REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHRCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI DE CONSTANTINE
FACULTE DE SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre
Série

Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de

Magister en Mathématiques

Option **:**
Equations différentielles et leurs applications

Par

Charef Hamid

Contrôlabilité régionale du rotationel d'un système Parabolique

Soutenue le : 27/09/2006 devant la commission d'examen :

Mohdeb Zahir	Professeur	Président	Université mentouri Constantine
Ayadi Abdelhamid	Professeur	Rapporteur	Université mentouri Constantine
Djezzar Salah	M.C	Examinateur	Université mentouri Constantine
Marhoune Ahmed Lakhdar	M.C	Examinateur	Université mentouri Constantine

Table des matières

Introduction

Parmi les théories mathématiques orientées vers les applications, les équations différentielles et aùx dérivées partielles linéaires ou non linéaires, ces équations modélisent la plupart des phénomènes en Physique, en Mécanique, en Chimie, etc., et jusqu'en Economie. A titre d'exemple certains fours tunels d'industrie céramique se modélisent par les équations de la thermique. Dans la Mécanique la vitesse d'un particul s'intprète par le vecteur gradient.

Le déveleppement de ces sciences nécessite resolution ces équations et souvent numériquement afin d'obtenir des propriétés quantitatives des solutions. La phase de la modélisation de ces phénomènes passe en partie en meilleure compréhension les propriétés des solutions et des équations, elle consiste à répresenter la phénomène à étudier par des systèmes des équations Mathématiques et à preciser regueresement le cadre fonctionnel où l'on travail prenant en compte toutes les donneés connues concernant le phénomène. L'orsque ces systèmes faite apparaitre un variable d'espace s'appelent systèmes distribués.

La notion de la contrôlabilité a été inventé dans les années 60 par Kalman, Bertram, et Bellman à propos des systèmes linéaires contiennent un variable d'espace de contrôle, l'état de système depend du variable de cet' espace et d'un variable caractrisant l' espace géométrique sur lequel le système est défini.

Ainsi le problème de la contrôlabilité consiste en la possibitité de joindre deux points de l'espace d'état, il s'agit de transformer l'état d'un système en un temps fini d'un état initial vers un état désiré choisi à priori. Dans le cas où la dimension de l' espace d' etat est infini l' etude est plus compliqué et la notion de la contrôlabilité peut définir à divers dégrés.

L'objectif de ce travail est étudier une extention de la contrôlabilité, c'est la contrôlabilité régionale du rotationnel de certains classes des systèmes paraboliques où l'opérateur du rotationnel est pris dans le cas scalaire, il consiste de trouver un contrôle amène le système d'un état initial vers un état d'un rotationnel désiré sur une partie interne du domaine géométrique sur lequel est défini le système. Nous nous interessons aussi par le contrôle à energie minimale assurant le transfert régional du rotationnel.

Signalons que l'etude est motivé de nombreuses questions d'ordre par exemple Physique, en particulier Mécanique des fluid dont le rotationnel joue un rôle fondamental.

Ce travail est organisé comme suite

Le premier chapitre contient des rappels fondamentaux sur les problèmes d'évolution, semi-groupes, et problèmes d'optimisation. Ce sont les outils principaux du sujet.

Le dexième chapitre est consacré à la contrôlabilité, nous allons donner, à divers degrés, les notions de la contrôlabilité, et la contrôlabilité régionale, celle d' actionneurs et d' actionneurs stratigiques. Nous énonçons des caractrisations pour les systèmes contrôlables, et on traite la relation qui existe entre la stricture des actionneurs et la contrôlabilité régionale.

Dans le troisième chapitre nous introduisons le concept de la contrôlabilité du rotationnel d'un système parabolique. On va examiner les notions de la contrôlabilité régionale du rotationnel, ainsi que leurs caractrisations. Noun montrons ensuite le lien qui existe entre la controlabilité régionale du rotationnel et la structeur des actionneurs excitent le système. Et en fin nous déterminerons le contrôle optimal qui assure le transfert régional. Les resultats obtenus sont illustrés par des nombreuses exemples.

Chapitre 1

Quelques rappels

Nous présentons brièvement, dans ce chapitre, les notions liées aùx équations d'évolution paraboliques, les semi-groupes d'opérateurs, celle de fonctions s.c.i., convexes et naturellement des résultats d'existence et d'unicité de solution pour les problèmes d'évolution, et d'optimisation.Au dernier paragraphe de deuxième section de cette partie, on donnera le lien qui existe entre des systèmes d'évolution et les semi-groupes, ainsi à l'aide de ce dernier nous exprimons la solution de ce type de ces systèmes.

1.1 Problèmes d'évolution parabolique :

Dans cette section, nous précisons la notion d'équation parabolique et nous donnons un résultat général d'analyse fonctionnelle qui joue un rôle fondamental pour les équations paraboliques.

1.1.1 Espace $W(0,T)$:

Soient V et H deux espaces de Hilbert réels séparables tels que $V \subset H$ et que l'injection de V dans H soit continue et dense.$\acute{V}$est le dual de V , et le dual de H est identifié a H. On a donc $V \hookrightarrow H \hookrightarrow \acute{V}$.

On définit tout d'abord l'espace $L^2(0,T;V)$ des fonctions :

$$t \in]0,T[\subset \mathbb{R} \longrightarrow f(t) \in V.$$

mésurable et telles que :

$$\left(\int_0^T \| f(t) \|_V^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} \langle\infty$$

-$L^2(0,T;V)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$\forall f,g \in L^2(0,T;V) \qquad \langle f,g\rangle_{L^2(0,T;V)} = \int_0^T \langle f(t), g(t)\rangle_V dt$$

On définit de même $L^2\left(0,T;V^{\acute{}}\right)$,et si $f \in L^2(0,T;V)$ on désigne par $\frac{\partial f}{\partial t}$ la dérivée de f dans l'espace $D^{\acute{}}(]0,T[\,;V)$.

<u>Définition 1.1 :</u>

On définit l'espace $W(0,T)$ par :

$$W(0,T) = \left\{ f :]0,T[\longrightarrow V; f \in L^2(0,T;V)\, ; \frac{\partial f}{\partial t} \in L^2\left(0,T;V^{\acute{}}\right) \right\}$$

muni de la norme :

$$\| f \|_{W(0,T)} = \left(\| f \|^2_{L^2(0,T;V)} + \| \frac{\partial f}{\partial t} \|^2_{L^2\left(0,T;V^{\acute{}}\right)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$W(0,T)$ est un espace de Hilbert.

On désigne par : $C^0([0,T]\,;H)$ l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ vers H , muni de la norme :

$\| f \|_{C^0} = \sup\limits_{0 \leq t \leq T} \| f(t) \|_H$.

Le lemme suivant affirme que pour tout $f \in W(0,T)$, les quantités $f(0)$ et $f(T)$ ont un sens dans H.

Lemme 1.1

Toute fonction f de $W(0,T)$ est $p.p.$ en $[0,T]$ égale à une fonction continue de $[0,T]$ dans H. De plus, l'injection : $W(0,T) \subset C^0([0,T];H)$ est continue.

La formule d'intégration par partie dans $W(0,T)$ est donnée par :

Lemme1.2 :

Pour tout : $f, g \in W(0,T)$ on a :

$$\int_0^T \langle \frac{df}{dt}(t), g(t) \rangle dt + \int_0^T \langle f(t), \frac{dg}{dt}(t) \rangle dt = \langle f(T), g(T) \rangle_H - \langle f(0), g(0) \rangle_H.$$

Pour la demonstration du lemme1.1 et lemme1.2 (cf. Lions-Magenes[13])

1.1.2 Equations d'évolution :

Soit $W(0,T)$,et on se donne pour presque tout $t \in [0,T]$ une forme bilinéaire

$$a(t;\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

vérifiante les propriétés :

P1) la fonction $t \longrightarrow a(t;u,v)$ est mésurable $\forall u, v \in V$.

P2) $|a(t;u,v)| \leq M \parallel u \parallel_V \parallel v \parallel_V \qquad p.p.t \in [0,T], \forall u, v \in V.$

P3) $|\ a(t;u,u)| \geq \alpha \parallel u \parallel_V^2 - \gamma \parallel u \parallel_H^2 \qquad p.p.t \in [0,T] \quad \forall u \in V.$

Oû $\alpha \rangle 0, M, \gamma$ sont des constantes.

Pour $f \in L^2(0,T;V')$ et $u_0 \in H$, nous considérons le problème suivant : trouver $u \in W(0,T)$ tel que

$$\begin{cases} \langle \frac{du}{dt}(t), v \rangle + a(t; u(t), v) = \langle f(t), v \rangle & p.p.t \in [0,T] \quad \forall v \in V \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Remarque :

La condition initiale $u(0) = u_0$ a bien un sens d'aprés le lemme1.1

Définition1.2 :

Nous convenons d'appeler équation parabolique, les équations du type (1.1) où la forme bilinéaire $a(t;\cdot,\cdot)$ satisfait les conditions($\mathbf{P1}$) à ($\mathbf{P3}$).

Théorème 1.1 (J.L.lions) :

Si les conditions ($\mathbf{P1}$) à ($\mathbf{P3}$) sont vérifiées, le problème (1.1) admet une solution unique dans $W(0,T)$.

De plus l'application bilinéaire

$$L^2\left(0,T;V'\right) \times H \longrightarrow W(0,T)$$
$$(f,u_0) \longrightarrow u \text{ (solution du (1.1))}$$

est continue.

Pour la demonstration (cf. J.L. Lions[11])

Remarque :

Il est possible de ramener la condition $(p3)$ à une condition de coercivité pure, $\boldsymbol{i.e.}, \gamma = 0$. En effet posons

$\tilde{a}(t;\phi,v) = a(t;\phi,v) + \gamma\langle\phi,v\rangle_H$.

Il est claire que $\tilde{a}$ satisfait les deux conditions $(p1)$ et $(p2)$ et que cette forme bilinéaire est V-coercive : $\tilde{a}(t;\phi,\phi) \geq \alpha \parallel \phi \parallel_V^2$. De plus, en posant $\phi = \bar{e}^{\gamma t}u$ et $g = \bar{e}^{\gamma t}f$, le problème (1.1) s'écrit de façon équivalente.

trouver $\phi \in W(0,T)$ tel que :

$$\begin{cases} \langle \frac{d\phi}{dt}(t), v\rangle + \tilde{a}(t;\phi(t), v) = \langle g(t), v\rangle & p.p.t \in [0,T] \quad \forall v \in V \\ \phi(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Exemple :

Ω ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$, $Q = \Omega \times]0,T[$, $V = H_0^1(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$

Soient : a_{ij} , a_i , a_0 $\in L^2(Q)$ vérifiants.

$\sum\limits_{i,j} a_{ij}(x,t)\,\xi_i\xi_j \geq \alpha \mid \xi \mid^2 \quad p.p.\,(x,t) \in \Omega \times]0,T[\ , \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad , \quad \alpha \rangle 0.$

On considère la forme bilinéaire $a(t;\cdot,\cdot)$ définie sur $H_0^1(\Omega)$ par :

$$a(t;u,v) = \sum_{i,j} \int\limits_{\Omega} a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_{i} \int\limits_{\Omega} a_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int\limits_{\Omega} a_0(x,t)\, uv dx$$

Il est facile de montrer que la forme bilineaire $a(t;\cdot,\cdot)$ vérifie les conditions $(p1)$ à $(p3)$ du théorème1.1, ainsi on a pour tout $f \in L^2\left(0,T;H_0^{-1}(\Omega)\right)$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$ il existe une solution faible unique du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \sum\limits_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t)\right) + & \\ \qquad\qquad \sum\limits_{i} a_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) + a_0(x,t)\,u(x,t) = f(x,t) & \text{sur} \quad Q \\ u(\xi,t) = 0 & \text{sur} \quad \sum \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur} \quad \Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

telle que :

$u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega))$ et $\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.

1.2 Semi-groupe

Soit X un espace de Banach, $(S(t))_{t\geq 0}$ une famille d'operateurs bornés définis de X vers lui même.

Definition 2.1

On dit que $(S(t))_{t\geq 0}$est un semi groupe fortement continu si :

$i)$ $S(0) = \mathbf{I}$.

$ii)$ $S(t+s) = S(t)\,S(s) \quad \forall t,s \geq 0$.

$iii)$ $\lim\limits_{t\to 0^+} \|S(t)\,y - y\| = 0 \quad \forall y \in X$.

L'opérateur A défini par : $Ay = \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{S(t)y-y}{t}$ sur $\mathcal{D}(A)$ avec

$$D(A) = \left\{ y \in X \mid \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)\,y - y}{t} \quad \text{existe} \right\}$$

est le générateur infinitésimal de $S(t)$, et l'on a

1) $\mathcal{D}(A)$ est dense dans X et A est fermé

2) Il existe $\omega \geq 0,\ \ M \geq 1$ tels que $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad \forall t \geq 0$

3) $\forall y \in \mathcal{D}(A)\ \forall t \geq 0 \qquad S(t)\,y \in \mathcal{D}(A)$ et l'on a $AS(t)\,y = S(t)\,Ay$

4) $\forall y \in X \quad \forall t \geq 0 \ \ \int\limits_0^t S(s)\,yds \in \mathcal{D}(A)$ et l'on a $A\left(\int\limits_0^t S(s)\,yds\right) = S(t)\,y - y$

Le théorème suivant est une caractrisation d'opérateurs qui sont des générateurs d'un semi-groupe fortement continu.

<u>Théorème 2.1</u> (Hille-Yosida)

Un opérateur A de domaine $\mathcal{D}(A)$ dans X , génère un semi-groupe fortement continu si et seulement si :

$i)$ $\mathcal{D}(A)$ est dense dans X et A est fermé.

$ii)$ $\exists \omega \geq 0\ \exists M \geq 1$ tels que $\forall \lambda \quad \mathrm{Re}(\lambda) \rangle \alpha,\ \lambda \in \rho(A)$ et l'on ait

$$\left\| (\lambda I - A)^{-k} \right\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^k} \qquad k = 1, 2, ...$$

Pour la demonstration (cf. A. Pazy[14])

L'adjoint A^* de A engendre le semi-groupe $(S^*(t))_{t \geq 0}$ adjoint de $(S(t))_{t \geq 0}$ qui est également fortement continu sur le dual X^* de X .

