REPUBLIQUE ALGERIENNE DE MOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mentouri Constantine
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

N° d'ordre :…
N° de série :…

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER en MATHEMATIQUE

Thème

Sur une classe de problèmes abstraits mal posés

Option
Mathématique

Par

DJAFRI NABILA

Devant le jury

Mr. AYADI Abdelhamid Pr. Univ. Larbi Ben M'Hidi-O.E.B. Président
Mr. DJEZZAR Salah M.C. Univ. Mentouri Constantine Rapporteur
Mr. MARHOUNE A.Lakhdar Pr. Univ. Mentouri Constantine Examinateur
Mr. BOUZIT Mohamed . M.C. Univ. Larbi Ben M'Hidi-O.E.B. Examinateur

Soutenue le : 03/03/2010

Remerciement

Avant tout, je remercie le bon Dieu pour tout puissant qui m'a aidé à terminer ce travail.

Je remercie mon Directeur de Thèse Mr. Djezzar Salah, maître de conférence à l'université Mentouri Constantine pour l'aidé précieuse et les directives qu'il m'a pas cessé de me prodiguer tout le long de mon travail de recherche.

Je tiens à remercier profondément tous les membres de jury:

Mr. Ayadi Abdelhamid , professeur à l'université Larbi Ben M'hidi O. E. B. pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury.

Mr. Marhoune A. lakhdar, professeur à l'université Mentouri Constantine, et Mr. Bouzit Mohamed, Maître de conférence à l'université de Larbi Ben M'hidi-O.E.B.

Enfin, je n'oublie pas tous aux qui m'ont encouragé pour terminer ce travail, à tous ceux, Merci…..

Table des matières

0.1 **Introduction** 3

1 Notions préliminaires **6**

1.1 Rappel sur les opérateurs 6

1.1.1 Opérateurs bornés 6

1.1.2 Opérateurs compacts 8

1.1.3 Opérateurs non bornés 8

1.1.4 Opérateurs fermés 9

1.2 Semi groupe 10

1.3 Mésure spéctrale 11

1.4 Décomposition spéctrale d'un opérateur non borné 12

2 Etude du problème mal posé (cas discret) **13**

2.1 Introduction 13

2.2 Exemples de problèmes mal posés 15

2.3 Présentation de quelque méthodes de régularisations 17

2.4 Etude du problème mal posé à coefficient opératoriel positif 20

2.4.1 Convergence de la solution régularisée 22

2.4.2 Estimation de l'érreur 24

2.5 Etude du problème mal posé à coefficient opératoriel négatif 28

2.5.1 Convergence de la solution régularisée 34

2.5.2 Estimation de l'erreur 37

3 Etude du probléme mal posé (cas continu) 41

3.1 Introduction 41

3.2 Etude du problème mal posé à coefficient opératoriel négatif 43

3.2.1 Convergence de la solution régularisée 48

3.2.2 Estimation de la solution régularisée 51

3.2.3 Estimation de l'erreur 53

0.1 Introduction

Dans la dernière décennie, un intérêt considérable a été accordé à l'étude de différentes classes de problèmes mal posés pour des équations différentielles aux dérivées partielles et les équations intégraux-différentielles, plus particulièrement, les problèmes mal posés aux limites et à valeurs initiales, un grand nombre de problèmes qui ont été étudiés sont intimement liés à certains problèmes du monde réel dans la physique mathématique.

La notion de problème bien posé a été formulée par le mathématicien Français Hadamard 1923 [7].

A l'heur actuelle, ce concept est largement présenté dans les livres sur les équations de la physique mathématique ou équations différentielles aux dérivées partielles.

Un problème de physique mathématique ou un problème de valeurs aux limites pour une équation différentielle aux dérivées partielles est dit bien posé si les conditions suivantes sont satisfaites :

1) L'existence de la solution.

2) L'unicité de la solution.

3) La dépendance continue de la solution sur les données du problème.

On cite deux problèmes bien connus qui ne sont pas bien posé :

Problème de Dirichlet pour une équation de Laplace, en effet pour ce dernier problème, Hadamard a montré qu'une bonne solution globale ne peut exister que si les données initiales satisfont à certaines conditions de compatibilité.

Un concept fondamental lié à établir l'unicité, stabilité et dépendance continue des donnés pour trouver des solutions aux problèmes de Cauchy qui est mal posé pour une équation différentielle aux dérivées partielles a évolué dans les années 1950 dans le traveaux de John.F, Pucci et Lavrentiev.

On note aussi que plusieurs différentes méthodes on été utilisées pour l'étude de la classe de problèmes mal posés :

$$\begin{cases} u'(t) + A\ u(t) = 0, \quad 0 < t < T \\ u(T) = f. \end{cases} \qquad (F.V.P)$$

On cite par exemple :

1) La méthode de quasi-réversibilité qui été utilisé par :

- Lattes et Lions en 1960 [9], en perturbant l'opérateur A par $A - \varepsilon A^2$ où ε est un paramètre positif.

- Showalter [14] , a perturbé la dérivée dans l'équation par $u' + \varepsilon u'$ pour $\varepsilon > 0$.

- Miller[11] aborde ce problème de grande norme par perturbation optimale de l'opérateur A noté $f(A)$, où f appartient à une certaine classe de fonctions.

2) La méthode de quasi-valeur aux limites : qui est introduite par Showalter [15], cette méthode donne une mielleure approximation que d'autres plusieures méthodes d'approximation.

Dans cette étude nous étulisons cette dernière méthode pour régularisé le problème $(F.V.P)$.

Cet travail est composé d'une introduction et de trois chapitres. Dans le premier, on commence tout d'abord par des rappeles utiles pour le dévloppement de ce travail dans les chapitres suivants.

Au deuxième chapitre, on donne des exemples sur les problèmes mal posés et quelques méthodes de régularisation de ces problèmes, en suite on aborde l'étude d'un problème mal posé dans le cas discret, où nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u'(t) + A\ u(t) = 0, \quad 0 < t < T \\ u(0) = f\ , \end{cases} \tag{1}$$

où f est une valeur donnée dans H et A est un opérateur auto-adjoint négatif dans un espace de Hilbert H, tel que A admet une base orthonormale des vecteurs propres $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ dans H associés aux valeurs propres $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ de A et telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = -\infty < ..... < \lambda_2 < \lambda_1 < 0.$

Le problème qui est posé est de trouver la solution $u(t)$ du problème (1).

Donc en utilisant la méthode de quasi-valeur aux limites, on perturbe la condition initiale par la variable de controle $u(T)$ pour former un problème approximatif non local dépendant d'un petit paramètre α.

On montre que le problème perturbé par la variable de controle $u(T)$ est bien posé c'est-à-dire, il admet une solution unique et stable, en suite on établit la convergence de la solution approchée vers la solution exacte, enfin, on donne une éstimation de l'érreur de convergence.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'un problème mal posé, dans le cas continu, avec un opérateur auto-adjoint négatif A dans un espace de Hilbert H.

On établit également des résultats d'éxistence, d'unicité et de stabilité du problème régularisé. En donne en suite une éstimation de la solution régularisée et on montre la convergence de la solution régularisée vers la solution du problème original. Enfin, on donne une éstimation de l'érreur de convergence.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Ce chapitre est présenté pour faciliter la compréhension et le dévelopement des idées dans les chapitres suivants.

1.1 Rappel sur les opérateurs

Définition 1.1.1 : *Soit H un espace vectoriel normé, une application linéaire A de H dans lui même est appellée un opérateur linéaire dans H.On appelle domaine de A et on désingne par D_A le sous espace vectoriel des élèments x de H tel que $A(x)$ ait un sens.On appelle espace final de A et on désigne par R_A le sous-espace vectoriel $A(D_A)$.*

1.1.1 Opérateurs bornés

Définition 1.1.2 : *Soit H un espace vectoriel normé, on appelle opérateur linéaire borné toute application linéaire continue de H dans H.*

Définition 1.1.3 : *Soit A un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert H.*

1) On dit que A est unitaire s'il est l'inverse de son adjoint, c'est-à-dire

$AA^* = A^*A = I$.

2) On dit que A est auto-adjoint s'il est identique à son adjoint, c'est-à-dire :

$A = A^*$.

Définition 1.1.4 (Spectre d'un opérateur borné) : Soit H un espace de Hilbert et soit $A \in L(H, H)$. Le spectre de l'opérateur A, noté $\sigma(A)$, est le sous ensemble des nombres complexes suivant :

$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A$ n'est pas inversible$\}$, où I est l'opérateur identité sur H.

La connaissance du spectre de A fournit beaucoup d'informations sur l'opérateur A.

Le spectre $\sigma(A)$ est mieux compris dans le cas où A est un opérateur auto-adjoint.

Définition 1.1.5 : L'ensemble résolvant de A, c'est l'ensemble des complexes λ tels que $\lambda I - A$ possède un inverse borné.

Définition 1.1.6 : Le spectre de A est le complémentaire de l'ensemble résolvant.

C'est donc l'ensemble des nombres complexes λ tels que $\lambda - A$ n'a pas d'inverse borné.

Corolllaire 1.1.1 : *Soit A un opérateur auto-adjoint tel que $\sigma(A) = \{0\}$ alors $A = 0$.*

Théorème 1.1.1 *: Soit A un opérateur linéaire auto-adjoint défini dans un espace de Hilert H.*Alors :

1)Ses valeurs propres sont réelles .

2) Les vecteurs propres associes aux valeurs propres différentes sont orthogonaux.

3) Son spectre résiduel est vide.

4) Son spectre continu est réel.

1.1.2 Opérateurs compacts

Les opérateurs compacts constituent une classe particulière d'opérateurs linéaires bornés qui présent une grande analogie avec la classe des opérateurs linèaires définis sur des espaces de dimension finie.

Définition 1.1.11 : *Un opérateur linèaire A, définit sur un espace de Hilbert H est dit compact, ou complètement continu, si l'adhérence de l'image de toute partie bornée de H est compact.*

1.1.3 Opérateurs non bornés

Définition 1.1.7 : *Soit E et F deux espaces de Banach, on appelle opérateur linéaire non-borné de E dans F toute application linéaire*

$A : D(A) \subset E \to F$ *définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset E$, à valeurs dans F.(On dit que A* est borné s'il existe une constante c telle que $\|A\ u\| \leq c\,\|u\|$, $\forall u \in D(A)$).

Définition 1.1.8 (Spectre d'un opérateur non borné) : Soit A un opérateur dans un espace de Hilbert H, l'inverse de $A - \lambda I$ quand il existe, est appelé opérateur résolvant ou résolvante de A, on le note $R(A)$.

Définition 1.1.9 : On appelle résolvante de A et on le note $\rho(A)$, l'ensemble des valeurs de λ telles que $R_\lambda(A)$ existe, soit borné et à domaine dense, on appelle spectre de A et on note $\sigma(A)$, le complémentaire de $\rho(A)$.

Définition 1.1.10. Soit A un opérateur fermé dans H. L'ensemble résolvant de A, noté $\rho(A)$, est constitué de tous les nombres $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que l'opérateur $\lambda I - A$ est une bijection de $D(A)$ sur H avec un inverse borné.

Si $\lambda \in \rho(A)$, l'opérateur $R(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est appelé la résolvante de A au point λ. Le complémentaire de $\rho(A)$ dans $\mathbb{C}$, noté $\sigma(A)$, s'appelle le spectre de A.

1.1.4 Opérateurs fermés

Définition 1.1.12 : *On dit qu'un opérateur A est fermé si* $G(A)$ (Graphe de A)*, est fermé dans $E \times F$.*

Remarque 1.1.1 : Si A est fermé, alors $N(A)$ (Noyau) est fermé.

Remarque 1.1.2 : En pratique, la plupart des opérateurs non bornés que l'on rencontra sont fermés et à domaine $D(A)$ dense dans E.

Remarque 1.1.3 : Tout opérateur auto-adjoint est fermé.

Définition 1.1.13 : *Si $\langle Ax, x\rangle \geq 0, \forall x \in D(A)$,on dit que l'opérateur A est positif.*

Définition 1.1.14 : Le spectre d'un opérateur fermé est défini exactement comme le spectre d'un opérateur borné. C'est l'ensemble des λ tels que $\lambda - A$ possède un inverse borné.

Lemme1.1.1 : Le spectre d'un opérateur fermé est une partie fermée de $\mathbb{C}$.

