

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE CONSTANTINE  
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

N° d'ordre :.....

Série: .....

**THESE**

Présentée pour obtenir le diplôme de Magister  
En Mathématiques

OPTION

ANALYSE NUMÉRIQUE APPLIQUÉE

Par

MR DJEDIDI Mostefa

THEME

ANALYSE ET MISE EN ŒUVRE  
DE CERTAINES MÉTHODES MIXTES  
STABILISÉES POUR LES ÉQUATIONS  
D'ÉLASTICITÉ

Soutenue le:

1998

Devant le jury:

Président :	R. BENACER	MC	Univ. BATNA
Rapporteur :	N. KECHKAR	MC	Univ. CONSTANTINE
Examineurs:	F. Z. NOURI	MC	Univ. Annaba
	S. E. REBAI	MC	Univ. BATNA
	M. DENCHE	MC	Univ. CONSTANTINE

## RESUME

Le présent travail est une contribution à l'étude de la stabilité des méthodes mixtes d'éléments finis pour la résolution numérique des équations d'Elasticité. En ajoutant à la formulation standard de GALERKIN des termes de stabilisation, des conditions suffisantes d'existence, d'unicité et de convergence sont établies. La théorie présentée est illustrée par des exemples. De plus, une application sur l'élément  $Q_1-Q_0$  est mise en oeuvre au moyen d'un programme en Pascal.

Ainsi, les propriétés de convergence pour les inconnues de vitesse et de tenseur sont mises en évidence numériquement.

## TABLE DES MATIERES

### INTRODUCTION

### PREMIER CHAPITRE: FORMULATION VARIATIONNELLE DU PROBLEME

#### D'ELASTICITE

1-1 Equations d'Elasticité.....	1
1-2 Formulation faible du problème d'Elasticité.....	4
1-3 Théorie générale des problèmes de type point-selle...	10
1-4 Méthodes mixtes des éléments finis pour les problèmes du point-selle.....	18

### DEUXIEME CHAPITRE: THEORIE GENERALE DE LA STABILITE DES ELEMENTS

#### FINIS MIXTES

2-1 Méthodes mixtes d'éléments finis pour le problème d'Elasticité.....	22
2-2 Couples d'éléments finis stables et instables.....	26

### TROISIEME CHAPITRE: THEORIE DE LA STABILISATION DES METHODES

#### MIXTES D'ELEMENTS FINIS

3-1 Conditions suffisantes de stabilité.....	44
3-2 Convergence des solutions discrètes.....	62
3-3 Applications.....	69

### QUATRIEME CHAPITRE: ILLUSTRATIONS NUMERIQUES

4-1 Algorithme par éléments finis.....	77
4-2 Test et résultats numériques.....	86
4-3 Conclusion générale.....	95

<u>BIBLIOGRAPHIE</u> .....	96
----------------------------	----

<u>ANNEXE</u> .....	A1-A20
---------------------	--------

## REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur N.KECHKAR, Maître de Conférences à l'Université de Constantine, mon directeur de recherche pour les conseils ,les encouragements et toute l'aide dont il m'a fait bénéficier.Je le remercie sincèrement et lui exprime ma profonde gratitude.

Mes remerciements vont également à Monsieur R.BENACER, Maître de Conférences à l'Université de Batna, qui m'a fait l'honneur de présider le Jury, à M<sup>me</sup> HADJI Née F.Z NOURI, Maître de Conférences à l'Université d'Annaba, Monsieur S.R.REBAI, maître de Conférences à l'Université de Batna et Monsieur M.DENCHE, maître de Conférences à l'Université de Constantine, qui m'ont fait l'honneur de participer au Jury.

Je remercie M<sup>r</sup> A.GATTAL, Responsable du Centre de Calcul du Centre Universitaire de TEBESSA pour toute l'aide qu'il m'a procurée.

Je tiens à remercier vivement l'enseignant M<sup>r</sup> M.SAAIDIA pour toute l'aide qu'il m'a fournie.

Bien sûr, je n'oublie pas mes amis, les enseignants Y.SOULFI, Y.KHELEF et S.MERABET, auprès desquels, j'ai trouvé aide et sollicitude.

Mostefa

*A toute ma famille*

*je dédie ce travail*

*Mostefa*

# INTRODUCTION

La technique des éléments finis a connu une large application dans l'analyse des différents problèmes de la physique, (voir [10],[21] et [23]). Dans la plupart des cas, les méthodes d'éléments finis ont été développées en se basant sur la technique de GALERKIN.

Ces méthodes pour la résolution numérique des problèmes du type point-selle sont assujetties à certaines conditions de stabilité afin de garantir la convergence de la solution approchée vers la solution exacte. Elles ont été particulièrement développées dans les travaux de BABUŠKA et BREZZI ([3],[4] et [9]).

Malheureusement, il existe beaucoup des méthodes instables au sens de BABUŠKA-BREZZI. Ceci a motivé une nouvelle approche, qui consiste à perturber la formulation variationnelle discrète du problème mixte considéré, en ajoutant des termes pouvant dépendre de la maille. Ces termes de perturbation sont introduits et choisis de telle sorte à assurer la stabilité de la nouvelle formulation (voir FRANCA-STENBERG [17] et [18], FRANCA-HUGHES-STENBERG [19] et FRANCA-HUGHES-LOULA-MIRANDA [20]).

L'objet de ce travail, qui suit cette nouvelle approche, consiste à trouver des conditions suffisantes sur les termes de stabilisation pour obtenir des méthodes stables et convergentes. On établit que ces contraintes assurent l'existence, l'unicité, ainsi que la convergence de la solution du problème discret vers la solution exacte.

Le présent travail est divisé comme suit. Dans le premier chapitre, on présente les équations d'élasticité. Ensuite, on déduit la formulation variationnelle du problème considéré. Finalement, on donne une théorie générale de la résolution des problèmes du type point-selle, ainsi que celle des méthodes mixtes d'éléments finis utilisées pour leur approximation numérique.

Dans le deuxième chapitre, on applique les résultats abstraits présentés dans le chapitre précédent pour la formulation discrète du problème d'élasticité. On présente les conditions qui assurent la convergence de la solution approchée vers la solution exacte. Puis, on donnera quelques exemples de méthodes mixtes stables et instables pour le problème d'élasticité. Le chapitre est terminé par la présentation de l'étude de la stabilité de deux méthodes dites de type TAYLOR-HOOD pour le problème discret d'élasticité.

Dans le troisième chapitre, on présente une modification de la formulation approchée pour le problème d'élasticité. Elle consiste à ajouter des termes de stabilisation à la formulation approchée standard. On déduit des conditions suffisantes sur ces termes tout en assurant l'existence, l'unicité et la convergence de la solution approchée vers la solution exacte. Ensuite, on construit des applications où des termes acceptables de stabilisation sont concrètement mis en évidence.

Dans le dernier chapitre, un programme de résolution en Pascal est mis en oeuvre numériquement pour la stabilisation de

l'élément  $Q_1-Q_0$  pour un problème-test d'élasticité. Les résultats obtenus sont ensuite discutés. En particulier, ils montrent clairement la fiabilité de la méthodologie introduite.

PREMIER CHAPITRE:

FORMULATION VARIATIONNELLE DU PROBLÈME  
D'ÉLASTICITÉ

Dans ce chapitre, on présente les équations d'élasticité avec quelques notions et résultats de l'analyse fonctionnelle qui s'avèrent nécessaires. Ensuite, on déduit la formulation variationnelle. Finalement, on donne une théorie générale de la résolution des problèmes de type point-selle, ainsi que la méthode mixte d'éléments finis pour leur approximation numérique.

### 1-1 ÉQUATIONS D'ÉLASTICITÉ

La réaction élastique d'un matériau isotropique homogène  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^n$  ( $n=2,3$ ) de frontière régulière  $\Gamma$ , soumis à un champ de forces  $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , peut être décrite par le système suivant des équations aux dérivées partielles :

$$e(u) = \frac{1}{2\mu} \left[ \sigma - \frac{1-\rho}{n} \text{tr} \sigma \cdot I \right] \quad \text{dans } \Omega \quad (1-1)$$

$$\text{div } \sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1-2)$$

Pour simplifier la présentation et sans restreindre la généralité, on considère la condition aux bords :

$$u = 0 \quad \text{Sur } \Gamma$$

Dans l'équation (1-1),  $\rho$  désigne le paramètre de compressibilité du matériau.

Les fonctions inconnues sont le champ des déplacements

$u: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$  et le tenseur symétrique des contraintes  $\sigma: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

L'équation (1-1) est appelée équation constitutive, tandis que (1-2) est dite équation d'équilibre.

On note que :

$$\rho = \frac{2\mu}{2\mu + n\lambda} \quad (1-3)$$

$$\text{où } \mu > 0 \text{ et } \lambda > -\frac{2}{n}\mu$$

$\mu > 0$  et  $\lambda > -\frac{2}{n}\mu$  sont les constantes de Lamé du matériau.

$$\epsilon(u) = \{ \epsilon_{ij} \} ; i, j = 1, 2 \text{ est donné par : } \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1-4)$$

et,

$$\text{tr} \sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_{ii} \text{ est la trace du tenseur } \sigma \quad (1-5)$$

$\mathbb{I}$  désigne la matrice unité d'ordre  $n$ .

$$\text{div} \sigma = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma_{2i}}{\partial x_i}, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma_{ni}}{\partial x_i} \right) \quad (1-6)$$

est l'opérateur différentiel défini sur les tenseurs.

En prenant  $n=3$ , les deux équations (1-1) et (1-2) s'écrivent :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1-7)$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1-8)$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1-9)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (1-10)$$

$$= \frac{1}{2\mu} \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \frac{1-\rho}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \frac{1-\rho}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \frac{1-\rho}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \end{bmatrix}$$

où  $u = (u_1, u_2, u_3)^t$  et  $f = (f_1, f_2, f_3)^t$

#### REMARQUE 1-1

1-L'équation constitutive pour un corps élastique incompressible est obtenue en prenant  $\rho \longrightarrow 0$  dans (1-1).

2-On peut tirer un cas particulier important en prenant  $\rho = 0$ ; on obtient les équations usuelles de STOKES, qui gouvernent l'écoulement incompressible d'un fluide visqueux.

En prenant  $\rho = 0$  dans (1-1), on obtient

$$e(u) = \frac{1}{2\mu} \left[ \sigma - \frac{1}{n} \text{tr} \sigma \cdot I \right]$$

Et donc ,

$$\begin{aligned} \text{tr} e(u) &= \frac{1}{2\mu} \left[ \text{tr} \sigma - \frac{1}{n} \text{tr} \sigma \cdot \text{tr} I \right] \\ &= \frac{1}{2\mu} [\text{tr} \sigma - \text{tr} \sigma] = 0 \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\text{tr} e(u) = \sum_{i=1}^n e_{ii}(u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{div} u$$

ce qui donne la condition d'incompressibilité du fluide :

$$\operatorname{div} u = 0 \quad (1-11)$$

En définissant la pression hydrostatique par :

$$p = -\frac{1}{n} \operatorname{tr} \sigma \quad (1-12)$$

l'équation (1-1) donne

$$\sigma = 2\mu \epsilon(u) - p.I$$

et l'équation (1-2) devient,

$$\operatorname{div}(2\mu \epsilon(u) - p.I) + f = 0$$

D'où,

$$2\mu (\operatorname{div} \epsilon(u)) - \operatorname{div} (p.I) + f = 0 \quad (1-13)$$

Des calculs simples permettent d'arriver à :

$$\mu \Delta u - \nabla p + f = 0$$

où

$$\Delta u = (\Delta u_1, \dots, \Delta u_n)^t \quad (1-14)$$

Le problème de STOKES consiste à :

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Trouver } U : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ et } P : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tels que} \\ \operatorname{div} U = 0 \\ \mu \Delta U - \nabla P + f = 0 \\ U = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right]$$

$U$  représente la vitesse du fluide.

## 1-2 FORMULATION FAIBLE DU PROBLÈME D'ÉLASTICITÉ :

Dans ce paragraphe, on rappelle quelques notions mathématiques concernant la déduction de la formulation faible du problème d'élasticité. Tout d'abord, définissons un certain nombre d'espaces

et de normes qui seront utilisés par la suite.

L'espace de LEBESGUE des fonctions à carré intégrable sur  $\Omega$  est:

$$L^2(\Omega) = \{ \phi / \int_{\Omega} \phi^2 d\Omega < +\infty \} \quad (1-15)$$

On le munit du produit scalaire :

$$(\phi, \psi)_{\Omega} = \int_{\Omega} \phi \psi d\Omega \quad \forall \phi, \psi \in L^2(\Omega) \quad (1-16)$$

et de la norme associée :

$$\|\phi\|_{0,\Omega} = [(\phi, \psi)]^{1/2} \quad (1-17)$$

L'espace suivant sera aussi utile :

$$L_0^2(\Omega) = \{ \phi \in L^2(\Omega) / \int_{\Omega} \phi d\Omega = 0 \} \quad (1-18)$$

On définit l'espace de SOBOLEV d'ordre  $m$ ,  $H^m(\Omega)$  par :

$$H^m(\Omega) = \{ \phi \in L^2(\Omega) / D^k \phi \in L^2(\Omega) ; 0 \leq |k| \leq m \} \quad (1-19)$$

où pour tout vecteur  $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  de nombres entiers non négatifs.

$D^k$  désigne l'opérateur différentiel d'ordre  $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$

qui est donné pour toute fonction  $\phi = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  par :

$$D^k \phi = \frac{\partial^k \phi}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 \dots \partial^{k_n} x_n}$$

$H^m(\Omega)$  est muni de la norme :

$$\|\phi\|_{m,\Omega} = \left( \sum_{0 \leq |k| \leq m} \|D^k \phi\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \quad (1-20)$$

et de la semi-norme :

$$|\phi|_{m,n} = \left( \sum_{|k|=m} \int_{\Omega} |D^k \phi| d\Omega \right)^{1/2} \quad (1-21)$$

Ainsi, pour  $k=1$ , l'espace :

$$H^1(\Omega) = \{ \phi \in L^2(\Omega) / D\phi \in L^2(\Omega) \} \quad (1-22)$$

est muni de la norme :

$$\|\phi\|_{1,\Omega} = \left( \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 + \|\phi\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \quad (1-23)$$

et de la semi-norme :

$$\|\phi\|_{1,\Omega} = \left( \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \quad (1-24)$$

Il est parfois aussi utile d'utiliser le sous-espace

$$H_0^1(\Omega) = \{ \phi \in H^1(\Omega) / \phi = 0 \text{ sur } \Gamma \} \quad (1-25)$$

sur lequel la semi-norme (1-24) est une norme équivalente à la norme (1-23).

Pour les fonctions vectorielles, on emploie les espaces suivants:

$$\begin{aligned} H^m(\Omega) &= [H^m(\Omega)]^n = \\ &= \{ \phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) / \phi_i \in H^m(\Omega) ; i=1, 2, \dots, n \} \end{aligned} \quad (1-26)$$

Ces derniers sont munis des normes produits :

$$\|\phi\|_{m,n} = \left( \sum_{i=1}^n \|\phi_i\|_{m,n}^2 \right)^{1/2} \quad (1-27)$$

De même, on pose :

$$H_0^1(\Omega) = [H_0^1(\Omega)]^n = \{ \phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) / \phi_i \in H_0^1(\Omega) ; i=1,2,\dots,n \} \quad (1-28)$$

De plus, on munit l'espace  $H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$  de la norme :

$$| | (\phi, \psi) | | = \| \phi \|_1 + \| \psi \|_0 \quad (1-29)$$

Pour plus de détails, voir [8], [23].

Passons maintenant à la construction de la formulation faible du problème d'élasticité. Dans ce but, on définit deux espaces de HILBERT par :

$$W = \{ \tau = [\tau_{ij}] / \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L_0^2(\Omega) ; i, j = \overline{1, n} \} \quad (1-30)$$

$$V = H_0^1(\Omega) \quad (1-31)$$

munis respectivement des normes :

$$\| \tau \|_{\Omega} = \left( \int_{\Omega} \tau * \tau d\Omega \right)^{1/2} = \left( \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \tau_{ij}^2 d\Omega \right)^{1/2} \quad \forall \tau \in \Omega \quad (1-32)$$

$$\| v \|_v = \| v \|_{1,\Omega} \quad \forall v \in V \quad (1-33)$$

En multipliant l'équation (1-1) par un tenseur-test  $\tau$  de l'espace  $W$  et l'équation (1-2) par une fonction-test  $v$  de  $V$ , puis en intégrant sur le domaine  $\Omega$ , on obtient la formulation faible suivante :

$$-\int_{\Omega} [\epsilon(u) : \tau] d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mu \left[ \sigma : \tau - \frac{1-\rho}{n} \text{tr} \sigma . I : \tau \right] d\Omega = 0 \quad (1-34)$$

$$\int_{\Omega} [\text{div} \sigma + f] v d\Omega = 0 \quad (1-35)$$

L'équation (1-34) donne :

$$-\int_{\Omega} [\mathbf{e}(u) : \boldsymbol{\tau}] d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mu \left[ \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} - \frac{1-\rho}{n} \left( \sum_{k=1}^n \sigma_{kk} \right) \cdot I : \boldsymbol{\tau} \right] d\Omega = 0$$

où

$$-\int_{\Omega} [\mathbf{e}(u) : \boldsymbol{\tau}] d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mu \left[ \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} - \frac{1-\rho}{n} \sum_{i,j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n \sigma_{kk} \right) \cdot I_{ij} \cdot \tau_{ij} \right] d\Omega = 0$$

D'où,

$$-\int_{\Omega} [\mathbf{e}(u) : \boldsymbol{\tau}] d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mu \left[ \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} - \frac{1-\rho}{n} \left( \sum_{k=1}^n \sigma_{kk} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n \tau_{ii} \right) \right] d\Omega = 0$$

Et donc,

$$\frac{1}{2\mu} \int_{\Omega} \left[ \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} - \frac{1-\rho}{n} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{tr} \boldsymbol{\tau} \right] d\Omega - \int_{\Omega} [\mathbf{e}(u) : \boldsymbol{\tau}] d\Omega = 0$$

D'autre part, l'équation (1-35) entraîne :

$$\int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x_i} v_1 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma_{2i}}{\partial x_i} v_2 + \dots + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma_{ni}}{\partial x_i} v_n \right] \\ + [ f_1 v_1 + f_2 v_2 + \dots + f_n v_n ] d\Omega = 0$$

D'après la formule de GREEN, on obtient :

$$-\int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^n \sigma_{1i} \frac{\partial v_1}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \sigma_{2i} \frac{\partial v_2}{\partial x_i} + \dots + \sum_{i=1}^n \sigma_{ni} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} v_n \right] d\Omega \\ + \int_{\Omega} [ f_1 v_1 + f_2 v_2 + \dots + f_n v_n ] d\Omega = 0$$

de sorte que,

$$\int_{\Omega} \left[ \sum_{i,j=1}^n \left( -\sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + f_j v_j \right) \right] d\Omega = 0$$

qui peut être réécrite comme suit :

$$-\frac{1}{2} \left[ \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} d\Omega + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} d\Omega \right] + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} f_j v_j d\Omega = 0$$

Puisque  $\sigma$  est symétrique , alors on a :

$$-\frac{1}{2} \left[ \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} d\Omega \right] + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} f_j v_j d\Omega = 0$$

ou

$$-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] d\Omega + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} f_j v_j d\Omega = 0$$

ou

$$-\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(v) d\Omega + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} f_j v_j d\Omega = 0$$

On arrive alors à :

$$-\int_{\Omega} [ \epsilon(v) : \sigma ] d\Omega + \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega = 0$$

Finalement, on obtient la formulation faible suivante, dite de HELLINGER-REISSNER (voir [20])



**THÉOREME 1-1** (voir BREZZI [9] )

Supposons que:

**(A1) Continuité de  $a(.,.)$  et de  $b(.,.)$**

Il existe deux constantes  $0 < c_1, c_2 < \infty$  , telles que

$$| a (\xi, \tau) | \leq c_1 \| \xi \|_W \| \tau \|_W \quad \forall \xi, \tau \in W \quad (1-40)$$

$$| b (\tau, v) | \leq c_2 \| \tau \|_W \| v \|_V \quad \forall \tau \in W \quad \forall v \in V \quad (1-41)$$

**(H1) K-ellipticité de  $a(.,.)$**

Il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que :

$$| a (\tau, \tau) | \geq \alpha \| \tau \|_W^2 \quad \forall \tau \in K \quad (1-42)$$

où 
$$K = \{ \tau \in W / b(\tau, v) = 0, \forall v \in V \} \quad (1-43)$$

**(H2) Condition de LADYSHENSKAYA-BABUŠKA-BREZZI**

Il existe une constante  $\beta > 0$  telle que :

$$\sup_{\substack{\tau \in W \\ \tau \neq 0}} \frac{b(\tau, v)}{\| \tau \|_W} \geq \beta \| v \|_V \quad \forall v \in V \quad (1-44)$$

Alors, le problème "M" admet une solution unique  $\{ \sigma, u \} \in W \times V$  .

On note que la formulation faible du problème d'élasticité

(1-36) et (1-37) est un cas particulier du problème "M" .

En effet, on pose :

$$W = [ L^2(\Omega) ]^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{et} \quad V = ( H_0^1(\Omega) )^n \quad (1-45)$$

$$a (\tau, \xi) = a_p (\tau, \xi) = \frac{1}{2\mu} \int_{\Omega} \left[ \xi : \tau - \frac{1-p}{n} \text{tr} \xi \cdot \text{tr} \tau \right] d\Omega \quad (1-46)$$

$$b(\tau, v) = d(\tau, v) = - \int_{\Omega} \tau : \epsilon(v) d\Omega \quad (1-47)$$

$$L(v) = 0 \quad (1-48)$$

$$\varphi(v) = - \int_{\Omega} f v d\Omega \quad \forall \xi, \tau \in W \text{ et } v \in V \quad (1-49)$$

Dans ce cas particulier , pour montrer qu'il existe une solution unique  $(\sigma, u) \in W \times V$  , on doit vérifier les hypothèses (A1) , (H1) et (H2) du théorème (1-1).

Vérification de (A1) : On a :

$$\begin{aligned} |a(\xi, \tau)| &= |a_p(\xi, \tau)| = \left| \frac{1}{2\mu} \int_{\Omega} \left[ \xi : \tau - \frac{1-\rho}{n} \text{tr} \xi \cdot \text{tr} \tau \right] d\Omega \right| \\ &= \frac{1}{2\mu} \left| \int_{\Omega} \left[ \xi : \tau - \frac{1-\rho}{n} \xi : (\text{tr} \tau \cdot I) \right] d\Omega \right| \\ &\leq \frac{1}{2\mu} \int_{\Omega} \left| \xi : \left( \tau - \frac{1-\rho}{n} \text{tr} \tau \cdot I \right) \right| d\Omega \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de CAUCHY-SCHWARTZ , on obtient

$$\begin{aligned} |a_p(\xi, \tau)| &\leq \frac{1}{2\mu} \left[ \int_{\Omega} |\xi|^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{\Omega} \left| \tau - \frac{1-\rho}{n} \text{tr} \tau \cdot I \right|^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2\mu} \|\xi\|_W \left\| \tau - \frac{1-\rho}{n} \text{tr} \tau \cdot I \right\|_W \end{aligned}$$

Décomposons  $\tau$  comme suit :

$$\tau = s - q \cdot I \quad \text{où} \quad q = -\frac{1}{n} \text{tr} \tau \quad (1-50)$$

On a évidemment :

$$\text{tr} s = \text{tr} \left( \tau - \frac{1}{n} \text{tr} \tau \cdot I \right) = \text{tr} \tau - \frac{1}{n} \text{tr} \tau \cdot n = 0$$

Et donc ,

$$\begin{aligned}
| a_p(\xi, \tau) | &\leq \frac{1}{2\mu} \|\xi\|_W \|s-q.I - \frac{1-\rho}{n} \text{tr}(s-q.I) . I\|_W \\
&= \frac{1}{2\mu} \|\xi\|_W \|s-q.I - \frac{1-\rho}{n} (-nq) . I\|_W \\
&= \frac{1}{2\mu} \|\xi\|_W \|s-\rho qI\|_W \\
&= \frac{1}{2\mu} \|\xi\|_W [(s-\rho q.I, s-\rho qI)]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2\mu} \|\xi\|_W \left[ \int_{\Omega} (s:s+\rho^2(q.I):(q.I) - 2\rho s:(q.I)) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2\mu} \|\xi\|_W \left[ \int_{\Omega} (s:s+\rho^2(q.I):(q.I) - 2\rho q \sum_{i,j=1}^n s_{ij} I_{ij}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2\mu} \|\xi\|_W \left[ \int_{\Omega} (s:s+\rho^2(q.I):(q.I) - 2\rho q \text{tr} s) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2\mu} \|\xi\|_W [\|s\|_W^2 + \rho^2 \|q.I\|_W^2]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned}
\|\tau\|_W^2 &= \|s-q.I\|_W^2 = \int_{\Omega} (s-q.I):(s-q.I) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} (s:s+q.I:q.I - 2s:q.I) d\Omega \quad (1-51) \\
&= \|s\|_W^2 + \|q.I\|_W^2
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
| a_p(\xi, \tau) | &\leq \frac{1}{2\mu} \|\xi\|_W [\max(1, \rho^2) \|\tau\|_W^2]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2\mu} \max(1, \rho) \|\xi\|_W \|\tau\|_W \quad (1-52)
\end{aligned}$$

i.e. (1-40) est vérifiée pour :

$$c_1 = \frac{1}{2\mu} \max\{1, \rho\} .$$

D'autre part ,on a

$$|b(\tau, v)| = |d(\tau, v)| = \left| -\int_{\Omega} \tau : \epsilon(v) d\Omega \right| \\ \leq \int_{\Omega} |\tau : \epsilon(v)| d\Omega$$

En utilisant, de nouveau, l'inégalité de CAUCHY-SCHWARTZ ,il vient:

$$|d(\tau, v)| \leq \left[ \int_{\Omega} |\tau|^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{\Omega} |\epsilon(v)|^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \\ \leq \|\tau\|_W \|\nabla v\|_W \\ \leq \|\tau\|_W \|v\|_V \quad (1-53)$$

i.e. (1-41) est vérifiée pour  $c_2=1$  .

**Vérification de (H1):** On a :

$$|a_p(\tau, \tau)| = \left| \int_{\Omega} \frac{1}{2\mu} \left[ \tau : \tau - \frac{1-\rho}{n} \text{tr}\tau \cdot \text{tr}\tau \right] d\Omega \right| \\ = \frac{1}{2\mu} \left| \int_{\Omega} \left[ s : s + nq^2 - \frac{1-\rho}{n} (-qn) (-qn) \right] d\Omega \right| \\ = \frac{1}{2\mu} \left| \int_{\Omega} [s : s + \rho n q^2] d\Omega \right| \\ = \frac{1}{2\mu} [\|s\|_W^2 + \rho n \|q\|_W^2]$$

D'où,

$$|a_p(\tau, \tau)| \geq \min \left\{ \frac{1}{2\mu}, \frac{\rho}{2\mu} \right\} [\|s\|_W^2 + \|q \cdot I\|_W^2] \quad (1-54)$$

On note que pour le cas incompressible ( $\rho=0$ ), (1-54) ne peut pas être utilisée pour vérifier (H1). Dans ce cas, on procède comme suit.

En prenant:  $\tau = s - q \cdot I \in K$ , on obtient,

$$d(\tau, v) = -\int_{\Omega} \tau : \epsilon(v) d\Omega \\ = -\int_{\Omega} (s - q \cdot I) : \epsilon(v) d\Omega \\ = -\int_{\Omega} (s : \epsilon(v) - (q \cdot I) : \epsilon(v)) d\Omega$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_{\Omega} \left( s : \mathbf{e}(v) - q \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_{ii}(v) \right) d\Omega \\
&= -\int_{\Omega} \left( s : \mathbf{e}(v) - q \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) d\Omega \\
&= -\int_{\Omega} (s : \mathbf{e}(v) - q \operatorname{div} v) d\Omega \\
&= 0
\end{aligned}$$

D'où,

$$\int_{\Omega} s : \mathbf{e}(v) d\Omega = \int_{\Omega} q \operatorname{div} v d\Omega \quad \forall v \in V \quad (1-55)$$

D'après une propriété de l'opérateur "div", on a :

$$\begin{aligned}
&\forall q \in L^2(\Omega) / \mathbb{R}, \quad \exists \bar{v} \in V \\
&\operatorname{div} \bar{v} = q \quad \text{et} \quad \|\bar{v}\|_1 \leq \frac{c}{\sqrt{n}} \|q\|_0
\end{aligned} \quad (1-56)$$

où c est une constante positive (pour plus de détails, voir [21])

Ainsi, (1-55) devient

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} s : \mathbf{e}(\bar{v}) d\Omega &= \int_{\Omega} q \cdot \operatorname{div} \bar{v} d\Omega \\
&= \|q\|_0^2
\end{aligned}$$

Ceci entraîne :

$$\begin{aligned}
\|q\|_0^2 &\leq \|s\|_w \|\mathbf{e}(\bar{v})\|_0 \\
&\leq \|s\|_w \|\nabla \bar{v}\|_0 \\
&\leq \|s\|_w \|\bar{v}\|_1 \\
&\leq \|s\|_w \frac{c}{\sqrt{n}} \|q\|_0
\end{aligned}$$

D'où,

$$\|q\|_0 \leq \frac{c}{\sqrt{n}} \|s\|_w$$

et

$$c^2 \|s\|_W^2 \geq n \|q\|_0^2 \quad (1-57)$$

En vertu de (1-57), on obtient,

$$(1+c^2) \|s\|_W^2 \geq \|\tau\|_W^2 \quad (1-58)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} |a_p(\tau, \tau)| &= \frac{1}{2\mu} [\|s\|_W^2 + \rho n \|q\|_0^2] \\ &\geq \frac{1}{2\mu} \|s\|_W^2 \\ &\geq \frac{1}{2\mu(1+c^2)} \|\tau\|_W^2 \end{aligned} \quad (1-59)$$

i.e. (H1) est vérifiée pour:

$$\alpha = \frac{1}{2\mu(1+c^2)}$$

**Vérification de (H2):**

Ici, on a besoin du résultat classique suivant.

**LEMME 1-1** (Inégalité de KÓRN) (voir[23])

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de frontière  $\Gamma$ , alors, il existe une constante  $c = c(\Omega) > 0$  telle que:

$$\sum_{i,j=1}^n \left[ \int_{\Omega} \epsilon_{ij}(v) \cdot \epsilon_{ij}(v) d\Omega + \int_{\Omega} v_i v_j d\omega \right] \geq c \|v\|_1^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1-60)$$

Comme conséquence de ce lemme, on déduit le résultat suivant.