Si X est un espace de Hilbert et A admet un système orthonormé complet de fonctions propres $\left(\varphi_{n_j}\right)$ associées aux valeurs propres (λ_n) , λ_n étant de multiplicité r_n,alors le semi semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ engendré par A s'exprime par :

$$\forall y \in X \qquad S(t)\,y = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \sum_{j=1}^{r_n} \langle y, \varphi_{n_j} \rangle \varphi_{n_j}$$

<u>Cas particulier :</u>

Reprenons de nouveau le cas du théorème 1.1, mais avec

$a(t;u,v) = a(u,v)$ indépendant de t .

Prenons d' abort $f = 0$ dans (1.1) ,alors le système (1.1) se réduit à

$$\begin{cases} \langle \frac{du}{dt}(t), v\rangle + a(u(t), v) = 0 \\ u(0) = y_0 \qquad\qquad y_0 \in H \end{cases} \tag{1.4}$$

qui admet une solution unique dans $W(0,T)$, T quelconque dans $]0,+\infty[$.

D'aprés le théorème 1.1, et lemme1.1, on définit ainsi une application lineaire :

$y_0 \longrightarrow u(t)$, de $H \longrightarrow H$ qui est continue.

Pour tout $t \geq 0$,on pose $S(t)\, y_0 = u(t)$, $\quad S(t) \in \mathcal{L}(H;H)$ et l'on a :

$i)S(0) = I$

$ii)S(t+s) = S(t)\, S(s) \qquad\qquad \forall t, s \geq 0.$

$iii) \lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \|S(t)\, y_0 - y_0\|_H \qquad \forall y_0 \in H.$

Donc $(S(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur H.

Remarque :

la solution générale de (1.1) peut se présenter sous la forme

$$U(t) = S(t)\, y_0 + \int_0^t S(t-s)\, f(s)\, ds.$$

1.3 Problème d'optimisation

1.3.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 3.1

Soit U un espace topologique et soit $J : U \rightarrow \mathbb{R}$. on dit que J est semi-continue inférieurement (S.C.I) si

$\forall u \in U \;\; \forall \varepsilon \rangle 0$ il éxiste voisinage V de u tel que

$$J(u) - \varepsilon \leq J(v) \qquad \forall v \in V$$

Proposition 3.1

Si U est un espace métrique, alors on a l'équivalence entre

1) J est S.C.I

2) $\forall\lambda \in \mathbb{R} \;\; \{J \leq \lambda\}$ est fermé dans U.

3) pour toute suite $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} u$ dans U on a $J(u) \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} J(u_n)$.

Définition 3.2

Soit U un espace vectoriel et soit $J : U \to \mathbb{R}$. J est dite convexe si

$\forall u, v \in U$, $u \neq v$ $\forall t \in]0,1[$ on a $J(tu + (1-t)v) \leq tJ(u) + (1-t)J(v)$.

Si cet inégalité est stricte, on dit que J est strictement convexe.

Proposition 3.2

Si J est convexe alors $\forall\lambda \in \mathbb{R} \;\; \{J \leq \lambda\}$ est convexe.

Dans ce qui est suite, on suppose que U est un espace de Hilbert et J une application de U vers $\mathbb{R}$. Nous nous interessons au problème suivant :

Trouver $u^* \in U_{ad}$ tel que

$$J(u^*) = \min_{U_{ad}} J(u) \tag{1.5}$$

où U_{ad} est un sous-ensemble fermé, convexe et non vide de U.

Théorème 3.1

Sous les hypothèses :

i) J est s.c.i.

ii) J est convexe

iii) $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} J(u) = +\infty$ i.e. J coercive,

il éxiste $u^* \in U_{ad}$ vérifiant (1.5). De plus, si J est strictement convexe u^*est unique.

Preuve

Pour tout $u \in U_{ad}$, on pose $K_u = U_{ad} \cap \{J \leq J(u)\}$.

On a $\forall u \in U_{ad} \;\; u \in K_u$ alors $\forall u \in U_{ad} \;\; K_u \neq \phi$.

Puisque J est s.c.i (Resp. convexe, coercive) donc $\{J \leq J(u)\}$ est fermé (Resp. convexe, borné), et par conséquent K_u est fermé, convexe et borné.

Donc K_u compact pour la topologie faible.

Soit $u_i \in U_{ad}$ avec $i \in I$ fini et soit $i_0 \in I$ tel que $J(u_{i_0}) = \min_{i \in I} J(u_i)$.

Alors on a

$$\underset{i\in I}{\cap} K_{u_i} = K_{u_{i_0}} \neq \phi$$

on en déduit que $\underset{u\in U_{ad}}{\cap} K_u \neq \phi$. Il éxiste donc $u^* \in K_u \quad \forall u \in U_{ad}$.

Ainsi on a u^* solution de (1.5).

Supposons que J est strictement convexe et soit v^* une autre solution de (1.5)

$\forall t \in]0,1[\qquad tu^* + (1-t)v^* \in U_{ad} \qquad$ et on a

$$\begin{aligned} J(tu^* + (1-t)v^*) &\prec tJ(u^*) + (1-t)J(v^*) \\ &= \min_{u\in U_{ad}} J(u) \end{aligned}$$

ce qui est absurde et donc u^* est unique .

1.3.2 Inégalités variationnelles

Théorème 3.2

Supposons que les conditions du théorème 3.1 sont vérifiés et de plus J est différentiable, alors la solution u^* de (1.5) est caractrisée par

$$J'(u^*)(u-u^*) \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad} \tag{1.6}$$

$$J'(u)(u-u^*) \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad} \tag{1.7}$$

Preuve

Soit u^* solution de (1.5) et $u \in U_{ad}$

On a

$$J(tu + (1-t)u^*) - J(u^*) \geq 0$$

Alors

$$\frac{J\left(u^*+t\left(u-u^*\right)\right)-J\left(u^*\right)}{t}\geq 0 \qquad \forall t\in\left]0,1\right[$$

quand $t\to 0^+$ on obtient

$$J'\left(u^*\right)\left(u-u^*\right)\geq 0$$

D'où u^* est une solution de (1.6).

On a aussi

$$\begin{aligned} J\left(tu+(1-t)\,u^*\right) &\leq tJ\left(u^*\right)+(1-t)\,J(u) \\ &\leq J(u) \end{aligned}$$

donc

$$J\left(tu+(1-t)\,u^*\right)-J(u)\leq 0$$

alors

$$\frac{J\left(u+t\left(u^*-u\right)\right)-J(u)}{t}\leq 0 \qquad \forall t\in\left]0,1\right[$$

Quand $t\to 0^+$ on obtient

$$J'(u)\left(u^*-u\right)\leq 0$$

D'où u^* est une solution de (1.7).

Soient $u,v\in U$, on a

$$\begin{aligned} J\left(u+t\left(v-u\right)\right) &= J\left(tv+(1-t)\,u\right) \\ &\leq tJ(v)+(1-t)\,J(u) \end{aligned}$$

alors

$$\frac{J\left(u+t\left(v-u\right)\right)-J(u)}{t}\leq J(v)-J(u)$$

passant à la limite lorsque $t\to 0^+$ on obtient

$$J'(u)(v-u) \leq J(v) - J(u) \qquad \forall u, v \in U$$

Si u^* solution de (1.6) on a alors

$$0 \leq J'(u^*)(u-u^*) \leq J(u) - J(u^*) \qquad \forall u \in U_{ad}$$

d'où

$$J(u^*) \leq J(u) \qquad \forall u \in U_{ad}$$

De même si u^* est une solution de (1.7) u^* est une solution de (1.5).

Cas particulier

$\Pi(\cdot,\cdot)$ une forme bilineaire continue et coercive sur U . on pose

$$J(u) = \frac{1}{2}\pi(u,u)$$

Dans ce cas on a

$$J'(u)(v) = \pi(u,v)$$

et u^* est caractérisé par

$$\pi(u^*, u-u^*) \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad} \tag{1.8}$$

$$\pi(u, u-u^*) \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad} \tag{1.9}$$

Chapitre 2

Contrôlabilité et contrôlabilité régionale

2.1 Systèmes considérés

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3.$ pour les applications) de frontière Γ régulière, et soit $T \succ 0$. Considérons le système donné de façon formelle par

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} y(t) = Ay(t) + Bu(t) & 0 \prec t \prec T \\ y(0) = y^0 \end{cases} \tag{2.1}$$

où A génère un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t \geq 0}$ sur l'espace d'etat $X = L^2(\Omega)$, $B \in \mathcal{L}(U, X)$ avec U est un espace de Hilbert séparable (espace de contrôle) et $u \in L^2(0, T; U)$.

L'opérateur A fournit la dynamique du système tandis que l'opérateur B nous renseigne sur la nature des actionneurs qui excitent le système ainsi que sur leur localisation.

Si A est auto-adjoint à résolvante compacte alors le système (2.1) admet une solution faible unique sera notée $y_u(t)$ continue sur $[0, T]$ et donnée par :

$$y_u(t) = S(t) y^0 + \int_0^t S(t-s) Bu(s) \, ds.$$

Le problème de la contrôlabilité consiste à trouver un contrôle $u \in L^2(0,T;U)$ permet de transférer l'etat initial y^0 vers un état désiré choisi à priori.

2.2 Contrôlabilité exacte, faible et élargie

Définition 2.1

Le système (2.1) est dit exactement contrôlable dans X sur $[0,T]$ si

$$\forall y^d \in X \quad \exists u \in L^2(0,T;U) \qquad \text{tel que} \qquad y_u(T) = y^d$$

Proposition 2.1

Le système (2.1) est exactement contrôlable dans X sur $[0,T]$ si et seulement si

$$\exists \gamma \in \mathbb{R} \text{ tel que } \|y^*\|_{X^*} \leq \gamma \|B^* S^*(\cdot) y^*\|_{L^2(0,T;U^*)} \quad \forall y^* \in X^* \tag{2.2}$$

Pour montrer cette proposition on utilise

Lemme 2.1

Soient V, W, Z des éspaces de Banach réflixifs, et $F \in \mathcal{L}(V,Z), G \in \mathcal{L}(W,Z)$ alors on a l'equivalence entre

1) $\operatorname{Im} F \subset \operatorname{Im} G$

2) $\exists \gamma \succ 0$ tel que $\|F^* z^*\|_{V^*} \leq \gamma \|G^* z^*\|_{W^*} \quad \forall z^* \in Z^*$.

Preuve de la proposition 2.1

On prend $F = Id_X$, $G \in \mathcal{L}(L^2(0,T;U), X)$ défini par $Gu = \int_0^T S(s) Bu(s)\, ds$.

On a alors $F^* = Id_{X^*}$ et $G^* y^* = B^* S^*(\cdot) y^* \quad \forall y^* \in X^*$.

On suppose que le système (2.1) exactement contrôlable, et soit $y \in \operatorname{Im} F = X$.

Pour $y^d = S(T) y^0 + y$ il existe $v \in L^2(0,T;U)$ tel que $y_v(T) = y^d$.Alors

$$\int_0^T S(s) Bv(T-s)\, ds = y$$

Pour $u(s) = v(T-s)$ on a $Gu = y$. Donc $\operatorname{Im} F \subset \operatorname{Im} G$, d'aprés le lemme précédent nous avons la relation (2.2).

Inversement, on suppose que (2.2) est vérifiée, alors d'aprés le lemme 2.1 $\operatorname{Im} F = X \subset \operatorname{Im} G$. Par conséquent on a contrôlabilité exacte.

Pour les systèmes distribués la notion d'exacte contrôlabilité n'est pas adaptée et reste trés peu réalisable même si l'action exercée sur tout le domaine Ω, C'est pourquoi nous somme conduits à définir la notion de faible contrôlabilité.

Définition 2.2

Le système (2.1) est dit faiblement contrôlable dans X sur $[0,T]$ si

$$\forall y^d \in X \quad \forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists u \in L^2(0,T;U) \quad \text{tel que } \left\| y_u(T) - y^d \right\|_X \leq \varepsilon \, .$$

Soit l'opérateur H défini par

$$\begin{array}{rcl} H : L^2(0,T;U) & \to & X \\ u & \to & Hu = \displaystyle\int_0^T S(T-s)\,Bu(s)\,ds. \end{array}$$

On a donc : $y_u(T) = S(T)\,y^0 + Hu$

Proposition 2.2

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) Le système (2.1) est faiblement contrôlable.

2) $\overline{\operatorname{Im}(H)} = X$.

3) $\ker H^* = \ker HH^* = \{0\}$

4) $(B^* S^*(s)\, y^* = 0 \ \ \forall s \in [0,T]) \Rightarrow (y^* = 0)$

5) Si le semi-groupe $(S(t))$ est analytique on a

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Im}(A^n S(s)\,B)} = X \quad \forall s \in \left]0,T\right]$$

Preuve

On a

$$
\begin{aligned}
1) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall y^d \in X \ \ \forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists u \in L^2(0,T;U) \ \text{ tel que } \ \left\| S(T)\, y^0 + Hu - y^d \right\|_X \leq \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \forall y^d \in X \ \ \forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists u \in L^2(0,T;U) \ \text{ tel que } \ \left\| Hu - \left(y^d - S(T)\, y^0 \right) \right\|_X \leq \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{\operatorname{Im}(H)} = X - S(T)\, y^0 = X
\end{aligned}
$$

Donc (1) $\Leftrightarrow$ (2)

(2) $\Rightarrow$ (3) : Supposons (2) et soit $y^* \in X^*$ tel que $H^* y^* = 0$, on a alors

$$
\langle y^*, Hu \rangle_{X^* \times X} = 0 \quad \forall u \in L^2(0,T;U)
$$

Cela implique que

$$
y^* \in \left(\overline{\operatorname{Im}(H)} \right)^{\perp} = X^{\perp}
$$

Donc $y^* = 0$, et puisque $\ker HH^* = \ker H^*$ soit on a $\ker H^* = \ker HH^* = \{0\}$.

(3) $\Rightarrow$ (4) : Il est facile de voir que $H^* y^* = B^* S^* (T - \cdot)\, y^* \ \ \forall y^* \in X^*$

Si $B^* S^*(s)\, y^* = 0 \ \ \forall s \in [0,T]$ alors $B^* S^*(T-s)\, y^* = 0 \ \ \forall s \in [0,T]$

donc $H^* y^* = 0$ comme $\ker H^* = \{0\}$ on a $y^* = 0$.

