

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mentouri –Constantine
Faculté des Sciences Exactes
Département de mathématiques

N° d'ordre :269/Mag/2011

N° Série :015/Mat/2011

Mémoire De Magistère En Mathématiques

Option : Probabilité et Statistique

Sujet :

Application des ondelettes à l'analyse des séries chronologiques.

Présenté par : DOUAS RYMA

Devant le jury composé de :

Présidente : S.BOUGHABA MC U.Mentouri Constantine

Rapporteur : M.Bousseboua M.C U.Mentouri Constantine

Examineur : A.BENNIA Prof U.Mentouri Constantine

Examineur : A.BIBI Prof U.Mentouri Constantine

Soutenu le ../../2011

Remerciements

J'aimerais bien remercier en particulier mon encadreur Mr.BOUSSEBOUA Maitre de conférence à l'université Mentouri de Constantine pour avoir dirigé ce travail, pour son aide, ses conseils, ses encouragements, sa grande disponibilité et son ouverture d'esprit qui m'ont aidé à mener bien ce travail.

Je tiens à remercier vivement Melle S.BOUGHABA Maitre de conférence à l'université Mentouri de Constantine qui me fait l'honneur de présider le jury de soutenance.

J'adresse mes remerciements les plus chaleureuses à Mr. A.BIBI Professeur à l'université Mentouri de Constantine, Mr. A.BENNIA Professeur à l'université Mentouri de Constantine qui ont accepté de faire partie du jury de ce travail.

Je ne voudrais pas oublier, tous ceux et celles qui au long de ce travail m'ont soutenu moralement, sans les nommer explicitement car la liste serait longue, je les remercie de leurs encouragements.

« Wavelets and their applications to time series »

Summary: This theme is the study of wavelets and their applications to the statistical analysis of stationary time series and non-stationary. Wavelets provide an interesting mathematical tool to address some deficiencies encountered in the conventional Fourier analysis. After a brief review on Fourier transforms, wavelets are introduced and their evolution over the last 03 decades. It addresses the essential theme of this work involves the application of wavelet time series and especially to the class of long memory process.

This work includes the following:

- 1-The Fourier transform and its applications in time series.
- 2-Introduction to Wavelets: history and correct application of Fourier transformation.
- 3-Applications of wavelet stationary ARMA processes and long memory process with a fractional Brownian motion model.
- 4-Simulation of the three samples of an AR (1) and the comparison of the classical periodogram wavelet periodogram after the Gaussian wavelet.

Key words: long-memory process, wavelets.

Table des matières

0	L'analyse de FOURIER	9
0.1	Transformée de Fourier	10
0.1.1	La transformée de Fourier de fonctions périodiques	10
0.1.2	La transformation de Fourier	14
0.2	Analyse spectrale des processus stationnaires	23
0.2.1	Définitions et propriétés	23
0.2.2	Représentation spectrale de la fonction de covariance	24
0.2.3	Processus à spectre rationnel (les processus $\mathcal{ARMA}$)	26
0.2.4	Représentation spectrale de processus stationnaire au second ordre.	27
1	La transformée de Fourier à fenêtre glissante	31
1.1	La transformée de Fourier à fenêtre glissante	32
1.1.1	Transformée de Fourier à fenêtre glissante	33
1.2	Transformée de Gabor des processus stationnaires	39
2	Transformation en ondelettes continue	41
2.1	Analyse temps - échelle	42
2.2	Analyse multirésolution et base d'ondelettes	47
3	Applications des ondelettes aux séries chronologiques	55
3.1	Application des ondelettes aux séries chronologiques stationnaires . .	56

3.1.1	Le spectre d'ondelettes	56
3.1.2	Transformée en ondelettes discrètes et propriétés asymptotiques	61
3.2	Application des ondelettes aux séries chronologiques non stationnaires	70
3.2.1	La transformation en ondelettes de séries chronologiques à accroissements stationnaires	70
3.2.2	Application au mouvement brownien fractionnaire	73
3.3	Application	77

Introduction

Le thème de ce mémoire porte sur la transformation en ondelettes continues avec pour principal objectif son application à l'analyse statistique des séries chronologiques stationnaires au second ordre et aux séries chronologiques non stationnaires à accroissements stationnaires. Ce dernier cas est illustré par l'étude du mouvement brownien fractionnaire.

L'analyse par ondelettes a été introduite il y a plusieurs décades, d'abord dans un contexte d'exploration pétrolière par D. Gabor [1945] et plus récemment dans un contexte d'analyse du signal par J. Morlet dans les années [1980], et ce pour faire apparaître simultanément des informations temporelles et fréquentielles, facilitant par là l'identification des caractéristiques physiques de la source du signal. D'autres pionniers versés dans des domaines de recherches fort différents, utilisaient eux aussi et à la même époque, des outils fort semblables aux petites ondes de Morlet.

Les ondelettes n'ont depuis lors cessé de se développer et de trouver de nouveaux champs d'application dont tout récemment en statistique. Elles devinrent très rapidement un puissant outil d'analyse mathématique et de traitement du signal. C'est dans ce domaine, privilégié jusque là à l'analyse de Fourier, que les ondelettes ont connu un essor fulgurant et aussi d'innombrables applications.

Dans ce registre, les ondelettes constituent une bonne alternative à la transformée de Fourier dont les limites avérées rendent caduc son application dans certaines situations. Tel est le cas si la série n'est pas stationnaire au second ordre ou au mieux son spectre possède certaines singularités. Dans de telles situations, la transformée de Fourier seule ne peut rendre parfaitement compte des caractéristiques du signal. Une autre limitation importante de la transformée de Fourier est son incapacité de localiser les portions du signal à variations rapides (ce qui correspond à des hautes fréquences), ni celles où elles sont lentes (ce qui correspond à des basses fréquences).

Une première application des ondelettes et qui peut apparaître aujourd'hui

rudimentaire est la transformée de Fourier à fenêtre glissante, appelée transformée de Gabor continue. Initiée par ce dernier, elle consiste à multiplier le signal par une fonction de localisation du temps appelée fenêtre et qu'il fait coulisser ensuite le long de la droite réelle, de sorte que la transformée de Fourier d'un signal f par rapport à cette fenêtre soit elle aussi bien localisée. La transformée de Fourier à fenêtre est une fonction de deux variables (temps, fréquence) et fournit une représentation relativement bien localisé du signal dans le plan temps - fréquence. La précision de cette localisation en temps et fréquence est cependant loin d'être aussi parfaite que l'on souhaite. Il s'avère que cette précision en temps et en fréquence simultanément est minorée par la fameuse inégalité due au principe d'incertitude de Heisenberg. Cette limitation exprime qu'une bonne localisation en temps correspond à une moins bonne localisation en fréquence et inversement.

En revanche, l'analyse par ondelettes basée sur le concept d'échelle au lieu du concept de fréquence, est caractérisée par l'utilisation d'ondelettes élémentaires : copies conformes d'une ondelette mère et ne diffèrent que par leur taille, s'adaptent parfaitement bien et automatiquement à la forme et à la taille des caractéristiques qu'elle recherche. Cette procédure qualifiée de microscope mathématique porte le nom d'analyse multirésolution, véritable clé de voûte de l'analyse par ondelettes. Celle-ci consiste à construire une ondelette de base ou ondelette mère de sorte que les ondelettes élémentaires déduites par des translations et des dilatations forment une base de l'espace $L^2(\mathbb{R})$ et permet donc de décomposer toute fonction ou signal de carré intégrable dans cette base.

Comme préambule à l'introduction des ondelettes et afin de saisir et apprécier toutes leurs portées, une synthèse sur la transformée de Fourier des fonctions intégrables nous a semblé nécessaire. Celle ci fait l'objet du premier chapitre qui consacre en outre un paragraphe à quelques notions rudimentaires de l'analyse spectrale des processus stationnaires au second ordre. Les insuffisances de la transformée de Fourier et suivant l'ordre chronologique ayant aboutit aux ondelettes, nous a conduit à

envisager dans un second chapitre l'étude de la transformée de Fourier à fenêtre glissante (ou transformée de Gabor continue) et ce pour corriger le caractère globale et les insuffisances de la transformée de Fourier. Une application de la transformée de Fourier à fenêtre aux séries chronologiques stationnaires en utilisant la transformée de Cramer clôt ce chapitre. Là également, mettant le doigt sur les insuffisances de la transformée de Gabor continue : largeur constante de la fenêtre et limitation de la précision due à la fameuse inégalité de Eisenberg, fait que nous entreprenons dans le troisième chapitre, une étude approfondue de la transformée en ondelettes continue, suivi dans un second paragraphe de l'analyse multirésolution en suivant l'approche de Y. Meyer ([MEY89]) et S. Mallat ([MAL89]). Enfin, un cinquième chapitre dédié aux applications des ondelettes à l'analyse statistique des séries chronologiques stationnaires et non stationnaires à accroissements stationnaires avec pour illustration le mouvement brownien fractionnaire. Composé de deux paragraphes, le premier traite d'une adaptation du périodogramme usuel au périodogramme en ondelettes. Outre, la construction de l'estimateur empirique du périodogramme en ondelettes et suivant l'approche de [CCM97], une étude de ses propriétés asymptotiques notamment de consistance et de distribution asymptotique est accomplie. Le second paragraphe porte sur une application des ondelettes aux séries chronologiques non stationnaires mais à accroissements stationnaires. Nous basant sur un article de Masry [MAS93], on dégage les propriétés du second ordre et l'analyse spectrale de la transformée en ondelettes continues d'un processus à accroissements stationnaires et que nous appliquons ensuite au mouvement brownien fractionnaire et au bruit blanc fractionnaire. Enfin quelques applications sur des données simulées étoffent cette étude. Dans cette application, on a simulé trois échantillons d'un processus $\mathcal{AR}(1)$ causale et on a comparé le périodogramme classique (celui du processus $\mathcal{AR}(1)$) au périodogramme d'ondelettes issue de l'ondelette gaussienne.

Chapitre 0

L'analyse de FOURIER

Introduite par J. Fourier dès le début du 19-ème siècle et raffermie un peu plus tard par les contributions de Dirichlet, la transformation de Fourier est devenu sans conteste un des outils mathématiques les plus puissants. L'analyse de Fourier véhicule l'idée majeure selon laquelle toute fonction peut être décrite comme une superposition de fonctions périodiques. Il convient cependant de distinguer deux points de vue : celui qui consiste à concevoir les phénomènes comme s'évanouissant à l'infini et celui qui consiste à les imaginer se reproduisant à l'infini de manière périodique : le phénomène est reproduit périodiquement de sorte à générer un signal sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{Z}$. Ces deux points de vue doivent être dissociés, car un phénomène périodique ne saurait s'évanouir à l'infini ! La première implique l'utilisation de la transformation de Fourier, le second les concepts de séries de Fourier et d'harmoniques fondamentales. Cependant, l'analyse de Fourier s'est avérée et très souvent inadaptée à la description de certaines fonctions (ou signaux) que l'on peut rencontrer couramment. La raison essentielle en est que l'analyse de Fourier atteint ses performances optimales dans un contexte stationnaire. Or, on atteint rapidement les limites de ces hypothèses. Dans ce chapitre, nous reprenons succinctement dans le paragraphe 1, deux versions de la transformation de Fourier, celle des fonctions ou signaux périodiques et celle des fonctions ou signaux de puissance $p^{ième}$ intégrables avec ($p = 1, 2$). Le deuxième paragraphe, expose de façon concise l'analyse spectrale

des processus stochastiques (ou signaux aléatoires) stationnaires.

0.1 Transformée de Fourier

Le cadre idéal de la transformée de Fourier est l'espace fonctionnel des suites réelles ou complexes absolument sommables ou des fonctions réelles ou complexes de carré absolument intégrables. On note l^1 (resp. L^2) l'espace des suites complexes absolument sommables (resp. des fonctions réelles ou complexes de carré absolument intégrables¹). En théorie des communications, le support de l'information est appelé signal. En général, un signal est représenté par une suite ou une fonction et le signal est dit numérique ou analogique selon que f est une suite ou une fonction réelle ou complexe. Dans ce bref rappel, nous ferons l'économie du développement de la transformée de Fourier des suites absolument sommables (appelée transformée discrète). Pour un développement de la transformation de Fourier discrète, nous suggérons le cours de Torrèsani 1997 [TOR97] ou l'ouvrage de Gasquet et Witomski 1998 [GAS98]. Nous rappelons dans ce premier paragraphe et de façon succincte la transformée de Fourier des fonctions périodiques et de fonctions non périodiques de l'espace $L^1(\mathbb{R})$ des fonctions absolument intégrable et son extension ensuite à l'espace $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions de module de carré intégrables.

0.1.1 La transformée de Fourier de fonctions périodiques

Le support d'une fonction (resp. signal) f est la fermeture de l'ensemble des réels sur lesquels la fonction (resp. le signal) est non nul. On le note $\text{supp}(f) = \overline{\{t \in \mathbb{R} : f(t) \neq 0\}}$. Une fonction f (resp. un signal) est périodique s'il existe un nombre réel strictement positif τ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x + \tau) = f(x)$. Le résultat essentiel de l'analyse de Fourier est que toute fonction périodique f se décompose en une combinaison linéaire infinie de sinusoides.

¹En fait, L^2 est l'espace des classes d'équivalence de fonctions de carré absolument intégrables : $g \in \hat{f} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f - g|^2(x) dx = 0$.

Polynômes trigonométriques

Définition 1 On appelle polynôme trigonométrique de degré n et de période τ un polynôme de la forme

$$S(x) = \sum_{k=-n}^n c_k \exp(ik\omega x)$$

ou les coefficients c_k sont des nombres complexes et $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$.

En décomposant l'exponentielle complexe en sinus et cosinus, cette somme s'écrit encore

$$S_n(x) = c_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x))$$

ou $a_k = c_k + c_{-k}$ et $b_k = i(c_k - c_{-k})$.

L'espace Γ_n des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n , muni du produit scalaire de l'espace $L^2([0, \tau])$ est un sous espace de Hilbert. On rappelle que le produit scalaire de deux fonctions f et g de $L^2([0, \tau])$ est défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\tau f(x) \overline{g(x)} dx$$

et auquel on associe la norme $\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle$ dans $L^2([0, \tau])$. En outre, la suite des fonctions $(\delta_k : -n \leq k \leq n)$ définie par $\delta_{n,k}(x) = e^{ik\omega x}$ forme une base orthonormale de Γ_n . Il apparaît alors que les coefficients c_k d'un polynôme trigonométrique S_n se déduisent facilement par la relation classique

$$c_k = \frac{1}{\tau} \langle S_n, \delta_{n,k} \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau S_n(x) e^{-ik\omega x} dx.$$

L'expression des coefficients a_k et b_k s'en déduisent.

Remarques :

L'intégrale définissant c_n peut en fait être prise sur tout intervalle de longueur τ .

Par exemple, sur l'intervalle $[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}]$, on a

1. si S_n est paire $c_{-k} = c_k$ pour tout k et ceci fait que $b_k = 0$
2. si S_n est impaire $c_{-k} = -c_k$ pour tout k et donc $a_k = 0$

3. Egalité de parseval :

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau |S_n(x)|^2 dx = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

et ceci résulte de l'identité

$$\|S_n\|_2^2 = \sum_{k=-n}^n \sum_{l=-n}^n c_k \overline{c_l} \langle \delta_{n,k}, \delta_{n,l} \rangle$$

et de ce que $\langle \delta_{n,k}, \delta_{n,l} \rangle = \delta_k^l$ où δ_k^l est le symbole de Kronecker.

Séries de Fourier

On note $L_\tau^2([0, \tau])$ l'espace des fonctions complexes périodiques, de période τ et de carré absolument intégrables. Cet espace contient l'espace des polynômes trigonométriques Γ_n de degré inférieur ou égale à n . On montre que la suite $\{\Gamma_n : n \geq 1\}$ des espaces des polynômes de degré inférieur ou égale à n est dense dans l'espace $L_\tau^2([0, \tau])$. Ceci permet d'approcher pour n grand, toute fonction $f \in L_\tau^2([0, \tau])$ par un polynôme $S_n \in \Gamma_n$. De façon précise on a

Proposition 1 *Pour toute fonction $f \in L_\tau^2([0, \tau])$, il existe un unique polynôme trigonométrique Σ_n dans Γ_n tel que :*

$$\|f - \Sigma_n\|_2 = \min\{\|f - S_n\|_2, S_n \in \Gamma_n\}$$

Ce polynôme est de la forme

$$\Sigma_n = \sum_{k=-n}^n c_k(f) \delta_{n,k}(x)$$

avec

$$c_k(f) = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(x) \overline{\delta_{n,k}(x)} dx.$$

De plus, on a (inégalité de Bessel)

$$\sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{\tau} \|f\|_2^2$$

Démonstration

On cherche un polynôme trigonométrique Σ_n de sorte que la distance $\|f - S_n\|$ soit minimum. Il s'agit en fait de minimiser cette expression par rapport aux coefficients c_k . Un calcul simple montre que

$$\|f - S_n\|^2 = (\|f\|^2 - \frac{1}{\tau} \sum_{k=-n}^n |d_k|^2) + \sum_{k=-n}^n |\sqrt{\tau}c_k - \frac{d_k}{\sqrt{\tau}}|^2$$

où $d_k = \langle f, \delta_{k,n} \rangle$. Les termes entre parenthèse sont indépendants des coefficients c_k recherchés, et donc minimiser $\|f - S_n\|$ revient à minimiser la deuxième somme par rapport aux coefficients c_k . Et cette somme est minimale si et seulement si

$$c_k(f) = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(x) e^{-\frac{i2k\pi x}{\tau}} dx.$$

Et donc le polynôme trigonométrique Σ_n est de la forme

$$\Sigma_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{\frac{i2k\pi x}{\tau}}.$$

Quant à l'inégalité de Bessel, celle-ci découle directement de la relation

$$\|f - \Sigma_n\|^2 = \|f\|^2 - \tau \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2$$

■

Théorème 1 La famille de fonctions $(\delta_n : n \in \mathbb{Z})$ de terme général $\delta_n(x) = e^{i\frac{2n\pi x}{\tau}}$ est une base orthonormée de $L_p^2([0, \tau])$ et pour tout $f \in L_p^2([0, t])$ on a :

$$\|f - \Sigma_n\|^2 = \tau \sum_{|k| > n} |c_k(f)|^2 \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow +\infty$. De plus, la formule de Parseval s'écrit pour tout f et $g \in L_p^2([0, t])$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) \cdot \overline{c_n(g)} = \frac{1}{\tau} \langle f, g \rangle.$$

Démonstration

Il est facile de vérifier que la suite $(\delta_n : n \in \mathbb{Z})$ est un système orthonormal de $L_p^2([0, \tau])$. L'orthogonalité assure que l'équation $\sum_{n \geq 1} \alpha_n \delta_n = 0$ n'est possible que si

tous les coefficients α_n sont tous nuls. De plus, on montre (cf. [TOR97]) que la suite $(\delta_n : n \in \mathbb{Z})$ est dense dans $L_p^2([0, t])$ ce qui fait de cette suite est une base orthonormale de cet espace. ■

Définition 2 *Etant donné $f \in L_p^2([0, \tau])$, la limite dans $L_p^2([0, \tau])$ de la suite de fonctions trigonométriques Σ_n définie dans le théorème ci-dessus, est appelée série de Fourier de f . Cette limite coïncide presque partout avec la fonction f et on écrit*

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) \delta_n.$$

Enfin nous terminons ce sous paragraphe par le résultat suivant :

Théorème 2 (théorème de Dirichlet)

Si f est une fonction périodique de période τ et si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ alors la série de Fourier associée à f est convergente sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\frac{1}{2}(f(x_-) + f(x_+)) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

et si de plus f est continue, alors on a :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

Pour la démonstration nous renvoyons aux références citées ci-dessus.

0.1.2 La transformation de Fourier

La transformation en série de Fourier d'une fonction périodique permet de passer d'une représentation temporelle à une représentation fréquentielle. Les applications de cette transformation s'étendent à divers domaines et notamment dans le traitement du signal. Mais de par la catégorie restreinte de fonctions auxquelles elle s'applique, cette décomposition en séries de Fourier est très limitée. En effet, peu de signaux naturels remplissent la condition d'être périodique. Aussi, nous étudions

maintenant la version de la transformation de Fourier des fonctions réelles ou complexes définies sur $\mathbb{R}$.

Définition 3 Soit f une fonction de la variable réelle. On appelle transformée de Fourier de la fonction f , la fonction $\hat{f}$ de la variable réelle ω définie par :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt$$

pour toute valeur de ω pour laquelle cette intégrale est convergente.

La convergence de cette intégrale est loin d'être un fait acquis dans nombre de situations. Aussi, est il nécessaire de considérer l'espace des fonctions de puissance absolument intégrables. Toutefois, il est possible de construire une théorie pour la transformation de Fourier même dans la situation où $\hat{f}(\omega)$ n'est pas définie pour tout ω .

La transformation de Fourier des fonctions intégrables

On commence par définir la transformation de Fourier sur l'espace $L^1(\mathbb{R})$ des fonctions absolument intégrables et ensuite, on prolongera cette définition aux fonctions de module de carré intégrables.

On rappelle que l'espace des fonctions absolument intégrables noté $L^1(\mathbb{R})$ ² est défini par

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty.$$

Aussi, si f est absolument intégrable, alors la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f est bien définie en tout point ω de $\mathbb{R}$ et de plus elle est bornée.

On note $\|f\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$.

² $L^1(\mathbb{R})$ est l'espace des classes d'équivalence de fonctions absolument intégrables : $g \in \hat{f} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f - g|(x) dx = 0$.

