REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI - CONSTANTINE -

FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre :............................
Série :......................................

MEMOIRE

Présenté Pour Obtenir Le Diplôme De Magister
En Mathématiques

THEME

SUR LA METHODE DE FOURIER POUR L'ETUDE D'UNE CLASSE D'EQUATIONS OPERATORIELLES

Option :
Analyse

PAR :

Mme Derdoukh Assma

Devant le jury :

Président :	M. Denche	Prof.	Univ. Mentouri Constantine
Rapporteur :	A. Hebbeche	M.C.	Univ. Mentouri Constantine
Examinateurs :	C. Saidouni	M.C.	Univ. Mentouri Constantine
	A. Hameida	M.C.	Univ. Mentouri Constantine

Remerciement

Mes remerciement s'adressent à :

Monsieur le professeur A.HEBBECHE pour l'attention et la disponibilité dont il a su faire preuve au cours de ces années de thèse.

Je voudrai également remercier les membres de mon jury :

Mr .M.DENECHE professeur à l'université Mentouri de Constantine.

Mr .A.HAMEIDA et Mr .C.SAIDOUNI ; Maitres de conférences à l'université Mentouri de Constantine, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en portant leur attention sur ce travail.

Dédicace

Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour, le respect, la reconnaissance, c'est tous simplement que : Je dédie cette thèse de magistère à :

A Ma tendre Mère Khamsa : Tu représente pour moi la source de tendresse et l'exemple de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager. Tu as fait plus qu'une mère puisse faire pour que ses enfants suivent le bon chemin dans leur vie et leurs études.

A Mon très cher Père Hocine : Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours pour vous. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. Ce travail et le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation le long de ces années.

A mon très cher mari Youcef Yazid : Tes sacrifices, ton soutien moral et matériel m'ont permis de réussir mes études. Ce travail soit témoignage de ma reconnaissance et de mon amour sincère et fidèle.

A la mémoire de mon petit bébé Mohamed Iade ; je t'aime énormément.

A mon cher frère : Oussama.

A mes sœurs : Amel, Karima et Chahira.

A mes chers beaux parents.

A mes chère belle sœurs, mes chers beaux frères.

A mes très chère amis : djamaa , fairouz , nawel ,assia , hiba ,noura , chafia mounia , salim ,abdelhaq ,meriem ,asma .

A monsieur Nedjahi abdelwahab : Cette humble dédicace ne saurait exprimer nom grand respect et ma profond estime, que dieu vous procure bonne santé et long vie.

A monsieur Yahyaoui : qui ne cessé pas de m'encourager et me conseillée. Cette humble dédicace ne saurait exprimer mon grand respect et ma profonde estime.

A tous les membres de ma promotion.

A tous mes enseignants depuis mes premières années d'études.

A tous ceux qui me sens chers et que j'ai omis de citer.

Table des matières

Introduction

Bien que la théorie abstraite des opérateurs auto-adjoints et symétriques semble achevée, le probleme de la décomposition spectrale explicite des opérateurs concrets (différentiels, integraux, integro-differentiels, etc.) est un domaine de recherche important. Il y a un grand nombre de travaux consacrés à la décomposition spectrale des opérateurs differentiels ordinaires et aux dérivées partielles, voir par exemple les monographies de N. I. Akhiezer et I. M. Glazman [1], Yu. M. Berezanskii [3], Kostyuchenko A. G et Sargsyan I. S. [5], .B.M. Levitan [8], M. A. Naimark [10] et E. C. Titchmarch [20].

Le mémoire présenté est consacré à l'étude des propriétés spectrales d'operateurs symétriques réguliers d'une part, et d'autre part à la methode de Fourier pour une classe d'equations operatorielles. Elle est composée de deux chapitres. On commence tout d'abord au premier chapitre par une étude détaillée des proprietes spectrales des opérateurs auto-adjoints et symétriques réguliers pour le plus de details voir [2, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]. On commence par une presentation de la classification des points du spectre d'un operateur auto-adjoint. Une grande partie est consacrée à la construction d'extensions auto-adjointes d'un operateur symétrique et à l'étude de leur spectre. En particulier on présente l'étude des résolvantes generalisées d'une certaine classe d'opérateurs symétriques d'indice de défaut $(1, 1)$, une formule explicite de ces résolvantes est donnée, differentes questions de la théorie des extensions auto-adjointes et des résolvantes généralisées ont été développées dans [4, 6, 7, 9, 14, 15, 16, 17, 18, 19] .

Le dernier chapitre est consacré au développement de la méthode de Fourier pour une classe d'equations opératorielles à opérateurs symétriques à indices de défaut fini, et enfin on termine le chapitre par une illustration des resultats obtenus sur un exemple concret.

Première partie

Notions préliminaires sur les opérateurs symétriques et auto-adjoints

Soit H un espace de Hilbert.

Un opérateur A dans H est une application linéaire dont le domaine $D(A)$ est un sous-espace de H et dont l'image $R(A)$ est contenue dans H .

Le graphe $G(A)$ d'un opérateur A dans H est un sous-espace de $H \times H$ défini par :

$$G(A) = \{\{x, Ax\} \text{ telque} : x \in D(A)\} .$$

L'espace nul $N(A)$ d'un opérateur A dans H est défini par :

$$N(A) = \{ \ x \in D(A) \text{ tel que} : Ax = 0\} .$$

L'opérateur S est une extension de l'opérateur A (i.e.) $D(A) \subset D(S)$ et $Sx = Ax$ pour toute $x \in D(A)$ si et seulement si , $G(A) \subset G(S)$ et on écrit : $A \subset S$.

Opérations algébriques :

– La somme :

$(S + A)(x) = Sx + Ax$ avec $D(S + A) = D(S) \cap D(A)$.

– Le produit :

$$(S.A)(x) = S(A(x)) \text{ avec } D(S.A) = \{x \in D(A) \text{ tel que} : A(x) \in D(S)\}.$$

- Les lois usuelles d'associativité : $(R + S) + A = R + (S + A)$, $(RS)A = R(SA)$.
- Les lois de distributivité : $(R + S)A = RA + SA$, $A(R + S) \supset AR + AS$. Car il se peut que $(R + S)x \in D(A)$ même si Rx ou Sx n'est pas dans $D(A)$.
- Multiplication par scalaire :
  Si $\alpha = 0$ Alors $D(\alpha A) = H$ et $\alpha A = 0$.
  Si $\alpha \neq 0$ Alors $D(\alpha A) = D(A)$ et $(\alpha A)x = \alpha(Ax)$ pour $x \in D(A)$.

Définition 1 *(opérateur fermé) Un opérateur fermé dans H est un opérateur dont le graphe est un sous-espace fermé de $H \times H$.*

Lemme 1 *Un opérateur A est fermé si et seulement si, pour chaque suite : $(f_n)_n \subset D(A)$ telle que :*

$\lim_{n\to\infty} f_n = f$ et $\lim_{n\to\infty} Af_n = g$. Alors : $f \in D(A)$ et $Af = g$.

Proposition 1 *Si l'opérateur A est fermé . Alors tout opérateur $A - \lambda I$ est fermé.*
Si l'opérateur A est fermé et A^{-1} existe .Alors A^{-1} est fermé .

Définition 2 ***(opérateur fermable)*** *On dit que l'opérateur A est fermable s'il admet une extension fermée ; dans ce cas il admet un plus petit prolongement fermé noté $\overline{A}$ appelé fermeture de l'opérateur A.*

Lemme 2 *Un opérateur Aest fermable,si pour chaque suite : $(f_n)_n \subset D(A)$ telle que : $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$, nous avons :*

$$\lim_{n\to\infty} Af_n = 0,$$

. *ou*

$$\lim_{n\to\infty} Af_n \quad n\prime existe \;\; pas.$$

Corollaire 1 *Lorsque A est fermable , sa fermeture $\overline{A}$ est complètement déterminée par son graphe $G(\overline{A})$, qui n'est autre que l'adhérence $\overline{G(A)}$ de $G(A)$ dans $H \times H$ (i.e.) Si A est fermable Alors : $G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$.*

Définition 3 ***(opérateur adjoint)*** *Soit A un opérateur linéaire avec $D(A)$ dense dans H . Alors l'opérateur Aadmet un opérateur adjoint A^* ,son domaine $D(A^*)$ est défini comme suit :*

$$g \in D(A^*) \Leftrightarrow \exists g^*$$

tel que

$$(Af, g) = (f, g^*)$$

pour $f \in D(A)$ et $A^*g = g^*$.

Les seuls opérateurs qui donneront un adjoint A^* sont les opérateurs à domaine dense.

Les opérateurs à domaine dense sont exactement les opérateurs vérifiant $A \subset A^*$.

En outre, si $D(A)$ est dense dans H et $(Ax, y) = (x, Sy)$ pour toute $x \in D(A)$ et $y \in D(A^*)$ et $y \in D(S)$ alors $S \subset A^*$.

Définition 4 ***(opérateur auto-adjoint)*** *Un opérateur A est dit auto- adjoint si $A = A^*$.*

Corollaire 2 *A Est un oppérateur linéaire tel que : $\overline{D(A)} = H$ et A^{-1} existe tel que : $\overline{D(A^{-1})} = H$.Alors : $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.*

Démonstration. $D(A)$ Dense dans H. Alors : A^* existe et $D(A^{-1})$ Dense dans H. Alors : $(A^{-1})^*$ existe ; Montrons que :$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.Pour $f \in D(A)$ et $g \in D((A^{-1})^*)$. Alors :

$$(f, g) = (A^{-1}Af, g) = (Tf, (A^{-1})^*g).$$

Cette équation montre que :

$$(A^{-1})^*g \in D(A^*) \text{ et } A^*(A^{-1})^*g = g.$$

Pour $f \in D(A^{-1})$ et $h \in D(A^*)$. Alors :

$$(f, h) = (AA^{-1}f, h) = (A^{-1}f, A^*h).$$

Cette équation montre que :

$$A^*h \in D((A^{-1})^*)et(A^{-1})^*A^*h = h.$$

Donc : $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. ∎

Théorème 1 *Supposons que S , A et SA sont des opérateurs à domaine dense dans H :*
Alors :

$$A^*S^* \subset (SA)^*$$

Ce qui affirme que $(SA)^*$ est une extension de A^*S^*.
Si de plus $S \in B(H)$ Alors :

$$A^*S^* = (SA)^*$$

Ce qui Implique que A^*S^* et $(SA)^*$ ont le même domaine.

Démonstration. Supposons que : $x \in D(SA)$ et $y \in D(A^*S^*)$ donc :

$$y \in D(S^*) \ et \ \ S^*y \in D(A^*)$$

Donc

$$(x, A^*S^*y) = (Ax, S^*y),$$

donc

$$Ax \in D(S) \ \ et \ \ \ y \in D(S^*)$$

et

$$(Ax, S^*y) = (STx, y) \ \ donc \ \ y \in D((SA)^*)$$

Alors $D(A^*S^*) \subset D((SA)^*)$ et $(x, A^*S^*y) = (x, (SA)^*y)$

Donc :

$$A^*S^* \subset (SA)^*$$

Supposons $S \in B(H)$, alors : $S^* \in B(H)$ de sorte que : $D(S^*) = H$,
et soit :$y \in D((SA)^*)$ et $x \in D(SA)$:

$$(x, (SA)^*y) = (SAx, y) = (Ax, S^*y)$$

car $y \in H = D(S^*)$ donc $S^*y \in D(A^*)$.

On a : $y \in D(S^*)$ et $S^*y \in D(A^*)$ alors :$y \in D(A^*S^*)$.

Et de la $1^{ère}$ partie $D(A^*S^*) \subset D((SA)^*)$ et (x, A^*S^*y).

Donc : $A^*S^* = (SA)^*$. ■

Théorème 2 *Pour chaque opérateur A à domaine $D(A)$ dense dans H, le complèment orthogonal de l'image est l'espace nul de l'adjoint (i.e.) :*

$$R(A)^{\perp} = N(A^*).$$

Et de plus : si $R(A)$ est fermé alors $R(A) = N(\ A^*)^{\perp}$ (i.e.) :

L'équation $Ax = f$ admet une solution x si et seulement si, $f \in N(\ A^*)^{\perp}$.

Démonstration. Soit $z \in R(A)^{\perp}$ donc : $(z, Au) = 0 \forall u \in D(A)$.

Et on a $(Au, z) = (u, A^{*}z) = 0\ \forall u \in D(A)$

alors $A^{*}z = 0$ Ce qui implique que : $z \in N(\ A^{*})$.

Soit $z \in N(\ A^{*})$ donc : $A^{*}z = 0$ donc :

$$(u, A^{*}z) = 0 \forall u \in D(A).$$

Et on a

$$(u, A^{*}z) = (Au, z) = 0 \forall u \in D(A)$$

Ce qui implique que $z \in R(A)^{\perp}$.

Si $R(A)$ est fermé : $R(A) = R(A)^{\perp\perp} = N(A^{*})^{\perp}$. ■

Graphes et opérateur symétrique

Si H est un espace de Hilbert, Alors $H \times H$ peut être muni d'une structure d'espace de Hilbert,

En définissant le produit scalaire de deux éléments $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$ de $H \times H$ par :

$$(\{a, b\}, \{c, d\}) = (a, c) + (b, d)$$

.

Où (a, c) désigne le produit scalaire dans H.

En particulier la norme dans $H \times H$ est donné par :

$$\| \{a, b\} \|^{2} = \| a \|^{2} + \| b \|^{2}$$

On définit $J\{a, b\} = \{-b, a\}$ tel que $a, b \in H$

Alors J est un opérateur unitaire sur $H \times H$ et :

$$J^{2}\{a, b\} = J.J(\{a, b\}) = J\{-b, a\} = -\{a, b\}$$

Donc $J^2 = -I$

Si M est un sous-espace quel quonque de $H \times H$. Alors $J^2 M = M$.

Théorème 3 *Si A est un opérateur à domaine dense dans H, alors :*

$$G(A^*) = [JG(A)]^\perp$$

Le supplémentaire orthogonal de $JG(A^*)$ dans $H \times H$.
(Si $G(A^*)$ est connu, il est de même pour $D(A^*)$ et A^*).

Démonstration. Chacun des quatre énoncés suivants est équivalent a celui qui le suit et / ou celui qui le précède :

$$\{y, z\} \in G(A^*) \quad [y \in D(A^*) \text{ et } A^* y = z] \qquad [(x, A^* y) = (x, z)] \,.$$

$(Ax, y) = (x, z)$ pour toute $x \in D(A) \quad [(-Ax, y) + (x, z) = 0]$.
$(\{-Ax, x\}, \{y, z\}) = 0$ pour toute $x \in D(A) \quad [(J\{x, Tx\}, \{y, z\}) = 0]$.
$\{y, z\} \in [JG(A)]^\perp$. ■

Théorème 4 *Si A est un opérateur à domaine dense dans H, Alors A^* est un opérateur fermé.*

En particulier les opérateurs auto-adjoints sont fermés.

Démonstration. Pour toute $M \subset H \times H$, $M^\perp$ est fermé,
et d'aprés le théorème précédent :

$$G(A^*) = [JG(A)]^\perp \,.$$

Donc $G(A^*)$ est fermé dans $H \times H$ donc A^*est un opérateur fermé. ■

Théorème 5 *Si A est un opérateur fermé à domaine dense dans H , alors :*

$$H \times H = JG(A) \oplus G(A^*).$$

Démonstration. On a le théorème suivant :
Si M est un sous espace fermé de H Alors :

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

Appliquant ce théorème pour $M = J(G(A))$.
A est fermé alors $G(A)$ esr fermé, et puisque J est unitaire alors : $J(G(A))$ est fermé.
Et on a :

$$[JG(A)]^{\perp} = G(A^*)$$

donc :

$$H \times H = J(G(A)) \oplus [J(G(A))]^{\perp} = J(G(A)) \oplus G(A^*).$$

■

Corollaire 3 *Si $a, b \in H$, le système d'équation :*

$$\begin{cases} -Ax \ + y \ = a \\ x + A^* y \ = b \end{cases}$$

Admet une solution unique : $\{x, y\}$ avec $x \in D(A)$, $y \in D(A^*)$.

Démonstration. Soit $\{a, b\} \in H \times H$ et on a $H \times H = J(G(A)) \oplus G(A^*)$ donc il existe $x \in D(A)$ unique et il existe $y \in D(A^*)$ unique tel que :

$$\{a, b\} = \{-Ax, x\} + \{y, A^* y\}.$$

Et car l'écriture dans la somme directe est unique.
Donc :

$$\{a, b\} = \{-Ax + y, x + A^* y\}$$

Donc le système d'équation : admet une solution unique $\{x, y\}$ tel que :

$$x \in D(A), y \in D(A^*).$$

■

Théorème 6 *Si A est un opérateur fermé à domaine dense dans H, Alors : $D(A^*)$ et dense dans H et*

$$A^{**} = A.$$

Démonstration. Puisque J est unitaire et $J^2 = -I$, on a :

$$\{x, Ax\} \in G(A) \Leftrightarrow (x, A^*y) = (Ax, y) \quad pour \quad toute \quad y \in D(A^*)$$

$$\Leftrightarrow (\{-A^*y, y\}, \{x, Ax\}) = 0 \quad pour \quad toute \quad y \in D(A^*).$$

$$\Leftrightarrow \{x, Ax\} \in [JG(A^*)]^{\perp}$$

Donc on peut écrire :

$$H \times H = G(A) \oplus JG(A^*)$$

Donc

$$[JG(A^*)]^{\perp} = G(A).$$

Montrons que : $D(A^*)$ est dense dans H :

Soit $z \perp D(A^*)$ alors $(y, z) = 0$ pour toute $y \in D(A^*)$.

Donc $(0, -A^*y) + (z, y) = 0$ pour toute $y \in D(A^*)$.

Donc $(\{0, z\}, \{-A^*y, y\}) = 0$ pour toute $y \in D(A^*)$.

Donc $\{0, z\} \in [JG(A^*)]^{\perp} = G(A)$ ce qui implique que :

$z = A(0)$ donc $D(A^*)$ est dense dans H doncA^{**} est défini.

On a $H \times H = J(G(S)) \oplus G(S^*)$ pour S un opérateur fermé à domaine dense, pour $S = A^*$ on aura :

$$H \times H = J(G(A^*)) \oplus G(A^{**})$$

Donc $G(A^{**}) = [JG(A^*)]^{\perp} = G(A)$ de sorte que $A^{**} = A$. ■

Théorème 7 *Pour qu'un opérateur A soit fermable, il faut et il suffit que $D(A^*)$ soit dense dans H.*
Dans ce cas, l'opérateur$(A^*)^*$, noté A^{**}est précisément la fermeture $\overline{A}$ de A.
On particulier, $A = A^{**}$ si A est fermé, et on a toujours $(A^{**})^* = A^*$.