**LEMME 1-2**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de frontière  $\Gamma, C^1$  par morceaux. Alors, il existe une constante  $c_0 > 0$  telle que,

$$\forall v \in V = H_0^1(\Omega), \quad \sum_{i,j=1}^n \| \epsilon_{ij}(v) \|_{0,\Omega}^2 \geq c_0 \| v \|_{1,\Omega}^2. \quad (1-61)$$

Comme pour tout  $v \in V$ , il existe  $\bar{\tau} \in W$  telle que:

$$\bar{\tau} = -\epsilon(v) \quad (1-62)$$

alors,

$$\begin{aligned} d(\bar{\tau}, v) &= - \int_{\Omega} \bar{\tau} : \epsilon(v) \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \epsilon(v) : \epsilon(v) \, d\Omega \end{aligned}$$

Et donc,

$$\| \bar{\tau} \|_W^2 = \int_{\Omega} \epsilon(v) \cdot \epsilon(v) \, d\Omega = d(\bar{\tau}, v)$$

En utilisant l'inégalité de KORN, on obtient:

$$\sup_{\tau \in W} \frac{d(\tau, v)}{\| \tau \|_W} \geq \frac{d(\bar{\tau}, v)}{\| \bar{\tau} \|_W} \geq \sqrt{c_0} \| v \|_V \quad (1-63)$$

i.e. (H2) est vérifiée pour  $\beta = \sqrt{c_0}$ .

En conclusion, toutes les conditions du théorème 1-1 sont vérifiées, et le problème (1-36)-(1-37) admet une solution unique  $(\sigma, u) \in \hat{W} \times V$  avec

$$\hat{W} = \left\{ \tau \in W / \tau = s - q \cdot I, \operatorname{tr} s = 0, \int_{\Omega} q \, d\Omega = 0 \right\} \quad (1-64)$$

## 1-4 MÉTHODES MIXTES DES ÉLÉMENTS FINIS POUR LES PROBLÈMES DU

### POINT-SELLE

Les méthodes numériques basées sur les éléments finis consistent à choisir tout d'abord des espaces d'approximations dits d'éléments finis. A cette fin, on définit deux familles d'espaces de dimension finie  $\{ W_h \}$  et  $\{ V_h \}$  pour la discrétisation du tenseur  $\sigma$  et du déplacement  $u$ ,  $h$  représentant, comme d'habitude, un paramètre positif lié à la taille du maillage du domaine  $\Omega$ .

On note que pour chaque valeur de  $h$ , les sous-espaces  $W_h$  et  $V_h$  peuvent être construits sur le même partitionnement  $\mathfrak{S}_h$  de  $\Omega$ , ou sur deux partitionnements différents. Celui-ci peut être constitué de triangles ou quadrilatères si  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , de tétraèdres ou hexaèdres si  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .

En suivant la méthodologie de GALERKIN, le problème discret " $M_h$ " associé au problème " $M$ " s'écrit alors,

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Trouver } \sigma_h \in W_h, u_h \in V_h \text{ tels que :} \\ a(\sigma_h, \tau_h) + b(\tau_h, u_h) = L(\tau_h) \quad \forall \tau_h \in W_h \\ b(\sigma_h, v_h) = \varphi(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right] \quad (1-65)$$

(1-66)

La construction des espaces d'approximation  $W_h$  et  $V_h$  est caractérisée par les deux aspects fondamentaux suivants:

1- Un partitionnement  $\mathfrak{S}_h$  est établi sur la fermeture  $\bar{\Omega}$  du domaine  $\Omega$ . Ainsi,  $\Omega$  est subdivisé en un nombre fini de sous-domaines  $K$ , vérifiant les propriétés suivantes:

$$(i) \quad \bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathfrak{S}_h} K.$$

(ii) Tout  $K \in \mathfrak{S}_h$  est fermé et  $K^0 \neq \emptyset$ .

(iii) Pour tout  $K \in \mathfrak{S}_h$ , la frontière  $\partial K$  est continûment Lipshitzienne.

2-Les fonctions  $\tau_h$  et  $v_h$  peuvent s'écrire,

$$\tau_h = \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \tau_h^K \quad \text{et} \quad v_h = \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} v_h^K$$

où  $\tau_h^K$  et  $v_h^K$  sont des polynômes ayant des supports inclus dans  $K$ .

Comme précédemment, on peut définir le sous-espace

$$K_h = \{ \tau_h \in W_h / b(\tau_h, v_h) = 0, \forall v_h \in V_h \} \quad (1-67)$$

En général, on a  $K_h \not\subset K$ .

L'existence et l'unicité de la solution du problème " $M_h$ ", ainsi que sa convergence vers la solution du problème " $M$ ", sont données par le résultat suivant.

**THÉORÈME 1-2** (voir [21])

Supposons les hypothèses suivantes:

**(H1)  $K_h$ -ellipticité de  $a(\dots)$  :**

Il existe une constante  $\alpha^* > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$|a(\tau_h, \tau_h)| \geq \alpha^* \|\tau_h\|_W^2 \quad \forall \tau_h \in K_h \quad (1-68)$$

**(H2) Condition de BABUŠKA-BREZZI :**

Il existe une constante  $\beta^* > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$\sup_{\tau_h \in W_h} \frac{b(\tau_h, v_h)}{\|\tau_h\|_W} \geq \beta^* \|v_h\|_V \quad \forall v_h \in V_h \quad (1-69)$$

Alors, le problème "M<sub>h</sub>" admet une solution unique  $(\sigma_h, u_h) \in W_h \times V_h$ .

De plus, il existe une constante  $c > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que l'on ait l'estimation suivante:

$$\|\sigma - \sigma_h\|_W + \|u - u_h\|_V \leq c \left( \inf_{\tau \in W_h} \|\sigma - \tau\|_W + \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V \right) \quad (1-70)$$

Maintenant on présente un résultat intéressant qui est très utilisé dans l'analyse de l'approximation au moyen de la méthode des éléments finis mixtes .

**THÉORÈME 1-3** (voir [3])

Soient  $W_1$  et  $W_2$  deux espaces de HILBERT, avec les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  respectivement. De plus, soit  $B(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire sur  $W_1 \times W_2$  telle que:

$$(i) \quad |B(s, r)| \leq c_1 \|s\|_1 \|r\|_2 \quad \forall (s, r) \in W_1 \times W_2$$

$$(ii) \quad \sup_{s \in W_1} \frac{|B(s, r)|}{\|s\|_1} \geq c_2 \|r\|_2 \quad \forall r \in W_2$$

$$(iii) \quad \sup_{r \in W_2} \frac{|B(s, r)|}{\|r\|_2} \geq c_3 \|s\|_1 \quad \forall s \in W_1$$

avec  $c_2 > 0$  ,  $c_3 > 0$  ,  $c_1 < \infty$  .

Soit  $L$  une fonctionnelle linéaire sur  $W_2$  , i.e.  $L \in W_2'$  . Alors, il existe un élément  $s_0 \in W_1$  tel que:

$$B(s_0, r) = L(r) \quad \forall r \in W_2$$

avec

$$\|s_0\|_1 \leq \frac{\|L\|_*}{c_3}$$

et

$$\|L\|_* = \sup_{t \in W_2} \frac{|L(t)|}{\|t\|_2}$$

Pour faciliter l'application de ce théorème aux problèmes variationnels considérés, on écrit le problème "M<sub>h</sub>" sous la forme équivalente:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Soit } f \in V' \text{ et } g \in W', \text{ trouver } (\sigma_h, u_h) \in W_h \times V_h \text{ tel que} \\ B((\sigma_h, u_h); (\tau_h, v_h)) = \mathcal{Q}(\tau_h, v_h) \text{ pour tout } (\tau_h, v_h) \in W_h \times V_h \end{array} \right] \quad (1-71)$$

où

$$B((\sigma_h, u_h); (\tau_h, v_h)) = a(\sigma_h, \tau_h) + b(\tau_h, u_h) + b(\sigma_h, v_h) \quad (1-72)$$

$$\mathcal{Q}(\tau_h, v_h) = L(\tau_h) + \varphi(v_h) = (f, v_h) + (g, \tau_h) \quad (1-73)$$

DEUXIEME CHAPITRE:

THEORIE GENERALE DE LA STABILITE  
DES ELEMENTS FINIS MIXTES



$$\left[ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma_h, u_h) \in W_h \times V_h \text{ tel que :} \\ a_p(\sigma_h, \tau_h) + d(\tau_h, u_h) = 0 \quad \forall \tau_h \in W_h \\ d(\sigma_h, v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right] \quad (2-3)$$

où

$$a_p(\xi_h, \tau_h) = \frac{1}{2\mu} \left[ (\xi_h, \tau_h) - \frac{1-\rho}{n} (\text{tr} \xi_h, \text{tr} \tau_h) \right] \quad \forall \xi_h, \tau_h \in W_h \quad (2-4)$$

$$d(\xi_h, v_h) = - (\xi_h, \epsilon(v_h)) \quad \forall v_h \in V_h \quad (2-5)$$

$$f(v_h) = - (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (2-6)$$

On remarque que dans ce cas du problème discret d'élasticité, l'hypothèse (H2) du théorème (1-2) est facilement satisfaite. La seule condition qui peut poser des difficultés est la condition de  $K_h$ -ellipticité de  $a_p(\dots)$  ( $K_h$  étant donné par (1-67)) (pour plus de détails voir [16]). Un résultat permettant la vérification de cette dernière est donné par :

#### LEMME 2-1

S'il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$\forall \tau_h \in K_h, \exists v_h \in V_h : \quad (2-7)$$

$$(\text{div} v_h, q_h) = \|q_h\|_0^2 \text{ et } \|v_h\|_1 \leq C \|q_h\|_0$$

avec  $q_h = -1/n \text{ tr } \tau_h$

alors, la  $K_h$ -ellipticité de  $a_p(\dots)$  pour le problème discret d'élasticité (2-3) est vérifiée.

#### DEMONSTRATION

Soit  $\tau_h \in K_h$ . Décomposons  $\tau_h$  comme suit :

$$\tau_h = s_h - q_h \cdot I$$

Comme  $\tau_h \in K_h$ , alors

$$(\operatorname{div} v_h, q_h) = (s_h, \mathbf{e}(v_h)) \quad \forall v_h \in V_h$$

Et donc, (2-7) donne :

$$\begin{aligned} \|q_h\|_0^2 &= (s_h, \mathbf{e}(v_h)) \leq \|s_h\|_0 \|\mathbf{e}(v_h)\|_0 \\ &\leq \|s_h\|_0 \|v_h\|_1 \\ &\leq C \|s_h\|_0 \|q_h\|_0 \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\|q_h\|_0 \leq C \|s_h\|_0 \quad \forall \tau_h \in K_h$$

D'où,

$$\begin{aligned} \|\tau_h\|_0^2 &= \|s_h\|_0^2 + n \|q_h\|_0^2 \\ &\leq \|s_h\|_0^2 + nC^2 \|s_h\|_0^2 \\ &\leq (1 + nC^2) \|s_h\|_0^2 \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} |a_\rho(\tau_h, \tau_h)| &= \frac{1}{2\mu} [\|s_h\|_0^2 + \rho n \|q_h\|_0^2] \\ &\geq \frac{1}{2\mu} \|s_h\|_0^2 \\ &\geq \frac{1}{2\mu} \left[ \frac{1}{1 + nC^2} \right] \|\tau_h\|_0^2 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$|a_\rho(\tau_h, \tau_h)| \geq \alpha \|\tau_h\|_0^2$$

i.e.  $a_\rho(\cdot, \cdot)$  est  $K_h$ -elliptique avec  $\alpha = 1/2\mu(1+nC^2)$ .

Ecrivons ,maintenant, le problème discret d'élasticité sous la forme équivalente suivante :

**PROBLÈME "P<sub>h</sub>"**

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma_h, u_h) \in W_h \times V_h \text{ tel que} \\ B(\{\sigma_h, u_h\}; \{\tau_h, v_h\}) = L(\tau_h, v_h) \quad \forall (\tau_h, v_h) \in W_h \times V_h \end{array} \right] \quad (2-8)$$

où la forme bilinéaire  $B: (W_h \times V_h)^2 \longrightarrow \mathbf{R}$  et la fonctionnelle  $L: (W_h \times V_h) \longrightarrow \mathbf{R}$  sont définies par:

$$B(\{\sigma_h, u_h\}; \{\tau_h, v_h\}) = a_p(\sigma_h, \tau_h) + d(u_h, \tau_h) + d(v_h, \sigma_h) \quad (2-9)$$

et

$$L(\tau_h, v_h) = (f, v_h) \quad (2-10)$$

A cet effet, on obtient le résultat suivant dû à BABUSKA [3].

**THÉORÈME 2-1**

S'il existe une constante  $\gamma > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$\sup_{\substack{(\tau_h, v_h) \in W_h \times V_h \\ (\tau_h, v_h) \neq (0,0)}} \frac{B(\{\xi_h, v_h\}; \{\tau_h, v_h\})}{\|\tau_h\|_0 + \|v_h\|_1} \geq [\|\xi_h\|_0 + \|w_h\|_1] \quad (2-11)$$

$$\forall (\xi_h, w_h) \in W_h \times V_h$$

alors, il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$\|\sigma - \sigma_h\|_0 + \|u - u_h\|_1 \leq C \left\{ \inf_{\tau_h \in W_h} \|\sigma - \tau_h\|_0 + \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1 \right\} \quad (2-12)$$

où  $(\sigma, u)$  est la solution exacte et  $(\sigma_h, u_h)$  la solution approchée du problème "M<sub>h</sub>".

Pour clore cette section , on note que l'existence et l'unicité de la solution approchée du problème "M<sub>h</sub>" sont régies par le théorème (1-2). De même, le résultat suivant peut être parfois appliqué.

**LEMME 2-2** (FRANCA-HUGHES [16])

S'il existe deux constantes  $0 < \beta_1, \beta_2 < +\infty$  , indépendantes de  $\rho$  telles que

$$\sup_{\substack{v_h \in V_h \\ v_h \neq 0}} \frac{(\operatorname{div} v_h, q_h)_M}{\|v_h\|_1} \geq \beta_1 \|q_h\|_0 \quad \forall q_h \in Q_h \quad (2-13)$$

et

$$\sup_{\substack{\tau_h \in \tilde{W}_h \\ \tau_h \neq 0}} \frac{(\tau_h, e(v_h))}{\|\tau_h\|_0} \geq \beta_2 \|v_h\|_1 \quad \forall v_h \in V_h \quad (2-14)$$

où

$$Q_h = \left\{ q_h \in L_0^n(\Omega) / q_h = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \tau_h, \tau_h \in W_h \right\} \quad (2-15)$$

alors, le problème "M<sub>h</sub>" admet une solution unique  $\{\sigma_h, v_h\} \in \tilde{W}_h \times V_h$  avec

$$\tilde{W}_h = \{ \tau_h \in W_h / \tau_h = s_h - q_h \cdot I, \operatorname{tr} s_h = 0, s_h \in W_h, q_h \in Q_h \} \quad (2-16)$$

**2-2 COUPLES D'ÉLÉMENTS FINIS STABLES ET INSTABLES**

On présente des couples stables et instables d'éléments finis, appelés méthodes de TAYLOR-HOOD et dénotés par  $Q_k - Q_{k-1}$  pour le cas quadrilatéral ou hexaédral et par  $P_k - P_{k-1}$  pour le cas triangulaire ou tétraédral .

Sans restreindre la généralité, on dénote par  $\Omega$  un domaine polygonal de  $\mathbb{R}^2$  . De plus , on suppose que  $\Omega$  est subdivisé en

quadrilatères convexes ou en triangles, et que la partition obtenue  $\mathfrak{S}_h$  satisfait aux hypothèses usuelles de régularité.

Désignons par  $Q_k(T)$ , l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $k$ , définis isoparamétriquement sur la partie  $T \subset \Omega$ , si  $T$  est un quadrilatère. De même, on dénote par  $P_k(T)$ , l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $k$ , définis sur la partie  $T \subset \Omega$ , si  $T$  est un triangle.

Comme d'habitude,  $C^0(\bar{\Omega})$  est l'espace des fonctions continues sur  $\Omega$ . De plus, on dénote par  $\hat{K}$  l'élément de référence et pour tout  $K \in \mathfrak{S}_h$  par  $F_K$  la transformation affine de  $\hat{K}$  dans  $K$ .

Enfin, on définit les espaces d'approximation  $(V_h, W_h)$  par

$$V_h = \left\{ \begin{array}{l} v_h \in (C^0(\Omega))^2; v_h|_K = \hat{v}_h \circ F_K^{-1}, \hat{v}_h \in (Q_k(\hat{K}))^2, \\ K \in \mathfrak{S}_h, v_h = 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right\} \quad (2-17)$$

$$W_h = \left\{ \begin{array}{l} \tau_h = (\tau_{ij}^h) \in (L^2(\Omega))^{2 \times 2} \cap (C^0(\Omega))^{2 \times 2}; \tau_{ij}^h = \tau_{ji}^h, \\ i, j = 1, 2, \tau_{ij}^h|_K = \hat{\tau}_{ij} \circ F_K^{-1}, \hat{\tau}_{i,j} \in (Q_{k-1}(\hat{K}))^{2 \times 2}, K \in \mathfrak{S}_h \end{array} \right\} \quad (2-18)$$

pour le cas quadrilatère et par

$$V_h = \left\{ \begin{array}{l} v_h \in (C^0(\Omega))^2; v_h|_K = \hat{v}_h \circ F_K^{-1}, \hat{v}_h \in (P_k(\hat{K}))^2, \\ K \in \mathfrak{S}_h, v_h = 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right\} \quad (2-19)$$

$$W_h = \left\{ \begin{array}{l} \tau_h = (\tau_{ij}^h) \in (L^2(\Omega))^{2 \times 2} \cap (C^0(\Omega))^{2 \times 2}; \tau_{ij}^h = \tau_{ji}^h, \\ i, j = 1, 2, \tau_{ij}^h|_K = \hat{\tau}_{ij} \circ F_K^{-1}, \hat{\tau}_{i,j} \in (P_{k-1}(\hat{K}))^{2 \times 2}, K \in \mathfrak{S}_h \end{array} \right\} \quad (2-20)$$

pour le cas triangulaire.

Si  $k=1$ , on obtient les deux exemples suivants qui sont instables (pour plus de détails, voir [1]):

$Q_1-Q_0$ :

$$V_h = \left\{ \begin{array}{l} v_h \in (C^0(\Omega))^2; v_h|_K = \hat{v}_h \circ F_K^{-1}, \hat{v}_h \in (Q_1(\hat{K}))^2, \\ K \in \mathfrak{S}_h, v_h = 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right\} \quad (2-21)$$

$$W_h = \left\{ \begin{array}{l} \tau_h = (\tau_{ij}^h) \in (L^2(\Omega))^{2 \times 2} \cap (C^0(\Omega))^{2 \times 2}; \tau_{ij}^h = \tau_{ji}^h, \\ i, j = 1, 2, \tau_{ij}^h|_K = \hat{\tau}_{ij} \circ F_K^{-1}, \hat{\tau}_{i,j} \in (Q_0(\hat{K}))^{2 \times 2}, K \in \mathfrak{S}_h \end{array} \right\} \quad (2-22)$$

$P_1-P_0$ :

$$V_h = \left\{ \begin{array}{l} v_h \in (C^0(\Omega))^2; v_h|_K = \hat{v}_h \circ F_K^{-1}, \hat{v}_h \in (P_1(\hat{K}))^2, \\ K \in \mathfrak{S}_h, v_h = 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right\} \quad (2-23)$$

$$W_h = \left\{ \begin{array}{l} \tau_h = (\tau_{ij}^h) \in (L^2(\Omega))^{2 \times 2} \cap (C^0(\Omega))^{2 \times 2}; \tau_{ij}^h = \tau_{ji}^h, \\ i, j = 1, 2, \tau_{ij}^h|_K = \hat{\tau}_{ij} \circ F_K^{-1}, \hat{\tau}_{i,j} \in (P_0(\hat{K}))^{2 \times 2}, K \in \mathfrak{S}_h \end{array} \right\} \quad (2-24)$$

Avant de passer à la démonstration de la stabilité des certaines méthodes, introduisons quelques notions et résultats importants. On définit un macroélément  $M$  comme étant la réunion d'un ou plusieurs éléments adjacents de  $\mathfrak{S}_h$ . On dit que  $M$  est équivalent au macroélément de référence  $\hat{M}$  si on peut définir une application  $F_M$  de  $\hat{M}$  dans  $M$  telle que:

$$(i) F_M(\hat{M}) = M$$

(ii) si  $\hat{M} = \bigcup_{j=1}^m \hat{K}_j$ , où  $\hat{K}_j$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ) sont des éléments dans  $\hat{M}$ , alors  $K_j = F_M(\hat{K}_j)$  ( $j=1, 2, \dots, m$ )

sont des éléments dans  $M$  et  $M = \bigcup_{j=1}^m K_j$

$$(iii) F_M|_{K_j} = F_{K_j} \circ F_{\hat{K}_j}^{-1} \quad (j=1, 2, \dots, m),$$

où  $F_{K_j}$  et  $F_{\hat{K}_j}$  sont des fonctions définies de l'élément de

référence  $\hat{K}$  dans  $K_j$  et  $\hat{K}_j$  respectivement.

Pour un macroélément  $M$ , on définit la restriction des espaces de vitesse et de tenseur par

$$V_{0,M}^h = \left\{ \begin{array}{l} v_h \in (C^0(M))^2; v_h|_K = \hat{v}_h \circ F_K^{-1}, \hat{v}_h \in (R_k(\hat{K}))^2, \\ K \in M, v_h|_{\Gamma_M} = 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right\} \quad (2-25)$$

$$W_h^M = \left\{ \begin{array}{l} \tau_h = (\tau_{ij}^h) \in (L^2(M))^{2 \times 2} \cap (C^0(M))^{2 \times 2}; \tau_{ij}^h = \tau_{ji}^h, i, j = 1, 2, \\ \tau_{ij}^h|_K = \hat{\tau}_{ij} \circ F_K^{-1}, \hat{\tau}_{i,j} \in (R_{k-1}(\hat{K}))^{2 \times 2}, K \in M \end{array} \right\} \quad (2-26)$$

avec

$$R_k(\hat{K}) = \begin{cases} Q_k(\hat{K}) & \text{si } K \text{ est quadrilatère} \\ P_k(\hat{K}) & \text{si } K \text{ est triangulaire} \end{cases}$$

Avant de passer à l'étude des exemples, on rappelle, maintenant, deux résultats importants démontrés par STENBERG dans [27] et [30].

### LEMME 2-3

Désignons par  $E_{\hat{M}}$  la classe de tous les macroéléments équivalents au macroélément de référence  $\hat{M}$ . Supposons que pour tout  $M \in E_{\hat{M}}$ , l'espace

$$N_M^h = \{q_h \in Q_M^h / (\text{div } v_h, q_h) = 0, \forall v_h \in V_{0,M}^h\} \quad (2-27)$$

où

$$Q_M^h = \left\{ q_h \in L_0^n(M) / q_h = -\frac{1}{2} \text{tr } \tau_h, \tau_h \in W_M^h \right\} \quad (2-28)$$

est de dimension une, constitué par des fonctions constantes

dans M.

Alors, il existe une constante  $\beta_{\hat{M}}$  telle que

$$\sup_{\substack{v_h \in V_{M,0}^h \\ v_h \neq 0}} \frac{(\operatorname{div} v_h, q_h)_M}{\|v_h\|_1} \geq \beta_{\hat{M}} \|q_h\|_{0,M} \quad \forall q_h \in Q_M^h \quad (2-29)$$

**LEMME 2-4**

S'il existe un nombre fini de classes d'équivalence

$E_{\hat{M}i}$  ( $i=1, \dots, n$ ) de macroéléments, et un partitionnement de macroéléments  $M_h$  tels que:

- Pour tout  $M \in E_{\hat{M}i}$  ( $i=1, \dots, n$ ) l'espace  $N_M^h$  est de dimension une.
- Chaque  $M \in M_h$  appartient à une des classes  $E_{\hat{M}i}$  ( $i=1, \dots, n$ ) alors, l'inégalité (2-13) est vérifiée.

**EXEMPLE 2-1**

On s'intéresse maintenant aux couples de dimension deux. De plus, on suppose que  $\Omega$  est subdivisé en triangles convexes.

A partir de (2-19) et (2-20), on définit l'élément  $P_2$ - $P_1$  par la paire d'espaces d'éléments

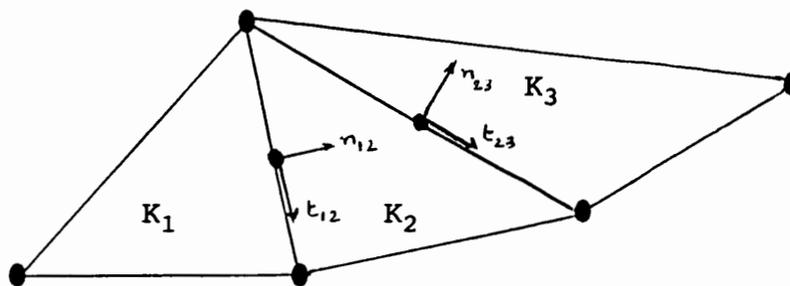
finis  $\{V_h, W_h\}$  :

$$V_h = \left\{ \begin{array}{l} v_h \in (C^0(\Omega))^2; v_h|_K \in (P_2(K))^2, K \in \mathfrak{S}_h, \\ v_h = 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right\} \quad (2-30)$$

$$W_h = \left\{ \begin{array}{l} \tau_h = (\tau_{ij}^h) \in (L^2(\Omega))^{2 \times 2} \cap (C^0(\Omega))^{2 \times 2}; \tau_{ij}^h = \tau_{ji}^h, i, j = 1, 2, \\ \tau_{ij}^h|_K \in (P_1(K))^{2 \times 2}, K \in \mathfrak{S}_h \end{array} \right\} \quad (2-31)$$

Soit  $M = K_1 \cup K_2 \cup K_3$  le macroélément constitué de trois triangles,

comme illustré dans la Fig 2-1.



**Fig 2-1**

De même on note que  $t_{12}, t_{23}$  et  $n_{12}, n_{23}$  sont respectivement les vecteurs tangentiels et normaux des deux cotés intérieurs de  $M$ .

Pour un macroélément  $M$ , on définit les espaces

$$V_M^h = \left\{ \begin{array}{l} v_h \in (C^0(M))^2; v_h|_K \in (P_2(K))^2, K \subset M, \\ v_h = 0 \text{ sur } \Gamma_M \end{array} \right\} \quad (2-32)$$

$$W_M^h = \left\{ \begin{array}{l} \tau_h = (\tau_{ij}^h) \in (L^2(M))^{2 \times 2} \cap (C^0(M))^{2 \times 2}; \tau_{ij}^h = \tau_{ji}^h, i, j = 1, 2, \\ \tau_{ij}^h|_K \in (P_1(K))^{2 \times 2}, \forall K \in M \end{array} \right\} \quad (2-33)$$

On considère l'espace

$$V_{K_1 \cup K_2}^h = \{v_h \in V_M^h, v_h|_{K_3} = 0\}$$

Maintenant,  $v_h \in V_{K_1 \cup K_2}^h$  est choisi tel que

$$v_h \cdot t_{12}/K_j = 4\lambda_{1j}\lambda_{2j}, \quad (j=1,2) \text{ et } v_h \cdot n_{12} = 0.$$

Puisque

$$q_h = -\frac{1}{2} \text{tr} \tau_h$$

on a

$$q_h = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ij} \lambda_{ij} \quad (j=1,2)$$

Et donc,  $\nabla q_h \cdot t_{12}$  est constant sur  $K_1 \cup K_2$ .

En utilisant la formule de GREEN, on obtient

$$\begin{aligned} (\text{div } v_h, q_h) &= - (v_h, \nabla q_h)_M \\ &= \sum_{j=1}^2 (v_h, \nabla q_h)_{K_j} \\ &= \sum_{j=1}^2 \int_{K_j} (v_h \cdot t_{12}) (\nabla q_h \cdot t_{12}) \, dx \\ &= \left( \sum_{j=1}^2 \int_{K_j} 4 \lambda_{1j} \cdot \lambda_{2j} \, dx \right) (\nabla q_h \cdot t_{12}) \\ &= -\frac{1}{3} [\text{aire}(K_1) + \text{aire}(K_2)] (\nabla q_h \cdot t_{12}) \end{aligned}$$

Alors, la condition  $(\text{div } v_h, q_h)_h = 0$  donne

$$\nabla q_h \cdot t_{12} = 0 \quad \text{dans } K_1 \cup K_2 \quad (2-34)$$

Maintenant, on choisit  $v_h \in V_{K_2 \cup K_3}^h$  tel que

$$V_{K_2 \cup K_3}^h = \{v_h \in V_M^h, v_h|_{K_1} = 0\}$$

et

$$v_h \cdot t_{23}|_{K_j} = 4 \lambda_{1j} \lambda_{2j} \quad (j=2,3) \quad \text{et} \quad v_h \cdot n_{23} = 0.$$

Comme précédemment, en utilisant la formule de GREEN, on obtient

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div} v_h, q_h) &= - (v_h, \nabla q_h)_M \\
&= \sum_{j=2}^3 (v_h, \nabla q_h)_{K_j} \\
&= \sum_{j=2}^3 \int_{K_j} (v_h \cdot t_{23}) (\nabla q_h \cdot t_{23}) dx \\
&= \left( \sum_{j=2}^3 \int_{K_j} 4 \lambda_{ij} \cdot \lambda_{2j} dx \right) (\nabla q_h \cdot t_{23}) \\
&= -\frac{1}{3} [\operatorname{aire}(K_2) + \operatorname{aire}(K_3)] (\nabla q_h \cdot t_{23})
\end{aligned}$$

Comme  $q_h \in N_M^h$ , on a

$$\nabla q_h \cdot t_{23} = 0 \quad \text{dans } K_2 \cup K_3 \quad (2-35)$$

D'après (2-34) et (2-35), on obtient

$$\nabla q_h \cdot t_{23} = 0 \quad \text{dans } K_2 \quad (2-36)$$

Ceci entraîne que  $q_h \in N_M^h$  est constant dans  $K_2$ .

