REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE MENTOURI - CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
ECOLE DOCTORALE – POLE DE CONSTANTINE

N° d'ordre : …………
N° de série : …………

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MAGISTER EN MATHEMATIQUES

OPTION

Processus Stochastiques

THEME

Comparaison des fiabilités des systèmes non réparables

Par :

DJENIBA HADJER

Devant le jury :

Président	:	*M. Denche*	*Professeur*	***Université Constantine***
Rapporteur	:	*M. Boushaba*	*M.C*	***Université Constantine***
Examinateur	:	*M. Dakhmouche*	*M.C*	***Université Constantine***
Examinateur	:	*A. Benchetteh*	*Professeur*	***Université Annaba***

Soutenu le : 25 /10/2009.

Remerciements

Avant tout, mes vifs remerciements, je les exprime à **Dieu** *tout puissant.*

Au terme de ce long travail, j'ai un devoir de reconnaissance que je voudrais sincèrement exprimer ici.

Je voudrais saluer particulièrement Monsieur : ***Mahmoud Boushaba*** *maître de conférences à l'université de* **Constantine**, *pour avoir accepté de diriger ce travail, pour l'aide compétente qu'il m'a apportée, pour sa patience et son encouragement, pour ses conseils et son soutien qui m'ont permis d'achever ce travail.*

Je voudrais aussi dire ma profonde gratitude à ***M. Dakhmouche*** *maître de conférences à l'université de* ***Constantine,*** *qui n'a cessé de me prodiguer ses conseils et ses suggestions pertinentes. Merci de participer au jury de ma thèse.*

Mes remerciements s'adressent à Monsieur ***A. Benchetteh*** *professeur à l'université de* ***Annaba,*** *qui a bien voulu faire partie du jury, et à Monsieur le Professeur* ***M .Denche*** *professeur à l'université de* ***Constantine,*** *pour l'honneur qu'il me fait de présider ce jury.*

Mes remerciements vont également à tous mes proches et mes amies qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

En fin, Je remercie tout particulièrement mes parents pour leur soutien tout au long de ce travail, et dont la patience et l'encouragement m'ont été très précieux durant mes années d'études. Je leur dédie cette thèse.

Table des matières

Introduction

La comparaison stochastique a été largement utilisée durant les quarante dernières années, dans divers domaines des probabilités et de la statistique. On cite la théorie de la fiabilité, les files d'attente, et l'actuariat. En effet, soient F et G deux fonctions de répartition, la notion d'ordre $F \leq G$ a été introduite pour préciser l'idée que la fonction F a moins de caractéristiques que G. Cette approche a été utilisée par Mann et Whitney (1947) qui présente ce qui est maintenant appelé "ordre stochastique ", il a été utilisé par Birnbaum (1948). D'autres ordres ont été introduits par Zwet van (1964) et la notion de l'ordre des distributions a été mise en claire par Lehmann (1955) et par Bickel et Lehmann (1975). L'introduction d'un ordre pour représenter l'idée que l'on a plus de distribution de certaines caractéristiques que d'autre nécessite une étude poussée des caractéristiques des fonctions F et G.

Une fois qu'un ordre approprié, de caractéristique donnée, a été trouvé, des mesures de la caractéristique, soumises à des tests, doivent être proposées afin de préserver cet ordre, c'est-à-dire si $F \leq G$, la mesure m de cette caractéristique devrait satisfaire : $m(F) \leq m(G)$.
Des propriétés supplémentaires peuvent aussi être exigées de cette mesure. Soit X une variable aléatoire de distribution F (où $F(0) = 0$), si $Z = aX$, où $a \geq 1$, alors $X \leq_{st} Z$. Ici, la distribution de Z est obtenue à partir de distribution de X ; indépendamment des valeurs de X, Z est plus grande que X parceque $a \geq 1$. Dans cet exemple, "a" peut être replacée par une variable aléatoire qui , avec une probabilité 1, elle est égale à au moins 1.

Les ordres considérés dans ce mémoire ne concernent pas tous une caractéristique standard ; tout de même, ces ordres sont géométriquement significatifs, particulièrement quand ils sont limités à la comparaison des distributions de variables aléatoires non-négatives.

L'objet de ce travail est l'application de la comparaison stochastique en théorie de la fiabilité. En effet, on se donne un système à n composants dont les composants ont des durées de vie exponentielles indépendantes mais non identiques. Le problème est de comparer notre système avec un système équivalent mais de composants identiques. Pratiquement, quand on remplace différents composants par des composants identiques, on a besoin de garantir la même qualité, ou du moins une qualité très proche. L'essentiel de ce travail est consacré aux systèmes $k - sur - n$ et $k - consécutifs - sur - n$. Ce mémoire est composé de quatre chapitres et une conclusion. Le premier chapitre est un rappel des notions élémentaires de la théorie de la fiabilité.

Dans le deuxième chapitre, on présente les différents types de comparaison stochastique et les relations qui existent entre ceux-ci. Le troisième chapitre est consacré aux systèmes $k-sur-n$, où une condition nécessaire et suffisante est établie pour que la durée de vie du système initial (cas non identique) soit stochastiquement plus grande que la durée de vie du système avec remplacement (cas identique). La démonstration est basée essentiellement sur les propriétés des fonctions symétriques dont jouie la fonction de fiabilité des systèmes $k-sur-n$. Dans le quatrième chapitre, on trouve une condition nécessaire pour qu'un ordre stochastique soit établi dans le cas des systèmes $k-consécutifs-sur-n$. Pour la condition suffisante, les propriétés de la symétrie ne peuvent pas être exploitées, vu que la fonction de fiabilité des systèmes $k-consécutifs-sur-n$ n'est pas symétrique. On termine ce chapitre par des simulations, où on montre pour différents valeurs de n, k, λ_i, que la condition nécessaire reste suffisante. Enfin, une conclusion est donnée à la fin de ce mémoire pour synthétiser le travail.

Chapitre 1

Introduction à la fiabilité

1.1 Généralités

Le terme "fiabilité" est un néologisme introduit dans les années soixantaines pour traduire le terme anglo-saxon "Reliability". La Commission Electronique Internationale donne de la fiabilité la définition suivante : *"Aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise dans des conditions données, pendant une durée donnée."*

Dans la suite nous rappellerons système, un ensemble déterminé d'éléments interconnectés ou en interaction, le système peut être réparable ou non réparable. Un système est réparable s'il peut passer d'un état de défaillance à un état de fonctionnement, et le système non réparable c'est le système dont la panne a un caractère définitif.

Définition 1.1.1 *La fiabilité $R(t)$ d'un système S est la probabilité que le système S fonctionne sur tout l'intervalle* $[0, t]$, *c'est une fonction décroissante, ses valeurs comprises entre* 0 *et* 1, *on écrit :*

$$\forall t \geq 0, R(t) = \mathbb{P}(T > t).$$

où T est une variable aléatoire continue à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, représentant la durée de vie en temps continu d'un système. La non-fiabilité désigne la probabilité complémentaire notée :

$$\forall t \geq 0, F(t) = 1 - R(t) = \mathbb{P}(T \leq t).$$

Définition 1.1.2 *La disponibilité $A(t)$ d'un système "Availability" est la probabilité que le système est non défaillant à l'instant t.*

Ces notions sont liées par l'inégalité suivante :

$$R(t) \leq A(t).$$

Pour des systèmes non réparables, elles sont équivalentes :

$$R(t) = A(t).$$

Définition 1.1.3 *Le temps moyen de panne* $MTTF$ (Mean Time To Failure) *est l'espérance de la durée de vie* T, *c'est une mesure importante de la qualité d'un système. Généralement, elle est utilisée pour l'évaluation de la fiabilité des systèmes non réparables.*

$$MTTF = \mathbb{E}[T] = \int_0^\infty tf(t)dt = \int_0^\infty R(t)dt.$$

La dernière expression s'obtient à partir de la précédente en intégrant par partie.

Définition 1.1.4 *Lorsqu' un système a bien fonctionné jusqu'à la date* t, *le temps d'attente de la panne est appelée* **la durée de survie** *du système au temps* t *(ou durée de vie résiduelle), si* T_t *est la variable aléatoire qui représente la durée de survie, alors la distribution de cette variable est donnée par :*

$$\mathbb{P}\left(T_t \geq x\right) = \mathbb{P}\left(T - t \geq x \backslash T \geq t\right) = \frac{R(t+x)}{R(t)} \text{ pour } x \geq 0.$$

Définition 1.1.5 *Le temps moyen résiduel de panne* $MRTF$ (Mean Residual Time to Failure), *est l'espérance de la durée de survie :*

$$\forall s \geq 0, MRTF = \mathbb{E}[T > t + s \backslash T > t] = \frac{1}{R(t)} \int_t^\infty R(s)ds.$$

Définition 1.1.6 *Le taux de panne (le nombre de pannes par unité de temps) est définit comme suit :*

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbb{P}(t \leq T \leq t + \Delta t \backslash T \geq t)}{\Delta t} = \frac{-R'(t)}{R(t)}. \\ \lambda(t) &= \frac{f(t)}{R(t)} \end{aligned}$$

On peut interpréter $\lambda(t)$ comme étant la probabilité pour que le système tombe en panne au cours $(t, t + \Delta t)$ sachant qu'il a fonctionné sans défaillance jusqu'à la date t. La notion de taux de panne est, pour le fiabiliste, une caractéristique importante, sa connaissance suffit pour déterminer la fiabilité grâce à la relation suivante :

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)du\right).$$

1.2 Lois classiques

La fiabilité et autres mesures de performances d'un système sont des fonctions du temps. En fait il est parfois impossible qu'un système accompli sa mission complètement, donc la fiabilité du système est décrite par des lois mathématiques décroissantes au cours du temps :

1.2.1 La loi exponentielle

On appelle loi exponentielle de paramètre $\lambda, (\lambda > 0)$ la probabilité sur $\mathbb{R}_+$ de densité

$$f(t) = \lambda \exp\{-\lambda t\}$$

et de fonction de répartition

$$F(t) = 1 - \exp\{-\lambda t\},$$

et sa fonction de survie (fiabilité) est définit par :

$$R(t) = \exp\{-\lambda t\}.$$

Cette loi a de nombreuses applications dans plusieurs domaines. C'est une loi simple, très utilisée en fiabilité dont le taux de panne est constant.
La loi exponentielle est la seule loi continue possédant la propriété d'absence de mémoire :

$$\mathbb{P}(T > t + u \backslash T > u) = \mathbb{P}(T > t) = \exp\{-\lambda t\} .où, t > 0, u > 0.$$

1.2.2 La loi gamma

La loi de gamma de paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$, notée $\Gamma(a, \lambda)$ a pour densité sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$f(t) = \frac{(\lambda t)^{a-1}}{\Gamma(a)} \lambda \exp\{-\lambda t\}$$

où Γ est la "fonction gamma", définie par $\Gamma(a) = \int\limits_0^\infty t^{a-1} \exp\{-t\} dt$.
La loi $\Gamma(1, \lambda)$ est la loi exponentielle du paramètre λ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\Gamma(n) = (n-1)!$, et la loi de gamma s'appelle loi d'*Erlang* et la fiabilité est donnée par la relation suivante :

$$R(t) = \exp\{-\lambda t\} \sum_{k=0}^{a-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

1.2.3 La loi de weibull

C'est la plus populaire des lois, souvent utilisée aussi bien en électronique qu'en mécanique, elle caractérise mieux le comportement du produit dans les trois phases de vie : période de jeunesse, période de vie utile et période d'usure ou vieillissement. La loi de weibull de paramètres $\lambda, \alpha > 0$, notée $W(\alpha, \lambda)$ a pour densité sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$f(t) = \alpha \lambda (\lambda t)^{\alpha - 1} \exp\left(-(\lambda t)^\alpha\right) .t \geq 0$$

La loi $W(1, \lambda)$ est la loi exponentielle du paramètre λ.
La fiabilité et le taux de panne de cette loi s'expriment simplement :

$$R(t) = \exp\{-(\lambda t)^\alpha\}.$$

$$\lambda(t) = \alpha\lambda\,(\lambda t)^{\alpha-1}$$

Le taux de panne est croissant si $\alpha > 1$ et décroissant si $\alpha < 1$.

1.2.4 La loi normale

La loi normale, à deux paramètres, est utilisée aussi pour modéliser la durée de vie d'un système, sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

où μ la moyenne et σ l'écart-type.
Si la durée de vie d'un dispositif obéit à une loi normale alors le taux de panne est une fonction monotone croissante du temps.

1.2.5 La loi log-normale

La loi log-normale, à deux paramètres, permet de modéliser la durée de réparation, sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{t.\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{(\ln t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

où μ la moyenne et σ l'écart-type.

Chapitre 2

Comparaison stochastique

La comparaison stochastique permet de comparer des objets aléatoires de manière similaire à la comparaison des nombres. Dans ce chapitre, on donne des définitions et quelques résultats théoriques sur la comparaison stochastique dans laquelle les fonctions et les ensembles croissants jouent un rôle très important. On rappelle d'abord qu'une relation d'ordre R sur un ensemble E est une relation binaire notée xRy qui est réflexive, antisymétrique, et transitive. Cette relation est dite totale si deux éléments quelconques de E sont toujours comparables c'est à dire : xRy ou yRx , par contre s'il existe au moins deux éléments qui ne sont pas comparables la relation R est dite partielle. Un ensemble muni d'un ordre partiel (respectivement.total) est appellé un ensemble partiellement (respectivement.totalement) ordonné.

2.1 Ordres stochastiques

Un ordre stochastique est un ordre partiel sur un espace des fonctions de répartition. Notons par $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ l'ensemble des fonctions de répartition des variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{S}$.

2.1.1 L'ordre intégral

On peut définir l'ordre stochastique à partir de la comparaison des espérances des fonctions appartenant à une famille de fonctions.

Définition 2.1.1 *Un ordre stochastique " $\preceq$ " pour lequel il existe une famille de fonctions (mesurables) $\mathcal{F}$ telle que :*

$$X \preceq_{\mathcal{F}} Y \text{ si et seulement si } \mathbb{E}\left[f(X)\right] \leq \mathbb{E}\left[f(Y)\right], \forall f \in \mathcal{F}. \tag{2.1}$$

*quand les espérances existent, est appelé **un ordre intégral.***

La famille $\mathcal{F}$ est appelé **générateur** de l'ordre $\preceq_{\mathcal{F}}$.

2.1.2 L'ordre ensembliste

Une autre manière de définir les ordres stochastiques est de partir d'une famille d'ensembles.

Définition 2.1.2 *Un ordre stochastique " $\preceq_{\mathcal{C}}$ " défini sur les fonctions de répartition sur un espace arbitraire $\mathcal{S}$, est appelé* ***un ordre stochastique ensembliste*** *s'il existe une famille $\mathcal{C}$ de sous-ensembles (mesurables) $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ vérifiant :*

$$X \preceq_{\mathcal{C}} Y \Longleftrightarrow \mathbb{P}\left(X \in C\right) \leq \mathbb{P}\left(Y \in C\right), \forall C \in \mathcal{C}.$$

On peut remarquer que chaque ordre ensembliste est également un ordre intégral. En effet : soit $\preceq_{\mathcal{C}}$ un ordre ensembliste généré par une famille $\mathcal{C}$ de sous-ensembles de $\mathcal{S}$, définissons la famille $\mathcal{F}$ de toutes les fonctions indicatrices des ensembles $C \in \mathcal{C}$,

$$\mathcal{F} = \{1_C : \ C \in \mathcal{C}\}.$$

Alors, l'ordre $\preceq_{\mathcal{C}}$ est un ordre intégral généré par la famille $\mathcal{F}$, cela provient directement de

$$\mathbb{P}_X(C) = \mathbb{E}\left[1_C(X)\right]$$

2.1.3 L'ordre stochastique fort (usuel)

L'ordre stochastique le plus connu est l'ordre stochastique fort (strong stochastic order), cet ordre a été considéré pour des fonctions de répartition sur $\mathbb{R}$ comme une généralisation naturelle de la comparaison des nombres réels. Pour deux variables aléatoires X et Y avec les distributions P_X et P_Y et les fonctions de répartition F_X et F_Y, par abus de notation nous allons écrire :

$$F_X \preceq F_Y \; ou \; P_X \preceq P_Y \; ou \; X \preceq Y$$

Définition 2.1.3 *Soient F_X et F_Y deux fonctions de répartition sur $\mathbb{R}$. On dit que F_X est plus petit que F_Y dans le sens de l'ordre stochastique fort (noté $\preceq_{st}$)*

$$F_X \preceq_{st} F_Y \;\; si \; F_X(x) \geq F_Y(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$F_X(x) \geq F_Y(x)$ est équivalent à dire $\mathbb{P}\left(X > x\right) \leq \mathbb{P}\left(Y > x\right), \forall x \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.1.1 *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *$X \preceq_{st} Y$.*
2. *pour chaque fonction croissante telle que les deux espérances existent*

$$\mathbb{E}\left[f(X)\right] \leq \mathbb{E}\left[f(Y)\right]. \tag{2.2}$$

De plus si pour une fonction f l'inégalité (2.2) est vérifiée pour toutes variables aléatoires X et Y telles que $X \preceq_{st} Y$, alors f est une fonction croissante.

On remarque que chaque ordre stochastique fort est un ordre intégral. Considérons la famille $\mathcal{G}$ de toutes les fonctions indicatrices des ensembles croissants $U \subset S$ (S est un espace arbitraire, on dit que U est un ensemble croissant si sa fonction indicatrice est une fonction croissante).

Théorème 2.1.2 *La famille $\mathcal{G}$ est un générateur de l'ordre $\preceq_{st}$ c'est à dire :*

$$X \preceq_{st} Y \Longleftrightarrow \mathbb{E}\left[f(X)\right] \leq \ \mathbb{E}\left[f(Y)\right], \forall f \in \mathcal{G}.$$

Ce théorème peut être réécrit en utilisant les ensembles croissants.

Corollaire 2.1.1 $X \preceq_{st} Y \Longleftrightarrow \mathbb{P}\left(X \in U\right) \leq \mathbb{P}\left(Y \in U\right)$, *pour tous les ensembles croissants U.*

L'ordre stochastique $\preceq_{st}$ est donc également un ordre ensembliste généré par la famille $\mathcal{C}_{st}$ de tous les ensembles croissants.

Propriétés de l'ordre $\preceq_{st}$:

Dans la suite, on donne quelques propriétés de l'ordre $\preceq_{st}$, les preuves peuvent être trouvées dans [15]

1. Si $X \preceq_{st} Y$ et $\mathbb{E}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[Y\right]$, alors X et Y ont la même distribution.
2. Si $X \preceq_{st} Y$, alors $f(X) \preceq_{st} f(Y)$ pour toutes les fonctions croissantes.
   En particulier,
   $$\mathbb{E}\left[X^k\right] \leq \mathbb{E}\left[Y^k\right], \ \textit{pour tout } k \textit{ impaire}$$
   Si X et Y sont des variables aléatoires positives,
   $$\mathbb{E}\left[X^k\right] \leq \mathbb{E}\left[Y^k\right], \ \textit{pour tout } k \in \mathbb{N}$$
3. Soient $X_1, ..., X_n$ et $Y_1, ..., Y_n$ des variables aléatoires indépendantes telle que
   $$X_i \preceq_{st} Y_i, i = 1, ..., n.$$
   Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction croissante alors :
   $$\varphi\left(X_1, ..., X_n\right) \preceq_{st} \varphi\left(Y_1, ..., Y_n\right)$$
   En particulier :
   $$\sum_{i=1}^{n} X_i \preceq_{st} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

4. Soient $X_1, ..., X_n$ et $Y_1, ..., Y_n$ des variables aléatoires indépendantes telle que $X_i \preceq_{st} Y_i, i = 1, ..., n$. Et soient

$$X_{(1:n)} \preceq_{st} X_{(2:n)} \preceq_{st} ... \preceq_{st} X_{(n:n)}$$
$$Y_{(1:n)} \preceq_{st} Y_{(2:n)} \preceq_{st} ... \preceq_{st} Y_{(n:n)}$$

les statistiques d'ordres qui correspondent aux variables $X_1, ..., X_n$ et $Y_1, ..., Y_n$ respectivement. Alors :

$$X_{(i:n)} \preceq_{st} Y_{(i,n)}, i = 1, ..., n.$$

2.1.4 Ordres des variabilités

On va introduire deux ordres des variabilités qui permettent de comparer les variabilités des phénomènes aléatoires, ayant la même moyenne, car deux distributions ayant la même moyenne sont *comparables* selon l'ordre stochastique fort si et seulement si elles ont la même fonction de répartition.

L'ordre stochastique convexe (convex order $\preceq_{cx}$) est un ordre intégral généré par la famille des fonctions réelles convexes.