1.2 Semi groupe

Définition 1.1.15 : Soit E un espace de Banach, $(S(t))_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs bornés définis de E vers lui même.

Définition 1.1.16 : On dit que $(S(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu si :

1) $S(0) = I$

2) $S(t+s) = S(t)S(s), \quad \forall t, s \geq 0$

3) $\lim\limits_{t\to 0^+} \|S(t)\ y\ - y\| = 0, \qquad \forall\ y \in E.$

Définition 1.1.17 : A est le génèrateur infinitèsimal d'un semi groupe fortement continu si :

$Ay = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{S(t)y-y}{t}$ sur $D(A)$, avec
$D(A) = \left\{ y \in E\ /\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{S(t)y-y}{t} \text{ existe}\right\}$

propriètè 1.1.1 :

1) $D(A)$ est dense dans E et A est fermé.

2) Il existe $w \geq 0$, $M \geq 1$ tels que :

$\|S(t)\| \leq Me^{wt}\ \forall t \geq 0$

3) $\forall y \in D(A), \forall t \geq 0, S(t)y \in D(A)$ et on a :

$AS(t)y = S(t)Ay.$

4) $\forall y \in E, \forall t \geq 0 : \int_0^t S(s)yds \in D(A)$ et on a :

$A(\int_0^t S(s)yds) = S(t)y - y.$

Le théorème suivant est une caracterisation d'opérateurs qui sont des génèrateurs d'un semi-groupe fortement continu.

Théorème 1.1.2(Hille-Yosida) :

Un opérateur A de domaine $D(A)$ dans E, génère un semi-groupe fortement continu si et seulement si :

1)$D(A)$ est dense dans E et A est fermé.

2)$\exists w \geq 0, \exists M \geq 1$ et $\forall \lambda$ tels que $\mathrm{Re}(\lambda) > w, \lambda \in \rho(A)$ alors :

$\left\|(\lambda I - A)^{-k}\right\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^k}, \quad k = 1, 2, ...$

1.3 Mésure spéctrale

Définition 1.1.18 : U*ne mésure spéctrale $\{E_\lambda\}$sur un espace de Hilbert H, est une fonction $E : \sigma(\mathbb{R}) \rightarrow B(H)$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

1) $E(\lambda)$ est une projection orthogonale pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) $E(\lambda) \leq E(\mu)$ pour $\lambda \leq \mu$.

3) $E(\lambda + \varepsilon) \rightarrow E(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$. (continue)

4) $E(\lambda) \rightarrow 0$ quand $\lambda \rightarrow -\infty$ et $E(\lambda) \rightarrow I$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$.

Maintenant, on donne quelques propriétés fondamentales concernant les mésures spéctrales $\{E_\lambda\}$.

- $E_\mu E_\lambda = E_\lambda$ si $\mu \geq \lambda$.

- Si $TA = AT$, pour $T \in B(H)$, alors $TE_\lambda = E_\lambda T$, et $E_\lambda A = AE_\lambda$.

- $E_\lambda^2 = E_\lambda$.

- $E_\lambda^* = E_\lambda$.

1.4 Décomposition spéctrale d'un opérateur non borné

Définition 1.1.19 : *Soit A un opérateur auto-adjoint non borné sur un espace de Hilbert H. Le représentation $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda$ est connu sous le nom de la décomposition spéctrale de A relativement à la mésure spéctrale $\{E_\lambda\}$.*

Nous notons qu'il existe une unique mésure spéctrale $\{E_\lambda\}$ pour la quelle l'opérateur A est représenté sous la forme ci -dessus.

Chapitre 2

Etude du problème mal posé (cas discret)

2.1 Introduction

Dans la première partie de ce chapitre, nous citrons quelques exemples de problèmes mal posés, et quelques mèthodes de régularisation de ces problèmes.

Dans la deuxième partie, nous étudions une classe de problèmes mal posés dans le cas discret, on traite deux types de problèmes.

Le premier problème consiste à présenter, en suivant les idées développées dans l'article de Clark [3] , le problème à valeur finale suivant :

$$\begin{cases} u'(t) + A\ u(t) = 0, & 0 < t < T \\ u(T) = f, & \end{cases} \qquad (F.V.P) \qquad (2.1)$$

où A est un opérateur auto-adjoint non borné positif dans un espace de Hilbert

H, et f une valeur préscrite dans H.

Supposons que A admet une base orthonormale des vecteurs propres $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ dans H associés aux valeurs propres $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ telles que

$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$.

Nous utilisons la méthode dite des valeurs quasi-limites, on perturbe la condition finale dans le problème $(F.V.P)$ on obtient le problème approximatif non local dépendant d'un petit paramètre $\alpha > 0$ suivant :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & 0 < t < T \\ \alpha u(0) + u(T) = f \ . \end{cases} \qquad (Q.B.V.P) \qquad (2.2)$$

Le deuxième problème traité consiste à étudier le problème$(I.V.P)$ mal posé suivant :

$$\begin{cases} u'(t) + A\ u(t) = 0, & 0 < t < T \\ u(0) = f\ , \end{cases} \qquad (I.V.P) \qquad (2.3)$$

mais avec un coefficient opératoriel A auto-adjoint négatif dans un espace de Hilbert H.

Supposons que A admet une base orthonormale des vecteurs propres $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ dans H associés aux valeurs propres $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ telles que

$\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = -\infty < ..... < \lambda_2 < \lambda_1 < 0.$

Nous utilisons la méthode dite des valeurs quasi-limites, on perturbe la condition initiale dans le problème $(I.V.P)$ on obtient le problème approximatif non local dépendant d'un petit paramètre $\alpha > 0$ suivant :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & 0 < t < T \\ \alpha u(T) + u(0) = f \ . \end{cases} \qquad (Q.B.V.P) \qquad (2.4)$$

Finalement dans les deux types de problèmes $A > 0$ (respéctivement $A < 0$) nous montrons qu'ils sont bien posés, et que la solution u_α de chacun converge sur $[0, T]$ si et seulement si le problème original a une solution classique. De plus on établié l'éstimation de l'erreur pour chaque type.

2.2 Exemples de problèmes mal posés

Exemple1.2.1 : Le problème de Neuman pour une fonction $u(x)$ définie sur un intervalle $[a, b]$:

$$\begin{cases} u''(x) = 0 \\ u'(a) = u_0 \\ u'(b) = v_0 \end{cases}$$

n'admet aucune solution si $u_0 \neq v_0$ et une infinité de solution si $u_0 = v_0$ de la forme :

$$u(x) = u_0 x + c$$

où c est une constante arbitaire. Le problème n'admet pas de solution ou il a une infinité de solution donc c'est un problème mal posé.

Exemple1.2.2 :

Le problème de Cauchy pour $x \geq 0$:

$$\begin{cases} u'(x) = 2\sqrt{|u(x)|} \\ u(a) = 0 \end{cases}$$

admet une infinité de solution de la forme :

$$\begin{cases} u(x) = 0 & x \in [0, a] \\ u(x) = (x-a)^2 & x \in [a, \infty[\end{cases}$$

La quantité a étant arbitraire. Le problème est mal posé.

Exemple1.2.3 :

On considére le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & x \in [0,1], y \in [0,1] \\ u(x,0) = 0 & \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \frac{\pi}{n}\sin(\pi n x) & n = 1, 2... \end{cases}$$

Les fonctions :

$$u_n(x,y) = \frac{1}{n^2}\sin(\pi n x) sh(\pi n y)$$

sont solutions du système précédent pour chaque valeur de n on peut trouver un nombre $x_n \in [0,1]$ tel que $\sin(\pi n x_n) = 1$ vérifiant :

$$\lim_{n\to\infty} \sup |u_n(x,y)| = \infty$$

ce qui prouve que les solutions du problème ne dépendent pas contin$\hat{u}$ment des données initiales.

Exemple1.2.4 :

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{1}{n}e^{-n^2 x} \end{cases}$$

admet une solution de la forme :

$$u(x,t) = \frac{1}{n^2}\frac{e^{nt} - e^{-nt}}{2}e^{-n^2 x}.$$

Si n tend vers à l'infini, en $t = 0, u$ tend uniformément vers zéro, ainsi que sa dérivée partielle en temps alors que $u(x,t)$ diverge dans chaque région pour $t > 0$ le problème est instable au sens d'Hadamard.

2.3 Présentation de quelque méthodes de régularisations

Nous citons quelques méthodes de régularisation pour les problèmes mal posés.

Régulariser un problème mal posé, c'est le remplacer par un autre bien posé de sorte que l'érreur commise soit compensée par le gain de stabilité.

Soit A un opérateur auto-adjoint non borné dans un espace de Hilbert H.

On considère le problème :

$$\begin{cases} u'(t) + A\ u(t) = 0, & 0 < t < T \\ u(T) = f\ , \end{cases} \qquad (F.V.P) \qquad (2.5)$$

pour une certaine valeur f dans l'espace de Hilbert, un tel problème est mal posé, même s'il existe une solution unique dans $[0,T]$, elle ne dépend pas continûment de la valeur finale f.

Des problèmes ont été étudies par plusieurs auteurs en utilisant différents approches. Nous citons par exemples :

1) La méthode de quasi-réversibilité qui a été présenté par Lattes et Lions en 1960, a pour idée de remplacer $(F.V.P)$ par des problèmes approximatifs qui sont bien posés, puis d'utiliser les solutions de ces nouveaux problèmes pour construire des solutions approximatives à $(F.V.P)$.

Dans la méthode originale de quasi-réversibilité [9] Lattes et Lions ont approché $(F.V.P)$ par :

$$\begin{cases} v'_\alpha(t) + Av_\alpha(t) - \alpha A^2\, v_\alpha(t) = 0, & 0 < t < T \\ v_\alpha(t) = f, \end{cases} \tag{2.6}$$

où l' opérateur A est remplacé par une perturbation, dans le cas présent par $A - \alpha A^2$ pour chaque $\alpha > 0$, en suite ils utilisent la valeur initiale $u_0 = v_\alpha(0)$ dans le problème :

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) + Au_\alpha(t) = 0, & 0 < t < T \\ u_\alpha(0) = v_\alpha(0). \end{cases} \tag{2.7}$$

Enfin, ils montrent que $u_\alpha(T)$ converge vers f quand α tend vers zéro. La méthode ne considère pas $u(t)$ pour $t < T$ et l'opérateur transportant f à $v_\alpha(0)$ a une grande norme pour les petits α $\left(\text{d'ordre de } e^{\frac{c}{\alpha}}\right)$ [11].

2) Dans [14], Showalter rapproche $(F.V.P)$ par :

$$\begin{cases} v'_\alpha(t) + \alpha A v'_\alpha(t) + Av_\alpha(t) = 0, & 0 < t < T \\ v_\alpha(T) = f. \end{cases} \tag{2.8}$$

Et comme ci dessus, pour chaque $\alpha > 0$, il utilise la valeur initiale $u_0 = v_\alpha(0)$ dans :

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) + Au_\alpha(t) = 0, & 0 < t < T \\ u_\alpha(0) = v_\alpha(0). \end{cases} \tag{2.9}$$

Les solutions u_α indiquées approximent la solution $u(t)$ de $(F.V.P)$ dans le sens où $u_\alpha(T)$ converge vers f quand α tend vers zéro. Et ainsi $u_\alpha(t)$ converge vers la solution $u(t)$ de $(F.V.P)$ si et seulement si $u(t)$ existe, et la fonction transportant f à $v_\alpha(0)$ a aussi une grande norme pour les petits α.

3) Miller [11] aborde ce problème de grande norme par perturbation optimale de l'opérateur A, il indique qu'il devrait être possible de rendre la norme de l'ordre $\frac{c}{\alpha}$ plutôt que $\exp(\frac{c}{\alpha})$ et tire les conditions sur la perturbation $f(A)$ pour obtenir les meilleurs résultats possibles.

Comme dans les méthodes ci-dessus, il rapproche $(F.V.P)$ par :

$$\begin{cases} v'(t) + f(A)v(t) = 0, & 0 < t < T \\ v(T) = f. \end{cases} \tag{2.10}$$

Et de nouveau résout le probléme en utilisant la condition unitiale $v(0)$. Il appelle ce la, la méthode de quasi-réversibilité stabilizé.

