu des estimateurs non paramétriques que nous introduisons par la suite.

Soit la fonction  $C(\cdot)$  définie par

$$\begin{aligned}
C(y) &= \mathbf{P}(T \leq y \leq Y) \\
&= \mathbb{P}(T \leq y \leq Y | Y \geq T) \\
&:= G^*(y) - F^*(y) \\
&= \frac{\mathbb{P}(T \leq y \leq Y, Y \geq T)}{\mathbb{P}(Y \geq T)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(T \leq y \leq Y)}{\mathbb{P}(Y \geq T)} \\
&= \mu^{-1} \mathbb{P}(T \leq y) \mathbb{P}(Y \geq y) \\
&= \mu^{-1} G(y) (1 - F(y))
\end{aligned} \tag{2.1}$$

qui peut être estimée par

$$\begin{aligned}
C_n(y) &= G_n^*(y) - F_n^*(y-) \\
&= n^{-1} \sum_{i=1}^n 1_{\{T_i \leq y \leq Y_i\}}.
\end{aligned}$$

Lynden-Bell [41] a introduit les estimateurs de maximum de vraisemblance non paramétriques de  $F$  et  $G$  donnés de la façon suivante :

Il est connu que La fonction de hasard cumulée de  $Y$  est donnée par

$$\begin{aligned}
\Lambda(y) &= \int_{-\infty}^y \frac{dF(t)}{1 - F(t)} \\
&= -\log(1 - F(t)),
\end{aligned}$$

qui son estimateur naturel est donné par

$$\Lambda_n(y) = -\log(1 - F_n(t)).$$

On peut facilement montrer que

$$\Lambda_n(y) = \frac{1}{n} \sum_1^n \frac{1_{\{Y_i \leq y\}}}{C_n(Y_i)}$$

Donc

$$\begin{aligned}
F_n(y) &= 1 - \exp[-\Lambda_n(y)] \\
&= 1 - \exp \left[ -\frac{1}{n} \sum_1^n \frac{1_{\{Y_i \leq y\}}}{C_n(Y_i)} \right] \\
&= 1 - \prod_{i=1}^n \exp \left[ -\frac{1}{n} \frac{1_{\{Y_i \leq y\}}}{C_n(Y_i)} \right] \\
&= 1 - \prod_{i|Y_i \leq y}^n \exp \left[ \frac{1}{n} \frac{1}{C_n(Y_i)} \right].
\end{aligned}$$

Et comme

$$\begin{aligned} \exp \left[ \frac{1}{n} \frac{1}{C_n(Y_i)} \right] &\simeq 1 - \frac{1}{nC_n(Y_i)} \\ &= \frac{nC_n(Y_i) - 1}{nC_n(Y_i)} \end{aligned}$$

on trouve que

$$F_n(y) = 1 - \prod_{i|Y_i \leq y} \left[ \frac{nC_n(Y_i) - 1}{nC_n(Y_i)} \right].$$

On peut montrer aussi que

$$G_n(y) = \prod_{i|T_i > y} \left[ \frac{nC_n(T_i) - 1}{nC_n(T_i)} \right].$$

La relation (2.1) donne un estimateur de la probabilité  $\mu$

$$\mu_n = \frac{G_n(y) [1 - F_n(y^-)]}{C_n(y)}.$$

He et Yang [26] ont montré que  $\mu_n$  est équivalent à l'estimateur le plus familier étudié dans la littérature  $\int G_n(x) dF_n(x)$  pour tout  $y$  tel que  $C_n(y) > 0$ .

Il est clair que  $\mu_n$  a une formule plus simple.

On définit maintenant, pour toute fonction de distribution  $L$ , les points finals suivants

$$a_L = \inf \{y : L(y) > 0\} \quad \text{et} \quad b_L = \sup \{y : L(y) < 1\}.$$

Par le corollaire de He et Yang [26], on a

$$\mu_n \longrightarrow \mu_0 = \int G_0(x) dF_0(x) \text{ p.s. lorsque } n \rightarrow \infty,$$

où  $F_0$  et  $G_0$  sont les distributions conditionnelles définies par :

$$\begin{aligned} F_0(x) &= \mathbb{P}(Y \leq x | Y \geq a_G) \\ &= \frac{\mathbb{P}(Y \leq x, Y \geq a_G)}{\mathbb{P}(Y \geq a_G)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_0(x) &= \mathbb{P}(T \leq x | T \leq b_F) \\ &= \frac{\mathbb{P}(T \leq x, T \leq b_F)}{\mathbb{P}(T \leq b_F)}. \end{aligned}$$

Woodroffe [51] a montré en Théorème 2 la convergence uniforme de  $F_n$  vers  $F_0$  et de  $G_n$  vers  $G_0$ , où

$$\sup_y |F_n(y) - F_0(y)| \xrightarrow{\mathbf{P}\text{-p.s.}} 0 \quad \text{et} \quad \sup_y |G_n(y) - G_0(y)| \xrightarrow{\mathbf{P}\text{-p.s.}} 0.$$

En plus, on peut remarquer que  $F$  est identifiable ( $F = F_0$ ) seulement lorsque  $a_G \leq a_F$  et  $G$  est identifiable ( $G = G_0$ ) seulement si  $b_G \leq b_F$ . Par conséquent,  $\mu$  est identifiable sous les mêmes conditions.

Puisque  $N$  est inconnue et  $n$  est connue (même si elle est aléatoire) nos résultats ne seront pas établis par rapport à la mesure de probabilité  $\mathbb{P}$  (relative au  $N$ -échantillon), mais on impliquera la probabilité conditionnelle  $\mathbf{P}$  relative au  $n$ -échantillon. Aussi  $\mathbb{E}$  et  $\mathbf{E}$  désigneront les espérances relatives à  $\mathbb{P}$  et  $\mathbf{P}$  respectivement.

Étant donné les triplets de variables aléatoires observées  $(Y_1, X_1, T_1), \dots, (Y_n, X_n, T_n)$ , où les  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  ont des valeurs dans  $\mathcal{F}$  avec  $(\mathcal{F}, d)$  est un espace semi métrique de dimension infinie, et en combinant les idées de Ferraty et Vieu [25] et Ould Saïd et Lemdani [45], l'estimateur à noyau de la fonction de régression généralisée  $m_\varphi$  est donné par

$$\frac{\sum_{i=1}^n \varphi(Y_i) K(h^{-1}d(x, X_i)) G_n^{-1}(Y_i)}{\sum_{i=1}^n K(h^{-1}d(x, X_i)) G_n^{-1}(Y_i)},$$

avec  $K$  est une fonction noyau standard univariée et la fenêtre  $h := h_n$  est une suite de nombres réels strictement positifs qui jouent un rôle de paramètre de lissage et vérifiant  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ .

Notons que toutes les sommes contenant  $G_n^{-1}(Y_i)$  sont prises pour  $i$  tel que  $G_n^{-1}(Y_i) \neq 0$ . Suivant Barrientos-Marin et al. [4] l'estimation locale linéaire de  $m_\varphi$  peut être vu comme la solution du problème de minimisation suivant

$$\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^n (\varphi(Y_i) - a - b\beta(X_i, x))^2 K(h^{-1}d(X_i, x)) G_n^{-1}(Y_i), \quad (2.2)$$

où  $\beta(., .)$  est une fonction réelle connue définie de  $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que,  $\forall x \in \mathcal{F}, \beta(x, x) = 0$ .

Soit

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \beta(X_1, x) & \dots & \beta(X_n, x) \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} \varphi(Y_1) \\ \vdots \\ \varphi(Y_n) \end{bmatrix}$$

$$W = \text{diag}(K(h^{-1}d(X_i, x)) G_n^{-1}(Y_i))$$

et

$$e_1 = (1, 0) \in \mathbb{R}^2.$$

Par suite, d'après (2.2) une algèbre simple montre que  $\hat{m}_\varphi(x)$  peut être exprimé de même que

$$\hat{m}_\varphi(x) = e_1' (X' W X)^{-1} X' W Y.$$

Par des calculs simples, on peut trouver la formule suivante de notre estimateur

$$\hat{m}_\varphi(x) = \frac{\sum_{i,j=1}^n W_{ij}(x) \varphi(Y_j)}{\sum_{i,j=1}^n W_{ij}(x)} \quad \left( \frac{0}{0} := 0 \right), \quad (2.3)$$

où

$$W_{ij}(x) = \beta(X_i, x) (\beta(X_i, x) - \beta(X_j, x)) K(h^{-1}d(X_i, x)) K(h^{-1}d(X_j, x)) G_n^{-1}(Y_i) G_n^{-1}(Y_j).$$

On va noter

$$\beta(X_i, x) (\beta(X_i, x) - \beta(X_j, x)) K(h^{-1}d(X_i, x))K(h^{-1}d(X_j, x))$$

par  $\Delta_{ij}(x)$ .

## 2.2 La convergence presque sûre ponctuelle

On examine le caractère asymptotique de l'estimateur local linéaire  $\widehat{m}_\varphi(x)$  pour un point fixé  $x$  dans  $\mathcal{F}$ .

Tout d'abord, supposons que  $a_G < a_F$  et  $b_G < b_F$  et considérons deux nombres réels  $c$  et  $d$  tels que  $a_F < c < d < b_F$ .

Pour tout réel positif  $h$ , soient  $B(x, h) := \{y \in \mathcal{F} / d(x, y) \leq h\}$  une boule fermée dans  $\mathcal{F}$  de centre  $x$  et rayon  $h$ ,  $\Phi_x(h, h') := P(h \leq d(x, X) \leq h')$  et  $\Phi_x(h) := \Phi_x(0, h)$ .

Ferraty et Vieu [25] ont expliqué dans leur livre le rôle majeur qu'il jouent les mesures de proximités entre les objets mathématiques dans toutes les méthodes statistiques. Et en déduire et dire, dans de nombreuses situations, une norme classique peut être utilisée pour mesurer la proximité entre deux objets. Parce que dans un espace euclidien de dimension finie, typiquement  $\mathbb{R}^p$ , il y a une équivalence entre toutes les normes, le choix au sens mathématique de ce genre de mesure n'est pas crucial à part de certaines contraintes pratiques comme, par exemple, la facilité de calcul. Mais lorsque l'espace d'observations n'est pas de dimension finie, l'équivalence entre les normes n'est plus vraie. Alors le choix de la norme utilisée devient un élément crucial pour l'étude des variables aléatoires fonctionnelles. Plus encore, considérer des espaces normés ou métriques peut devenir trop précis. Autre chose, Il faut signaler qu'il est préféré d'utiliser une semi-métrique plutôt qu'une métrique. Le premier argument que toute étude réalisée dans le cadre d'un espace semi-métrique s'applique immédiatement au cas d'un espace métrique. le deuxième argument les problèmes liés à la grande dimension des données. L'analyse en Composantes Principales classique est considérée comme un outil utile pour afficher les données dans un espace dimensionnel réduit. Cette méthode nous montre des grands différences entre les deux approches ; la semi métrique nous permet de voir beaucoup plus de structure dans les variables, par contre la métrique ne révèle pas de structure forte dans la variable. Une discussion plus approfondie de l'intérêt d'utiliser différents types de semi-métriques est présentée dans le même livre (chapitre 3)

### 2.2.1 Hypothèses et résultats

La convergence presque sûre ponctuelle avec taux de l'estimateur local linéaire  $\widehat{m}_\varphi$  de la fonction de régression généralisée  $m_\varphi$  sera établie sous les hypothèses suivantes .

(H2.1) Pour tout  $h > 0$ ;  $\Phi_x(h) > 0$ .

(H2.2) Il existe  $b > 0$  tel que pour tout  $x_1, x_2 \in B(x, h)$  ;

$$|m_\varphi(x_1) - m_\varphi(x_2)| \leq C_x d^b(x_1, x_2)$$

où  $C_x$  est une constante positive dépend de  $x$ .

(H2.3) La fonction  $\beta(., .)$  est telle que

$$\exists 0 < M_1 < M_2, \forall x' \in \mathcal{F}, M_1 d(x, x') \leq |\beta(x, x')| \leq M_2 d(x, x').$$

(H2.4) Le noyau  $K$  est une fonction positive et différentiable sur son support  $[0, 1]$ .

(H2.5) La fenêtre  $h$  satisfait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h)}} \right) = 0.$$

(H2.6) Il existe un entier  $n_0$ , tel que

$$\forall n > n_0, \frac{1}{\Phi_x(h)} \int_0^1 \Phi_x(zh, h) \frac{d}{dz} (z^2 K(z)) dz > 0.$$

$$(H2.7) \quad h \int_{B(x,h)} \beta(u, x) d\mathbf{P}_X(u) = o \left( \int_{B(x,h)} \beta^2(u, x) d\mathbf{P}_X(u) \right),$$

où  $d\mathbf{P}_X$  est la distribution de  $X$ .

(H2.8)  $\forall m \geq 2; \sigma_m : x \mapsto \mathbf{E}(|\varphi^m(Y)| | X)$  est un opérateur continu sur  $\mathcal{F}$ .

**Théorème 2.1** *Sous les hypothèses (H2.1)-(H2.8), on a*

$$\widehat{m}_{\varphi(x)} - m_{\varphi(x)} = O(h^b) + O_{p.s.} \left( \sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h)}} \right).$$

**Remarque 2.1** *Rappelons que dans le cas où la variable explicative est multivariée, les vitesses de convergence de l'estimateur non paramétrique sont exprimées en fonction d'un terme de la forme  $h_n^d$ . Mais pour le cas fonctionnel, il faut noter que chaque résultat asymptotique traité dans ce contexte est directement lié à la mesure (par rapport à la distribution de probabilité de  $X$ ) d'une boule de centre  $x$ . Il vient que la fonction suivante :  $\Phi_x(\cdot)$  joue un rôle crucial. Plus précisément, le point clé est le comportement de la fonction  $\Phi_x(\cdot)$  lorsque le rayon de la boule tend vers zéro, et c'est la raison pourquoi on l'appelle fonction de probabilité de petite boule. Pour bien comprendre l'idée, regardez par exemple le résultat fourni dans le Théorème 2.1, mais gardez à l'esprit que tout dit ici concernera de manière équivalente tous les autres taux de convergence étudiés dans la littérature. Le Théorème 2.1 a déclaré que, dans des conditions appropriées, l'estimateur non paramétrique  $\widehat{m}_{\varphi}$  converge vers  $m_{\varphi}$  avec un taux de convergence de la forme*

$$O(h^b) + O \left( \sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h)}} \right).$$

*Alors que la première composante provient du biais de l'estimation et dépend uniquement sur la régularité de l'opérateur  $m_{\varphi}$ , la seconde vient de la variabilité de l'estimation et est donc fortement liée à la concentration des données. Le paramètre de Lipschitz  $b$  défini dans la condition (H1.2) est lié avec la régularité de  $m_{\varphi}$ , tandis que la fonction de probabilité de petite boule  $\Phi_x(h)$  mesure directement la concentration de la variable fonctionnelle  $X$ . Moins les données fonctionnelles  $X_1, \dots, X_n$  sont dispersées, plus l'estimateur sera efficace. En d'autres termes, plus la variable aléatoire  $X$  est concentrée, plus la fonction de probabilité de petite boule sera élevée et donc le taux de convergence de l'estimation fonctionnelle non paramétrique sera plus rapide vers la vraie opérateur cible. A ce stade, il est naturel de souhaiter que la fonction de probabilité de petite boule soit aussi élevée que possible pour éviter d'éventuels effets de sur dispersion.*

Pour cette raison, il faut noter que la notion de concentration et donc la fonction  $\Phi_x$  elle-même est directement liée à la structure de l'espace  $\mathcal{F}$  de sorte qu'on peut réduire les éventuels de sur dispersion en changeant simplement la structure topologique sur l'espace  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire en changeant la semi-métrique  $d$ . D'où, il convient de souligner que les rôles de la distribution de probabilité de la variable fonctionnelle  $X$  et de la semi-métrique  $d$  sont complètement indissociable dans le cadre statistique fonctionnel non paramétrique. Pour plus d'études et exemples sur ce point on conseil le lecteur de lire le livre de Ferraty et Vieu [25].

## 2.2.2 Preuves

**Preuve du Théorème 2.1** : Pour prouver le Théorème 2.1 nous avons besoin de pseudo-estimateurs suivants

$$r_l(x) = \frac{\mu_n^2}{n(n-1)\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \sum_{i \neq j} G_n^{-1}(Y_i)G_n^{-1}(Y_j)\Delta_{ij}(x)\varphi^l(Y_j) \quad (2.4)$$

et

$$\tilde{m}_l(x) = \frac{\mu^2}{n(n-1)\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \sum_{i \neq j} G^{-1}(Y_i)G^{-1}(Y_j)\Delta_{ij}(x)\varphi^l(Y_j), \quad (2.5)$$

pour  $l = 0, 1$ .

Considérant la décomposition :

$$\begin{aligned} \widehat{m}_\varphi(x) - m_\varphi(x) &= \frac{r_1(x)}{r_0(x)} - m_\varphi(x) \quad (2.6) \\ &= \frac{r_1(x)}{r_0(x)} + \frac{m_\varphi(x)}{r_0(x)} + \frac{m_\varphi(x)}{r_0(x)} - m_\varphi(x) \\ &= \frac{1}{r_0(x)} \{r_1(x) - m_\varphi(x)\} + \frac{m_\varphi(x)}{r_0(x)} \{-r_0(x) + 1\} \\ &= \frac{1}{r_0(x)} \{r_1(x) - \tilde{m}_1(x)\} + \frac{1}{r_0(x)} \{\tilde{m}_1(x) - \mathbf{E}(\tilde{m}_1(x))\} \\ &+ \frac{1}{r_0(x)} \{\mathbf{E}(\tilde{m}_1(x)) - m_\varphi(x)\} \\ &+ \frac{m_\varphi(x)}{r_0(x)} \{(\tilde{m}_0(x) - r_0(x)) + (\mathbf{E}(\tilde{m}_0(x)) - \tilde{m}_0(x)) + (-\mathbf{E}(\tilde{m}_0(x)) + 1)\}. \end{aligned}$$

En plus, dans la suite, on va noter pour tout  $x \in \mathcal{F}$ , et pour tout  $i = 1, \dots, n$

$$K_i(x) := K(h^{-1}d(x, X_i)) \quad \text{et} \quad \beta_i(x) := \beta(X_i, x).$$

Pour simplifier les choses, nous allons besoin aussi aux lemmes suivants

**Lemme 2.1** Sous les conditions (H2.1)-(H2.8), nous obtenons

$$|r_l(x) - \tilde{m}_l(x)| = O_{p.s.} \left( \sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h)}} \right).$$

**Preuve du Lemme 2.1 :** On a

$$\begin{aligned}
|r_l(x) - \tilde{m}_l(x)| &= \left| \frac{\mu_n^2}{n(n-1)\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \sum_{i \neq j} G_n^{-1}(Y_i)G_n^{-1}(Y_j)\Delta_{ij}(x)\varphi^l(Y_j) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\mu^2}{n(n-1)\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \sum_{i \neq j} G^{-1}(Y_i)G^{-1}(Y_j)\Delta_{ij}(x)\varphi^l(Y_j) \right| \\
&= \left| \sum_{i \neq j} \frac{\Delta_{ij}(x)\varphi^l(Y_j)}{n(n-1)\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \left( \frac{\mu_n^2}{G_n(Y_i)G_n(Y_j)} - \frac{\mu^2}{G(Y_i)G(Y_j)} \right) \right| \\
&= \left| \sum_{i \neq j} \frac{\Delta_{ij}(x)\varphi^l(Y_j)}{n(n-1)\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \right. \\
&\quad \times \left. \left( \frac{\mu_n^2}{G_n(Y_i)G_n(Y_j)} - \frac{\mu^2}{G(Y_i)G(Y_j)} - \frac{\mu^2}{G_n(Y_i)G_n(Y_j)} + \frac{\mu^2}{G_n(Y_i)G_n(Y_j)} \right) \right| \\
&\leq \left[ \frac{|\mu_n^2 - \mu^2|}{G_n^2(a_F)} + \mu^2 \left( \frac{\sup_{y \in [c,d]} |G_n^2(y) - G^2(y)|}{G^2(a_F)G_n^2(a_F)} \right) \right] \\
&\quad \times \left| \sum_{i \neq j} \frac{\Delta_{ij}(x)\varphi^l(Y_j)}{n(n-1)\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \right|
\end{aligned}$$

