REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

THESE

PRESENTEE A L'UNIVERSITE DE CONSTANTINE
POUR OBTENIR LE DIPLOME DE

MAGISTER

EN MATHEMATIQUES
Option : Analyse Mathématique

Par Melle :
FAREH Aziza

Sujet:

CERTAINES APPLICATIONS DE r-ESPACES ET r-ESPACES COMPACTS

Soutenue le 1993 devant la commission d'examen :

N. BENOUAR	**: Maitre de conférence**	U.S.T.H.B Alger	.............Président
K. BETINA	**: Maitre de conférence**	U.S.T.H.B Alger	............Rapporteur
A. CHABOUR	**: Chargé de cours**	U.S.T.H.B Alger	............Examinateur
A. AYADI	**: Chargé de cours**	Université de Constantine	.......Examinateur
A. AIBECHE	**: Chargé de cours**	E.N.S de Jijel	....................Examinateur

A la mémoire de mon père.

A la mémoire de ma très chère soeur dont l'absence brusque me déchire le coeur, que son âme repose en paix.

A son fils Med chouaïb qui n'a pas connu le sourire de sa mère, je lui souhaite une longue vie pleine de bonheur et de chance.

A ma mère.

A toute ma famille.

A toutes mes amies.

Remerciements

L'occasion m'est donnée d'exprimer ma reconnaissance à tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Tout d'abord à Monsieur ZUZČÀK.I pour m'avoir ouvert la porte de la recherche.

A Monsieur K.Betina, j'exprime ma profonde gratitude pour l'intérêt qu'il a manifesté pour ce travail et pour les discussions fructueuses que j'ai eues avec lui.

Que Monsieur A.Aïbèche trouve ici ma reconnaissance pour sa discrète sollicitude.

Je tiens à remercier aussi Monsieur N.Benouar, Monsieur A.Chaboun et Monsieur A.Ayadi qui ont bien voulu participer à ce jury.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.

L'analyse fait appel aussi bien aux structures algébriques qu'à des structures d'une autre sorte qui permettent de donner un sens mathématique aux notions intuitives de limite, de continuité et de voisinage. Ce sont les espaces topologiques définis par la stabilité pour l'intersection finie et la réunion quelconque.

Toutefois ce genre de stabilité impose une certaine rigidité dans les applications.

En 1983 dans [3] I.ZUZČÀK introduit axiomatiquement une nouvelle classe d'espaces r-espaces comme une généralisation des espaces topologiques où cette contrainte de stabilité est écartée. Dans [3] I.ZUZČÀK donne aussi de diverses formulations équivalentes de la définition d'un r-espace. Il montre en particulier que dans le cas où:

> " X est une algèbre et β la classe formée de toutes les sous-algèbres de X et de l'ensemble vide, alors β détermine un r-espace." Cet espace est noté *.

En 1984 dans [4] il traite les bases d'un r-espace et plus particulièrement la base de *, qui est un exemple d'un système de fermeture algébrique. Nous nous intéressons dans la première partie de ce travail à l'étude de quelques propriétés de la structure des systèmes de fermetures algébriques à partir de quelques propriétés des r-espaces. Nous commençons par montrer que chaque système de fermeture algébrique β détermine sur X un r-espace. Par une propriété des r-espaces nous introduisons la notion d'une base pour les systèmes de fermetures algébriques meilleure que celle donnée par I.ZUZČÀK dans le sens où elle s'en passe de la propriété II de la définition5 de [4] qui est difficile à réaliser.

La nouvelle base des systèmes de fermetures algébriques nous donne un résultats puissant: une condition nécessaire et suffisante qui caractérise les systèmes de fermetures algébriques. De plus à l'aide d'une condition suffisante elle nous permet de connaître l'intérieur d'un ensemble relativement à un système de fermeture algébrique.

Cette base permet d'alléger la caractérisation des systèmes de fermetures algébriques et donne une condition nécessaire et suffisante facile et intéressante pour qu'un système de fermeture algébrique soit topologique.

Nous allons consacrer la deuxième partie de ce travail à l'étude de la compacité dans un r-espace. Et ce à cause du grand intérêt qu'elle revêt dans les applications.

L'espace topologique compact traite une importante question qui est le problème de limite dont la notion est étroitement liée à celle de filtre. Pareillement nous somme amenés à introduire la notion de filtre dans r-espace d'une manière plus simple et ceci en remplaçant la contrainte de stabilité pour l'intersection qui est une propriété de la définition classique, par une hypothèse moins forte, qui fait d'elle une généralisation et qui la rend plus adaptable à la convergence.

Nous allons le faire de deux manières différentes. On définira le r-filtre et le r_1-filtre. Le r-filtre nous permet d'introduire la notion de r-quasi-compact donc de r-compact et de généraliser quelques résultats obtenus dans la topologie générale. Avec le r_1-filtre nous introduisons la notion de r_1-quasi-compact et celle de r_1-compact. Ensuite nous comparons le r-quasi-compact au r_1-quasi-compact et le r-compact au r_1-compact, tout en mettant en évidence que le r-filtre mène à une extension de compacité meilleure que celle offerte par le r_1-filtre. Nous donnons aussi une caractérisation d'un r-espace séparé à l'aide du r-filtre et de r_1-filtre. Cette partie se termine par des exemples d'un r_1-quasi-compact.

Dans la troisième partie de ce travail, à l'aide d'un contre-exemple nous montrons que contrairement à la topologie la trace d'un r-espace n'en est pas un. Malgré ce défaut nous pouvons quand même introduire la notion de sous-ensemble compact qui va garder les mêmes propriétés d'un r-espace compact. Nous définissons les ensembles r-compacts et r_1-compacts, tout en établissant plusieurs propriétés de ces derniers. Contrairement à notre attente, un compact dans un r-espace séparé n'est pas un fermé. Cependant l'introduction de la forte séparation nous permet d'obtenir une condition suffisante pour qu'un compact soit fermé.

CHAPITRE I

SYSTEME DE FERMETURE ALGEBRIQUE

Parmi les diverses formulations équivalentes d'un r-espace données dans [3], nous allons utiliser dans ce chapitre, la formulation suivante:

Soit X un ensemble et $\mathcal{S}$ une famille de parties de X possédant les deux propriétés suivantes:

Ω_1: $\emptyset$, X $\in \mathcal{S}$.
Ω_2: pour tout A $\subset$ X et tout B $\in \mathcal{S}$ telque B $\subset$ A il existe un élément maximal C de $\{ M \in \mathcal{S} : M \subset A \}$ telque $B \subset C \subset A$.

Alors la paire $(X, \mathcal{S})$ est appelée un r-espace.

Si $(X, \mathcal{S})$ est un r-espace et $A \in \mathcal{S}$ alors A est appelé un ensemble ouvert et $\mathcal{S}$ la classe des sous-ensembles ouverts de X.
Un voisinage d'un point $x \in X$ est un ensemble ouvert contenant x.

Rappelons:

<u>Définition d'un système de fermeture.</u>
On appelle système de fermeture sur un ensemble X, toute famille $\mathcal{S}$ de parties de X stable pour l'intersection quelconque.

<u>Définition d'une chaîne.</u>
On appelle chaîne toute famille de parties de X totalement ordonnée.

<u>Définition d'un ensemble inductif.</u>
On dit qu'un ensemble ordonné X est inductif si toute chaîne de X est majorée.

