

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique**  
**Université Mentouri –Constantine**  
**Faculté des Sciences**  
**Département de Mathématiques**

N° d'ordre : .....  
Série : .....

**THESE**

Présentée pour l'obtention du diplôme de  
Doctorat ès-Sciences en Mathématiques  
*Option*  
Analyse Mathématique

Présentée par

**Wided CHIKOUCHE**

*Intitulée*

**ETUDE QUALITATIVE D'UN PROBLEME ELLIPTIQUE**

**Soutenu le : 28 novembre 2005**

**DEVANT LE JURY :**

Président	: M. DENCHE	Professeur à l'université de Constantine
Rapporteur	: A. AIBECHÉ	Professeur à l'université de Sétif
Co-Rapporteur	: S. NICAISE	Professeur à l'université de Valenciennes (France)
Examineur	: F. REBBANI	Professeur à l'université d'Annaba
Examineur	: A. AYADI	Professeur à l'université de Constantine

## *Remerciements*

*C'est avec mon plus vif enthousiasme que je souhaite rendre mérite aujourd'hui aux personnes qui de près ou de loin et à leur manière, m'ont aidé à mener à bien ce travail. A toutes celles et ceux qui m'ont témoigné de la sympathie et de l'intérêt, qu'ils reçoivent aujourd'hui le témoignage de ma profonde gratitude et l'assurance de mon estime.*

*Je présente plus particulièrement mes sincères remerciements :*

*A monsieur Aissa. Aibeche professeur à l'université de Sétif pour avoir accepté de diriger ce travail, pour son aide, ses orientations, ses conseils et pour l'intérêt qu'il porte à ma formation pédagogique depuis ma graduation.*

*A monsieur Serge. Nicaise professeur à l'université de Valenciennes pour avoir accepté de diriger ce travail, pour la confiance qu'il m'a témoigné en m'accueillant avec bienveillance dans son laboratoire, pour l'aide continue et efficace qu'il m'a apporté, pour le temps qu'il m'a consacré m'ayant permis d'achever ce travail dans les meilleurs conditions.*

*A monsieur Mohamed. Denche pour l'honneur qu'il me fait de présider ce jury.*

*Je tiens également à remercier avec une profonde sympathie madame Fouzia. Rebbani professeur à l'université d'Annaba pour avoir accepté de juger ce travail.*

*Mes remerciements vont également à l'égard de monsieur Abdelhamid. AYADI professeur à l'université de Constantine qui m'honore en acceptant de faire partie de mon jury.*

*Je tiens aussi à remercier monsieur Denis. Mercier maître de conférence à l'université de Valenciennes avec qui j'ai réalisé une partie de ce travail.*

# Table des matières

0.1	Introduction . . . . .	1
<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>5</b>
1.1	Espaces de Sobolev . . . . .	5
1.1.1	Les frontières . . . . .	5
1.1.2	Les espaces . . . . .	6
1.1.3	Les espaces de traces . . . . .	7
1.1.4	Inégalités de Hardy . . . . .	13
1.1.5	Théorème de Mikhlin . . . . .	13
1.2	Espaces d'interpolation . . . . .	14
1.3	Éléments d'analyse fonctionnelle . . . . .	15
1.3.1	Opérateurs linéaires . . . . .	15
1.3.2	semi-groupes . . . . .	18
1.4	Opérateurs maximaux monotones dans un espace de Hilbert . . . . .	20
1.4.1	Problèmes linéaires avec contraintes unilatérales sur le bord . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Coefficients des singularités du problème biharmonique de type Neumann :</b>	
	<b>Cas de la fissure</b>	<b>23</b>
2.1	Introduction . . . . .	23
2.2	Séparation des variables . . . . .	24
2.3	Cas de la fissure . . . . .	26
2.4	Calcul de $c_\beta$ et $d_\beta$ . . . . .	27
2.5	Indépendance des coefficients . . . . .	28
2.6	Convergence de la série . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Régularité de la solution de certains problèmes aux limites unilatéraux dans des domaines polygonaux et polyédraux</b>	<b>32</b>
3.1	Introduction . . . . .	32
3.2	Inégalité de Poincaré . . . . .	33
3.3	Problèmes de transmission-Signorini avec conditions aux limites mêlées . . . . .	35
3.4	Problème de transmission-Signorini en 2D avec conditions aux limites mêlées . . . . .	37
3.5	Problèmes de transmission-Signorini en 3D avec conditions aux limites mêlées . . . . .	48
3.6	Problèmes de transmission-Signorini en 2D avec conditions de Signorini au bord . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Etude d'un problème de transmission dans un cylindre avec arête par la théorie des sommes d'opérateurs linéaires</b>	<b>56</b>
4.1	Introduction . . . . .	56
4.2	Sommes d'opérateurs linéaires . . . . .	59
4.2.1	Première stratégie . . . . .	59
4.2.2	Deuxième stratégie . . . . .	60

4.3	Problème de transmission avec paramètre . . . . .	61
4.4	Résolvante du problème de transmission dans un domaine à coins . . . . .	65
4.5	Problème de transmission dans le cylindre . . . . .	71
4.5.1	Application de la première stratégie . . . . .	71
4.5.2	Application de la deuxième stratégie . . . . .	80



## 0.1 Introduction

On s'intéresse à des problèmes aux limites elliptiques dans des domaines à frontière non régulière, la frontière pouvant inclure des coins et des arêtes. Plus particulièrement, on y étudiera des problèmes de transmission dans des domaines polygonaux et même polyédraux. Une grande partie de cette thèse sera consacrée aux problèmes de transmission pour l'opérateur de Laplace avec des conditions aux limites et de transmission unilatérales de type Signorini. On arrive à caractériser la régularité de la solution en termes d'espaces de Sobolev à poids. Dans une autre partie, on y étudiera la régularité de la solution du problème de transmission pour le Laplacien avec des conditions de Dirichlet sur le bord, dans un domaine cylindrique et avec une donnée intérieure dans  $L_p$ , pour  $p > 1$ . On appliquera la théorie des sommes d'opérateurs linéaires.

La thèse est organisé comme suit :

Le but du premier chapitre est de donner un cadre fonctionnel commode pour notre étude. Les espaces de Sobolev se prêtant bien à notre travail, nous en rappelons les définitions et les propriétés ( sans démonstrations ) qui nous seront utiles par la suite. On rappelle aussi quelques propriétés des espaces d'interpolation ainsi que des notions de base et des propriétés des semi-groupes, des opérateurs linéaires et des opérateurs maximaux monotones qui nous seront utiles le long des chapitres suivants.

Au deuxième chapitre, on considère le problème de Neumann pour le bilaplacien dans un secteur plan borné, la solution est développée en série (2.1) et on s'intéresse au calcul des coefficients du développement dans le cas important de la fissure. Les conditions de Dirichlet dans le cas de la fissure n'étant pas des conditions naturelles dans la pratique, il est plus intéressant de considérer des conditions de Neumann i.e. le cas d'une plaque à bord libre.

Ce calcul étant très important d'une part, pour les mécaniciens, car le coefficient de la partie singulière, appelé coefficient des intensités des contraintes intervient beaucoup en élasticité notamment pour vérifier, par exemple des critères de stabilité de la fissure. D'autre part, il est connu que la solution par éléments finis ne converge pas aussi rapidement dans le cas d'un ouvert polygonal (en présence d'un coin), que dans celui d'un ouvert régulier.

Parmi les méthodes proposées il y a celle qui consiste à approcher le coefficient de singularité et la partie régulière ce qui améliore la convergence de la solution. Une deuxième méthode consiste à inclure les solutions singulières dans la base des éléments finis.

Dans ce travail, il s'agit d'isoler le coin par une interface artificielle, dans le voisinage de ce coin écrire la solution exacte sous forme d'une série et montrer qu'elle converge et qu'elle est indépendante du rayon du secteur en question et ainsi pouvoir obtenir une solution par éléments finis, seulement en calculant l'approximation de la solution loin des coins sachant qu'elle est régulière i.e. qu'elle se laisse bien approcher et ainsi obtenir la solution du problème en mettant bout à bout les deux solutions.

Dans le troisième chapitre, On considère certains problèmes aux limites unilatéraux dans des domaines polygonaux ou polyédraux avec des conditions de transmission unilatérales. Différents auteurs ont étudié de tels problèmes aux limites unilatéraux mais sans transmission (i.e. l'équation de Laplace pure) soit en trouvant des conditions suffisantes sur les domaines qui garantissent la régularité  $H^2$  de la solution, soit en se restreignant aux conditions au bord de

Signorini. Ici on caractérise la régularité de la solution en termes d'espaces de Sobolev à poids. Cette caractérisation est d'un grand intérêt pour les applications numériques comme le montre les résultats obtenus dans la théorie linéaire, où certains maillages raffinés près des coins ont été utilisés pour compenser le comportement singulier de la solution.

Notre méthode principale est inspirée de la méthode de Caccioppoli [10, 21, 22], et qui consiste en quatre étapes : d'abord on pénalise le problème, deuxièmement on estime les dérivées secondes de la solution du problème pénalisé en utilisant quelques intégrations par parties, troisièmement nous estimons uniformément les termes de bord en utilisant la condition de monotonie et finalement on passe à la limite en utilisant quelques arguments de compacité. Cette méthode est ici adaptée aux espaces de Sobolev à poids et aux conditions aux limites unilatérales et de transmission. Pour des conditions aux limites unilatérales pures près de l'interface cette méthode échoue car on ne peut pas estimer certains termes de bord, par conséquent dans ce cas on utilise une méthode basée sur un changement de variables permettant de passer du cas régulier au cas singulier.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude de la régularité de la solution du problème de transmission pour l'opérateur de Laplace avec conditions de Dirichlet sur le bord, dans un domaine cylindrique et avec une donnée intérieure dans  $L_p$ ,  $p > 1$ .

Dans le cas hilbertien ( $p = 2$ ), la technique classique utilisée repose essentiellement sur la transformée de Fourier partielle et le théorème de Plancherel. Malheureusement, dans le cas général  $p \neq 2$ , la substitution du théorème de Plancherel n'aboutit pas à des résultats optimaux sur la régularité de la solution  $u$ .

Dans ce cas ( $p \neq 2$ ), on obtient la décomposition de la solution en partie régulière et partie singulière en utilisant la théorie des sommes d'opérateurs dans un espace de Banach, introduite par Da Prato-Grisvard [15], et aussi développée par Dore-Venni [18]. La démarche que l'on suivra est inspirée de [28] qui a considéré le problème de Dirichlet sans interface. L'application de la première théorie des sommes, celle de Da Prato-Grisvard permet d'assurer l'existence et l'unicité d'une solution forte, et aussi d'obtenir une décomposition pour cette solution et avec l'application de la deuxième théorie, celle de Dore-Venni on obtient la régularité optimale de la partie régulière de la solution.

# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Espaces de Sobolev

Dans un espace de Sobolev donné, pour l'instant  $H^1(\Omega)$ , les propriétés des fonctions dépendent fortement de la régularité de la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$ . De différents points de vue ont été développés dans la littérature pour déterminer les propriétés de la frontière  $\Gamma$ .

#### 1.1.1 Les frontières

On suppose que la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  est localement le graphe d'une fonction  $\varphi$ . Par conséquent, les propriétés de  $\Gamma$  sont ceux de  $\varphi$ . Voici le point de vue qu'on suivra ici :

**Définition 1.1.1** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ . On dit que sa frontière  $\Gamma$  est continue si pour tout  $x \in \Gamma$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  et de nouvelles coordonnées orthogonales  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  tels que*

(i)  *$V$  est un hypercube dans ces nouvelles coordonnées*

$$V = \{(y_1, \dots, y_n) : |y_j| < a_j; \forall j = 1, \dots, n\};$$

(ii) *il existe une fonction continue  $\varphi$  définie dans*

$$V' = \{(y_1, \dots, y_{n-1}) : |y_j| < a_j; \forall j = 1, \dots, n-1\};$$

*vérifiant*

$$\begin{aligned} |\varphi'(y)| &\leq a_n/2, \forall y' \in V', \\ \Omega \cap V &= \{y = (y', y_n) \in V : y_n < \varphi(y')\}, \\ \Gamma \cap V &= \{y = (y', y_n) \in V : y_n = \varphi(y')\}. \end{aligned}$$

*De manière similaire, on dira que  $\Gamma$  est lipschitzienne (respectivement de classe  $C^{k,1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $m$  fois continûment différentiable,  $m \in \mathbb{N}$ ), si  $\varphi$  est lipschitzienne (respectivement de classe  $C^{k,1}$ ,  $m$  fois continûment différentiable).*

Ceci signifie que, dans un voisinage de  $x$ ,  $\Omega$  est au dessous du graphe de  $\varphi$  et que la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  coïncide avec le graphe de  $\varphi$ .

Si un ouvert  $\Omega$  a une frontière continue  $\Gamma$ , alors  $\Omega$  est d'un seul côté de  $\Gamma$  en tout point de  $\Gamma$ . Suivant la définition 1.1.1, un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  dont la frontière est un polygone (on dira tout simplement par la suite domaine polygonal), est à frontière lipschitzienne. De manière similaire, un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  dont la frontière est un polyèdre, est à frontière lipschitzienne.

**Définition 1.1.2** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . On dit que  $\Omega$  est un domaine polygonal, s'il possède les propriétés suivantes

- (i)  $\Omega$  est borné, connexe et seulement d'un seul côté de sa frontière.
- (ii) la frontière de  $\Omega$  est l'union d'un nombre fini de segments de droite  $\bar{\Gamma}_j$ ,  $j \in \{1, \dots, N\}$ ;  $\Gamma_j$  est supposé être ouvert.

Il est clair qu'un domaine polygonal n'a pas de fissure et est à frontière lipschitzienne. Par conséquent, les espaces de Sobolev dans de tels domaines ont toutes les propriétés des espaces de Sobolev dans des domaines lipschitziens.

Nous allons introduire quelques notations qui nous seront utiles par la suite. Soit  $\Omega$  un domaine polygonal, on suppose que sa frontière  $\Gamma$  est l'union d'un nombre fini de segments de droite  $\bar{\Gamma}_j$ ,  $j \in \{1, \dots, N\}$ , numérotés suivant l'orientation trigonométrique. Nous noterons par  $S_j$  le sommet extrémité de  $\Gamma_j$  défini par  $S_j = \bar{\Gamma}_j \cap \bar{\Gamma}_{j+1}$ ,  $1 \leq j \leq N-1$ , et  $S_N = \bar{\Gamma}_N \cap \bar{\Gamma}_1$ . Soient  $s$  l'abscisse curviligne orientée dans le sens trigonométrique et  $ds$  l'élément de longueur sur  $\Gamma$ . Soient  $\nu_j$  la normale extérieure à  $\Gamma_j$  et  $\tau_j$  le vecteur tangentiel unitaire tels que  $(\nu_j, \tau_j)$  forment une base directe orthonormale.

### 1.1.2 Les espaces

Le long de cette section,  $s$  est un nombre réel quelconque et  $p$  un nombre réel  $> 1$ . On désigne par  $k$  la partie entière de  $s$  et par  $\sigma$  sa partie fractionnelle tel que  $s = k + \sigma$ , avec  $0 \leq \sigma < 1$ . Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.1.3** Pour  $s \geq 0$ , on désigne par  $W^{s,p}(\Omega)$  l'espace des distributions  $u \in D'(\Omega)$  tel que

- (i)  $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ , pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq k$ , dans le cas où  $s = k$  est un entier.
- (ii)  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  et

$$\int \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x - y|^{y+\sigma p}} dx dy < +\infty,$$

pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| = k$ , dans le cas où  $s$  n'est pas entier.

$W^{s,p}(\Omega)$  est un espace de Banach pour la norme définie par

$$\|u\|_{k,p,\Omega} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

dans le cas (i) et par

$$\|u\|_{s,p,\Omega} = \left( \|u\|_{k,p,\Omega}^p + \sum_{|\alpha| \leq k} \int \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x - y|^{y+\sigma p}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}},$$

dans le cas (ii).

Dans le but d'étendre cette définition aux valeurs négatives de  $s$ , on a besoin de

**Définition 1.1.4** *Pour  $s < 0$ , on désigne par  $W_0^{s,p}(\Omega)$  la fermeture de  $D(\Omega)$  dans  $W^{s,p}(\Omega)$ . On rappelle que  $D(\Omega)$  est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans  $\Omega$ .*

Notons qu'en général  $W_0^{s,p}(\Omega)$  est différent de  $W^{s,p}(\Omega)$ . Le cas  $\Omega = \mathbb{R}^n$  est une exception, où on a

$$W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n) = W^{s,p}(\mathbb{R}^n), \text{ pour } s > 0.$$

**Définition 1.1.5** *Pour  $s > 0$ , on note  $W^{s,p}(\Omega)$  le dual de l'espace  $W_0^{-s,q}(\Omega)$ , où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .*

Dans le cas particulier  $p = 2$ , on utilisera la notation usuelle,  $H^s(\Omega)$  au lieu de  $W^{s,2}(\Omega)$  et  $H_0^s(\Omega)$  au lieu de  $W_0^{s,2}(\Omega)$ . Ce sont des espaces de Hilbert pour le produit scalaire naturel noté par  $(u, v)_{s,\Omega}$ .

### 1.1.3 Les espaces de traces

#### Traces des fonctions continues dans des domaines réguliers

Rappelons d'abord les théorèmes de trace dans le cadre des fonctions continûment différentiables de  $C^s(\bar{\Omega})$  et  $C^s(\Gamma)$  dans des domaines réguliers ( cf. [34, 17] ).

Pour  $s$  entier  $\geq 0$ , la restriction  $u|_\Gamma$  de  $u$  sur la frontière  $\Gamma$ , notée simplement  $u$  ou encore  $\gamma_0 u$ , d'une fonction de  $C^s(\bar{\Omega})$  est bien définie comme fonction de  $C^s(\Gamma)$  et appelée la trace de  $u$  sur  $\Gamma$ . On a en particulier pour  $x \in \Gamma$

$$u(x) = \lim_{y \rightarrow x} u(y)$$

Si on désigne par  $n(x)$ , pour tout  $x \in \Gamma$ , le vecteur unitaire normal en  $x$  à  $\Gamma$  et orienté vers l'extérieur de  $\Omega$ , et par  $\nabla u$  le gradient de  $u$  défini par

$$\nabla u = (\partial_1 u, \partial_2 u).$$

Etant donné une fonction  $u$  de  $C^k(\bar{\Omega})$ , pour un entier  $k \geq 1$ , son gradient a une trace sur  $\Gamma$  et la fonction  $\nabla u \cdot n$ , notée  $\frac{\partial u}{\partial n}$  ou encore  $\gamma_1 u$  est bien définie comme fonction de  $C^{k-1}(\Gamma)$  et appelée la trace de la dérivée normale sur  $\Gamma$ . On peut aussi écrire

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \nabla u(x - t n(x)) \cdot n(x).$$

Pour  $u, v \in H^2(\Omega)$ , nous avons la formule de Green suivante

$$(1.1) \quad \int_{\Omega} \partial_i u v \, dx = - \int_{\Omega} u \partial_i v \, dx + \int_{\Gamma} u v n_i \, d\gamma, \quad .$$

On définit comme dans [41] pour  $u$  suffisamment régulière, par exemple  $u \in H^4(\Omega)$ , les opérateurs de traces

$$\begin{aligned} Mu &= \nu \Delta u + (1 - \nu) (\partial_1^2 u n_1^2 + 2 \partial_{12} u n_1 n_2 + \partial_2^2 u n_2^2), \\ Tu &= -\frac{\partial \Delta u}{\partial n} + (1 - \nu) \frac{d}{ds} (\partial_1^2 u n_1 n_2 - \partial_{12} u (n_1^2 - n_2^2) - \partial_2^2 u n_1 n_2). \end{aligned}$$

Nous avons la formule de Green

**Proposition 1.1.6** Pour deux fonctions  $u \in H^4(\Omega)$ ,  $v \in H^2(\Omega)$ , on a la formule de Green suivante

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u v \, dx = a(u, v) - \left( \int_{\Gamma} M u \gamma_1 v \, d\gamma + \int_{\Gamma} T u \gamma_0 v \, d\gamma \right),$$

où  $a(u, v)$  est une forme bilinéaire définie sur  $H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$  comme suit

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\partial_1^2 u \partial_1^2 v + 2(1 - \nu) \partial_{12} u \partial_{12} v + \nu \partial_1^2 u \partial_2^2 v + \nu \partial_2^2 u \partial_1^2 v + \partial_2^2 u \partial_2^2 v) \, dx.$$

**Preuve** On choisit la décomposition suivante du bilaplacien

$$\Delta^2 = \partial_1^2(1 - \nu \partial_2^2) + \partial_{12}(2(1 - \nu) \partial_{12}) + \partial_1^2(\nu \partial_2^2) + \partial_2^2(\nu \partial_1^2) + \partial_2^2(1 - \nu \partial_1^2)$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta^2 u v \, dx &= \int_{\Omega} \{ \partial_1^2 (\partial_1^2 u) + \partial_{12} (2(1 - \nu) \partial_{12} u) \\ &\quad + \partial_1^2 (\nu \partial_2^2 u) + \partial_2^2 (\nu \partial_1^2 u) + \partial_2^2 (\partial_2^2 u) \} v \, dx. \end{aligned}$$

On applique la formule de Green (1.1) deux fois de suite à chaque terme de l'intégrale, on obtient

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u v \, dx = a(u, v) + I_1 + I_2,$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Gamma} \{ \partial_1 (\partial_1^2 u) n_1 + (1 - \nu) \partial_1 (\partial_{12} u) n_2 + (1 - \nu) \partial_2 (\partial_{12} u) n_1 \\ &\quad + \nu \partial_1 (\partial_2^2 u) n_1 + \nu \partial_2 (\partial_1^2 u) n_2 + \partial_2 (\partial_2^2 u) n_2 \} v \, d\gamma. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_{\Gamma} \{ \partial_1^2 u \partial_1 v n_1 + (1 - \nu) \partial_{12} u \partial_2 v n_1 + (1 - \nu) \partial_{12} u \partial_1 v n_2 \\ &\quad + \nu \partial_2^2 u \partial_2 v n_2 + \nu \partial_1^2 u \partial_2 v n_2 + \partial_2^2 u \partial_2 v n_2 \} v \, d\gamma. \end{aligned}$$

Calculons l'intégrale  $I_1$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Gamma} \{ \partial_1 (\partial_1^2 u) n_1 + (1 - \nu) \partial_2 (\partial_1^2 u) n_2 + (1 - \nu) \partial_1 (\partial_2^2 u) n_1 \\ &\quad + \nu \partial_1 (\partial_2^2 u) n_1 + \nu \partial_2 (\partial_1^2 u) n_2 + \partial_2 (\partial_2^2 u) n_2 \} v \, d\gamma, \\ &= \int_{\Gamma} \{ \partial_1 (\partial_1^2 u) n_1 + \partial_2 (\partial_1^2 u) n_2 + \partial_1 (\partial_2^2 u) n_1 + \partial_2 (\partial_2^2 u) n_2 \} v \, d\gamma \\ &= \int_{\Gamma} v \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \, d\gamma. \end{aligned}$$

Pour simplifier la deuxième intégrale, on aura besoin d'exprimer les dérivées par rapport à  $x_1$  et  $x_2$  en fonction des dérivées suivant la normale  $n$  et la tangente  $\tau$ .

En effet

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial n} = \partial_1 n_1 + \partial_2 n_2 \\ \frac{\partial}{\partial \tau} = -\partial_1 n_2 + \partial_2 n_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1 = \frac{\partial}{\partial n} n_1 - \frac{\partial}{\partial \tau} n_2 \\ \partial_2 = \frac{\partial}{\partial n} n_2 + \frac{\partial}{\partial \tau} n_1. \end{cases}$$

On applique ainsi ces formules pour obtenir

$$(1.2) \quad \begin{aligned} I_2 = & - \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} [(1 - \nu) (\partial_1^2 u n_1^2 + 2 \partial_{12} u n_1 n_2 + \partial_2^2 u n_2^2) + \nu \Delta u] d\gamma \\ & + \int_{\Gamma} (1 - \nu) \frac{\partial v}{\partial \tau} (\partial_1^2 u n_1 n_2 - \partial_{12} u (n_1^2 - n_2^2) - \partial_2^2 u n_1 n_2) d\gamma. \end{aligned}$$

La seconde intégrale de  $I_2$  peut être calculée par parties. Etant donné qu'elle est prise sur un contour fermé, les limites d'intégration sont confondues en un point, on obtient tout simplement

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} [\nu \Delta u + (1 - \nu) (\partial_1^2 u n_1^2 + 2 \partial_{12} u n_1 n_2 + \partial_2^2 u n_2^2)] d\gamma \\ &\quad - (1 - \nu) \int_{\Gamma} v \frac{d}{ds} [\partial_1^2 u n_1 n_2 - \partial_{12} u (n_1^2 - n_2^2) - \partial_2^2 u n_1 n_2] d\gamma \\ &= - \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} M u d\gamma - \int_{\Gamma} v \left( T u + \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \right) d\gamma. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u v dx = a(u, v) - \left( \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} M u d\gamma + \int_{\Gamma} T u v d\gamma \right).$$

■

## Traces dans les domaines polygonaux

Nous nous intéressons ici à l'extension des résultats obtenus précédemment, mais dans le cadre des espaces de Sobolev pour des domaines polygonaux, comme dans [27].

**Définition 1.1.7** On désigne par  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  l'espace des fonctions  $g \in L^2(\Gamma)$  telles que

$$\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{|g(x) - g(y)|^2}{|x - y|^2} ds(x) ds(y) < \infty.$$

L'application  $u \mapsto u|_{\Gamma}$  qui est définie sur  $D(\overline{\Omega})$  admet un prolongement  $\gamma_0$ , par densité, qui est un opérateur linéaire surjectif de  $H^1(\Omega)$  sur  $H^{1/2}(\Gamma)$ . Son noyau est  $H_0^1(\Omega)$ . Si l'on pose  $g_j = g|_{\Gamma_j}$ , on a la propriété suivante

La fonction  $g$  appartient à  $H^{1/2}(\Gamma)$  si et seulement si  $g_j \in H^{1/2}(\Gamma_j)$  pour tout  $j$  et s'il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\int_0^{\delta} |g_j(x_j(-\sigma)) - g_{j+1}(x_j(\sigma))|^2 \frac{d\sigma}{\sigma} < \infty,$$

où  $x_j(\sigma)$  (resp.  $x_j(-\sigma)$ ) désigne le point de  $\Gamma_{j+1}$  (resp.  $\Gamma_j$ ) à distance  $\sigma$  du sommet  $S_j$ . On dit que  $g_j$  et  $g_{j+1}$  coïncident dans un sens faible en  $S_j$  et on notera  $g_j \underset{S_j}{\sim} g_{j+1}$ .

**Remarque 1.1.8**  $H^{1/2}(\Gamma)$  n'est pas l'espace des traces  $\frac{\partial u}{\partial n}$  de  $H^2(\Omega)$ . La discontinuité de la normale aux coins nous empêche de définir les espaces de traces comme dans le cas des ouverts à frontière régulière. On considère donc les traces sur chacun des côtés  $\Gamma_j$ , avec des conditions de compatibilité.

Pour expliquer cette difficulté, nous allons revenir aux fonctions continûment différentiables. Il est clair que l'application :

$$\gamma_{0j} : u \mapsto u|_{\Gamma_j} \quad j = \overline{1, N}$$

est définie de  $C^0(\overline{\Omega})$  à valeurs dans  $C^0(\Gamma)$  ainsi que l'application :

$$\gamma_{1j} : u \mapsto \frac{\partial u}{\partial n_j}|_{\Gamma_j} \quad j = \overline{1, N} \quad \text{de } C^1(\overline{\Omega}) \text{ sur } \prod_{j=1}^N C^0(\overline{\Gamma_j}).$$

Soit une fonction  $g$  définie sur  $\Gamma$  par

$$g|_{\Gamma_j} = g_j.$$

La fonction  $g$  n'appartient pas nécessairement à  $C^0(\Gamma)$ . En d'autres termes, la discontinuité de la normale extérieure aux coins, entraîne que la dérivée normale d'une fonction de  $C^1(\overline{\Omega})$  n'appartient pas à l'espace des restrictions au bord des éléments de  $C^0(\overline{\Omega})$ . Il se produit un phénomène similaire avec les espaces de Sobolev. Ceci nous amène donc à ne considérer les traces que sur chacun des côtés  $\Gamma_j$  et non plus globalement, puis à chercher des conditions de compatibilité entre ces diverses traces.

Enonçons ces conditions de compatibilité pour des opérateurs de traces généraux  $L$ , puis ensuite pour les opérateurs particuliers  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  dont nous nous servirons par la suite, pour la démonstration de ces résultats, nous renvoyons le lecteur à [26]. Introduisons les notations suivantes :

Soit  $L$  un opérateur à coefficients constants d'ordre  $d$ , défini par :

$$L = \sum_{k=0}^d L_{j,k} \frac{\partial^k}{\partial n_j^k},$$

où  $L_{j,k}$  est un opérateur différentiel tangentiel à  $\Gamma_j$ , c'est-à-dire un polynôme de degré  $\leq d - k$  en  $\frac{\partial}{\partial \tau_j}$ .

**Théorème 1.1.9** L'application  $u \mapsto \{g_{j,k}; j = \overline{1, N}; k = \overline{0, m-1}\}$  qui est définie pour  $u$  dans  $D(\overline{\Omega})$  par

$$g_{j,k} = \frac{\partial^k u}{\partial n_j^k}|_{\Gamma_j},$$

admet un prolongement par densité qui est un opérateur linéaire continu surjectif de  $H^m(\Omega)$  sur le sous-espace de  $\prod_{j=1}^N \prod_{k=0}^{m-1} H^{m-k-\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$  défini par les conditions suivantes pour tout opérateur



$L$  à coefficients constants d'ordre  $d \leq m - 1$ , on a

$$\sum_{k=0}^d L_{j,k} g_{j,k}(S_j) = \sum_{k=0}^d L_{j+1,k} g_{j+1,k}(S_j) \quad \text{pour } d < m - 1, \text{ et}$$

$$\sum_{k=0}^d L_{j,k} g_{j,k} \underset{S_j}{\sim} \sum_{k=0}^d L_{j+1,k} g_{j+1,k} \quad \text{pour } d = m - 1.$$

On en déduit, dans le cas particulier  $m = 2$ , le corollaire suivant

**Corollaire 1.1.10** Soit  $\gamma_{0j}u = g_j$  et  $\gamma_{1j}u = h_j$ , alors l'application trace  $u \mapsto \{g_j, h_j\}$  est un opérateur linéaire continu surjectif de  $H^2(\Omega)$  sur le sous-espace de  $\prod_{j=1}^N H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$  défini par les conditions suivantes

$$(1.3) \quad g_j(S_j) = g_{j+1}(S_j) \quad \text{pour tout } j$$

et

$$(1.4) \quad \begin{aligned} g'_j &\underset{S_j}{\sim} -\cos \omega_j g'_{j+1} + \sin \omega_j h_{j+1} \\ h_j &\underset{S_j}{\sim} -\sin \omega_j g'_{j+1} - \cos \omega_j h_{j+1} \end{aligned}$$

pour tout  $j$  ( le signe ' désigne la différentiation tangentielle i.e. par rapport à  $t^j$  ).

**Remarque 1.1.11** La formule de Green (1.1) s'étend au cas d'un domaine polygonal ( d'après [27] ). Par intégrale sur  $\Gamma$ , il faut alors entendre la somme des intégrales sur chacun des segments  $\Gamma_j$  du polygone. Par conséquent, la preuve de la proposition (1.1.6) reste valable dans un domaine polygonal jusqu'à l'étape (1.2), d'où la formule suivante

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta^2 u v \, dx &= a(u, v) - \int_{\Gamma} M u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\gamma + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial \Delta u}{\partial n} v \right. \\ &\left. + (1 - \nu) \frac{d}{ds} (\partial_1^2 u n_1 n_2 - \partial_{12} u (n_1^2 - n_2^2) - \partial_2^2 u n_1 n_2) \right] \frac{\partial v}{\partial t} \, d\gamma, \end{aligned}$$

pour  $u \in H^4(\Omega)$ ,  $v \in H^2(\Omega)$ .

On définit l'espace

$$H^2(\Delta^2, \Omega) = \{u \in H^2(\Omega); \Delta^2 u \in L^2(\Omega)\}.$$

On s'intéresse à étendre cette formule pour  $u \in H^2(\Delta^2, \Omega)$ . Nous noterons

$$\begin{aligned} H(\Gamma) &= \{(g, h) \in \prod_{j=1}^N H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j); \\ &g = (g_1, \dots, g_N) \text{ et } h = (h_1, \dots, h_N) \text{ vérifient (1.3), (1.4)}\} \end{aligned}$$

Nous avons besoin de la formule de Green suivante comme dans [49].

**Définition 1.1.12** Pour  $u \in H^2(\Delta^2, \Omega)$ , nous définissons  $MT(u) \in (H(\Gamma))'$  par

$$(1.6) \quad \langle MT(u), (g, h) \rangle = \int_{\Omega} \Delta^2 u R \, dx - a(u, R), \quad \forall (g, h) \in H(\Gamma),$$

où  $R \in H^2(\Omega)$  est un relèvement de  $(g, h)$ , i.e.  $\gamma_0 R = g$  et  $\gamma_1 R = h$ .

