

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Frères Mentouri Constantine 1

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

N° d'ordre: 02/DS/2022

N° Série:01/Math/2022

Thèse Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat en Sciences.

**Thème:**

**"Nombre de cycles limites des systèmes différentiels polynômiaux  
perturbés à centres linéaires "**

Option: Systèmes Dynamiques

Présentée par

**M<sup>me</sup>. DEBZ NASSIMA**

Membres du jury:

03/02/2022

Président	Mr Hameida Ali	MCA	Université de Constantine 1
Rapporteur	Mr Berkane Abdelhak	Prof	Université de Constantine 1
Co-rapporteur	M <sup>me</sup> Boulfoul Amel	MCA	Université de Skikda
Examineur	Mr Makhoulf Amar	Prof	Université de Annaba
Examineur	Mr Ellagoune Fateh	Prof	Université de Guelma
Examineur	Mr Hamaizia Tayeb	Prof	Université de Constantine 1

**Année Universitaire 2021/2022**

## **REMERCIEMENTS**

Avant tout je tiens à remercier Allah pour la force et la volenté qu'il m'a donné pour accomplir ce travail.

Je tiens à remercier mes directeurs de thèse **Dr Amel Boulfoul et Pr Abd El Hak Berkane** pour la confiance qu'il mon accordé ainsi que leurs disponibilité et leurs patiences. Un grand merci à **Dr Amel Boulfoul** de m'avoir guidé avec autant d'écoute vers un sujet de recherche qui corresponde à mes attentes.

J'adresse mes remerciements au **Professeur Hameida Ali** pour avoir accepté d'être président de mon jury. Je le remercie vivement et je lui exprime ma profonde gratitude.

Je souhaiterais remercier mes examinateurs pour le temps qu'ils ont accordé à la lecture de cette thèse et à l'élaboration de leurs rapports:

Je remercie les Professeurs **Makhlouf Amar, Hamaizia Tayeb et Ellagoune Fateh** d'avoir accepté cette charge.

Mes plus sincères remerciements vont également au **Professeur Chaoui Abd erazek** d'avoir accepté mon inscription avec lui pendant une longue durée.

Je remercie chaleureusement mon **époux et mes sœurs** qui m'ont toujours encouragé au long de mon parcours.

Je tiens à exprimer mes remerciements à **mes amis** qu'ils trouveront ici toute ma reconnaissance pour leurs aides et encouragements à terminer cette thèse.

**" Merci à tous "**

---

# Résumé

---

Dans cette thèse, on étudie les cycles limites de deux classes de systèmes différentiels ordinaires dépendant d'un petit paramètre. En utilisant la théorie de la moyennisation du premier et deuxième ordre, on transforme l'étude des cycles limites d'un système différentiel ordinaire en l'étude des solutions d'un système algébrique. La première classe étudiée est un système différentiel polynômial généralisé de la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - \varepsilon(g_{11}(x) + f_{11}(x)y) - \varepsilon^2(g_{12}(x) + f_{12}(x)y), \\ \dot{y} &= -x - \varepsilon(g_{21}(x) + f_{21}(x)y - p_1(x)y^2 - q_1(x)y^3) \\ &\quad - \varepsilon^2(g_{22}(x) + f_{22}(x)y - p_2(x)y^2 - q_2(x)y^3),\end{aligned}$$

où  $f_{i,j}, g_{i,j}$  ( $1 \leq i, j \leq 2$ ) et  $p_i, q_i$  ( $1 \leq i \leq 2$ ) sont des polynômes de degré donnés. La deuxième classe étudiée est un système différentiel polynômial généralisé de Kukles de la forme

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \varepsilon l_1(x) y^{2\alpha} + \varepsilon^2 l_2(x) y^{2\alpha}, \\ \dot{y} &= x - \varepsilon (f_1(x) y^{2\alpha} + g_1(x) y^{2\alpha+1} + h_1(x) y^{2\alpha+2} + d_0^1 y^{2\alpha+3}), \\ &\quad + \varepsilon^2 (f_2(x) y^{2\alpha} + g_2(x) y^{2\alpha+1} + h_2(x) y^{2\alpha+2} + d_0^2 y^{2\alpha+3}),\end{aligned}$$

où  $f_i(x), g_i(x), h_i(x)$  et  $l_i(x)$ , ( $1 \leq i \leq 2$ ) sont des polynômes de degré donnés.  $d_0^i \neq 0$ , ( $1 \leq i \leq 2$ ),  $\alpha \in \mathbb{N}$  et  $\varepsilon$  est un petit paramètre.

L'étude des deux classes est illustrée par des exemples.

## Mots clés

Système dynamique - cycle limite - systèmes de Kukles - système polynômial - théorie de la moyennisation.

---

# abstract

---

In this thesis we study the limit cycles of two classes of ordinary differential systems depending of small parameter. Using a theorem of first and second order averaging theory we transform the study of limit cycles of ordinary differential systems to the study of non-degenerate zeros of an algebraic systems. The first class deals with the generalized polynomial differential system of the form :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - \varepsilon(g_{11}(x) + f_{11}(x)y) - \varepsilon^2(g_{12}(x) + f_{12}(x)y), \\ \dot{y} &= -x - \varepsilon(g_{21}(x) + f_{21}(x)y - p_1(x)y^2 - q_1(x)y^3) \\ &\quad - \varepsilon^2(g_{22}(x) + f_{22}(x)y - p_2(x)y^2 - q_2(x)y^3),\end{aligned}$$

where  $f_{i,j}, g_{i,j}$  ( $1 \leq i, j \leq 2$ ) and  $p_i, q_i$  ( $1 \leq i \leq 2$ ) are polynomials of given degree. The second class is studied the generalized polynomial Kukles differential system of the form :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \varepsilon l_1(x) y^{2\alpha} + \varepsilon^2 l_2(x) y^{2\alpha}, \\ \dot{y} &= x - \varepsilon (f_1(x) y^{2\alpha} + g_1(x) y^{2\alpha+1} + h_1(x) y^{2\alpha+2} + d_0^1 y^{2\alpha+3}), \\ &\quad + \varepsilon^2 (f_2(x) y^{2\alpha} + g_2(x) y^{2\alpha+1} + h_2(x) y^{2\alpha+2} + d_0^2 y^{2\alpha+3}),\end{aligned}$$

where  $f_i(x), g_i(x), h_i(x)$  and  $l_i(x)$ , ( $1 \leq i \leq 2$ ) are polynomials of given degree,  $d_0^i \neq 0$ , ( $1 \leq i \leq 2$ ),  $\alpha \in \mathbb{N}$  and  $\varepsilon$  is a small parameter.

This study is illustrated by examples .

## Key words

Dynamical system - Limit cycle - Kukles systems - Polynomial systems - Averaging theory .

## ملخص

ملخص موضوع هذه الاطروحة يرتكز اساسا علي دراسة الحلول الدوريه المعزولة لقسمين من الجمل التفاضلية العادية المتعلقة بوسيط صغير. باستعمال اجدى نتائج طريقة المتوسط من الدرجة الاولي و الثانيه نقوم بتحويل مسالة البحث عن الحلول الدورية المعزولة لجملة معادلات تفاضلية عادية الى البحث عن المحذور غير المنحلة لجملة معادلات جبرية غير خطية القسم الاول هو عبارة عن جملة معادلات تفاضلية كثيرات الحدود المعممة من الشكل

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - \varepsilon(g_{11}(x) + f_{11}(x)y) - \varepsilon^2(g_{12}(x) + f_{12}(x)y), \\ \dot{y} &= -x - \varepsilon(g_{21}(x) + f_{21}(x)y - p_1(x)y^2 - q_1(x)y^3) \\ &\quad - \varepsilon^2(g_{22}(x) + f_{22}(x)y - p_2(x)y^2 - q_2(x)y^3),\end{aligned}$$

حيث  $f_{i,j}, g_{i,j}$  ( $1 \leq i, j \leq 2$ )  $p_i, q_i$  ( $1 \leq i \leq 2$ ) كثيرات الحدود ذات الدرجة معطاة و  $\varepsilon$  وسيط صغير.

القسم الثاني هو عبارة عن جملة معادلات تفاضلية كثيرات الحدود ليكلوز المعممة من الشكل

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \varepsilon l_1(x) y^{2\alpha} + \varepsilon^2 l_2(x) y^{2\alpha}, \\ \dot{y} &= x - \varepsilon (f_1(x) y^{2\alpha} + g_1(x) y^{2\alpha+1} + h_1(x) y^{2\alpha+2} + d_0^1 y^{2\alpha+3}), \\ &\quad + \varepsilon^2 (f_2(x) y^{2\alpha} + g_2(x) y^{2\alpha+1} + h_2(x) y^{2\alpha+2} + d_0^2 y^{2\alpha+3}),\end{aligned}$$

حيث  $f_i(x), g_i(x), h_i(x), l_i(x)$  ( $1 \leq i \leq 2$ )  $p_i, q_i$  كثيرات الحدود ذات الدرجة معطاة.

حيث  $d_0^i \neq 0$ , ( $1 \leq i \leq 2$ ) و  $\alpha \in \mathbb{N}$  و  $\varepsilon$  وسيط صغير.

دراسة القسمين السابقين من الجمل التفاضلية تم توضيحهما بواسطة امثلة

## كلمات مفتاحية

جمل ديناميكية - حل دوري معزول - جمل ليكلوز - نظرية المتوسط - جمل كثيرات الحدود .

# Table des matières

Introduction générale	3
<b>1 Notions préliminaires et théorie de la moyennisation</b>	<b>7</b>
1.1 Notions préliminaires . . . . .	8
1.1.1 Systèmes différentiels polynômiaux . . . . .	8
1.1.2 Systèmes dynamiques . . . . .	8
1.1.3 Flot d'une équation différentielle . . . . .	9
1.1.4 Points d'équilibre et linéarisation . . . . .	9
1.1.5 Portrait de phase . . . . .	10
1.1.6 Nature des points d'équilibre . . . . .	10
1.1.7 Stabilité des points d'équilibre . . . . .	11
1.1.8 Orbite périodique et cycle limite . . . . .	11
1.2 Théorèmes de la moyennisation du premier et deuxième ordre . .	13
1.2.1 Théorème de la moyennisation du premier ordre . . . . .	14
1.2.2 Théorème de la moyennisation du deuxième ordre . . . . .	17
<b>2 Nombre maximum de cycles limites d'un système différentiel polynômial   planaire</b>	<b>23</b>
2.1 Résultats introductifs . . . . .	24
2.2 Application de la méthode de la moyennisation du premier ordre	25
2.2.1 Preuve du théorème (2.1) . . . . .	25
2.3 Application de la méthode de la moyennisation du deuxième ordre	27
2.3.1 Preuve du théorème 2.2 . . . . .	28
2.4 Exemples d'applications . . . . .	45
<b>3 Cycles limites d'une classe de systèmes différentiels du type Kukles</b>	<b>49</b>
3.1 Résultats introductifs . . . . .	50
3.2 Application de la méthode de la moyennisation du premier et deuxième ordre . . . . .	50
3.2.1 Preuve de l'énoncé (a) du théorème 3.1 . . . . .	51
3.2.2 Preuve de l'énoncé (b) du théorème 3.1 . . . . .	53

3.3 Exemple d'application . . . . .	68
Conclusion	70
Annexe A	71
Table des figures	77
Bibliographie	79

# Introduction générale

L'étude des équations différentielles est un domaine mathématique qui historiquement a fait l'objet de nombreuses recherches, et continue cependant de rester d'actualité, par le fait qu'elle intéresse particulièrement des disciplines comme la mécanique, la physique et plus récemment la biologie. Il convient de souligner que la plupart de ces équations sont globalement de nature non linéaire. Du fait que la description d'un système, à partir des lois régissant son fonctionnement, conduit souvent à un modèle non linéaire, la manipulation peut se révéler complexe. De ce fait il n'existe pas, en l'état actuel, une théorie d'ensemble des équations non linéaires. Pour ce faire, des calculs approchés basés sur la méthode des petites perturbations, des méthodes de linéarisation ...etc, sont effectués concernant ces phénomènes, sur lesquels on dispose de très peu d'informations. A partir de tels calculs il a été déduit des conjectures que les chercheurs s'efforceront par la suite de démontrer. Cette démarche s'est révélée particulièrement féconde.

La théorie qualitative des équations différentielles plus connue aujourd'hui par la théorie des équations différentielles, est la branche des mathématiques qui se développe le plus activement et qui possède les plus importantes applications scientifiques. L'étude qualitative surtout pour les systèmes non- linéaires, reste dans un préalable nécessaire à l'étude complète de leurs solutions.

Un des principaux problèmes de la théorie des équations différentielles est l'étude de leurs orbites périodiques leurs existence, leurs nombres et leur stabilité. Un cycle limite d'une équation différentielle est une orbite périodique isolée dans l'ensemble des orbites périodiques des équations différentielles .

Les cycles limites ont été introduit pour la première fois par **H.Poincaré** en 1881 dans son " Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle" [24]. Poincaré s'est intéressé à l'étude qualitative des solutions des équations différentielles, c'est à dire les points d'équilibre, les cycles limites et de leur stabilité. Ce qui permet d'avoir une idée globale des autres orbites du système étudié. À la fin des années 1920, **Van Der Pol**, **Liénard** et **Androv** ont prouvé qu'une trajectoire fermée d'une oscillation arrivant dans un circuit de type vide était un cycle limite.



Un des théorèmes les plus importants de la dynamique non linéaire est le théorème de Poincaré Bendixon qui affirme que dans une région compacte du plan, une trajectoire d'un système planaire converge vers un point d'équilibre ou un cycle limite. Le critère de **dulac** donne une méthode de non existence des solutions périodiques. Le mathématicien **David Hilbert** présenta, lors du deuxième congrès international des mathématiques ([22],1900), "23 problèmes " dont l'avenir attend la résolution grâce aux nouvelles méthodes qui seront découvertes dans le siècle qui commence ". Le problème numéro 16 est de savoir le nombre maximal et la position relatives des cycles limite d'un système différentiel polynômial planaire de degré  $n$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

voir par exemple ([2],[15],[12],[31],[10] )et le livre de **Ye Yanqian et al** [41] consacré seulement pour étudier les cycles limites, principalement des systèmes différentiels polynômiaux quadratiques. On note  $H_n$  ce nombre maximal. **Dulac** [16](1923), proposa une démonstration prouvant que  $H_n$  est fini pour tout  $n$ . Mais sa démonstration comportait une erreur. La résolution de ce problème de Dulac a été faite d'une façon indépendante par **ILyashenko** (1991) et **Ecalte, Martinet & Moussu** (1987) puis **Ecalte** (1992). Cette résolution permet de montrer que  $H_n < \infty$ . **Petrovsky & Landis** (1957) crurent trouver la valeur de  $H_2$  mais il s'aperçurent qu'il ya une erreur dans leur propre démonstration **Petrovsky & Landis** (1967) avant que celui ci ne soit affirmé par un contre exemple de Shi (1982) dans lequel un système quadratique à 4 cycles limites. Ainsi, si  $H_n$  est un nombre fini pour tout  $n$ , la seule chose que l'on sache est que  $H_2 \geq 4$  et  $H_3 \geq 11$  (**Jibin & Chunfu, 1985, zoladek, 1995**). **chritopher & Iloyd**(1995) ont donné une borne inférieure au nombre  $H_n$ ;  $H_n \geq n^2 \log(n)$ .

Dans ce travail, on étudie les cycles limites des systèmes planaires autonomes de la forme (1) tels que  $P(x, y)$  et  $Q(x, y)$  sont des polynômes de degré donné. Plus précisément on s'intéresse à la recherche des cycles limites de deux classes spéciales de systèmes différentiels, **des systèmes de Liénard plus généralisés** et **des systèmes de Kukles généralisés**. Le premier type de systèmes, c'est-à-dire les systèmes de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -g(x) - f(x)y. \end{cases} \quad (2)$$

apparaissent dans des problèmes de mécanique, dans des systèmes prédateurs-proies [18] et des réactions chimiques ou biochimiques [33, 36]. Le second, c'est-à-dire les systèmes

---

de la forme

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x + \lambda y + q(x, y).\end{aligned}\tag{3}$$

Plusieurs travaux dans lesquels de tels systèmes sont apparus ont été étudiés (Voir par exemple [27, 20, 35]). Un problème d'intérêt commun pour les systèmes de Liénard et Kukles est l'existence de cycles limites qui bifurquent à partir d'un centre. Il existe plusieurs méthodes pour calculer le nombre de cycles limites qui bifurquent à partir d'un centre. La plupart de ces méthodes est basée sur la l'application de retour de Poincaré (voir par exemple [3], ) les intégrales de pontriyagin-Melnikov, voir par exemple le chapitre 4 de [21], le facteur intégrant inverse, voir [40] et la théorie de la moyennisation, voir par exemple les articles ([37, 39, 34, 11]) et ainsi de suite. La dernière méthode est un outil utile et efficace pour étudier le nombre de cycles limites pour certains systèmes différentiels. En résumé, nous pouvons dire que la théorie de moyennisation donne une relation quantitative entre les solutions d'un système périodique non autonome et les solutions de son système moyenné, qui est autonome.

Dans [28], les auteurs ont étudié en utilisant la théorie de moyennisation du premier deuxième et troisième ordre le nombre de cycles limites du système (2).

Dans [7, 8], les auteurs ont mis en évidence un système de Liénard plus général que (2).

Les auteurs dans [38] ont fourni une borne supérieure sur le nombre maximum de cycles limites du système (2) en utilisant la théorie de moyennisation du quatrième ordre.

La suite du travail est organisé comme suit :

**Le chapitre 1**, comporte un rappel des notions essentielles sur les systèmes différentiels ordinaires dans  $\mathbb{R}^n$ . Plus précisément dans la première section on commence par définir les systèmes différentiels polynomiaux, systèmes dynamiques, la notion des points d'équilibre, la linéarisation des systèmes différentiels non linéaire, au voisinage des points d'équilibre, le portrait de phase, les cycles limites. Dans la deuxième section de ce chapitre on expose la théorie de moyennisation du premier et deuxième ordre. Nous avons illustré ces méthodes par des exemples.

**Le deuxième chapitre**, présente notre première contribution qui consiste à offrir les bornes supérieures du nombre de cycles limites qui peuvent être obtenus en perturbant le système de centre linéaire en utilisant la méthode de la moyennisation du premier et deuxième ordre pour une classe de systèmes différentiels planaires généralisée.

Le résultat de ce chapitre a été publié dans le journal " Mathematical Methods in The Applied Sciences".(Voir [14])

**Le troisième chapitre**, a pour but de présenter notre deuxième contribution qui consiste en la recherche des cycles limites pour le système de Kukles en utilisant la méthode de la moyennisation du premier et deuxième ordre. Le résultat de ce chapitre est accepté pour publication dans le journal " Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics.

# Chapitre 1

## Notions préliminaires et théorie de la moyennisation

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Notions préliminaires . . . . .</b>	<b>8</b>
1.1.1	Systèmes différentiels polynômiaux . . . . .	8
1.1.2	Systèmes dynamiques . . . . .	8
1.1.3	Flot d'une équation différentielle . . . . .	9
1.1.4	Points d'équilibre et linéarisation . . . . .	9
1.1.5	Portrait de phase . . . . .	10
1.1.6	Nature des points d'équilibre . . . . .	10
1.1.7	Stabilité des points d'équilibre . . . . .	11
1.1.8	Orbite périodique et cycle limite . . . . .	11
<b>1.2</b>	<b>Théorèmes de la moyennisation du premier et deuxième ordre</b>	<b>13</b>
1.2.1	Théorème de la moyennisation du premier ordre . . . . .	14
1.2.2	Théorème de la moyennisation du deuxième ordre . . . . .	17

---

Ce chapitre contient quelques notions générales et principales pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques. On commence par définir les systèmes différentiels polynômiaux. On examinera les notions de : points d'équilibre, la linéarisation des systèmes différentiels non linéaires au voisinage des points d'équilibre, le portrait de phase, orbite périodique, cycle limite, nature des points d'équilibre.

Nous décrivons également la méthode de la moyennisation , qui consiste en la recherche du nombre de cycles limites qui apparaissent après la perturbation d'un système différentiel polynômial.

## 1.1 Notions préliminaires

Dans cette section, nous allons introduire des notions de bases sur les systèmes dynamiques qui seront utiles par la suite.

### 1.1.1 Systèmes différentiels polynômiaux

**Définition 1.1.1.** On appelle système différentiel autonome du plan un système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.1)$$

- Si  $P$  et  $Q$  sont des polynômes à coefficients réels, on dit que (1.1) est un système différentiel polynômial.
- Si les fonctions  $P$  et  $Q$  sont des polynômes, on appelle alors degré du système (1.1), le nombre  $n = \max(\deg(P), \deg(Q))$ .
- Si les polynômes  $P$  et  $Q$  s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} P(x, y) = \sum_{i+j=0}^{i+j=n} a_{ij} x^i y^{n-j}, \\ Q(x, y) = \sum_{i+j=0}^{i+j=n} b_{ij} x^i y^{n-j}, \end{cases}$$

on dit que  $P$  et  $Q$  sont homogènes, dans ce cas le système (1.1) s'appelle Système différentiel polynômial homogène.

Nous supposons que les fonctions  $P$  et  $Q$  de classe  $C^1$  (donc les conditions de Cauchy-Lipchitz sont satisfaites en tout point ordinaire du système (1.1)).

### 1.1.2 Systèmes dynamiques

En général, un système dynamique décrit des phénomènes qui évoluent au cours du temps, cette évolution est décrite généralement par des équations différentielles.

**Définition 1.1.2.** Un système dynamique sur  $\mathbb{R}^n$  est une application

$$\phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

définie sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$  telle que

1.  $\phi(\cdot, x) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.
2.  $\phi(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.
3.  $\phi(0, x) = x$ .
4.  $\phi(t + s, x) = \phi(t, \phi(s, x))$  pour  $t, s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$

**Définition 1.1.3.** Un système dynamique  $\phi$  sur  $\mathbb{R}^n$  est linéaire si :

$$\phi(t, \alpha x + \beta y) = \alpha \phi(t, x) + \beta \phi(t, y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x, y \in \mathbb{R}^n$$

### 1.1.3 Flot d'une équation différentielle

**Définition 1.1.4.** Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = F(x), \quad (1.2)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $F(x) \in \mathbb{R}^n$ . On appelle flot du système différentiel (1.2), l'ensemble des applications  $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définies par

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0),$$

où  $\phi(t, x_0)$  est la solution de (1.2) telle que  $\phi(0, x_0) = x_0$

**Remarque 1.1.1.** Le flot est dit autonome si  $F$  ne dépend pas explicitement du temps  $t$ , sinon il est dit non autonome.

### 1.1.4 Points d'équilibre et linéarisation

#### Points d'équilibre

**Définition 1.1.5.** On appelle point d'équilibre ou point critique du système (1.2) tout point  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  telle que,  $F(x_0) = 0$ .

#### Linéarisation

La démarche la plus naturelle pour étudier le comportement des trajectoires d'un système différentiel autonome non linéaire, au voisinage d'un point d'équilibre, consiste à se ramener au système linéaire associé, puis à faire le lien entre les trajectoires des deux systèmes.

**Définition 1.1.6.** On appelle système linéarisé du système (1.2) au voisinage du point d'équilibre  $x_0$ , le système

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.3)$$

où  $A = DF(x_0)$  est la matrice jacobienne de  $F$  au point  $x_0$  :

$$DF(x_0) = \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}. \quad (1.4)$$

**Exemple 1.1.1.** Soit le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x \\ \dot{y} = 2y + x^3. \end{cases} \quad (1.5)$$

L'origine est le seul point d'équilibre de ce système. La matrice jacobienne associée à (1.5) calculée en  $(0, 0)$  est

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc le système linéarisé est

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x \\ \dot{y} = 2y \end{cases} \quad (1.6)$$

**Définition 1.1.7.** Le point critique  $x_0$  est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne  $DF(x_0)$  n'a de partie réelle nulle.

### 1.1.5 Portrait de phase

Soit le système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.7)$$

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes en  $x$  et  $y$  à coefficients réels de degré  $d$ . Les solutions  $(x(t), y(t))$  du système ci dessus représentent dans le plan  $(x, y)$  des courbes appelées orbites.

**Définition 1.1.8.** Les points critiques du système (1.7) sont des solutions constantes et la figure complète des orbites du système, ainsi que ces points critiques représentés dans le plan  $(x, y)$  s'appelle portrait de phase. Le plan  $(x, y)$  est appelé plan de phase.

### 1.1.6 Nature des points d'équilibre

On utilise la linéarisation pour l'étude de la nature des points d'équilibres.

**Définition 1.1.9.** Soit le système différentiel linéaire (1.3), où  $A$  est une matrice d'ordre 2. Soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les valeurs propres de cette matrice. On distingue les différents cas selon les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de la matrice  $A$ .

- (i) Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles non nulles et de signe différent, le point critique  $x = x_0$  est un point selle, il est toujours instable.
- (ii) Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles non nulles et de même signe on a trois cas :
  - (a) Si  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , le point critique  $x = x_0$  est un noeud stable.
  - (b) Si  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ , le point critique  $x = x_0$  est un noeud instable
  - (c) Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , le point critique  $x = x_0$  est un noeud propre, il est stable si  $\lambda < 0$  et instable si  $\lambda > 0$ .
- (iii) Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont complexes conjuguées et  $Im(\lambda_{1,2}) \neq 0$ , alors le point critique  $x = x_0$  est un foyer. Il est stable si  $Re(\lambda_{1,2}) < 0$  et instable si  $Re(\lambda_{1,2}) > 0$ .
- (iv) Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont imaginaires pures avec  $Im(\lambda_{1,2}) \neq 0$  et  $Re(\lambda_{1,2}) = 0$ , alors le point critique  $x = x_0$  est un centre et il est stable mais pas asymptotiquement stable.

### 1.1.7 Stabilité des points d'équilibre

L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre nous amène à connaître le comportement des trajectoires voisines de ce point d'équilibre.

**Définition 1.1.10.** Soit le système

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \quad (1.8)$$

Supposons que  $f$  satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution et soit  $\phi(t)$  la solution du système (1.8). On dit qu'un point d'équilibre  $p$  est stable si  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , tel que

$$\|\phi(t) - p\| \leq \delta \implies \|\phi(t) - p\| \leq \epsilon \quad \forall t \geq t_0$$

**Définition 1.1.11.** On dit qu'un point d'équilibre  $p$  est asymptotiquement stable s'il existe un voisinage de  $p$  tel que pour tout  $x$  dans ce voisinage  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = p$ .

**Théorème 1.1.** Soit le système linéaire (1.3). Le point  $x = x_0$  est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  ont des parties réelles strictement négatives.

Si  $A$  a au moins une valeur propre avec la partie réelle strictement positive, alors le point  $x = x_0$  est instable.

### 1.1.8 Orbite périodique et cycle limite

**Définition 1.1.12.** On appelle solution périodique toute solution  $x = \phi(t)$  du système (1.2) telle qu'il existe un nombre  $T > 0$  vérifiant :

$$\phi(t + T) = \phi(t) \quad (1.9)$$

- Le plus petit réel  $T > 0$  qui vérifie (1.9) est appelé période.
- A toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace des phase.

**Exemple 1.1.2.** *L'oscillateur harmonique est régi par l'équation différentielle  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  qui équivaut au système*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x \end{cases}$$

Ce système s'intègre facilement puisque  $\frac{dy}{dx} = -\omega^2 \frac{x}{y}$  ce qui donne pour ensemble de solutions

$$y^2 + \omega^2 x^2 = C$$



Autrement dit , ce système possède une famille continue à un paramètre de solutions périodiques représentées dans le plan de phase par des ellipses.

**Définition 1.1.13.** Un cycle limite  $C$  du système (1.2) est une trajectoire fermée isolée dans l'espace des phases. Ceci signifie qu'il existe un voisinage de  $C$  dans lequel il n'y a pas d'autre courbes fermées.

**Remarque 1.1.2.** Si toutes les trajectoires voisines s'approchent du cycle limite  $C$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , il est dit stable ou attractif. Si en revanche toutes les trajectoires voisines s'éloignent du cycle limite  $C$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , il est dit instable ou non attractif.

**Définition 1.1.14.** L'amplitude d'un cycle limite  $C$  est la valeur maximale de la variable  $x$  de ce cycle limite

**Exemple 1.1.3.** Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - \alpha x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \alpha y - \alpha y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

tel que  $\alpha \in \mathbb{R}$  est un paramètre.

En coordonnées polaires  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ , le système précédent devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

$r = 1$  correspond à l'orbite périodique est un cycle limite stable pour  $\alpha > 0$ , et instable pour  $\alpha < 0$ . Si  $\alpha = 0$  le système a une infinité de nombre des orbites périodiques et il n'ya pas des cycles limites. (**Voir figures** (1.1), (1.2) et (1.3)).