L'ordre stochastique croissant convexe (increasing convex order $\preceq_{icx}$) est un ordre intégral généré par la famille des fonctions réelles croissantes et convexes. On note par $\mathcal{F}_{cx}$ la famille des fonctions réelles convexes et par $\mathcal{F}_{icx}$ la famille des fonctions réelles croissantes et convexes sur $\mathbb{R}$. On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe si pour chaque $x, y \in \mathbb{R}$

$$f[\alpha x + (1-\alpha) y] \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y), \forall 0 < \alpha < 1.$$

Définition 2.1.4 *Pour deux variables aléatoires X et Y, les relations $\preceq_{cx}$ et $\preceq_{icx}$ sont définies par :*

$$X \preceq_{cx} Y \text{ si } \mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)], \forall f \in \mathcal{F}_{cx}.$$
$$X \preceq_{icx} Y \text{ si } \mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)], \forall f \in \mathcal{F}_{icx}.$$

quand les espérances existent.

Proposition 2.1.1 $X \preceq_{cx} Y \Leftrightarrow X \preceq_{icx} Y$ *et* $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$.

La comparaison $\preceq_{icx}$ est donc moins forte que la comparaison $\preceq_{cx}$, et moins forte que la comparaison $\preceq_{st}$.

La proposition suivante provient directement de $\mathcal{F}_{icx} \subset \mathcal{F}_{st}$.

Proposition 2.1.2 $X \preceq_{st} Y \Rightarrow X \preceq_{icx} Y$

2.2 Comparaison des durées de vie

Dans la théorie de la fiabilité, l'ordre stochastique est un outil important pour comparer les durées de vie des systèmes, nous disons qu'un système est plus fiable qu'un autre si sa caractéristique de fiabilité est meilleure. Suivant le choix de caractéristique, nous obtenons les relations d'ordre stochastique fort (*stochastic ordering*) et l'ordre en moyenne (pour l'inégalité (2.1), nous supposons que la fonction f est la fonction idendique) que nous avons déjà vus précédemment, et nous obtenons encore la définition d'ordre stochastique en moyenne résidual (*mean risudual ordering*), aussi la définition d'ordre des taux de panne notée $\preceq_{hr}$ (hazard rate ordering). Soient deux systèmes de durées de vie aléatoires X_1, X_2, nous supposons connues les principales caractéristiques de fiabilité de chacun des systèmes :

1. $R_i(t)$: la fiabilité,
2. E_i : le temps moyen de bon fonctionnement,
3. $h_i(t)$: le taux de panne,
4. $m_i(t)$: la moyenne résuduelle.

A partir de chacune de ses expressions, on réecrit les quatre notions d'ordres stochastiques précédentes comme suit :

1. $X_1 \preceq_m X_2$ en moyenne moins fiable si $E_1 \leq E_2$.
2. $X_1 \preceq_{st} X_2$ stochastiquement moins fiable si $R_1(t) \leq R_2(t)$ $\forall t \geq 0$.
3. $X_1 \preceq_{mr} X_2$ moins fiable à l'usage si $m_1(t) \leq m_2(t)$ $\forall t \geq 0$.
4. $X_1 \preceq_h X_2$ plus vite défaillant si $h_1(t) \geq h_2(t)$, $\forall t \geq 0$.

Proposition 2.2.1 *Les ordres partiels ci-dessus vérifient les inclusions suivantes :*

$$\begin{aligned} h &\implies st \implies m \\ h &\implies mr \implies m \end{aligned}$$

Il n y a pas d'inclusion entre les ordres st et mr.

Preuve Supposons deux systèmes de durées de vie X_1, X_2 vérifient :

$$h_1(t) \geq h_2(t), \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Puisque $R(t) = \exp\left(-\int\limits_0^t h(u)du\right)$, donc : $R_1(t) \leq R_2(t)$, d'où $X_1 \preceq_{st} X_2$, d'autre part $R_1(t) \leq R_2(t) \Longrightarrow \int\limits_0^\infty R_1(t)dt \leq \int\limits_0^\infty R_2(t)dt$ d'où : $X_1 \preceq_m X_2$. Pour la relation mr, nous pouvons exprimer $m(t)$ à partir de $h(t)$:

$$\begin{aligned} m(t) &= \mathbb{E}[T > t + s \backslash T > t] = \frac{1}{R(t)} \int_t^{\infty} R(s)ds, \text{ pour tout } s \geq 0 \\ &= \frac{R(t+s)}{R(t)}. \\ &= \exp\left\{ -\int_t^{t+s} h(u)du \right\}. \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure :

$$m_1(t) \leq m_2(t).$$

d'où :$X_1 \preceq_{mr} X_2$.
Si $X_1 \preceq_{mr} X_2$, alors dans la définition, $t = 0$ donne le même ordre pour la relation m. ■

Les deux ordres $\preceq_{st}$ et $\preceq_h$ permettent, dans le cas de taux de panne bornés, de contrôler la fiabilité d'un système en utilisant les lois exponentielles. Le résultat suivant est une conséquence immédiate de cette relation $X_1 \preceq_h X_2 \Longrightarrow X \preceq_{st} X_2$.

Corollaire 2.2.1 *Soit X une durée de vie aléatoire dont le taux de panne $h(t)$ est majoré (respectivement minoré) par $\lambda > 0$. Alors X est plus fiables (respectivement moins fiable) qu'une durée exponentielle de paramètre λ.*

On va maintenant utiliser les ordres $\preceq_{st}$ et $\preceq_h$ pour comparer des durées de vie résiduelles.

Définition 2.2.1 *On dit qu'une durée de vie X est NBU (New Better than Used) si pour tout $t \geq 0$, la durée résiduelle X_t est moins fiable que X.*

Par définition de l'ordre stochatique, la propriété de NBU équivaut à $R_t(s) \leq R(t)$, pour tout t, et s, soit :

$$R(t+s) \leq R(t)R(s).$$

Pour une durée de vie NBU un appareil d'occasion est toujours moins fiable qu'un neuf. Cela se produit en particulier dans le cas d'un taux de panne croissant.

Définition 2.2.2 *Soit X une durée de vie. On dit que X est IFR (Increasing Failure Rate), si le taux de panne $h(t)$ est une fonction croissante du temps.*

Par exemple, une durée de vie suivant la loi de gamma $\Gamma(a, \lambda)$ ou la loi de Weibull $W(a, \lambda)$ est IFR pour $a > 1$. Quand le taux de panne est croissant, la fiabilité empire toujours, quel que soit l'âge de l'appareil.

Proposition 2.2.2 *Soit X une durée de vie IFR. Alors pour tout couple d'instants successifs $t_1 \leq t_2$, on a $X_{t_2} \preceq_{st} X_{t_1}$. En particulier, X est NBU.*

Preuve Si $h(t)$ est croissant, alors pour $t_1 \leq t_2$ et $s \geq 0$, on a :

$$h(t_1 + s) \leq h(t_2 + s).$$

or $h(t+s)$ est le taux de panne de la durée de vie résiduelle X_t. Donc $X_{t_2} \preceq_h X_{t_1}$, ce qui entraîne $X_{t_2} \preceq_{st} X_{t_1}$, pour $t = 0$, on obtient $X_{t_2} \preceq_{st} X$, donc X est *NBU*. ■

Le contraire de *NBU* est *NWU* (*New Worse than used*).
Une loi est *NWU* si un appareil d'occasion est plus fiable qu'un neuf.
Le contraire de *IFR* est *DFR* (*Decreasing Failure Rate*). Comme dans la proposition précédente, si le taux de panne est décroissant alors la durée de vie X est *NWU*, c'est à dire les durées de vie résiduelles sont de plus en plus fiables.
On considère, en général, que le taux de panne a une "courbe en baignoire", on distingue trois périodes dans la vie d'un système :

- Période des défauts de jeunesse pendant laquelle le taux de panne est décroissant, c'est la phase de rodage.
- Période des défaillances aléatoires ou vie utile d'un appareil pendant laquelle le taux de panne est constant.
- Période des avaries d'usure pendant laquelle le taux de panne est croissant.

Proposition 2.2.3 *Si les durées de vie sont classées selon l'ordre en moyenne résiduelle ($X_1 \preceq_{mr} X_2$) et si le rapport $\dfrac{m_1(t)}{m_2(t)}$ est une fonction croissante de t alors elles sont dans le même ordre pour la vitesse de défaillance : $X_1 \preceq_h X_2$.*

Preuve Premièrement nous écrivons la fonction $h(t)$ en fonction de $m(t)$:
On a : $m(t) = \dfrac{1}{R(t)} \int_t^\infty R(u)du$, donc $m(t)R(t) = \int_t^\infty R(u)du$, par dérivation, on obtient :
$m'(t)R(t) + m(t)R'(t) = -R(t)$, et comme $h(t) = -\dfrac{R'(t)}{R(t)}$, alors :

$$h(t) = \frac{1 + m'(t)}{m(t)}.$$

Le fait de supposer, à la fois, $\dfrac{m_1(t)}{m_2(t)}$ croissante, $m_1(t) \leq m_2(t)$ implique l'inégalité suivante, dans le cas des fonctions de répartition dérivables :

$$\frac{1 + m_1'(t)}{m_1(t)} \geq \frac{1 + m_2'(t)}{m_2(t)}.$$

d'où : $X_1 \preceq_h X_2$. ■

Théorème 2.2.1 *La relation d'ordre convexe peut être définie de façon équivalente par l'inégalité suivante concernant les fiabilités :*

$$X_1 \preceq_{icx} X_2 \Longleftrightarrow \int_t^\infty R_1(u)du \leq \int_t^\infty R_2(u)du, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Dans la suite, on va étudier la comparaison stochastique des fiabilités des systèmes non réparables, cette étude est consacrée à deux types : les systèmes $k - sur - n$, et les systèmes $k-consécutifs-sur-n$. Pour cela nous commençons d'abord par introduire quelques propriétés concernant ces systèmes. On précise qu'un composant ne possède que deux états : il fonctionne ou il est en panne, cette dichotomie est valable aussi pour le système lui même.

2.3 Systèmes $k - sur - n$

Dans la réalité, les systèmes rencontrés ont des configurations différentes, c'est à dire leurs composants sont ordonnés de manière différentes. Parmi ces configurations sont les systèmes k-sur-n

Définition 2.3.1 *Un système de n composants qui fonctionne si et seulement si au moins k composants parmi n fonctionnent s'appelle $k - sur - n : G$.*
Un système de n composants qui tombe en panne si et seulement si au moins k composants parmi n tombent en panne s'appelle $k - sur - n : F$.

Cela nous permet de dire que le système $k-sur-n : G$ est équivalent à $(n-k+1)-sur-n : F$
Les systèmes en série et en parallèle sont des cas particuliers d'un système $k - sur - n$.
Un système en série est équivalent à un système $n-sur-n : G$ et $1-sur-n : F$. Un système en parallèle est équivalent à un système $n - sur - n : F$ et $1 - sur - n : G$. Des exemples pratiques de $k - sur - n$ sont, par exemple, un avion avec quatre moteurs qui ne crash pas si au moins deux de ses quatre moteurs restent fonctionnels. Un satellite qui aura assez de puissance pour envoyer des signaux s'il n' y a pas plus que quatre de ses dix piles déchargées.

En théorie de la fiabilité, la durée de vie d'un système $k - sur - n : G$ (respectivement $k - sur-n : F$) est souvent décrite par la $(n-k+1)^{ième}$ statistique d'ordre $X_{n-k+1,n}$ (respectivement la $k^{ième}$ statistique d'ordre $X_{k,n}$) d'un échantillon $X_1, X_2, ..., X_n$ où la variable aléatoire X_i représente la durée de vie du $i^{ième}$ composant du système.

2.3.1 Formule de la fiabilité

Cas des composants indépendants et identiques

Dans les systèmes $k - sur - n : G$ dont les composants sont indépendants et identiquement distribués, le nombre de composants qui fonctionnent, suit la loi binomiale de paramètres n et

p, ainsi nous avons :

$$\mathbb{P}\left(exactement\ i\ composants\ fonctionnent\right) = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

La fiabilité du système est égale à la probabilité que le nombre de composants qui fonctionnent est supérieur ou égal à k :

$$R(k,n) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

p : la fiabilité du chaque composant.

q : la probabilité de panne du chaque composant.

Cette équation est une formule explicite qui peut être utilisée pour l'évaluation de la fiabilité du système $k - sur - n : G$. Si nous appliquons la décomposition pivotale au composant n la fiabilité s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
R(k,n) &= pR(k-1,n-1) + (1-p)R(k,n-1) \qquad (2.3)\\
&= p\left[R(k-1,n-1) - R(k,n-1)\right] + R(k,n-1).\\
&= p\,\mathbb{P}\left(exactement\ k-1\ parmi\ n-1\ composants\ fonctionnent\right) + R\left(k,n-1\right).\\
&= \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} + R\left(k,n-1\right).
\end{aligned}$$

$$R(k,n) - R\left(k,n-1\right) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}$$

L'équation (2.3) est utilisée récursivement pour l'évaluation de la fiabilité du système $k - sur - n : G$ comme suit :

$$\begin{aligned}
R\left(k,n\right) &= \sum_{i=k}^{n} \left[R\left(k,i\right) - R(k,i-1)\right]\\
&= p^k \sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1} q^{i-k}
\end{aligned}$$

On note que la fiabilité du système est une fonction de n, k, p,une augmentation de n ou p, ou les deux ou diminution de k entraînent une augmentation de la fiabilité du système, à partir des expressions différentes de $R\left(k,n\right)$ qui sont déduites jusqu'à maintenant, nous pouvons facilement trouver l'expression de la fonction de défaillance (unreliability) Q du système $k - sur - n : G$,

$$\begin{aligned}
Q\left(k,n\right) &= 1 - R\left(k,n\right)\\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}.
\end{aligned}$$

D'autre part , si le système est $k - sur - n : F$ alors :

$$R\left(k,n\right)=\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}q^{i}\left(1-q\right)^{n-i}.$$

$$\begin{aligned}Q\left(k,n\right) &= 1-R\left(k,n\right)\\ &= \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}q^{i}\left(1-q\right)^{n-i}\end{aligned}$$

Cas des composants indépendants non identiques

En général il n'est pas facile de calculer la fiabilité d'un système de n composants indépendants mais non identiques. C'est dû au fait qu'on ne peut pas utiliser la distribution binomiale pour la calculer, dans ce cas, pour déterminer la fiabilité il est utile d'introduire les notions suivantes :

Définition 2.3.2 *On appelle* ***lien*** *un ensemble de composants dont le bon fonctionnement assure le bon fonctionnement du système. Un lien est dit minimal s'il ne contient pas d'autres liens.*

Définition 2.3.3 *On appelle* ***coupe*** *un ensemble de composants dont la panne simultanée entraîne la panne du système. Une coupe est dite minimale si elle ne contient pas d'autres coupes.*

Dans le système $k - sur - n : G$ il y a $\binom{n}{k}$ liens minimaux, chaque lien minimal comporte k composants qui fonctionnent, et $\binom{n}{n-k+1}$ coupes minimales, chaque coupe minimale contient $n-k+1$ composants défaillants.Si tous les liens minimaux sont connus, nous pouvons utiliser la méthode de l'*inclusion-exclusion* où la fiabilité est exprimée par la formule de *Poincaré,* cette formule permet de calculer la probabilité de la réunion d'un nombre quelconque d'événements, elle se démontre par récurrence :

$$\begin{aligned}R\left(k,n\right) &= \mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{n_t}T_i\right)=\sum_{i=1}^{n_t}\mathbb{P}\left(T_i\right)-\sum_{i<j}\mathbb{P}\left(T_i\cap T_j\right)+\sum_{i<j<k}\mathbb{P}\left(T_i\cap T_j\cap T_k\right)+\\ &\quad ...+\left(-1\right)^{n_t-1}\mathbb{P}\left(T_i\cap T_j\cap ...\cap T_{n_t}\right)\end{aligned}$$

où : n_t : le nombre de liens minimaux.

$\{T_1, T_2, ..., T_n\}$ l'ensemble de liens minimaux.

Si on constate que le nombre de liens est plus grand que le nombre de coupes, il est préferable de trouver la fonction de défaillance du système que sa fiabilité et donc la fiabilité peut être trouvée à partir de la relation :

$$R\left(k,n\right)=1-Q\left(k,n\right)$$

L'expression de l'inclusion-exclusion pour la fiabilité du système va générer $\left\{2^{\binom{n}{k}}-1\right\}$ termes. Cette expression a été améliorée [11], en utilisant les liens minimaux, sous la forme suivante :

$$R(k,n)=\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\tbinom{i-1}{k-1}\sum_{j_1<j_2<\ldots<j_i}\prod_{l=1}^{i}p_{j_l}.$$

2.4 Systèmes $k-consécutifs-sur-n:F$

Dans cette section, nous allons présenter le système $k-consécutifs-sur-n:F$ à partir de quelques résultats importants concernant le calcul de la fiabilité.

Définition 2.4.1 *Un système $k-consécutifs-sur-n:F$ est un système formé de n composants disposés linéairement ou circulairement et tombe en panne si et seulement si au moins k composants consécutifs sont en panne.*

On remarque que :
$k=1$ on obtient un système en série.
$k=n$ on obtient un système en prallèle.

Les systèmes $k-consécutifs-sur-n:F$ ont attiré l'attention de plusieurs ingénieurs et chercheurs car ils ont une large application, du fait qu'ils sont fiables que les systèmes en série et moin chers que les systèmes en parallèle. Comme exemples de ces systèmes : les systèmes de télécommunication, avec n stations en relais, chaque station est capable de transmettre aux k prochaines stations, les systèmes pipelines avec n stations de pompage, chaque station est disposée à pomper le pétrole ou le gaz pour les k stations suivantes, les circuits intégrés, les systèmes de distribution d'eau,...etc.

2.4.1 Formule de la fiabilité

L'approche combinatoire

La plupart des auteurs ont utilisé l'analyse combinatoire pour l'évaluation la fiabilité d'un système $k-consécutifs-sur-n:F$ quand ses composants sont indépendants et identiques. Cet outil permet de trouver une expression explicite de la fiabilité d'un sysème en fonction de p. Mais l'inconvénient qu'on a souvent est le calcul du facteur avant le terme p^iq^j, ce facteur est désigné par $N(j,k,n)$ qui indique le nombre de fois que le système $k-consécutifs-sur-n:F$ fonctionne sachant que $j\geq k$ composants dans le système sont en panne et les k composants défaillants ne sont pas consécutifs.

L'expression de $N(j,k,n)$ est donnée par :

$$N(j,k,n) = \begin{cases} 0, & j = n \geq k. \\ \binom{n}{j}, & 0 \leq j \leq k-1 \\ \sum\limits_{i=1}^{k} N(j-i+1,k,n-1), & k \leq j < n. \end{cases}$$

Généralement, on peut écrire $N(j,k,n)$ sous la forme suivante :

$$N(j,k,n) = \sum_{i=0}^{[j/k]} (-1)^i \tbinom{n-j+1}{i} \tbinom{n-ik}{n-j}$$

Donc, pour $1 \leq k \leq n$, la fiabilité du système est donnée par :

$$R_L(k,n) = \sum_{i=0}^{[(n+1)/(k+1)]} (-1)^i p^{i-1} q^{ki} \left[\tbinom{n-ki+1}{i} - q \tbinom{n-ki}{i} \right].$$

L'approche de la formule récursive

Chiang et Nui [7] sont les premiers qu'ont donné la fiabilité d'un système k-consécutifs-sur-n :F linéaire dont les n composants sont iid sous une formule récursive. Shantikumar [17] et Hwang [10]donnent la formule récursive suivante :

Théorème 2.4.1 *Pour* $n \geq k+1$:

$$R_L(k,n) = R_L(k,n-1) - R_L(k,n-k-1) p_{n-k} \prod_{j=1}^{k} q_{n-k+j} \tag{2.4}$$

L'équation (2.4) pour les composants iid devient :

$$R_L(k,n) = R_L(k,n-1) - pq^k R_L(k,n-k-1)$$

Corollaire 2.4.1 *Pour* $n \leq 2k$:

$$R_L(k,n) = 1 - \sum_{i=1}^{n-k+1} \left(p_{i+k} \prod_{j=1}^{i+k-1} q_j \right), \; p_{n+1 \equiv 1} \tag{2.5}$$

Pour les composants iid, l'expression correspondante est :

$$R_L(k,n) = 1 - q^k - (n-k)pq^k$$

L'approche matricielle

La formule exacte de la fiabilité du système linéaire a été développée par Vhao et Fu [9] sous forme produit des matrices :

$$R(k,n) = \pi_0 \left[\prod_{i=1}^{n} M_i\right] U^T.$$

où :

$$M_i = \begin{pmatrix} p_i & 1-p_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p_i & 0 & 1-p_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ p_i & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-p_i \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+1)\times(k+1)}$$

$\pi_0 = (1,0,0,...,0) \in \mathbb{R}^{1\times(k+1)}$

U =(1,1,1,...,0)$\in \mathbb{R}^{1\times(k+1)}$

Chapitre 3

Comparaison stochastique des durées de vie des systèmes $k - sur - n : F$

L'objectif de ce chapitre est de comparer le bon fonctionnement de deux systèmes non réparables, de durées de vie respectivement X, Y en utilisant l'ordre stochastique fort. Comme nous l'avons déjà signalé la fiabilité est décrite par des lois mathématiques, nous considérons dans ce qui suit uniquement la loi exponentielle qui est plus simple et les résultats suivant, sont dû à J.L.Bon, souvent utilisés en fiabilité.