**Lemme 1.1.13** La définition 1.1.12 est indépendante des relèvements choisis.

**Preuve:** Soient  $R_1$  et  $R_2$  deux relèvements de  $(g, h)$  i.e.  $\gamma_0 R_1 = \gamma_0 R_2 = g$  et  $\gamma_1 R_1 = \gamma_1 R_2 = h$ . Nous allons montrer que

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u (R_1 - R_2) \, dx - a(u, R_1 - R_2) = 0.$$

$u \in H^2(\Delta^2, \Omega)$ , donc d'après la densité de  $D(\overline{\Omega})$  dans  $H^2(\Delta^2, \Omega)$ , (voir par exemple [40]), il existe une suite  $(u_n) \subset D(\overline{\Omega})$  telle que  $u_n \rightarrow u$  dans  $H^2(\Delta^2, \Omega)$ . Or pour  $u_n$ , nous avons la formule de Green

$$(1.7) \quad \int_{\Omega} \Delta^2 u_n (R_1 - R_2) \, dx = a(u_n, v) - \int_{\Gamma} M u_n \frac{\partial (R_1 - R_2)}{\partial n} \, d\gamma + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial \Delta u_n}{\partial n} (R_1 - R_2) \right. \\ \left. + (1 - \nu) \frac{d}{ds} (\partial_1^2 u_n n_1 n_2 - \partial_{12} u_n (n_1^2 - n_2^2) - \partial_2^2 u_n n_1 n_2) \right] \frac{\partial (R_1 - R_2)}{\partial t} \, d\gamma, \\ = 0, \quad \text{par définition des relèvements.}$$

La forme linéaire  $u \mapsto \int_{\Omega} \Delta^2 u (R_1 - R_2) \, dx - a(u, R_1 - R_2)$  est continue sur  $H^2(\Delta^2, \Omega)$ .

En effet d'après la continuité de la forme bilinéaire  $a(u, v)$  sur  $H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$  on a

$$(1.8) \quad \left| \int_{\Omega} \Delta^2 u (R_1 - R_2) \, dx - a(u, R_1 - R_2) \right| \leq \left( \|u\|_{2,\Omega} + \|\Delta^2 u\|_{0,\Omega} \right) \|R_1 - R_2\|_{2,\Omega} \\ \leq \sqrt{2} \left( \|u\|_{2,\Omega}^2 + \|\Delta^2 u\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|R_1 - R_2\|_{2,\Omega} \\ \leq \sqrt{2} \|u\|_{H^2(\Delta^2, \Omega)} \|R_1 - R_2\|_{2,\Omega}.$$

En passant à la limite dans (1.7) on obtient

$$\int_{\Omega} \Delta^2 u (R_1 - R_2) \, dx - a(u, R_1 - R_2) = 0,$$

d'où l'indépendance de la relation (1.6) par rapport au relèvement  $R$  choisi.

D'autre part, de (1.8) on a l'estimation

$$\langle MT(u), (g, h) \rangle \leq \sqrt{2} \|u\|_{H^2(\Delta^2, \Omega)} \|R\|_{2,\Omega},$$

l'application relèvement :  $(g, h) \mapsto R$  étant linéaire continue de  $H(\Gamma)$  dans  $H^2(\Omega)$ ,  $MT(u)$  est une application linéaire continue sur  $H(\Gamma)$ .

### 1.1.4 Inégalités de Hardy

Suivant [24], pour un nombre réel  $p > 1$  et un nombre réel arbitraire  $\alpha$ , on désigne par  $L_{p,\alpha}(\mathbb{R}_+)$  l'espace des fonctions mesurables  $u$  définies sur  $\mathbb{R}_+$  telles que

$$\|u\|_{L_{p,\alpha}(\mathbb{R}_+)}^p := \int_0^{+\infty} |u(t)t^\alpha|^p dt < +\infty.$$

$L_{p,\alpha}(\mathbb{R}_+)$  est un espace de Banach pour la norme précédente  $\|\cdot\|_{L_{p,\alpha}(\mathbb{R}_+)}$ .

On définit maintenant deux opérateurs linéaires  $H$  et  $L$  comme suit

$$(Hu)(t) = \frac{1}{t} \int_0^t u(s) ds,$$

$$(Lu)(t) = \frac{1}{t} \int_t^{+\infty} u(s) ds.$$

Les inégalités de Hardy se résument dans le théorème suivant

**Théorème 1.1.14**  *$H$  est un opérateur linéaire continu dans  $L_{p,\alpha}(\mathbb{R}_+)$  ssi  $\alpha + \frac{1}{p} < 1$ ; alors que  $L$  est un opérateur linéaire continu dans  $L_{p,\alpha}(\mathbb{R}_+)$  ssi  $\alpha + \frac{1}{p} > 1$ . Dans les deux cas, leur normes sont bornées par  $|\alpha + \frac{1}{p} - 1|^{-1}$ .*

### 1.1.5 Théorème de Mikhlin

Avant d'énoncer ce théorème, on rappelle la définition de la **transformée de Fourier** d'une fonction  $f$

**Définition 1.1.15** *Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . La transformée de Fourier  $\hat{f}$  de  $f$  est une fonction bornée de  $\mathbb{R}^n$  définie par*

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,\tau)} f(\tau) d\tau \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Ici  $(x, \tau)$  désigne le produit scalaire euclidien dans  $\mathbb{R}^n$ . La **transformée de Fourier inverse**  $\check{f}$  est définie par

$$\check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x,\tau)} f(\tau) d\tau \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

**Définition 1.1.16** *Soit  $m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction bornée et mesurable. Alors  $m$  est appelée  **$L^p$ -multiplicateur** ( $1 \leq p \leq \infty$ ) si pour tout  $f \in L^2 \cap L^p$ , la fonction  $\left(m \hat{f}\right)^\vee$  appartient à  $L^p$ , et si l'opérateur*

$$T_m : L^2 \cap L^p \subset L^p \rightarrow L^p$$

$$f \mapsto T_m f = \left(m \hat{f}\right)^\vee$$

est continu, i.e. il existe une constante  $A > 0$  telle que

$$\|T_m f\|_p \leq A \|f\|_p \quad \text{pour tout } f \in L^2 \cap L^p.$$

Notons que si cette inégalité a lieu et si  $1 \leq p < \infty$ , alors  $T_m$  admet un prolongement borné unique à  $L^p$ .

**Théorème 1.1.17 (Mikhlin)** Soit  $m \in \mathbb{C}^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{C})$ , avec  $k$  entier tel que  $k > \frac{n}{2}$ . Supposons qu'il existe une constante  $A$  telle que

$$|D^\alpha m(x)| \leq A|x|^{-|\alpha|} \quad (|\alpha| \leq k).$$

Alors  $m$  est un  $L^p$ -multiplicateur pour tout  $1 < p < \infty$ , i.e. il existe une constante  $C_p > 0$  (qui dépend seulement de  $n$  et de  $p$ ) telle que

$$\|T_m f\|_p \leq C_p A \|f\|_p \quad \text{pour tout } f \in L^p.$$

Pour la preuve de ce théorème, on réfère à [48].

## 1.2 Espaces d'interpolation

Le long de ce paragraphe, on désigne par  $E$  un espace de Banach complexe. On note  $A$  un opérateur linéaire fermé dans  $E$ , de domaine  $D_A$ . On note  $\sigma_A$  le spectre de  $A$  et  $\rho_A$  l'ensemble résolvant de  $A$ .

**Définition 1.2.1** L'opérateur  $A$  est admissible dans la direction de  $\theta$  si  $\rho_A$  contient le rayon  $\arg \lambda = \theta$  dans le plan complexe et il existe une constante  $C_A(\theta)$  telle que

$$|(A - \lambda)^{-1}|_{E \rightarrow E} \leq C_A(\theta) |\lambda|^{-1}$$

pour  $\arg \lambda = \theta$ .

**Remarque 1.2.2** L'ensemble des  $\theta$  dans la direction desquels  $A$  est admissible, est ouvert dans  $\mathbb{R}$ .

Pour  $1 \leq q < +\infty$ , on note  $L_*^q$  l'espace des fonctions numériques (complexes) mesurables et de puissance  $q$  intégrable dans  $(0, +\infty)$  muni de la mesure (de Haar)  $\frac{dt}{t}$ .

**Définition 1.2.3** On suppose que  $A$  est admissible dans la direction  $\theta$ , alors pour  $0 < s < 1$  et  $1 \leq q < +\infty$ , on désigne par  $D_A(s, q)$  le sous-espace vectoriel de  $E$  formé des  $x \in E$  tels que  $|t^s A(A - te^{i\theta})^{-1}x|_E \in L_*^q$ , muni de la norme naturelle.

**Remarque 1.2.4** Cette définition est indépendante du choix de  $\theta$  dans la direction duquel  $A$  est admissible (à une équivalence de normes près).

Les inclusions suivantes sont évidentes

$$D_A \subset D_A(s, q) \subset E \quad (0 < s < 1; 1 \leq q < +\infty).$$

**Proposition 1.2.5** On suppose que  $A$  est admissible dans la direction  $\theta$ , alors  $D_A$  est dense dans  $D_A(s, q)$  pour  $0 < s < 1; 1 \leq q < +\infty$ .

On rappelle ici la définition des espaces d'interpolation et quelques propriétés qui nous seront utiles au chapitre 4

**Définition 1.2.6** Soit  $X$  et  $Y$  un couple d'espaces de Banach avec  $X \subset Y$ , on désigne par  $(X, Y)_{\theta, p}$  avec  $0 < \theta < 1$  et  $1 \leq p < +\infty$ , le sous-espace de  $Y$  formé des  $a$  qui peuvent s'écrire

$$a = x(t) + y(t) \quad (t > 0),$$

où  $x$  et  $y$  sont deux fonctions mesurables à valeurs dans  $X$  et  $Y$  respectivement et telles que

$$t^{-\theta}|x(t)|_X \in L^p_{\star}, \quad t^{1-\theta}|y(t)|_Y \in L^p_{\star},$$

l'espace  $(X, Y)_{\theta, p}$  est muni de la norme naturelle.

**Proposition 1.2.7** Pour  $0 < \theta < 1$ ,  $1 \leq p < +\infty$ ,  $X$  est dense dans  $(X, Y)_{\theta, p}$ .

**Proposition 1.2.8** Soit  $A$  un opérateur fermé dans  $E$  espace de Banach, on suppose que  $A$  est admissible dans une direction, alors  $D_A$  étant muni de la norme du graphe, on a

$$(D_A, E)_{\theta, q} = D_A(s, q),$$

avec  $s = 1 - \theta$ ,  $0 < \theta < 1$ ;  $1 \leq q < +\infty$ .

**Proposition 1.2.9** Pour tout  $u \in X$ , on a

$$\|u\|_{(X, Y)_{\theta, p}} \leq C \|u\|_X^{1-\theta} \|u\|_Y^{\theta}.$$

Voici une caractérisation de l'espace de Sobolev  $W^{s, p}(\Omega)$  en terme d'espaces d'interpolation

$$(1.9) \quad W^{s, p}(\Omega) = [W^{2, p}(\Omega), L^p(\Omega)]_{\theta, p}, \quad 2(1 - \theta) = s, \quad 0 < \theta < 1.$$

Pour les démonstrations des résultats énoncés dans cette section, voir [23, 48].

## 1.3 Eléments d'analyse fonctionnelle

### 1.3.1 Opérateurs linéaires

Tout au long de cette section,  $(X, \|\cdot\|)$  désigne un espace de Banach complexe. Un **opérateur** dans  $X$  est une application linéaire

$$A : D(A) \subset X \rightarrow X$$

à domaine et image contenus dans  $X$ .  $D(A)$  désigne le **domaine** de  $A$  et  $R(A)$  l'**image** de  $A$ . Le sous-espace

$$\ker A = \{\phi \in D(A) : A\phi = 0\}$$

est appelé le **noyau** de  $A$ .

Dans la section 4.4, on aura besoin du lemme suivant

**Lemme 1.3.1 (Peetre)** Soient  $E, F, G$  trois espaces de Banach tels que  $E$  s'injecte compactement dans  $G$ . Si  $A$  est un opérateur borné de  $E$  dans  $F$ , alors les assertions suivantes sont équivalentes

$\ker A$  est à dimension finie et  $R(A)$  est fermé dans  $F$ .

$$\exists C > 0, \forall u \in E : \|u\|_E \leq C \{\|Au\|_F + \|u\|_G\}.$$

Pour la preuve, voir par exemple [42]

Etant donné deux opérateurs  $A$  et  $B$  dans  $X$ , l'opérateur somme  $A + B$  de domaine  $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$  est défini par

$$(A + B)\phi = A\phi + B\phi \text{ pour } \phi \in D(A) \cap D(B).$$

En particulier, si  $z \in \mathbb{C}$ , on désigne par  $z + A$  l'opérateur  $zI + A$ , où  $I$  est l'opérateur identité dans  $X$ .

Si  $A$  est injectif, l'opérateur  $A^{-1}$  à domaine  $D(A^{-1}) = R(A)$  et qui associe à tout élément  $\phi \in D(A^{-1})$ , l'unique élément  $\eta \in D(A)$  tel que  $A\eta = \phi$  est appelé l'opérateur inverse de  $A$ .

On notera par  $\mathcal{L}(X)$  l'espace des opérateurs linéaires bornés définis de  $X$  dans  $X$ . On rappelle qu'un opérateur linéaire  $A$  est dit **borné** s'il est continu et défini sur  $X$ . L'espace  $\mathcal{L}(X)$ , muni de la norme

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup \{\|A\phi\| : \phi \in X : \|\phi\| = 1\}$$

est un espace de Banach.

Une classe importante d'opérateurs bornés et celle des opérateurs compacts. Un opérateur borné  $A$  est dit **compact** si l'image  $(Au_n)$  de toute suite bornée  $(u_n)$  de  $X$  contient une sous suite de Cauchy.

On dit que  $A$  est fermé si son **graphe**

$$G(A) = \{(\phi, A\phi) : \phi \in D(A)\}$$

est fermé dans l'espace  $X \times X$ .

Etant donné un opérateur  $A$ , la **norme du graphe** sur  $D(A)$  est définie par

$$\|\phi\| + \|A\phi\| \quad (\phi \in D(A)).$$

Si  $A$  est **fermé**, alors  $D(A)$  muni de la norme du graphe est un espace de Banach.

Soit  $A$  et  $B$  deux opérateurs dans  $X$ . La notation  $A \subset B$  signifie que l'opérateur  $B$  **prolonge**  $A$ , i.e.  $D(A) \subset D(B)$  et pour tout  $\phi \in D(A)$ ,  $A\phi = B\phi$ .

Un opérateur  $A$  est dit **fermable** s'il existe un opérateur fermé  $B$  tel que  $A \subset B$ . Si  $A$  est fermable et si la suite  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$  vérifie

$$(1.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = 0 \text{ et que } \lim_{n \rightarrow \infty} A\phi_n = \psi,$$

alors  $\psi = 0$ . L'inverse est aussi vrai. Par conséquent, s'il existe une suite  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $D(A)$  telle que (1.10) ait lieu, alors il est possible de définir un opérateur  $\bar{A}$  (appelé **fermeture** de  $A$ ) tel que

$$G(\bar{A}) = \overline{G(A)}.$$

Etant donné un opérateur  $A$ , on désigne par  $\rho(A)$  l'**ensemble résolvant** de  $A$ , i.e.

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \text{ est bijectif et } (\lambda - A)^{-1} \text{ est borné}\}.$$

L'opérateur  $(\lambda - A)^{-1}$ , qu'on peut aussi noter  $R_\lambda(A)$ , est appelé l'**opérateur résolvant** ou **résolvante** de  $A$ .

Etant donné  $\lambda, \mu \in \rho(A)$  on a l'**identité de la résolvante** suivante

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}$$

Si  $\lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  et si  $A \in \mathcal{L}(X)$  vérifie  $|\lambda| \|A\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ , alors la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n \text{ (série de Neumann)}$$

est convergente dans  $\mathcal{L}(X)$  et sa somme est égale à  $(\lambda - A)^{-1}$ . On déduit que  $\rho(A)$  est ouvert. On désigne par  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$  le **spectre** de  $A$ . Par conséquent  $\lambda \in \sigma(A)$  si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée

(i) L'opérateur  $\lambda - A$  n'est pas injectif. Dans ce cas,  $\lambda$  est appelée **valeur propre** de  $A$ . Les vecteurs  $x \in \ker(\lambda - A), x \neq 0$ , sont appelés **vecteurs propres** correspondant à la valeur propre  $\lambda$ . L'ensemble des valeurs propres est appelé **spectre ponctuel**  $P_\sigma(A)$  de  $A$ .

(ii) L'opérateur  $\lambda - A$  est injectif mais  $R(\lambda - A)$  n'est pas dense. Ces valeurs de  $\lambda$  constituent le **spectre résiduel**  $R_\sigma(A)$  de  $A$ .

(iii) L'opérateur  $\lambda - A$  est injectif et  $R(\lambda - A)$  est un sous espace dense propre de  $X$ . Ces nombres complexes  $\lambda$  constituent le **spectre continu**  $C_\sigma(A)$  de  $A$ .

**Théorème 1.3.2** *Soit  $A$  un opérateur fermé dans  $X$  tel que la résolvante existe et est compacte pour un certain  $\lambda$ . Alors le spectre de  $A$  se constitue entièrement de valeurs propres isolées de multiplicité finie.*

Si  $X$  est un espace normé,  $X'$  désigne l'**espace topologique dual** de  $X$ ; i.e.  $X'$  est l'ensemble des formes linéaires continues

$$\begin{aligned} \phi^* : X &\rightarrow \mathbb{C} \\ \phi &\mapsto \langle \phi^*, \phi \rangle. \end{aligned}$$

L'application de  $X'$  dans  $\mathbb{R}_+$  définie par

$$\|\phi^*\| = \sup\{|\langle \phi^*, \phi \rangle| : \phi \in X : \|\phi\| = 1\}$$

est une norme dans  $X'$  et si  $X$  est un espace de Banach, alors  $X'$  est aussi un espace de Banach. Si  $A$  est défini à domaine dense, alors le domaine

$$D(A^*) = \{\phi^* \in X' : \exists \eta^* \in X' : \langle \phi^*, A\phi \rangle = \langle \eta^*, \phi \rangle \text{ pour tout } \phi \in D(A)\}$$

l'**opérateur adjoint** est défini par

$$A^* \phi^* = \eta^* \text{ pour } \phi^* \in D(A^*).$$

Si  $A \in \mathcal{L}(X)$ , alors  $A^* \in \mathcal{L}(X')$  et  $\|A^*\|_{\mathcal{L}(X')} = \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$ .

Si  $A = A^*$ , on dit que  $A$  est un opérateur **autoadjoint**.

**Définition 1.3.3** *On dit que  $A$  est **non négatif** si  $\rho(A) \supset ]-\infty, 0[$  et*

$$M = \sup_{\lambda > 0} \{\|\lambda(\lambda + A)^{-1}\|\} < \infty.$$

La constante  $M$  est appelée la **constante de non négativité** de  $A$ . On notera  $\mathcal{M}(X)$  l'ensemble des opérateurs non négatifs définis dans  $X$ .

**Théorème 1.3.4** Soit  $A \in \mathcal{M}(X)$ , si  $X$  est réflexif alors on a  $D(A)$  est dense et  $A$  est bijectif ssi  $R(A)$  est dense.

**Définition 1.3.5** On dit qu'un opérateur fermé  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  est **sectoriel** de type  $w$  avec  $w \in ]0, \pi[$  si

(i)  $\sigma(A)$  est contenu dans la fermeture du secteur

$$S_w = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < w\}.$$

(ii) De plus, pour tout  $w' \in ]w, \pi[$ , la résolvante de  $A$  vérifie

$$\sup\{\|z(z - A)^{-1}\| : z \in \mathbb{C} \setminus \bar{S}_{w'}\} < \infty.$$

On désigne par  $S_w(x)$  l'ensemble des opérateurs sectoriels de type  $w$  et par

$$S(X) = \cup_{w \in ]0, \pi[} S_w(X)$$

l'ensemble des opérateurs sectoriels définis dans  $X$ .

Soit  $A \in S(X)$ , la valeur

$$w_A = \{w \in ]0, \pi[, A \in S_w(X)\}$$

est appelée **angle spectral** de  $A$ .

### 1.3.2 semi-groupes

**Définition 1.3.6** On appelle **Semi-groupe**  $X$  une famille d'opérateurs linéaires bornés  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  définis sur  $X$  et vérifiant

(i)  $T(0) = I$ .

(ii)  $T(t + s) = T(t)T(s)$  ( $t, s \geq 0$ ).

On dit que le semi-groupe  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  est un **semi-groupe fortement continu** ou simplement un  $C_0$  semi-groupe si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)\phi = \phi \quad (\phi \in X).$$

S'il existe une constante positive  $M$  telle que

$$\|T(t)\| \leq M \quad (t \geq 0),$$

on dit que le  $C_0$  semi-groupe est **equicontinu**.

Si de plus,  $M = 1$  le semi-groupe est appelé **semi-groupe de contractions**.

**Définition 1.3.7** L'opérateur linéaire  $A$  défini sur le domaine

$$D(A) = \left\{ \phi \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)\phi - \phi}{t} \text{ existe} \right\}$$

par

$$A\phi = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)\phi - \phi}{t} = \frac{d^+ T(t)\phi}{dt} \Big|_{t=0} \quad (\phi \in D(A))$$

est appelé **générateur infinitésimal du semi-groupe**  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ .



**Théorème 1.3.8 (Hille-Yosida)** Un opérateur linéaire  $A$  est le générateur infinitésimal d'un  $C_0$  équicontinu semi-groupe  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  vérifiant  $\|T(t)\| \leq M$  si et seulement si

(i)  $A$  est fermé et  $D(A)$  est dense dans  $X$ .

(ii)  $]0, \infty[ \subset \rho(A)$  et

$$\|(\lambda - A)^{-n}\| \leq \frac{M}{\lambda^n} \quad (\lambda > 0, n \in \mathbb{N}).$$

Si  $M = 1$  (semi-groupe de contractions), alors (ii) peut être remplacée par

(ii)'  $]0, \infty[ \subset \rho(A)$  et

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{\lambda} \quad (\lambda > 0).$$

**Théorème 1.3.9** Si  $A$  est le générateur infinitésimal d'un  $C_0$  semi-groupe  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  et si  $\lambda > 0$ , l'opérateur

$$A_\lambda = \lambda A (\lambda - A)^{-1}$$

est appelé l'**approximation de Yosida** de  $A$ . Alors

$$T(t)\phi = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda} \phi \quad (\phi \in X).$$

**Définition 1.3.10** Un  $C_0$  semi-groupe  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ , sur un espace de Banach  $X$ , est appelé un **semi-groupe différentiable** si pour tout  $\phi \in X$ , l'application

$$\begin{aligned} ]0, \infty[ &\rightarrow X \\ t &\rightarrow T(t)\phi \end{aligned}$$

est différentiable. De manière équivalente, si  $R(T(t)) \subset D(A)$  pour tout  $t < 0$ .

**Définition 1.3.11** Soit  $0 < \tau < \pi/2$ . On dit que la famille d'opérateurs bornés

$$\{T(z) : z \in S_\tau\}$$

est un **semi-groupe analytique** d'amplitude  $\tau$  si

(i)  $T(0) = I$  et  $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$  ( $z_1, z_2 \in S_\tau$ ).

(ii)  $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in S_\tau}} T(z)\phi = \phi$  ( $\phi \in X$ ).

(iii) La fonction  $z \rightarrow T(z)$  est analytique de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathcal{L}(X)$ .

Le semi-groupe est dit **équicontinu** si

(iv) Etant donné  $0 < \epsilon \leq \tau$ , l'opérateur  $T(z)$  est uniformément borné pour  $z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| \leq \tau - \epsilon$ .

**Théorème 1.3.12** *Soit  $A$  un opérateur linéaire sur un espace de Banach  $X$ . Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i)  $-A$  génère un  $C_0$  semi-groupe différentiable équicontinu  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  tel que

$$\sup_{t > 0} t \|AT(t)\| = C < \infty.$$

(ii) Il existe un nombre réel  $\tau : 0 < \tau \leq \pi/2$  tel que l'opérateur  $-A$  génère un  $C_0$  semi-groupe analytique équicontinu d'amplitude  $\tau$ .

(iii)  $A$  est défini à domaine dense et il existe un nombre réel  $\tau : 0 < \tau \leq \pi/2$  tel que  $A$  est sectoriel, à angle spectral  $\leq \pi/2 - \tau$ .

## 1.4 Opérateurs maximaux monotones dans un espace de Hilbert

Cette section est un rappel de quelques notions qui nous seront utiles au chapitre 3, où l'on étudiera des problèmes de transmission pour l'opérateur de Laplace avec des contraintes unilatérales sur le bord et sur l'interface.

Soit  $H$  un espace de Hilbert réel. Soit  $A$  une application de  $H$  dans  $H$  pouvant être à valeurs multiples, i. e. à chaque  $u \in H$  on associe un sous ensemble  $Au \subset H$  (peut être vide). On pose  $D(A) = \{u \in H; Au \neq \emptyset\}$ ,  $R(A) = \cup_{u \in H} Au$ ,  $(Au)^{-1} = \{f \in H; u \in Af\}$ ,  $(\lambda A)u = \{\lambda f; f \in Au\}$ ,  $(A_1 + A_2)u = \{f_1 + f_2; f_1 \in A_1u, f_2 \in A_2u\}$ . On dit que  $A$  est un **opérateur monotone** (ou un **graphe monotone**) s'il vérifie,

$$(1.11) \quad (f_1 - f_2, u_1 - u_2) \geq 0 \quad \forall u_1, u_2 \in D(A), \forall f_1 \in Au_1, \forall f_2 \in Au_2.$$

La propriété suivante est clairement équivalente à (1.11)

$$(1.12) \quad |(u_1 + \lambda f_1) - (u_2 + \lambda f_2)| \geq |u_1 - u_2| \quad \forall \lambda \geq 0, \forall u_1, u_2 \in D(A), \\ \forall f_1 \in Au_1, \forall f_2 \in Au_2.$$

L'inégalité (1.12) signifie seulement que  $(I + \lambda A)^{-1}$ , chaque fois qu'il est défini, est une contraction dans  $H$ .

On dit qu'un opérateur monotone  $A$  est **maximal monotone** s'il est maximal au sens de l'inclusion des graphes, i. e., s'il n'admet pas de prolongement monotone propre.

**Théorème 1.4.1** *Soit  $A$  un opérateur monotone. Alors  $A$  est maximal monotone si et seulement si  $R(I + A) = H$  (resp.  $R(I + \lambda A) = H$  pour tout  $\lambda > 0$ ).*

Il est facile de vérifier qu'un opérateur monotone, à valeur simple, continu et partout défini, est un opérateur maximal monotone.

Une importante classe d'opérateurs monotones est celle des opérateurs qui sont gradients de fonctions convexes. Plus précisément, soit  $\phi$  une fonction convexe semi-continue inférieurement (s. c. i.) de  $H$  dans  $] -\infty, +\infty]$ . On suppose que  $\phi$  n'est pas identiquement égale à  $\infty$ , et soit

$$D(\phi) = \{u \in H; \phi(u) < +\infty\}.$$

Pour  $u \in D(\phi)$ , l'ensemble

$$\partial\phi(u) = \{f \in H; \phi(v) - \phi(u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in D(\phi)\}$$

est appelé **sous-différentiel** de  $\phi$  en  $u$ . Notons que  $\partial\phi(u)$  est fermé et convexe, et peut être vide.

**Théorème 1.4.2** *L'opérateur  $u \mapsto \partial\phi(u)$  est maximal monotone.*

L'approximation de Yosida permet d'approcher les opérateurs maximaux monotones par des opérateurs monotones Lipschitz continus. Soit  $A$  un opérateur maximal monotone; pour  $\lambda > 0$ ,  $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$  est une contraction définie sur  $H$ ; et est appelée résolvante de  $A$ . L'approximation de Yosida de  $A$  est définie par

$$A_\lambda u = \frac{u - J_\lambda u}{\lambda}$$

(notons que  $A_\lambda u \in AJ_\lambda u$ ).  $A_\lambda$  est monotone Lipschitz continue (de constante de Lipschitz  $1/\lambda$ ). Pour plus de détails, voir [8].

### 1.4.1 Problèmes linéaires avec contraintes unilatérales sur le bord

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné de frontière  $\Gamma$  Lipschitzienne. On considère l'opérateur linéaire elliptique du second ordre

$$Lu = - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + cu,$$

avec

$$\sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq a |\xi|^2 \quad \text{p. p. } x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n; \quad a > 0;$$

$$a_{ij}, c \in L^\infty(\Omega), \quad c \geq 0 \quad \text{p. p. sur } \Omega \quad \text{et} \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

On considère des problèmes de la forme  $Lu = f$ , sur  $\Omega$  avec des contraintes unilatérales sur  $\Gamma$  sous forme d'une relation non linéaire entre  $u$  et sa dérivée normale  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  :

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta(u).$$

Soit  $\phi$  une fonction convexe s. c. i. sur  $L^2(\Gamma)$  à valeurs dans  $] -\infty, +\infty]$ . On associe à  $\phi$  le graphe maximal monotone  $\partial\phi$  dans  $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ . On suppose que la restriction de  $\phi$  à  $H^{1/2}(\Gamma)$  n'est pas identiquement égale à  $+\infty$  et on pose  $\tilde{\phi} = \phi|_{H^{1/2}(\Gamma)}$ .  $\partial\tilde{\phi}$  est un graphe maximal monotone dans  $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ . Soit  $a(u, v)$  la forme bilinéaire sur  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  associée à  $L$ . On suppose que

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V, \quad \alpha > 0.$$

où  $V = H^1(\Omega)$ .

**Théorème 1.4.3** *Pour tout  $f \in L^2(\Omega)$ , il existe  $u \in H^1(\Omega)$  unique solution de l'inéquation variationnelle*

$$a(u, v - u) + \phi(v|_\Gamma) + \phi(u|_\Gamma) \geq \int_\Omega f(v - u) dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

De plus  $u$  est caractérisé par les conditions

$$(1.13) \quad \begin{cases} Lu = f \text{ au sens de } D'(\Omega) \\ -\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \partial \tilde{\phi}(u|_{\Gamma}), \end{cases}$$

où  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ , est la dérivée conormale de  $u$  associée à  $L$ , i.e.

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n, x_j),$$

$n$  étant la normale extérieure à  $\Omega$ .

**Remarque 1.4.4** Si  $u \in H^1(\Omega)$  et  $Lu \in L^2(\Omega)$  alors  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  est défini comme élément de  $H^{-1/2}(\Gamma)$ . D'autre part  $\partial \tilde{\phi}(u|_{\Gamma})$  est un sous-ensemble de  $H^{-1/2}(\Gamma)$  de sorte que (1.13) a bien un sens.

Pour la preuve du théorème précédent, voir [7].

# Chapitre 2

## Coefficients des singularités du problème biharmonique de type Neumann : Cas de la fissure

### 2.1 Introduction

Il est bien connu que les séries trigonométriques constituent un outil puissant pour l'étude des solutions de problèmes aux limites pour l'équation de Laplace dans un secteur. Il a été mis en évidence des séries trigonométriques d'un type nouveau pour les problèmes biharmoniques. D'après les résultats de [19], le problème de Dirichlet pour l'équation biharmonique

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0 & \text{dans } V \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{pour } \theta = 0, \omega, \end{cases}$$

où  $V$  est le secteur plan borné d'ouverture  $\omega \leq 2\pi$  défini par

$$V = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2; 0 < r < \rho, 0 < \theta < \omega\}, \quad \rho > 0,$$

admet une solution unique développable comme suit

$$(2.1) \quad u(r, \theta) = \sum_{\alpha \in E} c_\alpha r^\alpha \phi_\alpha(\theta),$$

où les  $\phi_\alpha$  sont des fonctions biharmoniques avec  $\alpha$  solution de l'équation transcendante

$$\sin^2(\alpha - 1)\omega = (\alpha - 1)^2 \sin^2 \omega, \quad \Re \alpha > 1.$$

Dans sa thèse, [45] s'est intéressé au calcul des coefficients  $c_\alpha$ , en particulier pour le cas de la fissure. Il a établi grâce à la formule de Green pour le bilaplacien dans le domaine  $V$ , des relations analogues à celle de l'orthogonalité lui permettant de calculer les coefficients du développement de la solution.

Ici, on considère le secteur plan borné  $V$  et on note  $\Sigma$  la partie circulaire de la frontière de  $V$  définie par

$$\Sigma = \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in \mathbb{R}^2; 0 < \theta < \omega\}$$

On s'intéresse à l'étude des fonctions  $u$  appartenant à l'espace de Sobolev  $H^2(V)$ , solutions de

$$(2.2) \quad \begin{cases} \Delta^2 u = 0 & \text{dans } V \\ Mu = Tu = 0 & \text{pour } \theta = 0, \omega. \end{cases}$$

Nous cherchons les fonctions  $u_\alpha \in H^2(V)$ , solutions du problème (2.2) qui s'écrivent sous la forme

$$u_\alpha(r, \theta) = r^\alpha \phi_\alpha(\theta) \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{C}.$$

Ces fonctions sont telles que  $\phi_\alpha$  est solution du problème (2.4)-(2.6). De plus la condition  $u_\alpha \in H^2(V)$  entraîne que  $\Re\alpha > 1$ . Nous écrivons la solution  $u$  du problème (2.2) sous la forme (2.1), ici  $E$  est l'ensemble des solutions de l'équation en  $\alpha$

$$(2.3) \quad \sin^2(\alpha - 1)\omega = \left(\frac{1 - \nu}{3 + \nu}\right)^2 (\alpha - 1)^2 \sin^2 \omega, \quad \Re\alpha > 1.$$

Pour l'étude des solutions de (2.3), voir par exemple, [6, 27].