4) Enfin, Showalter [15] traite un problème plus gènèral en utilisant une autre méthode, il approche le problème :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) - Bu(t) = 0, & 0 < t < T \\ u(0) = f\ , \end{cases} \tag{2.11}$$

par

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) - Bu(t) = 0, & 0 < t < T \\ u(0) + \alpha u(T) = f. \end{cases} \tag{2.12}$$

Il appelle ce la la méthode de la valeur quasi-limite, et il suggère que cette méthode donne une méilleur approximation que de nombreux autres types de régularisation.

Dans ce travail, nous utilisons cette méthode pour régulariser $(F.V.P)$.

Nous notons que $(F.V.P)$ est un cas particulier du problème étudier dans [15].

2.4 Etude du problème mal posé à coefficient opératoriel positif

Dans cette section, on étudie le problème à valeur finale suivant :

$$\begin{cases} u'(t) + A\ u(t) = 0, & 0 < t < T \\ u(T) = f, \end{cases} \qquad (F.V.P) \tag{2.13}$$

où A est un opérateur auto-adjoint non borné positif dans un espace de Hilbert H séparable, et que *zéro* est dans l'ensemble résolvent de A, et f une valeur préscrite dans H.

Supposons que A admet une base orthonormale des vecteurs propres $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ dans H associés aux valeurs propres $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ telles que

$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$.

Nous utilisons la méthode dite des valeurs quasi -limites, on perturbe la condition finale dans le problème $(F.V.P)$ par le variable de controle $u(0)$ on obtient le problème approximatif non local dépendant d'un petit paramétre $\alpha > 0$ suivant :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & 0 < t < T \\ \alpha u(0) + u(T) = f \ . \end{cases} \qquad (Q.B.V.P) \qquad (2.14)$$

Soit : $u(0) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \, \varphi_i$

$$S(T)u = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-T\lambda_i} \, a_i \;\; \varphi_i$$

et

$$(S(T)u \ , u) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-T\lambda_i} \, a_i^2 \geq 0.$$

D'où nous obtenons :

$$\left\| (\alpha I \ + \ S(T))^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Il est utile de savoir exactement quand $(F.V.P)$ a une solution.

Le lemme suivant répond à cette question.

Lemme 2.2.1 : Si $f = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \, \varphi_i$ et $u(0) \in D(A)$, alors $(F.V.P)$ a une solution si et seulement si $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 \, e^{2T\lambda_i}$ converge.

Pour la preuve voir [3] .

Définition 2.2.1 : *On définit* $u_\alpha(t) = S(t)(\alpha I \ + S(T))^{-1} f$, *pour* $f \in H$, $\alpha > 0$*et* $t \in [0, T]$.

Théorème 2.2.1 : *La fonction* $u_\alpha(t)$ *est la solution unique de* $(Q.B.V.P)$, *et elle dépend continûment sur* f.

Preuve : Il est facile de voir que u_α est une solution classique de l'équation differentielle donnée, en plus :

$$\begin{aligned} \alpha u_\alpha(0) + u_\alpha(T) &= \alpha \left(\alpha I \ + S(T)\right)^{-1} f + S(T) \left(\alpha I \ + S(T)\right)^{-1} f \\ &= \left(\alpha I \ + S(T)\right)^{-1} \left(\alpha I \ + S(T)\right) f = f \end{aligned}$$

et maintenant, on montre que la solution est stable :

$$\begin{aligned}\left\|S(t)\left(\alpha I\ +S(T)\right)^{-1}f_1 - S(t)\left(\alpha I\ +S(T)\right)^{-1}f_2\right\| &= \\ \left\|S(t)\left(\alpha I\ +S(T)\right)^{-1}(f_1-f_2)\right\| &\leq \frac{1}{\alpha}\left\|f_1-f_2\right\|\end{aligned}$$

L'unicité découle du fait que toute solution v doit satisfaire

$v(0) = \left(\alpha I\ +S(T)\right)^{-1} f$ et de l'unicité de la solution du problème direct.

Nous faisons deux observations qui seront utiles plus tard.

Premièrement, de ce qui précède, il est claire que $\left\|u_\alpha\ (t)\right\| \leq \frac{1}{\alpha}\left\|f\right\|$.

Deuxièment, si $u(0) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\ \varphi_i$, alors :

$$\left(\alpha I\ +S(T)\right)u = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\alpha + e^{-T\lambda_i}\right)a_i\ \varphi_i$$

et :

$$\left(\alpha I + S(T)\right)^{-1}u = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{\alpha + e^{-T\lambda_i}}\varphi_i.$$

■

Théorème 2.2.2 : *Pour tout $f \in H$, $\alpha > 0$, et $t \in [0,T]$ nous avons :*

$$\left\|u_\alpha(t)\right\| \leq \alpha^{\frac{t\ -T}{T}}\left\|f\right\|.$$

Pour la preuve voir [3].

2.4.1 Convergence de la solution régularisée

Théorème 2.2.3 : *Pour tout f dans H, $\left\|u_\alpha(T) - f\ \right\|$ tend vers zéro quand α tend vers zéro, c'est-à-dire $u_\alpha(T)$ converge vers f dans H .*

Preuve : Si $f = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \ \varphi_i$, alors :

$$\begin{aligned} u_\alpha(T) - f &= S(T)\left(\alpha I + S(T)\right)^{-1} f - f \\ &= \frac{S(T)\ f}{\alpha + S(T)} - \frac{(\alpha + S(T))\ f}{\alpha + S(T)} \\ &= \frac{S(T)f - \alpha\ f\ - S(T)f}{(\alpha + S(T))} \\ &= \frac{-\alpha}{\alpha + S(T)} f \\ &= -\alpha\left(\alpha + S(T)\right)^{-1} f, \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(T) - f\|^2 &= \left\|-\alpha\left(\alpha + S(T)\right)^{-1} f\right\|^2 \\ &= \alpha^2 \left\|\left(\alpha + S(T)\right)^{-1} f\right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^2 b_i^2 \left(\alpha + e^{-T\lambda_i}\right)^{-2}. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme la série $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2$ converge, alors on choisit N pour le quel $\sum_{i=N}^{\infty} b_i^2 < \frac{\varepsilon}{2}$, d'où on a :

$$\|u_\alpha(T) - f\|^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha^2 b_i^2}{(\alpha + e^{-T\lambda_i})^2} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{\alpha^2 b_i^2}{(\alpha + e^{-T\lambda_i})^2}.$$

En éstimant $\left(\alpha + e^{-T\lambda_i}\right)^{-2}$ respéctivement par $e^{2T\lambda_i}$ et par α^{-2}, on trouve :

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(T) - f\|^2 &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha^2 b_i^2}{\left[e^{-T\lambda_i}\left(\alpha e^{T\lambda_i} + 1\right)\right]^2} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{\alpha^2 b_i^2}{\left[\alpha\left(1 + \frac{1}{\alpha} e^{-T\lambda_i}\right)\right]^2} \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \alpha^2 b_i^2 e^{2T\lambda_i} + \sum_{i=N+1}^{\infty} b_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \alpha^2 b_i^2 e^{2T\lambda i} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \alpha^2 \sum_{i=1}^{N} b_i^2 e^{2T\lambda_i} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Il suffit de prendre α telle que :

$$\alpha^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \left(\sum_{i=1}^{N} b_i^2 e^{2T\lambda_i} \right)^{-1}.$$

Donc on obtient :

$$\|u_\alpha(T) - f\|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ce qui termine la démonstration . ■

Théorème 2.2.4 : *Pour tout f dans H, $(F.V.P)$ a une solution si et seulement si $u_\alpha(0)$ converge dans H. De plus, $u_\alpha(t)$ converge vers $u(t)$ quand α tend vers* zéro *uniformément en t, pour tout $t \in [0, T]$.*

Pour la preuve voir [3] .

2.4.2 Estimation de l'érreur

Théorème 2.2.5 : *Si $f = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \varphi_i$ est dans H, et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 e^{\varepsilon T \lambda_i}$ converge, alors $\|u_\alpha(T) - f\|$ converge vers* zéro *avec l'ordre $\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2}$.*

Preuve : On suivant l'article [3] , soit $\varepsilon \in]0, 2[$ tel que $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 e^{\varepsilon \lambda_i T}$ soit convergente, et soit $k \in]0, 2[$.

On fixe un naturel n et on définit :

$$h_n(\alpha) = \frac{\alpha^k}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2}.$$

La dérivée de $h_n(\alpha)$ par rapport à α est donnée par :

$$\begin{aligned}
h_n'(\alpha) &= \frac{k\alpha^{k-1}\left(\alpha+e^{-\lambda_n T}\right)^2-\left(2\alpha+2e^{-\lambda_n T}\right)\alpha^k}{\left(\alpha+e^{-\lambda_n T}\right)^4} \\
&= \frac{\left[k\alpha^{k-1}\left(\alpha+e^{-\lambda_n T}\right)-2\alpha^k\right]\left(\alpha+e^{-\lambda_n T}\right)}{\left(\alpha+e^{-\lambda_n T}\right)^4} \\
&= \frac{\left[k\alpha^{k-1}\left(\alpha+e^{-\lambda_n T}\right)-2\alpha^k\right]\left(\alpha+e^{-\lambda_n T}\right)}{\left(\alpha+e^{-\lambda_n T}\right)^4} \\
&= \alpha^{k-1}\frac{(k-2)\,\alpha+ke^{-\lambda_n T}}{\left(\alpha+e^{-\lambda_n T}\right)^3}.
\end{aligned}$$

D'où

$h_n'(\alpha)=0$ pour $\alpha=0$ ou $\alpha_0=\frac{ke^{-\lambda_n T}}{2-k}$.

puisque $h_n(\alpha)>0$, $h_n(0)=0$ et $\lim\limits_{\alpha\to\infty} h_n(\alpha)=0$ donc α_0 est la valeur pour la quelle h_n atteint son maximum, d'où on a l'inégalité :

$$h_n(\alpha)\leq\left(\frac{k}{2-k}\right)^k\frac{e^{-k\lambda_n T}}{\left(\alpha_0+e^{-\lambda_n T}\right)^2} \tag{2.15}$$

Maintenant, on calcule :

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(T)-f\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\alpha^2\left(\alpha+e^{-\lambda_n T}\right)^{-2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\alpha^{2-k}\alpha^k\left(\alpha+e^{-\lambda_n T}\right)^{-2} \\
&= \alpha^{2-k}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 h_n(\alpha).
\end{aligned}$$

D'aprés (2.15) :

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(T)-f\|^2 &\leq \alpha^{2-k}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{-k\lambda_n T}\left(\alpha_0+e^{-\lambda_n T}\right)^{-2} \\
&\leq \alpha^{2-k}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\left(\frac{k}{2-k}\right)^k\frac{e^{-k\lambda_n T}}{\left(\alpha_0^2+2\alpha_0e^{-\lambda_n T}+e^{-2\lambda_n T}\right)},
\end{aligned}$$

on éstime$\left(\alpha_0 + e^{-\lambda_n T}\right)^{-2}$par $e^{2\lambda_n T}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\|u_\alpha(T) - f\|^2 &\leq \alpha^{2-k}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\left(\frac{k}{2-k}\right)^k \frac{e^{-k\lambda_n T}}{e^{-2\lambda_n T}\left(e^{2\lambda_n T}\alpha_0^2 + 2\alpha_0 e^{\lambda_n T} + 1\right)} \\ &\leq \alpha^{2-k}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{(2-k)\lambda_n T},\end{aligned}$$

si on choisit $k = 2 - \varepsilon$ donc $\varepsilon = 2 - k$ on obtient :

$$\begin{aligned}\|u_\alpha(T) - f\|^2 &\leq \alpha^\varepsilon\left(\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{2-\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon\lambda_n T} b_n^2 \\ &\leq \alpha^\varepsilon\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2\left(\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{-\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon\lambda_n T} b_n^2 \\ &= \alpha^\varepsilon\varepsilon^{-2}4\left(\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)^{\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon\lambda_n T} b_n^2 \\ &= c\alpha^\varepsilon\varepsilon^{-2}.\end{aligned}$$

Où $c = 4\left(\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)^\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon\lambda_n}\ b_n^2$.

Donc

$\|u_\alpha(T) - f\|$ *converge vers zéro avec l'ordre* $\alpha^\varepsilon\varepsilon^{-2}$. ■

Corollaire 2.2.1 : *Si* $f = \sum_{i=1}^{\infty} b_i\ \varphi_i$ *est dans* H, *et s'il existe un* $\varepsilon > 0$ *tel que* $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2\ e^{(2+\varepsilon)\lambda_i T}$ *converge, alors* $\|u_\alpha(t) - u(t)\|$*converge vers zéro uniformément en* t, *pour tout* $t \in [0, T]$ *avec l'ordre* $\alpha^\varepsilon\ \varepsilon^{-2}$.