3.1 Fonctions symétriques élémentaires

Puisque la fonction de la fiabilité d'un système $k - sur - n : F$ est une fonction symétrique élémentaire, nous allons donc, en premier lieu, définir et caractériser leur propriétés essentielles.

Définition 3.1.1 *Une fonction de plusieurs variables est symétrique si sa valeur ne change pas quand on permute les variables.*

Définition 3.1.2 *On appelle la $j^{ième}$ fonction symétrique élémentaire de n variables la fonction suivante :*

$$S_j(X) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < .... < i_j \leq n} x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_j}. \tag{3.1}$$

tel que : $X = (x_1, x_2, ...x_n) \in (0, \infty)^n$, $j \in \{1, ..., n\}$

On a, par convention : $S_0(X) = 1, \quad S_j(X) = 0, \forall j > n.$
Pour $p, q \in \{1, ..., n\}$, nous notons : $X^p = (x_1, ..., x_{p-1}, x_{p+1}, ...x_n) \in (0, \infty)^{n-1}$
$X^{p,q} = (X^p)^q \in (0, \infty)^{n-2}$

$$S_j(X^p) = \sum_{\substack{i_1,...,i_j \in \{1,...,n\}/\{p\} \\ 1 \leq i_1 < i_2 < .... < i_j \leq n}} x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_j} \tag{3.2}$$

la $j^{ième}$ fonction symétrique élémentaire sans le composant x_p.

$$S_j(X^{p,q}) = \sum_{\substack{i_1,...,i_j \in \{1,...,n\}/\{p,q\} \\ 1 \le i_1 \le i_2 \le .... \le i_{j \le n}}} x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_j}. \tag{3.3}$$

la $j^{ième}$ fonction symétrique élémentaire sans les composants x_p, x_q.
Si : $x_i = m$ $\forall i = 1, ..., n$ on a :

$$S_k(X) = \binom{n}{k} m^k \tag{3.4}$$

Ces fonctions satisfont les relations élémentaires suivantes :

$$S_j(X) = x_p S_{j-1}(X^p) + S_j(X^p) \tag{3.5}$$

$$S_j(X) = x_p x_q S_{j-2}(X^{p,q}) + (x_p + x_q) S_{j-1}(X^{p,q}) + S_j(X^{p,q}) \tag{3.6}$$

de plus nous définissons :

$$m_j(X) = \left(\binom{n}{j}^{-1} S_j(X) \right)^{\frac{1}{j}} = \left(\binom{n}{j}^{-1} \sum_{|J|=j} \prod_{i \in J} x_i \right)^{\frac{1}{j}}. \tag{3.7}$$

la $j^{ième}$ moyenne symétrique, $j = 1, ...n$. Ces moyennes différentes sont classiques et satisfont les inégalités de Mac Laurin :

$$m_1(X) \ge m_2(X) \ge .... \ge m_n(X).$$

où $m_1(X) = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ et $m_n(X) = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$ s'appellent moyennes arithmétique et géométrique respectivement.
Le lemme suivant nous permet de comparer les fonctions symétriques élémentaires.

Lemme 3.1.1 *Soit $X = (x_1, ..., x_m)$ et $Y = (y_1, ..., y_m)$ deux vecteurs tel que : $0 < x_i \le y_i$ $\forall i = 1, ..., m$. Si $r \in \{0, 1, ..., m-1\}$ alors :*

$$\frac{S_{r+1}(X)}{S_r(X)} \le \frac{S_{r+1}(Y)}{S_r(Y)}. \tag{3.8}$$

de plus si $\exists i_0$ tel que $x_{i_0} < y_{i_0}$ alors l'inégalité (3.8) est stricte.

Preuve Soit r un entier, $0 \le r < m$. Il est suffisant de prouver que la fonction symétrique $\gamma_r : (0, \infty)^m \to (0, \infty)$, $\gamma_r(X) = \dfrac{S_{r+1}(X)}{S_r(X)}$ est croissante en x_1.
la propriété est claire pour $r = 0$.

Supposons que : $r > 0$
Puisque :

$$S_{r+1}(X) = x_1 S_r(X^1) + S_{r+1}(X^1).$$

et

$$S_r(X) = x_1 S_{r-1}(X^1) + S_r(X^1).$$

On a :

$$\frac{\partial \gamma_r}{\partial x_1}(X) = \frac{(S_r(X^1))^2 - S_{r-1}(X^1)S_{r+1}(X)}{(S_r(X))^2}$$

D'aprés l'inégalité de Newton, on a : $(S_r(X^1))^2 > S_{r-1}(X^1)S_{r+1}(X)$. ■

Corollaire 3.1.1 *Soient* $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ *tel que :* $\alpha \leq \frac{y_i}{x_i} \leq \beta, i = 1, ..., n$ *et* $0 < \alpha < \beta$, *alors pour* $r \in \{0, 1, ..., m-1\}$, *l'inégalité suivante est vraie :*

$$\alpha \frac{S_r(Y)}{S_r(X)} \leq \frac{S_{r+1}(Y)}{S_{r+1}(X)} \leq \beta \frac{S_r(Y)}{S_r(X)}. \tag{3.9}$$

et au moins l'un des deux inégalités est stricte.

Preuve Il suffit de remplacer (X, Y) par $(\alpha X, Y)$ et $(Y, \beta X)$ dans le lemme précédent. ■

Remarque 3.1.1 *Si* a, b, c, d, e, f *sont positifs tel que* $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \leq \frac{e}{f}$ *et* $\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$ *alors :*

$$\frac{a+c}{b+d} < \frac{c+e}{d+f}. \tag{3.10}$$

Pour montrer nos résultats principaux, nous présentons une conditions suffisante pour connaître la valeur minimale d'une fonction symétrique.

Lemme 3.1.2 *Pour* $n > 1$, *soit* $\Psi : (0, \infty)^n \to (0, \infty)$ *une application symétrique et continûment différentiable, soit* k *un entier,* $1 \leq k \leq n$. *Supposons que, pour un vecteur* $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in (0, \infty)^n$ *avec* $x_p = \min x_i$, $x_q = \max x_i$, *nous avons :*

$$x_p < x_q \Longrightarrow \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x_p}(X)}{\frac{\partial S_k}{\partial x_p}(X)} < \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial xq}(X)}{\frac{\partial S_k}{\partial xq}(X)}. \tag{3.11}$$

alors pour un vecteur $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in (0, \infty)^n$, *nous avons :*

$$\Psi(x_1, x_2, ..., x_n) \geq \Psi\left(m_k(X), ..., m_k(X)\right). \tag{3.12}$$

Preuve Pour $k = 1$, alors $\frac{\partial S_1}{\partial x_i}(X) = 1, \;\; \forall i = 1, ..., n$; pour montrer

$$[x_p < x_q \Longrightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial x_p}(X) < \frac{\partial \Psi}{\partial x_q}(X)] \Rightarrow \Psi(x_1, x_2, ..., x_n) \geq \Psi\left(m_1(X), ..., m_1(X)\right),$$

où $m_1(X) = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$, on aura besoin des propriétés suivantes :

1. Soient $X = (x_1, ...x_n)$ et $Y = (y_1, ..., y_n)$, où $X, Y \in (0, \infty)^n$, on dit que le vecteur X majore Y, on écrit $X \succ Y$, si $\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \geq \sum_{i=1}^{k} y_{[i]}$, $k = 1, ..., n-1$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$, tel que $x_{[i]}$ designe la $i^{ème}$ plus grand élément de X.
2. Une application réelle f définie sur $A \subset R^n$ est dite Schur-convexe si
$$X \succ Y \ sur \ A \Rightarrow f(X) \geq f(Y)$$
3. Soit $f : A \subset R^n \rightarrow R$ une application continûment différentiable, f est Schur-convexe si et seulement si
$$\begin{cases} f \text{ est symétrique sur } A \\ \text{et} \\ (x_i - x_j)(\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_j}) \geq 0 \text{ pour } 1 \leq i, j \leq n. \end{cases}$$

On peut vérifie facilement que si $y_i = m_1(X)$ $\forall i = 1, ..., n$ alors $X \succ Y$, de plus on a la fonction $\Psi : (0, \infty)^n \rightarrow (0, \infty)$ est une application symétrique et continûment différentiable, donc d'après la troisième propriété la fonction Ψ est Schur-convexe, la deuxième propriété implique que $\Psi(X) \geq \Psi(Y)$ c'est à dire $\Psi(x_1, x_2, ..., x_n) \geq \Psi(m_1(X), ..., m_1(X))$.
Supposons que $k > 1$, pour un vecteur $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in (0, \infty)^n$ considérons : $a = \min x_i$, $b = \max x_i$ et $\mathbf{m} = (m, ..., m)$, tel que : $m = m_k(X)$
Si $a = b \Rightarrow \Psi(x_1, x_2, ..., x_n) = \Psi(m_k(X), ..., m_k(X))$.
Maintenant supposons que : $a < b$ donc $m \in (a, b)$, soit $K \subset (0, \infty)^n$ un compact tel que :
$$K = \{t = (t_1, t_2, ..., t_n) \in [a, b]^n / m_k(t) = m\}.$$
Il est claire que, $X, \mathbf{m} \in \mathbf{K}$, d'après le théorème de Weierstrass l'application continue atteint une valeur minimale sur le compact K au point $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n) \in K$.
Posons : $\mathbf{u} \neq \mathbf{m}$, dans ce cas, il existe $p, q \in \{1, 2, ..., n\}$ tels que :
$a \leq u_p = \min u_i < u_q = \max u_i \leq b$ réécrit la condition $m_k(u) = m$ de la relation (3.6), c'est à dire :
$$u_p u_q S_{k-2}(\mathbf{u}^{p,q}) + (u_p + u_q) S_{k-1}(\mathbf{u}^{p,q}) + S_k(\mathbf{u}^{p,q}) = \binom{n}{k} m^k.$$
L'équation :
$$z^2 S_{k-2}(\mathbf{u}^{p,q}) + 2z S_{k-1}(\mathbf{u}^{p,q}) + S_k(\mathbf{u}^{p,q}) = \binom{n}{k} m^k.$$
admet une solution positive notée z_1, $a < z_1 < b$, pour $t \in [u_p, z_1)$, considérons la fonction $g(t)$ définie sur $[u_p, z_1]$ par la relation :
$$t g(t) S_{k-2}(\mathbf{u}^{p,q}) + (t + g(t)) S_{k-1}(\mathbf{u}^{p,q}) + S_k(\mathbf{u}^{p,q}) = \binom{n}{k} m^k.$$

nous avons $g(u_p) = u_q$ et :

$$g(t) = \frac{\binom{n}{k} m^k - tS_{k-1}(\mathbf{u}^{p,q}) - S_k(\mathbf{u}^{p,q})}{tS_{k-2}(\mathbf{u}^{p,q}) + S_{k-1}(\mathbf{u}^{p,q})} \in (z_1, u_q], \forall t \in [u_p, z_1).$$

Notons par : $\mathbf{u}(t)$ le vecteur de composants : $u_p(t) = t, u_q(t) = g(t)$, et $u_i(t) = u_i$ $\forall i \in \{1, ..., n\} \setminus \{p, q\}$. nous avons $\mathbf{u}(t) \in K$ et

$$S_k(\mathbf{u}(t)) = \binom{n}{k} m^k, \forall t \in [u_p, z_1).$$

la fonction g est différentiable et décroissante et s'écrite comme suit :

$$g'(t) = -\frac{\frac{\partial S_k}{\partial x_p}(\mathbf{u}(t))}{\frac{\partial S_k}{\partial x_q}(\mathbf{u}(t))}. \tag{3.13}$$

Maintenant, nous considérons une fonction continûment différentiable :
$\varphi : [u_p, z_1) \to, \varphi(t) = \Psi(\mathbf{u}(t))$, d'après la relation (3.13) on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{\partial \Psi}{\partial x_p}(\mathbf{u}(t)) + \frac{\partial \Psi}{\partial x_q}(\mathbf{u}(t)) g'(t). \\ &= \frac{\partial S_k}{\partial x_q}(\mathbf{u}(t)) \left(\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x_p}(\mathbf{u}(t))}{\frac{\partial S_k}{\partial x_p}(\mathbf{u}(t))} - \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x_q}(\mathbf{u}(t))}{\frac{\partial S_k}{\partial x_q}(\mathbf{u}(t))} \right) > 0. \end{aligned}$$

d'après (11) : $\varphi'(t) < 0$, d'où il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $u_p + \varepsilon < z_1$ et $\varphi'(t) < 0$, $\forall t \in [u_p, u_p + \varepsilon)$ et par conséquent : $\Psi(\mathbf{u}(t)) < \Psi(\mathbf{u}(u_p)) = \Psi(\mathbf{u})$, ceci donne la contradiction. ■

Remarque 3.1.2 *Nous pouvons remplacer la relation (3.11) par :*

$$\forall X \in (0, \infty)^n, \forall i, j \in \{1, .., n\} : x_i \neq x_j \Rightarrow (x_i - x_j) \left(\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x_p}(\mathbf{u}(t))}{\frac{\partial S_k}{\partial x_p}(\mathbf{u}(t))} - \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x_q}(\mathbf{u}(t))}{\frac{\partial S_k}{\partial x_q}(\mathbf{u}(t))} \right) > 0.$$

3.2 Principaux résultats

Le théorème suivant nous donne une condition suffisante pour la comparaison stochastique entre les mêmes statistiques d'ordres de deux séquences de variables aléatoires indépendantes.

Théorème 3.2.1 *Soient $U_1, U_2, ..., U_n$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées d'une fonction de distribution commune F, ayant un taux de hasard positif et non décroissant $h(x) = \frac{F'(x)}{1-F(x)}$, $x \in (0, \infty)$. Pour un vecteur $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ tel que : $\lambda_i \geq 0$, $\forall i = 1, ..., n$ et $k \in \{1, ..., n\}$, $m_k(\lambda) = \left(\binom{n}{k}^{-1} \sum_{|J|=k} \prod_{i \in J} \lambda_i \right)^{\frac{1}{k}}$ est la $k^{ième}$ moyenne symétrique de λ, définissons $X_i = \dfrac{U_i}{\lambda_i}$ et $Y_i = \dfrac{U_i}{m_k(\lambda)}$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, notons par $X_{k:n}$ (resp. $Y_{k:n}$) la $k^{ième}$ statistique d'ordre de $(X_1, ..., X_n)$ (resp. $(Y_1, ..., Y_n)$). Si $\dfrac{F(x)}{x(1-F(x))}$ est une fonction décroissante sur $(0, \infty)$ alors : $X_{k:n} \succeq_{st} Y_{k:n}$.*

Preuve Soient un sytème $k - sur - n : F$ et $X_{k:n}$ sa durée de vie, nous avons :

$$\begin{aligned} F_{X_i}(t) &= \mathbb{P}(X_i \leq t) = \mathbb{P}(\frac{U_i}{\lambda_i} \leq t) = \mathbb{P}(U_i \leq \lambda_i t) = F_{U_i}(\lambda_i t) \\ &\Rightarrow \ F_{X_i}(t) = F(\lambda_i t), \ t \geq 0, \ i = 1, ..., n \\ F_{Y_i}(t) &= F(m_k(\lambda)t). \end{aligned}$$

Pour $k = 1$, nous trouvons que : $\overline{F}_{X_{1:n}}(t) = \prod_{i=1}^{n} \overline{F}(\lambda_i t)$ et $\overline{F}_{Y_{1:n}}(t) = \left[\overline{F}\left(\frac{\lambda_1 + ... + \lambda_n}{n} t\right)\right]^n$, et comme $\left[\log \bar{F}\right]' = -h$ est une fonction croissante, alors $\log \bar{F}$ est convexe.
Or on sait que si f est dérivable sur un intervalle$I$, f est convexe si est seulement si f' est croissante. D'aprés l'inégalité de Jensen, nous avons : $\overline{F}_{X_{1:n}} \geq \overline{F}_{Y_{1:n}}(t)$, $\forall t \geq 0$, en effet :

$$\begin{aligned} \overline{F}_{Y_{1:n}}(t) &= \left[\overline{F}\left(\frac{\lambda_1 + ... + \lambda_n}{n} t\right)\right]^n \Rightarrow \\ \log \overline{F}_{Y_{1:n}}(t) &= n \log \overline{F}\left(\frac{\lambda_1 + ... + \lambda_n}{n} t\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \log \overline{F}(\lambda_i t) = \log \prod_{i=1}^{n} \overline{F}(\lambda_i t) = \log \overline{F}_{X_{1:n}}(t) \\ &\Rightarrow \ \overline{F}_{Y_{1:n}}(t) \leq \overline{F}_{X_{1:n}}(t) \text{ c'est-à-dire : } X_{k:n} \succeq_{st} Y_{k:n}. \end{aligned}$$

Supposons que : $k > 1$, la fonction de survie de $X_{k:n}$ est :

$$\begin{aligned} \overline{F}_{X_{k:n}}(t) &= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{|J|=j} \left(\prod_{i \in J} F(\lambda_i t)\right) \left(\prod_{i' \notin J} \overline{F}(\lambda_{i'} t)\right) \qquad (3.14) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \overline{F}(\lambda_i t) \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{|J|=j} \left(\prod_{i \in J} F(\lambda_i t)\right) \frac{\prod_{i' \notin J} \overline{F}(\lambda_{i'} t)}{\prod_{i=1}^{n} \overline{F}(\lambda_i t)} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \overline{F}(\lambda_i t) \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{|J|=j} \left(\prod_{i \in J} F(\lambda_i t)\right) \frac{\prod_{i' \notin J} \overline{F}(\lambda_{i'} t)}{\prod_{i \in J} \overline{F}(\lambda_i t) \prod_{i' \notin J} \overline{F}(\lambda_{i'} t)} \\ &\Rightarrow \ \overline{F}_{X_{k:n}}(t) = \prod_{i=1}^{n} \overline{F}(\lambda_i t) \sum_{j=0}^{k-1} \left(\sum_{|J|=j} \prod_{i \in J} \frac{F(\lambda_i t)}{\overline{F}(\lambda_i t)}\right) \end{aligned}$$

Considérons la fonction : $y : (0, \infty) \to (0, \infty), y(x) = \dfrac{F(x)}{\overline{F}(x)}$ and $\Psi : (0, \infty)^n \to (0, 1)$,

$$\Psi(x_1, ..., x_n) = \frac{\sum_{j=0}^{k-1} S_j((y(x_1), ..., y(x_n))}{\prod_{i=1}^{n} (1 + y(x_i)).}$$

Pour $t > 0$, nous avons : $\overline{F}_{X_{k:n}}(t) = \Psi(\lambda_1 t, ..., \lambda_n t)$ et $\overline{F}_{Y_{k:n}}(t) = \Psi(\underbrace{m_k(\lambda)t, ..., m_k(\lambda)t}_{n \ fois})$.