Définition 5 ***(valeur propre)*** *Un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est appelé une valeur propre de l'opérateur linéaire A s'il existe un vecteur $f \neq 0$ tel que $Af = \lambda f$.*
( ) f est appelé un vecteur propre de l'opérateur A associé à la valeur propre λ.*
(*) Pour une valeur propre fixée λ, l'ensemble des vecteurs vérifiant l'équation $Af = \lambda f$ est appelé le sous-espace propre de l'opérateur A associé à λ.
(ll contient au moins un vecteur non nul).
La multiplicité d'une valeur propre λ est définie par la dimension (fini ou infini) du sous-espace propre associé à λ.

Théorème 8 *Si λ_i, $i = \overline{1,n}$ des valeurs propres distinctes d'un opérateur A défini sur $D(A)$ et x_i, $i = \overline{1,n}$ Les vecteurs propres associés.*
Alors l'ensemble $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est linéairement indépendant.

Démonstration. On suppose que ce n'est pas le cas,donc il existe un entier $k \in [2, n]$ tel que l'ensemble $\{x_1, x_2, ..., x_{k-1}\}$ est linéairement indépendant est x_k peut s'exprimer sous la forme : $x_k = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_{k-1} x_{k-1}$ où α_i ne sont pas tous nuls.
Appliquant l'opérateur $A - \lambda_k I$ sur l'équation on obtient :

$$\begin{aligned} (A - \lambda_k I)x_k &= (A - \lambda_k I)\left[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_{k-1} x_{k-1}\right] \\ 0 &= \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)x_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k)x_2 + ... + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x_k. \end{aligned}$$

Et puisque l'ensemble $\{x_1, x_2, ..., x_{k-1}\}$ est linéairement indépendant alors :

$$\alpha_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0 \ \ pour \ \ i = \overline{1, (k-1)}$$

Et on a : $\lambda_i \neq \lambda_m$ implique $\alpha_i = 0$ pour $i = \overline{1, (k-1)}$ donc on a une contradiction. ■

Définition 6 ***(Opérateur linéaire symétrique)*** *Un opérateur linéaire A est dit symétrique si :*
$D(A)$ est dense dans H . Et pour $f, g \in D(A)$:

$$(Af, g) = (f, Ag).$$

Théorème 9 *Soit A un opérateur défini sur H dans H , si A est symétrique alors :*
Le produit scalaire $(Af, f) \in \mathbb{R}$ pour toute $f \in D(A)$.
Les valeurs propres d'un opérateur symétrique T sont réelles.
Les vecteurs propres f_1, f_2 associés à deux valeurs propres différentes λ_1, λ_2 d'un opérateur symétrique A , sont orthogonaux.

Démonstration. 1) pour $f \in D(A)$: $(Af, f) = (f, Af) = \overline{(Af, f)}$ donc :

$$(Af, f) \in \mathbb{R} \ \ pour \ \ toute \ \ f \in D(A).$$

2) Soit λ une valeur propre de A alors : $Af = \lambda f \quad (f \neq 0)$. donc :

$$\lambda(f, f) = (\lambda f, f) = (Af, f) = (f, Af) = (f, \lambda f) = \overline{\lambda}(f, f)$$

Donc :$\lambda = \overline{\lambda}$ ce qui implique : $\lambda \in \mathbb{R}$.
3) On a : $Af_1 = \lambda_1 f_1$ et $Af_2 = \lambda_2 f_2$ tel que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ donc :

$$\lambda_1(f_1, f_2) = (\lambda_1 f_1, f_2) = (Af_1, f_2) = (f_1, Af_2) = (f_1, \lambda_2 f_2) = \lambda_2(f_1, f_2)$$

Donc : $(\lambda_1 - \lambda_2)(f_1, f_2) = 0$. Alors : $(f_1, f_2) = 0$. ■

Remarque 1

L'opérateur symétrique A est dit positif si :$(Af, f) \geq 0$ pour toute $f \in D(A)$.
L'opérateur symétrique A est dit négatif si : $(Af, f) \leq 0$ pour toute $f \in D(A)$.

Lemme 3 *Un opérateur A défini sur $D(A)$ est auto-adjoint si et seulement si : A est un opérateur symétrique et $D(A) = D(A^*)$.$(i.e) \quad A = A^*$.*

Théorème 10 *Soit A un opérateur symétrique :*

a) Si $D(A) = H$ alors : A est auto-adjoint et $A \in B(H)$.

b) Si A est auto-adjoint et injectif alors : $R(A)$ est dense dans H, et A^{-1} est auto-adjoint .

c) Si $R(A)$ est dense dans H alors : A est injectif.

d) Si $R(A) = H$ alors : A est auto-adjoint et $A^{-1} \in B(H)$.

Démonstration. a) D'après théorème du graphe fermé : $A \in B(H)$ si seulement si $D(A) = H$ et A est fermé.

On a $D(A) = H$ et $A \subset A^*$ donc $D(A) \subset D(A^*)$ et $D(A^*) \subset H = D(A)$ donc :

$$H = D(A) = D(A^*)$$

Et car A est symétrique $(Ax, y) = (x, Ay) = (A^*x, y)$ pour $x, y \in H$.

Donc $A = A^*$ donc A est fermé et $D(A) = H$ alors $A \in B(H)$.

b) Supposons $y \perp R(A)$ alors $x \longrightarrow (Ax, y) = 0$ est continue dans $D(A)$ et $(Ax, y) = (x, A^*y)$ donc $y \in D(A^*) = D(A)$ et $(x, Ay) = (Ax, y) = 0$.

Pour toute $x \in D(A)$ alors $Ay = 0$ et A injectif alors $y = 0$.

Donc $R(A)$ dense dans H.

On a

$$A^{-1} : R(A) \longrightarrow D(A)$$

donc A^{-1} à domaine dense dans H et $D(A^{-1}) = R(A)$ donc : $(A^{-1})\ ^*$ existe.

Soit

$$\begin{aligned} \{a, b\} \quad &\in \quad G(A^{-1}) \Longleftrightarrow \{b, a\} \in G(A) \\ &\Longleftrightarrow \quad \{b, -a\} \in G(-A) \\ &\Longleftrightarrow \quad \{a, b\} \in JG(-A) \end{aligned}$$

Donc :

$$G(A^{-1}) = JG(-A)$$

On a : si M est un sous-espace de $H \times H$: $J\ ^2M = M$, pour $M = G(-A)$

$$G(-A) = J^2G(-A) = J(JG(-A) = JG(A^{-1})$$

donc :

$$JG(-A) = G(-A)$$

A est auto-adjoint donc A est fermé et $-A$ est fermé et on a :

$$G(A^{-1}) = JG(-A),$$

donc A^{-1} est fermé ; et on a :

$$H \times H = J(G(A)) \oplus G(A^*)$$

appliquant cette relation à A^{-1} et $-A$:

$$H \times H = JG(A^{-1}) \oplus G((A^{-1})^*)$$

et

$$H \times H = JG(-A) \oplus G((-A)^*)$$

donc :

$$H \times H = JG(-A) \oplus G(-A) \Longrightarrow [G(-A)]^{\perp} = JG(-A) \quad (car A = A^*)$$

$$(G(A^{-1}))^* = \left[JG(A^{-1})\right]^{\perp} = [G(-A)]^{\perp} = JG(-A) = G(-A)$$

donc

$$G((A^{-1})^*) = G(A^{-1})$$

donc : $(A^{-1})^* = A^{-1}$ alors A^{-1} est auto-adjoint.

c)Supposons : $Ax = 0$ alors : $(Ax, y) = (x, Ay) = 0$ pour $y \in D(A)$ (A symétrique) donc $x \perp R(A)$ donc $x = 0$ alors A est injectif.

d) Si $R(A) = H$ alors : $R(A) = \overline{R(A)} = H$, c) implique que A est injectif et

$$R(A) = D(A^{-1}) = H$$

Si $x, y \in H$ .Alors : $x = Az$ et $y = Aw$ pour un $z \in D(A)$ et $w \in D(A)$ de sort que :

$$(A^{-1}x, y) = (z, Aw) = (Az, w) = (x, A^{-1}y) \;\; (A \;\; symétrique)$$

Donc A^{-1} est un opérateur symétrique et de $(a)A^{-1}$ est auto-adjoint, et A^{-1} est dans $B(H)$ donc A^{-1} est borné, et de $(b)(A^{-1})^{-1} = A$ est auto-adjoint. ■

Définition 7 ***(Opérateur symétrique maximal)*** *Un opérateur symétrique A dans H est dit symétrique maximal si A n'admet pas d'extension symétrique propre, c'est-à-dire : si les hypothèses $A \subset S$ et S symétrique implique que $S = A$.*

Théorème 11 *Les opérateurs auto-adjoints sont symétrique maximaux.*

Démonstration. A auto-adjoint : $A = A^*$, on suppose que A admet une extension S symétrique ; $(S \subset S^*)$ donc $A \subset S$ alors $S^* \subset A^*$ (définition de l'adjoint) donc :

$$S \subset S^* \subset A^* = A \subset S$$

(i.e.) $S \subset A \subset S$ donc $S = A$. ∎

Remarque 2 *Les opérateurs symétriques maximaux ne sont pas nécessairement auto-adjoints.*

Théorème 12 *Si A est un opérateur symétrique dans H, les énoncés suivants sont vrais :*
a) $\| Ax + ix \|^2 = \| x \|^2 + \| Tx \|^2$, $x \in D(A)$.
b) A est un opérateur fermé si et seulement si $R(A + iI)$ est fermé.
c) $A + iI$ est injectif.
d) Si $R(A + iI) = H$, alors A est symétrique maximal.
Les énoncés précédents sont également vrais si nous remplaçons i par $-i$.

Démonstration. a) On a :

$$\begin{aligned} \| \quad & Ax + ix \|^2 = (Ax + ix, Ax + ix) = (Ax, Tx) + (Ax, ix) + (ix, Ax) + (ix, ix) \\ = \quad & \| Ax \|^2 - i(Ax, x) + i(x, Ax) - i.i(x, x) \\ = \quad & \| Ax \|^2 - i(Ax, x) + i(x, Ax) + \| x \|^2 \end{aligned}$$

donc :

$$\| Ax + ix \|^2 = \| x \|^2 + \| Ax \|^2 \; pour \;\; x \in D(A).$$

b) D'après a)

$$F : (A + iI)x \longrightarrow \{x, Ax\}$$

est une correspondance isométrique bijective entre : $R(A+il)$ et $G(A)$ donc F est continue.
Et on sait que : A Fermé $\Leftrightarrow G(A)$ fermé.
Et : F continue $\Leftrightarrow$ l'image réciproque d'un ensemble fermé est fermé (i.e.)

$$F^{-1}(G(A)) = R(A+iI)$$

est fermé.
c)Montrons : $A+iI$ est injectif :
On a $A+iI : x \to Ax+ix$, A injectif et linéaire$\Leftrightarrow N(A+iI) = \{0\}$

$$\begin{aligned} x &\in N(A+iI) \Leftrightarrow (A+iI)x = 0 \Leftrightarrow ((A+iI)x, (A+iI)x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \| x \|^2 + \| Tx \|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \| x \|^2 = 0 \quad et \ \| Ax \|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad et \quad Ax = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

donc $A+iI$ est injectif.
d) Si $R(A+iI) = H$ et A_1est une extension propre de $T(D(A) \subset D(A_1))$ alors A_1+iI est une extension propre de $A+iI$ (i.e.) :

$$A+iI : D(A) \to R(A+iI) = H$$

et

$$A_1+iI : D(A_1) \to R(A_1+iI)$$

Donc A_1+iI ne peut pas etre une injection, donc A_1 d'après c) n'est pas symétrique, donc A n'admet pas une extension symétrique, donc A est symétrique maximal. ■

Remarque 3 *Cette démonstration est également valable en remplaçant i par −i.*

0.1 Spectre et résolvante

Définition 8 ***(résolvante)*** *Soit A un opérateur à domaine dense dans H.*
L'opérateur $\Re_\lambda = (A-\lambda I)^{-1}$ qui dépend du paramètre λ est appelé la résolvante de l'opérateur A, elle est définie pour tout λ pour lequel $(A-\lambda I)^{-1}$ existe et son domaine $R(A-\lambda I)$ est dense dans H.

Définition 9 ***(point régulier)***

Soit A un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans H.
Le point λ du plan complexe $\mathbb{C}$ est appelé point régulier de A si la résolvante $\Re_\lambda = (A-\lambda I)^{-1}$ existe, définie sur tout H et borné.
L'ensemble des points réguliers de A est appelé ensemble résolvant, on le note $\rho(A)$,le spectre de A est le complémént de $\rho(A)$ on le note par : $\sigma(A)$ (i.e.) $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Théorème 13 *L'application : $(A-\lambda I) : D(A) \longrightarrow R(A-\lambda I)$ détermine un opérateur bijectif si et seulement si : λ n'est pas une valeur propre de l'opérateur A.*

Démonstration.

Implication indirecte :

Si : $A-\lambda I$ ne définit pas une bijection de $D(A)$ vers $R(A-\lambda I)$. Alors :$\exists\ f_1,\ f_2 \in D(A)$ tel que : $f_1 \neq f_2$ et : $Af_1 - \lambda\ f_1 = g$ et $Af_2 - \lambda\ f_2 = g \Rightarrow A(f_1 - f_2) - \lambda(\ f_1\text{-}f_2) = 0$ donc : $Af = \lambda f$ tel que : $f = f_1 - f_2$ et $f_1 \neq f_2$.
Donc : λ est une valeur propre de l'opérateur T.

Implication directe

λ une valeur propre de A. Alors :pour toute $f \neq 0$ on a : $Af = \lambda f \Rightarrow (A-\lambda I)f = 0$ .Alors : $(A-\lambda I)^{-1}$ n'existe pas.Donc $A-\lambda I$ ne détermine pas un opérateur bijectif. ■

Remarque 4 *Pour chaque point régulier de l'opérateur A ,la résolvante est un opérateur borné défini sur toute l'espace H.*
Si λ est un point régulier de l'opérateur A ,l'opérateur $\Re_\lambda$ détermine une bijection entre $R(A-\lambda I)$vers $D(A)$ (i.e.) $\Re_\lambda h = 0$ si et seulement si $h = 0$.

Théorème 14 *Pour chaque deux points réguliers λ et μ de l'opérateur A ,on a :*

$$\Re_{\mu} - \Re_{\lambda} = (\mu - \lambda)\Re_{\mu}\Re_{\lambda} \tag{1}$$

Cette équation est appelée la "relation de Hilbert".

Démonstration. On a :

$$\Re_{\lambda}h = \Re_{\mu}(A - \mu I)\Re_{\lambda}h$$

et aussi

$$\Re_{\mu}h = \Re_{\mu}(A - \lambda I)\Re_{\lambda}h$$

Et par soustraction on obtient :

$$\begin{aligned}
\Re_{\mu}h - \Re_{\lambda}h &= \Re_{\mu}(A - \lambda I)\Re_{\lambda}h - \Re_{\mu}(A - \mu I)\Re_{\lambda}h \\
\Re_{\mu}h - \Re_{\lambda}h &= \Re_{\mu}T\Re_{\lambda}h - \lambda\Re_{\mu}\Re_{\lambda}h - \Re_{\mu}T\Re_{\lambda}h + \mu\Re_{\mu}\Re_{\lambda}h \\
\Re_{\mu}h - \Re_{\lambda}h &= (\mu - \lambda)\Re_{\mu}\Re_{\lambda}h.
\end{aligned}$$

■

0.2 Spectre et résolvante d'opérateur auto-adjoint

Théorème 15 *.Le nombre λ est une valeur propre de l'opérateur auto-adjoint $\mathring{A}$ si et seulement si, $\overline{R(\mathring{A} - \lambda I)} \neq H$.*

Démonstration. Soit λ une valeur propre de l'opérateur $\mathring{A}$ donc $\mathring{A}f = \lambda f$ $(f \neq 0)$, alors pour toute $h \in D(\mathring{A})$:

$$(f, (\mathring{A} - \lambda I)h) = (\mathring{A}f - \lambda f, h) = 0$$

ce qui implique que :

$$h \in R(\mathring{A} - \lambda I)^{\perp} \tag{2}$$

Ce qui est possible que lorsque :

$$\overline{R(\mathring{A}-\lambda I)} \neq H.$$

On suppose que $\overline{R(\mathring{A}-\lambda I)} \neq H$ alors il existe $f \in D(\mathring{A})$ et $f \neq 0$ tel que $f \perp R(\mathring{A}-\lambda I)$ donc pour toute $h \in D(\mathring{A})$, $(f, R(\mathring{A}-\lambda I)h) = 0$ donc :

$$(\mathring{A}^* f - \lambda f, h) = 0 \quad donc \quad f \in D(\mathring{A}^*) \quad et \quad \mathring{A}^* f = \lambda f.$$

mais $\mathring{A}^* = \mathring{A}$ donc $\mathring{A}f = \lambda f$ (i.e.) est une valeur propre de $\mathring{A}$ et $\overline{\lambda} = \lambda$ car les valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint sont réelles. ■

Théorème 16 *Soit $\mathring{A}$ un opérateur auto-adjoint, désignons par :*

$$\Pi^+ = \{\lambda, \operatorname{Im} \lambda > o\}$$

et

$$\Pi^- = \{\lambda, \operatorname{Im} \lambda < o\}$$

Les demi plan supérieur et inferieur respectivement.
Les points non réels λ du plan complexe sont des points réguliers de l'opérateur auto-adjoint.