(4) $\Rightarrow$ (5) : On suppose qu'il existe $s_0 \in \left]0, T\right[$ tel que

$$
\overline{\underset{n \geq 0}{\cup} A^n S(s_0)\, BU} \neq X
$$

Donc

$$
\exists y^* \in X^* \ \text{ tel que } \ \langle y^*, A^n S(s_0)\, Bu \rangle_{X^* \times X} = 0 \ \ \forall u \in U, \text{ et que } \ y^* \neq 0
$$

Alors

$$
\frac{d^n}{ds^n} \langle y^*, S(s_0)\, Bu \rangle_{X^* \times X} = 0 \ \ \forall u \in U,
$$

Puisque le semi-groupe est analytique $\langle y^*, S(s)\, Bu \rangle = 0 \ \ \forall u \in U$, pour s voisin de s_0

et par suite pour $s \in [0,T]$, alors $\langle B^* S^* (s) y^*, u \rangle = 0 \;\; \forall u \in U \qquad \forall s \in [0,T]$

D'où $B^* S^* (s) y^* = 0$, cela implique que $y^* = 0$, ce qui est absurde avec $y^* \neq 0$.

5) $\Longrightarrow$ 2).

Supposons que $\overline{\operatorname{Im} H} \neq X$, alors $\exists y^* \neq 0$ tel que

$\langle y^* \; , \; \int_0^T S(T-s) Bu \rangle_{X^* \times X} = 0 \qquad \forall u \in U$

Alors :

$$
\begin{aligned}
\langle y^*, S(s) Bu \rangle_{X^* \times X} &= 0 \qquad \forall s \in \left]0,T\right] \qquad \forall u \in U \\
&\Longrightarrow \frac{d^n}{ds^n} \langle y^*, S(s) Bu \rangle_{X^* \times X} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall s \in \left]0,T\right] \qquad \forall u \in U \\
&\Longrightarrow \left\langle y^*, \frac{d^n}{ds^n} S(s) Bu \right\rangle_{X^* \times X} = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall s \in \left]0,T\right] \qquad \forall u \in U \\
&\Longrightarrow \langle y^*, A^n S(s) Bu \rangle = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall s \in \left]0,T\right] \qquad \forall u \in U \\
&\Longrightarrow y^* \in \overline{\left(\underset{n}{U} \operatorname{Im} A^n S(s) B \right)}^{\perp} \quad \forall s \in \left]0,T\right]
\end{aligned}
$$

D'où : $\overline{\underset{n}{U} \operatorname{Im} A^n S(s) B)} \neq X$, ce qui est absurde avec 5).

<u>Remarque :</u>

Pour les systèmes localisés les concepts d'exacte et faible contrôlabilité, sont identiques.

Soit : $G \subset X$ un ensemble non vide convexe et fermé .

<u>Définition 2.3 :</u>

On dit que le système (2.1) est exactement élargie contrôlable dans G sur $[0,T]$,si :

$\exists u \in L^2(0,T;U)$ tel que $y_u(T) \in G$

et on a contrôlabilité faible élargie dans G sur $[0,T]$ si :

$\forall \varepsilon \rangle 0 \quad \exists u \in L^2(0,T;U) \qquad \exists y \in G \qquad$ tels que $\|y_v(T) - y\|_X \leq \varepsilon$.

2.3 Notion de l'actionneur

Les actionneurs peuvent être de nature, de forme, de conceptions divers, ces divers types d'actionneurs peuvent être localisés à l'intérieur du domaine Ω ou sur sa frontière Γ.

Définition 3.1

Soit D une partie non vide, fermée de Ω et $g \in L^2(D)$, on appelle actionneur zone le couple (D, g) où

1- D represente le support de l'actionneur.

2- g represente la reparation spatiale.

Pour l'actionneur ponctuel ou frontière la définition reste la même.

Nous parlerons : actionneur zone frontière (Γ_0, g) ou $\Gamma_0 \in \Gamma$ et $g \in L^2(\Gamma_0)$

actionneur ponctuel (b, S_b) où $b \in \Omega$ ou $b \in \Gamma$.

Définition 3.2

On dit que (D, g) ou (b, S_b) est stratégique si le système qu'il excite est faiblement contrôlable.

Dans le cas de plusieurs actionneurs $(D_i, g_i)_{1 \leq i \leq p}$ ou $(b_i, S_{b_i})_{1 \leq i \leq p}$ on dira que la suite des actionneurs est stratégique si le système qu'ils excitent est faiblement contrôlable.

2.4 Contrôlabilité régionale

Soient ω un sous-domaine de Ω non vide et $y^d \in L^2(\omega)$.

Le problème de la contrôlabilité régionle consiste à savoir s'il on peut trouver un contrôle $u \in L^2(0, T; U)$ permetant d'amener le système (2.1) de y^0 à y^d sur la région ω . L'etat residuel sur $\Omega \setminus \omega$ est sans importance.

2.4.1 Définitions et propriétés

Définition 4.1

Le système (2.1) est dit exactement (Resp. faiblement) régionalement contrôlable sur ω si pour tout $y^d \in L^2(\omega)$, $(\forall\varepsilon\rangle 0)$ il existe un contrôle u tel que

$$y_u(T) = y_d \text{ sur } \omega \quad \left(\left\| y_u(T)|_\omega - y_d \right\|_{L^2(\omega)} \leq \varepsilon \right)$$

où $y_u(T)|_\omega$ désigne la restriction de $y_u(T)$ sur ω.

le système sera aussi dit ω-exactement (faiblement) contrôlable.

<u>Remarques</u>

- les définitions ci-dessus signifient que l'on ne s'intéresse qu'à l'etat atteint sur la région ω

- Le contrôle u dépend de la variable de temps et la région ω.

- Pour l'etude de la contrôlabilité régionale exacte et faible, sans perte de généralité on peut supposer que $y^0 = 0$.

Soit $\chi_\omega : L^2(\Omega) \to L^2(\omega)$ définie par $\chi_\omega y = y|_\omega \cdot$

L'adjoint de χ_ω est $\chi_\omega^* : L^2(\omega) \to L^2(\Omega)$.

$$(\chi_\omega^*)(y) = \begin{cases} y(x) & x \in \omega \\ 0 & x \in \Omega \diagdown \omega \end{cases}$$

<u>Proposition 4.1</u>

1- le système (2.1) est ω-exactement (Resp. faiblement) contrôlable si et seulement si

$$\operatorname{Im} \chi_\omega H = L^2(\omega) \left(\text{Resp. } \overline{\operatorname{Im} \chi_\omega H} = L^2(\omega) \right)$$

<u>Preuve</u> : evident

<u>Proposition 4.2</u>

1-Le système (2.1) est ω-exactement contrôlable si et seulement si :

$$\ker \chi_\omega + \operatorname{Im} H = L^2(\Omega) \tag{2.3}$$

2-Le système (2.1) est ω-faiblement contrôlable si et seulement si :

$$\ker \chi_\omega + \overline{\operatorname{Im} H} = L^2(\Omega) \tag{2.4}$$

Preuve :

1-On suppose que (2.1) est ω-exactement contrôlable.Soit $y \in L^2(\Omega)$, alors il existe : $y_2 \in \operatorname{Im} H$ tel que $\chi_\omega y_2 = \chi_\omega y$.Si l'on pose : $y_1 = y - y_2$ on a : $y_1 \in \ker \chi_\omega$.

Puisque : $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in \ker \chi_\omega$ et $y_2 \in \operatorname{Im} H$ pour tout $y \in L^2(\Omega)$, on en résulte (2.3).

Inversement. Soit $y^d \in L^2(\omega)$, il existe $y_1 \in \ker \chi_\omega$ et $y_2 \in \operatorname{Im} H$ tels que : $y_1 + y_2 = \chi_\omega^* y^d$.

Alors : $\chi_\omega y_2 = y^d$, d'où le système (2.1) est ω-exactement contrôlable.

2- on suppose que (2.1) est ω-faiblement contrôlable . Soit $y \in L^2(\Omega)$, y peut s'écrire sous la forme $y_1 + y_2$ avec $y_1 \in \ker \chi_\omega$ et $y_2 \in \ker \chi_{\Omega \backslash \omega}$.

On a encore : $\forall \varepsilon \rangle 0$ il existe $u \in L^2(0, T; U)$ tel que :

$$\|y_2 - \chi_\omega H u\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$$

il vient :

$$\|y_2 - H u\|_{L^2(\omega)} \leq \varepsilon$$

c'est à dire que $y_2 \in \overline{\operatorname{Im} H}$

Inversement. Soit $y^d \in L^2(\omega)$, il existe $y_1 \in \ker \chi_\omega$ et $y_2 \in \overline{\operatorname{Im} H}$ tels que $y_1 + y_2 = \chi_\omega^* y^d$.

Alors $y_{2 \diagdown \omega} = y^d$, donc $y^d \in \overline{\operatorname{Im} \chi_\omega H}$, d'où le système (2.1) est ω-faiblement contrôlable.

Remarque :

on peut trouver des systèmes qui sont régionalement contrôlables mais qui ne sont pas contrôlable sur tout le domaine, ceci est illustré par le contre-exemple suivant :

Contre-exemple

Soit le système décrit par l'équation parabolique :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x,t) + \chi_{[a,b]}u(t) & \text{sur} \quad]0,1[\times]0,1[\\ y(x,0) = 0 & \text{sur} \quad]0,1[\\ y(0,t) = y(1,t) = 0 & \text{sur} \quad]0,T[\end{cases} \tag{2.5}$$

où $(b-a) \in \mathbb{Q}$

Corollaire 4.1

Le système (2.5) n'est pas contrôlable sur $]0,1[$ mais il peut être contrôlable sur une région $[\alpha,\beta]$ pour α,β convenablement choisis .

Preuve :

Dans le système (2.5) , $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $Bu = \chi_{[a,b]}u$.

L'opérateur A génère un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ fortement continu sur $L^2(0,1)$, $S(t)y$ s'écrit sous la forme .

$$S(t)y = \sum_{i=1}^{\infty} e^{\lambda_i t}\langle y,\varphi_i\rangle_{L^2(0,1)}\varphi_i$$

où $\lambda_i = -i^2\pi^2$ et $\varphi_i = \sqrt{2}\sin(i\pi x)$ sont les valeurs propres et les vecteurs propres associés à l'opérateur A

Aprés les calculs on obtient :

$$(H^*y)(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{\lambda_i(T-t)}\langle y,\varphi_i\rangle_{L^2(0,1)}\int_a^b \varphi_i$$

Pour $y = \varphi_j$, $j \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned}\left(H^*\varphi_j\right)(t) &= e^{\lambda_j(T-t)}\int\limits_a^b \sqrt{2}\sin(j\pi x)\,dx \\ &= e^{-j^2\pi^2(T-t)}\frac{\sqrt{2}}{j\pi}2\sin\frac{j\pi(b+a)}{2}\sin\frac{j\pi(b-a)}{2}\end{aligned}$$

Alors

$$H^*\varphi_j = 0 \Leftrightarrow j(b-a) \in 2\mathbb{N}^*.$$

D'où

$$\ker H^* = \overline{\left\{\varphi_j, j \in J\right\}}$$

où $J = \{j \mid j(b-a) = 2n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Comme $J \neq \phi$ alors $\ker H^* \neq \{0\}$, et donc le système (2.5) n'est pas faiblement contrôlable.

On choisit $\omega = [\alpha, \beta] \subset]0,1[$ telle que $\beta = \alpha + (b-a)$

Dans ce cas on a

$$\int_\alpha^\beta \varphi_j^2(x)\,dx = \beta - \alpha \qquad\qquad \forall j \in J$$

et

$$\int_\alpha^\beta \varphi_j(x)\,\varphi_i(x)\,dx = 0 \quad \forall i, j \in J \text{ tels que } i \neq j$$

Pour $j_0 \in J$, $\varphi_{j_0} \in \ker H^*$, et par conséquent φ_{j_0} n'est pas atteignable sur $]0,1[$, mais sur la région ω cet etat est atteignable vérifiant donc $\chi_\omega\varphi_{j_0} \notin \ker H^*\chi_\omega^*$. Si non

$$\begin{aligned}H^*\chi_\omega^*\left(\chi_\omega\varphi_{j_0}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k(T-\cdot)}\left\langle\varphi_{j_0},\varphi_k\right\rangle_{L^2(\omega)}\int_a^b \varphi_k(x)\,dx \\ &= \sum_{k\notin J}^{\infty} e^{\lambda_k(T-\cdot)}\left\langle\varphi_{j_0},\varphi_k\right\rangle_{L^2(\omega)}\int_a^b \varphi_k(x)\,dx \\ &= 0\end{aligned}$$

ou encore $\left\langle\varphi_{j_0},\varphi_k\right\rangle_{L^2(\omega)} = 0 \quad \forall k \notin J$.

Pour $k_0 \notin J$ tel que $k_0 (b-a) = 2n+1$, on a

$$\left\langle \varphi_{j_0}, \varphi_k \right\rangle_{L^2(\omega)} = 0 \Leftrightarrow k_0 \operatorname{tang}(j_0 \pi \alpha) = j_0 \operatorname{tang}(k_0 \pi \alpha)$$

ce n'est pas vrai en général (par exemple $\alpha = \frac{1}{2}$, $b - a = \frac{1}{2}$, $j_0 = 4$, $k_0 = 6$). Par conséquent φ_{j_0} est régionalement contrôlable sur $[\alpha, \beta]$.

Dans la suite on suppose que A admet un système complet de fonctions propres $(\varphi_i)_{i \geq 1}$ associées aux valeurs propres $(\lambda_i)_{i \geq 1}$, supposées simples. Le semi-groupe engendré par A est donné par :

$$S(t) y = \sum_{i \geq 1} e^{\lambda_i t} \langle \varphi_i, y \rangle \varphi_i$$

La solution de système (2.1) avec $y^0 = 0$ est donnée par

$$\begin{aligned} y_u(t) &= \int_0^t S(T-s) Bu(s) \, ds \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t e^{\lambda_i (T-s)} \langle \varphi_i, Bu(s) \rangle \, ds \varphi_i \end{aligned}$$

On pose $I = \{ i \geq 1 \mid B^* \varphi_i = 0 \}$ et $J = {}^c I$

<u>Proposition 4.3</u>

Le système (2.1) est faiblement contrôlable ssi $I = \phi$.