D'après le Théorème (3.2) de He et Yang [26] on a,  $|\mu_n - \mu| = O_{p.s.}(n^{-1/2})$ , alors que la remarque (6) de Woodroffe [51] donne  $|G_n(a_F) - G(a_F)| = O_{p.s.}(n^{-1/2})$  qui est négligeable par rapport à  $O\left(\sqrt{\frac{\ln(n)}{n\Phi_x(h)}}\right)$  et d'autre part,

$$\sup_{y \in [c,d]} |G_n(y) - G(y)| = O(n^{-1/2}), \mathbf{P} - p.s..$$

Pour la suite de la preuve, on doit noter que Leulmi et Messaci [38] ont montré que

$$\sum_{i \neq j} \frac{\Delta_{ij}(x)\varphi^l(Y_j)}{n(n-1)\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} - \mathbf{E} \left( \sum_{i \neq j} \frac{\Delta_{ij}(x)\varphi^l(Y_j)}{n(n-1)\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \right) = O_{p.co} \left( \sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h)}} \right),$$

voir le Lemme 1.3. D'où

$$|r_l(x) - \tilde{m}_l(x)| = O_{p.s.} \left( \sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h)}} \right).$$

**Lemme 2.2** Supposons que les conditions (H2.1)-(H2.5) sont vérifiées, on a

$$|\mathbf{E}(\tilde{m}_1(x)) - m_\varphi(x)| = O(h^b).$$

*Preuve du Lemme 2.2 : On a*

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\tilde{m}_1(x)) &= \mathbf{E} \left( \frac{\mu^2}{n(n-1)\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \sum_{i \neq j} G^{-1}(Y_i)G^{-1}(Y_j)\Delta_{ij}(x)\varphi(Y_j) \right) \\
&= \frac{\mu^2}{\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \mathbf{E} \left( \frac{1}{G(Y_1)G(Y_2)} \Delta_{12}(x)\varphi(Y_2) \right) \\
&= \frac{\mu^2}{\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \mathbf{E} \left[ \mathbf{E} \left( \Delta_{12}(x)\varphi(Y_2) \frac{1}{G(Y_1)G(Y_2)} \middle| \sigma(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \right) \right] \\
&= \frac{\mu^2}{\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \mathbf{E} \left[ \mathbb{E} \left( \Delta_{12}(x)\varphi(Y_2) \frac{1_{\{Y_1 \geq T_1\}}1_{\{Y_2 \geq T_2\}}}{\mu^2 G(Y_1)G(Y_2)} \middle| \sigma(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \right) \right] \\
&= \frac{\mu^2}{\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \mathbf{E} \left[ \frac{\Delta_{12}(x)\varphi(Y_2)}{\mu^2 G(Y_1)G(Y_2)} \mathbb{E} (1_{\{Y_1 \geq T_1\}}1_{\{Y_2 \geq T_2\}} \middle| \sigma(X_1, Y_1, X_2, Y_2)) \right] \\
&= \frac{1}{\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \mathbf{E}(\Delta_{12}(x)\varphi(Y_2)) \\
&= \frac{1}{\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \mathbf{E}[\Delta_{12}(x)\mathbf{E}(\varphi(Y_2)|X_2)].
\end{aligned}$$

On peut écrire alors sous (H2.4)

$$\begin{aligned}
|m_\varphi(x) - \mathbf{E}(\tilde{m}_1(x))| &= \frac{1}{|\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))|} |\mathbf{E}(\Delta_{12}(x)(m_\varphi(x) - m_\varphi(X_2)))| \\
&\leq \sup_{x' \in B(x, h)} |m_\varphi(x) - m_\varphi(x')|.
\end{aligned}$$

En utilisant (H2.2), on obtient

$$|\mathbf{E}(\tilde{m}_1(x)) - m_\varphi(x)| = O(h^b).$$

**Lemme 2.3** i) Si les hypothèses (H2.1)-(H2.8) sont satisfaites, alors

$$\tilde{m}_1(x) - \mathbf{E}(\tilde{m}_1(x)) = O_{p.co} \left( \sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h)}} \right).$$

ii) Sous (H2.1), (H2.3)-(H2.7), on a

$$\tilde{m}_0(x) - 1 = O_{p.co} \left( \sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h)}} \right) \quad \text{et}$$

$$\exists \vartheta > 0, \quad \text{tel que} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\tilde{m}_0(x) < \vartheta) < \infty.$$

*Preuve du Lemme 2.3 : Remarquons que ;*

$$\tilde{m}_1(x) = Q(x) [M_{2,1}(x)M_{4,0}(x) - M_{3,1}(x)M_{3,0}(x)],$$

où pour  $p = 2, 3, 4$  et  $l = 0, 1$ ,

$$Q(x) = \frac{n^2 h^2 \Phi_x^2(h)}{n(n-1)\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))}$$

et

$$M_{p,l}(x) = \frac{1}{n\Phi_x(h)} \sum_{i=1}^n \frac{\mu K_i(x) \beta_i^{p-2}(x) \varphi^l(Y_i)}{h^{p-2} G(Y_i)}.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} \tilde{m}_1(x) - \mathbf{E}(\tilde{m}_1(x)) &= Q(x) \{M_{2,1}(x)M_{4,0}(x) - \mathbf{E}(M_{2,1}(x)M_{4,0}(x))\} \\ &\quad - Q(x) \{M_{3,1}(x)M_{3,0}(x) - \mathbf{E}(M_{3,1}(x)M_{3,0}(x))\} \end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned} M_{2,1}(x)M_{4,0}(x) - \mathbf{E}(M_{2,1}(x)M_{4,0}(x)) &= (M_{2,1}(x) - \mathbf{E}(M_{2,1}(x))) (M_{4,0}(x) - \mathbf{E}(M_{4,0}(x))) \\ &\quad + (M_{2,1}(x) - \mathbf{E}(M_{2,1}(x))) \mathbf{E}(M_{4,0}(x)) \\ &\quad + (M_{4,0}(x) - \mathbf{E}(M_{4,0}(x))) \mathbf{E}(M_{2,1}(x)) \\ &\quad + \mathbf{E}(M_{2,1}(x))\mathbf{E}(M_{4,0}(x)) - \mathbf{E}(M_{2,1}(x)M_{4,0}(x)) \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} M_{3,1}(x)M_{3,0}(x) - \mathbf{E}(M_{3,1}(x)M_{3,0}(x)) &= (M_{3,1}(x) - \mathbf{E}(M_{3,1}(x))) (M_{3,0}(x) - \mathbf{E}(M_{3,0}(x))) \\ &\quad + (M_{3,1}(x) - \mathbf{E}(M_{3,1}(x))) \mathbf{E}(M_{3,0}(x)) \\ &\quad + (M_{3,0}(x) - \mathbf{E}(M_{3,0}(x))) \mathbf{E}(M_{3,1}(x)) \\ &\quad + \mathbf{E}(M_{3,1}(x))\mathbf{E}(M_{3,0}(x)) - \mathbf{E}(M_{3,1}(x)M_{3,0}(x)). \end{aligned}$$

Nous allons démontrer que pour  $p = 2, 3, 4$  et  $l = 0, 1$

$$Q(x) = O(1),$$

$$\mathbf{E}(M_{p,l}(x)) = O(1),$$

$$\mathbf{E}(M_{2,1}(x))\mathbf{E}(M_{4,0}(x)) - \mathbf{E}(M_{2,1}(x)M_{4,0}(x)) = O\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h)}}\right),$$

$$\mathbf{E}(M_{3,1}(x))\mathbf{E}(M_{3,0}(x)) - \mathbf{E}(M_{3,1}(x)M_{3,0}(x)) = O\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h)}}\right),$$

$$M_{p,l}(x) - \mathbf{E}(M_{p,l}(x)) = O_{p.co}\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h)}}\right).$$

- Traitement du terme  $Q(x)$

On a déjà vu dans le chapitre précédent comment montrer que

$$Q(x) = O(1).$$

- Sous (H2.1)-(H2.4), on peut facilement avoir pour  $p = 2, 3, 4$  et  $l = 0, 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(M_{p,l}(x)) &= \mathbf{E}\left(\frac{1}{\Phi_x(h)} \sum_{i=1}^n \frac{\mu K_i(x) \beta_i^{p-2}(x) \varphi^l(Y_i)}{h^{p-2} G(Y_i)}\right) \\ &= \mu h^{2-p} \Phi_x^{-1}(h) \mathbf{E}\left[\mathbb{E}\left(K_1(x) \beta_1^{p-2}(x) \varphi^l(Y_1) \frac{1_{\{Y_1 T_1\}}}{\mu G(Y_1)} \middle| \sigma(X_1, Y_1)\right)\right] \\ &= h^{2-p} \Phi_x^{-1}(h) \mathbf{E}(K_1(x) \beta_1^{p-2}(x) \varphi^l(Y_1)) \\ &= h^{2-p} \Phi_x^{-1}(h) \mathbf{E}(K_1(x) \beta_1^{p-2}(x) m_\varphi^l(X_1)). \end{aligned}$$

Le Lemme 1.2 (i) et la condition (H2.2) nous permettent d'avoir

$$\mathbf{E}(M_{p,l}(x)) = O(1).$$

- Passant à traiter le terme  $\mathbf{E}(M_{2,1}(x))\mathbf{E}(M_{4,0}(x)) - \mathbf{E}(M_{2,1}(x)M_{4,0}(x))$   
D'un part, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(M_{2,1}(x))\mathbf{E}(M_{4,0}(x)) &= \frac{\mu^2}{n^2 h^2 \Phi_x^2(h)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{E} \left( \frac{K_i(x) \beta_i^2(x)}{G(Y_i)} \right) \mathbf{E} \left( \frac{K_j(x) \varphi(Y_j)}{G(Y_j)} \right) \\ &= \frac{\mu^2}{h^2 \Phi_x^2(h)} \mathbf{E} \left( \frac{K_1(x) \beta_1^2(x)}{G(Y_1)} \right) \mathbf{E} \left( \frac{K_1(x) \varphi(Y_1)}{G(Y_1)} \right) \end{aligned}$$

et d'autre part, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(M_{2,1}(x)M_{4,0}(x)) &= \frac{\mu^2}{n^2 h^2 \Phi_x^2(h)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{E} \left( \frac{K_i(x) \beta_i^2(x) K_j(x) \varphi(Y_j)}{G(Y_i) G(Y_j)} \right) \\ &= \frac{\mu^2}{n^2 h^2 \Phi_x^2(h)} \sum_{i=j=1}^n \mathbf{E} \left( \frac{K_i^2(x) \beta_i^2(x) \varphi(Y_i)}{G^2(Y_i)} \right) \\ &\quad + \frac{\mu^2}{n^2 h^2 \Phi_x^2(h)} \sum_{i \neq j} \mathbf{E} \left( \frac{K_i(x) \beta_i^2(x) K_j(x) \varphi(Y_j)}{G(Y_i) G(Y_j)} \right) \\ &\leq \frac{\mu^2}{G^2(a_F) n^2 h^2 \Phi_x^2(h)} \sum_{i=j=1}^n \mathbf{E} (K_i^2(x) \beta_i^2(x) \varphi(Y_i)) \\ &\quad + \frac{\mu^2}{n^2 h^2 \Phi_x^2(h)} \sum_{i \neq j} \mathbf{E} \left( \frac{K_i(x) \beta_i^2(x) K_j(x) \varphi(Y_j)}{G(Y_i) G(Y_j)} \right) \\ &= O((n \Phi_x(h))^{-1}) + \frac{\mu^2 (n^2 - n)}{n^2 h^2 \Phi_x^2(h)} \mathbf{E} \left( \frac{K_1(x) \beta_1^2(x)}{G(Y_1)} \right) \mathbf{E} \left( \frac{K_1(x) \varphi(Y_1)}{G(Y_1)} \right). \end{aligned}$$

Alors, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(M_{2,1}(x))\mathbf{E}(M_{4,0}(x)) - \mathbf{E}(M_{2,1}(x)M_{4,0}(x)) &= \left( 1 - \frac{n(n-1)}{n^2} \right) \mu^2 h^{-2} \Phi_x^{-2}(h) \\ &\quad \mathbf{E} \left( \frac{K_1(x) \beta_1^2(x)}{G(Y_1)} \right) \mathbf{E} \left( \frac{K_1(x) \varphi(Y_1)}{G(Y_1)} \right) \\ &\quad + O((n \Phi_x(h))^{-1}). \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes arguments que précédemment, on obtient

$$\mathbf{E}(M_{2,1}(x))\mathbf{E}(M_{4,0}(x)) - \mathbf{E}(M_{2,1}(x)M_{4,0}(x)) = O((n \Phi_x(h))^{-1}),$$

qui est négligeable par rapport à  $O\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n \Phi_x(h)}}\right)$ , sous (H2.5).

- En utilisant les mêmes étapes, on peut prouver que

$$\mathbf{E}(M_{3,1}(x))\mathbf{E}(M_{3,0}(x)) - \mathbf{E}(M_{3,1}(x)M_{3,0}(x)) = O\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n \Phi_x(h)}}\right).$$

– Traitement du terme  $M_{p,l}(x) - \mathbf{E}(M_{p,l}(x))$

On pose

$$M_{p,l}(x) - \mathbf{E}(M_{p,l}(x)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^{(p,l)}(x),$$

où

$$Z_i^{(p,l)}(x) = \frac{1}{h^{p-2}\Phi_x(h)} \left\{ \frac{\mu K_i(x) \beta_i^{p-2}(x) \varphi^l(Y_i)}{G(Y_i)} - \mathbf{E} \left( \frac{\mu K_i(x) \beta_i^{p-2}(x) \varphi^l(Y_i)}{G(Y_i)} \right) \right\}.$$

Afin d'appliquer une inégalité exponentielle, on concentre sur les moments absolus de la v.a.r.  $Z_i(x)$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left| \left\{ Z_i^{(p,l)}(x) \right\}^m \right| &= h^{(-p+2)m} \Phi_x^{-m}(h) \mathbf{E} \left| \sum_{k=0}^m C_k^m (-1)^{m-k} \left( \frac{\mu K_i(x) \beta_i^{p-2}(x) \varphi^l(Y_i)}{G(Y_i)} \right)^k \right. \\ &\quad \times \left. \left( \mathbf{E} \left[ \frac{\mu K_i(x) \beta_i^{p-2}(x) \varphi^l(Y_i)}{G(Y_i)} \right] \right)^{m-k} \right| \\ &\leq h^{(-p+2)m} \Phi_x^{-m}(h) \sum_{k=0}^m C_k^m \mathbf{E} \left( \frac{\mu^k K_i^k(x) \beta_i^{(p-2)k}(x) \varphi^{lk}(Y_i)}{G^k(Y_i)} \right) \\ &\quad \left| \mathbf{E} \left( \frac{\mu K_i(x) \beta_i^{p-2}(x) \varphi^l(Y_i)(X_i)}{G(Y_i)} \right) \right|^{m-k} \end{aligned} \tag{2.7}$$

On remarque que sous (H2.2) et (H2.8), on a, pour tout  $k > 0$ ,

$$\mathbf{E} \left( \frac{\mu^k K_i^k(x) \beta_i^{(p-2)k}(x) \varphi^{lk}(Y_i)}{G^k(Y_i)} \right) \leq \frac{C \mu^k}{G^k(a_F)} \mathbf{E} \left( K_i^k(x) \beta_i^{(p-2)k}(x) \right)$$

et

$$\left| \mathbf{E} \left( \frac{\mu K_i(x) \beta_i^{p-2}(x) \varphi^l(Y_i)}{G(Y_i)} \right) \right|^{m-k} \leq C \left| \mathbf{E} \left( K_i(x) \beta_i^{p-2}(x) \right) \right|^{m-k}.$$

Cette dernière combinée avec (2.7) et Lemme 1.2-(i), nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left| \left\{ Z_i^{(p,l)}(x) \right\}^m \right| &= O(h^{(-p+2)m} \Phi_x^{-m}(h) \sum_{k=0}^m C_k^m \mathbf{E}[K_i^k(x) \beta_i^{(p-2)k}(x)] \mathbf{E}[K_i(x) \beta_i^{p-2}(x)]^{m-k}) \\ &= O \left( \max_{k \in \{0, \dots, m\}} \Phi_x^{(-k+1)}(h) \right) \\ &= O \left( \Phi_x^{(-m+1)}(h) \right). \end{aligned}$$

Finalement, il suffit d'appliquer le Corollaire A.8 de Ferraty et Vieu [25]–(ii) (rappelé en Proposition 5 dans l'Annexe) avec  $a_n^2 = \Phi_x^{(-1)}(h)$  on obtient, pour  $p \in \{2, 3, 4\}$  et  $l \in \{0, 1\}$

$$M_{p,l}(x) - \mathbf{E}(M_{p,l}(x)) = O_{p,co} \left( \sqrt{\frac{\ln n}{n \Phi_x(h)}} \right)$$

Pour prouver la deuxième partie du Lemme, il suffit de remarquer que

$$\mathbf{E}(\tilde{m}_0(x)) = 1.$$

En effet

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\tilde{m}_0(x)) &= \mathbf{E}\left(\frac{\mu^2}{n(n-1)\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \sum_{i \neq j} G^{-1}(Y_i)G^{-1}(Y_j)\Delta_{ij}(x)\right) \\ &= \frac{\mu^2}{n(n-1)\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \mathbf{E}\left(\frac{1}{G(Y_1)G(Y_2)} \Delta_{12}(x)\right) \\ &= \frac{\mu^2}{\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \mathbf{E}\left[\mathbb{E}\left(\Delta_{12}(x) \frac{1_{\{Y_1 \geq T_1\}} 1_{\{Y_2 \geq T_2\}}}{\mu^2 G(Y_1)G(Y_2)} \middle| \sigma(X_1, Y_1, X_2, Y_2)\right)\right] \\ &= \frac{1}{\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \mathbf{E}(\Delta_{12}(x)) \\ &= 1, \end{aligned}$$

et cela nous amène à obtenir le dernier résultat.

## 2.3 La convergence presque sûre uniforme

Dans la section suivante, on va examiner la convergence presque sûre uniforme de l'estimateur proposé sur un sous ensemble  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  de  $\mathcal{F}$ , tel que  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} \subset \bigcup_{k=1}^{d_n} B(x_k, r_n)$ , où  $x_k \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  et  $r_n$  (respectivement  $d_n$ ) est une suite de nombres réels (respectivement entiers) positifs.

Pour cela, nous avons besoin des hypothèses suivantes

### 2.3.1 Hypothèses et résultats

(U2.1) Il existe une fonction différentiable  $\Phi$  et des constantes strictement positives  $C, C_1$  et  $C_2$  telles que

$$\forall x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}, \forall h > 0; 0 < C_1 \Phi(h) \leq \Phi_x(h) \leq C_2 \Phi(h) < \infty$$

et

$$\exists \eta_0 > 0, \forall \eta < \eta_0, \Phi'(\eta) < C,$$

où  $\Phi'$  est la dérivée première de  $\Phi$  avec  $\Phi(0) = 0$ .

(U2.2) La fonction de régression généralisée  $m_\varphi$  satisfait

$$\exists C_x > 0, \exists b > 0, \forall x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}, x' \in B(x, h), |m_\varphi(x) - m_\varphi(x')| \leq C_x d^b(x, x').$$

(U2.3) La fonction  $\beta(.,.)$  satisfait (H2.3) uniformément en  $x$  et la condition de Lipschitz suivante

$$\exists C > 0, \forall x_1 \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}, x_2 \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}, x \in \mathcal{F}, |\beta(x, x_1) - \beta(x, x_2)| \leq C d(x_1, x_2).$$

(U2.4) Le noyau  $K$  satisfait (H2.4) et est Lipschitzien sur  $[0, 1]$ .