Démonstration. Le nombre : $\lambda = \xi + i\eta$ $(\eta \neq 0)$ ne peut pas être une valeur propre de $\mathring{A}$, d'après théorème 14, l'opérateur $(\mathring{A}-\lambda I)^{-1}$ existe, posant : $(\mathring{A}-\lambda I)\ f = g$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\|g\|^2 &= (\left\{\mathring{A}-\xi I\right\} f - i\eta f, \left\{\mathring{A}-\xi I\right\} f - i\eta f) \\
&= \left\|\left\{\mathring{A}-\xi I\right\} f\right\|^2 + i\eta(\left\{\mathring{A}-\xi I\right\} f, f) - i\eta(f, \left\{\mathring{A}-\xi I\right\} f) + \eta^2 \|f\|^2 \\
&= \left\|\left\{\mathring{A}-\xi I\right\} f\right\|^2 + \eta^2 \|f\|^2
\end{aligned}$$

Donc : $\|g\|^2 \geq \eta^2 \|f\|^2$ ce qui implique que : $|\eta| \|f\| \leq \|g\|$ donc$\|f\| \leq \dfrac{1}{|\eta|} \|g\|$.
Alors

$$\left\|(\mathring{A}-\lambda I)^{-1} g\right\| \leq \frac{1}{|\eta|} \|g\| .$$

Et puisque cette relation est valide pour toute $g \in R(\mathring{A} - \lambda I)$ l'opérateur $(\mathring{A} - \lambda I)^{-1}$ est borné, et d'après théorème15 et de λ n'est pas une valeur propre de A,

Alors : $\overline{R(\mathring{A} - \lambda I)} = H$.

Il reste à montrer que $R(\mathring{A} - \lambda I)$ est fermé ;

Supposant $\overline{R(\mathring{A} - \lambda I)} \neq R(\mathring{A} - \lambda I)$, on prolonge l'opérateur $(\mathring{A} - \lambda I)^{-1}$ par continuité sur $\overline{R(\mathring{A} - \lambda I)}$, ce prolongement coïncide avec la fermeture de $(\mathring{A} - \lambda I)^{-1}$ qui est non fermé,ce qui est impossible car la fermeture de $\mathring{A}$ implique la fermeture de $(\mathring{A} - \lambda I)^{-1}$. ■

Corollaire 4 *Le spectre d'un opérateur auto-adjoint* $\sigma(\mathring{A})$ *est inclus dans l'ensemble des points réels.*

Corollaire 5 *Un point régulier d'un opérateur auto-adjoint* $\mathring{A}$ *est la valeur* λ *tel que :*

$R(\mathring{A} - \lambda I) = H$.

Démonstration. Si λ est non réel alors , λ est un point régulier (d'après théorème 16). Si λ est non réel et $R(\mathring{A} - \lambda I) = H$. Alors d'après théorème15 λ n'est pas une valeur propre de $\mathring{A}$, donc d'après théorème14 ; il existe $(\mathring{A} - \lambda I)^{-1}$ défini sur toute H, cet opérateur est auto-adjoint donc fermé et d'après théorème du graphe fermé : $\mathring{A}$ est borné. ■

Donc on peut utiliser la définition suivante :

Définition 10 *Si* A *est un opérateur auto-adjoint alors :*
λ *est un point régulier de* $\mathring{A}$ *si* $R(\mathring{A} - \lambda I) = H$.
λ *est un point du spectre de* A *si* $R(\mathring{A} - \lambda I) \neq H$.

Théorème 17 *Le spectre d'un opérateur auto-adjoint est un ensemble fermé.*

Démonstration. Il est suffisant de montrer que l'ensemble des points réguliers d'un opérateur auto-adjoint est ouvert. Soit $\lambda_\circ$ un point régulier donc$(\mathring{A} - \lambda I)^{-1}$ existe et borné et défini sur toute H donc il existe $k > 0$: tel que $\left\|\mathring{A}f - \lambda_\circ f\right\| \geq k \left\|f\right\|$ pour $f \in D(\mathring{A})$.

Si $0 < \delta \leq \frac{k}{2}$ pour $|\lambda - \lambda_\circ| < \delta$ et $f \in D(\mathring{A})$.

$$\begin{aligned}
\left\|\mathring{A}f - \lambda_\circ f\right\| &= \left\|(\mathring{A} - \lambda_\circ I - \lambda I + \lambda_\circ I)f\right\| = \left\|(\mathring{A} - \lambda_\circ I)f - (\lambda - \lambda_\circ)f\right\| \\
&\geq \left\|(\mathring{A} - \lambda_\circ I)f\right\| - |\lambda - \lambda_\circ| \, \|f\| \\
&\geq k\,\|f\| - \delta\,\|f\| \, (et - \delta \geq -\frac{k}{2}) \\
&\geq (k - \frac{k}{2})\,\|f\|
\end{aligned}$$

Donc :

$$\left\|\mathring{A}f - \lambda f\right\| \geq \frac{k}{2}\,\|f\|$$

D'une part λ n'est pas une valeur propre de l'opérateur A donc :

$$R(\mathring{A} - \lambda I) = H.$$

Et d'autre part :$(\mathring{A} - \lambda I)^{-1}$ est borné, et A est auto-adjoint donc fermé alors $(\mathring{A} - \lambda I)^{-1}$ est fermé donc $R(\mathring{A} - \lambda I) = \overline{R(\mathring{A} - \lambda I)}$ donc chaque λ tel que : $|\lambda - \lambda_\circ| < \delta$ est un point régulier.

Donc l'ensemble des points réguliers d'un opérateur auto-adjoint est un ensemble ouvert donc le spectre d'un opérateur auto-adjoint est un ensemble fermé. ■

0.2.1 Classification des points de spectre d'un opérateur auto-adjoint

Soit $\mathring{A}$ un opérateur auto-adjoint son spectre $\sigma(\mathring{A})$ admet la décomposition en trois composantes disjointes :

$$\sigma(\mathring{A}) = P\sigma(\mathring{A}) \cup C\sigma(\mathring{A}) \cup PC\sigma(\mathring{A})$$

Où

$P\sigma(\mathring{A})$ est le spectre ponctuel, (l'ensemble des valeurs propre isolés d'ordre fini).

$C\sigma(\mathring{A})$ est le spectre continu.

$PC\sigma(\mathring{A})$ est le spectre point-continu.

En terme de l'image $R(\mathring{A}-\lambda I)$ de $\mathring{A}-\lambda I$ nous avons la classification suivante des points de $\rho(\mathring{A}) \cup \sigma(\mathring{A})$:

$$\lambda \in \rho(\mathring{A}) \qquad si \qquad R(\mathring{A}-\lambda I) = \overline{R(\mathring{A}-\lambda I)} = H$$

$$\lambda \in P\sigma(\mathring{A}) \qquad si \qquad R(\mathring{A}-\lambda I) = \overline{R(\mathring{A}-\lambda I)} \subset H$$

$$\lambda \in C\sigma(\mathring{A}) \qquad si \qquad R(\mathring{A}-\lambda I) \subset \overline{R(\mathring{A}-\lambda I)} = H$$

$$\lambda \in PC\sigma(\mathring{A}) \qquad si \qquad R(\mathring{A}-\lambda I) \subset \overline{R(\mathring{A}-\lambda I)} \subset H$$

($\overline{E}$ désigne l'adhérence de E dans $H, \subset$ désigne l'inclusion stricte)

- On voit que la résolvante $R_\lambda(\mathring{A})$ est défini pour $\lambda \in \rho(\mathring{A}) \cup C\sigma(\mathring{A})$:

  1- Pour$\lambda \in \rho(\mathring{A})$: $\Re_\lambda(\mathring{A})$ est défini sur tout l'espace H et $\Re_\lambda(\mathring{A})$ est borné.

  2- Pour$\lambda \in C\sigma(\mathring{A})$: $\Re_\lambda(\mathring{A})$est défini sur l'ensemble $R(\mathring{A}-\lambda I)$ dense dans H et $\Re_\lambda(\mathring{A})$ n'est pas borné.

Quand λ est une valeur propre de $\mathring{A}$ (i.e.) $\lambda \in P\sigma(\mathring{A}) \cup PC\sigma(\mathring{A})$, on peut définir la résolvante $\Re_\lambda(\mathring{A})$ sur l'ensemble $R(\mathring{A}-\lambda I) \subset H \ominus E_\lambda$ où E_λ est le sous-espace propre correspondant à λ, l'ensemble n'est pas dense.

- En termes de propriétés de la résolvante $\Re_\lambda(\mathring{A})$ les définitions des ensembles : $\rho(\mathring{A})$, $P\sigma(\mathring{A}), C\sigma(\mathring{A}), PC\sigma(\mathring{A})$ sont les suivantes :

  $\lambda \in \rho(\mathring{A})$ si et seulement $\Re_\lambda(\mathring{A}) = (\mathring{A}-\lambda I)^{-1}$ est défini sur tout H et est borné.

  $\lambda \in P\sigma(\mathring{A})$ si et seulement $\Re_\lambda(\mathring{A}) = (\mathring{A}-\lambda I)^{-1}$ est défini et est borné sur $H_1 = H \ominus E_\lambda$, où E_λ est un sous-espace de dimension finie.

  $\lambda \in C\sigma(\mathring{A})$ si et seulement si $\Re_\lambda(\mathring{A}) = (\mathring{A}-\lambda I)^{-1}$ est un opérateur non-borné défini sur un ensemble dense dans H.

$\lambda \in PC\sigma(\mathring{A})$ si et seulement si $\Re_\lambda(\mathring{A}) = (\mathring{A} - \lambda I)^{-1}$ est un opérateur non-borné défini sur un ensemble dense dans H_1.

– Le spectre d'un opérateur auto-adjoint$\mathring{A}$ est dit discret si :

$$PC\sigma(\mathring{A}) = C\sigma(\mathring{A}) = \varnothing.$$

– Quels que soient les éléments $f, g \in H$ fixés la fonction $F(\lambda) = (\Re_\lambda(\mathring{A})f, g)$ pour tout $\lambda \in \rho(\mathring{A})$ est analytique sur$\rho(\mathring{A})$

Proposition 2 *Soit $\mathring{A}$ un opérateur auto-adjoint :*

$$\Re_\lambda^* = \Re_{\overline{\lambda}}$$

si seulement si λ n'appartient pas au spectre discret.

Démonstration. Si λ est un point du spectre discret donc $\Re_\lambda$ est un opérateur borné, défini sur un ensemble n'est pas dense dans H,alors $\Re_\lambda$ n'admet pas un adjoint.
Pour λ non réel soit : $f, g \in H$:

$$(\Re_\lambda f, g) = (\Re_\lambda f, (\mathring{A} - \overline{\lambda} I)\Re_{\overline{\lambda}} g) = ((\mathring{A} - \lambda I)\Re_\lambda f, g) = (f, \Re_{\overline{\lambda}} g)$$

donc $\Re_\lambda^* = \Re_{\overline{\lambda}}$.
Et pour λ réel : $\lambda = \overline{\lambda}$, soit $f, g \in H$: $(\Re_\lambda f, g) = (f, \Re_\lambda g)$ donc : $\Re_\lambda^* = \Re_\lambda$,
donc $\Re_\lambda$ est auto-adjoint. ■

0.3 Extension d'opérateur symétrique

Si B est une extension d'un opérateur symétrique A alors : $A \subset B$ et donc : $B^* \subset A^*$ mais si B est un opérateur symétrique : $B \subset B^*$ donc :

$A \subset B \subset B^* \subset A^*$ (i.e.) chaque extension symétrique d'un opérateur A est une restriction de l'opérateurA^*

0.3.1 Espaces de défaut d'un opérateur symétrique

Définition 11 *soit A un opérateur symétrique et λ un non-réel on note*

$$R(A-\lambda I)=R_\lambda$$

et

$$R(A-\overline{\lambda}I)=R_{\overline{\lambda}}$$

R_λ et $R_{\overline{\lambda}}$ sont deux sous-espaces de H.
$\aleph_\lambda = H \ominus R_\lambda$,$\aleph_{\overline{\lambda}} = H \ominus R_{\overline{\lambda}}$ sont les compléments orthogonaux de R_λ et $R_{\overline{\lambda}}$ sont appelé les espaces de défaut de l'opérateur A.

Proposition 3 *Les espaces de défaut $\aleph_\lambda$ et $\aleph_{\overline{\lambda}}$ sont les espaces de solutions de l'opérateur A^* associés aux valeurs propres $\overline{\lambda}$ et λ respectivement.*

Démonstration. Si $x \in \aleph_\lambda$ alors :
Pour chaque vecteur $y \in D(A)$, on a : $(Ay-\lambda y, x)=0$ donc :

$$(Ay,x)=(y,\overline{\lambda}x)$$

et par la définition de l'opérateurA^*, $(y, A^*x)=(y,\overline{\lambda}x)$ (i.e.)$x \in D(A^*)$ et $A^*x=\overline{\lambda}x.$
Si, inversement, l'équation$A^*x=\overline{\lambda}x$ est vérifie, alors pour un $y \in D(A)$ arbitraire on a : $(y, A^*x)=(y,\overline{\lambda}x)$,
donc :

$$(Ay,x)=(y,\overline{\lambda}x)$$

donc :

$$(Ay-\lambda y,x)=0 \quad (i.e.) \quad x \in \aleph_\lambda$$

■

0.4 Transformation de CAYLEY

Définition 12 *Soit A un opérateur symétrique et λ un non-réel. L'opérateur :*

$$V=(A-\lambda I)(A-\overline{\lambda}I)^{-1}$$

est appelé la transformation de CAYLEY de l'opérateur A .

Cette définition a un sens car : $\overline{\lambda}$ *n'est pas une valeur propre de A donc :*

$(A-\overline{\lambda}I)^{-1}$ *existe.*

Théorème 18 *1) La transformation de CAYLEY V d'un opérateur symétrique A est un opérateur isométrique avec* $D(V)=R_{\overline{\lambda}}$ *et* $R(V)=R_{\lambda}$.

2) L'ensemble de $Vy-y$ *tel que* $y\in D(V)$ *est dense dans H.*

3) Chaque opérateur V qui vérifié la $2^{\text{ème}}$ *condition est la transformation de CAYLEY d'un opérateur symétrique.*

Démonstration.

1) -a- On a :

$$V=(A-\lambda I)(A-\overline{\lambda}I)^{-1},$$

pour chaque $y\in D(V)$ on a :

$$y\in R(A-\overline{\lambda}I)=R_{\overline{\lambda}}$$

Inversement, pour $y\in R_{\overline{\lambda}}$ on applique l'opérateur$(A-\overline{\lambda}I)^{-1}$,

donc :

$$(A-\overline{\lambda}I)^{-1}y\in D(A)$$

On applique l'opérateur $(A-\lambda I)$ donc :

$$(A-\lambda I)(A-\overline{\lambda}I)^{-1}y=Vy$$

donc $y\in D(V)$ alors $R_{\overline{\lambda}}=D(V)$.

-b- Soit $x\in D(A)$ posant : $y=(A-\overline{\lambda}I)x$ donc $y\in R_{\overline{\lambda}}$ donc $y\in D(V)$ et :

$$Vy=(A-\lambda I)(A-\overline{\lambda}I)^{-1}(A-\overline{\lambda}I)x=(A-\lambda I)x$$

donc :

$$R(V)=R_{\lambda}$$

Et de plus :

$$\begin{aligned}\|Vy\|^2 &= \|(A-\lambda I)x\|^2 \\ &= ((A-\lambda I)x,(A-\lambda I)x) \\ &= (Ax,Ax)-\lambda(x,Ax)-\overline{\lambda}(Ax,x)+|\lambda|^2(x,x)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|y\|^2 &= \left\|(A-\overline{\lambda}I)x\right\|^2 \\ &= ((A-\overline{\lambda}I)x,(A-\overline{\lambda}I)x) \\ &= (Ax,Ax)-\lambda(x,Ax)-\overline{\lambda}(Ax,x)+|\lambda|^2(x,x).\end{aligned}$$

Et on a $(Ax,x)=(x,Ax)$ donc $\|Vy\|=\|y\|$ donc V est un opérateur isométrique.
2) On a $y=(A-\overline{\lambda}I)x$ et $Vy=(A-\lambda I)x$ donc

$$y-Vy=(\lambda-\overline{\lambda})x$$

alors : $R(I-V)=\{y-Vy$ tel que $y\in D(V)\ \}$ coïncide avec $D(A)$.
(car $y-Vy=(\lambda-\overline{\lambda})x$ et $x\in D(A)$) qui est dense dans H.
3)-a-Montrons que l'opérateur $(I-V)^{-1}$ existe :
V est un opérateur vérifiant la $2^{ème}$ condition donc : L'ensemble de $y-Vy$ tel que $y\in D(V)$ est dense dans H donc V n'admet pas $\lambda=1$ comme valeur propre (i.e.) $y=Vy$ seulement pour $y=0$.
Si ce n'est pas le cas :
Pour

$$z\in D(V):(Vz-z,y)=(Vz,y)-(z,y)=(Vz,Vy)-(z,y)=0$$

donc $y\neq 0$ doit être orthogonal a $R(I-V)$ qui est d'après 2 dense dans H et cela impossible.
Donc l'opérateur $(I-V)^{-1}$ existe
-b- On pose

$$A=(\lambda I-\overline{\lambda}V)(I-V)^{-1}$$

Montrons que A est un opérateur symétrique leur transformation de CAYLEY est V, donc on peut définir l'opérateur A par :

$$D(A) = R(I - V)$$

et pour $y \in D(V)$ on a :

$$\begin{aligned} A(y - Vy) &= (\lambda I - \overline{\lambda} V)(I - V)^{-1}(y - Vy) \\ &= (\lambda I - \overline{\lambda} V)(I - V)^{-1}(I - V)y \end{aligned}$$

donc :

$$A(y - Vy) = \lambda y - \overline{\lambda} V y$$

De la $2^{ème}$ condition $D(A)$ dense dans H Et de plus pour $y_1, y_2 \in D(V)$:

$$\begin{aligned} (A(y_1 - Vy_1), y_2 - Vy_2) &= (\lambda y_1 - \overline{\lambda} V y_1, y_2 - V y_2) \\ &= (\lambda + \overline{\lambda})(y_1, y_2) - \overline{\lambda}(Vy_1, y_2) - \lambda(y_1, Vy_2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (y_1 - Vy_1, A(y_2 - Vy_2)) &= (y_1 - Vy_1, \lambda y_2 - \overline{\lambda} V y_2) \\ &= (\lambda + \overline{\lambda})(y_1, y_2) - \overline{\lambda}(Vy_1, y_2) - \lambda(y_1, Vy_2) \end{aligned}$$

Donc :

$$(A(y_1 - Vy_1), y_2 - Vy_2) = (y_1 - Vy_1, A(y_2 - Vy_2))$$

donc A est un opérateur symétrique.