<u>Théorème de ZORN.</u>
Tout ensemble ordonné inductif possède un élément maximal.

Théorème 11 de [3].

Soient X un r-espace, $A \subseteq B \subseteq X$ avec A ouvert, alors A est intérieur de B ssi pour tout $x \in X\backslash A$ et tout voisinage V de x contenant $V_1 = \{x\} \cup A$, nous avons $V \cap (X\backslash B) \neq \emptyset$.

Théorème 12 de [3].

Soient X un r-espace et $A \subseteq X$, alors A est un ouvert ssi pour tout $x \in A$ et tout ouvert V telque $V \subseteq A$, il existe un voisinage V_1 de x vérifiant: $\{x\} \cup V \subset V_1 \subset A$.

Maintenant soit X un ensemble non vide et β un système de fermeture sur X. Par la suite nous allons utiliser les propriétés suivantes d'un tel système.

P_1) La classe β est déterminée par une application J_β de 2^X dans β définie par:

$$J_\beta(A) = \cap \{B \in \beta : A \subset B\} \quad (1)$$

J_β est appelée un opérateur de fermeture algébrique sur X.

P_2) J_β vérifie conditions:

J_1: si $A \subset B$ alors $J_\beta(A) \subset J_\beta(B)$.

J_2: $A \subset J_\beta(A)$.

P_3) $A \in \beta$ ssi $J_\beta(A) = A$.

P_4) Si J_β vérifie la condition suivante:

" $x \in J_\beta(A)$ ssi il existe une partie finie B de A telque $x \in J_\beta(B)$"

alors β est appelée un système de fermeture algébrique sur X.

P_5) Un système de fermeture β sur X est algébrique ssi β est inductive.

Dans la suite de ce chapitre J_β définie par (1), où β est un système de fermeture sur X, signifie l'opérateur de fermeture algébrique sur l'ensemble X.

Exemple 1.

Soit β un système de fermeture algébrique sur l'ensemble X. Si $\mathcal{S} = \beta \cup \{\emptyset\}$ alors $\mathcal{S}$ vérifie les conditions Ω_1 et Ω_2 et $(X,\mathcal{S})$ est un r-espace. La preuve de Ω_1 vient directement de la définition de $\mathcal{S}$. Pour prouver Ω_2, soit A un sous-ensemble de X et ${}^A\mathcal{S}$ la classe définie par: ${}^A\mathcal{S} = \{B \in \mathcal{S}: B \subset A\}$. La classe ${}^A\mathcal{S}$ est non vide car $\emptyset \in {}^A\mathcal{S}$. Elle est partiellement ordonnée par $\subset$. Il est évident que l'union des éléments d'une chaîne arbitraire de ${}^A\mathcal{S}$ est encore un élément de ${}^A\mathcal{S}$. Ainsi d'après le théorème de ZORN chaque élément B de ${}^A\mathcal{S}$ est contenue dans l'élément maximal C de ${}^A\mathcal{S}$, c'est à dire que Ω_2 est vérifiée.

Remarque 1.

Si β est un système de fermeture (algébrique) sur l'ensemble X alors $\mathcal{S} = \beta \cup \{\emptyset\}$ est aussi un système de fermeture (algébrique).

Dans ce chapitre, on supposera que chaque système de fermeture (algébrique) contient l'ensemble vide.

A partir de l'exemple ci-dessus et du théorème 12 de [3], nous avons immédiatement:

Corollaire 1:

Soit $\mathcal{S}$ un système de fermeture algébrique sur l'ensemble X et soit $A \subset X$, alors $A \in \mathcal{S}$ ssi pour tout $x \in A$ et tout $V \in \mathcal{S}$ telque $V \subset A$ il existe $V_1 \in \mathcal{S}$ vérifiant $(\{x\} \cup V) \subset V_1 \subset A$.

Ce corollaire conduit naturellement à l'introduction de la notion suivante:

Définition 1.

Soit $\mathcal{S}$ un système de fermeture sur l'ensemble X et $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}$, alors $\mathcal{S}_1$ est appelée une pré-base de $\mathcal{S}$ si tout élément A de $\mathcal{S}$ possède les propriétés suivantes:

1) pour tout $x \in A$ il existe $V \in \mathcal{S}_1$ telque $x \in V \subset A$.
2) pour tout $x \in A$ et tout $V \in \mathcal{S}_1$ tel que $V \subset A$ il existe $V_1 \in \mathcal{S}_1$ vérifiant $(\{x\} \cup V) \subset V_1 \subset A$.

Remarque 2.

Quoique la notion d'une pré-base a été considérée en rapport avec le corollaire 1, qui est valable pour les systèmes de fermeture algébrique, nous l'introduisons aussi pour les systèmes de fermeture. Par la suite nous devons suivre le sens d'une telle procédure.

Remarque 3.

Si $\mathcal{S}$ est un système de fermeture algébrique alors du corollaire1 et de la définition antérieure, il est clair que $\mathcal{S}$ est une pré-base, en effet la condition 1 de la définition1 est déduite du corollaire 1 en prenant $V = \emptyset$.

Théorème 1.

Soit $\mathcal{S}$ un système de fermeture sur l'ensemble X et $\mathcal{S}_0 = \{ A \subset X$: il existe une partie finie C de X telque $J_{\mathcal{S}}(C) = A \}$ alors $\mathcal{S}_0$ est une pré-base de $\mathcal{S}$.

Preuve.

Montrons que $\mathcal{S}_0$ possède les deux propriétés 1) et 2) de la définition1. Démontrons d'abord 1): soit $A \in \mathcal{S}$ et $x \in A$. Comme $\{x\}$ est une partie finie de X alors $J_{\mathcal{S}}(\{x\}) \in \mathcal{S}_0$. D'après P_3 $J_{\mathcal{S}}(A) = A$ car $A \in \mathcal{S}$. En utilisant J_1 nous obtenons $J_{\mathcal{S}}(\{x\}) \subset J_{\mathcal{S}}(A) = A$ car $\{x\} \subset A$. Il suffit donc de prendre $V = J_{\mathcal{S}}(\{x\})$; $V \in \mathcal{S}_0$ et $x \in V \subset A$.

Pour démontrer 2), supposons que $A \in \mathcal{S}$, $x \in A$ et $B \subset A$, où $B \in \mathcal{S}_0$. Nous voulons montrer qu'il existe $V \in \mathcal{S}_0$ vérifiant $(\{x\} \cup B) \subset V \subset A$. Comme $B \in \mathcal{S}_0$ alors d'après la définition de $\mathcal{S}_0$, il existe une partie finie C de B telque $J_{\mathcal{S}}(C) = B$. D'après J_2, $C \subset J_{\mathcal{S}}(C)$ et ainsi nous avons $C \subset B \subset A$. Considérons maintenant la partie finie $\{x\} \cup C$ de A. D'après J_1 nous avons $J_{\mathcal{S}}(C \cup \{x\}) \subset A$. Or $C \subset C \cup \{x\}$ donc $B = J_{\mathcal{S}}(C) \subset J_{\mathcal{S}}(C \cup \{x\})$ d'après J_1. En appliquant J_2 nous obtenons $\{x\} \subset J_{\mathcal{S}}(C \cup \{x\})$. Ainsi $(B \cup \{x\}) \subset J_{\mathcal{S}}(C \cup \{x\}) \subset A$. Puisque $J_{\mathcal{S}}(C \cup \{x\}) \in \mathcal{S}_0$ il suffit donc de prendre $V = J_{\mathcal{S}}(C \cup \{x\})$.