<u>Preuve</u>

Dans le premier temps on peut montrer facilement que

$$H^* y = \sum_{i=1}^{\infty} e^{\lambda_i (T - \cdot)} \langle y, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)} B^* \varphi_i$$

Ainsi on a

$$H^* \varphi_i = e^{\lambda_i (T - \cdot)} B^* \varphi_i$$

Donc

$$H^*\varphi_i = 0 \Leftrightarrow B^*\varphi_i = 0$$

Si le système (2.1) est faiblement contrôlable $H^*\varphi_i \neq 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}^*$, donc $B^*\varphi_i \neq 0 \quad \forall i$, c'est à dire $I = \phi$.

Inversement.Si $I = \phi$., on a

$$\begin{aligned} H^*y = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \langle y, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)} B^*\varphi_i = 0 \qquad \forall i \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \langle y, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \qquad \forall i \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad y = 0 \end{aligned}$$

D'où le système (2.1) est faiblement contrôlable.

En ce qui concerne la controlabilité régionale nous avons le résultat.

Théorème 4.1

On suppose que (2.1) est non contrôlable $(I \neq \phi)$, il y'a équivalence entre :

1) le système (2.1) est faiblement contrôlable sur ω.

2) la famille $\left\{ \chi_\omega \varphi_j \right\}_{j \in J}$ est totale dans $L^2(\omega)$.

3) Si $y \in L^2(\Omega)$ vérifiante $\int\limits_\omega y(x)\varphi_j(x)\,dx = 0 \qquad \forall j \in J$ alors $y = 0$ p.p.sur ω

4) Si $\sum\limits_{i \in I} \alpha_i \varphi_i = 0$ sur $\Omega \diagdown \omega \Longrightarrow \alpha_i = 0 \qquad \forall i \in I$

Preuve :

1)$\Longrightarrow$2)

Soit : $y \in L^2(\Omega)$ vérifiant $\chi_\omega y \in \overline{\left\{ \chi_\omega \varphi_j \right\}}_{j \in J}^{\perp}$

On a :

$$H^*\chi_\omega^*(\chi_\omega y) = \sum_{i \in I} e^{\lambda_i(T-\cdot)} \langle \chi_\omega^* \chi_\omega y, \varphi_i \rangle B^*\varphi_i + \sum_{j \in J} e^{\lambda_j(T-\cdot)} \langle \chi_\omega^* \chi_\omega y, \varphi_j \rangle B^*\varphi_j = 0$$

Comme le système (2.1) est $\omega-$ faiblement contrôlable $\chi_\omega y = 0$.

On en déduit $\left\{\chi_\omega \varphi_j\right\}_{j\in J}$ est totale dans $L^2(\omega)$.

2)$\Longrightarrow$1).

Soit : $y \in L^2(\Omega)$ vérifiant $H^*\chi_\omega^*(\chi_\omega y) = 0$, alors on a

$$\sum_{j\in J} e^{\lambda_j(T-\cdot)} \left\langle \chi_\omega y, \chi_\omega \varphi_j \right\rangle B^*\varphi_j = 0$$

D'où :

$$\left\langle \chi_\omega y, \chi_\omega \varphi_j \right\rangle = 0 \qquad \forall j \in J$$

$\left\{\chi_\omega \varphi_j\right\}_{j\in J}$ est totale dans $L^2(\omega)$ donc $\chi_\omega y = 0$. Par conséquent le système (1) est ω-faiblement contrôlable .

2)$\Longrightarrow$3)

Soit : $y \in L^2(\Omega)$ tel que $\int_\omega y(x)\varphi_j(x)\,dx = 0 \qquad \forall j \in J$ ça signifie que $\left\langle \chi_\omega y, \chi_\omega \varphi_j \right\rangle_{L^2(\omega)} = 0 \qquad \forall j \in J$

Puisque :$\left\{\chi_\omega \varphi_j\right\}_{j\in J}$ est totale dans $L^2(\omega)$, $\chi_\omega y = 0$, $i\cdot e\cdot y = 0$ p.p.sur ω.

3)$\Longrightarrow$2)

Soit : $y \in L^2(\Omega)$ tel que $\left\langle \chi_\omega y, \chi_\omega \varphi_j \right\rangle = 0 \qquad \forall j \in J$, alors $\int_\Omega y(x)\varphi_j(x)\,dx = 0$

D'aprés 3) on a $y = 0$ p.p. sur ω.Par conséquent $\left\{\chi_\omega \varphi_j\right\}_{j\in J}$ est totale dans $L^2(\omega)$,

3)$\Longrightarrow$4)

soit : $\alpha_i,\ i \in I$ tel que $\sum_{i\in I} \alpha_i \varphi_i = 0$ sur $\Omega\diagdown\omega$.

On pose : $y = \sum_{i\in I} \alpha_i \varphi_i$, on a :

$$\begin{aligned} \int_\omega y(x)\varphi_j(x)\,dx &= 0 \qquad \forall j \in J \implies y = 0 \qquad p.p.\text{ sur } \omega \\ &\implies \alpha_i = 0\ \ \forall\ i \in I \end{aligned}$$

4)$\Longrightarrow$3).

Considérons : $y \in L^2(\Omega)$ tel que $\int\limits_{\omega} y(x)\,\varphi_j(x)\,dx = 0 \qquad \forall j \in J$, alors on a :

$$\chi_\omega^*\chi_\omega y = \sum_{i\in I} \langle \chi_\omega^*\chi_\omega y, \varphi_i\rangle_{L^2(\Omega)}\,\varphi_i = \sum_{i\in I}\alpha_i\varphi_i$$

où $\alpha_i = \left\langle \chi_\omega^*\chi_\omega y, \varphi_j\right\rangle$

Puisque : $\sum\limits_{i\in I}\alpha_i\varphi_i = 0$ sur $\Omega\diagdown\omega$. Soit on a d' aprés 4) $\alpha_i = 0 \quad \forall \ \ i \in I$.

Alors :

$$\int\limits_{\Omega} (\chi_\omega^*\chi_\omega y)(x)\,\varphi_i(x)\,dx = 0 \quad \forall\ i \in I$$

Par conséquent $\int\limits_{\omega} y(x)\,\varphi_i(x) \qquad \forall\ \ i \in \mathbb{N}^*$, D'où $\ y = 0$ p.p. sur ω.

2.4.2 Contrôlabilité régionale et actionneurs

Dans cette section on fait apparaître le lien entre la contrôlabilité régionale et la structure d'actionneurs.

Soit (D, g) l'actionneur de support D et de réparation spatiale g , qui excite le système (2.1).

Définition 4.2

On dit que l'actionneur (D, g) est régionalement stratégique sur ω (ω-stratégique) si le système qu'il éxcite est ω-faiblement contrôlable.

On considère que l'on a une suite $(D_i, g_i)_{i=1,p}$ d'actionneurs excitent un système, avec D_i fermée et bornée et $D_i \cap D_j = \phi \quad \forall i \neq j$, où

$$\begin{cases} D_i \subset \Omega & \text{dans le cas interne.} \\ D_i = \{b_i\} & \text{dans le cas ponctuel interne ou frontière} \\ D_i = \Gamma_i \subset \Gamma & \text{au cas zone frontière} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} g_i \in L^2(D_i) & \text{cas ponctuel} \\ g_i = \delta_{b_i} & \text{cas zone} \end{cases}$$

Définition 4.3

La suite d'actionneurs $(D_i, g_i)_{i=1,p}$ est dite ω-stratégique si le système qu'ils excitent est ω-faiblement contrôlable.

On suppose qu'il existe un système complet de fonctions propres (φ_{ij}) $\quad i = 1,\infty, j = 1, r_i$ de $L^2(\omega)$ telles que $\varphi_{ij} \in L^2(\Omega)$ et λ_i les valeurs propres associées de multiplicité r_i . Et supposons que $\sup r_i = r\langle\infty$.

Sous ces hypothèses nous avons

Théorème 4.2

Le système (2.1) est régionalement faiblement contrôlable sur ω si et seulement si

1. $p \geq r$

2. Rang $G_n = r_n \qquad \forall n = 1,\infty$

Où :

$$G_n = (G_n)_{i,j} \qquad\qquad 1 \leq i \leq p \ , \quad 1 \leq j \leq r_n$$

avec :

$$(G_n)_{ij} = \begin{cases} \langle \varphi_{nj}, g_i \rangle_{D_i} & \text{cas zone interne ou frontière} \\ \varphi_{nj}(b_i) & \text{cas ponctuel interne ou frontière} \end{cases}$$

On montre ce théorème dans le cas où l'action est du type zone dans le domaine Ω , pour les autres cas la démonstration est similaire avec quelques différences

Preuve

Soit : $y^* \in L^2(\omega)$, $H^* y^*$ s'écrit sous la forme

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n (T-\cdot)} \sum_{j=1}^{r_n} \langle \varphi_{nj}, g_k \rangle_{D_k} \langle \varphi_{nj}, y^* \rangle_{\omega} \right)_{k=1,p}$$

On suppose que le système (2.1) n'est pas ω-faiblement contrôlable, alors :

$\exists y^* \in L^2(\omega)$ tel que $y^* \neq 0$ et $H^* \chi_\omega^* y^* = 0$, donc

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n (T-\cdot)} \sum_{j=1}^{r_n} \left\langle \varphi_{nj}, g_k \right\rangle_{D_k} \left\langle \varphi_{nj}, y^* \right\rangle_\omega \right)_{k=1,p} = 0$$

ainsi on a :

$$\sum_{j=1}^{r_n} \left\langle \varphi_{nj}, g_k \right\rangle_{D_k} \left\langle \varphi_{nj}, y^* \right\rangle_\omega = 0 \quad \forall n = 1, \infty \qquad \forall k = 1, p$$

D'où :

$$G_n y_n = 0 \qquad \forall n = 1, \infty$$

où y_n est le vecteur $\left(\left\langle \varphi_{nj}, y^* \right\rangle_\omega \right)_{j=1,r_n}$

Comme $y^* \neq 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $y_{n_0} \neq 0$,donc

Ran$G_{n_0} \langle r_{n_0}$, ce qui est absurde.

Inversement. Supposons qu'il existe $m \geq 1$ tel que Rang $G_m \neq r_m$, alors il existe un vecteur

$$y_m = \begin{pmatrix} y_{m_1} \\ \vdots \\ y_{mr_m} \end{pmatrix} \neq 0$$

tel que $G_m y_m = 0$

Pour : $y^* = \sum_{j=1}^{r_m} y_{mj} \varphi_{mj}$, on a $y^* \neq 0$ et $\left\langle y^*, \varphi_{nj} \right\rangle_\omega = 0$ si $n \neq m$ et

$$\left\langle y^*, \varphi_{mj} \right\rangle_\omega = y_{mj} \qquad j = 1, r_m$$

il vient :

$$\sum_{j=1}^{r_n} \left\langle g_k,\varphi_{nj} \right\rangle_{D_k} \left\langle y^*, \varphi_{nj} \right\rangle_\omega = 0 \qquad \forall n \geq 1 \qquad \forall k = 1, p$$

Parsuite : $H^* \chi_\omega^* y^* = 0$, on déduit que le système (2.1) n'est pas ω-faiblement contrôlable.

Remarque :

De ce théorème le nombre d'actionneurs est au moins égale à $r = \sup_n r_n$ pour que le système soit contrôlable sur une région ω.

Chapitre 3

Concept de la controlabilité regionale du rotationnel

3.1 Introduction

Dans cette partie nous examinons la notion de la contrôlabilité du rotationnel , C'est une extention de la contrôlabilité qui consiste en la possibilité de transferer l'état d'un système parabolique en un temps fini, d'un état initial vers un état de rotationnel désiré g_d donné sur une partie interne ω du domaine géométrique Ω sur lequel est défini le système.

Dans la suite, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec $n = 1$ ou $n = 2$ et l'opérateur du rotationnel défini de $H^1(\Omega)$ vers $L^2(\Omega)$ par :

$$\forall z \in H^1(\Omega) \;\; Rz = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ si } \Omega \subset \mathbb{R} \text{ et } Rz = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \text{ si } \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

3.2 Contrôlabilité regionale du rotationnel

3.2.1 Description du système

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2)$ de frontière $\partial\Omega$ et soit $T \rangle 0$.

On note $Q = \Omega \times]0,T[$, $\Sigma = \partial\Omega \times]0,T[$ et on considère le système parabolique suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = Ay(x,t) + B\ u(t) & \text{sur } Q \\ y(\xi,t) = 0 & \text{sur } \Sigma \\ y(x,0) = y^0(x) & \text{sur } \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où A est un opérateur linéaire differentiel d'ordre2, Auto-adjoint et à resolvante compacte qui génère un semi-groupe fortement continu $S(t)_{t\geq 0}$ sur l'espace d'état $L^2(\Omega)$.

A^* est consideré pour l'opérateur adjoint de A

$B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, L^2(\Omega))$ et $u \in U \equiv L^2(0,T;\mathbb{R}^p)$ l'espace de contrôle, et $y^0 \in L^2(\Omega)$

On suppose que pour tout $u \in U$ le système (3.1) admet une solution faible unique notée $y_u(.)$ telle que $y_u(T) \in H^1(\Omega)$.

Soit $\omega \subset \Omega$, on considère :

$$\chi_\omega \ : L^2(\Omega) \to L^2(\omega)$$
$$z \to \chi_\omega z := z_{|\omega}$$

χ_ω^* désigne l'opérateur adjoint deχ_ω. χ_ω^* est donné par

$$\chi_\omega^* z^* = \begin{cases} z^* & \text{sur } \omega \\ 0 & \text{sur } \Omega/\omega \end{cases}$$

3.2.2 Définitions et caractrisations

Définition 1.1

On dit que le système (3.1) est exactement (Resp. faiblement) régionalement rotationnel contrôlable sur ω si pour tout $g_d \in L^2(\omega)$ (Resp.$g_d \in L^2(\omega)$ et pour tout $\varepsilon \rangle 0$), il existe un controle $u \in U$ tel que

$$\chi_\omega R y_u(T) = g_d \ \left(\text{Resp. } \|\chi_\omega R y_u(T) - g_d\|_{L^2(\omega)} \leq \varepsilon\right).$$

Dans la suite, on dit que de tel système est régionalement R-contrôlable sur ω (R pour le rotationnel).

on considère l'opérateur H défini par

$$\begin{aligned} H : L^2(0,T;\mathbb{R}^p) &\to H^1(\Omega) \\ u &\to Hu := \int_0^T S(T-s)\,Bu(s)\,ds \end{aligned}$$

Alors le système (3.1) est exactement (Resp. faiblement) régionalement R-contrôlable sur ω si et seulement si

$$\operatorname{Im}\chi_\omega RH = L^2(\omega) \quad \left(\text{Resp. } \overline{\operatorname{Im}\chi_\omega RH = L^2(\omega)}\right)$$

<u>Remarques</u>

1-Les définitions ci-dessus signifient que l'on ne s'interesse qu'au transfert du rotationnel du système à un rotationnel désiré donné dans la région ω.