D'autre part, on choisit  $v_h \in V_{K_1 \cup K_2}^h$  tel que

$$v_h \cdot n_{12}/K_j = 4 \lambda_{1j} \lambda_{2j} \quad (j=1,2) \quad \text{et} \quad v_h \cdot t_{12} = 0.$$

En utilisant de nouveau la formule de GREEN, on obtient

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div} v_h, q_h) &= - (v_h, \nabla q_h)_M \\
&= \sum_{j=1}^2 (v_h, \nabla q_h)_{K_j}
\end{aligned}$$

D'après (2-36), on a

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div} v_h, q_h)_M &= - (v_h, \nabla q_h)_{K_1} \\
&= - \left( \int_{K_1} 4 \lambda_{11} \cdot \lambda_{21} dx \right) (\nabla q_h \cdot n_{12})
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{3} \text{aire}(K_1) (\nabla q_h \cdot n_{12})$$

Comme  $q_h \in N_M^h$ , alors

$$\nabla q_h \cdot n_{12} = 0 \quad \text{dans } K_1 \quad (2-37)$$

de sorte que

$$\nabla q_h = 0 \quad \text{dans } K_1$$

i.e.  $q_h$  est constant dans  $K_1$ . (2-38)

Maintenant, on choisit  $v_h \in V_{K_2 \cup K_3}^h$  tel que

$$v_h \cdot n_{23} / K_j = 4 \lambda_{1j} \lambda_{2j} \quad (j=2,3) \quad \text{et} \quad v_h \cdot t_{23} = 0.$$

En utilisant la formule de GREEN, on obtient

$$\begin{aligned} (\text{div } v_h, q_h)_M &= - (v_h, \nabla q_h)_M \\ &= \sum_{j=2}^3 (v_h, \nabla q_h)_{K_j} \end{aligned}$$

alors, (2-36) donne

$$\begin{aligned} (\text{div } v_h, q_h)_M &= - (v_h, \nabla q_h)_{K_3} \\ &= - \left( \int_{K_3} 4 \lambda_{11} \cdot \lambda_{21} dx \right) (\nabla q_h \cdot n_{23}) \\ &= -\frac{1}{3} \text{aire}(K_3) (\nabla q_h \cdot n_{23}) \end{aligned}$$

Et donc,  $q_h \in N_M^h$  et (2-35) entraînent

$$\nabla q_h = 0 \quad \text{dans } K_3 \quad (2-39)$$

i.e.  $q_h$  est constant dans  $K_3$ .

Par conséquent,  $q_h$  est constant et continu dans  $K_j$  ( $j=1,2,3$ ).

D'où,  $q_h$  est constant dans tout  $M$ . Comme  $q_h$  est quelconque dans

$N_M^h$ , ce dernier est de dimension une. D'après le lemme 2-4, l'inégalité (2-13) est vérifiée. En vertu du lemme 2-2, le problème "M<sub>h</sub>" admet une solution unique  $\{\sigma_h, v_h\} \in \tilde{W}_h \times V_h$ . De plus, on peut établir l'estimation d'erreur:

$$\|u - u_h\|_1 + \|\sigma - \sigma_h\|_0 \leq Ch^2(|u|_3 + |\sigma|_2) \quad (2-40)$$

(pour plus de détails voir [26], [28] et [29])

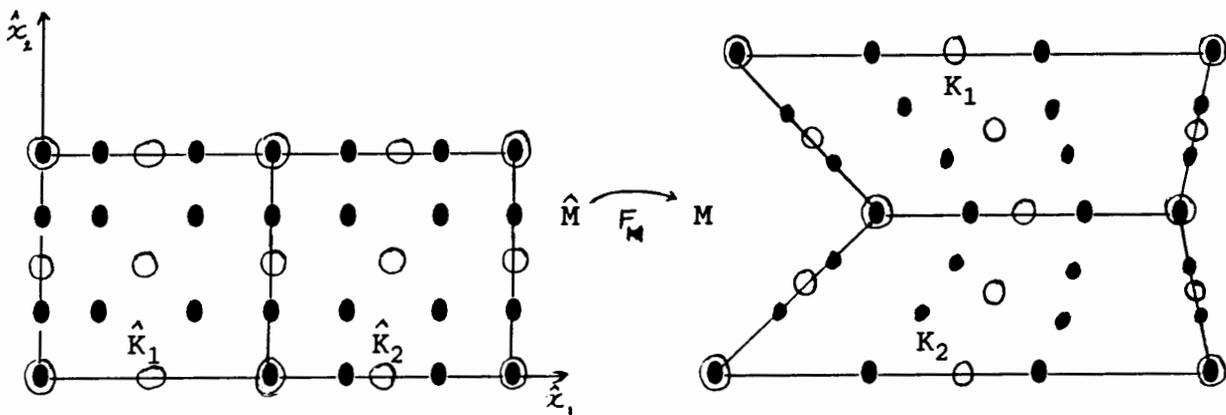
**EXEMPLE 2-2**

Soit  $\mathfrak{S}_h$  une subdivision de  $\Omega$  en quadrilatères convexes. On définit l'élément  $Q_3-Q_2$  par la paire d'espaces d'éléments finis  $\{V_h, W_h\}$  :

$$V_h = \left\{ \begin{array}{l} v_h \in (C^0(\Omega))^2; v_h|_K = \hat{v}_h \circ F_K^{-1}, \hat{v}_h \in (Q_3(\hat{K}))^2, \\ K \in \mathfrak{S}_h, v_h = 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right\} \quad (2-41)$$

$$W_h = \left\{ \begin{array}{l} \tau_h = (\tau_{ij}^h) \in (L^2(\Omega))^{2 \times 2} \cap (C^0(\Omega))^{2 \times 2}; \tau_{ij}^h = \tau_{ji}^h, \\ i, j = 1, 2, \tau_{ij}^h|_K = \hat{\tau}_{ij} \circ F_K^{-1}, \hat{\tau}_{i,j} \in (Q_2(\hat{K}))^{2 \times 2}, K \in \mathfrak{S}_h \end{array} \right\} \quad (2-42)$$

Soit  $M = K_1 \cup K_2$  un macroélément constitué de deux quadrilatères et le macroélément de référence correspondant  $\hat{M} = \hat{K}_1 \cup \hat{K}_2$ , comme illustré dans la Fig 2-2.



**Fig 2-2**

Pour un macroélément  $M$ , on définit les espaces:

$$V_M^h = \left\{ \begin{array}{l} v_h \in (C^0(M))^2; v_h /_K = \hat{v}_h \circ F_K^{-1}, \hat{v}_h \in (Q_3(\hat{K}))^2, \\ K \subset M, v_h /_{\Gamma_M} = 0 \end{array} \right\} \quad (2-43)$$

$$W_h^M = \left\{ \begin{array}{l} \tau_h = (\tau_{ij}^h) \in (L^2(M))^{2 \times 2} \cap (C^0(M))^{2 \times 2}; \tau_{ij}^h = \tau_{ji}^h, i, j = 1, 2, \\ \tau_{ij}^h /_K = \hat{\tau}_{ij} \circ F_K^{-1}, \hat{\tau}_{i,j} \in (Q_2(\hat{K}))^{2 \times 2}, K \in M \end{array} \right\} \quad (2-44)$$

Soit  $F = (F_1, F_2)$  une application bilinéaire et continue par morceaux de  $\hat{M}$  vers  $M$ .

Pour  $v_h \in V_M^h$  et  $q_h \in Q_M^h$ , on définit  $v, q$  sur  $M$  par:

$$\hat{v}(\hat{x}) = v_h(F(\hat{x})) \quad \text{et} \quad \hat{q}(\hat{x}) = q_h(F(\hat{x}))$$

En utilisant la formule de GREEN, on obtient

$$\begin{aligned} (\text{div } v_h, q_h)_M &= - (v_h, \nabla q_h)_M \\ &= \sum_{j=1}^2 (v_h, \nabla q_h)_{K_j} \\ &= - \sum_{j=1}^2 \int_{\hat{K}_j} \hat{v}_h(\hat{x})^T J_F^{-T}(\hat{x}) \nabla \hat{q}(\hat{x}) |J_F(\hat{x})| d\hat{x} \end{aligned}$$

où  $J_F$  est la matrice jacobienne de  $F$ ,  $J_F^{-T}$  est la transposée de  $J_F^{-1}$  et  $|J_F|$  est le déterminant de  $J_F$ .

Comme  $v(x)$  et  $\nabla q(x)$  sont des vecteurs colonnes et

$$|J_F(\hat{x})| J_F^{-T}(\hat{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_2(\hat{x})}{\partial \hat{x}_2} & - \frac{\partial F_2(\hat{x})}{\partial \hat{x}_1} \\ - \frac{\partial F_1(\hat{x})}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial F_1(\hat{x})}{\partial \hat{x}_1} \end{bmatrix} \quad (2-45)$$

(2-44) et (2-45) entraînent :

$$[|J_F(\hat{x})| J_F^{-T}(\hat{x}) \nabla \hat{q}(\hat{x})] / \hat{K}_j \in (Q_2(\hat{K}_j))^2, \quad (j=1,2) \quad (2-46)$$

D'autre part, (2-43) et (2-46) donnent

$$[\hat{\nu}(\hat{x})^T J_F^{-T}(\hat{x}) \nabla \hat{q}(\hat{x}) |J_F(\hat{x})|] / \hat{K}_j \in Q_5(\hat{K}_j) \quad (j=1,2) \quad (2-47)$$

Pour calculer la valeur exacte de l'intégrale :

$$\int_{\hat{K}_j} [\hat{\nu}(\hat{x})^T J_F^{-T}(\hat{x}) \nabla \hat{q}(\hat{x}) |J_F(\hat{x})|] d\hat{x} \quad (j=1,2) \quad (2-48)$$

on utilise la formule de GAUSS-LOBATTO; les points de GAUSS-LOBATTO de l'intervalle d'unité étant donnés par:

$$0 = a_0, a_1, a_2, a_3 = 1$$

Et donc, les points dans les deux quadrilatères sont définis par:

$$\hat{x}_{ij}^m = (a_i, a_j) \quad (i, j=0, \dots, 3, m=1,2)$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \int_{\hat{K}_j} [\hat{\nu}(\hat{x})^T J_F^{-T}(\hat{x}) \nabla \hat{q}(\hat{x}) |J_F(\hat{x})|] d\hat{x} = \\ \sum_{i=1}^{16} \alpha_i^m \hat{\nu}^T(\hat{x}_{ij}^m) J_F^{-T}(\hat{x}_{ij}^m) \nabla \hat{q}(\hat{x}_{ij}^m) |J_F(\hat{x}_{ij}^m)| \quad (2-49) \\ (i, j=0, \dots, 3, m=1,2) \end{aligned}$$

D'où,

$$(\text{div } v_h, q_h)_M = \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^{16} \alpha_i^m \hat{\nu}^T(\hat{x}_{ij}^m) J_F^{-T}(\hat{x}_{ij}^m) \nabla \hat{q}(\hat{x}_{ij}^m) |J_F(\hat{x}_{ij}^m)|$$

Comme, par définition, on a

$$\hat{q} = -\frac{1}{2} \text{tr } \hat{t} \quad \text{avec } \hat{t} \in \tilde{W}_R^h$$

où

$$\tilde{W}_M^h = \{ \tau_h \in W_M^h / \tau_h = s_h - q_h \cdot I, \text{tr} s_h = 0, s_h \in W_M^h, q_h \in Q_M^h \}$$

alors,

$$\begin{aligned} (\text{div} v_h, q_h)_M &= \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^{16} \alpha_i^m \varphi^T(\hat{x}_{ij}^m) J_F^{-T}(\hat{x}_{ij}^m) \nabla \hat{q}(\hat{x}_{ij}^m) |J_F(\hat{x}_{ij}^m)| \\ &\quad \cdot (\nabla \hat{\tau}_{11}(\hat{x}_{ij}^m) + \nabla \hat{\tau}_{22}(\hat{x}_{ij}^m)) \end{aligned}$$

Maintenant  $v_h \in V_M^h$  et  $\tau^h \in W_M^h$  sont choisis tels que:

$$\varphi_h(\hat{x}_{ij}^m) = (0, 0) \quad (i, j = 1, 2, \quad m = 1, 2)$$

et

$$\hat{\tau}_{11}(\hat{x}_{ij}^m) = \hat{\tau}_{22}(\hat{x}_{ij}^m) \quad (i, j = 0, \dots, 3; \quad m = 1, 2)$$

Puisque  $q_h \in N_M^h$ , alors

$$\nabla \hat{\tau}_{11}(\hat{x}_{ij}^m) = \nabla \hat{\tau}_{22}(\hat{x}_{ij}^m) = 0, \quad i, j = 1, 2 \quad ; \quad m = 1, 2$$

On rappelle les bases sur  $\hat{K}_1$  et  $\hat{K}_2$ , ainsi que la base globale sur  $\hat{M}$ .

Dans  $\hat{K}_1$ :

$$\hat{\phi}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (2\hat{x}_1 - 1)(\hat{x}_1 - 1)(2\hat{x}_2 - 1)(\hat{x}_2 - 1)$$

$$\hat{\phi}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = -4(2\hat{x}_1 - 1)(\hat{x}_1 - 1)\hat{x}_2(\hat{x}_2 - 1)$$

$$\hat{\phi}_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (2\hat{x}_1 - 1)(\hat{x}_1 - 1)\hat{x}_2(2\hat{x}_2 - 1)$$

$$\hat{\phi}_4(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = -4\hat{x}_1(\hat{x}_1 - 1)(2\hat{x}_2 - 1)(\hat{x}_2 - 1)$$

$$\hat{\phi}_5(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = 16\hat{x}_1(\hat{x}_1 - 1)\hat{x}_2(\hat{x}_2 - 1)$$

$$\hat{\phi}_6(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = -4\hat{x}_1(\hat{x}_1 - 1)\hat{x}_2(2\hat{x}_2 - 1)$$

$$\hat{\phi}_7(x_1, x_2) = x_1 (2x_1 - 1) (2x_2 - 1) (x_2 - 1)$$

$$\hat{\phi}_8(x_1, x_2) = -4x_1 (2x_1 - 1) x_2 (x_2 - 1)$$

$$\hat{\phi}_9(x_1, x_2) = x_1 (2x_1 - 1) x_2 (2x_2 - 1)$$

Dans  $\hat{K}_2$ :

$$\psi_1(x_1, x_2) = (2x_1 - 3) (x_1 - 2) (2x_2 - 1) (x_2 - 1)$$

$$\psi_2(x_1, x_2) = -4 (2x_1 - 3) (x_1 - 2) x_2 (x_2 - 1)$$

$$\psi_3(x_1, x_2) = (2x_1 - 3) (x_1 - 2) x_2 (2x_2 - 1)$$

$$\psi_4(x_1, x_2) = -4 (x_1 - 1) (x_1 - 2) (2x_2 - 1) (x_2 - 1)$$

$$\psi_5(x_1, x_2) = 16 (x_1 - 1) (x_1 - 2) x_2 (x_2 - 1)$$

$$\psi_6(x_1, x_2) = -4 (x_1 - 1) (x_1 - 2) x_2 (2x_2 - 1)$$

$$\psi_7(x_1, x_2) = (x_1 - 1) (2x_1 - 3) (2x_2 - 1) (x_2 - 1)$$

$$\psi_8(x_1, x_2) = -4 (x_1 - 1) (2x_1 - 3) x_2 (x_2 - 1)$$

$$\psi_9(x_1, x_2) = (x_1 - 1) (2x_1 - 3) x_2 (2x_2 - 1)$$

Dans  $\hat{M}$  :

$$\hat{\phi}_1(x) = \begin{cases} \hat{\phi}_1 & \text{dans } \hat{K}_1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\hat{\phi}_2(x) = \begin{cases} \hat{\phi}_2 & \text{dans } \hat{K}_1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\hat{\phi}_3(x) = \begin{cases} \hat{\phi}_3 & \text{dans } \hat{K}_1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\hat{\phi}_4(x) = \begin{cases} \hat{\phi}_4 & \text{dans } \hat{K}_1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\hat{\phi}_5(x) = \begin{cases} \hat{\phi}_5 & \text{dans } \hat{K}_1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\hat{\phi}_6(x) = \begin{cases} \hat{\phi}_6 & \text{dans } \hat{K}_1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\hat{\phi}_7(\hat{x}) = \begin{cases} \phi_7 & \text{dans } \hat{K}_1 \\ \phi_1 & \text{dans } \hat{K}_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \hat{\phi}_8(\hat{x}) = \begin{cases} \phi_8 & \text{dans } \hat{K}_2 \\ \phi_2 & \text{dans } \hat{K}_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\hat{\phi}_9(\hat{x}) = \begin{cases} \phi_9 & \text{dans } \hat{K}_1 \\ \phi_3 & \text{dans } \hat{K}_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \hat{\phi}_{10}(\hat{x}) = \begin{cases} \phi_4 & \text{dans } \hat{K}_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\hat{\phi}_{11}(\hat{x}) = \begin{cases} \phi_5 & \text{dans } \hat{K}_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \hat{\phi}_{12}(\hat{x}) = \begin{cases} \phi_6 & \text{dans } \hat{K}_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\hat{\phi}_{13}(\hat{x}) = \begin{cases} \phi_7 & \text{dans } \hat{K}_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \hat{\phi}_{14}(\hat{x}) = \begin{cases} \phi_8 & \text{dans } \hat{K}_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\hat{\phi}_{15}(\hat{x}) = \begin{cases} \phi_9 & \text{dans } \hat{K}_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Ainsi,  $\tau_{11}(x_{ij}^1) = 0$  ( $i, j=1, 2$ ) donne

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^{15} \beta_i \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial x_1}(x_{11}^1), \sum_{i=1}^{15} \beta_i \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial x_2}(x_{11}^1) \right) = (0, 0) \\ & \left( \sum_{i=1}^{15} \beta_i \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial x_1}(x_{12}^1), \sum_{i=1}^{15} \beta_i \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial x_2}(x_{12}^1) \right) = (0, 0) \quad (2-50) \\ & \left( \sum_{i=1}^{15} \beta_i \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial x_1}(x_{21}^1), \sum_{i=1}^{15} \beta_i \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial x_2}(x_{21}^1) \right) = (0, 0) \\ & \left( \sum_{i=1}^{15} \beta_i \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial x_1}(x_{22}^1), \sum_{i=1}^{15} \beta_i \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial x_2}(x_{22}^1) \right) = (0, 0) \end{aligned}$$

Ceci entraîne le système d'équations suivant:

$$-10\beta_1 - 40\beta_2 + 5\beta_3 + 8\beta_4 + 32\beta_5 - 4\beta_6 - 2\beta_7 + 8\beta_8 - \beta_9 = 0$$

$$-2\beta_1 - 8\beta_2 + \beta_3 - 8\beta_4 - 32\beta_5 + 4\beta_6 + 10\beta_7 + 40\beta_8 - 5\beta_9 = 0$$

$$5\beta_1 - 40\beta_2 - 10\beta_3 - 4\beta_4 + 32\beta_5 + 8\beta_6 - \beta_7 + 8\beta_8 + 2\beta_9 = 0$$

$$\beta_1 - 8\beta_2 - 2\beta_3 + 4\beta_4 - 32\beta_5 - 8\beta_6 - 5\beta_7 + 40\beta_8 + 10\beta_9 = 0$$

$$-10\beta_1 + 8\beta_2 + 2\beta_3 - 40\beta_4 + 32\beta_5 + 8\beta_6 + 5\beta_7 - 4\beta_8 - \beta_9 = 0$$

$$5\beta_1 - 4\beta_2 - \beta_3 - 40\beta_4 + 32\beta_5 + 8\beta_6 - 10\beta_7 + 8\beta_8 + 2\beta_9 = 0$$

$$-2\beta_1 - 8\beta_2 + 10\beta_3 - 8\beta_4 - 32\beta_5 + 40\beta_6 + \beta_7 + 4\beta_8 - 5\beta_9 = 0$$

$$\beta_1 + 4\beta_2 - 5\beta_3 - 8\beta_4 - 32\beta_5 + 40\beta_6 - 2\beta_7 - 8\beta_8 - 10\beta_9 = 0$$

dont la solution satisfait:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta_3 = \beta_7 = \beta_9 \\ \beta_2 &= \beta_4 = \beta_6 = \beta_8 \\ 8\beta_5 &= \beta_9 + 7\beta_8 \end{aligned} \quad (2-51)$$

D'autre part,  $\tau_{11}(x_{ij}^2) = 0$  ( $i, j=1, 2$ ) donne

$$\left( \sum_{i=1}^{15} \beta_i \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial x_1}(x_{11}^2), \sum_{i=1}^{15} \beta_i \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial x_2}(x_{11}^2) \right) = (0, 0)$$

$$\left( \sum_{i=1}^{15} \beta_i \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial x_1}(x_{12}^2), \sum_{i=1}^{15} \beta_i \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial x_2}(x_{12}^2) \right) = (0, 0) \quad (2-52)$$

$$\left( \sum_{i=1}^{15} \beta_i \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial x_1}(x_{21}^2), \sum_{i=1}^{15} \beta_i \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial x_2}(x_{21}^2) \right) = (0, 0)$$

$$\left( \sum_{i=1}^{15} \beta_i \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial x_1}(x_{22}^2), \sum_{i=1}^{15} \beta_i \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial x_2}(x_{22}^2) \right) = (0, 0)$$

qui admet comme solution:

$$\begin{aligned}
\beta_7 &= \beta_9 = \beta_{13} = \beta_{15} \\
\beta_8 &= \beta_{10} = \beta_{12} = \beta_{14} \\
8\beta_{11} &= \beta_{15} + 7\beta_{14}
\end{aligned} \tag{2-53}$$

En combinant (2-51) et (2-53), on obtient:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \beta_3 = \beta_7 = \beta_9 = \beta_{13} = \beta_{15} = a \\
\beta_2 &= \beta_4 = \beta_6 = \beta_8 = \beta_{10} = \beta_{12} = \beta_{14} = b \\
\beta_5 &= \beta_{11} = \frac{1}{8} (a+7b)
\end{aligned} \tag{2-54}$$

avec  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Maintenant, on choisit  $v_h \in V_M^h$  tel que:

$$\hat{v}(\mathcal{X}_{ij}^m) = 0 \quad (m, i, j = 1, 2)$$

et

$$\hat{v}(\mathcal{X}_{3j}^1) = \hat{v}(\mathcal{X}_{0j}^2) \neq 0 \quad (j=1, 2)$$

et on choisit  $\tau \in \tilde{W}_M^h$  tel que

$$\hat{\tau}_{11}(\hat{\mathcal{X}}) = \hat{\tau}_{22}(\hat{\mathcal{X}})$$

Puisque  $q_h \in N_M^h$ , on doit avoir:

$$\begin{aligned}
\hat{v}^T(\mathcal{X}_{3j}^1) \{ [J_F^{-T}(\mathcal{X}_{3j}^1) \nabla \hat{Q}(\mathcal{X}_{3j}^1) | J_F(\mathcal{X}_{3j}^1) |] / \mathcal{R}_1 + [J_F^{-T}(\mathcal{X}_{0j}^2) \nabla \hat{Q}(\mathcal{X}_{0j}^2) | J_F(\mathcal{X}_{0j}^2) |] / \mathcal{R}_2 \} = 0 \\
(j=1, 2)
\end{aligned} \tag{2-55}$$

Maintenant, si on prend

$$\hat{v}_h(\mathcal{X}_{31}^1) = \hat{v}_h(\mathcal{X}_{01}^2) = x_{30}^1 x_{03}^2$$

avec  $x_{30}^1 x_{03}^2$  désignant le vecteur de  $x_{30}^1$  vers  $x_{03}^2$ , alors

$$\begin{aligned}
[J_F^{-T}(\mathcal{X}_{31}^1) \hat{v}(\mathcal{X}_{31}^1)] / \mathcal{R}_1 &= \hat{e}_2 \\
&= x_{30}^1 x_{03}^2 \quad (j=1, 2)
\end{aligned}$$

où  $\hat{e}_2 = (0, 1)$

D'après la continuité de  $\partial\tau_{11}/\partial x_2$  en  $x_{31}^1$ , (2-55) donne

$$\frac{\partial \hat{\tau}_{11}}{\partial \hat{x}_2}(\hat{x}_{31}^1) [ |J_F(\hat{x}_{31}^1)| / \hat{K}_1 + |J_F(\hat{x}_{31}^1)| / \hat{K}_2 ] = 0 \quad (2-56)$$

Ceci entraîne

$$- 5\beta_7 + 4\beta_8 + \beta_9 = 0$$

et en tenant compte de (2-54), il vient  $\beta_i = a$  ( $i=1, \dots, 15$ ), i.e.

$a=b$ . Et donc, l'espace  $N_M^h$  est de dimension une.

Comme précédemment, le problème " $M_h$ " admet une solution unique  $\{\sigma_h, v_h\}$  avec l'estimation d'erreur:

$$\|u - u_h\|_1 + \|\sigma - \sigma_h\|_0 \leq Ch^3 (|u|_4 + |\sigma|_3) \quad (2-57)$$

(pour plus de détails, voir [26], [28] et [29]).

TROISIEME CHAPITRE:

THEORIE DE LA STABILISATION DES  
METHODES MIXTES D'ÉLÉMENTS FINIS

Dans ce chapitre, on présente une modification de la formulation approchée pour le problème d'élasticité, qui consiste à ajouter des termes de stabilisation à la formulation approchée standard. On déduit des conditions suffisantes sur ces termes tout en assurant l'existence, l'unicité et la convergence de la solution approchée vers la solution exacte.

Ensuite, on donne des applications où des termes acceptables de stabilisation sont concrètement construits.

### 3-1 CONDITIONS SUFFISANTES DE STABILITE

On définit la forme bilinéaire généralisée  $B(\{.,.\};\{.,.\})$  par:

$$B_h(\{\xi, w\};\{\tau, v\}) = a_p(\xi, \tau) + d(v, \xi) + d(w, \xi) + E_h(\{\xi, w\};\{\tau, v\}) \quad (3-1)$$

$$\forall (\xi, w), (\tau, v) \in W_h \times V_h$$

telle que  $E_h$  est une forme bilinéaire symétrique continue sur  $(W_h \times V_h)^2$ ,

i.e. il existe une constante  $0 < C_1 < +\infty$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$E_h(\{\xi, w\};\{\tau, v\}) \leq C_1(\|\xi\|_0 + \|w\|_1)(\|\tau\|_0 + \|v\|_1) \quad (3-2)$$

$$\forall (\xi, w), (\tau, v) \in W_h \times V_h$$

On a, immédiatement, le résultat suivant.

#### LEMME 3-1

Il existe une constante  $0 < C < +\infty$  telle que

$$B_h(\{\xi, w\};\{\tau, v\}) \leq C(\|\xi\|_0 + \|w\|_1)(\|\tau\|_0 + \|v\|_1) \quad (3-3)$$

$$\forall (\xi, w), (\tau, v) \in W_h \times V_h$$

### DEMONSTRATION

On a,

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) = a_p(\xi, \tau) + d(v, \xi) + d(w, \tau) + E_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})$$

En utilisant l'inégalité de CAUCHY-SCHWARTZ, on obtient

$$\begin{aligned} B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) &\leq \max\left\{\frac{1}{2\mu}, \frac{\rho}{2\mu}\right\} \|\xi\|_0 \|\tau\|_0 + \|v\|_1 \|\xi\|_0 + \|w\|_1 \|\tau\|_0 + \\ &\quad + C_1 (\|\xi\|_0 + \|w\|_1) (\|\tau\|_0 + \|v\|_1) \\ &\leq \max\left\{1, \frac{1}{2\mu}, \frac{\rho}{2\mu}\right\} \|\xi\|_0 (\|\tau\|_0 + \|v\|_1) + \|w\|_1 \|\tau\|_0 + \\ &\quad + C_1 (\|\xi\|_0 + \|w\|_1) (\|\tau\|_0 + \|v\|_1) \\ &\leq \max\left\{1, \frac{1}{2\mu}, \frac{\rho}{2\mu}\right\} (\|\xi\|_0 + \|w\|_1) (\|\tau\|_0 + \|v\|_1) + \\ &\quad + C_1 (\|\xi\|_0 + \|w\|_1) (\|\tau\|_0 + \|v\|_1) \\ &\leq \left(\max\left\{1, \frac{1}{2\mu}, \frac{\rho}{2\mu}\right\} + C_1\right) (\|\xi\|_0 + \|w\|_1) (\|\tau\|_0 + \|v\|_1) \end{aligned}$$

L'inégalité (3-3) est ainsi établie pour

$$C = \max\left\{1, \frac{1}{2\mu}, \frac{\rho}{2\mu}\right\} + C_1$$

Maintenant, on peut énoncer une nouvelle formulation discrète du problème d'élasticité:

### PROBLEME $S_h$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma_h, u_h) \in W_h \times V_h \text{ telle que :} \\ B_h(\{\sigma_h, u_h\}; \{\tau, v\}) = L_h(\tau, v) \quad \forall (\tau, v) \in W_h \times V_h \end{array} \right] \quad (3-4)$$

où  $L_h$  est une fonctionnelle linéaire définie sur  $W_h \times V_h$  par:

$$L_h(\tau, v) = -(f, v) \quad \forall (\tau, v) \in W_h \times V_h .$$

Maintenant, on propose des démonstrations plus simples pour les résultats de stabilité déjà démontrés par Abada dans [1].

**THEOREME 3-1**

Supposons les hypothèses suivantes:

(H1)<sub>1</sub>: Il existe une constante  $\beta_1 > 0$ , indépendante de h, telle que

$$E_h((\tau, 0); (\tau, 0)) \geq \beta_1 \|\tau\|_0^2 \quad \forall \tau \in W_h \quad (3-5)$$

(H2)<sub>1</sub>: Il existe une constante  $\theta_1 > 0$ , indépendante de h, telle que

$$E_h((-qI, v); (-qI, -v)) \geq \theta_1 (\|qI\|_0 + \|v\|_1)^2 \quad \forall (q, v) \in Q_h \times V_h$$

$$\text{où} \quad Q_h = \left\{ q \in L_0^2(\Omega) / q = -\frac{1}{n} \text{tr} \tau \text{ avec } \tau \in W_h \right\} \quad (3-6)$$

(H3)<sub>1</sub>:  $C_1 < \min\{ \beta_1 + 1/2\mu, \theta_1 + \rho/2\mu \}$  (3-7)

Alors, il existe une constante  $\gamma_1 > 0$ , indépendante de h, telle que

$$\sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{B_h((\xi, w); (\tau, v))}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \gamma_1 (\|\xi\|_0 + \|w\|_1) \quad (3-8)$$

$$\forall (\xi, w) \in W_h \times V_h$$

**DEMONSTRATION**

Soit  $(\xi, w)$  un élément arbitraire de  $W_h \times V_h$ . Décomposons  $\xi$  comme suit:

$$\xi = s - q.I$$

où  $q = -1/n \text{tr} \xi$  et  $s \in W_h$  tel que  $\text{tr} s = 0$ .