(*) Si on pose $x = y - Vy$ pour $y \in D(V)$ alors : $Ax = \lambda y - \overline{\lambda} V y$ pour tout $x \in D(A)$ donc

$$(A - \overline{\lambda} I) = (\lambda - \overline{\lambda}) y$$

Et

$$Ax - \lambda x = (\lambda - \overline{\lambda}) V y.$$

donc :

$$Ax - \lambda x = (\lambda - \overline{\lambda})Vy = V(\lambda - \overline{\lambda})y = V(Ax - \overline{\lambda}x)$$

alors : $(A - \lambda I)x = V(A - \overline{\lambda}I)x$ pour tout $x \in D(A)$, donc $(A - \lambda I) = V(A - \overline{\lambda}I)$ alors $V = (A - \lambda I)(A - \overline{\lambda}I)^{-1}$.

donc V est la transformation de CAYLEY de l'opérateur symétrique A. ■

Théorème 19 ***Remarque 5*** *En prendra garde que$V$ transformation de CAYLEY de l'opérateur symétrique A , n'est pas n'importe quel opérateur unitaire , par exemple $V = I$ ne peut ainsi etre obtenue*

Théorème 20 *Soit A_1, A_2 deux opérateurs symétriques et V_1, V_2 leurs transformation de CAYLEY est alors A_2 et c'est une extension de A_1 si et seulement si V_2 est une extension de V_1.*

Remarque 6 *De ce théorème , le problème de l'extension d'un opérateur symétrique A se réduit au problème de l'extension d'un opérateur isométrique qui est sa transformation de CAYLEY*

Théorème 21 *Un opérateur symétrique A est fermé si et seulement si sa transformation de CAYLEY V est une isométrie fermée (c'est le cas si et seulement si $R_{\overline{\lambda}}$ et R_{λ} sont fermés).*

Démonstration. On suppose que A est fermé et $\{y_n\}$ une suite définie par :

$$y_n = (A - \overline{\lambda}I)x_n$$

tel que $x_n \in D(A)$ converge vers y.

Et tant que V est isométrique ; la suite $\{Vy_n\}$ définie par : $Vy_n = (A - \lambda I)x_n$

converge vers z .On a :

$$y_n - Vy_n = Ax_n - \overline{\lambda}x_n - Ax_n + \lambda x_n$$

donc :

$$y_n - Vy_n = (\lambda - \overline{\lambda})x_n$$

alors on obtient :

$$x_n = \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}}(y_n - Vy_n) \to \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}}(y - z)$$

Et on a aussi :

$$Vy_n = Ax_n - \lambda x_n \Rightarrow Ax_n = Vy_n + \lambda x_n$$

donc :

$$\begin{aligned} Ax_n &= Vy_n + \frac{\lambda}{\lambda - \overline{\lambda}}(y_n - Vy_n) = Vy_n + \frac{\lambda}{\lambda - \overline{\lambda}}y_n - \frac{\overline{\lambda}}{\lambda - \overline{\lambda}}Vy \\ &= (1 - \frac{\overline{\lambda}}{\lambda - \overline{\lambda}})Vy_n + \frac{\lambda}{\lambda - \overline{\lambda}}y_n = \frac{-\overline{\lambda}}{\lambda - \overline{\lambda}}Vy_n + \frac{\lambda}{\lambda - \overline{\lambda}}y_n \\ &= \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}}(\lambda y_n - \overline{\lambda}Vy_n) \end{aligned}$$

donc :

$$Ax_n = \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}}(\lambda y_n - \overline{\lambda}Vy_n) \to \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}}(\lambda y - \overline{\lambda}z)$$

Et A est fermé donc $y - z \in D(A)$ et $A(y - z) = \lambda y - \overline{\lambda}z$ et par conséquent :

$$y = (A - \overline{\lambda}I)\frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}}(y - z) = \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}}\left[A(y - z) - \overline{\lambda}(y - z)\right]$$

donc :

$$y \in R_{\overline{\lambda}} = D(V)$$

Et

$$\begin{aligned} Vy &= (A - \lambda I)\frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}}(y - z) \\ &= \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}}A(y - z) - \lambda(y - z) \\ &= \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}}(\lambda y - \overline{\lambda}z - \lambda y + \lambda z) \\ &= \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}}(\lambda - \overline{\lambda})z = z, \end{aligned}$$

■

donc :

$$Vy = z$$

Cela montre que V est un opérateur fermé et aussi $R_{\overline{\lambda}}$ est un sous-espace fermé ; alors R_λ est l'image par une isométrie du sous-espace fermé $R_{\overline{\lambda}}$, doncR_λ et aussi fermé.
De la même facon on peut montrer que si l'opérateur $V($ ou$R_{\overline{\lambda}})$ est fermé , alors l'opérateur A est fermé

0.4.1 Domaine de définition d'un opérateur adjoint

Définition 13 *On dit que les sous-espaces $M_{1,}M_2, ...M_n$ sont linéairement indépendants : Si $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$ pour $x_k \in M_k$ et $k = \overline{1, n}$ alors :*

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0.$$

(*) Si les sous-espaces $M_{1,}M_2, ...M_n$ sont linéairement indépendants, il est possible de former leurs somme directe $M_1 \oplus M_2 \oplus .... \oplus M_n$, alors :
chaque $x \in M_1 \oplus M_2 \oplus .... \oplus M_n$ peut représenté d'une façon unique sous la forme :

$$x = x_1 + x_2 + ... + x_n$$

tel que $x_k \in M_k$ et $k = \overline{1, n}$.
(*) S'il existe une autre représentation $x = x'_1 + x'_2 + ... + x'_n$ tel que $x'_k \in M_k$ et $k = \overline{1, n}$ donc :

$$0 = (x_1 - x'_1) + (x_2 - x'_2) + ...(x_n - x'_n)$$

avec $x_k - x'_k \in M_k$ et $k = \overline{1, n}$.
Mais $M_{1,}M_2, ...M_n$ sont linéairement indépendants alors :
$x_k - x'_k = 0$ donc $x_k = x'_k$ pour $k = \overline{1, n}$

Théorème 22 *Si A est un opérateur symétrique fermé , alors $D(A), \aleph_{\overline{\lambda}}, \aleph_\lambda$ sont linéairement indépendants et :*

$$D(A^*) = D(A) \oplus \aleph_{\overline{\lambda}} \oplus \aleph_\lambda$$

Démonstration. Montrons l'indépendance linéaire :
Soit $x + y + z = 0$ tel que $x \in D(A)$, $y \in \aleph_{\overline{\lambda}}$, $z \in \aleph_\lambda$.

Appliquant l'opérateur $(A^* - \overline{\lambda} I)$ on obtient : $(A^* - \overline{\lambda} I)(x + y + z) = 0$.
donc :

$$Ax + \lambda y + \overline{\lambda} z - \overline{\lambda} x - \overline{\lambda} y - \overline{\lambda} z = 0$$

Alors

$$(A - \overline{\lambda} I)x + (\lambda - \overline{\lambda})y = 0$$

Mais : $(A - \overline{\lambda} I)x \in R_{\overline{\lambda}}$, et $(\lambda - \overline{\lambda})y \in \aleph_{\overline{\lambda}}$.
Et on sais que $R_{\overline{\lambda}}$ et $\aleph_{\overline{\lambda}}$ sont orthogonaux donc :
$(A - \overline{\lambda} I)x + (\lambda - \overline{\lambda})y = 0$ est possible seulement si $(A - \overline{\lambda} I)x = 0$ et $(\lambda - \overline{\lambda})y = 0$.
donc $x = 0$ et $y = 0$ ($x = 0$ car λ est non-réel ne peut pas être une valeur propre de A qui est symétrique),
Et aussi $z = 0$ car $x + y + z = 0$ et $x = 0$ et $y = 0$ donc $z = 0$.
(*) Montrons :

$$D(A^*) = D(A) \oplus \aleph_{\overline{\lambda}} \oplus \aleph_{\lambda}$$

1-On a$D(A)$, $\aleph_{\overline{\lambda}}, \aleph_{\lambda}$ sont inclus dans $D(A^*)$ donc $D(A) \oplus \aleph_{\overline{\lambda}} \oplus \aleph_{\lambda} \subset D(A^*)$
2-Soit $u \in D(A^*)$ montrons que u peut être représenté sous la forme :

$$u = x + y + z$$

tel que $x \in D(A), y \in \aleph_{\overline{\lambda}}, z \in \aleph_{\lambda}$.
Tant que A fermé alors $R_{\overline{\lambda}}$ est un sous-espace fermé et $\aleph_{\lambda}$ son complément orthogonal alors :
$R_{\overline{\lambda}} \oplus \aleph_{\overline{\lambda}} = H$ donc :
chaque $v \in H$ peut être représenté sous la forme :

$$v = v' + v'' \; où \; v' \in R_{\overline{\lambda}} \; et \; v'' \in \aleph_{\overline{\lambda}}$$

On essaye de représenter v sous forme :

$$v = (A^* - \overline{\lambda} I)u$$

On a $v \in R_{\bar{\lambda}}$ donc :$v' = (A - \overline{\lambda} I)x$ où $x \in D(A)$.

Posant

$$v''(\lambda - \overline{\lambda})y \quad , y \in \aleph_{\lambda}$$

On obtient :

$$(A^* - \overline{\lambda} I)u = (A - \overline{\lambda} I)x + (\lambda - \overline{\lambda})y$$

Et pour

$$A^* y = \lambda y, A^* x = \lambda x$$

$$\begin{aligned}
(A^* - \overline{\lambda} I)u &= A^* x - \overline{\lambda} x + A^* y - \overline{\lambda} y \\
&= (A^* - \overline{\lambda} I)x + (A^* - \overline{\lambda} I)y \\
&= (A^* - \overline{\lambda} I)(x + y)
\end{aligned}$$

Donc

$$(A^* - \overline{\lambda} I)(u - x - y) = 0$$

On pose : $z = u - x - y$ alors : $z \in \aleph_{\lambda}$ donc : $u = x + y + z$ où :

$$x \in D(A), y \in \aleph_{\overline{\lambda}}, z \in \aleph_{\lambda}$$

Ce théorème nous donne :

$$A^* u = Ax + \lambda y + \overline{\lambda} z$$

■

Corollaire 6 *Un opérateur symétrique fermé est auto-adjoint si* $\aleph_{\lambda} = \{0\}$, $\aleph_{\overline{\lambda}} = \{0\}$ *donc dans ce cas :*$D(A) = D(A^*)$

Formule de Neumann

On a $D(A^*) = D(A) \oplus \aleph_{\overline{\lambda}} \oplus \aleph_{\lambda}$, pour $\lambda = -i$ on obtient :

$$D(A^*) = D(A) \oplus \aleph_i \oplus \aleph_{-i}$$

Donc chaque $x \in D(A^*)$ a la représentation unique :

$$x = x^0 + x^- + x^+ \ où \ \ x^0 \in D(A), x^- \in \aleph_i \ \ , x^+ \in \aleph_{-i}$$

Montrons que :

$$\operatorname{Im}(A^*x, x) = \left\|x^+\right\|^2 - \left\|x^-\right\|^2$$

Et on l'appelle : "formule de Neumann" .

$$\begin{aligned}
(A^*x, x) &= (Ax^0 - ix^- + ix^+, x^0 + x^- + x^+) \\
&= (A^*x^0, x^0) + (-ix^- + ix^+, x^0) + (Ax^0, x^- + x^+) + (ix^- + ix^+, x^- + x^+).
\end{aligned}$$

Et on a :

$$(Ax^0, x^- + x^+) = (x^0, A^*(x^- + x^+)) = (x^0, -ix^- + ix^+)$$

$$\begin{aligned}
(A^*x, x) &= (A^*x^0, x^0) + (-ix^- + ix^+, x^0) + (x^0, -ix^- + ix^+) - i\left\|x^-\right\|^2 \\
&\quad +i\left\|x^+\right\|^2 - i(x^-, x^+) + i(x^+, x^-) \\
&= (Ax^0, x^0) + 2Re\left[(x^0, -ix^- + ix^+) + i(x^+, x^-)\right] + i(\left\|x^+\right\|^2 - \left\|x^-\right\|^2).
\end{aligned}$$

Donc :

$$\operatorname{Im}(A^*x, x) = \left\|x^+\right\|^2 - \left\|x^-\right\|^2.$$

On décompose $D(A^*)$ en trois sous-ensembles : ε^+, ε^-, ε^0 tel que :

$\operatorname{Im}(A^*x, x) > 0$, < 0, $= 0$ respectivement donc : chaque $x \in D(A^*)$ est dans ε^+ou ε^-ou ε^0.

Corollaire 7 $D(A) \subset \varepsilon^0$ $\quad , \aleph_i \subset \varepsilon^- \cup \{0\}$ $\quad , \aleph_{-i} \subset \varepsilon^+ \cup \{0\}$.

Démonstration. Pour $x \in D(A)$: $x^- = x^+ = 0$ donc :

$$\left\|x^+\right\|^2 - \left\|x^-\right\|^2 = 0$$

donc $x \in \varepsilon^0$.
Pour $x \neq 0$ et $x \in \aleph_i$ donc $x^0 = x^+ = 0$ donc $x = x^-$.Alors :

$$\left\|x^+\right\|^2 - \left\|x^-\right\|^2 = -\left\|x\right\|^2 < 0$$

donc

$$x \in \varepsilon^- \cup \{0\}$$

Pour $x \neq 0$ et $x \in \aleph_{-i}$ alors $x^0 = x^- = 0$ donc : $x = x^+$ .Alors :

$$\left\|x^+\right\|^2 - \left\|x^-\right\|^2 = \left\|x\right\|^2 > 0$$

donc $x \in \varepsilon^+ \cup \{0\}$. ■

Définition 14 ***(Dimension modulo*** M ***)*** *(*)Soit M et N Deux sous-espaces de H, un nombre n est appelé dimension de N modulo M s'il existe dans N, n vecteurs linéairement indépendants tel que aucune des combinaisons de ces vecteurs n'est dans M (sauf la combinaison nulle) et on le note : $dim_M N$.*
(*) Les vecteurs $x_1, x_2, ..., x_k$ de N sont linéairement indépendants modulo M si de $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_k x_k \in M$ il suit que $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$.
(*) Il est evident que l'ensemble des vecteurs dans N ,linéairement indépendants modulo M sont aussi linéairement indépendants au sens ordinaire.
(*) Il est evident que la dimension de N modulo M ne dépasse pas la dimension ordinaire de N
(*) On exprime la relation $x \in N$ aussi par $x = 0$ (modulo M), et alors l'équation $x = y$ (modulo M) signifie que $x - y \in N$ donc la dimension de N modulo M est définie par la dimension ordinaire de sous-ensemble de quotient $N \diagup M$.
(*) Si S un ensemble dans H et M un sous-espace dans H . $\dim_M S = n$ si n est la dimension modulo M du plus grand sous-espace dans $S \cup \{0\}$

Exemple : $D(A^*) = D(A) \oplus \aleph_{\overline{\lambda}} \oplus \aleph_\lambda$ donc

$$dim_{D(A)}D(A^*) = \dim(\aleph_{\overline{\lambda}} + \aleph_\lambda) = \dim \aleph_{\overline{\lambda}} + \dim \aleph_\lambda = n_{\overline{\lambda}} + n_\lambda$$

On déduit que $n_{\overline{\lambda}} + n_\lambda$ ne dépend pas deλ car $D(A^*)$et$D(A)$ ne dépend pas deλ

Proposition 4 *Si* $\dim \aleph_i = m$ *et* $\dim \aleph_{-i} = n$ *Alors :* $\dim_{D(A)} \varepsilon^+ = m$, $\dim_{D(A)} \varepsilon^- = n$

Démonstration. On a : $D(A) \subset \varepsilon^0$, $\aleph_i \subset \varepsilon^- \cup \{0\}$, $\aleph_{-i} \subset \varepsilon^+ \cup \{0\}$ donc :

$$n \leqslant \dim \varepsilon^- \cup \{0\}$$

donc :

$$n \leqslant \dim_{D(A)} \varepsilon^-$$

et $m \leqslant \dim \varepsilon^+ \cup \{0\}$, donc : $m \leqslant \dim_{D(A)} \varepsilon^+$,
Pour $m = \infty$ on a $\dim \varepsilon^+ \cup \{0\} = \dim_{D(A)} \varepsilon^+ = m = \infty$ et de même pour $n = \infty$.
Pour $m < \infty$:on suppose le contraire : il existe $(m+1)$ vecteurs de ε^+linéairement indépendants tel que chacune des combinaisons linéaires non triviales est dans ε^+et n'est pas dans $D(A)$.
On a $\varepsilon^+ \subset D(A^*)$ donc on peut représenter chaque vecteur par :

$$x_j = x_j^0 + x_j^- + x_j^+$$

où

$$x_j^0 \in D(A)\ ,\ x_j^- \in \aleph_i\ \ , x_j^+ \in \aleph_{-i}$$

Et tant que $\dim \aleph_{-i} = m$, les vecteurs $x_j^+; j = \overline{1, (m+1)}$ sont linéairement dépendants;
Donc ils existent $c_1, c_2...., c_{m+1}$ ne sont pas tous nuls tel que :

$$c_1 x_1^+ + c_2 x_2^+ + ... + c_{m+1} x_{m+1}^+ = 0$$

Donc :

$$\sum_{j=1}^{m+1} c_j x_j = \sum_{j=1}^{m+1} c_j x_j^0 + \sum_{j=1}^{m+1} c_j x_j^- + \sum_{j=1}^{m+1} c_j x_j^+$$

Alors :

$$\sum_{j=1}^{m+1} c_j x_j = x^0 + x^-$$

Où :

$$x^0 = \sum_{j=1}^{m+1} c_j x_j^0 \in D(A) \qquad Et \quad x^- = \sum_{j=1}^{m+1} c_j x_j^- \in \aleph_i.$$

Mais cela est impossible car :

Pour : $x = x^0 + x^-$ on a :

$$\operatorname{Im}(A^* x, x) = \left\|x^+\right\|^2 - \left\|x^-\right\|^2 = -\left\|x^-\right\|^2 < 0$$

donc :$x^0 + x^- \in \varepsilon^-$ (pour $x \neq 0$).

Pour $x = x^0 + x^-$ et $x = 0$ donc : Im $(A^* x, x) = 0$ donc :$x \in \varepsilon^0$

■

Proposition 5 *Si* $\alpha > 0$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$ *alors les espaces de défaut* $\aleph_{-i}, \aleph_i$ *des opérateurs* A *et* $B = \alpha A + \beta I$

ont les mêmes dimensions.