Nous allons calculer les coefficients  $c_\alpha$  du développement (2.1). Pour les conditions de Dirichlet (i.e. le cas d'une plaque à bord encastré), il a été établi dans [45], grâce à la formule de Green

$$\int_V (v \Delta^2 u - u \Delta^2 v) dx = \int_\Gamma \left\{ \left( \frac{\partial \Delta u}{\partial n} v + \Delta u \frac{\partial v}{\partial n} \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial n} v + u \frac{\partial \Delta v}{\partial n} \right) \right\} d\sigma,$$

une relation analogue à celle de l'orthogonalité entre les fonctions  $\phi_\alpha$  et  $\phi_\beta$  permettant de calculer les coefficients  $c_\beta$ .

Nous suivrons la même démarche avec des conditions de Neumann. Ceci nécessite l'écriture, dans le domaine  $V$  d'une formule de Green appropriée. Grâce à cette formule, nous établirons une relation de biorthogonalité entre les fonctions  $\phi_\alpha$  et  $\phi_\beta$  qui se réduit sous une certaine condition à la relation simple obtenue par O. Tcha-Kondor, ce qui nous permet de calculer les coefficients  $c_\beta$  dans le cas particulier de la fissure ( $\omega = 2\pi$ ).

## 2.2 Séparation des variables

En remplaçant  $u$  par  $r^\alpha \phi(\theta)$  dans le problème (2.2), on obtient le problème aux limites suivant

$$(2.4) \quad \phi_\alpha^4(\theta) + [\alpha^2 + (\alpha - 2) + (\alpha - 2)^2] \phi_\alpha''(\theta) + \alpha^2(\alpha - 2)^2 \phi_\alpha(\theta) = 0,$$

$$(2.5) \quad [\nu\alpha^2 + (1 - \nu)\alpha] \phi_\alpha + \phi_\alpha'' = 0, \theta = 0, \theta = \omega,$$

$$(2.6) \quad [(2 - \nu)\alpha^2 - 3(1 - \nu)\alpha + 2(1 - \nu)] \phi_\alpha' + \phi_\alpha^{(3)} = 0, \theta = 0, \theta = \omega,$$

La relation similaire à l'orthogonalité pour l'opérateur biharmonique avec des conditions de Neumann est donnée par le théorème suivant

**Théorème 2.2.1** Soit  $\phi_\alpha$  et  $\phi_\beta$  deux solutions de (2.4) avec  $\alpha$  et  $\beta$  solutions de (2.3). Alors pour  $\alpha \neq \bar{\beta}$ , on a

$$(2.7) \quad \begin{aligned} [\phi_\alpha, \phi_\beta] &= \int_0^\omega \left\{ [(\alpha^2 - 2\alpha)\phi_\alpha - \frac{\nu(\alpha+\bar{\beta})+(3-\nu)-2\alpha}{\alpha-\bar{\beta}}\phi_\alpha'']\bar{\phi}_\beta \right. \\ &\quad \left. + [(\bar{\beta}^2 - 2\bar{\beta})\bar{\phi}_\beta + \frac{\nu(\alpha+\bar{\beta})+(3-\nu)-2\bar{\beta}}{\alpha-\bar{\beta}}\bar{\phi}_\beta'']\phi_\alpha \right\} d\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Preuve:** On utilise la formule de Green suivante

$$(2.8) \quad \int_V (v \Delta^2 u - u \Delta^2 v) dx = \int_\Gamma \left\{ \left( u T v + \frac{\partial u}{\partial n} M v \right) - \left( v T u + \frac{\partial v}{\partial n} M u \right) \right\} d\sigma$$

( $\Gamma$  est la frontière de  $V$ ). Pour deux fonctions  $u, v$  solutions de (2.2), la formule de Green s'écrit alors sous la forme suivante

$$(2.9) \quad \int_\Sigma \left\{ \left( u T v + \frac{\partial u}{\partial n} M v \right) - \left( v T u + \frac{\partial v}{\partial n} M u \right) \right\} d\sigma = 0.$$

Sur  $\Sigma$ , on a pour la fonction  $u_\alpha = r^\alpha \phi_\alpha$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial n} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} = \alpha r^{\alpha-1} \phi_\alpha.$$

$$(2.10) \quad M u_\alpha = r^{\alpha-2} \{ [\alpha^2 - (1-\nu)\alpha] \phi_\alpha + \nu \phi_\alpha'' \}.$$

$$T u_\alpha = r^{\alpha-3} \{ -\alpha^2 (\alpha-2) \phi_\alpha + [(\nu-2)\alpha + (3-\nu)] \phi_\alpha'' \}.$$

Le théorème résulte de l'application de la formule (2.9) aux fonctions biharmoniques  $u_\alpha = r^\alpha \phi_\alpha$  et  $\bar{u}_\beta = r^{\bar{\beta}} \bar{\phi}_\beta$  et en utilisant (2.10).  $\blacksquare$

**Remarque 2.2.2** Cette relation entre les fonctions  $\phi_\alpha$ , et  $\phi_\beta$  est similaire à celle obtenue quand les fonctions  $\phi_\alpha, \phi_\beta$  vérifient (2.4) avec les conditions aux limites de Dirichlet  $\phi_\alpha = \phi_\alpha' = \phi_\beta = \phi_\beta' = 0$  pour  $\theta = 0$  et  $\theta = \omega$ . Dans ce cas, la relation (2.7) est simplifiée car on a

$$(2.11) \quad \int_0^\omega \phi_\alpha \phi_\beta'' d\theta = \int_0^\omega \phi_\alpha'' \phi_\beta d\theta.$$

**Remarque 2.2.3** Par une double intégration par parties, on obtient

$$(2.12) \quad \int_0^\omega \phi_\alpha \phi_\beta'' d\theta = \int_0^\omega \phi_\alpha'' \phi_\beta d\theta + [\phi_\alpha, \phi_\beta']_0^\omega - [\phi_\alpha', \phi_\beta]_0^\omega.$$

**Corollaire 2.2.4** Soit  $\phi_\alpha$  et  $\phi_\beta$  solutions de (2.4) avec  $\alpha$  et  $\beta$  solutions de (2.3). Si de plus,

$$[\phi_\alpha, \phi_\beta']_0^\omega - [\phi_\alpha', \phi_\beta]_0^\omega = 0.$$

Alors, pour  $\alpha \neq \bar{\beta}$ , on a la relation suivante

$$(2.13) \quad [\phi_\alpha, \phi_\beta] = \int_0^\omega \{ [(\alpha^2 - 2\alpha)\phi_\alpha + \phi_\alpha'']\bar{\phi}_\beta + [(\bar{\beta}^2 - 2\bar{\beta})\bar{\phi}_\beta + \bar{\phi}_\beta'']\phi_\alpha \} d\theta = 0.$$

**Remarque 2.2.5** Pour  $u_\alpha = r^\alpha \phi_\alpha$ , on a

$$(2.14) \quad \Delta u_\alpha - \frac{2}{r} \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} = r^{\alpha-2} [(\alpha^2 - 2\alpha)\phi_\alpha + \phi_\alpha''].$$

Soit  $P$  l'opérateur  $P = \Delta - (2/r)(\partial/\partial r)$ . D'après le corollaire 2.2.4 et la remarque 2.2.5, on déduit le corollaire suivant

**Corollaire 2.2.6** Soient  $u_\alpha = r^\alpha \phi_\alpha(\theta)$ ,  $\bar{u}_\beta = r^{\bar{\beta}} \bar{\phi}_\beta(\theta)$ , deux fonctions telles que  $\phi_\alpha$  et  $\bar{\phi}_\beta$  soient solutions du problème (2.4), avec  $\alpha$  et  $\beta$  solutions de (2.3). Si de plus,

$$[\phi_\alpha, \phi_\beta']_0^\omega - [\phi_\alpha', \phi_\beta]_0^\omega = 0.$$

Alors si  $\alpha \neq \bar{\beta}$ , on a

$$\int_{\Sigma} (Pu_\alpha \bar{u}_\beta + u_\alpha P\bar{u}_\beta) d\sigma = 0.$$

Maintenant, en utilisant ce dernier corollaire, on calcule les coefficients  $c_\alpha$  du développement de la solution de (2.2), particulièrement dans le cas de la fissure ( $\omega = 2\pi$ ), qui est un cas très important de singularité de domaines. La connaissance explicite des racines simplifie manifestement les calculs.

## 2.3 Cas de la fissure

La fissure correspond à  $\omega = 2\pi$ ; si on remplace cette valeur dans (2.3), on trouve que les solutions  $\alpha$  de (2.3) sont les nombres réels  $k/2$ , où  $k \in \mathbb{Z}$ . Dans ce cas, toutes les racines sont de multiplicité 2.

Nous allons représenter  $u$  comme suit

$$u = \sum_{\alpha \in E} c_\alpha u_\alpha + \sum_{\alpha \in E} d_\alpha v_\alpha, \quad E = \left\{ \frac{k}{2}, k > 2 \right\},$$

$$u_\alpha = r^\alpha \varphi_\alpha, \quad v_\alpha = r^\alpha \psi_\alpha$$

$\varphi_\alpha$  sont les solutions paires en  $\theta$

$$\varphi_\alpha(\theta) = r^\alpha \left[ \cos(\alpha - 2)\theta + \frac{4 - (1 - \nu)\alpha}{(1 - \nu)\alpha} \cos \alpha\theta \right],$$

et  $\psi_\alpha$  les solutions impaires en  $\theta$

$$\psi_\alpha(\theta) = r^\alpha \left[ \sin(\alpha - 2)\theta - \frac{4 + (1 - \nu)(\alpha - 2)}{(1 - \nu)\alpha} \sin \alpha\theta \right].$$

Dans ce cas ( $\omega = 2\pi$ ), on a  $\alpha = k/2$ , donc

$$(2.15) \quad \varphi_\alpha'(\omega) = \varphi_\alpha'(0) = 0, \quad \psi_\alpha(\omega) = \psi_\alpha(0) = 0.$$

Ainsi, on a bien :  $[\varphi_\alpha \varphi_\beta]_0^\omega = [\varphi_\alpha \varphi_\beta']_0^\omega = 0$ , et  $[\psi_\alpha' \psi_\beta]_0^\omega = [\psi_\alpha \psi_\beta']_0^\omega = 0$ . Par contre, pour



les fonctions  $\varphi_\alpha, \psi_\beta$  on a :  $[\varphi'_\alpha \psi_\beta]_0^\omega = 0$  mais  $[\varphi_\alpha \psi'_\beta]_0^\omega \neq 0$ . C'est d'ici que provient l'idée de décomposer la solution de (2.2) en ses parties paire et impaire par rapport à  $k$ .

$$u = u_1 + u_2,$$

$$u_i = \sum_{\alpha \in E_i} (c_\alpha u_\alpha + d_\alpha v_\alpha), \quad i = 1, 2,$$

$$E_1 = \{n, n > 1\}, \quad E_2 = \left\{ \frac{2n+1}{2}, 2n > 1 \right\}.$$

## 2.4 Calcul de $c_\beta$ et $d_\beta$

Pour calculer  $c_\beta$  et  $d_\beta$  on considère les intégrales

$$I_1 = \int_{\Sigma} (Pu_1 u_\beta + u_1 Pu_\beta) d\sigma, \quad I_2 = \int_{\Sigma} (Pu_1 v_\beta + u_1 Pv_\beta) d\sigma,$$

$$\text{si } \alpha \in E_1, \text{ alors } \varphi_\alpha(\omega) = \varphi_\alpha(0), \psi'_\alpha(\omega) = \psi'_\alpha(0),$$

$$\text{si } \alpha \in E_2, \text{ alors } \varphi_\alpha(\omega) = -\varphi_\alpha(0), \psi'_\alpha(\omega) = -\psi'_\alpha(0),$$

ces dernières équations avec (2.15) nous permettent d'appliquer le corollaire 2.2.6 au fonctions  $u_\alpha$  et  $u_\beta$  (resp.  $u_\alpha, v_\beta$  et  $v_\alpha, v_\beta$ ), on obtient

$$\int_{\Sigma} (Pu_i u_\beta + u_i Pu_\beta) d\sigma = 2c_\beta \int_{\Sigma} u_\beta Pu_\beta d\sigma + d_\beta \int_{\Sigma} (Pv_\beta u_\beta + v_\beta Pu_\beta) d\sigma = 0,$$

$$\int_{\Sigma} (Pu_i v_\beta + u_i Pv_\beta) d\sigma = c_\beta \int_{\Sigma} (Pu_\beta v_\beta + u_\beta Pv_\beta) d\sigma + 2d_\beta \int_{\Sigma} v_\beta Pv_\beta d\sigma.$$

Des calculs directs nous donnent

$$\int_{\Sigma} (Pu_\beta v_\beta + u_\beta Pv_\beta) d\sigma = 0$$

$$\int_{\Sigma} u_\beta Pu_\beta d\sigma = \frac{2\rho^{2\beta-1}\omega}{(1-\nu)^2\beta} [\beta(1-\nu)(3+\nu) - 8],$$

$$\int_{\Sigma} v_\beta Pv_\beta d\sigma = -\frac{2\rho^{2\beta-1}\omega}{(1-\nu)^2\beta} [(1-\nu)(3+\nu)(\beta-2) + 8].$$

On vient d'établir la proposition suivante

**Proposition 2.4.1** *Soit  $u$  la solution du problème (2.2) écrite sous la forme*

$$u = u_1 + u_2,$$

où

$$u_i = \sum_{\alpha \in E_i} (c_\alpha u_\alpha + d_\alpha v_\alpha).$$

Supposons que la série donnant  $u_i$  est uniformément convergente; alors si  $\beta \in E_i$ ,  $i = 1, 2$ , on a

$$c_\beta = \frac{(1-\nu)^2 \beta \rho^{1-2\beta}}{4\omega [(1-\nu)(3+\nu)\beta - 8]} \int_{\Sigma} (Pu_i u_\beta + u_i Pu_\beta) d\sigma,$$

$$d_\beta = \frac{-(1-\nu)^2 \beta \rho^{1-2\beta}}{4\omega [(1-\nu)(3+\nu)(\beta-2) + 8]} \int_{\Sigma} (Pu_i v_\beta + u_i Pv_\beta) d\sigma.$$

**Remarque 2.4.2** Soit  $V_{\rho_0}$  le sous-secteur

$$V \cap \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2; r < \rho\},$$

et soient  $\zeta \in \tilde{H}^{3/2}(\Sigma)$  la trace de  $u$  sur  $\Sigma$  et  $\chi \in H^{-1/2}$  la trace de  $Pu$  sur  $\Sigma$ . Si  $\zeta$  appartient à l'espace  $H^4(0, \pi)$  et  $\chi$  à  $H^2(0, \pi)$ , alors on a la convergence uniforme de la série dans  $\bar{V}_{\rho_0}$ , (voir [47]).

## 2.5 Indépendance des coefficients

Nous allons montrer que les coefficients  $c_\beta$  (resp.  $d_\beta$ ) du développement de la solution  $u$  du problème (2.2) sont indépendants de  $\rho$ .

On a la proposition suivante

**Proposition 2.5.1** Les coefficients  $c_\beta$  et  $d_\beta$  sont indépendants de  $\rho$ .

**Preuve:** Pour montrer que  $c_\beta$  est indépendant de  $\rho$ , nous allons montrer que sa dérivée par rapport à  $\rho$  est nulle. En observant l'expression de  $c_\beta$  (proposition 2.4.1), il nous suffira de montrer que

$$\gamma_\beta = \rho^{1-2\beta} \int_{\Sigma} (Pu_i u_\beta + u_i Pu_\beta) d\sigma$$

est de dérivée nulle par rapport à  $\rho$ .

Par dérivation par rapport à  $r$ , on a

$$\gamma'_\beta = \int_0^\omega \left\{ \frac{\partial \Delta u_i}{\partial r} r^{2-\beta} \varphi_\beta + \left[ (2-\beta) \Delta u_i - 2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} + (\beta^2 - 2) \frac{1}{r} \frac{\partial u_i}{\partial r} \right] r^{1-\beta} \varphi_\beta \right. \\ \left. + \frac{\partial u_i}{\partial r} r^{-\beta} \varphi''_\beta - \beta u_i r^{-\beta-1} \left[ (\beta^2 - 2\beta) \varphi_\beta + \varphi''_\beta \right] \right\} d\theta.$$

Sur  $\Sigma$  on a

$$\frac{\partial \Delta u_i}{\partial r} = -Tu_i + (1-\nu) \left( \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 u_i}{\partial r \partial \theta^2} \right) \\ (2-\beta) \Delta u_i - 2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} = -\beta Mu_i + [2 - (1-\nu)\beta] \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta^2} \right].$$

En reportant ces formules dans l'expression de  $\gamma'_\beta$ , on obtient

$$\begin{aligned}\gamma'_\beta = & - \int_0^\omega (Mu_i \beta r^{1-\beta} \varphi_\beta + Tu_i r^{2-\beta} \varphi_\beta) d\theta \\ & + \int_0^\omega \left\{ \left( [\beta^2 - (1-\nu)\beta] \varphi_\beta + \varphi_\beta'' \right) \frac{\partial u_i}{\partial r} - (1-\nu) \frac{\partial^3 u_i}{\partial r \partial \theta^2} \varphi_\beta \right\} r^{-\beta} d\theta \\ & + \int_0^\omega \left\{ [2 - (1-\nu)(\beta-1)] \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta^2} \varphi_\beta - \beta u_i \left[ (\beta^2 - 2\beta) \varphi_\beta + \varphi_\beta'' \right] \right\} r^{-1-\beta} d\theta.\end{aligned}$$

Or, par double intégration par parties on vérifie que

$$(2.16) \quad \int_0^\omega \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta^2} \varphi_\beta d\theta = \int_0^\omega u_i \varphi_\beta'' d\theta.$$

$$(2.17) \quad \int_0^\omega \frac{\partial^3 u_i}{\partial r \partial \theta^2} \varphi_\beta d\theta = \int_0^\omega \frac{\partial u_i}{\partial r} \varphi_\beta'' d\theta.$$

En remplaçant (2.16) et (2.17) dans l'expression de  $\gamma'_\beta$  et en mettant  $\rho^{1-2\beta}$  en facteur on obtient

$$\begin{aligned}\gamma'_\beta = & -\rho^{1-2\beta} \int_0^\omega [Mu_i (\beta r^{\beta-1} \varphi_\beta) + Tu_i (r^\beta \varphi_\beta)] \rho d\theta \\ & + \rho^{1-2\beta} \int_0^\omega \left[ \left( [\beta^2 - (1-\nu)\beta] \varphi_\beta + \nu \varphi_\beta'' \right) r^{\beta-2} \right] \frac{\partial u_i}{\partial r} \rho d\theta \\ & + \rho^{1-2\beta} \int_0^\omega \left\{ -\beta^2 (\beta-2) \varphi_\beta + [-(2-\nu)\beta + (3-\nu)] \varphi_\beta'' \right\} r^{\beta-3} u_i \rho d\theta.\end{aligned}$$

En tenant compte de (2.10), dont les expressions apparaissent explicitement dans  $\gamma'_\beta$  on obtient

$$\gamma'_\beta = \rho^{1-2\beta} \left\{ - \int_\Sigma \left( Mu_i \frac{\partial u_\beta}{\partial n} + Tu_i u_\beta \right) d\sigma + \int_\Sigma \left( Mu_\beta \frac{\partial u_i}{\partial n} + Tu_\beta u_i \right) d\sigma \right\} = 0,$$

puisqu'on retombe sur la formule de Green appliquée à  $u_i$  et  $u_\beta$ .

L'indépendance de  $d_\beta$  par rapport à  $\rho$  se fait de façon identique à celle de  $c_\beta$ . ■

## 2.6 Convergence de la série

On écrit  $c_\alpha$  et  $d_\alpha$  sous la forme

$$c_\alpha = I_i \rho^{-\alpha}, \quad d_\alpha = J_i \rho^{-\alpha}.$$

où

$$I_i = \rho \frac{(1-\nu)^2 \alpha}{4\omega [(1-\nu)(3+\nu)\alpha - 8]} \int_{\Sigma} \left\{ P u_i \varphi_{\alpha} + u_i \left[ (\alpha^2 - 2\alpha) \varphi_{\alpha} + \varphi_{\alpha}'' \right] \rho^{-2} \right\} d\sigma,$$

$$J_i = -\rho \frac{(1-\nu)^2 \alpha}{4\omega [(1-\nu)(3+\nu)(\alpha-2) + 8]} \int_{\Sigma} \left\{ P u_i \psi_{\alpha} + u_i \left[ (\alpha^2 - 2\alpha) \psi_{\alpha} + \psi_{\alpha}'' \right] \rho^{-2} \right\} d\sigma.$$

En reportant  $c_{\alpha}$ ,  $d_{\alpha}$  dans l'expression de  $u_i$ , la solution  $u$  de (2.2) s'écrit alors

$$u = u_1 + u_2,$$

$$(2.18) \quad u_i = \sum_{\alpha \in E_i} \left[ \left( \frac{r}{\rho} \right)^{\alpha} I_i \varphi_{\alpha} + \left( \frac{r}{\rho} \right)^{\alpha} J_i \psi_{\alpha} \right].$$

On a le résultat suivant

**Théorème 2.6.1** *La série (2.18) converge pour  $r < \rho$ .*

**Preuve:** Posons

$$N_{i,\alpha} = \int_0^{\omega} \left\{ P u_i \varphi_{\alpha} + u_i \left[ (\alpha^2 - 2\alpha) \varphi_{\alpha} + \varphi_{\alpha}'' \right] \rho^{-2} \right\} d\theta$$

$$= \int_0^{\omega} P u_i \varphi_{\alpha} d\theta + (\alpha^2 - 2\alpha) \rho^{-2} \int_0^{\omega} u_i \varphi_{\alpha} d\theta + \rho^{-2} \int_0^{\omega} u_i \varphi_{\alpha}'' d\theta.$$

Nous allons montrer que  $N_{i,\alpha}$  est un produit de  $\frac{1}{\alpha}$  par un terme borné pour  $\alpha$  grand. En effet

$$\int_0^{\omega} u_i \varphi_{\alpha}'' d\theta = \int_0^{\omega} u_i'' \varphi_{\alpha} d\theta$$

d'après (2.16).

En remplaçant  $\varphi_{\alpha}$  par son expression et en intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^{\omega} u_i'' \varphi_{\alpha} d\theta = \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{-\alpha}{\alpha-2} \int_0^{\omega} u_i''' \sin(\alpha-2)\theta d\theta - \frac{4-(1-\nu)\alpha}{(1-\nu)\alpha} \int_0^{\omega} u_i''' \sin \alpha\theta d\theta \right\}.$$

D'autre part, une triple intégration par parties implique

$$(\alpha^2 - 2\alpha) \int_0^{\omega} u_i \varphi_{\alpha} d\theta = \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{\alpha^2}{(\alpha-2)^2} \int_0^{\omega} u_i''' \sin(\alpha-2)\theta d\theta + \frac{\alpha-2}{\alpha} \frac{4-(1-\nu)\alpha}{(1-\nu)\alpha} \int_0^{\omega} u_i''' \sin \alpha\theta d\theta \right\}.$$

De même, par intégration par parties on obtient

$$\int_0^{\omega} \left( \Delta u_i - \frac{2}{r} \frac{\partial u_i}{\partial r} \right) \varphi_{\alpha} d\theta = -\frac{1}{\alpha-2} \int_0^{\omega} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 u_i}{\partial r \partial \theta} \right) \sin(\alpha-2)\theta d\theta$$

$$- \frac{1}{\alpha} \frac{4-(1-\nu)\alpha}{(1-\nu)\alpha} \int_0^{\omega} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 u_i}{\partial r \partial \theta} \right) \sin \alpha\theta d\theta$$

$\int_0^\omega \left( \Delta u_i - \frac{2}{r} \frac{\partial u_i}{\partial r} \right) \varphi_\alpha d\theta$  est aussi un produit de  $\frac{1}{\alpha}$  par un terme borné.

De ces intégrations par parties, on déduit l'existence d'une constante  $C_0$  telle que

$$|N_{i,\alpha}| \leq \frac{C_0}{\alpha}.$$

En utilisant cette dernière estimation, et en remarquant que  $\varphi_\alpha$  est borné, aussi bien que le terme

$$\frac{(1 - \nu^2)\alpha}{4\omega[(1 - \nu)(\nu + 3)\alpha - 8]}$$

pour  $\alpha$  grand, on déduit l'existence d'une constante  $C$  telle que

$$\left| \sum_{\alpha \in E_{1,i}} c_\alpha r^\alpha \varphi_\alpha \right| \leq \sum_{\alpha \in E_i} \frac{C}{\alpha} \left( \frac{r}{\rho} \right)^\alpha,$$

qui converge dès que  $r < \rho$ .

D'une manière analogue on montre la convergence de la série  $\sum_{\alpha \in E_i} d_\alpha r^\alpha \psi_\alpha$ . ■

# Chapitre 3

## Régularité de la solution de certains problèmes aux limites unilatéraux dans des domaines polygonaux et polyédraux

### 3.1 Introduction

On considère certains problèmes aux limites unilatéraux dans des domaines polygonaux ou polyédraux avec des conditions de transmission unilatérales. On s'attend à ce que la solution ait un comportement singulier près des coins et des arêtes des domaines, particulièrement quand l'interface rencontre la frontière (puisque c'est déjà le cas pour les problèmes linéaires [31, 24, 16, 32, 42]).

Différents auteurs ont étudié de tels problèmes aux limites unilatéraux mais sans transmission (i.e. l'équation de Laplace pure) soit en trouvant des conditions suffisantes sur les domaines qui garantissent la régularité  $H^2$  de la solution [10, 8, 21, 22], soit en se restreignant aux conditions de bord de Signorini [38]. Dans [37], des résultats de régularité dans des espaces de Sobolev fractionnaires pour la solution de problèmes aux limites unilatéraux avec transmission sont obtenus en utilisant une technique de perturbation combinée avec un argument de relèvement. Ici on caractérise la régularité de la solution en termes d'espaces de Sobolev à poids. Cette caractérisation est d'un grand intérêt pour les applications numériques comme le montre les résultats obtenus dans la théorie linéaire [2], où certains maillages raffinés près des coins ont été utilisés pour compenser le comportement singulier de la solution.

Notre méthode principale est inspirée de la méthode de Caccioppoli [10, 21, 22], et qui consiste en quatre étapes : d'abord on pénalise le problème, deuxièmement on estime les dérivées secondes de la solution du problème pénalisé en utilisant quelques intégrations par parties, troisièmement nous estimons uniformément les termes de bord en utilisant la condition de monotonie et finalement on passe à la limite en utilisant quelques arguments de compacité. Cette méthode est ici adaptée aux espaces de Sobolev à poids et aux conditions aux limites unilatérales et de transmission. Pour des conditions aux limites unilatérales pures près de l'interface cette méthode échoue car on ne peut pas estimer certains termes de bord, dans ce cas on utilise alors une méthode basée sur un changement de variables [38] permettant de passer du cas régulier au cas singulier.

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans la section 3.2 on montre une inégalité de Poincaré

dans des espaces de Sobolev à poids liés à notre problème de transmission. Notre méthode est basée sur une analyse de Fourier et elle étend un résultat de [5] obtenu dans le cas homogène. La section 3.3 est consacrée à la présentation du problème. Dans la section 3.4, On se restreint au cas en dimension 2 avec des conditions aux limites mêlées près de l'interface. En adaptant la méthode de Caccioppoli aux normes à poids de Sobolev et en utilisant l'inégalité de Poincaré mentionnée auparavant on obtient les résultats de régularité de la solution dans des espaces de Sobolev à poids. Dans la section 3.5 on étend ce type de résultats aux domaines en dimension 3 avec une arête singulière. Comme dans le cas linéaire on montre d'abord la régularité optimale de la solution dans la direction de l'arête. Dans une seconde étape en utilisant cette régularité et les résultats en 2D on conclut le comportement singulier dans la direction perpendiculaire à l'arête. Ceci conduit à une régularité anisotropique de la solution. Finalement dans la section 3.6 on revient aux domaines en 2D mais avec des conditions aux limites unilatérales près de l'interface. Dans ce cas puisque l'inégalité de Poincaré ne peut être utilisée on adapte une méthode basée sur un changement de variables [38] permettant de passer du cas régulier au cas singulier.

## 3.2 Inégalité de Poincaré

Dans cette section on décrit une inégalité de Poincaré dans des espaces de Sobolev à poids définis dans un secteur  $C$  défini par

$$C = \{(r, \theta) : r > 0, 0 < \theta < \omega\},$$

pour  $\omega \in ]0, 2\pi]$  fixé, qui est supposé divisé en deux secteurs  $C_1 \cup C_2$  définis par

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(r, \theta) : r > 0, 0 < \theta < \omega_1\}, \\ C_2 &= \{(r, \theta) : r > 0, \omega_1 < \theta < \omega\}, \end{aligned}$$

d'ouverture respectives  $\omega_1$  et  $\omega_2 = \omega - \omega_1$ . Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'espace de Sobolev à poids associé est défini par

$$W_\alpha^1(C) = \{u \in \mathcal{D}'(C) : r^\alpha u, r^\alpha \partial_i u \in L^2(C), i = 1, 2\},$$

qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{W_\alpha^1(C)} = \sum_{i=1,2} p_i \int_{C_i} r^{2\alpha} (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2) dx,$$

pour deux constantes positives  $p_1, p_2$ .

L'espace  $L^2(]0, \omega[)$  est muni du produit scalaire

$$(u, v) = p_1 \int_0^{\omega_1} u(\theta)v(\theta) d\theta + p_2 \int_{\omega_1}^\omega u(\theta)v(\theta) d\theta.$$

On introduit l'opérateur de  $L^2(]0, \omega[)$  dans lui même défini par

$$\begin{aligned} D(\Lambda) &:= \{\varphi \in H^1(]0, \omega[) : \varphi_1 \in H^2(]0, \omega_1[), \varphi_2 \in H^2(]0, \omega_1[) \text{ et vérifiant} \\ &p_1 \varphi_1'(\omega_1) = p_2 \varphi_2'(\omega_1), \\ &\varphi_1'(0) = 0, \varphi_2(\omega) = 0\}, \\ (\Lambda \varphi)_i &= -p_i \varphi_i'', i = 1, 2, \forall \varphi \in D(\Lambda). \end{aligned}$$

Cet opérateur est un opérateur positif autoadjoint (voir [42]) à résolvante compacte. On désigne alors par  $\{\lambda_k^2\}_{k=1}^\infty$  l'ensemble de ses valeurs propres dans l'ordre croissant, dans ce cas elles sont simples et sont racines de (voir [32, 43, 36])

$$(3.1) \quad p_1 \sin(\lambda\omega_1) \sin(\lambda\omega_2) - p_2 \cos(\lambda\omega_1) \cos(\lambda\omega_2) = 0.$$

Soit  $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$  l'ensemble des vecteurs propres associés, qui forment une base orthonormale de  $L^2(]0, \omega[)$  (avec le produit scalaire défini plus haut).

