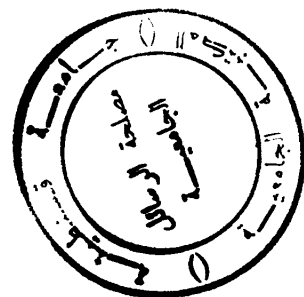


REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI - CONSTANTINE –

FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre :
Série :



Présenté pour obtenir le diplôme de Magister
en Mathématiques

THEME
Problèmes mixtes
avec conditions aux limites
du type non classique

Option
Equations aux dérivées Partielles

PAR
Fadila Chouiter née Bendjabeur

Devant le jury :

Président :	N. Kechkar	Prof.	Univ. Constantine
Rapporteur :	M. Denche	Prof.	Univ. Constantine
Examineurs :	F. Rebbani	Prof.	Univ. Annaba
	N. Benkafadar	Prof.	Univ. Constantine

Soutenue le : 24 Mars 2001.

DEDICACE

Tout ma reconnaissance va à ma famille ainsi qu'à mes amis, pour leur soutien moral, qui m'a été très précieux pour la réalisation de ce travail.

REMERCIEMENTS



Je tiens à exprimer au Prof. M. Denche ma profonde gratitude pour la sollicitude avec laquelle il m'a guidée, pour les conseils efficaces et les encouragements qu'il m'a prodigués tout au long de ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à Mer L. Marhoune et mes collègues A. Berkane et K. bessila pour la gentillesse et l'amabilité qu'ils ont manifestées à mon égard.

Table de matières

Introduction

1- Revue Bibliographique	02
2- Contenu de la Thèse	04
3- Rappel sur les Opérateurs de Régularisation	06

Chapitre I

1- Position du Problème	09
2- Estimations à Priori Bilatérales	10

Chapitre II

Résolubilité du Problème	23
--------------------------	----

BIBLIOGRAPHIE	31
---------------	----

Introduction

1- REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Différents problèmes rencontrés en théorie de la conduction thermique [5, 6, 19, 20], en thermoélasticité [30] et en physique des plasmas [29] peuvent être ramenés à des problèmes aux limites avec conditions intégrales. De tels Problèmes ont été étudiés dans [2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 19, 20, 21, 31, 44] pour les équations paraboliques, dans [26, 36] pour les équations hyperboliques et dans [13, 14] pour les équations du type mixte. La méthode utilisée dans [3, 4, 12, 13, 14, 21, 44] est celle des inégalités énergétiques. Le but de ce travail est l'extension de cette méthode aux équations pseudoparaboliques. Différents problèmes aux limites pour équations pseudoparaboliques ont été étudiés par différentes méthodes dans [8, 11, 33].

De tels problèmes sont rencontrés en théorie de filtration des eaux dans les milieux à double porosité [1], dans les problèmes de transfert de l'humidité dans le sol [10] ainsi que dans d'autres problèmes naturels similaires.

La méthode des inégalités de l'énergie, appelée aussi méthode d'analyse fonctionnelle trouve son origine dans les travaux de I.G. Petrovsky [25] utilisés dans la résolution du problème de Cauchy lié aux équations du type hyperbolique. Par la suite les développements importants de la méthode sont dus à J. Leray [24] et L. Garding [18].

La méthode a été également utilisée et développée dans les travaux de O.A. Ladyzen-skaja [22], K. Friedrichs [17] et N. Yurchuk [37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44], on peut également citer les travaux de F. Rebbani et V.I. Chesalyn [27, 28].

Le schéma de la méthode a été donné pour la première fois par A.A. Dezin [16], et qui peut être résumé comme suit :

Tout d'abord on écrit le problème posé (P) sous forme d'une équation opérationnelle

$$Lu = f, \quad u \in D(L)$$

où l'opérateur L est considéré de l'espace de Banach E dans l'espace de Hilbert F convenablement choisis.

Après, on établit les estimations à priori pour l'opérateur L et on montre la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans l'espace F .

Plus exactement, dans le présent travail on suivra le schéma suivant :

On établit deux estimations à priori bilatérales

$$\|Lu\|_F \leq c \|u\|_E, \tag{1}$$

$$\|u\|_E \leq c \|Lu\|_F. \tag{2}$$

(2) Est dite inégalité de l'énergie. Cette estimation est obtenue en multipliant l'équation donnée par un opérateur Mu et en intégrant sur le domaine. le choix de l'opérateur Mu est fondamental, il est dicté par l'équation et les conditions aux limites.

De l'estimation (1), on déduit que l'opérateur L de E dans F est continu. De l'estimation (2), il s'ensuit qu'il admet un inverse continu et que l'ensemble des valeurs

de cet opérateur est fermé. En d'autres termes, L réalise un homéomorphisme linéaire de l'espace E sur l'ensemble fermé $R(L) \subset F$.

Si on convient d'appeler solution généralisée du problème (P) toute fonction vérifiant

$$Lu = f;$$

alors pour avoir l'existence de la solution généralisée il est nécessaire et suffisant qu'on établisse la densité de $R(L)$ dans F . L'unicité est assurée par l'inégalité de l'énergie. Ainsi de (1) et (2) on déduit que L est un homéomorphisme entre les espaces E et F .

Le présent travail est considéré comme le prolongement des résultats obtenus dans [2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 19, 20, 21, 31, 44] pour les équations paraboliques et dans [13, 14] pour les équations du type mixte.

La méthode des estimations à priori est une méthode efficace pour l'étude de beaucoup de problèmes de la physique mathématique, elle est fondée sur un support théorique solide et est développée dans un cadre abstrait élégant. Mais dans l'application de cette méthode on trouve des difficultés parmi lesquelles nous citons :

1. Le choix de l'espace des solutions.
2. Le choix du multiplicateur.
3. Le choix de l'opérateur de régularisation.

Les questions sont tellement variées et récentes, que l'élaboration d'une théorie générale est encore prématurée. Chaque problème nécessite une étude spéciale, d'où l'actualité du thème.

2- CONTENU DE LA THESE

Le travail est constitué d'une introduction, de deux chapitres et d'une liste bibliographique. Il est consacré à l'étude d'un problème aux limites pour une équation pseudoparabolique du type

$$\mathfrak{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x}) - b(t) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - d(t, x)u = f(t, x) \quad (3)$$

avec les conditions aux limites

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \int_0^1 u(t, x) dx = 0. \quad (4)$$

et la condition initiale

$$lu = u|_{t=0} = \varphi(x), \quad (5)$$

Pour ce type de problème on établit un théorème d'homéomorphisme pour l'opérateur L engendré par l'équation considérée et les conditions aux limites associées.

On commence tout d'abord au 1^{er} chapitre par établir deux estimations à priori bilatérales de la forme

$$\|Lu\|_F \leq k_1 \|u\|_E, \quad (6)$$

$$\|u\|_E \leq k_2 \|Lu\|_F. \quad (7)$$

où E et F sont deux espaces fonctionnels convenablement choisis. Plus exactement E est l'espace de Banach des fonctions $u \in L_2(\Omega)$ vérifiant les conditions aux limites (4) et muni de la norme finie

$$\begin{aligned} \|u\|_E = \int_{\Omega} (1-x)^2 \left[\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right|^2 \right] dx dt \\ + \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|^2 \right) + |u|^2 \right] dx, \end{aligned} \quad (8)$$

et F est l'espace de Hilbert composé des fonctions vectorielles $\mathfrak{F} = (f, \varphi)$ obtenu comme complété de l'espace $L_2(\Omega) \times W_2^2(0, 1)$ par rapport à la norme :

$$\|\mathfrak{F}\|_F^2 = \int_{\Omega} (1-x)^2 |f(x, t)|^2 dx dt + \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\left| \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right|^2 + \left| \frac{d\varphi}{dx} \right|^2 \right) + |\varphi|^2 \right] dx. \quad (10)$$

Au problème (3)-(5) on associe l'opérateur $L = (\mathfrak{L}, l)$ défini de E dans F .

on appelle solution du problème (1.1)-(1.4) toute solution de l'équation opératorielle

$$Lu = \mathfrak{F}.$$

l'inégalité (7) est obtenue en multipliant l'équation (3) par un opérateur intégral différentiel convenablement choisi.

De l'inégalité (6) résulte que l'opérateur L de E dans F est borné et de l'inégalité (7) résulte que l'opérateur L^{-1} existe et borné sur $R(L)$. Autrement dit l'opérateur L est un homéomorphisme de l'espace E sur l'ensemble fermé $R(L)$.

Au chapitre 2 en utilisant les opérateurs de régularisation on montre que $R(L) = F$, d'où des inégalités (6) et (7), on déduit que l'opérateur L est un homéomorphisme entre les espaces E et F .

3- RAPPEL SUR LES OPERATEURS DE REGULARISATION.

Le développement et l'étude des opérateurs de régularisation sont dus principalement à Sobolev [34] et Friedrichs [17].