Démonstration. On a : $D(A) = D(B)$. Et aussi :

$$\begin{aligned} (B^* x, x) &= ((\alpha A + \beta I)^* x, x) \\ &= (\alpha A^* + \beta x, x) \\ &= \alpha(A^* x, x) + \beta(x, x) \end{aligned}$$

et :

$$\beta(x, x) = \beta \left\|x\right\|^2 \in \mathbb{R}$$

Donc :

$$\operatorname{Im}(B^* x, x) = \alpha(\left\|x^+\right\|^2 - \left\|x^-\right\|^2)$$

et $\alpha > 0$ donc $\varepsilon^+, \varepsilon^-$ sont les mêmes pour les deux opérateurs A et B et $\dim \aleph_i$ et $\dim \aleph_{-i}$ est la même pour$A$ et B. ■

Théorème 23 *Pour chaque nombre complexe λ du demi-plan supérieur :*

$$\dim \aleph_{\overline{\lambda}} = \dim \aleph_{-i} \quad et \quad \dim \aleph_{\lambda} = \dim \aleph_{i}$$

Démonstration. En pose : $\lambda = \sigma + i\tau$ et λ dans le demi-plan supérieur donc : $\tau > 0$, On note par $\aleph'_i$ et$\aleph'_{-i}$ les deux espaces de défaut de l'opérateur :

$$B = \tau^{-1}(A - \sigma I)$$

Pour

$$\begin{aligned}
x &\in \aleph'_i \Leftrightarrow x \in D(B^*) \text{ telque } B^*x = -ix \\
&\Leftrightarrow x \in D(B^*) \text{ telque } \tau^{-1}(A^* - \sigma I)x + ix = 0 \\
&\Leftrightarrow x \in D(A^*) \text{ telque } \tau^{-1}(A^*x - \sigma x - i\tau x) = 0 \\
&\Leftrightarrow x \in D(A^*) \text{ telque } \tau^{-1}(A^*x - (\sigma - i\tau)x = 0 \\
&\Leftrightarrow x \in D(A^*) \text{ telque } \tau^{-1}(A^* - \overline{\lambda} I)x = 0 \\
&\Leftrightarrow x \in D(A^*) \text{ telque } A^*x = \overline{\lambda} x \\
&\Leftrightarrow x \in \aleph_{\lambda}.
\end{aligned}$$

Donc :$\aleph_i = \aleph_{\lambda}$. Et de la même façon on montre que $\aleph_{-i} = \aleph_{\lambda}$
Et de la proposition précédente les opérateurs A et $B = \tau^{-1}(A - \sigma I) = \tau^{-1}A - \tau^{-1}\sigma I$ où $\tau > 0$ et $\tau^{-1}\sigma \in \mathbb{R}$ ont :

$$\dim \aleph_i = \dim \aleph'_i = \dim \aleph_{\overline{\lambda}} et \dim \aleph_{-i} = \dim \aleph'_{-i} = \dim \aleph_{\overline{\lambda}}.$$

donc $\dim \aleph_{\lambda} = \dim \aleph_i$et $\dim \aleph_{\overline{\lambda}} = \dim \aleph_{-i}$. ■

Les indices de défaut

On pose : $m = \dim \aleph_i$, $n = \dim \aleph_{-i}$, m , n sont appelés les indices de défaut de l'opérateur A

Du théorème précédent :$m = \dim \aleph_{\lambda}, n = \dim \aleph_{\overline{\lambda}}$ si $\operatorname{Im} \lambda > 0$.

Proposition 6 *un opérateur symétrique fermé est auto-adjoint si et seulement si* $m = 0$ *et* $n = 0$

Théorème 24 *Si* A *est un opérateur symétrique fermé et si* B *est un opérateur borné, Hermitien et défini sur toute* H *alors :*
Les deux opérateurs A *et* $A + B$ *ont les mêmes indices de défaut.*

Démonstration. On a : $(A + B)^* = A^* + B$ donc :

$$D((A + B)^*) = D(A^*)$$

et pour $x \in D(A^*)$:

$$\begin{aligned}((A + B)^* x, x) &= ((A^* + B)x, x) \\ &= (A^* x, x) + (Bx, x)\end{aligned}$$

et tant que$(Bx, x) \in \mathbb{R}$ alors :

$$\operatorname{Im}((A + B)^* x, x) = \operatorname{Im}(A^* x, x)$$

Donc ε^+ des opérateurs A et $A + B$ coïncide et aussi ε^- donc de la proposition (4) : A et $A + B$ ont les même indices de défaut . ■

0.4.2 Construction d'extension d'opérateur symétrique

Soit A un opérateur symétrique fermé et soit $\tilde{A}$ une extension symétrique fermée de A .On note par V et $\widetilde{V}$: les transformations de CAYLEY de A et $\tilde{A}$ respectivement :

On a : $V \subset \widetilde{V}$ alors : $D(V) \subset D(\widetilde{V})$ et $R(V) \subset R(\widetilde{V})$

On pose : $P = D(\widetilde{V}) \ominus D(V)$ et $Q = R(\widetilde{V}) \ominus R(V)$

Donc : $P \perp D(V) = R_{\overline{\lambda}}$ et $Q \perp R(V) = R_\lambda$

Alors : $P \subset H \ominus R_{\overline{\lambda}}$ donc $P \subset \aleph_{\overline{\lambda}}$ et $Q \subset H \ominus R_\lambda$ donc $Q \subset \aleph_\lambda$

définissant l'opérateur U par : $U : x \longrightarrow Ux = \widetilde{V}x$ pour $x \in P$

tant que $\widetilde{V} : D(\widetilde{V}) \longrightarrow R(\widetilde{V})$ est une isométrie alors $\widetilde{V} : P \longrightarrow Q$ est aussi une isométrie donc $U : P \longrightarrow Q$ l'est aussi.

Inversement

On suppose un opérateur isométrique

$U : P \subset \aleph_{\overline{\lambda}} \longrightarrow Q \subset \aleph_{\lambda}$ donné $\qquad (P = D(\widetilde{V}) \ominus D(V))$ donc :

$$D(\widetilde{V}) = P + D(V);$$

Si on pose pour $y \in D(V)$, $z \in P$; $\widetilde{V}(y+z) = Vy + Uz$ on obtient un opérateur isométrique $\widetilde{V}$ qui représente une extension de V et par conséquent $\widetilde{V}$ est la transformation de CAYLEY d'une certaine extension symétrique fermée de l'opérateur A.

Construction de $\widetilde{A}$ (a l'aide de U) :

Du théorème concernant la transformation du CAYLEY (chaque opérateur isométrique V qui vérifie la $2^{ème}$ condition, est la transformation de CAYLEY de certain opérateur symétrique),

$$\widetilde{A} = (\lambda I - \overline{\lambda}\widetilde{V})(I - \widetilde{V})^{-1} donc : D(\widetilde{A}) = R(I - \widetilde{V})$$

donc pour : $y + z \in D(\widetilde{V})$:

$x' \in D(\widetilde{A})$ donc

$$x' = (y+z) - \widetilde{V}(y+z) = y + z - (Vy + Uz)$$

tel que $\widetilde{V} = V$ sur $D(V)$, $y \in D(V)$, $z \in P$

Posant : $x = y - Vy = (\lambda - \overline{\lambda})\widetilde{x}$ tel que :$\widetilde{x} \in D(A)$

Donc $D(\widetilde{A})$ consiste tous les vecteurs de la forme :

$x' = x + z - Uz$ tel que : $x \in D(A)$, $z \in P, Uz \in Q$.

Et tant que :$\widetilde{A} \subset A^*$ tel que $z \in \aleph_{\overline{\lambda}}, Uz \in \aleph_{\lambda}$, donc : $\widetilde{A}x' = Ax + \lambda z - \overline{\lambda}Uz$

Et de la définition de $\widetilde{A}$ alors ces espaces de défaut sont donnés par :

$$\aleph'_{\overline{\lambda}} = \aleph_{\overline{\lambda}} \ominus P \text{ et } \aleph'_{\lambda} = \aleph_{\lambda} \ominus Q$$

Donc on a le théorème suivant :

Théorème 25 *chaque extension symétrique fermé $\widetilde{A}$ d'un opérateur symétrique fermé A est déterminée par certain opérateur isométrique U tel que $D(U) = P$; un sous espace femé de*

$\aleph_{\overline{\lambda}}$ *et* $Q = R(U)$ *est un sous espace fermé de* $\aleph_\lambda$.
Et $D(\widetilde{A}) = \{x' : x' = x + z - Uz \text{tel que } x \in D(A), z \in P\}$ *et*

$$\widetilde{A}x' = Ax + \lambda z - \overline{\lambda}Uz$$

Inversement : Pour chaque opérateur U *avec ces formules détermine un extension symétrique fermé* $\widetilde{A}$ *de l'opérateur* A, *ses espaces de défaut sont :*

$$\aleph'_{\overline{\lambda}} = \aleph_{\overline{\lambda}} \ominus P \quad et \quad \aleph'_{\lambda} = \aleph_\lambda \ominus Q$$

Proposition 7 *Une extension* $\widetilde{A}$ *de* A *est auto-adjoint si et seulement si,*

$$\aleph'_{\overline{\lambda}} = \{0\}, \aleph'_{\lambda} = \{0\}$$

(i.e.)Si et seulement si : $P = \aleph_{\overline{\lambda}}$ *et* $Q = \aleph_\lambda$.
Donc pour que l'opérateur U *existe,il est nécessaire et suffisant que* $\aleph_\lambda, \aleph_{\overline{\lambda}}$*aient la même dimension.(i.e.)Si et seulement si :* $P = \aleph_{\overline{\lambda}}$ *et* $Q = \aleph_\lambda$,
Donc pour que l'opérateur U *existe, il est nécessaire et suffisant que* $\aleph_\lambda, \aleph_{\overline{\lambda}}$ *aient la même dimension.*

Théorème 26 *Une extension* $\tilde{A}$ *est auto-adjoint si et seulement si :*

$$D(U) = \aleph_{\overline{\lambda}} \; et \quad R(U) = \aleph_\lambda$$

Un opérateur A *admet une extension auto-adjointe* $\tilde{A}$ *si et seulement si :*
$\aleph_{\overline{\lambda}}$, $\aleph_\lambda$ *ont la même dimension (i.e.) ces indices de défaut sont égaux.*

Cas particulier (si $\dim \aleph_{\overline{\lambda}} < \infty$ **et** $\dim \aleph_\lambda < \infty$ **)**

Pour qu'une extension auto-adjointe existe : $\dim \aleph_{\overline{\lambda}} = \dim \aleph_\lambda = n$

$\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une base orthonormée dans $\aleph_{\overline{\lambda}}$

$\{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ est une base orthonormée dans $\aleph_\lambda$

Donc pour $z \in \aleph_{\overline{\lambda}} : z = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$

Et chaque opérateur isométrique : $U : \aleph_{\overline{\lambda}} \longrightarrow \aleph_\lambda$ est donné par :

$$Uz = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(U_{jk}\xi_k)e_j^{'}$$

Où $U = [U_{ij}]$ est une matrice unitaire alors $D(\tilde{A})$ est l'ensemble des x' tel que :$x' = x + z - Uz$ et :

$$x' = x + \sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(U_{jk}\xi_k)e_j^{'} x \in D(A) \tag{3}$$

$$\tilde{A}x' = Ax + \lambda\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k - \overline{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(U_{jk}\xi_k)e_j^{'} \tag{4}$$

Proposition 8 *Un opérateur symétrique fermé A est maximal si et seulement si un des deux espaces de défaut égale $\{0\}$ (i.e) si et seulement si ses indices de défaut sont $(0, n)$ ou $(n, 0)$.*

Proposition 9 *Une extension $\tilde{A}$ est maximal si et seulement si une ou les deux relations sont vérifiées : $P = \aleph_{\overline{\lambda}}$ et $Q = \aleph_{\lambda}$.*

Proposition 10 *Si $\dim \aleph_{\overline{\lambda}} < \infty$ et $\dim \aleph_{\lambda} < \infty$ et $\dim \aleph_{\lambda} = \dim \aleph_{\overline{\lambda}}$. Alors chaque extension maximale est auto-adjointe.*

0.5 Spectre d'extension auto-adjointe d'opérateur symétrique

Définition 15 *Un nombre λ est appelé point de type régulier de l'opérateur A*
S'il existe $k = k(\lambda) > 0$ tel que : pour toute $x \in D(A)$:$\| Ax \| \geq k \| x \|$.
(i.e.) $(A - \lambda I)^{-1}$ existe et borné et pas nécessairement défini sur toute H.
Les valeurs propres de A ne peuvent pas être des points de type régulier.
L'ensemble des points de type régulier de l'opérateur A est appelé le domaine de regularité.

Définition 16 ***(opérateur régulier)*** *Un opérateur symétrique A est appelé régulier si chaque point réel est un point de type régulier.*

Proposition 11 *Soit A un opérateur symétrique avec les indices de défaut $(m.m)(m < \infty)$ on a :*
Pour qu'un point a soit un point de type régulier de l'opérateur A il faut et il suffit qu'il existe un prolongement auto-adjoint $\tilde{A}$ de A et un voisinage $\upsilon_{\delta(a)}$ tel que le segment $[a - \delta, a + \delta]$ ne contient qu'un nombre fini des valeurs propres d'ordres finis de $\tilde{A}$ et aucun autre point du spectre $\tilde{A}$.

Définition 17 *Le spectre d'un opérateur auto-adjoint $\mathring{A}$ est appelé discret si*
$\sigma(\mathring{A}) = P\sigma(\mathring{A})$ (i.e.) $C\sigma(\mathring{A}) = PC\sigma(\mathring{A}) = \varnothing$.
Autrement dit , $\sigma(\mathring{A})$ est discret si tout le segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ne contient qu'un nombre fini de valeurs propres de $\mathring{A}$ et aucun autre point du spectre.

Proposition 12 *Si un prolongement auto-adjoint $\mathring{A}$ de A possède un spectre discret;alors chaque prolongement auto-adjoint de A possède un spectre discret , pour que ce cas ait lieu il faut et il suffit que l'opérateur A soit régulier.*

Définition 18 *L'opérateur A est appelé simple s'il n'existe pas de sous-espace H_1de H tel que la restriction $A\diagup_{H_1}$soit auto-adjointe.*

Théorème 27 *Le domaine de régularité d'un opérateur linéaire est un ensemble ouvert.*

Démonstration. Soit λ_0 un point de type régulier de A.Alors pour :

$$|\lambda - \lambda_0| \leq \sigma \leq \frac{1}{2}k(\lambda_0)$$

et pour $x \in D(A)$.
On a :

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda I)x\| &\geq \|(A - \lambda_0 I)x\| - |\lambda - \lambda_0| \|x\| \\ &\geq (k(\lambda_0) - \sigma) \|x\| \\ &\geq \frac{1}{2}k(\lambda_0) \|x\| . \end{aligned}$$

Donc chaque λ dans le voisinage du λ_0 : $|\lambda - \lambda_0| \leq \sigma$ est un point de type régulier. ∎

Proposition 13 *Si A un opérateur symétrique,alors chaque nombre non-réel est dans le domaine de régularité.*

Démonstration. On pose $\lambda = \sigma + i\tau$ tel que $\tau \neq 0$ et $B = A - \sigma I$,B est Hermitien Pour $x \in D(A)$ on a :$\|(A - \lambda I)x\|^2 = \|Bx - i\tau x\|^2 = (Bx - i\tau x, Bx - i\tau x)$ ∎

Résultat définitions

*Chaque point régulier λ d'un opérateur A est un point de type régulier (l'inverse n'est pas toujours vrai).

*Un point de type régulier est un point régulier de l'opérateur A si

$D((A - \lambda I)^{-1}) = H.$

*Le domaine des points du type régulier contient tout les points réguliers et des points du spectre aussi.

*Le complétement du domaine de régularité, se trouve dans le spectre de A, est appelé le noyau spectral de l'opérateur$A$. (le noyau spectral est une partie du spectre mais n'est pas tout le spectre)

*Dans le cas d'un opérateur auto-adjoint la notion d'un point de type régulier est point régulier est la même, et aussi pour le spectre et le noyau spectral.

*Le noyau spectral d'un opérateur symétrique contient tous les valeurs propres de cet opérateur.

*Si λ est une valeur propre d'un opérateur symétrique A et si M_λ le sous-espace propre associé, alors le sous espace $H - M_\lambda$ est invariant relativement a A.

*On note par $\hat{A}_\lambda$ la partie de l'opérateur A dans $H - E_\lambda$ et on prolonge $\hat{A}_\lambda$ par $\hat{A}_\lambda = A$ si λ n'est pas une valeur propre de A, donc l'opérateur $(\hat{A}_\lambda - \lambda I)^{-1}$ existe pour chaque λ.

*L'ensemble des λ tel que $(\hat{A}_\lambda - \lambda I)^{-1}$ n'est pas borné est dans le noyau spectral et il s'appelle la partie continue du noyau spectral.

*Chaque point du noyau spectral est dans le spectre discret ou continu ou dans les deux.

*Si $\hat{A}$ est une extension d'un opérateur symétrique A, alors le noyau spectral de $\tilde{A}$ contient le noyau spectral de A. et chaque partie du noyau spectral de $\tilde{A}$ contient la partie corespondante du noyau spectral de A .

*Le cas ou les indices de défaut de A sont fini : utilisant les formules (1) et (2) pour l'extension :

$\dim_{(\hat{A}'_\lambda-\lambda I)D(A)}(\hat{A}'_\lambda-\lambda I)D(\hat{A}'_\lambda)$ est fini, alors les opérateurs $(\hat{A}'_\lambda-\lambda I)^{-1}$ et $(\hat{A}_\lambda-\lambda I)^{-1}$ sont bornés tous les deux ou non bornés tous les deux (i.e.) :

*Dans une extension symétrique d'un opérateur symétrique avec les indices de défaut finis, le noyau spectral ne change pas.

*Et tandis que pour un opérateur auto-adjoint, la partie continue du noyau spectral coincide avec le spectre continu, on a le théorème suivant :

Théorème 28 *Toute extension auto-adjointe d'un opérateur symétrique fermé avec les indices de défaut finis et egaux a le même spectre continu.*

Théorème 29 *Dans le prolongement d'un opérateur symétrique fermé avec les indices de défaut fini et égaux* (m, m) *a un opérateur auto-adjoint : la multiplicité de chaque valeur propre ne dépasse pas* m.