Preuve : On a d'aprés le Théorème 2.2.5

$$h_n(\alpha) = \frac{\alpha^k}{\left(\alpha + e^{-\lambda_n T}\right)^2},$$

donc :

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(0)-u(0)\|^2 &= \alpha^{2-k}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 h_n(\alpha) e^{2T\lambda_n}\\
&= \alpha^{2-k}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \frac{\alpha^k}{\left(\alpha+e^{-\lambda_n T}\right)^2} e^{2T\lambda_n}\\
&\leq \alpha^{2-k}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \alpha_0^k \left(\alpha_0+e^{-\lambda_n T}\right)^{-2} e^{2T\lambda_n}\\
&\leq \alpha^{2-k}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \left(\frac{k}{2-k}\right)^k \left(\alpha_0+e^{-\lambda_n T}\right)^{-2} e^{2T\lambda_n} e^{-k\lambda_n T}\\
&\leq \alpha^{2-K}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \left(\frac{k}{2-k}\right)^k \frac{e^{2T\lambda_n}\ e^{-k\lambda_n T}}{\left(\alpha_0^2+2\alpha_0 e^{-\lambda_n T}+e^{-2\lambda_n T}\right)}.
\end{aligned}$$

On éstime $\left(\alpha_0^2+2\alpha_0 e^{-\lambda_n T}+e^{-2\lambda_n T}\right)$ par $e^{-2\lambda_n T}$ on trouve :

$$\|u_\alpha(0)-u(0)\|^2 \leq \alpha^{2-k}\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{(4-k)\lambda_n T}$$

si on choisit $k=2-\varepsilon$ on trouve :

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(0)-u(0)\| &\leq \alpha^\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \left(\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{2-\varepsilon} e^{(2+\varepsilon)T\lambda_n}\\
&\leq \alpha^\varepsilon \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 \left(\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)^\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 e^{(2+\varepsilon)T\lambda_n}\\
&= 4\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2} \left(\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)^\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 e^{(2+\varepsilon)T\lambda_n}\\
&= c\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2}.
\end{aligned}$$

Où

$$c = 4\left(\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)^\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 e^{(2+\varepsilon)T\lambda_n}.$$

Donc $\|u_\alpha(t)-u(t)\|$ *converge vers zéro uniformément en* t, *pour tout* $t \in [0,T]$ *avec l'ordre* $\alpha^\varepsilon\ \varepsilon^{-2}$. ■

2.5 Etude du problème mal posé à coefficient opératoriel négatif

Dans cette section, supposons que H est un espace de Hilbert séparable, et soit A génèrateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction et que zéro est dans l'ensemble résolvent de A.

Dans cette partie on étudie le problème$(I.V.P)$ mal posé suivant :

$$\begin{cases} u'(t) + A\ u(t) = 0, & 0 < t < T \\ u(0) = f, & \end{cases} \qquad (I.V.P) \qquad (2.16)$$

avec un coefficient opératoriel A auto-adjoint négatif dans un espace de Hilbert H.

Supposons que A admet une base orthonormale des vecteurs propres $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ dans H associés aux valeurs propres $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ telles que

$\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = -\infty < ..... < \lambda_2 < \lambda_1 < 0.$

Nous utilisons la méthode de quasi-valeurs aux limites, on perturbe la condition initiale dans le problème $(I.V.P)$ on obtient le problème approximatif non local dépendant d'un petit paramètre $\alpha > 0$ suivant :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & 0 < t < T \\ \alpha u(T) + u(0) = f\ . & \end{cases} \qquad (Q.B.V.P) \qquad (2.17)$$

On pose $M(t) = e^{tA}$, $M(T) = e^{TA}$ et $S(t) = e^{-tA}$on obtient :

$$u(0) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i \qquad (2.18)$$

$$M(T)u = \sum_{i=1}^{\infty} e^{T\lambda_i} a_i \, \varphi_i, \tag{2.19}$$

et

$$(M(T)u, u) = \sum_{i=1}^{\infty} \; e^{T\lambda_i} \, a_i^2 \geq 0 \; . \tag{2.20}$$

D'où nous obtenons :

$$\left\| (\alpha I + S(T))^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\alpha}. \tag{2.21}$$

Il est utile de savoir exactement quand $(I.V.P)$ a une solution.

Le lemme suivant répond à cette question.

Lemme 2.3.1 : *Si* $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \, \varphi_i$, *et* $u(T) \in D(A)$ *alors* $(I.V.P)$ *a une solution si est seulement si* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \; e^{-2T\lambda_i}$ converge.

Preuve :

- On suppose que

$$\begin{aligned} u(t) &= S(t)u(0) \\ &= e^{-At}u(0) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\lambda_i} a_i \, \varphi_i \end{aligned}$$

solution de $(I.V.P)$ existe, et montrons que $\sum_{i=1}^{\infty} e^{-2T\lambda_i} a_i^2$ converge.

Comme $u(0) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i \in H$, et

$$\begin{aligned} u(T) &= S(T)u(0) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-T\lambda_i} a_i \, \varphi_i \; . \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\|u(T)\|^2 &= \left\|\sum_{i=1}^{\infty} e^{-T\lambda_i} a_i\, \varphi_i\right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-2T\lambda_i} a_i^2 .\end{aligned}$$

Et comme $u(T) \in H$, donc on a $\sum_{i=1}^{\infty} e^{-2T\lambda_i} a_i^2$ converge.

- Inversement, supposons que $\sum_{i=1}^{\infty} e^{-2T\lambda_i} a_i^2$ converge, et montrons que

$u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\lambda_i} a_i\, \varphi_i$ est une solution de $(I.V.P)$.

$u(0) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i = f$.

$u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\lambda_i} a_i\, \varphi_i$.

On suppose que $\sum_{i=1}^{\infty} e^{-2T\lambda_i} a_i^2$ converge, et montrons que $u(t)$ est bien définie.

$$\begin{aligned}\|u(t)\|^2 &= \left\|\sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\lambda_i} a_i\, \varphi_i\right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-2t\lambda_i} a_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} e^{-2T\lambda_i} a_i^2 \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Donc $u(t)$ est bien définie.

Soit $u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\lambda_i} a_i\, \varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(t)$.

Maintenant, on montre que $\sum_{i=1}^{\infty} v_i'(t)$ converge.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} v_i'(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(e^{-t\lambda_i} a_i\, \varphi_i\right)' \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} -\lambda_i e^{-t\lambda_i} a_i\, \varphi_i .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{\infty} v_i'(t)\right\|^2 &= \left\|\sum_{i=1}^{\infty} -\lambda_i e^{-t\lambda_i} a_i\, \varphi_i\right\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 e^{-2t\lambda_i} a_i^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 e^{-2T\lambda_i} a_i^2 \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Donc $\sum_{i=1}^{\infty} v_i'\,(t)$ converge uniformément, et par suite :

$$\begin{aligned}
u'(t) &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\lambda_i} a_i\, \varphi_i\right)' \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} -\lambda_i e^{-t\lambda_i} a_i\, \varphi_i.
\end{aligned}$$

Et comme $u(t) \in D(A)$, $\forall\ 0 < t < T$, et

$$\begin{aligned}
u'(t) + Au(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} -\lambda_i e^{-t\lambda_i} a_i\, \varphi_i + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e^{-t\lambda_i} a_i\, \varphi_i \\
&= 0,
\end{aligned}$$

avec $u(0) = f$

Donc :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & 0 < t < T \\ u(0) = f\ . \end{cases}$$

Et par suite $u(t)$ est une solution du $(I.V.P)$.

Soit le problème $(Q.B.V.P)$ à coefficient opératoriel A négatif :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & 0 < t < T \\ \alpha u(T) + u(0) = f \end{cases} \qquad (Q.B.V.P) \qquad (2.22)$$

Donc le problème suivant :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & 0 < t < T \\ u(T) = (\alpha I + e^{AT})^{-1} f\ . \end{cases}$$

est bien posé. $\blacksquare$

Définition 2.3.1 :*On définit*

$$\begin{aligned} u_\alpha(t) &= M(T-t)u_\alpha(T) \qquad (2.23) \\ &= e^{(T-t)A}\left(\alpha I + e^{AT}\right)^{-1} f \text{ , pour } f \in H;\ \alpha > 0 \text{ et } t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Théorème 2.3.1 : *La fonction $u_\alpha(t)$ est la solution unique du problème $(Q.B.V.P)$, et elle dépend continûment sur f.*

Preuve : Il est facile de voir que $u_\alpha(t)$ est une solution classique de l'equation différentielle donnée, en autre :

$$\begin{aligned} u_\alpha(0) + \alpha u_\alpha(T) &= e^{AT}\left(\alpha I + e^{AT}\right)^{-1} f + \alpha\left(\alpha I + e^{AT}\right)^{-1} f \\ &= \left(\alpha I + e^{AT}\right)\left(\alpha I + e^{AT}\right)^{-1} f \\ &= f, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\left\| M(T-t)\left(\alpha I + M(T)\right)^{-1} f_1 - M(T-t)\left(\alpha I + M(T)\right)^{-1} f_2 \right\| = \\ &\qquad \left\| e^{(T-t)A}\left(\alpha I + e^{AT}\right)^{-1} f_1 - e^{(T-t)A}\left(\alpha I + e^{AT}\right)^{-1} f_2 \right\| = \\ &\qquad\qquad \left\| e^{(T-t)A}\left(\alpha I + e^{AT}\right)^{-1}(f_1 - f_2) \right\| \leq \frac{1}{\alpha}\|f_1 - f_2\|, \end{aligned}$$

L'unicité décole du fait que toute solution v doit satisfaire $v(0) = e^{TA}\left(\alpha I + e^{AT}\right)^{-1} f$ et de l'unicité de la solution du problème direct de Cauchy.

Nous faisons deux observations qui seront utiles plus tard.

Premièrement, de ce qui précede, il est claire que $\|u_\alpha(t)\| \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|$.

Deuxièment, si $u(0) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\ \varphi_i$, alors :

$$\left(\alpha I + M(T)\right) u = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\alpha I + e^{AT}\right) a_i \varphi_i,$$

et

$$(\alpha I + M(T))^{-1} u = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{(\alpha I + e^{AT})} \varphi_i.$$

■

Théorème 2.3.2. : *Pour tout $f \in H, \alpha > 0$ et $t \in [0, T]$ nous avons :*

$$\|u_\alpha(t)\| \leq \alpha^{\frac{-t}{T}} \|f\|. \tag{2.24}$$

Preuve : Si $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \ \varphi_i$, ona :

$$\begin{aligned} u_\alpha(t) &= M(T-t) \left(\alpha I + e^{AT}\right)^{-1} f \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} e^{(T-t)\lambda} \left(\alpha I + e^{\lambda T}\right)^{-1} a_i \varphi_i, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(t)\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} e^{(T-t)\lambda} \left(\alpha I + e^{\lambda T}\right)^{-1} a_i \varphi_i \right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} e^{2(T-t)\lambda} \left(\alpha I + e^{\lambda T}\right)^{-2} a_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \ e^{2(T-t)\lambda} \left[\left(\alpha I + e^{\lambda T}\right)^{\frac{T-t}{T}} \left(\alpha I + e^{\lambda T}\right)^{1-\frac{T-t}{T}} \right]^{-2} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{2(T-t)\lambda}}{\left[\left(\alpha I + e^{\lambda T}\right)^{\frac{T-t}{T}} \left(\alpha I + e^{\lambda T}\right)^{1-\frac{T-t}{T}} \right]^2} \ a_i^2. \end{aligned}$$

On fait l'éstimation de $\left(\alpha I + e^{\lambda T}\right)^{\frac{T-t}{T}}$ par $e^{\lambda(T-t)}$ et $\left(\alpha I + e^{\lambda T}\right)^{1-\frac{T-t}{T}}$ par $\alpha^{1-\frac{T-t}{T}}$ on trouve :

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(t)\|^2 &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{2(T-t)\lambda}}{e^{2\lambda(T-t)} \left(\alpha^{1-\frac{T-t}{T}}\right)^2} \ a_i^2 \\ &\leq \left(\alpha^{\frac{-t}{T}}\right)^2 \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2. \end{aligned}$$

Donc :