Regardons la famille d'opérateurs intégraux J_ε dépendant du paramètre ε , définis par

$$J_\varepsilon u(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_G \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon(y) dy,$$

où $\omega(\xi)$ est une fonction paire indéfiniment différentiable, telle que

$$\omega(\xi) \geq 0,$$

$$\omega(\xi) = 0, \text{ pour } |\xi| > 1 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 \omega(\xi) d\xi = 1,$$

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} u(x), & x \in G_\varepsilon, \\ 0, & x \notin G_\varepsilon, \end{cases}$$

où G_ε est un sous domaine du domaine G , dont la distance à la frontière ∂G est supérieure à ε .

Remarquons que les opérateurs J_ε sont auto-adjoints. Enonçons certaines de leurs propriétés sous forme de lemmes

Lemme 1 *Pour toute fonction u de $L_2(G)$*

$J_\varepsilon u \in C_0^\infty(G)$ et converge vers la fonction u pour ε tendant vers 0, i.e.

$$\|J_\varepsilon u - u\|_{L_2(G)} \longrightarrow 0 \quad \text{pour } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Lemme 2 (Friedrichs) *Soit la fonction u appartenant à $L_2(G)$ et $a(x)$ appartenant à $C^1(\overline{G})$. Alors*

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (a J_\varepsilon u - J_\varepsilon (a u)) \right\|_{L_2(G)} \longrightarrow 0$$

pour $\varepsilon \longrightarrow 0$, $i = 1, \dots, n$.

Pour la démonstration des lemmes 1 et 2 voir [15, 16, 18].

Lemme 3 *Soit la fonction $u \in L_2(G)$ et $a(x) \in C^1(\overline{G})$. Alors*

$$\left\| a \frac{\partial}{\partial x_i} J_\varepsilon u - J_\varepsilon \left(a \frac{\partial}{\partial x_i} u \right) \right\|_{L_2(G)} \leq c \|u\|_{L_2(G)} + \eta(\varepsilon),$$

où $\eta(\varepsilon) \longrightarrow 0$ pour $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Démonstration. Remarquons que

$$\begin{aligned} \left\| a \frac{\partial}{\partial x_i} J_\varepsilon u - J_\varepsilon \left(a \frac{\partial}{\partial x_i} u \right) \right\|_{L_2(G)} &= \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (a J_\varepsilon u) - \frac{\partial a}{\partial x_i} J_\varepsilon u - \frac{\partial}{\partial x_i} J_\varepsilon (a u) + J_\varepsilon \left(\frac{\partial a}{\partial x_i} u \right) \right\|_{L_2(G)} \\ &\leq \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (a J_\varepsilon u - J_\varepsilon (a u)) \right\|_{L_2(G)} + \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} J_\varepsilon \left(\frac{\partial a}{\partial x_i} u \right) - \frac{\partial a}{\partial x_i} J_\varepsilon u \right\|_{L_2(G)} \end{aligned}$$

En vertu des lemmes 1 et 2 on conclut que

$$\left\| a \frac{\partial}{\partial x_i} J_\varepsilon u - J_\varepsilon \left(a \frac{\partial}{\partial x_i} u \right) \right\|_{L_2(G)} \leq c \|u\|_{L_2(G)} + \eta(\varepsilon),$$

où $\eta(\varepsilon) \rightarrow 0$ pour $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

D'autres notions et inégalités seront utilisées telles que l' ε -inégalité

$$2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

qui se déduit de $\left(\sqrt{\varepsilon} a - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} b \right)^2 \geq 0$.



Chapitre I

Estimations à priori bilatérales

1- Position du Problème.

Dans le rectangle $\Omega = \{(t, x), 0 < t < T, 0 < x < 1\}$ où $T < \infty$, on considère l'équation aux dérivées partielles :

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - b(t) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - d(t, x)u = f(t, x) \quad (1.1)$$

où $a(t, x), b(t), d(t, x)$ sont des fonctions données et satisfont aux conditions suivantes :

Condition H_1 :

$$\begin{aligned} 0 < a_0 \leq a(t, x) \leq a_1, & \quad \left| \frac{\partial a(t, x)}{\partial x} \right| \leq c_1, \quad \left| \frac{\partial a(t, x)}{\partial t} \right| \leq c_2, \\ 0 < b_0 \leq b(t) \leq b_1, & \quad \left| \frac{\partial b}{\partial t} \right| \leq c_3, \\ 0 < d_0 \leq d(t, x) \leq d_1. & \end{aligned}$$

Condition H_2 :

$$c_4 \leq \frac{\partial a}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \leq c_5, \quad \frac{\partial^2 a}{\partial t \partial x} \leq c_6, \quad \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \leq c_7, \quad \frac{\partial d}{\partial t} \leq c_8.$$

où les constantes $c_i, i = 4 \dots 8$ sont aussi strictement positives.

A l'équation (1.1) on associe la condition initiale :

$$lu = u|_{t=0} = \varphi(x), \quad (1.2)$$

et les conditions aux limites :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \int_0^1 u(t, x) dx = 0. \quad (1.3)$$

Où la fonction φ vérifie les conditions de compatibilité de la forme (1.3) :

$$\varphi'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \varphi(x) dx = 0. \quad (1.4)$$

Pour l'étude du problème posé on a besoin des espaces fonctionnels suivants :
l'espace E de Banach des fonctions $u \in L_2(\Omega)$ vérifiant les conditions (1.3) et muni de la norme finie

$$\begin{aligned} \|u\|_E = \int_{\Omega} (1-x)^2 & \left[\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right|^2 \right] dx dt \\ & + \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|^2 \right) + |u|^2 \right] dx, \quad (1.5) \end{aligned}$$

et l'espace F de Hilbert composé des fonctions vectorielles $\mathfrak{F} = (f, \varphi)$ obtenu comme complété de l'espace $L_2(\Omega) \times W_2^2(0, 1)$ par rapport à la norme :

$$\|\mathfrak{F}\|_F^2 = \int_{\Omega} (1-x)^2 |f(x, t)|^2 dxdt + \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\left| \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right|^2 + \left| \frac{d\varphi}{dx} \right|^2 \right) + |\varphi|^2 \right] dx. \quad (1.6)$$

Au problème (1.1)-(1.3) on associe l'opérateur $L = (\mathfrak{L}, l)$ défini de E dans F .

Définition 1 On appelle solution du problème (1.1)-(1.4) toute solution de l'équation opératorielle $Lu = \mathfrak{F}$.

Dans ce travail, on montre que l'opérateur L est un homéomorphisme entre les espaces E et F . La démonstration est basée sur la méthode des inégalités energetiques proposée dans [44].

2- Estimations à priori bilatérales.

Théorème 1 Si la condition H_1 est satisfaite, pour toute fonction $u \in E$, on a l'estimation

$$\|Lu\|_F \leq k_1 \|u\|_E, \quad (2.1)$$

où

$$k_1 = \max [5 \max(2c_1^2, 2a_1^2 T, d_1^2 T) + 1, 5b_1^2, 5]. \quad (2.2)$$

Démonstration. De l'équation (1.1), on a

$$\begin{aligned} (\mathfrak{L}u)^2 &\leq 5 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + c_1^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + a_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + b_1^2 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right)^2 + d_1^2 (u)^2 \right] \\ &\leq 5 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + b_1^2 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 + c_1^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + a_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + d_1^2 (u)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

En multipliant les deux membres de cette inégalité par $(1-x)^2$ et en intégrant sur Ω , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (1-x)^2 (\mathfrak{L}u)^2 dxdt &\leq 5 \left[\int_{\Omega} (1-x)^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + b_1^2 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 \right] dxdt \right. \\ &\quad + 2c_1^2 \int_{\Omega} \frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dxdt + 2a_1^2 \int_{\Omega} \frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dxdt \\ &\quad \left. + d_1^2 \int_{\Omega} (1-x)^2 (u)^2 dxdt \right], \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (1-x)^2 (\mathfrak{L}u)^2 dxdt &\leq 5 \left[\int_{\Omega} (1-x)^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 + b_1^2 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right)^2 \right] dxdt \right. \\ &\quad + 2c_1^2 \int_0^T \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right) dt + 2a_1^2 \int_0^T \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx \right) dt \\ &\quad \left. + d_1^2 \int_0^T \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\int_0^1 (u)^2 dx \right) dt \right], \quad (2.4) \end{aligned}$$

ainsi de (2.4), on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (1-x)^2 (\mathfrak{L}u)^2 dx dt &\leq 5 \left[\int_{\Omega} (1-x)^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 + b_1^2 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right)^2 \right] dx dt \right. \\ &\quad + 2c_1^2 T \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + 2a_1^2 T \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx \\ &\quad \left. + d_1^2 T \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 (u)^2 dx \right]. \quad (2.5) \end{aligned}$$

De la condition initiale (1.2) résulte :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left[\left(\frac{d^2 l u}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{d l u}{dx} \right)^2 \right] + (l u)^2 \right] dx \\ \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] + (u)^2 \right] dx. \quad (2.6) \end{aligned}$$

