REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE CONSTANTINE

INSTITUT DE MATHEMATIQUES

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de Magister
En Mathématiques

OPTION
Analyse mathématique

PAR

Mme DENCHE née LATROUS CHAHLA

~~~ THEME ~~~

SUR UNE GENERALISATION DES ESPACES CONNEXES

Soutenue le 09/04/1995

Devant le Jury :

Président	:	H. MOKHTAR- -KHARROUBI	Prof.	Univ. Oran. ES-SENIA
Rapporteur	:	F. REBBANI	M.C.	Univ. ANNABA
Examinateurs	:	N. BENKAFADAR	M.C.	Univ. CONSTANTINE
		L. ABBAOUI	M.C.	Univ. SETIF
~~~

REMERCIEMENTS

Je tiens á éxprimer ma profonde gratitude envers Mademoiselle **REBBANI FAOUZIA** Maitre de conférences de l'université d'ANNABA d'avoir accepter de diriger cette thése.C'est grace a ses conseils et ses encouragements que j'ai pu mener á bien ce travail.Je tiens á l'en remercier trés vivement.

Je remercie trés sincérement Monsieur le Professeur **MOKHTAR-KHARROUBI HOCINE** de l'université d'ORAN ES-SENIA pour l'honneur qu'il me fait en presidant ce jury.

Je tiens a remercier egalement Monsieur**BENKAFADAR N.** Maitre de conférences de l'université de CONSTANTINE et Monsieur **ABBAOUI L.** Maitre de conférences de l'université de SETIF ,pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de juger ce travail et de participer au jury de cette thése.

C'est avec grand plaisir que j'associe a ces remerciements tous ceux qui m'ont aidé á la réalisation de ce travail.

Dans les travaux de I.ZUZCAK [1], [2] et [3] ont été introduits de nouveaux espaces généralisant les espaces topologiques dits r-espaces.

Ce travail est consacré à l'étude d'une sous classe de tels r-espaces dits connexes. le faite qu'un ensemble dans un r-espace possède en général plusieurs fermetures, comme cela a été remarqué dans [1], est la chose fondamentale qui différencie et rende difficile l'étude dans de tels espaces.

Il est impor tant de remarquer aussi comme cela a été fait dans le chapitre III que l'ensemble des voisinages dans un r-espace ne constituent pas un filtre chose qui nous a conduit à introduire la notion de r-filtre qui constitue l'analogue des filtres dans un espace topologique. Vu la structure des ouverts d'un r-espace connexe (Chap. I) on a introduit dans ce travail une nouvelle notion de continuité à savoir la continuité suivant une direction en se basant sur la notion de r-filtre.

Dans le chapitre I on a introduit la notion de r-espaces connexes qui constituent une sous classe importante de r-espaces.

Nous commençons dans le §.1 par rappéler les définitions d'un r-espace, d'un ouvert, d'un voisinage, d'un prévoisinage, ainsi que celle d'une base dans cet r-espace.

Dans le §.2 on établit une remarque importante qui a motivé l'introduction de la sous classe de r-espaces du type (P_1) introduits dans la définition 1.§2. Vu le faite que les singletons ne sont pas, des ouverts et ne forment pas en général une base de l'r-espace comme cela l'illustre l'exemple 2 §.2 on a été conduit à introduire dans les définitions 2 et 3 §.2 les r-espaces du type (P_2) et (P_3).

Dans le §.3 on a introduit la notion de r-espace connexe (def 1 §.3) qui est une généralisation des espaces connexes comme cela le montre l'exemple 1. Ainsi nous avons établit une série de théorèmes qui sont des généralisations de ceux bien connus dans le cas des espaces connexes, et dont certains ont nécessité l'introduction d'une sous classe de r-espaces connexes dits du type(P_4) (Def. 3§.3).

Dans le chapitre II on rappelle en bref les principaux théorèmes et définitions concernant la continuité et la r-continuité d'une application.

On établit un théorème concernant la r-continuité de la composée de 2 applications, ainsi qu'un autre théorème de caractérisation de la continuité d'une application entre r-espaces connexes.

Le chapitre III est consacré à l'étude des applications continues suivant une direction entre r-espace connexes. Comme dans les espaces topologiques cette notion est basée sur la définitionde la limite qui a été introduite ici d'une manière trés générale à l'aide des r-filtres.

Dans ce but on a commencé par une étude approfondie des r-filtres, qui font l'analogue des filtres dans les espaces topologiques. On a introduit la définition d'un r-filtre, d'une base de r-filtre ainsi que leurs principales propriétés.

Vu le faite que l'ensemble des voisinages d'un point ne constitue pas un r-filtre comme cela a été illustré par l'exemple 3, on a été conduit à construire le filtre engendré par cet ensemble, chose qui nous a permis d'introduire la notion de convergence d'un r-filtre suivant une direction.

En se basant sur les r-filtres, on a introduit et étudié les notions de limite et de continuité d'une fonction suivant une direction, ainsi que la limite suivant une direction d'une suite.

CHAPITRE I

r-ESPACES CONNEXES

1. Notions Préliminaires :

Dans les travaux [1], [2] et [3] ont été introduits par I.ZUZCAK de nouveaux espaces généralisant les espaces topologiques connus classiquement. De tels espaces sont munis d'une topologie assez générale dite r-topologie.

Parmi les formulations équivalentes d'un r-espace données dans [1], nous allons utiliser dans tout ce travail la formulation suivante :

Définition 1, [1]:

Soit χ un ensemble non vide et D une classe de sous ensembles de χ possédant les propriétés suivantes:

1- $\phi, \chi \in$ D.

2- $\forall A \subset \chi$ et $\forall B \in$ D tel que $B \subset A$, il existe un élément maximal C de ${}^{A}D = \{ M \in D$ tel que $M \subset A \}$ tel que $B \subset C \subset A$.

Alors le couple (χ, D) est appelé r-espace, et D la classe des ouverts de χ.

Exemple 1:

Soit χ un ensemble fini, et prenons pour D la classe des sous ensembles de χ qui contient le ϕ et χ. Alors (χ, D) est un r-espace.

En effet :

1- $\phi, \chi \in$ D. (par hypothèse).

2- $\forall$ A $\subset \chi$ et pour tout B$\in$D tel que B $\subset$ A existe t-il un élément maximal c de ^{A}D.

^{A}D est un ensemble partiellemnt ordonné par . Puisque B $\in$ ^{A}D, alors $^{A}D \neq \phi$. En plus χ est fini, alors ^{A}D est fini. D'aprés le lemme de ZORN il existe un élément maximal c de ^{A}D.

Définition 2, [1]:

On appelle voisinage d'un point $x \in \chi$ tout ensemble ouvert contenant x.

Définition 3, [1]:

Tout ensemble de χ de la forme $\{x\} \cup$ A où $x \in \chi$ et A $\in$ D, est dit prévoisinage de x.

Définition 4, [2]:

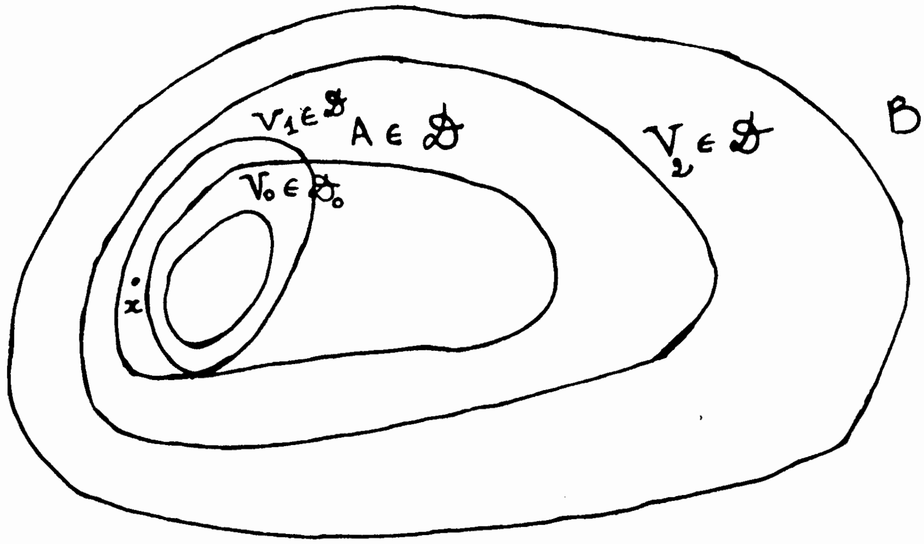
Soit (χ, , D) un **v**-espace et D_0 une famille d'ouverts de χ. On dit que D_0 est une base de la r-topologie D si et seulement si elle possède les deux propriétés suivantes:

1- Si A est un ouvert et $x \in$ A, alors il existe un ouvert V de D_0 tel que $x \in V \subset$ A.