Propriétés

Il est aisé de vérifier que la transformée de Fourier des fonctions absolument intégrables est linéaire et hermitienne (i.e. $\widehat{f}(-x) = \overline{\widehat{f}(x)}$). Par ailleurs, pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, le modulé g de f défini par $g(x) = f(x - b)$ où b est un nombre réel, a pour transformée de Fourier

$$\widehat{g}(\omega) = e^{i\omega b} \widehat{f}(\omega)$$

et la dilatée f_a de f définie par $f_a(x) = f(\frac{x}{a})$ où a est un nombre réel non nul, a pour transformée de Fourier

$$\widehat{f_a}(\omega) = a \widehat{f}(a\omega).$$

Le théorème de Riemann-Lebesgue

Théorème 3 Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est uniformément continue et nulle à l'infini (i.e. $\widehat{f}(\omega)$ tend vers 0 quand ω tend vers ∞).

Démonstration

La continuité uniforme vient de ce que pour tout $\delta > 0$, on a

$$|\widehat{f}(\omega + \delta) - \widehat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-i\delta\omega} - 1| |f(x)| d\omega \leq 2 \|f(\omega)\|$$

et aussi de ce que

$$|e^{-i\delta\omega} - 1| \rightarrow 0 \text{ quand } \delta \rightarrow 0,$$

d'où il résulte ensuite du théorème de la convergence dominée que

$$\sup_{\omega} |\widehat{f}(\omega + \delta) - \widehat{f}(\omega)| \rightarrow 0 \text{ lorsque } \delta \rightarrow 0.$$

Concernant la nullité de la transformée de Fourier $\widehat{f}$ à l'infini, ce résultat est satisfait pour les fonctions simples, car la transformée de Fourier d'une indicatrice $1_{[a,b]}$ satisfait l'inégalité

$$|\widehat{f}(\omega)| \leq \frac{b-a}{|\omega|} \text{ pour } \omega \neq 0$$

la linéarité de la transformée de Fourier confirme le résultat pour la classe des fonctions simples et la densité ensuite de cette classe dans $L^1(\mathbb{R})$ permet de déduire le théorème pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$. ■

Dérivabilité

Ci-dessous on donne quelques résultats sur la dérivabilité de la transformation de Fourier.

Soit f une fonction absolument intégrable.

1. Si f est presque partout dérivable et de fonction dérivée absolument intégrable, alors sa fonction dérivée f' a pour transformée de Fourier $\widehat{f}'(\omega) = i\omega\widehat{f}(\omega)$.
2. Si la fonction $x \rightarrow xf(x)$ est absolument intégrable, alors la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f est continûment dérivable et a pour fonction dérivée la limite lorsque δ tend vers 0 de la fonction

$$\omega \mapsto \widehat{f}'(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} -ixf(x) \frac{\sin(\frac{\delta x}{2})}{\frac{\delta}{2}} e^{-i\frac{\delta x}{2}} e^{-i\omega x} dx$$

Inversion

Le théorème d'inversion est la version du théorème de Dirichlet pour les fonctions absolument intégrables.

Théorème 4 *Soit f une fonction absolument intégrable. Si sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est intégrable et si f est continue en x_0 alors on a*

$$f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega x_0} d\omega$$

Pour la démonstration, on a besoin du résultat suivant (dit lemme d'échange).

Lemme 1 *Si f et g sont deux fonctions absolument intégrables, alors on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\widehat{g}(\omega)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)g(x)dx \quad (1)$$

Démonstration

Puque f et g sont intégrables, leur transformée de Fourier $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$ sont bornées, ce qui fait que les produits $f\widehat{g}$ et $\widehat{f}g$ sont intégrables. Une application ensuite du théorème de Fubini à l'une de ces intégrales, par exemple à l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\widehat{g}(\omega)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(y)e^{-iy\omega} dydx$$

permet de déduire le résultat en intégrant par rapport à la variable x . ■

Retournons à la démonstration du théorème.

Démonstration

Pour tout entier $n > 0$, la fonction $g_n(x) = e^{-\frac{|x|}{n}}$ et sa transformée de Fourier $\widehat{g}_n(\omega) = \frac{2n}{1+n^2\omega^2}$ sont absolument intégrables et l'on déduit alors en utilisant la relation (1.1) que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) g_n(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \widehat{g}_n(u-x) du \quad (2)$$

L'intégrant de la première intégrale est le terme d'une suite de fonctions convergente et majorée en module par $|\widehat{f}(\omega)|$ intégrable, il s'ensuit alors en appliquant le théorème de la convergence dominée que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) g_n(\omega) e^{i\omega x} d\omega = f(x).$$

Il s'agit alors de montrer que l'intégrale du second membre de l'équation (0.2) converge elle aussi vers $f(x)$ en tout point de continuité x de f . En remarquant que $\widehat{g}_n(\omega)$ est intégrable et d'intégrale 2π , fait que l'on peut écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \widehat{g}_n(u-x) du - 2\pi f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(\omega+x) - f(x)) \widehat{g}_n(\omega) d\omega$$

D'autre part, la continuité de f en un point x , fait que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|f(y) - f(x)| \leq \epsilon$, dès que $y \in]x-\eta, x+\eta[$. Aussi, la seconde intégrale peut être réécrite sous la forme

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(\omega+x) - f(x)) \widehat{g}_n(\omega) d\omega &= \int_{\{|\omega| \leq \eta\}} (f(\omega+x) - f(x)) \widehat{g}_n(\omega) d\omega \\ &+ \int_{\{|\omega| > \eta\}} (f(\omega+x) - f(x)) \widehat{g}_n(\omega) d\omega \end{aligned}$$

Il est facile de voir en appliquant le théorème de la convergence monotone que la première intégrale du second membre tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. Et quant à la seconde intégrale, on a en majorant d'abord $|f(\omega+x) - f(x)| \leq |f(\omega+x)| + |f(x)|$, on a pour le premier terme qui en découle, que

$$|f(x)| \int_{\{|\omega| > \eta\}} \widehat{g}_n(\omega) d\omega = |f(x)| (2\pi - 4 \arctan(n\eta))$$

et quant au second terme, vue que $\widehat{g}_n$ est paire et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\int_{\{|\omega|>\eta\}} |f(\omega+x)| \widehat{g}_n(\omega) d\omega \leq \widehat{g}_n(\eta) \|f\|_1$$

Et passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\{|\omega|>\eta\}} (f(\omega+x) - f(x)) \widehat{g}_n(\omega) d\omega = 0$$

d'où le résultat. ■

Définition 4 Soient f et g deux fonctions absolument intégrables. On appelle produit de convolution de f et g , la fonction notée $f * g$ définie par

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$$

Théorème 5 Si f et $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors le produit de convolution $f * g$ est absolument intégrable et sa transformée de Fourier

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$$

Démonstration

Le produit de convolution est bornée et l'intégralité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(f * g)(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| \cdot |g(x-y)| dx dy \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

montre que le produit de convolution est absolument intégrable. Aussi, la transformée de Fourier de $f * g$ s'écrit

$$\widehat{f * g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(t)g(x-t) dx dt$$

d'où en appliquant ensuite le théorème de Fubini, le résultat énoncé en découle. ■

Proposition 2 Si f et $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ où $\widehat{g}$ est la transformée de Fourier de g alors on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\omega} f(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi} \widehat{f} * \widehat{g}$$

Démonstration

La transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f et la transformée de Fourier inverse g de $\widehat{g}$ sont bornées, ce qui fait que les produits $f.g$ et $\widehat{f}\widehat{g}$ sont intégrables. Et par suite

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\omega} f(t)g(t)dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\widehat{g}(\omega)d\omega dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it(\omega-\zeta)} f(t)\widehat{g}(\zeta)d\zeta dt\end{aligned}$$

et moyennnant le changement de variable $\xi = \omega - \zeta$, cette intégrale revêt la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\omega} f(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(\xi)\widehat{f}(\omega - \xi)d\xi$$

et montre que la transformée de Fourier du produit est à une constante près le produit de convolution de leur transformée de Fourier. ■

Les fonctions de carré intégrables

On dit qu'une fonction f est de carré intégrable si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

On note $L^2(\mathbb{R})$ ³ l'espace des fonctions de carré intégrables. Une fonction de carré intégrable n'est pas nécessairement absolument intégrable. En effet, rien n'autorise à croire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ est convergente. Cependant, si une fonction de carré intégrable est aussi absolument intégrable, alors la transformée de Fourier d'une telle fonction est bien définie et contrairement aux fonctions absolument intégrables, la transformée de Fourier d'une fonction de carré intégrable est bien définie en tout point ω de $\mathbb{R}$. Il s'agit d'identifier le sous espace des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ qui soit contenu dans $L^1(\mathbb{R})$ afin de pouvoir prolonger la transformée de Fourier de $L^1(\mathbb{R})$ à ce sous espace de $L^2(\mathbb{R})$. A cette fin, nous suivons l'approche consignée dans [TOR97].

³ $L^2(\mathbb{R})$ est l'espace des classes d'équivalence de fonctions de carré intégrables : $g \in \widehat{f} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f - g|^2(x)dx = 0$.

La transformation de Fourier dans l'espace de Schwartz

Définition 5 (fonctions à décroissance rapide)

Une fonction continue f est dite à décroissance rapide si pour tout entier positif k , il existe une constante positive α_k telle que l'on ait

$$|f(t)| \leq \frac{\alpha_k}{|t^k|}$$

Définition 6 On appelle espace de Schwartz, le sous espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ tel que pour tout entier non négatif n , la fonction $f^{(n)}$ est à décroissance rapide. On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace de Schwartz.

Proposition 3 L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un sous espace dense de $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors il existe une constante positive α telle que

$$|f(t)| \leq \frac{\alpha}{1+t^2}.$$

Par suite,

$$\|f(t)\|^2 \leq \alpha^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt < +\infty,$$

ce qui montre que f est dans $L^2(\mathbb{R})$. Concernant la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, celle ci vient de la densité dans $L^2(\mathbb{R})$ du sous espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support bornée et du fait que cet espace est contenu dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. ■

Propriétés de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

1. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors pour tout polynôme p , la fonction $p.f$ est elle aussi une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
2. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
3. $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$
4. La transformé de Fourier $\hat{f}$ d'une fonction f de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est elle aussi une fonction de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Théorème 6 La transformation de Fourier est une isométrie bijective de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans lui même.

Démonstration On déduit en utilisant la formule de reconstruction que la transformation Φ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans lui même associant à chaque fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sa transformée de Fourier, est un automorphisme de cet espace. En outre, la formule de Parseval montre que Φ conserve le produit scalaire. ■ La définition de la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ se déduit maintenant en utilisant la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Et bien sûr si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ les deux définitions de la transformée de Fourier coïncident. On a le résultat suivant (cf. [TOR97]) :

Théorème 7 *La transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se prolonge en une isométrie bijective de $L^2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. De plus, on a la formule de Parseval - Plancherel*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)}d\omega$$

pour tous f et $g \in L^2(\mathbb{R})$

En particulier, si $f = g$ on retrouve à la formule de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

La transformée de Fourier d'une fonction de carré intégrable est elle aussi de carré intégrable.

0.2 Analyse spectrale des processus stationnaires

0.2.1 Définitions et propriétés

Définition 7 Soit $\mathbb{T}$ une partie de $\mathbb{R}$.

On appelle processus stochastique réel (resp. complexe) une famille de variables aléatoires $(X_t : t \in \mathbb{T})$ définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Une réalisation d'un processus aléatoire est dite une trajectoire. En théorie du signal, une trajectoire est dite un signal.

Définition 8 Un processus aléatoire $(X_t : t \in \mathbb{T})$ à valeurs réelles ou complexes, est dit d'ordre k ($k \geq 1$) si pour tout $t \in \mathbb{T}$, $\mathbb{E}(|X_t|^k) < +\infty$, où $|x|$ désigne la valeur absolue (resp. le module de x).

Définition 9 1. Soit $(X_t : t \in \mathbb{T})$ un processus réel d'ordre 1.

On appelle fonction moyenne du processus (X_t) , la fonction m de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \mapsto m(t) = \mathbb{E}(X_t).$$

2. Soit $(X_t : t \in \mathbb{T})$ un processus d'ordre 2.

On appelle fonction de covariance (ou d'auto-covariance) du processus (X_t) , l'application Γ de $\mathbb{T}^2$ dans $\mathbb{R}$ et qui associe à chaque couple (s, t) de $\mathbb{T}^2$, la covariance des variables X_s et X_t :

$$\Gamma(s, t) = \mathbb{E}(X_t X_s) - m(t).m(s)$$

Si le processus est complexe, la fonction de covariance Γ s'écrit

$$\Gamma(s, t) = \mathbb{E} \left\{ (X_s - m(s))(\overline{X_t - m(t)}) \right\}.$$

Processus stationnaires au second ordre

Définition 10 Soit $\mathbf{X} = (X_t : t \in \mathbb{T})$ un processus du 2nd ordre.

On dit que le processus $\mathbf{X}$ est stationnaire au second ordre, si sa fonction moyenne m est constante et sa fonction de covariance Γ est invariante par translation dans le temps :

$$\Gamma(s, t) = \Gamma(s + h, t + h)$$

quels que soient $h \in \mathbb{T}$ et $t, s \in \mathbb{T}$.

La fonction d'autocovariance Γ d'un processus stationnaire à l'ordre 2 ne dépend que de l'écart temporel $t-s$, c'est-à-dire fonction de $t-s$, aussi on note γ la fonction

$$\gamma(t-s) = \Gamma(s, t)$$

qu'on identifiera avec la fonction de covariance Γ du processus.

On vérifie qu'une fonction de covariance γ d'un processus stationnaire au second ordre est une fonction paire (resp. hermitienne) selon que le processus est réel ou complexe, bornée et est du type défini non négatif au sens que

$$\sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^p \alpha_j \gamma(t_j - t_l) \overline{\alpha_l} \geq 0$$

pour tout $p \geq 1$ et pour tous $t_1, \dots, t_p \in \mathbb{T}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}$.

0.2.2 Représentation spectrale de la fonction de covariance

Théorème 8 *Soit $(X_t : t \in \mathbb{T})$ un processus stationnaire au second ordre et de fonction de covariance γ . Il existe une fonction de distribution F continue à droite, non décroissante, bornée sur $[-\pi, +\pi]$ et nulle en $-\pi$ et telle que*

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ih\lambda} dF(\lambda) \quad \text{pour tout } h \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

La fonction F est appelée la mesure spectrale du processus (X_t) .

Pour une démonstration, on renvoie le lecteur au livre de Dachuna Castell et Marie Duflo [DD82.1]. Si le processus (X_t) est à temps continu ($\mathbb{T} = \mathbb{R}$), alors l'analogue de ce théorème est fourni par le théorème de Bochner (cf. Métivier [MET68]), auquel cas on a

$$\gamma(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ih\lambda} dF(\lambda)$$

pour tout $h \in \mathbb{R}$.

Si F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ étant la tribu des boréliens de $[-\pi, +\pi]$ ou $\mathbb{R}$ selon que le processus est à temps discret ou continu), alors la dérivée de Radon - Nicodym $f = \frac{dF}{d\nu}$ de F par rapport à la mesure

de Lebesgue $d\nu$ est appelée la densité spectrale du processus X_t et auquel cas on a

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ih\lambda} f(\lambda) d\lambda$$

si le processus est à temps discret, sinon l'intégrale est prise sur $\mathbb{R}$ tout entier. On montre par ailleurs (Brockwell et Davis [BRD87]), que si la fonction d'autocovariance $\gamma_{\mathbf{X}}$ est absolument sommable ou absolument intégrable selon que l'espace temps est discret ou continu, alors la mesure spectrale F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}$ et la densité spectrale f est dans ce cas donnée par

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\lambda} \cdot \gamma_{\mathbf{X}}(n) \quad (4)$$

si le processus est à temps discret, et

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau\lambda} \cdot \gamma_{\mathbf{X}}(\tau) d\tau \quad (5)$$

si le processus est à temps continu.

La densité spectrale est une fonction non négative paire si car le processus est réel.

Dans la suite pour éviter cette répétition, on suppose que le processus X_t est observé aux instants $t \in \mathbb{Z}$.

Un processus (ε_t) du second ordre est dit un bruit blanc, s'il est centré et si les variables aléatoires ε_t sont orthogonales.

Un bruit blanc est stationnaire au second ordre si ses moments d'ordre 2 sont constants et par conséquent admet une densité spectrale laquelle est uniformément répartie sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$: $f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$.

Le transformé linéaire d'un bruit blanc stationnaire par un filtre de fonctions réponse $h(\lambda) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j e^{-ij\lambda}$ où $(\alpha_n : n \in \mathbb{Z})$ est une suite de carré sommable :

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j e_{t-j}$$

est un processus stationnaire au second ordre de fonction de covariance

$$\gamma_X(h) = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j|^2$$

et de densité spectrale

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |h(\lambda)|^2$$

0.2.3 Processus à spectre rationnel (les processus $\mathcal{ARMA}$)

Définition 11 *Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ centré et stationnaire au second ordre est dit à spectre rationnel si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ admet une densité spectrale de la forme*

$$f(\lambda) = R(e^{-i\lambda})$$

où R est une fraction rationnelle à coefficients complexes.

Le résultat suivant fournit une caractérisation des processus à spectre rationnel (Azencot - Castell [DDA82].)

Théorème 9 *Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ centré et stationnaire au second ordre est à spectre rationnelle si et seulement si, il est de la forme*

$$X_t + \sum_{j=1}^p \alpha_j X_{t-j} = \varepsilon_t + \sum_{k=1}^q \beta_k \varepsilon_{t-k}. \quad (6)$$

où (ε_t) est un bruit blanc et α_j, β_k sont des coefficients complexes.

Les processus X_t définis par l'équation (0.6) sont appelés **processus autorégressifs et moyennes mobiles d'ordre (p, q)** , où p est l'ordre du polynôme d'autorégression ($P(z) = \sum_{j=0}^p \alpha_j z^j$ où $\alpha_0 = 1$) et q l'ordre du polynôme de la moyenne mobile ($P(z) = \sum_{k=0}^q \beta_k z^k$ où $\beta_0 = 1$). On note $\mathcal{ARMA}(p, q)$, la classe de ces processus. Les processus $\mathcal{ARMA}(p, 0)$ notés $\mathcal{AR}(p)$ sont appelés **processus autorégressifs d'ordre p** et les processus $\mathcal{ARMA}(0, q)$ notés $\mathcal{MA}(q)$ sont appelés **processus moyennes mobiles d'ordre q** .

Il apparaît bien sûr, que sous cette forme la densité d'un processus $\mathcal{ARMA}(p, q)$ est une fonction rationnelle de la forme

$$f(\lambda) = \left| \frac{q(e^{-i\lambda})}{p(e^{-i\lambda})} \right|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} \quad (7)$$

On montre que si le polynôme d'autorégression d'un processus $\mathcal{ARMA}(p, q)$ n'a pas de zéros à l'intérieur du disque unité, alors ce processus s'écrit sous la forme d'une moyenne mobile infinie :

$$X_t = \sum_{j \geq 0} \psi_j \cdot \varepsilon_{t-j}$$

où (ε_t) est le processus de bruit blanc, et (ψ_j) est une suite complexe de carré absolument sommable. On dit dans ce cas, que le processus $\mathcal{ARMA}(X_t)$ est causal.

0.2.4 Représentation spectrale de processus stationnaire au second ordre.

Le résultat suivant montre qu'un processus $(X_t : t \in \mathbb{Z})$ stationnaire au second ordre admet une représentation spectrale de la forme

$$X_t = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{it\lambda} dZ(\lambda) \text{ p.s} \quad (8)$$

où l'intégrale (1.8) est une intégrale stochastique de la fonction $\lambda \mapsto \varphi(\lambda) = e^{it\lambda}$ par rapport au processus (Z_t) . Ce dernier est un processus stationnaire au second ordre centré, à accroissements orthogonaux (i.e. $Z(\lambda_2) - Z(\lambda_1)$ et $Z(\lambda_4) - Z(\lambda_3)$ sont orthogonales) et continue à droite (i.e. $\|Z(\lambda + \delta) - Z(\lambda)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \rightarrow 0$ quand $\delta \downarrow 0$.)

L'intégrale stochastique (1.8) est par analogie avec l'intégrale de Riemann-Stieltjes, définie comme la limite commune en moyenne quadratique si elle existe, des variables

$$\sum_{k=0}^{q_n-1} e^{it\lambda_k} \left| Z(\lambda_k^{(n)}) - Z(\lambda_{k-1}^{(n)}) \right| \text{ lorsque } \sup_{0 \leq k \leq q_n-1} \left| \lambda_k^{(n)} - \lambda_{k-1}^{(n)} \right| \xrightarrow{n \nearrow +\infty} 0$$

où $\mathcal{S}_n = \{\lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_{q_n}^{(n)}\}$ est une subdivision de $[-\pi, +\pi]$ et où λ_k est choisi arbitrairement dans $[\lambda_k^n, \lambda_{k+1}^n]$.

Pour la construction de cette intégrale stochastique nous renvoyons à [DM82.2].

Remarque :

Si le processus est à temps continu, la représentation spectrale (0.8) devient

$$X_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} dZ(\lambda) \text{ p.s} \quad (9)$$

Notons $\mathcal{H} = \text{lin}(X_t, t \in \mathbb{Z})$ le sous espace linéaire de $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ généré par les variables X_t et $\overline{\mathcal{H}}$ sa fermeture, et $\mathcal{K} = \text{lin}(\chi_t, t \in \mathbb{Z})$ le sous espace linéaire de $\mathbf{L}^2([-\pi, +\pi], \mathcal{B}_{[-\pi, +\pi]}, F)$ généré par les fonctions $t \mapsto \chi_t$ définies par $\chi_t(\lambda) = e^{it\lambda}$ et on note $\overline{\mathcal{K}}$ sa fermeture. Le résultat suivant met en évidence l'existence du processus à accroissement orthogonaux $Z(\lambda) : \lambda \in [-\pi, +\pi]$.