On est maintenant en mesure de formuler l'inégalité de Poincaré dans  $W_\alpha^1(C)$  (comparer avec la Proposition 2.1 de [5]) :

**Lemme 3.2.1** *Si  $\alpha < 0$  alors pour tout  $u \in W_\alpha^1(C)$  à support compact vérifiant la condition aux limites de Dirichlet*

$$(3.2) \quad u(r, \omega) = 0, \forall r > 0,$$

on a

$$(3.3) \quad \int_C |u(x)|^2 r^{2\alpha-2} dx \leq \frac{1}{\alpha^2 + \lambda_1^2} \sum_{i=1,2} \int_{C_i} |\nabla u_i|^2 r^{2\alpha} dx$$

**Preuve:** On écrit  $u \in W_\alpha^1(C)$  à support compact et vérifiant (3.2) dans la base  $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$  décrite plus haut pour avoir

$$\begin{aligned} u(r, \cdot) &= \sum_{k=1}^\infty u_k(r) \varphi_k, \\ \frac{\partial u}{\partial r}(r, \cdot) &= \sum_{k=1}^\infty u'_k(r) \varphi_k. \end{aligned}$$

Par conséquent, du fait que l'espace

$$V = \{\varphi \in H^1(0, \omega) : \varphi(\omega) = 0\},$$

muni du produit scalaire

$$(\varphi, \psi) = p_1 \int_0^{\omega_1} \varphi'(\theta) \psi'(\theta) d\theta + p_2 \int_{\omega_1}^\omega \varphi'(\theta) \psi'(\theta) d\theta,$$

est tel que  $V = D(\Lambda)^{1/2}$  (où l'opérateur  $\Lambda$  est défini auparavant), et par l'identité de Parseval, on obtient

$$\begin{aligned} & p_1 \int_0^{\omega_1} u(r, \theta)^2 d\theta + p_2 \int_{\omega_1}^\omega u(r, \theta)^2 d\theta = \sum_{k=1}^\infty |u_k(r)|^2, \\ & p_1 \int_0^{\omega_1} |\nabla u_1(r, \theta)|^2 d\theta + p_2 \int_{\omega_1}^\omega |\nabla u_2(r, \theta)|^2 d\theta \\ &= p_1 \int_0^{\omega_1} \left( \left| \frac{\partial u_1}{\partial r}(r, \theta) \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial u_1}{\partial \theta}(r, \theta) \right|^2 \right) d\theta \\ &+ p_2 \int_{\omega_1}^\omega \left( \left| \frac{\partial u_2}{\partial r}(r, \theta) \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial u_2}{\partial \theta}(r, \theta) \right|^2 \right) d\theta \\ &= \sum_{k=1}^\infty (|u'_k(r)|^2 + \frac{\lambda_k^2}{r^2} |u_k(r)|^2). \end{aligned}$$



après une integration par rapport à  $r$  cette dernière identité implique en particulier

$$(3.4) \quad \sum_{i=1,2} p_i \int_{C_i} |\nabla u_i(r, \theta)|^2 r^{2\alpha} r dr d\theta \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |u'_k(r)|^2 r^{2\alpha} r dr \\ + \lambda_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |u_k(r)|^2 r^{2\alpha-2} r dr.$$

Par l'hypothèse sur  $u$ , la fonction  $u_k$  appartient à  $L_{2,\alpha-1/2}(\mathbb{R}_+)$ . Comme dans la Proposition 2.1 de [5] la condition  $\alpha < 0$  implique que  $u_k(0) = 0$ . Par conséquent on a

$$r^{-1} u_k(r) = r^{-1} \int_0^r u'_k(s) ds.$$

Avec la notation de la sous-section 1.1.4, l'identité précédente s'écrit alors

$$r^{-1} u_k(r) = H(u'_k)(r)$$

et par l'inégalité de Hardy on obtient

$$\int_0^{\infty} r^{2\alpha-2} u_k(r)^2 r dr \leq \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{\infty} r^{2\alpha} u'_k(r)^2 r dr.$$

On conclut en reportant cette estimation dans (3.4). ■

### 3.3 Problèmes de transmission-Signorini avec conditions aux limites mêlées

Fixons un domaine borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2$  ou  $3$ , à frontière lipschitzienne  $\Gamma$ . On suppose que  $\Omega$  est décomposé en deux sous-domaines (seulement pour simplicité)  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  par une interface  $\Sigma$  vérifiant

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \quad \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \Sigma.$$

On suppose que les frontières  $\partial\Omega_i$  de  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2$ ) sont aussi Lipschitz-continues. De plus, on suppose que  $\Gamma$  est divisé en deux parties  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_S$  avec  $\Gamma_S \subset \Gamma \cap \partial\Omega_1$ , la première partie correspond à la partie de la frontière où on imposera des conditions aux limites de Dirichlet alors que sur la seconde partie on fixera des conditions aux limites de type Signorini.

Pour une fonction  $u$  définie dans  $\Omega$  on désigne par  $u_i$  sa restriction à  $\Omega_i$ .

Fixons maintenant deux constantes positives  $p_i$ ,  $i = 1, 2$  et deux graphes maximaux monotones de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\beta_S$  et  $\beta_{\Sigma}$ , tels que  $0 \in \beta_S(0)$  et  $0 \in \beta_{\Sigma}(0)$  (voir [8]). On suppose de plus que  $\beta_S$  est différent du graphe correspondant aux conditions aux limites de Dirichlet (i.e.  $\beta(0) = \mathbb{R}$  et  $\beta(t) = \emptyset$  si  $t \neq 0$ ). Le problème de transmission-Signorini qu'on se propose d'étudier est le suivant

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_i(-\Delta u_i + u_i) = f_i \text{ dans } \Omega_i, i = 1, 2, \\ u_1 = u_2 \text{ sur } \Sigma, \\ -(p_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu_1} - p_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu_1}) \in \beta_{\Sigma}(u_1) \text{ sur } \Sigma, \\ -p_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu_1} \in \beta_S(u_1) \text{ sur } \Gamma_S, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \end{array} \right.$$

où  $f \in L^2(\Omega)$  et  $\frac{\partial u_1}{\partial \nu_1}$  désigne la dérivée de  $u_1$  suivant la normale extérieure à la frontière de  $\Omega_1$ . La formulation faible de ce problème est standard : On définit l'espace variationnel  $H_D^1(\Omega)$  par

$$H_D^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}.$$

et la forme bilinéaire  $a$  sur  $H_D^1(\Omega)$  par

$$(3.6) \quad a(u, v) = \sum_{i=1}^2 p_i \int_{\Omega_i} (\nabla u_i \nabla v_i + u_i v_i) dx.$$

Puisque  $\beta_S$  (resp.  $\beta_\Sigma$ ) est un graphe maximal monotone de  $\mathbb{R}^2$ , il existe une fonction convexe s.c.i.  $j_S$  (resp.  $j_\Sigma$ ) de  $\mathbb{R}$  dans  $] -\infty, +\infty]$ , telle que  $\beta_S$  (resp.  $\beta_\Sigma$ ) est le sous-différentiel de  $j_S$  (resp.  $j_\Sigma$ ). On associe deux applications s.c.i.  $\Phi_S$  et  $\Phi_\Sigma$  définies respectivement sur  $L^2(\Gamma_S)$  et  $L^2(\Gamma_\Sigma)$  par

$$\Phi_S(u) = \begin{cases} \int_{\Gamma_S} j_S(u) d\sigma, & \text{si } j_S(u) \in L^1(\Gamma_S), \\ +\infty & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

et

$$\Phi_\Sigma(u) = \begin{cases} \int_{\Gamma_\Sigma} j_\Sigma(u) d\sigma, & \text{si } j_\Sigma(u) \in L^1(\Gamma_\Sigma), \\ +\infty & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La formulation faible du problème (3.5) consiste à trouver une solution  $u \in H_D^1(\Omega)$  de

$$(3.7) \quad \begin{cases} a(u, v - u) + \Phi_S(u|_{\Gamma_S}) - \Phi_S(v|_{\Gamma_S}) \\ \quad + \Phi_\Sigma(u|_{\Gamma_\Sigma}) - \Phi_\Sigma(v|_{\Gamma_\Sigma}) \\ \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx, \forall v \in H_D^1(\Omega). \end{cases}$$

L'application  $u \in H^1(\Omega) \mapsto \Phi_S(u|_{\Gamma_S}) + \Phi_\Sigma(u|_{\Gamma_\Sigma})$  étant convexe s.c.i. sur  $H^1(\Omega)$ , l'existence et l'unicité d'une solution du problème (3.7) se déduisent des résultats généraux sur les opérateurs non linéaires monotones (voir [9] où [7, Thm I.7]).

Dans le but d'obtenir des résultats de régularité pour la solution  $u$  de (3.7) on l'approche par une famille de problèmes

$$(3.8) \quad \begin{cases} p_i(-\Delta u_{\lambda,i} + u_{\lambda,i}) = f_i \text{ dans } \Omega_i, i = 1, 2, \\ u_{\lambda,1} = u_{\lambda,2} \text{ sur } \Sigma, \\ -(p_1 \frac{\partial u_{\lambda,1}}{\partial \nu_1} - p_2 \frac{\partial u_{\lambda,2}}{\partial \nu_1}) = \beta_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1}) \text{ sur } \Sigma, \\ -p_1 \frac{\partial u_{\lambda,1}}{\partial \nu_1} = \beta_{S,\lambda}(u_{\lambda,1}) \text{ sur } \Gamma_S, \\ u_\lambda = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \end{cases}$$

où  $\lambda > 0$  tend vers 0 et  $\beta_{\Sigma,\lambda}$  (resp.  $\beta_{S,\lambda}$ ) est l'approximation de Yosida de  $\beta_\Sigma$  (resp.  $\beta_S$ ) donnée par  $\beta_{\Sigma,\lambda} = \lambda^{-1}\{I - (I + \lambda\beta_\Sigma)^{-1}\}$  et est une fonction non décroissante, uniformément Lipschitzienne de constante égale à  $\lambda^{-1}$  (voir [8]). La formulation faible de (3.8) est

$$(3.9) \quad \begin{aligned} a(u_\lambda, v) + \int_{\Sigma} \beta_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1}) v_1 ds \\ + \int_{\Gamma_S} \beta_{S,\lambda}(u_{\lambda,1}) v_1 ds = \int_{\Omega} f v dx, \forall v \in H_D^1(\Omega). \end{aligned}$$

Suivant la preuve du Théorème I.8 de [7], on montre que ce problème admet une solution unique  $u_\lambda \in H_D^1(\Omega)$ , vérifiant

$$(3.10) \quad \|u_\lambda\|_{1,\Omega} \lesssim \|f\|_{0,\Omega},$$

où la notation  $a \lesssim b$  signifie qu'il existe une constante positive  $C$  indépendante de  $a$ ,  $b$  et  $\lambda$  telle que  $a \leq Cb$ .

### 3.4 Problème de transmission-Signorini en 2D avec conditions aux limites mêlées

Maintenant on suppose que  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$  et les frontières des sous-domaines  $\Omega_i, i = 1, 2$  sont constituées de segments de droite ouverts  $\Gamma_{i,j}, j = 1, \dots, N_i$ , avec  $N_i \in \mathbb{N}^*$ , numérotés dans le sens des aiguilles d'une montre tels que

$$\Sigma = \Gamma_{1,1} = \Gamma_{2,1}, \Gamma := \partial\Omega = \cup_{i=1,2} \cup_{j=2}^{N_i} \Gamma_{i,j}.$$

Dans cette section on s'intéresse à l'influence entre les conditions de transmission non linéaires et les conditions aux limites mêlées, donc on suppose que  $\Gamma_S = \Gamma_{1,2}$ , alors que  $\Gamma_D$  est le reste de la frontière de  $\Omega$ . On désigne par  $P_i, i = 1, \dots, N_1 + N_2 - 2$  les sommets de  $\Omega$  où

$$\begin{aligned} P_i &= \bar{\Gamma}_{1,i} \cap \bar{\Gamma}_{1,i+1}, & i &= 1, \dots, N_1 - 1 \\ P_i &= \bar{\Gamma}_{2,i-N_1+1} \cap \bar{\Gamma}_{2,i-N_1+2}, & i &= N_1, \dots, N_1 + N_2 - 2, \end{aligned}$$

voir Figure 3.1 pour une illustration. Sans perte de généralité on peut supposer que  $P_1$  est situé à l'origine.

Afin de montrer certaines régularités des dérivées secondes de  $u_\lambda$  solution de (3.8) près de l'origine, on localise le problème précédent en utilisant une fonction de troncature non croissante  $\eta \equiv \eta(r) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$  et vérifiant  $0 \leq \eta \leq 1$  telle que  $\eta \equiv 1$  dans un voisinage de 0,  $\eta \equiv 0$  en dehors d'un autre voisinage de 0. Posons  $u = \eta u_\lambda$  (on omet l'indice  $\lambda$  et on écrit le membre droit tout simplement  $u$  puisque pour le moment  $\lambda$  est fixé), on voit que  $u \in H_D^1(\Omega)$  est une solution faible de

$$(3.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} -p_i \Delta u_i = F_i \text{ dans } \Omega_i, i = 1, 2, \\ u_1 = u_2 \text{ sur } \Sigma, \\ -(p_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu_1} - p_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu_1}) = \eta \beta_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1}) \text{ sur } \Sigma, \\ -p_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu_1} = \eta \beta_{S,\lambda}(u_{\lambda,1}) \text{ sur } \Gamma_S, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \end{array} \right.$$

où  $F_i = \eta f_i + 2p_i \nabla \eta \cdot \nabla u_{\lambda,i} + p_i (\Delta \eta - \eta) u_{\lambda,i}$ , appartient à  $L^2(C_i)$  avec l'estimation

$$(3.12) \quad \|F\|_{0,C} \lesssim \|f\|_{0,\Omega},$$

suivant (3.10).

Dans (3.11) la donnée de bord de Neumann et la donnée de transmission sont dans  $H^{1/2}$  d'après le lemme suivant

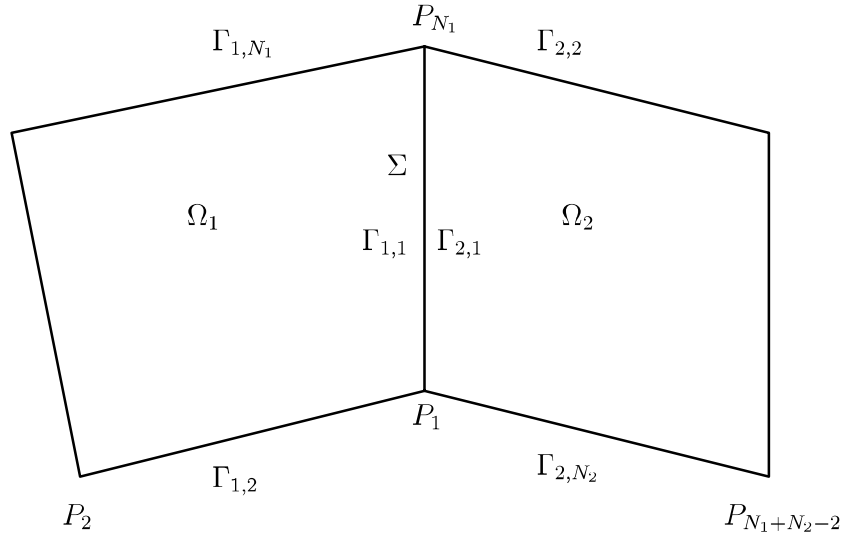


FIG. 3.1 – Le domaine  $\Omega$

**Lemme 3.4.1** *Si  $\beta$  est une fonction uniformément Lipschitz continue telle que  $\beta(0) = 0$ . Alors pour tout  $u \in H^{1/2}(\Gamma)$  on a*

$$\beta(u) \in H^{1/2}(\Gamma).$$

**Preuve:** Comme  $\beta$  est uniformément Lipschitzienne, on a

$$(3.13) \quad |\beta(x) - \beta(y)| \leq B|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R},$$

pour un certain  $B > 0$ . Avec la propriété  $\beta(0) = 0$  ceci implique

$$|\beta(x)| \leq B|x|, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par Conséquent on obtient directement

$$\|\beta(u)\|_{0,\Gamma} \leq B\|u\|_{0,\Gamma}.$$

De la même manière, l'estimation (3.13) donne directement

$$\int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{|\beta(u(x)) - \beta(u(y))|^2}{|x - y|^2} dx dy \leq B^2 \int_{\Gamma \times \Gamma} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^2} dx dy.$$

et la conclusion s'en suit. ■

Adaptons maintenant l'argument de [21, 22], on va montrer

**Théorème 3.4.2** *Pour tout  $1 > \delta > 1 - \lambda_1$  et tout  $i, j, k = 1, 2$ , on a*

$$(3.14) \quad r^\delta \partial_{jk}^2 u_i \in L^2(\Omega_i).$$

De plus on a

$$(3.15) \quad \sum_{i=1,2} \sum_{j,k=1,2} \|r^\delta \partial_{jk}^2 u_i\|_{0,C_i} \lesssim \|f\|_{0,\Omega}.$$

**Preuve:** La solution  $u \in H_D^1(\Omega)$  de (3.11) peut être considérée comme la solution d'un problème de transmission non homogène dans  $\Omega$  avec donnée intérieure  $F \in L^2(\Omega)$ , donnée de Neumann  $-\eta\beta_{S,\lambda}(u_{\lambda,1}) \in H^{1/2}(\Gamma_N)$  et donnée de transmission  $-\eta\beta_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1}) \in H^{1/2}(\Sigma)$  (voir Lemme 3.4.1). Par conséquent d'après le théorème 2.26 de [42] (voir aussi [33, 32, 43, 36]),  $u$  admet la décomposition

$$u_i = u_{R,i} + \sum_{\lambda_j \in \Lambda \cap (0,1)} c_{\lambda_j} S_{\lambda_j,i}, \quad i = 1, 2,$$

où  $u_{R,i} \in H^2(\Omega_i)$ ,  $i = 1, 2$  est la partie régulière de  $u$ ,  $c_{\lambda_j}$  sont des constantes et  $S_{\lambda_j}$  sont les singularités du problème de transmission (3.9) données par

$$S_{\lambda_j}(r, \theta) = r^{\lambda_j} \varphi_j(\theta),$$

où  $\varphi_j$  est le vecteur propre associé à  $\lambda_j^2$  décrit dans la section 3.2. La décomposition précédente entraîne la régularité (3.14) puisqu'on peut facilement vérifier que chaque terme satisfait cette régularité.

Notons que la régularité précédente de  $u$  et l'inégalité de Hardy implique que  $u_i$  appartient à  $H_\delta^2(C_i)$  (voir [24, p.28]), l'espace de Sobolev à poids du type Kondratiev défini par

$$H_\delta^2(C_i) := \{v \in \mathcal{D}'(\bar{C}_i) : r^{\delta+|\alpha|-2} D^\alpha v \in L^2(C_i), \forall |\alpha| \leq 2\},$$

qui est un espace de Hilbert pour son produit scalaire naturel.

Pour établir l'estimation (3.15) on commence par le carré du membre gauche de (3.15) et on utilise quelques intégrations by parties. Ces dernières étant justifiées par la densité de

$$C_0^\infty(\bar{C}_i) := \{v \in C^\infty(\bar{C}_i) : v(x) = 0 \text{ pour } |x| < r \text{ et } |x| > R, \text{ pour un certain } 0 < r < R < \infty\}$$

dans  $H_\delta^2(C_i)$  (voir par exemple [16]). En d'autres termes on fixe d'abord une suite  $u^{(n)} \in C_0^\infty(\bar{C}_i)$  vérifiant

$$u_i^{(n)} \rightarrow u_i \text{ dans } H_\delta^2(C_i), \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Alors en appliquant la formule de Green on obtient

$$\begin{aligned} \int_{C_i} |r^\delta \nabla^2 u_i^{(n)}|^2 dx &= \sum_{j,k=1,2} \int_{C_i} r^{2\delta} \partial_{jk}^2 u_i^{(n)} \partial_{jk}^2 u_i^{(n)} dx \\ &= - \sum_{j,k=1,2} \int_{C_i} \partial_j (r^{2\delta} \partial_{jk}^2 u_i^{(n)}) \partial_k u_i^{(n)} dx + \int_{\partial C_i} r^{2\delta} \nabla u_i^{(n)} \cdot \nabla \left( \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial \nu_i} \right) ds. \end{aligned}$$

Par la règle de Leibniz on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_{C_i} |r^\delta \nabla^2 u_i^{(n)}|^2 dx &= - \sum_{j,k=1,2} \int_{C_i} \partial_j r^{2\delta} \partial_{jk}^2 u_i^{(n)} \partial_k u_i^{(n)} dx \\ &- \sum_{j,k=1,2} \int_{C_i} r^{2\delta} \partial_{jjk}^3 u_i^{(n)} \partial_k u_i^{(n)} dx + \int_{\partial C_i} r^{2\delta} \nabla u_i^{(n)} \cdot \nabla \left( \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial \nu_i} \right) ds \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Green au second terme du membre droit précédent, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{C_i} |r^\delta \nabla^2 u_i^{(n)}|^2 dx &= \\ &- \sum_{j,k=1,2} \int_{C_i} \partial_j r^{2\delta} \partial_{jk}^2 u_i^{(n)} \partial_k u_i^{(n)} dx + \sum_{j,k=1,2} \int_{C_i} \partial_{jj}^2 u_i^{(n)} \partial_k (r^{2\delta} \partial_k u_i^{(n)}) dx \\ &- \int_{\partial C_i} r^{2\delta} \Delta u_i^{(n)} \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial \nu_i} ds + \int_{\partial C_i} r^{2\delta} \nabla u_i^{(n)} \cdot \nabla \left( \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial \nu_i} \right) ds \\ &= - \sum_{j,k=1,2} \int_{C_i} \partial_j r^{2\delta} \partial_{jk}^2 u_i^{(n)} \partial_k u_i^{(n)} dx + \sum_{k=1,2} \int_{C_i} \Delta u_i^{(n)} \partial_k r^{2\delta} dx + \int_{C_i} r^{2\delta} |\Delta u_i^{(n)}|^2 dx \\ &+ \int_{\partial C_i} r^{2\delta} \left[ \nabla u_i^{(n)} \cdot \nabla \left( \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial \nu_i} \right) - \Delta u_i^{(n)} \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial \nu_i} \right] ds. \end{aligned}$$

Utilisant la base  $(\nu_i, \tau_i)$  on voit que

$$\nabla v \cdot \nabla \left( \frac{\partial v}{\partial \nu_i} \right) - \Delta v \frac{\partial v}{\partial \nu_i} = \frac{\partial^2 v}{\partial \nu_i \partial \tau_i} \frac{\partial v}{\partial \tau_i} - \frac{\partial^2 v}{\partial \tau_i^2} \frac{\partial v}{\partial \nu_i}.$$

Puisque  $\frac{\partial v}{\partial \tau_i} = \pm \frac{\partial v}{\partial r}$ , on obtient

$$\nabla v \cdot \nabla \left( \frac{\partial v}{\partial \nu_i} \right) - \Delta v \frac{\partial v}{\partial \nu_i} = \frac{\partial^2 v}{\partial \nu_i \partial r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \frac{\partial v}{\partial \nu_i}.$$

Reportant cette identité dans l'identité précédente, on arrive à

$$\begin{aligned} \int_{C_i} |r^\delta \nabla^2 u_i^{(n)}|^2 dx &= \\ &- \sum_{j,k=1,2} \int_{C_i} \partial_j r^{2\delta} \partial_{jk}^2 u_i^{(n)} \partial_k u_i^{(n)} dx + \sum_{k=1,2} \int_{C_i} \Delta u_i^{(n)} \partial_k r^{2\delta} dx + \int_{C_i} r^{2\delta} |\Delta u_i^{(n)}|^2 dx \\ &+ \int_{\partial C_i} r^{2\delta} \left[ \frac{\partial^2 u_i^{(n)}}{\partial \nu_i \partial r} \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial r} - \frac{\partial^2 u_i^{(n)}}{\partial r^2} \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial \nu_i} \right] ds. \end{aligned}$$

En passant à la limite dans cette identité on obtient

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \int_{C_i} |r^\delta \nabla^2 u_i|^2 dx &= \\ &- \sum_{j,k=1,2} \int_{C_i} \partial_j r^{2\delta} \partial_{jk}^2 u_i \partial_k u_i dx + \sum_{k=1,2} \int_{C_i} \Delta u_i \partial_k r^{2\delta} dx + \int_{C_i} r^{2\delta} |\Delta u_i|^2 dx \\ &+ \int_{\partial C_i} r^{2\delta} \left[ \frac{\partial^2 u_i}{\partial \nu_i \partial r} \frac{\partial u_i}{\partial r} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} \frac{\partial u_i}{\partial \nu_i} \right] ds. \end{aligned}$$

Ici le terme de bord doit être considéré comme un crochet de dualité puisque par un théorème de trace standard on a

$$\frac{\partial u_i}{\partial \nu_i}, \frac{\partial u_i}{\partial r} \in H_\delta^{1/2}(\mathbb{R}),$$

et par conséquent

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial \nu_i \partial r}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} \in H_\delta^{-1/2}(\mathbb{R}),$$

où  $H_\delta^{-1/2}(\mathbb{R})$  est le dual de  $H_\delta^{1/2}(\mathbb{R})$  (voir Appendix A de [16]). Comme la propriété  $\frac{\partial u_i}{\partial \nu_i} \in H_\delta^{1/2}(\mathbb{R})$  est équivalente à  $r^{2\delta} \frac{\partial u_i}{\partial \nu_i} \in H_\delta^{1/2}(\mathbb{R})$ , les considérations précédentes donnent un sens aux crochets de dualité

$$\left\langle \frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2}, r^{2\delta} \frac{\partial u_i}{\partial \nu_i} \right\rangle.$$

Le premier terme est justifié de la même manière.

Maintenant afin de prendre en compte les conditions aux limites et de transmission dans (3.11), on multiplie l'identité (3.16) par  $p_i$  et on prend la somme sur  $i = 1, 2$ . Ceci implique

$$(3.17) \quad \sum_{i=1,2} p_i \int_{C_i} |r^\delta \nabla^2 u_i|^2 dx = I_1 + I_2 + I_F + I_\Sigma + I_S,$$

où on a posé

$$\begin{aligned} I_1 &= - \sum_{i=1,2} p_i \sum_{j,k=1,2} \int_{C_i} \partial_j r^{2\delta} \partial_{jk}^2 u_i \partial_k u_i dx \\ I_2 &= \sum_{i=1,2} p_i \sum_{k=1,2} \int_{C_i} \Delta u_i \partial_k r^{2\delta} \partial_k u_i dx \\ I_F &= \sum_{i=1,2} p_i \int_{C_i} r^{2\delta} |\Delta u_i|^2 dx \\ I_\Sigma &= \int_\Sigma r^{2\delta} \sum_{i=1,2} p_i \left[ \frac{\partial^2 u_i}{\partial \nu_i \partial r} \frac{\partial u_i}{\partial r} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} \frac{\partial u_i}{\partial \nu_i} \right] ds. \\ I_S &= \int_{\Gamma_S} r^{2\delta} p_1 \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial \nu_1 \partial r} \frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} \frac{\partial u_1}{\partial \nu_1} \right] ds, \end{aligned}$$

puisque  $u_2 = 0$  sur  $\Gamma_D$  et par conséquent  $\frac{\partial u_2}{\partial r} = 0$  sur  $\Gamma_D$ .

Comme  $\nu_2 = -\nu_1$  sur  $\Sigma$  par les conditions de transmission dans (3.11) on voit que

$$I_\Sigma = \int_\Sigma r^{2\delta} \left[ -\frac{\partial}{\partial r} (\eta \beta_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1})) \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} \eta \beta_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1}) \right] ds.$$

Par intégration par parties (justifiée par des arguments de densité comme précédemment) et la règle de Leibniz, on obtient

$$(3.18) \quad I_\Sigma = -2J_\Sigma + K_\Sigma,$$

où on a posé

$$\begin{aligned} J_\Sigma &= \int_\Sigma r^{2\delta} \frac{\partial}{\partial r} (\eta \beta_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1})) \frac{\partial u_1}{\partial r} ds \\ K_\Sigma &= -2\delta \int_\Sigma r^{2\delta-1} \frac{\partial u_1}{\partial r} \eta \beta_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1}) ds. \end{aligned}$$

En se rappelant la définition de  $u = \eta u_\lambda$  et en utilisant encore une fois la règle de Leibniz, on peut écrire

$$\begin{aligned} J_\Sigma &= \int_\Sigma r^{2\delta} \left( \eta' u_{\lambda,1} + \eta \frac{\partial u_{\lambda,1}}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial r} (\eta \beta_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1})) ds \\ &= \int_\Sigma r^{2\delta} \left[ \eta' u_{\lambda,1} \frac{\partial}{\partial r} (\eta \beta_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1})) + \eta \frac{\partial u_{\lambda,1}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} (\eta \beta_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1})) \right] ds \end{aligned}$$

En intégrant par parties dans le premier terme on obtient

$$J_\Sigma = \int_\Sigma \left[ -\eta \beta_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1}) \frac{\partial}{\partial r} (r^{2\delta} \eta' u_{\lambda,1}) + r^{2\delta} \eta \frac{\partial u_{\lambda,1}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} (\eta \beta_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1})) \right] ds.$$

En utilisant la règle de Leibniz on obtient

$$J_\Sigma = \int_\Sigma \left[ r^{2\delta} \eta^2 \beta'_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1}) \left( \frac{\partial u_{\lambda,1}}{\partial r} \right)^2 - 2\delta r^{2\delta-1} \eta \eta' \beta_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1}) u_{\lambda,1} - r^{2\delta} \eta \eta'' \beta_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1}) u_{\lambda,1} \right] ds.$$

Comme le premier et le second terme du membre droit précédent sont non négatifs (d'après la monotonie de  $\beta_{\Sigma,\lambda}$  et  $\beta_{S,\lambda}$ ) on obtient

$$J_\Sigma \geq - \int_\Sigma r^{2\delta} \eta \eta'' \beta_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1}) u_{\lambda,1} ds.$$

En reportant cette estimation dans l'identité (3.18) on obtient

$$(3.19) \quad I_\Sigma \leq 2 \int_\Sigma r^{2\delta} \eta \eta'' \beta_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1}) u_{\lambda,1} ds + K_\Sigma.$$

En utilisant les conditions aux limites sur  $\Gamma_S$  dans (3.11) et les mêmes arguments on montre que

$$(3.20) \quad I_S \leq 2 \int_{\Gamma_S} r^{2\delta} \eta \eta'' \beta_{S,\lambda}(u_{\lambda,1}) u_{\lambda,1} ds + K_S,$$

où on a posé

$$K_S = -2\delta \int_{\Gamma_S} r^{2\delta-1} \frac{\partial u_1}{\partial r} \eta \beta_{S,\lambda}(u_{\lambda,1}) ds.$$

Etant donnée l'identité (3.17) on a à estimer  $I_\Sigma + I_S$ . Par les estimations (3.19) et (3.20) on remarque que

$$(3.21) \quad I_\Sigma + I_S \leq J + K,$$

où on a posé

$$\begin{aligned} J &= 2 \int_\Sigma r^{2\delta} \eta \eta'' \beta_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1}) u_{\lambda,1} ds + 2 \int_{\Gamma_S} r^{2\delta} \eta \eta'' \beta_{S,\lambda}(u_{\lambda,1}) u_{\lambda,1} ds, \\ K &= K_\Sigma + K_S. \end{aligned}$$



D'abord par les propriétés  $\beta_{\Sigma,\lambda}(u)u \geq 0$  et  $\beta_{S,\lambda}(u)u \geq 0$ , pour tout  $u \in \mathbb{R}$  (monotonicité), on remarque que

$$J \leq C_0 \left( \int_{\Sigma} \beta_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1})u_{\lambda,1} ds + \int_{\Gamma_S} \beta_{S,\lambda}(u_{\lambda,1})u_{\lambda,1} ds \right),$$

où  $C_0 = \max_{0 \leq r \leq R}(r^{2\delta}|\eta''(r)|)$ , avec  $R > 0$  suffisamment grand pour que le support de  $\eta$  soit incluse dans  $B(0, R)$ . Maintenant en utilisant la formulation variationnelle (3.9) avec  $v = u_{\lambda}$  on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1,2} p_i \int_{\Omega_i} (|\nabla u_{\lambda,i}|^2 + |u_{\lambda,i}|^2) dx + \int_{\Sigma} \beta_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1})u_{\lambda,1} ds \\ & + \int_{\Gamma_S} \beta_{S,\lambda}(u_{\lambda,1})u_{\lambda,1} ds = \int_{\Omega} f u_{\lambda} dx \end{aligned}$$

et par Conséquent on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} \beta_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1})u_{\lambda,1} ds + \int_{\Gamma_S} \beta_{S,\lambda}(u_{\lambda,1})u_{\lambda,1} ds \\ & \leq \int_{\Omega} f u_{\lambda} dx \end{aligned}$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimation (3.10), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} \beta_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1})u_{\lambda,1} ds + \int_{\Gamma_S} \beta_{S,\lambda}(u_{\lambda,1})u_{\lambda,1} ds \\ & \lesssim \|f\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Cette estimation dans la précédente implique

$$(3.22) \quad J \lesssim \|f\|_{0,\Omega}^2.$$

La quantité  $K$  ne peut être estimée directement, c'est pourquoi on l'associe au terme intérieur  $I_1$ . En effet, en utilisant la définition de  $I_1, K_{\Sigma}, K_S$  et les conditions aux limites et de transmission vérifiées par  $u_{\lambda}$  on voit que

$$(3.23) \quad \begin{aligned} I_1 + K &= -2\delta \sum_{i=1,2} p_i \int_{C_i} r^{2\delta-1} \frac{\partial}{\partial r} (\nabla u_i) \cdot \nabla u_i dx \\ &+ 2\delta \int_{\Sigma} r^{2\delta-1} \frac{\partial u_1}{\partial r} \left( p_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu_1} - p_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu_1} \right) ds + 2\delta \int_{\Gamma_S} r^{2\delta-1} \frac{\partial u_1}{\partial r} p_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu_1} ds. \end{aligned}$$

La formule de Green implique (encore justifiée par des des arguments de densité comme précédemment)

$$\int_{\partial C_i} r^{2\delta-1} \frac{\partial u_i}{\partial r} \frac{\partial u_i}{\partial \nu_i} ds = \int_{C_i} \Delta u_i r^{2\delta-1} \frac{\partial u_i}{\partial r} + \nabla u_i \cdot \nabla \left( r^{2\delta-1} \frac{\partial u_i}{\partial r} \right) dx.$$