2- Si A $\subset$ B $\subset \chi$ où A est un ouvert de D et $x \in$ B\A (c'est à dire $x \in$ B et $x \notin$ A) et pour

tout ouvert V_0 de D_0 où $V_0 \subset$ A, il existe un ouvert V_1 de D qui vérifie : $\{x\} \cup V_0 \subset V_1 \subset$ B.

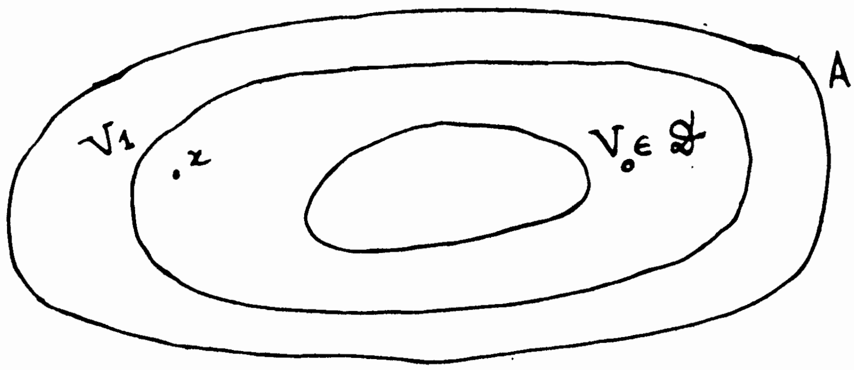
Alors il existe un ouvert V_2 de D tel que : $\{ x \} \cup A \subset V_2 \subset B$.



En utilisant la notion de base et le théorème 12 de [1] on peut définir les ouverts d'un r–espace de la manière suivante:

Définition 5: [2]

Soit $(\chi\ , D)$ un r-espace et D_0 une base de D. Alors le sous ensemble A de χ est ouvert si et seulement si, pour tout point $x \in A$ et chaque V_0 de D_0 tel que $V_0 \subset A$, il existe un V_1 ouvert de D tel que: $\{ x \} \cup V_0 \subset V_1 \subset A$.



2. Diffrénts Types de r-espaces:

Remarque importante:

Dans un r-espace la réunion d'ouverts n'est pas en général un ouvert, ainsi q'un singleton n'est pas en général ouvert. Illustrons cela par l'exemple suivant:

Exemple 1:

Soient $\chi = \{ x_1, x_2, x_3, x_4 \}$
et soit $D = \{\phi, \chi, \{ x_1 \}, \{ x_2 \}, \{ x_3 \}, \{ x_1, x_2 \}\}$.
Comme χ est un ensemble fini, d'aprés l'exemple 1.§.1 (χ, D) est un r-espace.

On a par construction $\{x_1\} \in D$ et $\{x_3\} \in D$ mais $\{x_1, x_3\} \notin D$.

D'ici résulte qu'une réunion d'ouverts n'est pas en général un ouvert. Ainsi que les singletons ne sont pas en général ouverts car $\{x_4\} \notin D$.

Cette remarque importante motivera par la suitel'introduction de nouvelles classes de r-espaces. Dans ce but donnons les définitions suivantes:

Définition 1 :

Un r-espace est dit du type (P_1) s'il possède la propriété suivante: $\forall (Ai)_{i \in I}$ où $Ai \in D$, $\forall i \in I$, tel que $\bigcap Ai \neq \phi$. Alors $\bigcup Ai \in D$.

Définition 2 :

Un r-espace est dit du type (P_2) si tout singleton est un ouvert.

Remarque Importante:

Il est important de remarquer que dans un r espace du type (P_2) les singletons ne forment pas en général une base. Illustrons cela par l'exemple suivant:

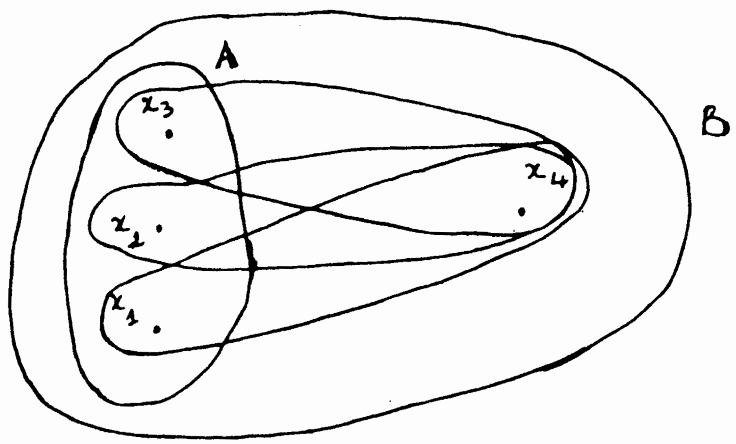
Exemple 2:

Soient $\chi = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ et $D = \{ \phi, \chi, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_5\}, \{x_2, x_4\}, \{x_3, x_4\} \}$.

D'aprés l'ensemble 1.§.1, (χ, D) est un r_espace. Et soit
$D_0 = \{ \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\} \}$
Notons par $A = \{x_1, x_2, x_3\}$, $A_1 = \{x_1, x_4\}$, $A_2 = \{x_2, x_4\}$ et $A_3 = \{x_3, x_4\}$.
Prenons $B = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Vérifions que D_0 n'est pas une base pour D, en effet :

1- On a $A \subset D$ et soit x_1 l'élément de A, alors il existe un ouvert $V_1 = \{x_1\}$ tel que $x_1 \in V_1 \subset A$.

2- On a $A \subset B \subset \chi$ et $x_4 \in B \setminus A$.
Alors $\forall\ V_0 \in D_0$ ou $V_0 \subset A$, se traduit par $\forall x_i$, $i = \overline{1,3}$, $x_i \subset A$. Alors il existe $V_{1,i} \in D$,
avec $V_{1,i} = \{x_4, x_i\}$ $i = \overline{1,3}$ on a : $\{x_4\} \cup \{x_i\}_{i=1,3} \subset V_{1,i} \subset B$, mais il n'existe Pas V_2 tel que: $\{x_4\} \cup A \subset V_2 \subset B$.



L'exemple précédent motive l'introduction d'une nouvelle sous classe de r-espaces définis de la manière suivante:

Définition 3:

Un r-espace du type (P_2) qui admet comme base d'ouverts les singletons est dit du type (P_3).] Si (χ, D) est un **v**-espace du type (P_3) on peut caractériser les ouverts à l'aide de la définition 5.§.1 de la manière suivante:

Définition 4:

A est un ouvert si et seulement si $\forall x, y \in$ A il existe un ouvert $V \in D$: $\{x, y\} \subset V \subset A$.

Maintenant on est en mesure d'introduire la nouvelle classe de r-espaces qu'on appellera v-espaces connexes qui constitue l'objectif fondamental de ce chapitre

lisa
et qui sont une génération des espaces topologiques connexes.

3- r- Espaces Connexes:

Définition 1:

Un r-espace (χ, D) est dit connexe s'il est de types (P_1), et (P_3). C'est à dire s'il possède les propriétés suivantes :

1- $\forall x \in \chi$ on a $\{x\} \in D$. En d'autres mots si tout singleton est un ouvert.
2- si $(A_i)_{i \in I} \in D$ tel que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \phi$ alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in D$.

3- Les singletons forment une base pour la r–topologie.

Exemple 1:

Soit (χ, τ) un espace topologique connexe et D la classe de tous les sous ensembles connexes de χ.

Alors (χ, D) est un r–espace connexe.

Démonstation :

Cela revient à montrer que (χ, D) est un r–espace de types (P_1) et (P_3).

Tout d'abord montrons que (χ, D) est un r–espace.

1- $\phi, \chi \in$ D?

En effet le ϕ et χ sont des connexes.

2- $\forall$ A $\subseteq \chi$ et $\forall B \in {}^{A}D = \{ M \subset D : M \subset A\}$ existe -t-il un élément maximal C de ${}^{A}D$ tel que $B \subset C \subset A$.