<u>Théorème 2.</u>

Soit $\mathcal{S}$ un système de fermeture sur l'ensemble X, alors la classe $\mathcal{S}_0$ définie dans le théorème 1 est la plus petite pré-base de $\mathcal{S}$.

<u>Preuve.</u>

Montrons que $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}_1$ pour toute pré-base $\mathcal{S}_1$ de $\mathcal{S}$. Soit $A \in \mathcal{S}_0$, d'après la définition de $\mathcal{S}_0$, il existe une partie finie B de A telle que $J_{\mathcal{S}}(B) = A$. B contient n éléments $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$; construisons une suite finie (V_j), $1 \leq j \leq n$, d'éléments de $\mathcal{S}_1$ de la manière suivante:

Si $j=1$ alors d'après le 1) de la définition1, il existe $V \in \mathcal{S}_1$ telque $x_1 \in V \subset A$, dans ce cas on pose $V_1 = V$.
Si $j<n$ alors d'après le 2) de la définition1 pour V_j et x_{j+1} il existe $V \in \mathcal{S}_1$ qui vérifie $(\{x_{j+1}\} \cup V_j) \subset V \subset A$. En posant $V_{j+1} = V$ nous avons alors $\{x_1, x_2, \ldots, x_{j+1}\} \subset V_{j+1}$ et $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{j+1} \subset A$. Ainsi nous avons construit une suite finie $V_1, V_2, \ldots, V_n$ d'éléments de $\mathcal{S}_1$ vérifiant les conditions suivantes:

a) $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n \subset A$.

b) $\{x_1, x_2, \ldots, x_i\} \subset V_i$ pour tout i, où $1 \leq i \leq n$.

Il est clair que $B \subset V_n \subset A$ d'après b). Comme on sait que V_n et A sont des éléments de $\mathcal{S}$ contenant B alors $A \subset V_n$. D'après a) $A = V_n$, ce qui veut dire que $A \in \mathcal{S}_1$.

Jusqu'à la fin de ce chapitre nous utiliserons les notations suivantes: si $\mathcal{S}$ est un système de fermeture sur l'ensemble X et $\mathcal{S}_1$ est une pré-base de $\mathcal{S}$ alors $\hat{\mathcal{S}}_1$ veut dire la classe de toutes les parties A de X vérifiant les conditions 1) et 2) de la définition1:

$$\hat{\mathcal{S}}_1 = \{ B \subset A;\ \text{vérifiant 1) 2) de la déf1} \}$$

Remarque 4.

Il est facile de voir que si $\mathcal{S}$ est un système de fermeture sur l'ensemble X et $\mathcal{S}_1$ est une pré-base de $\mathcal{S}$ alors $\mathcal{S} \subset \hat{\mathcal{S}}_1$.

Théorème 3.

Soit $\mathcal{S}$ un système de fermeture sur l'ensemble X. Si $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont deux pré-bases de $\mathcal{S}$ telles que $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ alors $\hat{\mathcal{S}}_2 \subset \hat{\mathcal{S}}_1$.

Preuve.

Soit $A \in \hat{\mathcal{S}}_2$, nous devons montrer que $A \in \hat{\mathcal{S}}_1$. D'après la définition de $\hat{\mathcal{S}}_1$ il suffit de montrer que A satisfait les conditions 1) et 2) de la définition1. Premièrement A vérifie 1): En effet, soit $x \in A$. Comme $A \in \hat{\mathcal{S}}_2$ alors d'après 1) il existe $V \in \mathcal{S}_2$ telque $x \in V \subset A$ et $V \in \mathcal{S}$ car $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}$. Comme $\mathcal{S}_1$ est une pré-base de $\mathcal{S}$ alors d'après le 1) de la définition1, il existe $V_1 \in \mathcal{S}_1$ telque $x \in V_1 \subset V \subset A$. Il reste à prouver que A vérifie 2). Supposons que $x \in A$ et soit $V \in \mathcal{S}_1$ telque $V \subset A$. Puisque $V \in \mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ alors $V \in \mathcal{S}_2$. Comme $A \in \hat{\mathcal{S}}_2$ d'après 2) il existe $V_2 \in \mathcal{S}_2$ telque $(\{x\} \cup V) \subset V_2 \subset A$. Nous avons donc $V_2 \in \mathcal{S}$ car $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}$, $x \in V_2$, $V \in \mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_1$ une pré-base de $\mathcal{S}$. Encore une fois d'après 2) de la définition1 il existe $V_1 \in \mathcal{S}_1$ telque $(\{x\} \cup V) \subset V_1 \subset V_2 \subset A$. Ce qui achève notre démonstration.

Théorème 4.

1. Soit $\mathscr{S}$ un système de fermeture algébrique sur l'ensemble X. Si $\mathscr{S}_0$ est la pré-base de $\mathscr{S}$ définie dans le théorème1 alors $\hat{\mathscr{S}}_0 = \mathscr{S}$.

Preuve.

Comme nous savons que $\mathscr{S} \subset \hat{\mathscr{S}}_0$ d'après la remarque4, alors il suffit de prouver que $\hat{\mathscr{S}}_0 \subset \mathscr{S}$. Soit $A \in \hat{\mathscr{S}}_0$, d'après P_3 et J_2 il suffit de montrer que $J_{\mathscr{S}}(A) \subset A$. En utilisant P_4, $J_{\mathscr{S}}(A) \subset A$ ssi pour toute partie finie B de A $J_{\mathscr{S}}(B) \subset A$. Donc soit B une partie finie de A contenant $n \geq 1$ éléments: $B=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Comme $A \in \hat{\mathscr{S}}_0$ alors d'après la définition de $\hat{\mathscr{S}}_0$ et d'après les propriétés 1) et 2) de la définition1, il est clair que de la même manière que dans la démonstration du théorème2 peut être définie une suite finie $V_1, V_2, \ldots, V_n$ d'éléments de $\mathscr{S}_0$ satisfaisant les propriétés suivantes:

a) $\{x_1, x_2, \ldots, x_i\} \subset V_i$ pour tout i où $1 \leq i \leq n$.

b) $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n \subset A$.

D'après a) et b) $B \subset V_n \subset A$ où $V_n \in \mathscr{S}$ car $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$. Comme $J_{\mathscr{S}}(B) \subset J_{\mathscr{S}}(Vn)$ d'après J_1 et $J_{\mathscr{S}}(V_n) = V_n$ d'après P_3 alors $J_{\mathscr{S}}(B) \subset A$.

Définition2.

Soit $\mathscr{S}$ un système de fermeture sur l'ensemble X.

a) La classe $\mathscr{S}_0$ définie dans la théorème1 est appelée la pré-base fondamentale de $\mathscr{S}$.

b) Une pré-base $\mathscr{S}_1$ de $\mathscr{S}$ est appelée une base de $\mathscr{S}$ ssi $\hat{\mathscr{S}}_1 = \mathscr{S}$.

Le théorème suivant n'est autre qu'un résumé sommaire des résultats des théorèmes 2, 3 et 4.

Théorème5.

