

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI - CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le Diplôme de Magister
En : **Mathématiques**

THEME

*Résolution Numérique du Problème
Généralisé de Stokes*

Option :

Analyse Numérique des EDP

Présenté par :

Mr. DIAR AHMED

Devant le jury :

Président :	N. BENKAFADAR	Prof.	Univ. Constantine
Rapporteur :	N. KECHKAR	Prof.	Univ. Constantine
Examineur :	M. DENCHE	Prof.	Univ. Constantine
Examinatrice :	M. NOURI	Prof.	Univ. Annaba

Soutenu Le :

TABLE DES MATIERES

Introduction	01
---------------------------	----

Premier Chapitre Formulation faible pour le problème généralisé de Stokes
--

1.1. Position du problème.....	03
1.2. Formulation faible continue pour le problème généralisé de Stokes.....	04

Deuxième Chapitre Stabilité classique des éléments finis

2.1. Théorie standard de stabilité des méthodes mixtes.....	09
2.2. Méthodes mixtes pour le problème généralisé de Stokes.....	16
2.3. Méthodes mixtes stables et instables	19
2.3.1. Paires stables d'éléments finis.....	19
2.3.2. Paires instables d'éléments finis.....	20
2.3.3. Paires d'éléments finis rendues stables.....	21

Troisième Chapitre Formulation stabilisée pour le problème généralisé de Stokes.

3.1. Formulation localement stabilisée pour le problème généralisé de Stokes.....	26
3.2. Stabilité de la formulation localement stabilisée du problème généralisé de Stokes.....	28
3.3. Construction de certains macro-éléments faibles.....	35
3.3.1. Cas triangulaire.....	36
3.3.2. Cas quadrilatéral.....	39

Conclusion	40
-------------------------	----

Références Bibliographiques	41
--	----

Dédicace

Je dédie ce mémoire à mes Parents, ma femme, mon fils ainsi qu'à toute ma famille.

REMERCIEMENTS

Je suis heureux, d'exprimer ici mes sincères remerciements à mon professeur, Monsieur le Professeur N. KECHIKAR de l'université Mentouri de Constantine, qui m'a proposé le sujet de ce mémoire et n'a cessé de m'encourager le long de sa réalisation. Encore une fois je le remercie pour ses conseils fructueux et de toute l'aide dont il m'a fait bénéficier.

Mon professeur, Monsieur le Professeur N. BENKAFADAR me fait le très grand honneur de présider le jury, je le remercie vivement et lui exprime ma profonde gratitude.

Mes remerciements vont également à Madame le professeur HADJI née F. Z. NOURI de l'université d'Annaba et à mon professeur, Monsieur le Professeur M. DENCHE, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en participant au jury.

Je ne pourrais oublier mes professeurs, Messieurs S. Djezar et N. Hamri pour leurs encouragements et leurs sympathies durant ma formation.

Bien sûr, je n'oublie pas mes amis, surtout K. Bessila, auprès desquels, j'ai trouvé aide et sollicitude.

Introduction.

Le développement des méthodes d'éléments finis stables pour les équations de Stokes est une composante fondamentale dans la construction de méthodes numériques efficaces pour la résolution des équations de Navier-Stokes qui gouvernent l'écoulement des fluides incompressibles.

Pour une formulation variationnelle primitive, il est largement reconnu qu'il est crucial d'assurer la compatibilité entre l'approximation de la vitesse et de la pression au moyen de la satisfaction de ce qui est appelé "condition de stabilité de Babuska-Brezzi". En particulier, il est bien connu que les éléments conformes de bas ordre, comme l'élément triangulaire $P_1 - P_0$ (vitesse linéaire, pression constante) sont instables.

La stabilité des approximations mixtes est devenue très importante surtout avec l'arrivée des algorithmes itératifs rapides, par exemple, ceux basés sur les méthodes multi-grilles ou gradient conjugué préconditionné. Les tests numériques montrent que garantir la stabilité des solutions des équations de Stokes ou de Navier-Stokes devient essentiel si un taux de convergence raisonnable pour de telles itérations devrait être accompli (pour des détails, voir Verfurth [21], Bramble et Pasciak[6], entre autres).

Récemment, les stabilisations de la formulation ont été développées pour surmonter le problème d'incompatibilité des approximations mixtes. L'idée d'une telle régularisation fut initialement proposée par Brezzi et Pitkaranta [7] dans le contexte de l'élément triangulaire $P_1 - P_1$. Ensuite, Hughes et Franca [12] ont construit une formulation discrète de Stokes qui assure la stabilité pour une approximation mixte arbitraire. Pour l'approximation de la pression discontinue, cette stabilité peut être achevée par l'introduction de l'opérateur "saut de pression" dans la formulation discrète. Pour les approximations de bas ordre, le seul prix à payer pour obtenir une stabilité universelle réside dans le fait que l'opérateur en question doit permettre le contrôle des sauts de pression à travers tous les bords des frontières intérieurs (entre les éléments). Ceci rend assez dissuasive l'implantation de la formulation de Hughes et Franca [12].

Numériquement, d'après Silvester et Kechkar [18], c'est une évidence de suggérer qu'une façon plus robuste de stabilisation des méthodes mixtes basées sur une pression discontinue consiste à modifier l'opérateur de saut global de Hughes et Franca, en le restreignant localement.

Dans ce travail, on vise à étendre la méthodologie introduite dans [18] pour le problème de Stokes à un problème plus généralisé de Stokes, et qui intervient dans la modélisation raffinée de la plupart des écoulements incompressibles industrielles. pour dériver une méthode générale pour de telles approximations mixtes stabilisées. Le problème en question est généralisé par l'introduction d'un terme additionnel provenant de la discrétisation en temps.

Le présent mémoire est subdivisé en quatre parties. Dans la première partie une brève présentation du problème généralisé de Stokes est donnée. La formulation faible, qui sera utilisée dans tout le mémoire est déduite. De plus, des résultats classiques sont étendus au problème étudié. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la stabilité classique des méthodes mixtes d'éléments finis. Il est, ainsi, établi que les méthodes de plus bas ordre pour les inconnues de vitesse et de pression ne sont pas fiables car n'assurant ni l'unicité, ni la convergence des solutions approchées. Le troisième chapitre, qui représente la contribution essentielle du travail, se spécialise dans la construction d'une formulation discrète stabilisée qui permet l'application des méthodes mixtes qui étaient classiquement instables. Des conditions suffisantes, facilement réalisables sur les maillages utilisés, garantissent les propriétés d'existence, d'unicité et de convergence dans les normes habituelles de Sobolev. De plus, les taux optimaux sont obtenus pour les deux approximations de vitesse et de pression.

PREMIER CHAPITRE

**FORMULATION FAIBLE POUR LE PROBLÈME
GÉNÉRALISÉ DE STOKES**

Dans ce chapitre, on donne une brève présentation du problème d'intérêt. Ensuite, la formulation faible, qui sera utilisée par la suite, est déduite

1.1. Position du problème

On considère, ici, l'écoulement d'un fluide incompressible très visqueux en régime transitoire dans un domaine Ω de \mathbb{R}^n , dont la modélisation mathématique raffinée consiste à :

$$(PGS) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } (\mathbf{U}, p) \in H^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega) \text{ telle que :} & \\ \alpha \mathbf{U} - \nu \Delta \mathbf{U} + \text{grad } p = 0 & \text{dans } \Omega \\ \text{div } \mathbf{U} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{U} = \mathbf{g} & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Dans (1.1), \mathbf{U} dénote le champ de vitesse de l'écoulement, p la pression du fluide, \mathbf{g} une vitesse prescrite sur la frontière $\partial\Omega$, \mathbf{f} ($\in L^2(\Omega)^n$) le champ de force et ν la viscosité cinématique constante. De plus, α représente un paramètre pouvant résulter de la discrétisation en temps du terme d'évolution $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}$.

Evidemment, $H^1(\Omega)^n$ est l'espace de Sobolev d'ordre un en dimension n et $L_0^2(\Omega)$ est le sous-espace de l'espace $L^2(\Omega)$ et contient les fonctions à moyenne nulle sur Ω .

Il est clair qu'à partir de la condition d'incompressibilité ($\text{div}(\mathbf{U}) = 0$), \mathbf{g} doit satisfaire une condition de compatibilité comme suit :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0 \quad (1.2)$$

Ceci dit, on peut établir le résultat important suivant.

Théorème 1.1. ([10])

Sous l'hypothèse (1.2), il existe $\mathbf{u}_0 \in H_0^1(\Omega)^n$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div } \mathbf{u}_0 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{g} & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

1.2. Formulation faible continue pour le Problème Généralisé de Stokes

Dans le but de résoudre le problème (PGS) au moyen de la méthode des éléments finis, une formulation faible doit être déduite.

Tout d'abord, posons dans (1.1)

$$\mathbf{z} = \mathbf{U} - \mathbf{u}_0$$

i.e.

$$\mathbf{U} = \mathbf{z} + \mathbf{u}_0 \quad (1.3)$$

Comme $\mathbf{U} \in H^1(\Omega)^n$, alors $\mathbf{z} \in H_0^1(\Omega)^n$ de sorte que le problème (PGS) peut être réécrit sous la forme équivalente suivante :

$$(PHGS) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } (\mathbf{z}, p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega) \text{ telle que} & \\ \alpha \mathbf{z} - \nu \Delta \mathbf{z} + \text{grad } p = \mathbf{f} - \alpha \mathbf{u}_0 + \nu \Delta \mathbf{u}_0 & \text{dans } \Omega \\ \text{div } \mathbf{z} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{z} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Evidemment,

$$H_0^1(\Omega)^n = \{ \mathbf{w} \in H^1(\Omega)^n / \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega \} \quad (1.5)$$

On vient de voir qu'il n'y a aucune restriction fondamentale à considérer seulement le cas $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, i.e. $\mathbf{g} = \mathbf{0}$. Dans ce cas, on dénotera la vitesse solution simplement par \mathbf{u} .

Maintenant, en multipliant la première équation dans (1.4) par une fonction test $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n$ et la deuxième équation par une fonction test $q \in L_0^2(\Omega)$, l'intégration des deux équations obtenues sur le domaine Ω donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} p \cdot \text{div } \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega \\ \int_{\Omega} q \cdot \text{div } \mathbf{u} d\Omega = 0 \end{array} \right. \quad (1.6)$$

(au moyen du théorème de Green).

Une formulation faible continue du problème généralisé de Stokes peut être énoncée comme suit :

$$(FF) \left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donnée } \mathbf{f} \in L^2(\Omega)^n, \text{ trouver } (\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega) \text{ telle que} \\ \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) - (p, \text{div } \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n \\ -(q, \text{div } \mathbf{v}) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{array} \right. \quad (1.7)$$

où $(., .)$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ ou $L^2(\Omega)^n$.

Remarque. Si on pose :

$$\mathbf{V} = \{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n / \text{div } \mathbf{v} = 0 \} \quad (1.8)$$

alors le problème (FF) peut être aussi exprimé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donnée } \mathbf{f} \in L^2(\Omega), \text{ trouver } \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n \text{ tel que :} \\ \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \end{array} \right. \quad (1.9)$$

La formulation (FF) peut être aussi exprimée sous la forme abstraite suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donné } l \in \mathbf{X}' \text{ et } \chi \in P', \text{ trouver } (\mathbf{u}, p) \in \mathbf{X} \times P \text{ telle que} \\ a_g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X} \\ b(\mathbf{u}, q) = \chi(q) \quad \forall q \in P \end{array} \right. \quad (1.10)$$

où \mathbf{X} et P sont des espaces de Hilbert munis des normes $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$ et $\|\cdot\|_P$ respectivement, \mathbf{X}' et P' dénotent les espaces duaux, $a_g : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : \mathbf{X} \times P \rightarrow \mathbb{R}$ des formes bilinéaires.