Il est clair que l'ensemble ${}^{A}D$ $\neq \phi$ est partiellement ordonné par la relation $\subset$ et que l'union des éléments d'une chaîne arbitraire de ${}^{A}D$ est un éllément de ${}^{A}D$ donc d'aprés le lemme de ZORN chaque B $\in$ ${}^{A}D$ est contenu dans un élément maximal C de ${}^{A}D$ .Et ainsi (χ , D) est un r–espace comme dans un espace topologique tout singleton est connexe alors (χ, D) est du type (P_2). Comme toute union de connexes dont l'intersection est non vide est un connexe [6] alors (χ, D) est du type (P_1).

Comme (χ, D) est du type (P_2) pour montrer qu'il est du type (P_3) il reste à montrer que les singletons forment une base de D.

Si $D_0 = \{ x\}_{x \in \chi}$. Il suffit de vérifier les 2 conditions de la définition 4.

1- Si $A \in D$ et $x \in A$. existe-t-il $V \in D_0$ tel que $x \in V \subset A$. En effet dans ce cas il suffit de prendre $V = \{x\}$.

2- Si $A \subset B \subset \chi$, $A \in D$ et $y \in B \setminus A$. et $\forall x \in A$ tel que $\exists\, V_1^x \in D$ vérifiant :
$\{x\} \cup \{y\} \subset V_1^x \subset B$. existe t-il $V_2 \in D$ tel que $\{y\} \cup A \subset V_2 \subset B$.

En utilisant le fait que :

$\forall x \in A, \exists\, V_1^x \in D$ tel que $\{x\} \cup \{y\} \subset V_1^x \subset B \Rightarrow \bigcup_{x \in A} \{x\} \cup \{y\} \subset \bigcup_{x \in A} V_1^x \subset B$.
$\Rightarrow A \cup \{y\} \subset \bigcup_{x \in A} V_1^x \subset B$.

Et comme $\forall x \in A$ $V_1^x \supset \{y\}$ *alors* $\bigcap_{x \in A} V_1^x \neq \phi$, d'où $\bigcup_{x \in A} V_1^x$ est un ouvert[6] que l'on notera par V_2 avec $V_2 \in D$.
Et ainsi $\exists\, V_2 \in D$ tel que $\{y\} \cup A \subset V_2 \subset B$.

D'où la condition 2 est vérifiée, et ainsi (χ, D) est un r-espace connexe.

Définition 2 :

Soit (χ, D) est un r-espace connexe. Deux parties A et B disjointes sont dites séparées si pour tout ouvert C de D tel que : $C \subset A \cup B$ on a:
$C \cap A = \phi$ ou $C \cap B = \phi$.

Définition 3 :

Un r-espace connexe est dit du type (P_4) s'il possède la propriété suivante :

Si A est séparé de M et de N alors A est séparé de $M \cup N$.

Proposition 1 :

Soit (χ, D) un r-espace connexe, alors A n'est pas décomposable en 2 ensembles séparés si et seulement si, pour chaque couple d'ensembles M et N, $M\neq\phi$, $N\neq\phi$ et $N=\phi$, tel que $A = M \cup N, \exists x \in M$ et $y \in N$ et $\exists V \in D$ tel que: $\{x,y\} \subset V \subset A$.

Démonstration :

A n'est pas décomposable en deux ensembles séparés si et seulement si pour chaque couple M et N tel que A= $M \cup N$ on a $M \cap N = \phi$ avec $M \neq \phi$ et $N \neq \phi$ d'où M et N ne sont pas séparés donc d'aprés la définition2 $\exists V \in D$ tel que $V \subset M \cup N$ avec $V \cap M \neq \phi$ et $V \cap N \neq \phi \Rightarrow \exists x \in M, y \in N$ et $V \in D$ tel que $\{x,y\} \subset V \subset A$.

Théorème 1: (Caractérisation des ouverts d'un r-espace connexe)

Soit (χ , D) un r-espace connexe.

Alors A est ouvert dans D si et seulement si on ne peut pas le décomposer en deux ensembles séparés.

Démonsatration:

Soit A un ouvert de D tel que A= $M \cup N$, comme $M \neq \phi$ et $N \neq \phi$ choisissons 2 éléments $x \in M$ et $y \in N$ d'une manière arbitraire, alors d'aprés la dénifition4, $\exists V \in D$ tel que $\{x,y\} \subset V \subset A$, d'où d'aprés la proposition 1 A n'est pas décomposable en deux ensembles séparés.

Inversement soient $x, y \in A$ existe-t-il $V \in$ D tel que $\{x, y\} \subset V \subset A$.

Soit l'ensemble:

$A_x = \{ z \in A$ tel que $\exists$ $V_Z \in$ D vérifiant $\{x, z\} \subset V_Z \subset A.\}$.

Donc à chaque fois qu'on prend un élément $y \in A_x \subset A$, on peut trouver un ouvert $V_y \in$ D tel que : $\{x, y\} \subset V \subset A$.

Soit $\hat{A}_x = \bigcup\limits_{z \in A_x} V_Z$, on remarque tout d'abord que :

1- $\hat{A}_x \neq \phi$, car par hypothèse $x \in A$ d'où il existe $V_x = \{x\} \in$ D tel que $V_x \subset A$.

2- $\bigcup\limits_{z \in A_x} V_Z \in$ D car $\bigcap\limits_{z \in A_x} V_Z \neq \phi$, puisque les V_Z contiennent au moins l'élément x (car (χ, D) est un r-espace connexe).

Supposons maintenant par l'absurde que $y \notin \hat{A}_x$, posons $\hat{A}_x = M$ et $A \setminus \hat{A}_x = N$ alors:

A = $M \cup N$, avec $M \cap N = \phi, M \neq \phi, N \neq \phi$,(car $y \in N$).

D'aprés la proposition 1 il existe au moins un couple (p,q) , $p \in M$ et $q \in N$ et il existe au moins un ouvert V de D tel que:

$\{ p,q\} \subset V \subset A$.

Comme $p \in M \Rightarrow p \in \hat{A}_x$ et vu le fait que $p \in V$ on a alors $P \in V \cap \hat{A}_x$. Donc $V \cup \hat{A}_x \in$ D (car χ est un r-espace connexe), notons par $V'q = V \cup \hat{A}_x$, comme $V \subset A$ et $\hat{A}_x \subset A$ donc $V'q \subset A$ et on a aussi $\{ q, x\} \subset V'q \subset A$ avec $V'q \in$ D.

Ainsi on a démontré l'existence d'un ouvert V'q contenant { q,x} et contenu dans A, d'où $q \in \hat{A}_x$ contradition avec le faite $q \in A \setminus \hat{A}_x$.

Donc $y \in \hat{A}_x$, d'où il existe un ouvert V_y tel que : $\{x, y\} \subset V_y \subset A$. D'où A est un ouvert. Et ainsi le théorème est démontré.

Théorème 2:

Soit (χ, D) un r-espace connexe du type (P_4), C un ouvert de X Et soient M et N, 2 ensembles séparés, tel que $\chi \backslash C = M \cup N$. Alors $C \cup M$ et $C \cup N$ sont ouverts.

Démonstration :

Supposons que $C \cup M$ n'est pas ouvert, alors d'aprés le théorème1 $\exists$ A et B deux ensembles séparés tel que $C \cup M = A \cup B$.

Comme $C \subset C \cup M \Rightarrow C \subset A \cup B$, Comme A et B sont deux ensembles séparés et C est un ouvert alors d'aprés la définition 2 on a: $C \cap A = \phi$ ou $C \cap B = \phi$.
Supposons que $C \cap A = \phi$ comme $A \subset C \cup M$, $alors A \subset M$.

Montrons maintenant que A et N sont séparés. Pour cela supposons le contraire alors d'aprés la définition2 $\exists$ un ouvert $C' \subset A \cup N$ tel que $C' \cap A \neq \phi$ et $C' \cap N \neq \phi$.

Comme $A \subset M \Rightarrow C' \cap A \subset C' \cap M$.
$\Rightarrow C' \cap M \neq \phi$ car $C' \cap A \neq \phi$.

Vu le faite que $C' \subset A \cup N$ et $A \subset M$ on a alors $C' \subset M \cup N$. Donc on a montré l'existence d'un ouvert $C' \subset M \cup N$ tel que $C' \cap M \neq \phi$ et $C' \cap N \neq \phi$ ce qui résulte d'aprés la définition 2 que M et N ne sont pas séparés d'où contradiction. Donc A et N sont séparés.