(U2.5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} h = 0$ , et pour  $r_n = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ , on a pour  $n$  suffisamment grand

$$\frac{(\ln n)^2}{n\Phi(h)} < \ln d_n < \frac{n\Phi(h)}{\ln n}$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{(1-\beta)} < \infty \quad \text{pour certain } \beta > 1.$$

(U2.6) La fenêtre  $h$  satisfait :  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists C > 0$ , tels que

$$\forall n > n_0, \forall x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}, \frac{1}{\Phi_x(h)} \int_0^1 \Phi_x(zh, h) \frac{d}{dz} (z^2 K(z)) dz > C > 0$$

et

$$h \int_{B(x,h)} \beta(u, x) d\mathbf{P}_X(u) = o \left( \int_{B(x,h)} \beta^2(u, x) d\mathbf{P}_X(u) \right)$$

uniformément en  $x$ .

(U2.7)  $\exists C > 0$  tel que  $\forall m \geq 2 : \mathbf{E}(|\varphi^m(Y)| | X = x) < v_m(x) < C < \infty$  avec  $v_m(\cdot)$  continue sur  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ . Maintenant nous sommes prêts de donner le résultat principal dans cette section.

**Théorème 2.2** *Sous les hypothèses (U2.1)-(U2.7), on a*

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} |\widehat{m}_{\varphi}(x) - m_{\varphi}(x)| = O(h^b) + O_{p.s} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}} \right).$$

**Remarque 2.2** *Ce résultat montre que le taux de convergence obtenu pour les données tronquées à gauche est le même à celui qui est été obtenu pour les données complètes.*

### 2.3.2 Preuves

**Preuve du Théorème 2.2** *La démonstration du Théorème 2.2 est basée sur la décomposition (2.6) et les Lemmes suivants*

**Lemme 2.4** *Sous les hypothèses (U2.1)-(U2.7), on a*

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} |r_l(x) - \tilde{m}_l(x)| = O_{p.s} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}} \right).$$

**Preuve du Lemme 2.4** *En suivant les mêmes étapes de la preuve du Lemme (2.1) et pour le terme*

$$\left| \sum_{i \neq j} \frac{1}{n(n-1) \mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \Delta_{ij}(x) \varphi^l(Y_i) \right|$$

*on va utiliser les résultats des Lemmes 1.6 et 1.7 qui nous donnent que*

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \left| \sum_{i \neq j} \frac{\Delta_{ij}(x) \varphi^l(Y_i)}{n(n-1) \mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} - \mathbf{E} \left( \sum_{i \neq j} \frac{\Delta_{ij}(x) \varphi^l(Y_i)}{n(n-1) \mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \right) \right| = O_{p.co} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}} \right).$$

*D'où on obtient nos résultat.*

**Lemme 2.5** *Sous les hypothèses (U2.1), (U2.2) et (U2.4), on obtient que*

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} |\mathbf{E}(\tilde{m}_1(x)) - m_{\varphi}(x)| = O(h^b).$$

**Preuve du Lemme 2.5** La preuve est similaire à celle du Lemme (2.2).

**Lemme 2.6** i) Sous les hypothèses (U2.1)-(U2.7), on a

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} |\tilde{m}_1(x) - \mathbf{E}(\tilde{m}_1(x))| = O_{p.co} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}} \right).$$

ii) Si (U2.1), (U2.3)-(U2.6) sont satisfaites, on obtient

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} |\tilde{m}_0(x) - 1| = O_{p.co} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}} \right) \quad \text{et}$$

$$\exists \vartheta > 0, \quad \text{tel que} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P} \left( \inf_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \tilde{m}_0(x) < \vartheta \right) < \infty.$$

**Preuve du Lemme 2.6** Comme nous avons déjà fait dans la démonstration du Lemme 2.3, on considère la décomposition

$$\tilde{m}_1(x) = Q(x) [M_{2,1}(x)M_{4,0}(x) - M_{3,1}(x)M_{3,0}(x)],$$

où, pour  $p = 2, 3, 4$  et  $l = 0, 1$ ,

$$Q(x) = \frac{n^2 h^2 \Phi_x^2(h)}{n(n-1) \mathbf{E}(\Delta_{12}(x))}$$

et

$$M_{p,l}(x) = \frac{1}{n\Phi_x(h)} \sum_{i=1}^n \frac{\mu K_i(x) \beta_i^{p-2}(x) \varphi^l(Y_i)}{h^{p-2} G(Y_i)}.$$

Suivant les mêmes étapes que précédemment et en utilisant le Lemme 1.5 au lieu de Lemme 1.2, on obtient sous (U2.1)-(U2.4) et (U2.6)

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} Q(x) = O(1),$$

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \mathbf{E}(M_{p,l}(x)) = O(1)$$

pour  $p = 2, 3, 4$  et  $l = 0, 1$ ,

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} |\mathbf{E}(M_{2,1}(x))\mathbf{E}(M_{4,0}(x)) - \mathbf{E}(M_{2,1}(x)M_{4,0}(x))| = O \left( \frac{1}{n\Phi(h)} \right);$$

et

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} |\mathbf{E}(M_{3,1}(x))\mathbf{E}(M_{3,0}(x)) - \mathbf{E}(M_{3,1}(x)M_{3,0}(x))| = O \left( \frac{1}{n\Phi(h)} \right);$$

qui est en utilisant la condition (U2.5), égal à  $O \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}} \right)$ .

Maintenant, on va prouver que

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} |M_{p,l}(x) - \mathbf{E}(M_{p,l}(x))| = O_{p.co} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}} \right).$$

Nous allons besoin de la décomposition suivante :

Soit  $j(x) = \arg \min_{j \in \{1, 2, \dots, d_n\}} d(x, x_j)$ .

On a

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} |M_{p,l}(x) - \mathbf{E}(M_{p,l}(x))| &= \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} |M_{p,l}(x) - M_{p,l}(x_{j(x)})| \\ &+ \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} |M_{p,l}(x_{j(x)}) - \mathbf{E}(M_{p,l}(x_{j(x)}))| \\ &+ \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} |\mathbf{E}(M_{p,l}(x_{j(x)})) - \mathbf{E}(M_{p,l}(x))| \\ &:= D_1^{p,l} + D_2^{p,l} + D_3^{p,l}. \end{aligned}$$

Maintenant, on va étudier chacun des termes  $D_k^{p,l}$  pour  $k = 1, 2, 3$

Commençant par  $D_1^{p,l}$ ,

comme le support de  $K$  est  $[0, 1]$  et en utilisant (U2.1), on peut écrire pour tout  $p = 2, 3, 4$

$$\begin{aligned} D_1^{p,l} &\leq \frac{C\mu}{nh^{p-2}\Phi(h)G(a_F)} \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^n |K_i(x)\beta_i^{p-2}(x)\varphi^l(Y_i)\mathbf{1}_{B(x,h)}(X_i) \\ &- K_i(x_{j(x)})\beta_i^{p-2}(x_{j(x)})\varphi^l(Y_i)\mathbf{1}_{B(x_{j(x),h)}}(X_i)| \\ &\leq \frac{C}{nh^{p-2}\Phi(h)} \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^n K_i(x)\mathbf{1}_{B(x,h)}|\varphi^l(Y_i)| |\beta_i^{p-2}(x) - \beta_i^{p-2}(x_{j(x)})\mathbf{1}_{B(x_{j(x),h)}}(X_i)| \\ &+ \frac{C}{nh^{p-2}\Phi(h)} \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^n \beta_i^{p-2}(x_{j(x)})\mathbf{1}_{B(x_{j(x),h)}}(X_i)|\varphi^l(Y_i)| |K_i(x)\mathbf{1}_{B(x,h)}(X_i) - K_i(x_{j(x)})| \\ &:= D_{1.1}^{p,l} + D_{1.2}^{p,l}. \end{aligned}$$

- Analysant le terme  $D_{1.1}^{p,l}$ .

Selon la condition (U2.3), on obtient

$$\mathbf{1}_{B(x,h)}|\beta_i(x) - \beta_i(x_{j(x)})\mathbf{1}_{B(x_{j(x),h)}}(X_i)| \leq Cr_n\mathbf{1}_{B(x,h) \cap B(x_{j(x),h)}}(X_i) + Ch\mathbf{1}_{B(x,h) \cap \overline{B(x_{j(x),h)}}}(X_i)$$

et

$$\mathbf{1}_{B(x,h)}|\beta_i^2(x) - \beta_i^2(x_{j(x)})\mathbf{1}_{B(x_{j(x),h)}}(X_i)| \leq Cr_n h\mathbf{1}_{B(x,h) \cap B(x_{j(x),h)}}(X_i) + Ch^2\mathbf{1}_{B(x,h) \cap \overline{B(x_{j(x),h)}}}(X_i).$$

En regroupant les cas  $p = 3$  et  $p = 4$ , on trouve

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{B(x,h)}|\beta_i^{p-2}(x) - \beta_i^{p-2}(x_{j(x)})\mathbf{1}_{B(x_{j(x),h)}}(X_i)| &\leq Cr_n h^{p-3}\mathbf{1}_{B(x,h) \cap B(x_{j(x),h)}}(X_i) \\ &+ Ch^{p-2}\mathbf{1}_{B(x,h) \cap \overline{B(x_{j(x),h)}}}(X_i), \end{aligned}$$

qui nous donne

$$\begin{aligned} D_{1.1}^{p,l} &\leq \frac{Cr_n}{nh\Phi(h)} \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^n |\varphi^l(Y_i)| K_i(x)\mathbf{1}_{B(x,h) \cap B(x_{j(x),h)}}(X_i) \\ &+ \frac{C}{n\Phi(h)} \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^n |\varphi^l(Y_i)| K_i(x)\mathbf{1}_{B(x,h) \cap \overline{B(x_{j(x),h)}}}(X_i) \end{aligned} \quad (2.8)$$

- Passant à étudier le terme  $D_{1.2}^{p,l}$ .  
En utilisant l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} & |1_{B(x_j(x),h)}(X_i)|K_i(x)1_{B(x,h)}(X_i) - K_i(x_j(x))1_{B(x,h)\cup\overline{B(x,h)}}(X_i)| \\ & \leq 1_{B(x,h)\cap B(x_j(x),h)}(X_i)|K_i(x) - K_i(x_j(x))| + K_i(x_j(x))1_{B(x_j(x),h)\cap\overline{B(x,h)}}(X_i). \end{aligned}$$

Les hypothèses (U2.3) et (U2.4) nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} & \beta_i^{p-2}(x_j(x))1_{B(x_j(x),h)}(X_i)|K_i(x)1_{B(x,h)}(X_i) - K_i(x_j(x))| \\ & \leq Ch^{p-2} \left[ \frac{r_n}{h} 1_{B(x,h)\cap B(x_j(x),h)}(X_i) + K_i(x_j(x))1_{B(x_j(x),h)\cap\overline{B(x,h)}}(X_i) \right], \end{aligned}$$

qui nous amène à

$$\begin{aligned} D_{1.2}^{p,l} & \leq \frac{Cr_n}{nh\Phi(h)} \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^n |\varphi^l(Y_i)| 1_{B(x,h)\cap B(x_j(x),h)}(X_i) \\ & + \frac{C}{n\Phi(h)} \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^n |\varphi^l(Y_i)| K_i(x_j(x)) 1_{\overline{B(x,h)}\cap B(x_j(x),h)}(X_i). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Lorsque nous combinons les inégalités (2.7) et (2.8), on obtient

$$\begin{aligned} D_1^{p,l} & \leq \frac{Cr_n}{nh\Phi(h)} \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^n |\varphi^l(Y_i)| 1_{B(x,h)\cap B(x_j(x),h)}(X_i) \\ & + \frac{C}{n\Phi(h)} \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^n |\varphi^l(Y_i)| K_i(x_j(x)) 1_{\overline{B(x,h)}\cap B(x_j(x),h)}(X_i) \\ & + \frac{C}{n\Phi(h)} \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^n |\varphi^l(Y_i)| K_i(x) 1_{B(x,h)\cap\overline{B(x_j(x),h)}}(X_i) \end{aligned}$$

Prenant en compte l'hypothèse (U2.4), on trouve

$$D_1^{p,l} \leq \frac{Cr_n}{nh\Phi(h)} \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^n |\varphi^l(Y_i)| 1_{B(x,h)\cup B(x_j(x),h)}(X_i). \quad (2.10)$$

Prenant

$$Z_i = \frac{Cr_n}{h\Phi(h)} |\varphi^l(Y_i)| \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} 1_{B(x,h)\cup B(x_j(x),h)}(X_i).$$

L'hypothèse (U2.7) nous permet d'écrire

$$\mathbf{E}|Z_1^m| \leq \frac{Cr_n^m}{h^m\Phi^{m-1}(h)}. \quad (2.11)$$

En utilisant le Corollaire (A.8) dans Ferraty et Vieu [25]-ii) (Voir Proposition 5 dans l'Annexe) avec  $a_n^2 = \frac{r_n}{h\Phi(h)}$ , on obtient

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i = \mathbf{E}(Z_1) + O_{p.co} \left( \sqrt{\frac{r_n \ln n}{nh\Phi(h)}} \right).$$

En appliquant (2.11) une autre fois (pour  $m = 1$ ), on obtient

$$D_1^{p,l} = O\left(\frac{r_n}{h}\right) + O_{p.co}\left(\sqrt{\frac{r_n \ln n}{nh\Phi(h)}}\right).$$

Prenant en compte cette dernière avec l'hypothèse (U2.5) et la deuxième partie de la condition (U2.1), on obtient

$$D_1^{p,l} = O_{p.co}\left(\sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}}\right). \quad (2.12)$$

Pour le terme  $D_3^{p,l}$ , comme

$$D_3^{p,l} \leq \mathbf{E}\left(\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} |M_{p,l}(x) - M_{p,l}(x_{j(x)})|\right),$$

donc

$$D_3^{p,l} = O_{p.co}\left(\sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}}\right). \quad (2.13)$$

Et finalement pour le terme  $D_2^{p,l}$ , on a pour tout  $\eta > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(D_2^{p,l} > \eta \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}}\right) &= \mathbf{P}\left(\max_{j \in \{1, \dots, d_n\}} |M_{p,l}(x_{j(x)}) - \mathbf{E}(M_{p,l}(x_{j(x)}))| > \eta \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}}\right) \\ &\leq d_n \\ &\times \max_{j \in \{1, \dots, d_n\}} \mathbf{P}\left(|M_{p,l}(x_{j(x)}) - \mathbf{E}(M_{p,l}(x_{j(x)}))| > \eta \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}}\right). \end{aligned}$$

Prenant pour  $p = 2, 3, 4$

$$\Delta_{p,i} = \frac{1}{h^{p-2}\Phi_x(h)} \left[ K_i(x_{j(x)}) \beta_i^{p-2}(x_{j(x)}) \varphi^l(Y_i) - \mathbf{E}(K_i(x_{j(x)}) \beta_i^{p-2}(x_{j(x)}) \varphi^l(Y_i)) \right]$$

En utilisant les moments d'ordre  $m$  et les hypothèses (U2.1), (U2.2) et (U2.7), on obtient pour  $p = 2, 3, 4$

$$\mathbf{E}|\Delta_{p,i}|^m = O(\Phi^{-m+1}(h)).$$

On peut appliquer l'inégalité de Bernstein-type comme déjà fait en Corollaire (A.8) (i dans Ferraty et Vieu [25]), on obtient

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n \Delta_{p,i} \right| > \eta \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}}\right) \leq 2 \exp(-C\eta^2 \ln d_n).$$

Donc, en choisissant  $\beta$  tel que  $C\eta^2 = \beta$ , on obtient

$$\mathbf{P}\left(D_2^{p,l} > \eta \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}}\right) \leq C d_n^{1-\beta}.$$

De là, l'hypothèse (U2.5) nous permet d'écrire

$$D_2^{p,l} = O_{p.co} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h)}} \right). \quad (2.14)$$

Finalement, le résultat du Lemme 2.6 est une conséquence des relations (2.12), (2.13) et (2.14).

La deuxième partie du Lemme 2.6 peut être directement déduite d'après la preuve de la première telle que

$$\begin{aligned} \inf_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \tilde{m}_0(x) < \frac{1}{2} &\Rightarrow \exists x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \text{ tel que} \\ 1 - \tilde{m}_0(x) > \frac{1}{2} &\Rightarrow \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} |1 - \tilde{m}_0(x)| > \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P} \left( \inf_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \tilde{m}_0(x) < \frac{1}{2} \right) < \infty. \end{aligned}$$

## Estimation locale linéaire du quantile conditionnel pour des données tronquées à gauche

UN problème statistique bien connu consiste à étudier le lien entre deux variables afin de prédire l'une d'entre elles (la variable de réponse) étant donné une nouvelle valeur pour l'autre (la variable explicative). Ce problème a été largement étudié pour des variables réelles ou multivariées, mais il se produit aussi évidemment avec des variables fonctionnelles. Il existe plusieurs façons d'aborder le paramètre de prédiction, l'une des plus populaires est certainement la méthode de régression qui est basée sur l'espérance conditionnelle comme on a déjà vu dans les chapitres 1 et 2. Une autre technique alternative qui a été largement étudiée dans des situations multivariées est le quantile conditionnel et notre objectif est de les adapter à la situation où les variables explicatives sont de dimension infinie. Il est connu que l'estimation du quantile conditionnel conduit à l'estimation de la fonction de distribution cumulative conditionnelle. L'objectif principal de ce chapitre est de proposer un estimateur local linéaire et étudier la convergence presque sûre avec taux de cette méthode de prédiction lorsque la variable de réponse est réelle et soumise à une troncature à gauche et la variable explicative est fonctionnelle.

### 3.1 Modélisation

Soient  $(X_i, Y_i), i = 1, \dots, N$ ,  $N$  couples de variables aléatoires i.i.d. distribués selon  $(X, Y)$  qui prend ses valeurs dans  $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$ , où  $\mathcal{F}$  est un espace semi métrique muni d'une semi métrique  $d$ .  $Y$  a pour f.r. inconnue  $F$ .

Soit  $T$  une autre v.a.r. de f.r. inconnue  $G$  et  $(T_i)_{i=1, \dots, N}$  un échantillon de  $N$  variables aléatoires i.i.d. distribués selon  $T$ .  $T$  est supposée indépendante de  $(X, Y)$ .  $N$  est inconnue mais déterministe. Sous la troncature à gauche, le temps de survie  $Y_i$  et la variable de troncature  $T_i$  sont observables seulement si  $Y_i \geq T_i$ . On va noter  $(Y_i, T_i), i = 1, 2, \dots, n (n \leq N)$  l'échantillon vraiment observé. La taille de cet échantillon  $n$ , comme conséquence de troncature, est une v.a. de loi Binomiale de paramètres  $N$  et  $\mu = \mathbb{P}(Y \geq T)$ . Il est clair que si  $\mu = 0$ , aucune donnée peut observer, et pour cela, on suppose toujours que  $\mu > 0$ . Par la loi forte des grands nombres, on a

$$\hat{\mu}_n := \frac{n}{N} \rightarrow \mu, \mathbb{P} - p.s.$$

On doit dire que si  $(Y_i, T_i), i = 1, 2, \dots, N$  sont i.i.d., alors l'échantillon observé  $(Y_i, T_i), i = 1, 2, \dots, n$  reste i.i.d. ( Lemdani et Ould saïd [33]).

Sous la troncature à gauche, suivant Stute [50], les f.r.s de Y et T sont définies respectivement par

$$F^*(y) = \mu^{-1} \int_{-\infty}^y G(u) dF(u) \quad \text{et} \quad G^*(t) = \mu^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} G(t \wedge u) dF(u),$$

où  $t \wedge u = \min(t, u)$ .