2-Un système qui est exactement (Resp. faiblement) régionalement R-contrôlable sur ω_1 est exactement (Resp. faiblement) régionalement R-contrôlable sur ω_2 tel que $\omega_2 \subset \omega_{1.}$

3-Si le système est excité par une action ponctuelle, l'opérateur B n'est plus borné dans ce cas il faut revoir le choix des espaces de façon à avoir $y_u(T) \in H^1(\Omega)$.

4-On peut remplacer la condition aux limites sur Σ par la condition

$$\frac{\partial y}{\partial \nu_A}(\xi,t) = 0$$

5-on peut trouver des système qui sont R-contrôlables mais qui ne sont pas controlables. Ceci est illustré par le contre-exemple suivant.

<u>Contre-exemple :</u>

Considérons le système défini sur $\Omega =]0,1[\times]0,1[$et décrit par l'équation parabolique

$$\begin{cases} \frac{\delta z}{\delta t}(x,y,t) = \frac{\delta^2 z}{\delta x^2}(x,y,t) + \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}(x,y,t) + \varkappa_D u(t) & \Omega \times]0,T[\\ y(x,y,t) = 0 & \delta\Omega \times]0,T[\\ y(x,y,0) = 0 & \Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

qu' il est excité par un actionneur (D,f) où $D =]0,a[\times]0,b[\subset \Omega$ désigne le support de l'actionneur et $f = 1$ sa distribution spatiale sur D .

Ce système est équivalent au système(3.1) où :

$$A = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} \quad , \quad z_0 = 0 \quad \text{et} \quad Bu = \chi_D u$$

L'opérateur A génère un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ dans $H^1(\Omega)$ donné par :

$$S(t)z = \sum_{i,j\neq 0}^{\infty} e^{\lambda_{ij}t} \langle z, \varphi_{ij} \rangle \varphi_{ij}$$

où $\lambda_{ij} = -(i^2+j^2)\pi^2$;

$$\varphi_{ij}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{(1+(i^2+j^2)\pi^2)}} \sin(i\pi x)\sin(j\pi y)$$

L'opérateur H^* adjoint de H est donné par :

$$(H^* z)(t) = B^* S^*(T-t)z = \sum_{i,j\neq 0}^{\infty} e^{\lambda_{ij}(T-t)} \langle z, \varphi_{ij} \rangle \langle \chi_D, \varphi_{ij} \rangle$$

où $\langle , \rangle$ désigne le produit scalaire dans $H^1(\Omega)$

Pour $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap]0,1[$ le système (3.2) n'est pas faiblement contrôlable. Mais on a le résultat suivant

<u>Proposition 1.1 :</u>

Le système (3.2) n'est pas faiblement contrôlable sur Ω , mais il est faiblement R-contrôlable sur Ω.

Preuve :

Soit $\left(\varphi_{ij}\right)_{(i,j)\in J}$ les fonctions propres de A qui sont dans $\ker H^{*}$, alors :

$$\ker H^{*}=\overline{\left\{\varphi_{ij}\mid(i,j)\in J\right\}}$$

où $J=I\times\mathbb{N}$ et $I=\{i\mid ia\in 2\mathbb{N}\}$.

Il est claire que $I\neq\phi$ puisque $a\in\mathbb{Q}$ et donc $J\neq\phi$.

Soit $(i_0,j_0)\in J$, alors $\varphi_{i_0j_0}\in\ker H^{*}$ et par conséquent $\varphi_{i_0j_0}$ n'est pas atteignable sur Ω.

On va montrer que $\varphi_{i_0j_0}$ est R-contrôlable sur Ω. i.e. $\varphi_{i_0j_0}\notin\ker H^{*}R^{*}$.

Nous avons

$$\begin{aligned}
H^{*}R^{*}\left(\varphi_{i_0j_0}\right) &= \sum_{i,j\neq 0}^{\infty} e^{\lambda_{ij}(T-\cdot)}\left\langle R^{*}\varphi_{i_0j_0},\varphi_{ij}\right\rangle\left\langle\chi_D,\varphi_{ij}\right\rangle\\
H^{*}R^{*}\left(\varphi_{i_0j_0}\right) &= \sum_{(i,j)\notin J}^{\infty} e^{\lambda_{ij}(T-\cdot)}\left\langle R^{*}\varphi_{i_0j_0},\varphi_{ij}\right\rangle\left\langle\chi_D,\varphi_{ij}\right\rangle
\end{aligned}$$

On suppose que $H^{*}R^{*}\left(\varphi_{i_0j_0}\right)=0$, alors

$$\left\langle R^{*}\varphi_{i_0j_0},\varphi_{ij}\right\rangle_{H^1(\Omega)}=0\quad\forall(i,j)\notin J$$

Autrement dit

$$\left\langle R^{*}\varphi_{i_0j_0},\varphi_{ij}\right\rangle_{H^1(\Omega)}=0\quad\forall i\notin I\;\;\forall j\in\mathbb{N}$$

Cela implique

$$\left\langle R^{*}\varphi_{i_0j_0},\varphi_{ij_0}\right\rangle_{H^1(\Omega)}=0\qquad\qquad\forall i\notin I$$

Après un long calcul on obtient $\left\langle R^{*}\varphi_{i_0j_0},\varphi_{ij_0}\right\rangle_{H^1(\Omega)}=0$.

Alors on a $\cos i_0\pi\cos i\pi=1\quad\forall i\notin I$

Ceci n'est pas vrai en géneral (par exemple si $a=\frac{1}{2}$ alors $I=4\mathbb{N}$ et $\cos i_0\pi=1$, mais pour i$\in 4\mathbb{N}+1$ on a $\cos i\pi=-1$ et donc : $\cos i_0\pi\cos i\pi=-1$, ce qui est absurde)

Donc $\varphi_{i_0 j_0}$ est rotationnel atteignable sur Ω.

Sans perte de généralité, dans la suite on considère $y^0 = 0$

Proposition 1.2

1-le système (3.1) est exactement régionalemnt R-contrôlable sur ω si et seulement si

$$\ker \chi_\omega + \operatorname{Im} \chi_\omega^* \chi_\omega RH = L^2(\Omega)$$

2-le système (3.1) est faiblement régionalemnt R-contrôlable sur ω si et seulement si

$$\ker \chi_\omega + \overline{\operatorname{Im} \chi_\omega^* \chi_\omega RH} = L^2(\Omega)$$

Preuve

1- Soit $y \in L^2(\Omega)$. on considère y_1 et y_2 de $L^2(\Omega)$ telles que $y_1 + y_2 = y$ et $y_1 = 0$ sur ω, $y_2 = 0$ sur $\Omega \setminus \omega$.

Alors on a $y_1 \in \ker \chi_\omega$ et $\chi_\omega^* \chi_\omega y_2 = y_2$.

le système (3.1) est exactement régionalement R-contrôlable sur ω donc

$$\exists u \in U \quad \text{tel que} \quad \chi_\omega RHu = \chi_\omega y_2$$

ainsi on a

$$y = y_1 + \chi_\omega^* \chi_\omega RHu$$

D'où

$$y \in \ker \chi_\omega + \operatorname{Im} \chi_\omega^* \chi_\omega RH$$

Par conséquent

$$L^2(\Omega) = \ker \chi_\omega + \operatorname{Im} \chi_\omega^* \chi_\omega RH$$

Invesement. Soit $y \in L^2(\omega)$, on pose $\bar{y} = \chi_\omega^* y$

Il existe $y_1 \in \ker \chi_\omega$ et $u \in U$ tels que $y_1 + \chi_\omega^* \chi_\omega RHu = \bar{y}$.

Alors $\chi_\omega RHu = \chi_\omega \bar{y}$ et donc $\chi_\omega RHu = y$.

D'où le système est exactement R-contrôlable sur ω.

2- Si $y \in L^2(\Omega)$, on peut l'écrire $y_1 + y_2$ avec $y_1, y_2 \in L^2(\Omega)$ et $y_1 = 0$ sur ω et $y_2 = 0$ sur Ω/ω.

Le système (3.1) est faiblement R-contrôlable sur ω alors

$$\forall \varepsilon \rangle 0 \; \exists u \in U \quad \text{tel que} \; \|\chi_\omega RHu - \chi_\omega y_2\|_{L^2(\omega)} \leq \varepsilon$$

Autrement dit

$$\|\chi_\omega^* \chi_\omega RHu - y_2\|_{L^2(\omega)} \leq \varepsilon$$

D'où

$$y_2 \in \overline{\operatorname{Im} \chi_\omega^* \chi_\omega RH}$$

Puisque $y = y_1 + y_2$ et $y_1 \in \ker \chi_\omega$ et $y_2 \in \overline{\operatorname{Im} \chi_\omega^* \chi_\omega RH}$ alors

$$y \in \ker \chi_\omega + \overline{\operatorname{Im} \chi_\omega^* \chi_\omega RH}$$

et par conséquent

$$L^2(\Omega) = \ker \chi_\omega + \overline{\operatorname{Im} \chi_\omega^* \chi_\omega RH}$$

Inversement. Soit $y \in L^2(\omega)$, on pose $\bar{y} = \chi_\omega^* y$.

Il existe $y_1 \in \ker \chi_\omega$ et $y_2 \in \overline{\operatorname{Im} \chi_\omega^* \chi_\omega RH}$ tels que $y_1 + y_2 = \bar{y}$.

Soit $\varepsilon \rangle 0$, alors $\exists u \in U$ tel que

$$\|y_2 - \chi_\omega^* \chi_\omega RHu\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Donc

$$\|\chi_\omega y_2 - \chi_\omega RHu\|_{L^2(\omega)} \leq \varepsilon$$

mais $\chi_\omega y_2 = y$, alors :

$$\|y - \chi_\omega RHu\|_{L^2(\omega)} \leq \varepsilon$$

on en déduit que le système (3.1) est faiblement R-contrôlable sur ω.

Proposition 1.3

1- Si le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ est analytique, alors le système (3.1) est faiblement R-contrôlable sur ω si et seulement si

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\chi_\omega RA^n S(t) BU)} = L^2(\omega) \qquad \forall t \in]0, T]$$

2- le système (3.1) est exactement R-contrôlable sur ω si et seulement si :

il existe $c\rangle 0$ tel que

$$\|y^*\|_{L^2(\omega)} \leq c \|B^* S^*(\cdot) R^* \chi_\omega^* y^*\|_U \qquad \forall y^* \in L^2(\omega)$$

Preuve

1- on suppose que le système (3.1) est faiblement R-contrôlable sur ω, on a

$$\overline{\operatorname{Im} \chi_\omega RH} = L^2(\omega)$$

ce qui équivalent à

$$\langle H^* R^* \chi_\omega^* z, u\rangle = 0 \quad \forall u \in U \Rightarrow z = 0$$

Autrement dit

$$(\langle B^* S^*(s) R^* \chi_\omega^* z, u\rangle = 0 \ \ \forall s \in [0, T] \ \ \forall u \in U) \Rightarrow z = 0$$

Par conséquent

$$(\langle z, \chi_\omega RS(s) Bu\rangle = 0 \ \ \forall s \in [0, T] \ \ \forall u \in U) \Rightarrow z = 0$$

Soit $s \in [0,T]$ tel que

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Im}\left(\chi_\omega R A^n S(s) B\right)} \neq L^2(\omega)$$

Alors il éxiste $z_0 \neq 0,\ z_0 \in L^2(\omega)$ tel que

$$\langle z_0, \chi_\omega R A^n S(s) Bu\rangle = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \ \ \forall u \in U$$

ou encore

$$\frac{d^n}{ds^n} \langle z_0, \chi_\omega R S(s) Bu\rangle = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall u \in U$$

Par analyticité du semi-groupe on a $\langle z_0, \chi_\omega R S(t) Bu\rangle = 0$ pour t voisin de s et pour tout $u \in U$ et par suite pour tout $t \in [0,T]$. Donc il éxiste $z_0 \in \left(\chi_\omega R S(t) BU\right)^\perp$,ce qui est absurde.

Inversement, supposons que (3.1) n'est pas faiblement R-controlable sur ω

alors il éxiste $z_0 \neq 0$ tel que

$$\langle z_0, \chi_\omega R S(t) Bu\rangle = 0 \ \forall t \in [0,T] \ \ \forall u \in U$$

donc

$$\frac{d^n}{dt^n} \langle z_0, \chi_\omega R S(t) Bu\rangle = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ \forall t \in [0,T] \quad \forall u \in U$$

Autrement dit

$$\langle z_0, \chi_\omega R A^n S(t) Bu\rangle = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ \forall t \in [0,T] \ \ \forall u \in U$$

D'où

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\chi_\omega R A^n S(t) BU\right)} \neq L^2(\omega) \quad \forall t \in [0,T]$$

absurde.

2- L'equivalence découle du lemme 2.1(Chapitre.2) en prenant :

$f = Id_{L^2(\omega)}$ et $g = \chi_\omega RH.$

Proposition 1.4

Si l'opérateur H est compacte , alors le système (3.1) n'est pas exactement R-contrôlable sur ω.

Preuve

le système (3.1) est exactement R-contrôlable sur ω est équivalent à

$$\chi_\omega RHU = L^2(\omega)$$

D'où

$$\bigcup_{n\geq 0} \chi_\omega RHB_n = L^2(\omega)$$

où B_n est la boule centrée à l'origine et de rayon n dans $U.$

Ce qui donne

$$\bigcup_{n\geq 0} \overline{\chi_\omega RH(B_n)} = L^2(\omega)$$

Comme l'opérateur H est compact et les applications χ_ω, R sont continues. Alors $\chi_\omega RH$ est compact.