En combinant les inégalités (2.5) et (2.6), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (1-x)^2 (\mathfrak{L}u)^2 dx dt + \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left[\left(\frac{d^2 l u}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{d l u}{dx} \right)^2 \right] + (l u)^2 \right] dx \\ \leq 5 \left[\int_{\Omega} (1-x)^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 + b_1^2 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right)^2 \right] dx dt \right] \\ + [5 \max(2c_1^2 T, 2a_1^2 T, d_1^2 T) + 1] \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] + (u)^2 \right] dx dt, \end{aligned}$$

d'où :

$$\|Lu\|_F \leq k_1 \|u\|_E,$$

avec $k_1 = \max[5 \max(2c_1^2 T, 2a_1^2 T, d_1^2 T) + 1, 5b_1^2, 5]$ ainsi le théorème est démontré. ■

Théorème 2 Pour toute fonction $u \in E$, si la condition H_1 est vérifiée on a l'estimation

$$\|u\|_E \leq k_2 \|Lu\|_F, \quad (2.7)$$

où $k_2 = \frac{\max e^{cT} \left[21 + 17 \left[16 + \frac{8c_1^2 T}{a_0} + \frac{4d_1^2 T}{a_0} \right], 2a_0 b_0 \right]}{\min(1/4, b_0, b_0^2, a_0, 2a_0 b_0)}$, et c est une constante vérifiant :

$$c \geq \max \left(\frac{c_2 b_1 + a_1 c_3}{a_0 b_0}, \frac{2c_1^2 + 3d_1^2 + c_2}{a_0} \right) \quad (2.8)$$

Démonstration. On note par :

$$Ju = \int_0^x u(t, \xi) d\xi, \quad Mu = (1-x)^2 \frac{\partial u}{\partial t} + 2(1-x) J \frac{\partial u}{\partial t}$$

et on considère la forme suivante $\Phi(u, u) = e^{-ct} \mathfrak{L}u Mu$, où c vérifie (2.8). Après avoir remplacé Mu et $\mathfrak{L}u$ dans $\Phi(u, u)$ par leurs expressions et intégré sur le sous domaine Ω^τ où

$$\Omega^\tau = \{(t, x) / 0 \leq t \leq \tau, 0 \leq x \leq 1\}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^\tau \Phi(u, u) dx dt &= \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt + 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x) \frac{\partial u}{\partial t} J \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\ &- \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) (1-x)^2 \frac{\partial u}{\partial t} dx dt - 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) (1-x) J \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\ &- \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} b(t) (1-x)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt - 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} b(t) (1-x) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} J \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\ &- \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} d(1-x)^2 u \frac{\partial u}{\partial t} dx dt - 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} d(1-x) u \frac{\partial u}{\partial t} dx dt. \quad (2.9) \end{aligned}$$

On considère séparément les termes qui composent l'égalité (2.9).

On remarque tout d'abord que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} J \frac{\partial u}{\partial t}; \quad (2.10)$$

en partant du terme

$$\int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x) \frac{\partial u}{\partial t} J \frac{\partial u}{\partial t} dx dt,$$

et en faisant une intégration par parties par rapport à x , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x) \frac{\partial u}{\partial t} J \frac{\partial u}{\partial t} dx dt &= \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x) \frac{\partial}{\partial x} \left(J \frac{\partial u}{\partial t} \right) J \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\ &= - \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} J \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-x) J \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx dt \\ &= \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \left(J \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt - \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x) J \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[J \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx dt \end{aligned}$$

D'ici et en utilisant l'identité (2.10) on obtient

$$2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x) \frac{\partial u}{\partial t} J \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \left(J \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt. \quad (2.11)$$

En faisant une intégration par parties par rapport à x et en utilisant la condition de Neuman de (1.3) on a pour le terme suivant :

$$\begin{aligned} -\int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) (1-x)^2 \frac{\partial u}{\partial t} dx dt &= \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} a \frac{\partial u}{\partial x} \left[-2(1-x) \frac{\partial u}{\partial t} + (1-x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right] dx dt \\ &= -2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x) a \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dx dt + \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} dx dt. \end{aligned} \quad (2.12)$$

De l'intégration par parties par rapport à t du terme

$$\int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} dx dt$$

de (2.12) découle :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} dx dt &= \int_0^1 \left[e^{-ct} (1-x)^2 a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]_0^\tau dx \\ &\quad - \int_0^1 \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t} \left[e^{-ct} (1-x)^2 a \frac{\partial u}{\partial x} \right] \frac{\partial u}{\partial x} dx dt = \int_0^1 \left[e^{-ct} (1-x)^2 a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]_0^\tau dx \\ &\quad + c \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt - \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 \frac{\partial a}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt \\ &\quad - \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 a \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} dx dt, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} dx dt &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[e^{-ct} (1-x)^2 a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]_0^\tau dx \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^\tau c e^{-ct} \frac{(1-x)^2}{2} a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt - \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \frac{(1-x)^2}{2} \frac{\partial a}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Des égalités (2.12) et (2.13), on obtient :

$$\begin{aligned} -\int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) (1-x)^2 \frac{\partial u}{\partial t} dx dt &= -2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x) a \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \left[e^{-ct} (1-x)^2 a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]_0^\tau dx + \int_0^1 \int_0^\tau c e^{-ct} \frac{(1-x)^2}{2} a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt \\ &\quad - \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \frac{(1-x)^2}{2} \frac{\partial a}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.14)$$

En faisant une intégration par parties par rapport à x , en utilisant la définition de Ju ,

l'identité (2.10) et la condition intégrale de (1.3) on a :

$$\begin{aligned}
& -2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) (1-x) J \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = -2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} a \frac{\partial u}{\partial x} J \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\
& \quad + 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} a \frac{\partial u}{\partial x} (1-x) \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} u \frac{\partial}{\partial x} \left(a J \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt \\
& + 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} a \frac{\partial u}{\partial x} (1-x) \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} u \frac{\partial a}{\partial x} J \frac{\partial u}{\partial t} dx dt + 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} u a \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\
& \quad + 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} a (1-x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt. \quad (2.15)
\end{aligned}$$

On calcule le 2^{ème} terme du membre droit de l'égalité (2.15),

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} a u \frac{\partial u}{\partial t} dx dt &= \int_0^1 [e^{-ct} a(u)^2]_0^\tau dx + c \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} a(u)^2 dx dt \\
&\quad - \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \frac{\partial a}{\partial t} (u)^2 dx dt - \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} a \frac{\partial u}{\partial t} u dx dt,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} a u \frac{\partial u}{\partial t} dx dt &= \int_0^1 [e^{-ct} a(u)^2]_0^\tau dx + c \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} a(u)^2 dx dt \\
&\quad - \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \frac{\partial a}{\partial t} (u)^2 dx dt. \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Des égalités (2.15) et (2.16), on obtient :

$$\begin{aligned}
& -2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) (1-x) J \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} u \frac{\partial a}{\partial x} J \frac{\partial u}{\partial t} dx dt + \int_0^1 [e^{-ct} a(u)^2]_0^\tau dx \\
& + c \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} a(u)^2 dx dt - \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \frac{\partial a}{\partial t} (u)^2 dx dt + 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} a (1-x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt. \quad (2.17)
\end{aligned}$$

En procédant à une intégration par parties par rapport à x et en utilisant les conditions aux limites (1.3) on a :

$$\begin{aligned}
& - \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} b(t) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} (1-x)^2 \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\
& = \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} b(t) (1-x)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 dx dt - 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} b(t) (1-x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt, \quad (2.18)
\end{aligned}$$

on procède de la même manière pour le terme suivant :

$$\begin{aligned}
-2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} b(t) (1-x) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} J \frac{\partial u}{\partial t} dx dt &= +2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} b(t) (1-x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\
&\quad - 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} b(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} J \frac{\partial u}{\partial t} dx dt. \quad (2.19)
\end{aligned}$$

En substituant membre à membre les égalités (2.18), (2.19) on obtient :

$$\begin{aligned} & - \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} b(t) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} (1-x)^2 \frac{\partial u}{\partial t} dx dt - 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} b(t) (1-x) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} J \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\ & = \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} b(t) (1-x)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 dx dt + 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} b(t) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt. \quad (2.20) \end{aligned}$$

Pour les deux derniers termes du membre droit de l'égalité (2.9) on a la majoration :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} d u (1-x)^2 \frac{\partial u}{\partial t} dx dt + 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} d u (1-x) J \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\ & \leq \left| \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} d u (1-x)^2 \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \right| + 2 \left| \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} d (1-x) u J \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \right| \\ & \leq \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} d (1-x)^2 |u| \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| dx dt + 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} d (1-x) |u| \left| J \frac{\partial u}{\partial t} \right| dx dt, \end{aligned}$$

en appliquant l' ε -inégalité, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} d u (1-x)^2 \frac{\partial u}{\partial t} dx dt + 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} d u (1-x) J \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \leq \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} d^2 (1-x)^2 |u|^2 dx dt \\ & + \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} (1-x)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt + 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} d^2 (1-x)^2 |u|^2 dx dt \\ & + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} \left| J \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt \leq 3d_1^2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right] dx dt \\ & + \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} (1-x)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} \left(J \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt. \quad (2.21) \end{aligned}$$