$\|u_\alpha(t)\| \leq \alpha^{\frac{-t}{T}} \|f\|$. ■

2.5.1 Convergence de la solution régularisée

Théorème 2.3.3 : *Pour tout f dans H, $\|u_\alpha(0) - f\|$ tend vers* zéro *quand α tend vers* zéro. *C'est -à -dire $u_\alpha(0)$ converge vers f dans H.*

Preuve : Si $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \, \varphi_i$, alors :

$$\begin{aligned} u_\alpha(0) - f &= e^{AT}\left(\alpha I + e^{AT}\right)^{-1} f - f \\ &= \frac{e^{AT}}{\alpha I + e^{AT}} f - \frac{\alpha I + e^{AT}}{\alpha I + e^{AT}} f \\ &= \frac{-\alpha}{\alpha I + e^{AT}} f \\ &= -\alpha\left(\alpha I + e^{AT}\right)^{-1} f. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(0) - f\|^2 &= \left\|-\alpha\left(\alpha I + e^{AT}\right)^{-1} f\right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^2 a_i^2 \left(\alpha I + e^{\lambda_i T}\right)^{-2}. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme la série $\sum_{i=N+1}^{\infty} a_i^2$ converge, alors on choisit $N > 0$ tel que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \frac{\varepsilon}{2}$, d'ou on a :

$$\|u_\alpha(0) - f\|^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha^2 a_i^2}{\left(\alpha I + e^{\lambda_i T}\right)^2} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{\alpha^2 a_i^2}{\left(\alpha I + e^{\lambda_i T}\right)^2}.$$

On éstime $\left(\alpha I + e^{AT}\right)^2$ respéctivement par $e^{2\lambda T}$ et par α^{-2} on trouve :

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(0) - f\|^2 &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha^2 a_i^2}{\left[e^{T\lambda_i}\left(\alpha e^{-T\lambda_i} + 1\right)\right]^2} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{\alpha^2 a_i^2}{\left[\alpha\left(1 + \frac{1}{\alpha} e^{T\lambda_i}\right)\right]^2} \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \alpha^2 a_i^2 e^{-2\lambda_i T} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Il suffit de prendre α telle que :

$$\alpha^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^2 e^{-2\lambda_i T}\right)^{-1}.$$

Donc on obtient :

$$\|u_\alpha(0)-f\|^2 \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

■

Théorème 2.3.4 : *Pour tout f dans H, $(I.V.P)$ a une solution si et seulement si la suite $u_\alpha(T)$ converge dans H. De plus, nous avons $u_\alpha(t)$ converge vers $u(t)$ quand α tend vers* zéro *uniformément en t*, pour tout $t\in[0,T]$.

Preuve : Supposons que $\lim\limits_{\alpha\to 0} u_\alpha(T)=u(T)$ existe, soit

$$\begin{aligned} u(t) &= S(t)u(0)\\ &= e^{A(T-t)}e^{-AT}u(o)\\ &= M(T-t)u(T), \end{aligned}$$

et $\lim\limits_{\alpha\to 0} u_\alpha(0)=f$

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\to 0}\|u(t)-u_\alpha(t)\| &= \lim_{\alpha\to 0}\|M(T-t)u(T)-M(T-t)u_\alpha(T)\|\\ &= \lim_{\alpha\to 0}\|M(T-t)\left(u(T)-u_\alpha(T)\right)\|\\ &\le \lim_{\alpha\to 0}\ \|u(T)-u_\alpha(T)\|=0. \end{aligned}$$

Ainsi $u(0)=f$ et $u(t)=M(T-t)u(T)$ résout $(I.V.P)$. Nous voyons aussi que $u_\alpha(t)$ converge vers $u(t)$ uniformément en t, pour tout $t\in[0,T]$.

Maintenant, supposons que $u(t)$ est solution de $(I.V.P)$. Soit $\varepsilon>0$, et

$f=\sum_{i=1}^{\infty} a_i\ \varphi_i$.

D'aprés Lemme 2.3.1 : $\|u(T)\|^2=\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 e^{-2T\lambda_i}$.

On choisit N de sorte que $\sum_{i=N+1}^{\infty} a_i^2 e^{-2T\lambda_i}<\frac{\varepsilon}{2}$.

Soient $\alpha, \gamma > 0$, alors :

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(t) - u_\gamma(t)\|^2 &\leq \|u_\alpha(T) - u_\gamma(T)\|^2 = \left\|(\alpha I + M(T))^{-1} f - (\gamma I + M(T))^{-1} f\right\|^2 \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha + e^{\lambda_i T}} - \frac{1}{\gamma + e^{\lambda_i T}}\right] a_i \varphi_i\right\|^2 \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\gamma + e^{\lambda_i T} - \alpha - e^{\lambda_i T}}{\left(\alpha + e^{\lambda_i T}\right)\left(\gamma + e^{\lambda_i T}\right)} a_i \varphi_i\right\|^2 \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{\infty}(\gamma - \alpha)\left(\alpha\gamma + (\alpha + \gamma)\, e^{\lambda_i T} + e^{2\lambda_i T}\right)^{-1} a_i \varphi_i\right\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}(\gamma - \alpha)^2\left(\alpha\gamma + (\alpha + \gamma)\, e^{\lambda_i T} + e^{2\lambda_i T}\right)^{-2} a_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N}(\gamma - \alpha)^2\left(\alpha\gamma + (\alpha + \gamma)\, e^{\lambda_i T} + e^{2\lambda_i T}\right)^{-2} a_i^2 \\
&\quad + \sum_{i=N+1}^{\infty}(\gamma - \alpha)^2\left(\alpha\gamma + (\alpha + \gamma)\, e^{\lambda_i T} + e^{2\lambda_i T}\right)^{-2} a_i^2 .
\end{aligned}$$

On éstime $\left(\alpha\gamma + (\alpha + \gamma)\, e^{\lambda_i T} + e^{2\lambda_i T}\right)^{-2}$ par $e^{2\lambda T}$ et respéctivement par $(\alpha + \gamma)\, e^{\lambda T}$on obtient :

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(t) - u_\gamma(t)\|^2 &\leq \|u_\alpha(T) - u_\gamma(T)\|^2 = \sum_{i=1}^{N}(\gamma - \alpha)^2 a_i^2\left[e^{2\lambda_i T}\left(\alpha\gamma e^{-2\lambda_i T} + (\alpha + \gamma)\, e^{-\lambda_i T} + 1\right)\right]^{-2} \\
&\quad + \sum_{i=N+1}^{\infty}(\gamma - \alpha)^2 a_i^2\left[(\alpha + \gamma)\, e^{\lambda_i T}\left(\frac{\alpha\gamma}{\alpha + \gamma} e^{-\lambda_i T} + 1 + e^{\lambda_i T}\right)\right]^{-2} \\
&\leq \sum_{i=1}^{N}(\gamma - \alpha)^2 e^{-4\lambda_i T} a_i^2 + \sum_{i=N}^{\infty}\left(\frac{\gamma - \alpha}{\alpha + \gamma}\right)^2 a_i^2 e^{-2\lambda_i T}.
\end{aligned}$$

Maintenant, si nous choisissons $\delta > 0$ tel que :

$$\delta^2 < \frac{\varepsilon}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} e^{-4\lambda_i T} a_i^2\right)^{-1}.$$

et exigons que α et γ soient inférieurs à δ on obtient :

$$\|u_\alpha(T) - u_\gamma(T)\|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Donc $\{u_\alpha(T)\}$ est de Cauchy converge, et par suite $u_\alpha(t)$ converge vers $u(t)$ uniformement en t, pour tout $t \in [0,T]$. $\blacksquare$

2.5.2 Estimation de l'erreur

Théorème 2.3.5 : *Si* $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \; \varphi_i$ *est dans* H*, et s'il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 e^{-\varepsilon T \lambda_i}$ *converge, alors* $\|u_\alpha(0) - f\|_H$ *converge vers* zéro *quand* α *tend vers* zéro *avec l'ordre* $\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2}$.

Preuve : Soit $\varepsilon \in \left]0,2\right[$ tel que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 e^{-\varepsilon \lambda_i T}$soit convergente, et $k \in \left]0,2\right[$.

On fixe un naturel n et on définit :

$$h_n(\alpha) = \frac{\alpha^k}{\left(\alpha + e^{\lambda_n T}\right)^2}.$$

La dérivée de $h_n(\alpha)$ par rapport à α est donnée par :

$$h_n'(\alpha) = \alpha^{k-1} \frac{(k-2)\,\alpha + k e^{\lambda_n T}}{\left(\alpha + e^{\lambda_n T}\right)^3}.$$

D'où $h_n'(\alpha) = 0$ pour $\alpha = 0$ ou $\alpha_0 = \frac{k e^{\lambda_n T}}{2-k}$.

Puisque $h_n(\alpha) > 0$, $h_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{\alpha \to \infty} h_n(\alpha) = 0$ on conclu que α_0 est la valeur pour la quelle h_n atteint son maximum, d'où l'inégalité :

$$h_n(\alpha) \leq \left(\frac{k}{2-k}\right)^k \frac{e^{k\lambda_n T}}{\left(\alpha_0 + e^{\lambda_n T}\right)^2}. \tag{2.25}$$

Maintenant, on calcule :

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(0)-f\|^2 &= \left\|-\alpha\left(\alpha I+e^{AT}\right)^{-1} f\right\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2 a_n^2 \left(\alpha+e^{\lambda_n T}\right)^{-2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \alpha^{2-k}\alpha^k \left(\alpha+e^{\lambda_n T}\right)^{-2} \\
&= \alpha^{2-k}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\ h_n(\alpha).
\end{aligned}$$

D'aprés (2.25) :

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(0)-f\|^2 &\le \alpha^{2-k}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{k\lambda_n T}\left(\alpha_0+e^{\lambda_n T}\right)^{-2} \\
&\le \alpha^{2-k}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left(\frac{k}{2-k}\right)^k \frac{e^{k\lambda_n T}}{e^{2\lambda_n T}\left(e^{-2\lambda_n T}\alpha_0^2+2\alpha_0 e^{-\lambda_n T}+1\right)}.
\end{aligned}$$

On éstime $\left(\alpha_0+e^{\lambda_n T}\right)^{-2}$par $e^{2\lambda_n T}$, on obtient :

$$\|u_\alpha(0)-f\|^2 \le \alpha^{2-k}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{(k-2)\lambda_n T},$$

si on choisit $k=2-\varepsilon$ alors : $\varepsilon=2-k$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(0)-f\|^2 &\le \alpha^{\varepsilon}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2\left(\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{-\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon\lambda_n T}a_n^2 \\
&= \alpha^{\varepsilon}\varepsilon^{-2}4\left(\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)^{\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon\lambda_n T}a_n^2. \\
&= c\alpha^{\varepsilon}\varepsilon^{-2},
\end{aligned}$$

où

$$c=4\left(\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)^{\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon\lambda_n T}a_n^2.$$

■

Corollaire 2.3.1 : *Si* $f=\sum_{i=1}^{\infty} a_i\ \varphi_i$ *est en* H*, s'il existe* $\varepsilon>0$ *tel que* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 e^{-(2+\varepsilon)T\lambda_i}$ *converge, alors* $\|u_\alpha(t)-u(t)\|$ *converge vers* zéro *avec* *l'ordre* $\alpha^{\varepsilon}\varepsilon^{-2}$*uniformement en* t, pour tout $t \in [0, T]$.

Preuve :

On suppose que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 e^{-(2+\varepsilon)T\lambda_i}$ converge, et on montre que $\|u_\alpha(t) - u(t)\|$ converge vers zéro avec l'ordre $\alpha^{\varepsilon}\varepsilon^{-2}$uniformément en t, pour tout $t \in [0, T]$.