Comme A et B sont séparés et que (χ, D) est du tyoe (P_4) alors d'aprés la définition3, A et $B \cup N$ sont séparés.

On a :

$$\chi = C \cup (\chi \backslash C) = C \cup (M \cup N) = (C \cup M) \cup N = (A \cup B) \cup N.$$

D'où :

$\chi = A \cup (B \cup N)$ avec $A \neq \phi$ et $B \cup N \neq \phi$, A et $B \cup N$ sont séparés, donc d'aprés le théorème1 χ n'est pas ouvert, ce qui est absurde d'où $C \cup M$ est ouvert.

Exactement de la même manière on montre que $C \cup$N est ouvert. Et ainsi le thorème est démontré.

Remarque :

En particulier si (χ, τ) est un espace topologique connexe et C un sous ensemble connexe de χ alors dans ce cas ce théorème coïncide avec le théorème 4 chap.5, II de [5].

Théorème 3: (Généralisation du théorème 1)

Soit (χ, D) un **γ-espace** connexe, et E un sous ensemble de X. si E ne s'écrit pas sous forme d'union de n ensembles ouverts.

Alors il existe (n+1) ensembles séparés deux à deux; $A_1, \ldots, A_{n+1}$; avec $A_i \neq \phi$, $i = \overline{1, n+1}$, tel que : E= $A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_{n+1}$.

Démonstration :

La démonstration se fait par récurence .

Pour n=1

Dans ce cas ce résultat n'est qu'une conséquence directe du théorème1.

Supposons que le théorème est vrai jusqu'à l'ordre n-1, c'est à dire que si E n'est pas union de (n-1) ensembles ouverts, alors il existe n ensembles séparés deux à deux tel que : $E=A_1 \cup A_2 \cup....\cup A_n$, $A_j \neq \phi$ $j=\overline{1,n}$.

Supposons maintenant que E n'est pas union de n ensembles ouverts. Alors existe t-il (n+1) ensembles séparés deux à deux non vides tel que $E = \bigcup_{j=1}^{n+1} A_j$.

Par hypothèse on a : $E= A_1 \cup....\cup A_n$ avec les A_i, i=1,n séparés. D'où au moins l'un de Ai,i=1,n ; n'est pas ouvert. Supposons pour fixer les idées que A_n n'est pas ouvert.. Donc d'aprés le théorème1 on peut le décomposer en 2 ensembles séparés, $A_n = A'_n \cup A_{n+1}$. D'où E peut être mis sous la forme :

$$E = A_1 \cup..\cup A_{n-1} \cup A'_n \cup A_{n+1}$$

avec les A_i, i= $\overline{1,n+1}$ avec $i \neq n$, et A'_n sont séparés deux à deux. Et ainsi le théorème est démontré.

Théorème 4: (Généralisation du théorème 2)

Soit (χ, D) un r espace connexe du type P_4, C_1, C_2 ...., C_n des ouverts de χ et M, N, 2 ensembles séparés tel que :

$$\chi \setminus (C_1 \cup....\cup C_n) = M \cup N \quad (*)$$

Alors l'ensemble $C_1 \cup.....\cup C_n \cup M$ est union de n ensembles ouverts (distincts ou confondus).

Démonstration :

Supposons que $C_1 \cup .... \cup C_n \cup M$ n'est pas union de n ensembles ouverts (distincts ou confondus), alors d'aprés le théorème 3 il existe (n+1) ensembles non vides et séparés deux à deux tel que : $C_1 \cup C_2 \cup .... \cup C_n \cup M = A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_{n+1}$ (**)

Alors on peut affirmer qu'aucun des ensembles A_i, $i=\overline{1,n+1}$; n'est séparé de N. En effet, car dans le cas contraire il existe une décomposition de X en 2 ensembles séparés non vides tel que: $\chi = (\chi \setminus (C_1 \cup ..... \cup C_n)) \cup (C_1 \cup ..... \cup C_n)$.

D'où en utilisant l'égalité (*) on aura :

$$\chi = M \cup N \cup (C_1 \cup .... \cup C_n) = N \cup (C_1 \cup ..... \cup C_n) \cup M.$$

Et en utilisant l'égalité (**) on aura : $\chi = N \cup (A_1 \cup A_2 \cup ..... \cup A_{n+1})$.

Donc on a trouvé une décomposition de χ en ensembles séparés ce qui est absurde car $\chi \in D$. Donc aucun des A_i, $i=\overline{1, n+1}$ n'est séparé de N.

Comme M et N sont séparés. Alors aucun des A_i, $i=\overline{1,n+1}$; n'est inclus dans M. car s'il $\exists$ $i_0 \in \overline{1,n+1}$; tel que $Ai_0 \subset M$ on aura $A_{i_0} \cup N \subset M \cup N$ comme Ai_0, et N ne sont pas séparés alors d'aprés la définition 2 s'il $\exists C \in D$ tel que $C \subset Ai_0 \cup N$ alors $C \cap Ai_0 \neq \phi$ et $C \cap N \neq \phi$.

Comme $C \subset Ai_0 \cup N \subset M \cup N \Rightarrow C \subset M \cup N$ et on a $C \cap N \neq \phi$ et $C \cap M \neq \phi$ (car $Ai_0 \subset M$ et $C \cap A_{i_0} \neq \phi$). d'où contradiction avec le faite que M et N sont séparés, donc : $Ai \not\subset M$ $\forall i=\overline{1,n+1}$.

D'aprés (**) on a : $A_i \subset C_1 \cup .... \cup C_n \cup M$ $\forall i = \overline{1,n+1}$.

Donc $A_i \cap C_j \neq \phi$ pour un certain $j \leq n$.

Comme C_j est un ensemble ouvert tel que : $C_j \subset A_1 \cup ..... \cup A_{n+1}$.

D'ici résulte que chacun des ensembles $A_1, \ldots, A_{n+1}$. contient un ensemble (non vide) appartenant au système ($C_1, \ldots\ldots, C_n$) ce qui est trivialement impossible. Et ainsi le théorème est démontré.

Par analogie avec la notion de composantes connexes dans un espace topologique introduisons la définition suivante :

Définition 4:

Soit (χ, D) un r espace connexe, un ensemble C de χ est appelée composante de l'espace (χ, D) si :

1- C est un ouvert.

2- pour tout sous ensemble $C_1 \in D$ tel que $C \subset C_1$ on a $C = C_1$.

Théorème 5:

Tout ensemble ouvert non vide de χ est contenu dans une seule composante de cet espace.

Démonstration:

Supposons que $A \in D, A \subset C_1$ et $A \subset C_2$ où C_1 et C_2 sont deux composantes de l'espae χ. on a alors $A \subset C_1 \cap C_2 \Rightarrow C_1 \cap C_2 \neq \phi$, comme (χ, D) est un r-espace connexe il est alors du type (P_1) par conséquent $C_1 \cup C_2$ est un ouvert, comme $A \subset C_1$ et $A \subset C_2$ ona :
$A \subset C_1 \cup C_2$, or C_1 est une composante c'est à dire c'est le plus grand ouvert qui contient A, d'où contraditiction car on a trouver un ouvert $C_1 \cup C_2 \supset C_1$ tel que $A \subset C_1 \cup C_2$.

Ainsi le théorème est démontré.

Remarque :

Ce théorème est une généralisation du théorème 2, III, chap.5[5] aux r-espaces connexes.

CHAPITRE II

APPLICATIONS CONTINUES ENTRE r-ESPACES CONNEXES

Commençons tout d'abord par ennoncer ces notions dans les r-espaces généraux.

DEFINITION 1[3]:

Soient (χ, D_1) et (Y, D_2) deux r-espaces.
Et $f: (\chi, D_1) \rightarrow (Y, D_2)$, une application .
Alors f est continue si et seulement si : $\forall A \in D_2$, $f^{-1}(A) \in D_1$.

Remarque :

Cette définition a été introduite dans [3], et elle coïncide avec la définition habituelle de la continuité dans le cas où χ et Y sont deux espaces topologiques.

DEFINITION 2[3]:

Soient (χ, D_1) et (Y, D_2) deux r-espaces.
Et $f: (\chi, D_1) \rightarrow (Y, D_2)$, une application .
Alors f est continue en $x_0 \in \chi$ si et seulement si pour tout voisinage V de $f(x_0)$ il existe un voisisnage U de x_0 tel que $f(U) \subset V$.

Remarque :

Dans un r-espace de la continuité en chaque point ne résulte pas la continuité contrairement aux espaces topologiques. Pour cela voir [3] exemple 4 p.352.