Démonstration. Soit A opérateur symétrique fermé avec les indices (m, m) et $\tilde{A}$ une extension auto-adjoint de A, et λ une valeur propre de multiplicité P,
On note par $(p+q)$ la multiciplité de λ comme une valeur propre de $\tilde{A}$ et on suppose que $q > m$
Choisissons : $\{x_1, x_2, ..., x_p, x_{p+1}, ..., x_{p+q}\}$ un système de solutions de l'équation $\tilde{A}x - \lambda x = 0$
linéairement indépendant tel que $x_k \in D(T)$ pour $k = \overline{I, p}$.
Puisque $\dim_{D(A)} D(\tilde{A}) = m$ et $q > m$ donc

$\exists x_k : k = \overline{1, q}$ ne sont pas tous nuls tel que :

$$\alpha_1 x_{p+1} + \alpha_2 x_{p+2} + ... + \alpha_q x_{p+q} \in D(T)$$

donc : $x = \alpha_1 x_{p+1} + \alpha_2 x_{p+2} + ... + \alpha_q x_{p+q}$ est un vecteur propre associé à λ qui est linéairement indépendant avec :$x_1, x_2, ..., x_p$; donc λ est une valeur propre de A de multiplicité supérieur a p. ■

Définition 19 ***("écartement" (ouverture) de deux sous-espaces)***

Soit M_1, M_2 deux sous-espaces fermés, P_1, P_2 les projections sur M_1, M_2respectivement, "aperture" de M_1, M_2 noté par $\theta(M_1, M_2)$ est défini par :

$$\theta(M_1, M_2) = \| P_1 - P_2 \|$$

** Il suit par cette définition : $\theta(H - M_1, H - M_2) = \theta(M_1, M_2)$ car*

$$\theta(H - M_1, H - M_2) = \| (I - P_1) - (I - P_2) \| = \| P_1 - P_2 \|$$

** l'inégalité $\theta(M_1, M_2) < 1$ est toujours vérifiée car :*

$$\begin{aligned} \| \quad & (P_2 - P_1)x \|^2 = \| P_2(I - P_1)x \|^2 + \| P_1(I - P_2)x \|^2 \\ & +(P_2(I - P_1)x, P_1(I - P_2)x) + (P_1(I - P_2)x + P_2(I - P_1)x) \end{aligned}$$

et on a $P_1(I - P_2)x$ et $P_2(I - P_1)x$ sont des orthogonaux donc :

$$\begin{aligned} \| \quad & (P_2 - P_1)x \|^2 = \| P_2(I - P_1)x \|^2 + \| P_1(I - P_2)x \|^2 \\ \leq \quad & \| (I - P_1)x \|^2 + \| P_1 x \|^2 = \| x \|^2 \end{aligned}$$

donc $\| P_2 - P_1 \|^2 \leq 1$
** Si $x \neq 0$ et $x \in M_1$ donc $x \perp M_2$ donc $P_1 x = x$ et $P_2 x = 0$ donc*

$$\| (P_2 - P_1)x \| = \| x \| \text{ donc } \| P_1 - P_2 \| = 1$$

Théorème 30 *Si on a : $\theta(M_1, M_2) < 1$. Alors $\dim M_1 = \dim M_2$*

Théorème 31 *Dans les ensembles connectes du domaine de régularité d'un opérateur symétrique ; les indices de défaut n_λ sont constants.*

Corollaire 8 *Si $\lambda_0$un réel dans le domaine de régularité d'un opérateur symétrique A alors :*
Les indices de défaut égaux a n_{λ_0}.

Corollaire 9 *Soit A opérateur symétrique fermé avec les indices de défaut (m, m), si pour un réel λ_0, l'indice de défaut $n_{\lambda_0} < m$, alors λ_0 est dans le spectre de chaque extension auto-adjoint $\tilde{A}$ de A.*
Et de plus si λ_0 n'est pas une valeur propre de A alors, λ_0 est dans la partie continue du spectre de l'extension auto-adjoint $\tilde{A}$ de A.

Démonstration. λ_0 est dans le noyau spectral de A donc dans le spectre de $\tilde{A}$ donc d'après le théorème précédent $n_{\lambda_0} = m$
* Si en même temps λ_0 n'est pas une valeur propre de A donc λ_0 est dans la partie continue du noyau spectral de A donc dans la partie continue du spectre de $\tilde{A}$. ∎

Théorème 32 *Soit A opérateur symétrique fermé avec les indices de défaut (m, m)*

Si λ est un réel et un point de type régulier de A alors, il existe une extension auto-adjointe $\tilde{A}$ de A pour laquelle λ une valeur du multiplicité m.

Démonstration. $\lambda \in \mathbb{R}$,et $\aleph_\lambda = \{x \in D(A^*)$ tel que :$A^*x = \lambda x\}$ le sous -espace des vecteurs propres de A^* pour la valeur propre λ donc $\dim \aleph = n$. On définit $\tilde{A}$ par :
$D(\tilde{A}) = D(A) \oplus \aleph_\lambda$ et $\tilde{A}x = A^*x$ pour $x \in D(\tilde{A})$,
$\tilde{A}$ est un opérateur symétrique et tandis que $\dim_{D(A)} D(\tilde{A}) = m$; $\tilde{A}$ est un opérateur auto-adjoint et $\aleph_\lambda$ les sous -espaces des vecteurs propres de $\tilde{A}$ associé a λ, et la multiplicité de λ comme une valeur propre de $\tilde{A}$ égale m. ∎

Théorème 33 *Si A est un opérateur symétrique fermé avec les indices de défaut (m, m) et si λ est un nombre réel dans le spectre discret de A .Alors l'équation $A^*x - \lambda x = 0$ admet m solutions linéairement indépendantes.*

Démonstration. Soit $\aleph_\lambda$ le sous-espace des vecteurs propres de A^* pour la valeur propre ,en construit l'opérateur $\tilde{A}$ par

$$D(\tilde{A}) = D(A) \oplus \aleph_\lambda$$

et $\tilde{A}x = A^*x$ pour $x \in D(\tilde{A})$,
Alors $\tilde{A}$ est une extension symétrique de l'opérateur A et par conséquent $\dim_{D(A)} D(\tilde{A})$ ne dépasse pas m. ∎

Théorème 34 *Si A opérateur symétrique fermé avec les indices de défaut fini (m, m), et si l'opérateur adjoint A^* admet une valeur propre réelle λ. Alors il existe une extension auto-adjointe $\tilde{A}$ de A, pour les deux λ est une valeur propre.*

Démonstration. Soit $\aleph_\lambda$ le sous-espace des vecteurs propres de A^* pour la valeur propreλ , définissant l'opérateur B par :

$$D(B) = D(A) \oplus \aleph_\lambda$$

et

$$B(x_1 + x_2) = Ax_1 + \lambda x_2$$

pour $x_1 \in D(A), \quad x_2 \in \aleph_\lambda$
L'opérateur B est symétrique avec les indices de défaut égaux ; l'extension auto-adjointe de B est une extension de A, pour laquelle λ est une valeur propre. ■

0.5.1 Théorié spectrale d'opérateur auto-adjoint

Définition 20 ***(Famille spectrale)*** *Chaque fonction opératorielle P_λ à paramètre réel λ désigne une famille spectrale si elle vérifie les propriétés suivantes :*
1- Pour chaque λ ; $P_\lambda$est une projection.
2- $\|P_\lambda\| \leq \|P_\mu\|$; pour $\lambda < \mu$ et $x \in H$
3- $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow -\infty} \|P_\lambda x\| = 0$, $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow +\infty} \|P_\lambda x - x\| = 0$
4- Pour $x \in H$ arbitraire : la fonction P_λ est continue à droite de $x = 0$
(i.e.) $\lim \|P_{\lambda+\varepsilon}x - P_\lambda x\| = 0$.

*De cette définition on a :

-De la $2^{ème}$ propriété : pour $x \in H$ arbitraire : les deux limites $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow \mu - 0} P_\lambda x$ et $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow \mu + 0} P_\lambda x$ existent , on les note respectivement par $P_{\mu-0}x$ et $P_{\mu+0}x$

-La propriété 4 désigne que : $P_{\mu+0} = P_\mu$.

Notation

Soit Δ l'un des intervalles : (α, β) , $[\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta]$ alors ; P_Δ est l'opérateur :

$$P_{\beta-0}-P_{\alpha+0}\ ,\ P_{\beta-0}-P_{\alpha-0}\ \ ,\ P_{\beta+0}-P_{\alpha+0}\ ,\ P_{\beta+0}-P_{\alpha-0}$$

A l'aide de la $4^{ème}$ propiété ; ces diférences peut être sous les formes :

$$P_{\beta-0}-P_{\alpha}, P_{\beta-0}-P_{\alpha-0}\ , P_{\beta}-P_{\alpha}, P_{\beta}-P_{\alpha-0}$$

Et particulièrement $P_{\Delta}=P_{\beta}-P_{\alpha}$ pour $\Delta=(\alpha,\beta]$.

Proposition 14 *On a :*

1- P_{Δ} est un opérateur de projection.

2- Pour $\Delta_1,\Delta_2,...,\Delta_n$ tel que : $\Delta_i\cap\Delta_j=\emptyset$ pour $i\neq j$ on a : $P_{\Delta_i}.P_{\Delta_j}=0$ pour $i\neq j$.

0.5.2 Intégrale par rapport à une famille spectrale

Au sens de famille spectrale , on peut introduire un intégral analogue a celui de STIELTJES.

Soit f une fonction a valeur complexe continue sur un certainintevalle $[a,b]$

On divise l'intervalle $(a,b]$ par un ensemble de points $\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{n-1}\}$ on intervalle $\Delta_i=(\lambda_{i-1},\lambda_i]$où $i=\overline{1,n}$ et $\lambda_0=a$, $\lambda_n=b$ et on forme la somme :

$$S=\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_i)P_{\Delta_i} \qquad \text{où} \qquad \zeta_i \text{ arbitraire dans } \Delta_i$$

Cette somme S est un opérateur linéaire borné dans H (i.e.)

Proposition 15 *Pour chaque : $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que : pour chaque somme S tel que : $\lambda_i-\lambda_{i-1}<\delta$: on a $\|S-L\|<\varepsilon$.*

Remarque 7 *De cette proposition on montre que quand la longueur de tous les intervalles Δ_i est réduit sans limite , la somme S tend (au sens de norme d'opérateur) à un* *opérateur unique L.*

Cette opérateur L *est appelé l'intégrale de* f *par apport à* dP_λ *est noté par :*

$$\int_a^b f(\lambda)dP_\lambda \tag{5}$$

L'existence de l'intégrale (3) *implique l'existence de l'intégrale :*

$$\int_a^b f(\lambda)dP_\lambda x \tag{6}$$

Il peut être défini aussi comme la limite de la somme :

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)P_{\Delta_i}x = Sx \tag{7}$$

Cette limite est le résultat de l'application de l'pérateur :$\int_a^b f(\lambda)dP_\lambda$ *sur* x

En effet : $\|Sx - Lx\| \leq \|S - L\| \|x\| \leq \varepsilon \|x\|$ $\quad$ *(i.e.)*

$\|\sigma - Lx\| \leq \varepsilon \|x\|$

On a :

$$\begin{aligned}
\|Sx\|^2 &= (Sx, Sx) \\
&= (\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)P_{\Delta_i}x, \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)P_{\Delta j}x) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(f(\zeta_i)P_{\Delta_i}x, f(\zeta_j)P_{\Delta j}x). \\
&= \sum_{i=1}^{n} |f(\zeta_i)|^2 (P_{\Delta_i}x, P_{\Delta j}x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} |f(\zeta_i)|^2 \|P_{\Delta_i}x\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} |f(\zeta_i)|^2 (P_{\Delta_i}x, x).
\end{aligned}$$

passant à la limite on obtient :

$$\left\| \int_a^b f(\lambda) dP_\lambda x \right\|^2 = \int_a^b |f(\lambda)|^2 \, d\,\|P_\lambda x\|^2$$
$$= \int_a^b |f(\lambda)|^2 \, d(P_\lambda x, x).$$

(C'est l'intégrale ordinaire de STIELTJES)

Pour f *est défini et continue pour tout* $\lambda \in]-\infty, +\infty[$ *soit :* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dP_\lambda$ *défini par la limite de (4) quand* $a \longrightarrow -\infty$ *et* $b \longrightarrow +\infty$ *si cette limite existe.*

L'intégrale $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dP_\lambda x$ *existe si et seulement si l'intégrale ordinaire de STIELTJES existe (i.e.)*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 \, d\,\|P_\lambda x\|^2$$

existe. Et

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dP_\lambda x \right\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 \, d\,\|P_\lambda x\|^2$$

Théorème spectral

Théorème 35 ***(Théorème spectral)*** *Pour chaque opérateur auto-adjoint* A *il existe une et seulement une famille spectrale* $\{P_\lambda\}$ *à les propriétés suivantes :*

1-Un vecteur x *est dans le dans* $D(A)$ *si et seulement si* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^2 \, d\,\|P_\lambda x\|^2$ *converge.*

2-Si cette condition satisfaite alors :

$$Ax = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dP_\lambda x$$

Et par conséquent :

$$\|Ax\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^2 \, d\,\|P_\lambda x\|^2$$

Inversement :

Chaque opérateur A défini par les conditions 1 et 2 au sens d'une certaine famille spectrale $\{P_\lambda\}$ est un opérateur auto-adjoint.

Si A est borné alors chaque opérateur borné B qui commute avec A est l'aussi avec chaque P_λ.

Définition 21 ***(Réductibilité)*** *Soit M un sous-espace fermé dans H et P une projection sur H ; on dit que le sous-espace M réduit l'opérateur A si :*

Pour $x \in D(A)$ Alors $Px \in D(A)$ et $APx = PAx$.

Proposition 16 *Un opérateur borné A défini sur tout l'espace H , est réduit par le sous-espace M si et seulement s'il commute avec la projection P sur M .*

Proposition 17 *Un sous-espace M réduit un opérateur auto-adjoint A ,si et seulement si la projection P_M commute avec la famille spectrale $\{P_\lambda\}$ de A pour toute valeur de λ.*

Description du spectre d'opérateur auto-adjoint au sens de la famille spectrale

Pour chaque opérateur auto-adjoint , chaque nombre non-réel esdt un point de type régulier , la résolvante $\Re_\lambda$et la fonction spectrale $\{P_\lambda\}$ sont liés par la relation :

$$\Re_\lambda = (A - \lambda I)^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dP_\mu}{\mu - \lambda}$$

où $\{P_\mu\}$: est une famille spectrale de A .

L'intégrale existe : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dP_\mu}{\mu - \lambda}$ car :

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dP_\mu x}{\mu - \lambda} \right\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\left\|P_\mu x\right\|^2}{\left|\mu - \lambda\right|^2} \leq \frac{1}{\left|\operatorname{Im}\lambda\right|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\left\|P_\mu x\right\|^2 = \frac{1}{\left|\operatorname{Im}\lambda\right|^2} \left\|x\right\|^2$$

Et par conséquent cet integrale est un opérateur borné et :$\|\Re_\lambda\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}$.

Théorème 36 *Soit une famille spectrale d'un opérateur auto-adjoint A alors :*

1-Un nombre réel λ_0 est un point régulier de A si et seulement si :

la fonction P_{λ_0} est constante dans un voisinage de λ_0.

2-Un nombre réel λ_0 est une valeur propre de A si et seulemnt si : $P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0 - 0} \neq 0$.

Démonstration. 1-Montrons la $1^{ère}$ assertion :

Implication indirecte

Du théorème spectral on a :

$$\|(A - \lambda_0 I)x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^2 d(P_\lambda x, x) \qquad \text{pour } x \in D(A) \tag{8}$$

Et soit P_λ une fonction constante dans le voisinage de λ_0; $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$ alors :

$$\|(A - \lambda_0 I)x\|^2 = \int_{-\infty}^{\lambda_0 - \varepsilon} (\lambda - \lambda_0)^2 d(P_\lambda x, x) + \int_{\lambda_0 + \varepsilon}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^2 d(P_\lambda x, x)$$

(et $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon \Rightarrow (\lambda - \lambda_0)^2 \geq \varepsilon^2$) donc :

$$\|(A - \lambda_0 I)x\|^2 \geq \varepsilon^2 \left\{ \int_{-\infty}^{\lambda_0 - \varepsilon} d(P_\lambda x, x) + \int_{\lambda_0 + \varepsilon}^{+\infty} d(P_\lambda x, x) \right\} = \varepsilon^2 \|x\|^2 . \tag{9}$$

Alors :$(A - \lambda_0 I)^{-1}$existe et borné et défini sur toute H.

Alors : λ_0 est un point régulier de A.

Implication directe

Soit λ_0 un point régulier de A alors $(A - \lambda_0 I)^{-1}$existe et borné donc :

$$\left\|(A - \lambda_0 I)^{-1} y\right\| \leq c \|y\| \quad \textit{pour tout } y$$

Posant : $(A - \lambda_0 I)^{-1} y = x$ alors :

$$\|x\| \leq c \|(A - \lambda_0 I)x\|$$

Montrons que :P_λ est une fonction constante dans le voisinage :
$|\lambda - \lambda_0| \leq \dfrac{1}{c}$de point λ_0.

On suppose le contraire :

Soit :$\eta > 0$ tel que :$\eta \leq \frac{1}{c}$ et $P_{\lambda_0+\eta} - P_{\lambda_0-\eta} \neq 0$.

Mais il existe $x \neq 0$ tel que : $Px = x$ donc de (5).

$$\|(A - \lambda_0 I)x\|^2 = \int_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon} (\lambda - \lambda_0)^2 d(P_\lambda x, x) \leq \eta^2 \int_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon} d(P_\lambda x, x) = \eta^2 \|Px\|^2 = \eta^2 \|x\|^2 < \frac{1}{c} \|x\|^2 .$$

cela est une contradiction avec (6)

2-Montrons la $2^{ère}$ assertion :

Soit λ_0 est une valeur propre de A , et x le vecteur propre associé , de l'équation (5) on a :

$$0 = \|(A - \lambda_0 I)x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^2 d(P_\lambda x, x)$$

Qui est possible seulement si la fonction P_λ est constante pour $\lambda < \lambda_0$ et $\lambda > \lambda_0$ (i.e.) :

$$(P_\lambda x, x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad \lambda < \lambda_0 \\ \|x\|^2 & \text{pour} \quad \lambda > \lambda_0 \end{cases}$$

Donc :$\|(P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0-0})x\|^2 = ((P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0-0})x, x) = \|x\|^2 \neq 0$

Alors : $P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0-0} \neq 0$.

L'équation (5) implique aussi que : $(P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0-0})\, x = x$ et par conséquent :x est dans le sous-espace sur lequel l'opérateur $P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0-0}$ project.