**Remarque 1.1.3.** Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaires.

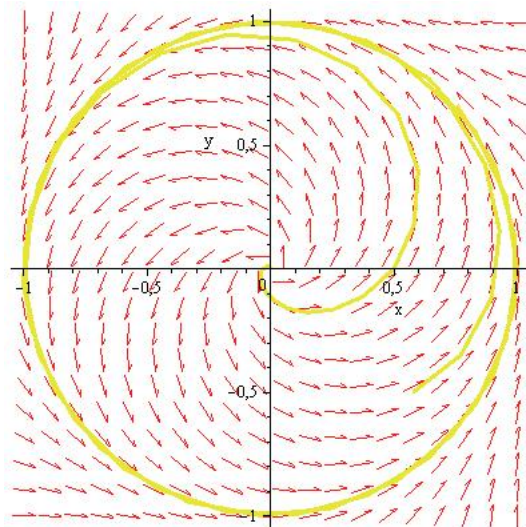


FIGURE 1.1 – Cycle limite stable pour  $\alpha = 1$ .

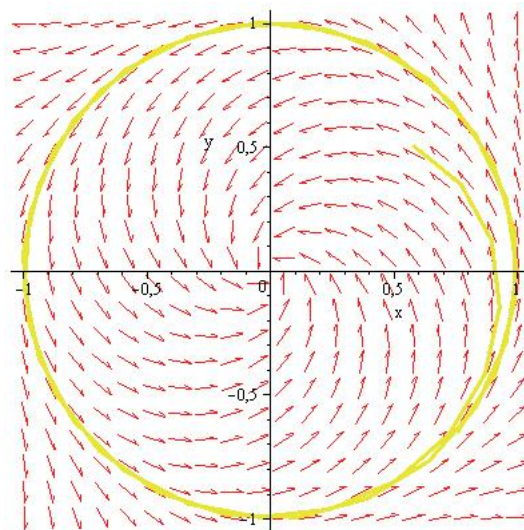


FIGURE 1.2 – Cycle limite instable pour  $\alpha = -1$ .

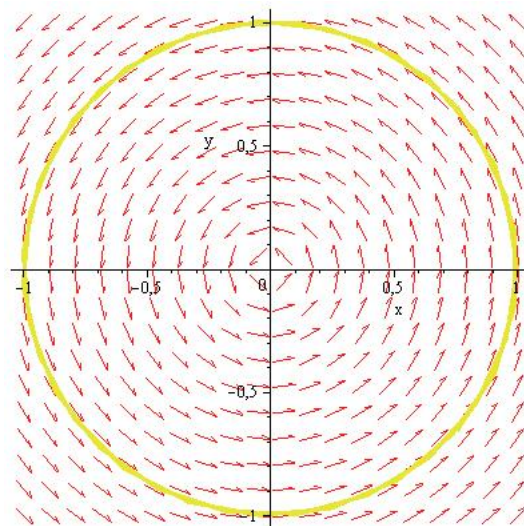


FIGURE 1.3 – Centre pour  $\alpha = 0$ .

## 1.2 Théorèmes de la moyennisation du premier et deuxième ordre

La méthode de moyennisation est l'une des plus importantes méthodes perturbatives utilisées actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques. Elle a été introduite par **Krylov et bogoliubov** en 1937 [23] et **Mitropolskii** 1961 [6] . Elle a été ensuite développé par **Verhulst** [39] , **sanders et Verhulst** [37], **Malkin** (1956) [26] , **Roseau** (1966) [25] et **Llibre et Buica** (2004) [11] . Dans le cas périodique l'idée de base est de considérer une équation différentielle perturbée mise sous la forme standard suivante

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon) \tag{1.10}$$

où  $t \in D$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $|\varepsilon| \ll 1$  et  $f$  est  $T$ -périodique en  $t$ , l'équation moyennée associée à (1.10) s'écrit

$$\dot{x} = \varepsilon f^0(x)$$

où

$$f^0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x, t, 0) dt \quad (1.11)$$

La recherche des racines positives de (1.11) réduit le problème de la détermination des solutions  $T$ -périodique de (1.10), qui est en général un problème difficile en un problème algébrique moins difficile. On va présenter maintenant les résultats de base du théorème de la moyennisation que nous aurons besoin pour prouver les principaux résultats des chapitres 2 et 3. Le théorème de la moyennisation jusqu'au deuxième ordre qu'on utilise pour étudier spécifiquement les orbites périodiques, a été développé dans [11]. Il se résume comme suit.

### 1.2.1 Théorème de la moyennisation du premier ordre

Le théorème suivant prouve une approximation du premier ordre pour les solutions périodiques de certains systèmes différentiels périodiques.

**Théorème 1.2.** [11] Soit le système différentiel suivant :

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (1.12)$$

où  $F_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sont des fonctions continues,  $T$ -périodiques par rapport à la première variable et  $D$  un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . on définit  $F_{10} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  :

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds, \quad (1.13)$$

supposons que :

- (i)  $F_1$  et  $R$  sont localement lipschitziennes par rapport à  $x$ .
- (ii) Pour  $a \in D$  avec  $F_{10}(a) = 0$ , il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que  $F_{10}(z) \neq 0$ , pour tout  $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$  et  $\det(D_z F_{10}(a)) \neq 0$ .

Alors, pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, il existe une solution  $T$ -périodique  $\varphi(t, \varepsilon)$  du système (1.12) tel que  $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow a$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Exemple 1.2.1.** *Considérons le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(y^3 - y). \end{cases} \quad (1.14)$$

En coordonnées polaires  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  avec  $r > 0$ . Ce système devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r \sin^2 \theta (-1 + r^2 \sin^2 \theta) \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon (\cos \theta \sin \theta - r^2 (\cos \theta \sin \theta + \cos^3 \theta \sin \theta)) \end{cases} \quad (1.15)$$

## 1.2 Théorèmes de la moyennisation du premier et deuxième ordre

Le système (1.15) est équivalent à

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon r \sin^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta + 1 - r^2) + O(\varepsilon^2) \quad (1.16)$$

On note que l'équation (1.16) est sous la forme standard (1.12) pour appliquer la théorie de moyennisation si on prend

$$x = r, t = \theta, T = 2\pi \quad \text{et} \quad F(t, x) = r \sin^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta + 1 - r^2).$$

On calcule l'équation (1.13) on obtient

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \sin^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta + 1 - r^2) d\theta = \frac{-1}{8} r (3r^2 - 4) \quad (1.17)$$

Les cycles limites possibles pour l'équation (1.13) sont donnés par les racines positives de l'équation

$$F_{10}(r) = \frac{-1}{8} r (3r^2 - 4). \quad (1.18)$$

On a

$$\begin{aligned} F_{10}(r) = 0 & \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2}{3}\sqrt{3} > 0 \\ F'_{10}\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) & = -1 \neq 0 \end{aligned}$$

D'après le théorème (1.2) le système (1.14) possède un seul cycle limite, pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit. (**Voir figure (1.1) et (1.2)** ).

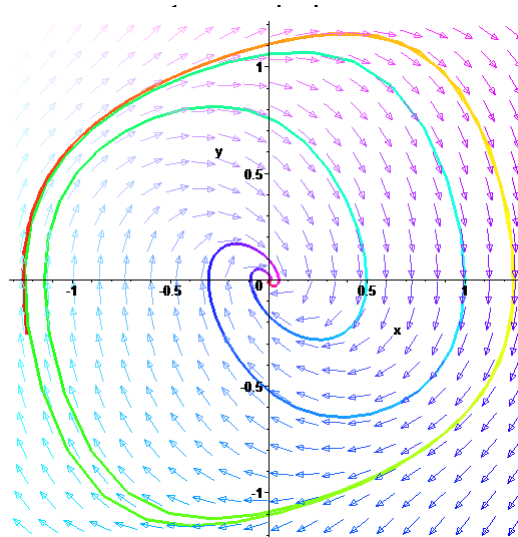


FIGURE 1.4 – Cycle limite instable de l'exemple (1.2.1) pour  $\varepsilon = -1$ .

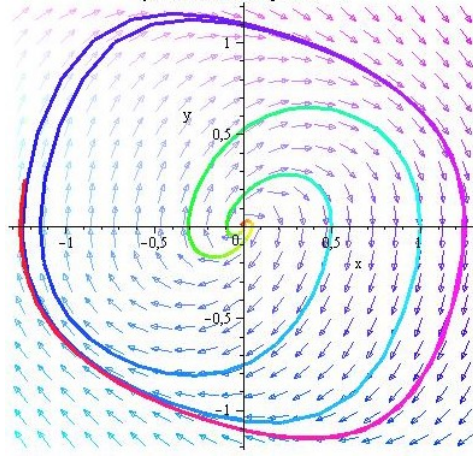


FIGURE 1.5 – Cycle limite stable de l'exemple (1.2.1) pour  $\varepsilon = 1$ .

**Exemple 1.2.2.** Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(-x + xy + z^2), \\ \dot{y} = x + \varepsilon(-y + z), \\ \dot{z} = \varepsilon(x^2 + yz - 1), \end{cases} \quad (1.19)$$

en coordonnées cylindriques  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  et  $z = z$  le système (1.19) devient

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \varepsilon(r^2 \cos^2 \theta \sin \theta + \cos \theta z^2 - r + rz - rz \cos^2 \theta) \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 + \frac{1}{r}\varepsilon(rz \cos \theta \sin \theta - r \sin \theta z^2 + \cos^3 \theta r^2 - r^2 \cos \theta) \\ \frac{dz}{dt} = \varepsilon(r^2 \cos^2 \theta + rz \sin \theta - 1) \end{cases}$$

Pour écrire le système (1.19) sous la forme standard pour appliquer la théorie de moyennisation on considère  $\theta$  comme une nouvelle variable indépendante. D'où

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon(r^2 \cos^2 \theta \sin \theta + \cos \theta z^2 - r + rz - rz \cos^2 \theta) \\ \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon(r^2 \cos^2 \theta + rz \sin \theta - 1) \end{cases} \quad (1.20)$$

Le système (1.29) est de la forme

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(\theta, r) + o(\varepsilon^2), \\ \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon F_2(\theta, r) + o(\varepsilon^2), \end{cases}$$

où  $F_1, F_2$  sont périodiques de période  $2\pi$ . Calculons maintenant le système moyenné,

$$\begin{cases} f_1(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\theta, r) d\theta = \frac{1}{2}r(z - 2), \\ f_2(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(\theta, r) d\theta = \frac{1}{2}r^2 - 1. \end{cases} \quad (1.21)$$

## 1.2 Théorèmes de la moyennisation du premier et deuxième ordre

On résoud le système (1.30), on obtient les deux racines

$$(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2), (r_2, z_2) = (-\sqrt{2}, 2).$$

Comme  $r > 0$ . La solution  $(\sqrt{2}, 2)$  c'est la seule qui fournit un cycle limite. On vérifie maintenant que le déterminant calculé en cette racine est non nul.

$$D(r_1, z_1) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z - 1 & \frac{1}{2}r \\ r & 0 \end{pmatrix} \Big|_{(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2)} = -1 \neq 0$$

D'après le théorème 1.2 le système a pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit un seul cycle limite. Voir figure (1.3).

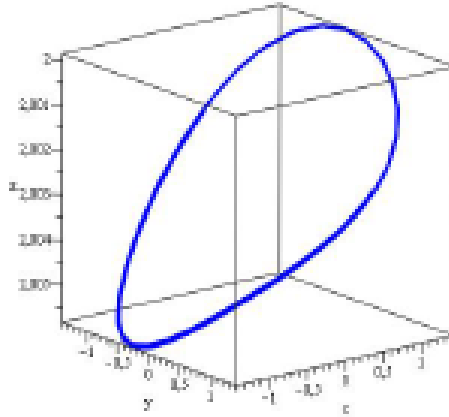


FIGURE 1.6 – Cycle limite instable du système (1.19) pour  $\varepsilon = 0.001$

### 1.2.2 Théorème de la moyennisation du deuxième ordre

Le théorème suivant prouve une approximation du second ordre pour les solutions périodiques de certains systèmes différentiels périodiques.

**Théorème 1.3.** [11] Soit le système différentiel suivant :

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 R(t, x, \varepsilon), \quad (1.22)$$

où  $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sont des fonctions continues,  $T$ -périodiques par rapport à  $t$ .  $D$  est un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

On suppose que

(i)  $F_1(t, \cdot) \in C^1(D)$  Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $F_1, F_2, R$  et  $D_x F_1$  sont localement lipschitziennes par rapport à  $x$ , et  $R$  est différentiable par rapport à  $\varepsilon$ .

On définit  $F_{10}, F_{20} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  tel que :

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds \quad (1.23)$$

et

$$F_{20}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ D_z F_1(s, z) \int_0^s F_1(t, z) dt + F_2(s, z) \right] ds. \quad (1.24)$$

(ii) Pour  $V \subset D$ , un sous ensemble ouvert et borné de  $\mathbb{R}^n$ , et pour tout  $\varepsilon \in ]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[ \setminus \{0\}$ , il existe  $a \in V$  tel que :  $F_{10}(a) + \varepsilon F_{20}(a) = 0$ , et  $\det(F'_{10}(a) + \varepsilon F'_{20}(a)) \neq 0$ .

Alors, pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, il existe une solution  $T$ -périodique  $\varphi(t, \varepsilon)$  de l'équation (1.22).

De plus si  $F_{10}(z) \equiv 0$ , et  $J_{F_{20}}(a) \neq 0$  alors il existe une solution  $T$ -périodique isolée  $\varphi(t, \varepsilon)$  de l'équation (1.22) tel que  $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow a$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Exemple 1.2.3.** *Considérons le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(x^2 - 4xy), \\ \dot{y} = x + \varepsilon^2(y^2x + y^5x - 2y + 6y^3 - y^5). \end{cases} \quad (1.25)$$

En coordonnées polaires  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  avec  $r > 0$ . Ce système devient de la forme

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon(-4r^2 \cos^2 \theta \sin \theta + r^2 \cos^3 \theta) + \varepsilon^2(r^3 \cos \theta \sin \theta - r^3 \cos^3 \theta \sin \theta \\ \quad + 2r \cos^2 \theta - r^6 \cos^7 \theta + r^5 \cos^6 \theta - 2r + 6r^3 + r^6 \cos \theta - r^5 - 3r^6 \cos^3 \theta \\ \quad + 3r^5 \cos^2 \theta - 12r^3 \cos^2 \theta + 3r^6 \cos^5 \theta - -3r^5 \cos^4 \theta + 6r^3 \cos^4 \theta), \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon(4r \cos \theta - 4r \cos^3 \theta - r \cos^2 \theta \sin \theta) + \varepsilon^2(-r^4 \cos \theta \sin \theta \\ \quad + r^5 \cos^6 \theta \sin \theta - 6r^2 \cos^3 \theta \sin \theta + r^5 \cos^2 \theta \sin \theta - 2 \cos \theta \sin \theta \\ \quad - 2r \cos^4 \theta \sin \theta - r^2 \cos^4 \theta - r^4 \cos^5 \theta \sin \theta + r^2 \cos^2 \theta + 2r^4 \cos^3 \theta \sin \theta \\ \quad + 6r^2 \cos \theta \sin \theta). \end{cases}$$

considérons  $\theta$  comme une nouvelle variable indépendante on obtient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(\theta, r) + \varepsilon^2 F_2(\theta, r) + o(\varepsilon^3), \quad (1.26)$$

où

$$\begin{aligned} F_1(\theta, r) &= -4r^2 \cos^2 \theta \sin \theta + r^2 \cos^3 \theta \\ F_2(\theta, r) &= 15r^3 \sin \theta \cos^3 \theta - 15r^3 \cos^5 \theta \sin \theta + r^3 \cos \theta \sin \theta + r^6 \cos^5 \theta \sin^2 \theta \\ &\quad - r^5 \cos^4 \theta \sin^2 \theta - 8r^3 \cos^4 \theta \sin^2 \theta - 2r^6 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 2r^5 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ &\quad - 6r^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + r^6 \cos \theta \sin^2 \theta - r^5 \sin^2 \theta - 2r \sin^2 \theta + 6r^3 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

## 1.2 Théorèmes de la moyennisation du premier et deuxième ordre

---

En appliquant maintenant le théorème 1.3, on calcule la fonction moyennée

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, r) d\theta = 0.$$

et

$$\frac{dF_1}{dr}(\theta, r) = -8r \cos^3 \theta \sin \theta + 2r \cos^3 \theta,$$

On calcule

$$\begin{aligned} \int_0^\theta F_1(\psi, r) d\psi &= \int_0^\theta (-4r^2 \cos^2 \psi \sin \psi + r^2 \cos^3 \psi) d\psi \\ &= \frac{-4}{3} r^2 - \frac{4}{3} r^2 \cos^3 \theta + \frac{1}{3} r^2 \cos^2 \theta \sin \theta + \frac{2}{3} r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} F_{20}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [D_r F_1(\theta, r) \int_0^\theta F_1(r, \psi) d\psi + F_2(\theta, z)] d\theta \\ &= r \left( \frac{-5}{16} r^4 + \frac{7}{4} r^2 - 1 \right). \end{aligned} \tag{1.27}$$

Pour trouver les cycles limites, on résoud l'équation(1.27) et on obtient deux racines positives  $r_1 = \frac{1}{5}\sqrt{70 + 10\sqrt{29}}$ ,  $r_2 = \frac{1}{5}\sqrt{70 - 10\sqrt{29}}$ .

$$\frac{dF_{20}}{dr}(r) = \frac{25}{16} r^4 + \frac{21}{4} r^2 - 1.$$

D'où

$$\frac{dF_{20}}{dr}(r_1) = -13.33923079 \neq 0,$$

et

$$\frac{dF_{20}}{dr}(r_2) = 1.739230730 \neq 0.$$

Donc il existe deux cycles limites (**Voir les figures (1.5)**).



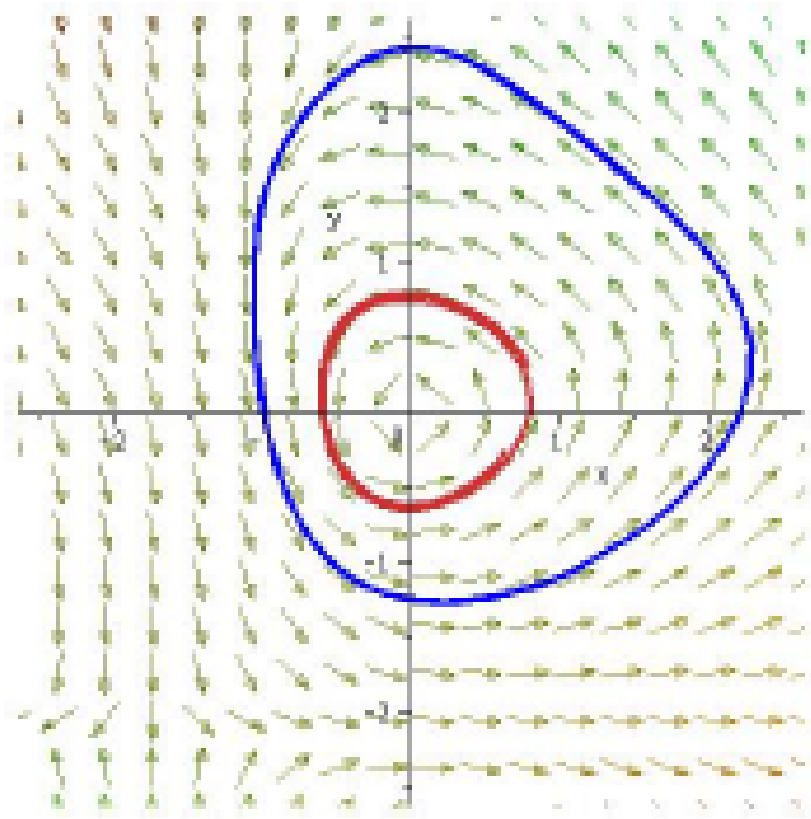


FIGURE 1.7 – Deux cycles limites du système (1.25) pour  $\varepsilon = 0.2$ .

**Exemple 1.2.4.** Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(x + z) + \varepsilon^2(x + z), \\ \dot{y} = x + \varepsilon(-y + z) + \varepsilon^2x^2, \\ \dot{z} = \varepsilon(x + yx^2) + \varepsilon^2(z^2 + yz), \end{cases} \quad (1.28)$$

en coordonnées cylindriques  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  et  $z = z$  le système (1.28) devient

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \varepsilon(\cos \theta + \sin \theta + 2r \cos^2 \theta - r) + \varepsilon^2(r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ \quad + \cos \theta z + r \cos^2 \theta) \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 + \varepsilon(-2 \cos \theta \sin \theta - \frac{\sin \theta z}{r} + \frac{\cos \theta z}{r}) + \varepsilon^2(-\cos \theta \sin \theta \\ \quad - \frac{\sin \theta z}{r} + r \cos^3 \theta) \\ \frac{dz}{dt} = \varepsilon(r \cos \theta + r^3 \sin \theta \cos^2 \theta) + \varepsilon^2(z^2 + rz \sin \theta) \end{cases}$$

## 1.2 Théorèmes de la moyennisation du premier et deuxième ordre

Pour écrire le système (1.28) sous la forme standard pour appliquer la théorie de moyennisation on considère  $\theta$  comme une nouvelle variable indépendante. D'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon(r^2 \cos^2 \theta \sin \theta + \cos \theta z^2 - r + rz) + \varepsilon^2(4r \cos^3 \theta \sin \theta + r^2 \cos^2 \theta \sin \theta \\ \quad + 4z \cos^2 \theta \sin \theta - 2r \cos \theta \sin \theta - z \sin \theta + 4z \cos \theta - 4z \cos^3 \theta + r \cos^2 \theta \\ \quad - \frac{2z^2 \cos^2 \theta}{r} + \frac{z^2}{r}) + o(\varepsilon^3) \\ \\ \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon(r^3 \sin \theta \cos^2 \theta + r \cos \theta) + \varepsilon^2(z^2 + r \sin \theta + (-r \cos \theta - \sin^3 \theta \\ \quad \times \cos^2 \theta)(-2 \sin \theta \cos \theta - \frac{\sin \theta}{r} + \frac{\cos \theta}{r})) + o(\varepsilon^3) \end{array} \right. \quad (1.29)$$

Le système (1.29) est de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_{11}(\theta, r) + \varepsilon^2 F_{12}(\theta, r) + o(\varepsilon^3), \\ \\ \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon F_{21}(\theta, r) + \varepsilon^2 F_{22}(\theta, r) + o(\varepsilon^3), \end{array} \right.$$

où  $F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}$  sont périodiques de période  $2\pi$ . En appliquant maintenant le théorème 1.3 on calcule les fonctions moyennées,

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{11}(\theta, r) d\theta = 0, \\ \\ f_2(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{21}(\theta, r) d\theta = 0. \end{array} \right. \quad (1.30)$$

On a

$$\frac{d(F_{11}, F_{21})}{d(r, z)} = \begin{pmatrix} 2 \cos s^2 - 1 & \sin s + \cos s \\ \cos s + 3 \sin s r^2 \cos^2 s & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\int_0^\theta F_{11}(s, r) ds = z - \cos \theta z + \sin \theta z + r \cos \theta \sin \theta.$$

$$\int_0^\theta F_{21}(s, r) ds = \frac{-1}{3} r^3 + r \sin \theta - \frac{1}{3} r^3 \cos^3 \theta.$$

On déduit que

$$\begin{pmatrix} F_{20}^1(r, z) \\ F_{20}^2(r, z) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{d(F_{11}, F_{21})}{d(r, z)} \int_0^\theta \begin{pmatrix} F_{11}(s, r, z) \\ F_{21}(s, r, z) \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} F_{12}(\theta, r, z) \\ F_{22}(\theta, r, z) \end{pmatrix} \right) d\theta$$

d'où

$$\begin{pmatrix} F_{20}^1(r, z) \\ F_{20}^2(r, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{8} r(-8 + r^2) \\ \frac{1}{2} z(r^2 - 2 + 2z) \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

On résoud le système (1.31), on obtient les deux racines pour  $r > 0$ .

$$(r_1, z_1) = (2\sqrt{2}, 0), (r_2, z_2) = (2\sqrt{2}, -3).$$

Ces deux solutions fournissent deux cycles limites. On vérifie maintenant que le déterminant calculer en cette racine est non nul.

$$D(r_1, z_1) = \det \begin{pmatrix} \frac{-3}{8}r^2 + 1 & 0 \\ zr & \frac{1}{2}r^2 - 1 + 2z \end{pmatrix} \Big|_{(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2)} = 6 \neq 0$$

$$D(r_2, z_2) = \det \begin{pmatrix} \frac{-3}{8}r^2 + 1 & 0 \\ zr & \frac{1}{2}r^2 - 1 + 2z \end{pmatrix} \Big|_{(r_2, z_2) = (2\sqrt{2}, -3)} = -6 \neq 0$$

D'après le théorème 1.3 le système a pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit deux cycles limites.

**Voir figure (1.5).**

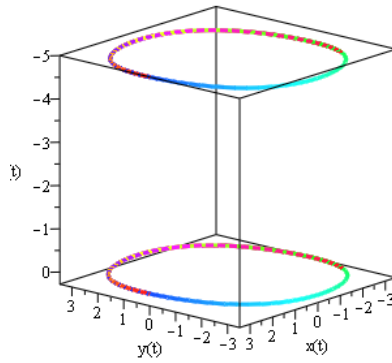


FIGURE 1.8 – Deux cycles limites du système (1.28) pour  $\varepsilon = 0.01$ .

# Chapitre 2

## Nombre maximum de cycles limites d'un système différentiel polynômial planaire

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Résultats introductifs</b>	<b>24</b>
<b>2.2</b>	<b>Application de la méthode de la moyennisation du premier ordre</b>	<b>25</b>
2.2.1	Preuve du théorème (2.1)	25
<b>2.3</b>	<b>Application de la méthode de la moyennisation du deuxième ordre</b>	<b>27</b>
2.3.1	Preuve du théorème 2.2	28
<b>2.4</b>	<b>Exemples d'applications</b>	<b>45</b>

---

Dans ce chapitre, nous allons étudier le nombre maximum de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire  $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$  pour un système différentiel polynômial planaire plus générale que les systèmes (2.1) et (2.2). D'abord on énonce un premier résultat en utilisant la méthode de la moyennisation du premier ordre avec la preuve puis, on donne un deuxième résultat également prouvé en utilisant la méthode de la moyennisation du deuxième ordre. A la fin du chapitre nous donnons quelques exemples illustratifs qui montrent que le résultat obtenu dans notre travail [14] est une meilleure estimation que les résultats de [32] et [9].

Cette étude a fait l'objet d'une publication dans le journal " **Mathematical Methods in The Applied Sciences** ".

Intitulé : " **Limit cycles of a class of planar polynomial differential systems.** "

## 2.1 Résultats introductifs

En 2012, Llibre et Valls [32], ont étudié par la méthode de moyennisation le nombre de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques d'un centre linéaire  $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ , le système

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - \varepsilon(g_{11}(x) + f_{11}(x)y) - \varepsilon^2(g_{12}(x) + f_{12}(x)y), \\ \dot{y} &= -x - \varepsilon(g_{21}(x) + f_{21}(x)y) - \varepsilon^2(g_{22}(x) + f_{22}(x)y),\end{aligned}\tag{2.1}$$

où  $g_{1i}, f_{1i}, g_{2i}, f_{2i}$  sont de degré respectivement  $k, l, n, m$  pour tout  $i = 1, 2$  et  $\varepsilon$  est un petit paramètre. Ils ont prouvé que le système (2.1) peut avoir  $\lambda_1 = \max \left\{ \left[ \frac{K-1}{2} \right], \left[ \frac{n}{2} \right] \right\}$  cycles limites en utilisant la théorie de la moyennisation du premier ordre et  $\lambda_3 = \max \left\{ \mu + \left[ \frac{m-1}{2} \right], \mu + \left[ \frac{l}{2} \right], \left[ \frac{n-1}{2} \right] + \left[ \frac{m}{2} \right], \left[ \frac{k}{2} \right] + \left[ \frac{m}{2} \right] - 1, \left[ \frac{n-1}{2} \right] + \left[ \frac{l-1}{2} \right] + 1, \left[ \frac{k}{2} \right] + \left[ \frac{l-1}{2} \right], \left[ \frac{n}{2} \right], \left[ \frac{k-1}{2} \right] \right\}$  cycles limites en utilisant la théorie de moyennisation du second ordre telle que  $\mu = \min \left\{ \left[ \frac{K-1}{2} \right], \left[ \frac{n}{2} \right] \right\}$ .

Quand  $g_{1i}(x) = f_{1i}(x) = 0$ , pour chaque  $i = 1, 2$  on obtient les systèmes de Lienard (2) .

Aussi, en utilisant la théorie de la moyennisation du premier et du second ordre, les auteurs dans [9] ont étudié une classe de systèmes de Kukles de la forme

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - k(x)y^3,\end{aligned}\tag{2.2}$$

où  $f(x), g(x), h(x)$  et  $k(x)$  sont des polynômes de degré donné. Ils ont prouvé que le système (2.2) peut avoir  $\lambda'_1 = \max \left\{ \left[ \frac{n_2}{2} \right], \left[ \frac{n_4}{2} \right] + 1 \right\}$  cycles limites en utilisant la théorie de la moyennisation du premier ordre et  $\lambda'_2 = \max \left\{ \mu' + \left[ \frac{m-1}{2} \right], \left[ \frac{n-1}{2} \right] + \left[ \frac{m}{2} \right], \left[ \frac{m}{2} \right] + \left[ \frac{n_2-1}{2} \right] + 1, \left[ \frac{n-1}{2} \right] + \left[ \frac{n_1}{2} \right] + 1, \left[ \frac{n_2-1}{2} \right] + \left[ \frac{n_1}{2} \right] + 2, \left[ \frac{n_1-1}{2} \right] + \mu', \left[ \frac{n}{2} \right], \left[ \frac{n_2}{2} \right] + 1 \right\}$  cycles limites en utilisant la théorie de moyennisation du second ordre telle que  $\mu' = \min \left\{ \left[ \frac{n_2}{2} \right], \left[ \frac{n_4}{2} \right] + 1 \right\}$  .