Théorème 10 *Si $(X_t : t \in \mathbb{Z})$ est un processus stationnaire au second ordre, centré et de mesure spectrale F , alors il existe un isomorphisme unique Γ de $\overline{\mathcal{H}}$ dans $\mathbf{L}^2(F)$ tel que pour tout $t \in \mathbb{Z}$:*

$$\Gamma(X_t) = \chi_t$$

où $\chi_t(\lambda) = e^{it\lambda}$. En outre, le processus $(Z(\lambda) : -\pi \leq \lambda \leq +\pi)$ défini par

$$Z(\lambda) = \Gamma^{-1}(\mathbf{1}_{[-\pi, \lambda]}(.)) \quad (10)$$

pour tout $\lambda : -\pi \leq \lambda \leq +\pi$, est un processus à accroissements orthogonaux, continu à droite et tel que

$$E|Z(\lambda) - Z(-\pi)|^2 = F(\lambda)$$

pour tout $\lambda : -\pi \leq \lambda \leq +\pi$

Démonstration

L'application Γ_1 définie sur le sous espace linéaire $\mathcal{H}$ par

$$\Gamma_1\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j X_{t_j}\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{it_j \cdot}$$

est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{K}$ et que l'on peut prolonger en une isométrie d'espace de Hilbert de $\overline{\mathcal{H}}$ dans $\mathbf{L}^2(F)$ en posant

$$\Gamma Y = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Gamma_1 Y_n \quad m.q$$

où $Y \in \overline{\mathcal{H}}$ et $(Y_n : n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires de $\mathcal{H}$ telle que $Y = \lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n \quad m.q.$

D'autre part, comme $\mathcal{K}$ est dense dans l'espace des fonctions continues φ sur $[-\pi, +\pi]$ avec $\varphi(-\pi) = \varphi(+\pi)$, muni de la norme de la convergence uniforme, lequel est dense dans $\mathbf{L}^2(F)$, fait alors que $\mathcal{K}$ est dense dans $\mathbf{L}^2(F)$. Et donc Γ réalise un isomorphisme d'espaces de Hilbert de $\overline{\mathcal{H}}$ sur $\mathbf{L}^2(F)$.

A l'aide de cet isomorphisme, les variables $(Z(\lambda) : -\pi \leq \lambda \leq \pi)$ définie par (0.8) définissent un processus aléatoires du second ordre basé sur $\overline{\mathcal{H}}$, à accroissements orthogonaux et de fonction de distribution associée la mesure spectrale F du processus (X_t) . ■

Théorème 11 (*Représentation spectrale*)

Si $(X_t : t \in \mathbb{Z})$ est un processus stationnaire au second ordre, centré et de mesure spectrale F , alors il existe un processus à accroissements orthogonaux $(Z(\lambda) : \lambda \in [-\pi, +\pi])$, continue à droite et tel que

$$X_t = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{it\lambda} dZ(\lambda) \quad p.s$$

Démonstration

Le processus $(Z(\lambda))$ défini dans le théorème précédent est à accroissements orthogonaux, ce qui fait que l'intégrale stochastique $\mathbb{I}$

$$\mathbb{I}(f) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\lambda) dZ(\lambda)$$

est un isomorphisme de $\overline{\mathcal{D}} = \mathbf{L}^2(F)$ dans $\mathbb{I}(\overline{\mathcal{D}}) \subseteq \mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $\mathcal{D}$ est l'espace des fonctions simples dans $\mathbf{L}^2(dF)$. Cet isomorphisme coïncide avec l'isomorphisme Γ^{-1} sur $\mathcal{D}$ et cette égalité demeure encore sur $\overline{\mathcal{D}}$ puisque $\mathbb{I}$ et Γ^{-1} sont des isomorphismes. D'où nous déduisons que

$$X_t = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{it\lambda} dZ(\lambda)$$

ce qui fournit la représentation spectrale de X_t appelée aussi la représentation de Cramer du processus. ■

Si le processus (X_t) admet une densité spectrale f , alors la représentation de Cramer (0.8) du processus peut être mise sous la forme

$$X_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{it\lambda} \sqrt{f(\lambda)} dW((\lambda)) \quad (11)$$

où dW est une mesure aléatoire telle que

$$\mathbb{E}\{dW(\lambda) \overline{dW(\lambda')}\} = 2\pi \delta(\lambda - \lambda') d\lambda \quad (12)$$

$$\text{et où } \delta(\lambda - \mu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = \mu \\ 0 & \text{si } \lambda \neq \mu \end{cases}$$

La relation (1.12) vient du fait que

$$\mathbb{E}\{Z(d\lambda)\overline{Z(d\lambda')}\} = \frac{1}{2\pi}f(\lambda)\delta(\lambda - \lambda')d\lambda$$

où $Z(\lambda)$ est le processus orthogonal introduit dans le théorème 11 ci-dessus.

La mesure aléatoire $dW(\lambda)$ est parfois appelé mesure de bruit blanc et ce résultat traduit que tout processus stationnaire au second ordre peut être regardé comme le transformé par un filtre dont la fonction réponse est la transformée de Fourier inverse de la densité spectrale.

Remarque :

Ce résultat reste valable pour les processus stationnaires à temps continu auquel cas l'intégrale est prise sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Chapitre 1

La transformée de Fourier à fenêtre glissante

L'analyse spectrale d'un signal réel aléatoire ou non à partir de sa transformée de Fourier, requiert la connaissance du signal en tout instant t de la droite réelle. La transformée de Fourier seule ne peut fournir une information satisfaisante à partir d'une observation **locale** du signal. Si de plus le signal est altéré au voisinage d'un point t_0 , alors le spectre tout entier s'en trouve affecté. Ainsi, étant fonction de la fréquence seulement, la transformée de Fourier ne peut appréhender les aspects temporels du signal. Par exemple, si nous écoutons un "glissando" joué par un violoncelle, la fréquence dépend continûment du temps, ce que la transformée de Fourier ne peut décrire. Dans beaucoup d'applications telles l'analyse des signaux non stationnaires ou de signaux trop irréguliers, la transformée de Fourier seule est parfaitement inadaptée pour décrire le signal. D'autre part, une conséquence due au principe d'incertitude d'Heisenberg (th. 1 ci-dessous), est que la transformée de Fourier peut être numériquement instable puisque les informations utiles pour reconstruire f à partir de $\hat{f}$ par la formule d'inversion peuvent se trouver à très haute fréquence. Ce que l'on exprime en disant que la transformée de Fourier est une transformation à caractère globale. Ces carences de la transformée de Fourier dans l'analyse temps - fréquence du signal, a conduit Gabor [GAB46] dans son papier de 1946, à introduire une fonction de localisation du temps appelée fenêtre qu'il fait

coulisser le long de la droite réelle, de sorte que la transformée de Fourier d'un signal f par rapport à cette fenêtre soit elle aussi bien localisée. Mais il n'en demeure pas moins que la précision de cette localisation en temps et fréquence est loin d'être parfaite, et entre autres elle est limitée par la fameuse inégalité de Heisenberg. Rappelons que la transformée de Gabor a connu de nombreuses applications et notamment dans le domaine des signaux audiophoniques. D'ailleurs Gabor a reçu un peu plus tard le prix pour ses travaux sur l'holographie.

1.1 La transformée de Fourier à fenêtre glissante

Définition 12 On appelle énergie d'une fonction ou d'un signal f la quantité

$$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$$

Proposition 4 Un signal est d'énergie finie, s'il est de carré absolument intégrable, auquel cas on a

$$E_f = \frac{1}{2\pi} E_{\hat{f}} \quad (1.1)$$

où $E_{\hat{f}}$ est l'énergie de la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f .

Démonstration

Si f est de carré intégrable, alors il en est de même de sa transformée de Fourier $\hat{f}$ et d'ici la relation (1.1) résulte de l'égalité de Parseval. ■

On associe à toute fonction φ de carré intégrable, sa **moyenne**

$$t_\varphi^* = \frac{1}{E_\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} t |\varphi(t)|^2 dt$$

et par analogie avec la dispersion d'une loi, sa **dispersion d'énergie en temps**

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{1}{E_\varphi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_\varphi^*)^2 |\varphi(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

pourvu que ces intégrales soient bien définies. D'ailleurs, il suffit pour que ces intégrales aient un sens que la fonction

$$t \rightarrow t\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (1.2)$$

Cette condition assure que la fonction $t \rightarrow \sqrt{t}\varphi(t)$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ et permet de montrer aussi que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. Cependant la transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ qui est de carré intégrable, n'est pas nécessairement dans $L^1(\mathbb{R})$.

De la même manière, si la transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ de φ satisfait la condition (1.2), alors on définit la moyenne et la dispersion d'énergie de $\widehat{\varphi}$:

$$\omega_{\widehat{\varphi}}^* = \frac{1}{E_{\widehat{\varphi}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega \text{ et } \sigma_{\widehat{\varphi}}^2 = \frac{1}{\sqrt{E_{\widehat{\varphi}}}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \omega_{\widehat{\varphi}}^*)^2 |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Le rectangle

$$[t_{\varphi}^* + b - \sigma_{\varphi}, t_{\varphi}^* + b + \sigma_{\varphi}] \times [\omega_{\widehat{\varphi}}^* + \omega - \sigma_{\widehat{\varphi}}, \omega_{\widehat{\varphi}}^* + \omega + \sigma_{\widehat{\varphi}}]$$

est situé dans **l'espace temps - fréquence**, et sa surface quel que soit le choix de la fonction φ ne peut être aussi petite qu'on le souhaite, car limitée par une certaine quantité due au principe d'incertitude d'Heisenberg. Ce principe dit en substance que l'énergie d'un signal et celle de sa transformée de Fourier ne peuvent être localisées avec une précision arbitraire. De façon plus simple, on peut dire qu'il y a toujours une incertitude sur les mesures en temps et en fréquence d'un signal.

Théorème 12 (*Le principe d'incertitude d'Heisenberg*)

Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ et telle que φ et $\widehat{\varphi}$ satisfont (1.2). Alors

$$\sigma_{\varphi} \sigma_{\widehat{\varphi}} \geq \frac{1}{2}.$$

Pour la démonstration, on renvoi à l'ouvrage de Chui [CHU92]. On a égalité lorsque la fonction φ est gaussienne et d'énergie 1.

Cette relation exprime que les supports de φ et de sa transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ sont de grandeur inverse, dans le sens que si le support de φ est grand, celui de $\widehat{\varphi}$ doit être nécessairement petit et réciproquement. Ceci peut conduire à une reconstruction erronée de la fonction f à partir de sa transformée de Fourier.

1.1.1 Transformée de Fourier à fenêtre glissante

Afin éviter les inconvénients de la transformée de Fourier d'une fonction réelle f de carré intégrable, on commence par localiser la fonction f autour d'une position

temporelle t_0 . Ce qui revient à regarder la fonction sur le segment $[t_0 - a, t_0 + a]$, autrement dit, on multiplie la fonction f par la fonction créneau $\mathbf{1}_{[t_0-a, t_0+a]}$ au cas où l'on veut ouvrir une fenêtre autour de t_0 , et faire coulisser ensuite cette fenêtre le long de la droite réelle si on veut ouvrir une fenêtre autour d'une autre position temporelle. La transformée de Fourier de $f \cdot \mathbf{1}_{[t_0-a, t_0+a]}$ est (cf. prop. 2 chap.0), la convoluée de la transformée de Fourier de f par celle du segment $\mathbf{1}_{[t_0-a, t_0+a]} : s_{t_0} * \hat{f}(\lambda)$, où $s_{t_0} = \frac{\sin(\lambda \cdot t_0)}{\lambda t_0}$ est le sinus cardinal. Ce dernier décroît très lentement et présente un lobe important près de t_0 . Aussi, la variante que l'on introduit consiste à remplacer la fonction créneau par une fenêtre (fonction) g destinée à concentrer l'analyse au voisinage de points spécifiques de la droite réelle. Cette fenêtre est choisie suffisamment régulière pour que sa transformée de Fourier soit elle aussi bien localisée.

Définition 13 *On appelle fenêtre toute fonction g de carré intégrable et satisfaisant la condition (1.2).*

Bien sûr, la transformée de Fourier d'une fenêtre g est elle aussi de carré intégrable, mais n'est pas une fenêtre en générale.

Le choix de la fenêtre optimise la représentation temps - fréquence et le type d'information que l'on peut en retirer. La plupart des applications utilisent la fenêtre gaussienne ou la fenêtre de Hanning.

1. Fenêtre de Hamming et Hannning

Elle est définie par

$$g(t) = [a + (1 - a) \cos(2\pi \frac{t}{a})]r(t)$$

2. Fenêtre gaussienne

C'est la fenêtre utilisée par Gabor (Gab.xxx), elle est définie par

$$g(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}.$$

Cette fenêtre est caractérisée par une décroissance exponentielle tout comme

sa transformée de Fourier $\widehat{g}(\lambda) = e^{-\frac{\sigma^2 \lambda^2}{2}}$. De plus, elle a l'avantage de saturer l'inégalité de Heisenberg : $\sigma_\varphi \sigma_{\widehat{\varphi}} = \frac{1}{2}$.

Définition 14 Soit g une fenêtre et b un nombre réel fixé. On appelle **gaborette** associée à la fonction g , toute fonction complexe $g_{b,\omega}$ où $\omega \in \mathbb{R}$, définie par

$$g_{b,\omega}(t) = e^{i\omega(t-b)}.g(t-b)$$

Définition 15 Soit g une fenêtre. On appelle **transformée de Fourier à fenêtre glissante** (ou **transformée de Gabor continue**) d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, l'application notée G_f définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans l'espace $\mathcal{C}$ des fonctions continues, par

$$G_f(\omega, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g_{b,\omega}(t)} dt \quad (1.3)$$

Si la fenêtre g est d'énergie égale à 1 (c'est le cas de fenêtres gaussiennes par exemple), alors en intégrant la transformée de Gabor $G_f(\omega, b)$ et en utilisant le théorème de Fubini, on voit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_f(\omega, b) db = \widehat{f}(\omega).$$

Interprétation de la transformée de Gabor :

La transformée de Gabor $G_f(\omega, b)$ localise la transformée de Fourier autour de l'instant $t = b$. En fait, elle fournit une information locale de f dans la fenêtre temporelle $[t_g^* + b - \sigma_g, t_g^* + b + \sigma_g]$ de largeur $2\sigma_g$.

D'autre part, en réécrivant la relation (1.3) sous la forme

$$G_f(\omega, b) = \langle f, g_{b,\omega} \rangle$$

où $\langle ., . \rangle$ est le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$, ceci permet d'interpréter la transformée de Gabor comme une représentation d'une fonction (resp. signal) de $L^2(\mathbb{R})$ dans le plan $(\omega, b) \in \mathbb{R}^2$, appelé **plan temps - fréquence avec pour base les gaborettes**.

Le résultat suivant permet d'avoir une interprétation similaire dans le domaine fréquentiel.

Proposition 5 *Soit g une fenêtre de sorte que sa transformée de Fourier $\widehat{g}$ soit elle aussi une fenêtre. La transformée de Gabor G_f de toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ coïncide à un facteur de phase près avec la transformée de Gabor de la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f :*

$$\begin{aligned} G_f(\omega, b) &= \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}, \widehat{g}_{b,\omega} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda) \overline{\widehat{g}(\lambda - \omega)} e^{i\lambda \cdot b} d\lambda \end{aligned} \quad (1.4)$$

Démonstration

En utilisant la formule d'inversion de la transformée de Fourier d'une part, et le théorème de Fubini d'autre part, on ramène la relation (1.2) sous la forme

$$\begin{aligned} G_f(b, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda \right) \overline{g(t-b)} e^{-i\omega(t-b)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{g(t-b)} e^{i\lambda t} \cdot e^{-i\omega(t-b)} dt \right] d\lambda \end{aligned}$$

D'autre part, il est aisé de voir que la deuxième intégrale peut être mise sous la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{g(t-b)} e^{i\lambda t} e^{i\omega(t-b)} dt = e^{i\lambda b} \overline{\widehat{g}(\lambda - \omega)}$$

d'où il est aisé ensuite de déduire le résultat énoncé. ■

La relation (1.4) exprime que la transformée de Gabor fournit une information spectrale locale de f dans la fenêtre fréquentielle $[\omega^* + \omega - \sigma_{\widehat{g}}, \omega^* + \omega + \sigma_{\widehat{g}}]$, de largeur $2\sigma_{\widehat{g}}$. On obtient ainsi une fenêtre temps - fréquence

$$[t_g^* + b - \sigma_g, t_g^* + b + \sigma_g] \times [\omega_g^* + \omega - \sigma_{\widehat{g}}, \omega_g^* + \omega + \sigma_{\widehat{g}}]$$

de surface $4\sigma_g\sigma_{\widehat{g}}$, et sur laquelle les fonctions f et $\widehat{f}$ sont concentrées. Cependant, la précision de cette localisation se trouve limitée en vertu du principe d'incertitude d'Heisenberg (th1. ci-dessus).

Remarque :

Selon la relation (1.4), pour que la transformée $G_f(\omega, b)$ porte des informations sur le contenu de la transformée de Fourier de f au voisinage de la fréquence ω , il est

nécessaire que la transformée de Fourier $\widehat{g}_{b,\omega}$ de g soit bien localisée au voisinage de la fréquence $\omega = 0$. Autrement dit, il faut que g soit une fonction assez régulière et c'est ce qui explique d'ailleurs, pourquoi il n'est pas judicieux de prendre comme fenêtre une indicatrice d'un segment.

Formule d'inversion

Comme pour la transformée de Fourier, la connaissance de $G_f(\omega, b)$ pour toutes les valeurs de ω et b permet de reconstruire la fonction f .

Théorème 13 *Soit g une fenêtre qui satisfait ainsi que sa transformée de Fourier $\widehat{g}$ la condition (1.2). On a pour toutes fonctions f et $h \in L^2(\mathbb{R})$,*

$$\langle f, h \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f, g_{b,\omega} \rangle \cdot \overline{\langle h, g_{b,\omega} \rangle} db d\omega \quad (1.5)$$

Démonstration On peut supposer sans nuire à la généralité que la fenêtre g est d'énergie égale à 1. En utilisant l'égalité de Parseval, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} G_f(b, \omega) \cdot \overline{G_h(b, \omega)} d\omega &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g(t-b)h(t)} g(t-b) dt \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{h(t)} |g(t-b)|^2 dt \end{aligned}$$

Et il s'ensuit de ce que g est d'énergie 1 que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f, g_{b,\omega} \rangle \cdot \overline{\langle h, g_{b,\omega} \rangle} db d\omega &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_f(b, \omega) \cdot \overline{G_h(b, \omega)} db d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{h(t)} |g(t-b)|^2 db dt \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Corollaire 1 (*Formule d'inversion*)

Sous les hypothèses du théorème 2, et pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a en tout point de continuité t de f :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \cdot \|g\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_f(\omega, b) g_{\omega,b}(t) d\omega db \quad (1.6)$$

Démonstration Il suffit de prendre h égale à une fonction gaussienne : $g_\alpha(\cdot - x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{1}{2\alpha^2}x^2}$ et en faisant tendre ensuite α vers 0^+ dans l'expression (1.5) du théorème ci-dessus, nous déduisons la formule d'inversion (1.6). ■

Théorème 14 Soit g une fenêtre dans $L^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. On a pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_f(b, \omega)|^2 d\omega db = 2\pi \|g\|_2^2 \cdot \|f\|_2^2 \quad (1.7)$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme dans l'espace L^2

Démonstration

On a à partir de la relation (1.4) après avoir multiplié ses deux membres par $f(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi \|g\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [G_f(\omega, b) g_{\omega, b}(t) f(t) dt] d\omega db$$

Le résultat en découle alors en appliquant le théorème de Fubini. ■

Une conséquence de ce résultat est en quelque sorte l'analogie de l'égalité de Parseval - Plancherelle pour la transformée de Gabor continue.

Corollaire 2 (*Conservation d'énergie*)

Si en plus des hypothèses du théorème 1 ci-dessus, la fenêtre g est d'énergie égale à 1, alors on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_f(b, \omega)|^2 d\omega db = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \quad (1.8)$$

Remarque :

Le sous espace image de l'espace des fonctions de carré intégrables, par la transformée de Gabor, est un sous espace stricte de $L^2(\mathbb{R}^2)$. Ce sous espace est à noyaux reproduisants (cf. [TOR97]). Ce fait vient de ce que la transformée de Gabor est hautement redondante. Une autre conséquence de la redondance, concerne la formule d'inversion (1.6) de f , que l'on l'on retrouve moyennant une autre fenêtre h de carré intégrable et distincte de la fenêtre d'analyse g :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \langle h, g \rangle} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_f(\omega, b) h_{\omega, b}(t) d\omega db$$

1.2 Transformée de Gabor des processus stationnaires

Soit $(X_t : t \in \mathbb{Z})$ un processus stationnaire au second ordre, centré et de fonction de covariance γ_X absolument sommable. On rappelle que la représentation spectrale du processus (X_t) est fournie par la relation (0.8) ou par la représentation de Cramer (0.11) (§2 chap.0) :

$$X_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{it\lambda} \sqrt{f(\lambda)} dW(\lambda)$$

où rappelons que dW est la mesure aléatoire définie par la relation (0.10) (§2 chap.0). Cette représentation s'avère utile pour calculer la transformée de Gabor de ce processus.