Pour obtenir : $X_{k:n} \succeq_{st} Y_{k:n}$, il suffit de montrer la propriété de l'application symétrique et continûment différentiable Ψ, c'est à dire :

$$\Psi(x_1, x_2, ..., x_n) \geq \Psi(\underbrace{m_k(X), ..., m_k(X)}_{n\ fois}),\ \forall X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in (0, \infty)^n. \tag{3.15}$$

Pour $X = (x_1, ..., x_n) \in (0, \infty)^n$, nous utilisons la notation suivante :
$y = y(X) = (y(x_1), ..., y(x_n))$ et $y_i = y(x_i)$. Les dérivées partielles de Ψ sont :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial x_s}(X) &= \frac{y'(x_s) \prod\limits_{i \neq s}(1 + y_i) \left\{ (1 + y_s) \sum\limits_{j=1}^{k-1} S_{j-1}(Y^s) - [1 + \sum(y_s S_{j-1}(Y^s) + S_j(Y^s))] \right\}}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1 + y(x_i))^2} \\
&= \frac{-y'(x_s)}{1 + y(x_s)} \frac{S_{k-1}(Y^s)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1 + y_i)} \\
&= -h(x_s) \frac{S_{k-1}(Y^s)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1 + y_i)},\ s = 1, ..., n. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Notons par : $x_p = \min x_i$, et $x_q = \max x_i$, et supposons que $k < n$. En utilisant la relation (3.16), nous avons :

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x_p}}{\frac{\partial S_k}{\partial x_p}} - \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x_q}}{\frac{\partial S_k}{\partial x_q}} \right](X) &= \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+y_i)} \left[h(x_q) \frac{S_{k-1}(Y^q)}{S_{k-1}(x^q)} - h(x_p) \frac{S_{k-1}(Y^p)}{S_{k-1}(x^p)} \right] \qquad (3.17) \\
&= \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+y_i)} \left[h(x_q) \frac{y_p S_{k-2}(Y^{p,q}) + S_{k-1}(Y^{p,q})}{x_p S_{k-2}(x^{p,q}) + S_{k-1}(X^{p,q})} - h(x_p) \frac{y_q S_{k-2}(Y^{p,q}) + S_{k-1}(Y^{p,q})}{x_q S_{k-2}(x^{p,q}) + S_{k-1}(X^{p,q})} \right]
\end{aligned}$$

Comme la fonction : $x \rightarrow \frac{F(x)}{x(1-F(x))}$ est croissante sur $(0, \infty)$, nous avons : $\frac{y_p}{x_p} < \frac{y_q}{x_q}$ (car $x_p < x_q \Rightarrow \frac{F(x_p)}{x_p(1-F(x_p))} < \frac{F(x_q)}{x_q(1-F(x_q))} \Rightarrow \frac{y_p}{x_p} < \frac{y_q}{x_q}$) et :

$$\frac{y_p}{x_p} \leq \frac{y_i}{x_i} \leq \frac{y_q}{x_q}, \forall i \in \{1, ..., n\} \setminus \{p, q\}.$$

Nous pouvons appliquer le corollaire (1) pour $m = n - 2$, $r = k - 2$, $\alpha = \frac{y_p}{x_p}$, $\beta = \frac{y_q}{x_q}$ donc :

$$\frac{y_p}{x_p} \frac{S_{k-2}(Y^{p,q})}{S_{k-2}(x^{p,q})} \leq \frac{S_{k-1}(Y^{p,q})}{S_{k-1}(X^{p,q})} \leq \frac{y_q}{x_q} \frac{S_{k-2}(Y^{p,q})}{S_{k-2}(x^{p,q})}.$$

d'après la relation (3.10)

$$\frac{y_p S_{k-2}(Y^{p,q}) + S_{k-1}(Y^{p,q})}{x_p S_{k-2}(x^{p,q}) + S_{k-1}(X^{p,q})} < \frac{y_q S_{k-2}(Y^{p,q}) + S_{k-1}(Y^{p,q})}{x_q S_{k-2}(x^{p,q}) + S_{k-1}(X^{p,q})}.$$

mais h est positive non-décroissante donc : $0 < h(x_q) \leq h(x_p)$, par conséquent :

$$\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x_p}(X)}{\frac{\partial S_k}{\partial x_p}(X)} < \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial xq}(X)}{\frac{\partial S_k}{\partial xq}(X)}.$$

Nous déduisons, d'après le lemme (2) :

$$\Psi(x_1, x_2, ..., x_n) \geq \Psi\left(m_k(X), ..., m_k(X)\right).$$

c'est à dire :

$$\overline{F}_{X_{k:n}}(t) = \Psi\left(\lambda_1 t, ..., \lambda_n t\right) \geq \overline{F}_{Y_{k:n}}(t) = \Psi\left((m_k(\lambda)t, ..., m_k(\lambda)t\right).$$

c'est à dire :

$$X_{k:n} \succeq_{st} Y_{k:n}.$$

Pour : $k = n$, on ne peut pas utiliser l'équation (3.17), mais dans ce cas, on utilise (3.16) :

$$\left[\frac{\frac{\partial\Psi}{\partial x_p}(\mathbf{u}(t))}{\frac{\partial S_k}{\partial x_p}(\mathbf{u}(t))} - \frac{\frac{\partial\Psi}{\partial x_q}(\mathbf{u}(t))}{\frac{\partial S_k}{\partial x_q}(\mathbf{u}(t))}\right](X) = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+y_i)}\prod_{i\neq p,q}\left[h(x_q)\frac{y_p}{x_p} - h(x_p)\frac{y_q}{x_q}\right] < 0$$

Et la conclusion suit du lemme 2. ∎

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante pour la comparaison stochastique entre des durées de vie de deux systèmes $k - sur - n : F$.

Théorème 3.2.2 *Soient $(X_i), i = 1, ..., n$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi exponentielle de paramètres $(\lambda_i), i = 1, ..., n$ $\lambda_i > 0$, et $(Y_i), i = 1, ..., n$ une suite de variables aléatoires iid qui suivent la loi exponentielle de paramètre commun $\mu > 0$. Pour $k \in \{1, ..., n, \}$, notons par : $X_{k:n}$ la $k^{ième}$ statistique d'ordre de $X_1, ..., X_n$ et $Y_{k:n}$ la $k^{ième}$ statistique d'ordre de $Y_1, ..., Y_n$, alors :*

$$X_{k:n} \succeq_{st} Y_{k:n} \text{ si et seulement si } \mu \geq \left[\binom{n}{k}^{-1}\sum_{|J|=k}\prod_{i\in J}\lambda_i\right]^{\frac{1}{k}}$$

Preuve Nous notons par $F(x) = 1 - e^{-x}, x \geq 0$, la fonction de distribution exponentielle de paramètre1. Supposons que : $X_{k:n} \succeq_{st} Y_{k:n}$ c'est à dire : $\overline{F}_{X_{k:n}}(t) \geq \overline{F}_{Y_{k:n}}(t)$, la fonction de survie de la variable aléatoire $X_{k:n}$ s'écrite :

$$\overline{F}_{X_{k:n}}(t) = 1 - e^{-t\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i}\sum_{j=k}^{n}S_j(e^{\lambda_1 t} - 1, ..., e^{\lambda_n t} - 1)$$

en effet :

$$\overline{F}_{X_{k:n}}(t) = \prod_{i=1}^{n}\overline{F}(\lambda_i t)\sum_{j=0}^{k-1}\left(\sum_{|J|=j}\prod_{i\in J}\frac{F(\lambda_i t)}{\overline{F}(\lambda_i t)}\right) = \prod_{i=1}^{n}\overline{F}(\lambda_i t)\sum_{j=0}^{k-1}S_j(y(x_1), ..., y(x_n))$$

tel que :

$$y(x_i) = \frac{F(\lambda_i t)}{\overline{F}(\lambda_i t)}.$$

où :

$$\overline{F}_{X_{k:n}}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \overline{F}(\lambda_i t) \sum_{j=k}^{n} S_j(y(x_1), ..., y(x_n))$$

Si nous prenons : $\overline{F}_{X_{k:n}}(\lambda_i t) = e^{-\lambda_i t}$ et $y(x_i) = e^{-\lambda_i t} - 1$
En utilisant le développement de Taylor au voisinage 0, nous obtenons :

$$\overline{F}_{X_{k:n}}(t) = 1 - S_k(\lambda_1, ..., \lambda_n)t^k + o(t^k), \ t \to 0$$

et

$$\begin{aligned} \overline{F}_{Y_{k:n}}(t) &= 1 - e^{-n\mu t} \sum_{j=k}^{n} S_j(e^{\mu t} - 1, ..., e^{\mu t} - 1) \\ &= 1 - S_k(\mu t, ..., \mu t)t^k + o(t^k) \\ &= 1 - \binom{n}{k} \mu^k t^k + o(t^k), t \to 0 \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$S_k(\lambda_1, ..., \lambda_n) \leq \binom{n}{k} \mu^k \Rightarrow \binom{n}{k}^{-1} S_k(\lambda_1, ..., \lambda_n) \leq \mu^k$$

c'est à dire :

$$\mu \geq \left[\binom{n}{k}^{-1} \sum_{|J|=k} \prod_{i \in J} \lambda_i \right]^{\frac{1}{k}}.$$

Réciproquement : supposons que $\mu \geq m_k(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, $\overline{F}_{Y_{k:n}}(t)$ est décroissante en μ, il suffit de montrer : $\overline{F}_{X_{k:n}}(t) \geq \overline{F}_{Y_{k:n}}(t), \forall t > 0$. Pour $\mu = m_k(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, la fonction de distribution exponentielle F a un taux de panne constant $h(x) = 1, \forall x \geq 0$, d'ailleurs la fonction : $\dfrac{F(x)}{x(1-F(x))} = \dfrac{e^x - 1}{xe^x}$ est croissante sur $(0, \infty)$, donc la distribution exponentielle F satisfait les hypothèses du théorème(1), il est claire que $F_{X_i}(t) = F(\lambda_i t), t \geq 0, i = 1, ..., n$
De même nous avons $F_{Y_i}(t) = F(\mu t)$, puis en appliquant le théorème (1), nous obtenons la conclusion $X_{k:n} \succeq_{st} Y_{k:n}$. ■
Les résultats précédents peuvent être illustrés comme suit :
Considérons une suite de variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ qui suivent la loi exponentielle de paramètres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ respectivement et $X_{k:n}(\lambda)$ la $k^{ième}$ statistique d'ordre de $X_1, ..., X_n$, et $Y_{k:n}(m_j(\lambda))$ la $k^{ième}$ statistique d'ordre de $Y_1, ..., Y_n$ à paramètre commun $m_j(\lambda)$, $j = 1, ..., n$.
Il est claire que :

$$\overline{F}_{X_{k:n}(\lambda)} \geq \overline{F}_{Y_{k:n}(m_j(\lambda))} \Longleftrightarrow j \leq k. \tag{3.17}$$

3.3 Simulations

Les résultats pour ce type de systèmes étant connus, nous n'avons donc pas ici la prétention de tester la performance de ces derniers, par contre il nous a semblé utile d'illustrer par quelques simulations et exemples le comportement du phénomène étudié.

Système 2-sur-3

t	$R(t)$	$R^*{}_1(t)$	$R^*{}_2(t)$	$R^*{}_3(t)$	$R^*{}_4(t)$	$R^*{}_5(t)$
1	0,87359317	0,86821874	0,83329559	0,657378	0,640091903	0,469275405
2	0,66670734	0,64319245	0,57298486	0,30643171	0,2864763	0,13428683
3	0,48533302	0,4414541	0,36148564	0,12714321	0,113913477	0,033785305
4	0,34811903	0,28998617	0,21750642	0,04998941	0,042922963	0,008088859
5	0,24942519	0,18527787	0,12714321	0,01910767	0,015730223	0,001895198
6	0,17949105	0,11619628	0,07293801	0,00718944	0,005677366	0,000439653
7	0,12992827	0,07193314	0,04131412	0,00268057	0,002031371	0,000101517
8	0,0945842	0,04411965	0,02319607	0,0009941	0,000723184	2,33888E-05
9	0,06918133	0,02687757	0,01294267	0,00036749	0,000256702	5,38291E-06
10	0,05078759	0,01629175	0,00718944	0,00013559	9,09617E-05	1,23824E-06

Tableau 1.1

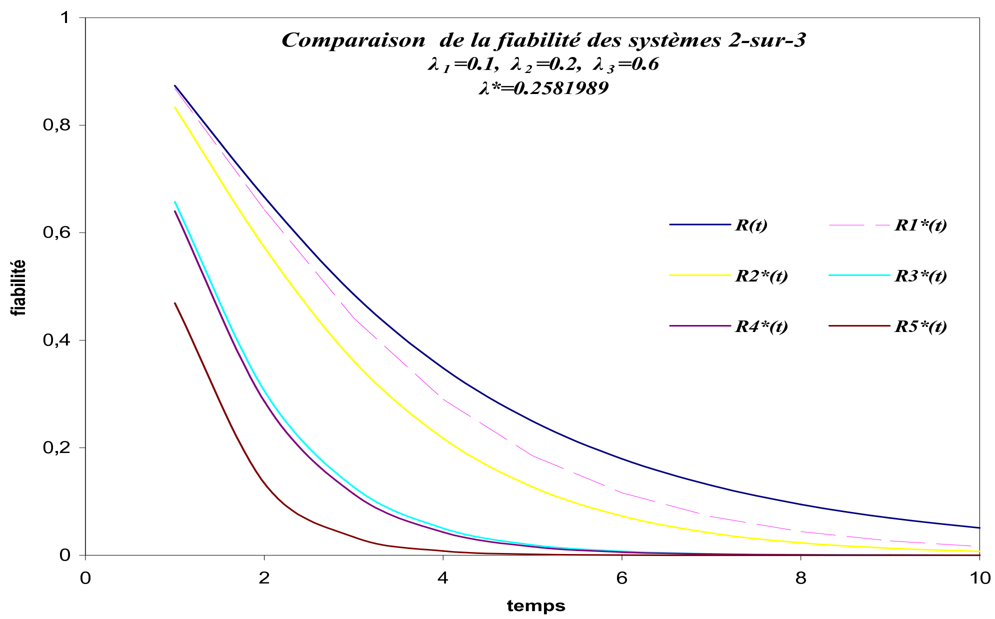

Figure 1.1

t	$R(t)$	$R^*{}_1(t)$	$R^*{}_2(t)$	$R^*{}_3(t)$	$R^*{}_4(t)$	$R^*{}_5(t)$
1	0,63990374	0,63879892	0,57298486	0,45436778	0,411070225	0,344175463
2	0,28763966	0,28502147	0,19573344	0,12438684	0,098286509	0,065156772
3	0,11562547	0,1129728	0,06157234	0,0299299	0,020650191	0,010854265
4	0,0443438	0,04243264	0,01837949	0,00685807	0,004141103	0,001733391
5	0,01664905	0,01550142	0,00535154	0,00153885	0,000814857	0,000272524
6	0,00619349	0,00557732	0,00153885	0,00034205	0,000159054	4,25894E-05
7	0,00229638	0,00198941	0,00043965	7,5699E-05	3,09378E-05	6,64012E-06
8	0,00085111	0,00070607	0,00012519	1,6719E-05	6,00852E-06	1,03431E-06
9	0,00031576	0,00024987	3,5581E-05	3,6891E-06	1,16615E-06	1,61051E-07
10	0,00011733	8,8271E-05	1,0104E-05	8,1365E-07	2,26262E-07	2,50736E-08

Tableau 1.2

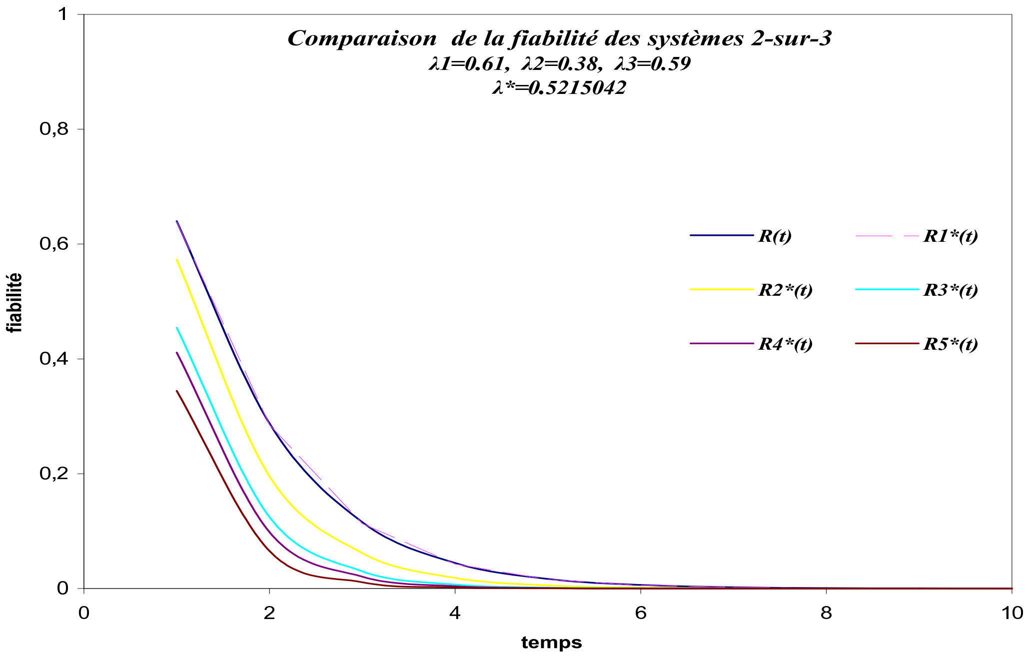

Figure 1.2

Commentaire :

$R^*(t)$ reste toujours une borne inférieure de R(t), d'une très bonne qualité, même si ce système se détériore assez rapidement.

Système 2-sur-7

t	$R(t)$	$R_1^*(t)$	$R_2^*(t)$	$R_3^*(t)$	$R_4^*(t)$	$R_5^*(t)$
1	0,36239895	0,35655659	0,24602287	0,148383855	0,0782902	0,057197229
2	0,07323552	0,06769966	0,0285475	0,00906904	0,0021982	0,001106832
3	0,01307841	0,01082062	0,0027596	0,00045863	0,0000510	1,77075E-05
4	0,00225859	0,00159883	0,0002465	2,1477E-05	0,0000011	2,64489E-07
5	0,00038828	0,00022626	0,0000211	9,6859E-07	2,2997E-08	3,8353E-09
6	0,0000671	0,0000312	1,7682E-06	4,2811E-08	4,7316E-10	5,48582E-11
7	0,0000117	0,0000042	1,4588E-07	1,87105E-09	9,6584E-12	7,79551E-13
8	0,0000020	0,0000006	1,1929E-08	8,12492E-11	1,9636E-13	1,10426E-14
9	0,0000004	0,0000001	9,6988E-10	3,51504E-12	3,9837E-15	1,56179E-16
10	0,0000001	1,0004E-08	7,857E-11	1,51737E-13	8,0733E-17	2,20722E-18

Tableau 2.1

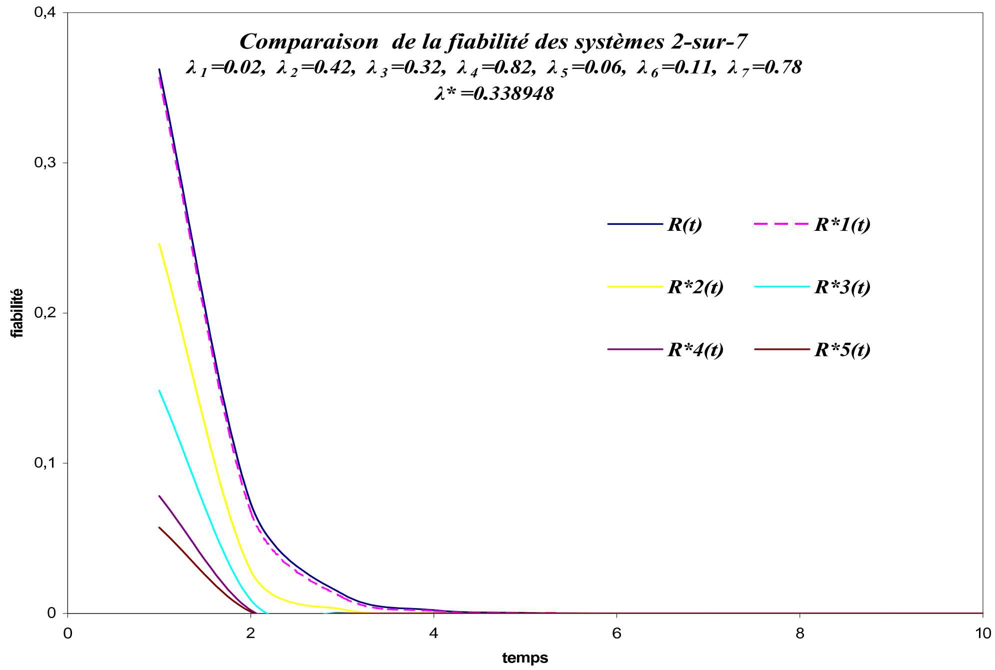

Figure 2.1

t	$R(t)$	$R_1^*(t)$	$R_2^*(t)$	$R_3^*(t)$	$R_4^*(t)$	$R_5^*(t)$
1	0,345368781	0,33972296	0,325985263	0,202333986	0,144234446	0,057197229
2	0,06548067	0,060410472	0,054832996	0,018261179	0,008510672	0,001106832
3	0,01099123	0,009027281	0,007740109	0,001368346	0,000415424	1,77075E-05
4	0,001793261	0,001246796	0,001009688	9,47951E-05	1,87811E-05	2,64489E-07
5	0,000293116	0,000164957	0,000126193	6,30936E-06	8,17873E-07	3,8353E-09
6	4,84674E-05	2,12691E-05	1,5374E-05	4,1065E-07	3,49137E-08	5,48582E-11
7	8,12115E-06	2,6979E-06	1,84309E-06	2,63792E-08	1,47399E-09	7,79551E-13
8	1,37725E-06	3,38562E-07	2,18647E-07	1,68118E-09	6,18372E-11	1,10426E-14
9	2,35917E-07	4,21813E-08	2,57573E-08	1,06624E-10	2,58477E-12	1,56179E-16
10	4,0739E-08	5,22959E-09	3,01994E-09	6,74205E-12	1,07813E-13	2,20722E-18