DEFINITION 3[3]:

Soient (χ , D_1) et (Y , D_2) deux r-espaces.
Et $f: (\chi, D_1) \to (Y , D_2)$, une application .
Alors f est dite r-continue en $x_0 \in \chi$ si pour tout V voisinage de $f(x_0)$ et $\forall$ U prévoisinage de x_0 tel que $f(U) \subset V$, il existe un voisinage U_1 de x_0 tel que $U \subset U_1$ et $f(U_1) \subset V$.

A l'aide de cette notion dans un r-espace de la r-continuité en chaque point résulte la continuité. En effet :

Théorème 1 [3]:

Soient (χ, D_1) et (Y , D_2) deux r-espaces.
Et $f: (\chi, D_1) \to (Y , D_2)$, une application . Alors f est continue si et seulement si elle est r-continue en chaque point $x_0 \in \chi$..

Rappelons encore un théorème indiquant que de la r-continuité en un point résulte la continuité en ce point.

Théorème 2 [3]:

Soient (χ , D_1) et (Y, D_2) deux r-espaces.
Et $f: (\chi, D_1) \to (Y, D_2)$, une application .
Et soit $x_0 \in \chi$. Si f est r continue en x_0 alors f est continue en x_0 .

Rappelons encore une caractérisation de la continuité à l'aide des éléments de la base de la r-topologie.

CHAPITRE III

APPLICATIONS CONTINUES SUIVANT UNE DIRECTION ENTRE r-ESPACES CONNEXES.

Théorème 3 [2]:

Soient (χ , D_1) et (Y , D_2) deux r-espaces.
D_0 une base pour D_1 et $f: (\chi, D_1) \rightarrow (Y, D_2)$,

Alors f est continue si et seulement si $\forall x \in \chi$ et $\forall$ V voisinage de f(x) et $\forall U \in D_0$ tel que $f(U) \subset V$ il existe un ouvert $U_1 \in D_1$ tel que $\{x\} \cup U \subset U_1$ et $f(U_1) \subset V$.

Cela nous permet d'établir dans un r-espace connexe le théorème suivant.

Théorème 4:

Soient (χ, D_1) un r-espace connexe et (Y, D_2) un r-espace. D_0 une base pour D_1 et $f: (\chi, D_1) \rightarrow (Y , D_2)$ une application.

Alors f est continue si et seulement si $\forall x \in \chi$ et $\forall$ V voisinage de f(x) et $\forall \{x_0\} \in D_0$ tel que $f(x_0) \in V$ il existe un ouvert $U_1 \in D_1$ tel que $\{x, x_0\} \subset U_1$ et $f(U_1) \subset V$.

Démonstration :

Comme (χ, D_1) est un r espace connexe alors il est du type (P_3) d'où les singletons forment une base pour la γ-topologie (def.3§2.I).

Et ainsi il suffit de prendre dans le théorème 3 pour éléments de D_0 les singletons. Et ainsi le théorème est démontré.

Composée de deux applications r- continues:

Nous avons établit le théorème suivant dans des r-espaces généraux.

Théorème 5 :

Soient (χ, D_1), (Y, D_2) et (Z, D_3) trois r-espaces.
$f : (\chi, D_1) \to (Y, D_2)$, $g : (Y, D_2) \to (Z, D_3)$ deux applications tel que f est r continue en x_0, et g est r-continue en $y_0 = f(x_0)$.

Alors $g \circ f : (\chi, D_1) \to (Z, D_3)$ est r-continue en x_0.

Démonstration:

Soit W un voisinage de $(g \circ f)(x_0)$ (c'set à dire que W est un voisinage de $g(f(x_0))$ donc W est un voisinage de $g(y_0)$ comme g est r-continue en y_0, alors pour tout prévoisinage U de y_0 tel que $g(U) \subset W$ il existe un voisinage U_1 de y_0 tel que : $U \subset U_1$ et $g(U_1) \subset W$.

Comme f est aussi r-continue en x_0, alors pour le voisinage U_1 de $f(x_0)$ et pour tout prévoisinage U_2 de x_0 tel que $f(U_2) \subset U_1$ il existe un voisinage V de x_0 tel que $V \supset U_2$ et $f(V) \subset U_1$.

Comme $f(U_2) \subset U_1$ on a $g(f(U_2)) \subset g(U_1)$ et d'aprés la r-continuité de g en y_0 on a:

$g(U_1) \subset W$ d'où $g(f(U_2)) \subset W$.

Et ainsi on a montré que pour tout voisinage W de $(g \circ f)(x_0)$ et pour tout prévoisinge U_2 de x_0 tel que $(g \circ f)(U_2) \subset W$ il existe un voisinage V de x_0 tel que :

$V \supset U_2$ et $(g \circ f)(V) \subset g(U_1) \subset W$. ce qui traduit la r-continuité de $g \circ f$ en x_0 .c.q.f.d.

En lien avec le théorème 4 dans le but de donner une caractérisation de la continuité dans un r-espace connexe introduisant l'ensemble suivant:

$D^0 = \{ V_1 \in D$ tel que si A est un ouvert, $\{x,y\} \subset A, \exists\ V_1 \in D$ tel que : $\{x,y\} \subset V_1 \subset A.\}(*)$

Il est clair que d'aprés la définition d'un ouvert dans un r-espace connexe D^0 n'est pas vide.

Théorème 6:

Soient (χ, D_1), (Y, D_2) deux r-espaces connexes avec $B_1 = \{\{x\} : x \in \chi\}$, B_1^0 l'ensemble construit comme dans (*) à l'aide des éléments de D_1 ; et $B_2 = \{\{y\} : y \in Y\}$, B_2^0 construit de la même manière à l'aide des éléments de D_2.

$f : (\chi, D_1) \to (Y, D_2)$ une application.

Alors f est continue si et seulement si $\forall$ le voisinage V de $f(x_0)$ tel que $V \in B_2^0$ et pour tout prévoisinage U de x_0 tel que $U = \{x_0, x_1\}$ où $\{x_1\} \in B_1$ avec $f(U) \subset V$.

Alors il existe un voisinage U_1 de x_0 tel que $\{x_0, x_1\} \subset U_1$ où $f(U_1) \subset V$ et $U_1 \in B_1^0$.

Démonstration :

" $\Leftarrow$ " soit W un voisinage de $f(x_0)$ c'est à dire $W \in D_2$ et $f(x_0) \in W$. Pour tout prévoisinage U de x_0 tel que $U = \{x_0, x_1\}$ avec $f(x_1) \in W$, le problème est de prouver l'éxistence d'un voisinage U_2 de x_0 tel que : $\{x_0, x_1\} \subset U_2$ et $f(U_2) \subset W$.

On a $W \in D_2$ et $\{ f(x_0), f(x_1)\} \in W$, alors par définition de B_2^0 $\exists$ $W_1 \in B_2^0 \subset D_2$ tel que $\{ f(x_0), f(x_1)\} \in W_1 \subset W$.

Alors par hypothèse il existe un voisinage U_1 de x_0 tel que $\{ x_0, x_1 \} \subset U_1$ avec $f(U_1) \subset W_1 \subset W$.

Donc il suffit de prendre $U_2 = U_1$

" $\Rightarrow$ "

Supposons que f est continue.

Soit V un voisinage de $f(x_0)$ avec $V \in B_2^0$, et pour tout prévoisinage U de x_0 tel que :

$U = \{ x_0, x_1 \}$ où $f(x_1) \in V$, il existe un voisinage U_1 de x_0 tel que $\{ x_0, x_1 \} \subset U_1$ et $f(U_1) \subset V$, avec $U_1 \in D_1$.

Comme $U_1 \in D_1$ et contient $\{ x_0, x_1 \}$ alors par définition de B_1^0 il existe $U_2 \in B_1^0$ tel que $\{ x_0, x_1 \} \subset U_2 \subset U_1$ et $f(U_2) \subset V$. Et ainsi le théorème est démontré.

Remarque:

Dans ce théorème on a pris $V \in B_2^0$ et $U_1 \in B_1^0$ au lieu de les prendre respectivement dans D_2 et D_1 selon le théorème 4.

I.r-FILTRES

1. Définition d'un filtre:

Définition 1:

Soit χ un ensemble non vide, on appelle r-filtre F sur χ un ensemble non vide de parties de χ, vérifiant:

1) Si $A \in F$ et $A \subseteq B \Rightarrow B \in F$,
2) Si $A \in F$ et $B \in F \Rightarrow A \cap B \neq \varnothing$.