Inversement :

Soit : $P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0-0} \neq 0$ et $x = (P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0-0})\, x \neq 0$. Alors :

$$P_\lambda x = P_\lambda (P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0-0})\, x = (P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0-0})\, x = x \qquad \textit{pour } \lambda > \lambda_0$$

Et

$$P_\lambda x = P_\lambda (P_{\lambda_0} - P_{\lambda_0-0})\, x \qquad \textit{pour } \lambda < \lambda_0.$$

Et

$$\|(A - \lambda_0 I)x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^2 d(P_\lambda x, x) = 0.$$

Cette équation signifie que x est un vecteur propre associé a la valeur propre λ_0. ■

Donc on peut avoir la définition suivante :

Définition 22 ***(fonction spectrale d'un opérateur auto-adjoint)***

Une famille d'orthoprojecteurs E_t , $-\infty < t < +\infty$ *est appelé fonction spectrale d'un opérateur auto-adjoint* $\mathring{A}$ *si elle vérifie les conditions suivantes :*

1- $E_t E_\mu = E_{\min\{t,\mu\}}$, t , $\mu \in \mathbb{R}$.

2- $E_{t-0} = E_t$

3- $E_{-\infty} = 0$,$E_{+\infty} = I$ *où* 0 *est l'opérateur nul :* $0f = 0$ *tel que* $f \in H$

4- $D(\mathring{A}) = \left\{ f \in H \; ; \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 d(E_t f, f) < \infty \right\}$, *et pour tout* $f \in D(\mathring{A})$ *:* $\mathring{A}f = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t dE_t f$

La résolvante $\Re_\lambda(\mathring{A})$ *et la fonction spectrale* E_t *sont liés par la relation :*

$$\Re_\lambda(\mathring{A}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE_t}{t-\lambda}.$$

0.5.3 Résolvantes généralisées d'un opérateur symétrique

Soit A un opérateur symétrique fermé défini sur $D(A)$ avec les indices de défaut (m, n)

On sais que :

* l'opérateur A est auto-adjoint si et seulement si , $m = n = 0$

*l'opérateur A possède des prolongements auto-adjoints dans H si ,et seulement si , $m = n$

Dans le cas général chaque opérateur symétrique peut être prolongé en opérateur auto-adjoint $\tilde{A}$ dans un espace plus vaste $\widetilde{H} \supset H$.

Définition 23 ***(fonction spectrale et résolvante généralisées)*** *Si* $\widetilde{E}_t$, $\widetilde{\Re}_\lambda$ *sont respectivement la fonction spectrale et la résolvante de* $\tilde{A}$,

P_H *est l'orthoprojecteur de* $\widetilde{H}$ *sur* H *, alors ,*

les fonctions : $E_t = P_H \widetilde{E}_t \diagup_H$ *et* $\Re_\lambda = P_H \, \widetilde{\Re}_\lambda \diagup_H$. *sont appelé respectivement fonction spectrale généralisée et résolvante généralisée de* A.

Les opérateurs $\Re_\lambda$ *et* E_λ *sont liés par la relation :* $\Re_\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE_t}{t-\lambda}$, $\lambda \in \rho(\tilde{A})$

Formule de STIELTJES

Pour tout f , $g \in H$ et, tous nombres réels α , β :

$$(E_{\alpha,\beta}f,g)\overset{def}{=}\left(\left[\frac{E_{\beta}+\ E_{\beta+0}}{2}-\frac{E_{\alpha}+\ E_{\alpha+0}}{2}\right]f,g\right)$$

$$(E_{\alpha,\beta}f,g)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\tau\longrightarrow+0}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\left[\Re_{\sigma+i\tau}-\Re_{\sigma-i\tau}\right]f,g\right)d\sigma$$

En outre ,pour tout $f\in D(A)$: $Af=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}tdE_{t}f$

La fonction spectrale $E_t$vérifie les propriétés suivantes

1- Pour $t_2>t_1$, $E_{t_2}-E_{t_1}$ est un opérateur borné ,positif

c-à-d : quelque soit $f\in H$: $([E_{t_2}-E_{t_1}]f,f)\succeq 0$

2- $E_{t-0}=E_t$

3- $E_{-\infty}=0$, $E_{+\infty}=I$

L'ensemble des résolvantes généralisées d'un opérateur symétrique ayant des indices de défaut égaux a été décrit par : M . A . Naimark et par :M . G . Krein.

Dans le cas général des indices de défaut arbitraires la formule de résolvantes généralisées est :

$$\Re_{\lambda}=(A_{F(\lambda)}-\lambda I)^{-1}\ (\ \mathrm{Im}\,\lambda>0)\qquad \Re_{\overline{\lambda}}=\Re_{\lambda}^{*}$$

Où $F(\lambda)$ est opérateur arbitraire de $\aleph_i$ dans $\aleph_{-i}$ satisfaisant les conditions suivantes :

1- $F(\lambda)$ est une fonction analytique du paramètre λ dans le dami plan supérieur Π^{+}.

2- $\|F(\lambda)\|\leq 1$, $\lambda\in\Pi^{+}$.

L'opérateur $A_{F(\lambda)}$ est un prolongement quasi auto-adjoint de A défini sur l'ensemble :

$$D(A_{F(\lambda)})=D(A)\dot{+}(F(\lambda)-I)\aleph_i\qquad \text{par :}$$

$$A_{F(\lambda)}(f+F(\lambda)\varphi-\varphi)=Af+iF(\lambda)\varphi+i\varphi\qquad f\in D(A);\varphi\in\aleph_i$$

L'opérateur $A_{F(\lambda)}^{*}$ est défini sur l'ensemble :

$$D(A^*_{F(\lambda)}) = D(A) \dotplus (F^*(\lambda) - I)\aleph_i \qquad \text{par :}$$

$$A^*_{F(\lambda)}(f + F^*(\lambda)\psi - \psi) = Af - iF^*(\lambda)\psi - i\psi \qquad f \in D(A); \psi \in \aleph_{-i}.$$

On voit aisement , que tout prolongement $A_{F(\lambda)}$féfini par (7) et (8) est un opérateur dissipatif (i.e.)

Quelle que soit $f \in D(A_{F(\lambda)})$, $\operatorname{Im}(A_{F(\lambda)}f, f) \leq 0$

Résultats préliminaires

Soit A un opérateur linéaire , fermé ,symétrique défini sur un ensemble $D(A)$ d'un espace de Hilbert séparable H et ayant les indices de défaut $(1, 1)$. On suppose $D(A)$ est dense dans H .

Désignons par : $\mathcal{F}_\lambda(\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$ l'ensemble des opérateurs F définis sur $\aleph_\lambda$ a valeur dans $\aleph_{\overline{\lambda}}$ (i.e.) F :$\aleph_\lambda \longrightarrow \aleph_{\overline{\lambda}}$ et tel que $\|F\| \leq 1$.

Lemme 4 *Soit T un opérateur linéaire , fermé ,symétrique , T_F un prolongement quasi auto-adjoint défini par (7) avec $F \in \mathcal{F}_i$,*
Pour tout f , $g \in D(T^*)$ introduisons la forme : $\langle f, g\rangle = (T^*f \ , \ g) - (f \ , \ T^*g)$
Alors les domaines de définitions : $D(T_F)$ et $D(T^*_F)$ des opérateurs : T_F et T^*_F respectivement sont définis par :

$$D(T_F) = \{u \ , \ u \in D(T^*), \qquad \langle u, \varphi - F^*\varphi\rangle = 0, \qquad \varphi \in \aleph_{-i}\}$$

$$D(T^*_F) = \{u \ , \ u \in D(T^*), \qquad \langle u, \psi - F\psi\rangle = 0, \qquad \psi \in \aleph_i\}$$

Soit $\mathring{A}$ un prolongement auto-adjoint fixé de A ,introduisons l'opérateur :

$$\overset{\circ}{U}_{\lambda\lambda_0} = (\mathring{A} - \lambda_0 I)(\mathring{A} - \lambda I)^{-1} = I + (\lambda - \lambda_0)\Re_\lambda, \qquad \operatorname{Im}\lambda . \operatorname{Im}\lambda_0 \neq 0$$

Notons les propriétés de $\overset{\circ}{U}_{\lambda\lambda_0}$:
1- $\overset{\circ}{U}{}^{-1}_{\lambda\lambda_0} = \overset{\circ}{U}_{\lambda_0\lambda}$
2- $\overset{\circ}{U}{}^{*}_{\lambda\lambda_0} = \overset{\circ}{U}_{\overline{\lambda\lambda_0}}$

3- $\overset{\circ}{U}_{\lambda\xi}.\ \overset{\circ}{U}_{\xi\mu} = \overset{\circ}{U}_{\lambda\mu}$

4- $\overset{\circ}{U}_{\lambda\lambda_0}\aleph_{\overline{\lambda}_0} = \aleph_{\overline{\lambda}}$ $\qquad\qquad$ $\operatorname{Im}\lambda.\operatorname{Im}\lambda_0 \succ 0$

Désignons par : φ_i *,* $\|\varphi_i\| = 1$ *un vecteur normé de sous-espace* $\aleph_{-i}$

Posons :

$$\varphi_\lambda = \overset{\circ}{U}_{\lambda i}\varphi_i, (\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$$

D'après la $4^{\text{ème}}$ *propriété* $\varphi_\lambda \in \aleph_{\overline{\lambda}}$ *et en particulier* $\varphi_{-i} = \overset{\circ}{U}_{-ii}\varphi_i \in \aleph_i$.

De la $1^{\text{ère}}$ *et la* $2^{\text{ème}}$ *propriété , il résulte que l'opérateur* $\overset{\circ}{U}_{-ii}$ *est unitaire (il est appelé transformation de CAYLEY), par conséquent :* $\|\varphi_i\| = \left\|\varphi_{-i}\right\| = 1$.

Formule des résolvantes généralisées

Soit $\Re_\lambda = (A_{F(\lambda)} - \lambda I)^{-1}$ une résolvante généralisée de A correspondantee à $F(\lambda) \in \mathcal{F}_i$ quel que soit $\lambda \in \Pi^+$.

Comme l'opérateur A possède les indices de défaut $(1, 1)$, donc les espaces $\aleph_{-i}$ et $\aleph_i$ sont unidimensionels et sont engendrés respectivement par φ_i , φ_{-i}, ceci étant nous pouvons définir l'opérateur :

$$F(\lambda) : \aleph_i \longrightarrow \aleph_{-i} \qquad \text{par :} \qquad F(\lambda)\varphi_{-i} = \omega(\lambda)\varphi_i$$

Où $\omega(\lambda)$ est une fonction scalaire régulière dans le demi plan supérieur et telle que $|\omega(\lambda)| \leq 1$ $(\lambda \in \Pi^+)$.

L'opérateur $A_{F(\lambda)}$ est défini sur l'ensemble des éléments $f \in D(A^*)$ de la forme :

$$f = x + c\left[\omega(\lambda)\varphi_i - \varphi_i\right] \qquad x \in D(A), \qquad c \in \mathbb{C}$$

par :

$$A_{F(\lambda)}f = Ax + c\left[i\ \omega(\lambda)\varphi_i + i\varphi_{-i}\right]$$

L'opérateur $A^*_{F(\lambda)}$ est défini sur l'ensemble des éléments $f \in D(A^*)$ de la forme :

$$f = x + c\left[\overline{\omega(\lambda)}\varphi_{-i} - \varphi_i\right] \qquad x \in D(A), \qquad c \in \mathbb{C}$$

par :

$$A^*_{F(\lambda)}f = Ax - c\left[i\,\overline{\omega(\lambda)}\varphi_{-i} + i\varphi_i\right]$$

Introduisons la fonction :

$$\vartheta_\lambda = \overline{\omega(\lambda)}\varphi_{-i} - \varphi_i.$$

D'après le lemme précédent $D(A_{F(\lambda)})$ est l'ensemble des y de $D(A^*)$ vérifiant l'égalité :

$$(A^*y, \vartheta_\lambda) - (y, A^*\vartheta_\lambda)$$

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 5 *Pour tout $f \in H$ on a :*

$$\begin{aligned} \Re_\lambda f - \overset{\circ}{\Re}_\lambda f &= 0, \ si\ f \in (A - \lambda I)D(A) \\ \Re_\lambda f - \overset{\circ}{\Re}_\lambda f &\in \aleph_{\overline{\lambda}}, \ si\ f \in \aleph_{\overline{\lambda}} \end{aligned}$$

Où $\quad (\mathring{A} - \lambda_0 I)^{-1}$: est la résolvante de $\mathring{A}$.

Démonstration. En effet ,la première égalité est triviale :

Si $f \in (A - \lambda I)D(A)$,donc il existe $g \in D(A)$ tel que : $f = (A - \lambda I)g$

On a :

$$\Re_\lambda f - \overset{\circ}{\Re}_\lambda f = \Re_\lambda(A - \lambda I)g - \Re_\lambda(A - \lambda I)g = g - g = 0$$

Démontrons la deuxième égalité :

Pour tout $g \in (A - \overline{\lambda}I)D(A)$ on a :

$$\left(\left\{\Re_\lambda - \overset{\circ}{\Re}_\lambda\right\} f, g\right) = \left(f, \left\{\Re_{\overline{\lambda}} - \overset{\circ}{\Re}_{\overline{\lambda}}\right\} g\right) = (f, 0) = 0$$

Le lemme est démontré.

En tenant compte de (12),la résolvante généralisée peut s'écrire sous la forme :

$$\Re_\lambda f = \overset{\circ}{\Re}_\lambda f + b(\lambda)\varphi_\lambda$$

Où $b(\lambda)$ est une fonction à établir d'un paramètre λ.

Pour définir $b(\lambda)$ utilisant l'égalité (11) on posant $y = \Re_\lambda f$, $f \in H$,

Comme pour tout $f \in H$, $\Re_\lambda f \in D(A_{F(\lambda)})$, on aura :

$$(A_{F(\lambda)}\Re_\lambda f, \vartheta_\lambda) = (\Re_\lambda f, A^*\vartheta_\lambda)$$

d'où

$$(A_{F(\lambda)}\left[\overset{\circ}{\Re}_\lambda f + b(\lambda)\varphi_\lambda\right], \overline{\omega(\lambda)}\varphi_{-i} - \varphi_i \ ) = (\overset{\circ}{\Re}_\lambda f + b(\lambda)\varphi_\lambda, A^*\left[\overline{\omega(\lambda)}\varphi_{-i} - \varphi_i\right] \ )$$

En faisant le calcul et en tenant compte de (9) et de (10) on trouve aisement :

$$b(\lambda) = \frac{[i - \omega(\lambda)]\,(f, \varphi_{\overline{\lambda}})}{[\omega(\lambda)C(\lambda) - 1]\,(\lambda + i)\,(\varphi_\lambda, \varphi_i)}, (\lambda \in \Pi^+)$$

Où

$$C(\lambda) = \frac{\lambda - i}{\lambda + i}\frac{(\varphi_\lambda, \varphi_{-i} \ )}{(\varphi_\lambda, \varphi_i \ )}$$

est une fonction caractéristique de l'opérateur A .

En remplaçant dans la formule $b(\lambda)$ par l'expression (14) nous obtenons :

$$\Re_\lambda f = \overset{\circ}{\Re}_\lambda f + \frac{i - \omega(\lambda)}{\omega(\lambda)C(\lambda) - 1}\frac{(f, \varphi_{\overline{\lambda}})}{(\lambda + i)\,(\varphi_\lambda, \varphi_i)}\varphi_\lambda$$

En tenant compte de l'égalité : $\Re_{\overline{\lambda}} = \Re^*_\lambda$ on obtient :

$$\Re_{\overline{\lambda}} f = \overset{\circ}{\Re}_{\overline{\lambda}} f + \frac{i - \overline{\omega(\lambda)}}{\overline{\omega(\lambda)C(\lambda)} - 1}\frac{(f, \varphi_\lambda)}{\left(\overline{\lambda} - i\right)\left(\varphi_{\overline{\lambda}}, \varphi_{-i}\right)}\varphi_{\overline{\lambda}}$$

On peut résumer le résultat établi par le théorème suivant : ■

Théorème 37 *L'ensemble des résolvantes généralisées $\Re_\lambda$ de l'opérateur A est décrit par la formule* (15) *et* (16) *où :* $\omega(\lambda)$ *est une fonction arbitraire régulière dans le demi plan supérieur et telle que :* $|\omega(\lambda)| \leq 1$, $\lambda \in \Pi^+$

les formules(15) *et* (16) *donnent une résolvante d'un prolongement auto-adjiont si, et seulement si ,* $\omega(\lambda) = x = c^{te}$ *avec* $|x| = 1$.

Remarque 8 *En remarquant que pour :* $\lambda \in \Pi^+$ *:*

$$\frac{1}{\overline{C(\lambda)}} = \frac{\overline{\lambda} - i}{\overline{\lambda} + i} \frac{\left(\varphi_{\overline{\lambda}}, \varphi_{-i}\right)}{\left(\varphi_{\lambda}, \varphi_{i}\right)} = C(\overline{\lambda})$$

Nous pouvons écrire la résolvante $\Re_{\overline{\lambda}}$ *sous la forme :*

$$\Re_{\overline{\lambda}} f = \frac{1 - \dfrac{1}{\overline{\omega(\lambda)}}}{\dfrac{1}{\overline{\omega(\lambda)}} \overline{C(\lambda)} - 1} \frac{(f, \varphi_{\lambda})}{\left(\overline{\lambda} - i\right) \left(\varphi_{\overline{\lambda}}, \varphi_{-i}\right)} \varphi_{\overline{\lambda}} + \overset{\circ}{\Re}_{\overline{\lambda}} f$$

$$\Re_{\overline{\lambda}} f = \frac{i - \omega(\overline{\lambda})}{\omega(\overline{\lambda}) C(\overline{\lambda}) - 1} \frac{(f, \varphi_{\lambda})}{\left(\overline{\lambda} - i\right) \left(\varphi_{\overline{\lambda}}, \varphi_{-i}\right)} \varphi_{\overline{\lambda}} + \overset{\circ}{\Re}_{\overline{\lambda}} f$$

Où on a posé : $\omega(\overline{\lambda}) = \dfrac{1}{\overline{\omega(\lambda)}}$.

Dans toute la suite on supposera que $\omega(\lambda)$ *est prolongé sur* Π^- *par l'égalité* $\omega(\overline{\lambda}) = \dfrac{1}{\overline{\omega(\lambda)}}$ *donc elle est définie sur* $\Pi^+ \cup \Pi^-$.

Deuxième partie

Méthode de Fourier de separation des variables

Dans ce travail ,on applique la méthode de Fourier pour résoudre les équations de la forme :

$$B_t^* u = A_x^* u$$

Où A_x, B_t sont des opérateurs linéaires respectivement dans les espace de Hilbert , $L^2(G_x)(G_x \subset \mathbb{R}^n)$ et, $L^2(G_t)$ $(G_t \subset \mathbb{R}^n)$, $G = G_t \times G_x$ et $f \in L^2(G)$.