L'existence et l'unicité de la solution (\mathbf{u}, p) du problème (1.10) sont régis par le résultat suivant dû à Brezzi [7].

Théorème 1.2.

Supposons que :

(a) les deux formes $a_g(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$ sont continues, i.e. il existe $c_1, c_2 > 0$ deux constantes finies telles que :

$$|a_g(\mathbf{w}, \mathbf{v})| \leq c_1 \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{X}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}} \quad \forall \mathbf{w}, \mathbf{v} \in \mathbf{X} \quad (1.11)$$

$$|b(\mathbf{v}, q)| \leq c_2 \|q\|_P \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}, \forall q \in P \quad (1.12)$$

(b) la forme $a_g(\cdot, \cdot)$ est \mathbf{Z} -elliptique, i.e. il existe $\alpha^* > 0$ telle que

$$|a_g(\mathbf{v}, \mathbf{v})| \geq \alpha^* \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Z} \quad (1.13)$$

avec

$$\mathbf{Z} = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{X} \ / \ b(\mathbf{v}, q) = 0 \quad \forall q \in P \} \quad (1.14)$$

(c) la forme $b(\cdot, \cdot)$ vérifie la condition dite de Babuška-Brezzi-Ladyshenskaya, i.e. il existe $\beta^* > 0$ telle que

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{X}} \frac{|b(\mathbf{v}, q)|}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}} \geq \beta^* \|q\|_P \quad \forall q \in P \quad (1.15)$$

Alors, le problème (1.10) admet une solution unique $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{X} \times P$.

Le fait que la formulation (FF) de (PGS) est un cas particulier du problème (1.10) peut être facilement vue en prenant les définitions :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{X} = H_0^1(\Omega)^n & P = L_0^2(\Omega) \\ a_g(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + v(\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{v}) & b(\mathbf{v}, q) = -(q, \operatorname{div} \mathbf{v}) \\ l(\mathbf{v}) = (f, \mathbf{v}) & \chi(q) = 0 \end{array} \right. \quad (1.16)$$

avec les normes correspondantes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_0$.

Montrons que toutes les hypothèses du Théorème 1.2 sont satisfaites pour ce cas particulier. En effet, on a

$$\begin{aligned}
|a_g(\mathbf{w}, \mathbf{v})| &= |\alpha(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + v(\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{v})| \\
&\leq \alpha \|\mathbf{w}\|_0 \|\mathbf{v}\|_0 + v |\mathbf{w}|_1 |\mathbf{v}|_1
\end{aligned}$$

de sorte que

$$|a_g(\mathbf{w}, \mathbf{v})| \leq c_1 \|\mathbf{w}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1$$

avec $c_1 = \alpha + v$. De même, il vient :

$$\begin{aligned}
|b(v, q)| &= |-(q, \operatorname{div} v)| \\
&\leq \|q\|_0 \|\operatorname{div} v\|_0
\end{aligned}$$

D'où,

$$|b(v, q)| \leq c_2 \|q\|_0 \|\mathbf{v}\|_1$$

avec $c_2 = 1$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
|a_g(\mathbf{v}, \mathbf{v})| &= |\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + v(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v})| \\
&= \alpha \|\mathbf{v}\|_0^2 + v \|\nabla \mathbf{v}\|_0^2
\end{aligned}$$

Mais, d'après l'inégalité de Friedrichs -Poincaré, il vient

$$\|\nabla \mathbf{v}\|_0 \geq \frac{1}{c} |\mathbf{v}|_1 \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n$$

D'où,

$$|a_g(\mathbf{v}, \mathbf{v})| \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_0^2 + \frac{\nu}{c} |\mathbf{v}|_1^2$$

de sorte que

$$|a_g(\mathbf{v}, \mathbf{v})| \geq \alpha^* \|\mathbf{v}\|_1^2$$

avec $\alpha^* = \alpha + \frac{\nu}{c}$.

Il ne reste, maintenant, qu'à vérifier la condition de Babuška-Brezzi- Ladyshenskaya. Ceci est largement simplifié au moyen du résultat suivant établi dans Girault et Raviart [10].

Théorème 1.3.

Il existe une constante $c > 0$ telle que pour chaque $q \in L_0^2(\Omega)$, il existe une fonction (vectorielle) unique $\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n$ telle que

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{w} = q \\ |\mathbf{w}|_1 \leq c \|q\|_0 \end{cases}$$

A cet effet, on prend $q \in L_0^2(\Omega)$. Comme $(-q) \in L_0^2(\Omega)$, d'après le Théorème 1.3, il existe un unique $\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n$ vérifiant

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{w} = -q \\ |\mathbf{w}|_1 \leq c \|-q\|_0 = c \|q\|_0 \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{X}} \frac{|b(\mathbf{v}, q)|}{\|\mathbf{v}\|_X} &= \sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n} \frac{|(-q, \operatorname{div} \mathbf{v})|}{\|\mathbf{v}\|_1} \geq \frac{(-q, \operatorname{div} \mathbf{w})}{\|\mathbf{w}\|_1} \\ &\geq \frac{\|q\|_0^2}{\|\mathbf{w}\|_1} \geq \frac{1}{c'} \|q\|_0, \end{aligned}$$

où c' résulte de la constante c du Théorème 1.3, ainsi que de l'équivalence des deux normes $\|\cdot\|_1$ et $|\cdot|_1$ dans $H_0^1(\Omega)^n$ (voir [10]). Evidemment, il suffit de prendre, maintenant, $\beta^* = \frac{1}{c'}$.

DEUXIÈME CHAPITRE

STABILITÉ CLASSIQUE DES ÉLÉMENTS FINIS

L'une des théories mathématiques les mieux développées est celle qui concerne l'application de la méthode des éléments finis aux problèmes des écoulements des fluides incompressibles. Le succès de ceci provient de l'intérêt que lui accordent beaucoup de chercheurs.

Dans ce chapitre, on présente les méthodes mixtes d'éléments finis, qui représentent une généralisation de la méthode standard au problème à plusieurs variables inconnues. Ainsi, la théorie classique est adaptée pour la résolution numérique du problème généralisé de Stokes, dont une formulation faible continue a été construite et résolue dans le chapitre précédent.

2.1. Théorie standard de stabilité des méthodes mixtes

On garde les notations introduites dans le Chapitre 1. Dans le but de définir le modèle numérique, des espaces d'approximation par éléments finis sont choisis. Si h représente un paramètre positif, relié usuellement à la taille du maillage associé au partitionnement τ_h du domaine Ω en éléments finis, alors une famille d'espaces de dimension finie \mathbf{X}_h et P_h est construite. D'habitude, on applique la technique de Galerkin qui consiste à faire approcher la solution exacte (\mathbf{u}, p) par des solutions discrètes (\mathbf{u}_h, p_h) , prises dans $\mathbf{X}_h \times P_h$ avec $\mathbf{X}_h \subset \mathbf{X}$ et $P_h \subset P$. D'autres méthodologies existent; elles peuvent consister à prendre $\mathbf{X}_h \not\subset \mathbf{X}$ et/ou $P_h \not\subset P$. Dans ce cas, on parle de méthodes non conformes.

Dans tout le présent travail, seules les méthodes mixtes conformes sont considérées. De plus, \mathbf{X}_h et P_h sont choisis de sorte qu'ils sont formés de fonctions qui sont polynomiales par morceaux sur les éléments du partitionnement τ_h .

Avant de passer à l'approximation numérique du problème (FF) (voir (1.7)), définissons certaines notations qui seront utilisées par la suite, ainsi qu'on dénote par A, B et B' les opérateurs définis par :

$$(A\mathbf{w}, \mathbf{v}) = a_g(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{w}, \mathbf{v} \in \mathbf{X}$$

$$(B\mathbf{v}, q) = (B'\mathbf{v}, q) = b(q, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}, \forall q \in P$$

De même,

$$\mathbf{V}(\chi) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{X} \ / \ B\mathbf{v} = \chi\} \quad (2.1)$$

de sorte que

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(0) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{X} \ / \ B\mathbf{v} = 0\} \quad (2.2)$$

Dénotons par \mathbf{X}'_h et P'_h les espaces duaux respectifs de \mathbf{X}_h et P_h . On doit tout d'abord $\mathbf{X}' \subset \mathbf{X}'_h$ et $P' \subset P'_h$ de sorte que

$$\|\iota\|_{\mathbf{X}'_h} \leq \|\iota\|_{\mathbf{X}'}$$

et

$$\|\chi\|_{P'_h} \leq \|\chi\|_{P'}$$

De même, associons aux deux formes bilinéaires $a_g(.,.)$ et $b(.,.)$ les opérateurs discrets $A_h \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X}'_h)$, $B_h \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, P'_h)$ et $B'_h \in \mathcal{L}(P, \mathbf{X}'_h)$ définis comme suit

$$\begin{aligned} (A_h \mathbf{w}, \mathbf{v}) &= a_g(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{X}, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_h, \\ (B_h \mathbf{v}, q) &= b(q, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}, \forall q \in P_h, \\ (B'_h q, \mathbf{v}) &= b(q, \mathbf{v}) \quad \forall q \in P, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_h. \end{aligned}$$

Il est clair que B'_h n'est pas identique à $(B_h)'$. De plus on a

$$\|B_h \mathbf{v}\|_{P'_h} \leq \|B\mathbf{v}\|_{P'} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}$$

$$\|A_h \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}'_h} \leq \|A\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}'} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}$$

$$\|B'_h q\|_{\mathbf{X}'_h} \leq \|B'q\|_{\mathbf{X}'}, \quad \forall q \in P$$

En outre, on définit

$$\mathbf{V}_h(\chi) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{X}_h \mid b(q, \mathbf{v}) = \chi(q) \quad \forall q \in P_h\} \quad (2.3)$$

et

$$\mathbf{V}_h = \mathbf{V}_h(0) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{X}_h \mid b(q, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall q \in P_h\} \quad (2.4)$$

Evidemment, il est aisé de voir que

$$\mathbf{V}_h(\chi) = \ker B_h \cap \mathbf{X}_h \quad (2.5)$$

Et qu'en général,

$$\mathbf{V}_h \not\subseteq \mathbf{V} \quad \text{et} \quad V_h(\chi) \not\subseteq V(\chi)$$

Maintenant un moyen naturel pour obtenir un analogue discret du problème (FF) consiste à forcer ce dernier à rester vérifié pour des fonctions appartenant aux espaces \mathbf{X}_h et P_h . Cela mène au problème approché (discret) suivant :

$$(FF_h) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times P_h \text{ telle que} \\ a_g(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + b(p_h, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_h \\ b(q, \mathbf{u}_h) = \chi(q) \quad \forall q \in P_h \end{array} \right. \quad (2.6)$$

L'existence et l'unicité de la solution (\mathbf{u}_h, p_h) du problème (FF_h) , ainsi que sa convergence vers la solution (\mathbf{u}, p) du problème (FF) sont données par le résultat suivant, qui représente une version discrète du Théorème 1.2.