Remaque 1:

De 2) résulte trivialement que $\varnothing \notin F$. Il est facile de voire que tout filtre est un r-filtre. Par contre en général un r-filtre n'est pas un filtre car l'intersection de 2 éléments de F n'est pas en général un élément de F.

EXEMPLE 1:

Soit χ un ensemble infini.
F = { l'ensemble des complémentaires des parties finies de χ }
Il est facile de vérifier que F est un r-filtre.

En particulier les complémentaires des parties finies de l'ensemble IN des entiers naturels est un r-filtre que l'on notera par F_{IN} .

2. Comparaison des filtres :

Définition 2:

Soient F_1 et F_2 deux r-filtres sur χ, on dit que F_1 est plus fin que F_2 si tout élément de F_2 est un élément de F_1 que l'on notera par $F_2 \subseteq F_1$. On dira que F_1 est strictement plus fin que F_2 si F_1 contient strictement F_2.

2 . Bases d'un r-filtre :

Définition 3:

On dit qu'un sous-ensemble de parties de χ , $IB \neq \varnothing$ est une base de r-filtre χ si:
$\forall A \in IB$ et $B \in IB \Rightarrow A \cap B \neq \varnothing$

Proposition 1:

soit IB une base de r-filtre , alors l'ensemble
$F = \{A \in P(\chi)$ tel que $\exists B \in IB$ avec $B \subseteq A\}$
est un r-filtre sur χ.

Démonstration:

1) soient $A \in F$ et $A \subseteq B \Rightarrow B \in F$?
Si $A \in F \Rightarrow \exists B' \in IB$ tel que $B' \subseteq A$ et comme $A \subseteq B$
$\Rightarrow \exists B' \in IB$ tel que $B' \subseteq B \Rightarrow B \in F$.
2) si $A \in F$ et $B \in F \Rightarrow A \cap B \neq \varnothing$?

Comme $A \in F \Rightarrow \exists C \in IB$ tel que $C \subseteq A$, et $B \in F \Rightarrow \exists C' \in IB$ tel que $C' \subseteq IB$
or IB est une base donc d'aprés la définition 2 on a $C \cap C' \neq \phi$ d'où $A \cap B \neq \varnothing$.
Donc F est un r-filtre.

Définition 4:

IB est dite base du r-filtre qu'elle engendre . et F le r-filtre engendré par IB, qu'on note par $F = [IB]$.

EXEMPLE 2:

Soit $(\chi, , D)$ un r-espace . D(x) l'ensemble des voisinages de x forme une base de r-filtre .

En effet : Tout d'abord $D(x) \neq \phi$ car il existe au moins un ouvert O qui contient x, il suffit de prendre $O = \chi$.

Soient A, B, $\in D(x)$comme A et B sont deux ouverts qui contiennent x d'où $A \cap B \neq \phi$.
On notera par $V(x) = [D(x)]$ c'est à dire le r-filtre engendré par D(x) d'où on a
$V(x) = \{A \in P(\chi)$ tel que $\exists V \in D(x) : V \subsetneq A\}$

Proposition 2:

Soit IFun r-filtre sur un ensemble χ et $IB \subset IF$ avec $IB \neq \phi$. Pour que IB soit une base de IF il faut et il suffit que : $\forall A \in IF$, $\exists V \in IB$ tel que $V \subset A$. .

Démonstration:

"$\Rightarrow$" soit IB une base du r-filtre IFalors d'aprés la définition 4 on a $IF = [IB]$c'est à dire que $IF = \{A \subset \chi$ tel que $\exists V \in IB$ tel que $V \subset A\}$
D'où $\forall A \in IF$, $\exists V \in IB$ tel que $V \subset A$..

" $\Leftarrow$" Tout d'abord on voit que IB est une base car $\forall$ A,B $\in IB \Rightarrow$ A,B $\in IF$car $IB \subset IF$, d'où $A \cap B \neq \phi$.

Montrons que $IF = [IB]$. Soit $A \in [IB] \Rightarrow \exists\, V \in IB$ tel que $V \subset A$ or $IB \subset IF$ alors $V \in IF$..
Donc on a $V \subset A$ et $V \in IF$ d'où d'aprés la définition1 on a $A \in IF$ .D'où $[IB] \subset IF$.

Soit maintenant :

$F \in IF$, on a par hypothèse : $\exists\, V \in IB$ tq $V \subset F$ D'où $F \in [IB]$. Donc $IF \subset [IB]$

D'où on a $IF = [IB]$ dont B est la base .

<u>Remarque 2</u>: (<u>Importante</u>) :

Il est bien connu que dans un espace topologique l'ensemble des voisinages de $x \in \chi$ est un filtre.
Par contre dans un r-espace (χ, D) la famille $D(x)$ de tous les voisinages de x n'est pas un r-filtre.

En effet illustrons cela par l'exemple suivant.

<u>EXEMPLE 3</u>:

Soit $\chi = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$
$D = \{\phi, \chi, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}\}$

Il est clai!r que (χ, D) est un r-espace.
On a $D(x_1) = \{\chi, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$
Soit $A = \{x_1, x_2\}$, il est clair que A est un voisinage de x_1.
Soit $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ on a $A \subset B$ par contre $B \notin D(x_1)$, d'où $D(x_1)$ ne vérifie pas la propriété1 de la définition1 du r-filtre. Donc $D(x_1)$ n'est pas un r-filtre.
Par contre comme cela résulte de l'exemple 2 $D(x)$ est une base de r-filtre.

4. Convergence d'un r-filtre et d'une base de r-filtre suivant une direction:

Dans ce but introduisons les 2 ensembles suivants:

Soient (χ, D) un v-espace connexe et x_0 un élément de χ.

Notons par $D_{x_0}(x) = \{V \in D(x) \text{ tel que } x_0 \in V\}$

et

$V(x_0, x) = V_{x_0}(x) = \{B \subset \chi \text{ tel que } \exists\, V \in D_{x_0}(x) : V \subset B\}$

Il est clair que si $\{x_0\} = \phi$, dans ce cas on a $D_{x_0}(x) = D(x)$ et $V(x_0, x) = V(x)$ (voir exemple 2)

Proposition 3:

$V(x_0, x_1)$ est un r-filtre.

1) Soient $A \in V(x_0, x)$ et $B \in \chi$ tq $A \subseteq B \Rightarrow B \in V(x_0, x)$?

$A \in V(x_0, x) \Rightarrow \exists\, V \in D_{x_0}(x)$ tel que $V \subset A$.

comme $A \subseteq B$ donc $V \subseteq B$. D'où on a montré l'existence d'un $V \in D_{x_0}(x)$ tel que $V \subseteq B$, alors par définition de $V(x_0, x)$ on a $V \in V(x_0, x)$

2) Soient $A, B \in V(x_0, x) \Rightarrow A \cap B \neq \phi$?

$A \in V(x_0, x) \Rightarrow \exists V \in D_{x_0}(x)$ tel que $V \subseteq A$.

$B \in V(x_0, x) \Rightarrow \exists V' \in D_{x_0}(x)$ tel que $V' \subseteq B$.

D'ici résulte que A contient un ouvert contenant $\{x_0, x\}$ ainsi que B contient un ouvert contenant $\{x_0, x\}$ d'où $A \cap B \neq \phi$.

Et ainsi on voit que $V(x_0, x)$ est un r-filtre.

Remarque 3:

$V(x_0, x) = [D_{x_0}(x)]$, c'est à dire que $V(x_0, x)$ est le r-filtre engendré par $D_{x_0}(x)$. cela résulte directement de sa définition.

Définition 5 (Limite d'un r-filtre) :

Soient (χ, D) un r-espace connexe et IF un r-filtre sur χ, $x_0 \in \chi$. ondit que $x \in \chi$ est limite de IF suivant la direction x_0, ou que IF converge vers x suivant la direction x_0 si IF est plus fin que le r-filtre $V(x_0, x)$.
Que l'on note par $F \underset{x_0}{\rightarrow} x$ ou bien $\lim_{x_0} F = x$

Définition 6 (Limite d'une base de r-filtre) :

Soient (χ, D) un r-espace connexe, $x, x_0 \in \chi$
On dit qu'une base IB d'un r-filtre sur χ converge vers x suivant la direction x_0 si le r-filtre IF engendré par IB converge vers x suivant la direction x_0..