Tableau 2.2

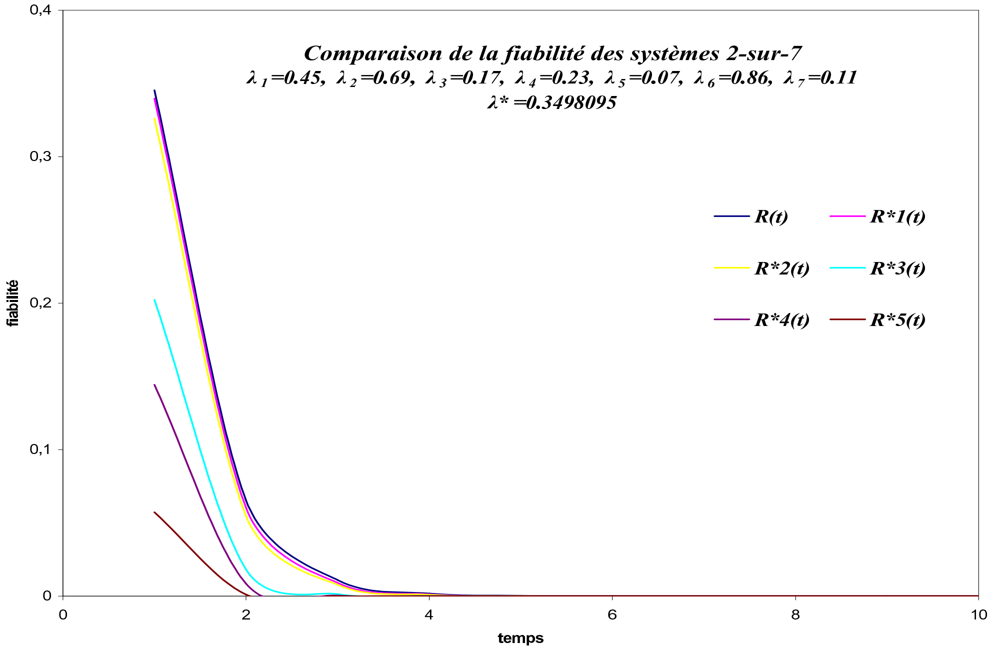

Figure 2.2

t	$R(t)$	$R_1^*(t)$	$R_2^*(t)$	$R_3^*(t)$	$R_4^*(t)$	$R_5^*(t)$
1	0,81066466	0,807157525	0,6287777	0,270165297	0,16732517	0,060289539
2	0,5353312	0,522411948	0,2701653	0,035421047	0,01187997	0,001241362
3	0,32653295	0,30631351	0,101292596	0,003876897	0,00069865	2,11266E-05
4	0,192218889	0,169833511	0,03542105	0,000392056	3,802E-05	3,35508E-07
5	0,11141933	0,090848958	0,01187997	3,80203E-05	1,9907E-06	5,17041E-09
6	0,06425677	0,047409134	0,0038769	3,59834E-06	1,0206E-07	7,85704E-11
7	0,03707344	0,02429837	0,00124136	3,35508E-07	5,1704E-09	1,18593E-12
8	0,0214593	0,012285137	0,00039206	3,09884E-08	2,6011E-10	1,78412E-14
9	0,01247727	0,006145971	0,00012256	2,84476E-09	1,3031E-11	2,67968E-16
10	0,00728992	0,003048991	3,802E-05	2,60111E-10	6,51251E-13	4,02152E-18

Tableau 2.3

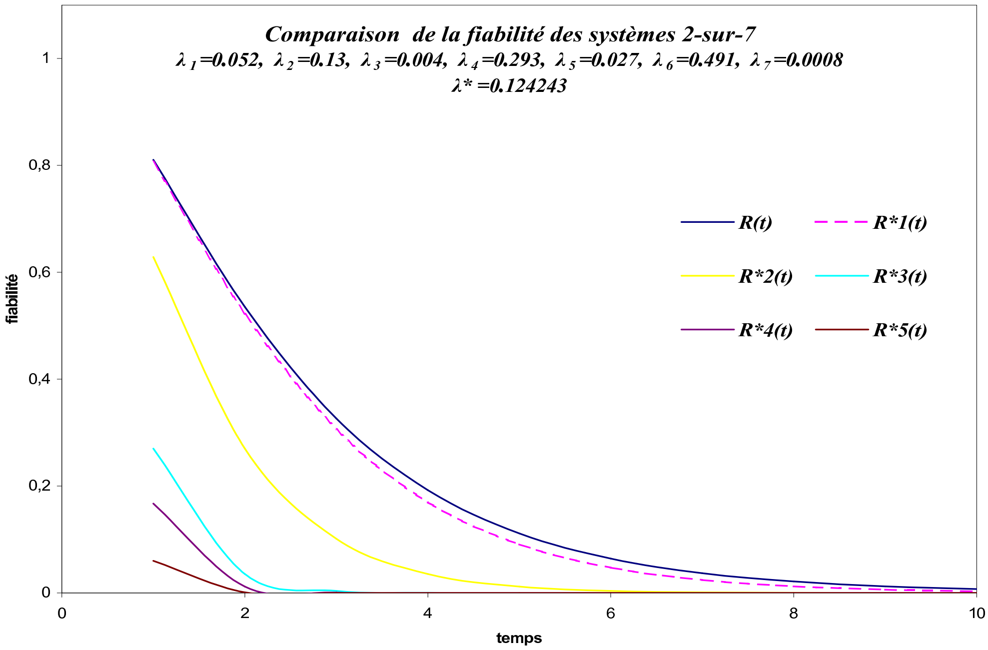

Figure 2.3

Commentaire :

$R^*(t)$ est d'une qualité exceptionnelle dans ce cas, elle se confonds presque point par point avec R(t).

Système 4-sur-7

t	$R(t)$	$R_1^*(t)$	$R_2^*(t)$	$R_3^*(t)$	$R_4^*(t)$	$R_5^*(t)$
1	0,9997857	0,9997598	0,9993809	0,9530098	0,6256460	0,4604777
2	0,9975385	0,9969608	0,9926664	0,7227421	0,1415868	0,0553175
3	0,9908787	0,9877935	0,9723695	0,4397361	0,0205091	0,0041492
4	0,9785036	0,9692964	0,9346577	0,2303348	0,0024434	0,0002595
5	0,9601798	0,9401464	0,8799607	0,1092167	0,0002646	0,0000150
6	0,9363363	0,9005655	0,8116071	0,0483852	0,0000273	0,0000008
7	0,9077231	0,8519020	0,7342457	0,0204370	0,0000027	4,57913E-08
8	0,8752002	0,7961617	0,6526486	0,0083411	0,0000003	2,48836E-09
9	0,8396260	0,7356084	0,5709924	0,0033198	2,65215E-08	1,34694E-10
10	0,8018052	0,6724712	0,4925307	0,0012969	2,58973E-09	7,27721E-12

Tableau 3.1

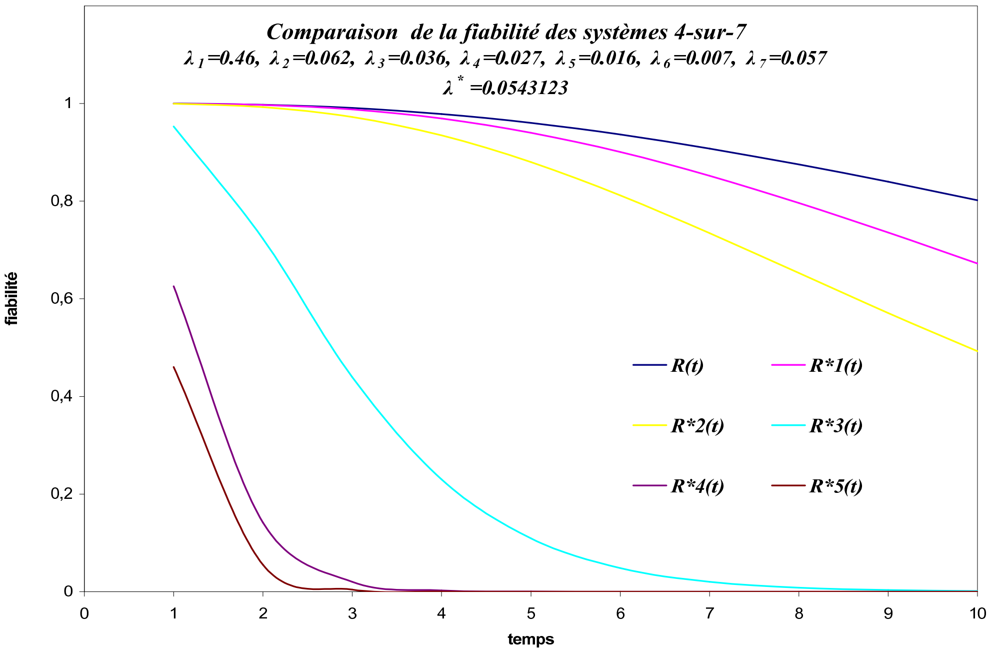

Figure 3.1

t	$R(t)$	$R_1^*(t)$	$R_2^*(t)$	$R_3^*(t)$	$R_4^*(t)$	$R_5^*(t)$
1	0,8832311	0,8725181	0,7847576	0,7342457	0,5447292	0,4795800
2	0,5277884	0,4747367	0,3106812	0,2435820	0,0914703	0,0623339
3	0,2532811	0,1858628	0,0833421	0,0535027	0,0096802	0,0050666
4	0,1118961	0,0604951	0,0183826	0,0096452	0,0008471	0,0003427
5	0,0483120	0,0176600	0,0036436	0,0015670	0,0000679	0,0000214
6	0,0208819	0,0048187	0,0006788	0,0002402	0,0000052	0,0000013
7	0,0091131	0,0012588	0,0001218	0,0000356	0,0000004	7,56518E-08
8	0,0040236	0,0003195	0,0000214	0,0000052	2,90687E-08	4,42178E-09
9	0,0017962	0,0000796	0,0000037	0,0000007	2,14659E-09	2,57343E-10
10	0,0008097	0,0000195	0,0000006	0,0000001	1,58043E-10	1,49458E-11

Tableau 3.2

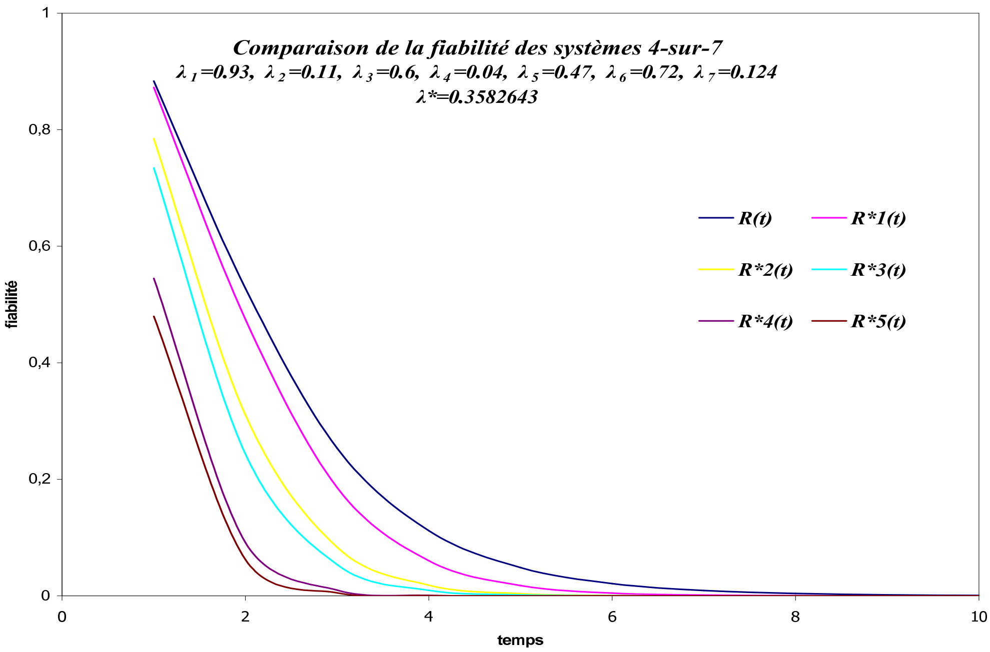

Figure 3.2

t	$R(t)$	$R_1^*(t)$	$R_2^*(t)$	$R_3^*(t)$	$R_4^*(t)$	$R_5^*(t)$
1	0,7324169	0,7253669	0,5941204	0,4096402	0,3687659	0,3026091
2	0,2506492	0,2332978	0,1199362	0,0394924	0,0293911	0,0171246
3	0,0604903	0,0495080	0,0153913	0,0023712	0,0014584	0,0006051
4	0,0127950	0,0086219	0,0016274	0,0001195	0,0000611	0,0000183
5	0,0025927	0,0013540	0,0001568	0,0000056	0,0000024	0,0000005
6	0,0005229	0,0002007	0,0000144	0,0000003	0,0000001	1,44076E-08
7	0,0001066	0,0000288	0,0000013	0,0000000	3,41115E-09	3,96216E-10
8	0,0000221	0,0000040	0,0000001	0,0000000	1,27364E-10	1,08545E-11
9	0,0000046	0,0000006	1,00613E-08	0,0000000	4,74415E-12	2,96900E-13
10	9,93589E-07	7,77159E-08	8,80933E-10	9,85492E-13	1,76529E-13	8,11593E-15

Tableau 3.3

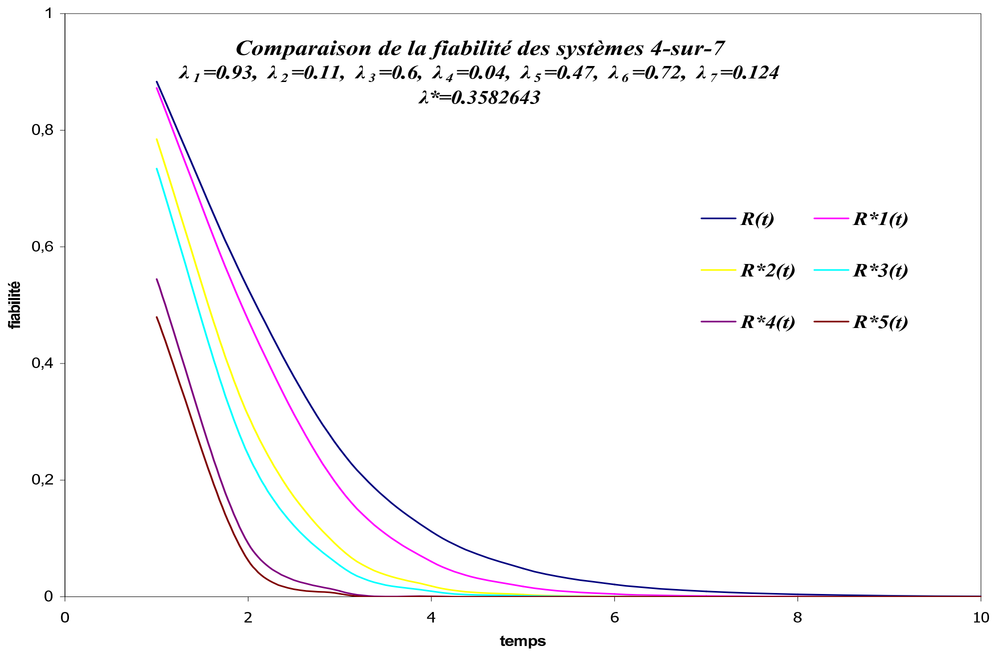

Figure 3.3

Commentair :

Même remarque que précédemment, $R^*(t)$ est la meilleure parmi toutes les fonctions proposées (calculées pour des valeurs de λ^*), l'usage de l'approximation s'avère ici fort utile.

Système 3-sur-10

t	$R(t)$	$R_1^*(t)$	$R_2^*(t)$	$R_3^*(t)$	$R_4^*(t)$	$R_5^*(t)$
1	0,9907888	0,9767324	0,9638213	0,7335024	0,1780501	0,0719773
2	0,9458237	0,9314684	0,8257325	0,3077644	0,0068574	0,0007873
3	0,8645078	0,8572754	0,6371499	0,0982472	0,0001778	0,0000058
4	0,7637123	0,7600210	0,4553716	0,0271199	0,0000039	3,63571E-08
5	0,6625084	0,6467122	0,3077644	0,0068574	0,0000001	2,14337E-10
6	0,5628324	0,5356650	0,1994923	0,0016370	1,55181E-09	1,22308E-12
7	0,4704751	0,4339038	0,1252268	0,0003755	2,94671E-11	6,86588E-15
8	0,3883974	0,3450021	0,0766482	0,0000837	5,51484E-13	3,82202E-17
9	0,3175770	0,2700578	0,0459723	0,0000183	1,02327E-14	2,11838E-19
10	0,2577623	0,2086020	0,0271199	0,0000039	1,88893E-16	1,17149E-21

Tableau 4.1

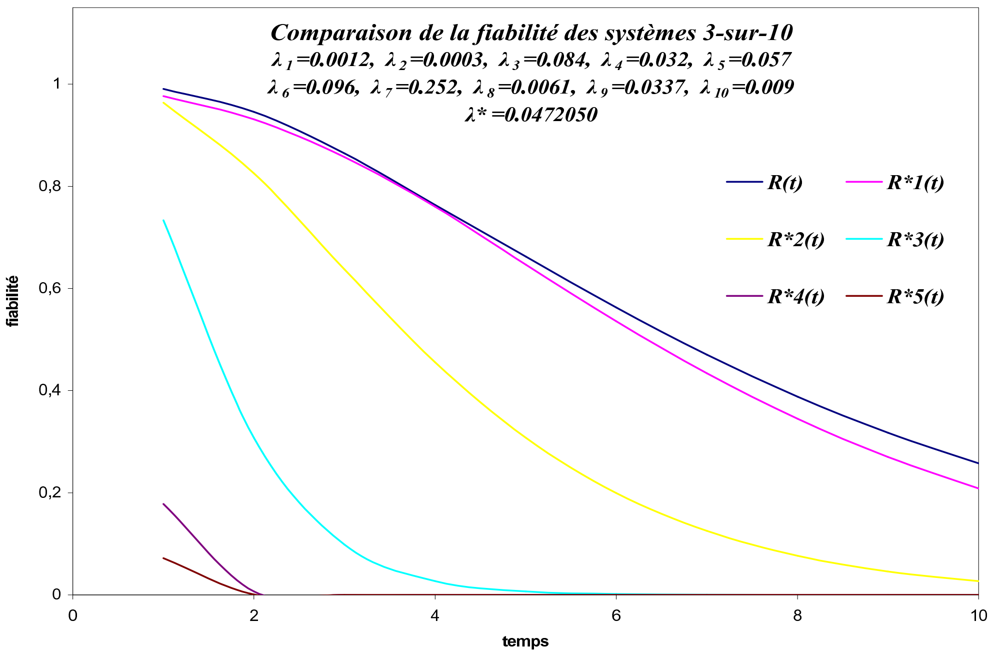

Figure 4.1

t	$R(t)$	$R_1^*(t)$	$R_2^*(t)$	$R_3^*(t)$	$R_4^*(t)$	$R_5^*(t)$
1	0,2307979	0,2133586	0,1329314	0,0982472	0,0558754	0,0193612
2	0,0128438	0,0107240	0,0033703	0,0016370	0,0004374	0,0000392
3	0,0005224	0,0003644	0,0000573	0,0000183	0,0000023	0,0000001
4	0,0000193	0,0000105	0,0000008	0,0000002	1,04499E-08	6,52005E-11
5	0,0000007	0,0000003	1,11670E-08	1,55182E-09	4,46545E-11	7,51826E-14
6	2,52311E-08	7,06440E-09	1,44175E-10	1,33100E-11	1,85432E-13	8,49724E-17
7	9,20353E-10	1,74268E-10	1,82120E-12	1,12012E-13	7,59793E-16	9,523158E-20
8	3,39544E-11	4,23031E-12	2,27256E-14	9,33098E-16	3,09416E-18	1,06349E-22
9	1,26634E-12	1,01688E-13	2,81621E-16	7,73031E-18	1,25676E-20	1,18583E-25
10	4,76850E-14	2,42963E-15	3,47612E-18	6,38501E-20	5,09990E-23	1,32139E-28