Définissons  $v \in V_h$  et  $\tau \in W_h$  par:

$$\begin{cases} v = -w \\ \tau = \xi = s - q.I \end{cases}$$

Alors,

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) = B_h(\{\xi, w\}; \{\xi, -w\})$$

avec

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) = a_p(\xi, \xi) + E_h(\{\xi, w\}; \{\xi, -w\})$$

et

$$a_p(\xi, \xi) = \frac{1}{2\mu} (\|s\|_0^2 + \rho \|qI\|_0^2)$$

Mais,

$$\begin{aligned} E_h(\{\xi, w\}; \{\xi, -w\}) &= E_h(\{s, 0\}; \{s, 0\}) + 2E_h(\{-qI, 0\}; \{s, 0\}) + \\ &+ E_h(\{-qI, w\}; \{-qI, -w\}). \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} B_h(\{\xi, w\}; \{\xi, -w\}) &= \frac{1}{2\mu} (\|s\|_0^2 + \rho \|qI\|_0^2) + E_h(\{s, 0\}; \{s, 0\}) + 2E_h(\{-qI, 0\}; \{s, 0\}) \\ &+ E_h(\{-qI, w\}; \{-qI, -w\}). \end{aligned}$$

Ceci entraîne

$$\begin{aligned} B_h(\{\xi, w\}; \{\xi, -w\}) &\geq \frac{1}{2\mu} (\|s\|_0^2 + \rho \|qI\|_0^2) + \beta_1 \|s\|_0^2 - 2c_1 \|qI\|_0 \|s\|_0 + \\ &+ \theta_1 (\|w\|_1 + \|qI\|_0)^2 \\ &\geq \frac{1}{2\mu} \|s\|_0^2 + \frac{\rho}{2\mu} \|qI\|_0^2 + \beta_1 \|s\|_0^2 - 2c_1 \|qI\|_0 \|s\|_0 + \\ &+ \theta_1 \|w\|_1^2 + \theta_1 \|qI\|_0^2 + 2\theta_1 \|qI\|_0 \|w\|_1 \\ &\geq \left(\frac{1}{2\mu} + \beta_1\right) \|s\|_0^2 + \left(\frac{\rho}{2\mu} + \theta_1\right) \|qI\|_0^2 + \theta_1 \|w\|_1^2 + \\ &+ 2\theta_1 \|qI\|_0 \|w\|_1 - 2c_1 \|qI\|_0 \|s\|_0 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
B_h(\{\xi, w\}; \{\xi, -w\}) &\geq \left(\frac{1}{2\mu} + \beta_1\right) \|s\|_0^2 + \left(\frac{\rho}{2\mu} + \theta_1\right) \|qI\|_0^2 + \theta_1 \|w\|_1^2 + \\
&\quad + 2\theta_1 \|qI\|_0 \|w\|_1 - C_1 (\|s\|_0^2 + \|qI\|_0^2) \\
&\geq \left(\frac{1}{2\mu} + \beta_1 - C_1\right) \|s\|_0^2 + \left(\frac{\rho}{2\mu} + \theta_1 - C_1\right) \|qI\|_0^2 + \\
&\quad + \theta_1 \|w\|_1^2 + 2\theta_1 \|qI\|_0 \|w\|_1 \\
&\geq C_2 (\|s\|_0^2 + \|qI\|_0^2 + \|w\|_1^2 + 2\|qI\|_0 \|w\|_1)
\end{aligned}$$

où

$$C_2 = \min\left\{\frac{1}{2\mu} + \beta_1 - C_1, \frac{\rho}{2\mu} + \theta_1 - C_1, \theta_1\right\}$$

On a évidemment,

$$\|\xi\|_0^2 + \|w\|_1^2 \geq \frac{1}{2} (\|\xi\|_0 + \|w\|_1)^2 \quad (3-9)$$

D'où,

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\xi, -w\}) \geq \frac{C_2}{2} (\|\xi\|_0 + \|w\|_1)^2$$

D'autre part, on a

$$\|\tau\|_0 + \|v\|_1 = \|\xi\|_0 + \|-w\|_1 = \|\xi\|_0 + \|w\|_1 \quad (3-10)$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} &\geq \frac{C_2}{2} (\|\xi\|_0 + \|w\|_1) \\
&\quad \forall (\xi, w) \in W_h \times V_h
\end{aligned}$$

et donc, l'inégalité (3-8) est établie pour  $\gamma_1 = C_2/2 > 0$ , qui est évidemment indépendante de  $h$ .

### THEOREME 3-2

Supposons l'hypothèse suivante:

(H1)<sub>2</sub>: Il existe une constante  $\theta_2' > 1/2$ , indépendante de h, telle que

$$E_h(\{\tau, v\}; \{\tau, v\}) \geq \theta_2' (\|\tau\|_0 + \|v\|_1)^2 \quad \forall (\tau, v) \in W_h \times V_h \quad (3-11)$$

Alors, il existe une constante  $\gamma_2 > 0$ , indépendante de h, telle que

$$\sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \gamma_2 (\|\xi\|_0 + \|w\|_1) \quad (3-12)$$
$$\forall (\xi, w) \in W_h \times V_h$$

### DEMONSTRATION

Soit  $(\xi, w)$  un élément arbitraire de  $W_h \times V_h$ . Décomposons  $\xi$  comme suit:

$$\xi = s - q.I$$

où  $q = -1/n \operatorname{tr} \xi$  et  $s \in W_h$  tel que  $\operatorname{tr} s = 0$ .

Définissons  $v \in V_h$  et  $\tau \in W_h$  par:

$$\begin{cases} v = w \\ \tau = \xi = s - q.I \end{cases}$$

Alors,

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) = B_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\})$$

avec

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) = a_p(\xi, \xi) + 2d(w, \xi) + E_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\})$$

et

$$a_p(\xi, \xi) = \frac{1}{2\mu} (\|s\|_0^2 + \rho \|qI\|_0^2)$$

Evidemment, on a

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) = \frac{1}{2\mu} (\|s\|_0^2 + \rho \|qI\|_0^2) + 2d(w, \xi) + E_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\})$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
B_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) &\geq \frac{1}{2\mu} (\|s\|_0^2 + \rho \|qI\|_0^2) - 2 \|w\|_1 \|\xi\|_0 + \\
&\quad + \theta_2 (\|w\|_1 + \|\xi\|_0)^2 \\
&\geq \frac{1}{2\mu} \|s\|_0^2 + \frac{\rho}{2\mu} \|qI\|_0^2 - 2 \|w\|_1 \|\xi\|_0 + \\
&\quad + \theta_2 \|w\|_1^2 + \theta_2 \|\xi\|_0^2 + 2\theta_2 \|\xi\|_0 \|w\|_1 \\
&\geq \frac{1}{2\mu} \|s\|_0^2 + \frac{\rho}{2\mu} \|qI\|_0^2 + 2(\theta_2 - 1) \|w\|_1 \|\xi\|_0 + \\
&\quad + \theta_2 \|w\|_1^2 + \theta_2 (\|s\|_0^2 + \|qI\|_0^2) \\
&\geq \left(\frac{1}{2\mu} + \theta_2\right) \|s\|_0^2 + \left(\frac{\rho}{2\mu} + \theta_2\right) \|qI\|_0^2 + \\
&\quad + \theta_2 \|w\|_1^2 + 2(\theta_2 - 1) \|w\|_1 \|\xi\|_0
\end{aligned} \tag{3-13}$$

1) Si  $\theta_2' \geq 1$ , on arrive à

$$\begin{aligned}
B_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) &\geq \left(\frac{1}{2\mu} + \theta_2\right) \|s\|_0^2 + \left(\frac{\rho}{2\mu} + \theta_2\right) \|qI\|_0^2 + \theta_2 \|w\|_1^2 + \\
&\quad + \theta_2 (\|s\|_0^2 + \|qI\|_0^2 + \|w\|_1^2)
\end{aligned}$$

Comme précédemment, d'après (3-9) et (3-10), on obtient

$$\frac{B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \frac{\theta_2}{2} (\|\xi\|_0 + \|w\|_1)$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) = (0, 0)}} \frac{B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} &\geq \frac{\theta_2}{2} (\|\xi\|_0 + \|w\|_1) \\
&\forall (\xi, w) \in W_h \times V_h
\end{aligned}$$

L'inégalité (3-12) est alors établie pour  $\gamma_2 = \theta_2'/2 > 0$  qui est

évidemment indépendante de h.

2) Si  $1/2 < \theta_2' < 1$ , on a

$$2(\theta_2 - 1) \|\xi\|_0 \|w\|_1 \geq (\theta_2 - 1)(\|\xi\|_0^2 + \|w\|_1^2)$$

et l'inégalité (3-13) peut être réécrite comme suit:

$$\begin{aligned} B_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) &\geq \left(\frac{1}{2\mu} + \theta_2'\right) \|s\|_0^2 + \left(\frac{\rho}{2\mu} + \theta_2'\right) \|qI\|_0^2 + \theta_2' \|w\|_1^2 + \\ &\quad + (\theta_2 - 1)(\|s\|_0^2 + \|qI\|_0^2 + \|w\|_1^2) \\ &\geq \left(\frac{1}{2\mu} + 2\theta_2' - 1\right) \|s\|_0^2 + \left(\frac{\rho}{2\mu} + 2\theta_2' - 1\right) \|qI\|_0^2 + \\ &\quad + (2\theta_2' - 1) \|w\|_1^2 \\ &\geq (2\theta_2' - 1)(\|s\|_0^2 + \|qI\|_0^2 + \|w\|_1^2) \end{aligned}$$

D'après (3-9), on obtient

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) \geq \frac{2\theta_2' - 1}{2} (\|\xi\|_0 + \|w\|_1)^2$$

D'où,

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} &\geq \frac{2\theta_2' - 1}{2} (\|\xi\|_0 + \|w\|_1) \\ &\quad \forall (\xi, w) \in W_h \times V_h \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité (3-12) est vérifiée pour  $\gamma_2 = (2\theta_2' - 1)/2 > 0$ , qui est évidemment indépendante de h.

### **THEOREME 3-3**

Supposons l'hypothèse suivante:

**(H1)<sub>3</sub>**: Il existe une constante  $\theta_3 > 0$ , indépendante de h, telle que

$$2d(v, \tau) + E_h(\{\tau, v\}; \{\tau, v\}) \geq \theta_3(\|\tau\|_0 + \|v\|_1)^2 \quad (3-14)$$

$$\forall (\tau, v) \in W_h \times V_h$$

Alors, il existe une constante  $\gamma_3 > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$\sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \gamma_3 (\|\xi\|_0 + \|w\|_1) \quad (3-15)$$

$$\forall (\xi, w) \in W_h \times V_h$$

### DEMONSTRATION

Soit  $(\xi, w)$  un élément arbitraire de  $W_h \times V_h$ . Décomposons  $\xi$  comme suit:

$$\xi = s - q.I$$

où  $q = -1/n \operatorname{tr} \xi$  et  $s \in W_h$  tel que  $\operatorname{tr} s = 0$ .

Définissons  $v \in V_h$  et  $\tau \in W_h$  par:

$$\begin{cases} v = w \\ \tau = \xi = s - q.I \end{cases}$$

Alors,

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) = B_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\})$$

Et donc,

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) = \frac{1}{2\mu} (\|s\|_0^2 + \rho \|qI\|_0^2) + 2d(w, \xi) + E_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\})$$

Ceci entraîne

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\xi, w\}) \geq \frac{1}{2\mu} (\|s\|_0^2 + \rho \|qI\|_0^2) + \theta_3(\|w\|_1 + \|\xi\|_0)^2$$

$$\geq \frac{1}{2\mu} \|s\|_0^2 + \frac{\rho}{2\mu} \|qI\|_0^2 + \theta_3 \|w\|_1^2 + \theta_3 \|\xi\|_0^2 + 2\theta_3 \|\xi\|_0 \|w\|_1$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{2\mu} \|s\|_0^2 + \frac{\rho}{2\mu} \|qI\|_0^2 + \theta_3 \|w\|_1^2 + \\
&\quad + \theta_3 (\|s\|_0^2 + \|qI\|_0^2) \\
&\geq \left(\frac{1}{2\mu} + \theta_3\right) \|s\|_0^2 + \left(\frac{\rho}{2\mu} + \theta_3\right) \|qI\|_0^2 + \theta_3 \|w\|_1^2 \\
&\geq \theta_3 (\|s\|_0^2 + \|qI\|_0^2 + \|w\|_1^2)
\end{aligned}$$

D'après (3-9) et (3-10), on obtient

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) \geq \frac{\theta_3}{2} (\|\xi\|_0 + \|w\|_1)^2$$

Alors,

$$\frac{B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \frac{\theta_3}{2} (\|\xi\|_0 + \|w\|_1)$$

D'où,

$$\sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \frac{\theta_3}{2} (\|\xi\|_0 + \|w\|_1)$$

L'inégalité (3-15) est vérifiée pour  $\gamma_3 = \theta_3/2 > 0$  qui est évidemment indépendante de h.

On passe maintenant aux améliorations qui consistent à déduire des conditions suffisantes plus faibles sur les termes de stabilisations pour obtenir la stabilité cherchée. A cet effet, une série de résultats sur la stabilité est proposée pour couvrir toutes les possibilités.

#### **THEOREME 3-4**

Supposons les hypothèses suivantes:

(H1)<sub>4</sub>: Il existe une constante  $\beta_4 > 0$ , indépendante de h, telle que

$$E_h(\{\tau, 0\}; \{\tau, 0\}) \geq \beta_4 \|\tau\|_0^2 \quad \forall \tau \in W_h \quad (3-16)$$

(H2)<sub>4</sub>: Il existe une constante  $\theta_4 > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$E_h(\{0, v\}; \{0, -v\}) \geq \theta_4 \|v\|_1^2 \quad \forall v \in V_h \quad (3-17)$$

Alors, il existe une constante  $\gamma_4 > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$\sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \gamma_4 (\|\xi\|_0 + \|w\|_1) \quad (3-18)$$

$$\forall (\xi, w) \in W_h \times V_h$$

### DEMONSTRATION

Soit  $(\xi, w)$  un élément arbitraire de  $W_h \times V_h$ . Décomposons  $\xi$  comme suit:

$$\xi = s - q.I$$

où  $q = -1/n \operatorname{tr} \xi$  et  $s \in W_h$  tel que  $\operatorname{tr} s = 0$ .

Définissons  $v \in V_h$  et  $\tau \in W_h$  par:

$$\begin{cases} v = -w \\ \tau = \xi = s - q.I \end{cases}$$

On a

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) = B_h(\{\xi, w\}; \{\xi, -w\})$$

Mais,

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\xi, -w\}) = a_p(\xi, \xi) + E_h(\{\xi, w\}; \{\xi, -w\})$$

avec

$$a_p(\xi, \xi) = \frac{1}{2\mu} (\|s\|_0^2 + \rho \|qI\|_0^2)$$

$$\begin{aligned} \text{D'où,} \\ B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) = & \frac{1}{2\mu} (\|s\|_0^2 + \rho \|qI\|_0^2) + E_h(\{s, 0\}; \{s, 0\}) + 2E_h(\{-qI, 0\}; \{s, 0\}) \\ & + E_h(\{-qI, w\}; \{-qI, -w\}). \end{aligned}$$

$$B_h(\xi, w; \tau, \nu) \geq \frac{2\mu}{1} (\|s\|_2^2 + \rho \|qI\|_2^2 + \beta^4 \|s - qI\|_2^2) + E_h(0, w; 0, -w)$$

D'où,

$$2E_h(s, 0; 0, -w) \geq \beta^4 \|s - qI\|_2^2 - E_h(0, w; 0, -w)$$

Ceci donne

$$E_h(s, 0; 0, -w) + E_h(0, w; 0, -w) \geq \beta^4 \|s - qI\|_2^2$$

qui peut être réécrite comme suit:

$$E_h(s - qI, 0; 0, -w) \geq \beta^4 \|s - qI\|_2^2$$

Mais,

$$B_h(\xi, w; \tau, \nu) = \frac{2\mu}{1} (\|s\|_2^2 + \rho \|qI\|_2^2 + E_h(s, 0; 0, -w) + 2E_h(0, w; 0, -w)) + E_h(0, w; 0, -w)$$

Alors,

$$E_h(s - qI, w; 0, -w) = E_h(0, w; 0, -w) + E_h(s, 0; 0, -w) + E_h(0, w; 0, -w)$$

D'autre part,

i.e.

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) \geq \frac{1}{2\mu} (\|s\|_0^2 + \rho \|qI\|_0^2) + \beta_4 \|s\|_0^2 + \beta_4 \|qI\|_0^2 + \theta_4 \|w\|_1^2$$

Ce qui donne

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) \geq \left(\frac{1}{2\mu} + \beta_4\right) \|s\|_0^2 + \left(\frac{\rho}{2\mu} + \beta_4\right) \|qI\|_0^2 + \theta_4 \|w\|_1^2$$

D'où,

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) \geq C (\|s\|_0^2 + \|qI\|_0^2 + \|w\|_1)$$

avec

$$C = \min\left\{\frac{1}{2\mu} + \beta_4, \frac{\rho}{2\mu} + \beta_4, \theta_4\right\}$$

On a, évidemment

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) \geq \frac{C}{2} (\|\xi\|_0 + \|w\|_1)^2$$

et donc,

$$\frac{B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \frac{C}{2} (\|\xi\|_0 + \|w\|_1)$$

D'où,

$$\sup_{\substack{(\tau, v) \in \mathbb{W}_h \times \mathbb{V}_h \\ (\tau, v) \neq (0,0)}} \frac{B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \gamma_4 (\|\xi\|_0 + \|w\|_1)$$

avec  $\gamma_4 = C/2 > 0$  qui est évidemment indépendante de  $h$ .

Dans le cas où  $\rho > 0$ , on peut déduire le résultat suivant:

### THEOREME 3-5

Supposons les hypothèses suivantes:

$$(H1)_5: \quad E_h(\{\tau, 0\}; \{\tau, 0\}) \geq 0 \quad \forall \tau \in W_h \quad (3-19)$$

(H2)<sub>5</sub>: Il existe une constante  $\theta_5 > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$E_h(\{0, v\}; \{0, -v\}) \geq \theta_5 \|v\|_1^2 \quad \forall v \in V_h \quad (3-20)$$

Alors, il existe une constante  $\gamma_5 > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$\sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \gamma_5 (\|\xi\|_0 + \|w\|_1) \quad (3-21)$$

$$\forall (\xi, w) \in W_h \times V_h$$

### DEMONSTRATION

Soit  $(\xi, w)$  un élément arbitraire de  $W_h \times V_h$ . Décomposons  $\xi$  comme suit:  $\xi = s - q.I$

où  $q = -1/n \operatorname{tr} \xi$  et  $s \in W_h$  tel que  $\operatorname{tr} s = 0$ .

Définissons  $v \in V_h$  et  $\tau \in W_h$  par:

$$\begin{cases} v = -w \\ \tau = \xi = s - q.I \end{cases}$$

On a

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) = B_h(\{\xi, w\}; \{\xi, -w\})$$

Comme

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\xi, -w\}) = a_p(\xi, \xi) + E_h(\{\xi, w\}; \{\xi, -w\})$$

avec

$$a_p(\xi, \xi) = \frac{1}{2\mu} (\|s\|_0^2 + \rho \|qI\|_0^2)$$

alors,

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) = \frac{1}{2\mu} (\|s\|_0^2 + \rho \|qI\|_0^2) + E_h(\{s, 0\}; \{s, 0\}) + 2E_h(\{-qI, 0\}; \{s, 0\}) \\ + E_h(\{-qI, w\}; \{-qI, -w\}).$$

Mais,

$$\begin{aligned} E_h(\{-qI, w\}; \{-qI, -w\}) &= E_h(\{-qI, 0\}; \{-qI, -w\}) + E_h(\{0, w\}; \{-qI, -w\}) \\ &= E_h(\{-qI, 0\}; \{-qI, 0\}) + E_h(\{-qI, 0\}; \{0, -w\}) \\ &\quad + E_h(\{0, w\}; \{-qI, 0\}) + E_h(\{0, w\}; \{0, -w\}) \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) &= \frac{1}{2\mu} (\|s\|_0^2 + \rho \|qI\|_0^2) + E_h(\{s, 0\}; \{s, 0\}) + 2 E_h(\{-qI, 0\}; \{s, 0\}) \\ &\quad + E_h(\{-qI, 0\}; \{-qI, 0\}) + E_h(\{0, w\}; \{0, -w\}) \end{aligned}$$

D'autre part, on a d'après (3-19):

$$E_h(\{s - qI, 0\}; \{s - qI, 0\}) \geq 0$$

ou

$$E_h(\{s, 0\}; \{s - qI, 0\}) + E_h(\{-qI, 0\}; \{s - qI, 0\}) \geq 0$$

ou

$$\begin{aligned} E_h(\{s, 0\}; \{s, 0\}) + E_h(\{s, 0\}; \{-qI, 0\}) + E_h(\{-qI, 0\}; \{s, 0\}) + \\ + E_h(\{-qI, 0\}; \{-qI, 0\}) \geq 0 \end{aligned}$$

D'où,

$$2 E_h(\{s, 0\}; \{-qI, 0\}) \geq -E_h(\{s, 0\}; \{s, 0\}) - E_h(\{-qI, 0\}; \{-qI, 0\})$$

de sorte que:

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) = \frac{1}{2\mu} (\|s\|_0^2 + \rho \|qI\|_0^2) + \theta_5 \|w\|_1^2$$

Finalement, on obtient:

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) \geq C (\|\xi\|_0^2 + \|w\|_1^2)$$

avec

$$C = \min \left\{ \frac{1}{2\mu}, \frac{\rho}{2\mu}, \theta_5 \right\}$$

Ainsi,

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) \geq \frac{C}{2} (\|\xi\|_0 + \|w\|_1)^2$$

et

$$\frac{B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \frac{C}{2} (\|\xi\|_0 + \|w\|_1)$$

D'où,

$$\sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \frac{C}{2} (\|\xi\|_0 + \|w\|_1)$$

et l'inégalité (3-21) est vérifiée pour  $\gamma_5 = C/2 > 0$  qui est évidemment indépendante de  $h$ .

### THEOREME 3-6

Supposons les hypothèses suivantes:

(H1)<sub>6</sub>: Il existe une constante  $0 < \beta_6 < \min\{1/2\mu, \rho/2\mu\}$ ,

indépendante de  $h$ , telle que

$$E_h(\{\tau, 0\}; \{\tau, 0\}) \geq -\beta_6 \|\tau\|_0^2 \quad \forall \tau \in W_h \quad (3-22)$$

(H2)<sub>6</sub>: Il existe une constante  $\theta_6 > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$E_h(\{0, v\}; \{0, -v\}) \geq \theta_6 \|v\|_1^2 \quad \forall v \in V_h \quad (3-23)$$

Alors, il existe une constante  $\gamma_6 > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$\sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \gamma_6 (\|\xi\|_0 + \|w\|_1) \quad (3-24)$$

$$\forall (\xi, w) \in W_h \times V_h$$

$$\|E_h(\{s-qI, 0\}; \{s-qI, 0\})\| \leq \beta^q \|s-qI\|_0^2$$

D'autre part, d'après (3-22) il vient:

$$\begin{aligned} & + E_h(\{0, w\}; \{-qI, 0\}) + E_h(\{0, w\}; \{0, -w\}) \\ & + E_h(\{-qI, 0\}; \{-qI, 0\}) + E_h(\{-qI, 0\}; \{0, -w\}) + \\ & B_h(\{\xi, w\}; \{r, v\}) = \frac{2h}{1} (\|s\|_0^2 + p \|qI\|_0^2 + E_h(\{s, 0\}; \{s, 0\}) + 2E_h(\{-qI, 0\}; \{s, 0\})) \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} & + E_h(\{0, w\}; \{-qI, 0\}) + E_h(\{0, w\}; \{0, -w\}) \\ & = E_h(\{-qI, 0\}; \{-qI, 0\}) + E_h(\{-qI, 0\}; \{0, -w\}) \\ & E_h(\{-qI, w\}; \{-qI, -w\}) = E_h(\{-qI, 0\}; \{-qI, -w\}) + E_h(\{0, w\}; \{-qI, -w\}) \end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned} & + 2E_h(\{-qI, 0\}; \{s, 0\}) + E_h(\{-qI, w\}; \{-qI, -w\}) \\ & = \frac{2h}{1} (\|s\|_0^2 + p \|qI\|_0^2 + E_h(\{s, 0\}; \{s, 0\})) + \end{aligned}$$

$$B_h(\{\xi, w\}; \{r, v\}) = B_h(\{\xi, w\}; \{\xi, -w\})$$

On a:

$$\left\{ \begin{aligned} r &= s - q \cdot I \\ v &= -w \end{aligned} \right.$$

Définissons  $v \in V_h$  et  $r \in W_h$  par:

où  $q = -1/n$  tr  $\xi$  et  $s \in W_h$  tel que tr  $s = 0$ .

$$\xi = s - q \cdot I$$

suit:

Soit  $(\xi, w)$  un élément arbitraire de  $W_h \times V_h$ . Décomposons  $\xi$  comme

**DEMONSTRATION**

ou

$$E_h(\{s, 0\}; \{s - qI, 0\}) + E_h(\{-qI, 0\}; \{s - qI, 0\}) \geq -\beta_6 \|s - qI\|_0^2$$

ou

$$E_h(\{s, 0\}; \{s, 0\}) + E_h(\{s, 0\}; \{-qI, 0\}) + E_h(\{-qI, 0\}; \{s, 0\}) + \\ + E_h(\{-qI, 0\}; \{-qI, 0\}) \geq -\beta_6 \|s - qI\|_0^2$$

On arrive à:

$$2 E_h(\{s, 0\}; \{-qI, 0\}) \geq -\beta_6 \|s - qI\|_0^2 - E_h(\{s, 0\}; \{s, 0\}) - \\ - E_h(\{-qI, 0\}; \{-qI, 0\})$$

Par conséquent,

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) \geq \frac{1}{2\mu} (\|s\|_0^2 + \rho \|qI\|_0^2) - \beta_6 \|s - qI\|_0^2 + \\ + E_h(\{0, w\}; \{0, -w\})$$

i.e.

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) \geq \frac{1}{2\mu} (\|s\|_0^2 + \rho \|qI\|_0^2) - \beta_6 \|s\|_0^2 - \beta_6 \|qI\|_0^2 + \theta_6 \|w\|_1^2$$

Ceci donne

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) \geq \left(\frac{1}{2\mu} - \beta_6\right) \|s\|_0^2 + \left(\frac{\rho}{2\mu} - \beta_6\right) \|qI\|_0^2 + \theta_6 \|w\|_1^2$$

de sorte que:

$$B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) \geq C (\|s\|_0^2 + \|qI\|_0^2 + \|w\|_1^2)$$

avec

$$C = \min \left\{ \frac{1}{2\mu} - \beta_6, \frac{\rho}{2\mu} - \beta_6, \theta_6 \right\}$$

En combinant avec (3-10), on aboutit à:

$$\frac{B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \frac{C}{2} (\|\xi\|_0 + \|w\|_1)$$

Comme  $(\xi, w)$  est arbitraire, on obtient

$$\sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0, 0)}} \frac{B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \frac{C}{2} (\|\xi\|_0 + \|w\|_1)$$

et (3-24) est satisfaite pour  $\gamma_6 = C/2 > 0$ , qui est évidemment indépendante de  $h$ .

### 3-2 CONVERGENCE DES SOLUTIONS DISCRETES

Après avoir établi les conditions de stabilité, on présente maintenant les résultats de convergence des solutions discrètes vers la solution exacte du problème d'élasticité posé initialement.

#### THEOREME 3-7

Supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaite:

(1):

(H1)<sub>1</sub>: Il existe une constante  $\beta_1 > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$E_h(\{\tau, 0\}; \{\tau, 0\}) \geq \beta_1 \|\tau\|_0^2 \quad \forall \tau \in W_h$$

(H2)<sub>1</sub>: Il existe une constante  $\theta_1 > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$E_h(\{-qI, v\}; \{-qI, -v\}) \geq \theta_1 (\|qI\|_0 + \|v\|_1)^2 \quad \forall (q, v) \in Q_h \times V_h$$

(H3)<sub>1</sub>:  $C_1 < \min\{\beta_1 + 1/2\mu, \theta_1 + \rho/2\mu\}$

(2):

(H1)<sub>2</sub>: Il existe une constante  $\theta_2' > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$E_h(\{\tau, v\}; \{\tau, v\}) \geq \theta_2' (\|\tau\|_0 + \|v\|_1)^2 \quad \forall (\tau, v) \in W_h \times V_h$$

(3):

(H1)<sub>3</sub>: Il existe une constante  $\theta_3 > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$2d(v, \tau) + E_h(\{\tau, v\}; \{\tau, v\}) \geq \theta_3 (\|\tau\|_0 + \|v\|_1)^2 \\ \forall (\tau, v) \in W_h \times V_h$$

(4):

(H1)<sub>4</sub>: Il existe une constante  $\beta_4 > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$E_h(\{\tau, 0\}; \{\tau, 0\}) \geq \beta_4 \|\tau\|_0^2 \quad \forall \tau \in W_h$$

(H2)<sub>4</sub>: Il existe une constante  $\theta_4 > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$E_h(\{0, v\}; \{0, -v\}) \geq \theta_4 \|v\|_1^2 \quad \forall v \in V_h$$

(5):

(H1)<sub>5</sub>:

$$E_h(\{\tau, 0\}; \{\tau, 0\}) \geq 0 \quad \forall \tau \in W_h$$

(H2)<sub>5</sub>: Il existe une constante  $\theta_5 > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$E_h(\{0, v\}; \{0, -v\}) \geq \theta_5 \|v\|_1^2 \quad \forall v \in V_h$$

(6):

(H1)<sub>6</sub>: Il existe une constante  $0 < \beta_6 < \min\{1/2\mu, \rho/2\mu\}$ ,

indépendante de  $h$ , telle que

$$E_h(\{\tau, 0\}; \{\tau, 0\}) \geq -\beta_6 \|\tau\|_0^2 \quad \forall \tau \in W_h$$

(H2)<sub>6</sub>: Il existe une constante  $\theta_6 > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$E_h(\{0, v\}; \{0, -v\}) \geq \theta_6 \|v\|_1^2 \quad \forall v \in V_h$$

Alors, le problème  $(S_h)$  admet une solution unique dans  $W_h \times V_h$

De plus, si le problème  $(S_h)$  est consistant, i.e.

$$E_h(\{\sigma, u\}; \{\tau, v\}) = 0 \quad \forall (\tau, v) \in W_h \times V_h \quad (3-25)$$

on a l'estimation d'erreur suivante:

$$\|\sigma - \sigma_h\|_0 + \|u - u_h\|_1 \leq C \left\{ \inf_{\tau \in W_h} \|\sigma - \tau\|_0 + \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_1 \right\} \quad (3-26)$$

où C est une constante positive, indépendante de h, et  $(\sigma, u)$  désigne la solution du problème (1-36)-(1-37).