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au nombre maximum de cycles limites du système différentiel polynômial généralisé :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - \varepsilon(g_{11}(x) + f_{11}(x)y) - \varepsilon^2(g_{12}(x) + f_{12}(x)y), \\ \dot{y} &= -x - \varepsilon(g_{21}(x) + f_{21}(x)y - p_1(x)y^2 - q_1(x)y^3) \\ &\quad - \varepsilon^2(g_{22}(x) + f_{22}(x)y - p_2(x)y^2 - q_2(x)y^3),\end{aligned}\tag{2.3}$$

où  $f_{1i}, f_{2i}, g_{1i}, g_{2i}, p_i$  et  $q_i$  sont de degré  $l, n, k, m, n_1$  et  $n_2$  respectivement pour chaque  $i = 1, 2$ . De plus,  $\varepsilon$  est un petit paramètre.

Notons que :

- lorsque  $p_i(x) = q_i(x) = 0$  pour chaque  $i = 1, 2$  ces systèmes coïncident avec les systèmes différentiels polynômiaux généralisés (2.1).
- lorsque  $g_{1i}(x) = f_{1i}(x) = 0$  pour chaque  $i = 1, 2$  ces systèmes coïncident avec les systèmes de Kukles généralisés (2.2).

## 2.2 Application de la méthode de la moyennisation du premier ordre

---

Ainsi le système (2.11) peut être considéré comme une généralisation des deux systèmes (2.1) et (2.2).

Nos principaux résultats sont données comme suit

## 2.2 Application de la méthode de la moyennisation du premier ordre

Dans cette section, nous déterminons le nombre maximum de cycles limites qui bifurquent du centre linéaire  $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ , par la méthode de moyennisation du premier ordre.

On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(g_{11}(x) + f_{11}(x)y) \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(g_{21}(x) + f_{21}(x)y - p_1(x)y^2 - q_1(x)y^3) \end{cases} \quad (2.4)$$

où  $g_{11}, g_{21}, f_{11}, f_{21}, p_1, q_1$  sont de degré  $k, m, l, n_1$ , et  $n_2$  respectivement et  $\varepsilon$  est un petit paramètre

**Théorème 2.1.** Pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites du système (2.4), qui bifurquent du centre linéaire  $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$  en utilisant la méthode de la moyennisation du premier ordre est

$$\lambda_0 = \max \left\{ \left[ \frac{n}{2} \right], \left[ \frac{k-1}{2} \right], \left[ \frac{n_2}{2} \right] + 1 \right\}. \quad (2.5)$$

### 2.2.1 Preuve du théorème (2.1)

Pour appliquer la méthode de moyennisation du premier ordre, on écrit le système (2.4) en coordonnées polaires  $(r, \theta)$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r > 0.$$

Posons

$$\begin{aligned} g_{11}(x) &= \sum_{i=0}^k b_{i,1} x^i, & g_{21}(x) &= \sum_{i=0}^m b_{i,2} x^i, & f_{21}(x) &= \sum_{i=0}^n a_{i,2} x^i, \\ f_{11}(x) &= \sum_{i=0}^l a_{i,1} x^i, & p_1(x) &= \sum_{i=0}^{n_1} p_{i,1} x^i, & q_1(x) &= \sum_{i=0}^{n_2} q_{i,1} x^i, \end{aligned} \quad (2.6)$$

Le système (2.4) devient

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= -\varepsilon \left( \sum_{i=0}^k b_{i,1} r^i B_{i+1,0}(\theta) + \sum_{i=0}^l a_{i,1} r^{i+1} B_{i+1,1}(\theta) + \sum_{i=0}^m b_{i,2} r^i B_{i,1}(\theta) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=0}^n a_{i,2} r^{i+1} B_{i,2}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_1} p_{i,1} r^{i+2} B_{i,3}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_2} q_{i,1} r^{i+3} B_{i,4}(\theta) \right), \\
 \dot{\theta} &= -1 - \frac{\varepsilon}{r} \left( \sum_{i=0}^m b_{i,2} r^i B_{i+1,0}(\theta) + \sum_{i=0}^n a_{i,2} r^{i+1} B_{i+1,1}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_1} p_{i,1} r^{i+2} B_{i+1,2}(\theta) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i=0}^{n_2} q_{i,1} r^{i+3} B_{i+1,3}(\theta) - \sum_{i=0}^k b_{i,1} r^i B_{i,1}(\theta) - \sum_{i=0}^l a_{i,1} r^{i+1} B_{i,2}(\theta) \right), \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

où

$$B_{i,j}(\theta) = \cos^i \theta \sin^j \theta.$$

Considérons maintenant  $\theta$  comme une nouvelle variable indépendante le système (2.7) s'écrit sous la forme suivante

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F(r, \theta) + O(\varepsilon^2),$$

où

$$\begin{aligned}
 F(r, \theta) &= \sum_{i=0}^k b_{i,1} r^i B_{i+1,0}(\theta) + \sum_{i=0}^l a_{i,1} r^{i+1} \cos^{i+1} \theta B_{i+1,1}(\theta) + \sum_{i=0}^m b_{i,2} r^i B_{i,1}(\theta) \\
 &\quad + \sum_{i=0}^n a_{i,2} r^{i+1} B_{i,2}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_1} p_{i,1} r^{i+2} B_{i,3}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_2} q_{i,1} r^{i+3} B_{i,4}(\theta). \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

Par conséquent, à partir du théorème 1.2 nous devons étudier les racines positives simples de la fonction

$$\begin{aligned}
 F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{i=0}^k b_{i,1} r^i A_{i+1,0}(2\pi) + \sum_{i=0}^l a_{i,1} r^{i+1} \cos^{i+1} \theta A_{i+1,1}(2\pi) + \sum_{i=0}^m b_{i,2} r^i A_{i,1}(2\pi) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=0}^n a_{i,2} r^{i+1} A_{i,2}(2\pi) - \sum_{i=0}^{n_1} p_{i,1} r^{i+2} A_{i,3}(2\pi) - \sum_{i=0}^{n_2} q_{i,1} r^{i+3} A_{i,4}(2\pi) \right), \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

où

$$A_{i,j}(2\pi) = \int_0^{2\pi} B_{i,j}(\theta) d\theta.$$

## 2.3 Application de la méthode de la moyennisation du deuxième ordre

Dans la proposition suivante, nous obtenons l'expression exacte de  $F_{10}(r)$ .

**Proposition 2.2.1.**  $F_{10}(r)$  est un polynôme de la variable  $r$  donnée par

$$F_{10}(r) = r \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \frac{b_{2i+1,1}(2i+1)\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} r^{2i} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{a_{2i,2}\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} r^{2i} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \frac{3q_{2i,1}\alpha_i}{2^{i+2}(i+2)!} r^{2i+2} \right), \quad (2.10)$$

où

$$\alpha_i = 3 \cdot 5 \cdots (2i-1), \alpha_{i+1} = (2i+1)\alpha_i.$$

**Preuve.** A partir de (2.9) et en utilisant les intégrales de l'annexe A, on obtient (2.10). Ceci complète la preuve de la Proposition 2.2.1.

D'après la proposition 2.2.1, le polynôme  $F_{10}(r)$  a au plus  $\{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor + 1\}$  racines positives. Par conséquent, le Théorème 2.1 est démontré.

## 2.3 Application de la méthode de la moyennisation du deuxième ordre

Dans cette section, on étudie le nombre maximum de cycles limites qui bifurquent du centre linéaire  $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ , par la méthode de moyennisation deuxième ordre.

On considère le système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - \varepsilon(g_{11}(x) + f_{11}(x)y) - \varepsilon^2(g_{12}(x) + f_{12}(x)y), \\ \dot{y} &= -x - \varepsilon(g_{21}(x) + f_{21}(x)y - p_1(x)y^2 - q_1(x)y^3) \\ &\quad - \varepsilon^2(g_{22}(x) + f_{22}(x)y - p_2(x)y^2 - q_2(x)y^3), \end{aligned} \quad (2.11)$$

où  $f_{1i}, f_{2i}, g_{1i}, g_{2i}, p_i$  et  $q_i$  sont de degré  $l, n, k, m, n_1$  et  $n_2$  respectivement pour chaque  $i = 1, 2$ . De plus,  $\varepsilon$  est un petit paramètre.

**Théorème 2.2.** Pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites du système (2.11), qui peuvent bifurquer du centre linéaire  $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$  en utilisant la méthode de moyennisation du deuxième ordre est

$$\lambda = \max\{\Lambda_1, \Lambda_2 + 1, \Lambda_3 + 2\},$$



où

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= \max \left\{ \left[ \frac{n}{2} \right], \left[ \frac{k-1}{2} \right], \left[ \frac{k}{2} \right] + \left[ \frac{l-1}{2} \right], \left[ \frac{m}{2} \right] + \left[ \frac{n-1}{2} \right], \left[ \frac{k}{2} \right] + \left[ \frac{m}{2} \right] - 1, \left[ \frac{k}{2} \right] + \left[ \frac{n_1}{2} \right], \right. \\ &\quad \left. \mu_0 + \left[ \frac{l}{2} \right], \mu_0 + \left[ \frac{m-1}{2} \right] \right\}, \\ \Lambda_2 &= \max \left\{ \left[ \frac{n-1}{2} \right] + \left[ \frac{l-1}{2} \right], \left[ \frac{m}{2} \right] + \left[ \frac{n_2-1}{2} \right], \left[ \frac{n-1}{2} \right] + \left[ \frac{n_1}{2} \right], \mu_0 + \left[ \frac{n_1-1}{2} \right], \left[ \frac{n_2}{2} \right] \right\}, \\ \Lambda_3 &= \max \left\{ \left[ \frac{n_1}{2} \right] + \left[ \frac{n_2-1}{2} \right], \left[ \frac{l-1}{2} \right] + \left[ \frac{n_2-1}{2} \right] \right\},\end{aligned}$$

$$\text{avec } \mu_0 = \max \{ \mu, \mu_1, \mu' \},$$

$$\text{où } \mu = \min \left\{ \left[ \frac{k-1}{2} \right], \left[ \frac{n}{2} \right] \right\}, \quad \mu_1 = \min \left\{ \left[ \frac{k-1}{2} \right], \left[ \frac{n_2}{2} \right] + 1 \right\}, \quad \mu' = \min \left\{ \left[ \frac{n}{2} \right], \left[ \frac{n_2}{2} \right] + 1 \right\}.$$

### 2.3.1 Preuve du théorème 2.2

Pour la preuve nous utilisons la méthode de la moyennisation du second ordre appliquée au système (2.11). Si l'on écrit  $g_{11}, f_{11}, g_{21}, f_{21}, p_1$  and  $q_1$  comme en (2.6), et

$$\begin{aligned}f_{12}(x) &= \sum_{i=0}^l c_{i,1} x^i, & g_{12}(x) &= \sum_{i=0}^k d_{i,1} x^i, & f_{22}(x) &= \sum_{i=0}^n c_{i,2} x^i, & g_{22}(x) &= \sum_{i=0}^m d_{i,2} x^i, \\ p_2(x) &= \sum_{i=0}^{n_1} p_{i,2} x^i, & q_2(x) &= \sum_{i=0}^{n_2} q_{i,2} x^i.\end{aligned}$$

, Alors le système (2.11) en coordonnées polaires devient

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -\varepsilon(I + \varepsilon J), \\ \dot{\theta} &= -1 - \frac{\varepsilon}{r}(A + \varepsilon B),\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}I &= \sum_{i=0}^k b_{i,1} r^i B_{i+1,0}(\theta) + \sum_{i=0}^l a_{i,1} r^{i+1} B_{i+1,1}(\theta) + \sum_{i=0}^m b_{i,2} r^i B_{i,1}(\theta) + \sum_{i=0}^n a_{i,2} r^{i+1} B_{i,2}(\theta) \\ &\quad - \sum_{i=0}^{n_1} p_{i,1} r^{i+2} B_{i,3}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_2} q_{i,1} r^{i+3} B_{i,4}(\theta), \\ J &= \sum_{i=0}^k d_{i,1} r^i B_{i+1,0}(\theta) + \sum_{i=0}^l c_{i,1} r^{i+1} B_{i+1,1}(\theta) + \sum_{i=0}^m d_{i,2} r^i B_{i,1}(\theta) + \sum_{i=0}^n c_{i,2} r^{i+1} B_{i,2}(\theta) \\ &\quad - \sum_{i=0}^{n_1} p_{i,2} r^{i+2} B_{i,3}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_2} q_{i,2} r^{i+3} B_{i,4}(\theta),\end{aligned}$$

## 2.3 Application de la méthode de la moyennisation du deuxième ordre

$$\begin{aligned}
 A &= - \sum_{i=0}^k b_{i,1} r^i B_{i,1}(\theta) - \sum_{i=0}^l a_{i,1} r^{i+1} B_{i,2}(\theta) + \sum_{i=0}^m b_{i,2} r^i B_{i+1,0}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_1} p_{i,1} r^{i+2} B_{i+1,2}(\theta) \\
 &\quad - \sum_{i=0}^{n_2} q_{i,1} r^{i+3} B_{i+1,3}(\theta) + \sum_{i=0}^n a_{i,2} r^{i+1} B_{i+1,1}(\theta), \\
 B &= - \sum_{i=0}^k d_{i,1} r^i B_{i,1}(\theta) - \sum_{i=0}^l c_{i,1} r^{i+1} B_{i,2}(\theta) + \sum_{i=0}^m d_{i,2} r^i B_{i+1,0}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_1} p_{i,2} r^{i+2} B_{i+1,2}(\theta) \\
 &\quad - \sum_{i=0}^{n_2} q_{i,2} r^{i+3} B_{i+1,3}(\theta) + \sum_{i=0}^n c_{i,2} r^{i+1} B_{i+1,1}(\theta).
 \end{aligned}$$

Considérons maintenant  $\theta$  comme une nouvelle variable indépendante, ce système devient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F(r, \theta) + \varepsilon^2 G(r, \theta) + O(\varepsilon^3),$$

où

$$F(r, \theta) = I, \quad G(r, \theta) = J - \frac{1}{r} IA. \quad (2.12)$$

Pour calculer  $F_{20}(r)$ , prenant  $F_{10}(r)$  identiquement nulle ce qui équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 b_{1,1} = -a_{0,2}, & i = 0 \\
 b_{2i+1,1} = \frac{3q_{2i-2,1}}{4i^2-1} - \frac{a_{2i,2}}{2i+1}, & i = 1, \dots, \rho \\
 \left. \begin{array}{l}
 b_{2i+1,1} = -\frac{a_{2i,2}}{2i+1}, \text{ avec } q_{2i-2,1} = 0 \\
 \text{ou} \\
 b_{2i+1,1} = \frac{3q_{2i-2,1}}{4i^2-1}, \text{ avec } a_{2i,2} = 0 \\
 \text{ou} \\
 a_{2i,2} = \frac{3q_{2i-2,1}}{2i-1}, \text{ avec } b_{2i+1,1} = 0
 \end{array} \right\}, & i = \rho + 1, \dots, \mu_0 \\
 b_{2i+1,1} = q_{2i-2,1} = a_{2i,2} = 0, & i = \mu_0 + 1, \dots, \lambda_0,
 \end{array} \right. \quad (2.13)$$

où

$$\rho = \min \left\{ \left[ \frac{n}{2} \right], \left[ \frac{k-1}{2} \right], \left[ \frac{n_2}{2} \right] + 1 \right\} \quad \text{et} \quad \mu_0 = \max \{ \mu, \mu_1, \mu' \}.$$

Premièrement en utilisant (2.13) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}F(\theta, r) &= b_{11}(B_{2,0}(\theta) - B_{0,2}(\theta)) + \sum_{i=1}^{\rho} \left(\frac{4-4i^2}{2i-1}\right) q_{2i-2,1} r^{2i} B_{2i+2,0}(\theta) + \sum_{i=1}^{\rho} a_{2i,2} r^{2i} B_{2i,0}(\theta) ((2i+1) \\
&\times B_{0,2}(\theta) - B_{2,0}(\theta)) - \sum_{i=1}^{\rho} (2i+1) q_{2i-2,1} r^{2i} B_{2i-2,0}(\theta) + 2 \sum_{i=1}^{\rho} (2i+1) q_{2i-2,1} r^{2i} B_{2i,0}(\theta) \\
&+ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} 2ib_{2i,1} r^{2i-1} B_{2i+1,0}(\theta) + \sum_{i=0}^l (i+1) a_{i,1} r^i B_{i+1,1}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_1} (i+2) p_{i,1} r^{i+1} B_{i,3}(\theta) \\
&- \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2i+4) q_{2i+1,1} r^{2i+3} B_{2i+1,3}(\theta) + \sum_{i=0}^m ib_{i,2} r^{i-1} B_{i,1}(\theta) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (2i+2) a_{2i+1,2} r^{2i+1} \\
&\times B_{2i+1,2}(\theta) + \sum_{i=\rho+1}^{\mu_0} (2i+1) b_{2i+1,1} r^{2i} B_{2i+2,0}(\theta) + \sum_{i=\rho+1}^{\mu_0} (2i+1) a_{2i,2} r^{2i} B_{2i,2}(\theta) \\
&- \sum_{i=\rho+1}^{\mu_0} (2i+1) q_{2i-2,1} r^{2i} B_{2i-2,4}(\theta).
\end{aligned}$$

Puisque  $\mu_0 = \max\{\mu, \mu_1, \mu'\}$ , alors

$$\frac{d}{dr}F(\theta, r) = \begin{cases} \frac{d}{dr}F_1(\theta, r) = T(\theta, r) + S_1(\theta, r), & \text{si } \mu_0 = \mu, \\ \frac{d}{dr}F_2(\theta, r) = T(\theta, r) + S_2(\theta, r), & \text{si } \mu_0 = \mu_1, \\ \frac{d}{dr}F_3(\theta, r) = T(\theta, r) + S_3(\theta, r), & \text{si } \mu_0 = \mu', \end{cases} \quad (2.14)$$

où

$$\begin{aligned}
T(\theta, r) &= b_{11}(B_{2,0}(\theta) - B_{0,2}(\theta)) + \sum_{i=1}^{\rho} \left(\frac{4-4i^2}{2i-1}\right) q_{2i-2,1} r^{2i} B_{2i+2,0}(\theta) + \sum_{i=1}^{\rho} a_{2i,2} r^{2i} B_{2i,0}(\theta) ((2i+1) \\
&\times B_{0,2}(\theta) - B_{2,0}(\theta)) - \sum_{i=1}^{\rho} (2i+1) q_{2i-2,1} r^{2i} B_{2i-2,0}(\theta) + 2 \sum_{i=1}^{\rho} (2i+1) q_{2i-2,1} r^{2i} B_{2i,0}(\theta) \\
&+ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} 2ib_{2i,1} r^{2i-1} B_{2i+1,0}(\theta) + \sum_{i=0}^l (i+1) a_{i,1} r^i B_{i+1,1}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_1} (i+2) p_{i,1} r^{i+1} B_{i,3}(\theta) - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \\
&\times (2i+4) q_{2i+1,1} r^{2i+3} B_{2i+1,3}(\theta) + \sum_{i=0}^m ib_{i,2} r^{i-1} B_{i,1}(\theta) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (2i+2) a_{2i+1,2} r^{2i+1} B_{2i+1,2}(\theta),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
S_1(\theta, r) &= + \sum_{i=\rho+1}^{\mu} a_{2i,2} r^{2i} B_{2i,0}(\theta) ((2i+1) B_{0,2}(\theta) - B_{2,0}(\theta)), \\
S_2(\theta, r) &= \sum_{i=\rho+1}^{\mu_1} \left(\frac{4-4i^2}{2i-1}\right) q_{2i-2,1} r^{2i} B_{2i+2,0}(\theta) + 2 \sum_{i=\rho+1}^{\mu_1} (2i+1) q_{2i-2,2} r^{2i} B_{2i,0}(\theta) - \sum_{i=\rho+1}^{\mu_1} (2i+1) \\
&\times q_{2i-2,1} r^{2i} B_{2i-2,0}(\theta),
\end{aligned}$$

$$S_3(\theta, r) = \sum_{i=\rho+1}^{\mu'} (2i+1)q_{2i-2,1} \left(\frac{2i+1}{2i-1}\right) r^{2i} B_{2i,2}(\theta) - \sum_{i=\rho+1}^{\mu'} (2i+1)q_{2i-2,1} r^{2i} B_{2i-2,2}(\theta),$$

et

$$y(\theta, r) = \int_0^\theta F(\psi, r) d\psi.$$

Pour ce faire, nous récrivons

$$\begin{aligned} F(\theta, r) = & r b_{11}(2B_{2,0}(\theta) - 1) + \sum_{i=1}^{\rho} (a_{2i,2} + 2q_{2i-2,1}) r^{2i+1} B_{2i,0}(\theta) + \sum_{i=1}^{\rho} (b_{2i+1,1} - a_{2i,2} - q_{2i-2,1}) \\ & \times r^{2i+1} B_{2i+2,0}(\theta) - \sum_{i=1}^{\rho} q_{2i-2,1} r^{2i+1} B_{2i-2,0}(\theta) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i+1,2} r^{2i+2} B_{2i+1,0}(\theta) (1 - B_{2,0}(\theta)) \\ & + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} b_{2i,1} r^{2i} B_{2i+1,0}(\theta) - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} q_{2i+1,1} r^{2i+4} B_{2i+1,4}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_1} p_{i,1} r^{i+2} B_{i,3}(\theta) + \sum_{i=0}^l a_{i,1} r^{i+1} \\ & \times B_{i+1,1}(\theta) + \sum_{i=0}^m b_{i,2} r^i B_{i,1}(\theta) + \sum_{i=\rho+1}^{\mu_0} a_{2i,2} r^{2i+1} B_{2i,0}(\theta) (1 - B_{2,0}(\theta)) + \sum_{i=\rho+1}^{\mu_0} b_{2i+1,1} r^{2i+1} \\ & \times B_{2i+2,0}(\theta) + \sum_{i=\rho+1}^{\mu_0} q_{2i-2,1} r^{2i+1} B_{2i-2,4}(\theta). \end{aligned}$$

puisque  $\mu_0 = \max\{\mu, \mu_1, \mu'\}$ , alors

$$y(\theta, r) = \begin{cases} y_1(\theta, r), & \text{si } \mu_0 = \mu, \\ y_2(\theta, r), & \text{si } \mu_0 = \mu_1, \\ y_3(\theta, r), & \text{si } \mu_0 = \mu'. \end{cases} \quad (2.15)$$

En utilisant à nouveau les integrales de l'annexe A, on obtient

$$\begin{aligned} y_1(\theta, r) = & r \frac{b_{11}}{2} (\sin(2\theta)) + \sum_{i=1}^{\rho} a_{2i,2} r^{2i+1} \sum_{l=1}^{i+1} \tilde{\beta}_{i,l} \sin(2l\theta) + \sum_{i=1}^{\rho} q_{2i-2,1} r^{2i+1} \sum_{l=1}^{i+1} \tilde{\beta}_{i,l} \sin(2l\theta) \\ & + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i+1,2} r^{2i+2} \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,l} \sin((2l+1)\theta) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} b_{2i,1} r^{2i} \sum_{l=0}^i \gamma_{i,l} \sin((2l+1)\theta) \\ & - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2i+4} q_{2i+1,1} \sum_{l=0}^{i+2} \tilde{\gamma}_{i,l} \sin((2l+1)\theta) + \sum_{i=\rho+1}^{\mu} a_{2i,2} r^{2i+1} \sum_{l=1}^{i+1} \tilde{\beta}_{i,l} \sin(2l\theta) \\ & - \sum_{i=0}^{n_1} p_{i,1} r^{i+2} \left[ \frac{2}{(i+1)(i+3)} - \frac{1}{i+1} \cos^{i+1} \theta + \frac{1}{i+3} \cos^{i+3} \theta \right] + \sum_{i=0}^l a_{i,1} r^{i+1} \\ & \times \frac{1}{i+2} (1 - \cos^{i+2} \theta) - \sum_{i=0}^m b_{i,2} r^i \frac{1}{i+1} (1 - \cos^{i+1} \theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_2(\theta, r) = & r \frac{b_{11}}{2} (\sin(2\theta)) + \sum_{i=1}^{\rho} a_{2i,2} r^{2i+1} \sum_{l=1}^{i+1} \tilde{\beta}_{i,l} \sin(2l\theta) + \sum_{i=1}^{\rho} q_{2i-2,1} r^{2i+1} \sum_{l=1}^{i+1} \tilde{\tilde{\beta}}_{i,l} \sin(2l\theta) \\
 & + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i+1,2} r^{2i+2} \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,l} \sin((2l+1)\theta) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} b_{2i,1} r^{2i} \sum_{l=0}^i \gamma_{i,l} \sin((2l+1)\theta) \\
 & - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2i+4} q_{2i+1,1} \sum_{l=0}^{i+2} \tilde{\tilde{\gamma}}_{i,l} \sin((2l+1)\theta) + \sum_{i=\rho+1}^{\mu_1} q_{2i-2,1} r^{2i+1} \sum_{l=1}^{i+1} \tilde{\tilde{\beta}}_{i,l} \sin(2l\theta) \\
 & - \sum_{i=0}^{n_1} p_{i,1} r^{i+2} \left[ \frac{2}{(i+1)(i+3)} - \frac{1}{i+1} \cos^{i+1} \theta + \frac{1}{i+3} \cos^{i+3} \theta \right] + \sum_{i=0}^l a_{i,1} r^{i+1} \\
 & \times \frac{1}{i+2} (1 - \cos^{i+2} \theta) + \sum_{i=0}^m b_{i,2} r^i \frac{1}{i+1} (1 - \cos^{i+1} \theta),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_3(\theta, r) = & r \frac{b_{11}}{2} (\sin(2\theta)) + \sum_{i=1}^{\rho} a_{2i,2} r^{2i+1} \sum_{l=1}^{i+1} \tilde{\beta}_{i,l} \sin(2l\theta) + \sum_{i=1}^{\rho} q_{2i-2,1} r^{2i+1} \sum_{l=1}^{i+1} \tilde{\tilde{\beta}}_{i,l} \sin(2l\theta) \\
 & + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i+1,2} r^{2i+2} \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,l} \sin((2l+1)\theta) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} b_{2i,1} r^{2i} \sum_{l=0}^i \gamma_{i,l} \sin((2l+1)\theta) \\
 & - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2i+4} q_{2i+1,1} \sum_{l=0}^{i+2} \tilde{\tilde{\gamma}}_{i,l} \sin((2l+1)\theta) - \sum_{i=\rho+1}^{\mu'} q_{2i-2,1} r^{2i+1} \sum_{l=1}^{i+1} \tilde{\tilde{\beta}}_{i,l} \sin(2l\theta) \\
 & - \sum_{i=0}^{n_1} p_{i,1} r^{i+2} \left[ \frac{2}{(i+1)(i+3)} - \frac{1}{i+1} \cos^{i+1} \theta + \frac{1}{i+3} \cos^{i+3} \theta \right] + \sum_{i=0}^l a_{i,1} r^{i+1} \\
 & \times \frac{1}{i+2} (1 - \cos^{i+2} \theta) + \sum_{i=0}^m b_{i,2} r^i \frac{1}{i+1} (1 - \cos^{i+1} \theta),
 \end{aligned}$$

où

$$\tilde{\gamma}_{i,l} = \begin{cases} \gamma_{i,l} - \gamma_{i+1,l}, & 0 \leq l \leq i, \\ -\gamma_{i+1,i+1}, & l = i+1, \end{cases}, \quad \tilde{\tilde{\beta}}_{i,l} = \begin{cases} -\beta_{i-1,l} + \frac{(4-4i^2)\beta_{i+1,l}}{(4i^2-1)} + 2\beta_{i,l}, & 0 \leq l \leq i-1, \\ \frac{(4-4i^2)\beta_{i+1,i}}{(4i^2-1)} + 2\beta_{i,i}, & l = i, \\ \frac{(4-4i^2)\beta_{i+1,i+1}}{(4i^2-1)}, & l = i+1, \end{cases}$$

$$\tilde{\tilde{\gamma}}_{i,l} = \begin{cases} \gamma_{i,l} - 2\gamma_{i+1,l} + \gamma_{i+2,l}, & 0 \leq l \leq i, \\ -2\gamma_{i+1,i+1} + \gamma_{i+2,i+1}, & l = i+1, \\ \gamma_{i+2,i+2}, & l = i+2, \end{cases}, \quad \tilde{\tilde{\beta}}_{i,l} = \begin{cases} \beta_{i,l} - \frac{2(i+1)\beta_{i+1,l}}{(2i+1)}, & 0 \leq l \leq i, \\ -\frac{2(i+1)\beta_{i+1,i+1}}{(2i+1)}, & l = i+1, \end{cases}$$

et

$$\tilde{\tilde{\tilde{\beta}}}_{i,l} = \begin{cases} \beta_{i-1,l} - \frac{(4i+1)\beta_{i,l}}{(2i-1)} + \frac{(2i+2)\beta_{i,l}}{(2i-1)} \beta_{i+1,l}, & 0 \leq l \leq i-1, \\ -\frac{(4i+1)\beta_{i,i}}{(2i-1)} + \frac{(2i+2)\beta_{i,l}}{(2i-1)} \beta_{i+1,l}, & l = i, \\ \frac{(2i+2)\beta_{i+1,i+1}}{(2i-1)}, & l = i+1. \end{cases}$$

### 2.3 Application de la méthode de la moyennisation du deuxième ordre

Maintenant, nous déterminons la fonction correspondante  $F_{20}(r) = L(r) + H(r)$ , avec

$$L(r) = \begin{cases} L_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dr} F(\theta, r) y(\theta, r) d\theta, & \text{si } \mu_0 = \mu, \\ L_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dr} F(\theta, r) y(\theta, r) d\theta, & \text{si } \mu_0 = \mu_1, \\ L_3(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dr} F(\theta, r) y(\theta, r) d\theta, & \text{si } \mu_0 = \mu', \end{cases}$$

$$H(r) = \begin{cases} H_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\theta, r) d\theta, & \text{si } \mu_0 = \mu, \\ H_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\theta, r) d\theta, & \text{si } \mu_0 = \mu_1, \\ H_3(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\theta, r) d\theta, & \text{si } \mu_0 = \mu'. \end{cases}$$

La Proposition suivante nous fournit une expression de  $F_{20}(r)$ .