Proposition 6 *Soit g une fenêtre de carré intégrable. La transformée de Gabor du processus $(X_t : t \in \mathbb{Z})$ s'écrit*

$$G_X(\omega, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda b} \overline{\widehat{g}(\lambda - \omega)} \sqrt{f(\lambda)} dW(\lambda) \quad (1.9)$$

Démonstration

On a par définition de la transformée de Gabor

$$G_X(\omega, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\pi}^{+\pi} e^{it\lambda} \sqrt{f(\lambda)} dW(\lambda) \right\} \overline{g(t-b)} e^{-i\omega(t-b)} dt$$

Et moyennant le changement de variable $x = t - b$, cette intégrale devient

$$G_X(\omega, b) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\lambda b} \sqrt{f(\lambda)} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\lambda - \omega)t} \overline{g(t)} dt \right\} dW(\lambda)$$

et comme la deuxième intégrale n'est autre que la transformée de Fourier de g en $\lambda - \omega$, le résultat énoncé dans la proposition en découle. ■

A l'instar de la représentation spectrale du processus (X_t) , sa transformation de Gabor G_X donnée par la relation (1.9), interprète $(G_X(., \omega))$ pour toute fréquence ω , comme étant un processus stationnaire au second ordre dont (1.9) en est la représentation spectrale. De cette représentation spectrale nous en déduisons aussi le

Corollaire 3 *Pour toute fréquence ω , le processus $(G_X(b, \omega) : b \in \mathbb{R})$ a pour densité spectrale*

$$H_\omega(\lambda) = f_X(\lambda) | \widehat{g}(\lambda - \omega) |^2 \quad (1.10)$$

Ainsi, tant que la transformée de Fourier f_X est bien localisée près de l'origine des fréquences, la transformée de Gabor fournit pour toute fréquence ω des informations sur le contenu du signal correspondant à cette fréquence. De là on obtient les statistiques dans le domaine temporel du processus $G_X(., \omega)$. En particulier, sa fonction d'autocovariance Γ_ω est donnée par

$$\Gamma_\omega(b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ib\lambda} | \widehat{g}(\lambda - \omega) |^2 f_X(\lambda) d\lambda \quad (1.11)$$

et sa variance :

$$\mathbb{E} | G_X(b, \omega) |^2 = \Gamma_\omega(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} | \widehat{g}(\lambda - \omega) |^2 f_X(\lambda) d\lambda \quad (1.12)$$

Cette dernière quantité est parfois appelée le spectre physique du processus. De plus, on montre que

$$\Gamma_\omega(0) = \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{2B} \int_{-B}^{+B} | G_X(b - \omega) |^2 db \quad (1.13)$$

Un tel lissage réduit la variabilité de l'estimation, tout en introduisant un biais.

Chapitre 2

Transformation en ondelettes continue

Un des inconvénients de la transformée continue de Gabor, est que la fenêtre temps - fréquence est rigide, au sens que la longueur de la fenêtre reste constante. Ceci est un sérieux handicap lorsque la fonction ou le signal étudié présente de fortes fluctuations. En d'autres termes, la transformée de Gabor est imparfaitement adaptée pour analyser simultanément des signaux à de très hautes et à de très basses fréquences.

La transformée en ondelettes permet de corriger ce problème. Proposée initialement par J. Morlet [MOR75], l'analyse par ondelettes basée sur un concept quelque peu différent du concept de fréquence : le concept d'échelle (ou encore de résolution), est caractérisée par l'utilisation de fonctions (ondelettes) bien localisées, à la fois dans l'espace temps et dans l'espace spectral engendrées les unes à partir des autres par translation et dilatation. Les ondelettes sont des copies conformes les unes des autres et ne diffèrent que par leur taille. Elles s'adaptent parfaitement et automatiquement à la forme et à la taille des caractéristiques qu'elles recherchent. Elles sont très étendues pour étudier les basses fréquences (les grandes échelles), et très fines pour étudier des composantes plus transitoires (les hautes fréquences, ou petites échelles). Cette procédure, développée par S. Mallat [MAL85] et systématisée par I. Daubechies [DAU88], porte le nom de multirésolution. Cette procédure est

qualifiée de microscope mathématique, car en comprimant les ondelettes, on accroît le grossissement du microscope et ce pour appréhender des détails de plus en plus fin.

2.1 Analyse temps - échelle

Définition 16 On appelle *ondelette analysante (ou ondelette mère)* une fonction $\psi \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, d'énergie $E_\psi = 1$ et vérifiant

$$K_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}|^2(\omega)}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (2.1)$$

où $\widehat{\psi}$ est la transformée de Fourier de ψ .

La condition (2.1) est appelée **condition d'admissibilité**.

Cette condition assure que

$$\widehat{\psi}(0) = 0$$

En effet, l'hypothèse $\widehat{\psi}(0) \neq 0$ assure, compte tenu de ce que la fonction $\omega \mapsto \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}$ est bornée et de ce que $\widehat{\psi}$ est continue, que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante réelle m telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \geq m \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{1}{|\omega|} d\omega = +\infty$$

ce qui contredit la condition d'admissibilité (2.1).

D'autre part, la relation $\widehat{\psi}(0) = 0$, exprime quant à elle que $\widehat{\psi}$ est une fonction oscillante amortie à l'infini. C'est cette propriété qui est à l'origine de l'appellation **d'ondelette**.

Les caractéristiques d'une ondelette analysante sont différentes de celle d'une fenêtre.

Exemples d'ondelettes

1. Ondelette de MORLET

Cette ondelette est définie par

$$\psi(t) = e^{\frac{it^2}{2}} \cos(5t) \text{ ou } \psi(t) = e^{-\pi t^2} e^{10i\pi x}$$

Cette ondelette n'est pas normalisée et ne satisfait pas la condition d'admissibilité. Cependant la valeurs de $\widehat{\psi}(0)$ est de l'ordre de 10^{-5} et peut être considéré comme nulle.

2. L'ondelette de Haar

Cette ondelette est définie par

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La transformée de Fourier de cette ondelette est $\widehat{\psi}(\xi) = ie^{-i\pi\xi} \frac{1-\cos(\pi\xi)}{\pi\xi}$ et le spectre d'amplitude de l'ondelette de Haar est $|\widehat{\psi}(\xi)|$.

Définition 17 Soit ψ une ondelette analysante et a, b deux nombres réels tels que $a > 0$. On appelle ondelette associée à l'ondelette mère ψ , toute fonction réelle $\psi_{a,b}$ définie par

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Les ondelettes $\psi_{a,b}$ sont obtenues moyennant une translation b et un changement d'échelle a de l'ondelette mère ψ .

Définition 18 On appelle transformée en ondelette continue d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ associée à une ondelette analysante ψ la fonction

$$\begin{aligned} C_f(a, b) &= \langle f, \psi_{a,b} \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt \end{aligned} \quad (2.2)$$

Interprétation de la transformée en ondelette continue

La transformée en ondelette continue $C_f(a, b)$ mesure les variations à l'échelle a au voisinage de $t = b$.

De plus, si l'ondelette analysante ψ satisfait la relation (2.1) ainsi que sa transformée de Fourier alors l'ondelette $\psi_{a,b}$ est une fenêtre de moyenne $b + at^*$ et d'écart-type $a\sigma_\psi$. Aussi, la transformée en ondelette continue $C_f(a, b)$ fournit une information locale sur f localisée dans la fenêtre temporelle $[b + at^* - a\sigma_\psi, b + at^* + a\sigma_\psi]$. Cette

fenêtre se retrécit pour les petites valeurs de a et s'élargit pour les grandes valeurs de a . Le résultat suivant est l'analogue de la proposition du chap.1 §1.

Proposition 7 *Soit ψ une ondelette analysante et $f \in L^2(\mathbb{R})$. La transformée en ondelette continue $C_f(a, b)$ de f coïncide à un facteur de phase près avec la transformée en ondelette continue de la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f :*

$$C_f(a, b) = \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{\psi}(a\omega)} e^{i\lambda b} d\omega \quad (2.3)$$

où $\widehat{\psi}$ est la transformée de Fourier de ψ .

Démonstration

En utilisant la formule d'inversion de la transformée de Fourier d'une part, et le théorème de Fubini d'autre part, la relation (2.2) s'écrit

$$\begin{aligned} C_f(a, b) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} e^{i\lambda t} dt \right] d\omega \end{aligned}$$

La deuxième intégrale est la transformée de Fourier de $\psi_{a,b}$, laquelle à l'issue d'un calcul simple est donnée par

$$\widehat{\psi}_{a,b}(\omega) = \sqrt{a} \widehat{\psi}(a\omega) e^{-i\omega b}.$$

Et par suite, en reportant cette expression dans celle de $C_f(a, b)$, nous obtenons le résultat demandé. ■

Si ω^* et $\sigma_{\widehat{\psi}}$ désignent respectivement la moyenne et l'écart-type de $\widehat{\psi}$, alors la fonction η définie par $\eta(\omega) = \widehat{\psi}(\omega + \omega^*)$ est une fenêtre centrée et d'écart-type $\sigma_{\widehat{\psi}}$ et de plus l'ondelette $C_f(a, b)$ s'écrit encore sous la forme

$$C_f(a, b) = \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) e^{ib\omega} \overline{\eta\left(a\left(\omega - \frac{\omega^*}{a}\right)\right)} d\omega$$

Et cette expression dit qu'à une constante multiplicative près et à un facteur de phase près, la transformation en ondelette continue $C_f(a, b)$ fournit une information locale de $\widehat{f}$ dans la fenêtre fréquentielle $[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a}\sigma_{\widehat{\psi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a}\sigma_{\widehat{\psi}}]$, où $\frac{1}{a}\sigma_{\widehat{\psi}}$, est regardé

comme l'écart-type de la fenêtre $\eta(a(\omega - \frac{\omega^*}{a})) = \eta(a\omega - \omega^*)$.

D'autre part, le rectangle $[b + at^* - a\sigma_\psi, b + at^* + a\sigma_\psi] \times [\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a}\sigma_{\hat{\psi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a}\sigma_{\hat{\psi}}]$ peut être considéré comme une surface dans le plan temps - fréquence (t, ω) de largeur $2a\sigma_\psi$ de la fenêtre temporelle. Ainsi, cette fenêtre se retrécit automatiquement pour détecter les phénomènes à haute fréquence (i.e. petit $a > 0$,) et s'élargit pour détecter les comportements à basse fréquence (i.e. grand $a > 0$).

Formule d'inversion

Comme pour la transformé de Fourier et la transformée de Gabor, on a également pour la transformée en ondelette continue, la formule de reconstruction et de conservation de l'énergie.

Théorème 15 ψ étant une ondelette analysante et C_ψ la transformée en ondelette continue. On a pour toutes fonctions f et $h \in L^2(\mathbb{R})$,

$$K_\psi \langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle C_\psi(f)(b, a), C_\psi(g)(b, a) \rangle \frac{da}{a^2} db \quad (2.4)$$

Démonstration

Un calcul simple permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle C_\psi(f)(b, a), C_\psi(g)(b, a) \rangle db &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(s) \psi\left(\frac{s-b}{a}\right) ds \right\} db \\ &= \frac{1}{2\pi a} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{G}(b) \hat{F}(b) db \end{aligned}$$

où $F(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{\psi}(a\omega)$ et $G(\omega) = \hat{g}(\omega) \hat{\psi}(a\omega)$.

En appliquant l'égalité de Plancherelle - Parseval, on trouve que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \langle C_\psi(f)(b, a), C_\psi(g)(b, a) \rangle db = \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{G}(\omega) F(\omega) d\omega$$

D'où l'on déduit en remplaçant F et G par leurs expressions

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle C_\psi(f)(b, a), C_\psi(g)(b, a) \rangle \frac{da}{a^2} db &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \{ \hat{f}(\omega) \bar{\hat{g}}(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}|^2(a\omega)}{|\omega|} d\omega \} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \{ \hat{f}(\omega) \bar{\hat{g}}(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}|^2(y)}{|y|} dy \} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} K_\psi \cdot \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = K_\psi \langle f, g \rangle \end{aligned}$$

■

Corollaire 4 (*Formule d'inversion*)

Soit ψ une ondelette analysante réelle, et $f \in L^2(\mathbb{R})$. On a

$$f(t) = \frac{1}{k_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} C_f(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{dbda}{a^2} \quad (2.5)$$

Démonstration

IL suffit de remplacer dans formule (2.4), la fonction g par une fonction Gaussienne $g_\alpha(\cdot - t)$ (exemple 2. page 34) et de faire tendre $\alpha \longrightarrow 0^+$. ■

Théorème 16 (*Conservation d'énergie*)

Soit ψ une ondelette analysante réelle, et $f \in L^2(\mathbb{R})$. On a

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |C_f(b, a)|^2 \frac{dbda}{a^2} = k_\psi E_f$$

Démonstration

Il suffit d'adapter la démonstration du théorème 14 (chap.1). ■

2.2 Analyse multirésolution et base d'ondelettes

Comme pour la transformée de Gabor, la transformée en ondelettes continues est infiniment redondante. Il s'agit de trouver une suite $\{\psi_{j,k} : (j,k) \in \mathbb{I}\}$ d'ondelettes qui soit une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$ ce qui permet d'exprimer toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ avec un minimum de coefficients d'ondelettes. Le noeud du problème réside dans la construction de l'ondelette mère ψ à partir de laquelle on déduit une base orthonormale d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$ de la forme

$$\psi_{j,k} = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - k); j, k \in \mathbb{Z}.$$

On montre ci-dessous comment à partir de l'analyse multirésolution on peut construire l'ondelette mère ψ . Mais d'abord précisons la définition de la transformée en ondelettes discrètes.

Définition 19 Soit ψ une ondelette analysante. La transformée en ondelettes discrètes d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ est définie par

$$C_f(j, k) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{j,k}} dt = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$$

où les ondelettes $\psi_{j,k}$ sont données pour tout $j, k \in \mathbb{Z}$ par

$$\psi_{j,k} = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - k) \tag{2.6}$$

et où $\langle ., . \rangle$ est le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$.

Définition 20 Analyse multirésolution

On appelle analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ une suite $\mathcal{M} = \{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$ assujetties aux propriétés suivantes :

1. $\{V_j; j \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de sous espaces d'approximation successives :
 - (a) les sous espaces V_j sont emboîtés : $V_j \subset V_{j-1}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$,
 - (b) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$
 - (c) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
2. V_0 est invariant par les translation entières de la variable :

$$f \in V_0 \Rightarrow f(\cdot + k) \in V_0$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

3. pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $f \in V_j \Leftrightarrow f(2\cdot) \in V_{j-1}$ (dilatation)
4. il existe une fonction $g \in V_0$ telle que $\{g(t - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base de Riesz de V_0 (définition 21 ci-dessous).

L'espace V_j est l'espace de toutes les approximations possibles à l'échelle 2^j . La propriété 3¹ caractérise les aspects de la multirésolution de la suite $\mathcal{M}$. Elle exprime que tous les espaces V_j sont des copies dilatées ou contractés de l'espace V_0 , car cette propriété est équivalente à

$$f \in V_j \Leftrightarrow f(2^j \cdot) \in V_0$$

Si P_{V_j} est le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{R})$ dans V_j , alors la propriété 1.b dit que la suite $\{P_{V_j}(f) : j \in \mathbb{Z}\}$ des approximations d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ converge en moyenne quadratique vers f .

D'autre part, on montre facilement compte tenu des propriétés génériques 2, 3 et 4 de l'analyse multirésolution, que la suite $\{g_{j,k} ; k \geq 1\}$ définie par $g_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}}g(2^{-j}t - k)$ est une base du sous espace V_j pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

Définition 21 (Base de Riesz)

Une famille $(\phi_k : k \in \mathbb{Z}) \subset L^2(\mathbb{R})$ est une base de Riesz de $L^2(\mathbb{R})$ si

1. $\forall h \in L^2(\mathbb{R}), \exists \alpha \in \ell^2(\mathbb{Z}), \alpha$ unique tel que²

$$h = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \phi_k \tag{2.7}$$

2. Il existe $0 < A \leq B < +\infty$ tels que pour tout $h = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \phi_k \in L^2(\mathbb{R})$

$$A \|\alpha\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 \leq B \|\alpha\|^2 \tag{2.8}$$

où $\|\alpha\|$ est la norme usuelle dans $\ell^2(\mathbb{Z})$

Cette relation exprime que la norme $\|h\|_2 = (\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2)^{\frac{1}{2}}$ et la norme usuelle dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ sont équivalentes.³

¹Elle joue un rôle crucial dans la construction des bases d'ondelettes

²La définition d'une base de Riesz de $L^2(\mathbb{R})$, montre que ce dernier est isomorphe à l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$.

³La propriété (3.2) généralise la notion d'orthogonalité et en particulier lorsque $A = B = 1$, on retrouve la définition d'une base hilbertienne et la relation (3.2) devient dans ce cas l'égalité de Parseval.

Bases de $L^2(\mathbb{R})$

Soit $\mathcal{M} = \{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$ soit W_j le supplémentaire orthogonal de V_j dans V_{j-1} :

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j \quad (2.9)$$

Ceci définit une deuxième suite de sous espaces $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ orthogonaux entre eux (i.e. $W_j \perp W_{j'}$, pour tout $j \neq j'$, car si $j < j'$ alors $W_{j'} \subset V_j$ et $V_j \perp W_j$).

L'espace W_j est dit **espace des détails** à l'échelle 2^{j-1} . Par induction sur n , on peut écrire pour tout $j \leq n$ que

$$\begin{aligned} V_j &= V_n \bigoplus_{k=0}^{n-j+1} W_{n-k} \\ &= \bigoplus_{k=j+1}^{+\infty} W_k \end{aligned}$$

la deuxième égalité est due au fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \downarrow V_n = \{0\}$. Et de la propriété 1.b, on déduit une décomposition de $L^2(\mathbb{R})$ en sous espace orthogonaux :

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{R}) &= V_j \bigoplus_{k=-\infty}^j W_k \\ &= \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j. \end{aligned}$$

Cette relation exprime que toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$ est la somme orthogonale d'une approximation grossière et d'une infinité de détails plus fins⁴ ou encore toute fonction f de L^2 s'écrit comme une somme infinie de détails orthogonaux.⁵

En outre, on vérifie que les sous espaces W_j héritent de la propriété 3 d'une analyse multirésolution :

$$\psi(t) \in W_j \Leftrightarrow \psi(2t) \in W_{j-1} \quad (2.10)$$

⁴pour un niveau d'approximation j fixé, les P_{W_j} sont les corrections à rajouter à l'approximation P_{V_j} pour retrouver f .

⁵ $P_{V_j}f$ converge vers f dans L^2 lorsque j tend vers $-\infty$ et $P_{W_j}f$ converge vers 0 lorsque j tend vers $-\infty$, ce qui reflète le sens d'espaces d'approximation et d'espaces de détail attribué aux espaces V_j et aux espaces W_j respectivement.

ce qui est d'ailleurs équivalent à

$$\psi(t) \in W_0 \Leftrightarrow \psi(2^{-j}t) \in W_j \quad (2.11)$$

Base orthonormé d'ondelette

A partir de la fonction g donnée par la propriété (4) d'une analyse multirésolution $\mathcal{M}$, on peut construire une ondelette ψ telles que $(\psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z})$ est une base orthonormée d'ondelettes de L^2 . Mais commençons par préciser la notion de fonction d'échelle laquelle induit une base orthonormale de L^2 et de laquelle on déduit ensuite une ondelette analysante ψ .

Définition 22 (*Fonction d'échelle*)

On appelle fonction d'échelle, une fonction $\varphi \in V_0$ telle que la suite de fonctions $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ définies pour tout $j \in \mathbb{Z}$, par

$$\varphi_{j,k}(t) = \frac{1}{2^{\frac{j}{2}}} \varphi\left(\frac{t - 2^j k}{2^j}\right) = 2^{-\frac{j}{2}} \varphi(2^{-j}t - k)$$

est une base orthonormée du sous espace V_j .

Or, on sait en vertu des propriétés 3 et 4 d'une analyse multirésolution que si la suite $\{\varphi(\cdot - n), n \geq 1\}$ est une base de V_0 alors pour j fixé, la suite $\{\varphi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \varphi(2^{-j}t - k)\}$ est une base de V_j . Ceci suggère de construire d'abord une base orthonormale de V_0 et d'en déduire ensuite une pour V_j .

On commence par construire à partir de la fonction g d'une analyse multirésolution, une fonction d'échelle φ . On rappelle que la fonction g est telle que la suite des translatées $g_k(\cdot) = g(\cdot - k)$ est une base de Riesz de V_0 . Il s'agit alors d'orthonormaliser cette base. A cette fin, on adopte l'approche développer par Y. Meyer (cf. [MEY95]). On a le résultat suivant :

Proposition 8 *Pour qu'une suite de fonctions $\{\varphi_k(t) = \varphi(t - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ forment une base orthonormale dans V_0 , il faut et il suffit que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\lambda + k)|^2 = 1.$$

Démonstration

Pour que les $\varphi(t - k)$ forment une famille orthonormale, il faut et il suffit que pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t - p) \overline{\varphi(t - q)} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ 1 & \text{si } p = q \end{cases}$$

ou encore (formule de Parseval) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 e^{-in\omega} d\omega = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

La formule de Poisson ($\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - na) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\frac{n}{a}) e^{in\frac{t}{a}}$) appliquée à la fonction $|\widehat{\varphi}|^2$ fournit alors le résultat (pour les détails de la démonstration, on suggère la référence [GAW90]). ■

Théorème 17 *Soit $\mathcal{M}$ une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$. Il existe une fonction d'échelle φ définie par sa transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ donnée par*

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \frac{\widehat{g}(\omega)}{[\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}(\omega + k)|^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.12)$$

où $\widehat{g}$ est la transformée de Fourier de la fonction g définie par la propriété 4 de l'analyse multirésolution $\mathcal{M}$.