Tableau 4.2

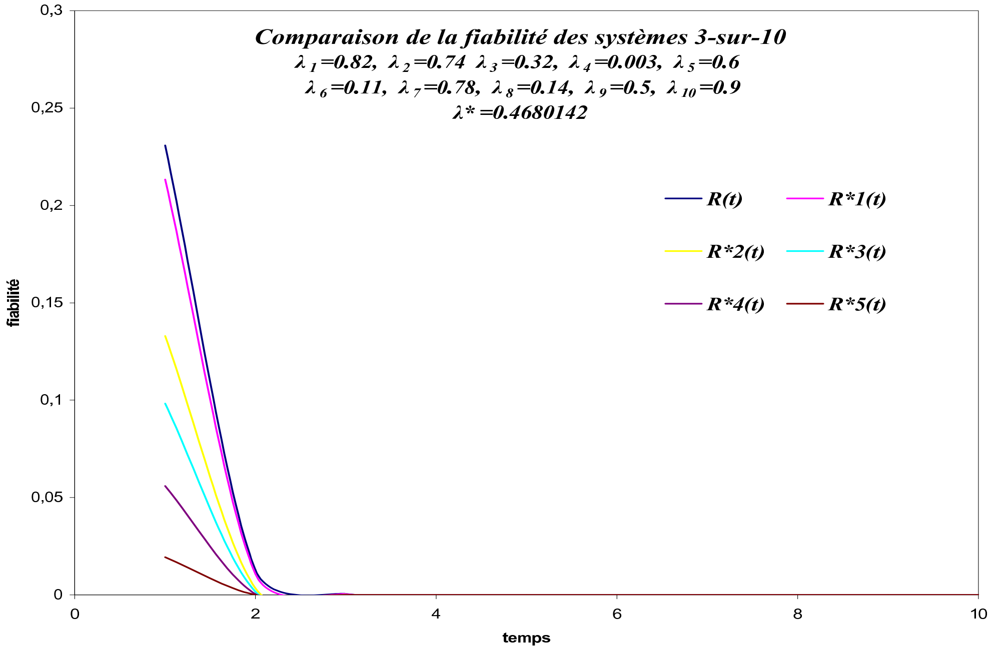

Figure 4.2

t	$R(t)$	$R_1^*(t)$	$R_2^*(t)$	$R_3^*(t)$	$R_4^*(t)$	$R_5^*(t)$
1	0,497628	0,4347965	0,3409230	0,3077644	0,1780501	0,0982472
2	0,084727	0,0675746	0,0353759	0,0271199	0,0068574	0,0016370
3	0,0114264	0,0073576	0,0025280	0,0016370	0,0001778	0,0000183
4	0,0014697	0,0006795	0,0001530	0,0000837	0,0000039	0,0000002
5	0,0001919	0,0000573	0,0000085	0,0000039	0,0000001	1,55182E-09
6	2,59407E-05	4,57576E-06	0,0000004	0,0000002	1,55182E-09	1,33100E-11
7	3,64008E-06	3,52687E-07	2,26826E-08	7,52952E-09	2,94671E-11	1,120118E-13
8	5,27698E-07	2,65554E-08	1,13094E-09	3,18585E-10	5,51484E-13	9,33098E-16
9	7,85026E-08	1,96789E-09	5,56275E-11	1,33100E-11	1,02327E-14	7,73031E-18
10	1,19073E-08	1,44233E-10	2,71154E-12	5,51484E-13	1,88893E-16	6,38501E-20

Tableau 4.3

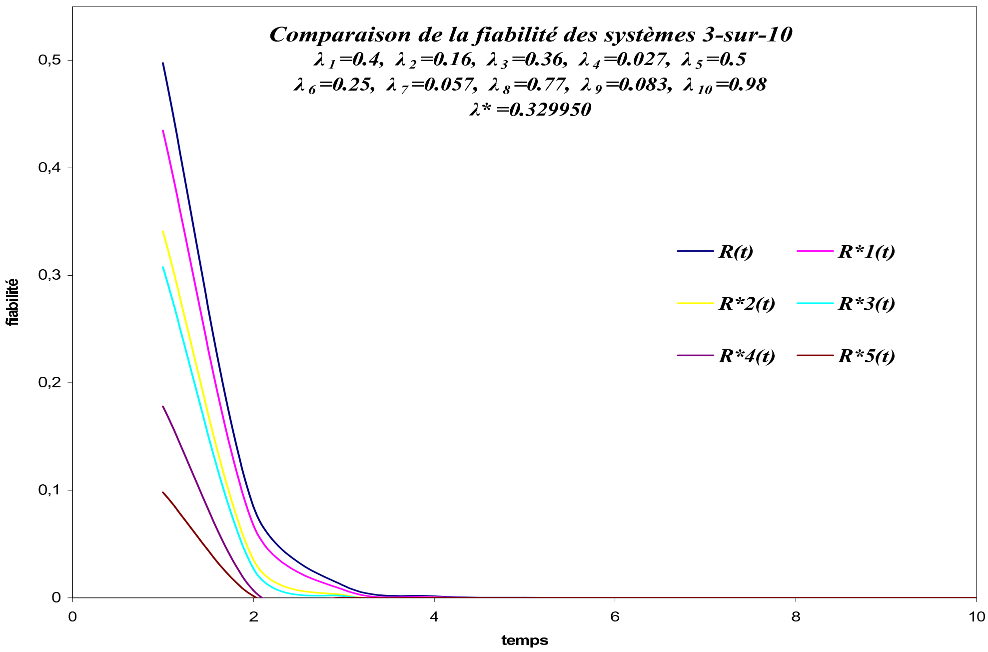

Figure 4.3

Commentaire :

Ce système qui se détériore lentement ou du moins plus lentement que les précédents est une excellente illustration, puisqu'il s'avère que $R^*(t)$ ici aussi se confonds presque avec $R(t)$ sans jamais la dépasser. Mais pour peu qu'on s'éloigne un tant soit peu de λ^*, le processus bascule et la nouvelle borne inférieure s'avère de mauvaise qualité.

Chapitre 4

Comparaison stochastique des durées de vie des systèmes $k - consécutifs - sur - n : F$

Soit un système $k - consécutifs - sur - n : F$, dont les durées de vie X_i, $i = 1, ..., n$ de ces composants sont indépendantes mais non identiques et suivent une loi exponentielle. On se propose de trouver un système équivalent dont les composants sont indépendants et identiquement distribuées d'une loi exponenetielle de paramètre μ. Notre but est de trouver la valeur de μ pour laquelle notre système équivalent est de fiabilité optimale. Notre contribution est justement d'essayer de répondre de ce problème.

4.1 Condition nécessaire

Afin de prouver la condition nécessaire, nous donnons le lemme suivant :

Lemme 4.1.1 *Soient $R(t, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ la fonction de la fiabilité d'un système $k-consécutifs-sur-n : F$ dont les n composants sont indépendants, et de taux de panne $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ respectivement, pour $n \geq k$ on a :*

$$R(t, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = 1 - \left[\sum_{i=1}^{n-k+1} \lambda_i \lambda_{i+1} ... \lambda_{i+k-1} \right] t^k + \circ(t^k). \tag{4.1}$$

Preuve On pose : $R(t, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = R(k, n)$, et on montre par récurrence sur $n \geq k$, pour $n = k$ le système est en parallèle donc la formule s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} R(k,n) &= 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i \\ &= 1 - \left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right)\left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right) ... \left(1 - e^{-\lambda_n t}\right) \end{aligned}$$

Nous utilisons, le dévloppement de Taylor au voisinage zéro, nous obtenons :

$$R(k,n) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \lambda_i t^n + \circ\left(t^n\right). \tag{4.2}$$

Pour $n > k$: nous pouvons écrire $R(k,n)$ sous la forme suivante :

$$R(k,n) = R(k,n-1) - R(k,n-k-1) p_{n-k} \prod_{j=1}^{k} q_{n-k+j} \tag{4.3}$$

tel que : $p_i = e^{-\lambda_i t}$, $q_i = 1 - e^{-\lambda_i t}$ D'après l'hypothèse de récurrence, nous avons :

$$\begin{aligned}
R(k,n+1) &= R(k,n) - R(k,n-k) p_{n-k+1} \prod_{j=1}^{k} q_{n-k+j+1} \\
&= \left[1 - \left(\sum_{i=1}^{n-k+1} \prod_{j=i}^{i+k-1} \lambda_j t^k + \circ\left(t^k\right)\right)\right] - \left[1 - \left(\sum_{i=1}^{n-2k+1} \prod_{j=i}^{i+k-1} \lambda_j t^k + \circ\left(t^k\right)\right)\right] \times \\
&\quad \left[\prod_{j=1}^{k} \lambda_{n-k+j+1} t^k + \circ\left(t^k\right)\right] \\
&= 1 - \left(\sum_{i=1}^{n-k+1} \prod_{j=i}^{i+k-1} \lambda_j t^k + \prod_{j=1}^{k} \lambda_{n-k+j+1} t^k + \circ\left(t^k\right)\right) \\
&= 1 - \left(\sum_{i=1}^{n-k+2} \prod_{j=i}^{i+k-1} \lambda_j t^k + \circ\left(t^k\right)\right).
\end{aligned}$$

■

Théorème 4.1.1 *Soient $R(t,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$ la fonction de la fiabilité d'un système $k-consécutifs-sur-n : F$ dont les n composants sont indépendants, de taux de panne $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ respectivement, $R^*(t,\mu)$ la fiabilité du système équivalent dont les n composants sont iid de taux de panne commun μ. Alors :*

$$R(t,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n) \geq R^*(t,\mu) \Longrightarrow \mu \geq \left[\tfrac{1}{n-k+1} \sum_{i=1}^{n-k+1} \prod_{j=1}^{i+k-1} \lambda_j\right]^{\frac{1}{k}} \tag{4.4}$$

Preuve D'après le lemme précédent, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
R(t,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n) &= 1 - \sum_{i=1}^{n-k+1} \lambda_i \lambda_{i+1} ... \lambda_{i+k-1} t^k + \circ(t^k) \\
R^*(t,\mu) &= 1 - \sum_{i=1}^{n-k+1} \mu^k t^k + \circ(t^k)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} R(t,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n) &\geq R^*(t,\mu) \Longrightarrow \left[1-\sum_{i=1}^{n-k+1}\lambda_i\lambda_{i+1}...\lambda_{i+k-1}t^k\right] \geq \left[1-\sum_{i=1}^{n-k+1}\mu^k t^k\right]. \\ &\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n-k+1}\mu^k \geq \sum_{i=1}^{n-k+1}\lambda_i\lambda_{i+1}...\lambda_{i+k-1} \\ &\Longrightarrow (n-k+1)\,\mu^k \geq \sum_{i=1}^{n-k+1}\lambda_i\lambda_{i+1}...\lambda_{i+k-1} \\ &\Longrightarrow \mu \geq \left[\frac{1}{n-k+1}\sum_{i=1}^{n-k+1}\prod_{j=1}^{i+k-1}\lambda_j\right]^{\frac{1}{k}} \end{aligned}$$

■

4.2 Condition suffisante

On a voulu exploité l'idée de J.L Bon pour démontrer la condition suffisante, malheureusement, on été affronté à la non symétrie de la fiabilité, ce qui nous amène à réaliser des simulations pour vérifier si notre condition reste suffisante.

La condition suffisante n'est pas facile à démontrer du fait de le non symétrie de la fiabilité, et du coup on ne peut pas l'affirmer théoriquement. Par des simulations, on va voir que la condition $\mu \geq \left[\frac{1}{n-k+1}\sum_{i=1}^{n-k+1}\prod_{j=1}^{i+k-1}\lambda_j\right]^{\frac{1}{k}}$ est suffisant pour que $R(t,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n) \geq R(t,\mu)$, la démonstration de la condition suffisante reste un problème ouvert.

4.3 Simulations

Dans ce qui suit, on va illustrer ces résultats par des simulations et cela pour différentes valeurs de n, k, et λ_i

Système 2-consécutifs-sur-3

t	$R(t)$	$R_1^*(t)$	$R_2^*(t)$	$R_3^*(t)$	$R_4^*(t)$	$R_5^*(t)$
1	0,9087464	0,9042297	0,8830602	0,75128	0,652303498	0,614520921
2	0,7516181	0,7311352	0,6847069	0,4534277	0,32656346	0,28601738
3	0,6040626	0,5634179	0,5046631	0,2618082	0,159636084	0,13128134
4	0,4828153	0,4249018	0,3645884	0,1511722	0,079380408	0,061639785
5	0,3869678	0,3176749	0,2618082	0,088269886	0,040219352	0,029526044
6	0,3116732	0,2370309	0,188106	0,05214241	0,020643353	0,014318925
7	0,2522072	0,1771009	0,1356157	0,03108173	0,01067769	0,006991021
8	0,2048478	0,1327099	0,0982011	0,01864496	0,005546829	0,003425171
9	0,1668316	0,09978842	0,07141855	0,01123103	0,002888169	0,001681068
10	0,1361237	0,07529016	0,0521424	0,006783041	0,001505696	0,000825785

Tableau 1.1

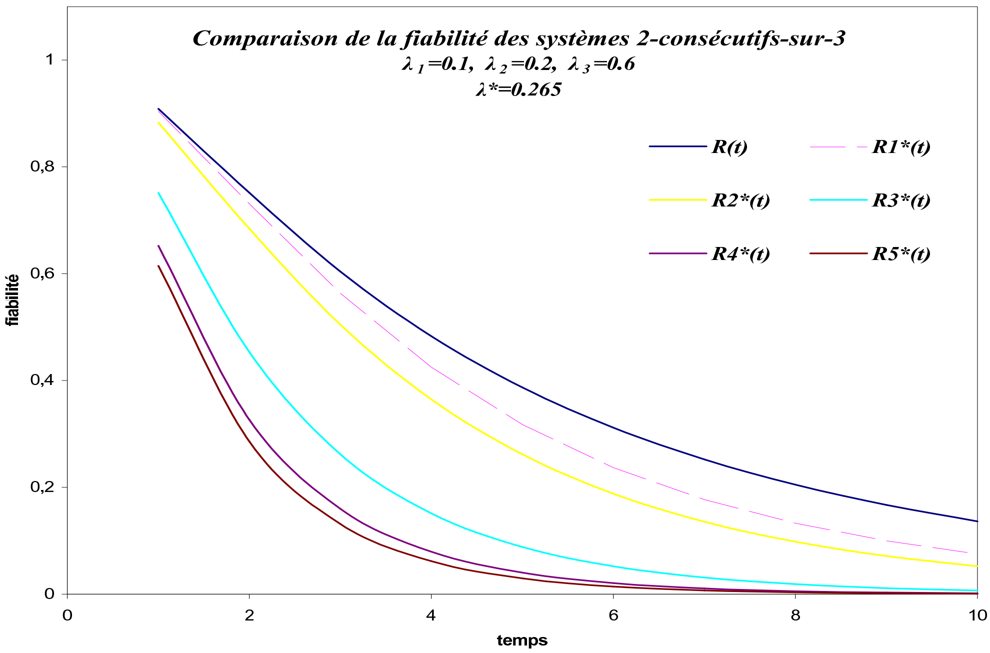

Figure 1.1

t	$R(t)$	$R_1^*(t)$	$R_2^*(t)$	$R_3^*(t)$	$R_4^*(t)$	$R_5^*(t)$
1	0,7790805	0,7664374	0,665174	0,589768	0,504663035	0,468311258
2	0,51595886	0,4759161	0,341291	0,2243092	0,18810603	0,16138717
3	0,33384041	0,2820982	0,1704466	0,09211048	0,071418555	0,057281673
4	0,2251417	0,1667695	0,08641248	0,03899087	0,028049909	0,021068475
5	0,1516766	0,09952553	0,04460974	0,01684278	0,011231035	0,007889181
6	0,1029544	0,06004767	0,02333168	0,00735202	0,004536888	0,002976386
7	0,07015736	0,03655556	0,01230113	0,00322507	0,001839671	0,001126233
8	0,04789938	0,02239929	0,006515387	0,001417888	0,000747143	0,000426638
9	0,03273217	0,01378581	0,003459712	0,00062399	0,000303631	0,000161689
10	0,02237678	0,008509249	0,001839671	0,000274729	0,000123425	6,12873E-05

Tableau 1.2

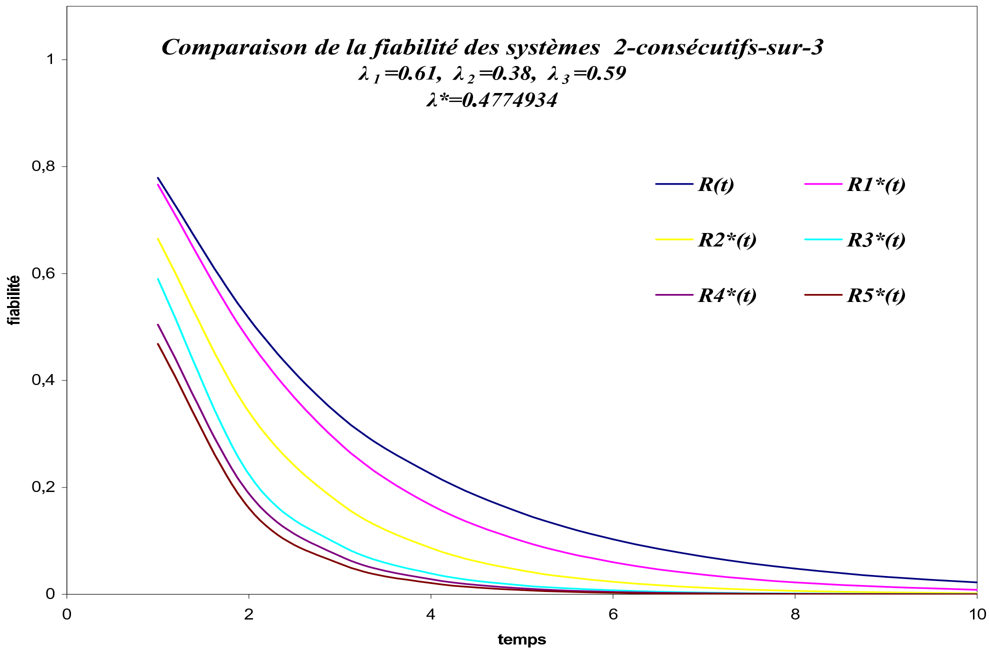

Figure 1.2

Commentaire :
$R^*(t)$ reste la meilleure approximation de $R(t)$, surtout si l'on se fixe une politique préventive dès que le taux de panne du système étudié avoisine les 75%, sachant en réalité que dans certains domaines les exigences vont au-delà (jusqu'à 98% dans le domaine aérospatial par exemple), ce qui nous conforte dans cette approximation, dont le seul tord semble être une alerte parfois trop anticipée.