On a :

$$\begin{aligned}
u_\alpha(T) - u(T) &= \left(\alpha I + e^{AT}\right)^{-1} f - e^{-AT} f \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\alpha e^{-\lambda_n T}}{(\alpha I + e^{\lambda_n T})} \; a_n \varphi_n.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(T) - u(T)\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 e^{-2\lambda_n T}}{(\alpha I + e^{\lambda_n T})^2} \; a_n^2 \\
&= \alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{(\alpha I + e^{\lambda_n T})^2} \; e^{-2\lambda_n T} \; a_n^2 \\
&= \alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \; h_n(\alpha) e^{-2\lambda_n T} \\
&= \alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \; \frac{\alpha^k}{(\alpha + e^{\lambda_n T})^2} \; e^{-2\lambda_n T} \\
&\leq \alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \; \alpha_0^k \; \left(\alpha_0 + e^{\lambda_n T}\right)^{-2} \; e^{-2\lambda_n T} \\
&\leq \alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \; \left(\frac{k}{2-k}\right)^k \; \left(\alpha_0 + e^{\lambda_n T}\right)^{-2} \; e^{-2\lambda_n T} \; e^{k\lambda_n T} \\
&\leq \alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \; \left(\frac{k}{2-k}\right)^k \; \frac{e^{-2\lambda_n T} \; e^{k\lambda_n T}}{\left(\alpha_0^2 + 2\alpha_0 e^{\lambda_n T} + e^{2\lambda_n T}\right)}.
\end{aligned}$$

On éstime $\left(\alpha_0^2 + 2\alpha_0 e^{\lambda_n T} + e^{2\lambda_n T}\right)$ par $e^{2\lambda_n T}$ on trouve :

$$\|u_\alpha(T) - u(T)\|^2 \leq \alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \; \left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{-4\lambda_n T} \; e^{k\lambda_n T}.$$

Si on choisit $k = 2 - \varepsilon$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(T) - u(T)\|^2 &\leq \alpha^\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \ a_n^2 \ \left(\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{2-\varepsilon} e^{-(2+\varepsilon)\lambda_n T} \\
&\leq \alpha^\varepsilon \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 \ \left(\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{-\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \ a_n^2 \ e^{-(2+\varepsilon)\lambda_n T} \\
&= 4\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2} \left(\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)^{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \ a_n^2 \ e^{-(2+\varepsilon)\lambda_n T} \\
&= c\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2},
\end{aligned}$$

où

$c = 4\left(\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)^{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \ a_n^2 \ e^{-(2+\varepsilon)\lambda_n T}$. ■

Chapitre 3

Etude du probléme mal posé (cas continu)

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudie le problème mal posé dans le cas continu, nous utilisons la notion de mésure spéctrale et de représentation spéctrale pour étudier une version spéciale du problème à valeur initiale stochastique $(S.I.V.P)$ de la forme :

$$u'(t) = -Au(t) + BW(t), \qquad 0 < t < T \tag{3.1}$$

$$u(0) = f \ , \tag{3.2}$$

pour une certaine valeur initiale préscrite f dans un espace de Hilbert H, et A est un opérateur auto-adjoint négatif tel que $0 \in \rho(A)$, avec W processus de bruit blanc à valeurs dans H_1 et B est dans $L(H_1, H)$, principalement l'opérateur B consideré ici est nul, connu sous le nom de $(I.V.P)$, ce problème est mal posé.

Nous notons que ce type de problème a été considéré par plusieurs auteurs, en utilisant différentes approches.

Lattes et Lions (1967), ont approché le problème par une perturbation de l'opérateur A.

Dans Clark et Oppenheimer (1994), et Showalter (1983) un problème similaire a été traité d'une façons différente, ils remplaçaient la condition de la valeur finale $u(T) = g$ par la perturbation :

$$u(T) + \alpha u(0) = g \; . \tag{3.3}$$

Aussi, nous devons mentionner que la condition non standard de la forme (3.3) a été utilisée dans certains articles récents voir par exemple Ames, Payne et Schaefer 2004, Denche et Djezzar 2006.

Dans cette étude nous perturbons la condition initiale (3.2) pour obtenir un problème approximatif non local dépendand d'un petit paramétre α, c'est-à-dire au lieu de (3.2), on considère la condition pertutbée :

$$u(0) + \alpha u(T) = f \tag{3.4}$$

3.2 Etude du problème mal posé à coefficient opératoriel négatif

Dans cette section, nous utilisons la notion de mésure spéctrale et de représentation spéctrale pour étudier une version spéciale du problème à valeur initiale stochastique (c'est-à-dire $B = 0$) $(S.I.V.P)$ de la forme :

$$u'(t) = -Au(t), \qquad 0 < t < T \tag{3.5}$$

$$u(0) = f. \tag{3.6}$$

Définition 3.3.1 : *La fonction* $u : [0, T] \to H$ *est appelée une solution classique du problème* $(I.V.P)$ $(3.5), (3.6)$ (*respéctivement* $(Q.B.V.P)$ $(3.5), (3.4)$) *si* $u \in C([0, T]$ $, H), u(t) \in D(A)$ *pour tous les* $t \in]0, T[$ *et* u *vérifie l'équation* (3.5) *et la condition initiale* (3.6)(*respéctivement la condition* (3.4)).

Maintenant, soit $\{E_\lambda\}_{\lambda<0}$ *une mésure spéctrale associée à l'opérateur* A, *dans l'espace de Hilbert* H. *Pour tous les* $f \in H$, *on peut écrire :*

$$f = \int_{-\infty}^{0} dE_\lambda f. \tag{3.7}$$

Si le problème $(I.V.P)$ $(3.5), (3.6)$(*respéctivement* $(Q.B.V.P)(3.5), (3.4)$ *admet une solution* $u(t)$ (*respéctivement* $u_\alpha(t)$), *alors cet solution peut être représentée par :*

$$u(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda t} dE_\lambda f \ , \tag{3.8}$$

respéctivement,

$$u_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{\lambda(T-t)}}{\alpha + e^{\lambda T}} dE_\lambda f \ . \tag{3.9}$$

Définition 3.3.2 : *On définit* $u_\alpha(t) = M(T-t)\ u_\alpha(T)$.

$$\begin{aligned} u_\alpha(t) &= e^{(T-t)A}\left(\alpha I + e^{AT}\right)^{-1} f \\ &= e^{(T-t)A}\left(\alpha I + e^{AT}\right)^{-1} \int_{-\infty}^{0} dE_\lambda f \\ &= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{(T-t)\lambda}}{(\alpha I + e^{\lambda T})} dE_\lambda f. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Lemme 3.3.1 : Si $f = \int_{-\infty}^{0} dE_\lambda f$ et $u(T) \in D(A)$, alors $(I.V.P)$ a une solution si est seulement si $\int_{-\infty}^{0} e^{-2T\lambda} d \left\| E_\lambda f \right\|^2$ converge.

Preuve : On suppose que $u(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{-t\lambda} dE_\lambda f$ solution de $(I.V.P)$ existe et montrons que $\int_{-\infty}^{0} e^{-2T\lambda} d \left\| E_\lambda f \right\|^2$ converge.

Puisque $u(T) = \int_{-\infty}^{0} e^{-T\lambda} dE_\lambda f \in H$ donc on a :

$$\begin{aligned} \|u(T)\|^2 &= \left\| \int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda T} dE_\lambda f \right\|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{-2\lambda T} d \left\| E_\lambda f \right\|^2 \\ &< \infty, \end{aligned}$$

et par suite $\int_{-\infty}^{0} e^{-2T\lambda} d \left\| E_\lambda f \right\|^2$ converge.

- Inversement supposons que $\int_{-\infty}^{0} e^{-2T\lambda} d \left\| E_\lambda f \right\|^2$ converge et montrons que $u(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{-t\lambda} dE_\lambda f$ solution de $(I.V.P)$.

$$\begin{aligned} u(0) &= \int_{-\infty}^{0} dE_\lambda f \\ &= f. \end{aligned}$$

-Montrons que $u(t)$ est bien définie.

$$\begin{aligned}\|u(t)\|^2 &= \left\|\int_{-\infty}^{0} e^{-t\lambda} dE_\lambda f\right\|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{-2t\lambda} d\|E_\lambda f\|^2 \\ &\leq \int_{-\infty}^{0} e^{-2T\lambda} \|dE_\lambda f\|^2 \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Donc $u(t)$ est bien définie.

Posons $v(t) = e^{-t\lambda}$, donc on a :

$$\begin{aligned}u(t) &= \int_{-\infty}^{0} e^{-t\lambda} dE_\lambda f \\ &= \int_{-\infty}^{0} v(t) dE_\lambda f.\end{aligned}$$

Maintenant, on montre que $\int_{-\infty}^{0} v'(t) dE_\lambda f$ converge.

$$\begin{aligned}\left\|\int_{-\infty}^{0} v'(t)e^{-t\lambda} dE_\lambda f\right\|^2 &= \left\|\int_{-\infty}^{0} -\lambda e^{-t\lambda} dE_\lambda f\right\|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{0} \lambda^2 e^{-2t\lambda} d\|E_\lambda f\|^2 \\ &\leq \int_{-\infty}^{0} \lambda^2 e^{-2T\lambda} d\|E_\lambda f\|^2 \\ &= \|Au(T)\|^2 \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Donc

$\int_{-\infty}^{0} v'(t) dE_\lambda f$ converge uniformément, d'où :

$$\begin{aligned}u'(t) &= (\int_{-\infty}^{0} e^{-t\lambda} dE_\lambda f)' \\ &= \int_{-\infty}^{0} -\lambda e^{-t\lambda} dE_\lambda f.\end{aligned}$$

Et par suite, on peut montrer que $u(t)$ vérifie :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, \quad 0 < t < T \\ u(0) = f. \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} u'(t) + Au(t) &= \int_{-\infty}^{0} -\lambda e^{-t\lambda} dE_\lambda f + A \int_{-\infty}^{0} e^{-t\lambda} dE_\lambda f \\ &= \int_{-\infty}^{0} -\lambda e^{-t\lambda} dE_\lambda f + \int_{-\infty}^{0} \lambda e^{-t\lambda} dE_\lambda f \\ &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u(0) &= \int_{-\infty}^{0} e^{-0\lambda} dE_\lambda f \\ &= f. \end{aligned}$$

■

Théorème 3.3.1 : *La fonction $u_\alpha(t)$ est la solution unique de $(Q.B.V.P)$ et elle dépend continûment sur f.*

Preuve : Il est facile de voir que $u_\alpha(t)$ est une solution classique de l'équation differentielle donnée.

En outre :

$$\begin{aligned} u_\alpha(0) + \alpha u_\alpha(T) &= e^{TA} \left(\alpha I + e^{AT}\right)^{-1} f + \alpha \left(\alpha I + e^{AT}\right)^{-1} f \\ &= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{T\lambda}}{(\alpha I + e^{\lambda T})} dE_\lambda f \quad + \int_{-\infty}^{0} \frac{\alpha}{(\alpha I + e^{\lambda T})} dE_\lambda f \\ &= \int_{-\infty}^{0} \left(\alpha I + e^{\lambda T}\right) \left(\alpha I + e^{\lambda T}\right)^{-1} dE_\lambda f \\ &= \int_{-\infty}^{0} dE_\lambda f \\ &= f. \end{aligned}$$

Maintenant,

$$\left\|M(T-t)\left(\alpha I+M(T)\right)^{-1}f_1-M(T-t)\left(\alpha I+M(T)\right)^{-1}f_2\right\|=$$

$$\left\|e^{(T-t)A}\left(\alpha I+e^{AT}\right)^{-1}f_1-e^{(T-t)A}\left(\alpha I+e^{AT}\right)^{-1}f_2\right\|=$$

$$\left\|e^{(T-t)A}\left(\alpha I+e^{AT}\right)^{-1}(f_1-f_2)\right\|\leq\frac{1}{\alpha}\left\|f_1-f_2\right\|.$$

L'unicité découle du fait que toute solution v doit vérifie

$v(0)= \ e^{AT}\ \left(\alpha I+e^{AT}\right)^{-1}f=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{T\lambda}}{\left(\alpha I+e^{\lambda T}\right)}dE_\lambda f\ ,$

et de l'unicité de la solution du problème direct de Cauchy.

Nous faisons deux observations qui seront utiles plus tard.