**Proposition 2.3.1.** *L'intégrale  $F_{20}(r)$  est un polynôme de la variable  $r$  donnée*

$$F_{20}(r) = r (P_1(r^2) + r^2 P_2(r^2) + r^4 P_3(r^2)),$$

où  $P_1(r^2)$ ,  $P_2(r^2)$  et  $P_3(r^2)$  sont des polynômes de la variable  $r^2$  de degré respectivement

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \max \left\{ \left[ \frac{n}{2} \right], \left[ \frac{k-1}{2} \right], \left[ \frac{k}{2} \right] + \left[ \frac{l-1}{2} \right], \left[ \frac{m}{2} \right] + \left[ \frac{n-1}{2} \right], \left[ \frac{k}{2} \right] + \left[ \frac{m}{2} \right] - 1, \left[ \frac{k}{2} \right] + \left[ \frac{n_1}{2} \right], \right. \\ &\quad \left. \mu_0 + \left[ \frac{l}{2} \right], \mu_0 + \left[ \frac{m-1}{2} \right] \right\}, \\ \Lambda_2 &= \max \left\{ \left[ \frac{n-1}{2} \right] + \left[ \frac{l-1}{2} \right], \left[ \frac{m}{2} \right] + \left[ \frac{n_2-1}{2} \right], \left[ \frac{n-1}{2} \right] + \left[ \frac{n_1}{2} \right], \mu_0 + \left[ \frac{n_1-1}{2} \right], \left[ \frac{n_2}{2} \right] \right\}, \\ \Lambda_3 &= \max \left\{ \left[ \frac{n_1}{2} \right] + \left[ \frac{n_2-1}{2} \right], \left[ \frac{l-1}{2} \right] + \left[ \frac{n_2-1}{2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

et  $\mu_0 = \max\{\mu, \mu_1, \mu'\}$ .

Avant de prouver le résultat ci-dessus, nous allons d'abord calculer respectivement les intégrales  $L(r)$  et  $H(r)$ . Pour ce faire, nous avons besoin de quelques préparatifs.

**Lemme 2.3.1.** *L'intégrale  $L_1(r)$  est un polynôme de la variable  $r$  donnée par*

$$L_1(r) = r (\bar{P}_{11}(r^2) + r^2 \bar{P}_{21}(r^2) + r^4 \bar{P}_{31}(r^2)),$$

où  $\bar{P}_{11}(r^2)$ ,  $\bar{P}_{21}(r^2)$  et  $\bar{P}_{31}(r^2)$  sont des polynômes de la variable  $r^2$  de degré respectivement

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \max \left\{ \left[ \frac{k}{2} \right] + \left[ \frac{l-1}{2} \right], \left[ \frac{m}{2} \right] + \left[ \frac{n-1}{2} \right], \left[ \frac{k}{2} \right] + \left[ \frac{m}{2} \right] - 1, \left[ \frac{k}{2} \right] + \left[ \frac{n_1}{2} \right], \right. \\ &\quad \left. \mu + \left[ \frac{l}{2} \right], \mu + \left[ \frac{m-1}{2} \right] \right\}, \\ \alpha_2 &= \max \left\{ \left[ \frac{n-1}{2} \right] + \left[ \frac{l-1}{2} \right], \left[ \frac{m}{2} \right] + \left[ \frac{n_2-1}{2} \right], \left[ \frac{n-1}{2} \right] + \left[ \frac{n_1}{2} \right], \mu + \left[ \frac{n_1-1}{2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

et  $\Lambda_3$ .

**Preuve.** De (2.14) et (2.15) nous avons

$$\begin{aligned}
 L_1(r) &= \sum_{i=1}^{12} M_{i,1}(r) \quad \text{avec} \quad M_{i,1}(r) = \sum_{j=1}^{10} M_{i,1}^j, \\
 M_{1,1}(r) &= \int_0^{2\pi} b_{1,1} (B_{2,0}(\theta) - B_{2,0}(\theta)) y_1(\theta, r) d\theta, \\
 M_{2,1}(r) &= \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{\rho} \left( \frac{4 - 4i^2}{2i - 1} \right) q_{2i-2,1} r^{2i} B_{2i+2,0}(\theta) y_1(\theta, r) d\theta, \\
 M_{3,1}(r) &= \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{\rho} a_{2i,2} r^{2i} B_{2i,0}(\theta) ((2i + 1)B_{0,2}(\theta) - B_{2,0}(\theta)) y_1(\theta, r) d\theta, \\
 M_{4,1}(r) &= \int_0^{2\pi} - \sum_{i=1}^{\rho} (2i + 1) q_{2i-2,1} r^{2i} B_{2i-2,0}(\theta) y_1(\theta, r) d\theta, \\
 M_{5,1}(r) &= \int_0^{2\pi} +2 \sum_{i=1}^{\rho} (2i + 1) q_{2i-2,1} r^{2i} B_{2i,0}(\theta) y_1(\theta, r) d\theta, \\
 M_{6,1}(r) &= \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} 2ib_{2i,1} r^{2i-1} B_{2i+1,0}(\theta) y_1(\theta, r) d\theta, \\
 M_{7,1}(r) &= \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^l (i + 1) a_{i,1} r^i B_{i+1,1}(\theta) y_1(\theta, r) d\theta, \\
 M_{8,1}(r) &= \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^k ib_{i,2} r^{i-1} B_{i,1}(\theta) y_1(\theta, r) d\theta, \\
 M_{9,1}(r) &= \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (2i + 2) a_{2i+1,2} r^{2i+1} B_{2i+1,2}(\theta) y_1(\theta, r) d\theta, \\
 M_{10,1}(r) &= \int_0^{2\pi} - \sum_{i=0}^{n_1} (i + 2) p_{i,1} r^{i+1} B_{i,3}(\theta) y_1(\theta, r) d\theta, \\
 M_{11,1}(r) &= - \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2i + 4) q_{2i+1,1} r^{2i+3} B_{2i+1,3}(\theta) y_1(\theta, r) d\theta, \\
 M_{12,1}(r) &= \int_0^{2\pi} \sum_{i=\rho+1}^{\mu} a_{2i,2} r^{2i} B_{2i,0}(\theta) [(2i + 1)B_{0,2}(\theta) - B_{2,0}(\theta)] y_1(\theta, r) d\theta.
 \end{aligned}$$

*En utilisant les integrales de l'annexe A, on a à partir de 120 produits entre les différentes sommes seulement 48 ne seront pas nuls après l'intégration par rapport à  $\theta$  entre 0 et  $2\pi$ .*

*Donc les termes qui contribuent à  $L_1(r)$  donnent*

$$L_1(r) = V(r) + I_1(r),$$

où

$$\begin{aligned}
 V(r) = r & \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} B_i^1(r^2)^{i+1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} B_i^2(r^2)^i + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} B_i^3(r^2)^i \right. \\
 & + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{i=1}^{\rho} A_{i,j}^1(r^2)^{i+j} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{j=1}^{\rho} A_{i,j}^2(r^2)^{i+j} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{j=1}^{\rho} A_{i,j}^3(r^2)^{i+j} \\
 & + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{j=1}^{\rho} A_{i,j}^4(r^2)^{i+j+1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{j=1}^{\rho} A_{i,j}^5(r^2)^{i+j} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{i=1}^{\rho} A_{i,j}^6(r^2)^{i+j} \\
 & + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} A_{i,j}^7(r^2)^{i+j} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} A_{i,j}^8(r^2)^{i+j} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} A_{i,j}^9(r^2)^{i+j-1} \\
 & + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} A_{i,j}^{10}(r^2)^{i+j+1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} A_{i,j}^{11}(r^2)^{i+j+2} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} A_{i,j}^{12}(r^2)^{i+j+1} \\
 & \left. + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} A_{i,j}^{13}(r^2)^{i+j+1} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} A_{i,j}^{14}(r^2)^{i+j+1} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} A_{i,j}^{15}(r^2)^{i+j+2} \right),
 \end{aligned}$$

et

$$I_1(r) = r \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{j=\rho+1}^{\mu} B_{i,j}^1(r^2)^{i+j} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{j=\rho,ho}^{\mu} B_{i,j}^2(r^2)^{i+j} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{j=\rho+1}^{\mu} B_{i,j}^3(r^2)^{i+j+1} \right),$$

où

$$\begin{aligned}
 B_i^1 &= \frac{3\pi a_{0,2} p_{2i+1,1} (i+1) \alpha_{i+1}}{2^{i+1} (i+3)!}, \quad B_i^2 = \frac{-i\pi a_{2i,1} a_{0,2} \alpha_{i+1}}{2^i (i+2)!}, \quad B_i^3 = \frac{-\pi a_{0,2} b_{2i+1,2} \alpha_{i+1}}{2^i (i+2)!}, \\
 A_{i,j}^1 &= \pi q_{2j-2,1} p_{2i+1,1} \left( \frac{(9i+24j+12)\alpha_{i+j}}{(2j-1)2^{i+j+1}(i+j+3)!} + (2i+3) \sum_{s=1}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,s} \tilde{K}_{i,s} \right), \\
 A_{i,j}^2 &= \pi q_{2j-2,1} a_{2i,1} \left( \frac{-3(i+2j+1)\alpha_{i+j}}{(2j-1)2^{i+j}(i+j+2)!} + (2i+1) \sum_{s=1}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,s} K_{i,s} \right), \\
 A_{i,j}^3 &= \pi q_{2j-2,1} b_{2i+1,2} \left( \frac{-3(i+2j+1)\alpha_{i+j}}{(2j-1)2^{i+j}(i+j+2)!} + (2i+1) \sum_{s=1}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,s} K_{i,s} \right), \\
 A_{i,j}^4 &= \pi a_{2i,2} p_{2j+1,1} \left( \frac{(-3\alpha_{i+j+1})}{2^{i+j+2}(i+j+3)!} + (2i+3) \sum_{s=0}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,s} \tilde{K}_{i,s} \right),
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
A_{i,j}^5 &= \pi a_{2i,1} a_{2j,2} \left( \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} + (2i+1) \sum_{s=1}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,s} K_{i,s} \right), \\
A_{i,j}^6 &= \pi b_{2i+1,2} a_{2j,2} \left( \frac{\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!} + (2i+1) \sum_{s=1}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,s} K_{i,s} \right), \\
A_{i,j}^7 &= \pi a_{2i+1,1} b_{2j,1} \left( \frac{-j\alpha_{i+j+2}}{(i+1)2^{i+j+1}(i+j+2)!} + (2i+2) \sum_{s=0}^j \gamma_{j,s} C_{i+1,s} \right), \\
A_{i,j}^8 &= \pi b_{2j,1} p_{2i,1} \left( \frac{j(6i+4j+9)\alpha_{i+j+1}}{(2i+1)(2i+3)2^{i+j}(i+j+2)!} + (2i+2) \sum_{s=0}^{j+1} \gamma_{j,s} \tilde{C}_{i,s} \right), \\
A_{i,j}^9 &= \pi b_{2i,2} b_{2j,1} \left( \frac{j\alpha_{i+j+1}}{(2i+1)2^{i+j}(i+j+1)!} + i \sum_{s=0}^j \gamma_{j,s} C_{i,s} \right), \\
A_{i,j}^{10} &= -\pi a_{2i+1,1} a_{2j+1,2} \left( \frac{(j+1)\alpha_{i+j+2}}{(2i+3)2^{i+j+2}(i+j+3)!} + (2i+2) \sum_{s=0}^j \tilde{\gamma}_{j,s} C_{i,s} \right), \\
A_{i,j}^{11} &= 2\pi a_{2i+1,1} q_{2j+1,1} \left( \frac{3(j+1)\alpha_{i+j+2}}{(2i+3)2^{i+j+3}(i+j+4)!} + (2i+2) \sum_{s=0}^{j+2} \tilde{\gamma}_{j,s} C_{i+1,s} \right), \\
A_{i,j}^{12} &= -2\pi b_{2i,2} a_{2j+1,2} \left( \frac{(j+1)\alpha_{i+j+1}}{(2i+1)2^{i+j+1}(i+j+2)!} - i \sum_{s=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,s} C_{i,s} \right), \\
A_{i,j}^{13} &= 2\pi q_{2i+1,1} b_{2j,2} \left( \frac{(j+2)\alpha_{i+j+1}}{(2i+1)2^{i+j+2}(i+j+3)!} + i \sum_{s=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,s} C_{i,s} \right), \\
A_{i,j}^{14} &= \pi p_{2i,1} a_{2j+1,2} \left( \frac{(j+1)(10i+4j+15)\alpha_{i+j}}{(2i+1)(2i+3)2^{i+j+1}(i+j+3)!} - (2i+2) \sum_{s=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,s} \tilde{C}_{i,s} \right), \\
A_{i,j}^{15} &= -\pi p_{2i,1} q_{2j+1,1} \left( \frac{3(j+2)(14i+4j+21)\alpha_{i+j+1}}{(2i+1)(2i+3)2^{i+j+2}(i+j+4)!} + (2i+2) \sum_{s=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,s} \tilde{C}_{i,s} \right), \\
B_{i,j}^1 &= \pi a_{2i,1} a_{2j,2} \left( \frac{\alpha_{i+j+1}}{(2j-1)2^{i+j+1}(i+j+2)!} + (2i+1) \sum_{s=1}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,s} K_{i,s} \right), \\
B_{i,j}^2 &= \pi b_{2i+1,2} a_{2j,2} \left( \frac{\alpha_{i+j+1}}{(2j-1)2^{i+j+1}(i+j+2)!} + (2i+1) \sum_{s=1}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,s} K_{i,s} \right), \\
B_{i,j}^3 &= \pi p_{2i+1,1} a_{2j,2} \left( \frac{-3\alpha_{i+j+1}}{(2j-1)2^{i+j+2}(i+j+3)!} + (2i+3) \sum_{s=1}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,s} \tilde{K}_{i,s} \right).
\end{aligned}$$

Donc le Lemme 2.3.1 est prouvé.

En travaillant de manière similaire aux calculs ci-dessus nous pouvons obtenir les résultats suivants, voir les Lemmes 2.3.2 et 2.3.3.

## 2.3 Application de la méthode de la moyennisation du deuxième ordre

**Lemme 2.3.2.** *L'intégrale  $L_2(r)$  est un polynôme de la variable  $r$  donnée*

$$L_2(r) = r \left( \overline{P}_{12}(r^2) + r^2 \overline{P}_{22}(r^2) + r^4 \overline{P}_{32}(r^2) \right),$$

où  $\overline{P}_{12}(r^2), \overline{P}_{22}(r^2)$  et  $\overline{P}_{32}(r^2)$  sont des polynômes de la variable  $r^2$  de degré respectivement

$$\beta_1 = \max \left\{ \left[ \frac{k}{2} \right] + \left[ \frac{l-1}{2} \right], \left[ \frac{m}{2} \right] + \left[ \frac{n-1}{2} \right], \left[ \frac{k}{2} \right] + \left[ \frac{m}{2} \right] - 1, \left[ \frac{k}{2} \right] + \left[ \frac{n_1}{2} \right], \right. \\ \left. \mu_1 + \left[ \frac{l}{2} \right], \mu_1 + \left[ \frac{m-1}{2} \right] \right\}, \\ \beta_2 = \max \left\{ \left[ \frac{n-1}{2} \right] + \left[ \frac{l-1}{2} \right], \left[ \frac{m}{2} \right] + \left[ \frac{n_2-1}{2} \right], \left[ \frac{n-1}{2} \right] + \left[ \frac{n_1}{2} \right], \mu_1 + \left[ \frac{n_1-1}{2} \right] \right\},$$

et  $\Lambda_3$ .

**Preuve.** De (2.14) et (2.15) nous avons

$$L_2(r) = \sum_{i=1}^{14} M_{i,2}(r) \quad \text{avec} \quad M_{i,2}(r) = \sum_{j=1}^{10} M_{i,2}^j,$$

où

$$M_{7,2}^7 = \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^l (i+1) a_{i,1} r^i \cos^{i+1} \theta \sin \theta \left( \sum_{i=\rho+1}^{\mu_1} q_{2i-2,1} r^{2i+1} \sum_{l=1}^{i+1} \tilde{\beta}_{i,l} \sin(2l\theta) \right) d\theta, \\ M_{8,2}^7 = \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^k i b_{i,2} r^{i-1} \cos^i \theta \sin \theta \left( \sum_{i=\rho+1}^{\mu_1} q_{2i-2,1} r^{2i+1} \sum_{l=1}^{i+1} \tilde{\beta}_{i,l} \sin(2l\theta) \right) d\theta, \\ M_{10,2}^7 = \int_0^{2\pi} - \sum_{i=0}^n (i+2) p_{i,1} r^{i+1} \cos^i \theta \sin^3 \theta \left( \sum_{j=\rho+1}^{\mu_1} q_{2i-2,1} r^{2i+1} \sum_{l=1}^{i+1} \tilde{\beta}_{i,l} \sin(2l\theta) \right) d\theta, \\ M_{12,2}(r) = \int_0^{2\pi} \sum_{i=\rho+1}^{\mu_1} \left( \frac{4-4i^2}{2i-1} \right) q_{2i-2,1} r^{2i} B_{2i+2,0}(\theta) y_2(\theta, r) d\theta, \\ M_{13,2}(r) = 2 \int_0^{2\pi} \sum_{i=\rho+1}^{\mu_1} (2i+1) q_{2i-2,1} r^{2i} B_{2i,0}(\theta) y_2(\theta, r) d\theta, \\ M_{14,2}(r) = \int_0^{2\pi} - \sum_{i=\rho+1}^{\mu_1} (2i+1) q_{2i-2,1} r^{2i} B_{2i-2,0}(\theta) y_2(\theta, r) d\theta,$$

et les intégrales  $M_{i,2}(r) = M_{i,1}(r)$  pour  $i = 1, \dots, 11$  et  $j \neq 7$  sont donnée dans le Lemme 2.3.1.

En utilisant les intégrales de l'annexe A, on a à partir de 140 produits entre les différentes sommes seulement 54 ne seront pas nuls après l'intégration par rapport à  $\theta$  entre 0 et  $2\pi$ . Donc les termes qui contribuent à  $L_2(r)$  donnent

$$L_2(r) = V(r) + I_2(r),$$

où

$$I_2(r) = r \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{j=\rho+1}^{\mu_1} C_{i,j}^1 (r^2)^{i+j} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{j=\rho+1}^{\mu_1} C_{i,j}^2 (r^2)^{i+j} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{j=\rho+1}^{\mu_1} C_{i,j}^3 (r^2)^{i+j+1} \right),$$

$$C_{i,j}^1 = \pi q_{2j-2,1} a_{2i,1} \left( \frac{-3(i+2j+1)\alpha_{i+j}}{(2j-1)2^{i+j}(i+j+2)!} + (2i+1) \sum_{s=1}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,s} K_{i,s} \right),$$

$$C_{i,j}^2 = \pi q_{2j-2,1} b_{2i+1,2} \left( \frac{-3(i+2j+1)\alpha_{i+j}}{(2j-1)2^{i+j}(i+j+2)!} + (2i+1) \sum_{s=1}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,s} K_{i,s} \right),$$

$$C_{i,j}^3 = \pi q_{2j-2,1} p_{2i+1,1} \left( \frac{(9i+24j+12)\alpha_{i+j}}{(2j-1)2^{i+j+1}(i+j+3)!} + (2i+3) \sum_{s=1}^{j+1} \tilde{\beta}_{j,s} \tilde{K}_{i,s} \right).$$

Donc le Lemme 2.3.2 est prouvé.

**Lemme 2.3.3.** *L'intégrale  $L_2(r)$  est un polynôme de la variable  $r$  donnée*

$$L_3(r) = r (\bar{P}_{13}(r^2) + \bar{P}_{23}(r^2) + \bar{P}_{33}(r^2)),$$

où  $\bar{P}_{13}(r^2)$ ,  $\bar{P}_{23}(r^2)$  et  $\bar{P}_{33}(r^2)$  sont des polynômes de la variable  $r^2$  de degré respectivement

$$\gamma_1 = \max \left\{ \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{l-1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor, \right.$$

$$\left. \mu' + \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor, \mu' + \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \right\},$$

$$\gamma_2 = \max \left\{ \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{l-1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_2-1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor, \mu' + \left\lfloor \frac{n_1-1}{2} \right\rfloor \right\},$$

et  $\Lambda_3$ .

**Preuve.** De (2.14) et (2.15) nous avons

$$L_3(r) = \sum_{i=1}^{13} M_{i,3}(r) \quad \text{avec} \quad M_{i,3}(r) = \sum_{j=1}^{10} M_{i,3}^j,$$

où

$$\begin{aligned}
 M_{7,3}^7 &= \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^l (i+1) a_{i,1} r^i \cos^{i+1} \theta \sin \theta \left( - \sum_{i=\rho+1}^{\mu'} q_{2i-2,1} r^{2i+1} \sum_{l=1}^{i+1} \tilde{\tilde{\beta}}_{i,l} \sin(2l\theta) \right) d\theta, \\
 M_{8,3}^7 &= \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^k i b_{i,2} r^{i-1} \cos^i \theta \sin \theta \left( - \sum_{i=\rho+1}^{\mu'} q_{2i-2,1} r^{2i+1} \sum_{l=1}^{i+1} \tilde{\tilde{\beta}}_{i,l} \sin(2l\theta) \right) d\theta, \\
 M_{10,3}^7 &= \int_0^{2\pi} - \sum_{i=0}^n (i+2) p_{i,1} r^{i+1} \cos^i \theta \sin^3 \theta \left( - \sum_{j=\rho+1}^{\mu'} q_{2i-2,1} r^{2i+1} \sum_{l=1}^{i+1} \tilde{\tilde{\beta}}_{i,l} \sin(2l\theta) \right) d\theta, \\
 M_{12,3}(r) &= \int_0^{2\pi} \sum_{i=\rho+1}^{\mu'} (2i+1) q_{2i-2,1} \left( \frac{2i+2}{2i-1} \right) r^{2i} B_{2i,2}(\theta) y_3(\theta, r) d\theta, \\
 M_{13,3}(r) &= \int_0^{2\pi} - \sum_{i=\rho+1}^{\mu'} (2i+1) q_{2i-2,1} r^{2i} B_{2i-2,2}(\theta) y_3(\theta, r) d\theta,
 \end{aligned}$$

et les intégrales  $M_{i,3}(r) = M_{i,1}(r)$  pour  $i = 1, \dots, 11$  et  $j \neq 7$  sont donnée dans le Lemme 2.3.1.

En utilisant les integrales de l'annexe A, on a à partir de 130 produits entre les différentes sommes seulement 51 ne seront pas nuls après l'intégration par rapport à  $\theta$  entre 0 et  $2\pi$ . Donc les termes qui contribuent à  $L_3(r)$  donnent

$$L_3(r) = V(r) + I_3(r),$$

où

$$\begin{aligned}
 I_3(r) &= r \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\mu'} H_{i,j}^1 (r^2)^{i+j} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{j=\rho+1}^{\mu'} H_{i,j}^2 (r^2)^{i+j} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{j=\rho+1}^{\mu'} H_{i,j}^3 (r^2)^{i+j+1} \right), \\
 H_{i,j}^1 &= \pi a_{2i,1} q_{2j-2,1} \left( \frac{-3(2j+1)\alpha_{i+j}}{(2j-1)2^{i+j+1}(i+j+2)!} + (2i+1) \sum_{s=1}^{j+1} \tilde{\tilde{\beta}}_{j,s} K_{i,s} \right), \\
 H_{i,j}^2 &= \pi b_{2i+1,2} q_{2j-2,1} \left( \frac{-3(2j+1)\alpha_{i+j}}{(2j-1)2^{i+j+1}(i+j+2)!} + (2i+1) \sum_{s=1}^{j+1} \tilde{\tilde{\beta}}_{j,s} K_{i,s} \right), \\
 H_{i,j}^3 &= \pi p_{2i+1,1} q_{2j-2,1} \left( \frac{15(2j+1)\alpha_{i+j}}{(2j-1)2^{i+j+2}(i+j+3)!} + (2i+3) \sum_{s=1}^{j+1} \tilde{\tilde{\beta}}_{j,s} \tilde{K}_{i,s} \right).
 \end{aligned}$$

Donc le Lemme 2.3.3 est prouvé.

D'après les Lemmes 2.3.1 – 2.3.3, on obtient

$$L(r) = r (\overline{P}_1(r^2) + r^2 \overline{P}_2(r^2) + r^4 \overline{P}_3(r^2)),$$

où  $\overline{P}_1(r^2), \overline{P}_2(r^2)$  et  $\overline{P}_3(r^2)$  sont des polynômes de la variable  $r^2$  de degré respectivement

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \max \left\{ \left[ \frac{k}{2} \right] + \left[ \frac{l-1}{2} \right], \left[ \frac{m}{2} \right] + \left[ \frac{n-1}{2} \right], \left[ \frac{k}{2} \right] + \left[ \frac{m}{2} \right] - 1, \left[ \frac{k}{2} \right] + \left[ \frac{n_1}{2} \right], \right. \\ &\quad \left. \mu_0 + \left[ \frac{l}{2} \right], \mu_0 + \left[ \frac{m-1}{2} \right] \right\}, \\ \eta_2 &= \max \left\{ \left[ \frac{n-1}{2} \right] + \left[ \frac{l-1}{2} \right], \left[ \frac{m}{2} \right] + \left[ \frac{n_2-1}{2} \right], \left[ \frac{n-1}{2} \right] + \left[ \frac{n_1}{2} \right], \mu_0 + \left[ \frac{n_1-1}{2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

et  $\Lambda_3 \cdot \mu_0 = \max \{ \mu, \mu_1, \mu' \}$ .

**Lemme 2.3.4.** *L'intégrale  $H(r)$  est un polynôme de la variable  $r$  donnée par*

$$H(r) = r (\overline{Q}_1(r^2) + r^2 \overline{Q}_2(r^2) + r^4 \overline{Q}_3(r^2)),$$

où  $\overline{Q}_1(r^2), \overline{Q}_2(r^2)$  et  $\overline{Q}_3(r^2)$  sont des polynômes de la variable  $r^2$  de degré respectivement

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \max \left\{ \left[ \frac{n}{2} \right], \left[ \frac{k-1}{2} \right], \left[ \frac{k}{2} \right] + \left[ \frac{l-1}{2} \right], \left[ \frac{m}{2} \right] + \left[ \frac{n-1}{2} \right], \left[ \frac{k}{2} \right] + \left[ \frac{m}{2} \right] - 1, \left[ \frac{k}{2} \right] + \left[ \frac{n_1}{2} \right], \right. \\ &\quad \left. \mu_0 + \left[ \frac{l}{2} \right], \mu_0 + \left[ \frac{m-1}{2} \right] \right\}, \\ \Lambda_2 &= \max \left\{ \left[ \frac{n-1}{2} \right] + \left[ \frac{l-1}{2} \right], \left[ \frac{m}{2} \right] + \left[ \frac{n_2-1}{2} \right], \left[ \frac{n-1}{2} \right] + \left[ \frac{n_1}{2} \right], \mu_0 + \left[ \frac{n_1-1}{2} \right], \left[ \frac{n_2}{2} \right] \right\}, \\ \Lambda_3 &= \max \left\{ \left[ \frac{n_1}{2} \right] + \left[ \frac{n_2-1}{2} \right], \left[ \frac{l-1}{2} \right] + \left[ \frac{n_2-1}{2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

et  $\mu_0 = \max \{ \mu, \mu_1, \mu' \}$ .