Théorème 2.1.

Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(i) Il existe une constante $\alpha > 0$, indépendante de h , telle que

$$a_g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Z}_h \quad (2.7)$$

avec

$$\mathbf{Z}_h = \{\mathbf{v} \in \mathbf{X}_h \mid b(q, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall q \in P_h\} \quad (2.8)$$

(ii) Il existe une constante $\beta > 0$, indépendante de h , telle que

$$\sup_{0 \neq \mathbf{v} \in \mathbf{X}_h} \frac{b(q, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}} \geq \beta \|q\|_P \quad \forall q \in P_h \quad (2.9)$$

Alors, $\mathbf{V}_h(\chi)$ est non vide et le problème (FF_h) admet une solution unique $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h(\chi) \times P_h (\subset \mathbf{X}_h \times P_h)$. De plus, il existe une constante $C_2 > 0$, indépendante de h , telle que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}} + \|p - p_h\|_P \leq C_2 \left\{ \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h(\chi)} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}} + \inf_{q \in P_h} \|p - q\|_P \right\} \quad (2.10)$$

Démonstration. L'hypothèse (ii) entraîne que l'opérateur B_h est un isomorphisme de $(\mathbf{V}_h)^\perp (\subset \mathbf{X}_h)$ sur $P_h' (\supset P')$, de sorte que $\mathbf{V}_h(\chi) \neq \emptyset$. Le reste de la démonstration se fait en deux étapes.

1) Dans le problème (FF_h) , \mathbf{u}_h doit clairement satisfaire ce qui suit

$$\begin{cases} \mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h(\chi) \\ a_g(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h \end{cases} \quad (2.11)$$

A cet effet, établissons l'existence et l'unicité de \mathbf{u}_h . Comme $\mathbf{V}_h(\chi) \neq \emptyset$, on choisit $\mathbf{u}_h^0 \in \mathbf{V}_h(\chi)$ et on résout le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{z}_h \in \mathbf{V}_h \text{ tel que} \\ a_g(\mathbf{z}_h, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) - a_g(\mathbf{u}_h^0, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h \end{cases} \quad (2.12)$$

Mais, $a_g(\cdot, \cdot)$ vérifiant (2.7) (i.e. étant coercive), le problème (2.12) possède une solution unique z_h d'après le Théorème de Lax-Milgram. Il suffit, donc, de prendre $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h(\mathcal{X})$ en posant

$$\mathbf{u}_h = z_h + \mathbf{u}_h^0 \quad (2.13)$$

D'autre part, soit $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h$ un élément arbitraire et posons $\mathbf{w} = \mathbf{u}_h - \mathbf{v}$. Alors, on a $\mathbf{w} \in \mathbf{V}_h$ et

$$a_g(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = l(\mathbf{w}) - a_g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (2.14)$$

En prenant ce \mathbf{w} particulier dans le problème (FF), on obtient

$$a_g(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b(p, \mathbf{w}) = l(\mathbf{w})$$

ce qui, combinée avec (2.14), entraîne

$$a_g(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = a_g(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(p, \mathbf{w})$$

Mais, puisque $\mathbf{w} \in \mathbf{V}_h$, on a

$$b(q, \mathbf{w}) = 0 \quad \forall q \in P_h$$

Et donc,

$$a_g(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = a_g(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(p - q, \mathbf{w}) \quad \forall q \in P_h \quad (2.15)$$

L'application de la continuité de $a_g(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$, ainsi que de l'hypothèse (i), donne

$$\alpha \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{X}}^2 \leq \|a_g\| \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{X}} + \|b\| \|p - q\|_P \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{X}} \quad \forall q \in P_h$$

i.e.

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{X}} \leq \frac{\|a_g\|}{\alpha} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}} + \frac{\|b\|}{\alpha} \|p - q\|_P \quad \forall q \in P_h$$

Puisque $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h(\chi)$ est arbitraire, on peut aussi bien écrire

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{X}} \leq \frac{\|a_g\|}{\alpha^*} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}} + \frac{\|b\|}{\alpha^*} \|p - q\|_P \quad \forall q \in P_h, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h(\chi)$$

De même, d'après le choix de \mathbf{v} , on a

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}} \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}} + \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{X}}$$

Par conséquent,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}} \leq \left(1 + \frac{\|a_g\|}{\alpha^*}\right) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}} + \frac{\|b\|}{\alpha^*} \|p - q\|_P \quad \forall q \in P_h, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h(\chi)$$

Le passage à l'infimum pour $q \in P_h$ et $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h(\chi)$ produit

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}} \leq C_1 \left\{ \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h(\chi)} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}} + \inf_{q \in P_h} \|p - q\|_P \right\} \quad (2.16)$$

avec $C_1 = \max \left\{ 1 + \frac{\|a_g\|}{\alpha^*}, \frac{\|b\|}{\alpha^*} \right\}$.

2) D'après un résultat bien connu (voir Girault et Raviart [10]) et l'hypothèse (ii), il existe p_h unique dans P_h tel que (\mathbf{u}_h, p_h) est la solution unique de problème (FF_h) .

Pour déduire l'estimation d'erreur (2.10), on va d'abord montrer que

$$\inf_{\mathbf{w} \in \mathbf{V}_h(\chi)} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|_{\mathbf{X}} \leq \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta^*}\right) \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{X}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}. \quad (2.17)$$

En effet, soit $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_h$. On a montré, auparavant, qu'il existe \mathbf{z}_h unique dans \mathbf{V}_h^\perp tel que

$$B_h \mathbf{z}_h = B_h(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \in P_h'$$

avec

$$\|\mathbf{z}_h\|_{\mathbf{X}} \leq \frac{1}{\beta^*} \|B_h(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|_{P_h'} \leq \frac{\|b\|}{\beta^*} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}.$$

En posant $\mathbf{w} = \mathbf{z}_h + \mathbf{v}$, on a

$$\begin{aligned} b(q, \mathbf{w}) &= b(q, \mathbf{z}_h + \mathbf{v}) \\ &= b(q, \mathbf{z}_h) + b(q, \mathbf{v}) \\ &= b(q, \mathbf{u} - \mathbf{v}) + b(q, \mathbf{v}) \quad \forall q \in P_h. \end{aligned}$$

D'où,

$$b(q, \mathbf{w}) = b(q, \mathbf{u}) = \chi(q) \quad \forall q \in P_h$$

i.e. $\mathbf{w} \in \mathbf{V}_h(\chi)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|_{\mathbf{X}} &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}} + \|\mathbf{z}_h\|_{\mathbf{X}} \\ &\leq \left(1 + \frac{\|b\|}{\alpha^*}\right) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}} \end{aligned}$$

Comme \mathbf{v} est arbitraire dans \mathbf{X}_h , alors

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|_{\mathbf{X}} \leq \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta^*}\right) \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{X}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}$$

de sorte que (2.17) est vérifiée.

Majorons, à présent, $\|p - q_h\|_P$. Des problèmes (FF) et (FF_h), on a

$$a_g(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + b(p - p_h, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_h$$

D'où,

$$a_g(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + b(p - p_h, \mathbf{v}) - b(q, \mathbf{v}) = -b(q, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_h, \forall q \in P_h$$

i.e.

$$a_g(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + b(p - q, \mathbf{v}) = b(p_h - q, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_h, \forall q \in P_h$$

Par passage au suprémum pour $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_h$, l'hypothèse (ii) entraîne

$$\begin{aligned} \|p_h - q\|_P &\leq \frac{1}{\beta^*} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{X}_h} \left\{ \frac{1}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}} (a_g(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + b(p - q, \mathbf{v})) \right\} \\ &\leq \frac{1}{\beta^*} \{ \|a_g\| \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}} + \|b\| \|p - q\|_P \} \quad \forall q \in P_h \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on aboutit à

$$\|p - p_h\|_P \leq \frac{1}{\beta^*} \{ \|a_g\| \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}} + (\beta^* + \|b\|) \|p - q\|_P \} \quad \forall q \in P_h$$

D'où,

$$\|p - p_h\|_P \leq \frac{\|a_g\|}{\beta^*} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}} + \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta^*}\right) \inf_{q \in P_h} \|p - q\|_P \quad (2.18)$$

L'estimation (2.10) découle, maintenant, de (2.16), (2.17) et (2.18) comme suit

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}} + \|p - p_h\|_P &\leq \left(1 + \frac{\|a_g\|}{\beta^*}\right) (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}}) + \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta^*}\right) \inf_{q \in P_h} \|p - q\|_P \\ &\leq C_1 \left(1 + \frac{\|a_g\|}{\beta^*}\right) \left\{ \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta^*}\right) \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{X}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}} + \inf_{q \in P_h} \|p - q\|_P \right\} \\ &\quad + \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta^*}\right) \inf_{q \in P_h} \|p - q\|_P \\ &\leq C_2 \left\{ \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{X}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}} + \inf_{q \in P_h} \|p - q\|_P \right\} \end{aligned}$$

avec $C_2 = \max \left\{ C_1 \left(1 + \frac{\|a_g\|}{\beta^*}\right) \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta^*}\right), C_1 \left(1 + \frac{\|a_g\|}{\beta^*}\right) + 1 + \frac{\|b\|}{\beta^*} \right\}$ et, évidemment, $C_1 = \max \left\{ 1 + \frac{\|a_g\|}{\alpha^*}, \frac{\|b\|}{\alpha^*} \right\}$.

Remarque.

1) Il est clair que la condition continue de Babuška-Brezzi-Ladyshenskaya (1.15) n'implique pas obligatoirement la condition discrète (2.9).

2) Comme, en général, $\mathbf{Z}_h \not\subseteq \mathbf{Z}$, alors la \mathbf{Z} -ellipticité de $a_g(\cdot, \cdot)$ n'entraîne pas sa \mathbf{Z}_h -ellipticité (2.7).

La condition discrète (2.9) peut être considérée comme une condition de compatibilité entre les espaces d'éléments finis \mathbf{X}_h et P_h . Il est important de souligner que l'estimation d'erreur (2.10) reste vraie même si α et/ou β dépendent de h . Cependant, pour obtenir des estimations optimales d'erreur à partir de (2.10), il est clair d'après la démonstration du Théorème 2.1., que α et β doivent être toutes les deux indépendantes de h .