Or $\overline{\chi_\omega RH(B_n)}$ étant compacte implique que $\overline{\chi_\omega RH(B_n)}$ est d'interieur vide, ce qui conterdit le théorème de Baire. D'où le resultat.

On note par $(\varphi_i)_{i\geq 1}$ les fonctions propres de A qui forment une base de $L^2(\Omega)$. Soit $I = \{i \geq 1 \mid H^*R^*\varphi_i = 0\}$ et $J := \mathbb{N}^* \setminus I = \left\{j \geq 1 \mid H^*R^*\varphi_j \neq 0\right\}$.

On a $\ker H^*R^* = \overline{\{\varphi_i\}}_{i\in I}$.

Avec ces notations le théorème suivant est un caractrisation de partie $\omega \subset \Omega$ dans laquelle le système (3.1) est faiblement R-contrôlable .

Théorème 1.1

on suppose que le système (3.1) est non faiblement R-contrôlable $(I \neq \phi)$.

Alors nous avons l'equivalence entre

1- Le système (3.1) est faiblement R-contrôlable sur ω.

2- La famille$\{\chi_\omega \varphi_j\}_{j\in J}$ est totale dans $L^2(\omega)$.

3- Si $y \in L^2(\omega)$ tel que $\int_{L^2(\omega)} y\left(\chi_\omega \varphi_j\right) = 0 \ \ \forall j \in J$ alors $y = 0$

4- Si $\sum\limits_{i\in I} \alpha_i \varphi_i = 0$ sur $\Omega \setminus \omega$ alors $\alpha_i = 0 \quad \forall i \in I$.

<u>Preuve</u>

$1 \Longrightarrow 2$.

Soit $y \in \{\chi_\omega \varphi_j\}_{j\in J}^{\perp}$ c-a-d $\langle y, \chi_\omega \varphi_j \rangle_{L^2(\omega)} = 0 \ \ \forall j \in J$

puisque $\forall u \in U \ \ RHu = \sum\limits_{j\in J} \lambda_j \varphi_j \qquad \lambda_j \in \mathbb{R}$ alors $\langle y, \chi_\omega RHu\rangle_{L^2(\omega)} = 0 \ \ \forall u \in U$

donc $\langle H^* R^* \chi^* y, u\rangle = 0 \ \ \forall u \in U$

$\Longrightarrow H^* R^* \chi^* y = 0$

$\Longrightarrow y \in \ker H^* R^* \chi^*$

Comme le système (3.1) est faiblement R-contrôlable sur ω , $\ker H^* R^* \chi^* = \{0\}$ donc $y = 0$ d'où $\{\chi_\omega \varphi_j\}_{j\in J}^{\perp} = \{0\}$ i.e. $\{\chi_\omega \varphi_j\}_{j\in J}$ est totale dans $L^2(\omega)$

$2 \Longrightarrow 3$.

Soit $y \in L^2(\omega)$ vérifiant $\int_{L^2(\omega)} y \chi_\omega \varphi_j = 0 \quad \forall j \in J$, autrement dit $\langle y, \chi_\omega \varphi_j\rangle = 0$ $\forall j \in J$ ou $y \in \{\chi_\omega \varphi_j\}_{j\in J}^{\perp}$

$\{\chi_\omega \varphi_j\}_{j\in J}$ est totale dans $L^2(\omega)$ donc $y = 0$

$3 \Longrightarrow 4$.

Soient $\alpha_i \in \mathbb{R} \quad i \in I$ tels que $\sum\limits_{i\in I} \alpha_i \varphi_i = 0$ sur $\Omega \setminus \omega$

d'abord on va montrer que $\sum\limits_{i\in I} \alpha_i \varphi_i = 0$ sur Ω

On a

$$\begin{aligned}
\langle \sum_{i\in I} \alpha_i \varphi_i, \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega)} &= \int\limits_{\omega} \left(\sum_{i\in I} \alpha_i \varphi_i \right) \chi_\omega \varphi_j + \int\limits_{\Omega\setminus\omega} \left(\sum_{i\in I} \alpha_i \varphi_i \right) \chi_\omega \varphi_j \\
&= \int\limits_{\omega} \left(\sum_{i\in I} \alpha_i \varphi_i \right) \chi_\omega \varphi_j = 0
\end{aligned}$$

$\{\chi_\omega \varphi_j\}_{j\in J}$ est totale dans $L^2(\omega)$ alors $\sum\limits_{i\in I} \alpha_i \varphi_i = 0$ sur ω

On résulte $\sum\limits_{i\in I} \alpha_i \varphi_i = 0$ sur Ω. Mais φ_i indépendants dans $L^2(\Omega)$, alors $\alpha_i = 0$ $\forall i$

$4 \Longrightarrow 1.$

Soit $y \in L^2(\omega)$ tel que $H^* R^* \chi_\omega^* y = 0$

Alors : $\chi_\omega^* y \in Ker H^* R^* = \overline{\{\varphi_i\}_{i\in I}}$

$\Longrightarrow \chi_\omega^* y = \sum\limits_{i\in I} \alpha_i \varphi_i$

Puisque : $\chi^* y = 0$ sur $\Omega \setminus \omega$, $\sum\limits_{i\in I} \alpha_i \varphi_i$ l'est .

D'aprés (4) on a $\alpha_i = 0$ $\forall i \in I$. Donc $y = 0$. d'où $\ker H^* R^* \chi_\omega^* = \{0\}$.

Ainsi on a le système (3.1) est faiblement R-contrôlable sur ω.

Remarque :

1- Si J est fini. le système(3.1) n'est pas faiblement R-contrôlable sur aucune région $\omega \subset \Omega$.car $\{\overline{\chi_\omega \varphi_j}\}_{j\in J}$ est un sous-èspace de dimension fini, il n' est jamais dense dans $L^2(\omega)$.

2- Si I est fini.le système (3.1) peut être faiblement R-contrôlable sur certains $\omega \subset \Omega$.

Proposition 1.5

On suppose que le système (3.1) n'est pas faiblement R-controlable sur Ω.

Alors le système (3.1) est faiblement R-controlable sur toute région $\omega \subset \Omega$ tel que $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_{L^2(\omega)} = 0$ $\forall i$, $j \in I$ $i \neq j$

et dans ce cas (3.1) est faiblement R-controlable sur $\Omega \setminus \omega$.

Preuve :

Considérons :

$y: = \sum\limits_{i\in I} \alpha_i \varphi_i = 0$ sur $\Omega \setminus \omega$.

$$\text{On a :}\alpha_i = \int\limits_\Omega y\varphi_i = \int\limits_\omega y\varphi_i = \int\limits_\omega \left(\sum\limits_{j\in I} \alpha_j \varphi_j \right) \varphi_i$$
$$= \sum\limits_{j\in I} \alpha_j \int\limits_\omega \varphi_j \varphi_i = \alpha_i \int\limits_\omega (\varphi_i)^2$$

Donc : $\alpha_i = \alpha_i \|\varphi_i\|^2_{L^2(\omega)}$ $\forall i \in I$

Alors : $\alpha_i = 0 \quad \forall i \in I$ .D'aprés la propriété (4)du théorème précédent le système(3.1) est R-contrôlable sur ω

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega \setminus \omega)} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_{L^2(\omega)} = 0$$

D'aprés qui est précédé le système est faiblement R-contrôlable sur $\Omega \setminus \omega$.

<u>Exemple :</u>

Considérons le système parabolique :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) + g(x)\,u(t) &]0,1[\times]0,T[\\ y(x,0) = 0 &]0,1[\\ y(0,t) = y(1,t) = 0 &]0,T[\end{cases} \tag{3.3}$$

Où g est la réparation spatiale de l'action. Cette action peut être zone ou ponctuelle tel que $I \neq \phi$.

<u>Corollaire 1.1 :</u>

On suppose qu'il éxiste $q \in \mathbb{Q} \cap]0,1[$ tel que $qI \subset \mathbb{N} + \frac{1}{2}$.

Alors :

1- Si $q\langle\frac{1}{2}$, le système (3.3) est faiblement R-contrôlable sur toute région $]\alpha, \alpha + 2q[\subset]0,1[$, ainsi que sur son complémentaire.

2- Le système (3.3) est faiblement R-contrôlable sur $]0,q[$ et $]q,1[$.

<u>Preuve :</u>

Appliquons la proposition précédente, on a :

$$\forall i,j \in I, \quad i \neq j \quad \int_{\alpha}^{\alpha+2q} \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx = \frac{2}{(1+i^2\pi^2)^{\frac{1}{2}}(1+j^2\pi^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{\alpha}^{\alpha+2q} \sin i\pi x \sin j\pi x dx = 0$$

De la même manière on montre que : $\forall i,j \in I, i \neq j \quad \int_0^q \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx = 0$ alors le résultat

Application

On suppose que l'action est ponctuelle en $b = \frac{1}{2}$. Dans ce cas, On a :

$I = 2\mathbb{N} + 1$ et $J = 2\mathbb{N}^*$.Pour $q = \frac{1}{2}$ On a $qI \subset \mathbb{N} + \frac{1}{2}$.et donc le système (3.3) est faiblement R-contrôlable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

3.3 Actionneur rotationnel stratégique :

Dans cette section nous éxaminons le lien qui éxiste entre la structure des actionneurs qu'ils éxcitent le système et contrôlabilité régionale du rotationnel . On considère le système (3.4) et supposons qu'il est éxcité par p actionneurs zones $(D_i, f_i)_{\ 1 \leq i \leq p}$ où $D_i \subset \Omega$ et $f_i \in L^2(D_i)$ pour tout $i = 1, p$

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = Ay(x,t) + \sum\limits_{i=1}^{p} \chi_{D_i} f_i u_i(t) & Q \\ y(\zeta, t) = 0 & \Sigma \\ y(x, 0) = 0 & \Omega \end{cases} \tag{3.4}$$

Pour tout $\omega \subset \Omega$. on introduit la définition suivante :

Définition 2.1 :

La suite d'actionneurs $(D_i, f_i)_{1 \leq i \leq p}$ est dite R-stratégique sur ω si le système qu'ils excitent est faiblement R-contrôlable sur ω.

Considérons l'ensemble $\left(\varphi_{n_j}\right)_{n=1,\ldots,\infty, j=1,\ldots,r_n}$ de fonctions propres de A^* dans $H^1(\Omega)$ orthonormal dans $L^2(\omega)$ associées aux valeurs propres λ_n de multiplicité r_n et on suppose que A à coefficients constants. Sous ces hypothèses nous avons

Proposition 2.1

Supposons que $\sup r_n = r\langle\infty$, alors La suite d'actionneurs $(D_i, f_i)_{1 \leq i \leq p}$ est R-stratégique sur ω si et seulement si

1. $r \leq p$

2. $\operatorname{rang} M_n = r_n \quad \forall n = 1, \ldots, \infty$

où $M_n = (M_n)_{i,j} \quad 1 \leq i \leq p \quad 1 \leq j \leq r_n$ où

$$(M_n)_{i,j} = \begin{cases} \left\langle f_i, R\varphi_{n_j} \right\rangle_{L^2(D_i)} & \text{cas zone} \\ \left(R\varphi_{n_j} \right)(b_i) & \text{cas ponctuel} \end{cases}$$

<u>Preuve</u>

La démenstration est développée dans le cas où l'action est du type zone.

Rappelons que la R-contrôlabilité régionale est équivalente à $\ker H^* R^* \chi_\omega^* = \{0\}$.

Soit $z^* \in L^2(\omega)$, posons $\varphi_0 = \chi_\omega^* z^*$ et on considère le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) = -A^* \varphi(x,t) & Q \\ \varphi(\xi, t) = 0 & \Sigma \\ \varphi(x, T) = \varphi_0 & \Omega \end{cases} \tag{3.5}$$

qui admet une solution unique $\varphi \in L^2(0, T; H_0^2(\Omega)) \cap C^3(\Omega \times]0, T[)$

Multiplions l'équation (3.4) par $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$ et integrons sur Q. on obtient

$$\int_Q \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(t)\, y'(t)\, dtdx = \int_Q \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(t)\, Ay(t)\, dtdx + \sum_{i=1}^{p} \int_Q \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(t)\, \chi_{Di} f_i u_i(t)\, dtdx$$

par l'integration par partie sur t on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(t)\, y(t) \right]_0^T dx &= \int_Q \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(t) \right)' y(t)\, dtdx + \int_Q \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(t)\, Ay(t)\, dtdx \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p} \int_0^T \left\langle f_i, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(t) \right\rangle_{D_i} u_i(t)\, dt \end{aligned}$$

ainsi

$$\int_{\Omega}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(T)\,y(T)-\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(0)\,y(0)\right]dx = \int_{Q}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(t)\,Ay(t)-y(t)\,A^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(t)\right]dtdx + \sum_{i=1}^{p}\int_0^T\left\langle f_i,\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(t)\right\rangle_{D_i}u_i(t)\,dt$$

En utilisant la formule de Green on obtient

$$-\int_{\Omega}\varphi_0\frac{\partial y}{\partial x_k}(T)\,dx = \int_{\Sigma}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(t)\frac{\partial y}{\partial\nu_A}(t)-y(t)\frac{\partial}{\partial\nu_{A^*}}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(t)\right]dtd\xi + \sum_{i=1}^{p}\int_0^T\left\langle f_i,\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(t)\right\rangle_{D_i}u_i(t)\,dt$$

par $\varphi_0=\chi_\omega^* z^*$ et les conditions aux limites on a

$$\int_{\omega}\chi_\omega\frac{\partial y}{\partial x_k}(T)\,z^*dx = -\sum_{i=1}^{p}\int_0^T\left\langle f_i,\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(t)\right\rangle_{D_i}u_i(t)\,dt$$

et par conséquent

$$\int_{\omega}\chi_\omega Ry(T)\,z^*dx = -\sum_{i=1}^{p}\int_0^T\langle f_i,R\varphi(t)\rangle_{D_i}u_i(t)\,dt$$

$\varphi(t)$ s'écrit sous la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{\lambda_n(T-t)}\sum_{j=1}^{r_n}\left\langle\varphi_0,\varphi_{n_j}\right\rangle_{L^2(\Omega)}\varphi_{n_j}$$

et donc

$$\langle f_i,R\varphi(t)\rangle_{L^2(Di)}=\sum_{n=1}^{\infty}e^{\lambda_n(T-t)}\sum_{j=1}^{r_n}\left\langle z^*,\varphi_{n_j}\right\rangle_{L^2(\omega)}\left\langle f_i,R\varphi_{n_j}\right\rangle_{L^2(Di)}$$

ainsi on a

$$\langle \chi_\omega RHu, z^* \rangle_{L^2(\omega)} = -\sum_{i=1}^{p} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T e^{\lambda_n (T-t)} u_i(t)\, dt \sum_{j=1}^{r_n} \left\langle z^*, \varphi_{n_j} \right\rangle_{L^2(\omega)} \left\langle f_i, R\varphi_{n_j} \right\rangle_{L^2(Di)}$$

on suppose que le système est faiblement R-contrôlable sur ω .