Démonstration

φ étant dans V_0 , il existe alors une suite (m_k) dans $l^2(\mathbb{Z})$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} m_k \cdot g(t - k).$$

En appliquant la transformée de Fourier aux deux membres de cette dernière égalité, celle ci devient

$$\widehat{\varphi}(\omega) = M(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega).$$

où

$$M(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} m_k \cdot e^{-ik\omega}.$$

La fonction M étant périodique et de carré intégrable, fait compte tenu de la proposition 8 ci-dessus, que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(\omega + k)|^2 = |M(\omega)|^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}(\omega + h + k)|^2 = 1$$

et d'où l'on déduit le résultat énoncé. ■

La fonction d'échelle φ définie dans le théorème ci-dessus induit une base de V_0 et induit donc une base pour chaque espace V_j . Il nous reste maintenant à construire une base de $L^2(\mathbb{R})$ lequel rappelons le est une somme directe des sous espaces orthogonaux W_j . Il suffit compte tenu de la relation (2.6) de construire une base de W_0 . Il s'agit alors de trouver une fonction $\psi \in W_0$ telle que les translatées $\psi_k(t) = \psi(t - k)$ forment une base de W_0 .

Proposition 9 *Soit φ la fonction d'échelle définie dans le théorème 17 ci-dessus. Il existe une fonction $A \in L^2_p]0, 1[$ telle que pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ on a :*

$$\widehat{\varphi}(2\omega) = A(\omega) \cdot \widehat{\varphi}(\omega) \text{ et } |A(\omega)|^2 + |A(\omega + \frac{1}{2})|^2 = 1$$

Démonstration

La fonction $\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(\frac{t}{2})$ est dans $V_1 \subset V_0$, il existe alors une suite $(a_k) \in l^2(\mathbb{Z})$ telle que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(\frac{t}{2}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \varphi(t - k)$$

et en appliquant la transformée de Fourier aux deux membres de cette égalité, celle ci devient

$$\widehat{\varphi}(2\omega) = A(\omega) \widehat{\varphi}(\omega)$$

où $A(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-ik\omega}$. En utilisant ensuite la proposition 8 ci-dessus , on déduit que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(2\omega + 2k)|^2 = |A(\omega)|^2$$

et

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}(2\omega + 2k + 1)|^2 = |A(\omega + \frac{1}{2})|^2$$

ce qui montre toujours d'après la proposition 8, la seconde assertion de la proposition. ■

Proposition 10 *Si ψ existe alors il existe une fonction $B \in L_p^2[0, 1[$ telle que pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ on ait :*

1. $\widehat{\psi}(2\omega) = B(\omega) \cdot \widehat{\psi}(\omega)$
2. $|B(\omega)|^2 + |A(\omega + \frac{1}{2})|^2 = 1$
3. $A(\omega)\overline{B}(\omega) + A(\omega + \frac{1}{2})\overline{B}(\omega + \frac{1}{2}) = 0$

Démonstration

On remarquera d'abord que les fonctions $\{\psi(t - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ forment une base orthonormale de W_0 et satisfont

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(\lambda + k)|^2 = 1$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. L'orthogonalité des fonctions $\varphi(t - k)$ avec ψ d'une part et la formule de Plancherel- Parseval d'autre part font que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(\omega) \overline{\widehat{\psi}(\omega)} e^{-ik\omega} d\omega = 0 \quad (2.13)$$

Par ailleurs, en vertu de la formule de Poisson, on trouve aussi que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(\omega + k) \overline{\widehat{\psi}(\omega + k)} = 0.$$

L'existence de B pour ψ se démontre comme celle de A pour φ (prop. 9 ci-dessus), soit

$$B(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{-ik\omega}$$

où

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \psi(\frac{t}{2}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \varphi(t - k)$$

et bien s ure en suivant la démonstration de la proposition 9 ci-dessus, les assertions 1) et 2) de cette proposition en résultent. Quant à l'assertion 3), il suffit d'écrire le premier membre de cette relation et de tenir compte aussi du résultat de la proposition 9 et de la définition de B . ■

Détermination des fonctions ψ et B

Pour trouver ψ , on cherche B lequel doit vérifier les propriétés de 2) et 3) de la proposition 10 ci-dessus.

Posons $B(\omega) = e^{i\omega} \overline{U}(\omega)$ où $\overline{U}$ est dans $L_p^2]0, 1[$. L'équation 3) de la proposition 10 devient

$$A(\omega)U(\omega) = A(\omega + \frac{1}{2})U(\omega + \frac{1}{2}).$$

ce qui montre que la fonction AU est périodique et de période $\frac{1}{2}$ et de plus B vérifie :

$$\overline{A}(\omega)B(\omega) = e^{i\omega} \overline{\theta}(\omega)$$

où $\theta(\omega)$ est une fonction de période $\frac{1}{2}$. La propriété 2 de la proposition 10 assure alors

$$|\theta(\omega)| = A(\omega).A(\omega + \frac{1}{2}).$$

Réciproquement, toute fonction $\overline{A}\theta$ vérifiant cette relation convient. Une famille simple de fonctions θ est

$$\theta_\alpha(\omega) = A(\omega).A(\omega + \frac{1}{2})e^{-i\alpha}$$

pour α , d'où

$$B(\omega) = e^{-i(\cdot)\alpha + \omega} \overline{A}(\omega + \frac{1}{2})$$

et ψ est définie par la propriété 1 de la proposition 2 par sa transformée de Fourier.

Théorème 18 *La fonction ψ déduite est telle que la suite $\{\psi_k : k \in \mathbb{Z}\}$ définie dans la proposition 2, forme une base orthonormée de W_0 et les $\psi_{j,k}$ une base orthonormée de L^2 .*

Chapitre 3

Applications des ondelettes aux séries chronologiques

On présente dans ce chapitre deux applications des ondelettes à l'analyse statistique des séries chronologiques. Dans le premier paragraphe, il s'agit d'une application aux séries chronologiques stationnaires en suivant l'approche développée par Chang Chiann et Pedro A. Morettin [CCM97] ainsi que celui de [TSK96]. Le second paragraphe est une application des ondelettes aux séries chronologiques à accroissements stationnaires. En nous appuyons sur un article de Masry [MAS93], on dégage les propriétés du second ordre et l'analyse spectrale de la transformée en ondelettes continues de tels séries et que nous appliquons ensuite au mouvement brownien fractionnaire et au bruit blanc fractionnaire. Nous déduisons ainsi quelques résultats de Flandrin [FLA92] sur une application des ondelettes au mouvement brownien fractionnaire. Il suffit par la suite d'appliquer les résultats du paragraphe 1 au processus des accroissements.

3.1 Application des ondelettes aux séries chronologiques stationnaires

3.1.1 Le spectre d'ondelettes

Définition 23 Soit ψ une ondelette analysante. On appelle fonction d'autocorrélation de l'ondelette ψ , la fonction Ψ définie pour tout $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$ par

$$\Psi_{j,k}(u) = \sum_{t=0}^{+\infty} \psi_{j,k}(t) \psi_{j,k}(t+|u|)$$

où $\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{-j}{2}} \psi(2^{-j}t - k)$.

Soit $(X(t), t \in \mathbb{Z})$ une série chronologique stationnaire centrée et de fonction de covariance γ satisfaisant la condition suivante

$$\sum_{u=-\infty}^{+\infty} (1+|u|) |\gamma(u)| < +\infty \quad (3.1)$$

et soit $X(0), X(1), \dots, X(T-1)$ un échantillon de taille $T = 2^M$, et où M est un entier strictement positif.

Définition 24 On appelle spectre d'ondelettes de la série $\{X(t)\}$ relativement à l'ondelette ψ , la fonction $\eta_{j,k}^\psi$ définie pour tout couple $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$ par

$$\eta_{j,k}^\psi = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \gamma(u) \Psi_{j,k}(u) \quad (3.2)$$

où $\Psi_{j,k}$ est la fonction d'autocorrélation d'ondelettes.

La condition (3.1) assure l'existence du spectre d'ondelette (3.2) et assure que la fonction d'autocovariance γ est absolument sommable.

Théorème 19 Le spectre d'ondelettes $\eta_{j,k}^\psi$ est borné et non négatif.

Démonstration

L'ondelette ψ étant bornée et à support compact, fait que le support $\text{supp}(\psi)$ est fini et $|\psi| \leq \alpha$ où α est un réel strictement positif. Cette dernière fait que $|\psi_{j,k}| < 2^{\frac{-j}{2}} \alpha$

et $| \text{supp} \psi_{j,k} | = 2^j | \text{supp} \psi |$. Considérons la suite $\{S_T^\psi(j, k) : T \geq 2\}$ définie pour tous $j, k \in \mathbb{Z}$, par

$$S_T^\psi(j, k) = \sum_{u=-T}^T \sum_{t=0}^T \gamma(u) \psi_{j,k}(t+|u|) \psi_{j,k}(t)$$

Le terme $S_T^\psi(j, k)$ peut être mis sous la forme

$$S_T^\psi(j, k) = \sum_{u=-T}^T \gamma(u) \sum_{t=0}^T \psi_{j,k}(t) \psi_{j,k}(t) + \varepsilon_T \quad (3.3)$$

où

$$\varepsilon_T = \sum_{u=-T}^T \gamma(u) \sum_{t=0}^T \psi_{j,k}(t) [\psi_{j,k}(t+|u|) - \psi_{j,k}(t)] \quad (3.4)$$

Pour $u > 0$, on a

$$\left| \sum_{t=0}^T \psi_{j,k}(t) \psi_{j,k}(t) \right| \leq 2^{-j} \alpha^2 | \text{supp} \psi_{j,k} | \leq \alpha^2 | \text{supp} \psi |,$$

et

$$\begin{aligned} \left| \sum_{t=0}^T \psi_{j,k}(t+u) \psi_{j,k}(t) - \sum_{t=0}^T \psi_{j,k}(t) \psi_{j,k}(t) \right| &\leq \sum_t | \psi_{j,k}(t) | \cdot | \psi_{j,k}(t+u) - \psi_{j,k}(t) | \\ &\leq 2^{-\frac{j}{2}} \alpha \sum_{t=0}^T \sum_{v=1}^u | \psi_{j,k}(t+v) - \psi_{j,k}(t+v-1) | \\ &\leq 2^{-j} \alpha \cdot V |u|, \end{aligned}$$

où V est la variation de ψ .

La somme relative aux $u \leq 0$ est majorée de la même manière. Et par suite

$$| S_T^\psi(j, k) | \leq \alpha^2 | \text{supp} \psi | \sum_{u=-T}^T | \gamma(u) | + | \varepsilon_T |.$$

Et quant au second terme du membre de droite, on a

$$\begin{aligned} | \varepsilon_T | &\leq \sum_{u=-T}^T | \gamma(u) | 2^{-j} \alpha \cdot V |u| \\ &\leq 2^{-j} \alpha \cdot V \sum_{u=-T}^T |u| | \gamma(u) | \end{aligned}$$

Et compte tenu ensuite de la condition (3.1), on déduit de ce que

$$\eta_{j,k}^\psi = \lim_{T \rightarrow +\infty} S_T^\psi(j, k)$$

que $\eta_{j,k}^\psi$ est borné.

Posons maintenant

$$I_{j,k}^\psi = \sum_{t=0}^{T-1} (X(t)\psi_{j,k}(t))^2 \geq 0,$$

alors

$$\begin{aligned} E(I_{j,k}) &= \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{s=0}^{T-1} E(X(t)X(s))\psi_{j,k}(t)\psi_{j,k}(s) \\ &= \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{s=0}^{T-1} \gamma(t-s)\psi_{j,k}(t)\psi_{j,k}(s) \\ &= \sum_{u=-(T-1)}^{T-1} \gamma(u) \sum_{t=0}^{T-|u|} \psi_{j,k}(t)\psi_{j,k}(t+|u|) \end{aligned}$$

De plus, d'après la condition (3.1), on a quand $T \rightarrow +\infty : E(I_{j,k}^\psi) \rightarrow \eta_{j,k}^\psi$ d'où la positivité du spectre d'ondelettes $\eta_{j,k}^\psi$. ■

Exemples

1. Processus de bruit blanc

La série chronologique $(X(t), t \in \mathbb{Z})$ est un bruit blanc de variance σ^2 . Son spectre d'ondelettes $\eta_{j,k}^\psi$ relatif à une ondelette analysante ψ s'écrit

$$\begin{aligned} \eta_{j,k}^\psi &= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \gamma(u)\Psi_{j,k}(u) \\ &= \sigma^2 \sum_{t=0}^{+\infty} (\psi_{j,k}(t))^2 \end{aligned}$$

En particulier, si ψ est l'ondelette de Haar (cf. exemple 1 chap. 3), alors les ondelettes $\psi_{j,k}(t)$ sont donné par

$$\psi_{j,k}(t) = \begin{cases} 2^{-\frac{j}{2}} & \text{si } 2^j k \leq t < 2^j(k + \frac{1}{2}) \\ -2^{-\frac{j}{2}} & \text{si } 2^j(k + \frac{1}{2}) \leq t < 2^j(k + 1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et le spectre d'ondelettes du bruit blanc relativement à l'ondelette de Haar est de la forme

$$\begin{aligned}\eta_{j,k}^\psi(t) &= \sigma^2 2^{-j} \{1_{[2^j k, 2^j(k+\frac{1}{2})]} + 1_{[2^j(k+\frac{1}{2}), 2^j(k+1)]}\} \\ &= \sigma^2 \{2^{-j} 1_{j < 0, k \equiv 0[2^{-j}]} + 1_{j \geq 0}\} 1_{k \geq 0}\end{aligned}$$

donc pour $j \geq 0$ et $k \geq 0$: $\eta_{j,k}^\psi(t) = \sigma^2$, le spectre d'ondelettes est constant.

2. Processus moyenne mobile d'ordre 1

La série chronologique $(X(t), t \in \mathbb{Z})$ est une moyenne mobile d'ordre 1 ($\mathcal{MA}(1)$) :

$$X(t) = \epsilon_t + \alpha \epsilon_{t-1}$$

où ϵ_t est un bruit blanc gaussien de variance σ^2 et α une constante réelle. On rappelle que ce processus est 1- dépendant (i.e. $\gamma(h) = 0$ si $|h| \geq 2$), stationnaire au second ordre et que sa fonction de covariance γ est paire et a pour support $\{-1, 0, +1\}$. On a $\gamma(0) = (1 + \alpha^2)\sigma^2$ et $\gamma(1) = \alpha\sigma^2$. Par suite, le spectre d'ondelettes de cette série s'écrit

$$\begin{aligned}\eta_{j,k}^\psi &= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \gamma(u) \Psi_{j,k}(u) \\ &= \sum_{u=-\infty}^{\infty} \gamma(u) \sum_{t=0}^{\infty} \psi_{j,k}(t+|u|) \psi_{j,k}(t) \\ &= \gamma(0) \sum_{t=0}^{\infty} (\psi_{j,k}(t))^2 + 2\gamma(1) \sum_{t=0}^{\infty} \psi_{j,k}(t) \psi_{j,k}(t+1)\end{aligned}$$

Si l'ondelette ψ est l'ondelette de Haar, alors la première somme du second membre de cette dernière égalité s'écrit

$$\gamma(0) \sum_{t=0}^{\infty} (\psi_{j,k}(t))^2 = \sigma^2 (1 + \alpha^2) (2^{-j} 1_{\{j < 0, k \equiv 0[2^{-j}]\}} + 1_{\{j \geq 0\}}) 1_{\{k \geq 0\}}$$

Et quant à la deuxième somme, elle est égale à

$$\gamma(1) \sum_{t=0}^{\infty} \psi_{j,k}(t) \psi_{j,k}(t+1) = \alpha \sigma^2 (1 - \frac{3}{2^j}) 1_{\{j \geq 1\}} 1_{\{k \geq 0\}}$$

d'où

$$\eta_{j,k}^\psi = \{\gamma(0)[2^{-j}1_{\{j<0, k \equiv 0[2^{-j}]\}} + 1_{\{j \geq 0\}}] + 2\gamma(1)(1 - \frac{3}{2^j})1_{\{j \geq 1\}}\}1_{\{k \geq 0\}}$$

3. Processus autorégressif d'ordre 1

La série chronologique $(X(t), t \in \mathbb{Z})$ est processus autorégressif 1 $\mathcal{AR}(1)$:

$$X(t) = \rho X_{t-1} + \epsilon_t$$

où ϵ_t est un bruit blanc gaussien de variance σ^2 et ρ une constante réelle qu'on suppose comprise dans l'intervalle $(-1, +1)$. Cette série est causale stationnaire au second ordre. La fonction d'autocovariance γ est de la forme $\gamma(u) = \rho^u \frac{\sigma^2}{1-\rho^2}$ si $|u| \geq 0$.

La série X_t étant causale, aussi elle s'écrit sous la forme d'une moyenne mobile d'ordre infini :

$$X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha^j \epsilon_{t-j}$$

Et un calcul simple montre que le spectre d'ondelettes de la série X_t relativement à l'ondelette ψ est de la forme

$$\begin{aligned} \eta_{j,k}^\psi &= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \gamma(u) \sum_{t=0}^{+\infty} \psi_{j,k}(t) \psi_{j,k}(t+|u|) \\ &= \frac{\sigma^2}{1-\rho^2} \sum_{t=0}^{+\infty} (\psi_{j,k}(t))^2 + \frac{2\sigma^2}{1-\rho^2} \sum_{u=1}^{+\infty} \rho^u \sum_{t=0}^{+\infty} \psi_{j,k}(t) \psi_{j,k}(t+u) \end{aligned}$$

Et en particulier, si l'ondelette ψ est l'ondelette de Haar, alors le spectre d'ondelettes ci-dessus devient

$$\begin{aligned} \eta_{j,k}^\psi &= \gamma(0)\{[2^{-j}1_{\{j<0, k \equiv 0[2^{-j}]\}} + 1_{\{j \geq 0\}}] + 2\rho(1 - \frac{3}{2^j})1_{\{j \geq 1\}} \\ &\quad + [2 \sum_{u=0}^{2^j-1} \rho^u(1 - \frac{3u}{2^j}) - 2 \sum_{u=2^{j-1}+1}^{2^j-1} \rho^u(1 - \frac{u}{2^j})]1_{\{j>1\}}\}1_{\{k \geq 0\}} \end{aligned}$$

4. Processus autorégressif et moyenne mobile d'ordre (1, 1)

La série chronologique $(X(t), t \in \mathbb{Z})$ est un processus autorégressif et moyenne mobile d'ordre (1,1) ($\mathcal{ARMA}(1, 1)$) :

$$X_t - \phi X_{t-1} = \epsilon_t + \alpha \epsilon_{t-1}$$

où ϵ_t est un bruit blanc de variance σ^2 et ϕ et α deux constantes réelles. Si $\phi \in (-1, +1)$, alors cette série est causale et s'écrit comme une moyenne mobile infinie du bruit blanc ϵ_t :

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \left(1 + \frac{\alpha}{\phi}\right) \epsilon_{t-j}$$

et cette écriture permet de voir que cette série est stationnaire au second ordre et un calcul simple de la fonction d'autocovariance γ fournit

$$\gamma(u) = \frac{(\alpha + \phi)(\alpha + \frac{1}{\phi})}{1 - \phi^2} \sigma^2 \phi^{|u|}$$

Et par suite le spectre d'ondelettes de cette série relativement à l'ondelette ψ s'écrit

$$\eta_{j,k}^{\psi} = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \gamma(h) \sum_{t=0}^{+\infty} \psi_{j,k}(t) \psi_{j,k}(t + |h|)$$

et en particulier, si ψ est l'ondelette de Haar, alors

$$\begin{aligned} \eta_{j,k}^{\psi} &= \gamma(0) \{2^{-j} 1_{\{j < 0, k \equiv 0[2^{-j}]\}} + 1_{\{j \geq 0\}}\} + 2\gamma(1) \left(1 - \frac{3}{2^j}\right) 1_{\{j \geq 1, k \geq 0\}} \\ &+ \sum_{h=0}^{2^j-1} \gamma(|h|) \left(1 - \frac{3|h|}{2^j}\right) + \sum_{h=2^{j-1}+1}^{2^j-1} \gamma(|h|) \left(1 - \frac{3|h|}{2^j}\right) \end{aligned}$$

3.1.2 Transformée en ondelettes discrètes et propriétés asymptotiques

On développe quelques propriétés probabilistes de la transformation en ondelettes discrètes d'une trajectoire finie de taille $T = 2^m$ d'une série chronologique $\{X(t), t \in \mathbb{Z}\}$ centrée et stationnaire au second ordre et où m est un entier rationnel strictement positif.

Définition 25 On appelle transformée en ondelettes discrète de la série $\{X(t)\}$ relativement à une ondelette ψ la fonction $d_{j,k}^\psi$ définie pour tous $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ et $k \in \{0, 1, \dots, 2^{m-j}\}$ par

$$d_{j,k}^\psi = \sum_{t=1}^T X(t) \psi_{j,k}(t)$$

Proposition 11 La transformée en ondelettes discrète $d_{j,k}^\psi$ est centrée et si l'hypothèse (3.1) est satisfaite alors $d_{j,k}^\psi$ converge en moyenne quadratique vers le spectre d'ondelettes $\eta_{j,k}^\psi$ de la série $\{X(t)\}$ relativement à l'ondelette ψ .