**Preuve.** *De (2.12) on a*

$$\begin{aligned} G(r, \theta) &= \sum_{i=0}^k d_{i,1} r^i B_{i+1,0}(\theta) + \sum_{i=0}^l c_{i,1} r^{i+1} B_{i+1,1}(\theta) + \sum_{i=0}^m d_{i,2} r^i B_{i,1}(\theta) \\ &\quad + \sum_{i=0}^n c_{i,2} r^i B_{i,2}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_1} p_{i,2} r^{i+2} \cos^i B_{i,3}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_2} q_{i,2} r^{i+3} B_{i,4}(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 2 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{i,2} b_{j,2} r^{i+j-1} B_{i+j+1,2}(\theta) + 2 \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n_2} b_{i,2} q_{j,1} r^{i+j+1} B_{i+j+1,4}(\theta) \\
 & + 2 \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^k a_{i,1} b_{j,1} r^{i+j-1} B_{i+j+1,2}(\theta) - \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^n a_{i,1} a_{j,2} r^{i+j} B_{i+j+2,2}(\theta) \\
 & + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^l a_{i,2} a_{j,1} r^{i+j} B_{i+j,4}(\theta) + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^k b_{i,2} b_{j,1} r^{i+j-2} B_{i+j,2}(\theta) \\
 & + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n_1} a_{i,2} p_{j,1} r^{i+j+1} B_{i+j+4}(\theta) + \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^{n_2} a_{i,1} q_{j,1} r^{i+j+2} B_{i+j+2,4}(\theta) \\
 & - \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^m b_{i,1} b_{j,2} r^{i+j-2} B_{i+j+2,0}(\theta) + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{n_1} b_{i,1} p_{j,1} r^{i+j} B_{i+j+2,0}(\theta) \\
 & + \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^n p_{i,1} a_{j,2} r^{i+j+1} B_{i+j+1,4}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} p_{i,1} q_{j,1} r^{i+j+3} B_{i+j+1,6}(\theta) \\
 & - \sum_{i=0}^{n_2} \sum_{j=0}^l q_{i,1} a_{j,1} r^{i+j+2} B_{i+j,6}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_2} \sum_{j=0}^{n_1} q_{i,1} p_{j,1} r^{i+j+3} B_{i+j+1,6}(\theta) \\
 & - \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^k p_{i,1} b_{j,1} r^{i+j} B_{i+j,4}(\theta).
 \end{aligned}$$

Encore, en utilisant les integrales données dans l'annexe A, nous calculons

$$\begin{aligned}
 H(r) &= \int_0^{2\pi} G(r, \theta) d\theta \\
 &= r \left[ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} d_{2i+1,1} r^{2i} \int_0^{2\pi} B_{2i+2,0}(\theta) d\theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_{2i,2} r^{2i} \int_0^{2\pi} B_{2i,2}(\theta) d\theta - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} q_{2i,2} r^{2i+2} \right. \\
 &\quad \times \left. \int_0^{2\pi} B_{2i,4}(\theta) d\theta - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} a_{0,2} b_{2j+1,2} r^{2j} \left( 2 \int_0^{2\pi} B_{2j+2,2}(\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} B_{2j+2,2}(\theta) B_{1,0}(2\theta) d\theta \right) \right. \\
 &\quad - 2 \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} a_{2i,2} b_{2j+1,2} r^{2i+2j} \int_0^{2\pi} B_{2i+2j+2,2}(\theta) d\theta - 2 \sum_{i=\rho+1}^{\mu_0} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} a_{2i,2} b_{2j+1,2} r^{2i+2j} \times \\
 &\quad \int_0^{2\pi} B_{2i+2j+2,2}(\theta) d\theta - 2 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} a_{2i+1,2} b_{2j,2} r^{2i+2j} \int_0^{2\pi} B_{2i+2j+2,2}(\theta) d\theta - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} a_{0,2} a_{2j,1} r^{2j} \\
 &\quad \left( \int_0^{2\pi} B_{2j,2}(\theta) B_{1,0}(2\theta) d\theta + 2 \int_0^{2\pi} B_{2j+2,2}(\theta) d\theta \right) - \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} a_{2i,2} a_{2j,1} r^{2i+2j} \int_0^{2\pi} B_{2i+2j,2}(\theta) \\
 &\quad \times B_{1,0}(2\theta) d\theta - \sum_{i=\rho+1}^{\mu_0} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} a_{2i,2} a_{2j,1} r^{2i+2j} \int_0^{2\pi} B_{2i+2j,2}(\theta) B_{1,0}(2\theta) d\theta - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i+1,1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times a_{2j+1,2} r^{2i+2j+2} \int_0^{2\pi} B_{2i+2j+2,2}(\theta) B_{1,0}(2\theta) d\theta - \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} b_{2i+1,1} b_{2j+1,2} r^{2i+2j} \int_0^{2\pi} \\
& \times B_{2i+2j+2,0}(\theta) B_{1,0}(2\theta) d\theta - \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} b_{2i+1,1} b_{2j+1,2} r^{2i+2j} \int_0^{2\pi} B_{2i+2j+2,0}(\theta) B_{1,0}(2\theta) d\theta \\
& - \sum_{i=\rho+1}^{\mu_0} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} b_{2i+1,1} b_{2j+1,2} r^{2i+2j} \int_0^{2\pi} B_{2i+2j+2,0}(\theta) B_{1,0}(2\theta) d\theta - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} b_{2i,2} b_{2j,1} r^{2i+2j-2} \\
& \times \int_0^{2\pi} B_{2i+2j,0}(\theta) \theta B_{1,0}(2\theta) d\theta + 2 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{j=1}^{\rho} a_{2i,1} b_{2j+1,1} r^{2i+2j} \int_0^{2\pi} B_{2i+2j+2,2}(\theta) d\theta \\
& + 2 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{j=\rho+1}^{\mu_0} a_{2i,1} b_{2j+1,1} r^{2i+2j} \int_0^{2\pi} B_{2i+2j+2,2}(\theta) d\theta + 2 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} a_{2i+1,1} b_{2j,1} r^{2i+2j} \int_0^{2\pi} \\
& \times B_{2i+2j+2,2}(\theta) d\theta - \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} q_{2i-2,1} b_{2j+1,1} r^{2i+2j} \left( \frac{3}{4i^2-1} \int_0^{2\pi} B_{2i+2j+2,2}(\theta) B_{1,0}(2\theta) d\theta \right. \\
& \left. - 2 \int_0^{2\pi} B_{2i+2j,4}(\theta) d\theta \right) + 2 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{j=1}^{\rho} \frac{a_{2i,1} q_{2j-2,1}}{4i^2-1} r^{2i+2j} \int_0^{2\pi} B_{2i+2j+2,2}(\theta) d\theta + 2 \\
& \times \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{j=\rho+1}^{\mu_0} b_{2i+1,2} q_{2j-2,1} r^{2i+2j} \int_0^{2\pi} B_{2i+2j,4}(\theta) d\theta + 2 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2i,2} q_{2j+1,1} r^{2i+2j+2} \\
& \times \int_0^{2\pi} B_{2i+2j+2,4}(\theta) d\theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} a_{0,2} p_{2j+1,1} r^{2j+2} \left( 3 \int_0^{2\pi} B_{2j+2,4}(\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} B_{2j+2,2}(\theta) d\theta \right) \\
& + 2 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} a_{2i+1,2} p_{2j,1} r^{2i+2j+2} \int_0^{2\pi} B_{2i+2j+2,4}(\theta) d\theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{j=1}^{\rho} a_{2i,1} q_{2j-2,1} r^{2i+2j} \left( \int_0^{2\pi} \right. \\
& B_{2i+2j,4}(\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} B_{2i+2j-2,6}(\theta) d\theta \left. \right) + 2 \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} a_{2i,2} p_{2j+1,1} r^{2i+2j+2} \int_0^{2\pi} B_{2i+2j+2,4}(\theta) d\theta \\
& + 2 \sum_{i=\rho+1}^{\mu_0} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} a_{2i,2} p_{2j+1,1} r^{2i+2j+2} \int_0^{2\pi} B_{2i+2j+2,4}(\theta) d\theta + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{j=\rho+1}^{\mu_0} a_{2i,1} q_{2j-2,1} r^{2i+2j} \left( \int_0^{2\pi} \right. \\
& B_{2i+2j,4}(\theta) - \int_0^{2\pi} B_{2i+2j-2,6}(\theta) d\theta \left. \right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} a_{2i+1,1} q_{2j+1,1} r^{2i+2j+4} \left( \int_0^{2\pi} B_{2i+2j+4,4}(\theta) d\theta \right. \\
& \left. - \int_0^{2\pi} B_{2i+2j+2,6}(\theta) d\theta \right) + \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} b_{2i+1,1} p_{2j+1,1} r^{2i+2j+2} \left( \int_0^{2\pi} B_{2i+2j+4,2}(\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times B_{2i+2j+2,4}(\theta)d\theta) + \sum_{i=\rho+1}^{\mu_0} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} b_{2i+1,1} p_{2j+1,1} r^{2i+2j+2} \left( \int_0^{2\pi} B_{2i+2j+4,2}(\theta)d\theta - \int_0^{2\pi} \right. \\
 & B_{2i+2j+2,4}(\theta)d\theta) - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} b_{2i,1} p_{2j,1} r^{2i+2j} \left( \int_0^{2\pi} B_{2i+2j+2,2}(\theta)d\theta - \int_0^{2\pi} B_{2i+2j,4}(\theta) \right) \\
 & - 2 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{j=1}^{\rho} p_{2i+1,1} q_{2j-2,1} r^{2i+2j+2} \int_0^{2\pi} B_{2i+2j,6}(\theta)d\theta - 2 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{j=\rho+1}^{\mu_0} p_{2i+1,1} q_{2j-2,1} r^{2i+2j+2} \\
 & \times \left. \int_0^{2\pi} B_{2i+2j,6}(\theta)d\theta - 2 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} p_{2i,1} q_{2j+1,1} r^{2i+2j+4} \int_0^{2\pi} B_{2i+2j+2,6}(\theta)d\theta \right].
 \end{aligned}$$

Puisque  $\mu_0 = \max\{\mu, \mu_1, \mu'\}$  à partir de (2.13), et en utilisant les intégrales de l'annexe A, on obtient

$$H_k(r) = U(r) + J_k(r), \quad \text{pour } k = 1, \dots, 3,$$

où

$$\begin{aligned}
 U(r) = & r \left[ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \bar{B}_i^{(1)}(r^2)^i + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \bar{B}_j^2(r^2)^j + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \bar{B}_i^3(r^2)^{i+1} + \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \bar{A}_{i,j}^1(r^2)^{i+j} \right. \\
 & + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} B_j^4(r^2)^j + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \bar{A}_{i,j}^2(r^2)^{i+j} + \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \bar{A}_{i,j}^3(r^2)^{i+j} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} B_j^5(r^2)^j \\
 & + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} \bar{A}_{i,j}^4(r^2)^{i+j+1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \bar{A}_{i,j}^5(r^2)^{i+j-1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \bar{A}_{i,j}^6(r^2)^{i+j} \\
 & + \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \bar{A}_{i,j}^7(r^2)^{i+j} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \bar{A}_{i,j}^8(r^2)^{i+j+1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \bar{A}_{i,j}^9(r^2)^{i+j+1} \\
 & + \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \bar{A}_{i,j}^{10}(r^2)^{i+j+1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{j=1}^{\rho} \bar{A}_{i,j}^{11}(r^2)^{i+j} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \bar{B}_j^6(r^2)^{j+1} \\
 & + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \bar{A}_{i,j}^{12}(r^2)^{i+j+2} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \bar{A}_{i,j}^{13}(r^2)^{i+j} + \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \bar{A}_{i,j}^{14}(r^2)^{i+j+1} \\
 & \left. + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \bar{A}_{i,j}^{15}(r^2)^{i+j+2} \right],
 \end{aligned}$$



où

$$\begin{aligned}
 J_1(r) &= r \left[ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{j=\rho+1}^{\mu} \bar{B}_{i,j}^1(r^2)^{i+j} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{j=rho}^{\mu} \bar{B}_{i,j}^2(r^2)^{i+j} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{j=\rho+1}^{\mu} \bar{B}_{i,j}^3(r^2)^{i+j+1} \right], \\
 J_2(r) &= r \left[ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{j=\rho+1}^{\mu_1} \bar{C}_{i,j}^1(r^2)^{i+j} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \sum_{j=\rho+1}^{\mu_1} \bar{C}_{i,j}^2(r^2)^{i+j} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{j=\rho+1}^{\mu_1} \bar{C}_{i,j}^3(r^2)^{i+j+1} \right], \\
 J_3(r) &= r \left[ \sum_{\rho+1=0}^{\mu'} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \bar{H}_{i,j}^1(r^2)^{i+j} + \sum_{i=\rho+1}^{\mu'} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \bar{H}_{i,j}^2(r^2)^{i+j} + \sum_{i=\rho+1}^{\mu'} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \bar{H}_{i,j}^3(r^2)^{i+j} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=\rho+1}^{\mu'} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \bar{H}_{i,j}^4(r^2)^{i+j+1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \sum_{j=\rho+1}^{\mu'} \bar{H}_{i,j}^5(r^2)^{i+j} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{j=\rho+1}^{\mu'} \bar{H}_{i,j}^6(r^2)^{i+j+1} \right],
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 \bar{B}_i^1 &= \frac{\pi \tilde{b}_{2i+1,1} \alpha_{i+1}}{2^i (i+1)!}, \quad \bar{B}_i^2 = \frac{\pi a_{2i,2} \alpha_i}{2^i (i+1)!}, \quad \bar{B}_i^3 = \frac{-3\pi q_{2i,2} \alpha_i}{2^{i+1} (i+2)!}, \quad \bar{B}_j^4 = \frac{\pi j a_{0,2} b_{2j+1,2} \alpha_{j+1}}{2^j (j+2)!}, \\
 \bar{A}_{i,j}^1 &= \frac{\pi a_{2i,2} b_{2j+1,2} \alpha_{i+j+1}}{2^{i+j} (i+j+2)!} \left( -1 + \frac{i+j+1}{2i+1} \right), \quad \bar{A}_{i,j}^2 = \frac{-\pi a_{2i+1,2} b_{2j,2} \alpha_{i+j+1}}{2^{i+j} (i+j+2)!}, \\
 \bar{A}_{i,j}^3 &= \frac{-\pi a_{2i,2} a_{2j,1} \alpha_{i+j}}{(2^{i+j} (i+j+2)!} \left( i+j-1 + \frac{2(i+j)+1}{2i+1} \right), \quad \bar{A}_{i,j}^4 = \frac{-\pi (i+j) a_{2i+1,2} a_{2j+1,1}}{2^{i+j+1}}, \\
 &\quad \times \frac{\alpha_{i+j}}{(i+j+3)!}, \quad \bar{A}_{i,j}^5 = \frac{-\pi (i+j) b_{2i,2} b_{2j,1} \alpha_{i+j}}{(2^{i+j-1} (i+j+1)!}, \quad \bar{A}_{i,j}^6 = \frac{\pi a_{2i+1,1} b_{2j,1} \alpha_{i+j+1}}{2^{i+j} (i+j+2)!}, \\
 \bar{A}_{i,j}^7 &= \frac{3\pi q_{2i-2,1} b_{2j+1,2} \alpha_{i+j}}{2^{i+j} (i+j+2)!} \left( 1 - \frac{(i+j+1)(2i+2j+1)}{4i^2-1} \right), \quad \bar{A}_{i,j}^8 = \frac{3\pi b_{2i,2} q_{2j+1,1}}{2^{i+j+1}} \\
 &\quad \times \frac{\alpha_{i+j+1}}{(i+j+3)!}, \quad \bar{A}_{i,j}^9 = \frac{3\pi a_{2i+1,2} p_{2j,1} \alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1} (i+j+3)!}, \quad \bar{B}_j^5 = \frac{-3\pi j a_{0,2} a_{2j,1} \alpha_j}{2^j (j+2)!}, \\
 \bar{A}_{i,j}^{10} &= \frac{\pi a_{2i,2} p_{2j+1,1} \alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1} (i+j+3)!} \left( \frac{5i-j+3}{2i+1} \right), \quad \bar{B}_j^6 = \frac{-\pi (j-3) a_{0,2} p_{2j+1,1} \alpha_{j+1}}{2^{j+1} (j+3)!}, \\
 \bar{A}_{i,j}^{11} &= \frac{\pi a_{2i,1} q_{2j-2,1} \alpha_{i+j-1}}{2^{i+j} (i+j+2)!} \left( \frac{12i^3 + 24ij + 12i^2 - 3i - 3j - 24i^2 + 12j^2 + 6}{4i^2-1} \right), \\
 \bar{A}_{i,j}^{12} &= \frac{3\pi (i+j-1) a_{2i+1,1} q_{2j+1,1} \alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2} (i+j+4)!}, \quad \bar{A}_{i,j}^{13} = \frac{\pi (i+j-1) b_{2i,1} p_{2j,1} \alpha_{i+j}}{2^{i+j} (i+j+2)!}, \\
 \bar{A}_{i,j}^{14} &= \frac{\pi q_{2i-2,2} p_{2j+1,1} \alpha_{i+j}}{2^{i+j+1} (i+j+3)!} \times \left( \frac{-54i^2 + 6^2j + 12ij + 3i + 3j + 15}{4i^2-1} \right), \\
 \bar{A}_{i,j}^{15} &= \frac{15\pi q_{2i+1,1} p_{2j,1} \alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2} (i+j+4)!}, \quad \bar{B}_{i,j}^1 = \bar{A}_{i,j}^1, \quad \bar{B}_{i,j}^2 = \bar{A}_{i,j}^3, \quad \bar{B}_{i,j}^3 = \bar{A}_{i,j}^{10}, \\
 \bar{C}_{i,j}^1 &= \bar{A}_{i,j}^7, \quad \bar{C}_{i,j}^2 = \bar{A}_{i,j}^{11}, \quad \bar{C}_{i,j}^3 = \bar{A}_{i,j}^{14}, \quad \bar{H}_{i,j}^1 = \frac{-\pi a_{2i,2} b_{2j+1,2} \alpha_{i+j+1}}{2^{i+j} (i+j+2)!},
 \end{aligned}$$

## 2.4 Exemples d'applications

---

$$\begin{aligned}\overline{H}_{i,j}^2 &= \frac{-\pi(i+j)a_{2i,2}a_{2j,1}\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+1}(i+j+3)!}, & \overline{H}_{i,j}^3 &= \frac{3\pi q_{2i-2,1}b_{2j+1,2}\alpha_{i+j}}{2^{i+j}(i+j+2)!}, \\ \overline{H}_{i,j}^4 &= \frac{3\pi a_{2i,2}p_{2j+1,1}\alpha_{i+j+1}}{2^{i+j+2}(i+j+3)!}, & \overline{H}_{i,j}^5 &= \frac{6\pi a_{2i,1}q_{2j-2,1}\alpha_{i+j-1}}{2^{i+j+1}(i+j+2)!}(i+j-2) \\ \overline{H}_{i,j}^6 &= \frac{-15\pi p_{2i+1,1}q_{2j-2,1}\alpha_{i+j}}{2^{i+j+1}(i+j+3)!}.\end{aligned}$$

Alors on obtient

$$H(r) = r(\overline{Q}_1(r^2) + r^2\overline{Q}_2(r^2) + r^4\overline{Q}_3(r^2)).$$

Ceci termine la preuve du lemme 2.3.4.

**Preuve de la Proposition 2.3.1.** La Preuve suit par les Lemmes 2.3.1 – 2.3.4, et en considérant que  $F_{20}(r) = L(r) + H(r)$ .

**Preuve du Théorème 2.2.** Notons que pour trouver les racines positives de  $F_{20}(r)$  nous devons trouver les racines du polynôme de la variable  $r^2$  de degré  $\lambda = \max\{\Lambda_1, \Lambda_2 + 1, \Lambda_3 + 2\}$ . Cela donne que  $F_{20}(r)$  a au plus  $\lambda$  racines positives simple.

## 2.4 Exemples d'applications

Dans cette section, nous analysons deux exemples pour illustrer deux faits. d'une part, nous prouverons que la borne supérieure est atteinte, d'autre part et surtout, nous soulignerons l'intérêt réel de notre résultat par rapport aux résultats mentionnés dans [32] et [9] ( $\lambda$  est supérieure à la borne supérieure donné dans [32] et [9]). les calculs de cette section ont été vérifiés avec l'aide de Maple.

### Exemple 1.

1. Soit  $k = 6$ ,  $n = 5$ ,  $n_1 = 2$ ,  $l = 1$ ,  $m = 1$  et  $n_2 = 1$ . On considère le système (2.11), où

$$\begin{aligned}g_{11}(x) &= -x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{5665}{128}x^4 - x^5 + x^6, & f_{11}(x) &= 1 + \frac{819}{2}x, & g_{21}(x) &= \frac{491}{36}x, \\ f_{21}(x) &= 1 - x^2 + x^3 + 5x^4 - \frac{12091}{3276}x^5, & p_1(x) &= \frac{1}{8}x + 48x^2, & q_1(x) &= \frac{1}{3} + x, \\ g_{12}(x) &= x + x^3 + x^4 + \frac{6383125}{768}x^5, & f_{12}(x) &= 1 + x, & g_{22}(x) &= x, \\ f_{22}(x) &= 1 + x - 3x^2 - \frac{4250933}{384}x^4 + x^5, & p_2(x) &= x^2, & q_2(x) &= -1 + x.\end{aligned}$$

On a  $F_{10}$  est identiquement nulle, donc pour trouver les cycles limites , il faut résoudre l'équation  $F_{20}(r) = 0$  ce qui équivaut à

$$F_{20}(r) = \frac{r}{576} (r^8 - 30r^6 + 273r^4 - 820r^2 + 576) .$$

Cette équation a exactement quatre racines positives .

Dans [32], ce système lorsque  $p_i \equiv q_i \equiv 0$  pour chaque  $i = 1, 2$  a au plus trois racines positives en utilisant la méthode de moyennisation du second ordre.

2. Soit  $k = 4, n = 1, n_1 = 1, l = 1, m = 1$  et  $n_2 = 3$ . On considère le système (2.11), où

$$\begin{aligned} g_{11}(x) &= -x - \frac{41}{4}x^2 + x^3 - 3x^4, & f_{11}(x) &= 1 + \frac{16}{9}x, & g_{21}(x) &= -x, \\ f_{21}(x) &= 1 + x, & p_1(x) &= \frac{11}{3}x, & q_1(x) &= 1 + x - x^3, \\ g_{12}(x) &= x + x^3 + x^4, & f_{12}(x) &= 1 + x, & g_{22}(x) &= -x, \\ f_{22}(x) &= 1 + x, & p_2(x) &= -1 + x^2, & q_2(x) &= 1 + x - x^2 + x^3. \end{aligned}$$

Un calcul simple montre que  $F_{10} \equiv 0$  et

$$F_{20}(r) = -\frac{r}{36} (r^6 - 14r^4 + 49r^2 - 36) .$$

Cette équation a exactement trois racines positives .

Dans [32], ce système lorsque  $p_i \equiv q_i \equiv 0$  pour chaque  $i = 1, 2$  a au plus deux racines positives.

3. Soit  $k = 2, n = 3, n_1 = 1, l = 1, m = 1$  et  $n_2 = 3$ . On considère le système (2.11), où

$$\begin{aligned} g_{11}(x) &= -x + x^2, & f_{11}(x) &= x, & g_{21}(x) &= x, \\ f_{21}(x) &= 1 + x + 3x^2 + x^3, & p_1(x) &= x, & q_1(x) &= 1 + x - \frac{16}{9}x^3, \\ g_{12}(x) &= x + x^2, & f_{12}(x) &= x, & g_{22}(x) &= 1 + 2x, \\ f_{22}(x) &= 1 + x - \frac{2}{9}x^2 + x^3, & p_2(x) &= x, & q_2(x) &= \frac{32}{9} - \frac{53}{9}x^2 + x^3. \end{aligned}$$

On a  $F_{10}$  est identiquement nulle et avec un calcul facile on obtient

$$F_{20}(r) = -\frac{r}{36} (r^6 - 14r^4 + 49r^2 - 36) .$$

Cette équation a exactement trois racines positives.

Dans [32], ce système lorsque  $p_i \equiv q_i \equiv 0$  pour chaque  $i = 1, 2$  a au plus deux racines positives.

## 2.4 Exemples d'applications

---

### Exemple 2.

1. Soit  $k = 8$ ,  $n = 5$ ,  $n_1 = 1$ ,  $l = 1$ ,  $m = 1$  et  $n_2 = 1$ . On considère le système (2.11), où

$$\begin{aligned} g_{11}(x) &= -x + 5x^2 + x^3 + \frac{15}{26}x^4 - x^5 + \frac{1}{4}x^6 - \frac{2}{3339}x^8, & f_{11}(x) &= 8 + \frac{48}{5}x, & g_{21}(x) &= \frac{539}{30}x, \\ f_{21}(x) &= 1 + 8x - 2x^2 + 10x^3 + 5x^4 - \frac{340}{137}x^5, & p_1(x) &= 1 - \frac{48}{5}x, & q_1(x) &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x, \\ g_{12}(x) &= x + x^3 + x^5 + x^7, & f_{12}(x) &= x, & g_{22}(x) &= -x, \\ f_{22}(x) &= 1 - \frac{200}{9}x^2 + \frac{137}{4}x^4, & p_2(x) &= x, & q_2(x) &= 1 + x. \end{aligned}$$

On a  $F_{10}$  est identiquement nulle, pour déterminer les cycles limites, il faut résoudre l'équation  $F_{20}(r) = 0$  qui équivaut à

$$F_{20}(r) = \frac{r}{576} (r^8 - 30r^6 + 273r^4 - 820r^2 + 576).$$

Cette équation a exactement quatre racines positives.

Dans [9], ce système lorsque  $g_{1,i} \equiv f_{1,i} \equiv 0$  pour chaque  $i = 1, 2$  a au plus trois racines positives en utilisant la méthode de moyennisation du second ordre.

2. Soit  $k = 6$ ,  $n = 1$ ,  $n_1 = 1$ ,  $l = 1$ ,  $m = 1$  et  $n_2 = 1$ . On considère le système (2.11), où

$$\begin{aligned} g_{11}(x) &= -x + 4x^2 + x^3 + 3x^4 + x^6, & f_{11}(x) &= 1 + \frac{124}{45}x, & g_{21}(x) &= -x, \\ f_{21}(x) &= -1 + \frac{4}{45}x, & p_1(x) &= 1 + \frac{1}{9}x, & q_1(x) &= 1 + \frac{134}{27}x, \\ g_{12}(x) &= x + x^3 + \frac{1}{9}x^5, & f_{12}(x) &= x, & g_{22}(x) &= -x, \\ f_{22}(x) &= -3 + x, & p_2(x) &= x, & q_2(x) &= 1 + x. \end{aligned}$$

Un calcul simple montre que  $F_{10} \equiv 0$  et

$$F_{20}(r) = -\frac{r}{36} (r^6 - 14r^4 + 49r^2 - 36).$$

Cette équation a exactement trois racines positives.

Dans [9], ce système lorsque  $g_{1,i} \equiv f_{1,i} \equiv 0$  pour chaque  $i = 1, 2$  a au plus deux racines positives.

3. Soit  $k = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n_1 = 1$ ,  $l = 4$ ,  $m = 1$  et  $n_2 = 1$ . On considère le système (2.11), où

$$\begin{aligned} g_{11}(x) &= 1 + x, & f_{11}(x) &= 1 - 4x + \frac{16}{9}x^2 + x^3 - \frac{32}{27}x^4, & g_{21}(x) &= -x, \\ f_{21}(x) &= -1 + 3x^2, & p_1(x) &= \frac{8}{27}x, & q_1(x) &= 1 + x, \\ g_{12}(x) &= x, & f_{12}(x) &= x + x^2 + x^3 + x^4, & g_{22}(x) &= x, \\ f_{22}(x) &= 1 + \frac{214}{27}, & p_2(x) &= -x, & q_2(x) &= 1 - x. \end{aligned}$$

On a  $F_{10}$  est identiquement nulle et avec un calcul facile on obtient

$$F_{20}(r) = -\frac{r}{36} (r^6 - 14r^4 + 49r^2 - 36).$$

Cette équation a exactement trois racines positives.

Dans [9], ce système lorsque  $g_{1,i} \equiv f_{1,i} \equiv 0$  pour chaque  $i = 1, 2$  a au plus deux racines positives.

# Chapitre 3

## Cycles limites d'une classe de systèmes différentiels du type Kukles

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Resultats introductifs . . . . .</b>	<b>50</b>
<b>3.2</b>	<b>Application de la méthode de la moyennisation du premier et deuxième ordre . . . . .</b>	<b>50</b>
3.2.1	Preuve de l'énoncé (a) du théorème 3.1 . . . . .	51
3.2.2	Preuve de l'énoncé (b) du théorème 3.1 . . . . .	53
<b>3.3</b>	<b>Exemple d'application . . . . .</b>	<b>68</b>

---

Dans ce chapitre, on considère le problème de la recherche du nombre maximal de cycles limites qui peuvent être obtenus en perturbant le centre du système différentiel linéaire  $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$  des systèmes différentiels de Kukles généralisés en utilisant la théorie de la moyennisation du premier et deuxième ordre, respectivement. Les réponses à cette question seront données dans le théorème 3.1. Finalement on termine notre chapitre par un exemple illustratif.