Premièrement, de ce qui précède, il est claire que $\left\|u_\alpha(t)\right\|\leq\frac{1}{\alpha}\left\|f\right\|.$

Deuxièment, si $u=\int_{-\infty}^{0}dE_\lambda u$, alors :

$$\left(\alpha I+e^{AT}\right)u=\int_{-\infty}^{0}\left(\alpha I+e^{\lambda T}\right)\ dE_\lambda u,$$

et

$$\left(\alpha I+M(T)\right)^{-1}u=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\left(\alpha I+e^{\lambda T}\right)}dE_\lambda u.$$

■

Théorème 3.3.2 : *Pour tout $f\in H$, $\alpha>0$ et $t\in[0,T]$ nous avons l'éstimation suivante :*

$$\left\|u_\alpha(t)\right\|\leq\alpha^{\frac{-t}{T}}\left\|f\right\|. \tag{3.11}$$

Preuve : Si $f=\int_{-\infty}^{0}dE_\lambda f$ on a :

$$\begin{aligned}u_\alpha(t) &= M(T-t)\left(\alpha I+e^{AT}\right)^{-1}f\\ &= \int_{-\infty}^{0}e^{(T-t)\lambda}\left(\alpha I+e^{\lambda T}\right)^{-1}dE_\lambda f.\end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(t)\|^2 &= \left\| \int_{-\infty}^{0} e^{(T-t)\lambda} \left(\alpha I + e^{\lambda T}\right)^{-1} dE_\lambda f \right\|^2 \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{2(T-t)\lambda} \left(\alpha I + e^{\lambda T}\right)^{-2} d\|E_\lambda f\|^2 \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{2(T-t)\lambda} \left[\left(\alpha I + e^{\lambda T}\right)^{\frac{T-t}{T}} \left(\alpha I + e^{\lambda T}\right)^{1-\frac{T-t}{T}} \right]^{-2} d\|E_\lambda f\|^2 \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{2(T-t)\lambda}}{\left[\left(\alpha I + e^{\lambda T}\right)^{\frac{T-t}{T}} \left(\alpha I + e^{\lambda T}\right)^{1-\frac{T-t}{T}} \right]^{2}} d\|E_\lambda f\|^2 .
\end{aligned}$$

On fait l'éstimation de $\left(\alpha I + e^{\lambda T}\right)^{\frac{T-t}{T}}$ par $e^{\lambda(T-t)}$ et $\left(\alpha I + e^{\lambda T}\right)^{1-\frac{T-t}{T}}$ par $\alpha^{\frac{t}{T}}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(t)\|^2 &\leq \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{2(T-t)\lambda}}{e^{2(T-t)\lambda} \left(\alpha^{\frac{t}{T}}\right)^2} d\|E_\lambda f\|^2 \\
&\leq \left(\alpha^{\frac{t}{T}}\right)^{-2} \int_{-\infty}^{0} d\|E_\lambda f\|^2 .
\end{aligned}$$

Donc :

$$\|u_\alpha(t)\| \leq \alpha^{\frac{-t}{T}} \|f\|, \forall t \in [0, T] .$$

■

3.2.1 Convergence de la solution régularisée

Théorème 3.3.3 : *Pour tout f dans H, $\|u_\alpha(0) - f\|$ tend vers* zéro *quand α tend vers à* zéro, *c'est-à-dire $u_\alpha(0)$ converge vers f dans H.*

Preuve : Si $f = \int_{-\infty}^{0} dE_\lambda f$, alors :

$$\begin{aligned} u_\alpha(0) - f &= e^{AT} \quad \left(\alpha I + e^{AT}\right)^{-1} f - f \\ &= \frac{-\alpha}{\left(\alpha I + e^{AT}\right)} f \\ &= \int_{-\infty}^{0} \frac{-\alpha}{\left(\alpha I + e^{\lambda T}\right)} dE_\lambda f. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(0) - f\|^2 &= \left\| \int_{-\infty}^{0} \frac{-\alpha}{\left(\alpha I + e^{\lambda T}\right)} dE_\lambda f \right\|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{0} \frac{\alpha^2}{\left(\alpha I + e^{\lambda T}\right)^2} d\left\|E_\lambda f\right\|^2. \end{aligned}$$

Puisque $f = \int_{-\infty}^{0} dE_\lambda f \in H$, alors pour $\varepsilon > 0$ fixé, on peut choisit $N > 0$ tel que :

$$\int_{-\infty}^{-N} d\left\|E_\lambda f\right\|^2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\|u_\alpha(0) - f\|^2 = \alpha^2 \int_{-\infty}^{-N} \frac{1}{\left(\alpha I + e^{\lambda T}\right)^2} d\left\|E_\lambda f\right\|^2 + \alpha^2 \int_{-N}^{0} \frac{1}{\left(\alpha I + e^{\lambda T}\right)^2} d\left\|E_\lambda f\right\|^2.$$

On éstime $\left(\alpha I + e^{\lambda T}\right)^2$ respéctivement par α^2 et $e^{2\lambda T}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(0) - f\|^2 &\leq \int_{-\infty}^{-N} d\left\|E_\lambda f\right\|^2 + \alpha^2 \int_{-N}^{0} e^{-2\lambda T} d\left\|E_\lambda f\right\|^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \alpha^2 \int_{-N}^{0} e^{-2\lambda T} d\left\|E_\lambda f\right\|^2. \end{aligned}$$

Il suffit de prendre α telle que :

$$\alpha^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \left(\int_{-N}^{0} e^{-2\lambda T} d\left\|E_\lambda f\right\|^2 \right)^{-1}$$

On trouve :

$$\|u_\alpha(0) - f\|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Théorème 3.3.4 : *Pour tout f dans H, le problème $(I.V.P)$ a une solution si et seulement si la suite $u_\alpha(T)$ converge dans H. De plus, nous avons $u_\alpha(t)$ converge vers $u(t)$ quand α tend vers à* zéro *uniformément en t*, pour tout $t \in [0,T]$.

Preuve : Supposons que $\lim\limits_{\alpha\to 0} u_\alpha(T) = u(T)$ existe. Soit $u(t) = M(T-t)u(T)$, on sait que $\lim\limits_{\alpha\to 0} u_\alpha(0) = f$.

Et comme

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to 0} \|u(t) - u_\alpha(t)\| &= \lim_{\alpha\to 0} \|M(T-t)u(T) - M(T-t)u_\alpha(T)\| \\
&= \lim_{\alpha\to 0} \|M(T-t)(u(T) - u_\alpha(T))\| \\
&\leq \lim_{\alpha\to 0} \|u(T) - u_\alpha(T)\| = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi $u(0) = f$ et $u(t) = M(T-t)u(T)$ résout $(I.V.P)$. Nous voyons aussi que $u_\alpha(t)$ converge vers $u(t)$ uniformément en t, pour tout $t \in [0,T]$.

Maintenant, on suppose que $u(t)$ est la solution de $(I.V.P\ )$.

Soit $f = \int_{-\infty}^{0} dE_\lambda f$, $u(t) = \int_{-\infty}^{0} dE_\lambda u$ et $\alpha, \gamma > 0$, alors :

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(t) - u_\gamma(t)\|^2 &\leq \|u_\alpha(T) - u_\gamma(T)\|^2 = \left\|(\alpha I + M(T))^{-1} f - (\gamma I + M(T))^{-1} f\right\|^2 \\
&= \int_{-\infty}^{0} (\gamma-\alpha)^2 \left(\alpha\gamma + (\alpha+\gamma) e^{\lambda T} + e^{2\lambda T}\right)^{-2} d\|E_\lambda f\|^2 \\
&= \int_{-\infty}^{N} (\gamma-\alpha)^2 \left(\alpha\gamma + (\alpha+\gamma) e^{\lambda T} + e^{2\lambda T}\right)^{-2} d\|E_\lambda f\|^2 + \\
&\quad \int_{N}^{0} (\gamma-\alpha)^2 \left(\alpha\gamma + (\alpha+\gamma) e^{\lambda T} + e^{2\lambda T}\right)^{-2} d\|E_\lambda f\|^2.
\end{aligned}$$

On éstime par rapport à $e^{2\lambda T}$ et $(\alpha+\gamma) e^{\lambda T}$ on obtient :

$$\|u_\alpha(T) - u_\gamma(T)\|^2 \leq \int_{-\infty}^{N} \left(\frac{\gamma-\alpha}{\alpha+\gamma}\right)^2 e^{-2\lambda T} d\|E_\lambda f\|^2 + \int_{N}^{0} (\gamma-\alpha)^2 e^{-4\lambda T} d\|E_\lambda f\|^2.$$

On choisit $\delta > 0$ tel que :

$$\delta^2 < \frac{\varepsilon}{2} \left(\int_N^0 (\gamma - \alpha)^2 e^{-4\lambda T} d \left\| E_\lambda f \right\|^2 \right)^{-1}$$

et α et γ soient infèriure à δ, on obtient :

$$\left\| u_\alpha(t) - u_\gamma(t) \right\|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc $\{u_\alpha(T)\}$est de Cauchy et par suite elle converge, d'où $u_\alpha(t)$ converge vers $u(t)$ uniformément en t, pour tout $t \in [0, T]$. ■

3.2.2 Estimation de la solution régularisée

Théorème 3.3.5 : *Pour tout $f \in H$, les fonction u_α donnée par (3.9) sont des solutions classiques de $(Q.B.V.P)(3.5), (3.4)$ et on a l'estimation suivante :*

$$\left\| u_\alpha(t) \right\| \leq \frac{1}{\alpha} \left\| f \right\|, \qquad \forall t \in [0, T], \ \alpha > 0. \tag{3.12}$$

Preuve : Si nous supposons que la fonction u_α donnée dans (3.9) soit définit pour tous $t \in [0, T]$, alors on obtient :

$$u(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda t} dE_\lambda f$$

$$\begin{aligned} u(0) &= \int_{-\infty}^{0} dE_\lambda f \\ &= f. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| u_\alpha(t) \right\|^2 &= \left\| \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{\lambda(T-t)}}{\alpha + e^{\lambda T}} dE_\lambda f \right\|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{2\lambda(T-t)}}{(\alpha + e^{\lambda T})^2} d \left\| E_\lambda f \right\|^2. \end{aligned}$$

On fait l'éstimation de $(\alpha + e^{\lambda T})^2$par α^2, on obtient :

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(t)\|^2 &\leq \frac{1}{\alpha^2}\int_{-\infty}^{0} d\left\|E_\lambda f\ \right\|^2 \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2}\|f\|^2 \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Donc $u_\alpha(t)$ converge.

- On pose que $v(t) = \frac{e^{\lambda(T-t)}}{\alpha + e^{\lambda T}}$.

Donc :

$$\begin{aligned} u_\alpha(t) &= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{\lambda(T-t)}}{\alpha + e^{\lambda T}} dE_\lambda f \\ &= \int_{-\infty}^{0} v(t) dE_\lambda f. \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{0} v'(t) dE_\lambda f = \int_{-\infty}^{0} -\lambda \frac{e^{\lambda(T-t)}}{\alpha + e^{\lambda T}} dE_\lambda f\ .$$

$$\left\| \int_{-\infty}^{0} -\lambda \frac{e^{\lambda(T-t)}}{\alpha + e^{\lambda t}} dE_\lambda f \right\|^2 = \int_{-\infty}^{0} \lambda^2 \frac{e^{2\lambda(T-t)}}{(\alpha + e^{\lambda T})^2} d\left\|E_\lambda f\ \right\|^2.$$

On fait l'éstimation de $(\alpha + e^{\lambda T})^2$par α^2 on obtient :

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-\infty}^{0} -\lambda \frac{e^{\lambda(T-t)}}{\alpha + e^{\lambda T}} dE_\lambda f \right\|^2 &\leq \frac{1}{\alpha^2}\int_{-\infty}^{0} d\left\|E_\lambda f\ \right\|^2 \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2}\|f\|^2 \\ &< \infty, \end{aligned}$$

donc : $\int_{-\infty}^{0} -\lambda \frac{e^{\lambda(T-t)}}{\alpha + e^{\lambda T}} dE_\lambda f$ converge.

et comme

$$\begin{aligned} u'_\alpha(t) &= \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{\lambda(T-t)}}{\alpha + e^{\lambda T}} dE_\lambda f\ \right)' \\ &= \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{e^{\lambda(T-t)}}{\alpha + e^{\lambda T}}\right)' dE_\lambda f \\ &= \int_{-\infty}^{0} -\lambda \frac{e^{\lambda(T-t)}}{\alpha + e^{\lambda T}} dE_\lambda f\ . \end{aligned}$$

donc on obtient :

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) + Au_\alpha(t) = 0 \\ u(0) = f \quad . \end{cases}$$

2) puisque

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(t)\|^2 &= \left\| \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{\lambda(T-t)}}{\alpha + e^{\lambda T}} dE_\lambda f \quad \right\|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{2\lambda(T-t)}}{(\alpha + e^{\lambda T})^2} d \left\| E_\lambda f \quad \right\|^2 \\ &\leq \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(\alpha + e^{\lambda T})^2} d \left\| E_\lambda f \quad \right\|^2 . \end{aligned}$$

On fait l'éstimation de $(\alpha + e^{\lambda T})^2$ par α^2 on obtient :

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(t)\|^2 &\leq \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\alpha^2} d \left\| E_\lambda f \right\|^2 \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} \int_{-\infty}^{0} d \left\| E_\lambda f \right\|^2 . \end{aligned}$$

donc :

$$\|u_\alpha(t)\|^2 \leq \frac{1}{\alpha^2} \|f\|^2 ,$$

$$\|u_\alpha(t)\| \leq \frac{1}{\alpha} \|f\| .$$

■

3.2.3 Estimation de l'erreur

Théorème 3.3.6 : Si $f = \int_{-\infty}^{0} dE_\lambda f \in H$, et s'il existe $\varepsilon > 0$, tel que $\int_{-\infty}^{0} e^{-\varepsilon T \lambda} d \left\| E_\lambda f \right\|^2$ converge, alors $\|u_\alpha(0) - f\|$ converge vers zéro quant α tend vers zéro avec l'ordre $\alpha^\varepsilon \ \varepsilon^{-2}$.