Démonstration

Le fait que $d_{j,k}^\psi$ est de moyenne nulle vient de ce que la série $\{X(t)\}$ est centrée et un calcul simple de la variance nous donne

$$\begin{aligned} \text{var}(d_{j,k}^\psi) &= \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \gamma(t-s) \psi_{j,k}(t) \psi_{j,k}(s) \\ &= \sum_{u=-(T-1)}^{T-1} \sum_{t=1}^{T-|u|} \gamma(u) \psi_{j,k}(t+|u| \cdot 1_{\{u \geq 1\}}) \psi_{j,k}(t+|u| \cdot 1_{\{u \leq 0\}}) \end{aligned}$$

Alors compte tenu de l'hypothèse (3.1) et en suivant la démonstration du théorème 1, on obtient en passant à la limite quand $T \rightarrow +\infty$: $\text{var}(d_{j,k}^\psi) \longrightarrow \eta_{j,k}^\psi$. ■

Exemple

La transformée en ondelettes discrète de l'ondelette de Haar est donnée par

$$\begin{aligned} d_{j,k}^\psi &= \sum_{t=1}^T X(t) 2^{\frac{-j}{2}} [1_{[2^j k, 2^j(k+\frac{1}{2})[} + 1_{[2^j(k+\frac{1}{2}), 2^j(k+1)[}] \\ &= 2^{\frac{-j}{2}} \left[\sum_{t=k2^j}^{2^j(k+\frac{1}{2})-1} X(t) - \sum_{t=2^j(k+\frac{1}{2})}^{2^j(k+1)-1} X(t) \right] \end{aligned}$$

Définition 26 On appelle covariance asymptotique de la transformée en ondelettes par rapport à l'ondelette ψ la fonction

$$\eta_{(j,j'),(k,k')}^\psi = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{t=0}^{+\infty} \gamma(u) \psi_{j,k}(t+|u| \cdot 1_{\{u>0\}}) \psi_{j',k'}(t+|u| \cdot 1_{\{u \leq 0\}})$$

où γ est la fonction de covariance de la série $\{X(t)\}$ et $j, k, j', k' \in \mathbb{Z}$.

On remarquera que si $j = j'$ et $k = k'$ alors $\eta_{(j,j'),(k,k')}^\psi = \eta_{(j,j')}^\psi$. De plus, comme on devait s'y attendre, on a le résultat suivant

Proposition 12 *Sous l'hypothèse (3.1), on a lorsque $T \rightarrow +\infty$*

$$\text{cov}(d_{j,k}^\psi, d_{j',k'}^\psi) \longrightarrow \eta_{(j,j'),(k,k')}^\psi$$

Démonstration

On a

$$E(d_{j,k}^\psi d_{j',k'}^\psi) = \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \gamma(t-s) \psi_{j,k}(t) \psi_{j',k'}(s) \quad (3.5)$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\begin{aligned} E(d_{j,k}^\psi d_{j',k'}^\psi) &= \sum_{u=-(T-1)}^{T-1} \sum_{t=\max(1,1+u)}^{\min(T,T+u)} \gamma(u) \psi_{j,k}(t) \psi_{j',k'}(t-u) \\ &= \sum_{u=-(T-1)}^0 \sum_{t=1}^{T+u} \gamma(u) \psi_{j,k}(t+u \cdot 1_{u \geq 1}) \psi_{j',k'}(t-u \cdot 1_{u \leq 0}) \\ &\quad + \sum_{u=1}^{T-1} \sum_{t=(1+u)}^T \gamma(u) \psi_{j,k}(t) \psi_{j',k'}(t-u) \end{aligned}$$

En procédant à un changement de variable, cette dernière relation devient

$$E(d_{j,k}^\psi d_{j',k'}^\psi) = \sum_{u=-(T-1)}^{T-1} \sum_{t=1}^{T-|u|} \gamma(u) \psi_{j,k}(t+|u| \cdot 1_{\{u \geq 1\}}) \psi_{j',k'}(t+|u| \cdot 1_{u \leq 0}) \quad (3.6)$$

Comme le second membre de (3.5) converge sous l'hypothèse (3.1) (reprendre la démonstration du théorème 1), on en déduit en faisant tendre T vers $+\infty$, que

$$E(d_{j,k}^\psi d_{j',k'}^\psi) \rightarrow \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{t=1}^{+\infty} \gamma(u) \psi_{j,k}(t+|u| \cdot 1_{\{u \geq 1\}}) \psi_{j',k'}(t+|u| \cdot 1_{u \leq 0})$$

d'où le résultat. ■

Proposition 13 *Si la condition (3.1) est satisfaite, alors on a lorsque $T \rightarrow +\infty$*

$$E\{d_{j,k}^\psi d_{j',k'}^\psi\} = O(1)$$

Démonstration

Réécrivons d'abord la somme (3.6) sous une forme analogue à (3.3) :

$$E(d_{j,k}^\psi d_{j',k'}^\psi) = \sum_{u=-(T-1)}^{T-1} \gamma(u) \sum_{t=1}^{T-|u|} \psi_{j,k}(t) \psi_{j',k'}(t) + \varepsilon_T$$

où

$$\varepsilon_T = \sum_{u=-(T-1)}^{T-1} \gamma(u) \sum_{t=1}^{T-|u|} \psi_{j,k}(t) (\psi_{j',k'}(t-|u|) - \psi_{j',k'}(t))$$

En suivant la démonstration du théorème 1, on trouve que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{u=-(T-1)}^{T-1} \gamma(u) \sum_{t=1}^{T-|u|} \psi_{j,k}(t) \psi_{j',k'}(t) \right| &\leq \sum_{u=-(T-1)}^{T-1} |\gamma(u)| \sum_{t=1}^{T-|u|} |\psi_{j,k}(t)| |\psi_{j',k'}(t)| \\ &\leq \sum_{u=-(T-1)}^{T-1} |\gamma(u)| 2^{\frac{j+j'}{2}} \alpha^2 |[\text{supp} \psi_{j,k}] \cap [\text{supp} \psi_{j,k'}]| \\ &< +\infty \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varepsilon_T &\leq \sum_{u=-(T-1)}^{T-1} |\gamma(u)| 2^{\frac{-(j'+j)}{2}} \alpha v |u| \\ &\leq 2^{\frac{-(j'+j)}{2}} \alpha v \sum_{u=-(T-1)}^{T-1} |u| |\gamma(u)| \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

D'où il résulte en faisant tendre T vers $+\infty$ et compte tenu de la condition (3.1)

que $E(d_{j,k}^\psi d_{j',k'}^\psi) = O(1)$. ■

On remarque que contrairement au cas de la transformée de Fourier où la covariance est asymptotiquement nulle sous certaines conditions, la transformée en ondelettes discrète entre deux paires (j, k) et (j', k') distinctes n'est pas nécessairement asymptotiquement nulle. Cependant, si l'ondelette ψ est à support compact de la forme $[K_1, K_2]$ où $K_1, K_2 \geq 0$ et si $\gamma(u) \neq 0$ pour $|u| \ll U \ll T$, alors $d_{j,k}^\psi$ et $d_{j,k'}^\psi$ sont

non corrélées si $|k' - k| > K_2 - K_1 + \frac{U}{2^j}$, $j = 1, \dots, m$ et $k = 0, 1, \dots, 2^{m-j} - 1$. Les mêmes hypothèses dans la même situation on a l'indépendance.

Le résultat suivant fournit la distribution asymptotique de la transformée en ondelette discrète $d_{j,k}^\psi$.

Théorème 20 *Supposons que le processus $(X(t))$ est strictement stationnaire et notons $\mathcal{M}_t$ la sous σ -algèbre engendrée par la suite $\{X_s, s \leq t\}$ avec $\mathcal{M}_{-\infty}$ la σ -algèbre triviale. Posons $\forall j \geq 0$*

$$\alpha_j = E[\{E(X(t)/M_{t-j}) - E(X(t)/M_{t-j-1})\}^2]^{\frac{1}{2}} \quad (3.7)$$

Si $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j < \infty$ et si

$$E(d_{j_m, k_m}^\psi d_{j_n, k_n}^\psi) \rightarrow \eta_{(j_m, j_n), (k_m, k_n)}^\psi$$

quand $T \rightarrow \infty$, et ce pour $(j_1, k_1), \dots, (j_p, k_p)$ et $m, n = 1, \dots, p$, alors on a

$$(d_{j_1, k_1}^\psi, \dots, d_{j_p, k_p}^\psi)' \rightarrow \mathcal{N}(0, \eta_{(j_m, j_n), (k_m, k_n)}^\psi) \quad (3.8)$$

quand $T \rightarrow \infty$

On renvoie à (Hannan [HAN73]) pour une démonstration qui s'appuie sur un critère de mélangeance forte.

On déduit pour tous j et k que $d_{j,k}^\psi$ a pour distribution asymptotique la loi normale centrée et de variance $\eta_{j,k}^\psi$.

Ce résultat suggère d'estimer $\eta_{j,k}^\psi$ par l'analogie du périodogramme classique.

Définition 27 *On appelle périodogramme en ondelettes de la série $\{X(t)\}$ relativement à l'ondelette ψ , la statistique $I_{j,k}^\psi$ définie pour tout couple $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$ par*

$$I_{j,k}^\psi = (d_{j,k}^\psi)^2 \quad (3.9)$$

Comme pour le périodogramme classique, le résultat suivant permet d'établir que le périodogramme en ondelettes est un estimateur asymptotiquement sans biais.

Théorème 21 *Si la condition (3.1) est satisfaite, alors on a*

$$E(I_{j,k}^\psi) = \eta_{j,k}^\psi + O(T^{-1}) \quad (3.10)$$

Démonstration

La moyenne du membre de droite de l'équation (3.9), peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} E(I_{j,k}^\psi) &= \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \gamma(t-s) \psi_{j,k}(t) \psi_{j,k}(s) \\ &= \sum_{u=-(T-1)}^{T-1} \gamma(u) \sum_{t=1}^{T-|u|} \psi_{j,k}(t) \psi_{j,k}(t+|u|) \end{aligned}$$

et que l'on peut encore écrire sous la forme

$$E(I_{j,k}^\psi) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \gamma(u) \sum_{t=0}^{\infty} \psi_{j,k}(t) \psi_{j,k}(t+|u|) + \eta_T \quad (3.11)$$

où

$$\begin{aligned} \eta_T &= \sum_{u=T}^{\infty} \gamma(u) \sum_{t=0}^{\infty} \psi_{j,k}(t) \psi_{j,k}(t+|u|) + \sum_{u=-\infty}^{-T} \gamma(u) \sum_{t=0}^{\infty} \psi_{j,k}(t) \psi_{j,k}(t+|u|) \\ &+ \sum_{u=-(T-1)}^{T-1} \gamma(u) \sum_{t=T}^{\infty} \psi_{j,k}(t-|u|) \psi_{j,k}(t). \end{aligned}$$

Par ailleurs, ce dernier terme peut être majoré en valeurs absolue par

$$|\eta_T| \leq |S_1| + |S_2| + |S_3|$$

où

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{u=T}^{\infty} \gamma(u) \sum_{t=0}^{\infty} \psi_{j,k}(t) \psi_{j,k}(t+|u|) \\ S_2 &= \sum_{u=-\infty}^{-T} \gamma(u) \sum_{t=0}^{\infty} \psi_{j,k}(t) \psi_{j,k}(t+|u|) \end{aligned}$$

et

$$S_3 = \sum_{u=-(T-1)}^{T-1} \gamma(u) \sum_{t=T}^{\infty} \psi_{j,k}(t-|u|) \psi_{j,k}(t).$$

Par suite

$$\begin{aligned}
|S_1| &\leq \frac{1}{T} \sum_{u=T}^{+\infty} |u| |\gamma(u)| \sum_{t=0}^{+\infty} |\psi_{j,k}(t) \psi_{j,k}(t+|u|)| \\
&\leq \frac{1}{T} \sum_{u=-\infty}^{+\infty} |u| |\gamma(u)| \sum_{t=0}^{+\infty} |\psi_{j,k}(t) \psi_{j,k-2^{-j}|u|}(t)| \\
&\leq \frac{1}{T} \sum_{u=-\infty}^{\infty} |u| |\gamma(u)| 2^{-j} \alpha |[\text{supp} \psi_{j,k}] \cap [\text{supp} \psi_{j,k-2^{-j}|u|}]|
\end{aligned}$$

et compte tenu de la condition (3.1), il vient que

$$S_1 = O(T^{-1})$$

La même démonstration pour S_2 donne

$$S_2 = O(T^{-1})$$

Concernant S_3 , on a

$$\begin{aligned}
|S_3| &\leq \frac{1}{T} \sum_{u=-\infty}^{\infty} |\gamma(u)| \sum_{t=T}^{\infty} t |\psi_{j,k+2^{-j}|u|} \psi_{j,k}(t)| \\
&\leq \frac{1}{T} \sum_{u=-\infty}^{\infty} |\gamma(u)| 2^{-j} \alpha |[\text{supp} \psi_{j,k+2^{-j}|u|}] \cap [\text{supp} \psi_{j,k}]| M_{\psi}
\end{aligned}$$

Où $-\infty < M_{\psi} = \sup_{j,k} \{[\text{supp} \psi_{j,k+2^{-j}|u|}] \cap [\text{supp} \psi_{j,k}]\} < \infty$ d'où

$$S_3 = O(T^{-1})$$

Le résultat en découle en reportant ces résultats dans l'équation (3.11). ■

On déduit ainsi, le résultat suivant :

Corollaire 5 *Sous la condition (3.1), $I_{j,k}^{\psi}$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de $\eta_{j,k}^{\psi}$*

Théorème 22 *Sous l'hypothèse du théorème 2, $I_{j,k}^{\psi}$ est asymptotiquement une variable du $\eta_{j,k}^{\psi} \chi_1^2$ où χ_1^2 désigne une variable aléatoire du Khi-deux à 1 degré de liberté.*

Démonstration

On a déjà vu que $d_{j,k}^\psi$ a une distribution asymptotique la loi normale centrée et de variance $\eta_{j,k}^\psi$, ce qui fait que $\frac{I_{j,k}^\psi}{\eta_{j,k}^\psi}$ est pour T grand distribuée suivant une loi du χ_1^2 d'où nous déduisons que $I_{j,k}^\psi$ a une distribution asymptotique celle d'une variable $\eta_{j,k}^\psi \chi_1^2$. ■

La variance asymptotique de $I_{j,k}^\psi = 2(\eta_{j,k}^\psi)^2$ est non nulle et en conséquent le périodogramme en ondelette $I_{j,k}^\psi$ est un estimateur non consistant de $\eta_{j,k}^\psi$. L'approche classique, consiste à lisser le périodogramme moyennant sa convolution par une fenêtre assez régulière. Dans ce contexte, l'approche n'est guère différente.

Lissage du périodogramme

Une manière de lisser le périodogramme d'ondelettes est l'utilisation d'un opérateur de lissage dit **shrinkage** ou élimination . Cette méthode consiste comme pour le lissage du périodogramme standard, à éliminer les coefficients d'ondelettes inférieur à un certain seuil (Donoho [DON06]). La procédure de shrinkage comporte trois étapes :

1. On calcule les coefficients $d_{j,k}^\psi(t)$,
2. On élimine les coefficients d'ondelettes par seuillage (il y a au préalable un choix d'un seuil)
3. Inverser les coefficients d'ondelettes seuillé. pour reconstruire le signal.

Le lissage par seuillage nécessite un choix convenable d'une fonction seuil. Parmi les choix, il y en a deux largement utilisés en pratique (C C et P Morettin [SAO97]) :

1. Seuil hard

$$\delta_h(d_{j,k}^\psi, \lambda) = d_{j,k}^\psi 1_{|d_{j,k}^\psi| > \lambda}$$

2. Seuil soft

$$\delta_s(d_{j,k}^\psi, \lambda) = \text{sign}(d_{j,k}^\psi) [|d_{j,k}^\psi| - \lambda]^+$$

Il s'agit alors de bien choisir la fonction seuil δ et le seuil λ . C'est l'étape la plus cruciale. On propose ensuite un estimateur non-linéaire de shrinkage pour j fixé défini comme suit

$$I_{j,k}^{(\psi, \lambda^j)} = \sum_l \sum_s \delta_h(C_{l,s}^j, \lambda^j) \widehat{\psi_{l,s}}(k) \quad (3.12)$$

par rapport à une base orthonormée d'ondelettes $\widehat{\psi_{l,s}}(k)$ pour un $J < M$, $j = \overline{1, J}$ et $k = 0, \dots, 2^j - 1$ et où

$$C_{l,s}^j = \frac{1}{2^j} \sum_{k=0}^{2^j-1} I_{j,k}^\psi \widehat{\psi_{l,s}}(k)$$

pour tous $l = 1, \dots, j$ et $s = 0, \dots, 2^l - 1$.

Le seuil $\lambda^j = \lambda_j \sigma_l^{(j)}$ et $\sigma_l^{(j)}$ estimé pour tout niveau l et le paramètre $\lambda_j = \sqrt{2 \log(2^j)}$ (paramètre universelle ou procédure minimax.

3.2 Application des ondelettes aux séries chronologiques non stationnaires

On consacre ce second paragraphe à l'application des ondelettes aux séries chronologiques non stationnaires. En fait, nous étudierons un aspect de ce problème, en considérant des séries non stationnaires mais à accroissements stationnaires. Un second aspect de ce problème non abordé dans ce travail, porte sur les processus localement stationnaires. Ce concept introduit récemment par Priestley [PRI95], s'appuie sur le développement de Loeve Karuhène, l'analogue du théorème de Cramer pour les séries chronologiques stationnaires. Pour plus de détails sur l'application des ondelettes à la classe des séries localement stationnaires nous renvoyons aux références [TOR97] et [Y.NI98].

3.2.1 La transformation en ondelettes de séries chronologiques à accroissements stationnaires

Soit $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ une s à valeurs réelles, centrée, continue en moyenne quadratique et à accroissements stationnaires. On note

$$R(t, \tau_1, \tau_2) = E[X(s + t + \tau_1) - X(s + t)][X(s + \tau_2) - X(s)]$$

la fonction d'autocovariance des accroissements du processus $(X(t))$. Notons que la fonction de covariance R ne dépend pas de s car Le processus des accroissements est stationnaires au second ordre. En outre, R est continue car le processus est continue en moyenne quadratique. On remarquera aussi que

$$R(0, \tau_1, \tau_2) = E\{(X_{\tau_1} - X_0)(X_{\tau_2} - X_0)\}$$

et on suppose que $X_0 = 0$ p.s. On rappelle le résultat suivant.

Théorème 23 (*Doob pp.453*)

La fonction de covariance R du processus des accroissements du processus $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ à accroissements stationnaires, admet une représentation spectrale donnée par

$$R(t, \tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} dF(\lambda) \tag{3.13}$$

où F est la mesure spectrale associée au processus des accroissements, définie par

$$dF(\lambda) = \frac{1 - e^{i\tau_1\lambda}}{i\lambda} \frac{1 - e^{-i\tau_2\lambda}}{-i\lambda} (1 + \lambda^2) d\mu(\lambda) \quad (3.14)$$

où μ est une mesure finie sur la tribu des boréliens $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}$.

Soit ψ une ondelette analysante et soit $\{W_a(t) : (t, a) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)\}$ la transformée en ondelettes continue d'un processus $\{X(t)\}$ définie par

$$W_a(t) = a^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} X(s) \psi\left(\frac{s-t}{a}\right) ds = a^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} X(au+t) \psi(u) du$$

Le résultat suivant précise quelques propriétés du second ordre du processus $\{W_a(t)\}$ lorsque le processus est à accroissements stationnaires.

Théorème 24 Soit $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus aléatoire à valeurs réelles, centrée, continue en moyenne quadratique et à accroissements stationnaires et soit $\{W_a(t), t \in \mathbb{R}, a > 0\}$ le processus des transformées en ondelettes du processus X . Le processus $\{W_a(t)\}$ est stationnaire au second ordre, centré et de fonction de covariance R_{W_a} définie par sa représentation spectrale

$$R_{W_a}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau\lambda} F_{W_a}(d\lambda)$$

où F_{W_a} est la mesure spectrale associée au processus $\{W_a(t), t \in \mathbb{R}, a > 0\}$ donnée par

$$dF_{W_a}(\lambda) = a \frac{|\widehat{\psi}(a\lambda)|^2}{\lambda^2} (1 + \lambda^2) d\mu(\lambda) \quad (3.15)$$

où μ est mesure finie sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$.

Démonstration

En utilisant le théorème de Fubini, on déduit que le processus $\{W_a(t), t \in \mathbb{R}, a > 0\}$ est centré. Définissons maintenant la fonction de covariance croisée du processus d'ondelettes en posant pour tous $a_1, a_2 > 0$:

$$R_{W_{a_1}, W_{a_2}}(\tau) = E(W_{a_1}(t+\tau)W_{a_2}(t))$$

En remplaçant maintenant $W_{a_1}(t+\tau)$ et $W_{a_2}(t)$ par leur expression et en appliquant le théorème de Fubini, la fonction de covariance croisée devient

$$R_{W_{a_1}, W_{a_2}}(\tau) = (a_1 a_2)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R(0, a_1 u + \tau, a_2 \tau) \psi(u) \psi(\tau) du d\tau$$

En utilisant la représentation spectrale (3.13) de la fonction d'auto-covariance $R(0, a_1 u + \tau, a_2 \tau)$ et en utilisant encore une fois le théorème de Fubini, la fonction d'autocovariance croisée se met alors sous la forme

$$R_{W_{a_1} W_{a_2}}(t) = (a_1 a_2)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} \right) d\mu(\lambda) \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u) (1 - e^{i(a_1 u + t)\lambda}) du \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau) (1 - e^{-i(a_2 \tau)\lambda}) d\tau \right\}$$

qui s'écrit encore

$$R_{W_{a_1}, W_{a_2}}(t) = (a_1 a_2)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} \frac{\widehat{\psi}(a_2 \lambda) \overline{\widehat{\psi}(a_1 \lambda)}}{\lambda^2} (1 + \lambda^2) d\mu(\lambda) \quad (3.16)$$

Cette intégrale est bien définie car ψ est admissible (lemme 1 ci-dessous) et elle fournit une représentation spectrale de la fonction de covariance croisée et d'où il est aisé ensuite de tirer l'expression de sa mesure spectrale $G_{W_{a_1}, W_{a_2}}(t)$.