Le résultat de ce chapitre est accepté pour publication dans le journal ” **Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics.**”

Intitulé : ” **Limit cycles for a class of Kukles type differential systems.** ”

### 3.1 Resultats introductifs

En 2019, Mellahi, Boufoul et Makhlouf [35], ont étudié par la méthode de la moyennisation le nombre de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire  $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$ , du système

$$\dot{x} = -y + l(x), \quad \dot{y} = x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0 y^3, \quad (3.1)$$

où  $l(x) = \epsilon l_1(x) + \epsilon^2 l_2(x)$ ,  $f(x) = \epsilon f_1(x) + \epsilon^2 f_2(x)$ ,  $g(x) = \epsilon g_1(x) + \epsilon^2 g_2(x)$ ,  $h(x) = \epsilon h_1(x) + \epsilon^2 h_2(x)$  et  $d_0 = \epsilon d_0^1 + \epsilon^2 d_0^2$  où  $l_k(x)$ ,  $f_k(x)$ ,  $g_k(x)$  et  $h_k(x)$  sont de degré respectivement  $m$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n_3$ ,  $d_0^k \neq 0$  est un nombre réel pour tout  $k = 1, 2$  et  $\epsilon$  est un paramètre petit.

Ils ont prouvé que le système (3.1) peut avoir  $\lambda_1 = \max \left\{ \left[ \frac{m-1}{2} \right], \left[ \frac{n_2}{2} \right], 1 \right\}$  cycles limites en utilisant la théorie de la moyennisation du premier ordre et  $\lambda_2 = \max \left\{ \left[ \frac{n_1}{2} \right] + \left[ \frac{n_2-1}{2} \right], \left[ \frac{n_1}{2} \right] + \left[ \frac{m}{2} \right] - 1, \left[ \frac{n_1+1}{2} \right], \left[ \frac{n_3+3}{2} \right], \left[ \frac{n_3}{2} \right] + \left[ \frac{m}{2} \right], \left[ \frac{n_2+1}{2} \right] + \left[ \frac{n_3}{2} \right], \left[ \frac{n_2}{2} \right], \left[ \frac{m-1}{2} \right], \left[ \frac{n_1-1}{2} \right] + \mu, \left[ \frac{n_3+1}{2} \right] + \mu, 1 \right\}$  en utilisant la méthode de la moyennisation du second ordre.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au nombre maximum de cycles limites des systèmes différentiels de Kukles plus généralisés que (3.1)

$$\dot{x} = -y + l(x)y^{2\alpha}, \quad \dot{y} = x - f(x)y^{2\alpha} - g(x)y^{2\alpha+1} - h(x)y^{2\alpha+2} - d_0 y^{2\alpha+3}, \quad (3.2)$$

où  $l(x) = \epsilon l_1(x) + \epsilon^2 l_2(x)$ ,  $f(x) = \epsilon f_1(x) + \epsilon^2 f_2(x)$ ,  $g(x) = \epsilon g_1(x) + \epsilon^2 g_2(x)$ ,  $h(x) = \epsilon h_1(x) + \epsilon^2 h_2(x)$  et  $d_0 = \epsilon d_0^1 + \epsilon^2 d_0^2$  où  $l_k(x)$ ,  $f_k(x)$ ,  $g_k(x)$  et  $h_k(x)$  sont de degré respectivement  $m$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n_3$ ,  $d_0^k \neq 0$  est un nombre réel pour tout  $k = 1, 2$ .  $\alpha \in \mathbb{N}$  et  $\epsilon$  est un paramètre petit. Nous montrons aussi dans ce chapitre que le résultat obtenu dans notre travail généralise un résultat récent présenté dans [35].

### 3.2 Application de la méthode de la moyennisation du premier et deuxième ordre

Dans cette section, on va appliquer la méthode de la moyennisation du premier et deuxième ordre afin d'étudier le nombre maximal de cycles limites qui bifurquent du centre linéaire  $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$ . Notre résultat principal est le suivant.

### 3.2 Application de la méthode de la moyennisation du premier et deuxième ordre

**Théorème 3.1.** Pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites du système différentiel de Kukles (3.2), qui bifurquent du centre linéaire  $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$  en utilisant la méthode de la moyennisation

(a) du premier ordre est

$$\lambda_1 = \max \left\{ \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor, 1 \right\}.$$

(b) du deuxième ordre est

$$\Lambda = \max\{\omega_1, \omega_2 + 1, \omega_3 + 2\},$$

où

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \max \left\{ \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_2-1}{2} \right\rfloor + \alpha, \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 1 + \alpha, \left\lfloor \frac{n_3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \alpha, \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor, \right. \\ &\quad \left. \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n_1-1}{2} \right\rfloor + \mu + \alpha, 1 \right\}, \\ \omega_2 &= \max \left\{ \left\lfloor \frac{n_1-1}{2} \right\rfloor + \alpha, \left\lfloor \frac{n_2-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_3}{2} \right\rfloor + \alpha, \left\lfloor \frac{n_3-1}{2} \right\rfloor + \mu + \alpha \right\}, \\ \omega_3 &= \left\lfloor \frac{n_3-1}{2} \right\rfloor + \alpha, \end{aligned}$$

où  $\mu = \min \left\{ \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor \right\}$ .

#### 3.2.1 Preuve de l'énoncé (a) du théorème 3.1

Afin d'appliquer la méthode de la moyennisation du premier ordre, nous écrivons le système (3.2) avec  $k = 1$ , en coordonnées polaire  $(\theta, r)$  où  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  et  $r > 0$ . Dans ce contexte, nous prenons

$$f_1(x) = \sum_{i=0}^{n_1} a_i x^i, \quad g_1(x) = \sum_{i=0}^{n_2} b_i x^i, \quad h_1(x) = \sum_{i=0}^{n_3} c_i x^i \quad \text{and} \quad l_1(x) = \sum_{i=0}^m e_i x^i, \quad (3.3)$$

Alors le système (3.2) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \left( r^{2\alpha} \cos \theta \sin^{2\alpha} \theta \sum_{i=0}^m e_i B_{i,0}(\theta) r^i - r^{2\alpha} \sin^{2\alpha+1} \theta P_1(\theta, r) \right), \\ \dot{\theta} = 1 - \frac{\varepsilon}{r} \left( r^{2\alpha} \sin^{2\alpha+1} \theta \sum_{i=0}^m e_i B_{i,0}(\theta) r^i + r^{2\alpha} \sin^{2\alpha} \theta \cos \theta P_1(\theta, r) \right), \end{cases} \quad (3.4)$$

où

$$P_1(\theta, r) = \sum_{i=0}^{n_1} a_i B_{i,0}(\theta) r^i + \sum_{i=0}^{n_2} b_i B_{i,1}(\theta) r^{i+1} + \sum_{i=0}^{n_3} c_i B_{i,2}(\theta) r^{i+2} + d_0^1 r^3 B_{0,3}(\theta).$$

et

$$B_{i,j}(\theta) = \cos^i \theta \sin^j \theta.$$



Maintenant, en prenant  $\theta$  comme une nouvelle variable indépendante le système (3.4) devient

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \epsilon \left( r^{2\alpha} \cos \theta \sin^{2\alpha} \theta \sum_{i=0}^m e_i B_{i,0}(\theta) r^i - r^{2\alpha} \sin^{2\alpha+1} \theta P_1(\theta, r) \right) + O(\epsilon^2) \\ &= \epsilon F_1(\theta, r) + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Par conséquent, à partir du théorème 1.2 nous devons étudier les racines positives de la fonction

$$\begin{aligned} 2\pi F_{10}(r) &= \sum_{i=0}^m e_i A_{i+1,2\alpha}(2\pi) r^{i+2\alpha} - \sum_{i=0}^{n_1} a_i A_{i,2\alpha+1}(2\pi) r^{i+2\alpha} - \sum_{i=0}^{n_2} b_i A_{i,2\alpha+2}(2\pi) \\ &\quad \times r^{i+2\alpha+1} - \sum_{i=0}^{n_3} c_i A_{i,2\alpha+3}(2\pi) r^{i+2\alpha+2} - d_0^1 r^{2\alpha+3} A_{0,2\alpha+4}(2\pi), \end{aligned} \quad (3.5)$$

où  $A_{i,j}(2\pi) = \int_0^{2\pi} B_{i,j}(\theta) d\theta$ .

Dans la proposition suivante, nous obtenons l'expression exacte de  $F_{10}(r)$ .

**Proposition 3.2.1.**

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{r^{2\alpha+1}}{4} \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{2i+1}{i+\alpha+1} e_{2i+1} r^{2i} \sigma_{2i,2\alpha} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \frac{2\alpha+1}{i+\alpha+1} b_{2i} r^{2i} \sigma_{2i,2\alpha} \right. \\ &\quad \left. - d_0 \frac{(2\alpha+3)(2\alpha+1)}{(2\alpha+4)(\alpha+1)} r^2 \sigma_{0,2\alpha} \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

où

$$\sigma_{2i,2\alpha} = \frac{(2\alpha-1)(2\alpha-3)\cdots 1}{(2\alpha+2i)(2\alpha+2i-4)\cdots(2i+2)} \binom{1}{2^{2i-1}} \binom{2i}{i}.$$

**Preuve.** A partir de(3.5) et en utilisant les integrales de l'annexe A, on obtient

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{r^{2\alpha+1}}{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} e_{2i+1} r^{2i} A_{2i+2,2\alpha}(2\pi) - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} b_{2i} r^{2i} A_{2i,2\alpha+2}(2\pi) \right. \\ &\quad \left. - d_0 r^2 A_{0,2\alpha+4}(2\pi) \right) \\ &= \frac{r^{2\alpha+1}}{4\pi} \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{2i+1}{i+\alpha+1} e_{2i+1} r^{2i} A_{2i,2\alpha}(2\pi) - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \frac{2\alpha+1}{i+\alpha+1} b_{2i} r^{2i} A_{2i,2\alpha}(2\pi) \right. \\ &\quad \left. - d_0 \frac{(2\alpha+3)(2\alpha+1)}{(2\alpha+4)(\alpha+1)} r^2 A_{0,2\alpha}(2\pi) \right). \end{aligned}$$

### 3.2 Application de la méthode de la moyennisation du premier et deuxième ordre

Ceci complète la preuve de la Proposition 3.2.1. D'après la proposition 3.2.1, le polynôme  $F_{10}(r)$  a au plus  $\{[\frac{m-1}{2}], [\frac{n_2}{2}], 1\}$  racines positives. Par conséquent, l'énoncé (a) du Théorème 3.1 est prouvé.

#### 3.2.2 Preuve de l'énoncé (b) du théorème 3.1

Nous allons appliquer la méthode de moyennisation du deuxième ordre au système (3.2). pour cela nous écrivons  $f_1(x)$ ,  $g_1(x)$ ,  $h_1(x)$ , et  $l_1(x)$  comme en (3.3), et

$$f_2(x) = \sum_{i=0}^{n_1} p_i x^i, \quad g_2(x) = \sum_{i=0}^{n_2} q_i x^i, \quad h_2(x) = \sum_{i=0}^{n_3} s_i x^i, \quad l_2(x) = \sum_{i=0}^m v_i x^i.$$

Le système (3.2) s'écrit en coordonnées polaire  $(\theta, r)$ ,  $r > 0$  sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{r} = \epsilon \left( r^{2\alpha} \cos \theta \sin^{2\alpha} \theta \sum_{i=0}^m e_i B_{i,0}(\theta) r^i - r^{2\alpha} \sin^{2\alpha+1} \theta P_1(\theta, r) \right) \\ \quad + \epsilon^2 \left( r^{2\alpha} \cos \theta \sin^{2\alpha} \theta \sum_{i=0}^m v_i B_{i,0}(\theta) r^i - r^{2\alpha} \sin^{2\alpha+1} \theta P_2(\theta, r) \right), \\ \dot{\theta} = 1 - \frac{\epsilon}{r} \left( r^{2\alpha} \sin^{2\alpha+1} \theta \sum_{i=0}^m e_i B_{i,0}(\theta) r^i + r^{2\alpha} \sin^{2\alpha} \theta \cos \theta P_1(\theta, r) \right) \\ \quad - \frac{\epsilon^2}{r} \left( r^{2\alpha} \sin^{2\alpha+1} \theta \sum_{i=0}^m v_i B_{i,0}(\theta) r^i + r^{2\alpha} \sin^{2\alpha} \theta \cos \theta P_2(\theta, r) \right), \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\text{où } P_2(\theta, r) = \sum_{i=0}^{n_1} p_i B_{i,0}(\theta) r^i + \sum_{i=0}^{n_2} q_i B_{i,1}(\theta) r^{i+1} + \sum_{i=0}^{n_3} s_i B_{i,2}(\theta) r^{i+2} + d_0^2 r^3 B_{0,3}(\theta).$$

Prenant  $\theta$  comme une nouvelle variable indépendante, ce système devient

$$\frac{dr}{d\theta} = \epsilon F_1(\theta, r) + \epsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\epsilon^3),$$

où

$$F_1(\theta, r) = r^{2\alpha} \cos \theta \sin^{2\alpha} \theta \sum_{i=0}^m e_i B_{i,0}(\theta) r^i - r^{2\alpha} \sin^{2\alpha+1} \theta P_1(\theta, r), \quad (3.8)$$

$$F_2(r, \theta) = I(r, \theta) + II(r, \theta), \quad (3.9)$$

où

$$I(r, \theta) = r^{2\alpha} \cos \theta \sin^{2\alpha} \theta \sum_{i=0}^m v_i B_{i,0}(\theta) r^i - r^{2\alpha} \sin^{2\alpha+1} \theta P_2(\theta, r), \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} II(r, \theta) = & \frac{1}{r} \left( r^{2\alpha} \cos \theta \sin^{2\alpha} \theta \sum_{i=0}^m e_i B_{i,0}(\theta) r^i - r^{2\alpha} \sin^{2\alpha+1} \theta P_1(\theta, r) \right) \times \\ & \left( r^{2\alpha} \sin^{2\alpha+1} \theta \sum_{i=0}^m e_i B_{i,0}(\theta) r^i + r^{2\alpha} \sin^{2\alpha} \theta \cos \theta P_1(\theta, r) \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Afin de caculer  $F_{20}(r)$ , prenant  $F_{10}(r) \equiv 0$ , ceci est équivalent à,

$$\left\{ \begin{array}{ll} e_{2i+1} = \frac{2\alpha+1}{2i+1} b_{2i}, & 0 \leq i \leq \mu \text{ and } i \neq 1, \\ b_2 = \frac{3}{2\alpha+1} e_3 - d_0(2\alpha+3), & i = 1, \\ b_{2i} = e_{2i+1} = 0, & \mu+1 \leq i \leq \lambda_1, \end{array} \right. \quad (3.12)$$

où  $\mu = \min\{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor, \}$ ,  $\lambda_1 = \max\{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor, 1\}$ .

Nous avons

$$\begin{aligned} F_1(\theta, r) = & + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} e_{2i} r^{2i+2\alpha} B_{2i+1, 2\alpha}(\theta) + e_3 r^{2\alpha+3} B_{4, 2\alpha}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_1} a_i B_{i, 2\alpha+1}(\theta) r^{i+2\alpha} \\ & - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} r^{2i+2\alpha+2} B_{2i+1, 2\alpha+2}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2\alpha+2} B_{i, 2\alpha+3}(\theta) - b_2 r^{2\alpha+3} \\ & \times B_{2, 2\alpha+2}(\theta) - d_0^1 r^{2\alpha+3} B_{0, 2\alpha+4}(\theta) - \sum_{i=0}^{\mu} b_{2i} r^{2i+2\alpha+1} B_{2i, 2\alpha}(\theta) \\ & + \sum_{i=0}^{\mu} \frac{2i+2\alpha+2}{2i+1} b_{2i} r^{2i+2\alpha+1} B_{2i+2, 2\alpha}(\theta). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Puis

$$\begin{aligned} \frac{dF_1(r, \theta)}{dr} = & + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (2i+2\alpha) e_{2i} r^{2i+2\alpha-1} B_{2i+1, 2\alpha}(\theta) + (2\alpha+3) e_3 r^{2\alpha+2} B_{4, 2\alpha}(\theta) \\ & - \sum_{i=0}^{n_1} (i+2\alpha) a_i r^{i+2\alpha-1} B_{i, 2\alpha+1}(\theta) - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2i+2\alpha+2) b_{2i+1} r^{2i+2\alpha+1} \\ & \times B_{2i+1, 2\alpha+2}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_3} (i+2\alpha+2) c_i r^{i+2\alpha+1} B_{i, 2\alpha+3}(\theta) - (2\alpha+3) b_2 \\ & \times r^{2\alpha+2} B_{2, 2\alpha+2}(\theta) - (2\alpha+3) d_0^1 r^{2\alpha+2} B_{0, 2\alpha+4}(\theta) - \sum_{i=0}^{\mu} \frac{2i+2\alpha+1}{2i+1} b_{2i} \\ & \times r^{2i+2\alpha} ((2i+1) B_{2i, 2\alpha+2}(\theta) - (2\alpha+1) B_{2i+2, 2\alpha}(\theta)). \end{aligned} \quad (3.14)$$

### 3.2 Application de la méthode de la moyennisation du premier et deuxième ordre

En utilisant les intégrales de l'annexe A, nous obtenons

$$\begin{aligned}
y(r, \theta) &= \int_0^\theta F_1(s, r) ds \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} e_{2i} r^{2i+2\alpha} A_{2i+1, 2\alpha}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_1} a_i A_{i, 2\alpha+1}(\theta) r^{i+2\alpha} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} \\
&\quad \times r^{2i+2\alpha+2} A_{2i+1, 2\alpha+2}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2\alpha+2} A_{i, 2\alpha+3}(\theta) - \sum_{i=0}^{\mu} b_{2i} \\
&\quad \times r^{2i+2\alpha+1} T_i(\theta) + e_3 r^{2\alpha+3} S(\theta) + d_0^1 r^{2\alpha+3} R(\theta),
\end{aligned} \tag{3.15}$$

où

$$\begin{aligned}
T_i(\theta) &= -\frac{1}{2\alpha + 2i} \left( B_{2i+1, 2\alpha-1}(\theta) + \sum_{l=1}^{\alpha-1} \gamma_{2i, 2\alpha} B_{2i+1, 2\alpha-2l-1}(\theta) \right) \\
&\quad + \frac{\delta_{2i, 2\alpha}}{2i} \left( B_{2i-1, 1}(\theta) + \sum_{l=1}^{i-1} \eta_{2i, 0} B_{2i-2l-1, 1}(\theta) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2i+1} \left( B_{2i+3, 2\alpha-1}(\theta) + \sum_{l=1}^{\alpha-1} \gamma_{2i+2, 2\alpha} B_{2i+3, 2\alpha-2l-1}(\theta) \right) \\
&\quad - \frac{\alpha+i+1}{(2i+1)(i+1)} \delta_{2i+2, 2\alpha} \left( B_{2i+1, 1}(\theta) + \sum_{l=1}^i \eta_{2i+2, 0} B_{2i-2l+1, 1}(\theta) \right), \\
S(\theta) &= \frac{3}{(2\alpha+1)(2\alpha+4)} \left( B_{3, 2\alpha-1}(\theta) + \sum_{l=1}^{\alpha} \gamma_{2, 2\alpha+2} B_{3, 2\alpha-2l-1}(\theta) \right) \\
&\quad - \frac{3}{2(2\alpha+1)} B_{1, 1}(\theta) - \frac{1}{(2\alpha+4)} \left( B_{5, 2\alpha-1}(\theta) + \sum_{l=1}^{\alpha-1} \gamma_{4, 2\alpha} B_{5, 2\alpha-2l-1}(\theta) \right) \\
&\quad + \frac{\delta_{4, 2\alpha}}{2} \left( B_{1, 1}(\theta) + \frac{1}{4} (B_{3, 1}(\theta) - B_{1, 3}(\theta)) \right), \\
R(\theta) &= (2\alpha+3) \left[ -\frac{1}{(2\alpha+4)} \left( B_{3, 2\alpha-1}(\theta) + \sum_{l=1}^{\alpha} \gamma_{2, 2\alpha+2} B_{3, 2\alpha-2l-1}(\theta) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\delta_{2, 2\alpha+2}}{2} B_{1, 1}(\theta) \right] - \frac{1}{(2\alpha+4)} \left( B_{1, 2\alpha+3}(\theta) + \sum_{l=1}^{\alpha+1} \gamma_{0, 2\alpha+4} B_{1, 2\alpha-2l+3}(\theta) \right),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\gamma_{i, 2\alpha} &= \frac{(2\alpha-1)(2\alpha-3)\cdots(2\alpha-2l+1)}{(2\alpha+i-2)(2\alpha+i-4)\cdots(2\alpha+i-2l)}, \quad \delta_{i, 2\alpha} = \frac{(2\alpha-1)(2\alpha-3)\cdots 1}{(2\alpha+i)(2\alpha+i-2)\cdots(i+2)}, \\
\eta_{2i, 0} &= \frac{(2i-1)(2i-3)\cdots(2i-2l+1)}{2^l(i-1)(i-2)\cdots(i-l)}.
\end{aligned}$$

Maintenant nous déterminons, la fonction correspondante  $F_{20}(r) = F_{20}^1(r) + F_{20}^2(r)$ , avec

$$F_{20}^1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} F_1(\theta, r) y(\theta, r) \quad \text{et} \quad F_{20}^2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(\theta, r) d\theta.$$

Afin d'obtenir  $F_{20}^1(r)$  il est nécessaire d'évaluer les intégrales de la forme  $\int_0^{2\pi} B_{p,q}(\theta) A_{i,j}(\theta) d\theta$ .

Dans le Lemme suivant, nous calculons ces intégrales.

**Lemme 3.2.1.** *Soit  $\Phi_{p,q}^{i,j}(2\pi) = \int_0^{2\pi} B_{p,q}(\theta) A_{i,j}(\theta) d\theta$ . Alors les égalités suivantes sont vérifiées :*

a) *L'intégrale  $\Phi_{p,q}^{2j+1,2\alpha}(2\pi)$  est nulle si  $p$  est impair ou  $q$  est pair et il est égale à*

$$-\frac{1}{2\alpha + 2j + 1} \left( A_{p+2j+2, q+2\alpha-1}(2\pi) + \sum_{l=1}^{\alpha-1} \gamma_{2j+1, 2\alpha} A_{p+2j+2, q+2\alpha-2l-1}(2\pi) \right) + \delta_{2j+1, 2\alpha} \Phi_{p,q}^{2j+1, 0}(2\pi),$$

où

$$\Phi_{p,q}^{2j+1, 0}(2\pi) = \frac{1}{2j + 1} \left( A_{p+2j, q+1}(2\pi) + \sum_{l=1}^{j-1} \frac{2^{l+1} j(j-1) \cdots (j-l)}{(2j-1)(2j-3) \cdots (2j-2l-1)} \times A_{p+2j-2l-2, q+1}(2\pi) \right)$$

si  $p$  est pair et  $q$  est impair.

b) *L'intégrale  $\Phi_{p,q}^{2j, 2\alpha+1}(2\pi)$  est nulle si  $p$  est pair ou  $q$  est impair et il est égale à*

$$-\frac{1}{2\alpha + 2j + 1} \left( A_{p+2j+1, q+2\alpha}(2\pi) + \sum_{l=1}^{\alpha-1} \beta_{2j, 2\alpha+1} A_{p+2j+1, q+2\alpha-2l}(2\pi) \right),$$

où

$$\beta_{2j, 2\alpha+1} = \frac{2^l \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-l+1)}{(2\alpha+2j-1)(2\alpha+2j-3) \cdots (2\alpha+2j-2l+1)},$$

if  $p$  est impair  $q$  est pair.

c) *L'intégrale  $\Phi_{p,q}^{2j+1, 2\alpha+1}(2\pi)$  est nulle si  $p$  est pair ou  $q$  est impair et il est égale à*

$$-\frac{1}{2\alpha + 2j + 2} \left( A_{p+2j+2, q+2\alpha}(2\pi) + \sum_{l=1}^{\alpha-1} \beta_{2j+1, 2\alpha+1} A_{p+2j+2, q+2\alpha-q-2l}(2\pi) \right),$$

où

$$\beta_{2j+1, 2\alpha+1} = \frac{2^l \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-l+1)}{(2\alpha+2j)(2\alpha+2j-2) \cdots (2\alpha+2j-2l+2)}$$

si  $p$  et  $q$  sont tous deux pairs.

### 3.2 Application de la méthode de la moyennisation du premier et deuxième ordre

f) L'intégrale  $S_{p,q}^{j,\alpha}(2\pi) = \int_0^{2\pi} B_{p,q}(\theta)T_j(\theta)d\theta = \Phi_{p,q}^{2j,2\alpha}(2\pi) - \frac{2j+2\alpha+2}{2j+1}\Phi_{p,q}^{2j+2,2\alpha}(2\pi)$  est nulle si  $p$  est pair ou  $q$  est pair et il est égale à

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\alpha+2j} \left( A_{p+2j+1,q+2\alpha-1}(2\pi) + \sum_{l=1}^{\alpha-1} \gamma_{2j,2\alpha} A_{p+2j+1,q+2\alpha-2l-1}(2\pi) \right) \\ & + \frac{\delta_{2j,2\alpha}}{2j} \left( A_{p+2j-1,q+1}(2\pi) + \sum_{l=1}^{j-1} \eta_{2j,0} A_{p+2j-2l-1,q+1}(2\pi) \right) \\ & + \frac{1}{2j+1} \left( A_{p+2j+3,q+2\alpha-1}(2\pi) + \sum_{l=1}^{\alpha-1} \gamma_{2j+2,2\alpha} A_{p+2j+3,q+2\alpha-2l-1}(2\pi) \right) \\ & - \frac{\alpha+j+1}{(2j+1)(j+1)} \delta_{2j+2,2\alpha} \left( A_{p+2j+1,q+1}(2\pi) + \sum_{l=1}^j \eta_{2j+2,0} A_{p+2j-2l-1,q+1}(2\pi) \right) \end{aligned}$$

si  $p$  et  $q$  sont tous deux impairs.

g) L'intégrale  $T_{p,q}^\alpha(2\pi) = \int_0^{2\pi} B_{p,q}(\theta)S(\theta)d\theta = \Phi_{p,q}^{4,2\alpha}(2\pi) - \frac{3}{2\alpha+1}\Phi_{p,q}^{2\alpha+2,2\alpha}(2\pi)$  est nulle si  $p$  pair ou  $q$  pair et il est égale à

$$\begin{aligned} & \frac{3}{(2\alpha+1)(2\alpha+4)} \left( A_{p+3,q+2\alpha-1}(2\pi) + \sum_{l=1}^{\alpha} \gamma_{2,2\alpha+2} A_{p+3,q+2\alpha-2l-1}(2\pi) \right) \\ & - \frac{3}{2(2\alpha+1)} A_{p+1,q+1}(2\pi) - \frac{1}{(2\alpha+4)} \left( A_{p+5,q+2\alpha-1}(2\pi) + \sum_{l=1}^{\alpha-1} \gamma_{4,2\alpha} A_{p+5,q+2\alpha-1}(2\pi) \right) \\ & + \frac{\delta_{4,2\alpha}}{2} \left( A_{p+1,q+1}(2\pi) + \frac{1}{4} (A_{p+3,q+1}(2\pi) - A_{p+1,q+3}(2\pi)) \right) \end{aligned}$$

si  $p$  et  $q$  sont tous deux impairs.

h) L'intégrale  $U_{p,q}^\alpha(2\pi) = \int_0^{2\pi} B_{p,q}(\theta)R(\theta)d\theta = (2\alpha+3)\Phi_{p,q}^{2,2\alpha+2}(2\pi) - \Phi_{p,q}^{0,2\alpha+4}(2\pi)$  est nulle si  $p$  est pair ou  $q$  est pair et il est égale à

$$\begin{aligned} & (2\alpha+3) \left[ -\frac{1}{(2\alpha+4)} \left( A_{p+3,q+2\alpha+1}(2\pi) + \sum_{l=1}^{\alpha} \gamma_{2,2\alpha+2} A_{p+3,q+2\alpha-2l+1}(2\pi) \right) \right. \\ & \left. + \frac{\delta_{2,2\alpha+2}}{2} A_{p+1,q+1}(2\pi) \right] - \frac{1}{(2\alpha+4)} \left( A_{p+1,q+2\alpha+3}(2\pi) + \sum_{l=1}^{\alpha+1} \gamma_{0,2\alpha+4} A_{p+1,q+2\alpha-2l+3}(2\pi) \right), \end{aligned}$$

si  $p$  et  $q$  sont tous deux impairs.