Soit $\mathcal{S}$ un système de fermeture algébrique sur l'ensemble X et $\mathcal{S}_1$ une pré-base de $\mathcal{S}$, alors $\hat{\mathcal{S}}_1=\mathcal{S}$.

Il est clair que ce théorème donne une construction de tous les éléments d'un système de fermeture algébrique à partir des éléments d'une pré-base.

Remarque5.

A partir du dernier théorème il est aussi clair que si $\mathcal{S}$ est un système de fermeture algébrique alors chaque pré-base de $\mathcal{S}$ est une base de $\mathcal{S}$.

Si un système de fermeture $\mathcal{S}$ n'est pas algébrique alors la pré-base fondamentale $\mathcal{S}_0$ de $\mathcal{S}$ n'est pas nécessairement une base de $\mathcal{S}$, comme il est montré dans l'exemple suivant:

Exemple2.

Soit X un ensemble infini et $\mathcal{S}$ la classe des sous-ensembles de X composée de l'ensemble vide, l'ensemble X et de tous les sous-ensembles finis de X.
C'est facile de voir que $\mathcal{S}$ est un système de fermeture sur X et la classe $\mathcal{S}_0$ composée de tous les sous-ensembles finis de X est la base fondamentale de $\mathcal{S}$. $\hat{\mathcal{S}}_0$ est composée de tous les sous-ensembles de X, ce qui veut dire que $\mathcal{S} \neq \hat{\mathcal{S}}_0$.

Nous aboutissons à un résultat très puissant qui est: Tout système de fermeture dont la pré-base fondamentale est une base, est algébrique.

Théorème 6.

Soit $\mathcal{S}$ un système de fermeture sur l'ensemble X et soit $\mathcal{S}_0$ la pré-base fondamentale de $\mathcal{S}$ alors $\mathcal{S}$ est un système de fermeture algébrique ssi $\hat{\mathcal{S}}_0=\mathcal{S}$.

Preuve.

Si $\mathcal{S}$ est un système de fermeture algébrique alors d'après le théorème5, $\hat{\mathcal{S}}_0=\mathcal{S}$. Pour prouver la réciproque, supposons que $\mathcal{S}$ n'est pas algébrique c'est à dire d'après P_4, il existe un élément $x \in J_{\mathcal{S}}(A)$ telque $x \notin J_{\mathcal{S}}(Bs)$ pour toute partie Bs finie de A. Si $\{Bs\}_S$ est l'ensemble de toutes les parties finies de A alors $B = \bigcup_S J_{\mathcal{S}}(Bs) \in \hat{\mathcal{S}}_0$ car B vérifie les conditions 1) et 2) de la définition1.
Pour prouver 1), soit $x \in B$ alors il existe $s_0 \in S$ telque $x \in J_{\mathcal{S}}(Bs_0)$. Comme $J_{\mathcal{S}}(Bs_0) \in \mathcal{S}_0$ il suffit donc de prendre $V= J_{\mathcal{S}}(Bs_0)$, ainsi $x \in V \subset B$. Pour prouver 2), supposons que $x \in B$ et $V \in \mathcal{S}_0$ telque $V \subset B$, comme $\mathcal{S}_0$ est la base fondamentale de $\mathcal{S}$ alors il existe une partie finie C de B telle que $J_{\mathcal{S}}(C)= V$. Comme $x \in B$ alors il existe $s_1 \in S$ telque $x \in J_{\mathcal{S}}(Bs_1)$. D'après J_1, $\{x\} \subset J_{\mathcal{S}}(Bs_1 \cup C)$ et $J_{\mathcal{S}}(C)= V \subset J_{\mathcal{S}}(Bs_1 \cup C)$. Mais $J_{\mathcal{S}}(Bs_1 \cup C) \in \mathcal{S}_0$ car $Bs_1 \cup C$ est une partie finie de B. Ainsi il suffit de prendre $V_1= J_{\mathcal{S}}(Bs_1 \cup C)$, c'est à dire $\{x\}\cup V \subset V_1 \subset B$. L'ensemble B ainsi construit n'appartient pas à $\mathcal{S}$ car $A \subset B \subset J_{\mathcal{S}}(A)$ ce qui achève la preuve de ce théorème.

Remarque 6.

Soit $\mathcal{S}$ un système de fermeture algébrique sur l'ensemble X et soit $\mathcal{S}_1$ une base de $\mathcal{S}$ alors d'après le corollaire1, si $A \subset X$ vérifie la condition 2) de la définition1 alors $A \in \mathcal{S}$.

En effet: supposons que $x \in A \subset X$, $V_1 \subset A$ telque $V_1 \in \mathcal{S}$ et pour tout $B \in \mathcal{S}_1$ telque $B \subset A$ il existe $V \in \mathcal{S}_1$ vérifiant $(\{x\}\cup B) \subset V \subset A$. Nous voulons montrer qu'il existe $V_2 \in \mathcal{S}$ telque $(\{x\}\cup V_1) \subset V_2 \subset A$. Considérons $J(V_1\cup\{x\})$: montrons que $J(V_1\cup\{x\}) \subset A$. D'après P_4, il suffit de montrer que $J_{\mathcal{S}}(C \cup\{x\}) \subset A$ pour toute partie finie C de V. Soit C une partie finie de V. D'après J_1, $J_{\mathcal{S}}(C) \subset V \subset A$. Or $J_{\mathcal{S}}(C)\in \mathcal{S}_1$ ainsi d'après notre hypothèse il existe $V_1\in \mathcal{S}_1$ telque $J_{\mathcal{S}}(C\cup\{x\}) \subset V_1 \subset A$. Comme $(C \cup\{x\}) \subset J_{\mathcal{S}}(C\cup\{x\})$ alors d'après J_1, $J_{\mathcal{S}}(C \cup\{x\}) \subset J_{\mathcal{S}}(J_{\mathcal{S}}(C \cup\{x\})) \subset V_1 \subset A$. Il suffit donc de prendre $V_2=J_{\mathcal{S}}(A \cup\{x\})\in \mathcal{S}_1$.

Comme une conséquence immédiate du théorème5 et de cette dernière remarque nous avons la caractérisation suivante des éléments d'un système de fermeture algébrique.

Corollaire2.

Soient $\mathcal{S}$ un système de fermeture algébrique sur l'ensemble X, $\mathcal{S}_1$ une base de $\mathcal{S}$ et $A \subset X$, alors $A \in \mathcal{S}$ ssi pour tout $x \in A$ et tout $B \in \mathcal{S}_1$ telque $B \subset A$ il existe $V \in \mathcal{S}_1$ vérifiant $(\{x\} \cup B) \subset V \subset A$.

Maintenant supposons que $\mathcal{S}$ est un système de fermeture sur l'ensemble X. C'est clair que la phrase " pour tout $A \subset B \subset X$ il existe $V \in \mathcal{S}$ telque $A \subset V \subset B$ " est équivalente à la phrase suivante: " pour tout $A \subset B \subset X$, $J_{\mathcal{S}}(A) \subset B$ ". Alors d'après le dernier corollaire nous avons la conséquence suivante:

Corollaire3.

Soient $\mathcal{S}$ un système de fermeture algébrique sur l'ensemble X, $\mathcal{S}_1$ une base de $\mathcal{S}$ et $A \subset X$, alors A est un élément de $\mathcal{S}$ ssi pour tout $x \in A$ et tout $B \in \mathcal{S}_1$ telque $B \subset A$ nous avons $J_{\mathcal{S}}(\{x\} \cup B) \subset A$.