Système 2-consécutifs-sur-7

t	$R(t)$	$R_1^*(t)$	$R_2^*(t)$	$R_3^*(t)$	$R_4^*(t)$	$R_5^*(t)$
1	0,7320273	0,6988567	0,541169	0,4200616	0,2996734	0,253236
2	0,4282237	0,3400261	0,1733322	0,09202435	0,04103965	0,02777604
3	0,243439	0,1422573	0,0467011	0,01696949	0,00483854	0,00267035
4	0,139941	0,05528279	0,0118149	0,003010717	0,000572407	0,000263346
5	0,08166443	0,02072347	0,002947798	0,000541723	7,10781E-05	2,76113E-05
6	0,04819	0,007655145	0,000742798	1,00668E-05	9,27074E-06	3,05017E-06
7	0,02863769	0,002822344	0,000190963	1,93382E-05	1,25363E-06	3,48509E-07
8	0,01708985	0,001046448	5,0194E-05	3,61611E-06	1,73394E-07	4,05866E-08
9	0,01022352	0,000391781	1,34603E-05	7,67674E-07	2,42632E-08	4,77436E-09
10	0,006124708	0,000148357	3,66862E-06	1,56415E-07	3,42886E-09	5,64508E-10

Tableau 2.1

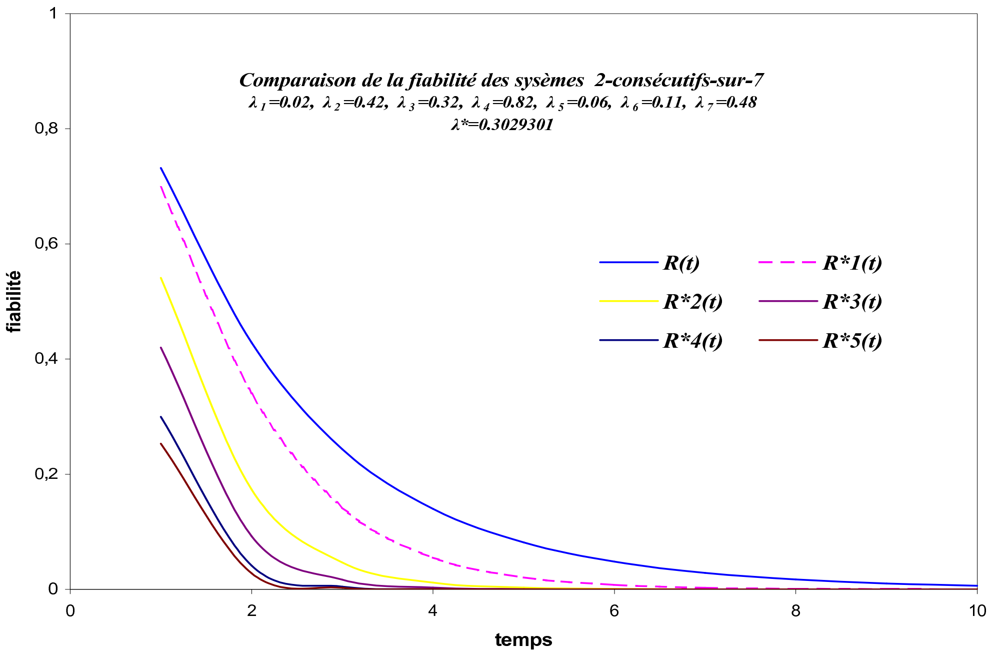

Figure 2.1

t	$R(t)$	$R_1^*(t)$	$R_2^*(t)$	$R_3^*(t)$	$R_4^*(t)$	$R_5^*(t)$
1	0,6779178	0,6655778	0,6207903	0,4908357	0,3921675	0,2039254
2	0,3284548	0,2979586	0,2475294	0,135353	0,07784736	0,01698067
3	0,1441436	0,1139405	0,08370206	0,0313406	0,01304481	0,00127395
4	0,06135023	0,0404922	0,02636059	0,006870317	0,002120003	0,000100796
5	0,02594102	0,01392608	0,008079105	0,001501051	0,000352064	8,57916E-05
6	0,01099669	0,004740028	0,0024669	3,34328E-04	6,06715E-05	7,69077E-07
7	0,004689686	0,001617465	0,007599458	7,64547E-05	1,08274E-05	7,09845E-08
8	0,002014229	0,000557264	0,000237575	1,79308E-05	1,98442E-06	6,64863E-09
9	0,000871285	0,000194467	7,54909E-05	4,29278E-06	3,70353E-07	6,27114E-10
10	0,000379376	6,87811E-05	2,43588E-05	1,04359E-06	6,99194E-08	5,93442E-11

Tableau 2.2

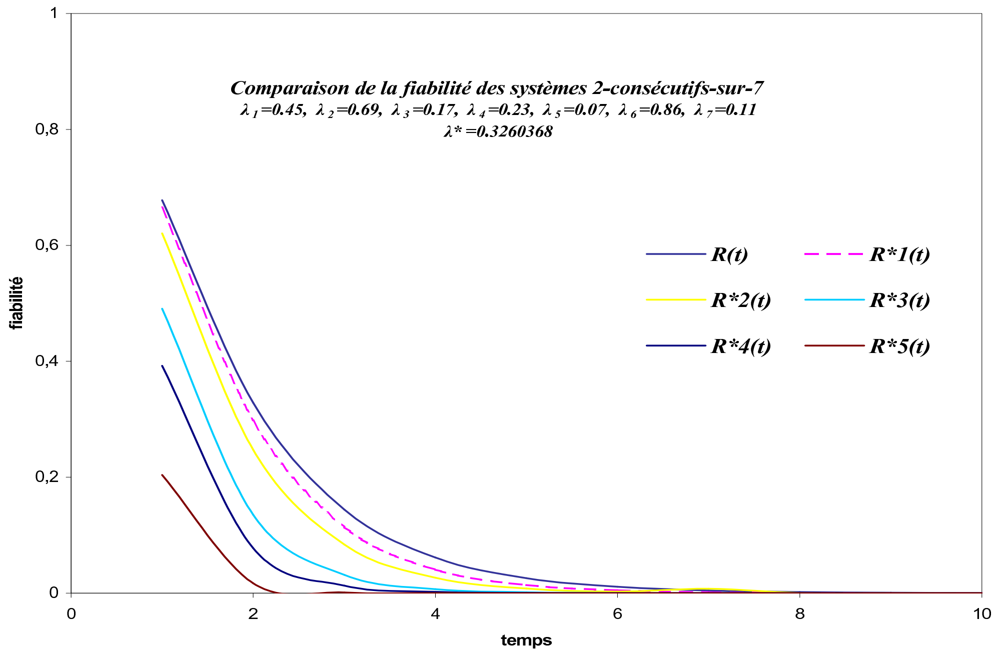

Figure 2.2

t	$R(t)$	$R_1^*(t)$	$R_2^*(t)$	$R_3^*(t)$	$R_4^*(t)$	$R_5^*(t)$
1	0,9778147	0,9737343	0,9590289	0,8374532	0,5667096	0,3434941
2	0,9316383	0,9085569	0,8629215	0,5667096	0,1951397	0,05663318
3	0,8772071	0,8215048	0,7429653	0,34344941	0,0566332	0,007946605
4	0,8205755	0,725121	0,6194474	0,1951397	0,01538311	0,001099332
5	0,7642097	0,6280217	0,5040572	0,106475	0,00410136	0,000157568
6	0,7092653	0,5356901	0,4024915	0,0566332	0,00109932	2,3608E-05
7	0,6563889	0,4512699	0,3166283	0,02965043	0,00029958	3,66862E-06
8	0,6059855	0,3762504	0,2461198	0,01538311	8,32943E-05	5,84574E-06
9	0,5583103	0,3110078	0,1894702	0,007946605	2,3608E-05	9,46159E-08
10	0,5135059	0,2552184	0,1447166	0,004101362	6,80099E-06	1,54556E-08

Tableau 2.3

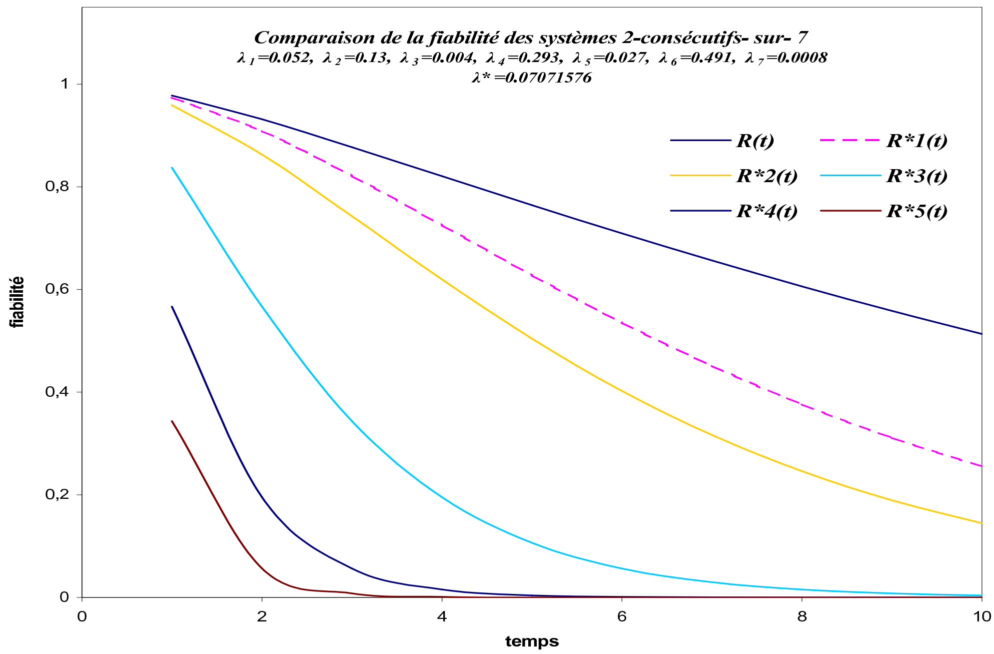

Figure 2.3

Système 4-consécutifs-sur-7

t	$R(t)$	$R_1^*(t)$	$R_2^*(t)$	$R_3^*(t)$	$R_4^*(t)$	$R_5^*(t)$
1	0,9999783	0,99975	0,9999726	0,999921	0,9920124	0,8981199
2	0,9997348	0,9996503	0,9996216	0,998949	0,9324182	0,5655106
3	0,9989552	0,9984608	0,9983377	0,9955825	0,8126627	0,291402
4	0,9973844	0,9957611	0,9954362	0,9883776	0,6641304	0,1418079
5	0,9948587	0,9909629	0,9903036	0,9763162	0,5180925	0,0696965
6	0,9912866	0,9836346	0,9824766	0,9588977	0,3919336	0,03537238
7	0,9866269	0,9734647	0,9716628	0,9360979	0,2910483	0,01853574
8	0,9808697	0,9603222	0,9577384	0,9082656	0,2140805	0,00995042
9	0,9740278	0,9442096	0,9407274	0,87601	0,1569794	0,00542746
10	0,9661279	0,9252449	0,9207756	0,8400956	0,1152577	0,00298952

Tableau 3.1

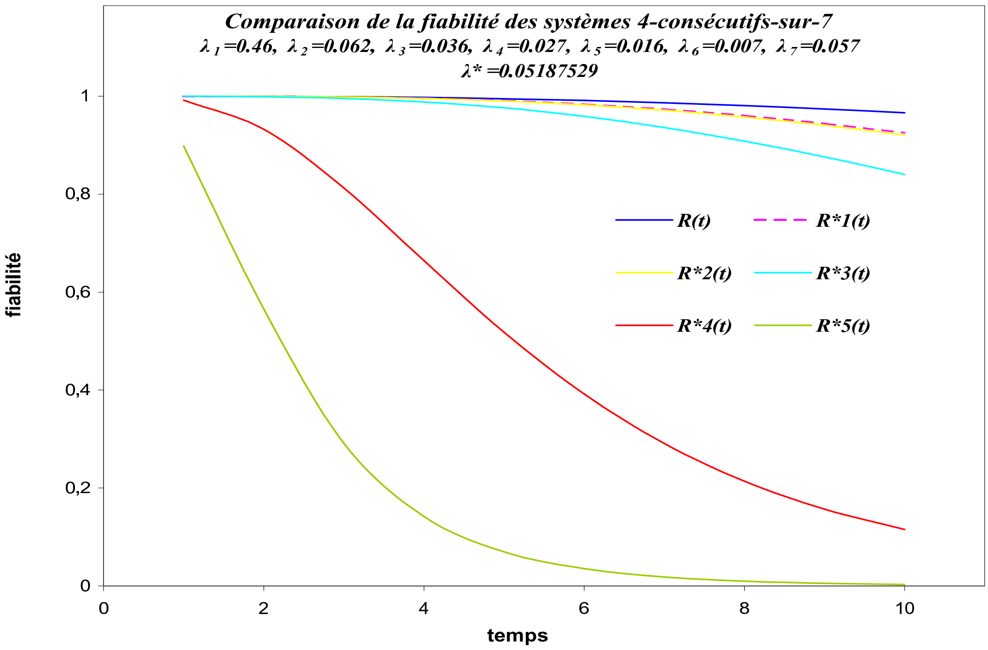

Figure 3.1

t	$R(t)$	$R_1^*(t)$	$R_2^*(t)$	$R_3^*(t)$	$R_4^*(t)$	$R_5^*(t)$
1	0,9950783	0,9919364	0,953615	0,9360981	0,8645730	0,83363190
2	0,9676211	0,93896	0,73745	0,6762539	0,4877620	0,42768290
3	0,9246094	0,827619	0,4724998	0,4057623	0,2252200	0,18084590
4	0,8788698	0,6859345	0,2806182	0,2249420	0,1004813	0,07551263
5	0,8360868	0,5431978	0,1619259	0,1225724	0,0461939	0,03297656
6	0,7973771	0,4170599	0,0936259	0,0676506	0,0221440	0,01508448
7	0,7622643	0,314639	0,05501375	0,0382168	0,0109747	0,00712341
8	0,7299941	0,2339851	0,03297657	0,0220955	0,0055576	0,00342656
9	0,6999354	0,1735634	0,02013351	0,0130168	0,0028500	0,00166456
10	0,671639	0,1287535	0,01247481	0,0077735	0,0014717	0,00081268

Tableau 3.2

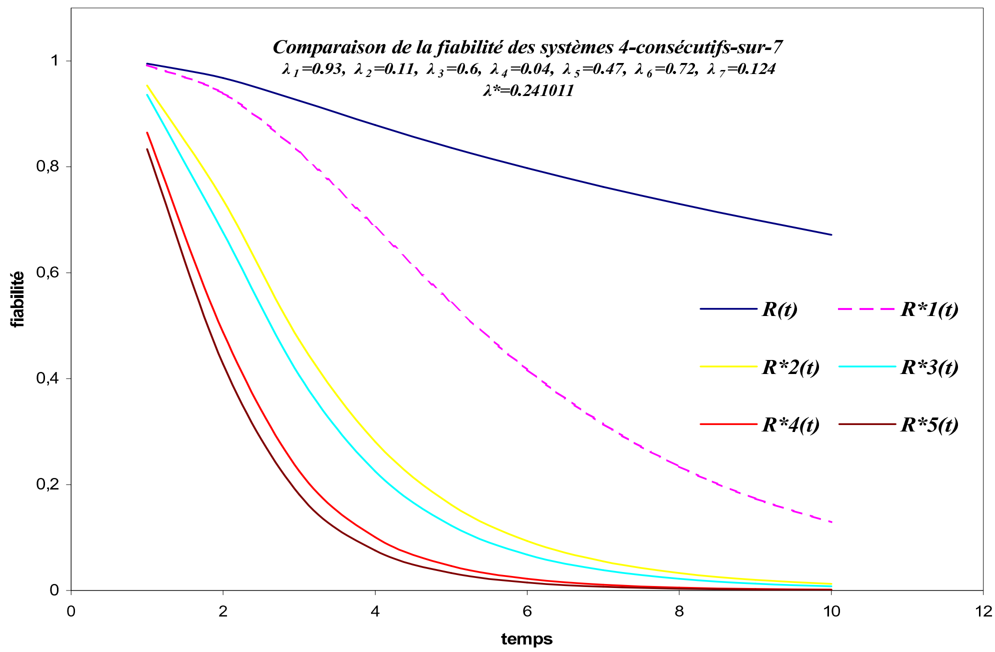

Figure 3.2

t	$R(t)$	$R_1^*(t)$	$R_2^*(t)$	$R_3^*(t)$	$R_4^*(t)$	$R_5^*(t)$
1	0,9427938	0,940491	0,8856344	0,7956386	0,7706532	0,7247198
2	0,7059332	0,6912117	0,5347786	0,3653922	0,329937	0,2738513
3	0,446767	0,4233161	0,263984	0,14044441	0,1197375	0,09027576
4	0,2604814	0,2390589	0,1240924	0,05469223	0,04477456	0,03152373
5	0,1465268	0,1322576	0,05938368	0,02258605	0,01786501	0,01183043
6	0,0813109	0,07389712	0,02947172	0,009784514	0,00747215	0,00463769
7	0,04496862	0,04218525	0,01511688	0,004361039	0,00320698	0,00185645
8	0,0248951	0,02462986	0,00793719	0,001972564	0,00139374	0,00074992
9	0,01381933	0,0165533	0,00422909	0,000898609	0,00060919	0,00030409
10	0,00769509	0,00884086	0,00227289	0,000410742	0,00026696	0,00012350

Tableau 3.3

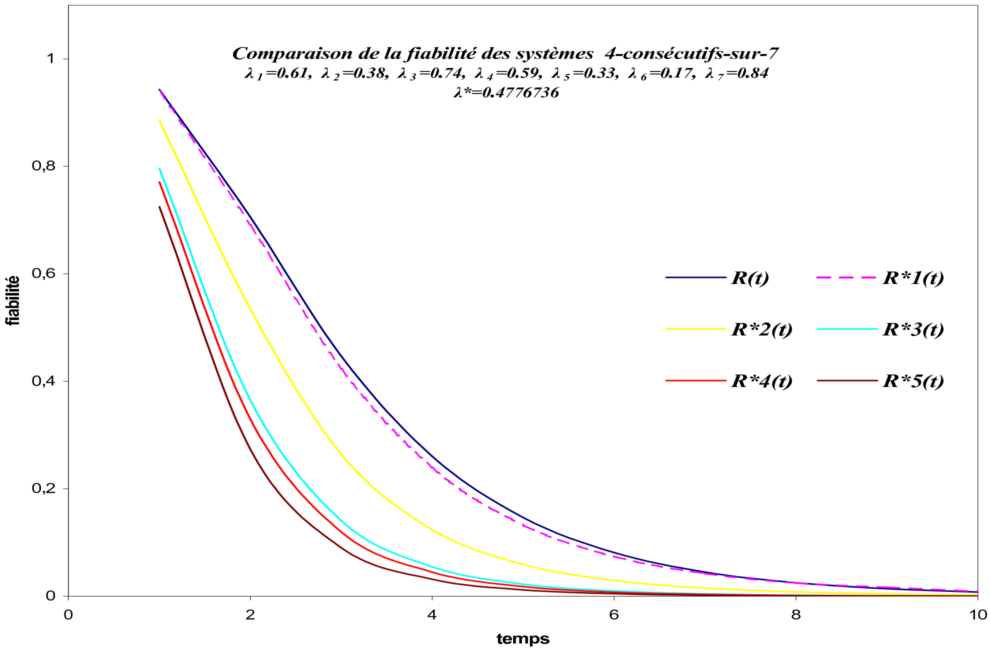

Figure 3.3

Commentaire :
L'approximation est excellent car la courbe initiale à un processus révèle un vieillissement moins long que pour les systèmes précédents, comblant ainsi ce qui semblait être un défaut de $R^*(t)$, qui pouvait atteindre rapidement des valeurs dangereuses alors que, pour le système initial, on restait avec des fiabilités de l'ordre 80%.