Ses estimateurs empiriques sont donnés par

$$F_n^*(y) = n^{-1} \sum_{i=1}^n 1_{\{Y_i \leq y\}} \quad \text{et} \quad G_n^*(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n 1_{\{T_i \leq t\}}.$$

Définissant

$$\begin{aligned} C(y) &:= G^*(y) - F^*(y) \\ &= \mu^{-1} G(y)(1 - F(y)), \end{aligned}$$

l'estimateur empirique de  $C(y)$  est défini par

$$C_n(y) = n^{-1} \sum_{i=1}^n 1_{\{T_i \leq y \leq Y_i\}}.$$

Les estimateurs de maximum de vraisemblance de  $F$  et  $G$  sont respectivement donnés par

$$F_n(y) = 1 - \prod_{i/Y_i \leq y} \left[ \frac{nC_n(Y_i) - 1}{nC_n(Y_i)} \right] \quad \text{et} \quad G_n(y) = \prod_{i/T_i > y} \left[ \frac{nC_n(T_i) - 1}{nC_n(T_i)} \right].$$

D'après He et Yang [26],  $\mu$  peut être estimée par

$$\mu_n = C_n^{-1}(y) G_n(y) (1 - F_n(y)),$$

et ils ont prouvé qu'elle n'est pas dépendante de  $y$  et sa valeur peut être calculée pour n'importe valeur de  $y$  telle que  $C_n(y) > 0$ .

Nos résultats seront énoncés par rapport à la probabilité conditionnelle  $\mathbf{P}(\cdot)$  relative au  $n$ -échantillon, au lieu de la mesure de probabilité  $\mathbb{P}(\cdot)$  relative au  $N$ -échantillon. On note ainsi par  $\mathbf{E}$  et  $\mathbb{E}$  les espérances respectives de  $\mathbf{P}(\cdot)$  et  $\mathbb{P}(\cdot)$ .

Pour toute f.r.  $L$ , soient  $a_L = \inf \{y : L(y) > 0\}$  et  $b_L = \sup \{y : L(y) < 1\}$  ses points finaux. Les propriétés asymptotiques de  $F_n, G_n$  et  $\mu_n$  sont obtenues seulement si  $a_G \leq a_F$  et  $b_G \leq b_F$ , c'est pourquoi nous considérons cette condition très importante dans le modèle de troncature.

On prend les deux nombres réels  $c$  et  $d$  tels  $[c, d] \subset [a_F, b_F]$ , on va utiliser cette inclusion dans l'étude de la consistance uniforme de la distribution  $G(\cdot)$  de la variable de troncature  $T$  qui s'exprime sur un ensemble compact (voir Remarque 6 de Woodroffe [51]) et dans l'étude de la convergence uniforme de la f.r. conditionnelle  $F(y|x)$  sur  $y \in [c, d]$ .

Rappelons que  $F(y|x)$  est définie, pour tout  $x \in \mathcal{F}$ , par

$$F(y|x) = E(1_{\{Y \leq y\}} | X = x).$$

Un estimateur à noyau dans le cas du modèle de troncature à gauche a été proposé par Helal et Ould Saïd [27], il est donné par

$$\widehat{F}_n(y|x) = \frac{\sum_{i=1}^n G_n^{-1}(Y_i) K(h_K^{-1}d(X_i, x)) H(h_H^{-1}(y - Y_i))}{\sum_{i=1}^n K(h_K^{-1}d(X_i, x)) G_n^{-1}(Y_i)}, \quad (3.1)$$

où  $K$  est une fonction noyau,  $H$  est une fonction de distribution ( $H(y) = \int_{-\infty}^y H'(u)du$  où  $H'$  est un noyau de type 0) et la fenêtre  $h_K := h_{K,n}$  (resp.  $h_H := h_{H,n}$ ) est une suite de nombres réels positifs qui jouent un rôle de paramètre de lissage.

Notons que les sommes contenant  $G_n^{-1}(Y_i)$  sont prises pour tout  $i$  tel que  $G_n(Y_i) \neq 0$ .

Suivant Messaci et al. [43] qui ont fait leurs études dans le cas des données complètes, l'estimateur local linéaire de  $F(y|x)$  pour des données tronquées à gauche est le coefficient  $\widehat{a}$  obtenu par la minimisation de la quantité suivante

$$\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^n (H(h_H^{-1}(y - Y_i)) - a - b\beta(X_i, x))^2 K(h_K^{-1}d(X_i, x))G_n^{-1}(Y_i),$$

où  $\beta(.,.)$  est une fonction connue définie de  $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que,  $\forall x \in \mathcal{F}$ ,  $\beta(x, x) = 0$ .

Des calculs algébriques simples similaires à celles de la fonction de régression généralisée donne que  $F_n(y|x)$  peut être exprimé par

$$F_n(y|x) = \frac{\sum_{i,j=1}^n W_{ij}(x) H(h_H^{-1}(y - Y_j))}{\sum_{i,j=1}^n W_{ij}(x)}, \quad \left( \frac{0}{0} := 0 \right), \quad (3.2)$$

où

$$W_{ij}(x) = \Delta_{ij}(x) G_n^{-1}(Y_i) G_n^{-1}(Y_j),$$

avec

$$\Delta_{ij}(x) := \beta(X_i, x) (\beta(X_i, x) - \beta(X_j, x)) K(h_K^{-1}d(X_i, x)) K(h_K^{-1}d(X_j, x)).$$

## 3.2 La convergence presque sûre ponctuelle

Pour tout réel positif  $r$ , soit  $B(x, r) := \{y \in \mathcal{F} / d(x, y) \leq r\}$  une boule fermée dans  $\mathcal{F}$  de centre  $x$  et rayon  $r$ . On va commencer d'abord d'examiner la convergence ponctuelle de l'estimateur proposé.

### 3.2.1 Hypothèses et résultats

Pour établir le caractère asymptotique de l'estimateur  $F_n(y|x)$  sur un point fixé  $x$  dans  $\mathcal{F}$ , nous avons besoin des hypothèses suivantes :

(H3.1) Pour tout  $r > 0$ ;  $\mathbf{P}(X \in B(x, r)) := \Phi_x(r) > 0$ .

(H3.2) La f.d. conditionnelle  $F(y|x)$  satisfait pour quelques constantes strictement positives  $b_1, b_2$  et pour tout  $(y_1, y_2) \in [c, d] \times B(y_1, h_H)$  et  $x_1, x_2 \in B(x, h_K)$ ,

$$|F(y_1|x_1) - F(y_2|x_2)| \leq C_x (d^{b_1}(x_1, x_2) + |y_1 - y_2|^{b_2})$$

où  $C_x$  est une constante positive dépend de  $x$  et  $B(y_1, h_H)$  est une boule dans  $\mathbb{R}$ .

(H3.3) La fonction  $\beta(.,.)$  est telle que

$$\exists 0 < M_1 < M_2, \forall x' \in \mathcal{F}, M_1 d(x, x') \leq |\beta(x, x')| \leq M_2 d(x, x').$$

(H3.4) Le noyau  $K$  est une fonction positive et différentiable sur son support  $[0, 1]$ .

(H3.5) Les fenêtres  $h_K$  et  $h_H$  satisfont

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_K = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln n}{n \Phi_x(h_K)} \right) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_H = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^\gamma h_H = \infty \quad \text{pour quelque} \quad \gamma > 0.$$

(H3.6) Il existe un entier  $n_0$ , tel que

$$\forall n > n_0, \frac{1}{\Phi_x(h_K)} \int_0^1 \Phi_x(z h_K, h_K) \frac{d}{dz} (z^2 K(z)) dz > 0$$

et

$$h_K \int_{B(x, h_K)} \beta(u, x) d\mathbf{P}_X(u) = o \left( \int_{B(x, h_K)} \beta^2(u, x) d\mathbf{P}_X(u) \right),$$

où  $d\mathbf{P}_X$  est la distribution de  $X$ .

**Théorème 3.1** *Supposons que les hypothèses (H3.1)-(H3.6) sont vérifiées, on a*

$$\sup_{y \in [c, d]} |F_n(y|x) - F(y|x)| = O(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) + O_{p.s.} \left( \sqrt{\frac{\ln n}{n \Phi_x(h_K)}} \right).$$

### 3.2.2 Preuves

**Preuve du Théorème 3.1** *Pour la démonstration du Théorème 3.1 nous avons besoin de déterminer les pseudo-estimateurs suivants*

$$\Phi_n(x, y) = \frac{\mu_n^2}{n(n-1) \mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \sum_{i \neq j} G_n^{-1}(Y_i) G_n^{-1}(Y_j) \Delta_{ij}(x) H(h_H^{-1}(y - Y_j)),$$

$$\tilde{\Phi}_n(x, y) = \frac{\mu^2}{n(n-1) \mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \sum_{i \neq j} G^{-1}(Y_i) G^{-1}(Y_j) \Delta_{ij}(x) H(h_H^{-1}(y - Y_j)),$$

$$r_n(x) = \frac{\mu_n^2}{n(n-1) \mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \sum_{i \neq j} G_n^{-1}(Y_i) G_n^{-1}(Y_j) \Delta_{ij}(x),$$

$$\tilde{r}_n(x) = \frac{\mu^2}{n(n-1) \mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \sum_{i \neq j} G^{-1}(Y_i) G^{-1}(Y_j) \Delta_{ij}(x)$$

et

$$r_0(x) = \frac{1}{n(n-1) \mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \sum_{i \neq j} \Delta_{ij}(x).$$

Considérer la décomposition suivante

$$\begin{aligned}
F_n(y|x) - F(y|x) &= \frac{\Phi_n(x, y)}{r_n(x)} - F(y|x) \\
&= \frac{1}{r_n(x)} \left\{ \Phi_n(x, y) - \tilde{\Phi}_n(x, y) \right\} + \frac{1}{r_n(x)} \left\{ \tilde{\Phi}_n(x, y) - \mathbf{E}(\tilde{\Phi}_n(x, y)) \right\} \\
&+ \frac{1}{r_n(x)} \left\{ \mathbf{E}(\tilde{\Phi}_n(x, y)) - F(y|x) \right\} \\
&+ \frac{F(y|x)}{r_n(x)} \left\{ (\tilde{r}_n(x) - r_n(x)) + (\mathbf{E}(\tilde{r}_n(x)) - \tilde{r}_n(x)) + (-\mathbf{E}(\tilde{r}_n(x)) + 1) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

En plus, nous noterons pour tout  $x \in \mathcal{F}$  et pour tout  $i = 1, \dots, n$

$$K_i(x) := K(h_K^{-1}d(X_i, x)), \quad \beta_i(x) := \beta(X_i, x) \quad \text{et} \quad H_i(y) := H(h_H^{-1}(y - Y_i)).$$

Pour simplifier les choses, on va besoin aussi aux Lemmes suivants

**Lemme 3.1** Sous les hypothèses (H3.1), (H3.3), (H3.4) et (H3.6) on a

$$\sup_{y \in [c, d]} |\Phi_n(x, y) - \tilde{\Phi}_n(x, y)| = O_{p.s.} \left( \sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h_K)}} \right)$$

et

$$|r_n(x) - \tilde{r}_n(x)| = O_{p.s.} \left( \sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h_K)}} \right).$$

**Preuve du Lemme 3.1** Grâce à la bornitude de  $H$ , on peut obtenir

$$\begin{aligned}
|\Phi_n(x, y) - \tilde{\Phi}_n(x, y)| &= \left| \frac{\mu_n^2}{n(n-1)\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \sum_{i \neq j} G_n^{-1}(Y_i)G_n^{-1}(Y_j)\Delta_{ij}(x)H_j(y) \right. \\
&- \left. \frac{\mu^2}{n(n-1)\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \sum_{i \neq j} G^{-1}(Y_i)G^{-1}(Y_j)\Delta_{ij}(x)H_j(y) \right| \\
&\leq \left[ \frac{|\mu_n^2 - \mu^2|}{G_n^2(a_F)} + \mu^2 \left( \frac{\sup_{y \in [c, d]} |G_n^2(y) - G^2(y)|}{G^2(a_F)G_n^2(a_F)} \right) \right] \\
&\times \left| \sum_{i \neq j} \frac{\Delta_{ij}(x)H_j(y)}{n(n-1)\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \right| \\
&\leq C \left[ \frac{|\mu_n^2 - \mu^2|}{G_n^2(a_F)} + \mu^2 \left( \frac{\sup_{y \in [c, d]} |G_n^2(y) - G^2(y)|}{G^2(a_F)G_n^2(a_F)} \right) \right] |r_0(x)|.
\end{aligned}$$

D'après le Théorème (3.2) de He et Yang [26] on a  $|\mu_n - \mu| = O_{p.s.}(n^{-1/2})$ . En outre,  $|G_n(a_F) - G(a_F)| = O_{p.s.}(n^{-1/2})$  qui est négligeable par rapport à  $O\left(\sqrt{\frac{\ln(n)}{n\Phi_x(h_K)}}\right)$ .

D'autre côté on a,

$$\sup_{y \in [c, d]} |G_n(y) - G(y)| = O(n^{-1/2}), \quad \mathbf{P} - p.s.$$

Le reste de la démonstration de la première partie est complété dans Messaci et al. [43] (voir Lemme (2.2)). Donc, on a

$$|\Phi_n(x, y) - \tilde{\Phi}_n(x, y)| = O_{p.s.} \left( \sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h_K)}} \right).$$

Pour la deuxième partie du lemme, on peut la démontrer en suivant les mêmes étapes que précédemment sans le besoin de la bornitude de  $H$ .

**Lemme 3.2** Sous les suppositions (H3.1), (H3.2) et (H3.4) on obtient

$$\sup_{y \in [c, d]} |\mathbf{E}(\tilde{\Phi}_n(x, y)) - F(y|x)| = O(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}).$$

*Preuve du Lemme 3.2* On a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\tilde{\Phi}_n(x, y)) &= \mathbf{E} \left( \frac{\mu^2}{n(n-1)\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \sum_{i \neq j} G^{-1}(Y_i)G^{-1}(Y_j)\Delta_{ij}(x)H_j(y) \right) \\ &= \frac{\mu^2}{\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \mathbf{E} \left( \frac{1}{G(Y_1)G(Y_2)} \Delta_{12}(x)H_2(y) \right) \\ &= \frac{\mu^2}{\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \mathbf{E} \left[ \mathbb{E} \left( \Delta_{12}(x)H_2(y) \frac{1_{\{Y_1 \geq T_1\}}1_{\{Y_2 \geq T_2\}}}{\mu^2 G(Y_1)G(Y_2)} \middle| \sigma(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \right) \right] \\ &= \frac{1}{\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \mathbf{E}(\Delta_{12}(x)H_2(y)) \\ &= \frac{1}{\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \mathbf{E}(\Delta_{12}(x)\mathbf{E}(H_2(y)|X_2)). \end{aligned}$$

Donc on peut écrire

$$|\mathbf{E}(\tilde{\Phi}_n(x, y)) - F(y|x)| = \frac{1}{|\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))|} |\mathbf{E}(\Delta_{12}(x)(\mathbf{E}(H_2(y)|X_2) - F(y|x)))|.$$

On suppose que  $X_2 \in B(x, h_K)$ . De plus, on peut facilement obtenir que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(H_2(y)|X_2) &= \int_{\mathbb{R}} H(h_H^{-1}(y-u))d\mathbf{P}(u|X_2)du \\ &= \int_{\mathbb{R}} H'(z)F(y-zh_H|X_2)dz. \end{aligned}$$

Comme  $H'(\cdot)$  est une densité de probabilité, on a alors

$$\mathbf{E}(H_2(y)|X_2) - F(y|x) = \int_{\mathbb{R}} H'(z)[F(y-zh_H|X_2) - F(y|x)]dz. \quad (3.4)$$

De plus, nous avons

$$|F(y-zh_H|X_2) - F(y|x)| \leq |F(y-zh_H|X_2) - F(y-zh_H|x)| + |F(y-zh_H|x) - F(y|x)|.$$

Cette dernière en combinant avec l'hypothèse (H3.2) nous donnent le résultat.

**Lemme 3.3** *i) Si les conditions (H3.1)-(H3.6) sont satisfaites, nous obtenons*

$$\sup_{y \in [c,d]} |\tilde{\Phi}_n(x, y) - \mathbf{E}(\tilde{\Phi}_n(x, y))| = O_{p.co} \left( \sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h_K)}} \right).$$

*ii) Sous les suppositions (H3.1),(H3.3)-(H3.6), on a*

$$\tilde{r}_n(x) - 1 = O_{p.co} \left( \sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h_K)}} \right) \quad \text{et}$$

$$\exists \vartheta > 0, \quad \text{tel que} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\tilde{r}_n(x) < \vartheta) < \infty.$$

**Preuve du Lemme 3.3** *Remarquons que*

$$\tilde{\Phi}_n(x, y) = Q(x) [P_{2,1}^x(y)P_{4,0}^x - P_{3,1}^x(y)P_{3,0}^x], \quad (3.5)$$

où pour  $p = 2, 3, 4$  et  $l = 0, 1$

$$Q(x) = \frac{n^2 h_K^2 \Phi_x^2(h_K)}{n(n-1)\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \quad (3.6)$$

et

$$P_{p,l}^x(y) = \frac{1}{n\Phi_x(h_K)} \sum_{i=1}^n \frac{\mu K_i(x) \beta_i^{p-2}(x) H_i^l(y)}{h_K^{p-2} G(Y_i)}, \quad (3.7)$$

avec

$$P_{4,0}^x(y) := P_{4,0}^x \quad \text{et} \quad P_{3,0}^x(y) := P_{3,0}^x.$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_n(x, y) - \mathbf{E}(\tilde{\Phi}_n(x, y)) &= Q(x) \{P_{2,1}^x(y)P_{4,0}^x - \mathbf{E}(P_{2,1}^x(y)P_{4,0}^x)\} \\ &\quad - Q(x) \{P_{3,1}^x(y)P_{3,0}^x - \mathbf{E}(P_{3,1}^x(y)P_{3,0}^x)\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

On a déjà vu que  $Q(x) = O(1)$ .

Nous devons donc prouver que pour  $p = 2, 3, 4$  et  $l = 0, 1$

$$\mathbf{E}(P_{p,l}^x(y)) = O(1),$$

$$P_{p,l}^x(y) - \mathbf{E}(P_{p,l}^x(y)) = O_{p.co} \left( \sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h_K)}} \right),$$

$$\mathbf{E}(P_{2,1}^x(y))\mathbf{E}(P_{4,0}^x) - \mathbf{E}(P_{2,1}^x(y)P_{4,0}^x) = O \left( \sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h_K)}} \right)$$

et

$$\mathbf{E}(P_{3,1}^x(y))\mathbf{E}(P_{3,0}^x) - \mathbf{E}(P_{3,1}^x(y)P_{3,0}^x) = O \left( \sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h_K)}} \right).$$

- En appliquant le Lemme 1.2 -(i) et utilisant la bornitude de  $H$  on peut aisément avoir pour  $p = 2, 3, 4$  et  $l = 0, 1$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(P_{p,l}^x(y)) &= \mathbf{E} \left( \frac{1}{\Phi_x(h_K)} \sum_{i=1}^n \frac{\mu K_i(x) \beta_i^{p-2}(x) H_i^l(y)}{h_K^{p-2} G(Y_i)} \right) \\
&= \mu h^{2-p} \Phi_x^{-1}(h_K) \mathbf{E} \left[ \mathbb{E} \left( K_1(x) \beta_1^{p-2}(x) H_1^l(y) \frac{1_{\{Y_1 \geq T_1\}}}{\mu G(Y_1)} \middle| \sigma(X_1, Y_1) \right) \right] \\
&= h^{2-p} \Phi_x^{-1}(h_K) \mathbf{E} (K_1(x) \beta_1^{p-2}(x) H_1^l(y)) \\
&\leq C.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

- Traitement du terme  $P_{p,l}^x(y) - \mathbf{E}(P_{p,l}^x(y))$

On pose

$$P_{p,l}^x(y) - \mathbf{E}(P_{p,l}^x(y)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_i^{(p,l)},$$

où

$$M_i^{(p,l)} = \frac{1}{h_K^{p-2} \Phi_x(h_K)} \left\{ \frac{\mu K_i(x) \beta_i^{p-2}(x) H_i^l(y)}{G(Y_i)} - \mathbf{E} \left( \frac{\mu K_i(x) \beta_i^{p-2}(x) H_i^l(y)}{G(Y_i)} \right) \right\}. \tag{3.10}$$

Le point essentiel est d'évaluer asymptotiquement le moment d'ordre  $m$  de la v.a.r.  $M_i^{(p,l)}(x)$ .