En multipliant cette identité par  $p_i$  et en ajoutant le résultat on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1,2} p_i \int_{C_i} \Delta u_i r^{2\delta-1} \frac{\partial u_i}{\partial r} + \nabla u_i \cdot \nabla \left( r^{2\delta-1} \frac{\partial u_i}{\partial r} \right) dx = \\ & \int_{\Sigma} r^{2\delta-1} \frac{\partial u_1}{\partial r} \left( p_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu_1} - p_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu_1} \right) ds + \int_{\Gamma_S} r^{2\delta-1} \frac{\partial u_1}{\partial r} p_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu_1} ds. \end{aligned}$$

Cette identité dans (3.23) procure

$$(3.24) \quad I_1 + K = I_3 + I_4 + I_5,$$

où

$$\begin{aligned} I_3 &= 2\delta \sum_{i=1,2} p_i \int_{C_i} \Delta u_i r^{2\delta-1} \frac{\partial u_i}{\partial r} dx \\ I_4 &= 2\delta(2\delta-1) \sum_{i=1,2} p_i \int_{C_i} r^{2\delta-2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial r} \right)^2 dx \\ I_5 &= 2\delta \sum_{i=1,2} p_i \int_{C_i} r^{2\delta-1} \left[ \nabla u_i \cdot \nabla \left( \frac{\partial u_i}{\partial r} \right) - \nabla u_i \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\nabla u_i) \right] dx. \end{aligned}$$

Il reste à estimer  $I_2, I_F, I_3, I_4, I_5$ . On commence par  $I_2$  : Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que  $p_i \Delta u_i = F_i$  on a

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 2\delta \|r^\delta F\|_{0,C} \|r^{\delta-1} \nabla u\|_{0,C} \\ &\lesssim \|F\|_{0,C} \|r^{\delta-1} \nabla u\|_{0,C}. \end{aligned}$$

Par l'estimation (3.12) et l'inégalité de Young ( $2ab \leq \epsilon a^2 + \epsilon^{-1}b^2$ , pour tout  $a, b, \epsilon > 0$ ) on obtient

$$(3.25) \quad I_2 \lesssim \|f\|_{0,\Omega}^2 + C \|r^{\delta-1} \nabla u\|_{0,C}^2.$$

De la même manière on a

$$(3.26) \quad I_3 \lesssim \|f\|_{0,\Omega}^2 + \|r^{\delta-1} \nabla u\|_{0,C}^2.$$

De façon similaire on obtient

$$(3.27) \quad I_F \lesssim \|f\|_{0,\Omega}^2$$

D'autre part on a directement

$$(3.28) \quad I_4 \lesssim \|r^{\delta-1} \nabla u\|_{0,C}^2.$$

En utilisant les coordonnées polaires on voit que

$$\nabla u_i \cdot \nabla \left( \frac{\partial u_i}{\partial r} \right) - \nabla u_i \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\nabla u_i) = r^{-3} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \theta} \right)^2,$$

et par conséquent on arrive à

$$(3.29) \quad I_5 \lesssim \|r^{\delta-1} \nabla u\|_{0,C}^2.$$

Ces estimations montrent qu'on a besoin d'estimer  $\|r^{\delta-1} \nabla u\|_{0,C}$  en fonction de  $\|f\|_{0,\Omega}$ . Pour cela on pose  $\alpha = 2\delta - 2$  et on remarque que la formule de Green implique

$$\begin{aligned} - \int_{C_i} \Delta u_i u_i r^\alpha dx &= \int_{C_i} \nabla u_i \cdot \nabla (u_i r^\alpha) dx \\ &- \int_{\partial C_i} \frac{\partial u_i}{\partial \nu_i} u_i r^\alpha ds. \end{aligned}$$

En multipliant cette identité par  $p_i$ , en prenant la somme sur  $i = 1, 2$  et en tenant en compte des conditions aux limites et de transmission dans (3.11) on obtient

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1,2} p_i \int_{C_i} \Delta u_i u_i r^\alpha dx &= \sum_{i=1,2} p_i \int_{C_i} \nabla u_i \cdot \nabla (u_i r^\alpha) dx \\ &+ \int_{\Sigma} \eta^2 u_{\lambda,1} \beta_{\Sigma,\lambda} (u_{\lambda,1}) r^\alpha ds \\ &+ \int_{\Gamma_S} \eta^2 u_{\lambda,1} \beta_{S,\lambda} (u_{\lambda,1}) r^\alpha ds. \end{aligned}$$

Par la monotonie de  $\beta_{\Sigma,\lambda}$  et  $\beta_{S,\lambda}$ , on obtient

$$- \sum_{i=1,2} p_i \int_{C_i} \Delta u_i u_i r^\alpha dx \geq \sum_{i=1,2} p_i \int_{C_i} \nabla u_i \cdot \nabla (u_i r^\alpha) dx.$$

Maintenant par la règle de Leibniz on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_{C_i} \nabla u_i \cdot \nabla (u_i r^\alpha) dx &= \int_{C_i} |\nabla u_i|^2 r^\alpha dx + \int_{C_i} u_i \nabla u_i \cdot \nabla r^\alpha dx \\ &= \int_{C_i} |\nabla u_i|^2 r^\alpha dx + \frac{1}{2} \int_{C_i} \nabla (u_i)^2 \cdot \nabla r^\alpha dx. \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Green dans le second terme de ce membre droit et en remarquant que

$$\frac{\partial r^\alpha}{\partial \nu_i} = 0 \text{ on } \partial C_i,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_{C_i} \nabla u_i \cdot \nabla (u_i r^\alpha) dx &= \int_{C_i} |\nabla u_i|^2 r^\alpha dx - \frac{1}{2} \int_{C_i} (u_i)^2 \Delta r^\alpha dx \\ &= \int_{C_i} |\nabla u_i|^2 r^\alpha dx - \frac{\alpha^2}{2} \int_{C_i} (u_i)^2 r^{\alpha-2} dx. \end{aligned}$$

En reportant cette identité dans l'estimation précédente on aura prouvé

$$(3.30) \quad \sum_{i=1,2} p_i \left( \int_{C_i} |\nabla u_i|^2 r^\alpha dx - \frac{\alpha^2}{2} \int_{C_i} (u_i)^2 r^{\alpha-2} dx \right) \leq - \sum_{i=1,2} p_i \int_{C_i} \Delta u_i u_i r^\alpha dx$$

En utilisant l'inégalité de type Poincaré (3.3) du lemme 3.2.1 on arrive à

$$(3.31) \quad \left( \frac{\alpha^2}{4} + \lambda_1^2 - \frac{\alpha^2}{2} \right) \left( \sum_{i=1,2} p_i \int_{C_i} |u_i|^2 r^{\alpha-2} dx \right) \leq - \sum_{i=1,2} p_i \int_{C_i} \Delta u_i u_i r^\alpha dx$$

On remarque que le facteur  $\lambda_1^2 - \frac{\alpha^2}{4}$  est positif puisque  $1 > \delta > 1 - \lambda_1$ .

Maintenant par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$- \sum_{i=1,2} p_i \int_{C_i} \Delta u_i u_i r^\alpha dx \leq \|r^{\frac{\alpha}{2}+1} F\|_{0,C} \|r^{\frac{\alpha}{2}-1} u\|_{0,C} \lesssim \|F\|_{0,C} \|r^{\frac{\alpha}{2}-1} u\|_{0,C},$$

puisque  $\frac{\alpha}{2} + 1 \geq 0$ . Par l'estimation (3.12) on obtient

$$(3.32) \quad - \sum_{i=1,2} p_i \int_{C_i} \Delta u_i u_i r^\alpha dx \lesssim \|f\|_{0,\Omega} \|r^{\frac{\alpha}{2}-1} u\|_{0,C}.$$

Cette estimation dans (3.31) donne

$$\sum_{i=1,2} p_i \int_{C_i} |u_i|^2 r^{\alpha-2} dx \lesssim \|f\|_{0,\Omega}^2,$$

et par conséquent (3.32) devient

$$- \sum_{i=1,2} p_i \int_{C_i} \Delta u_i u_i r^\alpha dx \lesssim \|f\|_{0,\Omega}^2.$$

En utilisant ces deux dernières estimations dans (3.30) on aura montré que

$$(3.33) \quad \int_{C_i} |\nabla u_i|^2 r^\alpha dx \lesssim \|f\|_{0,\Omega}^2.$$

En résumé les estimations (3.21), (3.22), (3.24), l'estimation (3.25) dans (3.29) et l'estimation (3.33) dans (3.17) procurent (3.15).  $\blacksquare$

Un résultat de régularité similaire près du coin  $P_2$  commun à  $\Gamma_S$  et  $\Gamma_{1,3}$  peut être obtenu en prenant  $p_1 = p_2$  et  $\beta_\Sigma = 0$  pour que le premier exposant singulier soit  $\mu_2 := \frac{\pi}{2\omega}$ , où  $\omega$  est l'ouverture intérieure de  $\Omega_1$  au point  $P_2$ . Pour le coin  $P_{N_1}$  on a aussi un résultat de régularité similaire sauf qu'ici on a des conditions aux limites de Dirichlet sur les segments de la frontière et par conséquent les exposants singuliers associés sont différents de ceux décrits dans la section 3.2 mais peuvent être caractérisés comme les racines de

$$p_2 \cos(\lambda\omega'_2) \sin(\lambda\omega'_1) + p_1 \cos(\lambda\omega'_1) \sin(\lambda\omega'_2) = 0,$$

où  $\omega'_1$  (resp.  $\omega'_2$ ) est l'ouverture intérieure de  $\Omega_1$  (resp.  $\Omega_2$ ) en  $P_{N_1}$ . Soit  $\mu_{N_1}$  la première racine positive de cette équation.

Dans un voisinage des autres coins  $P_l$ ,  $l = 3, \dots, N_1 + N_2 - 2, l \neq N_1$ ,  $u$  est la solution d'un problème de Dirichlet standard dont la régularité est bien connue (voir [31, 24, 16]). En utilisant ces références on obtient que

$$r_l^{\delta_l} \partial_{jk}^2 (\eta_l u_{\lambda,i}) \in L^2(\Omega_i), \forall j, k = 1, 2$$

où  $\delta_l > 1 - \mu_l$ ,  $\mu_l = \frac{\pi}{\omega_l}$ ,  $\omega_l$  est l'ouverture intérieure de  $\Omega_i$  en  $P_l$  avec  $i = 1$  or  $2$  telle que  $P_l \in \bar{\Omega}_i$  et  $\eta_l$  est une fonction de troncature égale à 1 près de  $P_l$  et avec un support suffisamment petit. Notons qu'on a de plus

$$\sum_{j,k=1,2} \|r_l^{\delta_l} \partial_{jk}^2 (\eta_l u_{\lambda,i})\|_{0,\Omega_i} \lesssim \|f\|_{0,\Omega},$$

puisque le problème aux limites résolu par  $\eta_l u_{\lambda,i}$  ne dépend pas de  $\lambda$  et en utilisant l'estimation (3.10).

Par analogie avec les autres coins, pour le coin  $P_1$ , on désigne par  $\mu_1 = \lambda_1$  le premier exposant singulier. En utilisant une partition de l'unité on obtient le

**Théorème 3.4.3** *Pour tout  $i, j, k = 1, 2$ , on a*

$$(3.34) \quad \rho_i \partial_{jk}^2 u_{\lambda, i} \in L^2(\Omega_i),$$

où

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \prod_{j=1}^{N_1} r_j^{\delta_j}, \\ \rho_2 &= r_1^{\delta_1} \prod_{j=N_1}^{N_1+N_2-2} r_j^{\delta_j}, \end{aligned}$$

$r_j$  est la distance à  $P_j$  et  $1 > \delta_j > 1 - \mu_j$ , où les  $\mu_j$  ont été décrit précédemment. De plus on a

$$(3.35) \quad \sum_{i=1,2} \sum_{j,k=1,2} \|\rho_i \partial_{jk}^2 u_{\lambda, i}\|_{0, \Omega_i} \lesssim \|f\|_{0, \Omega},$$

**Théorème 3.4.4** *Soit  $u$  la solution de (3.5). Alors pour tout  $i, j, k = 1, 2$ , on a*

$$(3.36) \quad \rho_i \partial_{jk}^2 u_i \in L^2(\Omega_i).$$

**Preuve:** Les estimations (3.10) et (3.35) signifient que  $u_{\lambda, i}$  appartient à l'espace de Hilbert  $H^{2, \vec{\delta}}(\Omega_i)$  défini par

$$H^{2, \vec{\delta}}(\Omega_i) = \{v \in H^1(\Omega_i); \rho_i D^\beta v \in L^2(\Omega_i), \forall \beta \in \mathbb{N}^2 : |\beta| = 2\}, i = 1, 2,$$

où  $\rho_i$  est défini précédemment ; cet espace étant muni de la norme

$$\|v\|_{2, \vec{\delta}, \Omega_i} = (\|v\|_{1, \Omega_i}^2 + \sum_{|\beta|=2} \|\rho_i D^\beta v\|_{0, \Omega_i}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme  $\delta_j \in ]0, 1[$ , d'après le lemme 8.4.1.2 de [24], l'immersion de  $H^{2, \vec{\delta}}(\Omega_i)$  dans  $H^1(\Omega_i)$  est compacte. Par conséquent on déduit avec les estimations uniformes (3.10) et (3.35) qu'il existe une sous suite  $\lambda_n$  et une fonction  $w_i \in H^{2, \vec{\delta}}(\Omega_i)$  telle que

$$\lim_{\lambda_n \rightarrow 0} u_{\lambda_n, i} = w_i \text{ dans } H^{2, \vec{\delta}}(\Omega_i) \text{ faiblement, } i = 1, 2,$$

et

$$\lim_{\lambda_n \rightarrow 0} u_{\lambda_n, i} = w_i \text{ dans } H^1(\Omega_i) \text{ fortement, } i = 1, 2.$$

Comme tout les  $u_{\lambda_n}$  sont dans  $H^1(\Omega)$ , la limite  $w$  aussi appartient à  $H^1(\Omega)$ . Donc on peut passer à la limite dans (3.8) et en suivant les arguments du théorème I.8 de [7], la limite  $w$  est la solution  $u$  de notre problème (3.5). ■

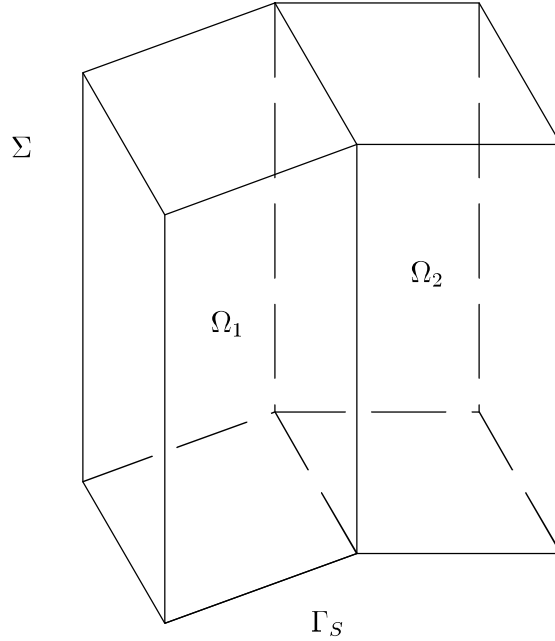


FIG. 3.2 – Le domaine  $\Omega$

### 3.5 Problèmes de transmission-Signorini en 3D avec conditions aux limites mêlées

Dans cette section on considère un domaine prismatique  $\Omega = \Omega^{(2)} \times (0, 1)$  en dimension 3, avec  $\Omega^{(2)}$  comme dans la section précédente (ici tout les objets en 2d sont spécifiés par la notation  $^{(2)}$ ). L'interface  $\Sigma^{(2)}$  de  $\Omega^{(2)}$  induit une interface en 3d  $\Sigma = \Sigma^{(2)} \times (0, 1)$  pour  $\Omega$  de sorte que  $\Omega$  reste décomposé en deux sous domaines  $\Omega_i, i = 1, 2$ . La frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  reste divisée en deux parties :  $\Gamma_S := \Gamma_S^{(2)} \times (0, 1)$  avec  $\Gamma_S^{(2)}$  comme dans la section 3.4 et  $\Gamma_D$  est le reste de la frontière, i.e.,  $\Gamma_D = \left(\Gamma_D^{(2)} \times (0, 1)\right) \cup \left(\Omega^{(2)} \times \{0\}\right) \cup \left(\Omega^{(2)} \times \{1\}\right)$  (voir Figure 3.2).

Dans cette section on veut décrire la régularité de la solution  $u$  de (3.5). On montrera que  $u$  a la régularité optimale dans la direction de l'arête et a un comportement singulier dans la direction perpendiculaire à l'arête. Des résultats similaires ont été obtenus pour les problèmes linéaires dans [25, 3].

Pour cette raison  $u$  est approchée par la suite des  $u_\lambda$  solution de (3.8). On montre d'abord que  $u_\lambda$  a une régularité optimale dans la direction de l'arête

**Théorème 3.5.1** *Pour tout  $i = 1, 2$ , on a*

$$(3.37) \quad \partial_{j3}^2 u_i \in L^2(\Omega_i), \forall j = 1, 2, 3.$$

De plus on a

$$(3.38) \quad \sum_{i=1,2} \sum_{j=1}^3 \|\partial_{j3}^2 u_i\|_{0,\Omega_i} \lesssim \|f\|_{0,\Omega}.$$

**Preuve:** La solution  $u_\lambda \in H_D^1(\Omega)$  de (3.8) peut être considérée comme la solution du problème de transmission non homogène dans  $\Omega$  avec donnée intérieure  $f \in L^2(\Omega)$ , donnée de bord de Neumann  $-\beta_{S,\lambda}(u_{\lambda,1}) \in H^{1/2}(\Gamma_S)$  et donnée de transmission  $-\beta_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1}) \in H^{1/2}(\Sigma)$  (grâce au lemme 3.4.1). Par conséquent par les arguments de la section 2 de [3] on obtient la régularité (3.37). Comme auparavant la difficulté est d'obtenir la dépendance uniforme en  $\lambda$ .

Dans une première étape on suppose que  $f \in H_0^1(\Omega)$ . On multiplie la première identité de (3.8) par  $\partial_3^2 u_{\lambda,i}$  et on intègre le résultat sur  $\Omega_i$ . Ceci donne

$$\sum_{i=1,2} p_i \int_{\Omega_i} (-\Delta u_{\lambda,i} + u_{\lambda,i}) \partial_3^2 u_{\lambda,i} dx = \sum_{i=1,2} p_i \int_{\Omega_i} f_i \partial_3^2 u_{\lambda,i} dx.$$

Dans ce membre gauche par intégration par parties en  $x_3$ , qui a un sens puisque  $-\Delta u_{\lambda,i} + u_{\lambda,i}$  appartient à  $H^1(\Omega_i)$ , on obtient

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1,2} p_i \int_{\Omega_i} \partial_3(-\Delta u_{\lambda,i} + u_{\lambda,i}) \partial_3 u_{\lambda,i} dx &+ \sum_{i=1,2} p_i \int_{\partial\Omega_i} (-\Delta u_{\lambda,i} + u_{\lambda,i}) \nu_{i,3} \partial_3 u_{\lambda,i} ds \\ &= \sum_{i=1,2} p_i \int_{\Omega_i} f_i \partial_3^2 u_{\lambda,i} dx. \end{aligned}$$

On remarque que les termes de bord sont nuls puisque sur les faces latérales  $\nu_{i,3} = 0$  et sur les faces du haut et du bas  $p_i(-\Delta u_{\lambda,i} + u_{\lambda,i}) = f_i = 0$ . Par conséquent l'identité précédente se réduit à

$$(3.39) \quad \sum_{i=1,2} p_i \int_{\Omega_i} \partial_3 \Delta u_{\lambda,i} \partial_3 u_{\lambda,i} dx = \sum_{i=1,2} p_i \int_{\Omega_i} (f_i \partial_3^2 u_{\lambda,i} + |\partial_3 u_{\lambda,i}|^2) dx.$$

Maintenant encore l'hypothèse sur  $f$  implique que  $\Delta u_{\lambda,i} \in H^1(\Omega_i)$  et donc le champ de vecteurs  $\mathbf{v} := (\partial_{3j}^2 u_{\lambda,i})_{j=1}^3$  appartient à

$$H(\operatorname{div}, \Omega_i) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega_i)^3 : \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega_i)\}.$$

Par la formule de Green (voir l'identité (I.2.17) de [20])

$$\int_{\Omega_i} (\operatorname{div} \mathbf{v} \varphi + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi) dx = \langle \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}, \varphi \rangle,$$

valable pour  $\mathbf{v} \in H(\text{div}, \Omega_i)$  et  $\varphi$  dans  $H^1(\Omega_i)$ , on obtient (en prenant  $\varphi = \partial_3 u_{\lambda,i}$  qui appartient à  $H^1(\Omega_i)$  grâce à (3.37)) :

$$\sum_{i=1,2} p_i \int_{\Omega_i} \partial_3 \Delta u_{\lambda,i} \partial_3 u_{\lambda,i} dx = - \sum_{i=1,2} p_i \int_{\Omega_i} \sum_{j=1}^3 |\partial_{3j}^2 u_{\lambda,i}|^2 dx + \sum_{i=1,2} p_i \langle \partial_3 \left( \frac{\partial u_{\lambda,i}}{\partial \nu_i} \right), \partial_3 u_{\lambda,i} \rangle.$$

En reportant cette identité dans (3.39) on obtient

$$(3.40) \quad \begin{aligned} & \sum_{i=1,2} p_i \int_{\Omega_i} \sum_{j=1}^3 |\partial_{3j}^2 u_{\lambda,i}|^2 dx - \sum_{i=1,2} p_i \langle \partial_3 \left( \frac{\partial u_{\lambda,i}}{\partial \nu_i} \right), \partial_3 u_{\lambda,i} \rangle \\ &= - \sum_{i=1,2} p_i \int_{\Omega_i} (f_i \partial_3^2 u_{\lambda,i} + |\partial_3 u_{\lambda,i}|^2) dx. \end{aligned}$$

En utilisant les conditions de transmission dans (3.8) on remarque que

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1,2} p_i \langle \partial_3 \left( \frac{\partial u_{\lambda,i}}{\partial \nu_i} \right), \partial_3 u_{\lambda,i} \rangle &= \langle - \sum_{i=1,2} p_i \partial_3 \left( \frac{\partial u_{\lambda,i}}{\partial \nu_i} \right), \partial_3 u_{\lambda,1} \rangle \\ &= \langle \partial_3 \beta_{\Sigma}(u_{\lambda,1}), \partial_3 u_{\lambda,1} \rangle \\ &= \langle \beta'_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1}) \partial_3 u_{\lambda,1}, \partial_3 u_{\lambda,1} \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

puisque  $\beta'_{\Sigma,\lambda} \geq 0$ . Cette propriété dans (3.40) conduit finalement à

$$(3.41) \quad \sum_{i=1,2} p_i \int_{\Omega_i} \sum_{j=1}^3 |\partial_{3j}^2 u_{\lambda,i}|^2 dx \leq - \sum_{i=1,2} p_i \int_{\Omega_i} f_i \partial_3^2 u_{\lambda,i} dx.$$

Par les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1,2} p_i \int_{\Omega_i} \sum_{j=1}^3 |\partial_{3j}^2 u_{\lambda,i}|^2 dx \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} p_i \|f_i\|_{0,\Omega_i}^2 \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} p_i \|\partial_3^2 u_{\lambda,i}\|_{0,\Omega_i}^2, \end{aligned}$$

qui est équivalent à

$$(3.42) \quad \sum_{i=1,2} p_i \int_{\Omega_i} \sum_{j=1}^3 |\partial_{3j}^2 u_{\lambda,i}|^2 dx \leq \sum_{i=1,2} p_i \|f_i\|_{0,\Omega_i}^2,$$

et n'est autre que (3.38).

Comme l'estimation (3.42) dépend seulement de la norme  $L^2$  de  $f$ , par la densité de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  on obtient le résultat pour tout  $f$  dans  $L^2(\Omega)$ . ■

Ce résultat avec le Théorème 3.4.3 permettent d'avoir

**Théorème 3.5.2** *Pour tout  $i = 1, 2$ , on a*

$$(3.43) \quad \rho_i \partial_{jk}^2 u_{\lambda,i} \in L^2(\Omega_i), \forall j, k = 1, 2,$$

avec l'estimation

$$(3.44) \quad \sum_{i=1,2} \sum_{j,k=1,2} \|\rho_i \partial_{jk}^2 u_{\lambda,i}\|_{0,\Omega_i} \lesssim \|f\|_{0,\Omega}.$$



**Preuve:** Pour presque tout  $x_3 \in (0, 1)$ ,  $u_\lambda(\cdot, x_3)$  peut être considéré comme la solution du problème en 2D :

$$(3.45) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_i(-\Delta_2 u_{\lambda,i} + u_{\lambda,i}) = f_i + p_i \partial_3^2 u_{\lambda,i} \text{ in } \Omega_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, \\ u_{\lambda,1} = u_{\lambda,2} \text{ on } \Sigma^{(2)}, \\ -(p_1 \frac{\partial u_{\lambda,1}}{\partial \nu_1} - p_2 \frac{\partial u_{\lambda,2}}{\partial \nu_1}) = \beta_{\Sigma,\lambda}(u_{\lambda,1}) \text{ on } \Sigma^{(2)}, \\ -p_1 \frac{\partial u_{\lambda,1}}{\partial \nu_1} = \beta_{S,\lambda}(u_{\lambda,1}) \text{ on } \Gamma_S^{(2)}, \\ u_\lambda = 0 \text{ on } \Gamma_D^{(2)}. \end{array} \right.$$

Par le Théorème 3.4.3 on obtient la régularité  $\rho_i \partial_{jk}^2 u_{\lambda,i}(\cdot, x_3) \in L^2(\Omega_i^{(2)})$ , et l'estimation (grâce à (3.35)).

$$\sum_{i=1,2} \sum_{j,k=1,2} \|\rho_i \partial_{jk}^2 u_{\lambda,i}(\cdot, x_3)\|_{0,\Omega_i^{(2)}} \lesssim \|f\|_{0,\Omega^{(2)}} + \sum_{i=1,2} \|\partial_3^2 u_{\lambda,i}\|_{0,\Omega_i^{(2)}},$$

pour presque tout  $x_3 \in (0, 1)$ .

On conclut en intégrant le carré de cette estimation en  $x_3$  et en utilisant l'estimation (3.38). ■

**Théorème 3.5.3** *Soit  $u$  la solution de (3.5). Alors pour tout  $i = 1, 2$ , on a*

$$(3.46) \quad \partial_{j3}^2 u_i \in L^2(\Omega_i), \quad \forall j = 1, 2, 3,$$

$$(3.47) \quad \rho_i \partial_{jk}^2 u_i \in L^2(\Omega_i), \quad \forall j, k = 1, 2.$$

**Preuve:** Arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve du Théorème 3.4.4. ■

## 3.6 Problèmes de transmission-Signorini en 2D avec conditions de Signorini au bord

Ici on considère un domaine polygonal  $\Omega$  en 2D comme dans la section 3.4. Mais on veut traiter le cas où  $\Sigma$  rencontre la frontière à l'intérieur de la partie de la frontière Signorini, par raison de simplicité, on suppose que  $\Gamma_S$  est la frontière de  $\Omega$  (voir Figure 3.3). On commence par la description de la régularité près de l'origine supposé être un point de  $\Sigma$  et de  $\Gamma_S$ . Dans ce cas les exposants singuliers du problème de transmission associé sont les racines de

$$(3.48) \quad p_2 \cos(\lambda\omega_1) \sin(\lambda\omega_2) + p_1 \cos(\lambda\omega_2) \sin(\lambda\omega_1) = 0.$$

On désigne par  $\lambda_1$  le plus petit exposant singulier.

Etant donné que dans ce cas l'inégalité de Poincaré de la section 3.2 n'est plus applicable on utilise un autre argument inspiré de la Proposition III.2.2 of [38]. D'abord on montre la régularité  $H^2$  quand les exposants singuliers du problème de transmission sont plus grand que 1. Dans le cas singulier, par un changement de variables on se ramène au premier cas et par changement de variables inverse on obtient le même résultat de régularité que dans le Théorème 3.4.4. On verra que cette méthode est seulement valide pour certains graphes maximaux particuliers  $\beta_S$  et  $\beta_\Sigma$ , mais incluant le cas standard de Signorini.

On commence par le cas régulier

**Théorème 3.6.1** Soit  $u$  la solution de (3.5). Supposons que  $\lambda_1 > 1$ . Alors pour tout  $i, j, k = 1, 2$ , on a

$$(3.49) \quad \partial_{jk}^2(\eta u_i) \in L^2(\Omega_i),$$

où  $\eta$  est la fonction de troncature introduite dans la section 3.4.

**Preuve:** Comme dans la section 3.4 on approche  $u$  par la suite des  $u_\lambda \in H_D^1(\Omega)$  solutions de (3.8). En posant  $u = \eta u_\lambda$ , on remarque que  $u$  est solution de (3.11). Par l'hypothèse  $\lambda_1 > 1$ ,  $u_i$  appartient à  $H^2(\Omega_i)$ ,  $i = 1, 2$ . On suivra les arguments du Théorème 3.4.2 mais avec  $\delta = 0$  (le cas  $p_1 = p_2$  et  $\beta_\Sigma = 0$  est exactement le cas traité par Grisvard dans [21, 22]). Par conséquent l'identité (3.17) a lieu mais avec  $I_1 = I_2 = 0$ , alors que l'estimation (3.21) a aussi lieu avec  $K = 0$ . Comme les estimations (3.22) et (3.27) restent valables on a l'estimation

$$\sum_{i=1,2} p_i \int_{C_i} |\nabla^2(\eta u_{\lambda,i})|^2 dx \lesssim \|f\|_{0,\Omega}^2.$$

En passant à la limite dans  $\lambda$  on obtient le résultat. ■

Notons que dans la preuve précédente on a pas utilisé l'inégalité de Poincaré puisque, avec la notation du Théorème 3.4.2  $I_3 = I_4 = I_5 = 0$ , et seulement l'estimation de ces termes nécessite l'inégalité de Poincaré.

Dans le cas singulier on suppose que le domaine  $\Omega$  est réduit au secteur tronqué  $C$  défini par

$$C = \{(r, \theta) : 0 < r < R, 0 < \theta < \omega\},$$

pour un  $R > 0$  fixé et on prend  $\Gamma_S$  pour la frontière de  $C$ . De plus on se restreint au cas où  $\beta_S$  et  $\beta_\Sigma$  vérifient

$$(3.50) \quad y\beta_S(x) = \beta_S(x), \forall x \in \mathbb{R}, y > 0,$$

$$(3.51) \quad y\beta_\Sigma(x) = \beta_\Sigma(x), \forall x \in \mathbb{R}, y > 0.$$

Un tel graphe est de la forme (voir Figure 3.3)

$$\beta_S(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x < 0, \\ ] -\infty, 0] & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } 0 < x < \beta'_S, \\ [0, +\infty[ & \text{si } x = \beta'_S, \\ \emptyset & \text{si } x > \beta'_S, \end{cases}$$

pour un certain  $\beta'_S \in (0, +\infty]$  (le cas  $\beta'_S = +\infty$  correspond à la condition de Signorini).

Soit  $K$  l'ensemble convexe défini par

$$K = \{v \in H^1(C) : 0 \leq v|_{\Gamma_S} \leq \beta'_S, 0 \leq v|_{\Gamma_\Sigma} \leq \beta'_\Sigma\}.$$

(0, 0)

$\beta'_S$

FIG. 3.3 – Le graphe  $\beta_S$

La formulation faible (3.7) de (3.5) est ici équivalente à trouver une solution  $u \in K$  de

$$(3.52) \quad a(u, v - u) \geq \int_C f(v - u) dx, \forall v \in K,$$

où  $a$  est la forme bilinéaire définie comme dans (3.6) en remplaçant le domaine  $\Omega$  par le domaine  $C$ .

**Théorème 3.6.2** *Sous les restrictions précédentes sur  $\Omega$ ,  $\beta_S$  et  $\beta_\Sigma$ , la solution  $u$  de (3.5) avec  $\Gamma_D = \emptyset$ , vérifie*

$$(3.53) \quad r^\delta \partial_{jk}^2 u_i \in L^2(\Omega_i), \forall i, j, k = 1, 2,$$

quand  $\delta > 1 - \lambda_1$  ( $\lambda_1$  étant décrite au début de cette section).