Système 3-consécutifs-sur-10

t	$R(t)$	$R_1^*(t)$	$R_2^*(t)$	$R_3^*(t)$	$R_4^*(t)$	$R_5^*(t)$
1	0,9984534	0,9983516	0,9966106	0,9601672	0,8689898	0,5362096
2	0,9899406	0,9886122	0,9775675	0,8029369	0,5258589	0,1081947
3	0,9722049	0,9668328	0,9374422	0,5890622	0,2488799	0,0154981
4	0,9456915	0,932208	0,8776301	0,391692	0,1022354	0,0020314
5	0,9119836	0,885916	0,8029365	0,2426675	0,0387896	0,000266631
6	0,8729793	0,8302385	0,7192801	0,1429608	0,0141229	3,58299E-05
7	0,8304913	0,7679201	0,6322992	0,0812819	0,0050443	4,92415E-06
8	0,7860764	0,7017304	0,5466408	0,0450868	0,0017985	6,86971E-07
9	0,7409876	0,634188	0,4657072	0,0245955	0,0006378	9,66990E-08
10	0,6961864	0,5674134	0,391692	0,0132735	0,0002282	1,36795E-08

Tableau 4.1

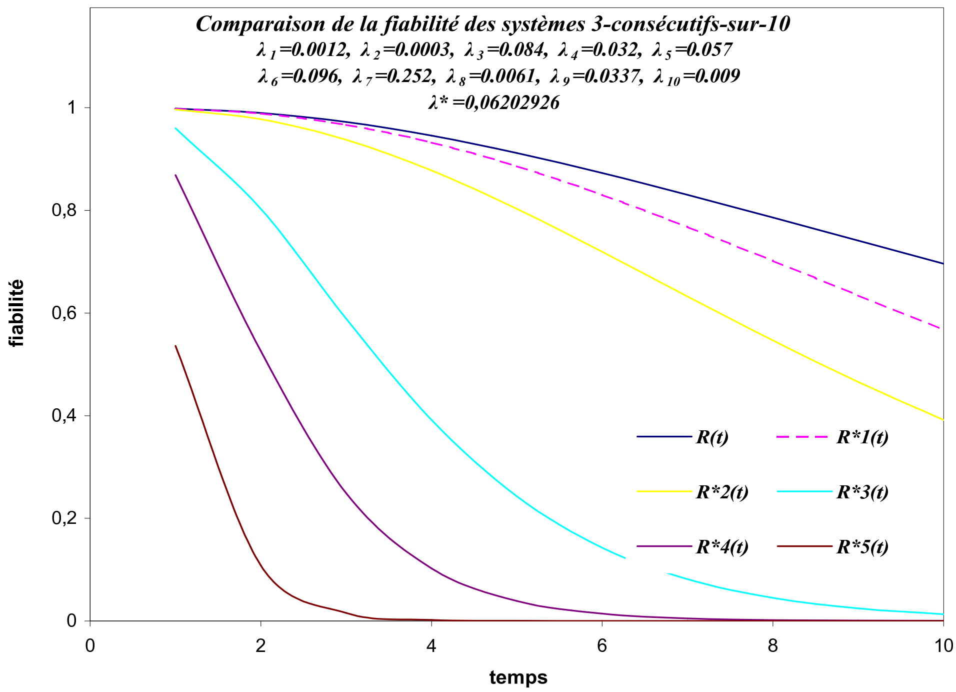

Figure 4.1

t	$R(t)$	$R_1^*(t)$	$R_2^*(t)$	$R_3^*(t)$	$R_4^*(t)$	$R_5^*(t)$
1	0,8531732	0,8367485	0,7826305	0,643183	0,5890622	0,4853583
2	0,5254946	0,4553869	0,3576767	0,1872394	0,1429607	0,08128192
3	0,280962	0,1892189	0,1210675	0,03879865	0,02245955	0,009725421
4	0,1446707	0,06798577	0,03543891	0,00711755	0,00380427	0,001085279
5	0,07476129	0,02266229	0,009725423	0,001269268	0,000580718	0,000122825
6	0,0392876	0,007296586	0,002610859	0,000228227	9,01869E-05	1,43029E-05
7	0,02102537	0,002321837	0,000700406	4,17743E-05	1,43023E-05	1,70226E-06
8	0,01142753	0,000739232	0,000189465	7,77214E-06	2,3053E-06	2,05399E-07
9	0,00628509	0,000236831	5,18011E-05	1,46337E-06	3,75505E-08	2,49603E-08
10	0,00348666	7,64876E-05	1,43029E-05	2,77698E-07	6,1556E-08	3,04474E-09

Tableau 4.2

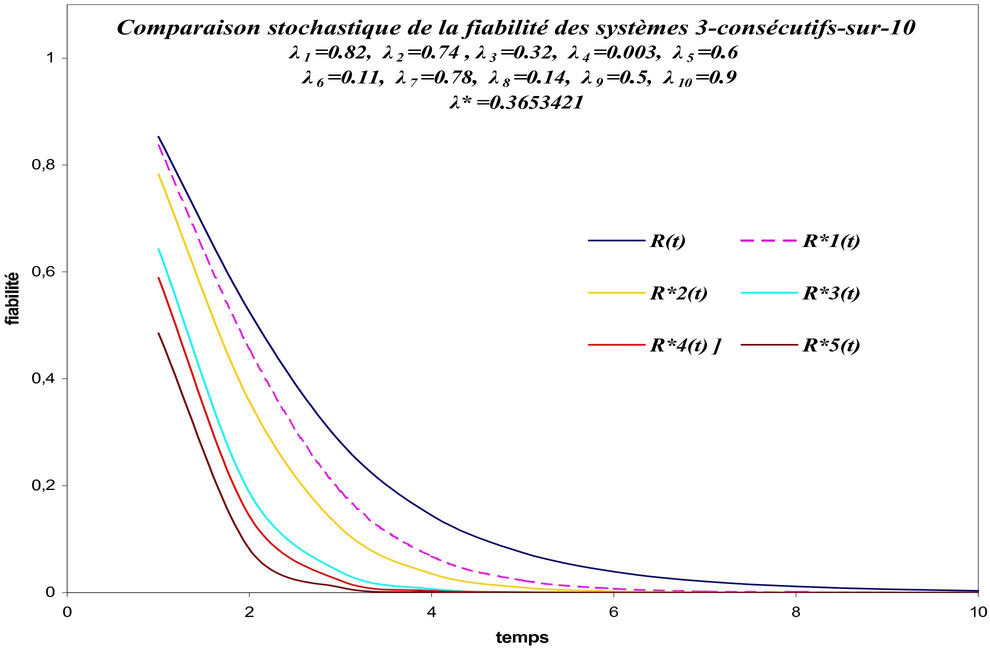

Figure 4.2

t	$R(t)$	$R_1^*(t)$	$R_2^*(t)$	$R_3^*(t)$	$R_4^*(t)$	$R_5^*(t)$
1	0,9450442	0,934443	0,8941992	0,4754797	0,4094681	0,3522745
2	0,7757724	0,709154	0,598622	0,07670372	0,0508059	0,03417488
3	0,5843044	0,4521444	0,3105977	0,008856867	0,004591686	0,0024675
4	0,4213821	0,2560151	0,1429607	0,000957552	0,00039444	0,000175882
5	0,2971946	0,1340174	0,06069045	0,00010524	3,85299E-05	1,30510E-05
6	0,2072235	0,0666507	0,0245955	1,19092E-05	3,31764E-06	9,99433E-07
7	0,1437322	0,03208344	0,009725416	1,37739E-06	3,13316E-07	7,78496E-08
8	0,09955128	0,01514162	0,003804274	1,61385E-07	2,98970E-08	6,11299E-09
9	0,06901845	0,007068618	0,001484575	1,90416E-08	2,86721E-09	4,81741E-10
10	0,04796756	0,00328392	0,000580718	2,25478E-09	2,75629E-10	3,80238E-11

Tableau 4.3

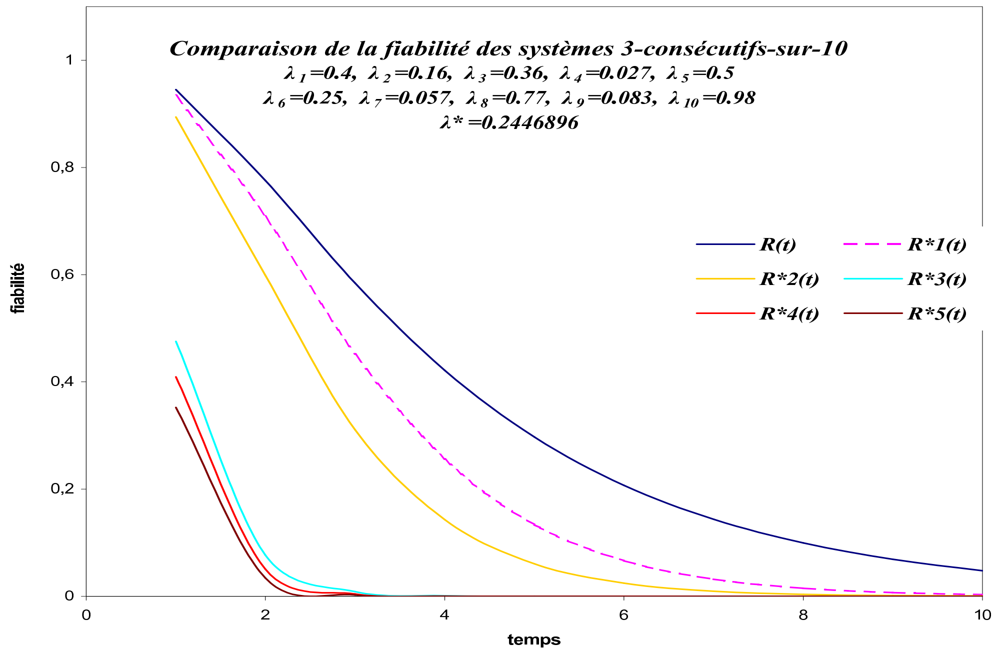

Figure 4.3

Commentaire :
Ici, et malgré l'apparence, l'approximation est bonne car l'écart se creuse sur des zones où la fiabilité est intéressante.

Système 15-consécutifs-sur-50

t	$R(t)$	$R_1^*(t)$	$R_2^*(t)$	$R_3^*(t)$	$R_4^*(t)$	$R_5^*(t)$
1	1	1	1	0,9999977	0,9999892	0,999868
2	1	1	0,9999875	0,9980633	0,9913077	0,9470876
3	0,9999999	0,9999998	0,9991853	0,9513276	0,8603107	0,5861272
4	0,9999968	0,999979	0,9896951	0,7539121	0,5228001	0,1909208
5	0,9999738	0,9998288	0,9470888	0,4495218	0,2140576	0,03944481
6	0,9998662	0,9989586	0,8436944	0,2045639	0,0654303	6,482316E-03
7	0,9995143	0,9957973	0,6801687	0,07600583	1,676989E-02	9,822020E-04
8	0,9986336	0,9873279	0,491565	0,02473248	3,933794E-03	1,479136E-04
9	0,9968058	0,969319	0,3203536	7,453434E-03	8,932851E-04	2,275324E-05
10	0,9935235	0,9373283	0,1909211	2,164078E-03	2,025545E-04	3,585758E-06

Tableau 5

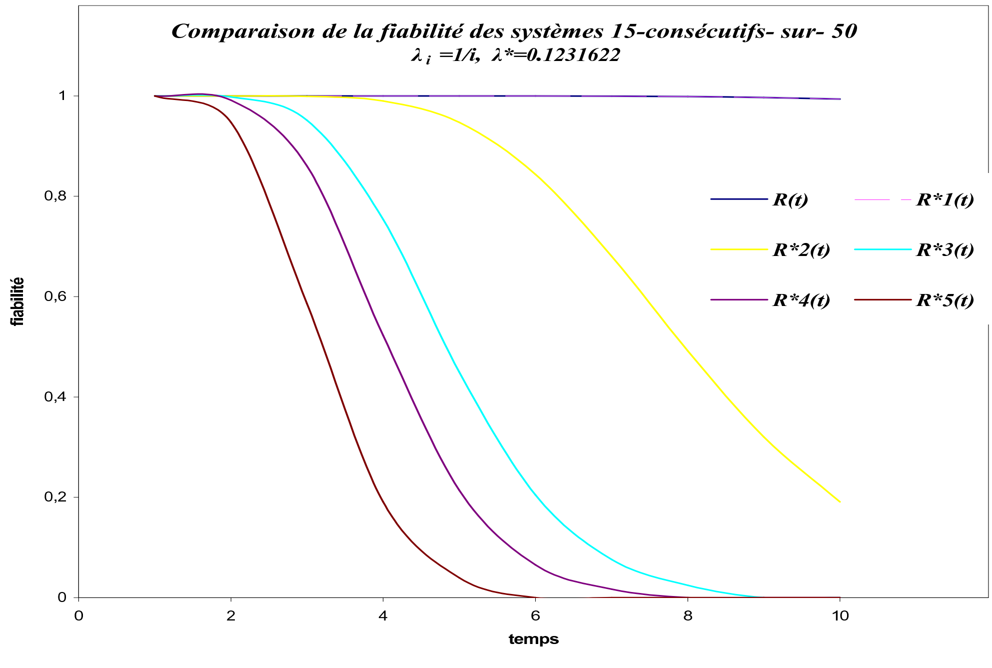

Figure 5

Commentaire :

Dans ce cas le système, vieillit très lentement, ce qui justifie moins l'usage de politique préventive, mais malgré cela nous restons dans le cadre de la meilleure approximation sur un intervalle de temps représentant 50% environ de la durée de vie observée.

Système 15-consécutifs-sur-100

t	$R(t)$	$R_1^*(t)$	$R_2^*(t)$	$R_3^*(t)$	$R_4^*(t)$	$R_5^*(t)$
1	0,9999999	0,9999999	0,9999996	0,9999995	0,999977	0,9993725
2	0,9999988	0,9999999	0,9999475	0,9985404	0,975348	0,8224046
3	0,9999752	0,9996158	0,9968582	0,9526875	0,6710786	0,1960459
4	0,9997636	0,9938778	0,9640703	0,7180839	0,1946529	0,00974289
5	0,9989485	0,9615375	0,8371374	0,344521	0,02292107	0,00018032
6	0,9969566	0,8654919	0,5934569	0,0994961	1,416149E-03	2,107201E-06
7	0,9932242	0,6881073	0,3242397	0,01857089	5,951334E-05	2,110531E-08
8	0,9872682	0,4654419	0,1357	0,00249959	2,048148E-06	2,101493E-10
9	0,9786733	0,2640047	0,04466054	2,686661E-04	6,487244E-08	2,091130E-12
10	0,9670573	0,1261682	0,0120378	2,500112E-05	2,022757E-09	2,504243E-14

Tableau 6

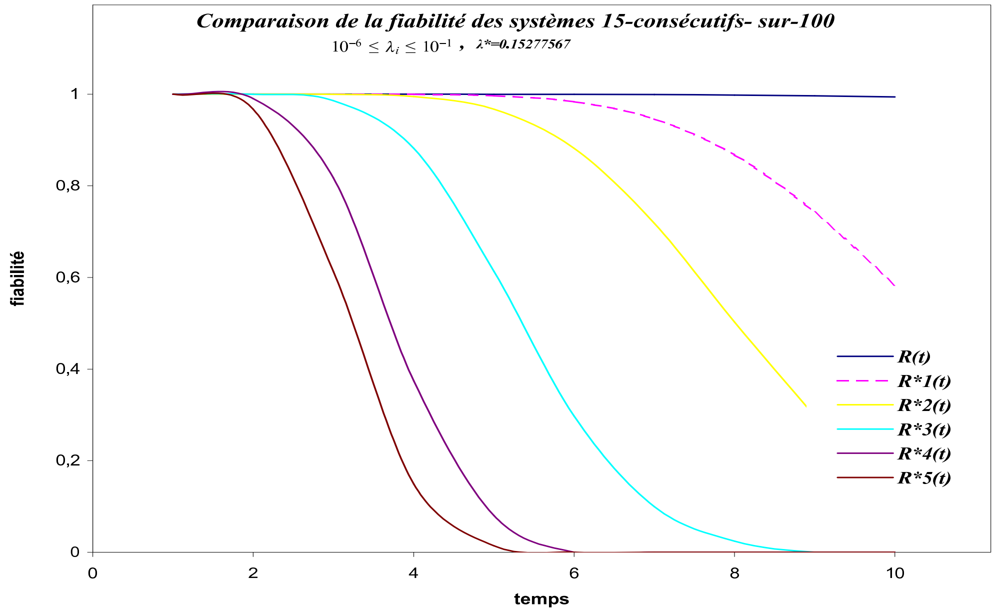

Figure 6

Commentaire :

Le commentaire concernant système $15 - consecutifs - sur - 100$ qui ne tombe jamais en panne (comme le système que tu défends), il serait utile de le garde juste pour dire que nous ne tombons jamais en contradiction, par rapport à ce qui a été affirmé, même dans les cas triviaux, qui peuvent être vus comme des cas limites.

Commentaire général :

D'après les graphes, on confirme $R^*(t)$ n'est rien d' autre que la meilleure **borne infèrieure** de la fiabilité du système. S'agissant ainsi d'un système moins fiable que notre système initial, nous sommes assurés, et c'est fondamental dans notre démarche et notre problématique, d'être toujours dans des politiques de maintenance réellement préventives, puisque toujours anticipatives, par définition même d'un système moins fiable.

Conclusion

Notre travail est une étude comparative des fiabilités des systèmes cohérents non réparables dont les composants sont indépendants mais non identiquement distribués et leurs équivalents dans le cas identiques respectivement. L'idée est de trouver une condition nécessaire et suffisante pour établir cette comparaison stochastique. Cette étude a été consacrée entièrement à deux types de systèmes à savoir les systèmes $k - sur - n$ et les systèmes $k - consécutifs - sur - n$. Pour le premier, on a présenté le travail de J.L. Bon et E. Paltanea où une condition nécessaire et suffisante a été établie et démontrée en exploitant la propriété de symétrie de la fiabilité de ces systèmes. Pour les systèmes $k - consécutifs - sur - n$, notre contribution a été l'établissement d'une condition nécessaire pour l'existence d'un ordre stochastique entre la durée de vie du système dans le cas i.i.d. et le même système dans le cas indépendant mais non identique. Malheureusement, on n' a pas pu établir la condition suffisante, vu que la fiabilité de notre système est non symétrique. En outre, des simulations ont été comparées avec celles du système $k - sur - n$ et on a remarqué que les systèmes $k - sur - n$ étant moins fiable que les systèmes $k - consécutifs - sur - n$, il est rassurant de constater à chaque fois que la courbe $R^*(t)$ du système $k - consécutifs - sur - n$ est dessus de $R(t)$ du système $k - sur - n$, et la méthode proposée s'avère un peu plus efficace sur les systèmes $k - sur - n$, on a vu ainsi que souvent les courbes $R(t)$ et $R^*(t)$ se confondaient presque pour ce type de systèmes, mais rien n'empêche à priori d'obtenir d'aussi bon résultats pour les systèmes $k - consécutifs - sur - n$ à condition peut être de sortir des valeurs presque triviales (k trop petit ou trop grand par rapport à n).
La démonstration de la condition suffisante reste un problème ouvert.

Bibliographie

[1] **A.Aissani.** Modèle Stochastique de la Théorie de Fiabilité, Office des publications universitaire 11-1992.

[2] **P.J.Bickel and E.L. Lehmann**. Descriptive statistics for nonparametric models I, Introduction, The Annals of Statistics 3, 1038–1044, 1975.

[3] **Z.W.Birnbaum.** On random variables with comparable peakedness, The Annals of Mathematical Statistics 19, 76–81, 1948.

[4] **J.L.Bon.** Fiabilité des systèmes - Méthodes Mathématiques, Masson, Paris, 1995.

[5] **J.L.Bon and E.Paltanea.** Comparison of Order Statistics in a Random Sequence to the Same Statistics with IID Variables, Academic ,

[6] **A.BUŠIĆ** Comparaison stochastique de modèles markoviens, thèse de doctorat, Université de Versailles Stain-Quentin, soutenue le 16 juillet 2007,

[7] **D.T.Chiang and S.C.Niu.** Reliability of Consecutive-k-out-ofn :F System, IEEE Trans Reliab ;R-30 :87–9, 1981.

[8] **Christiane Cocozza-Thivent.** Processus Stochastique et Fiabilité, Springer, 1997.

[9] **P.Hoang**. Handbook of Reliability Engineering, Ed Springer, 2003.

[10] **F.K.Hwang.** Fast Solutions for Consecutive-k-out-of-n :F System, IEEE Trans Reliab ; R-31 :447–8, 1982.

[11] **W.Kuo-M.J.Zuo.** Optimal reliability, John Willy and sons, 2003.

[12] **E.L.Lehmann.** Ordered Families of Distributions, The Annals of Mathematical Statistics 26, 399–419, 1955.

[13] **H.B.Mann and D.R. Whitney.**On a test of Whether One of Two Random Variables is Stochastically Larger than the other, The Annals of Mathematical Statistics 18, 50–60, 1947.

[14] **K.B.Misra.** Reliability Analysis end Prediction, Elsivier Amestrdam-Oxford-Newyork-Tokyo, 1992.

[15] **A.Muller and D.Stoyan.** Comparison Methods for Stochastic Models and Risks, New York, NY, 2002.

[16] **M.Shaked and J.G.Shanthikumar.** Stochastic Orders, Springer, 2007.

[17] **J.G.Shanthikumar.** Recursive Algorithm to Evaluate the Reliability of a Consecutive-k-out-of-n :F system, IEEE Trans Reliab ; R-31 :442–3, 1982.

[18] **D.Stoyan.** Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models, Wiley, 1983.

[19] **B.Ycart.** Notion de Fiabilité et Files d'Attente, Centre de publication universitaire, Tunis, 2004.

[20] **W.R.Zwet Van.** Convex Transformations of Random Variables, Amsterdam, The Netherlands : Mathematisch Centrum, 1964.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons présenté une condition nécessaire et suffisante pour comparer la fiabilité du système-k-sur-n dans le cas indépendant non identique à son équivalent dans le cas iid. Une condition nécessaire est établie dans le cas d'un système $k - consécutifs - sur - n$. *Par des simulations, on montre que notre condition reste suffisante.*

Mots Clés : *Comparaison Stochastique, Fiabilité, Système* $k - sur - n$, *Système* $k - consécutifs - sur - n$.

Abstract

In this paper, we presented a necessary and sufficient condition to compare the reliability of k-out-of-n system in the independent non-identical case to its equivalent in the iid case. A necessary condition is established in the case of a consecutive-k-out-of-n. Through simulations, we show that our condition is sufficient.

Keywords : *Stochastic Comparison, Reliability, k-out-of-n system, Consecutive-k-out-of-n system.*

<u>ملخــــــــــص:</u>

في هذا العمل قدمنا شرط لازم وكافي لمقارنة موثوقية النظام ك-من بين-ن ذي المكونات المستقلة و الغير المتطابقة و ما يعادله في حالة المكونات المستقلة و المتطابقة. الشرط اللازم قد حقق في حالة نظام ك-متتالية- من بين – ن . و من خلال المحاكاة بينا أن شرطنا يبقى كافي.

<u>الكلمات المفاتيح</u>: *المقارنة العشوائية، الموثوقية، نظام ك-من بين-ن، نظام ك-متتالية- من بين – ن.*