En utilisant le Lemme 1.2 et le fait que  $H$  est bornée, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} | \left\{ M_i^{(p,l)}(x) \right\}^m | &= h^{(-p+2)m} \Phi_x^{-m}(h^{(p,l)}) \mathbf{E} \left| \sum_{k=0}^m C_m^k (-1)^{m-k} \left( \frac{\mu K_i(x) \beta_i^{p-2}(x) H_j^l(y)}{G(Y_i)} \right)^k \right. \\
&\quad \left. \left( \mathbf{E} \left[ \frac{\mu K_i(x) \beta_i^{p-2}(x) H_j^l(y)}{G(Y_i)} \right] \right)^{m-k} \right| \\
&= O(\Phi_x^{(-m+1)}(h_K)).
\end{aligned}$$

Finalement, il suffit d'appliquer le Corollaire A.8-(ii) dans Ferraty et Vieu [25] avec  $a_n^2 = \Phi_x^{(-1)}(h_K)$  pour obtenir, pour  $p \in \{2, 3, 4\}$  et  $l \in \{0, 1\}$

$$P_{p,l}^x(y) - \mathbf{E}(P_{p,l}^x(y)) = O_{p.co} \left( \sqrt{\frac{\ln n}{n \Phi_x(h_K)}} \right). \tag{3.11}$$

- Passant à étudier le terme  $\mathbf{E}(P_{2,1}^x(y)) \mathbf{E}(P_{4,0}^x) - \mathbf{E}(P_{2,1}^x(y) P_{4,0}^x)$ , on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(P_{2,1}^x(y)) \mathbf{E}(P_{4,0}^x) - \mathbf{E}(P_{2,1}^x(y) P_{4,0}^x) &= \left( 1 - \frac{n(n-1)}{n^2} \right) \mu^2 h^{-2} \Phi_x^{-2}(h_K) \\
&\quad \mathbf{E} \left( \frac{K_1(x) \beta_1^2(x)}{G(Y_1)} \right) \mathbf{E} \left( \frac{K_1(x) H_1(y)}{G(Y_1)} \right) \\
&\quad + O((n \Phi_x(h_K))^{-1}) \\
&= O((n \Phi_x(h_K))^{-1}).
\end{aligned}$$

On obtient le dernier résultat, toujours, en appliquant le Lemme 1.2, le fait que  $H$  est bornée et l'espérance conditionnelle.

Sous (H3.5),  $O((n \Phi_x(h_K))^{-1})$  est négligeable par rapport à  $O\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n \Phi_x(h_K)}}\right)$ .

– Pour les même raisons, on peut prouver que

$$\mathbf{E}(P_{3,1}^x(y))\mathbf{E}(P_{3,0}^x) - \mathbf{E}(P_{3,1}^x(y)P_{3,0}^x) = O\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h_K)}}\right).$$

Pour la deuxième partie du lemme, il est facile de prouver que  $\mathbf{E}(\tilde{r}_n(x)) = 1$  et ça nous ramène directement au résultat.

Pour étudier la convergence uniforme de  $F(y|x)$  sur  $y \in [c, d]$ , on doit d'abord indiquer que comme  $[c, d]$  est un compact de  $\mathbb{R}$ , donc on peut le couvrir par un nombre fini  $s_n$  d'intervalles de longueur  $l_n$ . Précisément, on a  $[c, d] \subseteq \cup_{k=1}^{s_n} ]t_k - l_n, t_k + l_n[$ , où  $s_n = \frac{C}{l_n}$  et  $l_n = n^{-\gamma-1/2}$ .

Prenant

$$t_y = \arg \min_{t \in \{t_1, t_2, \dots, t_{s_n}\}} |y - t|.$$

Alors on peut écrire

$$\begin{aligned} \sup_{y \in [c, d]} |\tilde{\Phi}_n(x, y) - \mathbf{E}(\tilde{\Phi}_n(x, y))| &\leq \sup_{y \in [c, d]} |\tilde{\Phi}_n(x, y) - \tilde{\Phi}_n(x, t_y)| + \sup_{y \in [c, d]} |\tilde{\Phi}_n(x, t_y) - \mathbf{E}(\tilde{\Phi}_n(x, t_y))| \\ &+ \sup_{y \in [c, d]} |\mathbf{E}(\tilde{\Phi}_n(x, t_y)) - \mathbf{E}(\tilde{\Phi}_n(x, y))| \\ &:= R_1 + R_2 + R_3. \end{aligned}$$

Commençant par traiter  $R_1$

Comme  $H$  a une première dérivée bornée, on obtient, en utilisant la condition de Lipschitz, que

$$\begin{aligned} R_1 &= \sup_{y \in [c, d]} |\tilde{\Phi}_n(x, y) - \tilde{\Phi}_n(x, t_y)| \\ &\leq \sup_{y \in [c, d]} \left| \frac{\mu^2}{n(n-1)\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \sum_{i \neq j} G^{-1}(Y_i)G^{-1}(Y_j)\Delta_{ij}(x) \right| |H(h_H^{-1}(y - Y_j)) - H(h_H^{-1}(t_y - Y_j))| \\ &\leq C \sup_{y \in [c, d]} \left| \frac{\mu^2|y - t_y|}{h_H n(n-1)\mathbf{E}(\Delta_{12}(x))} \sum_{i \neq j} G^{-1}(Y_i)G^{-1}(Y_j)\Delta_{ij}(x) \right| \\ &\leq C \frac{\mu^2 l_n}{G^2(a_F)h_H} |r_0(x)| \\ &\leq C' \frac{l_n}{h_H} |r_0(x)|. \end{aligned}$$

Utilisant le Lemme 2.2 de Messaci et al. [43] et  $n^\gamma h_H \rightarrow \infty$ , on obtient

$$R_1 = O\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h_K)}}\right) \quad p.co.$$

Alors, on peut avoir aussi

$$R_3 = O\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h_K)}}\right) \quad p.co.$$

Venir maintenant à traiter le terme  $R_2$

On a

$$\begin{aligned} P\left(R_2 > \epsilon \sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi(h_K)}}\right) &= P\left(\max_{t_y \in \{t_1, \dots, t_{s_n}\}} |\tilde{\Phi}_n(x, t_y) - \mathbf{E}(\tilde{\Phi}_n(x, t_y))| > \epsilon \sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi(h_K)}}\right) \\ &\leq s_n \times \max_{t_y \in \{t_1, \dots, t_{s_n}\}} P\left(|\tilde{\Phi}_n(x, t_y) - \mathbf{E}(\tilde{\Phi}_n(x, t_y))| > \epsilon \sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi(h_K)}}\right). \end{aligned}$$

Utilisant les mêmes arguments habituels, prenant en compte que  $s_n = Cn^{\gamma+1/2}$ , on déduit, pour un choix approprié de  $\epsilon$  que

$$R_2 = O\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n\Phi_x(h_K)}}\right) \quad p.co.$$

### 3.3 La convergence presque sûre uniforme

#### 3.3.1 Estimateur de la fonction de distribution conditionnelle

Dans cette section, on va étudier la convergence presque sûre uniforme de  $F_n(y|x)$  sur un sous ensemble  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  de  $\mathcal{F}$ , tel que  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} \subset \bigcup_{k=1}^{d_n} B(x_k, r_n)$ , où  $x_k \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  et  $r_n$  (respectivement  $d_n$ ) est une suite nombres de réels positifs (respectivement entiers). En pratique, la convergence uniforme a une grande importance car elle nous permet de faire la prédiction statistique, même si les données ne sont pas parfaitement observées. De plus, les résultats de la convergence uniforme sont des outils indispensables pour certains problèmes de données fonctionnelles non paramétriques.

Il faut indiquer que, dans le cas multivarié, la consistance uniforme est une extension standard de la consistance ponctuelle; cependant, dans notre cas fonctionnel, certains outils et conditions topologiques supplémentaires sont nécessaires.

Pour cela, nous avons besoin des suppositions suivantes.

#### Hypothèses et résultats

(U3.1) Il existe une fonction différentiable  $\Phi$  et des constantes strictement positives  $C, C_1$  et  $C_2$  telles que

$$\forall x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}, 0 < C_1\Phi(h_K) \leq \Phi_x(h_K) \leq C_2\Phi(h_K) < \infty$$

et

$$\exists \eta_0 > 0, \forall \eta < \eta_0, \Phi'(\eta) < C,$$

où  $\Phi'$  est la dérivée première de  $\Phi$  avec  $\Phi(0) = 0$ .

(U3.2) La distribution conditionnelle  $F(y|x)$  satisfait pour quelques constantes positives  $C, b_1$  et  $b_2$  et pour tout  $(y_1, y_2) \in [c, d] \times B(y_1, h_H)$  et  $(x_1, x_2) \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \times B(x, h_K)$ ,

$$|F(y_1|x_1) - F(y_2|x_2)| \leq C_x (d^{b_1}(x_1, x_2) + |y_1 - y_2|^{b_2}).$$

(U3.3) La fonction  $\beta(.,.)$  satisfait (H3.3) uniformément sur  $x$  et la condition de Lipschitz suivante

$$\exists C > 0, \forall x_1, x_2 \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}, \forall x \in \mathcal{F}, |\beta(x, x_1) - \beta(x, x_2)| \leq Cd(x_1, x_2).$$

(U3.4) Le noyau  $K$  réalise (H3.4) et elle est Lipschitzien sur  $[0, 1]$ .

(U3.5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_K = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_H = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\gamma h_H = \infty$  pour certain  $\gamma > 0$  et pour  $r_n = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ , on a pour  $n$  suffisamment grand

$$\frac{(\ln n)^2}{n\Phi(h)} < \ln d_n < \frac{n\Phi(h)}{\ln n}$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{(\gamma+1/2)} d_n^{(1-\beta)} < \infty; \quad \text{pour certain } \beta > 1.$$

(U3.6) La fenêtre  $h_K$  satisfait :  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists C > 0$ , tels que

$$\forall n > n_0, \forall x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}, \frac{1}{\Phi_x(h_K)} \int_0^1 \Phi_x(zh_K, h_K) \frac{d}{dz} (z^2 K(z)) dz > C > 0$$

et

$$h_K \int_{B(x, h_K)} \beta(u, x) d\mathbf{P}_X(u) = o\left(\int_{B(x, h_K)} \beta^2(u, x) d\mathbf{P}_X(u)\right);$$

uniformément en  $x$ .

**Théorème 3.2** *Sous les suppositions (U3.1)-(U3.6), on a*

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [c, d]} |F_n(y|x) - F(y|x)| = O(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}) + O_{p.s} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h_K)}} \right).$$

### 3.3.2 Estimateur du quantile conditionnel

Soit  $p \in (0, 1)$ , le quantile conditionnel d'ordre  $p$  d'une v.a.  $Y$  sachant  $X = x$  est défini par

$$Q_p(x) = F^{-1}(p|x) = \inf\{y : F(y|x) \geq p\}.$$

Alors un estimateur local linéaire de  $Q_p(x)$  est donné par

$$Q_{p,n}(x) = F_n^{-1}(p|x) = \inf\{y : F_n(y|x) \geq p\}. \quad (3.12)$$

Pour étudier son caractère asymptotique, on va besoin des suppositions suivantes qui ont été déjà utilisées dans la littérature par, par exemple, Messaci et al. [43]

(U3.7)  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tels que pour toute fonction  $\zeta_p$  de  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  dans  $[c, d]$  on a

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} |Q_p(x) - \zeta_p(x)| \geq \epsilon \quad \text{implique} \quad \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} |F(Q_p(x)|x) - F(\zeta_p(x)|x)| \geq \delta.$$

(U3.8)  $\exists j > 1, \forall x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}, F(\cdot|x)$  est  $j$ -fois continument dérivable sur  $[c, d]$  par rapport à  $y$  et satisfait  $F^{(l)}(Q_p(x)|x) = 0$  si  $0 \leq l < j$ ,  $F^{(j)}(Q_p(x)|x) > C > 0$  et  $F^{(j)}(\cdot|x)$  est uniformément continue sur  $[c, d]$  où  $F^{(l)}(\cdot|x)$  est la dérivée d'ordre  $l$  de  $F(\cdot|x)$ .

**Remarque 3.1** *L'hypothèse (U3.8) est nécessaire car le comportement de l'estimateur  $Q_{p,n}(x)$  dépend de la "platitude" de la fonction de répartition conditionnelle  $F(\cdot|x)$  autour du quantile conditionnelle  $Q_p(x)$  et ceci peut être contrôlé par le nombre de dérivées de  $F(\cdot|x)$  qui s'annulent au point  $Q_p(x)$ .*

**Théorème 3.3** *Sous les suppositions (U3.1)-(U3.8), on obtient que*

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} |Q_{p,n}(x) - Q_p(x)| = O(h_K^{b_1}) + O(h_H^{b_2}) + O_{p.s} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h_K)}} \right).$$

### 3.3.3 Preuves

**Preuve du Théorème 3.2** La preuve du Théorème 3.2 est basée sur la même décomposition (3.3) est les Lemmes suivants

**Lemme 3.4** Sous les hypothèses (U3.1), (U3.3) et (U3.4)-(U3.6) on obtient

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [c,d]} |\Phi_n(x, y) - \tilde{\Phi}_n(x, y)| = O_{p.s.} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h_K)}} \right)$$

et

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} |r_n(x) - \tilde{r}_n(x)| = O_{p.s.} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h_K)}} \right).$$

**Preuve du Lemme 3.4** En suivant les mêmes étapes que dans la preuve du Lemme 3.1 et en utilisant le Lemme 1.5 on obtient notre résultat.

**Lemme 3.5** Sous les hypothèses (U3.1),(U3.2) et (U3.4), on obtient que

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [c,d]} |\mathbf{E}(\tilde{\Phi}_n(x, y)) - F(y|x)| = O(h_K^{b_1}) + O(h_H^{b_2}).$$

**Preuve du Lemme 3.5** La démonstration du Lemme 3.5 est similaire à celle du Lemme 3.2 et en utilisant l'équation (3.4) et l'hypothèse (U3.2), on obtient le résultat.

**Lemme 3.6** i) Sous les suppositions (U3.1)-(U3.6), on a

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [c,d]} |\tilde{\Phi}_n(x, y) - \mathbf{E}(\tilde{\Phi}_n(x, y))| = O_{p.co} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h_K)}} \right).$$

ii) Si les hypothèses (U3.1), (U3.3)-(U3.6) sont vérifiées, on obtient

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} |\tilde{r}_n(x) - 1| = O_{p.co} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h_K)}} \right)$$

et

$$\exists \vartheta > 0, \quad \text{tel que} \quad \sum_{n=1}^{\infty} P \left( \inf_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \tilde{r}_n(x) < \vartheta \right) < \infty.$$

**Preuve du Lemme 3.6** En considérons les mêmes décompositions et notations (3.5)-(3.8), suivants les mêmes étapes que dans la preuve du Lemme 3.3 et exploitant le Lemme 1.5-(i) au lieu du Lemme 1.2-(i) , on obtient sous les hypothèses (U3.1), (U3.3),(U3.4) et (U3.6)

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} Q(x) = O(1) \quad \text{et} \quad \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [c,d]} \mathbf{E}(P_{p,l}^x(y)) = O(1) \quad (3.13)$$

pour  $p = 2, 3, 4$  et  $l = 0, 1$ ,

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [c,d]} |\mathbf{E}(P_{2,1}^x(y))\mathbf{E}(P_{4,0}^x) - \mathbf{E}(P_{2,1}^x(y)P_{4,0}^x)| = O \left( \frac{1}{n\Phi(h_K)} \right)$$

et

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [c,d]} |\mathbf{E}(P_{3,1}^x(y)) \mathbf{E}(P_{3,0}^x) - \mathbf{E}(P_{3,1}^x(y) P_{3,0}^x)| = O\left(\frac{1}{n\Phi(h_K)}\right),$$

qui est, en utilisant hypothèse (U3.5), égal à  $O\left(\sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h_K)}}\right)$ .

Maintenant, on va prouver que

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} |P_{p,l}^x(y) - \mathbf{E}(P_{p,l}^x(y))| = O_{p.co} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h_K)}} \right).$$

Nous allons besoin de la décomposition suivante

Soit  $j(x) = \arg \min_{j \in \{1,2,\dots,s_n\}} d(x, x_j)$ ; on a

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [c,d]} |P_{p,l}^x(y) - \mathbf{E}(P_{p,l}^x(y))| &\leq \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [c,d]} |P_{p,l}^x(y) - P_{p,l}^{x_{j(x)}}(y)| \\ &+ \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [c,d]} |P_{p,l}^{x_{j(x)}}(y) - P_{p,l}^{x_{j(x)}}(t_y)| \\ &+ \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [c,d]} |P_{p,l}^{x_{j(x)}}(t_y) - \mathbf{E}(P_{p,l}^{x_{j(x)}}(t_y))| \\ &+ \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [c,d]} |\mathbf{E}(P_{p,l}^{x_{j(x)}}(t_y)) - \mathbf{E}(P_{p,l}^{x_{j(x)}}(y))| \\ &+ \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [c,d]} |\mathbf{E}(P_{p,l}^{x_{j(x)}}(y)) - \mathbf{E}(P_{p,l}^x(y))| \\ &:= \sum_{i=1}^5 D_i^{p,l}. \end{aligned}$$

On commence par traiter les termes  $D_1^{p,l}$  et  $D_5^{p,l}$

– Commenant par  $D_1^{p,l}$  Grâce à la bornitude de  $H$  et sous (U3.3) et (U3.4), on obtient

$$D_1^{p,l} \leq \frac{Cr_n}{nh_K\Phi(h_K)} \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^n \frac{\mu}{G(Y_i)} 1_{B(x, h_K) \cup B(x_{j(x)}, h_K)}(X_i).$$

Prenant

$$\Psi_i = \frac{Cr_n}{h_K\Phi(h_K)} \frac{\mu}{G(Y_i)} \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} 1_{B(x, h_K) \cup B(x_{j(x)}, h_K)}(X_i),$$

alors on obtient

$$|\Psi_1| \leq \frac{Cr_n}{h_K\Phi(h_K)}, \quad \mathbf{E}|\Psi_1| \leq \frac{Cr_n}{h_K}$$

et

$$\mathbf{E}|\Psi_1^2| \leq \frac{Cr_n^2}{h_K^2\Phi(h_K)}$$

En utilisant le corollaire A.8-(ii) de Ferraty et Vieu [25] avec (U3.1) et (U3.5), on obtient

$$D_1^{p,l} = O_{p.co} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h_K)}} \right). \quad (3.14)$$

– Pour le terme  $D_5^{p,l}$ , comme

$$D_5^{p,l} \leq \mathbf{E} \left( \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [c,d]} |P_{p,l}^{x_j(x)}(y) - P_{p,l}^x(y)| \right);$$

Donc

$$D_5^{p,l} = O_{p.co} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h_K)}} \right). \quad (3.15)$$

– Pour le terme  $D_3^{p,l}$ , on a pour tout  $\eta > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left( D_3^{p,l} > \eta \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h_K)}} \right) &= \mathbf{P} \left( \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [c,d]} |P_{p,l}^{x_j(x)}(t_y) - \mathbf{E}(P_{p,l}^{x_j(x)}(t_y))| > \eta \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h_K)}} \right) \\ &\leq d_n s_n \max_{t_y \in \{t_1, \dots, t_{s_n}\}} \max_{x_j(x) \in \{x_1, \dots, x_{d_n}\}} \mathbf{P}(|P_{p,l}^{x_j(x)}(t_y) - \mathbf{E}(P_{p,l}^{x_j(x)}(t_y))| \\ &> \eta \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h_K)}}). \end{aligned}$$

Prenant pour  $p = 2, 3, 4$ ,  $M_i^{p,l}(\cdot, \cdot)$  définie par la relation (3.10). On peut appliquer l'inégalité de type Bernstein comme déjà fait en Corollaire A.8 (i) dans Ferraty et Vieu [25], on obtient

$$\mathbf{P} \left( \frac{1}{n} \left| \sum_{j=1}^n M_j^{p,l} \right| > \eta \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h_K)}} \right) \leq 2 \exp(-C\eta^2 \ln d_n). \quad (3.16)$$

Donc, en choisissant  $\beta$  tel que  $C\eta^2 = \beta$ , on obtient

$$\mathbf{P} \left( |P_{p,l}^{x_j(x)}(t_y) - \mathbf{E}(P_{p,l}^{x_j(x)}(t_y))| > \eta \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h_K)}} \right) \leq C d_n^{1-\beta}.$$

Alors, le fait que  $s_n = O(l_n^{-1}) = O(n^{\gamma+1/2})$  et hypothèse (U3.5) nous permettent d'écrire

$$D_3^{p,l} = O_{p.co} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h_K)}} \right). \quad (3.17)$$

– Traitement du terme  $D_2^{p,l}$

Remarquons que

$$D_2^{p,l} \leq C \frac{l_n}{h_H} \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} P_{p,0}^{x_j(x)}.$$

En vue des relations (3.13), (3.16) et hypothèse (U3.5), on obtient que

$$D_2^{p,l} = O_{p.co} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h_K)}} \right) \quad (3.18)$$

et

$$D_4^{p,l} = O_{p.co} \left( \sqrt{\frac{\ln d_n}{n\Phi(h_K)}} \right). \quad (3.19)$$

Finalemment, le résultat du Lemme 3.6 découle des relations (3.14)-(3.19).