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que rang $M_m \langle r_m$, alors il existe un vecteur

$$h_m = \begin{pmatrix} h_{m_1} \\ \vdots \\ h_{m_{rm}} \end{pmatrix} \neq 0$$

tel que $M_m h_m = 0$

Soit $z^* = \sum\limits_{j=1}^{r_m} h_{m_j} \chi_\omega \varphi_{m_j}$ dans ce cas on a $z^* \neq 0$

D'aprés qui est précédé on a :

$$\begin{aligned} \langle \chi_\omega RHu, z^* \rangle_{L^2(\omega)} &= -\sum_{i=1}^{p} \int_0^T e^{\lambda_m (T-t)} u_i(t)\, dt \sum_{j=1}^{r_m} h_{m_j} \langle f_i, R\varphi_{m_j} \rangle_{L^2(D_i)} \\ &= -\sum_{i=1}^{p} \left(\int_0^T e^{\lambda_m (T-t)} u_i(t)\, dt \right) (M_m h_m)_i = 0 \end{aligned}$$

et donc $H^* R^* \chi_\omega^* z^{\ *} = 0.$ ce qui absurde avec l'hypothèse.

Inversement. Si le système n'est pas faiblement R-contrôlable sur ω

Il existe $z_0^* \in L^2(\omega)$ vérifiante $z_0^* \neq 0$ et

$$\forall u \in L^2(0, T, \mathbb{R}^p)\ \langle \chi_\omega RHu, z_0^* \rangle_{L^2(\omega)} = 0$$

Alors on a :

$$\forall u\in U\qquad \sum_{i=1}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{T}e^{\lambda_n(T-t)}u_i\left(t\right)dt\sum_{j=1}^{r_n}\langle z_0^*,\varphi_{n_j}\rangle_w\langle f_i,R\varphi_{n_j}\rangle_{D_i}=0$$

Par conséquent on obtient :

$$\sum_{j=1}^{r_n}\langle z_0^*,\varphi_{n_j}\rangle_\omega\langle f_i,R\varphi_{n_j}\rangle_{D_i}=0\qquad \forall n=1,...,\infty,\forall i=1,...,p$$

Donc :

$M_nh_n=0 \qquad \forall n\in\mathbb{N}^* \quad$ où $\ h_n\ $ le vecteur $\ (h_n)_j=\langle z_0^*,\varphi_{n_j}\rangle_\omega \quad , \quad j=1,r_n$

puisque $z_0^*\neq 0$ il existe un vecteur $h_m\neq 0. \qquad h_m\ $ vérifiant $\ M_mh_m=0$

D'où rang $M_m\langle r_m$ ce qui absurde l'hypothèse rang $M_n=r_n \qquad \forall n$

<u>Exemples :</u>

1- Considérons le système défini sur $\ \Omega=]0,1[\ $ par :

$$\begin{cases}\frac{\partial y}{\partial t}\left(x,t\right)=\frac{\partial^2y}{\partial x^2}\left(x,t\right)+\delta\left(x-b\right)u\left(t\right) &]0,1[\times]0,T[\\ y\left(0,t\right)=y\left(1,t\right)=0 &]0,T[\\ y\left(x,0\right)=0 &]0,1[\end{cases}\tag{3.6}$$

Les valeurs propres et les fonctions propres associées sont données par :

$$\lambda_i=-i^2\pi^2\quad ,\qquad \varphi_i\left(x\right)=\sqrt{2}\sin\left(i\pi x\right)$$

Le système (3.6) n'est pas faiblement contrôlable si et seulement si :

$\exists i_0\in\mathbb{N}^*\quad$ tel que $\ \sin\left(i_0\pi b\right)=0$

Ce qui est équivalente à :$b\in\mathbb{Q}\cap]0,1[$

Donc si : $b\in]0,1[\setminus\mathbb{Q}$ le système (3.6) est faiblement contrôlable.

Le syetème (3.6) n' est pas faiblement R-contrôlable si et seulement si.

$\exists i_0\in\mathbb{N}^*\quad$ tel que $\cos\left(i_0\pi b\right)=0.$

$$i\,\mathbf{.}\,e\,\mathbf{.}\quad b\in E\equiv\left\{\frac{2k+1}{2m},0\leq k\langle\frac{2m-1}{2},n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

On a : $E \subset \mathbb{Q} \cap]0,1[$ donc il existe des actionneurs qui sont R-stratégiques mais non stratégiques.

2- Considérons le système bidimensionnel défini sur : $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ et éxcité par l'actionneur ponctuel (b, δ_b) où $b = (b_1, b_2) \in \Omega$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(x,y,t) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y,t) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y,t) + \delta(x-b)\,u(t) & \Omega \times]0,T[\\ z(x,y,t) = 0 & \partial\Omega \times]0,T[\\ z(x,y,0) = 0 & \Omega \end{cases} \tag{3.7}$$

Les valeurs propres et les fonctions propres sont données par :

$$\lambda_{ij} = -\left(i^2 + j^2\right)\pi^2 \quad , \quad \varphi_{ij}(x,y) = 2\sin(i\pi x)\sin(j\pi y)$$

Les valeurs propres sont simples

En utilisant la proposition 3.1 , on a le système (3.7) n'est pas R-contrôlable sii

$\exists i_0, j_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que $\left(R\varphi_{i_0 j_0}\right)(b) = 0$

$i.\ e.$ $\exists i_0, j_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que $i_0 \operatorname{tang}(j_0 b_2 \pi) = j_0 \operatorname{tang}(i_0 b_1 \pi)$.

3.4 Contrôle régional du rotationnel à énergie minimale :

Il est important de savoir reconnaitre les contrôles qui assurent le transfert régional, et parmi ces contrôles ce qui à énergie minimale.

La proposition suivante permet de déterminer ce contrôle, en exploitant les résultats établis au paragraphe 3 de ce chapitre.

La méthode est similaire à celle dévelppée dans le cas de la contrôbabilité régionale interne par Zerrik [16].

Considérons le système (3.1) avec A à coéfficients constants et soit $g_d \in L^2(\omega)$ donnée.

On pose :

$$G = \left\{ g \in L^2(\Omega) \quad | \quad g = 0 \qquad \text{sur} \qquad \omega \right\}$$

et :

$$\tilde{G} = \left\{ \tilde{g} \in L^2(\Omega) \,|\, \tilde{g} = 0 \qquad \text{sur} \qquad \Omega/\omega \right\}$$

Le problème est alors de ramener le système (3.1) à un état du rotationnel désiré sur la partie ω. Autrement dit, il s'agit de trouver un contrôle $u \in U$ tel que $Ry_u(T) - \chi_\omega^* g_d \in G$.

Dans la suite, nous nous proposons de résoudre ce problème pour un système excité par un seul actionneur interne pouvant etre ponctuel ou zone. Si le système est excité par plusieurs actionneurs, l'approche se généralise sans difficulté.

3.4.1 Contrôle ponctuel interne :

Le système (3.1) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = Ay(x,t) + \delta(x-b)\,u(t) & Q \\ y(\xi,t) = 0 & \Sigma \\ y(x,0) = y^0(x) & \Omega \end{cases} \tag{3.8}$$

Ou $b \in \Omega$ désigne l'emplacement de l'actionneur et $u \in L^2(0,T)$.

On suppose que la solution du système (3.8) est telle que $y_u(T) \in H^1(\Omega)$.

Soit $\varphi_0 \in \tilde{G}$, considérons le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) = -A^*\varphi(x,t) & Q \\ \varphi(\xi,t) = 0 & \Sigma \\ \varphi(x,T) = \varphi_0(x) & \Omega \end{cases} \tag{3.9}$$

On suppose que ce système admet une solution unique $\varphi \in L^2(0,T_j;H_0^2(\Omega)) \cap C^3(\Omega \times]0,T[)$,et soit l'application

$$\varphi_0 \in \tilde{G} \longrightarrow \| \varphi_0 \|_{\tilde{G}}^2 = \int_0^T ((R\varphi)(b,t))^2 \, dt \tag{3.10}$$

(3.10) définit une semi- norme sur $\tilde{G}$.Considérons alors le système

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t) = A\psi(x,t) + R\varphi(b,t)\,\delta(x-b) & Q \\ \psi(\xi,t) = 0 & \Sigma \\ \psi(x,0) = y^0 & \Omega \end{cases} \tag{3.11}$$

ce dernier système se décompose de :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial t}(x,t) = A\psi_1(x,t) & Q \\ \psi_1(\xi,t) = 0 & \Sigma \\ \psi_1(x,0) = y^0(x) & \Omega \end{cases} \tag{3.12}$$

et :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_2}{\partial t}(x,t) = A\psi_2(x,t) + R\varphi(b,t)\,\delta(x-b) & Q \\ \psi_2(\xi,t) = 0 & \Sigma \\ \psi_2(x,0) = 0 & \Omega \end{cases} \tag{3.13}$$

Pour $\varphi_0 \in \tilde{G}$, soit Λ l'opérateur défini par :

$$\Lambda\varphi_0 = -\tilde{p}R\psi_2(T) \qquad \text{où} \qquad \tilde{p} = \chi_\omega^* \chi_\omega$$

par conséquent le problème de la controlabilité régionale du rotationnel sur ω revient à resoudre l'équation

$$\Lambda\varphi_0 = -(\chi_\omega^* g_d - \tilde{p}R\psi_1(T)) \tag{3.14}$$

Alors on a le resultat suivant

Proposition 3.1

Si l'actionneur (b, δ_b) est R-stratégique alors l'équation (3.14) admet une solution unique $\varphi^0 \in \tilde{G}$ et le contrôle donné par $u^*(t) = R\varphi(b,t)$ permet le transfert régional du système au rotationnel désiré g_d sur ω.

En outre ce contrôle minimise la fonction coût

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T |u(t)|^2 \, dt$$

Preuve

1- Montrons d'abord que si l'actionneur (b, δ_b) est R-stratégique sur ω alors (3.10) définit une norme sur $\tilde{G}$.

Consdérons une base (φ_j) de fonctions propres de A^* , on suppose que les valeurs propres associées λ_i sont simples. Alors on a

$$\|\varphi_0\|_{\tilde{G}} = 0 \Leftrightarrow R\varphi(b,t) = 0 \qquad \text{p.p. sur } [0,T]$$

implique

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j(T-t)} \left\langle \varphi_0, \varphi_j \right\rangle_{L^2(\omega)} R\varphi_j(b) = 0 \qquad \text{p.p. sur } [0,T]$$

cela entraine $\left\langle \varphi_0, \varphi_j \right\rangle_{L^2(\omega)} R\varphi_j(b) = 0 \quad \forall j$

Comme (b, δ_b) est R-stratégique sur ω alors d'aprés la proposition 2.1 $R\varphi_j(b) \neq 0$ $\forall j = 1, \infty$. On déduit que $\left\langle \varphi_0, \varphi_j \right\rangle_{L^2(\omega)} = 0 \quad \forall j = 1, \infty$ et donc $\varphi_0 = 0$.

On note de même le complété de l'ensemble $\tilde{G}$ par rapport à la norme (3.10) par $\tilde{G}$.

2- Montrons que Λ est un isomorphe de $\tilde{G} \to \tilde{G}^*$.

On multiplie l'équation (3.13) par $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t), i = 1, n$, et on integre sur Q, on obtient

$$\int\limits_Q \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t)\, \psi_2'(t)\, dtdx = \int\limits_Q \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t)\, A\psi_2(t)\, dtdx + \int\limits_0^T R\varphi(b,t)\, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(b,t)\, dt$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t)\,\psi_2(t)\right]_0^T dx &= \int\limits_{Q}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)'(t)\,\psi_2(t)\,dtdx+\int\limits_{Q}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t)\,A\psi_2(t)\,dtdx\\ &\quad+\int\limits_0^T R\varphi(b,t)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(b,t)\,dt\end{aligned}$$

on a donc

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(T)\,\psi_2(T)-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(0)\,\psi_2(0)\right)dx &= \int\limits_{Q}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t)\,A\psi_2(t)-\psi_2(t)\,A^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t)\right]dtdx\\ &\quad+\int\limits_0^T R\varphi(b,t)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(b,t)\,dt\end{aligned}$$

On utilise la formule de Green on obtient

$$\begin{aligned}-\int\limits_{\Omega}\varphi_0\frac{\partial\psi_2}{\partial x_i}(T)\,dx &= \int\limits_{\Sigma}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t)\,\frac{\partial\psi_2}{\partial\nu_A}(t)-\psi_2(t)\,\frac{\partial}{\partial\nu_{A^*}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t)\right)\right]dtd\xi\\ &\quad+\int\limits_0^T R\varphi(b,t)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t)\,dt\end{aligned}$$

Tenant compte les conditions aux limites on a

$$-\int\limits_{\Omega}\varphi_0\frac{\partial\psi_2}{\partial x_i}(T)\,dx=\int\limits_0^T R\varphi(b,t)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(b,t)\,dt\qquad\forall i=1,n$$

ainsi on a

$$-\int\limits_{\Omega}\varphi_0 R\psi_2(T)\,dx=\int\limits_0^T\left(R\varphi(b,t)\right)^2dt$$

D'où

$$\langle\Lambda\varphi_0,\varphi_0\rangle=\|\varphi_0\|_{\tilde{G}}^2$$

On déduit que Λ est un isomorphisme de $\tilde{G}$ dans $\tilde{G}^*$,d'où l'équation (3.14) admet une solution unique. De plus le contrôle $u^*(t) = \varphi(b,t)$ vérifiant $\chi_\omega R y_{u^*}(T) = g_d$.