**Preuve:** Comme dans la Proposition III.2.2 de [38] on fait le changement de variables  $\rho = r^\alpha$  et  $\theta' = \alpha\theta$  avec un certain  $\alpha > 0$ . Ce changement de variables transforme le secteur  $C$  au secteur

$$C' = \{(\rho, \theta') : 0 < \rho < R^\alpha, 0 < \theta' < \alpha\omega\}.$$

On désigne par  $\Gamma'_S$  la frontière de  $C'$  et  $\Sigma' = \{(\rho, \alpha\omega_1) : 0 < \rho < R^\alpha\}$ . Posons  $U(\rho, \theta') = u(\rho^{\frac{1}{\alpha}}, \theta')$ ,  $U$  appartient au convexe  $K'$  défini par

$$K' = \{v \in H^1(C') : 0 \leq v|_{\Gamma'_S} \leq \beta'_S, v_1|_{\Gamma'_\Sigma} = v_2|_{\Gamma'_\Sigma}, 0 \leq v_1|_{\Gamma'_\Sigma} \leq \beta'_\Sigma\},$$

Des relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \alpha \rho^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \frac{\partial U}{\partial \rho}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \alpha \rho^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta'} \right), \end{aligned}$$

on remarque directement que la formulation faible (3.52) devient :  $U \in K'$  est solution de

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 p_i \int_{C'_i} \nabla U \nabla (V - U) dx + \sum_{i=1}^2 p_i \int_{C'_i} U_i (V_i - U_i) \alpha^{-2} \rho^{\frac{2(1-\alpha)}{2}} dx \\ \geq \int_{C'} f(\rho^{\frac{1}{\alpha}}, \theta') (V - U) \alpha^{-2} \rho^{\frac{2(1-\alpha)}{2}} dx, \forall V \in K', \end{aligned}$$

qui est la formulation faible de

$$(3.54) \quad \left\{ \begin{array}{l} -p_i \Delta U_i = F_i \text{ dans } C'_i, i = 1, 2, \\ U_1 = U_2 \text{ sur } \Sigma', \\ -(p_1 \frac{\partial U_1}{\partial \nu_1} - p_2 \frac{\partial U_2}{\partial \nu_1}) \in \beta_\Sigma(U_1) \text{ sur } \Sigma', \\ -p_i \frac{\partial U_i}{\partial \nu_i} \in \beta_S(U_1) \text{ sur } \Gamma'_S, \end{array} \right.$$

où  $F \in L^2(C')$  est donné par

$$F_i(\rho, \theta') = \alpha^{-2} \rho^{\frac{2(1-\alpha)}{\alpha}} \left( f_i(\rho^{\frac{1}{\alpha}}, \frac{\theta'}{\alpha}) - p_i u_i(\rho^{\frac{1}{\alpha}}, \frac{\theta'}{\alpha}) \right).$$

On remarque de plus que par changement de variables on montre facilement que

$$(3.55) \quad \|F\|_{0,C'} \lesssim \|f\|_{0,C} + \|u\|_{0,C}.$$

Pour ce nouveau problème les exposants singuliers  $\lambda'$  de (3.48) sont ici les racines de

$$p_2 \cos(\lambda' \omega'_1) \sin(\lambda' \omega'_2) + p_1 \cos(\lambda' \omega'_2) \sin(\lambda' \omega'_1) = 0.$$

Comme  $\omega'_i = \alpha \omega_i$ , on déduit que

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\alpha},$$

où  $\lambda$  est une racine de (3.48). Choisisant maintenant  $\alpha$  tel que

$$\frac{\lambda_1}{\alpha} > 1$$

le problème (3.54) est dans le cadre du Théorème 3.6.1. De ce théorème on déduit que (en coordonnées cartésiennes)

$$(3.56) \quad \partial_{jk}^2 U_i \in L^2(C'_i), \forall i, j, k = 1, 2.$$

Ceci clairement implique que

$$(3.57) \quad \rho^\gamma \partial_{jk}^2 U_i \in L^2(C'_i), \forall i, j, k = 1, 2,$$

avec  $\gamma = \frac{\delta-1+\alpha}{\alpha}$  qui est positif si  $\alpha$  est choisi de sorte que  $\alpha > 1 - \delta$  (ce qui est toujours possible). Fixons une fonction de troncature radiale  $\psi$  telle que  $\psi(\rho) = 1$  pour  $0 < \rho < R'$  et  $\psi(\rho) \equiv 0$  pour  $R'' < \rho$ , pour un certain  $R' < R'' < R^\alpha$ . On écrit maintenant

$$\rho^{-1} \partial_k(\psi U_i)(\rho, \theta') = -\rho^{-1} \int_\rho^\infty \frac{\partial}{\partial \rho} (\partial_k(\psi U_i))(s, \theta') ds.$$

Par (3.57) et la régularité  $H^1$  de  $U$ , pour presque tout  $\theta'$  la fonction  $\frac{\partial}{\partial \rho} (\partial_k(\psi U_i))(\cdot, \theta')$  appartient à  $L_{2, \gamma+1/2}(\mathbb{R}_+)$  (voir section 3.2). Avec la notation de [24, p. 28], l'identité précédente signifie que

$$\rho^{-1} \partial_k(\psi U_i)(\rho, \theta') = L\left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\partial_k(\psi U_i))(\cdot, \theta')\right)(\rho),$$

et par l'inégalité de Hardy on obtient que

$$\|\rho^{-1} \partial_k(\psi U_i)(\rho, \theta')\|_{L_{2, \gamma+1/2}(\mathbb{R}_+)} \leq \gamma^{-1} \left\| \frac{\partial}{\partial \rho} (\partial_k(\psi U_i))(\cdot, \theta') \right\|_{L_{2, \gamma+1/2}(\mathbb{R}_+)},$$

puisue  $\gamma > 0$ . En intégrant le carré de cette identité en  $\theta'$  on obtient

$$\rho^{\gamma-1} \partial_k U_i \in L^2(C'_i), \forall i, k = 1, 2.$$

De la définition de  $\gamma$  cette régularité signifie que

$$(3.58) \quad \rho^{\frac{\delta-1}{\alpha}} \partial_k U_i \in L^2(C'_i), \forall i, k = 1, 2.$$

Par changement de variables inverse on obtient

$$(3.59) \quad \int_{C_i} r^{2\delta-2} |\nabla u_i|^2 r dr d\theta \leq \int_{C'_i} \rho^{\frac{2\delta-2}{\alpha}} |\nabla U_i|^2 \rho d\rho d\theta' < \infty,$$

grâce à (3.58). De même les expressions

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} &= \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} \frac{\partial U_i}{\partial \rho} + \alpha^2 r^{2\alpha-2} \frac{\partial^2 U_i}{\partial \rho^2}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_i}{\partial r \partial \theta} &= \alpha^2 r^{2\alpha-2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 U_i}{\partial \rho \partial \theta'}, \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta^2} &= \alpha^2 r^{2\alpha-2} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U_i}{\partial \theta'^2}, \end{aligned}$$

et (3.58) donnent

$$(3.60) \quad \int_{C_i} r^{2\delta} \left( \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} \right|^2 + \left| \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_i}{\partial r \partial \theta} \right|^2 + \left| \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \theta^2} \right|^2 \right) r dr d\theta < \infty.$$

La conclusion en découle des régularités (3.59) et (3.60) et de l'estimation

$$|\partial_{jk}^2 u| \lesssim \left| \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right| + \left| \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \right| + \left| \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right| + \frac{1}{r} |\nabla u|.$$

■

**Remarque 3.6.3** Clairement le résultat précédent et les arguments de la section 3.5 permettent de décrire la régularité de l'arête du problème de transmission en 3D avec condition de bord de Signorini le long de l'arête.

# Chapitre 4

## Etude d'un problème de transmission dans un cylindre avec arête par la théorie des sommes d'opérateurs linéaires

### 4.1 Introduction

Soit  $\mathcal{B} = G \times \mathbb{R}$  où  $G$  est le secteur borné d'ouverture  $w > 0$  défini par

$$G = \{(r \cos \theta, r \sin \theta); 0 < \theta < \omega, 0 < r < 1\}.$$

Il est bien connu que la solution variationnelle du problème de Dirichlet

$$(4.1) \quad \begin{cases} -\Delta u & = & f & \text{dans } \mathcal{B} \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\mathcal{B}, \end{cases}$$

où  $f \in L^p(\mathcal{B})$ , n'a pas la régularité optimale  $W^{2,p}(\mathcal{B})$ . Cette solution admet la décomposition

$$(4.2) \quad u = u_R + cS.$$

où  $u_R \in W^{2,p}(\mathcal{B})$ ,  $S$  est la fonction dite singulière qu'on peut écrire explicitement dans ce cas, et  $c$  une constante qui dépend continûment de la donnée  $f$ , voir [24].

Dans le cas hilbertien ( $p = 2$ ), la technique utilisée repose essentiellement sur la transformée de Fourier partielle et le théorème de Plancherel. Malheureusement, dans le cas général  $p \neq 2$ , la substitution du théorème de Plancherel n'aboutit pas à des résultats optimaux sur la régularité de la solution  $u$ .

Dans ce cas ( $p \neq 2$ ), la décomposition (4.2) a été obtenue par Clément-Grisvard [13] grâce à l'utilisation de la théorie des sommes d'opérateurs dans un espace de Banach, introduite par Da Prato-Grisvard [15] et également par Dore-Venni [18].

Ces deux théories se complètent pour aboutir à des résultats optimaux de régularité et de singularité de la solution de (4.1). D'abord, l'application de la théorie des sommes d'opérateurs de Da Prato-Grisvard permet d'assurer l'existence et l'unicité d'une solution forte de (4.1) s'écrivant explicitement grâce à l'intégrale de Dunford (4.4). En utilisant les résultats de régularité en dimension deux de la solution du problème avec paramètre  $\lambda$

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u & = & f & \text{dans } G \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial G, \end{cases}$$

la solution de (4.1) est décomposée comme suit

$$u = u_R + \sum_{j < \frac{2\omega}{\pi p'}} v_j$$

avec  $v_j = (K_j \star q_j)\varphi_j$  où  $q_j \in W^{2/p' - j\pi/\omega, p}(\mathbb{R})$ ,  $K_j$  sont les noyaux de convolution appropriés (voir Théorème 4.5.3) et

$$\varphi_j(r, \theta) = r^{\frac{j\pi}{\omega}} \sin \frac{j\pi\theta}{\omega}$$

près de l'origine. Ensuite on prouve que  $\Delta v_j \in L^p(\mathcal{B})$ , par conséquent  $u_R$  peut être considérée comme la solution de l'équation

$$\Delta v_R - v_R = g_R$$

où  $g_R = f - \sum_{j < \frac{2\omega}{\pi p'}} \Delta v_j - v_R \in L^p(\mathcal{B})$ . A cette étape, on applique la théorie des sommes d'opérateurs de Dore-Venni pour obtenir la régularité  $W^{2,p}(\mathcal{B})$  de  $u_R$ .

Dans ce chapitre, on suppose que  $G$  est constitué de deux secteurs plan bornés  $G_1, G_2$  d'ouvertures respectives  $\omega_*$  et  $\omega - \omega_*$ , séparés par une interface  $\Sigma$ .

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(r \cos \theta, r \sin \theta); 0 < \theta < \omega_*, 0 < r < 1\} \\ G_2 &= \{(r \cos \theta, r \sin \theta); \omega_* < \theta < \omega, 0 < r < 1\} \\ \Sigma &= \{(r \cos \omega_*, r \sin \omega_*); 0 < r < 1\}. \end{aligned}$$

On considère le problème de transmission suivant

$$(4.3) \quad \begin{cases} -\Delta u_i &= f_i & \text{dans } G_i \times \mathbb{R} \\ u_i &= 0 & \text{sur } (\partial G_i \setminus \Sigma) \times \mathbb{R} \\ u_1 &= u_2 & \text{sur } \Sigma \times \mathbb{R} \\ \sum_{i=1}^2 \alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial \nu_i} &= 0 & \text{sur } \Sigma \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

$\nu_i$  désigne la normale à  $\Sigma \times \mathbb{R}$  vers l'extérieur de  $G_i \times \mathbb{R}$ ,  $u_i$  est la restriction de  $u$  sur  $G_i \times \mathbb{R}$ ,  $f \in L^p(G \times \mathbb{R})$ , et  $\alpha_1, \alpha_2$  sont deux nombres réels différents et strictement positifs.

Notre but est de montrer la validité de la décomposition (4.2) pour la solution variationnelle de (4.3) dans le cas  $p \neq 2$ . Seulement ici, à cause de l'interface, la partie régulière  $u_R$  appartiendra à  $PW^{2,p}(\mathcal{B})$ , où

$$PW^{2,p}(\mathcal{B}) := \{u \in H^1(\mathcal{B}); u_i \in W^{2,p}(\mathcal{B}_i), i = 1, 2\}$$

est l'espace des fonctions  $W^{2,p}$  par morceaux sur  $\mathcal{B}$ .

La décomposition (4.2) de la solution de (4.3) dans le cas  $p = 2$  a été obtenue par [29]. Le chapitre est organisé comme suit

Dans la section 4.2, on rappelle les résultats des deux stratégies des sommes d'opérateurs, celle de [15] qui repose sur la forme explicite suivante de l'inverse de la somme de deux opérateurs  $A$  et  $B$

$$(4.4) \quad (A + B)^{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (A + \lambda)^{-1} (B + \lambda)^{-1} d\lambda$$

sous des hypothèses appropriées sur les résolvantes de  $A$  et  $B$  et sur le contour  $\gamma$ , et celle de [18] se basant sur la formule

$$(4.5) \quad (A + B)^{-1} = \frac{1}{i\pi} \int_{\gamma} \frac{A^{-z} B^{z-1}}{\sin \pi z} dz$$

sous des hypothèses appropriées sur les puissances imaginaires de  $A$  et  $B$ .

A la section 4.3, on considère le problème de transmission avec paramètre complexe  $\lambda$

$$(4.6) \quad \begin{cases} -\Delta u_i + \lambda u_i & = f_i & \text{dans } G_i \\ u_i & = 0 & \text{sur } \partial G_i \setminus \Sigma \\ u_1 & = u_2 & \text{sur } \Sigma \\ \sum_{i=1}^2 \alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial \nu_i} & = 0 & \text{sur } \Sigma, \end{cases}$$

où  $f \in L^p(G)$ ,  $1 < p < +\infty$ ,  $\nu_i$  désigne la normale à  $\Sigma$  vers l'extérieur de  $G_i$ ,  $u_i$  la restriction de  $u$  sur  $G_i$ .

Par analogie avec [1] qui a considéré le problème de Dirichlet (sans interface), on établira l'estimation :

$$(4.7) \quad \|u\|_{0,p} \leq \frac{c(p)}{|\lambda|} \|f\|_{0,p} \quad \Re \lambda \geq 0, \quad \lambda \neq 0$$

pour tout  $1 < p < \infty$ , et on déduit que l'opérateur  $A_p$  défini par

$$A_p : u \mapsto \{\Delta u_i\}_{i=1,2}$$

$$D_{A_p} = \{u \in H_0^1(G); \Delta u_i \in L^p(G_i), u_1 = u_2 \text{ et } \sum_{i=1}^2 \alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial \nu_i} = 0 \text{ sur } \Sigma\},$$

est générateur infinitésimal d'un semi-groupe à la fois analytique et de contractions fortement continu, propriété qui nous sera très utile pour montrer que  $A_p$  vérifie l'hypothèse concernant sa résolvante dans l'application de la première stratégie des sommes d'opérateurs, et celle concernant ses puissances imaginaires dans l'application de la deuxième stratégie.

La section 4.4 sera consacrée à l'étude du comportement de la solution du problème de transmission avec paramètre (4.6), qui n'est autre que l'image de la donnée  $f$  par la résolvante de  $A_p$ .

La solution est décomposée en partie régulière et partie singulière, et une estimation a priori de la partie régulière et des coefficients de singularité en fonction du paramètre  $\lambda$  et de la donnée  $f$  sera établie.

On aura généralisé au cas  $p \neq 2$  ( $1 < p < \infty$ ) le théorème 4.7 de [29] démontré pour  $p = 2$ , en d'autre termes on aura établi l'analogie du théorème 3.1 de [25] dans le cas transmission.

Dans la section 4.5, par analogie avec les sections 5 et 6 de [28], on appliquera respectivement les deux stratégies des sommes d'opérateurs à l'équation (4.3).



La première application nous permet en utilisant (4.4) et les résultats de la section 4.4, de décomposer la solution du problème en deux parties, mais ce n'est qu'en appliquant la deuxième stratégie qu'on arrive à montrer que c'est exactement la partie régulière et la partie singulière de la solution.

L'idée repose essentiellement sur l'écriture de l'équation (4.3) sous forme de somme de deux opérateurs à valeurs dans des espaces de Banach, l'un opérant sur la variable  $z$ , l'autre sur les variables  $x$  et  $y$ , ce qui remplace l'effet de la transformée de Fourier partielle réduisant la dimension de l'espace.

## 4.2 Sommes d'opérateurs linéaires

### 4.2.1 Première stratégie

Soient  $E$  un espace de Banach complexe et  $A, B$  deux opérateurs linéaires fermés de domaines respectifs  $D(A)$  et  $D(B)$  denses dans  $E$ .

Leur somme est définie par

$$Lx = Ax + Bx,$$

pour tout  $x \in D(L) = D(A) \cap D(B)$ .

On fera les hypothèses suivantes sur  $A$  et  $B$

**H<sub>1</sub>** Il existe des nombres positifs  $M_A, M_B, R, \theta_A, \theta_B, \theta_A + \theta_B > \pi$  et tels que les propriétés suivantes sont satisfaites

La résolvante  $\rho(-A)$  de  $-A$  contient le secteur tronqué

$$S_A = \{\lambda; |\lambda| \geq R, |\arg \lambda| \leq \theta_A\}.$$

La résolvante  $\rho(-B)$  de  $-B$  contient le secteur tronqué

$$S_B = \{\lambda; |\lambda| \geq R, |\arg \lambda| \leq \theta_B\},$$

et

$$\begin{aligned} \|(A + \lambda)^{-1}\| &\leq \frac{M_A}{|\lambda|}, & \forall \lambda \in S_A, \\ \|(B + \lambda)^{-1}\| &\leq \frac{M_B}{|\lambda|}, & \forall \lambda \in S_B. \end{aligned}$$

**H<sub>2</sub>** Le spectre  $\sigma(-A)$  de  $-A$  et  $\sigma(B)$  de  $B$  ne s'intersectent pas (et par conséquent  $\rho(-A) \cup \rho(B)$  coïncide avec le plan complexe tout entier).

**H<sub>3</sub>** Les résolvantes de  $A$  et  $B$  commutent, i.e.

$$(A + \lambda)^{-1}(B + \mu)^{-1} = (B + \mu)^{-1}(A + \lambda)^{-1}$$

pour tout  $\lambda \in \rho(-A)$  et tout  $\mu \in \rho(-B)$ .

Sous ces hypothèses on a

**Théorème 4.2.1** *Sous les hypothèses **H<sub>1</sub>**, **H<sub>2</sub>**, **H<sub>3</sub>**, l'opérateur  $\bar{L}$  (fermeture de  $L$ ) admet une inverse.*

Voir [15] pour la preuve.

L'inverse  $\bar{L}$  de  $L$  est défini par l'intégrale de Dunford (4.4) où  $\gamma$  est une courbe qui sépare  $\sigma(-A)$  et  $\sigma(B)$  et joint  $\infty e^{-i\theta_\gamma}$  à  $\infty e^{i\theta_\gamma}$  où  $\theta_\gamma$  est choisi tel que  $\pi - \theta_B < \theta_\gamma < \theta_A$ .

L'unique solution  $v \in D(\bar{L})$  de l'équation

$$\bar{L}v = (\overline{A+B})v = f$$

est appelée la solution forte de  $Lv = f$ .

Ceci signifie l'existence d'une suite  $v_n \in D(L)$  telle que  $v_n \rightarrow v$  et  $Lv_n \rightarrow f$  dans  $E$ .

## 4.2.2 Deuxième stratégie

On introduit d'autres hypothèses.

**H<sub>4</sub>**  $E$  est un espace *U.M.D.*

Ceci revient à supposer que la transformation de Hilbert est continue dans l'espace  $L^p(\mathbb{R}, E)$  pour tout  $p \in ]1, +\infty[$ .

En pratique tout espace  $L^p$  est *U.M.D.*

**H<sub>5</sub>**  $\exists M_A; \rho(A) \supset ]-\infty, 0]$  et

$$\|(A+t)^{-1}\| \leq \frac{M_A}{t+1}, \quad \forall t \geq 0,$$

$\exists M_B; \rho(B) \supset ]-\infty, 0]$  et

$$\|(B+t)^{-1}\| \leq \frac{M_B}{t+1}, \quad \forall t \geq 0.$$

**H<sub>6</sub>**  $A^{is} \in \mathcal{L}(E)$ ,  $B^{is} \in \mathcal{L}(E) \forall s \in \mathbb{R}$  et  $\exists K > 0$ ,  $\tau_A, \tau_B$  tels que

$$\tau_A + \tau_B < \pi,$$

$$\|A^{is}\| \leq K e^{|s|\tau_A} \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

$$\|B^{is}\| \leq K e^{|s|\tau_B} \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

où  $A^{is}$ ,  $B^{is}$  désignent les puissances complexes de  $A$  et  $B$  respectivement, (voir [35] pour une étude détaillée concernant les puissances complexes d'un opérateur). Le résultat essentiel prouvé dans [18] est donné par le théorème suivant

**Théorème 4.2.2** *Sous les hypothèses **H<sub>3</sub>**, **H<sub>4</sub>**, **H<sub>5</sub>** et **H<sub>6</sub>**, l'opérateur  $L$  est inversible.*

La construction explicite de l'inverse de  $L$  est donnée par l'intégrale (4.5) où  $\gamma$  est une ligne verticale quelconque contenue dans la bande  $0 < \Re z < 1$ .

### 4.3 Problème de transmission avec paramètre

On considère le problème de transmission (4.6). Soit  $a_\lambda$  la forme sesquilinéaire définie sur  $V \times V$  où  $V = H_0^1(G)$  par

$$a_\lambda(u, v) = \int_G \alpha \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} + \lambda u \bar{v} \right\} dx$$

où  $\alpha(x) = \alpha_i > 0$  pour  $x \in G_i$ ,  $i = 1, 2$ . Une formulation variationnelle du problème (4.6) est la suivante

trouver  $u \in V$  solution de

$$a_\lambda(u, v) = \int_G f \bar{v} dx \quad \forall v \in V.$$

Il est clair que la forme sesquilinéaire  $a_\lambda$  est continue sur  $V \times V$ , elle est aussi coercive pour  $\Re \lambda \geq 0$  grâce à l'inégalité de Poincaré. De plus, comme  $H_0^1(G) \subset L^{p'}$  et par suite  $L^p \subset H^{-1}(G) = V'$ , on déduit que  $f \in V'$ .

Par conséquent l'application du lemme de Lax-Milgram permet de conclure

**Lemme 4.3.1** *Pour tout  $f \in L^p(G)$ , il existe  $u \in H_0^1(G)$  unique solution de*

$$(4.8) \quad a_\lambda(u, v) = \int_G \alpha f \bar{v} dx \quad \forall v \in V, \quad \Re \lambda \geq 0.$$

Les singularités du problème (4.6) prennent la forme

$$S^{(m)} = \eta r^{\lambda_m} t_m(\theta),$$

où  $\lambda_m$  est supposé être non négative et  $\lambda_m^2$ ,  $t_m$  sont respectivement les valeurs propres et les vecteurs propres du problème de Sturm-Liouville suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} -t_m''(\theta) = \lambda_m^2 t_m(\theta) \quad \text{pour } \theta \in [0, w], \theta \neq w_* \\ t_m(w_* - 0) = t_m(w_* + 0), \\ \alpha_2 t_m'(w_* - 0) = \alpha_1 t_m'(w_* + 0) \\ t_m(0) = t_m(w) = 0. \end{array} \right.$$

Plus explicitement, le comportement singulier de la solution de (4.8) est donné par le théorème suivant

**Théorème 4.3.2** *Supposons que  $\lambda_m \neq \frac{2}{p'}$  pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ . Alors pour tout  $f \in L^p(G)$ , il existe une solution variationnelle unique  $u \in H_0^1(G)$  de (4.6) qui admet la décomposition*

$$(4.9) \quad u = u_0 + \sum_{\substack{\lambda_m \neq \frac{2}{p'} \\ \lambda_m \in ]0, \frac{2}{p'}[}} c_m S^{(m)}$$

où  $u_0 \in PW^{2,p}(G)$ , le coefficient  $c_m$  de la singularité  $S^{(m)}$  est donné par

$$(4.10) \quad c_m = \int_G \alpha(f - \lambda u) \overline{K^{(m)}} dx$$

avec  $K^{(m)} \in L^{p'}(G)$  défini par

$$(4.11) \quad K^{(m)} = \frac{1}{2\lambda_m} (S^{(-m)} - v^{(m)})$$

où  $S^{(-m)} = \eta r^{-\lambda_m} t_m(\theta)$  est la fonction dite singulière duale et  $v^{(m)} \in H_0^1(G)$  est la solution de

$$(4.12) \quad \Delta v_i^{(m)} = \Delta S_i^{(-m)} \quad \text{dans } G_i$$

**Preuve:** C'est une application directe du théorème 2.27 de [42]. ■

On voudrait établir l'estimation (4.7).

Pour  $p > 2$ , on va suivre la technique des sections 1 et 2 de [1] avec quelques adaptations que nécessite notre problème.

Pour  $1 < p < 2$ , on procédera par dualité.

**Premier cas :**  $p > 2$

On définit l'espace

$$F_p = \{u \in W^{1,p}(\Omega); \Delta u \in L^p(\Omega)\}, \quad p \geq 2.$$

$F_p$  est un espace de Banach avec la norme du graphe :

$$\|u\|_{F_p} = \|u\|_{1,p} + \|\Delta u\|_{0,p}.$$

On rappelle la formule de Green, voir par exemple [1].

**Théorème 4.3.3** Pour  $\Omega$  un domaine  $C^{1,1}$  polygonal,  $p > 2$ ,  $u \in F_p$  et  $v \in W^{1,p'}(\Omega)$  ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ) on a

$$(4.13) \quad \int_{\Omega} [v\Delta u + \nabla u \nabla v] dx = \sum_{j=1}^m \langle \gamma_j \frac{\partial u}{\partial \nu_j}, \gamma_j v \rangle$$

Le crochet à droite désigne la dualité entre  $W^{-\frac{1}{p},p}(\Gamma_j)$  et  $W^{1-\frac{1}{p'},p'}(\Gamma_j)$ .

L'opérateur  $A_p$  étant défini comme à la section 4.1, on énonce le théorème suivant qui donne une condition suffisante pour que l'estimation (4.6) ait lieu :

**Théorème 4.3.4** Si  $D_{A_p} \subset W^{1,p}(G)$ , on a

$$(4.14) \quad - \int_G \alpha \Delta u |u|^{p-2} \bar{u} dx = \frac{p}{2} \int_G \alpha |\nabla u|^2 |u|^{p-2} dx \\ + \frac{p-2}{2} \int_G \alpha |u|^{p-4} \bar{u}^2 (\nabla u)^2 dx.$$

**Preuve:** On définit

$$(4.15) \quad v = \begin{cases} |u|^{p-2}\bar{u} & \text{si } u \neq 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

Si  $u \in W^{1,p}(G)$  on a  $v \in W^{1,p'}(G)$  (voir [7, Appendice II]) et d'après [1] on a

$$\nabla (|u|^{p-2}\bar{u}) = \frac{p}{2}|u|^{p-2}\nabla\bar{u} + \frac{p-2}{2}|u|^{p-4}\bar{u}^2\nabla u.$$

Par application de la formule (4.13) on obtient

$$\begin{aligned} \int_G \alpha[v\Delta u + \nabla u \nabla v] dx &= \int_{\Sigma} \sum_{i=1}^2 \alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial \nu_i} |u_i|^{p-2} \bar{u}_i d\sigma \\ &= \int_{\Sigma} |u_1|^{p-2} \bar{u}_1 \sum_{i=1}^2 \alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial \nu_i} d\sigma \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

On est maintenant en mesure d'établir le résultat suivant

**Théorème 4.3.5** *Supposons que l'identité (4.14) ait lieu, alors on a*

$$(4.16) \quad \|u\|_{0,p} \leq \frac{1}{\Re \lambda} \|f\|_{0,p}, \quad \Re \lambda > 0,$$

$$(4.17) \quad \|u\|_{0,p} \leq \frac{p}{|\Im \lambda|} \|f\|_{0,p}, \quad \Im \lambda \neq 0.$$

Par conséquent il existe une constante  $c(p)$  telle que l'estimation (4.7) est vérifiée.

**Preuve:** La démonstration de (4.16) et (4.17) est similaire à [1], lemmes 1.8 et 1.9.

(4.7) est une conséquence immédiate de (4.16) et (4.17). ■

$G$  étant un domaine polygonal, il n'est pas alors évident que la condition  $D_{A_p} \subset W^{1,p}(G)$  soit vérifiée, on aura alors besoin du théorème 1.12 de [1] qui donne une condition plus faible que celle du théorème 4.3.4 pour que (4.14) soit vérifiée.

**Théorème 4.3.6** *Supposons qu'il existe  $s$  avec  $2 < s < p$  et  $D_{A_p} \subset W^{1,s}(G)$ , alors la formule de Green (4.14) a lieu.*

**Preuve:** L'hypothèse  $D_{A_p} \subset W^{1,s}(G)$  implique que  $u \in F_s$ , d'autre part les fonctions de  $W^{1,s}(G)$  sont bornées et par conséquent la fonction  $v$  définie par (4.15) appartient à  $W^{1,s'}(G)$ , où  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ , ce qui permet d'appliquer la formule de Green (4.13) d'où (4.14). ■

Pour obtenir l'estimation (4.7), il suffit alors de trouver un  $s > 2$  tel que  $D_{A_p} \subset W^{1,s}(G)$ . Or on sait que  $u$  appartient à l'espace engendré par  $PW^{2,p}(G)$  et un nombre fini de fonctions singulières qui se comportent comme  $r^{\lambda_m} t_m(\theta)$ ,  $0 < \lambda_m < \frac{2}{p}$  (voir théorème 4.3.2). Trouver  $s > 2$  tel que  $D_{A_p} \subset W^{1,s}(G)$  revient donc à trouver  $s > 2$  tel que  $r^{\lambda_m} t_m(\theta) \in W^{1,s}(G)$  ce qui équivaut à  $\frac{2}{s} > 1 - \lambda_m$ . Si  $1 - \lambda_m \leq 0$  ceci est vérifié  $\forall s \in \mathbb{R}$ , dans le cas contraire on aura  $r^{\lambda_m} t_m(\theta) \in W^{1,s}(G)$  pour tout  $s < \frac{2}{1-\lambda_m}$ . Comme  $\frac{2}{1-\lambda_m} > 2$  ( $\lambda_m > 0$ ), on vient de démontrer

**Théorème 4.3.7**  $\exists s > 2$  tel que  $D_{A_p} \subset W^{1,s}(G)$  et par conséquent on a les estimations (4.16), (4.17) et (4.7)  $\forall p > 2$ .

**Deuxième cas :**  $1 < p < 2$

On procède par dualité.

Soit  $1 < p < 2$  et soit  $u$  la solution variationnelle de (4.6). On a

$$(4.18) \quad \begin{aligned} \|\alpha u\|_{0,p} &= \sup_{\varphi \in L^{p'}(G)} \frac{\langle \alpha u, \varphi \rangle}{\|\varphi\|_{0,p'}} \\ &= \sup_{\varphi \in L^{p'}(G)} \frac{\int_G \alpha u \bar{\varphi} dx}{\|\varphi\|_{0,p'}}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 4.3.1, il existe  $u_\varphi \in H_0^1(G)$  unique solution de

$$a_{\bar{\lambda}}(u_\varphi, v) = \int_G \alpha \varphi \bar{v} \quad \forall v \in V,$$

de plus puisque  $p' > 2$ , d'après la partie précédente on a l'estimation

$$(4.19) \quad \|u_\varphi\|_{0,p'} \leq \frac{c}{|\lambda|} \|\varphi\|_{0,p'}$$

Revenons à (4.18) on obtient

$$\begin{aligned} \|\alpha u\|_{0,p} &= \sup_{\varphi \in L^{p'}(G)} \frac{\overline{a_{\bar{\lambda}}(u_\varphi, u)}}{\|\varphi\|_{0,p'}} \\ &= \sup_{\varphi \in L^{p'}(G)} \frac{a_\lambda(u, u_\varphi)}{\|\varphi\|_{0,p'}} \\ &= \sup_{\varphi \in L^{p'}(G)} \frac{\int_G \alpha f u_\varphi}{\|\varphi\|_{0,p'}} \\ &\leq \sup_{\varphi \in L^{p'}(G)} \frac{\|f\|_{0,p} \|u_\varphi\|_{0,p'}}{\|\varphi\|_{0,p'}}, \end{aligned}$$

l'estimation (4.7) en découle en utilisant (4.19).

Récapitulons : on a démontré le résultat suivant

**Théorème 4.3.8** Soit  $u \in H_0^1(G)$  la solution variationnelle de (4.8), alors pour tout  $1 < p < \infty$ ,  $u$  vérifie les estimations (4.16), (4.17) et (4.7).

**Corollaire 4.3.9** Pour tout  $1 < p < \infty$ ,  $A_p$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions fortement continu qui préserve la positivité.

**Preuve:** En effet : l'estimation (4.16) permet d'assurer d'une part que  $]0, \infty[ \subset \rho(A_p)$  et

$$\|(A_p - \lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda} \quad (\lambda > 0),$$

et d'autre part, que  $-A_p$  est non négatif.