### DEMONSTRATION

On munit  $W_h \times V_h$  du produit scalaire suivant,

$$\begin{aligned} ((\tau, v); (\xi, w)) &= \int_{\Omega} (\tau, \xi + v \cdot w + \nabla v \cdot \nabla w) d\Omega \\ \forall (\tau, v), (\xi, w) &\in W_h \times V_h \end{aligned} \quad (3-27)$$

et on pose

$$\|(\tau, v)\| = (\|\tau\|_0^2 + \|v\|_1^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3-28)$$

la norme correspondante.

Puisque,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\|\tau\|_0 + \|v\|_1) \leq \|(\tau, v)\| \leq \sqrt{2} (\|\tau\|_0 + \|v\|_1)$$

alors, les deux normes  $\|(\cdot, \cdot)\|$  et  $\|\cdot\|_0 + \|\cdot\|_1$  sont équivalentes.

La fonctionnelle linéaire  $L_h$  et la forme bilinéaire  $B_h$  étant continues sur  $W_h \times V_h$ , alors, d'après le théorème de représentation de RIESZ, il existe deux éléments uniques  $(\xi_0, w_0)$  et  $A(\xi, w)$  dans  $W_h \times V_h$  tels que

$$((\xi_0, w_0), (\tau, v)) = L_h(\tau, v) \quad \forall (\tau, v) \in W_h \times V_h \quad (3-29)$$

$$((A(\xi, w), (\tau, v))) = B_h((\xi, w); (\tau, v)) \quad \forall (\tau, v) \in W_h \times V_h \quad (3-30)$$

En vertu de la continuité de  $B_h(\{\cdot, \cdot\}; \{\cdot, \cdot\})$  et de (3-28), l'opérateur A est continue, En effet,

$$\begin{aligned}
\|A(\xi, w)\| &= \sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0,0)}} \frac{((A(\xi, w), (\tau, v)))}{\|(\tau, v)\|} \\
&= \sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0,0)}} \frac{B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|(\tau, v)\|} \\
&\leq \sqrt{2} \sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0,0)}} \frac{B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \\
&\leq \sqrt{2} C^* \{\|\xi\|_0 + \|w\|_1\} \\
&\leq 2 C^* \|(\xi, w)\|
\end{aligned}$$

i.e.

$$\|A(\xi, w)\| \leq 2 C^* \|(\xi, w)\|.$$

Alors, le problème

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma_0, u_0) \in W_h \times V_h \text{ tel que} \\ A(\sigma_0, u_0) = (\xi_0, w_0) \end{array} \right]$$

est une formulation équivalente au problème  $(S_h)$ .

On est ainsi ramené à montrer que  $A$  est une bijection de  $W_h \times V_h$  sur  $W_h \times V_h$  et que  $A^{-1}$  est un opérateur borné de  $W_h \times V_h$  dans  $W_h \times V_h$ .

Tout d'abord, des théorèmes (3-1) à (3-6) on déduit:

$$\begin{aligned}
\gamma_i \|(\xi, w)\| &\leq \sqrt{2} \gamma_i (\|\xi\|_0 + \|w\|_1) \leq \sqrt{2} \sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0,0)}} \frac{B_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \\
&\leq 2 \sup_{\substack{(\tau, v) \in W_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0,0)}} \frac{((A(\xi, w), (\tau, v)))}{\|(\tau, v)\|} \\
&= 2 \|A(\xi, w)\|
\end{aligned}$$

D'où,

$$\|A(\xi, w)\| \geq \frac{\gamma_i}{2} \|(\xi, w)\| \quad \forall (\xi, w) \in W_h \times V_h \quad (3-31)$$

Ceci prouve que A est injectif.

Pour montrer que A est surjectif, i.e.  $A(W_h \times V_h) = W_h \times V_h$ , on a à vérifier successivement que  $A(W_h \times V_h)$  est fermé dans  $W_h \times V_h$  et que l'orthogonal  $(A(W_h \times V_h))^\perp$  de  $A(W_h \times V_h)$  dans  $W_h \times V_h$  est réduit à 0. En effet, si  $(\mu, \lambda) \in \overline{A(W_h \times V_h)}$  (adhérence de  $A(W_h \times V_h)$  dans  $W_h \times V_h$ ) et  $(A(\xi_n, w_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de  $A(W_h \times V_h)$  qui converge vers  $(\mu, \lambda)$  dans  $W_h \times V_h$ , en vertu de (3-31), on a :

$$\begin{aligned} \|A(\xi_n, w_n) - A(\xi_m, w_m)\| &= \|A(\xi_n - \xi_m, w_n - w_m)\| \\ &\geq \frac{\gamma_i}{2} \|(\xi_n - \xi_m, w_n - w_m)\| \\ &\geq \frac{\gamma_i}{2} (\|\xi_n - \xi_m\|_0^2 + \|w_n - w_m\|_1^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

De sorte que  $(\xi_n, w_n)$  est une suite de CAUCHY dans l'espace de HILBERT  $W_h \times V_h$ . Elle converge donc vers un élément  $(\mu, \lambda)$  et donc,

$$A(\xi, w) = (\mu, \lambda) \in A(W_h \times V_h),$$

en vertu de la continuité de A.

Donc,  $A(W_h \times V_h)$  est fermé dans  $W_h \times V_h$  et,

$$W_h \times V_h = A(W_h \times V_h) \oplus (A(W_h \times V_h))^\perp$$

Soit maintenant  $(\tau_0, v_0) \in (A(W_h \times V_h))^\perp$ . Il vient :

$$((A(\xi, w), (\tau_0, v_0))) = 0_{W_h \times V_h} \quad \forall (\xi, w) \in W_h \times V_h$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
 \gamma_i \|(\tau_0, v_0)\| &\leq \sqrt{2} \gamma_i (\|\tau_0\|_0 + \|v_0\|_1) \leq \sqrt{2} \sup_{\substack{(\xi, w) \in W_h \times V_h \\ (\xi, w) \neq (0,0)}} \frac{B_h(\{\xi, w\}; \{\tau_0, v_0\})}{\|\xi\|_0 + \|w\|_1} \\
 &\leq 2 \sup_{\substack{(\xi, w) \in W_h \times V_h \\ (\xi, w) \neq (0,0)}} \frac{B_h(\{\xi, w\}; \{\tau_0, v_0\})}{\|(\xi, w)\|} \\
 &\leq 2 \sup_{\substack{(\xi, w) \in W_h \times V_h \\ (\xi, w) \neq (0,0)}} \frac{((A(\xi, w); \{\tau_0, v_0\}))}{\|(\xi, w)\|} \\
 &= 0_{W_h \times V_h}
 \end{aligned}$$

D'où,  $(\tau_0, v_0) = (0, 0)$ .

Ceci établit la surjectivité de A, i.e.

$$A(W_h \times V_h) = (W_h \times V_h) .$$

L'opérateur A est donc bijectif de  $W_h \times V_h$  sur  $W_h \times V_h$ . De plus,  $A^{-1}$  est borné d'après (3-31)

Soient  $\tilde{u}$  un interpolant de u dans  $V_h$  et  $\tilde{\sigma}$  celui de  $\sigma$  dans  $W_h$ .

On a :

$$\begin{aligned}
 B_h(\{\sigma - \tilde{\sigma}, u - \tilde{u}\}; \{\tau, v\}) &= a_p(\sigma - \tilde{\sigma}, \tau) + d(u - \tilde{u}, \tau) + d(v, \sigma - \tilde{\sigma}) + \\
 &\quad + E_h(\{\sigma - \tilde{\sigma}, u - \tilde{u}\}; \{\tau, v\})
 \end{aligned}$$

D'autre part, d'après (3-25), on a :

$$B_h(\{\sigma_h - \tilde{\sigma}, u_h - \tilde{u}\}; \{\tau, v\}) = B_h(\{\sigma - \tilde{\sigma}, u - \tilde{u}\}; \{\tau, v\})$$

D'où,

$$\begin{aligned}
 B_h(\{\sigma - \tilde{\sigma}, u - \tilde{u}\}; \{\tau, v\}) &\leq M \|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 \|\tau\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1 \|\tau\|_0 + \|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 \|v\|_1 + \\
 &\quad + C_1 (\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1) (\|\tau\|_0 + \|v\|_1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \max\{M, 1\}(\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1)(\|\tau\|_0 + \|v\|_1) + \\
&\quad + C_1(\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1)(\|\tau\|_1 + \|v\|_1) \\
&\leq \max\{M+C_1, 1+C_1\}(\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1)(\|\tau\|_0 + \|v\|_1)
\end{aligned}$$

Ceci entraîne:

$$\sup_{\substack{(\tau, v) \in \tilde{W}_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0,0)}} \frac{B_h(\{\sigma_h - \tilde{\sigma}, u_h - \tilde{u}\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \leq \max\{M+C_1, 1+C_1\}(\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1)$$

Mais, en vertu de (3-24),

$$\sup_{\substack{(\tau, v) \in \tilde{W}_h \times V_h \\ (\tau, v) \neq (0,0)}} \frac{B_h(\{\sigma_h - \tilde{\sigma}, u_h - \tilde{u}\}; \{\tau, v\})}{\|\tau\|_0 + \|v\|_1} \geq \gamma_i \|(\sigma_h - \tilde{\sigma}, u_h - \tilde{u})\|$$

Il s'ensuit que:

$$\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u_h - \tilde{u}\|_1 \leq \frac{\max\{M+C_1, 1+C_1\}}{\gamma_i} (\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1)$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient:

$$\|\sigma - \sigma_h\|_0 + \|u - u_h\|_1 \leq C (\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_0 + \|u - \tilde{u}\|_1) \quad (3-32)$$

de sorte que l'estimation d'erreur (3-32) est vérifiée pour

$$C = \left( 1 + \frac{\max\{M+C_1, 1+C_1\}}{\gamma_i} \right)$$

### CORROLAIRE 3-1

Si  $v \in (H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^n$  et  $\tau \in (H^{m+1}(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))^{n \times n}$

alors, on a les estimations d'erreur suivantes:

$$\|\sigma - \sigma_h\|_0 + \|u - u_h\|_1 \leq C(h^{m+1} |\sigma|_{m+1} + h^k |u|_{k+1}) \quad (3-33)$$

et

$$\|u - u_h\|_0 \leq C^*(h^{m+2} |\sigma|_{m+1} + h^{k+1} |u|_{k+1}) \quad (3-34)$$

Pour clore cette section, on note que si le problème est non consistant, un terme exprimant l'erreur de consistance apparaîtra dans le membre de droite de l'estimation précédente.

### **3-3 APPLICATIONS**

Dans cette section, on présente des constructions des termes  $E_h$  de stabilisation qui satisfont certaines conditions suffisantes de stabilité précédemment établies. On note que l'objectif poursuivi ici consiste à couvrir tous les théorèmes précédents. On rappelle que, dans la suite du chapitre,  $C_0$  désigne la constante intervenant dans l'inégalité (1-61) du lemme 1-1.

#### **EXEMPLE 1:**

On définit sur  $(W_h \times V_h)^2$  la forme bilinéaire symétrique  $E_h(\{.,.\}; \{.,.\})$  par :

$$E_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) = \lambda_1(\xi, \tau) + \lambda_2(e(w), e(v)) \quad (3-35)$$

où  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 > 0$  sont deux constantes à déterminer convenablement.

Dans ce cas, l'existence et l'unicité de la solution du problème  $(S_h)$  dépendent de la satisfaction, en plus de la continuité de  $E_h$ , de l'hypothèse  $(H1)_2$  du théorème 3-2.

**(a) - Continuité :**

En utilisant l'inégalité de CAUCHY-SCHWARTZ, on a :

$$\begin{aligned} |E_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\})| &= |\lambda_1(\xi, \tau) + \lambda_2(e(w), e(v))| \\ &\leq \lambda_1 \|\xi\|_0 \|\tau\|_0 + \lambda_2 \|e(w)\|_0 \|e(v)\|_0 \\ &\leq \max\{\lambda_1, \lambda_2\} (\|\xi\|_0 + \|w\|_1) (\|\tau\|_0 + \|v\|_1) \end{aligned}$$

i.e. (3-2) est vérifiée pour :

$$C_1 = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$$

**(b) Hypothèse (H1)<sub>2</sub> :**

On a :

$$\begin{aligned} E_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) &= \lambda_1 \|\tau\|_0^2 + \lambda_2 \|e(v)\|_0^2 \\ &\geq \min\{\lambda_1, \lambda_2 C_0\} (\|\tau\|_0^2 + \|e(v)\|_0^2) \\ &\geq \min\left\{\frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2 C_0}{2}\right\} (\|\tau\|_0 + \|v\|_1)^2 \end{aligned}$$

Il est clair que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  doivent être choisies telles que,

$$\lambda_1 > 1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 > \frac{1}{C_0}$$

pour obtenir (3-11) avec

$$\theta_2' = \min\left\{\frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2 C_0}{2}\right\} \quad \text{et} \quad \theta_2' > \frac{1}{2} .$$

**EXEMPLE 2 :**

On définit sur  $(W_h \times V_h)^2$  la forme bilinéaire symétrique  $E_h(\{.,.\}; \{.,.\})$  par :

$$E_h((\xi, w); (\tau, v)) = (\xi + e(w), \tau + e(v)) \quad (3-36)$$

Montrons que ce choix de  $E_h$  vérifie les hypothèses du théorème 3-3

**(a)- Continuité :**

En utilisant l'inégalité de CAUCHY-SCHWARTZ, on obtient:

$$\begin{aligned} |E_h((\xi, w); (\tau, v))| &= \|\xi + e(w)\|_0 \|\tau + e(v)\|_0 \\ &\leq (\|\xi\|_0 + \|e(w)\|_0)(\|\tau\|_0 + \|e(v)\|_0) \\ &\leq (\|\xi\|_0 + \|w\|_1)(\|\tau\|_0 + \|v\|_1) \end{aligned}$$

i.e. (3-2) est vérifiée pour:  $C_1 = 1$  .

**(b)- Hypothèse (H1)<sub>3</sub>:**

On a:

$$\begin{aligned} 2d(\tau, v) + E_h((\tau, v); (\tau, v)) &= -2(\tau, e(v)) + (\tau + e(v), \tau + e(v)) \\ &= \|\tau\|_0^2 + \|e(v)\|_0^2 \\ &\geq \min\{1, C_0\}(\|\tau\|_0^2 + \|v\|_1^2) \\ &\geq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{C_0}{2}\right\}(\|\tau\|_0 + \|v\|_1)^2 \end{aligned}$$

de sorte que (3-14) est satisfaite avec

$$\theta_3 = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{C_0}{2}\right\} .$$

**EXEMPLE 3:**

On définit sur  $(W_h \times V_h)^2$  la forme bilinéaire symétrique  $E_h(\{.,.\};\{.,.\})$  par :

$$E_h(\{\xi, w\};\{\tau, v\}) = (\xi + e(w), \tau - e(v)) + (\xi - e(w), \tau + e(v)) \quad (3-37)$$
$$\forall (\xi, w), (\tau, v) \in W_h \times V_h$$

Ainsi, la forme bilinéaire généralisée  $B_h(\{\xi, w\};\{\tau, v\})$  sur  $(W_h \times V_h)^2$  est donnée par:

$$B_h(\{\xi, w\};\{\tau, v\}) = a_p(\xi, \tau) + d(w, \tau) + d(v, \xi) + E_h(\{\xi, w\};\{\tau, v\}) \quad (3-38)$$
$$\forall (\xi, w), (\tau, v) \in W_h \times V_h$$

Où

$$a_p(\xi, \tau) = \frac{1}{2\mu} \left[ (\xi, \tau) - \frac{1-p}{n} (tr \xi, tr \tau) \right]$$

$$d(w, \tau) = -(\tau, e(w))$$

Montrons que pour ce cas,  $E_h$  vérifie les hypothèses  $(H1)_4$  et  $(H2)_4$  du théorème 3-4.

**(a) - Continuité :**

En utilisant l'inégalité de CAUCHY-SCHWARTZ, on obtient:

$$E_h(\{\xi, w\};\{\tau, v\}) = |(\xi + e(w), \tau - e(v)) + (\xi - e(w), \tau + e(v))|$$
$$\leq |(\xi + e(w), \tau - e(v))| + |(\xi - e(w), \tau + e(v))|$$
$$\leq \|\xi + e(w)\|_0 \cdot \|\tau - e(v)\|_0 + \|\xi - e(w)\|_0 \cdot \|\tau + e(v)\|_0$$
$$\leq (\|\xi\|_0 + \|e(w)\|_0)(\|\tau\|_0 + \|e(v)\|_0) +$$
$$(\|\xi\|_0 + \|e(w)\|_0)(\|\tau\|_0 + \|e(v)\|_0)$$
$$\leq 2(\|\xi\|_0 + \|w\|_1)(\|\tau\|_0 + \|v\|_1)$$

D'où,

$$E_h((\xi, w); (\tau, v)) \leq 2(\|\xi\|_0 + \|w\|_1)(\|\tau\|_0 + \|v\|_1)$$

i.e. (3-2) est vérifiée pour  $C_1 = 2$ .

**(b) - Hypothèse (H1)<sub>4</sub>:**

On a :

$$E_h((\tau, 0); (\tau, 0)) = 2 \|\tau\|_0^2 \quad \forall \tau \in W_h$$

et l'inégalité (3-16) est trivialement satisfaite pour  $\beta_4 = 2$ .

**(c) - Hypothèse (H2)<sub>4</sub>:**

On a :

$$\begin{aligned} E_h((0, v); (0, -v)) &= 2 \|e(v)\|_0^2 \\ &\geq 2C_0 \|v\|_1^2 \end{aligned}$$

i.e. (3-17) a lieu pour  $\theta_4 = 2C_0$ .

**EXEMPLE 4:**

On définit sur  $(W_h \times V_h)^2$  la forme bilinéaire symétrique  $E_h(\{...\}; \{...\})$  par :

$$\begin{aligned} E_h((\xi, w); (\tau, v)) &= \left( \xi - \frac{1-\rho}{n} \text{tr} \xi \cdot I + e(w), \tau - \frac{1-\rho}{n} \text{tr} \tau \cdot I - e(v) \right) + \\ &+ \left( \xi - \frac{1-\rho}{n} \text{tr} \xi \cdot I - e(w), \tau - \frac{1-\rho}{n} \text{tr} \tau \cdot I + e(v) \right) \quad (3-39) \\ &\forall (\xi, w), (\tau, v) \in W_h \times V_h \end{aligned}$$

Ici, aussi, on peut facilement montrer que ce choix de  $E_h$  satisfait la condition de continuité (3-2) avec  $c_1 = 2$ , l'inégalité (3-16) avec  $\beta_4 = 2 \min\{1, \rho^2\}$  et l'inégalité

(3-17) avec  $\theta_4 = 2C_0$  dans le théorème 3-4 .

**EXEMPLE 5:**

On définit sur  $(W_h \times V_h)^2$  la forme bilinéaire symétrique  $E_h(\{.,.\};\{.,.\})$  par :

$$E_h(\{\xi, w\};\{\tau, v\}) = -(\epsilon(w), \epsilon(v)) \quad \forall (\xi, w), (\tau, v) \in W_h \times V_h \quad (3-40)$$

Pour ce choix de  $E_h$ , en plus de la continuité, les hypothèses du théorème 3-5 peuvent être facilement vérifiées . En particulier, on trouve  $c_1 = 1$  et  $\theta_5 = C_0$ . De même , (3-19) est évidente car  $E_h(\{\tau, 0\}, \{\tau, 0\}) = 0$  .

**EXEMPLE 6:**

On définit sur  $(W_h \times V_h)^2$  la forme bilinéaire symétrique  $E_h(\{.,.\};\{.,.\})$  par :

$$E_h(\{\xi, w\};\{\tau, v\}) = -\delta \left( \xi - \frac{1-\rho}{n} \text{tr} \xi . I - 2\mu \epsilon(w), \tau - \frac{1-\rho}{n} \text{tr} \tau . I - 2\mu \epsilon(v) \right)$$

$$\forall (\xi, w), (\tau, v) \in W_h \times V_h \quad (3-41)$$

où  $\delta > 0$  est une constante à déterminer convenablement .

L'existence et l'unicité de la solution du problème  $(S_h)$  dépendent de la satisfaction , en plus de la continuité de  $E_h$  les hypothèses  $(H1)_6$  et  $(H2)_6$  du théorème 3-6.

**(a)- Continuité :**

En utilisant l'inégalité de CAUCHY-SCHWARTZ, on a :

$$\begin{aligned}
E_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) &= \delta \left( \xi - \frac{1-\rho}{n} \text{tr} \xi \cdot I - 2\mu e(w), \tau - \frac{1-\rho}{n} \text{tr} \tau \cdot I - 2\mu e(v) \right) \\
&\leq \delta \left\| \xi - \frac{1-\rho}{n} \text{tr} \xi \cdot I - 2\mu e(w) \right\|_0 \left\| \tau - \frac{1-\rho}{n} \text{tr} \tau \cdot I - 2\mu e(v) \right\|_0 \\
&\leq \delta \left( \left\| \xi - \frac{1-\rho}{n} \right\|_0 + 2\mu \|e(w)\|_0 \right) \left( \left\| \tau - \frac{1-\rho}{n} \text{tr} \tau \cdot I \right\|_0 + 2\mu \|e(v)\|_0 \right) \\
&\leq \delta (\max\{1, \rho\} \|\xi\|_0 + 2\mu \|w\|_1) (\max\{1, \rho\} \|\tau\|_0 + 2\mu \|v\|_1) \\
&\leq \delta \max\{1, \rho^2, 4\mu^2\} (\|\xi\|_0 + \|w\|_1) (\|\tau\|_0 + \|v\|_1)
\end{aligned}$$

d'où,

$$E_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) \leq C_1 (\|\xi\|_0 + \|w\|_1) (\|\tau\|_0 + \|v\|_1)$$

i.e. (3-2) est vérifiée pour

$$C_1 = \delta \max\{1, \rho^2, 4\mu^2\}$$

**(b) - Hypothèse (H1)<sub>6</sub>:**

On a:

$$\begin{aligned}
E_h(\{\tau, 0\}; \{\tau, 0\}) &= -\delta \left( \tau - \frac{1-\rho}{n} \text{tr} \tau \cdot I, \tau - \frac{1-\rho}{n} \text{tr} \tau \cdot I \right) \\
&\geq -\delta \left\| \tau - \frac{1-\rho}{n} \text{tr} \tau \cdot I \right\|_0^2 \\
&\geq -\delta \max\{1, \rho^2\} \|\tau\|_0^2
\end{aligned}$$

Il est clair que si on choisit  $\delta$  tel que ,

$$\delta < \frac{\min\left\{\frac{1}{2\mu}, \frac{\rho}{2\mu}\right\}}{\max\{1, \rho^2\}} \quad (3-42)$$

alors (H1)<sub>6</sub> est satisfaite pour  $\beta_6 = -\delta \max\{1, \rho^2\}$ .

(c) - Hypothèse (H2)<sub>6</sub>:

Il vient:

$$\begin{aligned} E_h(\{0, v\}; \{0, -v\}) &= -\delta(-2e(v), 2e(v)) \\ &= 4\delta \|e(v)\|_0^2 \\ &\geq 4\delta C_0 \|v\|_1^2 \end{aligned}$$

de sorte que le résultat cherché serait obtenu en prenant

$$\theta_6 = 4 \delta C_0 .$$

QUATRIEME CHAPITRE:

ILLUSTRATIONS NUMERIQUES

Dans ce chapitre, on présente les résultats d'un test numérique en utilisant la nouvelle formulation avec le terme (3-41). On rappelle que cette formulation est consistante.

On choisit les données du problème d'élasticité de sorte que la solution exacte soit connue. Après la résolution numérique du problème par la méthode d'éléments finis, des erreurs de la vitesse et du tenseur sont calculées. A cet effet, un programme en langage "Pascal" a été conçu (Voir Annexe). Les résultats obtenus sont discutés au moyen de graphes. Ils confirment la convergence de la solution approchée vers la solution exacte.

#### 4-1 ALGORITHME PAR ELEMENTS FINIS :

Soit le domaine

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < XL, 0 < y < YL\}$$

On subdivise le domaine  $\Omega$  dans la direction des  $x$  en  $N_x$  parties égales de pas  $h_x$  et dans la direction des  $y$  en  $N_y$  parties égales de pas  $h_y$ . On obtient, donc,  $N_x \cdot N_y$  rectangles (voir figure 4-1) qu'on dénote par  $K_i$  ( $i=1, \dots, N_x \cdot N_y$ ) qui sont les éléments du partitionnement  $J_h$  de  $\Omega$ .

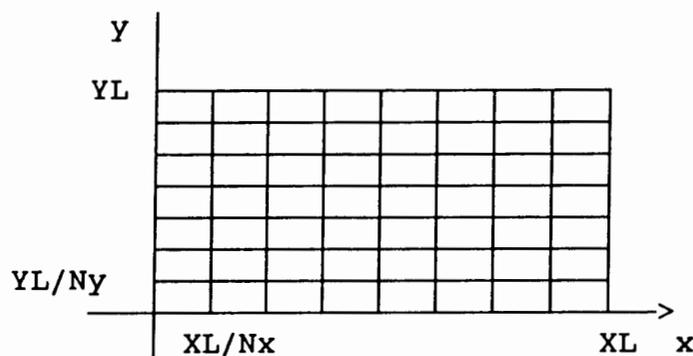


Figure 4-1

La forme bilinéaire utilisée  $E_h$  est définie par :

$$E_h(\{\xi, w\}; \{\tau, v\}) = -\delta \left( \xi - \frac{1-\rho}{n} \text{tr} \xi \cdot I - 2\mu \epsilon(w), \tau - \frac{1-\rho}{n} \text{tr} \tau \cdot I - 2\mu \epsilon(v) \right)$$

ou

$$E_h(\{\sigma_h, u_h\}; \{\tau_h, v_h\}) = -\delta \left( \sigma_h - \frac{1-\rho}{2} \text{tr} \sigma_h \cdot I - 2\mu \frac{\nabla u_h + (\nabla u_h)^t}{2}, \tau_h - \frac{1-\rho}{2} \text{tr} \tau_h \cdot I - \right. \\ \left. -\delta \left( \sigma_h - \frac{1-\rho}{2} \text{tr} \sigma_h \cdot I - 2\mu \frac{\nabla u_h + (\nabla u_h)^t}{2}, -2\mu \frac{\nabla u_h + (\nabla u_h)^t}{2} \right) \right)$$

La formulation mixte discrète de HELLINGER-RIESSNER devient alors

$$\frac{1}{2\mu} (\sigma_h, \tau_h) - \frac{1-\rho}{4\mu} (\text{tr} \sigma_h, \text{tr} \tau_h) - (\tau_h, \epsilon(u_h)) - \\ -\delta \left( \sigma_h - \frac{1-\rho}{2} \text{tr} \sigma_h \cdot I, \tau_h - \frac{1-\rho}{2} \text{tr} \tau_h \cdot I \right) + \quad (4-1) \\ + 2\delta \mu (\epsilon(u_h), \tau - \frac{1-\rho}{2} \text{tr} \tau_h \cdot I) = 0 \quad \forall \tau_h \in W_h$$

$$-(\sigma_h, \epsilon(v_h)) - \delta \left( \sigma_h - \frac{1-\rho}{2} \text{tr} \sigma_h \cdot I, -2\mu \epsilon(v_h) \right) \\ -\delta (-2\mu \epsilon(u_h), -2\mu \epsilon(v_h)) = f(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (4-2)$$

avec la condition:

$$\delta < \frac{\min \left\{ \frac{1}{2\mu}, \frac{\rho}{2\mu} \right\}}{\max \{1, \rho^2\}} \quad (4-3)$$

Les termes intervenant dans le système sont évalués séparément.

En posant :

$$\sigma_h = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \begin{pmatrix} w_{1j} & w_{2j} \\ w_{2j} & w_{3j} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau_h = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} \\ w_{21} & w_{31} \end{pmatrix} \quad (l=1, 2, 3) \quad (4-4)$$

où

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

on a :

$$\frac{1}{2\mu} (\sigma_h, \tau_h) = \frac{1}{2\mu} \sum_{j=1}^3 \alpha_j \int_{\Omega} \left[ \begin{pmatrix} w_{1j} & w_{2j} \\ w_{2j} & w_{3j} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} \\ w_{21} & w_{31} \end{pmatrix} \right] dx dy$$

D'où,

$$\frac{1}{2\mu} (\sigma_h, \tau_h) = \frac{1}{2\mu} \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sum_{I=1}^{N_x \cdot N_y} \int_{K_I} [w_{1j} w_{1I} + 2 w_{2j} w_{2I} + w_{3j} w_{3I}] dx dy$$

La matrice correspondant au terme considéré s'écrit :

$$\frac{1}{2\mu} \begin{bmatrix} \int_{K_I} [w_{11} w_{11} + 2 w_{21} w_{21} + w_{31} w_{31}] dx dy & \int_{K_I} [w_{12} w_{11} + 2 w_{22} w_{21} + w_{32} w_{31}] dx dy \\ \int_{K_I} [w_{11} w_{12} + 2 w_{21} w_{22} + w_{31} w_{32}] dx dy & \int_{K_I} [w_{12} w_{12} + 2 w_{22} w_{22} + w_{32} w_{32}] dx dy \\ \int_{K_I} [w_{11} w_{13} + 2 w_{21} w_{23} + w_{31} w_{33}] dx dy & \int_{K_I} [w_{12} w_{13} + 2 w_{22} w_{23} + w_{32} w_{33}] dx dy \\ \int_{K_I} [w_{13} w_{11} + 2 w_{23} w_{21} + w_{33} w_{31}] dx dy \\ \int_{K_I} [w_{12} w_{12} + 2 w_{23} w_{22} + w_{33} w_{32}] dx dy \\ \int_{K_I} [w_{12} w_{13} + 2 w_{23} w_{23} + w_{33} w_{33}] dx dy \end{bmatrix}$$

Un calcul simple donne :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\mu} \end{bmatrix}$$

Ceci est donc la matrice élémentaire dans l'élément  $K_i$  et qu'on dénote dans le programme par [AE1]. La matrice globale correspondante sera dénotée par [AG1]; elle possède  $3N_x N_y$  lignes

et  $3N_x N_y$  colonnes. Passons aux termes :

$$-\frac{1-\rho}{4\mu} (\text{tr}\sigma_h, \text{tr}\tau_h) \text{ et } -\delta(\sigma_h - \frac{1-\rho}{2} \text{tr}\sigma_h \cdot I, \tau_h - \frac{1-\rho}{2} \text{tr}\tau_h \cdot I) \quad (4-5)$$

En procédant de la même manière que précédemment on obtient les matrices élémentaires [AE2] et [AE3]. Les matrices globales correspondantes sont [AG2] et [AG3] qui sont construites par assemblage des matrices élémentaires [AE2] et [AE3] sur tous les éléments  $K_i$ .