Puis, on donne un exemple concrét d'application .

Introduction

Soit l'équation :

$$B_t^* u = A_x u + f, \tag{1}$$

Où A_x, B_t sont des opérateurs linéaires respectivement dans les espace de Hilbert , $L^2(G_x)$ $(G_x \subset \mathbb{R}^n)$, $L^2(G_t)$ $(G_t \subset \mathbb{R}^n)$,où $G = G_t \times G_x$ et $f \in L^2(G)$,

Pour appliquer la méthode de Fourier on suppose que le spectre de A_x est discret $\{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, B_t est un opérateur symétrique régulier avec les indices de défaut (p, p) $(p < \infty)$. Dans ce cas l'opérateur B_t^* adjoint de B_t a comme valeur propre quelque soit $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction propre Ψ_k associée à λ qui est un élement du sous-espace de défaut $\aleph_{\overline{\lambda}}$ de B_t, $\Psi_\lambda \in \aleph_{\overline{\lambda}}$. On pose $\Psi_k = \Psi_{\lambda_k}$, la solution de l 'équation homogène $B_t^* u = A_x^* u$ est présentée par une serie de termes $u_k(t, x) = a_k \psi_k(t) \varphi_k(x)$, où φ_k est la fonction propre de A_x associée à λ_k.

Le présent travail est composé d'une introduction et de trois paragraphes. Dans le paragraphe 1 on donne des notions et des résultats préliminaires de la théorie des opérateurs symétriques, dans le paragraphe 2 on considère la méthode de Fourier pour trouver la solution du problème 1. Le paragraphe 3 est réservé à des exemples concréts d'application.

0.6 Méthode de Fourier de separation des variables

1. Soient $G_t \subset \mathbb{R}^m$ et $G_x \subset \mathbb{R}^n$ deux domaines des variables t et x respectivement, $G = G_t \times G_x$, B_t, A_x deux opérateurs linéaires en général non bornés dans les espaces

$L^2(G_t)$ et $L^2(G_x)$, définis, respectivement sur $D(B_t) \subset L^2(G_t)$ et $D\ (A_x) \subset L^2(G_x)$, $u = u(t,x)$ une fonction définie sur G. Si pour tout t fixé $u(t,.) \in D\ (A_x)$ et pour tout x fixé $u(.,x) \in D\ (B_t)$ alors $A_x u$ et $B_t u$ désignent les images de u par les opérateurs A_x et B_t respectivement. Soit g une fonctionnelle linéaire continue dans les espaces $C\left(\overline{G_t}\right)$ des fonctions continues sur le domaine G_t y compris sa frontière, on designe $\langle g, \varphi \rangle_t$ l'image de $\varphi \in C\left(\overline{G_t}\right)$ par g.

Si g a un sens en $u(t,x)$ pour presque tout $x \in G_x$, alors $\langle g, u \rangle_t$ et l'image de u par g. Par exemple, si $u(t,x)$ est continue en $t = (0,..,0)$ quelque soit $x \in G_x$ et δ est la fonction de Dirac, alors :

$$\langle \delta, u \rangle_t = u(0,x)$$

2. Position des problèmes

Soit $A_x \in M_\rho$, $B_t \in M$, $g_1, g_2, ..., g_k$ des fonctionnelles linéaires qui ont un sens sur des fonctions de $D(B_t^*)$, $h_1, h_2, ..., h_p$ des fonctionnelles linéaires continues sur $D(A_x^*)$, A_x^0 l'extention auto-adjointe de A_x. On suppose, de plus, que $Sp(A_x^0) \subset \rho(B_t)$. Posons le problème : trouver une solution $u(t,x)$ de l'équation :

$$B_t^* u = A_x^* u, \tag{4}$$

Satisfaisant les conditions :

$$u(.,x) \in D(B_t^*)\ ,\ \ u(t,.) \in D(A_x^0) \tag{5}$$

$$\langle g_i, u \rangle_t = \Phi_i(x), 1, 2, ..., k\ ,\ \ \langle h_j, u \rangle_x = \alpha_j(t), j = 1, ..., p \tag{6}$$

Les fonctions $\Phi_i(x) \in L^2(G_x)$ et $\alpha_j(t) \in L^2(G_t)$ sont données. Les conditions (5) et (6) sont données pour chaque problème et assurent dans la plupart des cas l'unicité de la solution du problème posé.

3.Schéma de la solution

On cherche la solution du problème (3) sous la forme $u(t,x) = T(t)X(x)$.

On a :

$$\frac{B_t^* T(t)}{T(t)} = \frac{A_x^* X(x)}{X(x)} = \lambda$$

Comme A_x est symétrique et régulier, son extension auto-adjointe A_x^0 posséde un spectre discret. On désigne $X_k(x) = \varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$. Les fonctions propres de A_x^0 et λ_k ses valeurs propres : $A_x^0 \varphi_x = \lambda_k \varphi_x$, $\varphi_x \in D(A_x^0)$. En tenant compte que $Sp(A_x^0) \subset \rho(B_t)$ et (3), on a quelque soit $\lambda \in \rho(B_t)$: $B_t^* \Psi_\lambda(t) = \lambda \Psi_\lambda(t)$, où $\Psi_\lambda(t) \in \chi_\lambda B(t)$. En particulier, $B_t^* \Psi_k(t) = \lambda_k \Psi_k(t)$, où $\Psi_k(t) = \psi_{\lambda_k}(t)$, $k = 1, 2, \dots$, les fonctions $u_k(t,k) = \Psi_k(t)\varphi_k(x)$ satisfont (4) et (5). Posons :

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(t) \varphi_k(x) \tag{7}$$

La suite $\{a_k\}$ est telle que les conditions (5) et (6) soient satisfaites. Pour que $u(t,.) \in D(A_x^0)$ pour presque tout $t \in G_t$ il faut et il suffit que la série :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k \psi_k(t)|^2$$

Soit convergente pour presque tout $t \in G_t$. Pour que $u(.,x) \in D(B_t^*)$ pour presque tout $x \in G_x$, la condition analogue n'a pas lieu car la suite $\{\Psi_k(t)\}$ n'est pas en général, orthonormée. La suite $\{a_k\}$ peut être définie par les conditions (6). Par exemple on donne :

$$\langle g, u \rangle_t = \Phi(x), g \in L^2(G_x)$$

Alors :

$$\langle g, u\rangle_t = (g, u) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(g, \psi_k)\varphi_k(x) = \Phi(x)$$

D'où : $(\Phi, \varphi) = a_k(g, \psi_k)$.

0.7 Exemple

1. Dans l'espace Hilbert $L^2(0,1)$ on considère l'opérateur A_x défini pour tout $f \in L^2(0,1)$ par :

$$A_x f(x) = -\pi i \int_0^1 \|x - y\| f(y)dy$$

L'opérateur A_x est de Hilbert-Schmidt, il a un systéme complet $\{\varphi_k\}$ des fonctions propres correspondantes aux valeurs propres $\{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$: $A_x\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$.

Dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$ on considère l'opérateur différentiel B_t, $B_t f = \dfrac{1}{2\pi i} f'$, défini sur l'ensemble des fonctions $f \in L^2(0,1)$ absolument continues sur $\mathbb{R}$ telle que $f' \in L^2(\mathbb{R})$ et $f(a) = 0$ où $a < 0$ est un point quelconque fixé. L'opérateur B_t est symétrique avec les indices de défaut $(1,1)$, un élément ψ_λ appartenant a son sous-espace de défaut $\aleph_{\overline{\lambda}}$est [5] : $\psi_\lambda(t) = 1_{\varepsilon(\lambda)}(t-a)e^{2\pi i(t-a)}$, Im $\lambda \neq 0$, où $1_{\varepsilon(\lambda)}(t) = 1_{(0,\infty)}(t) = 1_+(t)$ est la fonction indicatrice de l'ensemble $(0,\infty)$ si Im $\lambda > 0$ et $1_{\varepsilon(\lambda)}(t) = 1_-(t)$ si Im $\lambda < 0$. L'opérateur B_t^* conjugué de B_t est défini sur l'ensemble $D(B_t^*)$ des fonctions f absolument continues sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et telle que $f \in L^2(\mathbb{R})$. On pose le problème : Trouver une solution u de l'équation :

$$B_t^* u = A_x u \tag{10}$$

Satisfaisant les conditions :

$$u(.,x) \in D(B_t^*), u(t,.) \in L^2(0,1) \tag{11}$$

Et encore :

$$\langle g, u \rangle_t = \varphi(t), \varphi \in L^2(0,1) \qquad g(t) = t \tag{12}$$

$$\langle \delta, u \rangle_t = u(0,x) = \varphi(x) \tag{13}$$

Théorème 38 *Le problème homogène* (8), (9), (10) *a une solution unique* $u \in L^2(\mathbb{R}, [0,1])$ *définie par la série :*

$$u(t,x) = 1_+(t-a)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi,\varphi_k)}{(k-\frac{1}{2})^4 + (k-\frac{1}{2})^2 a} \exp(-\frac{4(t-a)}{(2k-1)^2}) \cos((2k-1)\pi x) \tag{14}$$

Si la série de termes (φ, φ_k) *converge absolument, alors le problème* (10), (11) *et* (13) *possède une solution unique* $u \in L^2(\mathbb{R} \times [0,1])$ *donnée par :*

$$u(t,x) = 1_+(t-a)\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi,\varphi_k)\exp(-\frac{4t}{(2k-1)^2})\cos((2k-1)\pi x) \tag{15}$$

Les séries (14), (15) *convergent uniformément sur* $\mathbb{R} \times [0,1]$.

Remarque 9 *1. Si l'opérateur* $B_t = B_t^*$ *le problème* (10), (11) *n'a pas de solution car les valeurs de* A_x *sont non réelles.*

2. On considère le problème (10), (11) *et* (12) *dans lequel l'opérateur* B_t *est défini sur l'ensemble* $D(B_t)$ *des fonctions* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *telles que* f' *est absolument continue et* $f(0) = 0$, $f'' \in L^2(\mathbb{R})$ *par l'égalité :* $B_t f = -(2\pi)^{-2} f''$.

L'opérateur B_t *est symétrique avec les indices de défaut* $(1,1)$, *son sous-espace de défaut* $\aleph_{\overline{\lambda}}$ *est engendré par la fonction :*

$$\psi_\lambda(t) = \exp(2\pi i\sqrt{\lambda}\,|t|), \operatorname{Im}\lambda > 0, \operatorname{Im}\sqrt{\lambda} > 0$$

On pose :

$$\psi_k(t) = \exp(-\frac{2}{2k-1}\,|t|)(\cos\frac{2}{2k-1}t + \sin\frac{2}{2k-1}\,|t|)$$

La solution de (10) est :

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp(-\frac{2}{2k-1}\,|t|)(\cos\frac{2}{2k-1}t + i\sin\frac{2}{2k-1}\,|t|)\sin\pi(2k-1)x \tag{16}$$

Théorème 39 *Pour toute fonction* $\varphi \in L^2(0,1)$ *le problème (10), (11) et (12) a une solution unique* $u \in L^2(\mathbb{R} \times [0,1])$ *donné par*

$$u(t,x) = 4i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi,\varphi_k)}{(2k-1)^2} \exp(-\frac{2}{2k-1}\,|t|)(\cos \frac{2}{2k-1} t \cos \pi(2k-1)x +$$

$$+4i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi,\varphi_k)}{(2k-1)^2} \exp(-\frac{2}{2k-1}\,|t|) i \sin \frac{2}{2k-1}\,|t| \cos \pi(2k-1)x) \tag{17}$$

Si la série :

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\varphi,\varphi_k)$$

est absolument convergente, alors le problème (10), (11) et (12) a une solution unique $u(t,x) \in L^2(\mathbb{R} \times [0,1])$ *donnée par :*

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi,\varphi_k) \exp(-\frac{2}{2k-1}\,|t|) \exp(-\frac{2i}{2k-1}\,|t|) \cos \pi(2k-1)x) \tag{18}$$

Les séries (16), (17) et (18) convergent absolument et uniformément sur $\mathbb{R} \times [0,1]$.

Bibliographie

[1] Akhiezer N. I. and Glazman I. M. : **Theory of linear operators in Hilbert space, vols 1 and 2**, New York, Frederik Ungar 1961 and 1963.

[2] Alexandrov E., Hebbeche A. : *Fonctions spectrales d'une certaine classe d'opérateurs symetriques,* Sciences& Technologie, 17 (2002), 7-10.

[3] Berezanskii Yu M. : **Décomposition selon les fonctions propres des opérateurs auto-adjoints**, Naoukova Dumka, Kiev, 1965.

[4] Hebbeche A. : *Generalized resolvents and spectrum for a certain class of perturbed symmetric operators,* Journal of Applied Mathematics, 1 (2005), 81-92..

[5] Kostyuchenko A.G., Sargsyan I.S. : **Distribution of eigenvalues. Selfadjoint ordinary differential operators.** Nauka, (1970), Moscou (Russian).

[6] Kruglikova O.P. : *Generalized resolvents and spectral functions of an integro-differential operator,* J. Funkts Anal., **33** (1992), 46-49.

[7] Kruglikova O.P. : *Generalized resolvents and spectral functions of a first order integro-differential operator in the space of the vector-valued functions*, (Russian), Funkts. Anal. **36** (1997), 24-30 .

[8] Levitan B.M., Sargsian I.S. : **Introduction to spectral theory : Selfadjoint ordinary differential operators**. Translations of Mathematical Monographs. Vol. 39, Providence, R.I. : American Mathematical Society. XI, (1975).

[9] Malamud M.M. : *On formula of the generalized resolvents of a nondensely defined hermitian operators,* (Russian), Ukr. Mat. Journal, **44** (1992), 1658-1688. (English translation : Sov. Math., Plenum Publ. Corp., 0041-5995/92/4412-1523, 1993, 1522-1546).

[10] Naimark M.A. : **Linear Differential Operators**, New York, Ungar, 1968.

[11] Naimark M.A. *On self-adjoint extensions of the second kind of a symmetric operator*, (Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math. **4** (1940), 1, 53-104.

[12] Naimark M.A. *Spectral function of a symmetric operators*, Izvestia Akad. Nauk SSSR, Ser. Math., **4** (1940), 277-318.

[13] Naimark M.A. On *spectral function of a symmetric operators*, Izvestia Akad. Nauk SSSR, Ser. Math., **7** (1940), 6, 285-296.

[14] Straus A. V. : *Extensions, characteristic functions and generalized resolvents of symmetric operators*, (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR **178** (1968), 790–792.

[15] Straus A. V. : *One-parameter families of extensions of a symmetric operator*, (Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **30** (1966), 1325–1352.

[16] Straus A. V. : *Spectral functions of a differential operator,* (Russian), Uspehi. Mat. Nauk **13** (1958), 6 (84), 185–191.

[17] Straus A. V. : *On spectral functions of differential operators*, (Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **19** (1955), 201–220.

[18] Straus A. V. : *Generalized resolvents of symmetric operators,* Izvzstiya Akad. Nauk SSSR ser. Math. **18** (1954), 51-86.

[19] Straus A. V. : *The spectral expansions of a regular symmetric operator,* Doklady Akad. Nauk. SSSR, **204** (1972), 52-55.

[20] Titchmarsh E. C., **Eigenfunction expansions associated with second order differential equations**, Part I., O.U.P., 1962.

Résumé :

Le présent mémoire est consacré à l'étude des propriétés spectrales d'opérateurs symétriques réguliers d'une part, et d'autre part à la méthode de Fourier pour une classe d'équations opératorielles.

On présente une étude détaillée des propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints et symétriques réguliers. On donne la construction d'extensions auto-adjointes d'un opérateur symétrique et l'étude de leur spectre. En particulier on présente l'étude des résolvantes généralisées d'une certaine classe d'opérateurs symétriques d'indice de défaut (1,1), une formule explicite de ces résolvantes est donnée.

En second lieu on développe la méthode de Fourier de séparation des variables pour l'étude des équations de la forme : $B_t^* u = A_x u + f$ où A_x , B_t sont des opérateurs linéaires dans certains espaces de Hilbert. On illustre les résultats obtenus par un exemple concret.

Mots clés : Méthode de Fourier, séparation des variables, opérateurs symétriques, indices de défaut, espaces de Hilbert, résolvantes généralisées, prolongement auto-adjoint.

ملخص:

خصصت هذه المذكرة لدراسة الخواص الطيفية لمؤثرات تناظرية منتظمة من جهة ومن جهة أخرى طريقة فورييه لصنف من المعادلات ذات معاملات مؤثرات خطية .

أولا، نقدم دراسة تفصيلية للخواص الطيفية لمؤثرات قرينة لذاتها والمتناظرة ، بعد ذلك نعطي طريقة إنشاء تمديدات قرينة لذاتها لمؤثر تناظري ودراسة طيفه. وعلى الخصوص تم تقديم دراسة الحالات المعممة لصنف من المؤثرات المتناظرة مع أدلة النقص هي (1,1)، ونعطي صيغة مفصلة لهذه الحالات.

ثانيا، نستعمل طريقة فورييه "الفصل بين المتغيرات" من أجل دراسة المعادلات من الشكل: $B_t^*u = A_x u + f$ حيث: $A_x\ ,B_t$ مؤثرات خطية في بعض فضاءات هيلبرت. نوضح النتائج المحصل عليها في مثال.

الكلمات المفتاحية : طريقة فورييه، الفصل بين المتغيرات، مؤثر متناظر، أدلة النقص ، فضاءات هيلبرت، الحالات المعممة، تمديد قرين لذاته.

Abstract:

The present work is devoted to the study of the spectral properties of the symmetric operators and the Fourier method for a class of operator equations.

Firstly, we present a detailed study of spectral properties of self-adjoint and regular symmetric operators, we give the construction of self-adjoint extensions of a symmetric operator and the study of their spectrum .Particularly, we present the study of generalized resolvents for a certain class of symmetric operators where deficiency indices are (1,1). Finally an explicit formula for those resolvents is given.

Secondly, we develop a Fourier method of separation of variables. In order to study the operator equations of the form: $B_t^* u = A_x u + f$ where A_x , B_t are linear operators in certain Hilbert spaces. We give an application of the obtained results.

Key words: Fourier method, separation of variables, symmetric operator, deficiency indices, Hilbert spaces, generalized resolvent, self-adjoint extension.