Par conséquent en appliquant le théorème 1.3.4, on déduit que  $\overline{D(A_p)} = X$  puisque  $X = L^p(G)$  est réflexif. Ainsi en appliquant le théorème de Hille-Yosida, on en déduit que  $A_p$  est générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions fortement continu qu'on notera  $e^{-tA_p}$  pour  $t \geq 0$ . Pour terminer la démonstration on a besoin du lemme suivant

**Lemme 4.3.10** *Soit  $f \in L^p(G)$ ,  $\lambda > 0$  et  $u$  la solution variationnelle de (4.8), alors on a :*

$$f \geq 0 \Rightarrow u \geq 0.$$

**Preuve:** On écrit comme dans [39]  $u = u^+ - u^-$  où  $u^+ = \sup(0, u)$  et  $u^- = \sup(0, -u)$ . On a  $u^+$  et  $u^-$  appartiennent à  $H_0^1(G)$ .

Appliquant l'égalité variationnelle à  $v = u^-$  on obtient

$$\int_G \alpha \nabla(u^+ - u^-) \nabla \overline{u^-} dx + \lambda \int_G (u^+ - u^-) \overline{u^-} dx = \int_G \alpha f \overline{u^-} dx.$$

Ceci implique :

$$-\int_G \alpha |\nabla u^-|^2 dx - \lambda \int_G |u^-|^2 dx = \int_G \alpha f \overline{u^-} dx, \quad \lambda > 0.$$

Donc si  $f \geq 0$  on a  $u^- = 0$  d'où  $u = u^+ \geq 0$ . ■

Soit maintenant  $f \geq 0$ , par l'approximation de Yosida on obtient

$$\begin{aligned} e^{-tA_p} f &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{t\lambda A_p (\lambda - A_p)^{-1}} f \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{t[\lambda^2 (\lambda - A_p)^{-1} - \lambda]} f \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[ e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 (\lambda - A_p)^{-1}} f \right] \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[ e^{-\lambda t} \sum_{k \geq 0} \frac{(\lambda^2 t)^k}{k!} (\lambda - A_p)^{-k} f \right], \end{aligned}$$

le lemme 4.3.10 implique que  $(\lambda - A_p)^{-1} f \geq 0$  d'où  $e^{-tA_p} f \geq 0$  donc le semi-groupe de contractions correspondant préserve la positivité. ■

**Corollaire 4.3.11** *Pour tout  $1 < p < \infty$ ,  $A_p$  est générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique.*

**Preuve:** Se déduit immédiatement du théorème 1.3.12, puisque  $\overline{D(A_p)} = X$  et on a l'estimation (4.7). ■

## 4.4 Résolvante du problème de transmission dans un domaine à coins

Le but de cette partie est l'extension du théorème 4.7 de [29] aux normes  $L^p$  avec  $1 < p < \infty$ . On considère toujours le problème (4.6).

La solution variationnelle de (4.6) admet la décomposition (4.9), et le coefficient de singularité est donné par (4.10).

Afin d'obtenir une estimation a priori par rapport à  $\lambda$ , on commence par modifier l'expression (4.10) pour avoir une formule exacte en fonction de  $f$ .

**Lemme 4.4.1** *Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\exists T^{(m)} \in V$  solution de*

$$(4.20) \quad a_{\bar{\lambda}}(T^{(m)}, w) = \bar{\lambda} \int_G \alpha K^{(m)} \bar{w} dx, \quad \forall w \in V.$$

Par conséquent sous l'hypothèse du théorème 4.3.2 on a

$$(4.21) \quad c_m = \int_G \alpha f \overline{w^{(m)}} dx,$$

où

$$(4.22) \quad w^{(m)} = K^{(m)} - T^{(m)}.$$

**Preuve:** La relation (4.20) est une conséquence directe du lemme 4.3.1 puisque  $K^{(m)} \in L^{p'}(G)$ . D'après (4.10) et (4.20) on peut écrire

$$c_m = \int_G \alpha f \overline{K^{(m)}} dx - a_{\lambda}(u, T^{(m)}).$$

Comme  $u$  est solution du problème variationnel (4.8) et  $T^{(m)} \in V$  on peut donc écrire :

$$a_{\lambda}(u, T^{(m)}) = \int_G \alpha f \overline{T^{(m)}} dx.$$

(4.21) découle alors des deux identités précédentes. ■

L'étape suivante consiste à transformer  $w^{(m)}$  pour qu'on puisse estimer sa norme  $L^{p'}$  par rapport à  $\lambda$ . D'après (4.11) et (4.22), on peut écrire :

$$(4.23) \quad w^{(m)} = \psi_m - \phi_m$$

où

$$(4.24) \quad \psi_m = \frac{1}{2\lambda_m} \begin{cases} e^{-r\sqrt{\lambda}} S^{(-m)} & \text{si } \lambda_m < \frac{2}{p'} - 1 \\ e^{-r\sqrt{\lambda}} (1 + r\sqrt{\lambda}) S^{(-m)} & \text{si } \frac{2}{p'} - 1 \leq \lambda_m < \frac{2}{p'} \end{cases}$$

et  $\phi_m$  est le reste.

$\psi_m$  est défini de façon qu'on ait  $\psi_m$  et  $(-\Delta + \lambda)\psi_m$  dans  $L^{p'}(G)$ .

En effet, un calcul direct nous donne :

$$(4.25) \quad (-\Delta + \lambda)\psi_m = \begin{cases} (1 - 2\lambda_m)\sqrt{\lambda}\frac{\psi_m}{r} + r_m & \text{si } \lambda_m < \frac{2}{p'} - 1 \\ \lambda\frac{3-2\lambda_m}{1+r\sqrt{\lambda}}\psi_m + r_m & \text{si } \frac{2}{p'} - 1 \leq \lambda_m < \frac{2}{p'} \end{cases}$$



avec

$$r_m = \begin{cases} \frac{-\Delta\eta}{2\lambda_m} e^{-r\sqrt{\lambda}r^{-\lambda_m}t_m} - \frac{1}{\lambda_m} \vec{\nabla}\eta \vec{\nabla} \left( e^{-r\sqrt{\lambda}r^{-\lambda_m}t_m} \right) & \text{si } \lambda_m < \frac{2}{p'} - 1 \\ \frac{-\Delta\eta}{2\lambda_m} (1 + \sqrt{\lambda}r) e^{-r\sqrt{\lambda}r^{-\lambda_m}t_m} - \frac{r\sqrt{\lambda}}{\lambda_m} \vec{\nabla}\eta \vec{\nabla} \left( e^{-r\sqrt{\lambda}r^{-\lambda_m}t_m} \right) \\ + (e^{-r\sqrt{\lambda}r^{-\lambda_m}t_m}) \vec{\nabla}\eta & \text{si } \frac{2}{p'} - 1 \leq \lambda_m < \frac{2}{p'} \end{cases}$$

**Lemme 4.4.2** *Il existe une constante  $C > 0$  (indépendante de  $\lambda$  et  $m$ ) telle que :*

$$(4.26) \quad \|(-\Delta + \lambda)\psi_m\|_{L^{p'}(G)} \leq C|\sqrt{\lambda}|^{\lambda_m + \frac{2}{p'}}$$

**Preuve:** Les termes de  $r_m$  sont à décroissance exponentielle en  $\sqrt{\lambda}$  dans n'importe quelle norme, puisque  $\Delta\eta$  et  $\vec{\nabla}\eta$  s'annulent au voisinage du coin. Pour un certain  $\epsilon > 0$ , on peut donc démontrer que

$$(4.27) \quad \|r_m\|_{L^{p'}(G)} \leq C e^{-\epsilon\Re\sqrt{\lambda}}.$$

D'autre part, la forme explicite (4.24) de  $\psi_m$  nous permet d'écrire

$$\left\| \frac{\sqrt{\lambda}\psi_m}{r} \right\|_{0,p'}^{p'} \leq C \int_0^\infty |\sqrt{\lambda}|^{p'} e^{-p'r\Re\sqrt{\lambda}r^{-(\lambda_m+1)p'+1}} dr$$

si  $\lambda_m < \frac{2}{p'} - 1$ , et

$$\left\| \lambda \frac{3 - 2\lambda_m}{1 + r\sqrt{\lambda}} \psi_m \right\|_{0,p'}^{p'} \leq C \int_0^\infty |\lambda|^{p'} e^{-p'r\Re\sqrt{\lambda}r^{-\lambda_m p'+1}} dr$$

si  $\frac{2}{p'} - 1 \leq \lambda_m < \frac{2}{p'}$ .

Par le changement de variables  $s = r\Re\sqrt{\lambda}$ , il vient que

$$(4.28) \quad \begin{cases} \left\| \frac{\sqrt{\lambda}\psi_m}{r} \right\|_{0,p'} \leq C|\sqrt{\lambda}|^{\lambda_m + 2 - \frac{2}{p'}} & \text{si } \lambda_m < \frac{2}{p'} - 1, \\ \left\| \lambda \frac{3 - 2\lambda_m}{1 + r\sqrt{\lambda}} \psi_m \right\|_{0,p'} \leq C|\sqrt{\lambda}|^{\lambda_m + 2 - \frac{2}{p'}} & \text{si } \frac{2}{p'} - 1 \leq \lambda_m < \frac{2}{p'}. \end{cases}$$

Les estimations (4.27) et (4.28) impliquent (4.26) grâce à (4.25). ■

**Lemme 4.4.3** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$(4.29) \quad \|w^{(m)}\|_{0,p'} \leq C|\sqrt{\lambda}|^{\lambda_m - \frac{2}{p'}}$$

**Preuve:** D'après la décomposition (4.23) il suffit de prouver que  $\psi_m$  et  $\phi_m$  vérifient l'estimation (4.29).

Or la forme explicite de  $\psi_m$  donné par (4.24) implique facilement que

$$(4.30) \quad \|\psi_m\|_{0,p'} \leq C|\sqrt{\lambda}|^{\lambda_m - \frac{2}{p'}},$$

alors que  $\phi_m$  est considérée comme étant la solution variationnelle de (grâce à (4.12) et (4.20))

$$a_\lambda(\phi_m, w) = \int_G \alpha(-\Delta + \lambda)\psi_m \bar{w} dx \quad \forall w \in V.$$

Pour l'estimation de  $\phi_m$  en fonction de  $\lambda$ , nous suivons la technique de [25], nous écrivons  $\phi_m$  sous forme de deux fonctions comme suit

$$(4.31) \quad \phi_m = g_m + h_m$$

où  $g_m = -(1 - \eta)\varphi_m$  avec

$$\varphi_m = \begin{cases} e^{-r\sqrt{\lambda}} r^{-\lambda_m} t_m & \text{si } \lambda_m < \frac{2}{p'} - 1, \\ e^{-r\sqrt{\lambda}} (1 + r\sqrt{\lambda}) r^{-\lambda_m} t_m & \text{si } \frac{2}{p'} - 1 \leq \lambda_m < \frac{2}{p'}. \end{cases}$$

et  $h_m$  est la solution variationnelle de

$$\begin{cases} h_m \in H_0^1(G) \\ (-\Delta + \lambda)h_m = (-\Delta + \lambda)\varphi_m \end{cases}$$

Comme  $g_m$  s'annule au voisinage du coin, il est clair que

$$(4.32) \quad \|g_m\|_{0,p'} \leq C e^{-\epsilon R \sqrt{\lambda}}$$

pour un certain  $\epsilon > 0$ .

D'autre part on applique à  $h_j$  l'estimation (4.7) dérivée dans la section précédente

$$\|h_m\|_{0,p'} \leq \frac{C}{|\lambda|} \|(-\Delta + \lambda)\varphi_m\|_{0,p'}.$$

Il est clair que  $(-\Delta + \lambda)\varphi_m = (-\Delta + \lambda)\psi_m$  avec  $r_m = 0$  et  $\eta = 1$ . Il en résulte que  $(-\Delta + \lambda)\varphi_m$  vérifie aussi l'estimation (4.26) d'où :

$$(4.33) \quad \|h_m\|_{0,p'} \leq C |\sqrt{\lambda}|^{\lambda_m - \frac{2}{p'}}$$

(4.31) et (4.32) avec (4.33) nous donnent

$$\|\phi_m\|_{0,p'} \leq C |\sqrt{\lambda}|^{\lambda_m - \frac{2}{p'}}.$$

Cette dernière estimation avec (4.30) nous permettent de conclure l'estimation (4.29). ■

**Théorème 4.4.4** *Sous les hypothèses du théorème 4.3.2,  $u$  admet la décomposition*

$$(4.34) \quad u = u_R + \sum_{\frac{2}{p'} - 1 < \lambda_m < \frac{2}{p'}} c_m e^{-r\sqrt{\lambda}} S^{(m)} + \sum_{\lambda_m \leq \frac{2}{p'} - 1} c_m e^{-r\sqrt{\lambda}} (1 + r\sqrt{\lambda}) S^{(m)}$$

où  $u_R \in PW^{2,p}(G)$  satisfait à

$$(4.35) \quad \|u_R\|_{PW^{2,p}(G)} + |\sqrt{\lambda}| \|u_R\|_{W^{1,p}(G)} + |\lambda| \|u_R\|_{L^p(G)} \leq C \|f\|_{L^p(G)}$$

et  $c_m$  satisfait à :

$$(4.36) \quad |c_m| \leq C |\sqrt{\lambda}|^{\lambda_m - \frac{2}{p'}} \|f\|_{0,p}$$

**Preuve:** L'estimation (4.36) découle de (4.21) et (4.29).

Il nous reste à établir (4.35).

La décomposition (4.34) résulte de (4.9) en posant

$$\begin{aligned} u_R = u_0 & - \sum_{\frac{2}{p'}-1 < \lambda_m < \frac{2}{p'}} c_m (e^{-r\sqrt{\lambda}} - 1) S^{(m)} \\ & - \sum_{\lambda_m \leq \frac{2}{p'}-1} c_m \left[ e^{-r\sqrt{\lambda}} (1 + r\sqrt{\lambda}) - 1 \right] S^{(m)} \end{aligned}$$

parce qu'on peut facilement prouver que  $(e^{-r\sqrt{\lambda}} - 1)S^{(m)} \in PW^{2,p}(G)$  si  $\lambda_m > \frac{2}{p'} - 1$  alors que

$\left[ e^{-r\sqrt{\lambda}} (1 + r\sqrt{\lambda}) - 1 \right] S^{(m)} \in PW^{2,p}(G)$  si  $\lambda_m \leq \frac{2}{p'} - 1$ .

D'après le théorème 2.27 de [42] et le lemme de Pectre (Lemme 1.3.1), il s'ensuit

$$\|u_R\|_{PW^{2,p}(G)} \leq C \left\{ \|\Delta u_R\|_{L^p(G)} + \|u_R\|_{L^p(G)} \right\}$$

$$(4.37) \quad \leq C \left\{ \|(-\Delta + \lambda)u_R\|_{L^p(G)} + (1 + |\lambda|)\|u_R\|_{L^p(G)} \right\}$$

On applique à  $u_R$  l'inégalité (4.7)

$$(4.38) \quad \|u_R\|_{L^p(G)} \leq \frac{C}{|\lambda|} \|(-\Delta + \lambda)u_R\|_{L^p(G)}$$

Il suffit donc d'estimer  $(-\Delta + \lambda)u_R$  en norme  $L^p$ .

En effet : en utilisant (4.34) on obtient

$$\begin{aligned} (-\Delta + \lambda)u_R = f & - \sum_{\frac{2}{p'}-1 < \lambda_m < \frac{2}{p'}} c_m (-\Delta + \lambda) \left( e^{-r\sqrt{\lambda}} S^{(m)} \right) \\ & - \sum_{\lambda_m \leq \frac{2}{p'}-1} c_m (-\Delta + \lambda) \left[ e^{-r\sqrt{\lambda}} (1 + r\sqrt{\lambda}) - 1 \right] S^{(m)} \end{aligned}$$

En d'autres termes, on a à estimer

$$F_m = \begin{cases} (-\Delta + \lambda) \left( e^{-r\sqrt{\lambda}} S^{(m)} \right) & \text{si } \frac{2}{p'} - 1 < \lambda_m < \frac{2}{p'} \\ (-\Delta + \lambda) \left[ e^{-r\sqrt{\lambda}} (1 + r\sqrt{\lambda}) - 1 \right] S^{(m)} & \text{si } \lambda_m \leq \frac{2}{p'} - 1, \end{cases}$$

ce qui s'obtient directement

$$\|F_m\|_{L^p(G)} \leq C |\sqrt{\lambda}|^{\frac{2}{p'} - \lambda_m}$$

ceci avec (4.36) implique

$$(4.39) \quad \|(-\Delta + \lambda)u_R\| \leq \|f\|_{L^p(G)}.$$

Enfin on utilise l'inégalité de convexité usuelle pour l'estimation de  $\|u_R\|_{W^{1,p}(G)}$ .

En effet :

$$\|u_R\|_{W^{1,p}(G)} \leq \epsilon \|u_R\|_{PW^{2,p}(G)} + K \epsilon^{-1} \|u_R\|_{L^p(G)} \quad \forall \epsilon > 0.$$

Pour  $\epsilon = |\sqrt{\lambda}|^{-1}$  on obtient

$$(4.40) \quad |\sqrt{\lambda}| \|u_R\|_{W^{1,p}} \leq \|u_R\|_{PW^{2,p}(G)} + K|\lambda| \|u_R\|_{L^p(G)},$$

les estimations (4.37), (4.38), (4.39) et (4.40) permettent d'établir (4.35). ■

**Corollaire 4.4.5** *Sous les hypothèses du théorème 4.3.2,  $u$  admet la décomposition :*

$$(4.41) \quad u = u_R + \sum_{0 < \lambda_m < \frac{2}{p'}} c_m \psi_m(\lambda),$$

où

$$(4.42) \quad \psi_m(\lambda) = \begin{cases} e^{-r\sqrt{\lambda}} S^{(m)} & \text{si } \frac{2}{p'} - 1 < \lambda_m < \frac{2}{p'} \\ e^{-r\sqrt{\lambda}} (1 + r\sqrt{\lambda}) S^{(m)} & \text{si } \lambda_m \leq \frac{2}{p'} - 1, \end{cases}$$

et  $u_R \in PW^{2,p}(G)$ .

Le comportement de  $u_R$  et  $c_m$  par rapport à  $\lambda$  est donné par

$$(4.43) \quad \|u_R\|_{PW^{2,p}(G)} + |\lambda| \|u_R\|_{L^p(G)} + \sum_{0 < \lambda_m < \frac{2}{p'}} |\lambda|^{\frac{1}{p'} - \frac{\lambda_m}{2}} |c_m| \leq C \|f\|_{L^p(G)}$$

pour tout  $\lambda$  dans le secteur  $|\arg(\lambda)| \leq \theta_0$  où  $\theta_0 \in ]0, \pi[$  est un angle donné.

Avec la notation déjà introduite à la section 4.1, on peut écrire

$$u = (-A_p + \lambda)^{-1} f,$$

par conséquent la décomposition (4.41) implique une décomposition similaire de la résolvante de  $A_p$ .

On a

$$(4.44) \quad (-A_p + \lambda)^{-1} = R(\lambda) + \sum_{0 < \lambda_m < \frac{2}{p'}} T_m(\lambda) \otimes \psi_m(\lambda)$$

où  $R(\lambda)$  est l'opérateur linéaire continu de  $L^p(G)$  dans  $PW^{2,p}(G)$  défini par

$$u_R = R(\lambda) f$$

et  $T_m(\lambda)$  est la fonctionnelle linéaire continue sur  $L^p(G)$  défini par

$$(4.45) \quad c_m = T_m(\lambda) f.$$

L'estimation (4.43) implique

$$(4.46) \quad \|R(\lambda)\|_{L^p(G) \rightarrow PW^{2,p}(G)} + |\lambda| \|R(\lambda)\|_{L^p(G) \rightarrow L^p(G)} \leq C$$

et

$$(4.47) \quad \|T_m(\lambda)\|_{L^{p'}(G)} \leq C |\lambda|^{\frac{\lambda_m}{2} - \frac{1}{p'}}$$

pour tout  $\lambda$  tel que  $|\arg(\lambda)| \leq \theta_0$ .

## 4.5 Problème de transmission dans le cylindre

Soient  $\mathcal{B}$ ,  $\Sigma$ ,  $G_i$ , définis comme à la section 4.1 et soit  $\mathcal{B}_i = G_i \times \mathbb{R}$ . Le long de cette section, les variables dans  $G$  seront notées  $x$  et  $y$  ( $x + iy = re^{i\theta}$ ) et la troisième variable dans  $\mathcal{B}$  par  $z$ . Pour plus de clarté, on notera  $\Delta$  l'opérateur de Laplace en  $2d$  alors qu'on le notera  $\Delta$  en  $3d$ . Etant donné  $g \in L^p(\mathcal{B})$ , on cherche  $v$  si possible dans  $PW^{2,p}(\mathcal{B}) \cap W_0^{1,p}(\mathcal{B})$ , solution de

$$(4.48) \quad \begin{cases} \Delta v_i = g_i & \text{dans } \mathcal{B}_i \\ v_1 = v_2 & \text{sur } \Sigma \times \mathbb{R} \\ \sum_{i=1}^2 \alpha_i \frac{\partial v_i}{\partial \nu_i} = 0 & \text{sur } \Sigma \times \mathbb{R} \end{cases}$$

L'équation  $\Delta v_i = g_i$  peut être aussi écrite sous la forme

$$(4.49) \quad D_z^2 v_i + \Delta v_i = g_i \quad \text{dans } \mathcal{B}_i$$

### 4.5.1 Application de la première stratégie

On va appliquer le théorème 4.2.1 à l'équation (4.49). On commence par préciser l'espace  $E$  et les opérateurs  $A$  et  $B$ .

On choisit pour  $E$  l'espace

$$E = L^p(\mathcal{B}) = L^p(\mathbb{R}, X)$$

où

$$X = L^p(G),$$

et on définit les opérateurs  $A$  et  $B$  par

$$-Av = \{\Delta v_i\}_{i=1,2}$$

pour  $v \in D(A) = L^p(\mathbb{R}, D(A_p))$

$$-Bv = D_z^2 v$$

pour  $v \in D(B) = W^{2,p}(\mathbb{R}, X)$ .

Dorénavant, on désigne par  $C$  l'opérateur défini par :

$$Cv = D_z v$$

pour  $v \in D(C) = W^{1,p}(\mathbb{R}, X)$

On sait que  $\sigma(C) = i\mathbb{R}$  et pour  $\phi \in E$  on a :

$$(4.50) \quad [(C + \mu I)^{-1} \phi](t, \sigma) = \begin{cases} -\int_t^\infty e^{\mu(s-t)} \phi(s, \sigma) ds & \text{si } \Re \mu < 0 \\ \int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-s)} \phi(s, \sigma) ds & \text{si } \Re \mu > 0, \end{cases}$$

d'où l'on déduit l'estimation

$$(4.51) \quad \|(C + \mu I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{|\Re \mu|} \quad \forall \mu, \Re \mu \neq 0.$$

### Propriétés spectrales de $B$

La densité de  $D(B)$  dans  $E$  résulte du fait que  $D(B)$  contient l'espace  $C_0^\infty(\mathbb{R}, L^p(G))$ .

On peut écrire  $-B = P(C)$  où  $P$  est le polynôme  $P(z) = z^2$ .

De façon plus générale, si  $B$  est un polynôme de  $C$ , on a les lemmes suivants

**Lemme 4.5.1** *Soit  $-B = P(z)$  où  $P$  est le polynôme*

$$P(z) = z^2 + az + b$$

avec  $a, b$  réels. Alors on a :

(i)  $\sigma(-B) = \{-\xi^2 + ia\xi + b, \xi \in \mathbb{R}\}$

(ii) Il existe  $R > 0$  et  $\theta_B \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  tels que l'ensemble résolvant  $\rho(-B)$  contient le secteur

$$S_b = \{z \in \mathbb{C}; |z| \geq R, |\arg z| < \pi - \theta_B\}$$

(iii) Pour tout  $\lambda \in S_b$  on a

$$(4.52) \quad \|(B + \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} = O\left(\frac{1}{(\Re\sqrt{\lambda})^2}\right) \quad \forall \lambda \in S_b.$$

(vi) Pour  $b < 0$ , il existe  $M$  tel que

$$(4.53) \quad \|(B + t)^{-1}\| \leq \frac{M}{t + 1} \quad \forall t \geq 0$$

#### Preuve:

(i) résulte de l'application du théorème spectral.

(ii)  $\sigma(-B)$  est la parabole coupant l'axe des  $x$  au point  $b$ , tournée vers les  $x$  négatifs et donnée par l'équation :

$$y^2 = -a^2(x - b).$$

Les deux tangentes à cette parabole aux points de coordonnées  $(b - 1, a)$ ,  $(b - 1, -a)$  sont données par les équations :

$$y \pm a = \pm \frac{|a|}{2}(x - b + 1),$$

elles se coupent sur l'axe des  $x$  au point  $x = b + 1$  avec un angle  $\epsilon_B \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  de tangente  $\tan \epsilon_B = \frac{|a|}{2}$ , ainsi l'ensemble résolvant contient le secteur

$$\{z \in C; |z| > 0, |\arg[z - (b + 1)]| < \pi - \epsilon_B\}.$$

Donc pour  $\epsilon$  suffisamment petit,  $\exists R > 0$  ( $R = |z_0|$  où  $z_0$  représente le point d'intersection de la demi-droite  $|\arg z| = \pi - (\epsilon_B + \epsilon)$  avec la tangente à la parabole au point situé au dessus de l'axe des  $x$ ) tel que  $\rho(-B)$  contient le secteur

$$\{z \in C; |z| \geq R, |\arg z| < \pi - (\epsilon_B + \epsilon)\}.$$

(iii) Pour tout  $\lambda \in S_b$ , l'équation  $P(z) = \lambda$  admet les deux racines complexes :

$$z_{\pm}(\lambda) = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4(b - \lambda)}}{2},$$

où la racine carrée est la détermination analytique définie sur le plan privé de l'axe réel négatif. Donc

$$(4.54) \quad (B - \lambda)^{-1} = (C - z_+(\lambda))^{-1}(C - z_-(\lambda))^{-1}$$

Il est clair que  $z_{\pm}(\lambda) \simeq \pm\sqrt{\lambda}$  pour  $|\lambda|$  assez grand. Ainsi (4.52) résulte de (4.51) et (4.54).

(vi)  $b < 0$  implique que  $[0, \infty[ \subset \rho(-B)$ , ainsi l'opérateur  $B + t$  est inversible pour tout  $t \geq 0$ , (4.53) résulte de (4.52). ■

Le lemme 4.5.1 permet de conclure que dans notre cas particulier  $-B = D_z^2$ , l'opérateur  $B$  vérifie l'hypothèse  $\mathbf{H}_1$  et on a  $\sigma(-B) = ]-\infty, 0]$ .

### Propriétés spectrales de $A$

Les propriétés de  $A$  sont celle de sa réalisation  $-A_p$ . Grâce au corollaire 4.3.11, on sait que  $A_p$  est générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique, il résulte du théorème 1.3.12 qu'il existe  $0 < \tau \leq \frac{\pi}{2}$  tel que  $-A_p$  est sectoriel avec angle spectral  $\leq \frac{\pi}{2} - \tau < \frac{\pi}{2}$ .

Par conséquent  $A$  vérifie l'hypothèse  $\mathbf{H}_1$  pour un  $\frac{\pi}{2} < \theta_A < \pi$ .

D'autre part, il est facile de vérifier que l'opérateur  $A_2$  associé à la forme quadratique  $(u, v) \mapsto (\nabla u, \nabla v)_{\alpha}$  dans l'espace  $L^2(G)$  muni du produit scalaire

$$(u, v) \mapsto (u, v)_{\alpha} = \int_G \alpha uv dx,$$

est autoadjoint, positif et anticompat.

On en déduit que  $\sigma(A)$  ne contient que des valeurs propres isolées positives  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots$ , ainsi avec  $\sigma(-B) = ]-\infty, 0]$ , l'hypothèse  $\mathbf{H}_2$  est clairement vérifiée.

L'hypothèse de commutativité  $\mathbf{H}_3$  se déduit du lemme suivant

**Lemme 4.5.2** Avec  $B$  défini comme au lemme 4.5.1, les résolvantes de  $A$  et  $B$  commutent.

**Preuve:** Grâce à (4.54), il suffit de montrer que les résolvantes de  $A$  et  $C$  commutent.

Cela résulte immédiatement de la formule (4.50) de la résolvante de  $(-C)$  et de celle de  $A$  donnée par

$$[(A - \lambda I)^{-1} \varphi](t, \sigma) = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{\lambda_j - \lambda} \left[ \int_G \varphi(t, \xi) w_j(\xi) d\xi \times w_j(\sigma) \right]$$

où  $w_j$  est la fonction propre associée à la valeur propre  $\lambda_j$  et  $\varphi$  appartenant à un sous espace dense dans  $E$ . ■

Les hypothèses  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$ ,  $\mathbf{H}_3$  étant vérifiées, il s'en suit que l'opérateur somme  $L$  de  $A$  et  $B$  est fermable et sa fermeture  $\bar{L}$  est inversible.

Ceci assure l'existence et l'unicité d'une solution forte  $v \in D(\bar{L})$  de l'équation

$$-\bar{L}v = h$$

De plus,  $v$  est donnée explicitement par

$$(4.55) \quad v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (A + \lambda)^{-1} (\lambda - B)^{-1} h d\lambda,$$

où  $\gamma$  peut être pour l'instant, l'axe imaginaire avec un petit détour à droite pour séparer le spectre de  $-A$  et celui de  $B$ .

$\forall z$ , on peut écrire :

$$[(A + \lambda I)^{-1} h](z) = (-A_p + \lambda)^{-1} h(z),$$

où on a considéré  $h$  comme une fonction à valeur vectorielle de la variable  $z$  seulement.

Par conséquent, utilisant (4.44) on peut réécrire (4.55) comme suit

$$(4.56) \quad v = v_R + \sum_{0 < \lambda_m < \frac{2}{p'}} v_m$$

où

$$(4.57) \quad v_R = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R(\lambda) (\lambda - B)^{-1} h d\lambda$$

$$(4.58) \quad v_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \langle T_m(\lambda), (\lambda - B)^{-1} h \rangle \psi_m(\lambda) d\lambda$$

Dans ce qui suit, de façon similaire à la section 6 de [28], on va montrer que  $v_R \in PW^{2,p}(\mathcal{B})$  et donc elle est la partie régulière de  $v$ , tandis que  $v_m$  englobe le comportement singulier de  $v$ .

Notons qu'on diffère de [28] dans la définition de l'opérateur  $A$ , l'opérateur  $B$  étant le même. Ceci provient du fait que la fonction  $\alpha$  dépend seulement de  $\theta$ , ainsi l'interface n'agit pas sur la variable  $z$ . Ceci étant, pour l'étude de  $v_m$  et la régularité de  $\Delta v_m$ , on reprendra les paragraphes 6.3 et 6.4 de [28] sans aucun changement.

### Une étude directe de $v_m$

On va montrer le théorème suivant :

**Théorème 4.5.3** *Supposons que  $\frac{2}{p'} - \lambda_m$  n'est pas entier, alors il existe une fonction*

$$q_m \in W^{\frac{2}{p'} - \lambda_m, p}(\mathbb{R})$$

telle que :

$$(4.59) \quad v_m = (K_m * q_m) S_m$$

où

$$(4.60) \quad K_m(r, t) = \begin{cases} \frac{r}{\pi(t^2 + r^2)} & \text{pour } \lambda_m > 1 - \frac{2}{p} \\ \frac{2r^3}{\pi(t^2 + r^2)^2} & \text{pour } \lambda_m \leq 1 - \frac{2}{p} \end{cases}$$

et la convolution étant en  $t$ .



On montre d'abord la proposition suivante qui donne une représentation explicite de  $q_m$ , ceci nous permettra par la suite de prouver sa régularité.

**Proposition 4.5.4** *L'identité (4.59) a lieu avec*

$$(4.61) \quad q_m = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \langle T_m(\lambda); (\lambda - B)^{-1} h \rangle d\lambda.$$

**Preuve:** On suppose que  $h \in D(B)$ , espace dense dans  $L^p(\mathcal{B})$ . Donc on peut appliquer la transformation de Fourier partielle en  $z$  à (4.58). On obtient

$$\hat{v}_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \langle T_m(\lambda); \frac{\hat{h}}{\lambda - \tau^2} \rangle \psi_m(\lambda) d\lambda,$$

où  $\tau$  représente la variable duale de  $z$ .