2.2. Méthodes mixtes pour le problème généralisé de Stokes

Dans cette section, on applique les résultats abstraits présentés plus haut pour le cas particulier de la formulation faible du problème généralisé de Stokes. Considérons, de

nouveau, cette formulation faible qui est rappelée pour convenance

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donnée } \mathbf{f} \in L^2(\Omega)^n, \text{ trouver } (\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega) \text{ telle que} \\ \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + v(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega) \\ - (q, \operatorname{div} \mathbf{u}) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{array} \right. \quad (2.19)$$

En outre, on suppose que pour chaque $h > 0$, les espaces d'éléments finis \mathbf{X}_h et P_h satisfont

$$\mathbf{X}_h \subset H_0^1(\Omega)^n \quad P_h \subset L_0^2(\Omega) \quad (2.20)$$

Avec ces espaces définis, une formulation mixte discrète du problème généralisé de Stokes est exprimée comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_h, p_h) \in X_h \times P_h \text{ telle que} \\ \alpha(u_h, v) + v(\nabla u_h, \nabla v) - (p_h, \operatorname{div} v) = (f, v) \quad \forall v \in X_h \\ - (q, \operatorname{div} u_h) = 0 \quad \forall q \in P_h \end{array} \right. \quad (2.21)$$

On note que les inclusions (2.20) ne sont pas suffisantes pour garantir l'existence de solutions discrètes. En faisant une comparaison avec le problème (FF_h) et en tenant compte du fait que l'hypothèse (i) du Théorème 2.1. est aisément vérifiée pour le cas du problème généralisé de Stokes, il devient clair que la seule condition qui peut causer des difficultés est (2.9). Dans le cas présent, elle prend l'expression mathématique compacte suivante :

Il existe une constante $\beta > 0$, indépendante de h , telle que

$$\inf_{0 \neq q \in P_h} \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in \mathbf{X}_h} \frac{(q, \operatorname{div} \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_1 \|q\|_0} \geq \beta \quad (2.22)$$

Ceci est précisément la condition *inf-sup* ou de *Babuška-Brezzi* qui représente la condition de compatibilité entre les espaces \mathbf{X}_h et P_h , tantôt introduite pour le problème de Stokes. Ainsi, le résultat suivant se trouve au coeur de l'analyse de la stabilité standard et de la convergence des méthodes mixtes d'éléments finis pour la résolution numérique du problème généralisé de Stokes.

Théorème 2.2.

En plus de (2.22), supposons les hypothèses d'approximation suivantes :

(a) (*Propriété d'approximation de \mathbf{X}_h*): Il existe un opérateur $\mathbf{r}_h \in \mathcal{L}(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)^n, \mathbf{X}_h)$ et un entier positif k tels que

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{r}_h \mathbf{v}\|_1 \leq C_1 h^m \|\mathbf{v}\|_{m+1} \quad \forall \mathbf{v} \in H^{m+1}(\Omega)^n \quad 1 \leq m \leq k \quad (2.23)$$

avec une constante $C_1 > 0$, indépendante de h .

(b) (*Propriété d'approximation de P_h*): Il existe un opérateur $\mathbf{s}_h \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), P_h)$ tel que

$$\|q - \mathbf{s}_h q\|_0 \leq C_2 h^m \|q\|_m \quad \forall q \in H^m(\Omega) \quad 0 \leq m \leq k \quad (2.24)$$

avec une constante $C_2 > 0$, indépendante de h .

Alors, le problème approché (2.21) admet une solution unique (\mathbf{u}_h, p_h) dans $\mathbf{X}_h \times P_h$. En outre, quand la solution (\mathbf{u}, p) de la formulation continue faible du problème généralisé de Stokes est dans $H^{m+1}(\Omega)^n \times H^m(\Omega)$ pour un certain entier m avec $1 \leq m \leq k$ (k défini dans l'hypothèse (a)), on a l'estimation d'erreur

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq C h^m (\|\mathbf{u}\|_{m+1} + \|p\|_m) \quad (2.25)$$

où C est une constante positive indépendante de h .

La démonstration de ce résultat important suit exactement celle donnée par Girault et Raviart [10] pour le cas du problème de Stokes. En outre, on note que l'estimation d'erreur (2.25) est optimale pour la norme définie sur $H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$ par

$$\|\mathbf{v}\|_1 + \|q\|_0 \quad (2.26)$$

dans le sens où le taux de convergence de la solution par éléments finis, mesurée dans cette norme est le même que celui des meilleures approximations à \mathbf{u} et p dans \mathbf{X}_h et P_h respectivement. Il est, donc, convenable d'utiliser, par exemple, des polynômes d'un

degré supérieur pour la vitesse discrète par rapport à ceux utilisés pour la pression discrète. L'efficacité de cela a été déjà établie par Taylor et Hood [20] pour le cas du problème de Stokes.

2.3. Méthodes mixtes stables et instables

Dans cette section, on présente d'abord des exemples de méthodes mixtes dont la stabilité a été établie dans de nombreux travaux. On donnera aussi des exemples simples de méthodes, notoirement connues pour être instables. On terminera la section par la présentation des versions stables de ces dernières.

2.3.1. Paires stables d'éléments finis

On va s'intéresser aux paires stables en dimension deux de bas ordre, i.e. les approximations qui sont basées sur des polynômes de bas ordre pour la vitesse. D'autres possibilités peuvent être trouvées dans le livre de Gunzberger [11]. On dénote par Ω un domaine polygonal de R^2 . De plus, on suppose que Ω est subdivisé en triangles, ou en quadrilatères convexes, et que la partition obtenue τ_h satisfait aux hypothèses usuelles de régularité (voir Ciarlet [8]). On désigne par $P_k(T)$, l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k , définis sur la partie $T \subset \Omega$ si T est un triangle. De même, on dénote par $Q(T)$, l'espace des polynômes isoparamétriques de degré inférieur ou égal à k , définis sur la partie $T \subset \Omega$ si T est un quadrilatère. Probablement, la méthode mixte stable d'éléments finis (\mathbf{X}_h, P_h) la plus connue en dimension deux est celle communément appelée méthode de Taylor-Hood. On la dénote par $P_2 - P_1$ dans le cas triangulaire, et par $Q_2 - Q_1$ dans le cas quadrilatéral. La méthode $P_2 - P_1$ se caractérise par la paire de sous-espaces

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_h &= \left\{ \mathbf{v} \in [C^0(\bar{\Omega})]^2 / \mathbf{v}|_K \in [P_2(K)]^2 \quad \forall K \in \tau_h, \mathbf{v}|_\Gamma = \mathbf{0} \right\} \\ P_h &= \left\{ q \in L_0^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) / q|_K \in P_1(K) \quad \forall K \in \tau_h \right\} \end{aligned} \quad (2.27)$$

tandis que la méthode $Q_2 - Q_1$ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_h &= \left\{ \mathbf{v} \in [C^0(\bar{\Omega})]^2 / \mathbf{v}|_K \in [Q_2(K)]^2 \quad \forall K \in \tau_h, \mathbf{v}|_{\Gamma} = 0 \right\} \\ P_h &= \left\{ q \in L_0^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) / q|_K \in Q_1(K) \quad \forall K \in \tau_h \right\} \end{aligned} \quad (2.28)$$

C'est Verfürth qui a, le premier dans [21], établi que le choix (2.27) satisfait la condition de Babuška-Brezzi. Plus tard, Bercovier et Pironneau [3] démontrèrent la stabilité du deuxième choix (2.28). Tous ont montré les estimations d'erreur suivantes :

$$\|u - u_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq c_1 h^2 \{ \|u\|_3 + \|p\|_2 \} \quad (2.29)$$

et

$$\|u - u_h\|_0 \leq c_2 h^3 \{ \|u\|_3 + \|p\|_2 \} \quad (2.30)$$

dans le cas où la solution exacte $(\mathbf{u}, p) \in (H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H^2(\Omega)$, le domaine Ω convexe, c_1 et c_2 étant deux constantes positives, indépendantes du paramètre h .

Une autre méthode, assez répandue, est dénotée par $Q_2 - P_1$. Elle est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_h &= \left\{ \mathbf{v} \in [C^0(\bar{\Omega})]^2 / \mathbf{v}|_K \in [Q_2(K)]^2 \quad \forall K \in \tau_h, \mathbf{v}|_{\Gamma} = 0 \right\} \\ P_h &= \left\{ q \in L_0^2(\Omega) / q|_K \in P_1(K) \quad \forall K \in \tau_h \right\} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ainsi, dans chaque élément $K \in \tau_h$, les composantes de la vitesse sont approchées par des fonctions biquadratiques, tandis que la pression discrète est linéaire. (voir Figure 2.1) Cette méthode mixte est stable comme démontré par Stenberg [19]. De plus, on obtient de nouveau les estimations d'erreur (2.31).

2.3.2. Paires instables d'éléments finis

On donne maintenant deux exemples simples de méthodes mixtes d'éléments finis pour lesquelles la condition de Babuška-Brezzi n'est pas satisfaite. On subdivise le domaine Ω en quadrilatères. Les composantes de la vitesse sont approchées par des polynômes

isoparamétriques de degré un dans chaque élément. Pour l'approximation de la pression, on prend des constantes dans chaque élément. Cette méthode mixte, dénotée par $Q_1 - Q_0$, a été étudiée par Johnson et Pitkaranta [13]. Les espaces discrets correspondants s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_h &= \left\{ \mathbf{v} \in [C^0(\bar{\Omega})]^2 / \mathbf{v}|_K \in [Q_1(K)]^2 \quad \forall K \in \tau_h, \mathbf{v}|_{\mathbf{K}} = 0 \right\} \\ P_h &= \left\{ q \in L_0^2(\Omega) / q|_K \in Q_0(K) \quad \forall K \in \tau_h \right\} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ainsi, dans chaque élément $K \in \tau_h$, les noeuds de la vitesse sont situés aux sommets du quadrilatère K , tandis que celui de la pression est positionné au centre de gravité du quadrilatère. Boland et Nicolaidis [7] ont montré que la choix ci-dessus ne vérifie pas la condition de Babuška-Brezzi. Plus précisément, ils ont établi que la constante β dans la condition de Babuska-Brezzi est de l'ordre de h , i.e.

$$c_1 h \|q\|_0 \leq \sup_{\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h} \frac{(q, \text{div } \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_1} \leq c_2 h \|q\|_0 \quad \forall q \in P_h \quad (2.33)$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes positives, indépendants de h .

2.3.3. Paires d'éléments finis rendues stables

Pour rendre stables les méthodes mixtes instables, vues précédemment, une procédure usuelle consiste à prendre le maillage de la vitesse différent de celui de la pression. Par exemple, pour le cas de la paire $P_1 - P_0$, il suffit de prendre

$$\mathbf{X}_h = \left\{ \mathbf{v} \in [C^0(\bar{\Omega})]^2 / \mathbf{v}|_{\Delta} \in [P_1(\Delta)]^2 \quad \forall \Delta \in \tau_{h/2}, \mathbf{v}|_{\mathbf{K}} = 0 \right\} \quad (2.34)$$

où $\tau_{h/2}$ est la triangulation raffinée de τ_h , obtenue en divisant chaque triangle en quatre sous-triangles comme l'illustre la Figure 2.2.