**Preuve.** En utilisant les intégrales de l'annexe A les six égalités se déduisent facilement par calcul direct.

**Lemme 3.2.2.**  $L'$  intégrale  $F_{20}^1(r)$  est donnée par

$$\begin{aligned}
 2\pi F_{20}^1(r) &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} H_{i,j,\alpha}^1(2\pi) r^{2i+2j+4\alpha-1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} H_{i,j,\alpha}^2(2\pi) r^{2i+2j+4\alpha+1} \\
 &+ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} H_{i,\alpha}^1(2\pi) r^{2i+4\alpha+3} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} H_{i,\alpha}^2(2\pi) r^{2i+4\alpha+5} \\
 &+ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} H_{i,j,\alpha}^3(2\pi) r^{2i+2j+4\alpha+1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\mu} H_{i,j,\alpha}^4(2\pi) \\
 &\times r^{2i+2j+4\alpha+1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} H_{i,j,\alpha}^5(2\pi) r^{2i+2j+4\alpha+3} \\
 &+ \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\mu} H_{i,j,\alpha}^6(2\pi) r^{2i+2j+4\alpha+3},
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

où

$$\begin{aligned}
 H_{i,j,\alpha}^1(2\pi) &= a_{2i} e_{2j} \left( -(2i+2\alpha) \phi_{2i,2\alpha+1}^{2j+1,2\alpha}(2\pi) - (2j+2\alpha) \phi_{2j+1,2\alpha}^{2i,2\alpha+1}(2\pi) \right), \\
 H_{i,j,\alpha}^2(2\pi) &= c_{2i} e_{2j} \left( -(2i+2\alpha+2) \phi_{2i,2\alpha+3}^{2j+1,2\alpha}(2\pi) - (2j+2\alpha) \phi_{2j+1,2\alpha}^{2i,2\alpha+3}(2\pi) \right), \\
 H_{i,\alpha}^1(2\pi) &= a_{2i+1} \left[ (2\alpha+3) \left( d_0^1(\phi_{0,2\alpha+4}^{2i+1,2\alpha+1}(2\pi) - (2\alpha+3) \phi_{2,2\alpha+2}^{2i+1,2\alpha+1}(2\pi)) \right) \right. \\
 &\quad \left. + e_3 \left( \phi_{4,2\alpha}^{2i+1,2\alpha+1}(2\pi) - \frac{3}{2\alpha+1} \phi_{2,2\alpha+2}^{2i+1,2\alpha+1}(2\pi) \right) \right] + (2i+2\alpha+1) \\
 &\quad \times \left( d_0^1 U_{2i+1,2\alpha+1}^\alpha(2\pi) - e_3 T_{2i+1,2\alpha+1}^\alpha(2\pi) \right), \\
 H_{i,\alpha}^2(2\pi) &= c_{2i+1} \left[ (2\alpha+3) \left( d_0^1(\phi_{0,2\alpha+4}^{2i+1,2\alpha+3}(2\pi) - (2\alpha+3) \phi_{2,2\alpha+2}^{2i+1,2\alpha+3}(2\pi)) \right) \right. \\
 &\quad \left. + e_3 \left( \phi_{4,2\alpha}^{2i+1,2\alpha+3}(2\pi) - \frac{3}{2\alpha+1} \phi_{2,2\alpha+2}^{2i+1,2\alpha+3}(2\pi) \right) \right] + (2i+2\alpha+3) \\
 &\quad \times \left( d_0^1 U_{2i+1,2\alpha+3}^\alpha(2\pi) - e_3 T_{2i+1,2\alpha+3}^\alpha(2\pi) \right), \\
 H_{i,j,\alpha}^3(2\pi) &= a_{2i} b_{2j+1} \left( (2i+2\alpha) \phi_{2i,2\alpha+1}^{2j+1,2\alpha+2}(2\pi) + (2j+2\alpha+2) \phi_{2j+1,2\alpha+2}^{2i,2\alpha+1}(2\pi) \right), \\
 H_{i,j,\alpha}^4(2\pi) &= a_{2i+1} b_{2j} \left( (2i+2\alpha+1) S_{2i+1,2\alpha+1}^{j,\alpha}(2\pi) + \frac{2j+2\alpha+1}{2j+1} \times \right. \\
 &\quad \left. ((2j+1) \phi_{2j,2\alpha+2}^{2i+1,2\alpha+1}(2\pi) - (2\alpha+1) \phi_{2j+2,2\alpha}^{2i+1,2\alpha+1}(2\pi)) \right), \\
 H_{i,j,\alpha}^5(2\pi) &= b_{2i+1} c_{2j} \left( (2i+2\alpha+2) \phi_{2i+1,2\alpha+2}^{2j,2\alpha+3}(2\pi) + (2j+2\alpha+2) \phi_{2j,2\alpha+3}^{2i+1,2\alpha+2}(2\pi) \right), \\
 H_{i,j,\alpha}^6(2\pi) &= c_{2i+1} b_{2j} \left( (2i+2\alpha+3) S_{2i+1,2\alpha+3}^{j,\alpha}(2\pi) + \frac{2j+2\alpha+1}{2j+1} ((2j+1) \times \right. \\
 &\quad \left. \phi_{2j,2\alpha+2}^{2i+1,2\alpha+3}(2\pi) - (2\alpha+1) \phi_{2j+2,2\alpha}^{2i+1,2\alpha+3}(2\pi)) \right),
 \end{aligned}$$

### 3.2 Application de la méthode de la moyennisation du premier et deuxième ordre

**Preuve.** A partir de (3.14) et (3.15) nous avons

$$\begin{aligned}
2\pi F_{20}^1(r) &= M_1(r) + M_2(r) + M_3(r) + M_4(r) + M_5(r) + M_6(r) + M_7(r), \\
M_1(r) &= \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (2i + 2\alpha) e_{2i} r^{2i+2\alpha-1} B_{2i+1,2\alpha}(\theta) y(\theta, r) d\theta, \\
M_2(r) &= \int_0^{2\pi} (2\alpha + 3) e_3 r^{2\alpha+2} \left( B_{4,2\alpha}(\theta) - \frac{3}{2\alpha + 1} B_{2,2\alpha+2}(\theta) \right) y(\theta, r) d\theta, \\
M_3(r) &= \int_0^{2\pi} - \sum_{i=0}^{n_1} (i + 2\alpha) a_i r^{i+2\alpha-1} B_{i,2\alpha+1}(\theta) y(\theta, r) d\theta, \\
M_4(r) &= \int_0^{2\pi} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2i + 2\alpha + 2) b_{2i+1} r^{2i+2\alpha+1} B_{2i+1,2\alpha+2}(\theta) y(\theta, r) d\theta, \\
M_5(r) &= \int_0^{2\pi} - \sum_{i=0}^{n_3} (i + 2\alpha + 2) c_i r^{i+2\alpha+1} B_{i,2\alpha+3}(\theta) y(\theta, r) d\theta, \\
M_6(r) &= \int_0^{2\pi} -(2\alpha + 3) d_0^1 r^{2\alpha+2} (B_{0,2\alpha+4}(\theta) - (2\alpha + 3) B_{2,2\alpha+2}(\theta)) y(\theta, r) d\theta, \\
M_7(r) &= \int_0^{2\pi} - \sum_{i=0}^{\mu} \frac{2i + 2\alpha + 1}{2i + 1} b_{2i} r^{2i+2\alpha} ((2i + 1) B_{2i,2\alpha+2}(\theta) - (2\alpha + 1) B_{2i+2,2\alpha}(\theta)) y(\theta, r) d\theta.
\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 3.2.1 et les intégrales de l'annexe A, on a des 49 produits entre les différentes sommes seulement 20 ne seront pas nuls après l'intégration par rapport à  $\theta$  entre 0 et  $2\pi$ . Donc les termes qui contribuent à  $F_{20}^1(r)$  sont

$$\begin{aligned}
(a_1) &= \int_0^{2\pi} \left( - \sum_{i=0}^{n_1} (i + 2\alpha) a_i r^{i+2\alpha-1} B_{i,2\alpha+1}(\theta) \right) \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} e_{2i} r^{2i+2\alpha} A_{2i+1,2\alpha}(\theta) \right) d\theta \\
&= - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (2i + 2\alpha) a_{2i} e_{2j} r^{2i+2j+4\alpha-1} \phi_{2i,2\alpha+1}^{2j+1,2\alpha}(2\pi). \\
(a_2) &= \int_0^{2\pi} \left( - \sum_{i=0}^{n_3} (i + 2\alpha + 2) c_i r^{i+2\alpha+1} B_{i,2\alpha+3}(\theta) \right) \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} e_{2i} r^{2i+2\alpha} A_{2i+1,2\alpha}(\theta) \right) d\theta \\
&= - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (2i + 2\alpha + 2) c_{2i} e_{2j} r^{2i+2j+4\alpha+1} \phi_{2i,2\alpha+3}^{2j+1,2\alpha}(2\pi). \\
(a_3) &= \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (2i + 2\alpha) e_{2i} r^{2i+2\alpha-1} B_{2i+1,2\alpha}(\theta) \right) \left( - \sum_{i=0}^{n_1} a_i A_{i,2\alpha+1}(\theta) r^{i+2\alpha} \right) d\theta
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} (2i + 2\alpha) e_{2i} a_{2j} r^{2i+2j+4\alpha-1} \phi_{2i+1, 2\alpha}^{2j, 2\alpha+1}(2\pi). \\
 (a_4) &= \int_0^{2\pi} \left( (2\alpha + 3) e_3 r^{2\alpha+2} \left( B_{4, 2\alpha}(\theta) - \frac{3}{2\alpha + 1} B_{2, 2\alpha+2}(\theta) \right) \right) \\
 &\quad \times \left( - \sum_{i=0}^{n_1} a_i A_{i, 2\alpha+1}(\theta) r^{i+2\alpha} \right) d\theta \\
 &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} (2\alpha + 3) e_3 a_{2j+1} r^{2i+4\alpha+3} \left( \phi_{4, 2\alpha}^{2j+1, 2\alpha+1}(2\pi) - \frac{3}{2\alpha + 1} \phi_{2, 2\alpha+2}^{2j+1, 2\alpha+1}(2\pi) \right). \\
 (a_5) &= \int_0^{2\pi} \left( - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2i + 2\alpha + 2) b_{2i+1} r^{2i+2\alpha+1} B_{2i+1, 2\alpha+2}(\theta) \right) \\
 &\quad \times \left( - \sum_{i=0}^{n_1} a_i A_{i, 2\alpha+1}(\theta) r^{i+2\alpha} \right) d\theta \\
 &= - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} (2i + 2\alpha) b_{2i+1} a_{2j} r^{2i+2j+4\alpha+1} \phi_{2i, 2\alpha+2}^{2j, 2\alpha+1}(2\pi). \\
 (a_6) &= \int_0^{2\pi} \left( -(2\alpha + 3) d_0^1 r^{2\alpha+2} (B_{0, 2\alpha+4}(\theta) - (2\alpha + 3) B_{2, 2\alpha+2}(\theta)) \right) \\
 &\quad \times \left( - \sum_{i=0}^{n_1} a_i A_{i, 2\alpha+1}(\theta) r^{i+2\alpha} \right) d\theta \\
 &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} (2\alpha + 3) d_0^1 a_{2j+1} r^{2j+4\alpha+3} \left( \phi_{0, 2\alpha+4}^{2j+1, 2\alpha+1}(2\pi) - (2\alpha + 3) \phi_{2, 2\alpha+2}^{2j+1, 2\alpha+1}(2\pi) \right). \\
 (a_7) &= \int_0^{2\pi} \left( - \sum_{i=0}^{\mu} \frac{2i + 2\alpha + 1}{2i + 1} b_{2i} r^{2i+2\alpha} \left( (2i + 1) B_{2i, 2\alpha+2}(\theta) - (2\alpha + 1) B_{2i+2, 2\alpha}(\theta) \right) \right) \\
 &\quad \times \left( - \sum_{i=0}^{n_1} a_i A_{i, 2\alpha+1}(\theta) r^{i+2\alpha} \right) d\theta \\
 &= \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \frac{2i + 2\alpha + 1}{2i + 1} b_{2i} a_{2j+1} r^{2i+2j+4\alpha+1} \left( (2i + 1) \phi_{2i, 2\alpha+2}^{2j+1, 2\alpha+1}(2\pi) \right. \\
 &\quad \left. - (2\alpha + 1) \phi_{2i+2, 2\alpha}^{2j+1, 2\alpha+1}(2\pi) \right). \\
 (a_8) &= \int_0^{2\pi} \left( - \sum_{i=0}^{n_1} (i + 2\alpha) a_i r^{i+2\alpha-1} B_{i, 2\alpha+1}(\theta) \right) \left( - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} r^{2i+2\alpha+2} \right. \\
 &\quad \left. \times A_{2i+1, 2\alpha+2}(\theta) \right) d\theta = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2i + 2\alpha) a_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+4\alpha+1} \phi_{2i, 2\alpha+1}^{2j+1, 2\alpha+2}(2\pi).
 \end{aligned}$$

### 3.2 Application de la méthode de la moyennisation du premier et deuxième ordre

$$\begin{aligned}
(a_9) &= \int_0^{2\pi} \left( - \sum_{i=0}^{n_3} (i + 2\alpha + 2) c_i r^{i+2\alpha+1} B_{i,2\alpha+3}(\theta) \right) \left( - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} r^{2i+2\alpha+2} \right. \\
&\quad \times A_{2i+1,2\alpha+2}(\theta) \left. \right) d\theta = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2i + 2\alpha + 2) c_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+4\alpha+3} \phi_{2i,2\alpha+3}^{2j+1,2\alpha+2}(2\pi). \\
(a_{10}) &= \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (2i + 2\alpha) e_{2i} r^{2i+2\alpha-1} B_{2i+1,2\alpha}(\theta) \right) \left( - \sum_{j=0}^{n_3} c_j r^{i+2\alpha+2} A_{i,2\alpha+3}(\theta) \right) d\theta \\
&= - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} (2i + 2\alpha) e_{2i} c_{2j} r^{2i+2j+4\alpha+1} \phi_{2i+1,2\alpha}^{2j,2\alpha+3}(2\pi). \\
(a_{11}) &= \int_0^{2\pi} \left( (2\alpha + 3) e_3 r^{2\alpha+2} \left( B_{4,2\alpha}(\theta) - \frac{3}{2\alpha + 1} B_{2,2\alpha+2}(\theta) \right) \right) \\
&\quad \times \left( - \sum_{j=0}^{n_3} c_j r^{i+2\alpha+2} A_{i,2\alpha+3}(\theta) \right) d\theta \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} (2\alpha + 3) e_3 c_{2j+1} r^{2i+4\alpha+5} \left( \phi_{4,2\alpha}^{2j+1,2\alpha+3}(2\pi) - \frac{3}{2\alpha + 1} \phi_{2,2\alpha+2}^{2j+1,2\alpha+3}(2\pi) \right). \\
(a_{12}) &= \int_0^{2\pi} \left( - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2i + 2\alpha + 2) b_{2i+1} r^{2i+2\alpha+1} B_{2i+1,2\alpha+2}(\theta) \right) \\
&\quad \times \left( - \sum_{j=0}^{n_3} c_j r^{i+2\alpha+2} A_{i,2\alpha+3}(\theta) \right) d\theta \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} (2i + 2\alpha + 2) b_{2i+1} c_{2j} r^{2i+2j+4\alpha+3} \phi_{2i+1,2\alpha+2}^{2j,2\alpha+3}(2\pi). \\
(a_{13}) &= \int_0^{2\pi} \left( -(2\alpha + 3) d_0^1 r^{2\alpha+2} (B_{0,2\alpha+4}(\theta) - (2\alpha + 3) B_{2,2\alpha+2}(\theta)) \right) \\
&\quad \times \left( - \sum_{j=0}^{n_3} c_j r^{i+2\alpha+2} A_{i,2\alpha+3}(\theta) \right) d\theta \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} (2\alpha + 3) d_0^1 c_{2j+1} r^{2j+4\alpha+5} \left( \phi_{0,2\alpha+4}^{2j+1,2\alpha+3}(2\pi) - (2\alpha + 3) \phi_{2,2\alpha+2}^{2j+1,2\alpha+3}(2\pi) \right). \\
(a_{14}) &= \int_0^{2\pi} \left( - \sum_{i=0}^{\mu} \frac{2i + 2\alpha + 1}{2i + 1} b_{2i} r^{2i+2\alpha} ((2i + 1) B_{2i,2\alpha+2}(\theta) - (2\alpha + 1) B_{2i+2,2\alpha}(\theta)) \right) \\
&\quad \times \left( - \sum_{j=0}^{n_3} c_j r^{i+2\alpha+2} A_{i,2\alpha+3}(\theta) \right) d\theta
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \frac{2i+2\alpha+1}{2i+1} b_{2i} c_{2j+1} r^{2i+2j+4\alpha+3} \left( (2i+1) \phi_{2i,2\alpha+2}^{2j+1,2\alpha+3}(2\pi) \right. \\
&\quad \left. - (2\alpha+1) \phi_{2i+2,2\alpha}^{2j+1,2\alpha+3}(2\pi) \right). \\
(a_{15}) &= \int_0^{2\pi} \left( - \sum_{i=0}^{n_1} (i+2\alpha) a_i r^{i+2\alpha+1} B_{i,2\alpha+1}(\theta) \right) \left( - \sum_{j=0}^{\mu} b_{2j} r^{j+2\alpha+1} T_j(\theta) \right) d\theta \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\mu} (2i+2\alpha+1) a_{2i+1} b_{2j} r^{2i+2j+4\alpha+1} \left( \phi_{2i+1,2\alpha+1}^{2j,2\alpha} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2j+2\alpha+2}{2j+1} \phi_{2i+1,2\alpha+1}^{2j+2,2\alpha}(2\pi) \right). \\
(a_{16}) &= \int_0^{2\pi} \left( - \sum_{i=0}^{n_3} (i+2\alpha+2) c_i r^{i+2\alpha+1} B_{i,2\alpha+3}(\theta) \right) \left( - \sum_{j=0}^{\mu} b_{2j} r^{j+2\alpha+1} T_j(\theta) \right) d\theta \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\mu} (2i+2\alpha+3) c_{2i+1} b_{2j} r^{2i+2j+4\alpha+3} \left( \phi_{2i+1,2\alpha+3}^{2j,2\alpha} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2j+2\alpha+2}{2j+1} \phi_{2i+1,2\alpha+3}^{2j+2,2\alpha}(2\pi) \right). \\
(a_{17}) &= \int_0^{2\pi} \left( - \sum_{i=0}^{n_1} (i+2\alpha) a_i r^{i+2\alpha-1} B_{i,2\alpha+1}(\theta) \right) (e_3 r^{2\alpha+3} S(\theta)) d\theta \\
&= - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} (2i+2\alpha+1) a_{2i+1} e_3 r^{2i+2j+4\alpha+3} \left( \phi_{2i+1,2\alpha+1}^{4,2\alpha}(2\pi) - \frac{3}{2\alpha+1} \phi_{2i+1,2\alpha+1}^{2,2\alpha+2}(2\pi) \right). \\
(a_{18}) &= \int_0^{2\pi} \left( - \sum_{i=0}^{n_3} (i+2\alpha+2) c_i r^{i+2\alpha+1} B_{i,2\alpha+3}(\theta) \right) (e_3 r^{2\alpha+3} S(\theta)) d\theta \\
&= - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} (2i+2\alpha+3) c_{2i+1} e_3 r^{2i+2j+4\alpha+5} \left( \phi_{2i+1,2\alpha+3}^{4,2\alpha}(2\pi) - \frac{3}{2\alpha+1} \phi_{2i+1,2\alpha+3}^{2,2\alpha+2}(2\pi) \right). \\
(a_{19}) &= \int_0^{2\pi} \left( - \sum_{i=0}^{n_1} (i+2\alpha) a_i r^{i+2\alpha-1} B_{i,2\alpha+1}(\theta) \right) (d_0^1 r^{2\alpha+3} R(\theta)) d\theta \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} (2i+2\alpha+1) a_{2i+1} d_0^1 r^{2i+2j+4\alpha+3} \left( \phi_{2i+1,2\alpha+1}^{0,2\alpha+4}(2\pi) - (2\alpha+3) \phi_{2i+1,2\alpha+1}^{2,2\alpha+2}(2\pi) \right). \\
(a_{20}) &= \int_0^{2\pi} \left( - \sum_{i=0}^{n_3} (i+2\alpha+2) c_i r^{i+2\alpha+1} B_{i,2\alpha+3}(\theta) \right) (d_0^1 r^{2\alpha+3} R(\theta)) d\theta \\
&= - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} (2i+2\alpha+3) c_{2i+1} d_0^1 r^{2i+2j+4\alpha+5} \left( \phi_{2i+1,2\alpha+3}^{0,2\alpha+4}(2\pi) - (2\alpha+3) \phi_{2i+1,2\alpha+3}^{2,2\alpha+2}(2\pi) \right).
\end{aligned}$$

### 3.2 Application de la méthode de la moyennisation du premier et deuxième ordre

Alors la somme des intégrales de  $(a_1)$  à  $(a_{20})$  est le polynôme (3.16). D'où le Lemme 3.2.2 est prouvé.

**Lemme 3.2.3.** *L'intégrale  $F_{20}^2(r)$  est donnée par*

$$\begin{aligned}
2\pi F_{20}^2(r) = & \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor} M_{i,\alpha}^1(2\pi) r^{2i+2\alpha+1} - \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor} M_{i,\alpha}^2(2\pi) r^{2i+2\alpha+1} + M_{\alpha}^3(2\pi) r^{2\alpha+3} \\
& + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} M_{i,j,\alpha}^1(2\pi) r^{2i+2j+4\alpha-1} + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n_3}{2} \right\rfloor} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} M_{i,j,\alpha}^2(2\pi) r^{2i+2j+4\alpha+1} \\
& + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n_1-1}{2} \right\rfloor} M_{i,\alpha}^4(2\pi) r^{2i+4\alpha+3} + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n_3-1}{2} \right\rfloor} M_{i,\alpha}^5(2\pi) r^{2i+4\alpha+5} \\
& + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n_2-1}{2} \right\rfloor} M_{i,j,\alpha}^3(2\pi) r^{2i+2j+4\alpha+1} + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n_1-1}{2} \right\rfloor} \sum_{j=0}^{\mu} M_{i,j,\alpha}^4(2\pi) r^{2i+2j+4\alpha+1} \\
& + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n_2-1}{2} \right\rfloor} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n_3}{2} \right\rfloor} M_{i,j,\alpha}^5(2\pi) r^{2i+2j+4\alpha+3} + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n_3-1}{2} \right\rfloor} \sum_{j=0}^{\mu} M_{i,j,\alpha}^6(2\pi) r^{2i+2j+4\alpha+3},
\end{aligned} \tag{3.18}$$

où

$$\begin{aligned}
M_{i,\alpha}^1(2\pi) &= \frac{2i+1}{i+\alpha+1} v_{2i+1} A_{2i,2\alpha}(2\pi), \quad M_{i,\alpha}^2(2\pi) = -\frac{2\alpha+1}{i+\alpha+1} q_{2i} A_{2i,2\alpha}(2\pi), \\
M_{\alpha}^3(2\pi) &= -d_0^2 \frac{(2\alpha+3)(2\alpha+1)}{(2\alpha+4)(\alpha+1)} A_{0,2\alpha}(2\pi), \quad M_{i,j,\alpha}^1(2\pi) = a_{2i} e_{2j} \frac{i+j-2\alpha}{i+j+2\alpha+1} A_{2i+2j,4\alpha}(2\pi) \\
M_{i,j,\alpha}^2(2\pi) &= c_{2i} e_{2j} \frac{i+j-2\alpha-1}{i+j+2\alpha+2} A_{2i+2j,4\alpha+2}(2\pi), \quad M_{i,j,\alpha}^3(2\pi) = -2a_{2i} b_{2j+1} A_{2i+2j+2,4\alpha+2}(2\pi) \\
M_{i,j,\alpha}^4(2\pi) &= a_{2i+1} b_{2j} \left( \frac{6j\alpha+j+4\alpha^2+4\alpha-2\alpha i-i}{i+j+2\alpha+2} A_{2i+2j+2,4\alpha}(2\pi) \right), \quad M_{i,j,\alpha}^5(2\pi) = -2b_{2i+1} c_{2j} \\
&\times A_{2i+2j+2,4\alpha+4}(2\pi), \quad M_{i,\alpha}^4(2\pi) = a_{2i+1} \left[ 2d_0^1 \left( \frac{2i\alpha+3i+\alpha+3}{i+2\alpha+3} A_{2i+2,4\alpha+2}(2\pi) \right) \right. \\
&+ e_3 \left( \frac{2i\alpha+i-10\alpha-4\alpha^2-1}{(2\alpha+1)(i+2\alpha+3)} A_{2i+4,4\alpha}(2\pi) \right) \left. \right], \quad M_{i,\alpha}^5(2\pi) = c_{2i+1} \left[ 2d_0^1 \left( \frac{2i\alpha+3i+\alpha+2}{i+2\alpha+4} \right. \right. \\
&\times A_{2i+2,4\alpha+4}(2\pi) \left. \left. + e_3 \left( \frac{2i\alpha+i-12\alpha-4\alpha^2-8}{(2\alpha+1)(i+2\alpha+4)} A_{2i+4,4\alpha+2}(2\pi) \right) \right] \right], \\
M_{i,j,\alpha}^6(2\pi) &= c_{2i+1} b_{2j} \left( \frac{6j\alpha+5j+4\alpha^2+6\alpha-2\alpha i-i+3}{i+j+2\alpha+2} A_{2i+2j+2,4\alpha+2}(2\pi) \right).
\end{aligned}$$

**preuve.** De (3.9) on a  $2\pi F_{20}^2(r) = L(r) + H(r)$ ,  
où  $L(r) = \int_0^{2\pi} I(r, \theta) d\theta$  et  $H(r) = \int_0^{2\pi} II(r, \theta) d\theta$ .

Pour simplifier l'expression du polynôme  $L(r)$ , on utilise les intégrales de l'annexe A.