La décroissance à l'infini de  $T_m(\lambda)$  et  $\psi_m(\lambda)$  due à (4.47) et (4.42) nous permet d'appliquer la formule de Cauchy. On obtient

$$\begin{aligned} \hat{v}_m &= -\langle T_m(\tau^2); \hat{h} \rangle \psi_m(\tau^2) \\ &= \begin{cases} -\langle T_m(\tau^2); \hat{h} \rangle e^{-r|\tau|} S^{(m)} & \text{si } \lambda_m > 1 - \frac{2}{p} \\ -\langle T_m(\tau^2); \hat{h} \rangle (1 + r|\tau|) e^{-r|\tau|} S^{(m)} & \text{si } \lambda_m \leq 1 - \frac{2}{p}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ceci peut être considéré comme la transformée de Fourier d'une convolution en  $z$ . On peut donc écrire

$$v_m = (K_m * q_m) S^{(m)}$$

où

$$\hat{q}_m = -\langle T_m(\tau^2); \hat{h} \rangle$$

et

$$\hat{K}_m = \begin{cases} e^{-r|\tau|} & \text{si } \lambda_m > 1 - \frac{2}{p} \\ (1 + r|\tau|) e^{-r|\tau|} & \text{si } \lambda_m \leq 1 - \frac{2}{p}. \end{cases}$$

Une application inverse de la formule de Cauchy montre que

$$\hat{q}_m = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \langle T_m(\lambda); \frac{\hat{h}}{\lambda - \tau^2} \rangle d\lambda,$$

et par conséquent

$$q_m = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \langle T_m(\lambda); (\lambda - B)^{-1} h \rangle d\lambda,$$

Par densité, cette identité est facilement étendue à  $h \in L^p(\mathcal{B})$ . ■

**Proposition 4.5.5** *L'application  $h \mapsto q_m$  est continue de  $W^{s,p}(\mathbb{R}, X)$  dans  $W^{s+\sigma,p}(\mathbb{R})$ , où  $\sigma = \frac{2}{p'} - \lambda_m$  et  $0 < s < 2 - \sigma$  (avec  $s \neq 1$  et  $s + \sigma \neq 1$ )*

**Preuve:** On utilise la caractérisation de  $W^{s,p}(\mathbb{R}, X)$  comme une interpolation réelle entre  $D(B) = W^{2,p}(\mathbb{R}, X)$  et  $L^p(\mathbb{R}, X)$ .

$h \in L^p(\mathbb{R}, X)$  appartient à  $W^{s,p}(\mathbb{R}, X)$  ssi (grâce à la définition 1.2.3 et la proposition 1.2.8)

$$(4.62) \quad \int_0^{+\infty} \|r^{\frac{s}{2}} B(B + \lambda I)^{-1} h\|^p \frac{dr}{r} < +\infty$$

en norme  $L^p(\mathbb{R}, X)$ , sur tout rayon  $\{\lambda; \lambda = re^{i\theta}\}$  dans  $\rho(-B)$  i.e.  $|\theta| < \pi$ .

On utilise une caractérisation similaire de l'espace  $W^{s+\sigma,p}(\mathbb{R})$ . Pour cela on désigne par  $N$  l'opérateur dans l'espace  $L^p(\mathbb{R})$  défini par

$$Nq = -D_t^2 q$$

pour  $q \in D(N) = W^{2,p}(\mathbb{R})$ . Suivant la même référence  $q \in L^p(\mathbb{R})$  appartient à  $W^{s+\sigma}(\mathbb{R})$  ssi

$$(4.63) \quad \int_0^{+\infty} \|t^{\frac{s+\sigma}{2}} N(N+t)^{-1} q\|^p \frac{dt}{t} < +\infty$$

en norme  $L^p(\mathbb{R})$ .

Il est clair que

$$N(N+t)^{-1} q_m = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \langle T_m(\lambda); B(B+t)^{-1}(\lambda-B)^{-1} h \rangle d\lambda,$$

par une autre application de la formule de Cauchy, on obtient

$$N(N+t)^{-1} q_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \langle T_m(\lambda); B(\lambda-B)^{-1} h \rangle \frac{d\lambda}{\lambda+t}.$$

Par (4.47) et le fait que  $B(B-\lambda)^{-1}$  reste borné quand  $\lambda \rightarrow 0$ , on peut remplacer le contour  $\gamma$  par l'axe imaginaire. Par conséquent

$$\begin{aligned} N(N+t)^{-1} q_m &= \frac{-1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \langle T_m(-iy); B(B+iy)^{-1} h \rangle \frac{dy}{t-iy} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \langle T_m(iy); B(B-iy)^{-1} h \rangle \frac{dy}{t+iy}. \end{aligned}$$

Les deux intégrales se comportent de façon similaire. On va montrer qu'elles vérifient (4.63). En effet, l'estimation (4.47) implique

$$\|T_m(iy)\| \leq K|y|^{-\frac{\sigma}{2}}$$

D'autre part on a

$$\|B(B \pm iy)^{-1}h\| \leq \eta(y)$$

où  $\int_0^{+\infty} y^{\frac{s+p}{2}} \eta(y)^p \frac{dy}{y} < +\infty$ .

Il s'en suit que, à une constante près  $t^{\frac{s+\sigma}{2}} N(N+t)^{-1}q_m$  est borné par

$$\begin{aligned} t^{\frac{s+\sigma}{2}} \int_0^{+\infty} y^{-\frac{\sigma}{2}} \eta(y) \frac{dy}{\sqrt{y^2+t^2}} &= \int_0^{+\infty} [y^{\frac{s}{2}} \eta(y)] \frac{t^{\frac{s+\sigma}{2}} y^{-\frac{s+\sigma}{2}}}{\sqrt{y^2+t^2}} dy \\ &= \int_0^{+\infty} y^{\frac{s}{2}} \eta(y) \frac{\left(\frac{t}{y}\right)^{\frac{s+\sigma}{2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{t}{y}\right)^2}} \frac{dy}{y}. \end{aligned}$$

C'est la convolution multiplicative de  $t \mapsto \frac{t^{\frac{s+\sigma}{2}}}{\sqrt{1+t^2}}$  avec la fonction  $y^{\frac{s}{2}} \eta(y)$  dont la  $p$  ème puissance est intégrable par rapport à la mesure  $\frac{dy}{y}$ . Le théorème de Young implique (4.63) si

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{s+\sigma}{2}}}{\sqrt{1+t^2}} \frac{dt}{t} < +\infty,$$

ce qui est vérifié quand  $\frac{s+\sigma}{2} < 1$ . ■

**Proposition 4.5.6** *Si  $\sigma$  n'est pas entier, l'application  $h \mapsto q_m$  est continue de  $B^{0,p}(\mathbb{R}, X)$  dans  $W^{\sigma,p}(\mathbb{R})$ .*

**Preuve:** Il est clair que l'application  $h \mapsto q_m$  commute avec la translation en  $z$ . On déduit de la proposition 4.5.5 qu'elle est aussi continue de  $W^{m+s,p}(\mathbb{R}, X)$  dans  $W^{m+s+\sigma,p}(\mathbb{R})$  pour  $m \in \mathbb{Z}$  et  $\sigma$  comme auparavant.

Une interpolation réelle implique la proposition 4.5.6, voir [48] pour la définition de l'espace de Besov  $B^{0,p}(\mathbb{R}, X)$ . ■

### Preuve du théorème 4.5.3

D'après un résultat de [44],  $L^p(\mathbb{R})$  est un sous espace de  $B^{0,p}(\mathbb{R})$  à injection continue. Ceci implique par le théorème de Fubini que  $L^p(\mathbb{R}, X)$  est un sous espace de  $B^{0,p}(\mathbb{R}, X)$ .

On conclut que  $h \mapsto q_m$  est continue de  $L^p(\mathbb{R}, X)$  dans  $W^{\sigma,p}(\mathbb{R})$ . ■

### Régularité de $\Delta v_m$

**Théorème 4.5.7** *L'application  $q_m \mapsto \Delta v_m$  est continue de  $W^{\sigma,p}(\mathbb{R})$  dans  $L^p(\mathcal{B})$ .*

**Preuve:** Soit

$$\begin{aligned} f_m &= \Delta v_m \\ &= \Delta(K_m * q_m)S^{(m)} \end{aligned}$$

La transformation de Fourier partielle en  $z$  implique

$$\begin{aligned}\hat{f}_m &= \Delta \hat{f}_m + (i\tau)^2 \hat{f}_m \\ &= \Delta(\hat{K}_m \cdot S^{(m)})\hat{q}_m - \tau^2(\hat{K}_m \cdot S^{(m)})\hat{q}_m \\ &= \begin{cases} -(2\lambda_m + 1)|\tau|e^{-r|\tau|}\hat{q}_m \frac{S^{(m)}}{r} & \text{si } \lambda_m > \frac{2}{p'} - 1 \\ -(2\lambda_m + 3)\tau^2 e^{-r|\tau|}\hat{q}_m S^{(m)} & \text{si } \lambda_m \leq \frac{2}{p'} - 1 \end{cases}\end{aligned}$$

On commence par considérer le cas le plus simple quand  $\lambda_m > 1 - \frac{2}{p}$ , et on introduit les noyaux définis par

$$\begin{aligned}\hat{H}(r, \tau) &= \tau e^{-r|\tau|} \\ \hat{L}(r, \tau) &= |\tau| e^{-r|\tau|}\end{aligned}$$

A une constante près, on a

$$f_m = \{L * q_m\} \frac{S^{(m)}}{r} = \{vp(\frac{1}{z}) * H * q_m\} \frac{S^{(m)}}{r},$$

d'où l'existence d'une constante  $C$  telle que

$$\|f_m\|_{L^p(\mathcal{B})} \leq C \|\{H * q_m\} \frac{S^{(m)}}{r}\|_{L^p(\mathcal{B})}.$$

On a

$$\begin{aligned}\hat{H}(r, \tau) &= \tau e^{-r|\tau|} \\ &= \tau \hat{K}_m = -i \hat{K}'_m\end{aligned}$$

ainsi  $H$  se comporte comme la dérivée en  $z$  du noyau  $K_m$ , par conséquent on a

$$(4.64) \quad |H(r, z)| = 0 \left( \frac{1}{r^2 + z^2} \right)$$

D'autre part, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(r, t) dt = \hat{H}(r, 0) = 0.$$

En posant  $g_m = \{H * q_m\} \frac{S^{(m)}}{r}$ , on a

$$\begin{aligned}g_m &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(r, s) q_m(z - s) ds \frac{S^{(m)}}{r} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(r, s) [q_m(z - s) - q_m(z)] ds \frac{\varphi_m}{r},\end{aligned}$$

et par conséquent (4.64) implique

$$|g_m| = 0 \left( r^{\lambda_m-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|q_m(z-s) - q_m(z)|}{r^2 + s^2} ds \right)$$

L'hypothèse  $q_m \in W^{\sigma,p}(\mathbb{R})$  signifie que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|q_m(z-s) - q_m(z)|^p}{s^{2p-\lambda_m p-1}} dz ds < +\infty,$$

ou de manière équivalente que  $K \in L^p(\mathbb{R})$  où

$$K(s)^p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|q_m(z-s) - q_m(z)|^p}{s^{2p-\lambda_m p-1}} dz.$$

On utilisera cette fonction  $K$  pour estimer  $g_m$ .

En majorant la norme de l'intégrale par l'intégrale de la norme, on obtient pour une constante  $C$ ,

$$\begin{aligned} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |g_m|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} &\leq C r^{\lambda_m-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|q_m(z-s) - q_m(z)|^p}{(r^2 + s^2)^p} dz \right)^{\frac{1}{p}} ds \\ &\leq C r^{\lambda_m-1} \int_{-\infty}^{+\infty} K(s) \frac{s^{2-\lambda_m-\frac{1}{p}}}{r^2 + s^2} ds. \end{aligned}$$

il s'en suit que

$$\begin{aligned} \left( \int_B |g_m|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left( \int_B |g_m|^p r dr d\theta dz \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C w^{\frac{1}{p}} \left[ \int_0^{+\infty} \left( r^{\lambda_m-1} \int_{-\infty}^{+\infty} K(s) \frac{s^{2-\lambda_m-\frac{1}{p}}}{r^2 + s^2} ds \right)^p r dr \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= C w^{\frac{1}{p}} \left[ \int_0^{+\infty} \left( r^{\lambda_m-1+\frac{2}{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K(s) s^{3-\lambda_m-\frac{1}{p}}}{r^2 + s^2} \frac{ds}{s} \right)^p \frac{dr}{r} \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= C w^{\frac{1}{p}} \left[ \int_0^{+\infty} \left( r^{\lambda_m-1+\frac{2}{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} K(s) \frac{s^{3-\lambda_m-\frac{1}{p}}}{r^2 + s^2} \frac{ds}{s} \right)^p \frac{dr}{r} \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= C w^{\frac{1}{p}} \left[ \int_0^{+\infty} \left( r^{\lambda_m-1+\frac{2}{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa \left( \frac{r}{s} \right) s^{\frac{1}{p}} K(s) \frac{ds}{s} \right)^p \frac{dr}{r} \right]^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

où le noyau  $\kappa$  est défini par

$$\kappa(r) = \frac{r^{\lambda_m - 1 + \frac{2}{p}}}{r^2 + 1}.$$

L'intégrale intérieure est la convolution multiplicative de  $\kappa$  avec la fonction  $s^{\frac{1}{p}}K$  dont la  $p$  ème puissance est intégrable par rapport à la mesure  $\frac{ds}{s}$ .

Le théorème de Young implique alors que  $g_m \in L^p(\mathcal{B})$  dès que  $\kappa$  est intégrable pour la mesure  $\frac{dr}{r}$ .

Cette dernière condition est équivalente à supposer que  $\lambda_m + \frac{2}{p} \in ]1, 3[$ , ce qui est vérifié puisqu'on a  $\lambda_m + \frac{2}{p} \in ]1, 2[$ .

Considérons maintenant le cas  $\lambda_m \leq 1 - \frac{2}{p}$ , dans ce cas

$$\hat{f}_m = -(2\lambda_m + 3)\tau^2 e^{-r|\tau|} \hat{q}_m S^{(m)}.$$

On définit le noyau  $M$  par

$$\hat{M}(r, \tau) = \tau^2 e^{-r|\tau|}.$$

Avec cette notation, on a à une constante près

$$f_m = \{M * q_m\} S^{(m)}$$

où  $M$  se comporte comme la dérivée seconde en  $z$  de  $K_m(r, z) = \frac{r}{\pi(r^2 + z^2)}$ , par conséquent

$$M(r, z) = 0 \left( \frac{1}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M(r, z) dz = \hat{M}(r, 0) = 0.$$

En procédant comme au premier cas, on obtient la preuve de la continuité de l'application  $q_m \mapsto \Delta v_m$ .

## 4.5.2 Application de la deuxième stratégie

Maintenant, on est en mesure de prouver la régularité de  $v_R$ .

Revenant à (4.56). On a

$$\Delta v_i = \Delta v_{R,i} + \sum_{\lambda_m < \frac{2}{p}} \Delta v_{m,i} \quad \text{dans } \mathcal{B}_i.$$

Par conséquent

$$(4.65) \quad \Delta v_{R,i} - v_{R,i} = g_{R,i} = f_i - \sum_{\lambda_m < \frac{2}{p}} \Delta v_{m,i} - v_{R,i}$$

$g_R \in L^p(\mathcal{B})$  par les théorèmes 4.5.3 et 4.5.7. D'autre part, (4.46) implique les estimations suivantes

$$\|R(\lambda)\|_{L^p(G) \rightarrow \Pi_{i=1}^2 L^p(G_i)} = 0 \left( \frac{1}{|\lambda|} \right)$$

$$\|R(\lambda)\|_{L^p(G) \rightarrow \Pi_{i=1}^2 W^{2,p}(G_i)} = O(1)$$

Par interpolation, on obtient en utilisant (1.9) et la Proposition 1.2.9

$$\begin{aligned} \|R(\lambda)\|_{L^p(G) \rightarrow \cdot} &= O\left(\frac{1}{|\lambda|^\epsilon}\right) \quad 0 < \epsilon < 1 \\ &\cdot = [\Pi_{i=1}^2 L^p(G_i), \Pi_{i=1}^2 W^{2,p}(G_i)]_{\epsilon,p} \\ &= [L^p(G_1), W^{2,p}(G_1)]_{\epsilon,p} \times [L^p(G_2), W^{2,p}(G_2)]_{\epsilon,p} \\ &= \Pi_{i=1}^2 W^{s,p}(G_i), \quad s = 2(1 - \epsilon). \end{aligned}$$

d'où

$$\|R(\lambda)\|_{L^p(G) \rightarrow PW^{s,p}(G)} = O\left(\frac{1}{|\lambda|^\epsilon}\right), \quad s < 2.$$

Ceci avec (4.52) montre que

$$(4.66) \quad v_R \in L^p(\mathbb{R}, PW^{s,p}(G))$$

Notons que  $u \in PW^{s,p}(G)$  ssi  $u_i \in PW^{s,p}(G_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

pour tout  $s < 2$ , puisque l'intégrale (4.57) converge dans cet espace grâce à l'estimation

$$\|R(\lambda)(\lambda - B)^{-1}h\|_{L^p(\mathbb{R}, PW^{s,p}(G))} = O\left(\frac{1}{|\lambda|^{1+\epsilon}}\right).$$

Nous allons appliquer le théorème 4.2.2 pour l'étude de l'équation (4.65), pour cela on écrit

$$D_z^2 v_{R,i} + \Delta v_{R,i} - v_{R,i} = g_{R,i}$$

On commence par préciser  $E$ ,  $A$  et  $B$ .

On définit l'espace  $E$  et l'opérateur  $A$  exactement comme à la section 4.5.1. On diffère dans la définition de l'opérateur  $B$ .

Soit  $B_1$  l'opérateur défini par

$$-B_1 v = D_z^2 v - v$$

pour  $v \in D(B_1) = W^{2,p}(\mathbb{R}, X)$ .

On va vérifier les hypothèses  $\mathbf{H}_3$ ,  $\mathbf{H}_4$ ,  $\mathbf{H}_5$  et  $\mathbf{H}_6$  du théorème 4.2.2.

En effet :

L'espace  $E$  est U.M.D et par conséquent  $\mathbf{H}_4$  a lieu.

Le lemme 4.5.2 implique, dans ce cas particulier  $P(z) = z^2 - 1$  que l'hypothèse de commutativité  $\mathbf{H}_3$  est vérifiée.

Une application directe de (vi), lemme 4.5.1 permet de conclure que l'opérateur  $B$  vérifie l'hypothèse  $\mathbf{H}_5$ .

De même que pour l'opérateur  $A$ , cette hypothèse est vérifiée grâce au théorème 4.3.8.

Reste à vérifier l'hypothèse  $\mathbf{H}_6$  pour  $A$  et  $B$ .

D'après le corollaire 4.3.9,  $A_p$  est générateur d'un semi-groupe de contractions qui préserve la positivité. Le théorème de Coifman-weiss [14] implique que

$$\exists K > 0 : \forall s \in \mathbb{R}, \|A_p^{is}\| \leq K(1 + |s|)e^{\frac{\pi}{2}|s|}.$$

Cette estimation assure seulement l'existence de deux constantes  $\epsilon$  et  $K(\epsilon)$  telles que

$$\exists K > 0 : \forall s \in \mathbb{R}, \|A_p^{is}\| \leq K(\epsilon)e^{(\epsilon + \frac{\pi}{2})|s|}.$$

On peut dire que  $A$  vérifie  $\mathbf{H}_6$  avec une constante  $\tau > \frac{\pi}{2}$ , ce qui n'est pas suffisant puisqu'on vise la somme de deux opérateurs.

Considérons le cas particulier  $p = 2$ .

$A_2$  est un opérateur non négatif et autoadjoint dans  $X = L^2(G)$ . Par conséquent  $A_2^{is}$  est une contraction pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , i.e.,

$$\|A_2^{is}\| = 1$$

Par interpolation, on déduit l'existence d'un  $\tau_A < \frac{\pi}{2}$  tel que

$$\|A_p^{is}\| = 0(e^{|s|\tau_A}).$$

D'autre part,  $(1 + \tau^2)^{is}$  est le symbol de l'opérateur  $(B_1)^{is}$ , par conséquent on a

$$\|(B_1)^{is}\| = 0(e^{|s|\epsilon})$$

pour tout  $\epsilon > 0$  par le théorème de Mikhlín.

On peut donc appliquer le théorème 4.2.2, ceci montre l'existence et l'unicité de

$$w_R \in D(L) = D(A) \cap D(B_1) = L^p(\mathbb{R}, D(A_p)) \cap W^{2,p}(\mathbb{R}, X),$$

solution de

$$Lw_R = g_R.$$

Il n'y a pas de raison pour que  $w_R$  coïncide avec  $v_R$ , cependant la différence

$$y_R = v_R - w_R$$

appartient à  $L^p(\mathbb{R}, H_0^1(G))$  et est solution de

$$D_z^2 u_i + \Delta u_i - u_i = 0, \quad \text{dans } \mathcal{B}_i$$

donc elle peut être développée suivant le système complet des fonctions propres  $w_j$  de l'opérateur  $A_2$  dans  $L^2$ , on obtient

$$(4.67) \quad y_R = \sum_{j \geq 1} (a_j e^{z c_j} + b_j e^{-z c_j}) w_j(\sigma),$$

où  $c_j^2 = \lambda_j + 1$ . Tout les coefficients  $a_j$  et  $b_j$  s'annulent puisque les exponentiels intervenant dans (4.67) n'appartiennent pas à  $L^p(\mathbb{R})$ . Ainsi  $y_R = 0$  et par conséquent

$$(4.68) \quad v_R = w_R \in L^p(\mathbb{R}, D(A_p)) \cap W^{2,p}(\mathbb{R}, X).$$

A première vue, ce n'est pas le résultat de régularité qu'on s'attendait à avoir pour  $v_R$ , puisque  $D(A_p)$  contient les solutions singulières. Cependant, grâce à (4.66) et (4.68) on obtient

$$v_R \in L^p(\mathbb{R}, PW^{s,p}(G)) \quad \text{pour tout } s < 2.$$

De plus, on peut facilement montrer le lemme suivant



**Lemme 4.5.8** *Pour  $s < 2$  suffisamment grand, on a*

$$D(A_p) \cap PW^{s,p}(G) \subset PW^{2,p}(G) \cap W_0^{1,p}(G)$$

**Preuve:** Soit  $u \in D(A_p) \cap PW^{s,p}(G)$ . Par définition de  $D(A_p)$ ,  $u$  s'annule sur  $\partial G$ . Il suffit donc de choisir  $s \geq 1$  pour avoir  $D(A_p) \cap PW^{s,p}(G) \subset W_0^{1,p}(G)$ .

D'autre part, si  $u \in D(A_p)$ , on peut l'écrire suivant (4.9)

$$u = u_0 + \sum_{0 < \lambda_m < 2/p'} c_m \eta r^{-\lambda_m} t_m(\theta).$$

Si on suppose de plus que  $u \in PW^{s,p}(G)$  pour  $s < 2$ , on obtient

$$\int_0^{w^*} \int_0^1 \frac{|r^{\lambda_m-1} t_m(\theta)|^p}{r^{2+\sigma p}} r dr d\theta < +\infty,$$

où  $\sigma$  est la partie fractionnelle de  $s$ , de sorte que  $s = \sigma + 1$ ,  $0 \leq \sigma < 1$ .

Cette intégrale converge si et seulement si  $\lambda_m > \sigma + 1$ . Or  $r^{\lambda_m} t_m(\theta) \in PW^{2,p}(G)$  ssi  $\lambda_m > 2/p'$ . Sachant que  $1 < 2/p' < 2$ , il suffit de choisir  $0 < \sigma < 1$  suffisamment grand de sorte que  $\sigma + 1 > 2/p'$ . ■

Par conséquent on a

$$v_R \in W^{2,p}(\mathbb{R}, X) \cap L^p(\mathbb{R}, W_0^{1,p}(G) \cap PW^{2,p}(G))$$

et donc  $v_{R,i} \in W^{2,p}(\mathbb{R}, L^p(G_i)) \cap L^p(\mathbb{R}, W^{2,p}(G_i))$ ,  $i = 1, 2$ .

Rappelons le lemme 4.4 de [28]

**Lemme 4.5.9** *Soit  $G$  un domaine ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  à frontière Lipschitzienne, alors*

$$W^{2,p}(\mathbb{R}, L^p(G)) \cap L^p(\mathbb{R}, W^{2,p}(G)) \subset W^{2,p}(\mathcal{B}).$$

**Preuve:** Il existe un opérateur de prolongement  $P$  qui injecte continûment

$$L^p(G) \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^n)$$

et

$$W^{2,p}(G) \text{ dans } W^{2,p}(\mathbb{R}^n).$$

Alors pour une fonction

$$u \in W^{2,p}(\mathbb{R}, L^p(G)) \cap L^p(\mathbb{R}, W^{2,p}(G)),$$

la fonction  $Pu$  appartient à

$$W^{2,p}(\mathbb{R}, L^p(\mathbb{R}^n)) \cap L^p(\mathbb{R}, W^{2,p}(\mathbb{R}^n)).$$

Cet espace coïncide avec  $W^{2,p}(\mathbb{R}^{n+1})$  par le théorème de Mikhlin. Par conséquent  $u$ , la restriction de  $Pu$  à  $\mathcal{B}$ , appartient à  $W^{2,p}(\mathcal{B})$ . ■

On en déduit de ce lemme que  $v_{R,i} \in W^{2,p}(\mathcal{B}_i)$ , et par conséquent  $v_R \in PW^{2,p}(\mathcal{B})$ .

La conclusion est la suivante

**Théorème 4.5.10** *Il existe  $v_R \in PW^{2,p}(\mathcal{B}) \cap W_0^{1,p}(\mathcal{B})$  et des fonctions  $q_m \in W^{\frac{2}{p'} - \lambda_m, p}(\mathbb{R})$  tels que la solution  $v$  du problème (4.48) admet la décomposition*

$$v = v_R + \sum_{\lambda_m < \frac{2}{p'}} (K_m * q_m) S^{(m)}$$

*où le noyau  $K_m$  est donné au théorème 4.5.3 et les fonctions singulières  $S^{(m)}$  sont données à la section 4.3.*

# Bibliographie

- [1] J.O. Adeyeye, *Generation of analytic semi-groups in  $L_p(\Omega)$  by the Laplace operator*, Bollettino Della UMI, Analisi Funzionale e Applicazioni, Série VI, Vol.IV-C, n°1, 113-128, 1985.
- [2] Th. Apel, *Anisotropic finite elements : Local estimates and applications*, Advances in Numerical Mathematics, Teubner, Stuttgart, 1999.
- [3] Th. Apel et S. Nicaise, Elliptic problems in domains with edges : anisotropic regularity and anisotropic finite element meshes, in J. Céa, D. Chenais, G. Geymonat, and J. L. Lions editors, *Partial Differential Equations and Functional Analysis (In Memory of Pierre Grisvard)*, 18-34, Birkhäuser, Boston, 1996.
- [4] Th. Apel et S. Nicaise, *The finite element method with anisotropic mesh grading for elliptic problems in domains with corners and edges*, Math. Methods Appl. Sci., **21**, 519-549, 1998.
- [5] J. Bailet, *Régularité de la solution d'un problème mêlé dans un domaine polygonal plan ou polyédral*, Ann. Fac. Sc. Toulouse, **5**, 5-27, 1996.
- [6] H. Blum et R. Rannacher, *On the boundary value problem of the biharmonic operator on domains with angular corners*, Math. Meth. in the Appl. Sci 2., 1980.
- [7] H. Brézis, *Problèmes unilatéraux*, J. Math pures et appl., **51** , 1-168, 1972.
- [8] H. Brezis, *Monotonicity in Hilbert spaces*, in : E. Zarantonello ed., Contributions to non-linear Analysis, Academic Press, 1971, 101-156.
- [9] F. Browder, *Non linear monotone operators and convex sets in Banach spaces*, Bull. Amer. math. Soc., **71**, 780-785, 1965.
- [10] R. Caccioppoli, *Limitazioni integrali per le soluzioni di un' equazione lineare ellittica*, Opere Scelte Vol. II, 263-296, Ed. Cremonese, 1963.
- [11] W. Chikouche et A. Aibeche, *Coefficients of singularities of the biharmonic problem of Neumann type : case of the crack*, Int. J. Math. Math. Sci., **5**, 305-313, 2003.
- [12] W. Chikouche; D. Mercier et S. Nicaise, *Regularity of the solution of some unilateral boundary value problems in polygonal and polyhedral domains*, Comm. in PDE, **28**, 1975-2001, 2003.
- [13] P. Clément et P. Grisvard, *Somme d'opérateurs et régularité  $L^p$  dans les problèmes aux limites*, C. R. Acad. Sci., Paris, **314**, 821-824, 1992.
- [14] R.R. Coifman et G. Weiss, *Transference methods in analysis*, C.B.M.S. regional conference series in Math. **31**, A.M.S., Providence, Rhode Island, 1977.
- [15] G. Da Prato et P. Grisvard, *Somme d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles*, J. Math. Pures Appl. IX Ser., **54**, 305-387, 1975.

- [16] M. Dauge, *Elliptic boundary value problems on corner domains*, L.N. in Math. **1341**, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [17] R. Dautray et J.L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique*, Masson. Paris., **3**, 1988.
- [18] G. Dore et A. Venni, *On the closedness of the sum of two closed operators*, Mathematische Zeitschrift., **196**, 270-286, 1987.
- [19] G. Geymonat et P. Grisvard, *Eigenfunctions expansions for non self adjoint operators, and separation of variables, in singularities and constructive methods for their treatment*, Lecture Notes in Math. **1121**, Springer-Verlag, Berlin, 123-136, 1983.
- [20] V. Girault et P.-A. Raviart, *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, Springer Series in Comp. Math. **5**, Springer-Verlag, 1986.
- [21] P. Grisvard, *Régularité de la solution d'un problème aux limites unilatéral dans un domaine convexe*, Séminaire Goulaouic-Schwartz, XVI, 1975-1976.
- [22] P. Grisvard et G. Iooss, *Problème aux limites unilatéral dans des domaines non réguliers*, Publications des Séminaires de Mathématiques de l'Université de Rennes, (**1**) **IX**, 1-26, 1976.
- [23] P. Grisvard, *Equations différentielles abstraites*, Annales de L'ENS, série 4, tome 2, 311-395, 1969.
- [24] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monographs and Studies in Mathematics **24**, Pitman, Boston, 1985.
- [25] P. Grisvard, *Edge behaviour of the solution of an elliptic problem*, Math. Nachr., **132**, 281-299, 1987.
- [26] P. Grisvard, *Problèmes aux limites dans les polygones*, Mode d'emploi. EDF, Bulletin de la direction des études et des recherches, Série C, Mathématiques informatique 1, 21-59, 1989.
- [27] P. Grisvard, *Singularities in boundary value problems*, Research notes in appl. Maths, **22**, Masson Springer-Verlag, 1992.
- [28] P. Grisvard, *Singular behaviour of elliptic problems in non Hilbertian Sobolev spaces*, J. Math. Pures Appl., **74**, 3-33, 1995.
- [29] B. Heinrich et S. Nicaise et B. Weber, *Elliptic interface problems in axisymmetric domains. Part I : Singular functions of non-tensorial type*, Math. Nachr, 1-19, 1995.
- [30] I. Hlavčėk, J. Haslinger, J. Nečas, J. Lovišek, *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*, Appl. Math. Sci. **66**, Springer-Verlag, 1988.
- [31] V. A. Kondrat'ev, *Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points*, Trans. Moscow Math. Soc., **16**, 209-292, 1967.
- [32] D. Leguillon et E. Sanchez-Palencia, *Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity*, **RMA 5**, Masson, 1991.
- [33] K. Lemrabet, *Régularité de la solution d'un problème de transmission*, J. Math. Pures et Appl., **56**, 1-38, 1977.
- [34] J. L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, **1** Dunod, Paris., 1968.

- [35] C. Martinez Carracedo and M. Sanz Alix, *The Theory of Fractional Powers of Operators*, Saul Lubkin, North-Holland, 2001.
- [36] D. Mercier, *Problèmes de transmission sur des réseaux polygonaux pour des systèmes d'EDP*, Ann. Fac. Sc. Toulouse, (1) **X**, 107-162, 2001.
- [37] D. Mercier et S. Nicaise, *Minimal regularity of the solution of some boundary value problems of Signorini's type in polygonal domains*, Preprint MACS, **02-08**, 2002, submitted.
- [38] M. Moussaoui, *Régularité des solutions d'un problème mêlé Dirichlet-Signorini dans un domaine polygonal plan*, Comm. in PDE, **17**, 805-826, 1992.
- [39] M. Moussaoui, *On the Resolution of the Heat Equation with Discontinuous Coefficients*, Semigroup Forum, **60**, 187-201, 2000.
- [40] C. Nazaret, *Equations intégrales de frontière pour des problèmes de plaque polygonale*, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 1996.
- [41] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson. Paris., 1967.
- [42] S. Nicaise, *Polygonal interface problems*, Peter Lang, Berlin, 1993.
- [43] S. Nicaise et A.-M. Sändig, *General interface problems I,II*, Math. Meth. Appl. Sci., **17**, 395-450, 1994.
- [44] M. H. Taibleson, *On the theory of Lipschitz spaces of distribution on euclidian n-space*, Journal of Mathematics and Mecanics, **13**, No. 3, 407-458, 1964.
- [45] O. Tcha-Kondor, *Eléments finis et calculs analytiques* Thèse de Doctorat, Nice, 1989.
- [46] O. Tcha-Kondor, *Nouvelles séries trigonométriques adaptées à l'étude de problèmes aux limites pour l'équation biharmonique. Etude du cas de la fissure*, C. R. Acad. Sci. Paris, **315**, Série I, 541-544, 1992.
- [47] O. Tcha-Kondor, *Séries trigonométriques pour l'étude des problèmes biharmoniques dans un secteur d'ouverture quelconque*, C. R. Acad. Sci. Paris, **318**, Série I, 735-738, 1994.
- [48] H. Triebel, *Interpolation Theory, Functions Spaces and Differential Operators*, North-Holland, Amesterdam-New York, 1978.
- [49] G. Raugel, *Résolution numérique de problèmes elliptiques dans des domaines avec coins* Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, Rennes, 1978.