Si $\mathcal{S}$ est un système de fermeture algébrique sur l'ensemble X et $B \subset X$ alors d'après le théorème1 de [3], nous obtenons une caractérisation d'un élément maximal de D contenu dans B.

Corollaire4.

Soient $\mathcal{S}$ un système de fermeture algébrique sur l'ensemble X, $A \subset B \subset X$ et $A \in \mathcal{S}$ alors A est un élément maximal de la classe $\{C \in \mathcal{S}: C \subset B\}$ ssi $V \cap X \backslash B \neq \emptyset$ pour tout $x \in B \backslash A$ et tout $V \in \mathcal{S}$ telque $(\{x\} \cup A) \subset V$.

Le théorème suivant caractérise l'élément maximal décrit dans le dernier corollaire avec les éléments d'une base.

Théorème 7.

Soient $\mathcal{S}$ un système de fermeture algébrique sur l'ensemble X, $\mathcal{S}_1$ une base de $\mathcal{S}$ et $A \subset B \subset X$ avec $A \in \mathcal{S}$ alors A est un élément maximal de la classe ${}^{B}\mathcal{S}$ si pour tout $x \in B \backslash A$ il existe $C \in \mathcal{S}_1$ telque $C \subset A$ et pour tout $D \in \mathcal{S}_1$ satisfaisant $(C \cup \{x\}) \subset D$ nous avons $D \cap (X \backslash B) = \emptyset$.

Preuve.

Supposons que A n'est pas un élément maximal de la classe $\mathcal{S}$ ce qui veut dire qu'il existe un élément $E \in \mathcal{S}$ telque $A \subsetneq E \subset B$. Comme $A \neq E$ alors il existe $x \in (E-A) \subset B \backslash A$. Puisque $E \in \mathcal{S}$ alors d'après le corollaire2 pour tout $C \in \mathcal{S}_1$ telque $C \subset A$ il existe $D \in \mathcal{S}_1$ vérifiant $(C \cup \{x\}) \subset D \subset E \subset B$ alors $D \cap X \backslash B = \emptyset$, ce qui contredit notre hypothèse.

Finalement nous allons voir que la propriété que doit posséder un système de fermeture algébrique pour être topologique peut être caractérisé par une base.

Théorème 8.

Soient $\mathcal{S}$ un système de fermeture algébrique sur l'ensemble X et $\mathcal{S}_1$ une base de $\mathcal{S}$ alors $\mathcal{S}$ est un système de fermeture topologique ssi $U \cup V \in \mathcal{S}$ pour tout $U, V \in \mathcal{S}_1$.

Preuve.

Si $\mathcal{S}$ est un système de fermeture algébrique topologique alors $U \cup V \in \mathcal{S}$ pour tout $U,V \in \mathcal{S}_1$ car $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}$. Pour prouver la réciproque, supposons que $U \cup V \in \mathcal{S}$ pour tout $U,V \in \mathcal{S}_1$. Nous voulons montrer que si $(A_i)_I$ est une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{S}$ alors $\bigcup_I A_i \in \mathcal{S}$. D'après le corollaire3, il suffit de prouver que si $x \in \bigcup_I A_i$ et $V \in \mathcal{S}_1$ telque $V \subset \bigcup_I A_i$ alors $J_D(\{x\} \cup V) \subset \bigcup_I A_i$. Comme $x \in \bigcup_I A_i$ alors il existe $i_1 \in I$ telque $x \in A_{i_1}$. Puisque $A_{i_1} \in \mathcal{S}$ alors d'après la condition1 de la définition1, il existe $U \in \mathcal{S}_1$ telque $x \in U \subset A$. Mais

$U, V \in \mathcal{S}_1$ et d'après notre hypothèse $(U \cup V) \in \mathcal{S}$. Comme $(\{x\} \cup V) \subset U \cup V \subset \bigcup_I A_i$ alors d'après J_1, $J_D(\{x\} \cup V) \subset (U \cup V) \subset \bigcup_I A_i$ ce qui complète la preuve de notre théorème.

CHAPITRE II

r-ESPACES COMPACTS

II-1r-ESPACES r-QUASI-COMPACTS, r-COMPACTS.

La compactification est l'un des problème importants qui a fait l'objet d'études dans la topologie générale. Le but de notre travail est de traiter l'extension de ce problème à un r-espace par un procédé analogue à celui de la topologie générale.

Commençons par définir la notion de r-espace compact. Cependant, il importe de noter qu'il existe quatre propositions équivalentes dont l'une d'elles définit la topologie compacte.
Ces quatre propositions sont:

ν_1. Tout filtre sur X possède au moins un point adhérent.

ν_2. Toute famille d'ensembles fermés dans X dont l'intersection est vide contient une sous-famille finie dont l'intersection est vide.

ν_3. Tout ultrafiltre sur X est convergent.

ν_4. Tout recouvrement ouvert de X contient un recouvrement ouvert fini de X.

Nous constatons que dans la proposition ν_1 figure la notion de filtre qui n'est guère connue dans un r-espace. Ce qui nous incite à introduire cette notion de façon analogue à la notion suivante:

Définition 1.
On appelle filtre sur un ensemble X une famille $\mathfrak{F}$ de parties de X satisfaisant les conditions suivantes:

α_1: Toute partie de X contenant un ensemble de $\mathfrak{F}$ appartient à $\mathfrak{F}$.

α_2: Toute intersection finie d'ensembles de $\mathfrak{F}$ appartient à $\mathfrak{F}$.

α_3: La partie vide de X n'appartient pas à $\mathcal{F}$

Toutefois, la condition α_2 ne peut être vérifiée dans r-espace parce que nous savons que dans r-espace l'intersection de deux ouverts (resp. fermés) n'est pas un ouvert (resp. un fermé), on est alors amené à introduire la notion suivante où ce défaut disparaît.

Définition 2.

On appelle r-filtre sur un ensemble X, une famille $\mathcal{F}$ de parties de X qui possède les deux propriétés suivantes:

α_1: Toute partie de X contenant un ensemble de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$.

α_2': L'intersection de deux ensembles quelconques de $\mathcal{F}$ est non vide.

Remarque 1.

Il est facile de déduire de α_2' que si $\mathcal{F}$ est un r-filtre sur l'ensemble X, la partie vide de X n'appartient pas à $\mathcal{F}$.

Remarque 2.

Dans la définition précédente nous avons choisi la condition α_2' qui pouvait être remplacée par :

α_2": L'intersection d'une sous-famille finie quelconque de $\mathcal{F}$ est non vide.

que nous étudierons par la suite. Parce que si une partie A de X rencontre tous les ensembles de $\mathcal{F}$ alors: à la condition α_2' correspond l'affirmation: il existe un r-filtre $\mathcal{F}$'plus fin que $\mathcal{F}$ contenant A. Mais à la condition α_2", il n'existe aucun r-filtre qui contient $\mathcal{F} \cup \{A\}$.

La définition antérieure conduit naturellement à l'introduction de la notion suivante:

Définition 3.

Un ensemble β de parties d'un r-espace X est une r-base d'un r-filtre $\mathcal{F}$ ssi l'intersection de deux ensembles quelconque de β est non vide.