La deuxième partie peut être directement déduit de la preuve de la première telle que  $\mathbf{E}(\tilde{r}_n(x)) = 1$ .

Pour la dernière partie , ça vient du

$$\inf_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \tilde{r}_n(x) < \frac{1}{2} \Rightarrow \exists x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$$

tel que

$$\begin{aligned} 1 - \tilde{r}_n(x) > \frac{1}{2} &\Rightarrow \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} |1 - \tilde{r}_n(x)| > \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P} \left( \inf_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \tilde{r}_n(x) < \frac{1}{2} \right) < \infty. \end{aligned}$$

**Preuve du Théorème 3.3** Soit  $x \in \mathcal{F}$ .

D'un côté, comme  $\mathbf{F}_n(\cdot/x)$  et  $\mathbf{F}(\cdot/x)$  sont continues et  $F_n(Q_{p,n}(x)/x) = \mathbf{F}((Q_p(x)/x)) = p$ .

Donc

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}(Q_{p,n}(x)/x) - \mathbf{F}((Q_p(x)/x))| &\leq |\mathbf{F}(Q_{p,n}(x)/x) - \mathbf{F}_n((Q_{p,n}(x)/x))| \\ &\quad + |\mathbf{F}_n((Q_{p,n}(x)/x)) - \mathbf{F}((Q_p(x)/x))| \\ &\leq |\mathbf{F}(Q_{p,n}(x)/x) - \mathbf{F}_n((Q_{p,n}(x)/x))| \\ &\leq \sup_{c \leq y \leq d} |\mathbf{F}_n(y/x) - \mathbf{F}(y/x)|. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Alors

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} |F(Q_p(x)|x) - F(Q_{p,n}(x)|x)| \leq \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [c,d]} |F_n(y|x) - F(y|x)|.$$

D'autre côté, l'estimateur  $(F_n(\cdot/x))^{-1}$  existe et est continu, en particulier sa continuité au point  $F_n(Q_p(x)/x)$  donne

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y/ |F_n(y/x) - F_n(Q_p(x)/x)| \leq \delta \Rightarrow |y - Q_p(x)| \leq \epsilon.$$

En posant  $y = Q_{p,n}(x)$ , la relation précédente s'écrit

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0/ |F_n(Q_{p,n}(x)/x) - F_n(Q_p(x)/x)| \leq \delta \Rightarrow |Q_{p,n}(x) - Q_p(x)| \leq \epsilon.$$

Ce qui permet d'écrire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |Q_{p,n}(x) - Q_p(x)| > \epsilon \Rightarrow |F_n(Q_{p,n}(x)/x) - F_n(Q_p(x)/x)| > \delta.$$

Puisque

$$F_n(Q_{p,n}(x)/x) = F(Q_p(x)/x) = p,$$

il vient

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |Q_{p,n}(x) - Q_p(x)| > \epsilon \Rightarrow |F(Q_p(x)/x) - F_n(Q_p(x)/x)| > \delta. \quad (3.21)$$

La convergence de  $Q_{p,n}(x)$  s'arrive directement d'un part du Théorème 3.2 en combinant avec l'inégalité

$$\sum_n \mathbf{P} \left\{ \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} |Q_{p,n}(x) - Q_p(x)| \geq \epsilon \right\} \leq \sum_n \mathbf{P} \left\{ \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [c,d]} |F_n(y|x) - F(y|x)| \geq \delta \right\}$$

qui nous donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |Q_{p,n}(x) - Q_p(x)| = 0, \quad p.s. \quad (3.22)$$

et d'autre part, un développement de Taylor de  $F(\cdot|x)$  et hypothèse (U3.8) impliquent que

$$F(Q_{p,n}(x)|x) - F(Q_p(x)|x) = \frac{1}{j!} F^{(j)}(\tilde{Q}_p(x)|x) (Q_{p,n}(x) - Q_p(x))^j,$$

où  $\tilde{Q}_p$  est entre  $Q_{p,n}$  et  $Q_p$ .

Grâce à (3.22) et la continuité uniforme de  $F^{(j)}(\cdot|x)$ , on obtient que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} |F^j(\tilde{Q}_p(x)|x) - F^j(Q_p(x)|x)| = 0, \quad p.s.$$

Alors, il existe un réel positif  $\tau$  tel que

$$\sum_n \mathbf{P} \left( \inf_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} F^{(j)}(\tilde{Q}_p(x)|x) < \tau \right) < \infty.$$

Donc

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} |(Q_{p,n}(x) - Q_p(x))|^j \leq \sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in [c,d]} |F_n(y|x) - F(y|x)|.$$

Il suffit d'appliquer le Théorème 3.2 d'avoir le résultat revendiqué.

## Application et études de simulation

Dans ce chapitre, Nous commençons par reprendre l'étude sur des données réelles complètes réalisées dans Leulmi et Messaci [38]. Ensuite, une simulation de données tronquées à gauche est réalisée afin de comparer la performance par rapport à l'estimateur à noyau classique.

### 4.1 Application à des données réelles

La spectroscopie dans le proche infrarouge est une technique analytique basée sur le principe d'absorption des rayonnements (infrarouge) par la matière organique en utilisant un spectromètre. Cette méthode d'absorption est utilisée pour estimer la composition chimique des aliments (fourrages, viandes, . . . ).

On se donne un échantillon de 215 morceaux de viande, le but est d'estimer le taux de matière grasse à partir du spectre observé.

On observe alors pour chaque morceau de viande  $i$ , la variable fonctionnelle  $X_i(t), t \in [850, 1050]$  qui est la courbe spectrométrique du morceau de viande  $i$ , la répartition graphique des 215 spectres montre l'aspect fonctionnel des données. Il est proposé de comparer trois méthodes pour estimer la médiane conditionnelle à savoir

- L'estimateur de médiane conditionnelle noté  $\hat{t}_{1/2}$ .
- Le noyau (noté KM) étudié dans Ferraty et Vieu [25].
- L'estimateur local linéaire (noté LLM) introduit dans Messaci et al. [43].

Pour calculer ces estimateurs, les auteurs utilisent :

- Pour l'estimateur  $\hat{t}_{1/2}$ 
  - Le noyau  $K(x) = \frac{3}{2}(1 - x^2)1_{[0,1]}(x)$ .
  - La semi-métrique  $d$  est la semi métrique basée sur la dérivée (voir routines "semimetric.deriv" dans le website <http://www.lsp.ups-tlse.fr/staph/npfda> dans Ferraty et Vieu [25]). Cette semi-métrique est plutôt employée pour le traitement de courbes tout à fait lisses (ou régulières) et  $\beta = d$ .
- Pour l'estimateur KM : Les mêmes paramètres que dans la sous-section 7.2 de Ferraty et Vieu [25]).
- Pour l'estimateur LLM : Les mêmes paramètres que dans la section 4 de Messaci et al. [43].

L'algorithme suivant a été utilisé :

- Étape 1. Les données sont divisées en deux ensembles :

$(X_i, Y_i)_{i=1, \dots, 160}$  l'échantillon d'apprentissage utilisé pour construire les estimateurs et  $(X_i, Y_i)_{i=161, \dots, 215}$  l'échantillon de test utilisé pour évaluer la qualité des estimateurs.

- Étape 2. Le  $h$ -optimale (paramètre de lissage) est calculé par la méthode de validation croisée.
- Étape 3. Pour chaque  $X_i$  dans l'échantillon de test, on prévoit sa valeur réponse  $Y_i$  par chacune des méthodes d'estimation et on trouve  $\hat{Y}_i$ .
- Étape 4. Pour illustrer la performance des estimateurs, Leulmi et Messaci [38] représentent les valeurs estimées  $\hat{Y}_i$  en fonction des vraies valeurs  $Y_i$  de l'échantillon de test, pour les trois méthodes.

Plus précisément, pour comparer les trois méthodes, elles calculent l'erreur en moyenne

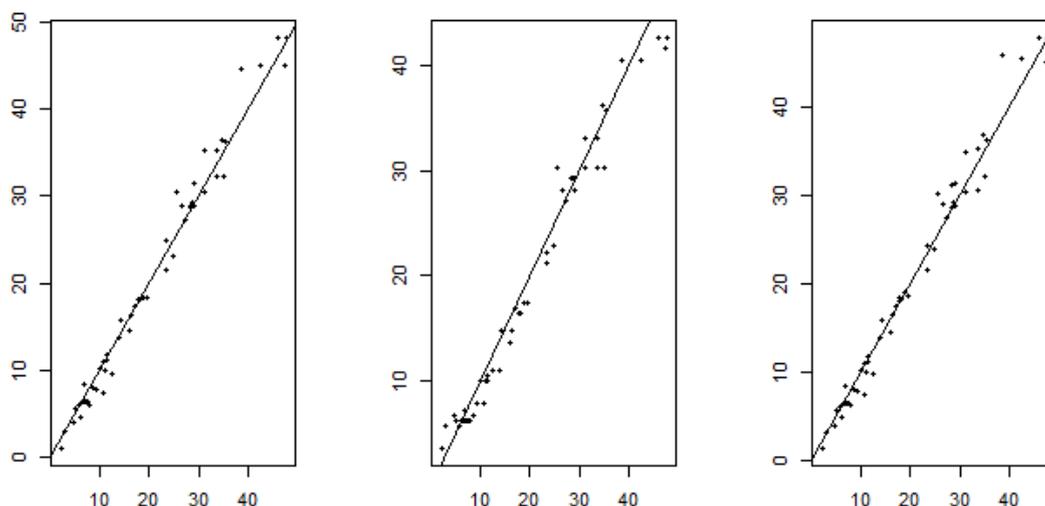


FIGURE 4.1 – Comparaison entre les trois méthodes ( $\hat{t}_{1/2}$ , KM et LLM) pour des données spectrométriques.

quadratique donnée par

$$MSE := \frac{1}{55} \sum_{i=1}^{55} (\hat{Y}_i - Y_i)^2,$$

où  $\hat{Y}_i$  désigne l'estimateur utilisé.

Les résultats obtenus sont :

- $MSE(\hat{t}_{1/2}(x))=3.22$ ,
- $MSE(LLM)=3.8$ ,
- $MSE(KM)=4.8$ .

Sur la base de cet ensemble de données, il est remarquable que l'estimateur proposé fournit l'erreur la plus petite.

## 4.2 Études de simulation

Dans cette partie, on va donner deux exemples de simulation qui nous permettront d'illustrer la performance des deux estimateurs proposés ; estimateur local linéaire de la fonction de régression,  $\varphi(Y) = Y$ , (LLR) et de la fonction médiane conditionnelle (LLM) par rapport aux estimateurs à noyau de chaque fonction (KR) et (KM) en utilisant des échantillons de dimensions finies.

A cet objectif, on génère la suite observée  $(X_i(t), Y_i, T_i)_{1 \leq i \leq n}$  en suivant les étapes ci dessous.

- Étape 1. On fixe la taille aléatoire  $n$  (rappelons que  $n$  est connue), après on génère les variables aléatoires  $T_1, X_1(t)$  et  $Y_1$ .

- Étape 2. Test :

Nous commençons par définir :

$$N = 0,$$

$$j = 0,$$

tant que  $j \leq n$  :

$N = N + 1$ , nous testons : si  $Y_1 < T_1$  on rejette le triplet  $(X_1(t), Y_1, T_1)$ . Si non, on garde le triplet  $(X_1(t), Y_1, T_1)$ . A la fin de ce décompte, on obtient la valeur déterministe  $N$ . Ce qui nous permet d'obtenir le taux de troncature (TR) avec  $\mu = \frac{n}{N}$ , plus précisément, c'est le taux du triplet observé.

Aussi, pour le calcul des estimateurs (LL) et (K), nous utilisons le noyau quadratique  $K(x) = \frac{3}{2}(1 - x^2)1_{[0,1]}(x)$ , la fonction de distribution  $H(x) = \int_{-\infty}^x \frac{3}{4}(1 - z^2)1_{[-1,1]}(z)dz$  et pour le choix des fenêtres  $h_K$  et  $h_J$  on utilise la méthode de validation croisée. Prendre en compte le lissage des courbes  $X_i(t)$  (Figure 4.2 and 4.9), nous choisissons la semi-métrique  $d$  basée sur les dérivées décrites dans Ferraty et Vieu [25] (voir routines "semimetric.deriv" sur le site web <http://www.lsp.ups-tlse.fr/staph/npdfa>) et on prend  $\beta = d$  (pour l'estimateur LL).

### Exemple 1

On fixe  $n = 200$  et nous générons la covariable fonctionnelle  $X_1(t)$  comme suit

$$X_1(t) = A(2 - \cos(\pi tW)) + (1 - A)\cos(\pi tW) \quad t \in [0, 1],$$

où  $W \rightsquigarrow U(0, 1)$  et  $A$  est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre  $p = 0.5$ .

La variable réponse réelle est définie par

$$Y_1 = R(X_1(t)) + \varepsilon_1,$$

où  $X_1$  et  $\varepsilon_1$  sont supposées indépendantes, l'erreur  $\varepsilon_1 \hookrightarrow N(0, 0.1)$  et  $R(X_1(t)) = \int_0^1 (X_1(t))^2 dt$ . De plus, la variable de troncature  $T_1$  a une distribution exponentielle de paramètre  $\lambda$  qui est adapté dans l'ordre d'obtenir différents taux de troncature.

Sous ce modèle, nous calculons l'estimateur KR, qui est un cas particulier de celui de Ould Saïd et Lemdani [45], défini par

$$KR(x) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i K(h^{-1}d(x, X_i)) G_n^{-1}(Y_i)}{\sum_{i=1}^n K(h^{-1}d(x, X_i)) G_n^{-1}(Y_i)},$$

l'estimateur KM donné dans Helal et Ould Saïd [27] par

$$KM(x) = \inf\{y \in \mathbb{R}, \hat{F}_n(y|x) \geq 1/2\}$$

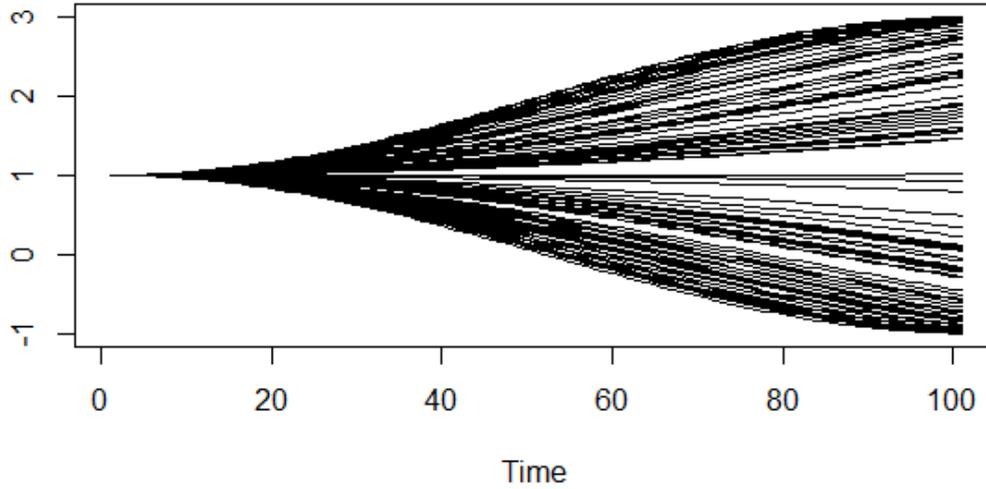


FIGURE 4.2 – Un échantillon de 100 courbes représentant une réalisation de la variable aléatoire fonctionnelle  $X$ .

où  $\hat{F}_n(y|x)$  est définie dans la relation (3.1) et les estimateurs proposés définis respectivement par les relations (2.3) pour  $\varphi(Y_i) = Y_i$  et (3.12) pour  $p = \frac{1}{2}$  en utilisant les données observées  $(X_i, Y_i, T_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

Dans cette simulation, pour illustrer la performance des estimateurs, on procède comme suit :

- Étape 1. Nous divisons nos données en deux sous ensembles :
  - $(X_i, Y_i)_{1 \leq i \leq 100}$  : l'échantillon d'apprentissage utilisé pour construire les estimateurs.
  - $(X_i, Y_i)_{101 \leq i \leq 200}$  : l'échantillon de test utilisé pour évaluer la qualité des estimateurs.
- Étape 2. On calcule les estimateurs de chaque fonction en utilisant l'échantillon d'apprentissage.
- Étape 3. Pour illustrer la performance des estimateurs, nous représentons les valeurs estimées en fonction des vraies valeurs ( $R(X_j)$ ) pour tout  $i$  ( $101 \leq j \leq 200$ ) (un dans chaque graphe), ceci est représenté dans Figures 4.3- 4.8
- Étape 4. Plus précisément, pour comparer les deux méthodes pour les deux fonctions, nous calculons l'erreur en moyenne quadratique, de chaque fonction, donnée par

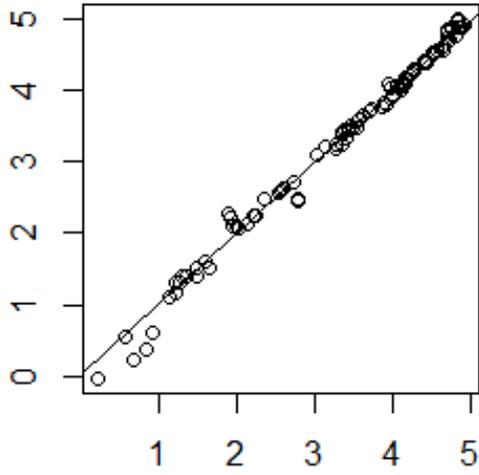
$$MSE(LLE) := \frac{1}{100} \sum_{j=101}^{200} (LLE(X_j) - R(X_j))^2$$

et

$$MSE(KE) := \frac{1}{100} \sum_{j=101}^{200} (KE(X_j) - R(X_j))^2.$$

Les résultats obtenus sont résumés dans le Tableau 4.1 .