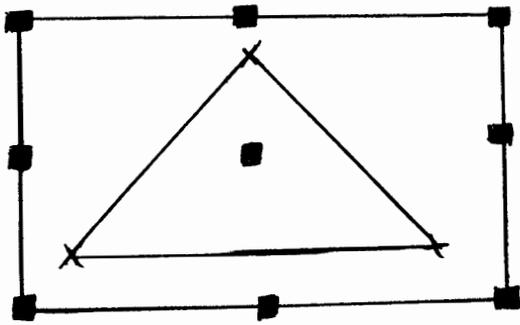
Quand à l'espace de la pression P_h , on peut le choisir sous l'une des deux formes suivantes :

$$P_h = \left\{ q \in L_0^2(\Omega) / q|_{\Delta} \in P_0(\Delta) \quad \forall \Delta \in \tau_h \right\} \quad (2.35)$$

ou

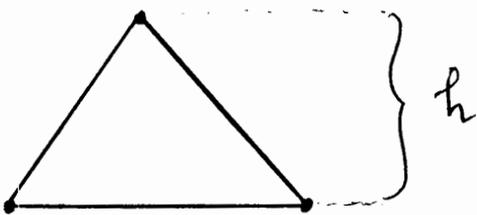
$$P_h = \{q \in C^0(\bar{\Omega}) \cap L_0^2(\Omega) / q|_{\Delta} \in P_1(\Delta) \quad \forall \Delta \in \tau_h\} \quad (2.36)$$

Ces deux choix, habituellement, dénotés respectivement par $P_1 - P_0^*$ et $P_1 - P_1^*$, vérifient la condition de Babuška-Brezzi, et la suite $\{(\mathbf{u}_h, p_h)\}$ des solutions discrètes converge vers la solution exacte du problème. De plus, on obtient les estimations d'erreur

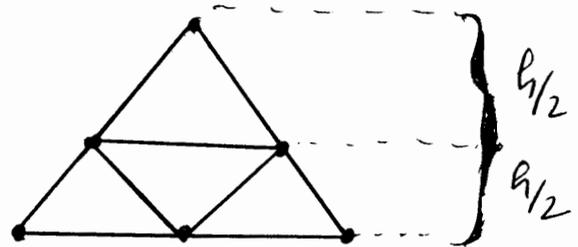


■ : nœuds de la vitesse
 x : " " " " pression

Fig 2-1

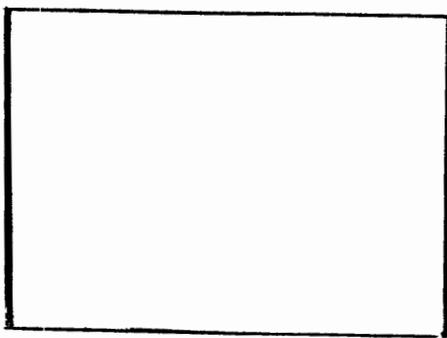


Triangle T_h

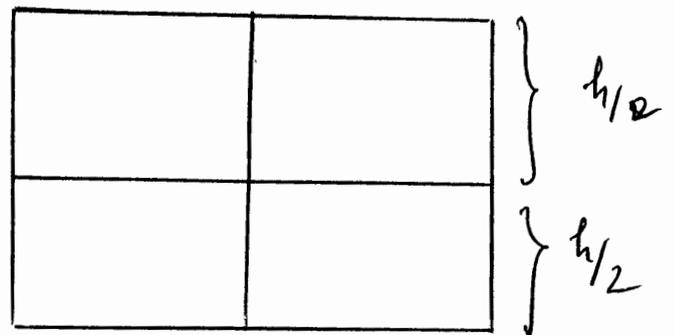


Triangle $T_{h/2}$

Fig 2.2



Quadrilatère T_h



Quadrilatère $T_{h/2}$

Fig - 2.3

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq c_1 h \{ \|\mathbf{u}\|_3 + \|p\|_2 \} \quad (2.37)$$

et

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0 \leq c_2 h^2 \{ \|\mathbf{u}\|_3 + \|p\|_2 \} \quad (2.38)$$

(pour plus de détails, voir [4]).

Pour rendre stable l'analogie quadrangulaire $Q_1 - Q_0$, on prend

$$\mathbf{X}_h = \left\{ \mathbf{v} \in [C^0(\bar{\Omega})]^2 / \mathbf{v}|_{\square} \in [Q_1(\square)]^2 \quad \forall \square \in \tau_{h/2}, \mathbf{v}|_{\Gamma} = 0 \right\} \quad (2.39)$$

où $\tau_{h/2}$ est obtenue en subdivisant chaque carré de τ_h en quatre sous-carrés, comme l'illustre la Figure 2.3.

Similairement au cas triangulaire, on a deux possibilités pour choisir l'espace P_h

$$P_h = \{ q \in L_0^2(\Omega) / q|_{\square} \in Q_0(\square) \quad \forall \square \in \tau_h \} \quad (2.40)$$

ou

$$P_h = \{ q \in C^0(\bar{\Omega}) \cap L_0^2(\Omega) / q|_{\square} \in Q_1(\square) \quad \forall \square \in \tau_h \} \quad (2.41)$$

Ici aussi, les deux choix, dénotés respectivement par $Q_1 - Q_0^*$ et $Q_1 - Q_1^*$, satisfont la condition de stabilité, et pratiquement les mêmes estimations d'erreur (2.37) et (2.38), évoqués pour le cas triangulaire.

Troisième Chapitre

Formulation stabilisée pour le problème généralisé de Stokes.

Comme on vient de le voir, beaucoup de méthodes mixtes d'éléments finis $\{\mathbf{X}_h, P_h\}$ satisfont la condition (de stabilité) de Babuška-Brezzi et ce, dans les dimensions deux et trois. Cependant, la plupart de ces méthodes stables ne sont pas assez simples pour être attractives numériquement dans les applications pratiques, surtout tridimensionnelles, de taille industrielle. D'autre part, certaines paires très convenables de bas ordre échouent dans ce test de stabilité et de convergence et sont, par conséquent, exclues du cadre standard présenté dans le chapitre précédent. Malgré cela, ces méthodes prohibées étaient jusqu'à récemment préférées. Toutefois, l'application optimale d'algorithmes rapides de résolution itérative (méthodes du gradient conjugué, méthodes multi-grilles, ...) rend essentielle la propriété de stabilité si un taux acceptable de convergence pour de telles techniques itératives doit être obtenu. Comme conséquence à cela, un grand nombre de chercheurs se sont tournés vers la construction d'un cadre plus favorable. Ceci revient à faire modifier les méthodes mixtes instables de telle sorte que la stabilité est retrouvée dans un certain sens. Il faut insister que la simplicité a toujours été la seule motivation derrière les techniques dite *de stabilisation*.

Bien que le moyen habituel pour stabiliser une paire instable consiste à enrichir l'espace d'approximation de la vitesse \mathbf{X}_h , le désir pour maintenir les fonctions habituelles d'interpolation a forcé beaucoup de chercheurs à concevoir d'autres stratégies pour obtenir la stabilité sans modifier les espaces d'approximation \mathbf{X}_h et P_h . Un moyen, qui s'est récemment imposé, est basé sur la perturbation de la formulation standard de Galerkin de sorte à éviter le besoin de vérification de la condition de Babuška-Brezzi (voir Brezzi et Pitkäranta [7], Hughes et Franca [12], Douglas et Wang [9], entre autres). Ceci représente l'approche de stabilisation qui sera adoptée dans la suite du mémoire.

Dans ce chapitre, on adapte la formulation dite *du saut local* introduite par Kechkar et Silvester [15] et analysée dans [18] pour le cas du problème de Stokes et ce, pour accomplir la stabilisation des deux paires d'éléments finis de plus bas ordre $Q_1 - Q_0$ et $P_1 - P_0$ (en dimension deux) pour le cas du problème généralisé de Stokes. En outre, des estimations optimales d'erreur exprimées dans les normes usuelles sont déduites pour les deux

approximations de vitesse et de pression.

3.1. Formulation localement stabilisée pour le problème généralisé de Stokes

Avec les notations introduites précédemment, exprimons la formulation faible du problème généralisé de Stokes comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega) \text{ telle que} \\ \mathfrak{B}((\mathbf{u}, p); (\mathbf{v}, q)) = \mathfrak{L}(\mathbf{v}, q) \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega) \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où les deux formes bilinéaires $\mathfrak{B}(\cdot, \cdot)$ et $\mathfrak{L}(\cdot, \cdot)$ sont définies par

$$\mathfrak{B}((\mathbf{w}, r); (\mathbf{v}, q)) = \alpha(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{v}) - (r, \operatorname{div} \mathbf{v}) - (q, \operatorname{div} \mathbf{w}) \quad (3.2)$$

$$\mathfrak{L}(\mathbf{v}, q) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad (3.3)$$

pour tous $(\mathbf{w}, r), (\mathbf{v}, q) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$.

Les espaces d'éléments finis $\mathbf{X}_h \subset H_0^1(\Omega)^n$ et $P_h \subset L_0^2(\Omega)$ sont caractérisés par un partitionnement τ_h de $\bar{\Omega}$ en triangles ou quadrilatères, supposés être réguliers au sens usuel, i.e. pour certaines constantes σ et ω avec $\sigma > 1$ et $0 < \omega < 1$, on doit avoir

$$h_K \leq \sigma \rho_K \quad \forall K \in \tau_h \quad (3.4)$$

$$|\cos \theta_{iK}| \leq \omega \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad \forall K \in \tau_h \quad (3.5)$$

où h_K est le diamètre de l'élément K , ρ_K le diamètre du cercle ~~circ~~ inscrit dans l'élément K et θ_{iK} sont les angles de K dans le cas quadrilatéral. Le paramètre de discrétisation h est donné par

$$h = \max_{K \in \tau_h} h_K \quad (3.6)$$

De plus, on dénote par Γ_h l'ensemble de toutes les frontières entre les éléments.

Les espaces d'éléments finis d'intérêt \mathbf{X}_h et P_h sont définis en posant

$$\mathfrak{R}_1(K) = \begin{cases} P_1(K) & \text{si } K \text{ est un triangle} \\ Q_1(K) & \text{si } K \text{ est un quadrilatère} \end{cases} \quad (3.7)$$

par

$$\mathbf{X}_h = \{ \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in H_0^1(\Omega)^2 / v_i|_K \in \mathfrak{R}_1(K) \ (i = 1, 2) \ \forall K \in \tau_h \} \quad (3.8)$$

et

$$P_h = \{ q \in L_0^2(\Omega) / q|_K \in P_0(K) \ \forall K \in \tau_h \} \quad (3.9)$$

On rappelle que $P_1(K)$ représente l'espace des polynômes de degré un, tandis que $Q_1(K)$ est celui des polynômes isoparamétriques de degré un défini dans K . Evidemment, $P_0(K)$ contient les constantes définies dans K .

L'instabilité au sens standard de ces deux méthodes mixtes est notoire (voir Sani et al. [17], Boland et Nicolaïdes [4], Gunzburger [11], entre autres).

Introduisons, pour les besoins de construction, des notions supplémentaires inspirées de la théorie des macro-éléments développée par Stenberg [19]. Pour le partitionnement τ_h , un partitionnement de macro-éléments \mathfrak{M}_h peut être défini de telle sorte que chaque macro-élément M représente un assemblage d'éléments adjacents de τ_h . Evidemment, on suppose que chaque élément K doit se trouver seulement dans un macro-élément, ce qui signifie que les macro-éléments ne chevauchent pas. De plus, pour chaque M , on dénote par Γ_M l'ensemble des frontières entre éléments qui sont strictement à l'intérieur de M . La longueur de tout bord $e \in \Gamma_M$ est désigné par h_e .