Maintenant, nous allons étudier l'extension des quatre propositions ν_1, ν_2, ν_3 et ν_4 en se basant sur la définition2.

K_1: Tout r-filtre $\mathcal{F}$ sur X possède au moins un point adhérent.

K_2: De toute famille de fermés dont l'intersection est vide on peut extraire deux fermés dont l'intersection est vide.

K_3: Tout ultra r-filtre $\mathcal{F}$ sur X est convergent.

K_4: De toute famille d'ouverts qui recouvre X, on peut extraire deux ouverts dont la réunion est X.

Ces quatre propositions sont équivalentes:

K_1 entraîne K_3: en effet, soit $\mathcal{F}$ un ultra r-filtre , d'après K_1 il admet au moins un point adhérent x, c'est à dire: $V \cap F \neq \emptyset$ pour tout voisinage V de x et tout ensemble F de $\mathcal{F}$. Les ensembles $V \cap F$ engendrent un r-filtre $\mathcal{F}'$ qui contient en vertu de α_1 l'ensemble des voisinages $\mathcal{B}(x)$ de x ainsi que $\mathcal{F}$. Comme $\mathcal{F}$ est un ultra r-filtre alors $\mathcal{F}'$ est identique à $\mathcal{F}$, d'où $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{F}$ ce qui veut dire que $\mathcal{F}$ converge vers x.

K_3 entraîne K_1: car, si $\mathcal{F}$ est un r-filtre sur X, il existe un ultra r-filtre $\mathcal{F}'$ plus fin que $\mathcal{F}$, comme cet ultra r-filtre $\mathcal{F}'$ est convergent vers un point x d'après K_3, x est alors adhérent à $\mathcal{F}$.

K_1 entraîne K_2: car, si Λ est une famille d'ensembles fermés dans X dont l'intersection est vide, alors si l'intersection de deux ensembles quelconques de Λ n'était pas vide, Λ engendrerait un r-filtre qui aurait un point adhérent d'après K_1. Mais ce point appartiendrait à tous les ensembles de Λ, ces derniers étant fermés, ce qui est contraire à l'hypothèse, donc il existe deux éléments de Λ qui sont disjoints.

Inversement, la négation de K_1 entraîne celle de K_2, car si $\mathcal{F}$ est un r-filtre sans point adhérent, les adhérences des ensembles de $\mathcal{F}$ forment une famille d'ensembles fermés $\{ \overline{F_s}, \overline{F_s} \in \mathcal{F} \}_{s \in S}$ tels que $\bigcap_S \overline{F_s} = \emptyset$ et pour tout s_1, s_2 de S $\overline{F_{s_1}} \cap \overline{F_{s_2}} \neq \emptyset$ car, $\overline{F_{s_1}} \cap \overline{F_{s_2}}$ contient l'intersection $F_{s_1} \cap F_{s_2}$ de deux éléments de $\mathcal{F}$ qui est non vide en vertu de α_2', ce qui contredit K_2.

K_4 de déduit de K_2 par passage aux complémentaires et lui est donc équivalente.

Ainsi, nous introduisons la notion suivante:

Définition 4.

On dit qu'un r-espace X est r-quasi-compact s'il vérifie la proposition K_1: tout r-filtre sur X possède au moins un point adhérent.

Une importante question qui traite un r-espace topologique compact est le problème de limite. Comme dans la topologie générale il existe trois propositions équivalentes qui définissent cette notion, alors nous allons généraliser ces trois propositions à un r-espace et nous étudierons les relations qui existent entre elles.

m_1: Quelques soient les points distincts x,y de X, il existe un voisinage V_1 de x et un voisinage V_2 de y sans point commun.

m_2: Un r-filtre sur X ne peut avoir plus d'un point limite.

m_3: Si un r-filtre $\mathcal{F}$ sur X admet un point limite x, x est le seul point adhérent à $\mathcal{F}$.

Ces trois propositions sont équivalentes, en effet:

m_3 entraîne m_2: car si on suppose qu'il existe un r-filtre $\mathcal{F}$ qui admet deux points limites x et y, puisque tout point limite d'un r-filtre est adhérent à cet r-filtre alors x et y sont deux points adhérents à $\mathcal{F}$, or x est le seul point adhérent à $\mathcal{F}$, d'où x=y.

m_2 entraîne m_1: car s'il existe deux points distincts x et y, tels que tout voisinage V_1 de x et tout voisinage V_2 de y se rencontrent alors les ensembles $V_1 \cap V_2$ forment une r-base d'un r-filtre $\mathcal{F}$ qui admet à la fois x et y comme points limites dans X, ce qui contredit m_2.

m_1 entraîne m_3: car la négation de m_3 entraine celle de m_1, en effet: supposons qu'il existe un r-filtre $\mathcal{F}$ qui converge vers x et admet un point y distinct de x comme point adhérent, c'est à dire: $V \cap F \neq \emptyset$ pour tout voisinage V de y et tout ensemble F de $\mathcal{F}$, comme $\mathcal{F}$ converge vers x cela veut dire que $\mathcal{F}$ contient l'ensemble des voisinages de x: $\mathfrak{V}(x)$, alors tout voisinage V_1 de x rencontre tout voisinage V_2 de y, ce qui contredit m_1.

Définition 5.

Un r-espace X qui vérifie m_1 est appelé un r-espace séparé.

Un r-espace X est r-compact s'il est r-quasi-compact et séparé.

Certains résultats obtenus en topologie générale s'étendent aux r-espaces.

Théorème 1.

Soit $\mathcal{F}$ un r-filtre sur un r-espace quasi-compact X et soit A l'ensemble des points adhérents à $\mathcal{F}$, tout voisinage de A appartient alors à $\mathcal{F}$.

Preuve.

Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe un voisinage V de A qui n'appartient pas à $\mathcal{F}$ alors $CV \cap F \neq \emptyset$ pour tout ensemble F de $\mathcal{F}$, ainsi les ensembles $CV \cap F$ engendrent un r-filtre $\mathcal{F}'$ qui est en vertu de α_1 plus fin que $\mathcal{F}$, comme X est r-quasi-compact, $\mathcal{F}'$ a au moins un point adhérent y, qui est aussi adhérent à $\mathcal{F}$, or $y \notin A$, car le voisinage V de A a une intersection vide avec certains ensembles de $\mathcal{F}'$, ce qui contraire à l'hypothèse.

Théorème 2.

Pour qu'un r-filtre sur un r-espace compact soit convergent il faut et il suffit qu'il ait un seul point adhérent.

Preuve.

La condition est nécessaire car si un r-filtre $\mathcal{F}$ converge alors d'après m_2, il admet un seul point limite qui est le seul point adhérent à $\mathcal{F}$ en vertu de m_3.

La condition est suffisante car si x est le seul point adhérent à $\mathcal{F}$ alors d'après le théorème1 $\mathcal{F}$ contient l'ensemble des voisinages de x, $\mathcal{V}(x)$, c'est à dire que $\mathcal{F}$ est plus fin que l'ensemble des voisinages de x, $\mathcal{V}(x)$.

II-2 r-ESPACES r_1-QUASI-COMPACTS, r_1-COMPACTS.

Remplaçons maintenant la condition α_2' de la définition2 par α_2": "l'intersection d'une sous-famille finie quelconque de $\mathcal{F}$ est non vide" citée dans la remarque2. Ainsi nous introduisons la notion suivante:

Définition 6.