A partir de la relation (3.10) nous avons

$$\begin{aligned} L(r) &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} v_{2i+1} r^{2i+2\alpha+1} \int_0^{2\pi} B_{2i+2, 2\alpha}(\theta) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} q_{2i} r^{2i+2\alpha+1} \int_0^{2\pi} B_{i, 2\alpha+2}(\theta) \\ &\quad + d_0^2 r^{2\alpha+3} \int_0^{2\pi} B_{0, 2\alpha+4} d\theta \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{2i+1}{2i+2\alpha+2} v_{2i+1} r^{2i+2\alpha+1} A_{2i, 2\alpha}(2\pi) - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \frac{2\alpha+1}{2i+2\alpha+2} q_{2i} r^{2i+2\alpha+1} A_{2i, 2\alpha}(2\pi) \\ &\quad - d_0^2 \frac{(2\alpha+3)(2\alpha+1)}{(2\alpha+4)(2\alpha+2)} r^{2\alpha+3} A_{0, 2\alpha}(2\pi). \end{aligned}$$

Pour une expression explicite du polynôme  $H(r)$ , d'abord, nous avons

$$\begin{aligned} II(r, \theta) &= \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} e_{2i} r^{2i+2\alpha-1} B_{2i+1, 2\alpha}(\theta) + e_3 r^{2\alpha+2} B_{4, 2\alpha}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^{i+2\alpha-1} B_{i, 2\alpha+1}(\theta) \right. \\ &\quad - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} r^{2i+2\alpha+1} B_{2i+1, 2\alpha+2}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2\alpha+1} B_{i, 2\alpha+3}(\theta) - \left( \frac{3}{2\alpha+1} e_3 \right. \\ &\quad \left. - d_0^1 (2\alpha+3) \right) r^{2\alpha+2} B_{2, 2\alpha+2} - d_0^1 r^{2\alpha+2} B_{0, 2\alpha+4} - \sum_{i=0}^{\mu} \frac{b_{2i}}{2i+1} r^{2i+2\alpha} ((2i+1) \\ &\quad \times B_{2i, 2\alpha+2}(\theta) - (2\alpha+1) B_{2i+2, 2\alpha}(\theta)) \times \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} e_{2i} r^{2i+2\alpha} B_{2i, 2\alpha+1}(\theta) + \sum_{i=0}^{\mu} e_{2i+1} \right. \\ &\quad \times r^{2i+2\alpha+1} B_{2i+1, 2\alpha+1}(\theta) + e_3 r^{2\alpha+3} B_{3, 2\alpha+1} + \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^{i+2\alpha} B_{i+1, 2\alpha}(\theta) + \sum_{i=0}^{\mu} b_{2i} \\ &\quad \times r^{2i+2\alpha+1} B_{2i+1, 2\alpha+1}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2\alpha+2} B_{i+1, 2\alpha+2}(\theta) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} e_{2i} r^{2i+2\alpha} \\ &\quad \left. \times B_{2i, 2\alpha+1}(\theta) + b_2 r^{2\alpha+3} B_{3, 2\alpha+1}(\theta) + d_0^1 r^{2\alpha+3} B_{1, 2\alpha+3} \right). \end{aligned}$$

### 3.2 Application de la méthode de la moyennisation du premier et deuxième ordre

En utilisant les intégrales de l'annexe A, on a des 42 produits entre les différentes sommes seulement 18 ne seront pas nuls après l'intégration par rapport à  $\theta$  entre 0 et  $2\pi$ . Donc les termes de  $H(r)$  qui contribuent à  $F_{20}^2(r)$  sont

$$\begin{aligned}
(b_1) &= \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} e_{2i} r^{2i+2\alpha-1} B_{2i+1,2\alpha}(\theta) \right) \left( \sum_{j=0}^{n_1} a_j r^{j+2\alpha} B_{j+1,2\alpha}(\theta) \right) d\theta \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} e_{2i} a_{2j} r^{2i+2j+4\alpha-1} A_{2i+2j+2,4\alpha}(2\pi). \\
(b_2) &= \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} e_{2i} r^{2i+2\alpha-1} B_{2i+1,2\alpha}(\theta) \right) \left( \sum_{j=0}^{n_3} c_j r^{j+2\alpha+2} B_{j+1,2\alpha+2}(\theta) \right) d\theta \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} e_{2i} c_{2j} r^{2i+2j+4\alpha+1} A_{2i+2j+2,4\alpha+2}(2\pi). \\
(b_3) &= \int_0^{2\pi} \left( e_3 r^{2\alpha+2} \left( B_{4,2\alpha}(\theta) - \frac{3}{2\alpha+1} B_{2,2\alpha+2}(\theta) \right) \right) \left( \sum_{j=0}^{n_1} a_j r^{j+2\alpha} B_{j+1,2\alpha}(\theta) \right) d\theta \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} e_3 a_{2j+1} r^{2j+4\alpha+3} \left( A_{2j+6,4\alpha}(2\pi) - \frac{3}{2\alpha+1} A_{2j+4,4\alpha+2}(2\pi) \right). \\
(b_4) &= \int_0^{2\pi} \left( e_3 r^{2\alpha+2} \left( B_{4,2\alpha}(\theta) - \frac{3}{2\alpha+1} B_{2,2\alpha+2}(\theta) \right) \right) \left( \sum_{j=0}^{n_3} c_j r^{j+2\alpha+2} B_{j+1,2\alpha+2}(\theta) \right) d\theta \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} e_3 c_{2j+1} r^{2j+4\alpha+5} \left( A_{2j+6,4\alpha+2}(2\pi) - \frac{3}{2\alpha+1} A_{2j+4,4\alpha+4}(2\pi) \right). \\
(b_5) &= \int_0^{2\pi} \left( - \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^{i+2\alpha-1} B_{i,2\alpha+1}(\theta) \right) \left( \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} e_{2j} r^{2j+2\alpha} B_{2j,2\alpha+1}(\theta) \right) d\theta \\
&= - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} a_{2i} e_{2j} r^{2i+2j+4\alpha-1} A_{2i+2j,4\alpha+2}(2\pi). \\
(b_6) &= \int_0^{2\pi} \left( - \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^{i+2\alpha-1} B_{i,2\alpha+1}(\theta) \right) \left( \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2j+1} r^{2j+2\alpha+2} B_{2j+2,2\alpha+1}(\theta) \right) d\theta \\
&= - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} a_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+4\alpha+1} A_{2i+2j+2,4\alpha+2}(2\pi).
\end{aligned}$$

$$(b_7) = \int_0^{2\pi} \left( - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} a_i r^{i+2\alpha-1} B_{i,2\alpha+1}(\theta) \right) \left( \sum_{j=0}^{\mu} \frac{2j+2\alpha+2}{2j+1} b_{2j} r^{2j+2\alpha+1} B_{2j+1,2\alpha+1}(\theta) \right) d\theta$$

$$= - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\mu} \frac{2j+2\alpha+2}{2j+1} a_{2i+1} b_{2j} r^{2i+2j+4\alpha+1} A_{2i+2j+2,4\alpha+2}(2\pi)$$

$$(b_8) = \int_0^{2\pi} \left( - \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^{i+2\alpha-1} B_{i,2\alpha+1}(\theta) \right) \left( \left( \frac{2\alpha+4}{2\alpha+1} \right) e_3 B_{3,2\alpha+1}(\theta) + d_0^1 \right. \\ \left. \times (B_{1,2\alpha+3}(\theta) - (2\alpha+3) B_{3,2\alpha+1}(\theta)) r^{2\alpha+3} \right) d\theta = - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} r^{2i+4\alpha+3} \times \\ \times \left[ \left( \left( \frac{2\alpha+4}{2\alpha+1} \right) e_3 - d_0^1 (2\alpha+3) \right) A_{2i+4,4\alpha+2}(2\pi) + d_0^1 A_{2i+2,4\alpha+4}(2\pi) \right].$$

$$(b_9) = \int_0^{2\pi} \left( - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2\alpha+1} B_{i,2\alpha+3}(\theta) \right) \left( \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} e_{2j} r^{2j+2\alpha} B_{2j,2\alpha+1}(\theta) \right) d\theta$$

$$= - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} c_{2i} e_{2j} r^{2i+2j+4\alpha+1} A_{2i+2j,4\alpha+4}(2\pi).$$

$$(b_{10}) \int_0^{2\pi} \left( - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2\alpha+1} B_{i,2\alpha+3}(\theta) \right) \left( \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2j+1} r^{2j+2\alpha+2} B_{2j+2,2\alpha+1}(\theta) \right) d\theta$$

$$= - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} c_{2i} b_{2j+1} r^{2i+2j+4\alpha+3} A_{2i+2j+2,4\alpha+4}(2\pi).$$

$$(b_{11}) \int_0^{2\pi} \left( - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2\alpha+1} B_{i,2\alpha+3}(\theta) \right) \left( \sum_{j=0}^{\mu} \frac{2j+2\alpha+2}{2j+1} b_{2j} r^{2j+2\alpha+1} B_{2j+1,2\alpha+1}(\theta) \right) d\theta$$

$$= - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\mu} \frac{2j+2\alpha+2}{2j+1} c_{2i+1} b_{2j} r^{2i+2j+4\alpha+1} A_{2i+2j+2,4\alpha+4}(2\pi).$$

$$(b_{12}) = \int_0^{2\pi} \left( - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2\alpha+1} B_{i,2\alpha+3}(\theta) \right) \left( \left( \frac{2\alpha+4}{2\alpha+1} \right) e_3 B_{3,2\alpha+1}(\theta) + d_0^1 \right.$$

$$\left. \times (B_{1,2\alpha+3}(\theta) - (2\alpha+3) B_{3,2\alpha+1}(\theta)) r^{2\alpha+3} \right) d\theta = - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} c_{2i+1} r^{2i+4\alpha+5}$$

$$\times \left[ \left( \left( \frac{2\alpha+4}{2\alpha+1} \right) e_3 - d_0^1 (2\alpha+3) \right) A_{2i+4,4\alpha+4}(2\pi) + d_0^1 A_{2i+2,4\alpha+6}(2\pi) \right].$$

$$(b_{13}) = \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} r^{2i+2\alpha+1} B_{2i+1,2\alpha+2}(\theta) \right) \left( \sum_{j=0}^{n_1} a_j r^{j+2\alpha} B_{j+1,2\alpha}(\theta) \right) d\theta$$

### 3.2 Application de la méthode de la moyennisation du premier et deuxième ordre

---

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} b_{2i+1} a_{2j} r^{2i+2j+4\alpha+1} A_{2i+2j+2,4\alpha+2}(2\pi). \\
(b_{14}) &= \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} r^{2i+2\alpha+1} B_{2i+1,2\alpha+2}(\theta) \right) \left( \sum_{j=0}^{n_3} c_j r^{j+2\alpha+2} B_{j+1,2\alpha+2}(\theta) \right) d\theta \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} b_{2i+1} c_{2j} r^{2i+2j+4\alpha+3} A_{2i+2j+2,4\alpha+4}(2\pi). \\
(b_{15}) &= \int_0^{2\pi} (d_0 r^{2\alpha+2} (-B_{0,2\alpha+4}(\theta) + (2\alpha+3)B_{0,2\alpha+4}(\theta))) \left( \sum_{j=0}^{n_1} a_j r^{j+2\alpha} B_{j+1,2\alpha}(\theta) \right) d\theta \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} d_0^1 a_{2j+1} r^{2j+4\alpha+3} (-A_{2j+2,4\alpha+4}(2\pi) + (2\alpha+3)A_{2j+4,4\alpha+2}(2\pi)). \\
(b_{16}) &= \int_0^{2\pi} (d_0 r^{2\alpha+2} (-B_{0,2\alpha+4}(\theta) + (2\alpha+3)B_{0,2\alpha+4}(\theta))) \left( \sum_{j=0}^{n_3} c_j r^{j+2\alpha+2} B_{j+1,2\alpha+2}(\theta) \right) d\theta \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} d_0^1 c_{2j+1} r^{2j+4\alpha+5} (-A_{2j+2,4\alpha+6}(2\pi) + (2\alpha+3)A_{2j+4,4\alpha+4}(\theta)). \\
(b_{17}) &= \int_0^{2\pi} \left( -\sum_{i=0}^{\mu} \frac{b_{2i}}{2i+1} r^{2i+2\alpha+1} ((2i+1)B_{2i,2\alpha+2}(\theta) - (2\alpha+1)B_{2i+2,2\alpha}(\theta)) \right) \\
&\quad \times \left( \sum_{j=0}^{n_1} a_j r^{j+2\alpha} B_{j+1,2\alpha}(\theta) \right) d\theta \\
&= -\sum_{j=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \frac{b_{2i}}{2i+1} a_{2j+1} r^{2j+4\alpha+1} ((2i+1)A_{2i+2j+2,4\alpha+2}(2\pi) - (2\alpha+1) \\
&\quad \times A_{2i+2j+4,4\alpha}(\theta)). \\
(b_{18}) &= \int_0^{2\pi} \left( -\sum_{i=0}^{\mu} \frac{b_{2i}}{2i+1} r^{2i+2\alpha+1} ((2i+1)B_{2i,2\alpha+2}(\theta) - (2\alpha+1)B_{2i+2,2\alpha}(\theta)) \right) \\
&\quad \times \left( \sum_{j=0}^{n_3} c_j r^{j+2\alpha+2} B_{j+1,2\alpha+2}(\theta) \right) d\theta \\
&= -\sum_{j=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \frac{b_{2i}}{2i+1} c_{2j+1} r^{2j+4\alpha+3} ((2i+1)A_{2i+2j+2,4\alpha+4}(2\pi) - (2\alpha+1) \\
&\quad \times A_{2i+2j+4,4\alpha+2}(\theta)).
\end{aligned}$$



Alors la somme du polynôme  $L(r)$  et des intégrales de  $(b_1)$  à  $(b_{18})$  donnent le polynôme (3.18). Donc le Lemme 3.2.3 est prouvé.

Finalement, on obtient  $F_{20}(r)$  qui est un polynôme de la variable  $r^2$  de la forme

$$2\pi F_{20}(r) = r^{2\alpha+1} \left[ P_1(r^2) + r^2 P_2(r^2) + r^4 P_3(r^2) \right],$$

où  $P_1(r^2), P_2(r^2)$  et  $P_3(r^2)$  sont des polynômes de la variable  $r^2$  de degré respectivement

$$\begin{aligned} \omega_1 = \max \left\{ \left[ \frac{n_1}{2} \right] + \left[ \frac{n_2 - 1}{2} \right] + \alpha, \left[ \frac{n_1}{2} \right] + \left[ \frac{m}{2} \right] - 1 + \alpha, \left[ \frac{n_3}{2} \right] + \left[ \frac{m}{2} \right] + \alpha, \left[ \frac{n_2}{2} \right], \left[ \frac{m - 1}{2} \right], \right. \\ \left. \left[ \frac{n_1 - 1}{2} \right] + \mu + \alpha, 1 \right\}, \\ \omega_2 = \max \left\{ \left[ \frac{n_1 - 1}{2} \right] + \alpha, \left[ \frac{n_2 - 1}{2} \right] + \left[ \frac{n_3}{2} \right] + \alpha, \left[ \frac{n_3 - 1}{2} \right] + \mu + \alpha \right\}, \quad \omega_3 = \left[ \frac{n_3 - 1}{2} \right] + \alpha. \end{aligned}$$

Alors pour trouver les racines positives réelles de  $F_{20}(r)$  nous devons trouver les racines d'un polynôme de la variable  $r^2$  de degré

$$\Lambda = \max\{\omega_1, \omega_2 + 1, \omega_3 + 2\},$$

Nous concluons que  $F_{20}(r)$  a au plus  $\Lambda$  racines positives. D'où l'énoncé (b) du Théorème 3.1 suit.

### 3.3 Exemple d'application

L'exemple suivant est donné pour illustration. Les calculs ont été obtenus en utilisant Maple.

**Exemple.** On a  $m = 2$ ,  $n_2 = 2$ ,  $n_1 = 1$ , et  $n_3 = 1$ .

Si  $\alpha = 1$ , on considère le système (3.2), où

$$\begin{aligned} l_1(x) &= 1 + 3x + x^2, & f_1(x) &= 1 + \frac{373}{189}x, & g_1(x) &= 1 + x - 5x^2, \\ h_1(x) &= \frac{3}{189} - \frac{64}{63}x, & d_0^1 &= 1, \\ l_2(x) &= x + x^2, & f_2(x) &= x, & g_2(x) &= -3 + \frac{2090}{189}x^2, \\ h_2(x) &= x, & d_0^2 &= 1, \end{aligned}$$

On a  $F_{10}$  est identiquement nulle, donc pour chercher les cycles limites, il faut résoudre l'équation  $F_{20}(r) = 0$  ce qui équivaut à

$$F_{20}(r) = \frac{r^3}{36} (r^6 - 14r^4 + 49r^2 - 36).$$

### 3.3 Exemple d'application

---

Cette équation à exactement trois racines positives.

Si  $\alpha = 2$ , on considère le système (3.2), où

$$l_1(x) = \frac{5}{9} + 5x + \frac{9005}{594}x^2, \quad f_1(x) = 2 - \frac{1312}{2097}x, \quad g_1(x) = 1 + x - 7x^2,$$

$$h_1(x) = \frac{32}{297}x, \quad d_0^1 = 1,$$

$$l_2(x) = 11x + x^2, \quad f_2(x) = x, \quad g_2(x) = -1 + 24x^2,$$

$$h_2(x) = x, \quad d_0^2 = \frac{8}{9}.$$

Un calcul simple montre que  $F_{10} \equiv 0$  et

$$F_{20}(r) = \frac{r^5}{576} (r^8 - 30r^6 + 273r^4 - 820r^2 + 576).$$

Cette équation à exactement quatre racines positives.

Dans [35], ce système lorsque  $\alpha = 0$  a au plus deux racines positive en utilisant la théorie de moyennisation du second ordre.



# Conclusion et perspective

Le contenu de cette thèse porte sur l'étude des cycles limites de certaines classes de systèmes différentiels planaires non linéaires. Plus précisément, dans les chapitres 2 et 3, notre contribution consiste à étudier deux classes de systèmes différentiels de centres linéaires par la méthode de la moyennisation.

En appliquant la méthode de moyennisation, on a réussi à faire apparaître un certain nombre de cycles limites, ce qui est considéré comme une contribution de la résolution du 16<sup>ème</sup> problème de Hilbert. Dans les exemples que nous avons considérés la borne est atteinte.

Nous continuerons nos recherches sur le nombre maximum de cycles limites d'une part, pour la même classe en appliquant la théorie de moyennisation du troisième ordre, et d'autre part pour d'autres classes de systèmes différentiels planaires perturbées à centres non linéaires.

Un complément très intéressant de ce travail serait de trouver des modèles issus de la pratique par lesquels on peut appliquer nos résultats.



# Annexe A

Dans cet annexe nous rappelons quelques formules qui seront utilisées au cours de ce travail, voir pour plus de détails ([1],[19]). pour  $i \geq 1$ ,  $j \geq 1$  et  $\alpha \geq 0$  nous avons

$$A_{i,j}(2\pi) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ est impair ou } j \text{ est impair,} \\ \frac{(j-1)(j-3)\cdots 1}{(j+i)(j+i-2)\cdots(i+2)} \frac{1}{2^{i-1}} \binom{i}{\frac{i}{2}} \pi & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont pair.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \cos^i t \sin^\alpha t dt &= -\frac{\cos^{i-1} \theta \sin^{\alpha+1} \theta}{i+\alpha} + \frac{i-1}{i+\alpha} \int_0^\theta \cos^{i-2} t \sin^\alpha t dt \\ &= -\frac{\cos^{i+1} \theta \sin^{\alpha-1} \theta}{i+\alpha} + \frac{\alpha-1}{i+\alpha} \int_0^\theta \cos^i t \sin^{\alpha-2} t dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \cos^{2i} t dt &= -\frac{\sin \theta}{2i} \left( \cos^{2i-1} \theta + \sum_{l=1}^{i-1} \frac{(2i-1)(2i-3)\cdots(2i-2l+1)}{2^l(i-1)(i-2)\cdots(i-l)} \cos^{2i-2l-1} \theta \right) \\ &+ \frac{(2i-1)(2i-3)\cdots 1}{2^i i!} \theta = \frac{1}{2^{2i-1}} \sum_{l=1}^{i-1} \binom{2i}{l} \frac{\sin 2(i-l)\theta}{2(i-l)} + \frac{1}{2^{2i}} \binom{2i}{i} \theta. \end{aligned}$$

$$\int_0^\theta \cos^{2i+1} t dt = -\frac{\sin \theta}{2i+1} \left( \cos^{2i} \theta + \sum_{l=0}^{i-1} \frac{2^{l+1}(i-1)\cdots(i-l)}{(2i-1)(2i-3)\cdots(2i-2l-1)} \cos^{2i-2l-2} \theta \right).$$

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \cos^i t \sin^{2\alpha} t dt &= -\frac{\cos^{i+1} \theta}{2\alpha+i} \left( \sin^{2\alpha-1} \theta + \sum_{l=1}^{\alpha-1} \frac{(2\alpha-1)(2\alpha-3)\cdots(2\alpha-2l+1)}{(2\alpha+i-2)(2\alpha+i-4)\cdots(2\alpha+i-2l)} \right. \\ &\times \left. \sin^{2\alpha-2l-1} \theta \right) + \frac{(2\alpha-1)(2\alpha-3)\cdots 1}{(2\alpha+i)(2\alpha+i-2)\cdots(i+2)} \int_0^\theta \cos^i t dt. \end{aligned}$$

$$\int_0^\theta \cos^i t \sin^{2\alpha+1} t dt = -\frac{\cos^{i+1} \theta}{2\alpha + i + 1} \left( \sin^{2\alpha} \theta + \sum_{l=1}^{\alpha-1} \frac{2^l \alpha (\alpha - 1) \cdots (\alpha - l + 1)}{(2\alpha + i - 1)(2\alpha + i - 3) \cdots (2\alpha + i - 2l + 1)} \right. \\ \left. \times \sin^{2\alpha-2l} \theta \right).$$

$$\int_0^\theta \sin^{2i} t dt = -\frac{\cos \theta}{2i} \left( \sin^{2i-1} \theta + \sum_{l=1}^{i-1} \frac{(2i-1)(2i-3) \cdots (2i-2l+1)}{2^l (i-1)(i-2) \cdots (i-l)} \sin^{2i-2l-1} \theta \right) \\ + \frac{(2i-1)!!}{2^i i!} \theta = \frac{(-1)^i}{2^{2i-1}} \sum_{l=0}^{i-1} (-1)^l \binom{2i}{l} \frac{\sin 2(i-l)\theta}{2(i-l)} + \frac{1}{2^i} \binom{2i}{i} \theta.$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta d\theta \neq 0, \text{ si } i \text{ et } j \text{ sont pair,}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } i \text{ ou } j \text{ impair,} \\ \frac{\pi \alpha_k}{2^{k-1} k!}, & \text{si } i=2k \text{ et } j=0, \\ \frac{\pi \alpha_k}{2^k (k+1)!}, & \text{si } i=2k \text{ et } j=2, \\ \frac{3\pi \alpha_k}{2^{k+1} (k+2)!}, & \text{si } i=2k \text{ et } j=4, \\ \frac{15\pi \alpha_k}{2^{k+2} (k+3)!}, & \text{si } i=2k \text{ et } j=6, \end{cases}$$

où  $\alpha_i = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2i-1)$ ,  $\alpha_{i+1} = (2i+1)\alpha_i$ .

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta \sin(2l+1)\theta d\theta \neq 0, \text{ si } i \text{ pair et } j \text{ impair,}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta \sin(2l+1)\theta d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } i \text{ impair ou } j \text{ pair,} \\ \pi C_{i,l}, & \text{i pair, } j=1 \text{ et } l \geq 0, \\ \pi \tilde{C}_{i,l}, & \text{i pair, } j=3 \text{ et } l \geq 0, \end{cases}$$

où  $C_{i,l}$ ,  $\tilde{C}_{i,l}$  sont des constantes non nuls.

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta \sin(2l\theta) d\theta \neq 0, \text{ si } i \text{ et } j \text{ impair,}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta \sin(2l\theta) d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } i \text{ pair ou } j \text{ pair,} \\ \pi K_{i,l}, & \text{si } i \text{ impair } j=1 \text{ et } l \geq 0, \\ \pi \tilde{K}_{i,l}, & \text{si } i \text{ impair } j=3 \text{ et } l \geq 0, \end{cases}$$

où  $K_{i,l}$ ,  $\tilde{K}_{i,l}$  sont des constantes non nuls.

---


$$\int_0^\theta \cos^i t \sin t dt = \frac{1}{i+1} (1 - \cos^{i+1} \theta),$$

$$\int_0^\theta \cos^i t \sin^3 t dt = \frac{2}{(i+1)(i+3)} - \frac{1}{i+1} \cos^{i+1} \theta + \frac{1}{i+3} \cos^{i+3} \theta,$$

$$\int_0^\theta \cos^k t dt = \begin{cases} \sum_{l=0}^i \gamma_{i,l} \sin(2l+1)\theta, & \text{si } k=2i+1, \\ \delta_i + \sum_{l=1}^i \beta_{i,l} \sin(2l\theta), & \text{si } k=2i, \end{cases}$$

où

$$\delta_i = \frac{1}{2^{2i}} \binom{2i}{i} \theta, \quad \gamma_{i,l} = \frac{1}{2^{2i}} \binom{2i+1}{i-l} \frac{1}{2l+1} \quad \text{and} \quad \beta_{i,l} = \frac{1}{2^{2i}} \binom{2i}{i+l} \frac{1}{l}.$$





# Table des figures

1.1	Cycle limite stable pour $\alpha = 1$ . . . . .	12
1.2	Cycle limite instable pour $\alpha = -1$ . . . . .	13
1.3	Centre pour $\alpha = 0$ . . . . .	13
1.4	Cycle limite instable de l'exemple (1.2.1) pour $\varepsilon = -1$ . . . . .	15
1.5	Cycle limite stable de l'exemple (1.2.1) pour $\varepsilon = 1$ . . . . .	16
1.6	Cycle limite instable du système (1.19) pour $\varepsilon = 0.001$ . . . . .	17
1.7	Deux cycles limites du système (1.25) pour $\varepsilon = 0.2$ . . . . .	20
1.8	Deux cycles limites du système (1.28) pour $\varepsilon = 0.01$ . . . . .	22



# Bibliographie

- [1] Abramowitz M, Stegun I. *Handbook of mathematical function with formulas, graphs, and mathematical tables*. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, no. 55. Washington, DC :US Government, Printing Office; 1964.
- [2] Asheghi and Zangeneh H. R. Z, *Bifurcations of limit cycles for a quintic Hamiltonian system with a double cuspidal loop*. Comput.Math.Appl.59 2010 : 1409-1418.
- [3] Blows T-R, Perko L- M. *Bifurcation of limit cycles from centers and separatrix cycles of planar analytic systems*. SIAM. Rev. 1994 ;36 : 341-376.
- [4] Bogoliubov N- N. *On some Statistical Methods in Mathematical Physics*. Lzv. Akad. Nauk Ukr. SSR, Kiev ; 1945.
- [5] Bogoliubov N- N, Krylov N. *The Application of Methods of Nonlinear Mechanics in the Theory of Stationary Oscillations*. Ukrainian Acad. Sci., Kiev ; 1934.
- [6] Bogoliubov N- N, Mitropolskii Yu.A. *Asymptotic methods in the theory of non linear oscillations*. Gordon and Breach, New York,1961.
- [7] Boulfoul A, Makhlouf A. *Limit cycles of the generalized polynomial Liénard differential equation*. Ann. of Diff. Eqs. 2012 ; 28 :127-131.
- [8] Boulfoul A, Makhlouf A. *Limit cycles of the generalized polynomial Liénard differential systems*. Ann. of app. Math. 2016 ; 32 :221-233.
- [9] Boulfoul A, Makhlouf A, Mellahi N. *On the limit cycles for a class of generalized Kukles differential systems*, Journal of Applied Analysis and Computation. 2019 ;36 : 864-883.
- [10] Buică A, Francoise J.P and Llibre J. *Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter*. Comm Pure Appl.Anal.6 N1.2007 :103-111.
- [11] Buică A, Llibre J. *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*. Bull. Sci. Math. 2004 ; 128 : 7-22.
- [12] Chavarriga H, Giacomini H and Giné J. *On a new type of bifurcation of limit cycles for a planar cubic systems* . Non linear annalysis 1999 ; 36 : 139-149.

- [13] Du C, Liu Y. *General center condition and bifurcation of limit cycles for a quasi symmetric seventh degree system*. Compt. Math.Appl 2008 ;56 : 2957-2969.
- [14] Debz N, Boulfoul A and Berkane A. *Limit cycles of a class of planar polynomial differential systems* .Mathematical Methods in The Applied Sciences 2021 ; pp 1-26.
- [15] Du C, Liu Y. *General center condition and bifurcation of limit cycles for a quasi symmetric seventh degree system*. Compt. Math.Appl 2008 ;56 : 2957-2969.
- [16] Dulac H. *Détermination et intégration d'une certaine classe d'équations différentielles ayant pour point singulier un centre*. Bull. Sci. Math. Sér(2) 1908 ;32 : 230-252.
- [17] Fatou P. *Sur le mouvement d'un système soumis à des forces à courte période*. Bull. Soc.Math. France. 1928 ;56 : 98-139.
- [18] Gause G-F. *The struggle for existence*. Baltimore, Williams and Wilkins. 1934 ; new edition New York, Dover ; 1971.
- [19] Gradshteyn I.S,Ryzhik I.M. *Table of integrals*. Series Products. Academic Press, 1979.
- [20] Grin A-A, Schneider K-R. *On the construction of a class of generalized Kukles systems having at most one limit cycle*. J. Math. Anal. Appl. 2013 ; 408 :484-497.
- [21] Guckenheimer J, Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. In : Applied Mathematical Sciences, Vol 42, Springer-Verlag. New York ; 1986.
- [22] Hilbert D. *Mathematische Probleme*. Lecture in : Second Internat. Congr. Math. Paris, 1900, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl 5. 1900 ; 253-297 ; English transl. Bull. Amer. Soc. 8. 1902 ; 437-479.
- [23] N.M.Kryloff and N.N Bogoliuboff. *Introduction à la mécanique non linéaire, les méthodes approchées et asymptotiques* . vol 1-2 of Ukrainiska Akad.Nauk Inst. Mec. Paris, chaires de Phys . Maths Annales 1937.
- [24] Poincaré H. *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle* .*J.Math.Pures* ,Appl(3) 7 (1881),375-422.
- [25] Roseau.M. *Vibration non linéaire et théorie de la stabilité*(French) Springer Tracts in natural, Vol 8 Springer verlag,Berlin, New York, 1966.
- [26] Malkin I.G. *Some problems of the theory of nonlinear oscillations*. (Russian)Gostexizdat,Moscow. 1956
- [27] Llibre J, Mereu A- C. *Limit cycles for generalized kukles polynomial differential systems*. Nonlinear Analysis, 2011 ;74 :1261-1271.

- [28] Llibre J, Mereu A- C, Teixeira M- A. *Limit cycles of the generalized polynomial Liénard differential equations*. Math. Proc. Camb. phil. Soc. 2010;148 : 363-383.
- [29] Llibre J, Novaes D- D, Teixeira M-A. *Higher order averaging theory for finding periodic solutions via Brouwer degree*. Nonlinearly, 2014;27 : 563-583.
- [30] Llibre J, Novaes D- D, Teixeira M- A. *On the birth of limit cycles for non-smooth dynamical systems*. Bull. Sci. Math. 2015;139 : 229-244.
- [31] Llibre J and Rodrigues G . *Configurations of limit cycles and planar polynomial vector fields*. J. Differential Equations 2004;198 : 374-380.
- [32] Llibre J, Valls C. *On the number of limit cycles of a class of polynomial differential systems*. Proc. A : R. Soc. 2012 ; 468 :2347-60.
- [33] Maoan H. *On limit cycles of a biochemical reaction system*. J. Nanjing Univ., Math. Biquart. 1986 ; 50-53.
- [34] Maoan H. *On the maximum number of periodic of piecewise smooth periodic equations by average method*. Journal of Applied Analysis and computation. 2017;7 :788-794.
- [35] Mellahi N, Boulfoul A, Makhoulf A. *Maximum number of limit cycles for generalized Kukles polynomial differential systems*. Diff. Equ. Dyn. Syst. 2019 ;27(4) : 493-514.
- [36] Nicolis G, Prigogine I. *Self-Organization in nonequilibrium system*. Wiley, New York ; 1977.
- [37] Sanders J- A, Verhulst F. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*. Applied Mathematical Sci., 59, Springer-Verlag, New york ; 1985.
- [38] Shi J, Wang W, Zhang X. *Limit cycles of polynomial Liénard systems via the averaging method*. Non linear Analysis : real words 2019 ; 45 :650-667.
- [39] Verhulst F. *Nonlinear differential equations and dynamical systems*. Universitex, Springer-Verlag, Berlin ; 1996.
- [40] Viano M, Llibre J, Giacomini H. *Arbitrary order bifurcation for perturbed Hamiltonian planar systems via the reciprocal of an integrating factor*. Bull. Nonlinear. Anal. 2002;48 : 117-136.
- [41] Yanqian YE. *Theory of limit cycles*. Transl. Math. Monogr, vol.66,Amer.Math. Soc, Providence. 1984.