THEOREME 1:

Soit (χ, D) un r-espace connexe et IB une base de r-filtres sur χ.
Alors IB converge vers x suivant la direction x_0 si et seulement si :
$\forall V \in D_{x_0}(x)$, $\exists B \in IB$ tel que $B \subset V$.

Démonstration:

" $\Rightarrow$" Soit IB une base de r-filtre convergente vers x suivant la direction x_0, alors d'aprés la définition 6 le filtre engendré par IB noté par $IF = [IB]$ est convergent vers x suivant la direction x_0. Ce qui est équivalent d'aprés la définition5 à dire que $[IB]$ est plus fin que $V(x_0, x)$ c'est à dire $V(x_0, x) \subset IF = [IB]$

Soit maintenant $V \in D_{x_0}(x) \Rightarrow V \in V(x_0, x) \subset [IB]$.

D'où $\exists$ B $\in IB$ tel que B$\subset$ V.

"$\Leftarrow$" cela revient à montrer que $V(x_0, x) \subset IF = [IB]$.Soit $V \in V(x_0, x)$ alors par définition même de $V(x_0, x)$, $\exists$ W $\in D_{x_0}(x)$ tel que W $\subset V$, d'où en utilisant notre hypothèse $\exists B \in IB$ tel que $B \subset$ W et comme W$\subset$ V$\Rightarrow$ $B \subset V$ d'où $V \in [IB]$..

Et ainsi le théorème est démontré.

THEOREME 1 (**caractérisation des ouverts**) :

Soit (χ, D) un r-espace connexe, un sous-ensemble A de χ est ouvert si et seulement si pour tout r-filtre IF χ tel que $IF \underset{x_0}{\rightarrow} x \in A$ et $x_0 \in A$, on a $A \in IF$.

Démonstration:

" $\Rightarrow$ " Soit $A \subset \chi$, ouvert et soit IF un r-filtre sur χ tel que $IF \underset{x_0}{\rightarrow} x \in A$ avec $x_0 \in A$ a- t-on $A \in IF$?

comme IF converge vers x suivant x_0 alors d'aprés la définition 5 on a $V(x_0, x) \subset IF$. comme $\{x_0, x\} \in A$ et A est un ouvert et (χ, D)un r-espace connexe alors d'aprés [la définition 4](I).

$\exists$ un ouvert $V \in D$ tel que $\{x_0, x\} \subset V \subset A$. D'où $A \in V(x_0, x) \subset IF \Rightarrow A \in IF$.

" $\Leftarrow$ " Soient $A \subset \chi$ et $\{x_0, x\} \in A$, comme $V(x_0, x)$ est un r-filtre tel que $V(x_0, x) \underset{x_0}{\rightarrow} x$ d'où par hypothèse $A \in V(x_0, x)$ Alors $\exists V \in D_{x_0}(x)$ tel que $\{x_0, x\} \subset V \subset A$.

D'où A est ouvert.

5 . Limite d'une fonction suivant une direction :

Il est bien connu que les notions de limite d'une fonction qui interviennent en analyse classique sont des cas particuliers d'une notion générale à savoir la convergence d'une fonction suivant un filtre où une base de filtre [6]. Nous allons introduire cela dans son cadre général dans les r-espaces connexes.

Soient $(\chi, D1)$, $(\gamma, D2)$ deux r-espaces connexes . et $f:(\chi, D1) \rightarrow (\gamma, D2)$ une application.

REMARQUE : Soit $\mathbb{B}$ une base de r-filtre sur χ , alors on peut voir que $f(\mathbb{B}) = \{ f(A) : A \in \mathbb{B} \}$ est une base de r-filtre sur γ . Même si $\mathbb{B}$ est un r-filtre, $f(\mathbb{B})$ n'est en général qu'une base de r-filtre.

Définition 7: Soit (χ, D_1), (y, D_2) deux r-espaces connexes. $f : (\chi, D_1) \longrightarrow (y, D_2)$ une application.

Soit IF un r-filtre sur χ et $y_0 \in \gamma$.
On dit que $l \in \gamma$ est la limite de f suivant la direction y_0 relativement au r-filtre IF si la base du r-filtre, $f(IF)$ converge vers l suivant y_0.

THEOREME 3:

$l \in \gamma$ est limite de f suivant la direction y_0 relativement au r-filtre IF si et seulement si pour tout voisinage V de l contenant y_0, il existe $F \in IF$ tel que $f(F) \subset V$.

Démonstration:

" $\Rightarrow$ " soit $l \in \gamma$ limite de f suivant la direction y_0 relativement à IF, d'aprés la définition7 la base du r-filtre, $f(IF)$ converge vers l suivant y_0, c'est à dire que le filtre engendré par
$f(IF)$ converge vers l suivant y_0 .c'est à dire $V(l, y_0) \subset [f(F)]$

Soit V un voisinage de l contenant $y_0 \Rightarrow V \in D_{y_0}(l)$.
Alors $V \in V(l, y_0)$ d'où $V \in [f(F)] \Rightarrow \exists B \in f(IF)$ tel que $B \subset V$.
Comme $B \in f(IF) \Rightarrow \exists F \in IF$
tel que $B = f(F)$ et par suite $f(F) \subset V$

" $\Leftarrow$ " Montrons qur l est limite de f suivant la direction y_0 relativement au r-filtre IF, cela revient à montrer que la base du r-filtre $f(IF)$ converge vers l suivant y_0. D'où montrons que le filtre engendré par la base $f(IF)$
converge vers l suivant y_0 qui est equivalent à $V(l, y_0) \subset [f(IF)]$
D'où soit $V \in V(l, y_0)$ alors par définition même de $V(l, y_0)$, $\exists$ W $\in Dy_0(l)$ tel que :
$W \subset V$.Puisque $W \in Dy_0(l)$ alors par hypothèse
$\exists F \in IF$ tel que $f(F) \subset W \subset V$ comme $f(F) \in f(IF)$ Alors

$V \in [f(IF)]$,
ainsi le théorème est démontré.

Il est clair que le théorème précédent peut être énnoncé de la manière suivante.

Conséquence:

$l \in \gamma$ est limite de f suivant la direction y_0 relativement au r-filtre IF si et seulement si $f^{-1}(V) \in IF\ \forall V \in D_{\gamma_0}(l)$

6. Limite d'une suite suivant une direction:

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de points d'un v-espace convexe X.

et $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$
$n \longmapsto x_n$, une application.

Pour $n \geq 0$, soit $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$: le v-filtre élémentaire associé à la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est $F = \{A \in P(X), \exists n \geq 0 : X_n \subset A\}$.

Remarque : On peut voir facilement que F est le v-filtre engendré par la base de v-filtre, $f(IF_{\mathbb{N}})$, où $IF_{\mathbb{N}}$ est le v-filtre de FRECHET.

DEFINITION : On dit que x_n converge vers x suivant la direction x_0 relativement au v-filtre F si :

$\forall V \in V(x, x_0)\ \exists n_0 \geq 0$, tel que $\forall n \geq n_0 : x_n \in V$.

THEOREME 4 : $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x suivant la direction x_0 relativement au v-filtre F si et seulement si le filtre élementaire associé à $(x_n)_n$ converge vers x suivant la direction x_0.

Démonstration : $F \xrightarrow[x_0]{} x \Leftrightarrow V(x, x_0) \subset F \Leftrightarrow$

$\forall V \in V(x, x_0)\ \exists n \geq 0 : X_n \subset V \Leftrightarrow$

$\forall V \in V(x, x_0), \exists n \geq 0, \forall m \geq n ; x_m \in V$. D'où la convergence de x_n vers x suivant la direction x_0 relativement à F.

7. Continuité d'une fonction suivant une direction :

Soient $(\chi, D1)$, $(Y, D2)$ deux r-espaces connexes

Définition 9:

$f : (\chi, D1) \rightarrow (Y, D2)$ une application

Soient $x_0, \boldsymbol{x}$ 2 éléments de χ. On dit que f est continue en x_0 suivant la direction $\boldsymbol{x}$ si $\forall V \in D_{f(\boldsymbol{x})}(f(x_0))\ \exists\ W \in D_{\boldsymbol{x}}(x_0)$ tel que $f(W) \subset V$.

Remarque:

Si on prend dans cette définition $x = \{\phi\}$, alors cette définition coïncide avec celle introduite au chapitre 2.