En prenant maintenant $a_1 = a_2 = a$, la fonction de covariance croisée $R_{W_a, W_a}(t)$ coïncide avec la fonction d'autocovariance R_{W_a} du processus $\{W_a(t)\}$, et par conséquent, on déduit de la relation (3.16) la représentation spectrale de R_{W_a} :

$$R_{W_a}(\tau) = a \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \lambda^2) e^{i\tau\lambda} \frac{|\widehat{\psi}(a\lambda)|^2}{\lambda^2} d\mu(\lambda) \quad (3.17)$$

Cette représentation spectrale de la fonction d'autocovariance R_{W_a} confirme la stationnarité à l'ordre 2 du processus $\{W_a(t), t \in \mathbb{R}, a > 0\}$ et fournit aussi l'expression (3.14) de sa mesure spectrale. ■

Lemme 2 *Si l'ondelette ψ est admissible et à support compact, alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} \frac{\widehat{\psi}(a_2 \lambda) \overline{\widehat{\psi}(a_1 \lambda)}}{\lambda^2} (1 + \lambda^2) d\mu(\lambda)$$

est bien définie.

Démonstration

On a compte tenu de la condition d'admissibilité de l'ondelette ψ ,

$$\left| \frac{\widehat{\psi}(\lambda)}{\lambda} \right| \leq M \quad (3.18)$$

pout tout $\varepsilon > 0 : |\lambda| < \varepsilon$. Par suite,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(a\lambda)|^2}{\lambda^2} (1 + \lambda^2) d\mu(\lambda) &= \int_{\{|\lambda| \leq \frac{\varepsilon}{a}\}} \frac{|\widehat{\psi}(a\lambda)|^2}{\lambda^2} (1 + \lambda^2) d\mu(\lambda) \\ &+ \int_{\{|\lambda| > \frac{\varepsilon}{a}\}} \frac{|\widehat{\psi}(a\lambda)|^2}{\lambda^2} (1 + \lambda^2) d\mu(\lambda) \end{aligned}$$

laquelle est finie, car

$$\int_{\{|\lambda| \leq \frac{\varepsilon}{a}\}} \frac{|\widehat{\psi}(a\lambda)|^2}{\lambda^2} (1 + \lambda^2) d\mu(\lambda) \leq a^2 M^2 (1 + \frac{\varepsilon^2}{a^2}) \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(\lambda) < +\infty$$

et

$$\int_{\{|\lambda| > \frac{\varepsilon}{a}\}} \frac{|\widehat{\psi}(a\lambda)|^2}{\lambda^2} (1 + \lambda^2) d\mu(\lambda) \leq \|\psi\|^2 (1 + \frac{a^2}{\varepsilon^2}) \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(\lambda) < +\infty$$

■

Corollaire 6 *Si μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $d\lambda$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ et si h désigne sa dérivée de Radon Nicodym par rapport à $d\lambda$, alors la transformée en ondelettes $\{W_a(t), t \in \mathbb{R}, a > 0\}$ admet pour densité spectrale*

$$f_{W_a}(\lambda) = a \frac{|\widehat{\psi}(a\lambda)|^2}{\lambda^2} (1 + \lambda^2) h(\lambda) \quad (3.19)$$

La mesure spectrale croisée asmet elle aussi une densité spectrale croisée donnée par

$$f_{W_{a_1} W_{a_2}}(\lambda) = (a_1 a_2)^{\frac{1}{2}} \frac{\widehat{\psi}(a_2 \lambda) \overline{\widehat{\psi}(a_1 \lambda)}}{\lambda^2} (1 + \lambda^2) h(\lambda)$$

3.2.2 Application au mouvement brownien fractionnaire

Définition 28 *Le mouvement brownien fractionnaire d'indice $H \in]0, 1[$ noté $\{B_H(t) : t \in \mathbb{R}\}$, est un processus Gaussien, centré et tel que*

1. $B_H(0) = 0$ p.s
2. $B_H(t)$ est à accroissements stationnaires et $B_H(t+\delta) - B_H(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma |\delta|^H)$

L'indice H est appelé l'exposant de Hurst et on remarquera que si $H = \frac{1}{2}$ le processus $(B_{\frac{1}{2}}(t))$ est le mouvement brownien standard.

Proposition 14 *La fonction d'autocovariance du mouvement brownien fractionnaire est donnée par*

$$\gamma_H(t, s) = \frac{\sigma^2}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}) \quad (3.20)$$

où

$$\sigma^2 = \text{var}(B_H(1)) = \Gamma(1 - H) \frac{\cos(\pi H)}{\pi H}.$$

Démonstration

Elle résulte directement de l'identité

$$E(B_H(t)B_H(s)) = \frac{1}{2}\{E(B_H(t))^2 + E(B_H(s))^2 - E(B_H(t) - B_H(s))^2\}$$

et de ce que $B_H(t) - B_H(s) \triangleq B_H(t - s)$ (au sens que ces deux variables ont même distribution de probabilité) $\mathcal{N}(0, \sigma |t - s|^H)$. ■

Ce résultat montre que le mouvement brownien fractionnaire n'est pas stationnaire et de plus sa fonction de covariance n'est pas intégrable ($\int_{\mathbb{R}^2} \gamma_H(t, s) ds dt = \infty$), contrairement aux processus faiblement dépendants ou vérifiant une propriété de mélange et dont la fonction de covariance est absolument sommable. Les processus dont la fonction de covariance n'est pas absolument sommable, sont dits à mémoire longue ou encore fortement dépendant. Concernant le mouvement brownien fractionnaire, on a

Corollaire 7 *Les accroissements d'un mouvement brownien fractionnaire d'indice H sont à dépendance à long terme si et seulement si $H > \frac{1}{2}$.*

Une des propriétés intrinsèque du mouvement brownien fractionnaire d'indice $H \in (0, 1)$ est la **self similarité** d'indice H :

Cette propriété stipule que les trajectoires de ces deux processus restent inchangées si les axes de coordonnées sont respectivement dilatés d'une quantité α et αH . Autrement dit une partie de la trajectoire du mouvement brownien fractionnaire est une version contractée d'une version plus grande de cette trajectoire. Une telle trajectoire est dite une fractale, et elle se prête bien à l'analyse par ondelette qui sont toutes des copies conformes d'une ondelette mère. Les ondelettes font ressortir

le caractère self similaire du mouvement brownien fractionnaire et décompose ce dernier en sous processus stationnaires associés à une discrétisation des niveaux d'échelle. Pour une étude exhaustive du mouvement brownien fractionnaire, nous renvoyons à l'article de Mandelbrott et Van Nees [MAN66].

Définition 29 *On appelle bruit blanc Gaussien fractionnaire d'indice H le processus $\{\varepsilon(t) : t \in \mathbb{R}\}$ défini par*

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\delta}(B_H(t + \delta) - B_H(t)) \quad (3.21)$$

pour δ réel strictement positif suffisamment petit. Dans le cas discret, le bruit blanc Gaussien fractionnaire d'indice H sera défini par

$$\varepsilon(t) = B_H(t + 1) - B_H(t), \forall t \in \mathbb{R} \quad (3.22)$$

Proposition 15 *Le bruit blanc Gaussien fractionnaire $\{\varepsilon(t) : t \in \mathbb{R}\}$ d'indice H dans l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1[$ est stationnaire et de fonction d'autocovariance de la forme*

$$E(\varepsilon_H(t, \delta)\varepsilon_H(t + \tau, \delta)) = \frac{\sigma^2}{2}\delta^{2H-2}[(\frac{|\tau|}{\delta} + 1)^{2H} - 2|\frac{\tau}{\delta}|^{2H} + |\frac{\tau}{\delta} - 1|^{2H}] \quad (3.23)$$

et si $\tau \gg \delta$ alors cette fonction d'autocovariance est pour τ grand de la forme

$$E(\varepsilon_H(t, \delta)\varepsilon_H(t + \tau, \delta)) \sim \sigma^2 H(2H - 1) |\tau|^{2H-2} \quad (3.24)$$

et sa densité spectrale est de la forme

$$f_{B_H, \delta}(\lambda) \sim |\lambda|^{-1-2H} \quad (3.25)$$

pour $\lambda : 0 < |\lambda| \ll \delta^{-1}$

Application des ondelettes au mouvement brownien fractionnaire

On peut déduire de ce qui précède, le spectre du mouvement brownien fractionnaire tel que donné par Flandrin [FLA92]. Ce qui nous permettrait ensuite de déduire une estimation de l'indice H en remplaçant le spectre de la transformée en ondelettes par son estimateur à savoir le périodogramme en ondelettes.

Rappelons que le mouvement brownien fractionnaire est un processus centré à accroissements stationnaire et continue en moyenne quadratique. Si on suppose que la

densité spectrale du mouvement brownien fractionnaire d'indice H $0 < H < 1$, est donnée par :

$$h(\lambda) = \frac{1}{|\lambda|^{2H-1} (1 + \lambda^2)}.$$

La fonction h admet un pôle en 0 et elle est bien définie sur un disque pointé en 0. Alors pour une ondelette admissible ψ , on déduit du corollaire 6 ci-dessus, la densité spectrale de la transformée en ondelettes $\{W_a(t) : (t, a) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)\}$ du mouvement brownien fractionnaire :

$$f_{W_a}(\lambda) = a |\widehat{\psi}(a\lambda)|^2 \frac{1}{|\lambda|^{2H+1}}$$

De cette équation on peut exprimer H en fonction de $f_{W_a}(\lambda)$ et une estimation de cet indice résulte en remplaçant $f_{W_a}(\lambda)$ par son estimation à savoir le périodogramme en ondelettes tel que décrit au paragraphe 1 ci-dessus. De ce résultat, on obtient une estimation du spectre du mouvement fractionnaire d'indice H .

De la même manière, compte tenu de la forme (3.25) de la densité spectrale du bruit blanc fractionnaire, on parvient aussi à construire une estimation de cette densité spectrale.

Les propriétés asymptotiques de l'estimateur du spectre du mouvement brownien fractionnaire, feront l'objet d'un travail de recherche à venir. On obtient les mêmes résultats en considérant la représentation en série d'ondelette d'un processus à accroissements indépendants (cf. [MAS93])

3.3 Application

En utilisant le logiciel MATLAB, on a simulé des trajectoires finies d'un processus $\mathcal{AR}(1)$ causale. Moyennant ces observations on a calculé une estimation du périodogramme classique et celui du périodogramme d'ondelettes shrinké. Le périodogramme d'ondelettes lissé est construit en considérant comme ondelette de base, une ondelette gaussienne définie par $\psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.

On a simulé deux séries de taille 1024 et une de taille 10000 d'un processus $\mathcal{AR}(1)$ avec pour coefficient d'autorégression $\alpha = 0.7$ pour la série de taille 10.000 et $\alpha = .5$ pour les séries de taille 1024, avec une variance de la variable résiduelle égale à $\sigma^2 = 7$. Concernant la troisième série de taille 1024, on a refait les simulations avec un coefficient d'autorégression $\alpha = 0.2$ et pour variance de la variable résiduelle $\sigma^2 = 1.2$.

Le graphe du périodogramme classique et celui du périodogramme d'ondelettes shrinké sont reproduit simultanément sur la même figure.

Bibliographie

- [AGP93] Abry Patrice et Gonalvs P . Patrick Flandrin. Wavelet, Spectrum analysis and 1/f Processes .P.O.Houston.USA.
- [DDA84] Azencott, R. et D. Dacunha Castelle 1984. Série d'observations irrégulières. Masson.
- [BRD91] Brockwell J. P. et Davis, A. R 1991. Time series :Theory and Methods. Second Edition. New York Springer Verlag.
- [CCM97] Chang Chiann et Pedro A. Morettin. A Wavelet Analysis for Time Series. SP 05508-900 Brazil.Sao paulo.
- [CHU92] C. K. CHUI 1992. An introduction to wavelets. San Diego. Academic Press.
- [DAU92] I. Daubechies 1992. Ten lectures on wavelets. CBMS - NFS Regional Series in applied Mathematics 61.
- [DCM82] Dacunha Castell et Marie Duflo. Probabilité et statistique 2) probleme à tempt mobile. Masson.
- [DON95] Donoho, D.L. 1995. De-Noising by Soft. Thresholding?. IEEE trans. On Inf. Theory. Vol. 413 pp. 613-627.
- [DOB53] J. L. Doob 1953. Stochastic processes. New york : Wiley.
- [FLA89] P. Flandrin 1989. On the spectrum of fractional brownian motion. IEEE transf. Inform. theory, vom. 35, pp. 197-199.

- [FLA92] P. Flandrin 1992. Wavelet analysis and synthetic of fractional brownian motion. IEEE transf. Inform. theory, vom. 38, pp. 910-917.
- [GAB46] D. GABOR 1946. Theory of Communication. J. IEE. London 93 pp. 429-457.
- [GAW90] C. Gasquet et P. Witcomski 1990. Analyse de Fourier et application. Dunod.
- [HAM97] S. Hamnan 2005. De l'analyse de Fourier traditionnelle aux ondelettes : une approche par le signal musical. Master de Mathématiques M1. Université Paris VI - Pierre et Marie Curie.
- [HAN73] Hannan.E.J. 1973. Central limit theorems for time series regression. 26, 157-170.
- [JPP98] . J. P Kahane, P. G. Lemari-Rieusset 1998. Série de Fourier et ondelettes. Cassini.
- [MAL89] S. Mallat 1989. Multiresolution approximation and wavelets. Trans. AMS. 615, pp. 69-88.
- [MAN68] B. B. Mandelbrot et J. W. Van Ness 1968. Fractional Brownian motion, fractional noises and applications. SIAM REv., vol. 10, n 4, pp. 422-437.
- [MAS93] E. Masry, 1993. The wavelet tranform of stochastic process with stationary increments and its application to fractional brownian motion. IEEE transaction on information theory. Vol. 39, n 1, pp. 260-264.
- [MEY89] Y. Meyer 1989. Ondelettes et oprateurs I. Hermann.
- [MME66] M. Métivier (1968). Notions fondamentales de la théorie des probabilités. Dunod.
- [MOR80] J. Morlet 1980. A Decomposition of hardy into square integrable wavelets of constant shape. SIAM J.Math Anal.
- [PRI95] Priestley M. B. (1995). Evolutionary spectra and non Stationary Processes. J. Roy. Soc.

- [TSK96] T. Subba Rao and K.C.Indukumar 1996. Spectral and Wavelet Methods for the Analysis of Nonlinear and Nonstationary Time Series. Manchester M60 1 QD,U.K.
- [TOR01] B. Torr sani. Analyse de Fourier. Cours Toulouse 2000-2001.
- [TOR97] B. Torr sani. Ondelettes - Analyse temps fréquences et signaux non stationnaires. Montpellier 97

« Les ondelettes et leurs applications aux séries chronologiques »

Résumé : Ce thème a pour objet l'étude des ondelettes et leurs applications à l'analyse statistiques des séries chronologiques stationnaires et non stationnaires. Les ondelettes fournissent un outil mathématique intéressant pour pallier à certaines carences rencontrées dans l'analyse de Fourier classique. Après un bref rappel sur les transformations de Fourier, on introduit les ondelettes et leur évolution au cours de ces 03 dernières décades. On aborde le thème essentiel de ce travail qui porte sur l'application des ondelettes aux séries chronologiques et plus particulièrement à la classe des processus à mémoire longue.

Ce travail comporte les points suivants:

- 1-La transformation de Fourier et ses applications dans les séries chronologiques.
- 2-Introduction des ondelettes : Historique et correction des applications de la transformation de Fourier.
- 3-Applications des ondelettes aux processus ARMA stationnaires et des processus à mémoire longue dont le modèle mouvement brownien fractionnaire.
- 4-Simulation des trois échantillons d'un processus AR (1) et la comparaison du périodogramme classique au périodogramme d'ondelettes issue de l'ondelette gaussienne.

Mots clés : processus à longue mémoire, Ondelettes.

« الموجات وتطبيقاتها في السلسلة الزمنية »

الخلاصة:

في هذه المذكرة قمنا بدراسة الموجات وتطبيقاتها على التحليل الإحصائي لسلسلة زمنية مستقرة وغير مستقرة. الموجات هي عبارة عن أداة رياضية مثيرة للاهتمام لمعالجة بعض أوجه القصور التي تصادف في تحليل فورييه التقليدية. وبعد استعراض موجز عن تحول فورييه، قمنا بعرض الموجات ونطورها على مدى ثلاث العقود الماضية. في هذه المذكرة تناولنا الموضوع الأساسي لهذا العمل الذي يحوي على تطبيقات الموجات على السلاسل الزمنية وخصوصا فئة سلاسل المتغيرات العشوائية ذات الذاكرة طويلة.

ويشمل هذا العمل ما يلي :

- 1- تحويلات فورييه وتطبيقاتها على السلاسل الزمنية.
- 2- مقدمة عن الموجات : التاريخية و تصحيح تطبيقات تحويلات فورييه.
- 3- تطبيقات الموجات على ARMA المستقرة و على سلاسل المتغيرات العشوائية ذات الذاكرة الطويلة

"mouvement brownien fractionnaire"

4 - محاكاة لثلاث عينات من $AR(1)$ والمقارنة بين periodogram الكلاسيكي و periodogram المويجي باستعمال موجة Gaussienne

الكلمات المفتاحية: سلاسل المتغيرات العشوائية ذات الذاكرة الطويلة، الموجات.

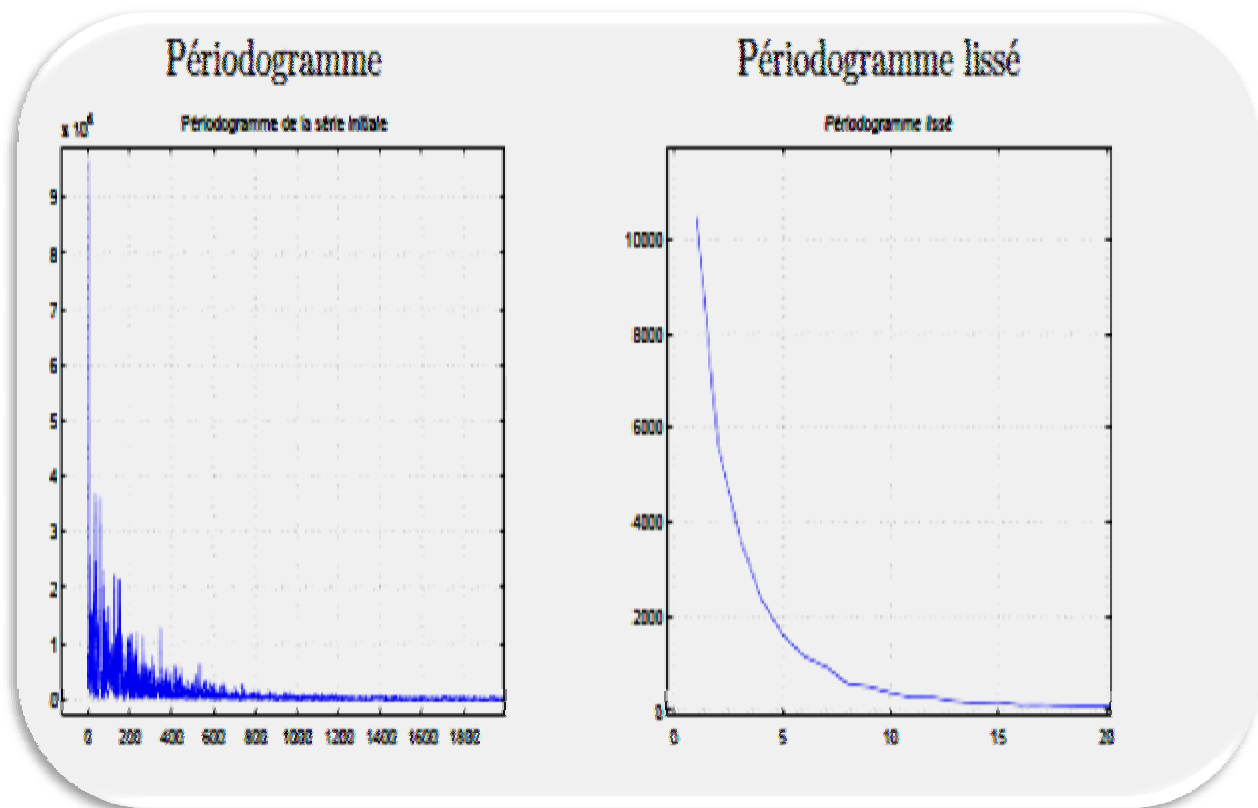


Figure.3.1-Lissage temporel du périodogramme pour $\alpha=0.7$, $\sigma^2=7$ et $n=10000$