**Local Linear: MSE=0.0145**



**Kernel: MSE=0.0223**

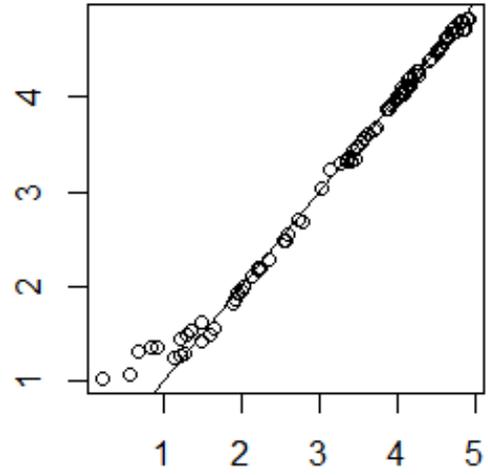
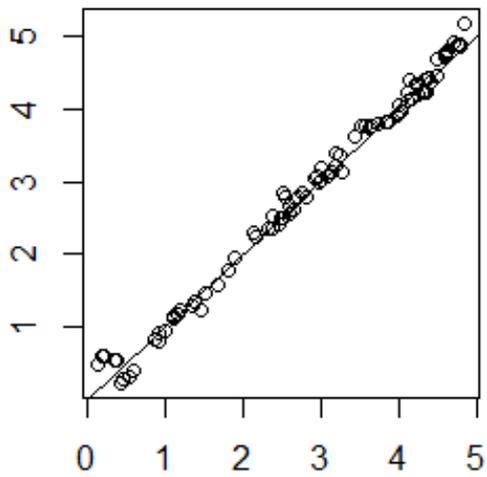


FIGURE 4.3 – TR=0%, Données complètes, Régression

**Local Linear: MSE=0.0192**



**Kernel: MSE=0.053**

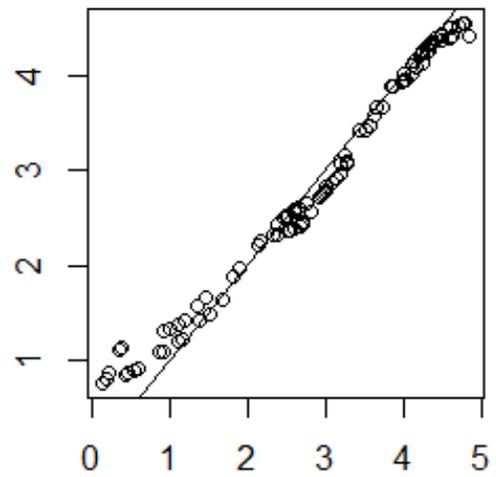
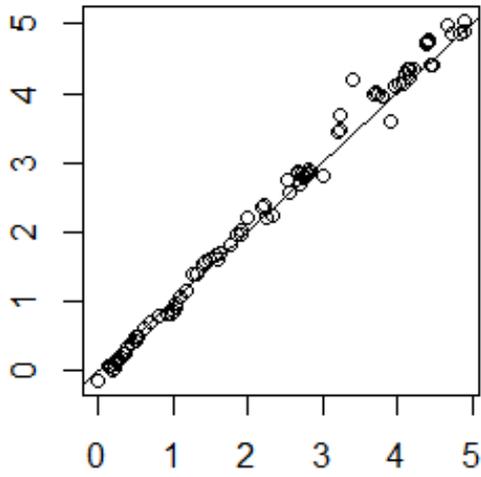


FIGURE 4.4 – TR=56%, Régression

**Local Linear: MSE=0.031**



**Kernel: MSE=0.0784**

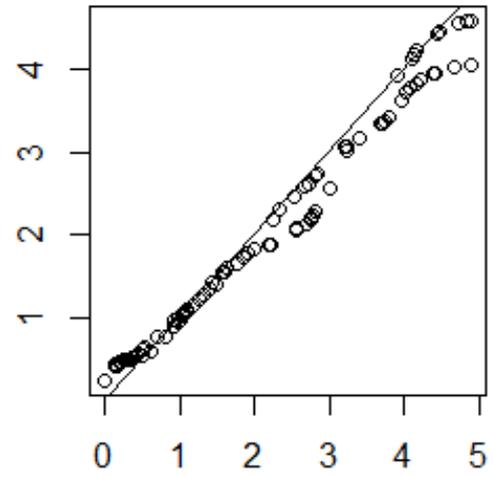
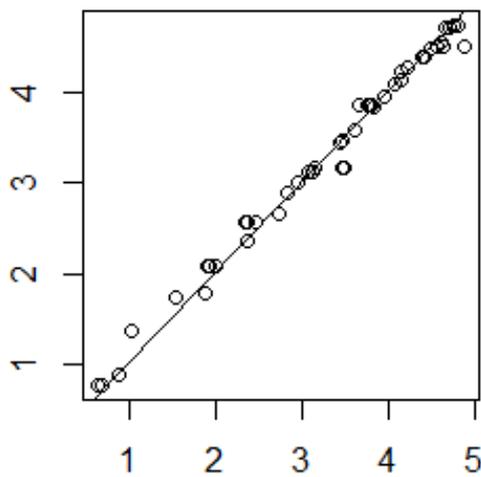


FIGURE 4.5 – TR=75%, Régression

**Local Linear: MSE=0.0162**



**kernel: MSE=0.0345**

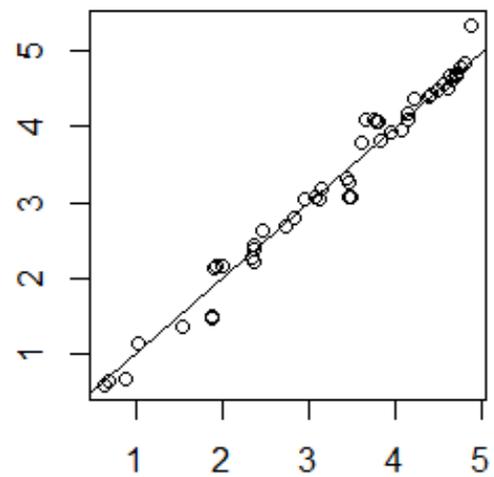
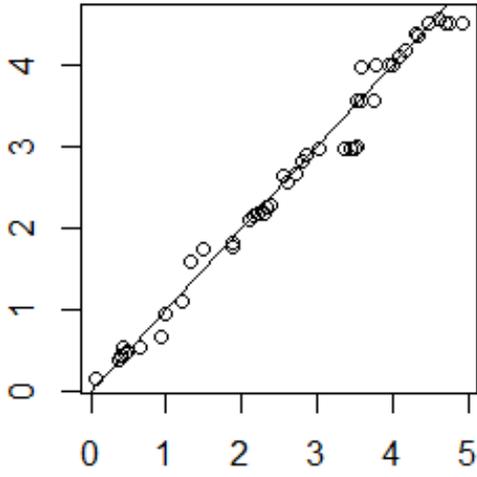


FIGURE 4.6 – TR=0%, Données complètes, Médiane

**Local Linear: MSE=0.0399**



**kernel: MSE=0.0538**

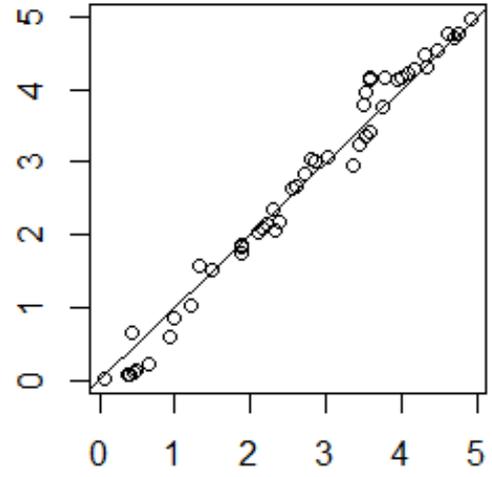
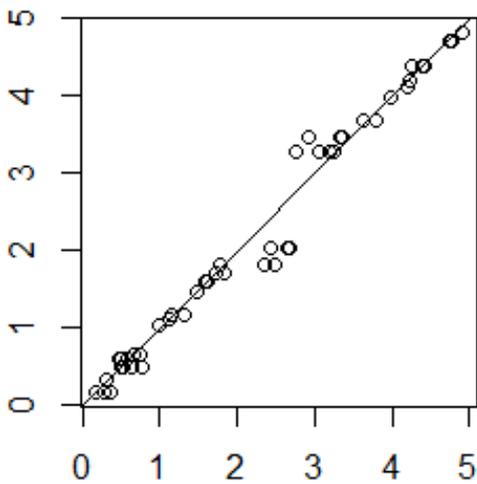


FIGURE 4.7 – TR=56%, Médiane

**Local Linear: MSE=0.0521**



**kernel: MSE=0.0664**

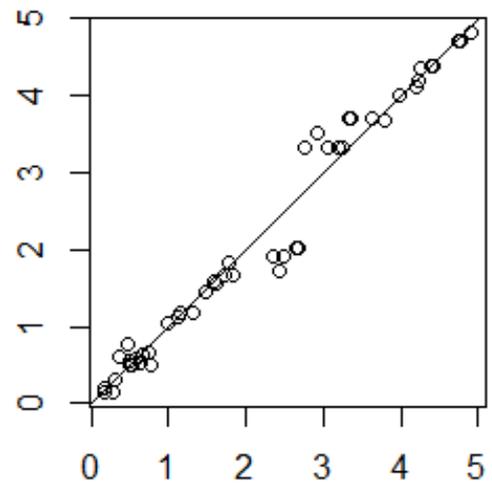


FIGURE 4.8 – TR=75%, Médiane

	TR=0%	TR=56%	TR=75%
MSE(LLR)	0.0145	0.0192	0.031
MSE(KR)	0.0223	0.053	0.0784
MSE(LLM)	0.0162	0.0399	0.0521
MSE(KM)	0.0345	0.0538	0.0664

TABLE 4.1 – Résultats de MSE pour les deux méthodes selon TR.

Nous voyons clairement que l'estimateur local linéaire fonctionne mieux que l'estimateur à noyau. De plus, nous notons que la qualité de méthodes à noyau et locale linéaire diminue chaque fois que le TR augmente.

Pour vérifier plus la qualité des estimateurs proposés, nous comparons les deux méthodes de manière différente dans l'exemple suivant

. **Exemple 2**

Dans cet exemple, on varie la taille d'échantillon  $n = 50, 100, 300$  et on considère la covariable fonctionnelle  $X_1(t)$  générée de la manière suivante

$$X_1(t) = 2 - \cos\left(W\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)\right), \quad t \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$$

où  $W \hookrightarrow N(0, 1)$ . La variable réponse réelle est définie par

$$Y_1 = R(X_1(t)) + \epsilon_1.$$

où  $X_1$  et  $\epsilon_1$  sont indépendantes, l'erreur  $\epsilon_1 \hookrightarrow N(0, 0.1)$  et

$$R(X_1(t)) = \frac{1}{4} \exp\left\{2 - \frac{1}{\left(\int_0^1 X_1'(t) dt\right)^2}\right\}$$

Pour ce modèle, nous adoptons le mécanisme de troncature sur la base de l'échantillon  $(X_i, Y_i, T_i)_{1 \leq i \leq n}$  où la variable de troncature  $T_1 \hookrightarrow N(0, 2)$  qui a pris pour fixer le pourcentage de troncature.

Pour chaque cas, on divise les données en deux échantillons d'apprentissage et de test, comme on a fait à l'exemple précédent. Pour illustrer les performances de nos estimateurs nous évaluons les erreurs MSE(LLE) et MSE(KE) (voir le Tableau 4.2).

n	MSE(LLR)	MSE(KR)	MSE(LLM)	MSE(KM)
50	0.4201	0.5352	0.44	0.54
100	0.3787	0.404	0.35	0.43
300	0.31	0.39	0.27	0.3

TABLE 4.2 – Comparaison des résultats MES pour les méthodes LLE et KE pour les trois tailles de (n).

Remarquant dans le tableau 4.2 que l'estimateur local linéaire fonctionne mieux que celui du noyau pour les différentes valeurs de  $n$ . De plus, la qualité des estimateurs s'améliore

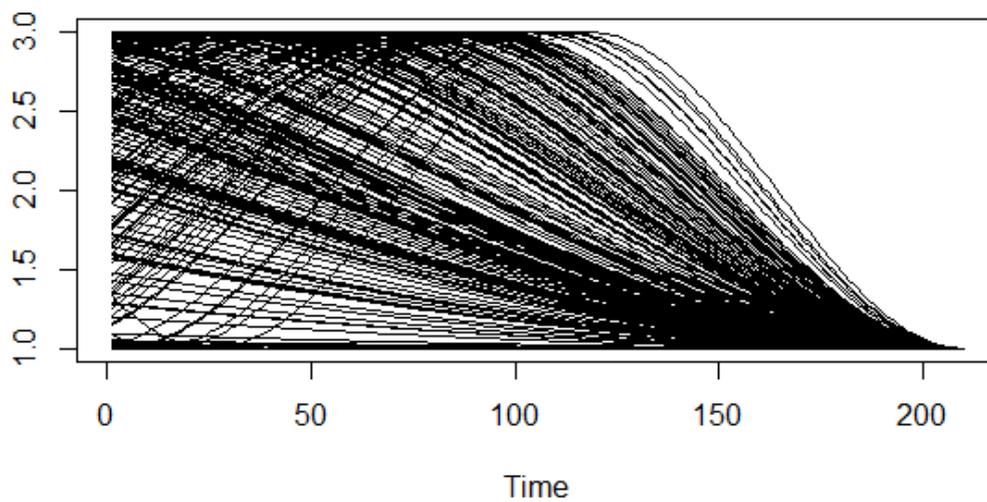


FIGURE 4.9 – Un échantillon de courbes simulées.

avec l'augmentation de la taille de l'échantillon.

#### **Conclusion et commentaires**

En conclusion, les deux exemples montrent que nos estimateurs fonctionnent bien et que comme pour les données complètes, la méthode locale linéaire semble surpasser la méthode du noyau même pour les données tronquées.

## Conclusion

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude des modèles non paramétriques dans un but d'estimer la fonction de régression généralisée et le quantile conditionnel. Les résultats que nous énonçons sont liés aux propriétés asymptotiques des estimateurs locaux linéaires pour un modèle de troncature. Notre intérêt est, dans un premier temps, l'estimation par la méthode locale linéaire de la fonction de régression généralisée. Nous supposons que l'échantillon que nous étudions est constitué de variables i.i.d. et que la variable d'intérêt est soumise à une troncature à gauche tandis que la covariable est fonctionnelle. Nous établissons, sous des conditions standards dans ce contexte sur les noyaux, les fenêtres et les probabilités des petites boules, les convergences ponctuelle et uniforme presque sûres avec vitesse de notre estimateur. Sous les mêmes conditions, un estimateur de la fonction quantile conditionnel a été proposé ainsi que ses propriétés asymptotiques ont été établies. La méthode locale linéaire, exploitée dans ces études, non seulement généralise celui de noyau, mais elle possède également des propriétés de biais supérieures. Cette préférence a été vérifiée dans plusieurs réalisations pour des données complètes et données censurées. Ce travail a mis en évidence les mêmes performances pour des données tronquées à gauche à travers des études de simulations.

## Perspectives

Les résultats obtenus ont ouvert le chemin à des perspectives très intéressantes. On mentionne quelques unes :

- La première orientation permet d'établir la convergence presque sûre des deux estimateurs précédents dans un cadre plus général (mélange fort) qui inclut la modélisation de séries chronologiques comme cas particulier.
- La normalité asymptotique des estimateurs proposés dans les deux cas (données indépendantes et dépendantes) constituent un autre thème qui peut être traité.
- Un autre axe de recherche auquel je m'intéresse et dans lequel je souhaiterais m'investir à l'avenir, est d'étudier le comportement de l'estimation des deux fonctions lorsque la dépendance des données est décrite par une copule.

Afin d'aider le lecteur à mieux comprendre le fond mathématique complet, nous allons présenter brièvement quelques outils probabilistes utilisés dans la thèse.

## Les convergences presque complète et presque sûre

Dans l'étude des propriétés asymptotiques des estimateurs proposés, nous nous sommes appuyées sur le concept des convergences presque complètes et convergence sûres et comme le lecteur peut voir à travers les preuves présentées dans la thèse, la convergence presque complète est en certain sens plus facile à énoncer et appliquer que la convergence presque sûre. De plus, on voit ultérieurement que ce mode de convergence implique la convergence presque sûre.

**Définition 2** Soit  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires réelles (v.a.r.). On dit que  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque complètement vers une v.a.r.  $W$ , et on note  $W_n \xrightarrow{p.co.} W$ , si et seulement si,

$$\forall \epsilon > 0, \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(|W_n - W| > \epsilon) < \infty.$$

En outre, soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels positifs tend vers zéro ; on dit que le taux de la convergence presque complète de  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à  $W$  est d'ordre  $(v_n)$  et on note  $W_n - W = O_{p.co.}(v_n)$ , si et seulement si

$$\exists \epsilon_0 > 0, \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(|W_n - W| > \epsilon_0 v_n) < \infty.$$

**Définition 3** On dit qu'une suite de v.a.r  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge  $\mathbb{P}$  presque sûrement vers une v.a.r  $W$ , et on note  $W_n \xrightarrow{\mathbb{P}.p.s.} W$ , si et seulement si

$$\mathbb{P}(\lim_{n \leftarrow \rightarrow \infty} W_n = W) = 1.$$

Le taux de la convergence presque sûre d'une suite de v.a.r. est défini par la condition

$$\begin{aligned} W_n - W = O_{p.s.}(v_n) &\Leftrightarrow \mathbb{P}(W_n - W = O_{p.s.}(v_n)) = 1 \\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}(\exists C < \infty, \exists n, \forall m > n, |W_m - W| \leq C v_m) = 1 \end{aligned}$$

**Proposition 1** Si  $\lim_{n \leftarrow \infty} W_n = W$ , p.co alors  $\lim_{n \leftarrow \infty} W_n = W$ , p.s.

**Preuve 1** Sans perte de généralité, On montre le résultat pour  $X = 0$ .

Pour tout  $\epsilon > 0$ , on a  $\sum_{n=0}^{\infty} P(|W_n| > \epsilon) < \infty$ . D'après le lemme de Borel Cantelli, on aura

$$\mathbb{P}(\overline{\lim}_{n \leftarrow \infty} \{|W_n| > \epsilon\}) = 0,$$

qui peut être réécrit comme  $\mathbb{P}(A_\epsilon) = 1$  où

$$A_\epsilon = \{\exists n, \forall m > n, |X_m| \leq \epsilon\}.$$

Notons que la suite  $(A_\epsilon)_\epsilon$  est une suite d'événements incorporés, et donc la propriété  $\forall \epsilon > 0, \mathbb{P}(A_\epsilon) = 1$  implique directement la convergence presque sûre, c'est à dire

$$\mathbb{P}(\forall \epsilon > 0, \exists n, \forall m > n, |X_m| \leq \epsilon) = 1.$$

**Proposition 2** Supposons que  $W_n - W = O_{p.co.}(v_n)$  alors on a  $W_n - W = O_{p.s.}(v_n)$

**Preuve 2** Sans perte de généralité, On montre le résultat pour  $X = 0$ .

Comme précédemment le lemme de Borell Cantelli nous permet d'avoir

$$\mathbb{P}(\overline{\lim}_{n \leftarrow \infty} \{|W_n| > \epsilon_0 v_n\}) = 0.$$

Cela peut être également écrit comme

$$\exists \epsilon_0, \mathbb{P}(\exists n, \forall m > n, |W_m| > \epsilon_0 v_m) = 1.$$

Il vient directement que  $W_n = O_{p.s.}(v_n)$

**Proposition 3** Soient  $l_x$  et  $l_y$  deux nombres réels déterministes et soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels tend vers zéro.

1) Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = l_x$ , p.co. et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n = l_y$ , p.co., on a

a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (X_n + Y_n) = l_x + l_y$  p.co.,

b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (X_n \times Y_n) = l_x \times l_y$  p.co.,

c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{Y_n} = \frac{1}{l_y}$  p.co. tant que  $l_y \neq 0$ .

2) Si  $X_n - l_x = O_{p.co.}(U_n)$  et  $Y_n - l_y = O_{p.co.}(U_n)$ , on a

a)  $(X_n + Y_n) - (l_x + l_y) = O_{p.co.}(U_n)$ ,

b)  $(X_n \times Y_n) - l_x \times l_y = O_{p.co.}(U_n)$ ,

c)  $\frac{1}{Y_n} - \frac{1}{l_y} = O_{p.co.}(U_n)$  tant que  $l_y \neq 0$ .