Pour le quatrième terme, on a :

$$-(\tau_h, \epsilon(u_h)) = \int_{\Omega} \tau_h : \epsilon(u_h) \, dx dy \quad (4-6)$$

En posant :

$$\tau_h = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} \\ w_{21} & w_{31} \end{pmatrix} \text{ et } U_h = \sum_{j=1}^8 \beta_j V_j \quad (l=1, 2, 3)$$

où

$$v_j = (v_{1j}, v_{2j}) \text{ tel que } v_{2n-1} = (\varphi_n, 0)^T ; n=1, \dots, 4$$

$$v_{2n} = (0, \varphi_n)^T ; n=1, \dots, 4$$

avec

$$\varphi_n = \begin{cases} 1 & \text{au noeud } n \\ 0 & \text{aux autres noeuds} \\ \text{bilinéaire dans l'élément } K_i \end{cases}$$

on a

$$-(\tau_h, \epsilon(u_h)) = - \sum_{j=1}^8 \beta_j \int_{\Omega} \left[ \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{21} \\ \omega_{21} & \omega_{31} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \frac{\partial v_{1j}}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{1j}}{\partial y} + \frac{\partial v_{2j}}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{1j}}{\partial y} + \frac{\partial v_{2j}}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_{2j}}{\partial y} \end{pmatrix} \right] dx dy$$

$$= - \sum_{I=1}^{N_x N_y} \sum_{j=1}^8 \beta_j \int_{k_I} \left[ \omega_{11} \frac{\partial v_{1j}}{\partial x} + \omega_{21} \left( \frac{\partial v_{1j}}{\partial y} + \frac{\partial v_{2j}}{\partial x} \right) + \omega_{31} \frac{\partial v_{2j}}{\partial y} \right] dx dy$$

La matrice correspondant au terme considéré s'écrit:

$$\left[ \begin{array}{l} - \int_{k_I} \left[ \omega_{11} \frac{\partial v_{11}}{\partial x} + \omega_{21} \frac{\partial v_{11}}{\partial y} + \omega_{21} \frac{\partial v_{21}}{\partial x} + \omega_{31} \frac{\partial v_{21}}{\partial y} \right] dx dy \dots \\ \dots - \int_{k_I} \left[ \omega_{11} \frac{\partial v_{18}}{\partial x} + \omega_{21} \frac{\partial v_{18}}{\partial y} + \omega_{21} \frac{\partial v_{28}}{\partial x} + \omega_{31} \frac{\partial v_{28}}{\partial y} \right] dx dy \\ \\ - \int_{k_I} \left[ \omega_{12} \frac{\partial v_{11}}{\partial x} + \omega_{22} \frac{\partial v_{11}}{\partial y} + \omega_{22} \frac{\partial v_{21}}{\partial x} + \omega_{32} \frac{\partial v_{21}}{\partial y} \right] dx dy \dots \\ \dots - \int_{k_I} \left[ \omega_{12} \frac{\partial v_{18}}{\partial x} + \omega_{22} \frac{\partial v_{18}}{\partial y} + \omega_{22} \frac{\partial v_{28}}{\partial x} + \omega_{32} \frac{\partial v_{28}}{\partial y} \right] dx dy \\ \\ - \int_{k_I} \left[ \omega_{13} \frac{\partial v_{11}}{\partial x} + \omega_{23} \frac{\partial v_{11}}{\partial y} + \omega_{23} \frac{\partial v_{21}}{\partial x} + \omega_{33} \frac{\partial v_{21}}{\partial y} \right] dx dy \dots \\ \dots - \int_{k_I} \left[ \omega_{13} \frac{\partial v_{18}}{\partial x} + \omega_{23} \frac{\partial v_{18}}{\partial y} + \omega_{23} \frac{\partial v_{28}}{\partial x} + \omega_{33} \frac{\partial v_{28}}{\partial y} \right] dx dy \end{array} \right]$$

La matrice élémentaire ainsi obtenue possède 3 lignes et 8 colonnes pour chaque élément  $K_i$ . On la dénote par [AE4]. La matrice globale [AG4] aura donc  $3N_x N_y$  lignes et  $2(N_x+1)(N_y+1)$  colonnes.

Pour le terme

$$2\mu \delta(\epsilon(u_h), \tau_h - \frac{1-\rho}{2} \text{tr} \tau_h \cdot I) \quad (4-7)$$

on utilise les mêmes calculs.

La matrice élémentaire est dénotée par [AE5] donnant la matrice globale correspondante [AG5].

Passons au terme

$$-(\sigma_h, \epsilon(u_h)) \quad (4-8)$$

Comme le terme précédent (4-6), la matrice transposée  $[AE4]^T$  est la matrice élémentaire du terme (4-8) qu'on dénote par  $[AE6]$ . La matrice globale correspondante est ainsi la matrice transposée de  $[AG4]$  et qu'on dénote par  $[AG6]$ .

Le terme :

$$-\delta \left( \sigma_h - \frac{1-\rho}{2} \text{tr} \sigma_h \cdot I, -2\mu \epsilon(v_h) \right) \quad (4-9)$$

est calculé de la même manière.

La matrice élémentaire obtenue est  $[AE5]^T$  qu'on dénote par  $[AE7]$  et la matrice globale est  $[AG5]^T$  qu'on dénote par  $[AG7]$ .

Concernant le terme

$$-\delta(-2\mu \epsilon(u_h), -2\mu \epsilon(v_h)) \quad (4-10)$$

on pose :

$$u_h = \sum_{j=1}^8 \gamma_j (v_{1j}, v_{2j})^T \quad \text{et} \quad v_h = (v_{1l}, v_{2l})^T \quad (l=1, \dots, 8)$$

D'où,

$$-\delta(-2\mu \epsilon(u_h), -2\mu \epsilon(v_h)) = \sum_{j=1}^8 \gamma_j \int_{\omega} -4\delta\mu^2 \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial v_{1j}}{\partial x} & \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v_{1j}}{\partial y} + \frac{\partial v_{2j}}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{1j}}{\partial y} + \frac{\partial v_{2j}}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_{2j}}{\partial y} \end{array} \right]$$

$$: \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial v_{1l}}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{1l}}{\partial y} + \frac{\partial v_{2l}}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{1l}}{\partial y} + \frac{\partial v_{2l}}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_{2l}}{\partial y} \end{array} \right] dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= -4\delta\mu^2 \sum_{i=1}^{N_x N_y} \sum_{j=1}^8 \gamma_j \int_{k_i} \left[ \begin{pmatrix} \frac{\partial v_{1j}}{\partial x} & \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v_{1j}}{\partial y} + \frac{\partial v_{2j}}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{1j}}{\partial y} + \frac{\partial v_{2j}}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_{2j}}{\partial y} \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. : \begin{pmatrix} \frac{\partial v_{1l}}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{1l}}{\partial y} + \frac{\partial v_{2l}}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{1l}}{\partial y} + \frac{\partial v_{2l}}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_{2l}}{\partial y} \end{pmatrix} \right] dx dy \\
&= -4\delta\mu^2 \sum_{i=1}^{N_x N_y} \sum_{j=1}^8 \gamma_j \int_{k_i} \left[ \left( \frac{\partial v_{1j}}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v_{1l}}{\partial x} \right) + \right. \\
&\quad \left. \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{1j}}{\partial y} + \frac{\partial v_{2j}}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v_{1l}}{\partial y} + \frac{\partial v_{2l}}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial v_{2j}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{2l}}{\partial y} \right) \right] dx dy \right]
\end{aligned}$$

La matrice élémentaire obtenue :

$$\left[ \begin{array}{cc} \left[ \begin{array}{c} -4\delta\mu^2 \int_{k_i} \left[ \left( \frac{\partial v_{11}}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v_{11}}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{11}}{\partial y} + \frac{\partial v_{21}}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v_{11}}{\partial y} + \frac{\partial v_{21}}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. \left[ \left( \frac{\partial v_{21}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{21}}{\partial y} \right) \right] dx dy \right. \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} -4\delta\mu^2 \int_{k_i} \left[ \left( \frac{\partial v_{18}}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v_{11}}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{18}}{\partial y} + \frac{\partial v_{28}}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v_{11}}{\partial y} + \frac{\partial v_{21}}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. \left[ \left( \frac{\partial v_{28}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{21}}{\partial y} \right) \right] dx dy \right. \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} -4\delta\mu^2 \int_{k_i} \left[ \left( \frac{\partial v_{11}}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v_{18}}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{11}}{\partial y} + \frac{\partial v_{21}}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v_{18}}{\partial y} + \frac{\partial v_{28}}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. \left[ \left( \frac{\partial v_{21}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{28}}{\partial y} \right) \right] dx dy \right. \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} -4\delta\mu^2 \int_{k_i} \left[ \left( \frac{\partial v_{18}}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v_{18}}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{18}}{\partial y} + \frac{\partial v_{28}}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v_{18}}{\partial y} + \frac{\partial v_{28}}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. \left[ \left( \frac{\partial v_{28}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_{28}}{\partial y} \right) \right] dx dy \right. \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \end{array} \right]$$

est dénotée par [AE8]. Elle possède 8 lignes et 8 colonnes. La

matrice globale, comme précédemment dénotée par [AG8], a  $2(N_x+1)(N_y+1)$  lignes et  $2(N_x+1)(N_y+1)$  colonnes.

Pour le terme de droite, des calculs simples donnent comme vecteur élémentaire BE1=0 pour le tenseur à 3 composantes et comme vecteur élémentaire BE2 pour la vitesse à 8 composantes, comme suit :

$$[BE2] = \begin{bmatrix} \int_{k_i} (f_1 v_{11} + f_2 v_{21}) dx dy \\ \int_{k_i} (f_1 v_{12} + f_2 v_{22}) dx dy \\ \vdots \\ \int_{k_i} (f_1 v_{18} + f_2 v_{28}) dx dy \end{bmatrix}$$

où  $f = (f_1, f_2)^T$ .

Les vecteurs globaux correspondants sont dénotés par B1 (à  $3N_x N_y$  composantes) et B2 (à  $2(N_x+1)(N_y+1)$  composantes).

Le problème discret (4-1) s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} [AG1] + [AG2] + [AG3] & [AG4] + [AG5] \\ [AG6] + [AG7] & [AG8] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B1 \\ B2 \end{bmatrix} \quad (4-11)$$

où

$$\sigma = [\sigma_1^1 \ \sigma_2^1 \ \sigma_3^1 \ \sigma_1^2 \ \dots \ \sigma_1^{N_x N_y} \ \sigma_2^{N_x N_y} \ \sigma_3^{N_x N_y}]^T$$

et

$$U = [u_1^1 \ u_2^1 \ u_1^2 \ u_2^2 \ \dots \ u_1^{2(N_x+1)(N_y+1)} \ u_2^{2(N_x+1)(N_y+1)}]^T$$

Dans le programme principal on fait appel aux sous-programmes (procédures) suivants:

LECTURE :Sous-programme de lecture des données qui représentent la localisation des degrés de liberté.

ECRITURE:Sous-programme de sauvegarde des résultats qui représentent les solutions approchées.

INV :Sous-programme d'inversion par la méthode de GAUSS-JORDAN de la matrice [A].

MUL :Sous-programme qui donne la résolution de système (4-11).

AAE1 :Sous-programme de construction de la matrice élémentaire [AE1].

AAE2 :Sous-programme de construction de la matrice élémentaire [AE2].

AAE3 :Sous-programme de construction de la matrice élémentaire [AE3].

AAE4 :Sous-programme de construction de la matrice élémentaire [AE4].

AAE5 :Sous-programme de construction des matrices élémentaires [AE5],[AE6] et [AE7].

AAE6 :Sous-programme de construction de la matrice élémentaire [AE8].

BBE1 :Sous-programme de construction du vecteur élémentaire [BE1].

BBE2 :Sous-programme de construction du vecteur élémentaire [BE2].

ASS1 :Sous-programme d'assemblage des matrices élémentaires [AE1],[AE2] et [AE3].

- ASS2 :Sous-programme d'assemblage des matrices élémentaires  
[AE4] et [AE5].
- ASS3 :Sous-programme d'assemblage des matrices élémentaires  
[AE6] et [AE7].
- ASS4 :Sous-programme d'assemblage des matrices élémentaires  
[AE8].
- ASS5 :Sous-programme d'assemblage des vecteurs élémentaires  
[BE1].
- ASS6 :Sous-programme d'assemblage des vecteurs élémentaires  
[BE2].
- COLI :Sous-programme qui introduit les conditions aux limites.

#### 4-2 TEST ET RESULTATS NUMERIQUES

Ici, l'objet est de tester numériquement la formulation discrète (4-1)-(4-2) sur la méthode  $Q_1-Q_0$  pour le cas  $\mu=1$ .

A cet effet, on choisit comme solution exacte du problème de l'élasticité:

$$u = \left\{ \begin{array}{l} u_1 = xy(x-1)(y-1) \\ u_2 = xy(x-1)(y-1) \end{array} \right\}$$

de sorte que le terme de droite soit:

$$f = \left( \begin{array}{l} \mu \left[ \frac{1}{\rho} (2y-1)(2x-1) - 2 \frac{(1+\rho)}{\rho} y(y-1) - 2x(x-1) \right] \\ \mu \left[ \frac{1}{\rho} (2x-1)(2y-1) - 2y(y-1) - 2 \frac{(\rho+1)}{\rho} x(x-1) \right] \end{array} \right)$$

sur le domaine  $\Omega$  pour  $X_L=Y_L=1$  et  $h_x=h_y=h$ .

Les résultats pour certaines valeurs de  $\rho$  et  $\delta$  satisfaisant la condition (4-3) sont présentés dans les tableaux TAB1,...,TAB5 pour

les erreurs  $|u-u_h|_1$  et  $|\sigma-\sigma_h|_0$  des vitesses et tenseurs. Le paramètre de discrétisation  $h$  est pris successivement égal à 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6.

De même, les taux de convergence sont évalués d'après la formule:

$$k_{12} = \frac{\ln\left(\frac{e_2}{e_1}\right)}{\ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right)}$$

où  $e_i$  est l'erreur obtenue pour le pas  $h_i$ .

$h_i$	$ u-u_h _1$	$k_u$	$ \sigma-\sigma_h _0$	$k_\sigma$
1.000	0.032998		0.348	
0.500	0.008627	1.930	0.213	0.708
0.330	0.003646	2.110	0.150	0.862
0.250	0.002012	2.070	0.115	0.926
0.200	0.001280	2.020	0.093	0.951
0.166	0.000890	2.010	0.078	0.975

TAB1:  $\rho=0.9$  ,  $\delta=0.4$

$h_i$	$ u-u_h _1$	$k_u$	$ \sigma-\sigma_h _0$	$k_\sigma$
1.000	0.032998		0.381	
0.500	0.009122	1.850	0.235	0.697
0.330	0.003731	2.190	0.165	0.870
0.250	0.002031	2.120	0.126	0.940
0.200	0.001282	2.060	0.101	0.991
0.166	0.000893	2.000	0.084	1.022

TAB2:  $\rho=0.75$ ,  $\delta=0.25$

$h_i$	$ u-u_h _1$	$k_u$	$ \sigma-\sigma_h _0$	$k_\sigma$
1.000	0.032998		0.881	
0.500	0.010447	1.650	0.559	0.656
0.330	0.004024	2.340	0.386	0.911
0.250	0.002123	2.230	0.293	0.961
0.200	0.001317	2.130	0.236	0.969
0.166	0.000898	2.120	0.197	1.001

TAB3:  $\rho=0.25$  ,  $\delta=0.1$

$h_i$	$ u-u_h _1$	$k_u$	$ \sigma-\sigma_h _0$	$k_\sigma$
1.000	0.032998		2.123	
0.500	0.010900	1.950	1.362	0.640
0.330	0.004225	2.330	0.934	0.928
0.250	0.002193	2.280	0.708	0.966
0.200	0.001348	2.180	0.569	0.979
0.166	0.000915	2.140	0.476	0.990

TAB4:  $\rho=0.1$  ,  $\delta=0.045$

$h_i$	$ u-u_h _1$	$k_u$	$ \sigma-\sigma_h _0$	$k_\sigma$
1.000	0.032998		21.08	
0.500	0.011044	1.570	13.56	0.636
0.330	0.004405	2.260	09.31	0.925
0.250	0.002269	2.310	07.05	0.969
0.200	0.000138	2.220	05.66	0.984
0.166	0.000931	2.190	04.73	0.995

TAB5:  $\rho=0.01$  ,  $\delta=0.0045$

On remarque que les résultats présentés dans les tableaux confirment bien la convergence théoriquement obtenue: ordre 2 pour la vitesse et ordre 1 pour les tenseurs.

La même impression est donnée par les courbes représentant les erreurs de vitesse et de tenseur en fonction du paramètre de discrétisation  $h$ , où les résultats approchent une parabole pour la vitesse et une droite pour les tenseurs.

A titre illustratif, on présente aussi la tendance de la solution approchée de la vitesse au noeud central  $(1/2, 1/2)$  (voir TAB 6), sachant que la solution exacte est  $u(1/2, 1/2) = (0.0625, 0.0625)$ .

$h$	$u_h^1$	$u_h^2$
0.500	0.0915	0.0905
0.250	0.0670	0.0677
0.166	0.0622	0.0627

TAB 6:  $\rho=0.75, \delta=0.25$

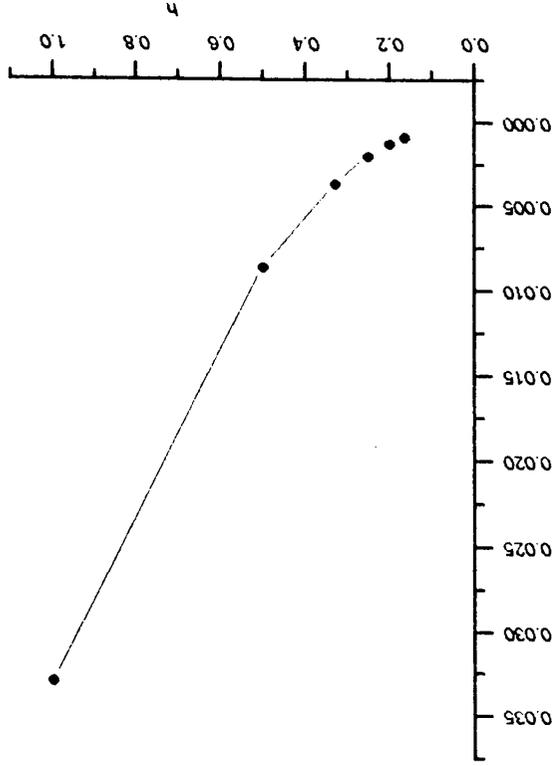
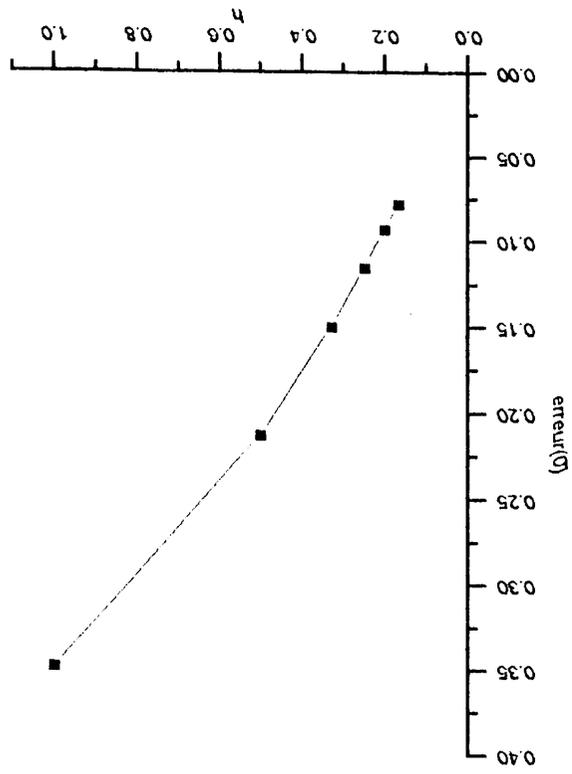


Fig-1-  $\rho = 0.9$   $\sigma = 0.4$



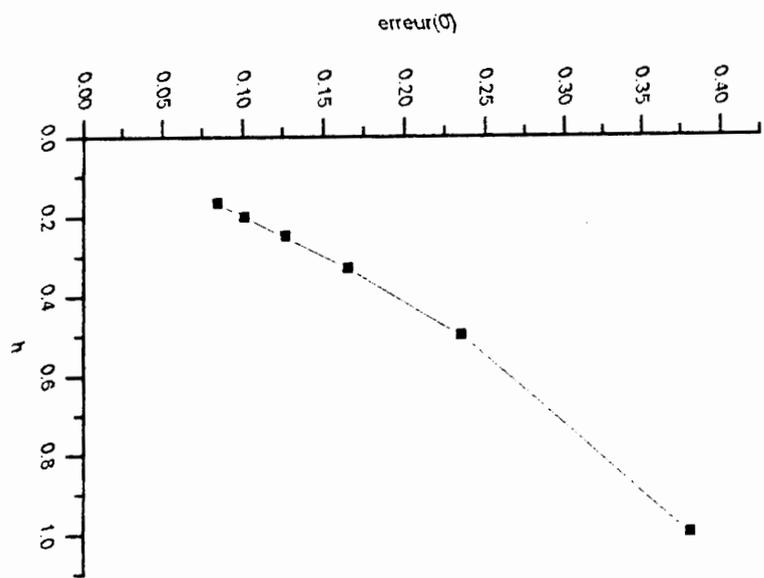
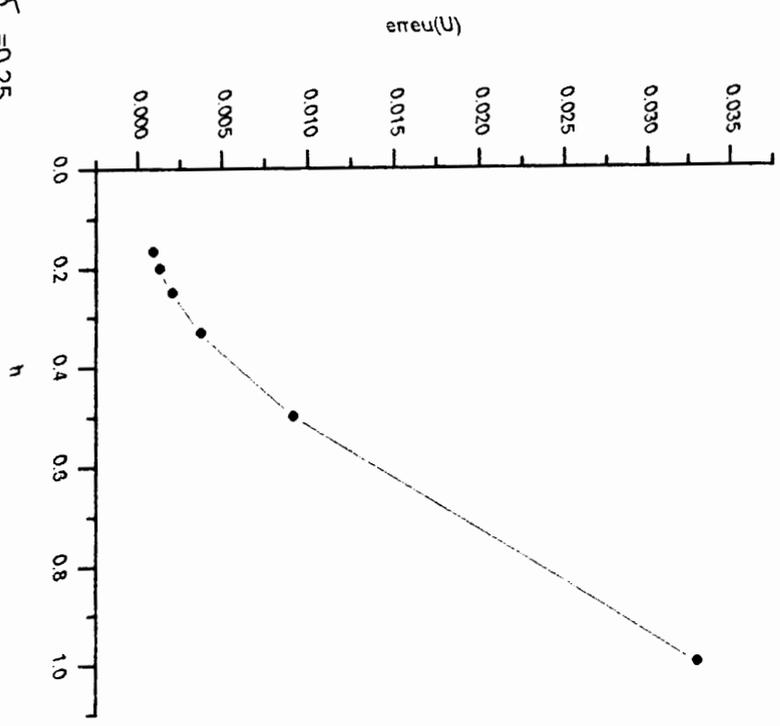


Fig-2-  $\beta = 0.75$   $\delta = 0.25$



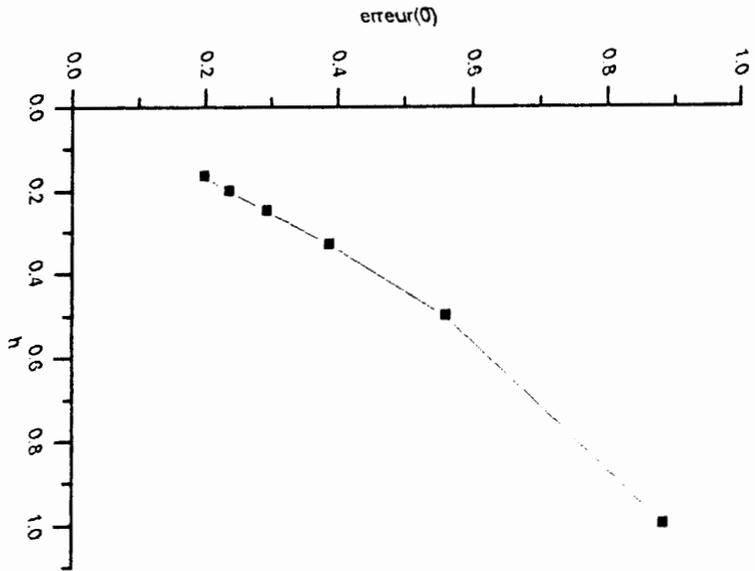
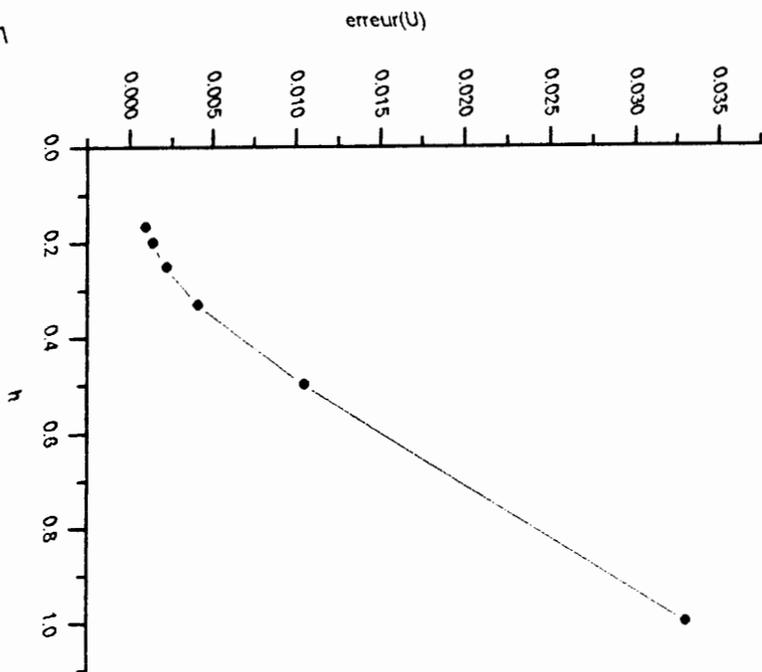


Fig-3-  $\rho = 0.25$   $\delta = 0.1$



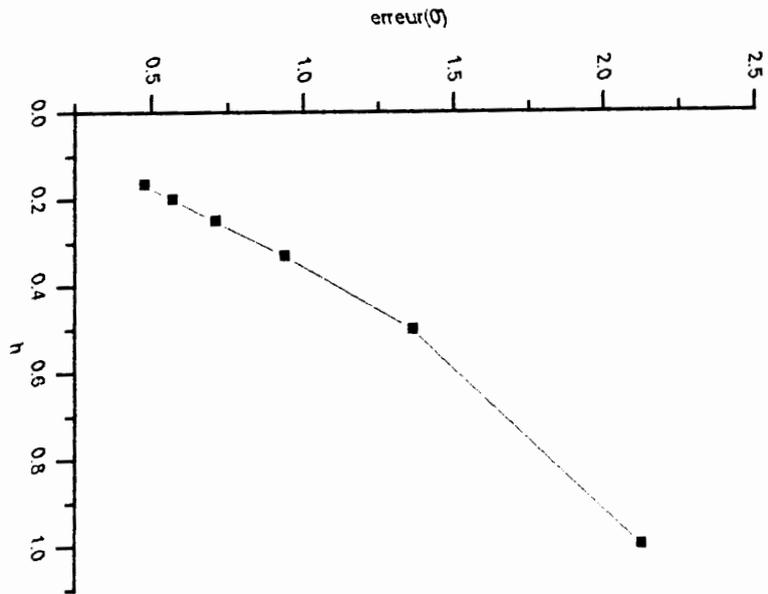
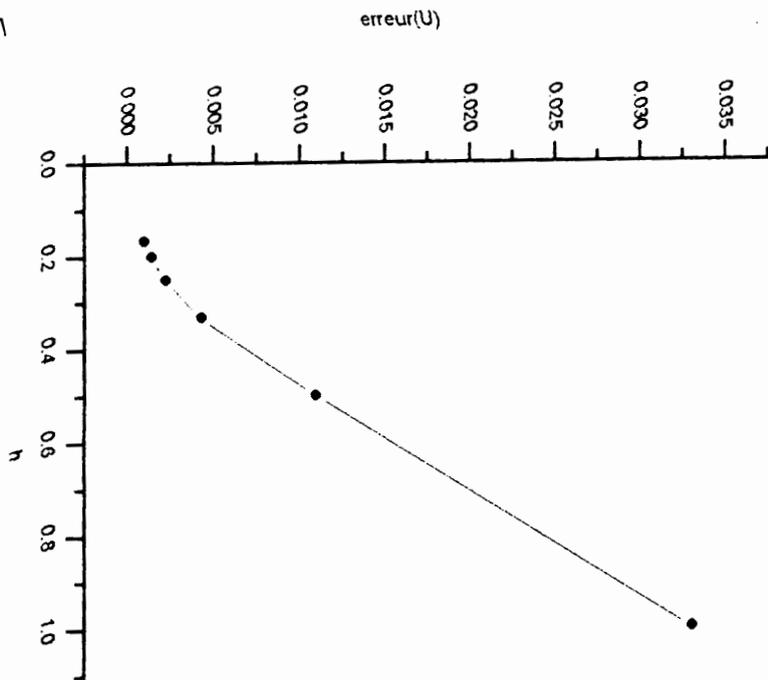


Fig.4- $\gamma=0.1$   $\delta=0.045$



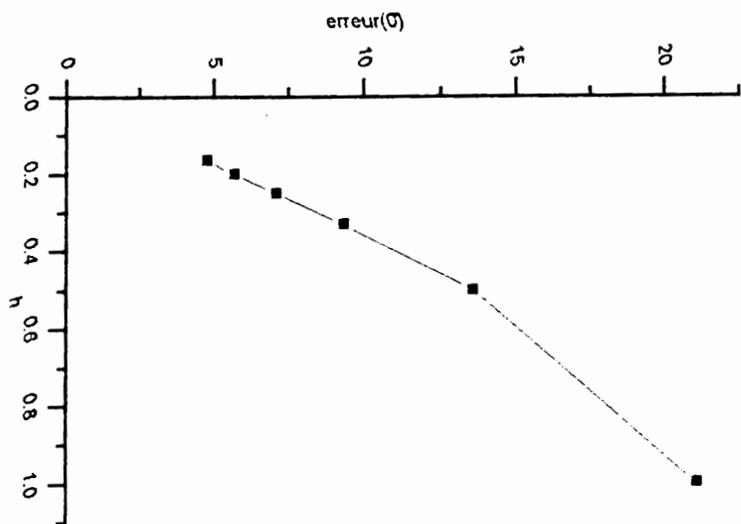
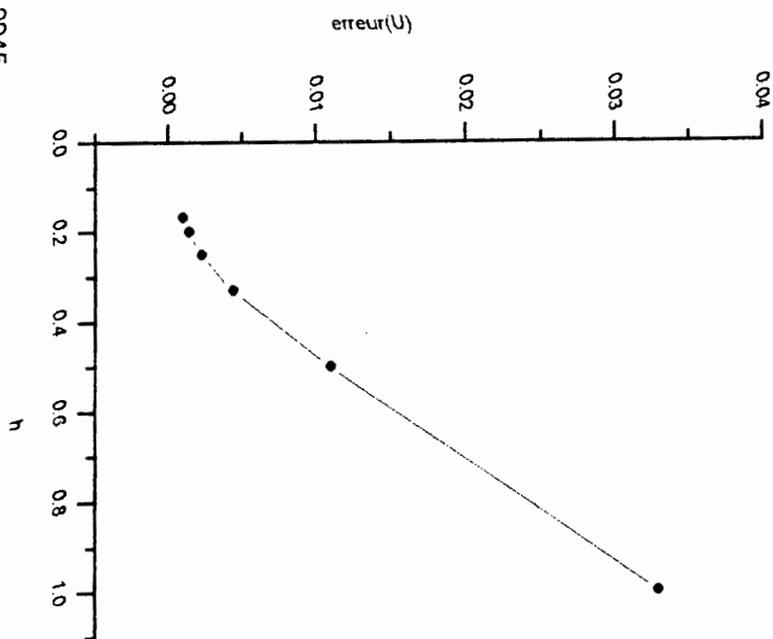


Fig-5-  $\rho = 0.01$   $\sigma = 0.0045$



#### 4-3 CONCLUSION GENERALE

En utilisant le concept de stabilisation, le problème d'élasticité a pu être résolu numériquement au moyen d'une méthode mixte d'Elément Finis, connue pour être instable.