Avec les choix de \mathbf{X}_h et P_h ci-dessus et ces définitions, une formulation discrète stabilisée du problème généralisé de Stokes (ou de la formulation continue faible (3.1)) peut être énoncée comme suit

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times P_h \text{ telle que} \\ \mathfrak{B}_h((\mathbf{u}_h, p_h); (\mathbf{v}, q)) = \mathfrak{L}(\mathbf{v}, q) \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{X}_h \times P_h. \end{cases} \quad (3.10)$$

où la forme bilinéaire $\mathfrak{B}_h(\cdot, \cdot)$ est définie par

$$\mathfrak{B}_h((\mathbf{w}, r); (\mathbf{v}, q)) = \mathfrak{B}((\mathbf{w}, r); (\mathbf{v}, q)) - \beta \mathfrak{C}_h(\mathbf{r}, q) \quad (3.11)$$

pour tous (\mathbf{w}, r) et $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{X}_h \times P_h$ avec

$$\mathfrak{C}_h(r, q) = \sum_{M \in \mathfrak{M}_h} \sum_{e \in \Gamma_M} h_e \int_e [[r]]_e [[q]]_e \, ds \quad (3.12)$$

pour tout $(r, q) \in P_h \times P_h$. $[[\cdot]]_e$ représente l'opérateur de saut à travers le bord $e \in \Gamma_h$ et $\beta > 0$ est le paramètre dit de stabilisation locale.

Cette formulation stabilisée (3.10)-(3.12) est dite *formulation stabilisée par saut local*. Il est facile de voir que le terme $\mathfrak{C}_h(\cdot, \cdot)$ additionnel à la contrainte d'incompressibilité procure une approximation discrète à :

- ★ la divergence libre de u ($\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$) dans Ω ,
- ★ la continuité de p dans chaque macro-élément.

Le cadre général d'analyse de cette nouvelle formulation discrète du problème généralisé de Stokes peut être développée en utilisant les classes d'équivalence des macro-éléments comme dans Stenberg [19].

3.2. Stabilité de la formulation localement stabilisée du problème généralisé de Stokes

Pour le macro-élément $M \in \mathfrak{M}_h$ l'espace restreint des pressions est donné par

$$P_{0,M} = \{q \in L_0^2(M) / q|_K \text{ est constante } \forall K \subset M\} \quad (3.13)$$

En premier lieu, on doit montrer un résultat de coercivité locale pour la forme $\mathfrak{C}_M(\cdot, \cdot)$ qui représente la restriction de $\mathfrak{C}_h(\cdot, \cdot)$ au macro-élément M , i.e.

$$\mathfrak{C}_M(r, q) = \sum_{e \in \Gamma_M} h_e \int_e [[r]]_e [[q]]_e \, ds \quad (3.14)$$

Lemme 3.1.

Soit $\zeta_{\hat{M}}$ une classe de macro-éléments. Alors, il existe une constante $\gamma_{\hat{M}} = \gamma(\hat{M})$ telle que

$$\mathfrak{C}_M(q, q) \geq \gamma_{\hat{M}} \|q\|_0^2 \quad \forall q \in P_{0,M} \quad \forall M \in \zeta_{\hat{M}} \quad (3.15)$$

Démonstration. Considérons un élément fixé $M \in \zeta_{\hat{M}}$. De la définition de C_M , on note que $C_M(q, q) = 0$ si et seulement si $q|_M$ est une constante. Ainsi, la constante γ_M définie par

$$\gamma_M = \inf_{\substack{q \in P_{0,M} \\ \|q\|_{0,M} = 1}} \mathfrak{C}_M(q, q) \quad (3.16)$$

est positive. Ensuite, en utilisant un argument d'échelle (voir [19]), les conditions de régularité (3.4)-(3.5) entraînent l'existence d'une constante $\gamma_{\hat{M}}$ telle que

$$\gamma_M \geq \gamma_{\hat{M}} > 0 \quad \forall M \in \zeta_{\hat{M}}$$

Supposons, maintenant, qu'il y'a un ensemble fixe des classes $\zeta_{\hat{M}_i}$, $i = 1, \dots, n$ ($n \geq 1$) de sorte que tout macro-élément $M \in M_h$ appartienne à l'une des classes d'équivalence. D'après [19], on peut définir Π_h comme étant la L^2 -projection de P_h sur le sous-espace

$$Q_h = \{ \mu \in L_0^2(\Omega) / \mu|_M \text{ est constante } \forall M \in \mathfrak{M}_h \} \quad (3.17)$$

Evidemment, une conséquence directe du lemme précédent est l'inégalité globale suivante

$$\mathfrak{C}_h(q, q) \geq \alpha_1 \|(I - \Pi_h)q\|_0^2 \quad \forall q \in P_h \quad (3.18)$$

où $\alpha_1 = \min \{ \gamma_{\hat{M}_i} ; i = 1, \dots, n \}$ qui est clairement indépendante de h .

Les espaces \mathbf{X}_h , P_h et Q_h possèdent les propriétés bien connues d'approximation suivante (voir Girault et Raviart [10]).

Lemme 3.2. Si $\mathbf{v} \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$, alors, il existe $\hat{\mathbf{v}} \in \mathbf{X}_h$ tel que

$$\|\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}\|_1 \leq C_1 h \|\mathbf{v}\|_2$$

pour une constante $C_1 > 0$, indépendante de h .

Lemme 3.3. Si $q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$, alors il existe $\hat{q} \in P_h$ et $\tilde{q} \in Q_h$ tels que

$$\|q - \hat{q}\|_0 \leq C_2 h |q|_1$$

et

$$\|q - \tilde{q}\|_0 \leq C_3 h |q|_1$$

pour deux constantes C_2 et $C_3 > 0$, indépendantes de h .

Le résultat essentiel, qui va être montré, peut être énoncé comme suit.

Théorème 3.1.

Etant donné le paramètre de stabilisation $\beta \geq \beta_0 > 0$, supposons que tout macro-élément $M \in \mathfrak{M}_h$ appartient à l'une des classes d'équivalence $\zeta_{\tilde{M}_i}$ et que la condition suivante de connexion des macro-éléments est vérifiée : pour tous deux macro-éléments voisins M_1 et M_2 avec

$$\int_{M_1 \cap M_2} ds \neq 0$$

il existe $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h$ tel que

$$\text{supp}(\mathbf{v}) \subset M_1 \cup M_2 \text{ et } \int_{M_1 \cap M_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds \neq 0 \quad (3.19)$$

Alors, (3.10) admet une solution unique $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times P_h$. En outre, pour $\mathbf{u} \in (H^2(\Omega))^2$ et $p \in H^1(\Omega)$, on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq Ch (|\mathbf{u}|_2 + |p|_1) \quad (3.20)$$

où $C > 0$ est une certaine constante indépendante de h .

Démonstration. D'après Babuška [1], il suffit d'établir l'existence d'une constante $\gamma > 0$, indépendante de β et de h , telle que pour $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{X}_h \times P_h$

$$\sup_{(\mathbf{w}, r) \in \mathbf{X}_h \times P_h} \frac{\mathfrak{B}_h((\mathbf{v}, q); (\mathbf{w}, r))}{\|\mathbf{w}\|_1 + \|r\|_0} \geq \gamma (\|\mathbf{v}\|_1 + \|q\|_0) \quad (3.21)$$

A cette fin, soit $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{X}_h \times P_h$ et α_1 choisi comme ci-dessus. Grâce à la condition (3.19) (voir [19]), il existe une constante $\alpha_2 > 0$, indépendante de h , et $\mathbf{g} \in \mathbf{X}_h$ vérifiant

$$\begin{cases} (\Pi_h q, \operatorname{div} \mathbf{g}) = \|\Pi_h q\|_0^2 \\ \|\mathbf{g}\|_1 \leq \alpha_2 \|\Pi_h q\|_0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Choisissons, maintenant, $\mathbf{w} \in \mathbf{X}_h$ et $r \in P_h$ de sorte que $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \delta \mathbf{g}$ et $r = -q$ avec

$$\delta = \frac{1}{\alpha_2^2} \left(\alpha + \nu + \frac{1}{\alpha_1 \beta_0} \right)^{-1} \quad (3.23)$$

Il s'ensuit alors que

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_h((\mathbf{v}, q); (\mathbf{w}, r)) &= \alpha(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \nu(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{w}) - (q, \operatorname{div} \mathbf{w}) - (r, \operatorname{div} \mathbf{v}) - \beta \mathfrak{C}_h(q, r) \\ &= \alpha(\mathbf{v}, \mathbf{v} - \delta \mathbf{g}) + \nu(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v} - \delta \nabla \mathbf{g}) - (q, \operatorname{div} \mathbf{v} - \delta \operatorname{div} \mathbf{g}) + (q, \operatorname{div} \mathbf{v}) + \beta \mathfrak{C}_h(q, q) \\ &= \alpha(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \alpha \delta (\mathbf{v}, \mathbf{g}) + \nu(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) - \delta \nu (\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{g}) - (q, \operatorname{div} \mathbf{v}) \\ &\quad + \delta (q, \operatorname{div} \mathbf{g}) + (q, \operatorname{div} \mathbf{v}) + \beta \mathfrak{C}_h(q, q) \\ &\geq \alpha \|\mathbf{v}\|_0^2 + \nu |\mathbf{v}|_1^2 - \alpha \delta \|\mathbf{v}\|_0 \|\mathbf{g}\|_0 - \delta \nu |\mathbf{v}|_1 \|\mathbf{g}\|_1 - \delta ((\Pi_h - I)q, \operatorname{div} \mathbf{g}) \\ &\quad + \delta (\Pi_h q, \operatorname{div} \mathbf{g}) + \beta_0 \alpha_1 \|(I - \Pi_h)q\|_0^2 \\ &\geq \alpha \|\mathbf{v}\|_0^2 + \nu |\mathbf{v}|_1^2 - \alpha \delta \|\mathbf{v}\|_0 \|\mathbf{g}\|_0 - \delta \nu |\mathbf{v}|_1 \|\mathbf{g}\|_1 - \delta \alpha_2 \|(\Pi_h - I)q\|_0 \|\Pi_h q\|_0 \\ &\quad + \delta \|\Pi_h q\|_0^2 + \beta_0 \alpha_1 \|(I - \Pi_h)q\|_0^2 \\ &\geq \alpha \|\mathbf{v}\|_0^2 + \nu \|\mathbf{v}\|_1^2 - \alpha \delta \alpha_2 \|\mathbf{v}\|_0 \|\Pi_h q\|_0 - \delta \nu \alpha_2 |\mathbf{v}|_1 \|\Pi_h q\|_0 + \delta \|\Pi_h q\|_0^2 \\ &\quad - \delta \alpha_2 \|(I - \Pi_h)q\|_0 \|\Pi_h q\|_0 + \beta_0 \alpha_1 \|(I - \Pi_h)q\|_0^2 \\ &\geq \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{v}\|_0^2 + \frac{\nu}{2} |\mathbf{v}|_1^2 - \frac{\alpha \delta^2 \alpha_2^2}{2} \|\Pi_h q\|_0^2 - \frac{\delta^2 \alpha_2^2 \nu}{2} \|\Pi_h q\|_0^2 + \delta \|\Pi_h q\|_0^2 \\ &\quad - \frac{\delta^2 \alpha_2^2}{2 \alpha_1 \beta_0} \|\Pi_h q\|_0^2 + \frac{\alpha_1 \beta_0}{2} \|(I - \Pi_h)q\|_0^2 \end{aligned}$$

où on a utilisé les inégalités évidentes

$$\begin{cases} (\|\mathbf{v}\|_0 - \delta \alpha_2 \|\Pi_h q\|_0)^2 \geq 0 \\ (|\mathbf{v}|_1 - \delta \alpha_2 \|\Pi_h q\|_0)^2 \geq 0 \\ (\beta_0 \alpha_1 \|(I - \Pi_h)q\|_0 - \delta \alpha_2 \|\Pi_h q\|_0)^2 \geq 0 \end{cases}$$

Avec le choix (3.23) de δ , on aboutit finalement à

$$\mathfrak{B}_h((\mathbf{v}, q); (\mathbf{w}, r)) \geq \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{v}\|_0^2 + \frac{\nu}{2} |\mathbf{v}|_1^2 + \frac{\delta}{2} \|\Pi_h q\|_0^2 + \frac{\alpha_1 \beta_0}{2} \|(I - \Pi_h)q\|_0^2$$

D'où,

$$\mathfrak{B}_h((\mathbf{v}, q); (\mathbf{w}, r)) \geq K_1 (\|\mathbf{v}\|_1 + \|q\|_0)^2 \quad (3.24)$$

avec $K_1 = \min \left\{ \frac{\alpha}{4}, \frac{\nu}{4}, \frac{\delta}{4}, \frac{\alpha_1 \beta_0}{4} \right\}$.