Ainsi des égalités (2.9), (2.11), (2.14), (2.17) et (2.20) on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^\tau \Phi(u, u) dx dt = \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} (1-x)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt + \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} \left(J \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt \\ & + \int_0^1 \left[e^{-\alpha t} a \left(\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right) \right]_{t=\tau} dx - \int_0^1 \left[e^{-\alpha t} a \left(\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right) \right]_{t=0} dx \\ & + \int_0^1 \int_0^\tau c e^{-\alpha t} a \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right] dx dt - \int_0^1 \int_0^\tau \frac{\partial a}{\partial t} e^{-\alpha t} \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right] dx dt \\ & + 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} u \frac{\partial a}{\partial x} J \frac{\partial u}{\partial t} dx dt + \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} b(t) (1-x)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 dx dt + 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} b(t) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt \\ & - \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} d (1-x)^2 u \frac{\partial u}{\partial t} dx dt - 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-\alpha t} d (1-x) u J \frac{\partial u}{\partial t} dx dt, \quad (2.22) \end{aligned}$$

qu'on peut écrire aussi sous la forme

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \left(J \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt \\
& + \int_0^1 \left[e^{-ct} a \left(\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right) \right]_{t=\tau} dx + c \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} a \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right] dxdt \\
& + \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} b(t) (1-x)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 dxdt + 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} b(t) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt = \int_0^1 \int_0^\tau \Phi(u, u) dxdt \\
& + \int_0^1 \left[e^{-ct} a \left(\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right) \right]_{t=0} dx + \int_0^1 \int_0^\tau \frac{\partial a}{\partial t} e^{-ct} \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right] dxdt \\
& - 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} u \cdot \frac{\partial a}{\partial x} J \frac{\partial u}{\partial t} dxdt + \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} d(1-x)^2 u \frac{\partial u}{\partial t} dxdt + 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} d(1-x) J \frac{\partial u}{\partial t} dxdt,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

d'après l' ε -inégalité, la condition H_1 , en minorant le terme à gauche de cette égalité et en majorant celui de droite, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \left(J \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt \\
& + a_0 \int_0^1 \left[e^{-ct} \left(\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right) \right]_{t=\tau} dx + ca_0 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right] dxdt \\
& + b_0 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 dxdt \leq \int_0^1 \int_0^\tau \Phi(u, u) dxdt \\
& + a_1 \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right] dx + c_2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right] dxdt \\
& + 2c_1^2 \int_0^1 \int_0^\tau \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right] dxdt + \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt \\
& + \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \left(J \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + 3d_1^2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right] dxdt. \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Maintenant, on estime d'abord l'expression $\int_0^1 \int_0^\tau \Phi(u, u) dxdt$. On a

$$\begin{aligned}
\Phi(u, u) &= e^{-ct} \mathfrak{L}u Mu \\
&= e^{-ct} \mathfrak{L}u \left[(1-x)^2 \frac{\partial u}{\partial t} + 2(1-x) J \frac{\partial u}{\partial t} \right] \\
&\leq \left| e^{-ct} \mathfrak{L}u \left[(1-x)^2 \frac{\partial u}{\partial t} + 2e^{-ct} \mathfrak{L}u (1-x) J \frac{\partial u}{\partial t} \right] \right| \\
&\leq e^{-ct} |\mathfrak{L}u| (1-x)^2 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| + 2e^{-ct} |\mathfrak{L}u| |1-x| \left| J \frac{\partial u}{\partial t} \right|,
\end{aligned}$$

en utilisant l' ε -inégalité, on obtient

$$\begin{aligned}\Phi(u, u) &\leq e^{-ct} (1-x)^2 \left[|\mathfrak{L}u|^2 + \frac{1}{4} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \right] + e^{-ct} \left[16(1-x)^2 |\mathfrak{L}u|^2 + \frac{1}{16} \left| J \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \right] \\ &\leq e^{-ct} (17) (1-x)^2 |\mathfrak{L}u|^2 + e^{-ct} \frac{1}{4} (1-x)^2 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + e^{-ct} \frac{1}{16} \left| J \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^\tau \Phi(u, u) dx dt &\leq 17 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 |\mathfrak{L}u|^2 dx dt + \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt \\ &\quad + \frac{1}{16} \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \left| J \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt.\end{aligned}$$

D'après (2.11) et grâce à l' ε -inégalité, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \left| J \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt &= 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x) \frac{\partial u}{\partial t} J \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\ &\leq 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} |1-x| \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| \left| J \frac{\partial u}{\partial t} \right| dx dt \\ &\leq 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \left| J \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt,\end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \left| J \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt \leq 4 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt,$$

ainsi

$$\int_0^1 \int_0^\tau \Phi(u, u) dx dt \leq 17 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 |\mathfrak{L}u|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt. \quad (2.25)$$

Des inégalités (2.24) et (2.25) on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt + b_0 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 dx dt \\ &+ ca_0 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right] dx dt + a_0 \int_0^1 \left[e^{-ct} \left(\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right) \right]_{t=\tau} dx \\ &\leq 17 \int_\Omega e^{-ct} (1-x)^2 (\mathfrak{L}u)^2 dx dt + a_1 \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{dlu}{dx} \right)^2 + (lu)^2 \right] dx \\ &+ c_2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right] dx dt + 2c_1^2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right] dx dt \\ &\quad + 3d_1^2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right] dx dt. \quad (2.26)\end{aligned}$$

De l'équation (1.1) on a :

$$\left(b(t)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 = \left(-\mathfrak{L}u + \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - du\right)^2,$$

d'où

$$\begin{aligned} b^2(t)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + 2ab(t)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(-\mathfrak{L}u + \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - du\right)^2 \\ &\leq 4(\mathfrak{L}u)^2 + 4\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \\ &\quad + 4d^2(u)^2. \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de cette dernière inégalité par $e^{-ct}(1-x)^2$ et en intégrant sur Ω^τ on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} b^2(t) \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right)^2 (1-x)^2 dx dt &+ \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} a^2 (1-x)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx dt \\ &+ 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} ab(t) (1-x)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dt \leq 4 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 (\mathfrak{L}u)^2 dx dt \\ &+ 4 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx dt + 4 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx dt \\ &\quad + 4 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 d^2(u)^2 dx dt. \quad (2.27) \end{aligned}$$

On considère le terme

$$\int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} ab(t) (1-x)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dt,$$

auquel on fait une intégration par parties par rapport à t , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} ab(t) (1-x)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dt &= \int_0^1 \left[e^{-ct} (1-x)^2 ab(t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 \right]_{t=0}^{t=\tau} dx \\ &+ c \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 ab(t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx dt - \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 \left[\frac{\partial a}{\partial t} b(t) + a \frac{\partial b}{\partial t} \right] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx dt \\ &\quad - \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 ab(t) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dt, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 ab(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} dx dt &= \int_0^1 \left[e^{-ct} (1-x)^2 ab(t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 \right]_{t=0}^{t=\tau} dx \\ &+ c \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 ab(t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx dt - \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 \left[\frac{\partial a}{\partial t} b(t) + a \frac{\partial b}{\partial t} \right] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx dt \end{aligned} \quad (2.28)$$

de (2.27), (2.28) et en utilisant la condition H_1 , on obtient

$$\begin{aligned}
& b_0^2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right)^2 (1-x)^2 dx dt + a_0 b_0 \int_0^1 \left[e^{-ct} (1-x)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \right]_{t=\tau} dx \\
& + c a_0 b_0 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx dt \leq 4 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 (\mathfrak{L}u)^2 dx dt \\
& + 4 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt + 4c_1^2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt \\
& + \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 \left[\frac{\partial a}{\partial t} b(t) + a \frac{\partial b}{\partial t} \right] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx dt + a_1 b_1 \int_0^1 (1-x)^2 \left(\frac{d^2 l u}{dx^2} \right)^2 dx \\
& + 4d_1^2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (u)^2 dx dt. \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Dans les inégalités (2.26) et (2.29), on choisit la constante c telle qu'elle vérifie respectivement et simultanément,

$$\begin{aligned}
2c_1^2 + 3d_1^2 + c_2 & \leq c a_0, \\
c_2 b_2 + a_1 c_3 & \leq c a_0 b_0.
\end{aligned}$$

C'est à dire

$$c \geq \max \left(\frac{c_2 b_2 + a_1 c_3}{a_0 b_0}, \frac{2c_1^2 + 3d_1^2 + c_2}{a_0} \right).$$

L'inégalité (2.26) donne alors :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt + b_0 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 dx dt \\
& + a_0 \int_0^1 \left[e^{-ct} \left(\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right) \right]_{t=\tau} dx \leq 17 \int_\Omega e^{-ct} (1-x)^2 (\mathfrak{L}u)^2 dx dt \\
& + a_1 \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{dl u}{dx} \right)^2 + (lu)^2 \right] dx. \quad (2.30)
\end{aligned}$$

et l'inégalité (2.29) s'écrit aussi :

$$\begin{aligned}
& b_0^2 \int_0^1 \int_0^\tau e^{-ct} (1-x)^2 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right)^2 dx dt + a_0 b_0 \int_0^1 \left[e^{-ct} (1-x)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \right]_{t=\tau} dx \\
& \leq 4 \int_\Omega e^{-ct} (1-x)^2 (\mathfrak{L}u)^2 dx dt + 16 \int_\Omega e^{-ct} \frac{(1-x)^2}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt \\
& + 8c_1^2 T \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 e^{-ct} \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right] dx \\
& + 4d_1^2 T \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 e^{-ct} \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right] dx + a_1 b_1 \int_0^1 (1-x)^2 \left(\frac{d^2 l u}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (2.31)
\end{aligned}$$