THEOREME 5:

f est continue en $x_0 \in \chi$ suivant la direction $\boldsymbol{x} \in \chi$ si et seulement si $f(x_0)$ est limite de f relativement au r–filtre $V(\boldsymbol{x}, x_0)$ suivant $f(\boldsymbol{x})$..

Démonstration:

" $\Leftarrow$ " Supposons que $f(x_0)$ est limite de f relativement au r–filtre $V(\boldsymbol{x}, x_0)$ suivant $f(\boldsymbol{x})$. soit alors $V \in D_{f(\boldsymbol{x})}(f(x_0))$ exite -t-il $W' \in D_{\boldsymbol{x}}(x_0)$ tel que $f(W') \subset V$ (d'aprés la définition 9).
Soit $V \in D_{f(\boldsymbol{x})}(f(x_0))$ alors V est un voisinage de $f(x_0)$ contenant $f(\boldsymbol{x})$ alors d'aprés notre hypothèse en utilisant le Théorème 3 $\exists$ W$\in V(\boldsymbol{x}, x_0)$ tel que $f(W) \subset V$. Comme $V(\boldsymbol{x}, x_0)$ est un r-filtre engendré par $D_{\boldsymbol{x}}(x_0) \Rightarrow \exists\ W' \in D_{\boldsymbol{x}}(x_0)$ tel que $W' \subset W \Rightarrow f(W') \subset f(W)$
D'où $\exists W' \in D_{\boldsymbol{x}}(x_0)$ tel que $f(w') \subset V$.

D'où d'aprés la définition 9, f est continue en x_0 suivant la direction $\boldsymbol{x}$.

" $\Rightarrow$ " soit f conrinue en x_0 suivant la direction $\boldsymbol{x}$ alors d'aprés la définition9:
$\forall\ V \in D_{f(\boldsymbol{x})}(f(x_0))\ \exists\ W \in D_{\boldsymbol{x}}(x_0)$ tel que $f(W) \subset V$.

Soit:

$V \subset V(f(\chi), f(x_0)) \Rightarrow \exists\, V' \in D_{f(\chi)}(f(x_0))$ tel que $V' \subset V$, et pour $V' \in D_{f(\chi)}(f(x_0))\ \exists\, W' \in D_{\chi}(x_0)$
$f(W') \subset V' \subset V$ (par hypothèse).
dire que $W' \in D_{\chi}(x_0) \Rightarrow W' \in V(\chi, x_0) \Rightarrow f(W') \in f(V(\chi, x_0))$ or $f(W') \subset V$
$\Rightarrow V \in [f(V(\chi, x_0))]$.

D'où $V(f(\chi), f(x_0)) \subset [f(V(\chi, x_0))]$ D'aprés la définition 7 $\Rightarrow f(x_0)$ est limite de f relativement au r-filtre $V(\chi, x_0)$ suivant $f(\chi)$. Le Théorème est démontré.

Remarque:

De ce Théorème résulte que la continuité en un point x_0 suivant une direction y peut être défini e à l'aide de la notion de limite suivant la direction $f(y)$,
relativement au r-filtre $V(x, x_0)$.

LEMME : Soit IB une base d'un r-filtre sur χ Alors :

$$f([B]) \subset [f(B)]$$

Démonstration:

Soit $K \in f([IB]) \Rightarrow \exists\, B \in [IB]$ tel que $K = f(B)$
Comme $B \in [IB] \Rightarrow \exists\, C \subset IB$ tel que $C \subset B$
$\Rightarrow f(C) \subset f(B)$ or $f(C) \in f(IB)$ et $f(C) \subset K \Rightarrow K \in [f(IB)]$

Ainsi le lemme est démonıré.

THEOREME 6 :

Soient $(\chi, D1)$, $(Y, D2)$ 2 r-espaces connexes, f une application de $(\chi, D1)$ dans $(Y, D2)$, et $x_0 \in \chi$, si f est continue au point $x_0 \in \chi$ suivant la direction x, alors Pour toute base IB de r-filtre sur χ qui converge vers x_0 suivant la direction x, la base de r-filtre $f(IB)$ converge vers $f(x_0)$ suivant la direction $f(x)$.

Dém :

Supposons que f est continue au point x_0 suivant x et soit IB une base de r-filtre sur χ qui converge vers x_0 suivant x d'où par définition $V(x_0, x) \subset [IB]$ comme f est continue en x_0 suivant la direction x alors d'aprés l $f(x_0)$ est limite de f relativement au r-filtre $V(x_0, x)$ suivant $f(x)$ d'où d'aprés la définition 7 la base du r-filtre $f(V(x_0, x))$ converge vers $f(x_0)$ suivant $f(x)$ c'est à dire que $V(f(x_0), f(x)) \subset [f(V(x_0, x))]$

Soit $V \in V(f(x_0), f(x)) \Rightarrow V \in [f(V(x_0, x))] \Rightarrow \exists W \in f(V(x_0, x))$ tq $W \subset V$
Comme $V(x_0, x) \subset [B]$ (par hypothèsse) Alors $f[V(x_0, x)] \subset f([B])$
Donc $\exists W \in f([B])$ tq $W \subset V$, comme $f([B]) \subset [f(B)]$

$\Rightarrow \exists W \in [f(B)]$ tq : $W \subset V$ Donc $V \in [f(B)]$ (par définition d'un r-filtre). D'où $V(f(x_0), f(x)) \subset [f(B)]$.

8. Composée de 2 applications

THEOREME :

Soient $(X, D1), (Y, D2), (Z, D3)$ 3 espaces connexes, F un r-filtre sur Z, $x_0 \in \chi$ et g une application de Z dans χ admettant une limite $x \in \chi$ relativement à F suivant la direction x_0, si l'application f définie de χ dans Y est continue au point x suivant la direction x_0.

Alors l'application composée fog admet la limite $f(x)$ relativement au r-filtre F suivant la direction $f(x_0)$.

Démonstration :

Comme g admet une limite x relativement à F suivant x_0 Alors par définition, la base du r-filtre, $g(F)$ converge vers x suivant x_0 c'est à dire que $V(x, x_0) \subset [g(F)]$.
or f est continue en x suivant la direction x_0, alors d'aprés le THEOREME 5 on a $f(x)$ est limite de f relativement au r-filtre $V(x, x_0)$ suivant $f(x_0) \Rightarrow V(f(x), f(x_0)) \subset [f(V(x, x_0))]$

Soit $V \in D_{f(x_0)}(f(x))$, existe-t-il $F \in \mathbb{F}$ tq. $(f \circ g)(F) \subset V$.

Soit $V \in D_{f(x_0)}(f(x))$ alors $V \in \mathcal{V}(f(x), f(x_0)) \Rightarrow V \in [f(\mathcal{V}(x,x_0))]$

$\Rightarrow \exists W \in f(\mathcal{V}(x,x_0)) : W \subset V$

D'où $\exists V_1 \in \mathcal{V}(x,x_0)$ tq. $W = f(V_1)$ et $W \subset V$

Comme $V_1 \in \mathcal{V}(x,x_0) \Longrightarrow V_1 \in [g(\mathbb{F})]$

Donc $\exists V_2 \in g(\mathbb{F})$ tq. $V_2 \subset V_1$.

D'où $\exists F \in \mathbb{F}$ tq. $V_2 = g(F)$ avec $V_2 \subset V_1$.

Alors on a $g(F) \subset V_1 \Rightarrow (f \circ g)(F) \subset f(V_1) \subset W \subset V$.

Donc $\exists F \in \mathbb{F}$ tq. $(f \circ g)(F) \subset V$, d'après le théorème 3 $(f \circ g)$ admet la limite $f(x)$ relativement au v-filtre $\mathbb{F}$ suivant la direction $f(x_0)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ZUZCAK I. : Generalized Topological spaces.

Math Slova 33, 1983, W°3, p.p. 249-256

[2] ZUZCAK I. : Bases in r-spaces. Math Slova 35, 1985, W°2, pp. 175-184.

[3] ZUZCAK I. : Homeomorphism And Continuity of r-espaces

Math Slova 34, 1984, N°4, pp. 345-354.

[4] KELLY J.L : General Topology

Dvan Norstround Company, New York 1955.

[5] KURATOWSKI. K: Topology, Volume II.

Academic Press, New York And London 1968.

[6] BOURBAKI N. : Elements de Mathematiques.

Topologie Générale Chapitre 1 à 4.

Hermann, Paris, 1971.

[7] ENGELKING R. : General Topology

Monographie Matematyczene Tom 60.

Polish Scientific Publishers. Warszawa 1985.