D'autre part, on montre aisément que

$$\|\mathbf{w}\|_1 + \|r\|_0 \leq K_2 (\|\mathbf{v}\|_1 + \|q\|_0) \quad (3.25)$$

avec $K_2 = (1 + \delta \alpha_2)$.

En fin de compte, de (3.24) et (3.25), on obtient

$$\frac{\mathfrak{B}_h((\mathbf{v}, q); (\mathbf{w}, r))}{\|\mathbf{w}\|_1 + \|r\|_0} \geq \frac{K_1}{K_2} (\|\mathbf{v}\|_1 + \|q\|_0)$$

Comme $\mathbf{w} \in \mathbf{X}_h$ et $r \in P_h$, par passage au supremum sur $\mathbf{X}_h \times P_h$, il vient

$$\sup_{(\mathbf{w}, r) \in \mathbf{X}_h \times P_h} \frac{\mathfrak{B}_h((\mathbf{v}, q); (\mathbf{w}, r))}{\|\mathbf{w}\|_1 + \|r\|_0} \geq \frac{K_1}{K_2} (\|\mathbf{v}\|_1 + \|q\|_0)$$

l'inégalité (3.21) est ainsi établie pour $\gamma = \frac{K_1}{K_2}$, qui est clairement indépendante de β et de h .

Dans la suite de la démonstration, C_i ($i = 1, 2, \dots$) sont des constantes indépendantes de h et de β . En premier lieu, dénotons par $\hat{\mathbf{u}}$ l'interpolé de \mathbf{u} dans \mathbf{X}_h et \hat{p} l'interpolé de p dans P_h . Alors,

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_h((\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}, p_h - \hat{p}); (\mathbf{v}, q)) &= \mathfrak{B}_h((\mathbf{u}_h, p_h); (\mathbf{v}, q)) - \mathfrak{B}_h((\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}); (\mathbf{v}, q)) \\ &= \mathfrak{B}_h((\mathbf{u}_h, p_h); (\mathbf{v}, q)) - \mathfrak{B}((\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}); (\mathbf{v}, q)) + \beta \mathfrak{C}_h(\hat{p}, q) \\ &= \mathfrak{B}((\mathbf{u}, p); (\mathbf{v}, q)) - \mathfrak{B}((\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}); (\mathbf{v}, q)) + \beta \mathfrak{C}_h(\hat{p}, q) \quad () \\ &= \mathfrak{B}((\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}, p - \hat{p}); (\mathbf{v}, q)) + \beta \mathfrak{C}_h(\hat{p}, q) \quad ((3.26)) \end{aligned}$$

avec $C_6 = 1 + C_1$.

Par conséquent, on obtient une estimation optimale similaire à (3.20) avec une constante dépendant de β . Pour voir que la méthode ne se comporte pas dans cette voie, considérons le remplacement de l'interpolé \hat{p} dans (3.26) par \tilde{p} , l'interpolé de p dans Q_h . On obtient plutôt

$$\|\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}\|_1 + \|p_h - \tilde{p}\|_0 \leq C_1 \left\{ \|\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}\|_1 + \|p_h - \tilde{p}\|_0 + \beta \sup_{\|q\|_0=1, q \in P_h} \mathfrak{E}_h(\tilde{p}, q) \right\} \quad (3.29)$$

Mais,

$$\mathfrak{E}_h(\tilde{p}, q) = 0 \quad \forall q \in P_h$$

ce qui entraîne

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq C_6 (\|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}\|_1 + \|p - \tilde{p}\|_0) \quad (3.30)$$

Finalement, en combinant (3.28) et (3.30), on obtient l'estimation optimale de l'erreur

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq C_6 \left(\|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}\|_1 + \min \left\{ \|p - \hat{p}\|_0 + \frac{\beta C_1 C_5}{C_6} h |p|_1, \|p - \tilde{p}\|_0 \right\} \right)$$

et il ne reste qu'à appliquer les propriétés d'approximation données par les lemmes 3.2 et 3.3 pour déduire l'estimation désirée (3.20).

Une caractéristique importante de la démonstration du théorème est qu'elle établit la validité de l'approche de stabilisation locale avec un grand paramètre arbitraire de stabilisation. La méthode se comporte, alors, comme ayant une approximation constante sur chaque macro-élément. Ceci renforce plus l'apparente robustesse de la méthodologie locale présentée, car le point crucial réside dans le fait que l'amplitude de β peut être choisie de sorte à optimiser le taux de convergence de la technique de résolution itérative utilisée sans, pour autant, affecter la précision des solutions approchées.

Remarque. Il a été montré que la norme $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 = \theta(h)$, de sorte que l'erreur d'approximation de la vitesse dans la norme L^2 , i.e. $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0$, est au moins du même

ordre. Pour déduire une estimation optimale L^2 , on a besoin de supposer que la solution exacte (\mathbf{u}, p) satisfait une inégalité de régularité pour $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^2$ de la forme

$$\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1 \leq \rho \|\mathbf{f}\|_0 \quad (3.31)$$

Dans ce cas, l'application d'un argument de dualité, dû à Aubin et Nitsche (voir Girault et Raviart [10]), permet d'obtenir l'estimation d'erreur suivante :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0 \leq Ch^2(\|\mathbf{u}\|_2 + |p|_1) \quad (3.32)$$

où $C > 0$ est indépendante de h . On note que l'hypothèse de régularité (3.31) paraît être vérifiée si Ω est un domaine polygonal convexe (voir, à cet effet, [10]).

3.3. Construction de certains macro-éléments faibles.

Pour appliquer la théorie développée précédemment, il est nécessaire de mettre en évidence certains macro-éléments possédant les propriétés exigées. Deux cas simples sont présentés dans la suite. Avant cela, donnons deux conditions qui permettent d'établir plus aisément le Lemme 3.1 dans certains cas particuliers. Il s'agit de :

(**L**₁) (Condition de stabilité en macro-élément) : Il existe une constante $\lambda_{\hat{M}} = \lambda(\hat{M}) > 0$ telle que pour tout $M \in \zeta_{\hat{M}}$:

$$\sum_{e \in \Gamma_M} \|q\|_e^2 \geq \lambda_{\hat{M}} \sum_{e \in \Gamma_M} q^2 / K \quad \forall q \in P_{0,M} \quad (3.33)$$

(**L**₂) (Condition de régularité interne au macro-élément) : Il existe une constante $\mu_{\hat{M}} = \mu(\hat{M}) > 0$ telle que pour tout $M \in \zeta_{\hat{M}}$:

$$k_M \geq \mu_{\hat{M}} \cdot s_M \quad (3.34)$$

où $k_M = \min_{K \subset M} |K|$ et $s_M = \max_{K \subset M} |K|$ ($|K|$ étant l'aire de l'élément K).

En particulier, on peut montrer:

Lemme 3.4.

Soit $\zeta_{\hat{M}}$ une classe de macro-éléments équivalents telle que (3.33) et (3.34) soient vérifiées. Alors, il existe une constante $\gamma_{\hat{M}} = \gamma(\hat{M}) > 0$ telle que

$$\mathfrak{C}_M(q, q) \geq \gamma_{\hat{M}} \|q\|_{0,M}^2 \quad \forall q \in P_{0,M} \quad (3.35)$$

est satisfaite pour tout $M \in \zeta_{\hat{M}}$.

Démonstration. En utilisant les conditions de régularité de τ_h , (3.4) – (3.5), on peut montrer qu'il existe $\eta > 0$ telle que pour tout $M \in \zeta_{\hat{M}}$:

$$h_e^2 \geq \eta k_M \quad \forall e \in \Gamma_M$$

avec k_M donné dans (3.34). Si $q \in P_{0,M}$, alors

$$\mathfrak{C}_M(q, q) \geq \eta \lambda_{\hat{M}} \mu_{\hat{M}} \sum_{K \subset M} \|q\|_{0,K}^2$$

de sorte que $\gamma_{\hat{M}} = \eta \lambda_{\hat{M}} \mu_{\hat{M}}$.

3.3.1. Cas triangulaire.

Considérons la paire d'approximation $P_1 - P_0$ (vitesse continue linéaire par morceaux, pression constante par morceaux). Le plus simple des macro-éléments consiste à prendre quatre éléments triangulaires. Ainsi, un macro-élément de référence \hat{M} et un macro-élément arbitraire M dans la classe $\zeta_{\hat{M}}$ sont donnés dans la Figure 3.1. Il est directement clair que la condition (3.34) est naturellement satisfaite, de sorte que la seule condition restante à vérifier est la condition de stabilité au macro-élément (3.33).

Soit $q \in P_{0,M}$. En dénotant par q_i la valeur de q dans chaque élément K_i , il s'ensuit que

$$\begin{aligned} |K_1| q_1 + |K_2| q_2 + |K_3| q_3 &= 0 \\ &+ |K_4| q_4 \end{aligned} \quad (3.36)$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in \Gamma_M} \|q\|_e^2 &= (q_1 - q_3)^2 + (q_2 - q_3)^2 + (q_4 - q_3)^2 \\
&\geq \frac{1}{s_M} \{ |K_1| (q_1 - q_3)^2 + |K_2| (q_2 - q_3)^2 + |K_4| (q_4 - q_3)^2 \} \\
&\geq \frac{1}{s_M} \{ |K_1| q_1^2 + |K_2| q_2^2 + |K_4| q_4^2 + (|K_1| + |K_2| + |K_4|) q_3^2 \} \\
&\quad - \frac{2}{s_M} q_3 (|K_1| q_1 + |K_2| q_2 + |K_4| q_4)
\end{aligned}$$

de sorte que (3.36) entraîne

$$\sum_{e \in \Gamma_M} \|q\|_e^2 \geq \frac{k_M}{s_M} (q_1^2 + q_2^2 + 5q_3^2 + q_4^2)$$

Finalement, si $\mu_{\hat{M}} = \mu(\hat{M}) > 0$ existe telle que (3.34) est vérifiée, alors

$$\sum_{e \in \Gamma_M} \|q\|_e^2 \geq \mu_{\hat{M}} \sum_{K \subset M} q_K^2$$

auquel cas l'inégalité désirée (3.33) est vraie pour $\mu_{\hat{M}} = \lambda_{\hat{M}}$.