Le membre droit respectivement de (2.30) et de (2.31) ne dépend pas de τ , alors en prenant dans le membre gauche respectivement de (2.30) et de (2.31), le majorant exact en τ , on obtient de (2.30) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_{\Omega} e^{-ct} (1-x)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + b_0 \int_{\Omega} e^{-ct} (1-x)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 dxdt \\ & + a_0 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 e^{-ct} \left(\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right) dx \leq 17 \int_{\Omega} e^{-ct} (1-x)^2 (\mathfrak{L}u)^2 dxdt \\ & + a_1 \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{dlu}{dx} \right)^2 + (lu)^2 \right] dx. \quad (2.32) \end{aligned}$$

et de (2.31) on a :

$$\begin{aligned} & b_0^2 \int_{\Omega} e^{-ct} (1-x)^2 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right)^2 dxdt + a_0 b_0 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 e^{-ct} (1-x)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx \\ & \leq 4 \int_{\Omega} e^{-ct} (1-x)^2 (\mathfrak{L}u)^2 dxdt + 16 \int_{\Omega} e^{-ct} \frac{(1-x)^2}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt \\ & + 8c_1^2 T \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 e^{-ct} \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right] dx \\ & + 4d_1^2 T \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 e^{-ct} \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right] dx + a_1 b_1 \int_0^1 (1-x)^2 \left(\frac{d^2 lu}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (2.33) \end{aligned}$$

Des inégalités (2.32) et (2.33) on a :

$$\begin{aligned} & b_0^2 \int_{\Omega} e^{-ct} (1-x)^2 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right)^2 dxdt + 2a_0 b_0 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 e^{-ct} \frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx \\ & \leq 21 \int_{\Omega} e^{-ct} (1-x)^2 (\mathfrak{L}u)^2 dxdt \\ & + 16 \left[17 \int_{\Omega} e^{-ct} (1-x)^2 (\mathfrak{L}u)^2 dxdt + a_1 \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{dlu}{dx} \right)^2 + (lu)^2 \right] dx \right] \\ & + 8 \frac{c_1^2 T}{a_0} \left[17 \int_{\Omega} e^{-ct} (1-x)^2 (\mathfrak{L}u)^2 dxdt + a_1 \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{dlu}{dx} \right)^2 + (lu)^2 \right] dx \right] \\ & + 4 \frac{d_1^2 T}{a_0} \left[17 \int_{\Omega} e^{-ct} (1-x)^2 (\mathfrak{L}u)^2 dxdt + a_1 \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{dlu}{dx} \right)^2 + (lu)^2 \right] dx \right] \\ & + 2a_1 b_1 \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{d^2 lu}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (2.34) \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre les inégalités (2.32) et (2.34) on a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \int_{\Omega} e^{-ct} (1-x)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt + b_0 \int_{\Omega} e^{-ct} (1-x)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 dx dt \\
& + a_0 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 \left[e^{-ct} \left(\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (u)^2 \right) \right] dx + b_0^2 \int_{\Omega} e^{-ct} (1-x)^2 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right)^2 dx dt \\
& + 2a_0 b_0 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 e^{-ct} \frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx \\
& \leq \left[21 + 17 \left(16 + \frac{8c_1^2 T}{a_0} + \frac{4d_1^2 T}{a_0} \right) \right] \int_{\Omega} e^{-ct} (1-x)^2 |\mathfrak{L}u|^2 dx dt \\
& + a_1 \left[16 + \frac{8c_1^2 T}{a_0} + \frac{4d_1^2 T}{a_0} \right] \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left(\frac{dlu}{dx} \right)^2 + (lu)^2 \right] dx + 2a_1 b_1 \int_0^1 (1-x)^2 \left(\frac{d^2 lu}{dx^2} \right)^2 dx.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Comme $e^{-cT} \leq e^{-ct} \leq 1$, alors :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (1-x)^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 + b_1^2 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right)^2 \right] dx dt \\
& + \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \right] + (u)^2 \right] dx \\
& \leq k_2 \left(\int_{\Omega} (f(t, x))^2 dx dt + \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left[\left(\frac{dlu}{dx} \right)^2 + \frac{d^2 lu}{dx^2} \right] + (lu)^2 \right] dx \right)
\end{aligned}$$

où

$$k_2 = \frac{\max e^{cT} \left[21 + 17 \left(16 + \frac{8c_1^2 T}{a_0} + \frac{4d_1^2 T}{a_0} \right), 2a_0 b_0 \right]}{\min (1/4, b_0, b_0^2, a_0, 2a_0 b_0)},$$

ainsi

$$\|u\|_E \leq k_2 \|Lu\|_F,$$

d'où le théorème est démontré. ■

Chapitre II

Résolubilité du Problème

De l'inégalité (2.1) résulte que l'opérateur L de E dans F est borné et de l'inégalité (2.7) résulte que l'opérateur L^{-1} existe et borné sur $R(L)$. Autrement dit l'opérateur L est un homéomorphisme de l'espace E sur l'ensemble fermé $R(L)$.

Si, maintenant, on démontre que $R(L) = F$, alors de ces inégalités (2.1) et (2.7), on déduit que l'opérateur L est un homéomorphisme entre les espaces E et F , d'où pour tout $\mathfrak{F} = (f, \varphi)$ il existe une solution unique du problème (1.1)-(1.3). Il suffit alors de montrer que $R(L)^\perp = \{0\}$ c'est-à-dire pour $W = (w, w_0) \in R(L)^\perp$ on a $w = 0$ et $w_0 = 0$.

La démonstration est basée sur la proposition suivante :

Proposition 1 *On suppose que les conditions H_1 et H_2 sont vérifiées. Si pour toutes les fonctions $u \in E$, vérifiant la condition $lu = 0$ et pour un certain $w \in L_2(\Omega)$ on a :*

$$\int_{\Omega} \mathfrak{L}u w \, dxdt = 0, \quad (3.1)$$

alors $w = 0$.

Démonstration. La relation (3.1) est donnée pour u tel que $lu = 0$, on peut l'exprimer sous une forme particulière.

Soit h la fonction définie par la relation :

$$h = J_t^* w = \int_t^T w d\tau. \quad (3.2)$$

Soit $\frac{\partial u}{\partial t}$ solution de l'équation :

$$-a(t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} = h, \quad (3.3)$$

où σ est un nombre fixé appartenant à l'intervalle $(0, 1)$, et

$$J_x^{*2} g = \int_x^1 \int_{\xi}^1 g(\eta, t) d\eta d\xi, \quad (3.4)$$

et soit la fonction u donnée par :

$$u = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq s, \\ \int_s^t \frac{\partial u}{\partial t} d\tau, & s \leq t \leq T, \end{cases} \quad (3.5)$$

où s est un nombre fixé quelconque dans $[0, T]$.

On dérive l'expression de h par rapport à t dans (3.2) et (3.3), on obtient :

$$w = J_t^{*-1} h = \frac{\partial}{\partial t} \left(a(t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right). \quad (3.6)$$

■

Lemme 4 La fonction w définie par la relation (3.6) est dans $L_2(\Omega)$.

Démonstration. En utilisant l'inégalité de Hölder on a :

$$\begin{aligned} \left(J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 &= \left(\int_x^1 J_\xi^* \frac{\partial u}{\partial t} d\xi \right)^2 \\ &\leq \left(\int_x^1 d\xi \right) \cdot \left(\int_x^1 \left(J_\xi^* \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 d\xi \right) \\ &\leq (1-x) \left(\int_0^1 \left(J_\xi^* \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 d\xi \right), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx &\leq \left(\int_0^1 \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \right) \int_0^1 (1-x) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx, \end{aligned}$$

donc

$$\int_0^1 \left(J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx.$$

De la même manière, on montre que

$$\int_0^1 \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx,$$

par conséquent, on a :

$$\int_0^1 \left(J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \leq \frac{1}{4} \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (3.7)$$

En considérant maintenant le terme $\int_0^1 \int_0^T \left(\frac{\partial a}{\partial t}(t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt$ auquel, on applique (3.7), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^T \left(\frac{\partial a}{\partial t}(t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt &= \int_0^1 \int_0^T \left(\frac{\partial a}{\partial t}(t, \sigma) \right)^2 \left(J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt \\ &\leq \frac{c_2^2}{2} \int_0^1 \int_0^T \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt \\ &\leq \frac{c_2^2}{4} \int_0^1 \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx, \end{aligned}$$

et donc $\frac{\partial a}{\partial t}(t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t}$ appartient à $L_2(\Omega)$. Il reste à prouver que $a(t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ appartient à $L_2(\Omega)$. pour cela, on utilise les t-opérateurs de régularisation ρ_ε de la forme :

$$(\rho_\varepsilon g)(t, x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T w\left(\frac{s-t}{\varepsilon}\right) g(s, x) ds,$$

indroduits dans [44], où w est indéfiniment différentiable, $w \geq 0$, $w = 0$ au voisinage de $t = 0$ et $t = T$ et en dehors de l'intervalle $(0, T)$ avec $\int_R w(t)dt = 1$.