On appelle r_1-filtre sur un r-espace X, un ensemble $\mathcal{F}$ de parties de X qui possède les deux propriétés suivantes:

α_1: Toute partie de X contenant un ensemble de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$.

α_2": L'intersection d'une sous-famille finie quelconque de $\mathcal{F}$ est non vide.

Cette définition nous conduit à la définition suivante:

Définition 7.

Un ensemble β de parties d'un r-espace X est une r_1-base d'un r_1-filtre si et seulement si l'intersection finie d'ensembles de β est non vide.

Remarque 3.

c'est facile de voir que la condition α_2" entraîne α_2' alors tout r_1-filtre est un r-filtre et toute r_1-base est une r-base.

Montrons qu'avec la notion de r_1-filtre nous pouvons trouver quelques résultats importants.

Commençons d'abord par formuler les quatre propositions ν_1, ν_2, ν_3 et ν_4, avec la définition 6 nous avons :

p_1: Tout r_1-filtre sur X possède au moins un point adhérent.

p_2: Toute famille d'ensembles fermés dans X, dont l'intersection est vide, contient une sous-famille finie, dont l'intersection est vide.

p_3: Pour tout r_1-filtre $\mathcal{F}'$ dans X, il existe un r-filtre $\mathcal{F}$ qui contient $\mathcal{F}'$ et qui converge dans X.

p_4: Tout recouvrement ouvert de X contient un recouvrement ouvert fini de X.

Les quatre propositions p_1, p_2, p_3 et p_4 sont équivalentes , en effet:

p_1 entraîne p_2: car si Λ est une famille d'ensembles fermés dans X dont l'intersection est vide. Si l'intersection de toute sous-famille finie de Λ n'était pas vide alors Λ engendrerait un r_1-filtre qui aurait un point adhérent d'après p_1. Comme tous les ensembles de Λ sont des fermés alors ce point appartiendrait à tous les ensembles de Λ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Inversement, la négation de p_1 entraîne celle de p_2, car si $\mathcal{F}'$ est un r_1-filtre, les adhérences des ensembles de $\mathcal{F}'$ forment une famille d'ensembles fermés $\{\overline{F}_s,\ F_s \in \mathcal{F}'\}$ contredisant p_2; en effet: la famille $\{\overline{F}_s,\ F_s \in \mathcal{F}\}$ est telle que $\cap\overline{F}_s=\emptyset$ et pour toute partie finie M_{finie} de $\{\overline{F}_s\}_S$

$\bigcap_{\overline{F}_s \in M_f}\overline{F}_s \neq\emptyset$ car elle contient l'intersection finie d'éléments de $\mathcal{F}'$ qui est, en vertu de α_2', non vide.

p_4 se déduit de p_2 par passage au complémentaire et lui est donc équivalente.

p_1 entraîne p_3: car si $\mathcal{F}'$ est un r_1-filtre, d'après p_1 il admet au moins un point adhérent x, c'est à dire: $V \cap F \neq \emptyset$ pour tout voisinage V de x et tout ensemble F de $\mathcal{F}'$. Ainsi les ensembles $A \cap V$ engendrent un r-filtre $\mathcal{F}$

qui , en vertu de α_1, est plus fin que $\mathcal{F}'$ et que l'ensemble des voisinages $\mathcal{V}(x)$ de x.

p_3 entraîne p_1: car si $\mathcal{F}'$ est un r_1-filtre, d'après p_3 il existe un r-filtre $\mathcal{F}$ plus fin que $\mathcal{F}'$ et qui converge dans X, et comme tout point limite d'un filtre est adhérent à ce filtre alors $\mathcal{F}'$ admet au moins un point adhérent.

Nous introduisons la définition suivante:

<u>Définition 8.</u>

On dit qu'un r-espace X est r_1-quasi-compact s'il vérifie l'une des propositions équivalentes p_1, p_2, p_3 et p_4.

Si un r_1-quasi-compact est séparé alors c'est un r_1-compact.

<u>Remarque 4.</u>

La proposition K_2 entraîne p_2: car, dans toute famille de fermés dont l'intersection est vide il existe d'après K_2 une sous-famille finie contenant deux fermés dont l'intersection est vide d'où p_2.

La proposition K_1 entraîne p_1: car, tout r_1-filtre est un r-filtre alors, un r-quasi-compact est un r_1-quasi-compact et par conséquent un r-compact est un r_1-compact.

Maintenant formulons les propositions m_1, m_2 et m_3 avec la définition 6.

m_1: Quelques soient les points distincts x, y de X, il existe un voisinage V_1 de x et un voisinage V_2 de y sans point commun.

m_2': Un r_1-filtre sur X ne peut avoir plus d'un point limite.

m_3': Si un r_1-filtre $\mathcal{F}'$ sur X admet un point limite x, x est le seul point adhérent à $\mathcal{F}'$.

Comme nous allons le montrer, ces trois propositions perdent leur équivalence. Etudions alors les relations qui existent entre elles.

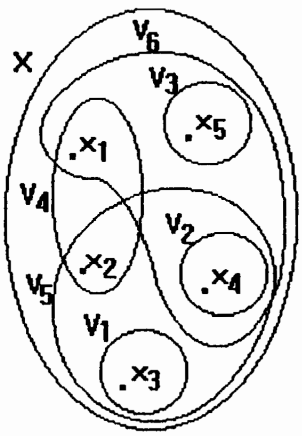
Sachant que tout r_1-filtre est un r-filtre d'après la remarque précédente et que les propositions m_1, m_2 et m_3 sont équivalentes, on déduit alors que la proposition m_1 entraîne m_2' et m_3', de plus m_3' entraîne m_1 car, s'il existe deux points distincts x et y tels que $V_x \cap V_y \neq \emptyset$ pour tout voisinage V_x de x et tout voisinage V_y de y alors l'ensemble $\mathcal{O}(x)$ des voisinages de x engendre un r_1-filtre qui admet y comme point adhérent. Enfin m_3' entraîne m_2' car l'implication est transitive. Mais la proposition m_2' n'entraîne pas m_1 et m_3'. Comme nous allons le voir à l'aide de l'exemple suivant:

<u>Exemple.</u>

Soit $X = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \}$, on définit la classe $\mathcal{O}$ de la manière suivante:

$$\mathcal{O}=\{\emptyset;\{x_3\};\{x_4\};\{x_5\};\{x_1,x_2\};\{x_2,x_3,x_4\};\{x_1,x_4,x_5\},X\}$$

Comme X est un ensemble fini et $\{\emptyset,X\} \subset \mathcal{O}$, alors $(x,\mathcal{O})$ est un r-espace et $\mathcal{O}$ la classe des ensembles ouverts de X.



D'après la figure:

- X n'est pas un séparé parce que: $x_1 \neq x_2$ et tout voisi-nage de x_1 rencontre tout voisinage de x_2, en effet: $V_4 \cap V_5 \neq \emptyset$, $V_4 \cap V_6 \neq \emptyset$ et $V_5 \cap V_6 \neq \emptyset$.
- X ne vérifie pas la propo-sition m_3'.