**Proposition 4** Soit  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires et soit  $g$  une fonction continue.

Si

$$W_n \xrightarrow{\mathbb{P}.p.s.} W$$

alors

$$g(W_n) \xrightarrow{\mathbb{P}.p.s.} g(W)$$

# Les inégalités exponentielles de Type Bernstein pour des v.a.r. indépendantes

La notion de la convergence presque complètes est liée principalement sur des inégalités exponentielles pour les sommes de variables aléatoires. Ces inégalités diffèrent selon les différentes hypothèses vérifiées par les variables aléatoires. Nous nous concentrons ici sur la soi-disant inégalité de Bernstein. Ce choix a été fait parce que la forme de l'inégalité de Bernstein est la plus simple pour les développements théoriques sur les statistiques fonctionnelles.

**Proposition 5** (cf corollaire A.8 dans Ferraty et Vieu [25])

Soit  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et centrées.

i) Si  $\forall m \geq 2, \exists C_m > 0; E|Z_1^m| \leq C_m a^{2(m-1)}$ , nous avons

$$\forall \epsilon > 0, P \left( \left| \sum_{i=1}^n Z_i \right| > \epsilon n \right) \leq 2 \exp \left( -\frac{\epsilon^2 n}{2a^2(1+\epsilon)} \right).$$

ii) Si les variables  $Z_n$  dépendent de  $n$  (i.e.  $Z_i := Z_{i,n}$ ) et si  $\forall m \geq 2, \exists C_m > 0; E|Z_1^m| \leq C_m a_n^{2(m-1)}$  et si  $u_n = n^{-1} a_n^2 \log n$  vérifie  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , nous avons

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i = O_{p.co.}(\sqrt{u_n}).$$

**Proposition 6** (cf corollaire A.9 dans Ferraty et Vieu [25])

Soit  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et centrées.

i) Si  $\exists M < \infty; |Z_1| \leq M$  et si  $EZ_1^2 \leq \sigma^2$ , nous avons

$$\forall \epsilon > 0, P \left( \left| \sum_{i=1}^n Z_i \right| > \epsilon n \right) \leq 2 \exp \left( -\frac{\epsilon^2 n}{2\sigma^2(1+\epsilon \frac{M}{\sigma^2})} \right).$$

ii) Si les variables  $Z_n$  dépendent de  $n$  (i.e.  $Z_i := Z_{i,n}$ ) et si  $\exists M = M_n < \infty$  telle que  $|Z_1| \leq M_n$ , si  $EZ_1^2 \leq \sigma_n^2$ ,  $u_n = n^{-1} \sigma_n^2 \log n$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M \sqrt{u_n}}{\sigma_n^2} = 0$ , nous avons

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i = O_{p.co.}(\sqrt{u_n}).$$

## La semi métrique basée sur les dérivées

**Définition 4**  $d$  est une semi métrique sur un espace  $\mathcal{F}$  si elle vérifie les conditions suivantes

1.  $\forall x \in \mathcal{F}, d(x, x) = 0$ .
2.  $\forall (x, y, z) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \times \mathcal{F}, d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Une semi métrique  $d$  peut être définie comme une métrique mais telle que  $d(x, y) = 0 \nRightarrow x = y$ .

Un espace semi métrique est le couple  $(\mathcal{F}, d)$ .

**Définition 5** En analyses fonctionnelles, le choix des fonctions de localisation  $\beta(.,.)$  et  $\delta(.,.)$  constituent un paramètre important pour l'utilisation pratique de l'approche employée. Il existe plusieurs façons de choisir les opérateurs  $\beta(.,.)$  et  $\delta(.,.)$ , mais le choix approprié est déterminé par rapport à la forme des courbes et dépend de l'objectif de l'étude statistique. Par exemple, si les données fonctionnelles sont des courbes lisses, on peut essayer d'utiliser la famille suivante de fonctions de localisation :

$$\beta(x_1, x_2) = \int_0^1 \theta(t)(x_1^{(q)}(t) - x_2^{(q)}(t))dt$$

et

$$\delta(x_1, x_2) = \sqrt{\int_0^1 (x_1^{(q)}(t) - x_2^{(q)}(t))^2 dt},$$

où  $x^{(q)}$  est la dérivée d'ordre  $(q)$  de la courbe  $x$  et  $\theta(t)$  est la fonction propre de la covariance empirique

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^{(q)} - \overline{X^{(q)}})^t (X_i^{(q)} - \overline{X^{(q)}})$$

associée à la  $q$ -plus grande valeur propre.

## Les noyaux

**Définition 6** Une densité  $K$  définie sur  $\mathbb{R}$  est appelée

1. noyau de type 0, si son support est  $[-1, 1]$  et si pour tout  $u \in ]0, 1[$ ,

$$K(u) > 0;$$

2. noyau de type 1, s'il existe deux constantes réelles  $0 < C_1 < C_2 < \infty$  telles que :

$$C_1 1_{[0,1]} \leq K \leq 1_{[0,1]} C_2;$$

3. noyau de type 2, si son support est  $[0, 1]$  et si sa dérivée  $K'$  existe, est continue sur  $[0, 1]$  et vérifie

$$C_3 \leq K' \leq C_4,$$

où  $C_3$  et  $C_4$  sont deux constantes réelles telles que  $-\infty < C_3 < C_4 < 0$ .

Le fameux Théorème de Bochner qui permet de traiter le terme  $\frac{EK(\frac{X-x}{h})}{h}$ , dans le cadre fonctionnel le terme  $\frac{EK(\frac{d(X,x)}{h})}{h}$  qui le remplace est traité grâce au lemme suivant.

**Lemme 4.1 i)** Si  $K$  est un noyau de type 1, alors il existe deux constantes positives  $C$  et  $C'$  telles que

$$C\phi_x(h) \leq EK\left(\frac{d(x, X)}{h}\right) \leq C'\phi_x(h).$$

ii) Si  $K$  est un noyau de type 2 et si  $\phi_x$  satisfait

$$\exists C'' > 0, \exists \epsilon_0, \forall \epsilon < \epsilon_0, \int_0^\epsilon \phi_x(u) du > C'' \epsilon \phi_x(\epsilon), \quad (4.1)$$

alors il existe deux constantes réelles non négatives  $C$  et  $C'$ , telles qu'on ait pour  $h$  suffisamment petit

$$C\phi_x(h) \leq EK \left( \frac{d(x, X)}{h} \right) \leq C'\phi_x(h).$$

**Preuve du Lemme 4.1 i)** Par définition d'un noyau de type 1, nous avons

$$C_1 1_{[0,1]} \leq K \leq C_2 1_{[0,1]},$$

ce qui implique que

$$C_1 1_{B(x,h)}(X) \leq K \left( \frac{d(x, X)}{h} \right) \leq C_2 1_{B(x,h)}(X).$$

Le résultat visé s'en déduit par passage à l'espérance en posant  $C = C_1$  et  $C' = C_2$ .

ii) Nous pouvons écrire

$$K(t) = K(0) + \int_0^t K'(u) du,$$

et puisque

$$EK \left( \frac{d(x, X)}{h} \right) = \int_0^1 K(t) dP^{\frac{d(x, X)}{h}}(t),$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} EK \left( \frac{d(x, X_i)}{h} \right) &= \int_0^1 K(0) dP^{\frac{d(x, X)}{h}}(t) + \int_0^1 \left( \int_0^t K'(u) du \right) dP^{\frac{d(x, X)}{h}}(t) \\ &= \int_0^1 K(0) dP^{\frac{d(x, X)}{h}}(t) + \int_0^1 \left( \int_0^1 K'(u) 1_{[u,1]}(t) du \right) dP^{\frac{d(x, X)}{h}}(t). \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Fubini, la relation précédente s'écrit

$$\begin{aligned} EK \left( \frac{d(x, X)}{h} \right) &= K(0) \int_0^1 dP^{\frac{d(x, X)}{h}}(t) + \int_0^1 K'(u) \left( \int_0^1 1_{[u,1]}(t) dP^{\frac{d(x, X)}{h}}(t) \right) du \\ &= K(0) P(X \in B(x, h)) + \int_0^1 K'(u) P \left( u \leq \frac{d(x, X)}{h} \leq 1 \right) du \\ &= K(0) \phi_x(h) + \int_0^1 K'(u) \left[ P \left( \frac{d(x, X)}{h} \leq 1 \right) - P \left( \frac{d(x, X)}{h} \leq u \right) \right] du \\ &= K(0) \phi_x(h) + \int_0^1 K'(u) [\phi_x(h) - \phi_x(hu)] du \\ &= K(0) \phi_x(h) + \phi_x(h) [K(1) - K(0)] - \int_0^1 K'(u) \phi_x(hu) du \\ &= K(1) \phi_x(h) - \int_0^1 K'(u) \phi_x(hu) du. \end{aligned}$$

$K(1) \neq 0$ , le noyau  $K$  est de type 1 (en vertu de l'exercice 3.1) pour lequel l'inégalité recherchée est vérifiée d'après la partie i).

Si  $K(1) = 0$ , on a

$$EK \left( \frac{d(x, X)}{h} \right) = - \int_0^1 K'(u) \phi_x(hu) du.$$

Le changement de variable suivant  $t = hu$  donne

$$EK \left( \frac{d(x, X)}{h} \right) = - \frac{1}{h} \int_0^h K' \left( \frac{t}{h} \right) \phi_x(t) dt,$$

$K$  étant un noyau de type 2, combiné avec la relation (4.1), nous donne pour  $h < \epsilon_0$

$$EK \left( \frac{d(x, X)}{h} \right) \geq - \frac{1}{h} h C'' C_3 \phi_x(h) \geq C \phi_x(h),$$

où

$$C = -C'' C_3.$$

Comme  $K$  est borné et à support dans  $[0, 1]$ , en posant  $C' = \sup_{t \in [0, 1]} K(t)$ , les mêmes arguments utilisés en i) impliquent que

$$EK \left( \frac{d(x, X)}{h} \right) \leq C' \phi_x(h). \quad (4.2)$$

## Bibliographie

- [1] Ait Hennania, L., Lemdania, M., Ould Said, E. (2019). 'Robust regression analysis for a censored response and functional regressors' *Journal of Nonparametric Statistics*, 31 (1), 221-243.
- [2] Altendji, B., Demongeot, J., Laksaci, A., Rachdi, M. (2018). 'Functional data analysis : estimation of the relative error in functional regression under random left-truncation model', *Journal of Nonparametric Statistics*, 30 (2), 472-490.
- [3] Aouicha, L., Messaci, F. (2019). 'Kernel estimation of the conditional density under a censorship model'. *Statistics & Probability Letters*, 145, 173-180.
- [4] Barrientos-Marin, J., Ferraty, F., Vieu, P.(2010). 'Locally modelled regression and functional data'. *Journal of Nonparametric Statistics*, 22 (5), 617-632.
- [5] Benkhaled, A., Madani, F., Khardani, S. (2020). 'Strong consistency of local linear estimation of a conditional density function under random censorship', *Arabian Journal of Mathematics*, <https://doi.org/10.1007/s40065-020-00282-1>.
- [6] Bouanani, O., Rahmani, S., Ait-Hennani, L. (2019). 'Local linear conditional cumulative distribution function with mixing data', *Arabian Journal of Mathematics*, 1-19.
- [7] Bouchentouf, A., Hamza, A., Rabhi, A. (2017). 'Strong uniform consistency rates of conditional hazard estimation in the single functional index model for dependant functional data under random censorship'. *International Journal of Statistics and Economics*, 18, 82-101.
- [8] Boudada, H., Leulmi, S., Kharfouch, S. (2020). 'Rate of the Almost Sure Convergence of a Generalized Regression Estimate Based on Truncated and Functional Data', *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics* , 13 (4), 1-12.
- [9] Boukeloua, M. (2015). 'Rates of mean square convergence of density and failure rate estimators under twice censoring'. *Statistics & Probability Letters*, 106, 121-128.
- [10] Chaouch, M., Khardani, S. (2015). 'Randomly censored quantile regression estimation using functional stationary ergodic data'. *Journal of nonparametric statistics*, 27(1), 65-87.
- [11] Demongeot, J., Laksaci, A., Madani, F. and Rachdi, M. (2011). 'A fast functional locally modelled conditional density and mode for functional time series. In/ recent *Advances in Functional Data Analysis and related topics*; In : *Contributions to Statistics, Physica-Verlag/Springer*, 85-90. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-7908-2736-1-13>.

- [12] Demongeot, J., Laksaci, A., Madani, F. and Rachdi, M. (2013). 'Functional data analysis : conditional density estimation and its application'. *Statistics*, 47 (1), 26-44.
- [13] Demongeot, J., Laksaci, A., Rachdi, M. and Rahmani S. (2014). 'On the local linear modelization of the conditional distribution for functional data'. *Sankhyā Ser A*.
- [14] Derrar, S., Laksaci, A., Ould Saïd, E. (2015). ' On the nonparametric estimation of the functional  $\psi$ -regression for a random left-truncation model'. *Journal of Statistical Theory and Practice*, 9 (4), 823-849.
- [15] Derrar, S., Laksaci, A., Ould Saïd, E. (2018). 'M-estimation of the regression function under random left truncation and functional time series model' *Statistical Papers* , 61 (3), 1181-1202.
- [16] El Bahi, M., Ould Saïd, E. (2009). ' Strong uniform consistency of nonparametric estimation of the censored conditional quantile for functional regressors'. *Prépublication, L.M.P.A. 383 , Calais, U.L.C.O. Unpublished paper.*
- [17] El Bahi, M., Ould Saïd, E. (2009). 'Asymptotic distribution of a nonparametric regression quantile with censored data and functional regressors' . *Prépublication, L.M.P.A. 385 , Calais, U.L.C.O. Unpublished paper.*
- [18] El Ghouch, A., & Van Keilegom, I. (2009). 'Local linear quantile regression with dependent censored data'. *Statistica Sinica* , 19, 1621–1640.
- [19] Fan, J. (1992). 'Design-adaptive nonparametric regression', *Journal of the American statistical Association*, 87 (420), 998-1004.
- [20] Fan J, Gijbels I (1996) 'Local polynomial modelling and its applications'. Chapman & Hall, London.
- [21] Ferraty, F., Laksaci, A., Vieu, P. (2006). ' Estimating some characteristics of the conditional distribution in nonparametric functional models'. *Statist. Inf. Stoch. Processes*, 9, 47-76.
- [22] Ferraty, F., Rabhi, A., Vieu, P. (2005). ' Conditional quantiles for functional dependant data with application to the climatic El Niño phenomenon'. *Sankhyā*, 67, 378-398.
- [23] Ferraty, F., Laksaci, A., Tadj, A., Vieu, P. (2010). 'Rate of uniform consistency for nonparametric estimates with functional variables'. *Journal of statistical planning and inference*, 140 (2), 335-352.
- [24] Ferraty, F., Vieu, P. (2002-2003). 'STATISTIQUE FONCTIONNELLE : Modèles Non-Paramétriques de Régression. Notes de cours de DEA'.
- [25] Ferraty, F., Vieu, P. (2006). 'Nonparametric functional data analysis : theory and practice'. Springer Science & Business Media.
- [26] He, S., Yang, G. L. (1998). ' Estimation of the truncation probability in the random truncation model'. *Annals of Statistics*, 1011-1027.
- [27] Helal, N., Ould-Saïd, E. (2016). ' Kernel conditional quantile estimator under left truncation for functional regressors'. *Opuscula Mathematica*, 36, 25-48.
- [28] Horrigue, W., Ould Saïd, E. (2011). 'Strong uniform consistency of a nonparametric estimator of a conditional quantile for censored dependent data and functional regressors conditional quantile for fonctionnal times series'. [*in :]* *Random Operators and Stoch. Equa.*, Birkhäuser Verlag, 131-156.

- [29] Horrigue, W., Ould Saïd, E. (2014). 'Nonparametric conditional quantile estimation for dependant functional data under random censorship : Asymptotic normality'. *Comm. in Statist.Theory Methods*, DOI 10.1080/03610926.2013.784993.
- [30] Kadiri, N., Rabhi, A., Bouchentouf, A. A. (2018). 'Strong uniform consistency rates of conditional quantile estimation in the single functional index model under random censorship', *Dependence Modeling*, 6(1), 197-227.
- [31] Klein, J. P., Moeschberger, M. L. (2006). 'Survival analysis : techniques for censored and truncated data'. Springer Science & Business Media.
- [32] Kolmogorov, A. N. and Tikhomirov, V. M. (1959). ' $\epsilon$ -entropy and  $h$ -capacity'. *Uspehi Matematicheskikh Nauk*, 1, 3-86.
- [33] Lemdani, M., Ould-Saïd, E. (2007). 'Asymptotic behavior of the hazard rate kernel estimator under truncated and censored data'. *Communications in Statistics Theory and Methods*, 36 (1), 155-173.
- [34] Lemdani, M., Ould-Saïd, E., Poulin, N. (2009). 'Asymptotic properties of a conditional quantile estimator with randomly truncated data'. *Journal of multivariate analysis*, 100(3), 546-559.
- [35] Leulmi, S. (2019). 'Local linear estimation of the conditional quantile for censored data and functional regressors'. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 1-15.
- [36] Leulmi, S. (2020). 'Nonparametric local linear regression estimation for censored data and functional regressors'. *Journal of the Korean Statistical Society*, 1-22.
- [37] Leulmi, S., Messaci, F. (2018). 'Local linear estimation of a generalized regression function with functional dependent data'. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 47(23), 5795-5811.
- [38] Leulmi, S., Messaci, F. (2019). 'A Class of Local Linear Estimators with Functional Data'. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 12, 379-391.
- [39] Liang, H. Y., de Uña-Álvarez, J., del Carmen Iglesias-Pérez, M. (2011). 'Local polynomial estimation of a conditional mean function with dependent truncated data'. *Test*, 20(3), 653-677.
- [40] Ling, N., Liu, Y. (2017). 'The kernel regression estimation for randomly censored functional stationary ergodic data'. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 46(17), 8557-8574.
- [41] Lynden-Bell, D. (1971) 'A method of allowing for known observation selection in small samples applied to 3CR quasars', *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 155, 95-118.
- [42] Mechab, B., Hamidi, N., & Benaïssa, S. (2019). 'Nonparametric estimation of the relative error in functional regression and censored data'. *Chilean Journal of Statistics (ChJS)*, 10(2).
- [43] Messaci, F., Nemouchi, N., Ouassou, I., Rachdi, M. (2015). 'Local polynomial modeling of the conditional quantile for functional data'. *Statistical Methods & Applications*, 24 (4), 597-622.
- [44] Ould Saïd, E. (2006). 'A strong uniform convergence rate of kernel conditional quantile estimator under random censorship'. *Statistics & Probability Letters*, 76, 579-586.
- [45] Ould-Saïd, E., & Lemdani, M. (2006). 'Asymptotic properties of a nonparametric regression function estimator with randomly truncated data'. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 58(2), 357-378.

- [46] Ould-Said, E., & Tatachak, A. (2009). 'On the non-parametric estimation of the simple mode under random lefttruncation model'. *Rev. Roum. Math. Pure. A*, 54(3), 243-266.
- [47] Ould Saïd, E., Tatachak, A (2009) 'Strong uniform consistency rate for the kernel mode under strong mixing hypothesis and left truncation', *Comm. in Staist. Theory and Methods*, 37, 2735-2759.
- [48] Ould Saïd, E. Yahia,D; Necir, A. (2009) 'A strong uniform convergence rate of a kernel conditional quantile estimator under left truncation and dependent data', *Elect. J. Statist.* 3, 426-445.
- [49] Saint Pierre, P. (2015). 'Introduction à l'analyse des durées de survie'. Université Pierre et Marie Curie, France.
- [50] Stute, W. (1993). 'Almost sure representations of the product-limit estimator for truncated data'. *The Annals of Statistics*, 21 (1), 146-156.
- [51] Woodroffe, M. (1985). 'Estimating a distribution function with truncated data'. *The Annals of Statistics*, 13 (1), 163-177.
- [52] Xiong, X., Zhou, P., Ailian, C. (2018). 'Asymptotic normality of the local linear estimation of the conditional density for functional time-series data'. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 47 (14), 3418-3440.