Le présent travail, de part les résultats numériquement obtenus ouvre des perspectives de recherche et résolution plus performante du problème d'Elasticité.

Un futur travail de recherche plus approfondi s'occupera sans aucun doute du cas non-linéaire.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. ABADA: Méthodes mixtes pour la discrétisation des équations d'élasticité au moyen des éléments finis, Thèse de Magister. Université de Constantine ,(1995).
- [2] D. N. ARNOLD, J. DOUGLAS and P. GUPTA: A family of a higher order mixed finite element methods for plane elasticity, Numerische Mathematik 45 (1984), 1-22.
- [3] I. BABUSKA: Error bounds for finite element method, Numerische Mathematik 16 (1971), 322-333.
- [4] I. BABUSKA: The finite element method with Lagrangian multipliers, Numerische Mathematik 20 (1973), 179-192.
- [5] I. BABUSKA, J. OSBORN and J. PITKÄRANTA: Analysis of mixed methods using mesh dependent norms, Mathematics of Computation 35 (1980), 1039-1062.
- [6] M. A. BEHR, L. P. FRANCA and T. E. TEZDUYAR: Stabilized finite element methods for the Velocity-Pressure-Stress formulation of incompressible flows, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 104 (1993), 31-48.
- [7] S. C. BRENNER and L. Y. SUNG: Linear finite element methods for planar linear elasticity, Mathematics of Computer 59 (1992), 321-338.

- [8] H. BREZIS: Analyse fonctionnelle - Théorie et application, Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, Paris, (1983).
- [9] F. BREZZI: On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems, R.A.I.R.O. Analyse Numérique 8 (1974), 129-151.
- [10] P. G. CIARLET: The finite element method for elliptic problems, North-Holland, Amsterdam, (1978).
- [11] PH. CLEMENT: approximation by finite element functions using local regularisation, R.A.I.R.O. Analyse numérique 8 (1975), 77-84.
- [12] J. J. DROUX and T. J. R. HUGHES: A boundary integral modification of the Galerkin least squares formulation of the Stokes problem, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 113 (1994), 173-182.
- [13] R. S FALK and J. E. OSBORN: Error estimates for mixed methods, R.A.I.R.O. Analyse numérique 14 (1980), 249-277.
- [14] M. FARHLOUL and M. FORTIN: A new mixed finite element for the stokes and elasticity problems, S.I.A.M. Journal of Numerical Analysis 30 (1993), 971-990.
- [15] L. P. FRANCA: Analysis and finite element approximation of compressible and incompressible linear isotropic elasticity based upon a variational principle, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 76 (1989), 259-273.

- [16] L. P. FRANCA and T. J. R. HUGHES: Two classes of mixed finite element methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 69 (1988), 89-129.
- [17] L. P. FRANCA and R. STENBERG: Finite element approximation of a new variational principle for compressible and incompressible linear isotropic elasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 42 (1989), 64-68.
- [18] L. P. FRANCA and R. STENBERG: Error Analysis of some Galerkin least squares methods for the elasticity equations, *S.I.A.M. Journal on Numerical Analysis* 28 (1991), 1680-1697.
- [19] L. P. FRANCA, T. G. R. HUGHES and R. STENBERG: Stabilized finite element methods for the Stokes problem, in: R. Nicolaides and Gunzberger (Ed.): *Incompressible Computational Fluid Dynamics - Trends and Advances*, Cambridge University press (1993), 87-107.
- [20] L. P. FRANCA, T. G. R. HUGHES, A. F. D. LOULA and I. MIRANDA: A new family of stable elements for nearly incompressible elasticity based on a mixed Petrov-Galerkin finite element formulation, *Numerische Mathematik* 53 (1988), 123-141.
- [21] V. GIRAULT and P. A. RAVIART: Finite element approximation of the Navier-Stokes equations, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (1986).

- [22] J. PITKÄRANTA and R. STENBERG: Analysis of some mixed finite element methods for plane elasticity equations, *Mathematics of Computation* 41 (1983), 399-423.
- [23] P. A. RAVIART and THOMAS: Introduction d'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, Paris, (1983).
- [24] R. STENBERG: Analysis of mixed finite element methods for the Stokes problem: A unified approach, *Mathematics of Computation* 42 (1984), 9-23.
- [25] R. STENBERG: On the construction of optimal mixed finite element methods for the linear elasticity problem, *Numerische Mathematik* 48 (1986), 447-462.
- [26] R. STENBERG: On some three-dimensional finite elements for incompressible media, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 63 (1987), 261-269.
- [27] R. STENBERG: Two low-order mixed methods for the elasticity problem, in: J. R. WHITEMAN (Ed.): *The Mathematics of finite elements and Applications VI, MAFELAP 1987*. Academic Press (1988), 271-280.
- [28] R. STENBERG: A family of mixed finite elements for the elasticity problem, *Numerische Mathematik* 53 (1988), 513-538.

- [29] R. STENBERG: A technique for analysing finite element methods for viscous incompressible flow, International Journal for Numerical Methods in Fluids 11 (1990), 935-948.
- [30] T. E. TEZDUYAR: Stabilized finite element formulations for incompressible flow, computations, Advances in Applied Mechanics 28(1992),1-44.
- [31] M. ZAAMA: Techniques de stabilisation des méthodes mixtes des éléments finis, Thèse de Magister, Université de Constantine, (1995).

ANNEXE

**PROGRAMME1:CALCUL DES SOLUTIONS APPROCHÉES**

USES CRT;

CONST XL = 1.0 ; YL = 1.0 ; NX =6 ; NY= 6 ;  
NMXEL =36; NMXD =206; NMXDF =48;  
DELTA = 0.250; RO =0.75 ; XMU = 1.0 ;

TYPE

MAT1 =ARRAY[1..NMXD,1..NMXD] OF REAL;  
MAT2 =ARRAY[1..11,1..NMXEL] OF INTEGER;  
MAT3 =ARRAY[1..11,1..11] OF REAL;  
MAT4 =ARRAY[1..3,1..3] OF REAL;  
MAT5 =ARRAY[1..3,1..8] OF REAL;  
MAT6 =ARRAY[1..8,1..3] OF REAL;  
MAT7 =ARRAY[1..8,1..8] OF REAL;  
MAT8 =ARRAY[1..(3\*NX\*NY),1..(3\*NX\*NY)] OF REAL;  
MAT9 =ARRAY[1..(3\*NX\*NY),1..2\*(NX+1)\*(NY+1)] OF REAL;  
MAT10 =ARRAY[1..2\*(NX+1)\*(NY+1),1..3\*NX\*NY] OF REAL;  
MAT11 =ARRAY[1..2\*(NX+1)\*(NY+1),1..2\*(NX+1)\*(NY+1)] OF REAL;  
VECT =ARRAY[1..NMXD] OF REAL;  
VECT1 =ARRAY[1..NMXD] OF INTEGER;  
VECT2 =ARRAY[1..3\*NX\*NY] OF REAL;  
VECT3 =ARRAY[1..2\*(NX+1)\*(NY+1)] OF REAL;  
VECT4 =ARRAY[1..3] OF REAL;  
VECT5 =ARRAY[1..8] OF REAL;

VAR

A:MAT1;NUEL:MAT2;AE1,AE2,AE3:MAT4;AE4,AE5:MAT5;AE6,  
AE7:MAT6;AE8:MAT7;AG1,AG2,AG3:MAT8;AG4,AG5:MAT9;AG6,  
AG7:MAT10; AG8:MAT11;  
B,VALFR,X:VECT; NUMFR:VECT1;  
B1:VECT2;  
B2:VECT3;  
BE1:VECT4;  
BE2:VECT5;

I,J,N,K,I1,K1,K2:INTEGER;

NEL,NDOF,NDFR:INTEGER;

HX,HY,S:REAL;

CHOIX:CHAR;

(\* XL: LA LOGUEUR DU DOMAINE  
YL: LA LARGEUR DU DOMAINE  
NX: NOMBRE D'ELEMENTS SUR L'AXE DES X  
NY: NOMBRE D'ELEMENTS SUR L'AXE DES Y  
NMXD : NOMBRE DE DEGRE DE LIBERTE TOTAL  
NMXEL: NOMBRE D'ELEMENTS TOTAL  
NMXDF: NOMBRE DE DEGRE DE LIBERTE SUR LA FRONTIERE  
G.DAT: FICHER DE LOCALISATION D'ELEMENTS  
SOL.DAT:FICHER DE SOLUTIONS \*)

PROCEDURE LECTURE;

VAR I:INTEGER;

CHX:CHAR;

F:TEXT;

BEGIN

```

ASSIGN(F, 'G.DAT');
RESET(F);
READ(F, NEL); READ(F, NDOF);
FOR I:=1 TO NEL DO
FOR J:=1 TO 11 DO
READ(F, NUEL[J, I]);

READ(F, NDFR);
FOR I:=1 TO NDFR DO
READ(F, NUMFR[I]);
FOR I:=1 TO NDFR DO
READ(F, VALFR[I]);

CLOSE(F);

END;
PROCEDURE ECRITURE;
VAR I:INTEGER;
    CHX:CHAR;
    F:FILE OF REAL;
BEGIN
    ASSIGN(F, 'SOL.DAT');
    REWRITE(F);
    FOR I:=1 TO NMXD DO
    WRITE(F, X[I]);
    CLOSE(F);

END;

PROCEDURE INV(VAR A:MAT1; TAILLE:INTEGER);
TYPE PTR = ARRAY[1..100] OF INTEGER;
VAR LIGNE, K, I, J, PIVOT, INT : INTEGER;
    D, MAX : REAL;
    P : PTR;
    ERREUR:BOOLEAN;
PROCEDURE ORDONNER;
VAR TEMP : INTEGER;
    TEMPO : REAL;
    Q : PTR;
    LIGNE, COLONNE, I : INTEGER;
FUNCTION ANTECEDENT (I : INTEGER) : INTEGER;
VAR K:INTEGER;
BEGIN
    K := 0;
    REPEAT K:= K+1 UNTIL Q[K] = I;
    ANTECEDENT := K;
END;

BEGIN
    { ORDONNER LES COLONNES }
    FOR LIGNE := 1 TO TAILLE DO
    BEGIN
        FOR I:=1 TO TAILLE DO Q[I] := P[I];
        FOR COLONNE:=1 TO TAILLE DO

```

```

        BEGIN
        TEMPO := A[LIGNE, COLONNE]; TEMP := Q[COLONNE];
        A[LIGNE, COLONNE] := A[LIGNE, Q[COLONNE]];
        A[LIGNE, Q[COLONNE]] := TEMPO;
        Q[ANTECEDENT(COLONNE)] := TEMP;
        Q[COLONNE] := COLONNE;
        END;
    END;

    { ORDONNER LES LIGNES }
    FOR COLONNE := 1 TO TAILLE DO
    BEGIN
    FOR I:=1 TO TAILLE DO Q[I] := P[I];
    FOR LIGNE:=1 TO TAILLE DO
    BEGIN
        TEMPO := A[LIGNE, COLONNE]; TEMP := Q[LIGNE];
        A [ L I G N E , C O L O N N E ] :=
        A[ANTECEDENT(LIGNE), COLONNE];
        A[ANTECEDENT(LIGNE), COLONNE] := TEMPO;
        Q[ANTECEDENT(LIGNE)] := TEMP;
        Q[LIGNE] := LIGNE;
        END;
    END;
    END;

    BEGIN
    ERREUR := FALSE;
    FOR I := 1 TO TAILLE DO P[I] := I;
    FOR I:=1 TO TAILLE DO
    BEGIN
    { RECHERCHE DU PIVOT }
    MAX := 0;
    FOR LIGNE := I TO TAILLE DO
    IF ABS(A[I, P[LIGNE]]) > MAX
    THEN BEGIN MAX := ABS(A[I, P[LIGNE]]); PIVOT := LIGNE
    END;

    IF MAX = 0 THEN
    BEGIN
    ERREUR := TRUE; WRITELN('MATRICE SINGULIERE'); EXIT END;
    INT := P[I];
    P[I] := P[PIVOT];
    P[PIVOT] := INT;

    { TRANSFORMATION }
    D := A[I, P[I]];
    A[I, P[I]] := 1;
    FOR J:=1 TO TAILLE DO
    A[I, P[J]] := A[I, P[J]]/D;
    FOR K:=1 TO TAILLE DO
    IF K<>I
    THEN BEGIN
    D := A[K, P[I]];
    A[K, P[I]] := 0;
    FOR J:=1 TO TAILLE DO
    A[K, P[J]] := A[K, P[J]] - A[I, P[J]] * D;

```

```

                                END;
    END;
    ORDONNER;
END;
PROCEDURE MUL(AA:MAT1;BB:VECT;VAR X:VECT;N:INTEGER);
    BEGIN
    FOR I:=1 TO N DO
    BEGIN
    S:=0;
    FOR J:=1 TO N DO
    S:=S+AA[I,J]*BB[J];
    X[I]:=S;
    END;
    END;

```

```

PROCEDURE AAE1;

```

```

    BEGIN
    AE1[1,1]:=(1/(2*XMU))*HX*HY;
    AE1[1,2]:=0.0;
    AE1[1,3]:=0.0;
    AE1[2,1]:=0.0;
    AE1[2,2]:=(1/XMU)*HX*HY;
    AE1[2,3]:=0.0;
    AE1[3,1]:=0.0;
    AE1[3,2]:=0.0;
    AE1[3,3]:=(1/(2*XMU))*HX*HY;
    END;

```

```

PROCEDURE AAE2;

```

```

    BEGIN
    AE2[1,1]:=(-(1-RO)/(4*XMU))*HX*HY;
    AE2[1,2]:=0.0;
    AE2[1,3]:=((RO-1)/(4*XMU))*HX*HY;
    AE2[2,1]:=0.0;
    AE2[2,2]:=0.0;
    AE2[2,3]:=0.0;
    AE2[3,1]:=((RO-1)/(4*XMU))*HX*HY;
    AE2[3,2]:=0.0;
    AE2[3,3]:=(-(1-RO)/(4*XMU))*HX*HY;
    END;

```

```

PROCEDURE AAE3;

```

```

    BEGIN
    AE3[1,1]:=- (DELTA*(1+RO*RO)/2)*HX*HY;
    AE3[1,2]:=0.0;
    AE3[1,3]:=(DELTA*(1-RO*RO)/2)*HX*HY;
    AE3[2,1]:=0.0;
    AE3[2,2]:=-2*DELTA*HX*HY;
    AE3[2,3]:=0.0;
    AE3[3,1]:=(DELTA*(1-RO*RO)/2)*HX*HY;
    AE3[3,2]:=0.0;
    AE3[3,3]:=- (DELTA*(1+RO*RO)/2)*HX*HY;
    END;

```

PROCEDURE AAE4;

```
BEGIN
AE4[1,1]:=-(-1*HY)/2;
AE4[1,2]:=0.0;
AE4[1,3]:=-AE4[1,1];
AE4[1,4]:=AE4[1,2];
AE4[1,5]:=AE4[1,3];
AE4[1,6]:=-AE4[1,4];
AE4[1,7]:=-AE4[1,5];
AE4[1,8]:=AE4[1,6];
AE4[2,1]:=-(-1*HX)/2;
AE4[2,2]:=-(-1*HY)/2;
AE4[2,3]:=AE4[2,1];
AE4[2,4]:=-AE4[2,2];
AE4[2,5]:=-AE4[2,3];
AE4[2,6]:=AE4[2,4];
AE4[2,7]:=AE4[2,5];
AE4[2,8]:=AE4[2,2];
AE4[3,1]:=0.0;
AE4[3,2]:=-(-1*HX)/2;
AE4[3,3]:=-AE4[3,1];
AE4[3,4]:=AE4[3,2];
AE4[3,5]:=AE4[3,3];
AE4[3,6]:=-AE4[3,2];
AE4[3,7]:=-AE4[3,3];
AE4[3,8]:=AE4[3,6];
END;
```

PROCEDURE AAE5;

```
BEGIN
AE5[1,1]:=- (DELTA*XMU*(1+RO)*HY)/2;
AE5[1,2]:=- (DELTA*XMU*(RO-1)*HX)/2;
AE5[1,3]:=-AE5[1,1];
AE5[1,4]:=AE5[1,2];
AE5[1,5]:=AE5[1,3];
AE5[1,6]:=-AE5[1,4];
AE5[1,7]:=-AE5[1,5];
AE5[1,8]:=AE5[1,6];
AE5[2,1]:=- (2*DELTA*XMU*HX)/2;
AE5[2,2]:=- (2*DELTA*XMU*HY)/2;
AE5[2,3]:=AE5[2,1];
AE5[2,4]:=-AE5[2,2];
AE5[2,5]:=-AE5[2,3];
AE5[2,6]:=AE5[2,4];
AE5[2,7]:=AE5[2,5];
AE5[2,8]:=AE5[2,2];
AE5[3,1]:=- (DELTA*XMU*(RO-1)*HY)/2;
AE5[3,2]:=- (DELTA*XMU*(1+RO)*HX)/2;
AE5[3,3]:=-AE5[3,1];
AE5[3,4]:=AE5[3,2];
AE5[3,5]:=AE5[3,3];
AE5[3,6]:=-AE5[3,2];
AE5[3,7]:=-AE5[3,3];
AE5[3,8]:=AE5[3,6];
```

```

FOR I:=1 TO 3 DO
FOR J:=1 TO 8 DO
BEGIN
AE6[J,I]:=AE4[I,J];
AE7[J,I]:=AE5[I,J];
END;
END;

```

```
PROCEDURE AAE6;
```

```
BEGIN
```

```

AE8[1,1]:=(-(4*DELTA*XMU*XMU)*HY)/(3*HX)+-(2*DELTA*XMU*XMU)/4;
AE8[1,2]:=- (2*DELTA*XMU*XMU)/4;
AE8[1,3]:=- (-(4*DELTA*XMU*XMU)*HY)/(3*HX)+
(-(2*DELTA*XMU*XMU)*HX)/(6*HY);
AE8[1,4]:=- (-(2*DELTA*XMU*XMU)/4);
AE8[1,5]:=- (-(4*DELTA*XMU*XMU)*HY)/(6*HX)-
(-(2*DELTA*XMU*XMU)*HX)/(6*HY);
AE8[1,6]:=- (-(2*DELTA*XMU*XMU)/4);
AE8[1,7]:=- (-(4*DELTA*XMU*XMU)*HY)/(6*HX)-
(-(2*DELTA*XMU*XMU)*HX)/(3*HY);
AE8[1,8]:=- (2*DELTA*XMU*XMU)/4;
AE8[2,1]:=- (2*DELTA*XMU*XMU)/4;
AE8[2,2]:=- (-(2*DELTA*XMU*XMU)*HY)/(3*HX)+
(-(4*DELTA*XMU*XMU)*HX)/(3*HY);
AE8[2,3]:=- (2*DELTA*XMU*XMU)/4;
AE8[2,4]:=- (-(2*DELTA*XMU*XMU)*HY)/(3*HX)+
(-(4*DELTA*XMU*XMU)*HX)/(6*HY);
AE8[2,5]:=- (-(2*DELTA*XMU*XMU)/4);
AE8[2,6]:=- (-(2*DELTA*XMU*XMU)*HY)/(6*HX)-
(-(4*DELTA*XMU*XMU)*HX)/(6*HY);
AE8[2,7]:=- (-(2*DELTA*XMU*XMU)/4);
AE8[2,8]:=- (-(2*DELTA*XMU*XMU)*HY)/(6*HX)-
(-(4*DELTA*XMU*XMU)*HX)/(3*HY);
AE8[3,3]:=- (-(4*DELTA*XMU*XMU)*HY)/(3*HX)+
(-(2*DELTA*XMU*XMU)*HX)/(3*HY);
AE8[3,4]:=- (-(2*DELTA*XMU*XMU)/4);
AE8[3,5]:=- (-(4*DELTA*XMU*XMU)*HY)/(6*HX)-
(-(2*DELTA*XMU*XMU)*HX)/(3*HY);
AE8[3,6]:=- (-(2*DELTA*XMU*XMU)/4);
AE8[3,7]:=- (-(4*DELTA*XMU*XMU)*HY)/(6*HX)-
(-(2*DELTA*XMU*XMU)*HX)/(6*HY);
AE8[3,8]:=- (-(2*DELTA*XMU*XMU)/4);
AE8[4,4]:=- (-(2*DELTA*XMU*XMU)*HY)/(3*HX)+
(-(4*DELTA*XMU*XMU)*HX)/(3*HY);
AE8[4,5]:=- (2*DELTA*XMU*XMU)/4;
AE8[4,6]:=- (-(2*DELTA*XMU*XMU)*HY)/(6*HX)-
(-(4*DELTA*XMU*XMU)*HX)/(3*HY);
AE8[4,7]:=- (2*DELTA*XMU*XMU)/4;
AE8[4,8]:=- (-(2*DELTA*XMU*XMU)*HY)/(6*HX)-
(-(4*DELTA*XMU*XMU)*HX)/(6*HY);
AE8[5,5]:=- (-(4*DELTA*XMU*XMU)*HY)/(3*HX)+
(-(2*DELTA*XMU*XMU)*HX)/(3*HY);
AE8[5,6]:=- (-(2*DELTA*XMU*XMU)/4);
AE8[5,7]:=- (-(4*DELTA*XMU*XMU)*HY)/(3*HX)-

```

```

(2*DELTA*XMU*XMU)/4;
AE8[5,8]:=-(2*DELTA*XMU*XMU)/4;
AE8[6,6]:=(-(2*DELTA*XMU*XMU)*HY)/(3*HX)+
(- (4*DELTA*XMU*XMU)*HX)/(3*HY);
AE8[6,7]:=-(2*DELTA*XMU*XMU)/4;
AE8[6,8]:=-(- (2*DELTA*XMU*XMU)*HY)/(3*HX)+
(- (4*DELTA*XMU*XMU)*HX)/(6*HY);
AE8[7,7]:=(-(4*DELTA*XMU*XMU)*HY)/(3*HX)+
(- (2*DELTA*XMU*XMU)*HX)/(3*HY);
AE8[7,8]:=-(- (2*DELTA*XMU*XMU)/4);
AE8[8,8]:=(-(2*DELTA*XMU*XMU)*HY)/(3*HX)+
(- (4*DELTA*XMU*XMU)*HX)/(3*HY);

```

```

FOR I:=1 TO 8 DO
FOR J:=1 TO 8 DO
AE8[J,I]:=AE8[I,J] ;
END;
PROCEDURE BBE1;
BEGIN
BE1[1]:=0.0;
BE1[2]:=0.0;
BE1[3]:=0.0;
END;

```

```

PROCEDURE BBE2;
BEGIN

```

```

BE2[1]:= HX*HY*XMU*(18*SQR(K1*HX)*RO+6*K1*HX*(6*K2*HY+(RO+1)
*(2*HX-3))+18*SQR(K2*HY)*RO+6*K2*HY*(RO+2)*(2*HX-3)+HX*
HY*(6*RO+7)-6*HX*(2*RO+3)+9)/(36*RO);

```

```

BE2[2]:=HX*HY*XMU*(18*SQR(K1*HX)*(RO+1)+6*K1*HX*(6*K2*HY+(RO+2)
*(2*HX-3))+18*SQR(K2*HY)*RO+6*K2*HY*(RO+1)*(2*HX-3)+HX*HY*
(6*RO+7)-6*HX*(2*RO+3)+9)/(36*RO);

```

```

BE2[3]:=HX*HY*XMU*(18*SQR(K1*HX)*RO+6*K1*HX*(6*K2*HY+2*HX*
(2*RO+1)-3*(RO+1))+18*SQR(K2*HY)*(RO+1)+6*K2*HY*(2*HX*(RO+3)
-3*(RO+2))+HX*HY*(12*RO+11)-6*HX*(3*RO+4)+9)/(36*RO);

```

```

BE2[4]:=HX*HY*XMU*(18*SQR(K1*HX)*(RO+1)+6*K1*HX*(6*K2*HY+2*
HX*(2*RO+3)-3*(RO+2))+18*SQR(K2*HY)*RO+6*K2*HY*(2*HX*(RO+2)
-3*(RO+1))+HX*HY*(12*RO+17)-6*HX*(3*RO+5)+9)/(36*RO);

```

```

BE2[5]:=HX*HY*XMU*(18*SQR(K1*HX)*RO+6*K1*HX*(6*K2*HY+(RO+1)
*(4*HX-3))+18*SQR(K2*HY)*(RO+1)+6*K2*HY*(RO+2)*(4*HX-3)+HX*HY
*(18*RO+25)-12*HX*(2*RO+3)+9)/(36*RO);

```

```

BE2[6]:=HX*HY*XMU*(18*SQR(K1*HX)*(RO+1)+6*K1*HX*(6*K2*HY+
(RO+2)*(4*HX-3))+18*SQR(K2*HY)*RO+6*K2*HY*(RO+1)*(4*HX-3)+
HX*HY*(18*RO+25)-12*HX*(2*RO+3)+9)/(36*RO);

```

```

BE2[7]:=HX*HY*XMU*(18*SQR(K1*HX)*RO+6*K1*HX*(6*K2*HY+2*HX
*(RO+2)-3*(RO+1))+18*SQR(K2*HY)*(RO+1)+6*K2*HY*(2*HX*(2*RO+3)
-3*(RO+2))+HX*HY*(12*RO+17)-6*HX*(3*RO+5)+9)/(36*RO);

```

```

BE2[8]:=HX*HY*XMU*(18*SQR(K1*HX)*(RO+1)+6*K1*HX*(6*K2*HY+2*HX

```

```

*(RO+3)-3*(RO+2))+18*SQR(K2*HY)*RO+6*K2*HY*(2*HX*(2*RO+1)-3*
(RO+1))+HX*HY*(12*RO+11)-6*HX*(3*RO+4)+9)/(36*RO);
END;

```

```

PROCEDURE ASS1(AAE1:MAT4;VAR AAG1:MAT8);
BEGIN
  FOR I:=1 TO NEL DO
    FOR J:=1 TO 3 DO
      FOR K:=1 TO 3 DO
        AAG1[NUEL[J,I],NUEL[K,I]]:=AAG1[NUEL[J,I],NUEL[K,I]]+
        AAE1[J,K];
      END;
    END;
  END;

```

```

PROCEDURE ASS2(AAE2:MAT5;VAR AAG2:MAT9);
BEGIN
  FOR I:=1 TO NEL DO
    FOR J:=1 TO 3 DO
      FOR K:=1 TO 8 DO

```

```

AAG2[NUEL[J,I],NUEL[K+3,I]-3*NX*NY]:=AAG2[NUEL[J,I],NUEL[K+3,I]
-3*NX*NY]+AAE2[J,K];

```

```

END;

```

```

PROCEDURE ASS3(AAE3:MAT6;VAR AAG3:MAT10);
BEGIN

```

```

  FOR I:=1 TO NEL DO
    FOR J:=1 TO 8 DO
      FOR K:=1 TO 3 DO
        AAG3[NUEL[J+3,I]-3*NX*NY,NUEL[K,I]]:=
        AAG3[NUEL[J+3,I]-3*NX*NY,NUEL[K,I]]+AAE3[J,K];
      END;
    END;
  END;

```

```

PROCEDURE ASS4(AAE8:MAT7;VAR AAG4:MAT11);
BEGIN

```

```

  FOR I:=1 TO NEL DO
    FOR J:=1 TO 8 DO
      FOR K:=1 TO 8 DO
        AAG4[NUEL[J+3,I]-3*NX*NY,NUEL[K+3,I]-3*NX*NY]:=
        AAG4[NUEL[J+3,I]-3*NX*NY,NUEL[K+3,I]-3*NX*NY]+AAE8[J,K];
      END;
    END;
  END;