On applique les opérateurs ρ_ε et $\frac{\partial}{\partial t}$ à l'équation (3.3), on obtient :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_\varepsilon \left(a(t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\varepsilon h),$$

et, en remarquant que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[a(t, \sigma) \rho_\varepsilon J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right] = \frac{\partial a}{\partial t}(t, \sigma) \rho_\varepsilon J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} + a(t, \sigma) \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_\varepsilon J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right],$$

on obtient :

$$\begin{aligned} a(t, \sigma) \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_\varepsilon J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right] &= -\frac{\partial a}{\partial t}(t, \sigma) \rho_\varepsilon J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\varepsilon h) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} \left[a(t, \sigma) \rho_\varepsilon J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} - \rho_\varepsilon \left(a(t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

De (3.8) on a :

$$\begin{aligned} \left\| a(t, \sigma) \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_\varepsilon J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right] \right\|_{0,\Omega}^2 &\leq 3c_2^2 \left\| \rho_\varepsilon J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{0,\Omega}^2 + 3 \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\varepsilon h) \right\|_{0,\Omega}^2 \\ &\quad + 3 \left\| \frac{\partial}{\partial t} \left[a(t, \sigma) \rho_\varepsilon J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} - \rho_\varepsilon \left(a(t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] \right\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

En appliquant le lemme de Friderichs, pour ε tend vers 0 on a :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} \left[a(t, \sigma) \rho_\varepsilon J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} - \rho_\varepsilon \left(a(t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] \right\|_{0,\Omega}^2 \longrightarrow 0,$$

et puisque on a aussi

$$\left\| \rho_\varepsilon J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} - J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{0,\Omega} \longrightarrow 0$$

de (3.7) et (3.9) :

$$\left\| a(t, \sigma) \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_\varepsilon J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right] \right\|_{0,\Omega}^2 \leq \frac{3c_2^2}{4} \left\| \rho_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{0,\Omega}^2 + 3 \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\varepsilon h) \right\|_{0,\Omega}^2,$$

Puis on passe à la limite pour $\varepsilon \longrightarrow 0$. ■

On revient à la démonstration de la proposition

Soit $\Omega_s = \{(s, x), \quad 0 < s < t < T, \quad 0 < x < 1\}$. En remplaçant u et w par leur expressions respectives données (3.5) et (3.6), l'équation (3.1) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_s} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - b(t) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - d(t, x) u \right) \frac{\partial}{\partial t} \left[a(t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right] dxdt \\ &= \int_{\Omega_s} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left[a(t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right] dxdt - \int_{\Omega_s} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left[a(t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right] dxdt \\ &\quad - \int_{\Omega_s} b(t) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left[a(t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right] dxdt - \int_{\Omega_s} d(t, x) u \frac{\partial}{\partial t} \left[a(t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right] dxdt = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

On considère un à un les termes qui composent l'équation (3.10).

Pour le terme

$$\int_{\Omega_s} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left[a(t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx dt,$$

en intégrant par parties par rapport à x et à t , en vertu de la condition intégrale de (1.3) et de l'identité (3.4) on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_s} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left[a(t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx dt \\ &= \int_{\Omega_s} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial a}{\partial t} (t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt + \int_{\Omega_s} \frac{\partial u}{\partial t} a(t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx dt \\ &= - \int_{\Omega_s} \frac{\partial}{\partial x} \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right) a(t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx dt - \int_{\Omega_s} \frac{\partial}{\partial x} \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right) \frac{\partial a}{\partial t} (t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\ &= - \int_{\Omega_s} a(t, \sigma) J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} J_x^{*2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx dt - \int_{\Omega_s} \frac{\partial a}{\partial t} (t, \sigma) \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt \\ &= - \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} a(t, \sigma) \frac{\partial}{\partial t} \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt - \int_{\Omega_s} \frac{\partial a}{\partial t} (t, \sigma) \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^1 a(t, \sigma) \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \Big|_{t=s}^{t=T} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \frac{\partial a}{\partial t} (t, \sigma) \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt \\ &\quad - \int_{\Omega_s} \frac{\partial a}{\partial t} (t, \sigma) \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 a(t, \sigma) \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} (s, x) \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \frac{\partial a}{\partial t} (t, \sigma) \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt. \end{aligned} \tag{3.11}$$

A partir des condition aux limites (1.3), des identités (3.2) et (3.4) et sachant que $u = 0$ pour $t = s$, l'intégration par parties par rapport à x et t donne pour le terme

suivant

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega_s} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left[a(t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx dt \\
&= - \int_{\Omega_s} a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left[a(t, \sigma) J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx dt \\
&= - \int_{\Omega_s} a(t, x) u \frac{\partial}{\partial t} \left[a(t, \sigma) \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx dt + \int_{\Omega_s} \frac{\partial a}{\partial x}(t, x) u \frac{\partial}{\partial t} \left[a(t, \sigma) J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx dt. \\
&= \int_{\Omega_s} \frac{\partial a}{\partial t}(t, x) a(t, \sigma) u \frac{\partial u}{\partial t} dx dt + \int_{\Omega_s} a(t, x) a(t, \sigma) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt \\
&\quad - \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial t}(t, x) a(t, \sigma) u J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} dx dt - \int_{\Omega_s} \frac{\partial a}{\partial x}(t, x) a(t, \sigma) \frac{\partial u}{\partial t} J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\
&= \int_{\Omega_s} a(t, x) a(t, \sigma) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \frac{\partial a}{\partial t}(t, x) a(t, \sigma) \frac{\partial (u)^2}{\partial t} dx dt \\
&\quad - \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial t}(t, x) a(t, \sigma) u J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} dx dt - \int_{\Omega_s} \frac{\partial a}{\partial x}(t, x) a(t, \sigma) \frac{\partial u}{\partial t} J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\
&= \int_{\Omega_s} a(t, x) a(t, \sigma) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t}(t, x) a(t, \sigma) u^2 \Big|_{t=s}^{t=T} dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}(t, x) a(t, \sigma) + \frac{\partial a}{\partial t}(t, x) \frac{\partial a}{\partial t}(t, \sigma) \right) u^2 dx dt \\
&\quad - \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial t}(t, x) a(t, \sigma) u J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} dx dt - \int_{\Omega_s} \frac{\partial a}{\partial x}(t, x) a(t, \sigma) \frac{\partial u}{\partial t} J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\
&= \int_{\Omega_s} a(t, x) a(t, \sigma) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t}(T, x) a(T, \sigma) (u(T, x))^2 dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}(t, x) a(t, \sigma) + \frac{\partial a}{\partial t}(t, x) \frac{\partial a}{\partial t}(t, \sigma) \right) u^2 dx dt \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} a(t, \sigma) \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt - \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial t} a(t, \sigma) u J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} dx dt. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

On considère le terme suivant :

$$- \int_{\Omega_s} b(t) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left(a(t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt,$$

auquel on fait une intégration par parties, en utilisant (3.2), (3.4) et les conditions aux

limites (1.3) on obtient :

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega_s} b(t) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left(a(t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt = - \int_{\Omega_s} b(t) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left(a(t, \sigma) J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt \\
& = - \int_{\Omega_s} b(t) \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left(a(t, \sigma) \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt = - \int_{\Omega_s} b(t) \frac{\partial u}{\partial t} a(t, \sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx dt \\
& \quad - \int_{\Omega_s} b(t) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial a}{\partial t}(t, \sigma) dx dt = - \int_{\Omega_s} b(t) \frac{\partial a}{\partial t}(t, \sigma) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt \\
& \quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} b(t) a(t, \sigma) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt = - \int_{\Omega_s} b(t) \frac{\partial a}{\partial t}(t, \sigma) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt \\
& - \frac{1}{2} \int_0^1 b(t) a(t, \sigma) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \Big|_{t=s}^{t=T} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \left[\frac{\partial b(t)}{\partial t} a(t, \sigma) + b(t) \frac{\partial a}{\partial t}(t, \sigma) \right] \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt \\
& = - \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} b(t) \frac{\partial a}{\partial t}(t, \sigma) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \frac{\partial b(t)}{\partial t} a(t, \sigma) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_0^1 b(s) a(s, \sigma) \left(\frac{\partial u}{\partial t}(s, x) \right)^2 dx. \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Pour le dernier terme du membre gauche de l'égalité (3.10), en tenant compte de (3.2) et (3.5) et en intégrant par parties par rapport à t on a :