3. Montrons que ce contrôle est optimal, en effet :

Soit $u \in L^2(0,T)$ tel que $\chi_\omega R y_u(T) = g_d$, on a

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(T), y_u(T) - y_{u^*}(T) \right\rangle_{L^2(\Omega)} - \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(0), y_u(0) - y_{u^*}(0) \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
= &\int_Q \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right)'(t) \left(y_u(t) - y_{u^*}(t) \right) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t) \left(y'_u(t) - y'_{u^*}(t) \right) \right] dtdx \\
= &\int_Q \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t) A \left(y_u(t) - y_{u^*}(t) \right) - A^* \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t) \left(y_u(t) - y_{u^*}(t) \right) \right] dtdx \\
&+ \int_0^T \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(b,t) \left(u(t) - u^*(t) \right) dt
\end{aligned}$$

on utilise la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(T), y_u(T) - y_{u^*}(T) \right\rangle_{L^2(\Omega)} - \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(0), y_u(0) - y_{u^*}(0) \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
= &\int_\Sigma \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t) \left(\frac{\partial y_u}{\partial \nu_A}(t) - \frac{\partial y_{u^*}}{\partial \nu_A}(t) \right) - \frac{\partial}{\partial \nu_{A^*}} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right)(t) \left(y_u(t) - y_{u^*}(t) \right) \right] dtd\xi \\
&+ \int_0^T \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(b,t) \left(u(t) - u^*(t) \right) dt
\end{aligned}$$

Tenant compte les conditions aux limites on a

$$-\left\langle \varphi_0, \frac{\partial}{\partial x_i} \left(y_u(T) - y_{u^*}(T) \right) \right\rangle_{L^2(\omega)} = \int_0^T \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(b,t) \left(u(t) - u^*(t) \right) dt \qquad \forall i = 1, n$$

ainsi on a

$$\int_0^T R\varphi(b,t) \left(u(t) - u^*(t) \right) dt = -\langle \varphi_0, R \left(y_u(T) - y_{u^*}(T) \right) \rangle_{L^2(\omega)} = 0$$

$$J'(u^*)(u-u^*) = \int_0^T R\varphi(b,t)(u(t)-u^*(t))\,dt$$

comme :$J'(u^*)(u-u^*) = 0$, et J strictement convexe, on déduit le résultat.

3.4.2 Contrôle zone interne :

le système (3.1) devient sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = Ay(x,t) + \chi_D f(x)\, u(t) & Q \\ y(\xi,t) = 0 & \Sigma \\ y(x,0) = y^0(x) & \Omega \end{cases} \tag{3.15}$$

Pour φ_0 donnée dans $\tilde{G}$, on considère le système (3.9) et on définit l' application :

$$\varphi_0 \in \tilde{G} \longrightarrow \| \varphi_0 \|_{\tilde{G}}^2 = \int_0^T \left(\langle f, R\varphi\rangle_{L^2(D)}\right)^2 dt \tag{3.16}$$

c'est une semi-norme sur $\tilde{G}$. On considère le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t) = A\psi(x,t) + \langle f, R\varphi\rangle_{L^2(D)} f(x)\,\chi_D & Q \\ \psi(\xi,t) = 0 & \Sigma \\ \psi(x,0) = y^0(x) & \Omega \end{cases} \tag{3.17}$$

qui peut être décomposé en deux systèmes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial t}(x,t) = A\psi_1(x,t) & Q \\ \psi_1(\xi,t) = 0 & \Sigma \\ \psi_1(x,0) = y^0(x) & \Omega \end{cases} \tag{3.18}$$

et :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_2}{\partial t}(x,t) = A\psi_2(x,t) + \langle f, R\varphi\rangle_{L^2(D)} f(x)\,\chi_D & Q \\ \psi_2(\xi,t) = 0 & \Sigma \\ \psi_2(x,0) = 0 & \Omega \end{cases} \tag{3.19}$$

Soit Λ l'opérateur défini par :

$$\begin{aligned} \Lambda : \tilde{G} &\longrightarrow \tilde{G}^* \\ \varphi_0 &\longrightarrow -\tilde{p}R\psi_2(T) \quad \text{où} \quad \tilde{p} = \chi_\omega^* \chi_\omega \end{aligned}$$

avec ces notations le problème du contrôle régional du rotationnel se ramène à résoudre dans ω l'équation :

$$\Lambda\varphi_0 = -\left(\chi_\omega^* g_d - \tilde{p}R\psi_1(T)\right) \tag{3.20}$$

Par conséquent on a le résultat suivant :

Proposition 3.2

Si le système (3.15) est faiblement régionalement R-controlable sue ω , l'équation (3.20) admet une solution unique $\varphi^0 \in \tilde{G}$ et le contrôle donné par $u^*(t) = \langle f, R\varphi(t)\rangle_{L^2(D)}$ permet le transfert régional du système (3.15) au rotationnel désiré g_d sur ω.

De plus ce contrôle minimse la fonction côut.

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T |\, u(t)\,|^2\, dt$$

La démonstration est similaire à celle du cas ponctuel avec quelques différences techniques.

3.4.3 Cas général

supposons que le système (3.1) est excité par plusieurs actionneurs

$(D_i, f_i)_{1\leq i\leq p}$. On pose :

$u^*(t) = ((R\varphi)(b_1, t), ..., (R\varphi)(b_p, t))$ dans le cas ponctuel et dans le cas zone, on pose :

$u^*(t) = \left(\langle f_1, (R\varphi)(\cdot, t)\rangle_{L^2(D_1)}, ..., \langle f_p, (R\varphi)(\cdot, t)\rangle_{L^2(D_p)}\right)$

avec φ est la solution du système (11) .

Alors on a le résultat :

Proposition 3.3

Si le système (3.1) est faiblement R-controlable sur ω ,alors le contrôle $u^*(t)$ amène le système (3.1) au rotationnel désiré g_d sur ω. De plus ce contrôle minimise la fonction côut.

la démonstration est similaire à celle du cas ponctuel avec quelques différences.

3.5 Simulation et algorithme

Nous avons vu que le problème du contrôle régional du rotationnel revient dans tous les cas à résoudre l'équation

$$\Lambda\varphi_0 = -\left(\chi_\omega^* g_d - \tilde{p}R\psi_1(T)\right).$$

Dans ce paragraphe, on propose une approche au problème de la contrôlabilité régionale du rotationnel en vue d'une simulation numérique.

L'approche numérique peut être faite facilement quand on peut calculer les fonctions propres du système.

Soit (φ_i) les fonctions propres de A^*. Sans perte de généralité on suppose que les valeurs propres λ_i sont simples.

3.5.1 Cas particulier

L'idée est de calculer dans la base $(\varphi_i)_i$ les composantes Λ_{ij} de Λ.

Cas ponctuel

Dans ce cas on a

$$\begin{aligned}\langle \Lambda\varphi_0, \varphi_0\rangle &= \|\varphi_0\|_G^2 \\ &= \int_0^T (R\varphi(b,t))^2\, dt\end{aligned}$$

Mais on a

$$R\varphi(b,t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{\lambda_i(T-t)} \langle \varphi_0, \varphi_i\rangle_{L^2(\omega)} R\varphi_i(b).$$

Alors

$$\langle \Lambda\varphi_0, \varphi_0\rangle = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle \varphi_0, \varphi_i\rangle_{L^2(\omega)} \left\langle \varphi_0, \varphi_j\right\rangle_{L^2(\omega)} R\varphi_i(b)\, R\varphi_j(b)\, \frac{e^{(\lambda_i+\lambda_j)T}-1}{\lambda_i+\lambda_j}$$

D'où les composantes (Λ_{ij}) et Λ sont données par

$$\Lambda_{ij} = R\varphi_i(b)\, R\varphi_j(b)\, \frac{e^{(\lambda_i+\lambda_j)T}-1}{\lambda_i+\lambda_j} \quad , \quad i,j = 1,\infty.$$

Cas zone

Dans le cas zone on a

$$\langle \Lambda\varphi_0, \varphi_0\rangle = \int_0^T \Big(\langle f, R\varphi\rangle_{L^2(D)}\Big)^2 dt$$

Alors les composantes (Λ_{ij}) de Λ s'expriment par

$$\Lambda_{ij} = \langle f, R\varphi_i\rangle_{L^2(D)} \left\langle f, R\varphi_j\right\rangle_{L^2(D)} \frac{e^{(\lambda_i+\lambda_j)T}-1}{\lambda_i+\lambda_j}\ ,\ \ i,j = 1,\infty.$$

3.5.2 Cas général

Dans le cas général, il n'est pas facile de trouver les fonctions propres de l'opérateur A^*, en particulier si A est à coefficients variables.

Dans ce paragraphe nous donnons une approche directe permitant de calculer le contrôle optimal qui amène le système au rotationnel désiré sur ω.

L'algorithme suivant est dans le cas où l'action est ponctuelle

1- Initialiser ε (la marge d'erreur permise)

2- Choisir φ_0 dans G

3- Résoudre le système (3.9) $\rightarrow R\varphi\,(b,t)$

4- Résoudre le système (3.12) $\rightarrow \psi_1$

5- Résoudre le système (3.13) $\rightarrow \psi_2$

6- Si $\|\chi_\omega R\psi\,(T) - g_d\|_{L^2(\omega)} \rangle \varepsilon$. retour à l'étape 2 si non le contrôle optimal est donné par $u^*\,(t) = R\varphi\,(b,t)$.

Conclusion :

Plusieurs propriétés ont été établies, particulièrement, dans certains conditions, l'étude de la contrôlabilité rotationnel revient à étudier une suit de matrice déterminé par l'opérateur du rotationnel, le support de l'actionneur, et la réparation spatiale. On a vu aussi que si : un système est contrôlable, on peut déterminer le contrôle assurant le transfert régional et a énergie minimale, Dans certains systèmes, l'objectif souhaité ne peut pas être réalisé, mais peut être réalisé sur une partie interne du domaine géométrique sur lequel le système est défini. Plusieurs systèmes sont rotationnel contrôlables mais ne sont pas contrôlable.

Pour étudier la contrôlabilité sur tout le domaine Ω sur lequel le système est défini on remplace la région ω par Ω dans les résultats démontrés.

Bibliographie

[1] R.A. Adams

Sobolev spaces. Academic press. 1975

[2] J. P. Aubin

Analyse fonctionnelles appliquée,Tome :1,2

Presse Universitaire de france, 1987

[3] R. A. M. AL-Saphory

Analyse régionale asymptotique d'une classe de systèmes distribuès

These de doctorat. Université perpignan,2001

[4] A. Boutoulon

Controlabilité régionale :cible, frontière et controlabilité du gradient

Thèse d'etat. Université Molay Ismail, 2000.

[5] H. Brizis

Analyse fonctionnelle, théorie et applications

Dunod,Paris, 1999

[6] Courant-Hilbert

Métod of Mathematical Phisics, Volume 1,2

John Wiley and Sons Ltd, 1989

[7] Dominique Azé

Elements d'analyse convexe et variationnelle

Ellipses-Marketing.1998

[8] Dunford-Schwartz

Linear operators,Partie 1,2,3

John Wiley and Sons Ltd, 1988

[9] J. Klamka

Controllability of dynamical systèms

Kluwer academic publishers group, 1990

[10] J. Lelong-Ferrand, Arnaudiès

Cours de mathématiques, Tome 4 : Equations défférentielles, Inégrales multiples.

Dunod, Paris 1977

[11] J. L. Lions

Controle optimal des systèmes gouvernnés par des équations aux dérivéees partielles

Dunod. paris, 1968

[12] J. l. lions

Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non lineaire.

Dunod. 1968

[13] J. L. Lions - E. Magenes

Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol :1,2,3

Dunod, paris,1968

[14] A. Pazy

Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.

Springer

[15] R. Tyrrell Rockafallar

Convex analysis

Princeton University press, 1970

[16] E. Zerrik

Analyse régionale des systèmes distribuès, Thèse d'etat

Université Mohamed 5, 1993.

ألـمـر اقـبـة ألـجـهـويـة لـمـؤثـر ألـدو ر ا ن لـجـمـلـة مـكـافـئـة

ملخص

هذا ألعمل يقع في إطار الرياضيات التطبيقية للمعادلات التفاضلية ذات مشتقات جزئية.
الهدف هو دراسة المراقبة لمؤثر الدوران لجملة مكافئة. كنا قد أخذنا جمل موزعة مرتبطة بالزمن وقمنا بدراسة أين يمكن ربط حالة النظام من حالة إبتدائية إلى حالة ذات دوران مختار مسبقا. عدة خصائص ومميزات أثبتت على ألخصوص العلاقة بين مراقبة مؤثر الدوران والبنية ألديناميكية لجملة ألنظام.
مؤثر الدوران ألذ ي تم تعريفه يمكن أن يعوض بمؤثر تفاضلي خطي من ألرتبة الأولى ذو معاملات ثابتة في هذه ألحالة كل ألنتائج ألمثبتة تبقى صحيحة مع بعض الاختلاف

كلمات مفتاحية: مؤثر الدوران، مراقبة مؤثر الدوران،البنية ألديناميكية لجملة ألنظام.

Regional controllability of the rotational of a parabolic system

Abstract:

This work enters within the framework of mathematics applied for the differential equations to the derivative partial. The goal is to study the controllability of the rotational for a parabolic system. one took system distribute depends on the time, and one A studies the case where one can join the state of system of an initial state towards a state of a rotational a priori selected. Properties and characterizations were established; in particular the relation between the controllability and the
structure of the actuators excite the system.

The rotational operator that one introduced can be replaced by a linear differential operator of order one and has constant coefficients, in this case, all the established results remain valid with some differences.

Key words: The rotational operator, controllability of rotational, the structure of the actuators.

Contrôlabilité régionale du rotationnel d'un système parabolique

<u>Résumé :</u>

Ce travail entre dans le cadre de mathématique appliquée pour les équations différentielles aux dérivées partial. Le but est étudier la contrôlabilité du rotationnel pour un système parabolique. On a pris des système distribues dépend du temps et on a étudie le cas où l'on peut joindre l'etat du système d'un état initial vers un état du rotationnel choisi à priori. Des propriétés et caractérisations ont été établies, en particulier la relation entre la contrôlabilité et la structure des actionneurs excitent le système.

L'opérateur rotationnel que l'on a introduit peut être remplacé par un opérateur différentiel linéaire d'ordre un et a coefficients constants, dans ce cas, tous les résultats établis restent valables avec quelques différences.

Mots clefs: L'opérateur rotationnel, contrôlabilité du rotationnel, la structure des actionneurs.