Preuve : Soit $\varepsilon \in]0, 2[$ tel que $\int_{-\infty}^{0} e^{-\varepsilon T \lambda} d \left\| E_\lambda f \right\|^2$soit convergente, et soit $k \in]0, 2[$.

On définit :

$$h(\alpha) = \frac{\alpha^k}{(\alpha I + e^{\lambda T})^2}.$$

La dérivée de $h(\alpha)$ par rapport à α est donnée par :

$$h'(\alpha) = \alpha^{k-1} \frac{(k-2)\,\alpha + k e^{\lambda T}}{(\alpha + e^{\lambda T})^3}$$

$h'(\alpha) = 0$ pour $\alpha = 0$ ou $\alpha_0 = \frac{k e^{-\lambda T}}{2-k}$.

Puisque $h(\alpha) > 0$, $h(0) = 0$ et $\lim\limits_{\alpha \to \infty} h(\alpha) = 0$ on obtient que α_0 est la valeur pour la quelle h atteint son maximum, d'où l'inégalité :

$$h(\alpha) \leq \left(\frac{k}{2-k}\right)^k \frac{e^{k\lambda T}}{(\alpha_0 + e^{\lambda T})^2} \tag{3.13}$$

Maintenant, on calcule $\|u_\alpha(0) - f\|^2$:

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(0) - f\|^2 &= \left\| -\alpha \left(\alpha I + e^{AT}\right)^{-1} f \right\|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{0} \alpha^2 \left(\alpha I + e^{\lambda T}\right)^{-2} d\,\|E_\lambda f\|^2 \\ &= \alpha^{2-k} \int_{-\infty}^{0} h(\alpha) d\,\|E_\lambda f\|^2, \end{aligned}$$

d'aprés (3.13) on obtient :

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(0) - f\|^2 &\leq \alpha^{2-k} \left(\frac{k}{2-k}\right)^k \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{k\,\lambda T}}{(\alpha_0 + e^{\lambda T})^2} d\,\|E_\lambda f\|^2 \\ &\leq \alpha^{2-k} \left(\frac{k}{2-k}\right)^k \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{k\,\lambda T}}{(\alpha_0^2 + 2\alpha_0 e^{\lambda t} + e^{2\lambda T})} d\,\|E_\lambda f\|^2. \end{aligned}$$

On éstime $\left(\alpha_0 + e^{\lambda T}\right)^2$ par $e^{2\lambda T}$, on obtient :

$$\|u_\alpha(0) - f\|^2 \leq \alpha^{2-k} \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{(k-2)\lambda T} d\,\|E_\lambda f\|^2 \ .$$

Si on choisit $k = 2 - \varepsilon$ ie $\varepsilon = 2 - k$ on obtient :

$$
\begin{aligned}
\|u_\alpha(0) - f\|^2 &\leq \alpha^\varepsilon \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 \left(\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{-\varepsilon} \int_{-\infty}^{0} e^{-\varepsilon\lambda T} d\,\|E_\lambda f\|^2 \\
&= \alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2} 4 \left(\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{-\varepsilon} \int_{-\infty}^{0} e^{-\varepsilon\lambda T} d\,\|E_\lambda f\|^2 . \\
&= c\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2},
\end{aligned}
$$

où

$$
c = 4 \left(\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{-\varepsilon} \int_{-\infty}^{0} e^{-\varepsilon\lambda T} d\,\|E_\lambda f\|^2 .
$$

Donc $\|u_\alpha(0) - f\|$ converge vers zéro quant α tend vers zéro avec l'ordre $\alpha^\varepsilon\ \varepsilon^{-2}$.

■

Corollaire 3.3.1 : *Si* $f = \int_{-\infty}^{0} dE_\lambda f$ *dans* H, *il existe* $\varepsilon > 0$ *pour que* $\int_{-\infty}^{0} e^{-(2+\varepsilon)T\lambda} d\,\|E_\lambda f\|^2$ *converge, alors* $\|u_\alpha(t) - u(t)\|$ *converge vers* zéro *quant* α *tend vers* zéro *avec l'ordre* $\alpha^\varepsilon\ \varepsilon^{-2}$ *uniformément en* t, pour tout $t \in [0, T]$.

Preuve :Puisque

$$
\begin{aligned}
u_\alpha(T) - u(T) &= \left(\alpha I + e^{AT}\right)^{-1} f - e^{-AT} f \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{-\alpha e^{-\lambda T}}{(\alpha I + e^{\lambda T})} dE_\lambda f,
\end{aligned}
$$

et

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(t)-u(t)\|^2 &\leq \|u_\alpha(T)-u(T)\|^2 = \int_{-\infty}^{0} \frac{\alpha^2 e^{-2\lambda T}}{(\alpha I + e^{\lambda T})^2} d\,\|E_\lambda f\|^2 \\
&= \alpha^{2-k} \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{\alpha^k e^{-2\lambda T}}{(\alpha I + e^{\lambda T})^2} d\,\|E_\lambda f\|^2 \\
&= \alpha^{2-k} \quad \int_{-\infty}^{0} h(\alpha) e^{-2\lambda T} d\,\|E_\lambda f\|^2 \\
&\leq \alpha^{2-k} \quad \int_{-\infty}^{0} \alpha_0^k \left(\alpha_0 + e^{\lambda T}\right)^{-2} e^{-2\lambda T} e^{k\lambda T} d\,\|E_\lambda f\|^2 \\
&\leq \alpha^{2-k} \quad \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{k}{2-k}\right)^k \frac{e^{-2\lambda T} e^{k\lambda T}}{(\alpha_0 I + e^{\lambda T})^2} d\,\|E_\lambda f\|^2 \\
&\leq \alpha^{2-k} \quad \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{k}{2-k}\right)^k \frac{e^{-2\lambda T} e^{k\lambda T}}{(\alpha_0^2 + 2\alpha_0 e^{\lambda T} + e^{2\lambda T})} d\,\|E_\lambda f\|^2 .
\end{aligned}$$

Donc par des calcules simples on obtient :

$$\|u_\alpha(T)-u(T)\|^2 \leq \alpha^{2-k} \quad \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{-4\lambda T} e^{k\lambda T} \; d\,\|E_\lambda f\|^2 .$$

Si on choisit $k = 2-\varepsilon$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(T)-u(T)\|^2 &\leq \alpha^{\varepsilon} \quad \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{2-\varepsilon} e^{-(2+\varepsilon)\lambda T} \; d\,\|E_\lambda f\|^2 \\
&\leq \alpha^{\varepsilon} \quad \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 \left(\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{-\varepsilon} \int_{-\infty}^{0} e^{-(2+\varepsilon)\lambda T} d\,\|E_\lambda f\|^2 \\
&= 4\alpha^{\varepsilon} \quad \varepsilon^{-2} \left(\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)^{\varepsilon} \int_{-\infty}^{0} e^{-(2+\varepsilon)\lambda T} d\,\|E_\lambda f\|^2 \\
&= c\alpha^{\varepsilon} \quad \varepsilon^{-2},
\end{aligned}$$

où

$$c = 4\left(\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)^{\varepsilon} \int_{-\infty}^{0} e^{-(2+\varepsilon)\lambda T} d\,\|E_\lambda f\|^2 .$$

Donc $\|u_\alpha(t)-u(t)\|$converge vers zéro quant α tend vers zéro avec l'ordre $\alpha^{\varepsilon}\ \varepsilon^{-2}$ uniformément en t, pour tout $t \in [0,T]$. ∎

REFERENCES

[1] **Ames K.A,.Payne L.E** and **.Schaefer. P.W** . Energy and pointwise bounds in some non-standard parabolic problems. Proc.Roy. Soc Edinburgh Sect. A134, (2004) No.1,1-9.

[2] **Boccara.N**, Analyse fonctionnelle, paris 1984.

[3] **Clark.G.W** and **.Oppenheimer S.F** . Quasireversibility Methods for Non -Well-Posed Problems.of Differential Equations, (1994) No.8,1-9.

[4] **Conway. I.B,** "A Course in functional Analysis, Springer-Verlag, NewYork,1990.

[5] **Denche,M,** and **Djezzar**, **S**. A modified quasi-boundary value method for a class of abstract parabolic ill-posed problems.Boundary value problems, Article ID 37524, (2006), 8 pages.

[6] **Frank. J**, Introduction aux méthodes numériques. Springer. 2005.

[7] **Hadamard. J**. "Lecteures on Cauchy's probleme in Linear Partial Differential Equations". Yale University Press, 1923.

[8] **Lattes.R** and **.Lions,J.L**, Methode de Quasi-Reversibilité et Applications, Dunod, Paris (1967).

[9] **Marton. L, Peter. W**," Advances in electronic and electron physics." Hawkes. 1989.

[10] **Miller**,**K,** Stabilized quasireversibility and other nearly best possible methods for non-well-posed problems, "Symposium on Non-Well-Posed Problems and Logarithmic Convexity",Lecture Notes in Mathematics,Vol.316,Springer-Verlag, Berlin, 1973,pp161-176.

[11] **Payne.L.E**, Some general remarks on improperly posed problems for partial differential equations, "Symposium on Non-Well-Posed Problems and Logarithmic Convexity", Lecture Notes in Mathematics, Vol.316, Springer- Verlage, Berlin, 1973,pp1-30.

[12] **Pazy, A**,"Semigroups of Linear Operators and Application to Partial Differential Equations", Springer-Verlag, New York,1983

[13] **Showalter**,**R.E, "**The Final Value Problem for Evolution Equations, J-Math Anal. Appl. 47,1974,pp563-572.

[14] **Showalter,R.E**, Cauchy problem for Hyper-Parabolic Partial Differential Equations," Trends in the Theory and Practice of Non-Linear Analysis", Elsevier,1983.

[15] **Stéphanie, L.** Propriétés Spéctrales de l'Opérateur Solution Canonique du $\bar{\partial}$ et des Opérateurs de Hankel de Symbole Antiholomorphe

[16] **Trenoguine, U.A,** "Analyse fonctionnelle."Mir, 1985.

[17] **Yosida K,** "Functional Analysis", Springer-Verlag, Berlin, 1980.

<u>ملخص</u>

يتضمن هذا العمل تعديل مسألة مطروحة بشكل غير جيد لمعادلة تفاضلية من الدرجة الأولى ذات معامل مؤثري سالب ذو طيف متقطع و مستمر .

في الحالتين ندرس وجود و وحدانية و استقرار الحل و كذلك تقاربه ، و في الأخير نعطي تقديرات للخطأ و مرتبة التقارب .

Abstract

This work is devoted to the regularization of an ill-posed problem for a first order differential equation with a negative operatorial coefficient (discrete and continuous cases).

We show for both cases the existence, unicity and the stability of the solution.

We also establish some convergence results, and finally, we give an estimation of the error and the order of convergence.

Key Words: Ill-posed Cauchy problem, spectral measure, quasi-boundary value problem, quasi-boundary value methods, quasi-reversibility methods.

Résumé

Ce travail est consacré à la régularisation d'un problème mal posé pour une équation différentielle du première ordre à coefficient opératoriel négatif dans les cas du spectre déscret et spectre continu.

Dans les deux cas, on montre l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution.

On établit des résultats de convergence, et enfin, on donne une estimation de l'erreur et l'ordre de convergence.

Mots clés : problème mal posé de Cauchy, mésure spéctrale, quasi-valeurs-aux limites, méthode de quasi-valeurs aux limites.