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega_s} d(t, x) u \frac{\partial}{\partial t} \left[a(t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx dt = \int_{\Omega_s} \frac{\partial d}{\partial t}(t, x) u a(t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\
& \quad + \int_{\Omega_s} d(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} a(t, \sigma) J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt. \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Des égalités (3.10)-(3.14), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_s} a(t, x) a(t, \sigma) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 a(s, \sigma) \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t}(s, x) \right)^2 dx \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t}(T, x) a(T, \sigma) (u(T, x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 b(s) a(s, \sigma) \left(\frac{\partial u}{\partial t}(s, x) \right)^2 dx \\
& = \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \frac{\partial a}{\partial t}(t, \sigma) \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \left[\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}(t, x) a(t, \sigma) + \frac{\partial a}{\partial t}(t, x) \frac{\partial a}{\partial t}(t, \sigma) \right] u^2 dx dt \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}(t, x) a(t, \sigma) \left(J_x \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt + \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial t}(t, x) a(t, \sigma) u J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} b(t) \frac{\partial a}{\partial t}(t, \sigma) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \frac{\partial b(t)}{\partial t} a(t, \sigma) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt \\
& - \int_{\Omega_s} \frac{\partial d}{\partial t} a(t, \sigma) u J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt - \int_{\Omega_s} d(t, x) a(t, \sigma) \frac{\partial u}{\partial t} J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt. \quad (3.15)
\end{aligned}$$

De (3.7) on a

$$\int_s^T \int_0^1 \left(J_x^{*2} \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt \leq \frac{b^2}{2} \int_s^T \int_0^1 \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt. \quad (3.16)$$

En utilisant les conditions H_1 et H_2 , l'inégalité (3.16) et en appliquant l' ε -inégalité dans (3.15) on obtient :

$$\begin{aligned}
& a_0^2 \int_{\Omega_s} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \frac{1}{2} a_0 \int_0^1 \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t}(s, x) \right)^2 dx + \frac{1}{2} c_4 a_0 \int_0^1 (u(T, x))^2 dx \\
& + \frac{1}{2} b_0 a_0 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(s, x) \right)^2 dx \leq \frac{1}{2} c_2 \int_{\Omega_s} \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} (c_7 a_1 + c_2^2) (u)^2 dxdt \\
& + \frac{1}{2} c_5 a_1 \int_{\Omega_s} \left(J_x \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \frac{1}{2} c_6^2 \int_{\Omega_s} (u)^2 dxdt + \frac{1}{2} a_1^2 \int_{\Omega_s} \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt \\
& + \frac{1}{2} b_1 c_2 \int_{\Omega_s} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \frac{1}{2} c_3 a_1 \int_{\Omega_s} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \frac{1}{2} c_8^2 \int_{\Omega_s} (u)^2 dxdt \\
& + \frac{b_1^2 a_1^2}{4} \int_{\Omega_s} \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \frac{1}{2} d_1^2 \int_{\Omega_s} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt + \frac{b_1^2 a_1^2}{4} \int_{\Omega_s} \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt \\
& \leq \left(\frac{1}{2} c_2 + \frac{1}{2} c_5 a_1 + \frac{1}{2} a_1^2 + \frac{b_1^2 a_1^2}{2} \right) \int_{\Omega_s} \left(J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt \\
& + \frac{1}{2} (c_7 a_1 + c_2^2 + c_6^2 + c_8^2) \int_{\Omega_s} (u)^2 dxdt + \frac{1}{2} (c_3 a_1 + d_1^2) \int_{\Omega_s} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt, \quad (3.17)
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{0, \Omega_s}^2 + \|u(T, x)\|_{0, (0,1)}^2 + \left\| J_x^* \frac{\partial u}{\partial t}(s, x) \right\|_{0, (0,1)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(s, x) \right\|_{0, (0,1)}^2 \\
& \leq k_3 \left(\|u\|_{0, \Omega_s}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{0, \Omega_s}^2 + \left\| J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{0, \Omega_s}^2 \right), \quad (3.18)
\end{aligned}$$

où

$$k_3 = \frac{\max \left[\left(\frac{1}{2} c_2 + \frac{1}{2} c_5 a_1 + \frac{1}{2} a_1^2 + \frac{b_1^2 a_1^2}{2} \right), \frac{1}{2} (c_7 a_1 + c_2^2 + c_6^2 + c_8^2), \frac{1}{2} (c_3 a_1 + d_1^2) \right]}{\min (a_0^2, \frac{1}{2} a_0, \frac{1}{2} c_4 a_0, \frac{1}{2} a_0 b_0)}.$$

L'inégalité (3.18) est essentielle pour notre démonstration. Pour l'utiliser, on remarque que la constante k_3 est indépendante de s , cependant la fonction u figurant dans (3.18) dépend de T . Pour cela on introduit maintenant une nouvelle fonction $\theta(t, x)$ définie par

$$\theta(t, x) = J_t^* \frac{\partial u}{\partial \tau} = \int_t^T \frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau.$$

On a

$$u(t, x) = \theta(s, x) - \theta(t, x),$$

en effet :

$$\begin{aligned}
\theta(s, x) - \theta(t, x) &= \int_s^T \frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau - \int_t^T \frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau \\
&= \int_s^T \frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau + \int_T^t \frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau \\
&= \int_s^t \frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau \\
&= u(t, x) - u(s, x) \\
&= u(t, x).
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\|u\|_{0, \Omega_s}^2 &= \int_0^1 \int_s^T (u)^2 dx dt \\
&= \int_0^1 \int_s^T (\theta(s, x) - \theta(t, x))^2 dx dt \\
&\leq 2 \int_0^1 \int_0^T (\theta(s, x))^2 dx dt + 2 \int_0^1 \int_0^T (\theta(t, x))^2 dx dt \\
&\leq 2 \int_s^T \left(\int_0^1 (\theta(s, x))^2 dx \right) dt + 2 \|\theta(t, x)\|_{0, \Omega_s}^2 \\
&\leq 2(T - s) \|\theta(s, x)\|_{0, (0,1)}^2 + 2 \|\theta(t, x)\|_{0, \Omega_s}^2.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

De plus :

$$u(T, x) = \theta(s, x) - \theta(T, x) = \theta(s, x). \tag{3.20}$$

Ainsi de (3.18)-(3.20) découle :

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{0, \Omega_s}^2 + (1 - 2k_3(T - s)) \|\theta(s, x)\|_{0, (0,1)}^2 + \left\| J_x^* \frac{\partial u}{\partial t}(s, x) \right\|_{0, (0,1)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(s, x) \right\|_{0, (0,1)}^2 \\
&\leq k_3 \left(\|\theta(t, x)\|_{0, \Omega_s}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{0, \Omega_s}^2 + \left\| J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{0, \Omega_s}^2 \right),
\end{aligned} \tag{3.21}$$

d'où si $s_0 > 0$ vérifie la condition

$$1 - 2k_3(T - s_0) = \frac{1}{2},$$

de l'inégalité (3.21), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\|\theta(s, x)\|_{0, (0,1)}^2 + \left\| J_x^* \frac{\partial u}{\partial t}(s, x) \right\|_{0, (0,1)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(s, x) \right\|_{0, (0,1)}^2 \\
&\leq 2k_3 \left(\|\theta(t, x)\|_{0, \Omega_s}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{0, \Omega_s}^2 + \left\| J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{0, \Omega_s}^2 \right),
\end{aligned} \tag{3.22}$$

pour tout $s \in [T - s_0, T]$.

En posant

$$y(s) = \|\theta(t, x)\|_{0, \Omega_s}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{0, \Omega_s}^2 + \left\| J_x^* \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{0, \Omega_s}^2.$$

Alors dans (3.21) on obtient

$$\frac{dy(s)}{ds} = -\|\theta(t, s)\|_{0, (0,1)}^2 - \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(s, x) \right\|_{0, (0,1)}^2 - \left\| J_x^* \frac{\partial u}{\partial t}(s, x) \right\|_{0, (0,1)}^2.$$

Par conséquent de l'inégalité (3.22), on obtient :

$$-\frac{dy(s)}{ds} \leq 2k_3 y(s),$$

d'où

$$-\frac{d}{ds} (y(s) \exp(2k_3 s)) \leq 0. \quad (3.23)$$

En intégrant sur $[s, T]$ et en tenant compte que $y(T) = 0$ on obtient

$$y(s) \exp(2k_3 s) \leq 0. \quad (3.24)$$

Il découle de l'inégalité (3.24) que $w = 0$ presque partout dans Ω_{T-s_0} . Comme s est indépendant de l'origine en faisant le même raisonnement au bout d'un nombre fini de fois on montre que $w = 0$ presque partout dans Ω . d'où le résultat.

Théorème 3 *L'image $R(L)$ de l'opérateur L est égale à F .*

Démonstration. Comme F est un espace de Hilbert, on a $R(L) = F$ si et seulement si de :

$$\int_{\Omega} (1-x)^2 \mathfrak{L}u \cdot w \, dxdt + \int_{\Omega} \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left[\frac{d^2 lu}{dx^2} \cdot \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{dl u}{dx} \cdot \frac{dw_0}{dx} \right] + luw_0 \right] dxdt = 0, \quad (3.25)$$

on a $W = (w, w_0) = 0$.

En choisissant u tel que $lu = 0$, on obtient alors de (3.25) que :

$$\int_{\Omega} (1-x)^2 \mathfrak{L}u \cdot w \, dxdt = 0.$$

En posant $\mathfrak{W} = (1-x)^2 w$, il vient alors d'après la proposition 1 que $\mathfrak{W} = 0$ et donc $w = 0$.