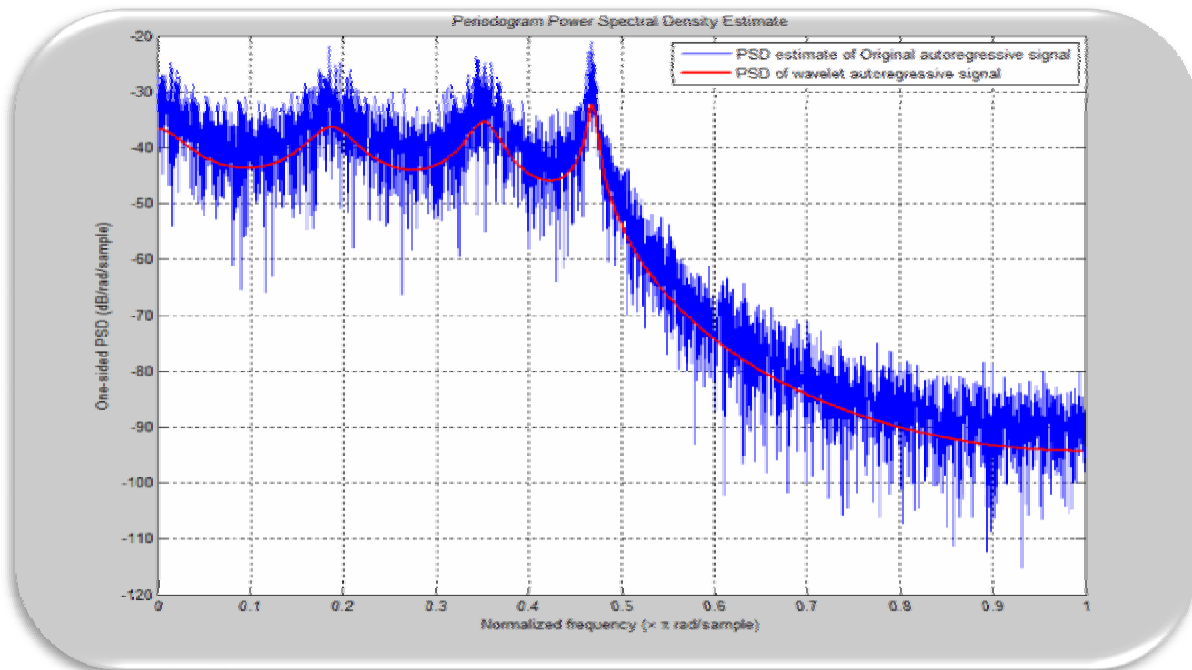


Figure.3.2-Le périodogramme et le périodogramme d'ondelettes pour $\alpha=0.5$, $\sigma^2=7$ et $n=1024$

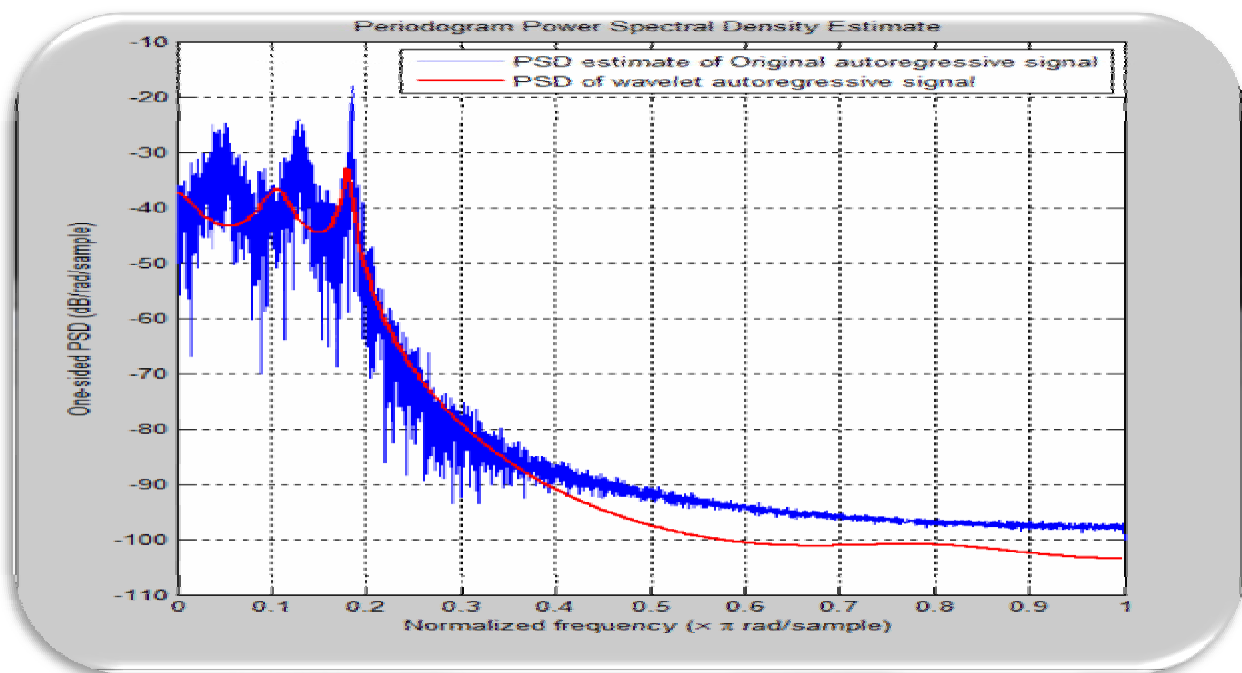


Figure.3.3-Le périodogramme et le périodogramme d'ondelettes pour $\alpha=0.2$, $\sigma^2=7$ et $n=1024$

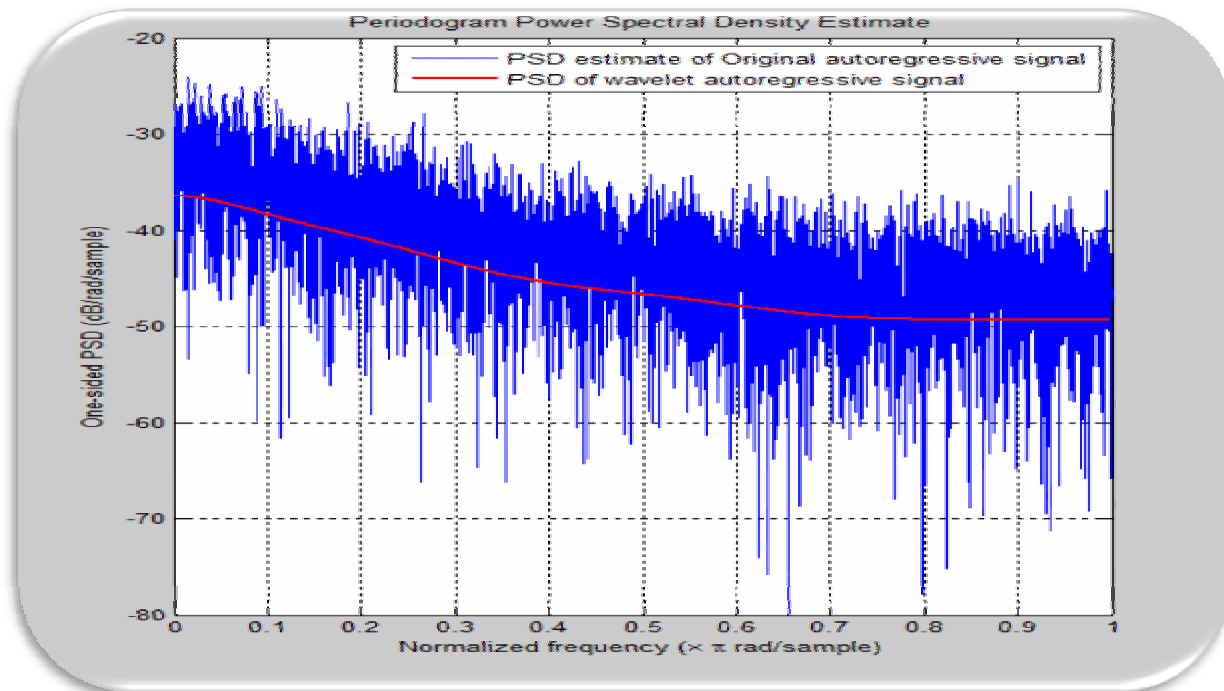


Figure.3.4-Le périodogramme et le périodogramme d'ondelettes pour $\alpha=0.5$, $\sigma^2=1.2$ et $n=1024$

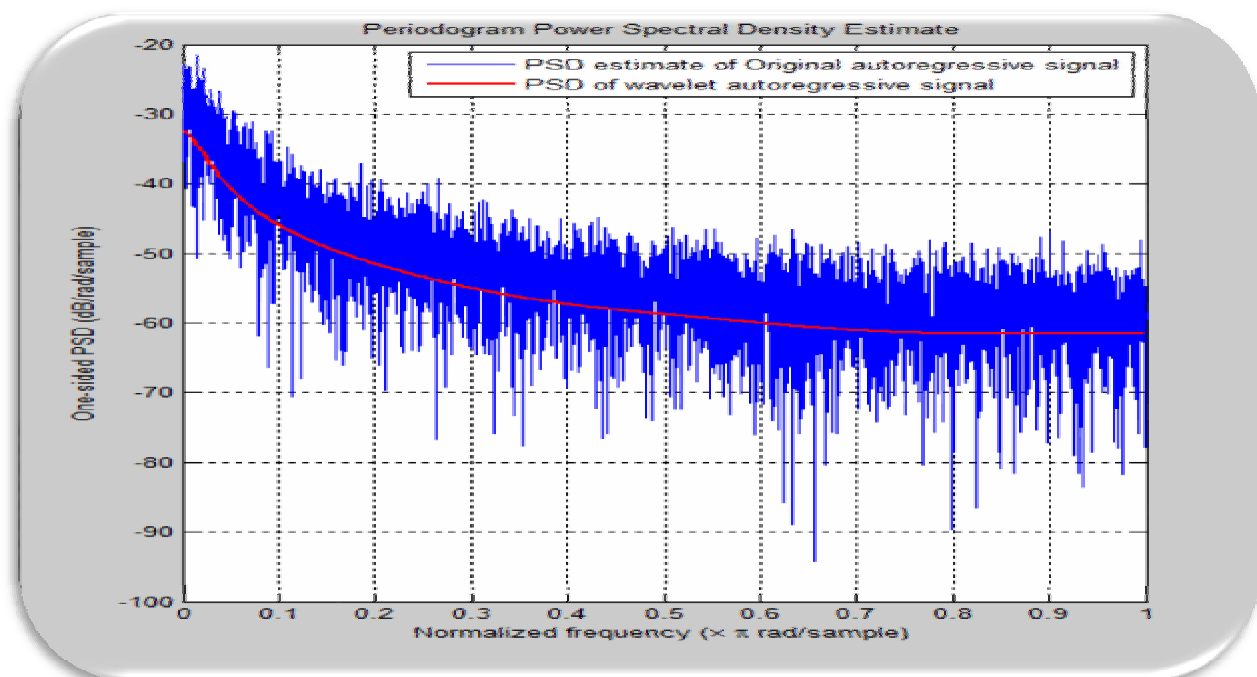


Figure.3.5-Le périodogramme et le périodogramme d'ondelettes pour $\alpha=0.2$, $\sigma^2=1.2$ et $n=1024$

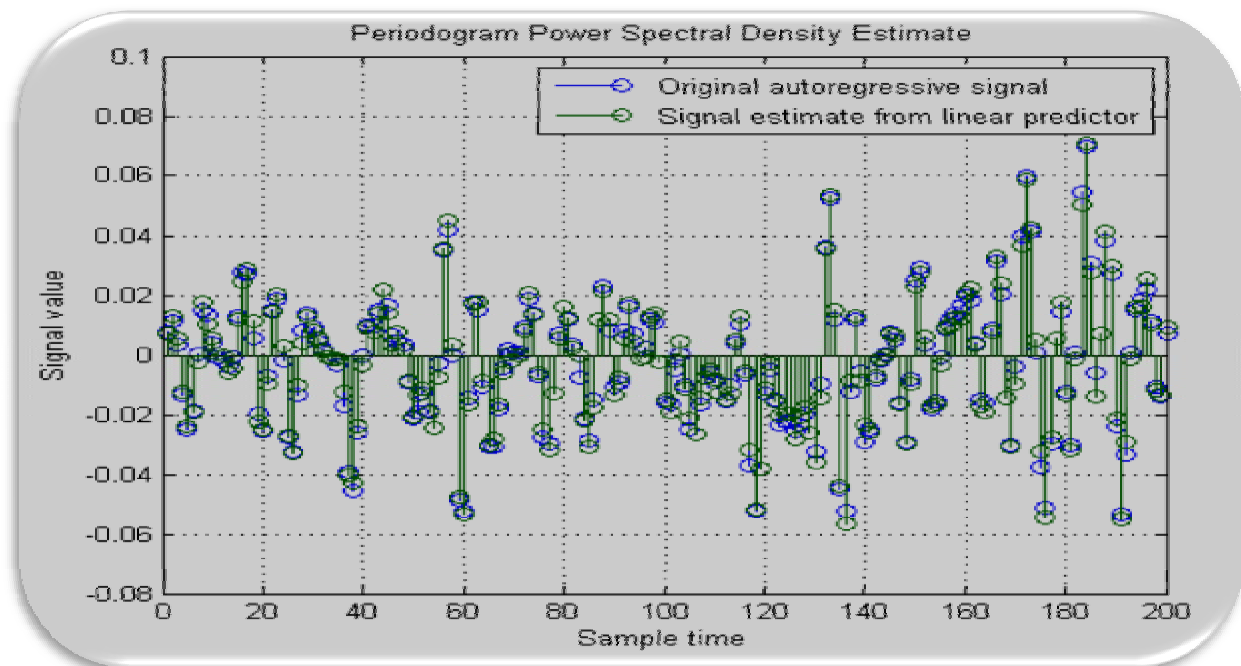


Figure.3.6-Le périodogramme et le périodogramme d'ondelettes pour $\alpha=0.5$, $\sigma^2=7$ et $n=1024$

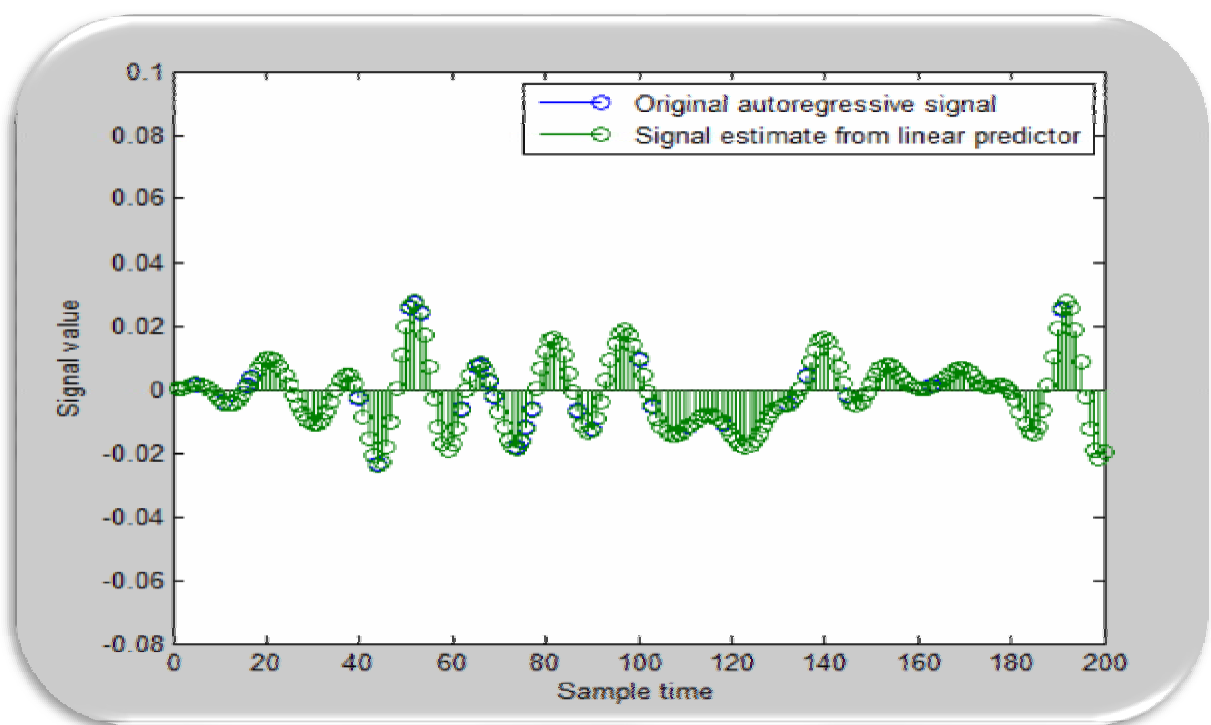


Figure.3.7-Le périodogramme et le périodogramme d'ondelettes pour $\alpha=0.2$, $\sigma^2=7$ et $n=1024$

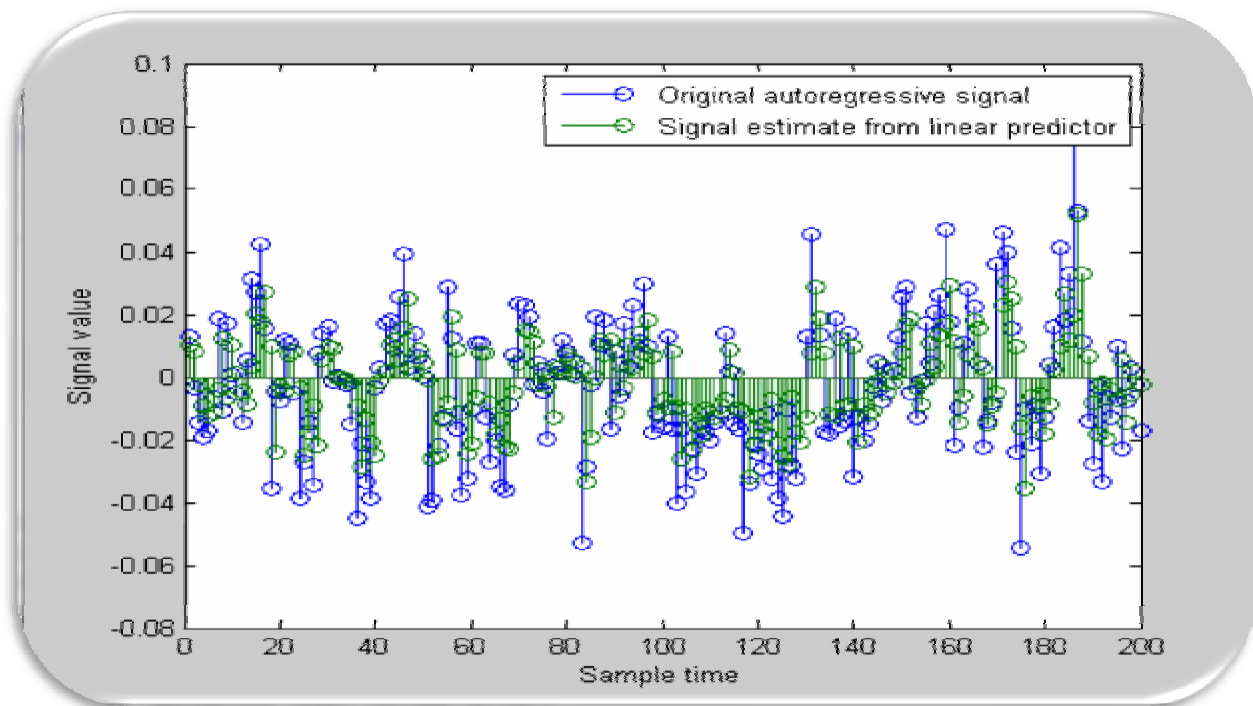


Figure.3.8-Le périodogramme et le périodogramme d'ondelettes pour $\alpha=0.5$, $\sigma^2=1.2$ et $n=1024$

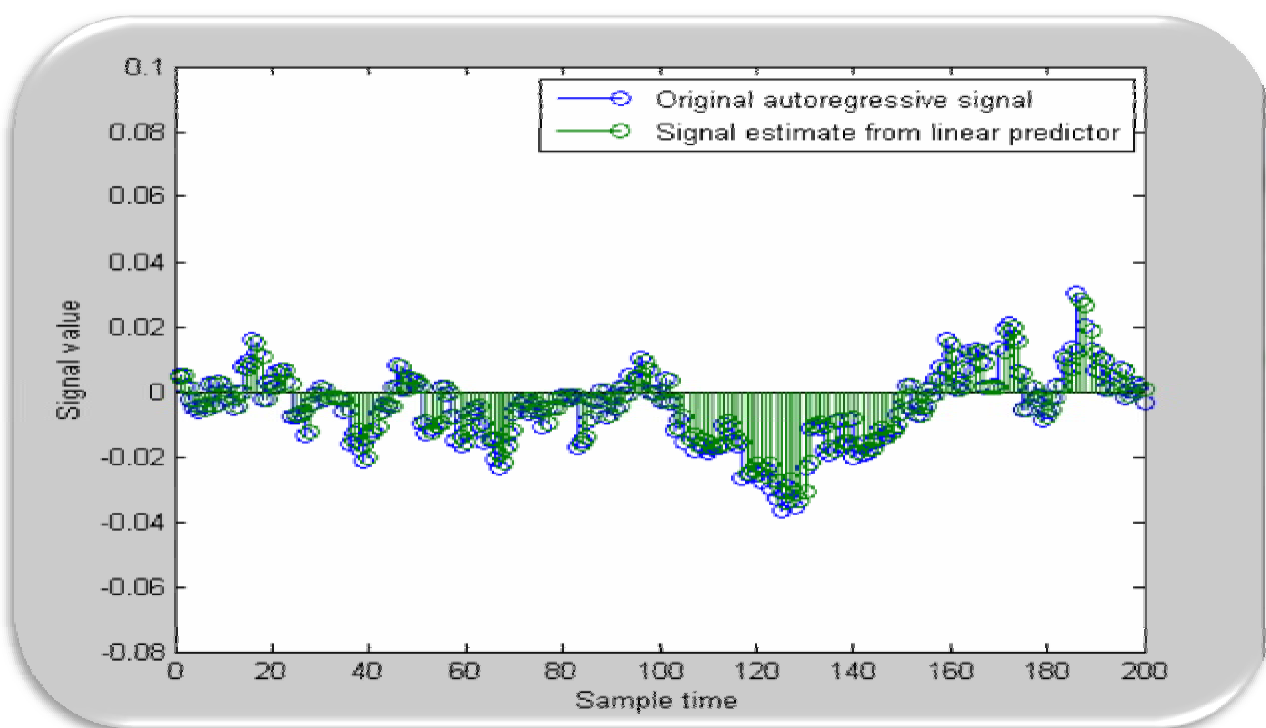


Figure.3.9-Le périodogramme et le périodogramme d'ondelettes pour $\alpha=0.2$, $\sigma^2=1.2$ et $n=1024$