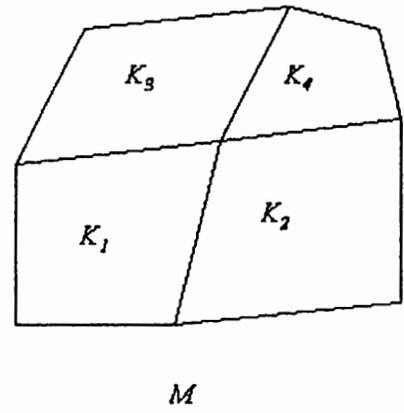
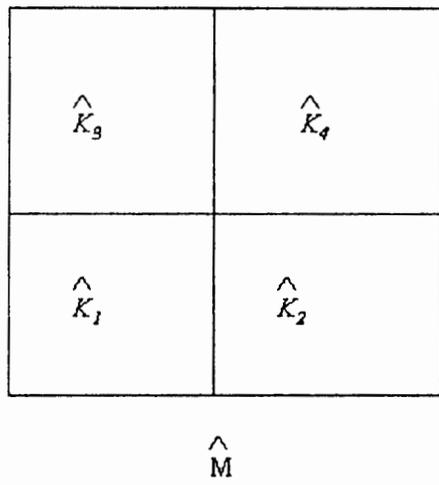


Figure 3.1

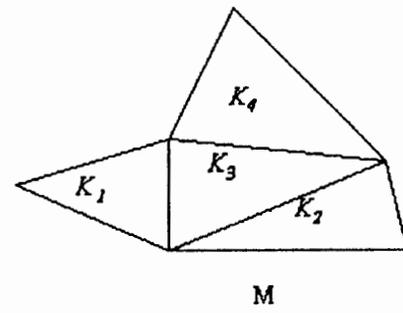
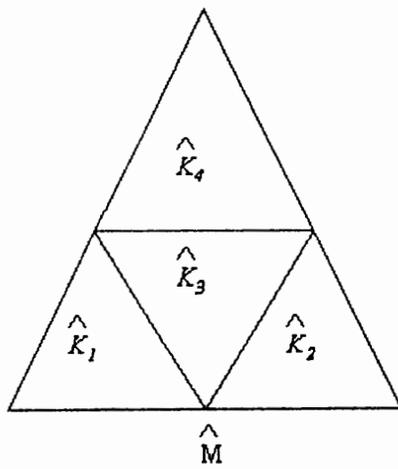


Figure 3.2

3.3.2. Cas quadrilatéral.

Pour ce ca, un macro-élément de référence \hat{M} et un macro-élément arbitraire M dans la classe $\zeta_{\hat{M}}$ sont donnés dans la Figure 3.2. Ici aussi, la seule vraie condition à satisfaire est (3.33). A cet effet, soit $q \in P_{0,M}$. En dénotant, de nouveau, par q_i la valeur de q dans l'élément K_i , on a

$$|K_1|q_1 + |K_2|q_2 + |K_3|q_3 + |K_4|q_4 = 0 \quad (3.37)$$

D'où,

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \Gamma_M} \|q\|_e^2 &= (q_1 - q_2)^2 + (q_1 - q_3)^2 + (q_2 - q_4)^2 + (q_3 - q_4)^2 \\ &\geq \frac{|K_1||K_2|}{s_M^2} (q_1 - q_2)^2 + \frac{|K_1||K_3|}{s_M^2} (q_1 - q_3)^2 \\ &\quad + \frac{|K_2||K_4|}{s_M^2} (q_2 - q_4)^2 + \frac{|K_3||K_4|}{s_M^2} (q_3 - q_4)^2 \\ &\geq \frac{1}{s_M^2} \{ |K_1| (|K_2| + |K_3|) q_1^2 + |K_2| (|K_1| + |K_4|) q_2^2 \\ &\quad + |K_3| (|K_1| + |K_4|) q_3^2 + |K_4| (|K_2| + |K_3|) q_4^2 \\ &\quad - 2(|K_1|q_1 + |K_4|q_4) (|K_2|q_2 + |K_3|q_3) \} \end{aligned}$$

En combinant avec (3.37), cette inégalité donne

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \Gamma_M} \|q\|_e^2 &\geq 2 \frac{K_M^2}{s_M^2} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2) + \frac{2}{s_M^2} (|K_1|q_1 + |K_4|q_4)^2 \\ &\geq 2 \frac{K_M^2}{s_M^2} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2) \end{aligned}$$

Finalement, si $\mu_{\hat{M}} = \mu(\hat{M}) > 0$ existe telle que (3.34) est vérifiée alors

$$\sum_{e \in \Gamma_M} \|q\|_e^2 \geq 2\mu_{\hat{M}}^2 \sum_{K \subset M} q_K^2$$

et l'inégalité voulue (3.33) est satisfaite pour $\lambda_{\hat{M}} = 2\mu_{\hat{M}}^2$.

Conclusion.

Durant la majeure partie du présent travail, notre but a été de développer un cadre efficace et convergent pour l'application des méthodes mixtes d'éléments finis pour la résolution du problème généralisé de Stokes et, par la même occasion, pour celle des problèmes d'écoulement incompressible de fluides visqueux. Le cadre de stabilisation locale proposé réhabilite les paires d'éléments finis de plus bas ordre et possède les propriétés importantes suivantes :

- (i) il est facilement généralisable à la dimension trois,
- (ii) la convergence est optimale pour les deux approximations de vitesse et de pression.

La méthode admet, cependant, un inconvénient qui réside dans le besoin à un partitionnement convenable en macro-éléments. Ceci est minime en pratique, car en débutant à partir de n'importe quel partitionnement, on peut toujours raffiner de telle sorte que les conditions exigées soient facilement vérifiables.

Comme travail futur, il sera très intéressant d'étudier la performance numérique de la méthodologie présentée et ce, en combinaison avec les techniques de résolution itérative.

References

- [1] I. Babuska, *Error bounds for finite elements method*, Numer. Math. **16** (1971), pp. 322-333.
- [2] I. Babuska, J. Osborn and J. Pitkaranta, *Analysis of mixed methods using mesh dependent norms*, Math. Comp. **35** (1980), pp. 1039-1062.
- [3] Bercovier et Pironneau, *Errors estimates for the finite element method solution of the Stokes problems in the primitive variable*, Numerische-mathematics **33** (1979).
- [4] J. Boland and R. A. Nicolaides, *Stability of finite methods under divergence constraints*, SIAM J. Numer. Anal. **20** (1983), pp. 722-731.
- [5] J. M. Boland and R. A. Nicolaides, *On the stability of Bilinear-constant velocity-pressure finite elements*. Numerische-mathematics **44** (1984), pp. 219-222.
- [6] J. H. Bramble and J. E. Pasciak, *A preconditioning technique for indefinite systems resulting from mixed approximations of elliptic problems*, Math. Comp. **50** (1988), pp. 1-17.
- [7] F. Brezzi and J. Pitkaranta, *On the stabilisation of finite element approximations of the Stokes problem* *Efficient Solution of Elliptic Systems* (W. Hackbusch, ed.), Notes on Numerical Fluid Mechanics. Vol **10**, Vieweg, Braunschewig, 1984, pp. 11-19.
- [8] P. G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, NORTH-HOLLAND, Amsterdam (1978).
- [9] J. Douglas, Jr. and J Wang, *An absolutely stabilized finite element method for the Stokes problem*, Math. Comp. **52** (1989), pp. 495-508.
- [10] V. Girault and P. Raviart, *Finite element methods for Navier-Stokes equations: theory and algorithms*, Spriger-Verlag Berlin, Heidelberg, 1986.

- [11] M. D. Gunzburger, *Finite element methods for viscous-incompressible flows*, Academic Press, London (1989).
- [12] T. J. R. Hughes and L. P. Franca, *A new finite formulation for CFD: VII. The Stokes problem with various well-posed boundary conditions: Symmetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **65** (1987), pp. 85-96.
- [13] C. Johnson and J. Pitkaranta, *Analysis of some mixed finite element methods related to reduced integration*, *Mathematics of Computation* **38** (1982), pp. 375-400.
- [14] N. Kechkar, *Analysis and application of locally stabilised mixed finite element methods*, Ph.D. Thesis, University of Manchester Institute of Science and Technology, 1989.
- [15] N. Kechkar and D.J.Silvester. *The Stabilisation of low order mixed finite elements for incompressible flow*. Proc .5th Internat.Sympos. on numerical Methods in Engineering (R.Gruber et eds.), Computational Mechanics Publications, Southampton, **2** (1989), pp. 111-116.
- [16] J. Pitkaranta and T.Saarinen. *A Multigrid version of a simple finite element method for the Stokes problem*. *Math. Comp.* **45** (1985), pp. 1-14.
- [17] R. L. Sani, P. M. Gresho, R. L. Lee and D. F. Griffiths, *The cause and cure(?) of the spurious pressures generated by certain finite element method solutions of the incompressible Navier-Stokes equations*, Parts 1 and 2, *Internat. J. Numer. Methods Fluids* **1** (1981), pp. 17-43; 171-204.
- [18] D. J. Silvester and N. Kechkar, *Stabilised bilinear-constant velocity-pressure finite elements for the conjugate gradient solution of the Stokes problem*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **79** (1990), pp. 71-86.
- [19] R. Stenberg, *Analysis of mixed finite elements for the Stokes Problem: A unified approach*, *Math. Comp.* **42** (1984), pp. 9-23.

- [20] C. Taylor and P. Hood, *A numerical solution of the Navie-Stokes equation using the finit element technique*, Computer and Fluids (1973) 73-100.
- [21] R. Verfurth, *A multi levelled algorithm for mixed problems*, SIAM J. Numer. Anal. **21** (1984), pp. 264-271.

Abstract

Refined modeling of most industrial incompressible fluid flows needs a convergent, rapid and robust algorithm for the generalized Stokes problem which can be expressed as follows :

$$\begin{cases} \alpha V - \nu \Delta V + \text{grad}(P) = f, & \text{dans } \Omega, \\ \text{div} V = 0, & \text{dans } \Omega, \\ V = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (1)$$

Where ν represents cinematic viscosity and results from time discretisation.

In the presents work, the new methodology of local stabilization, constructed in the Stokes problem framework is extended to the generalized problem (1). Theoretical analysis of stability and convergence for the mixed finite method $Q_1 - Q_0$ (bilinear discrete velocity, constant discrete pressure is presented). Furthermore, numerical results obtained for a benchmark problem are used to illustrate theory.

RESUME

La modélisation raffinée de la plupart des écoulements incompressibles de fluides industriels nécessite la disponibilité d'un algorithme convergent, rapide et robuste pour le problème généralisé de Stokes qui peut s'écrire comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha \mathbf{V} - \nu \Delta \mathbf{V} + \text{grad } P = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \text{div } \mathbf{V} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{V} = \mathbf{g} & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (1)$$

où ν désigne la viscosité cinématique et α résulte de la discrétisation temporelle.

Dans le présent travail, la nouvelle méthodologie de stabilisation locale construite dans le cadre du problème de Stokes est étendue au problème généralisé (1). Une analyse théorique de la stabilité et de la convergence pour les deux méthodes mixtes d'éléments finis P_1-P_0 et Q_1-Q_0 (vitesse discrète bilinéaire ou linéaire, pression discrète constante) est présentée. De plus, des calculs numériques simples sont présentés pour illustrer des constructions pratiques.

Mots clés. *Eléments Finis Mixtes, Stabilisation, Problème de Stokes.*