D'où (3.25) devient :

$$\int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left[\frac{d^2 lu}{dx^2} \cdot \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{dl u}{dx} \cdot \frac{dw_0}{dx} \right] + luw_0 \right] dx = 0.$$

Comme l'image de l'opérateur trace l est dense dans l'espace de Hilbert muni de la norme

$$\left(\int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left[\left| \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right|^2 + \left| \frac{dw_0}{dx} \right|^2 \right] + |lw_0|^2 \right] dx \right)^{1/2},$$

on a $w_0 = 0$. D'où $W = 0$. ■

References

- [1] Barenblat, G. I., Zhelton, Yu. P., Kochina, I.V., Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata], PMM J. Appl. Math. Mech., 24, N°5 (1960), pp. 852-864.
- [2] Batten, G. W., Jr., Second-order correct boundary conditions for the numerical solution of mixed boundary problem for parabolic equations, Math. Comp., 17 (1963), pp. 405-413.
- [3] Benouar, N., Yurchuk, N. I., Mixed problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessel operator. Diff. Equa. 27, N°12 (1991), pp. 1482-1487.
- [4] Bouziani, A., Benouar, N. E., Mixed problem with integral conditions for a third order parabolic equation, Kobe J. Math., 15 (1998), pp. 47-58.
- [5] Cahlon, B., Kulkarni, D. M., Shi, P., Stepwise stability for the heat equation with nonlocal constraint, SIAM J. Numer. Anal., 32 (1995), pp. 571-593.
- [6] Cannon, J.R., The solution of the heat equation subject to the specification of energy, Quart. Appl. Math., 21 (1963), pp. 155-160.
- [7] Cannon, J. R., The one-dimensional heat equation, in Encyclopedia of Mathematics and its Applications 23, Addison-Wesley, Menlo Park, CA (1984).
- [8] Cannon, J. R., Lin, Classical and weak solution for one-dimensional Pseudo-Parabolic Equations with Typical boundary Data. Ann. Math. Pura ed appl., N°152 (1998), pp. 375-385.
- [9] Choi, Y. S., Chan, K. Y., A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electrochemistry, Nonlinear Anal., 18 (1992), pp. 317-331.
- [10] Chudnovski, A.F., Soil Thermophysics, Nauka, Moscow (1976).
- [11] Colton, D., Pseudoparabolic equation in one space variable, J. Diff. Eq., 12 (1972), pp. 559-565.
- [12] Denche, M., Marhoune, A. L., A Three- point Boundary Value Problem with an Integral condition for Parabolic Equation with the Bessel operator, Applied Mathematics Letters, 13 (2000), 16, pp. 85-89.
- [13] Denche, M., Marhoune, A. L., High order Mixed- type Differential Equations with Weighted Integral Boundary Conditions, Electron. J. Diff. Equa. N°60 (2000), pp. 1-10.



- [14] Denche, M., Marhoune, A. L., Mixed Problem with Nonlocal Boundary Conditions for a Third Order Partial Differential Equation of Mixed type. A paraître dans International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences.
- [15] Dezin, A. A., General questions in theory of boundary value problems, Moscow- Nauka ,1980, English trans, springer Verlag.
- [16] Dezin, A. A., Théorèmes d'existence et d'unicité de la solution pour les problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionnels. Usp. Math. Naouk, T.14, N°3 (1987), pp. 22-73.
- [17] Friedrichs, K., Symmetric hyperbolic linear differential equations. comm. Pure. Appl. Math. 7. N°2 (1954), pp. 345-3392.
- [18] Garding, L., Cauchy's problem for hyperbolic equations ,University of Chicago ,Lecture notes , 1957.
- [19] Ionkin, N. I., Solution of a boundary-value problem in heat conduction with a non-classical boundary condition, Differentialnye Uravneniya, 13 (1977), pp. 294-304.
- [20] Kamynin, N. I., A boundary value problem in the theory of the heat conduction with non classical boundary condition, U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys., 4 (1964), pp. 33-59.
- [21] Kartynnik, A. V., Three-point boundary -value problem with an integral space-variable condition for a second-order parabolic equation, Differential Equation, 26 (1990), pp. 1160-1166.
- [22] Ladyzhenskaya, O. A., Mixed Problem for hyperbolic equations. Edition Mir Nauka ,1974.
- [23] Ladyzhenskaya, O. A., The boundary value problems of mathematical physics, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [24] Leray, J., Lecture on hyperbolic differential equations with variable coefficients. Princeton, Just for Adv. Study, 1952.
- [25] Petrovsky, I. G., Uber das cauchy'sche problem fur system von linearen partialen differenzialgleichungen in Gebit der nichtanalytischen funktionen, Bull. Univ. d'état, Moscow, N°7 (1938), pp.1-74.
- [26] Pulkina, L. S., A non-local problem with integral conditions for hyperbolic equations, Electronic Journal of Differential Equations, N°45 (1999), pp. 1-6.

- [27] Rebbani, F., Chesalyn, V. I., Problèmes aux limites pour des équations différentielles d'ordre impaire dans le rectangle. *Izvestia Akad. Nauk BSSR, Série Phys. Math. Nawk* N°3 (1985).
- [28] Rebbani, F., Chesalyn, V. I., Problèmes aux limites pour certaines équations différentielles opérationnelles dans le rectangle. *Doklady Acad. Nauk. BSSR*, T. 30, N°12, pp. 1061-1063.
- [29] Samarski, A. A., Some problems in the modern theory of differential equations, *Differentsialnye Uravneniya*, 16 (1980), pp. 1221-1228.
- [30] Shi, P., Shillor, M., Design of Contact Patterns in One Dimentional Thermoelasticity, in *Theoretical Aspects of Industrial Design*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1992.
- [31] Shi, P., weak solution to evolution problem with a nonlocal constraint, *SIAM J. Anal.*, 24 (1993), pp. 46-58.
- [32] Shkhanukov, M. Kh., Boundary-value Problem for third-order equation occurring in the modeling of mater filtration in Porous midia, *Diff. Eqs.*, 18, N°4 (1982), pp. 689-699.
- [33] Showalter, R. E., Ting, T. W., Pseudo-Parabolic partial differential equations, *SIAM J. Math. Anal.*, 1 (1970), pp. 1-26.
- [34] Sobolev, S. L., *Certaines Applications de l'analyse fonctionnelle à la physique Mathématique*; Leningrad, 1950.
- [35] Vodakhova, V. A., A boundary value problem with A.M. Nakhushev's nonlocal condition for a pseudoparabolic moisture- transfer equation, *Diff. Eqs.*, 18, N°2 (1982), pp. 285-285.
- [36] Volkodavov, V. F., Zhukov, V. E., Two problems for the string vibration equation with integral conditions and special matching conditions on the characteristic, *Differential Equation*, 34 (1998), pp. 501-505.
- [37] Yurchuk, N. I., Boundary value problems for equations whose principal part contains operators of the form $\left(\frac{d^{2m+1}}{dt^{2m+1}}\right) + A$. *Diff. Equa.* 10, N°4 (1974), pp. 589-592.
- [38] Yurchuk, N. I., Boundary value problems for equations involving operators of the form $\left(\frac{d^{2m}}{dt^{2m}}\right) + A$. *Diff. Equa.* 10, N°5 (1974), pp. 735-737.
- [39] Yurchuk, N. I., A priori estimates of solutions of boundary value problems for certain differential equations. *Diff. Equa.* 12, N°4 (1976), pp. 512-518.

- [40] Yurchuk, N. I., Boundary value problems for differential equations with operator valued coefficients depending on parameter. *Diff. Equa.* 12, N°9 (1976), pp. 1157-1168.
- [41] Yurchuk, N. I., Solvability of boundary value problems for certain differential operational equations. *Diff. Equa.* 13, N°4 (1977), pp. 423-429.
- [42] Yurchuk, N. I., The energy inequality method in the investigation of certain degenerate linear operational differential equation. *Diff. Equa.* 14 (1978), N°12, pp. 1558-1567.
- [43] Yurchuk, N. I., Mixed Problems for parabolic equation of variable order. *Soviet. Math. Dokl.*, 26, N°12 (1982), pp. 39-41.
- [44] Yurchuk, N. I., Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations, *Differential Equations*, 22 (1986), pp. 1457-1463.

Résumé

Le présent travail est consacré à l'étude d'un problème mixte avec condition intégrale pour une équation pseudo-parabolique. On montre l'existence et l'unicité de la solution.

La démonstration est basée sur une estimation à priori bilatérale et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème.

Abstract.

In this work, we study a mixed problem with an integral condition for a pseudo-parabolic equation. We prove the existence and uniqueness of a solution. The proof uses two sided a priori estimates and the density of the range of the operator generated.

الخلاصة

الهدف من هذا العمل هو دراسة وجود، وحدانية الحل و البرهان
على التقديرات من الإتجاهين للمسائل المختلطة ذات الصنف الشبه
النزائد و ذات الشروط الحدية التكاملية . الطريقة المستعملة هي
طريقة المتراجحات الطاقوية .