```

```

PROCEDURE ASS5(BBE1:VECT4;VAR BB1:VECT2);
BEGIN

```

```

  FOR J:=1 TO 3 DO
    BB1[NUEL[J,I]]:=BB1[NUEL[J,I]]+BBE1[J];
  END;

```

```

PROCEDURE ASS6(BBE2:VECT5;VAR BB2:VECT3);
BEGIN

```

```

  FOR J:=1 TO 8 DO
    BB2[NUEL[J+3,I]-3*NX*NY]:=BB2[NUEL[J+3,I]-3*NX*NY]+BBE2[J];
  END;

```

```

PROCEDURE COLI(VAR AA:MAT1;BB:VECT);
LABEL 10;
BEGIN
  FOR I:=1 TO NDFR DO

```

```

      BEGIN
      I1:=NUMFR[I];
      FOR J:=1 TO NDOF DO
      A[I1,J]:=0.0;
      A[I1,I1]:=1.0;
      B[I1]:=VALFR[I];
      END;
      FOR I:=1 TO NDOF DO
      BEGIN
      FOR J:=1 TO NDFR DO
      IF I =NUMFR[J] THEN GOTO 10;
      FOR K:=1 TO NDFR DO
      BEGIN
      B[I]:=B[I]-A[I,NUMFR[K]]*VALFR[K];
      A[I,NUMFR[K]]:=0.0;
      END;
10: END;
      END;
{ PROGRAMME PRINCIPALE}

```

```

      BEGIN

      FOR I:=1 TO 3 DO
      FOR J:=1 TO 3 DO
      AE1[I,J]:=0;
      FOR I:=1 TO 3 DO
      FOR J:=1 TO 3 DO
      AE2[I,J]:=0;
      FOR I:=1 TO 3 DO
      FOR J:=1 TO 3 DO
      AE3[I,J]:=0;
      FOR I:=1 TO 3 DO
      FOR J:=1 TO 8 DO
      AE4[I,J]:=0;
      FOR I:=1 TO 3 DO
      FOR J:=1 TO 8 DO
      AE5[I,J]:=0;
      FOR I:=1 TO 8 DO
      FOR J:=1 TO 3 DO
      AE6[I,J]:=0;
      FOR I:=1 TO 8 DO
      FOR J:=1 TO 3 DO
      AE7[I,J]:=0;
      FOR I:=1 TO 8 DO
      FOR J:=1 TO 8 DO
      AE8[I,J]:=0;
      FOR I:=1 TO 3*NX*NY DO
      FOR J:=1 TO 3*NX*NY DO
      AG1[I,J]:=0;
      FOR I:=1 TO 3*NX*NY DO
      FOR J:=1 TO 3*NX*NY DO
      AG2[I,J]:=0;
      FOR I:=1 TO 3*NX*NY DO
      FOR J:=1 TO 3*NX*NY DO
      AG3[I,J]:=0;
      FOR I:=1 TO 3*NX*NY DO

```

```

FOR J:=1 TO 2*(NX+1)*(NY+1) DO
AG4[I,J]:=0;
FOR I:=1 TO 3*NX*NY DO
FOR J:=1 TO 2*(NX+1)*(NY+1) DO
AG5[I,J]:=0;
FOR I:=1 TO 2*(NX+1)*(NY+1) DO
FOR J:=1 TO 3*NX*NY DO
AG6[I,J]:=0;
FOR I:=1 TO 2*(NX+1)*(NY+1) DO
FOR J:=1 TO 3*NX*NY DO
AG7[I,J]:=0;
FOR I:=1 TO 2*(NX+1)*(NY+1) DO
FOR J:=1 TO 2*(NX+1)*(NY+1) DO
AG8[I,J]:=0;
FOR I:=1 TO NMXD DO
FOR J:=1 TO NMXD DO
A[I,J]:=0;
FOR I:=1 TO 3 DO
BE1[I]:=0;
FOR I:=1 TO 8 DO
BE2[I]:=0;
FOR I:=1 TO 3*NX*NY DO
B1[I]:=0;
FOR I:=1 TO 2*(NX+1)*(NY+1) DO
B2[I]:=0;
FOR I:=1 TO NMXD DO
B[I]:=0;
FOR I:=1 TO NMXD DO
X[I]:=0;
      HX:=XL/NX;
      HY:=YL/NY ;
LECTURE;

```

```

AAE1;
AAE2;
AAE3;
AAE4;
AAE5;

```

```

FOR I:=1 TO 3 DO
FOR J:= 1 TO 8 DO
BEGIN
AE6[J,I]:=AE4[I,J];
AE7[J,I]:=AE5[I,J];
END;
AAE6;

```

```

ASS1(AE1,AG1);
ASS1(AE2,AG2);
ASS1(AE3,AG3);
ASS2(AE4,AG4);
ASS2(AE5,AG5);
ASS3(AE6,AG6);
ASS3(AE7,AG7);
ASS4(AE8,AG8);

```

```

K1:=0;
K2:=0;
FOR I:=1 TO NEL DO
BEGIN
BBE1;
BBE2;

ASS5(BE1,B1);
ASS6(BE2,B2);

IF ((K1+1)*HY)=1 THEN K2:=K2+1;
IF ((K1+1)*HY)=1 THEN K1:=-1;
K1:=K1+1;
END;

FOR I:=1 TO 3*NX*NY DO
FOR J:=1 TO 3*NX*NY DO
A[I,J]:=AG1[I,J]+AG2[I,J]+AG3[I,J];

FOR I:=1 TO 3*NX*NY DO
FOR J:=1 TO 2*(NX+1)*(NY+1) DO
A[I,J+3*NX*NY]:=AG4[I,J]+AG5[I,J];
FOR I:=1 TO 2*(NX+1)*(NY+1) DO
FOR J:=1 TO 3*NX*NY DO
A[I+3*NX*NY,J]:=AG6[I,J]+AG7[I,J];
FOR I:=1 TO 2*(NX+1)*(NY+1) DO
FOR J:=1 TO 2*(NX+1)*(NY+1) DO
A[I+3*NX*NY,J+3*NX*NY]:=AG8[I,J];
FOR I:=1 TO 3*NX*NY DO
B[I]:=B1[I];
FOR I:=3*NX*NY+1 TO 3*NX*NY+2*(NX+1)*(NY+1) DO
B[I]:=B2[I-3*NX*NY];

COLI(A,B);

INV(A,NDOF);
MUL(A,B,X,NDOF);

READLN;
ECRITURE;
END.

```

**PROGRAMME2: CALCUL DES ERREURS DE LA VITESSE**

USES CRT;

CONST N=6;  
XL = 1.0 ; YL = 1.0 ; NX = 06 ; NY = 06;

TYPE  
VECT=ARRAY[1..3\*N\*N+2\*(N+1)\*(N+1)] OF REAL;  
VECT1=ARRAY[1..4] OF REAL;  
MAT1=ARRAY[1..4,1..4] OF REAL;  
VAR  
X:VECT; B1,B3,Y,Z:VECT1;A1:MAT1;  
I,J,K1,K2,I1:INTEGER;

HX,HY,A,B,C,D,A2,B2,C2,D2,S:REAL;  
E1,E2,E3,E4,E5,E6,E7,E8,E9,E10:REAL;  
E11,E12,E13,E14,E15,E16,E17,E18:REAL;  
ER11,ER12,ER13:REAL;  
ER21,ER22,ER23:REAL;  
ERRU1,ERRU2,ERRU:REAL;  
CHOIX:CHAR;

PROCEDURE LECTURE;  
VAR I:INTEGER;  
CHX:CHAR;  
F:FILE OF REAL;{TEXT;}

BEGIN  
ASSIGN(F,'SOLT6.DAT');  
RESET(F);  
FOR I:=1 TO 3\*N\*N+2\*(N+1)\*(N+1) DO  
READ(F,X[I]);  
CLOSE(F);

END;

```
{-----}  
{   INVERSION D'UNE MATRICE 'SUR PLACE'   }  
{           METHODE DE GAUSS-JORDAN           }  
{   PIVOT PARTIEL DEPLACEMENT VIRTUEL   }  
{-----}
```

PROCEDURE INV(VAR A:MAT1; TAILLE:INTEGER);  
TYPE PTR = ARRAY[1..100] OF INTEGER;  
VAR LIGNE,K,I,J, PIVOT, INT : INTEGER;  
D, MAX : REAL;  
P : PTR;  
ERREUR:BOOLEAN;  
PROCEDURE ORDONNER;  
VAR TEMP : INTEGER;  
TEMPO : REAL;  
Q : PTR;  
LIGNE, COLONNE, I : INTEGER;  
FUNCTION ANTECEDENT (I : INTEGER) : INTEGER;  
VAR K:INTEGER;  
BEGIN

```

K := 0;
REPEAT K:= K+1 UNTIL Q[K] = I;
ANTECEDENT := K;
END;

BEGIN
{ ORDONNER LES COLONNES }
FOR LIGNE := 1 TO TAILLE DO
BEGIN
FOR I:=1 TO TAILLE DO Q[I] := P[I];
FOR COLONNE:=1 TO TAILLE DO
BEGIN
TEMPO := A[LIGNE, COLONNE]; TEMP := Q[COLONNE];
A[LIGNE, COLONNE] := A[LIGNE, Q[COLONNE]];
A[LIGNE, Q[COLONNE]] := TEMPO;
Q[ANTECEDENT(COLONNE)] := TEMP;
Q[COLONNE] := COLONNE;
END;
END;

{ ORDONNER LES LIGNES }
FOR COLONNE := 1 TO TAILLE DO
BEGIN
FOR I:=1 TO TAILLE DO Q[I] := P[I];
FOR LIGNE:=1 TO TAILLE DO
BEGIN
TEMPO := A[LIGNE, COLONNE]; TEMP := Q[LIGNE];
A [ L I G N E , C O L O N N E ] :=
A[ANTECEDENT(LIGNE), COLONNE];
A[ANTECEDENT(LIGNE), COLONNE] := TEMPO;
Q[ANTECEDENT(LIGNE)] := TEMP;
Q[LIGNE] := LIGNE;
END;
END;
END;

BEGIN
ERREUR := FALSE;
FOR I := 1 TO TAILLE DO P[I] := I;
FOR I:=1 TO TAILLE DO
BEGIN
{ RECHERCHE DU PIVOT }
MAX := 0;
FOR LIGNE := I TO TAILLE DO
IF ABS(A[I, P[LIGNE]]) > MAX
THEN BEGIN MAX := ABS(A[I, P[LIGNE]]); PIVOT := LIGNE
END;
IF MAX = 0 THEN
BEGIN
ERREUR := TRUE; WRITELN('MATRICE SINGULIERE');EXIT END;
INT := P[I];
P[I] := P[PIVOT];
P[PIVOT] := INT;

{ TRANSFORMATION }

```

```

        D := A[I,P[I]];
        A[I,P[I]] := 1;
        FOR J:=1 TO TAILLE DO
        A[I,P[J]] := A[I,P[J]]/D;
        FOR K:=1 TO TAILLE DO
        IF K<>I
        THEN BEGIN
        D := A[K,P[I]];
        A[K,P[I]] := 0;
        FOR J:=1 TO TAILLE DO
        A[K,P[J]] := A[K,P[J]] - A[I,P[J]] * D;
        END;
    END;
    ORDONNER;
END;
PROCEDURE MUL(B:VECT1;VAR X:VECT1;N:INTEGER);
VAR I:INTEGER;
BEGIN
FOR I:=1 TO N DO
BEGIN
S:=0;
FOR J:=1 TO N DO
S:=S+A1[I,J]*B[J];
X[I]:=S;
END;
END;

BEGIN
LECTURE;
    HX:=XL/NX;
    HY:=YL/NY;
    E1:=0;E2:=0;
    E3:=0;E4:=0; E5:=0;E6:=0;E7:=0;E8:=0;E9:=0;E10:=0;
    E11:=0;E12:=0; E13:=0;E14:=0;E15:=0;E16:=0;E17:=0;E18:=0;

    ER11:=0;ER12:=0;ER13:=0;
    ER21:=0;ER22:=0;ER23:=0;
    ERRU1:=0.0; ERRU2:=0;ERRU:=0;

    I:=3*N*N+1;
    FOR K2:=0 TO (N-1) DO
    FOR K1:=0 TO (N-1) DO
    BEGIN

        A1[1,1]:=1;
        A1[1,2]:=K1*HX;
        A1[1,3]:=K2*HY;
        A1[1,4]:=K1*HX*K2*HY;
        A1[2,1]:=1;
        A1[2,2]:=K1*HX+HX;
        A1[2,3]:=K2*HY;
        A1[2,4]:=(K1*HX+HX)*K2*HY;
        A1[3,1]:=1;
        A1[3,2]:=K1*HX+HX;

```

```

A1[3,3]:=K2*HY+HY;
A1[3,4]:=(K1*HX+HY)*(K2*HY+HY);
A1[4,1]:=1;
A1[4,2]:=K1*HX;
A1[4,3]:=K2*HY+HY;
A1[4,4]:=(K1*HX*(K2*HY+HY));
B1[1]:=X[I];
B3[1]:=X[I+1];
B1[2]:=X[I+2];
B3[2]:=X[I+3];
B1[3]:=X[I+3+2*N+1];
B3[3]:=X[I+3+2*N+2];
B1[4]:=X[I+3+2*N-1];
B3[4]:=X[I+3+2*N];
Y[1]:=0.0;
Y[2]:=0.0;
Y[3]:=0.0;
Y[4]:=0.0;
INV(A1,4);
MUL(B1,Y,4);
A:=Y[1];
B:=Y[2];
C:=Y[3];
D:=Y[4];
Z[1]:=0.0;
Z[2]:=0.0;
Z[3]:=0.0;
Z[4]:=0.0;
A1[1,1]:=1;
A1[1,2]:=K1*HX;
A1[1,3]:=K2*HY;
A1[1,4]:=K1*HX*K2*HY;
A1[2,1]:=1;
A1[2,2]:=K1*HX+HX;
A1[2,3]:=K2*HY;
A1[2,4]:=(K1*HX+HX)*K2*HY;
A1[3,1]:=1;
A1[3,2]:=K1*HX+HX;
A1[3,3]:=K2*HY+HY;
A1[3,4]:=(K1*HX+HY)*(K2*HY+HY);
A1[4,1]:=1;
A1[4,2]:=K1*HX;
A1[4,3]:=K2*HY+HY;
A1[4,4]:=(K1*HX)*(K2*HY+HY);
B1[1]:=X[I];
B3[1]:=X[I+1];
B1[2]:=X[I+2];
B3[2]:=X[I+3];
B1[3]:=X[I+3+2*N+1];
B3[3]:=X[I+3+2*N+2];
B1[4]:=X[I+3+2*N-1];
B3[4]:=X[I+3+2*N];
INV(A1,4);
MUL(B3,Z,4);
A2:=Z[1];
B2:=Z[2];

```

```

C2:=Z[3];
D2:=Z[4];
E1:= HX*HY*(30*K2*HY*K2*HY*K2*HY*K2*HY+60*K2*HY*K2*HY*K2*HY
*(HY-1)+30*SQR(K2*HY)*(2*SQR(HY)-3*HY+1)+30*K2*HY*HY*(SQR(HY)
-2*HY+1)+SQR(HY)*(6*SQR(HY)-15*HY+10))*(30*K1*HX*K1*HX*K1*HX
*K1*HX+60*K1*HX*K1*HX*K1*HX*(HX-1)+30*SQR(K1*HX)*(2*SQR(HX)-3
*HX+1)+30*K1*HX*HX*(SQR(HX)-2*HX+1)+SQR(HX)*(6*SQR(HX)-15*HX
+10))/900;

E2:=-HX*HY*(4*A*(2*SQR(HY)+3*HY*(2*K2*HY-1)+6*K2*HY*(K2*HY-
1))*(2*SQR(HX)+3*HX*(2*K1*HX-1)+6*K1*HX*(K1*HX-1))+2*B*(2*
SQR(HY)+3*HY*(2*K2*HY-1)+6*K2*HY*(K2*HY-1))*(3*HX*HX*HX+4*
SQR(HX)*(3*K1*HX-1)+6*HX*K1*HX*(3*K1*HX-2)+12*SQR(K1*HX)*
(K1*HX-1))+(3*HY*HY*HY+4*SQR(HY)*(3*K2*HY-1)+6*HY*K2*HY*(3
*K2*HY-2)+12*SQR(K2*HY)*(K2*HY-1))*(2*C*(2*SQR(HX)+3*HX*(2
*K1*HX-1)+6*K1*HX*(K1*HX-1))+D*(3*HX*HX*HX+4*SQR(HX)*(3*K1
*HX-1)+6*HX*K1*HX*(3*K1*HX-2)+12*SQR(K1*HX)*(K1*HX-1))))/72;

E3:=HX*HY*(18*SQR(A)+9*A*(2*B*(HX+2*K1*HX)+(HY+2*K2*HY)*(2*
C+D*(HX+2*K1*HX)))+6*SQR(B)*(SQR(HX)+3*HX*K1*HX+3*SQR(K1*HX))
+3*B*(HY+2*K2*HY)*(3*C*(HX+2*K1*HX)+2*D*(SQR(HX)+3*HX*K1*HX+
3*SQR(K1*HX)))+2*(SQR(HY)+3*HY*K2*HY+3*SQR(K2*HY))*(3*SQR(C)+
3*C*D*(HX+2*K1*HX)+SQR(D)*(SQR(HX)+3*HX*K1*HX+3*SQR(K1*HX)))/18;

E4:=HX*HY*(6*HY*HY*HY*HY+15*HY*HY*HY*(2*K2*HY-1)+10*SQR(HY)*
(6*SQR(K2*HY)-6*K2*HY+1)+30*HY*K2*HY*(2*SQR(K2*HY)-3*K2*HY+1)
+30*SQR(K2*HY)*(SQR(K2*HY)-2*K2*HY+1))*(4*SQR(HX)+6*HX*(2*K1
*HX-1)+3*SQR(2*K1*HX-1))/90;

E5:=-HX*HY*(HX+2*K1*HX-1)*(2*B*(2*SQR(HY)+3*HY*(2*K2*HY-1)+
6*K2*HY*(K2*HY-1))+D*(3*HY*HY*HY+4*SQR(HY)*(3*K2*HY-1)+6*HY
*K2*HY*(3*K2*HY-2)+12*SQR(K2*HY)*(K2*HY-1)))/6;

E6:=HX*HY*(3*SQR(B)+3*B*D*(HY+2*K2*HY)+SQR(D)*(SQR(HY)+3*HY
*K2*HY+3*SQR(K2*HY)))/3;

E7:=HX*HY*(4*SQR(HY)+6*HY*(2*K2*HY-1)+3*SQR(2*K2*HY-1))*(6*
HX*HX*HX*HX+15*HX*HX*HX*(2*K1*HX-1)+10*SQR(HX)*(6*SQR(K1*HX)
-6*K1*HX+1)+30*HX*K1*HX*(2*SQR(K1*HX)-3*K1*HX+1)+30*SQR(K1*
HX)*(SQR(K1*HX)-2*K1*HX+1))/90;

E8:=-HX*HY*(HY+2*K2*HY-1)*(2*C*(2*SQR(HX)+3*HX*(2*K1*HX-1)+
6*K1*HX*(K1*HX-1))+D*(3*HX*HX*HX+4*SQR(HX)*(3*K1*HX-1)+6*HX
*K1*HX*(3*K1*HX-2)+12*SQR(K1*HX)*(K1*HX-1)))/6;

E9:=HX*HY*(3*SQR(C)+3*C*D*(HX+2*K1*HX)+SQR(D)*(SQR(HX)+3*HX
*K1*HX+3*SQR(K1*HX)))/3;

ER11:=ER11+E1+E2+E3;
ER12:=ER12+E4+E5+E6;
ER13:=ER13+E7+E8+E9;

E10:= HX*HY*(30*K2*HY*K2*HY*K2*HY*K2*HY+60*K2*HY*K2*HY*K2*
HY*(HY-1)+30*SQR(K2*HY)*(2*SQR(HY)-3*HY+1)+30*K2*HY*HY*(SQR

```

```

(HY)-2*HY+1)+SQR(HY)*(6*SQR(HY)-15*HY+10))*(30*K1*HX*K1*HX*
K1*HX*K1*HX+60*K1*HX*K1*HX*K1*HX*(HX-1)+30*SQR(K1*HX))*(2*
SQR(HX)-3*HX+1)+30*K1*HX*HX*(SQR(HX)-2*HX+1)+SQR(HX)*(6*SQR
(HX)-15*HX+10))/900;

E11:=-HX*HY*(4*A2*(2*SQR(HY)+3*HY*(2*K2*HY-1)+6*K2*HY*(K2*HY-
1))*(2*SQR(HX)+3*HX*(2*K1*HX-1)+6*K1*HX*(K1*HX-1))+2*B2*(2*
SQR(HY)+3*HY*(2*K2*HY-1)+6*K2*HY*(K2*HY-1))*(3*HX*HX*HX+4*
SQR(HX)*(3*K1*HX-1)+6*HX*K1*HX*(3*K1*HX-2)+12*SQR(K1*HX)*(K1
*HX-1))+(3*HY*HY*HY+4*SQR(HY)*(3*K2*HY-1)+6*HY*K2*HY*(3*K2*
HY-2)+12*SQR(K2*HY)*(K2*HY-1))*(2*C2*(2*SQR(HX)+3*HX*(2*K1*
HX-1)+6*K1*HX*(K1*HX-1))+D2*(3*HX*HX*HX+4*SQR(HX)*(3*K1*HX-
1)+6*HX*K1*HX*(3*K1*HX-2)+12*SQR(K1*HX)*(K1*HX-1))))/72;

E12:=HX*HY*(18*SQR(A2)+9*A2*(2*B2*(HX+2*K1*HX)+(HY+2*K2*HY)
*(2*C2+D2*(HX+2*K1*HX)))+6*SQR(B2)*(SQR(HX)+3*HX*K1*HX+3*
SQR(K1*HX))+3*B2*(HY+2*K2*HY)*(3*C2*(HX+2*K1*HX)+2*D2*(SQR
(HX)+3*HX*K1*HX+3*SQR(K1*HX)))+2*(SQR(HY)+3*HY*K2*HY+3*SQR
(K2*HY))*(3*SQR(C2)+3*C2*D2*(HX+2*K1*HX)+SQR(D2)*(SQR(HX)+3
*HX*K1*HX+3*SQR(K1*HX)))/18;

E13:=HX*HY*(6*HY*HY*HY*HY+15*HY*HY*HY*(2*K2*HY-1)+10*SQR(HY)
*(6*SQR(K2*HY)-6*K2*HY+1)+30*HY*K2*HY*(2*SQR(K2*HY)-3*K2*HY+
1)+30*SQR(K2*HY)*(SQR(K2*HY)-2*K2*HY+1))*(4*SQR(HX)+6*HX*(2*
K1*HX-1)+3*SQR(2*K1*HX-1))/90;

E14:=-HX*HY*(HX+2*K1*HX-1)*(2*B2*(2*SQR(HY)+3*HY*(2*K2*HY-
1)+6*K2*HY*(K2*HY-1))+D2*(3*HY*HY*HY+4*SQR(HY)*(3*K2*HY-1)+
6*HY*K2*HY*(3*K2*HY-2)+12*SQR(K2*HY)*(K2*HY-1)))/6;

E15:=HX*HY*(3*SQR(B2)+3*B2*D2*(HY+2*K2*HY)+SQR(D2)*(SQR(HY)+
3*HY*K2*HY+3*SQR(K2*HY)))/3;

E16:=HX*HY*(4*SQR(HY)+6*HY*(2*K2*HY-1)+3*SQR(2*K2*HY-1))*(6*
HX*HX*HX*HX+15*HX*HX*HX*(2*K1*HX-1)+10*SQR(HX)*(6*SQR(K1*HX)
-6*K1*HX+1)+30*HX*K1*HX*(2*SQR(K1*HX)-3*K1*HX+1)+30*SQR(K1*
HX)*(SQR(K1*HX)-2*K1*HX+1))/90;

E17:=-HX*HY*(HY+2*K2*HY-1)*(2*C2*(2*SQR(HX)+3*HX*(2*K1*HX-1)
+6*K1*HX*(K1*HX-1))+D2*(3*HX*HX*HX+4*SQR(HX)*(3*K1*HX-1)+6*
HX*K1*HX*(3*K1*HX-2)+12*SQR(K1*HX)*(K1*HX-1)))/6;

E18:=HX*HY*(3*SQR(C2)+3*C2*D2*(HX+2*K1*HX)+SQR(D2)*(SQR(HX)+
3*HX*K1*HX+3*SQR(K1*HX)))/3;

ER21:=ER21+E10+E11+E12;
ER22:=ER22+E13+E14+E15;
ER23:=ER23+E16+E17+E18;

IF ((K1+1)*HX)=1 THEN I:=I+2;
I:=I+2;
END;

```

```
ERRU1:=ER11+ER12+ER13;  
ERRU2:=ER21+ER22+ER23;  
  
ERRU:=( (ERRU1*ERRU1+ERRU2*ERRU2) );  
WRITE(SQRT(ERRU) );  
READLN;  
END.
```

PROGRAMME3: CALCUL DES ERREURS DU TENSEUR

USES CRT;

CONST N=6;  
XL = 1.0 ; YL = 1.0 ; RO =0.750 ;XMU=1;

TYPE  
VECT=ARRAY[1..3\*N\*N] OF REAL;

VAR

X:VECT;  
II, I, J, K1, K2, I1: INTEGER;

HX, HY, A1, A2, A3, A4, A5, ERRT, ERRT1, ERRT2, ERRT3: REAL;

CHOIX: CHAR;

PROCEDURE LECTURE;

VAR I: INTEGER;  
CHX: CHAR;  
F: FILE OF REAL;

BEGIN

ASSIGN(F, 'SOLT6.DAT');  
RESET(F);  
FOR I:=1 TO 3\*N\*N DO

READ(F, X[I]);  
CLOSE(F);

END;

BEGIN

WRITELN;  
LECTURE;

HX:=XL/N;  
HY:=YL/N;  
ERRT1:=0.0;  
ERRT2:=0.0;  
ERRT3:=0.0;  
ERRT:=0.0;  
A1:=0;  
A2:=0;  
A3:=0;  
A4:=0;  
A5:=0;

I:=1;

FOR K2:=0 TO N-1 DO  
FOR K1:=0 TO N-1 DO  
BEGIN

```

A1:=HX*HY*(2*SQR(HY)+3*HY*(2*K2*HY-1)+6*K2*HY*(K2*HY-1))*(HX
+2*K1*HX-1)/6;

A2:=HX*HY*(HY+2*K2*HY-1)*(2*SQR(HX)+3*HX
*(2*K1*HX-1)+6*K1*HX*(K1*HX-1))/6;

A3:=HX*HY*(6*HY*HY*HY*HY+15*HY*HY*HY*(2*K2*HY-1)+10*
SQR(HY)*(6*SQR(K2*HY)-6*K2*HY+1)+30*HY*K2*HY*(2*SQR(K2*HY
)-3*K2*HY+1)+30*SQR(K2*HY)*(SQR(K2*HY)-2*K2*HY+1))*(4*
SQR(HX)+6*HX*(2*K1*HX-1)+3*SQR(2*K1*HX-1))/90;

A4:=HX*HY*(4*SQR(HY)+6*HY*(2*K2*HY-1)+3*SQR(2*K2*HY-1))
*(6*HX*HX*HX*HX+15*HX*HX*HX*(2*K1*HX-1)+10*SQR
(HX)*(6*SQR(K1*HX)-6*K1*HX+1)+30*HX*K1*HX*(2*SQR(K1*HX)-3
*K1*HX+1)+30*SQR(K1*HX)*(SQR(K1*HX)-2*K1*HX+1))/90;

A5:=HX*HY*(HY*HY*HY+2*SQR(HY)*(2*K2*HY-1)+HY*(6*SQR
(K2*HY)-6*K2*HY+1)+2*K2*HY*(2*SQR(K2*HY)-3*K2*HY+1))*(HX*HX*HX
+2*SQR(HX)*(2*K1*HX-1)+HX*(6*SQR(K1*HX)-6*K1*HX+1)
+2*K1*HX*(2*SQR(K1*HX)-3*K1*HX+1))/4;

ERRT1:=ERRT1+XMU*XMU*(1-RO)*(1-RO)*A4/(RO*RO)+
XMU*XMU*(1+RO)*(1+RO)*A3/(RO*RO)+
X[I]*X[I]*HX*HY+2*XMU*XMU*(1-RO)*(1+RO)*
A5/(RO*RO)-2*XMU*(1-RO)*X[I]*A2/RO
-2*XMU*(1+RO)*X[I]*A1/RO;

ERRT2:=ERRT2+XMU*XMU*A3+XMU*XMU*A4+X[I+1]*X[I+1]*HX*HY
+2*XMU*XMU*A5-2*XMU*X[I+1]*A1-2*XMU*X[I+1]*A2;

ERRT3:=ERRT3+XMU*XMU*(1+RO)*(1+RO)*A4/(RO*RO)+
XMU*XMU*(1-RO)*(1-RO)*A3/(RO*RO)+
X[I+2]*X[I+2]*HX*HY+2*XMU*XMU*(1-RO)*(1+RO)*
A5/(RO*RO)-2*XMU*(1+RO)*X[I+2]*A2/RO
-2*XMU*(1-RO)*X[I+2]*A1/RO;

I:=I+3;

ERRT:=ERRT1+ERRT2+ERRT3;
WRITELN(ERRT1,ERRT2,ERRT3,ERRT);
WRITELN;
END;
WRITELN;
WRITELN(SQRT(ERRT));
READLN;

END.

```

## ABSTRACT

The present work is a contribution to the stability of mixed finite element methods for numerical solution of the Elasticity equations. By adding stabilisation terms to the standard Galerkin formulation, sufficient conditions of existing, uniqueness and convergence are established. The theory presented is illustrated by examples.

Moreover, the application on  $Q_1 - Q_0$  finite element is implemented by means of a Pascal program.

Thus, the convergence properties for unknowns of displacement and strain tensor exhibited computationally.

### ملخص :

يشمل هذا العمل مساهمة في دراسة إستقرار الطرق المختلطة العناصر المنتهية لحل معادلات المرونة عدديا . بإضافة حدود إستقرارية إلى مسألة GALERKIN الأولية يمكن إثبات شروط كافية للوجود، الوحدنية و التقارب. العمل النظري المقدم مدعم بأمثلة . في هذا السياق تم إنجاز التطبيق على العنصر المنتهي  $Q_0 - Q_1$  بواسطة برنامج بلغة "باسكال".  
هكذا، نقدم برهانا عدديا و حسابيا لخواص التقارب لمجاهيل المسافة و الموتر.