$\mathcal{F}=\{V_4, V_6\} \cup \{A \subset X/A \supset V_4$ ou $A \supset V_6\}$ est un r_1-filtre qui converge vers x_1, admet x_2 comme un point adhérent: tout voisinage de x_2 rencontre tout ensemble de $\mathcal{F}$, en effet: $V_5 \cap V_4 \neq \emptyset$ et $V_5 \cap V_6 \neq \emptyset$. Enfin $\mathcal{F}$ ne converge pas vers x_2 parce que $V_4 \cap V_5 \cap V_6 \neq \emptyset$. Mais X vérifie la proposition m_2'.

Si un r_1-filtre $\mathcal{F}$ converge vers x_1 alors $\mathcal{F}$ ne converge pas vers x_2, x_3, x_4 et x_5 car $V_4 \cap V_5 \cap V_6 \neq \emptyset$, $V_1 \cap V_4 \neq \emptyset$, $V_2 \cap V_4 \neq \emptyset$ et $V_3 \cap V_4 \neq \emptyset$.

Comme V_4 est un voisinage de x_2 alors d'après ce qui précède: tout r_1-filtre qui converge vers x_2 ne converge pas vers x_1, x_3, x_4 et x_5.

Tout r_1-filtre qui converge vers x_3 ne converge pas vers x_1, x_2, x_4 et x_5 car $V_1 \cap V_4 \neq \emptyset$, $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ et $V_1 \cap V_3 \neq \emptyset$.

Tout r_1-filtre qui converge vers x_4 ne converge pas vers x_1, x_2, x_3 et x_5 car $V_2 \cap V_4 \neq \emptyset$, $V_2 \cap V_1 \neq \emptyset$ et $V_1 \cap V_3 \neq \emptyset$.

Et enfin tout r_1-filtre qui converge vers x_5 ne converge pas vers x_1, x_2, x_3 et x_4 car $V_3 \cap V_4 \neq \emptyset$, $V_3 \cap V_1 \neq \emptyset$ et $V_3 \cap V_2 \neq \emptyset$.

Théorème 3.

Un r-espace X est séparé si et seulement si pour tout r_1-filtre convergent vers x, x est le seul point adhérent de chaque r-filtre $\mathcal{F}'$ plus fin que $\mathcal{F}$.

Preuve.

La condition est nécessaire, en effet: si X est un r-espace séparé alors si un r_1-filtre $\mathcal{F}$ converge vers x, x est le seul point adhérent de $\mathcal{F}$, car la proposition m_1 entraîne m_3'. Il est donc le seul point adhérent à tout r_1-filtre $\mathcal{F}'$ plus fin que $\mathcal{F}$ puisque tout point adhérent à $\mathcal{F}'$ est adhérent à $\mathcal{F}$.

La condition est suffisante, en effet: s'il existe deux points distincts x et y de X tels que $V_x \cap V_y \neq \emptyset$ pour tout voisinage V_x de x et tout voisinage V_y de y, alors l'ensemble $\mathcal{S}(x)$ des voisinages de x engendre un r_1-filtre $\mathcal{F}$ pour lequel tout r-filtre plus fin que $\mathcal{F}$ admet y comme point adhérent ce qui achève notre démonstration.

II-3 EXEMPLES.

Finalement nous donnons des exemples d'un r-espace r_1-quasi-compact.

1. Il est facile de voir que tout r-espace fini est r_1-quasi-compact et plus généralement tout r-espace dans lequel il n'y a qu'un nombre fini d'ensembles ouverts est r_1-quasi-compact.

2. Soit X un ensemble infini et $\mathfrak{F}$ la classe des sous-ensembles de X composée de:

- L'ensemble X et $\varnothing$.
- Toute partie de X contenant exactement 10.k éléments où k=1,2,3,...

Il est facile de voir que la classe $\mathcal{S}=\{ A \subset X;\ X\backslash A \in \mathfrak{F} \}$ satisfait les conditions Ω_1 et Ω_2.

- La fermeture de $\varnothing$ est $\varnothing$.
- La fermeture de toute partie de X contenant 10.k éléments k=1,2,3,... est elle même.
- La fermeture de toute partie A de X contenant 10k+r éléments k=1,2,3,... et $1 \leq r \leq 9$ est une partie de X contenant A et dont le nombre d'éléments est 10(k+1).
- La fermeture de toute partie infinie de X est X.

Maintenant nous voulons démontrer que X est un r_1-quasi-compact, pour cela:
Soit $\{A_s\}_S$ une famille de fermés de X dont l'intersection est vide; $\bigcap\limits_S A_s=\varnothing$.

La question qui se pose est: existe t-il une sous-famille finie de $\{A_s\}_S$ dont l'intersection est vide?

S'il existe $s' \in S$ tels que $A_{s'}= \varnothing$ alors le problème est résolu: car, de toute sous-famille finie $\{A_{s_i};1\leq i\leq n\} \subset \{A_s\}_S$, la sous-famille finie $\{A_{s'};A_{s_i};1\leq i\leq n\}$ est telle que $A_{s'} \cap (\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_{s_i}) = \varnothing$.

Si pour tout $s \in S$: $A_s \neq \emptyset$, comme $\bigcap_S A_s=\emptyset$ alors $\forall\ s \in S$: $A_s \neq X$ c'est à dire pour tout $s \in S$, il existe $k_s \in \mathbb{N}^*$ tel que A_s contient exactement $10.k_s$ éléments alors il existe $s' \in S$ tel que $A_{s'}$ est fini. $A_{s'}= \{m_1,m_2,...,m_n\}$

$\bigcap_S A_s=\emptyset$ alors pour tout $m_i \in A_{s'}$, il existe $A_{s_{m_i}} \in \{A_s\}_S$

telque $m_i \notin A_{s_{m_i}}$ d'où $A_{s'} \cap (\bigcap_{i=1}^{n} A_{s_{m_i}}) = \emptyset$.

$\{A_{s'}, A_{s_{m_1}},A_{s_{m_2}},...,A_{s_{m_n}}\}$ est une sous-famille finie de $\{A_s\}_S$ qui répond à notre question.

CHAPITRE III

ENSEMBLES r-COMPACTS

III.1 ENSEMBLES r-QUASI-COMPACTS, r_1-QUASI-COMPACTS ET ENSEMBLES r-COMPACTS, r_1-COMPACTS.

Soient $(x,\mathcal{S})$ un r-espace et A une partie de X. Malgré qu'on ne peut pas définir le r-espace induit sur A par $\mathcal{S}$. Comme c'est montré dans l'exemple suivant:

Exemple 1.

Soient $X=\mathbb{Z}$ et $\mathcal{S} = \{\{-n,1,\ldots,n\};\{-n,1,\ldots,n\}^c/n\in\mathbb{N}^*\} \cup\{\emptyset,\mathbb{Z}\}$. Si $n \neq n'$ alors $\{-n,1,\ldots,n\} \not\subset \{-n',1,\ldots,n'\}$; $\{-n',1,\ldots,n'\}\not\subset \{-n,1,\ldots,n\}$. $\mathcal{S}$ vérifie les conditions Ω_1 et Ω_2 (ChapI, p.5), en effet: la preuve de Ω_1 vient directement de la définition de $\mathcal{S}$. Pour prouver Ω_2, soit A un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ et ${}^{A}\mathcal{S}$ la classe définie par: ${}^{A}\mathcal{S} = \{B \in \mathcal{S}: B \subset A\}$. La classe ${}^{A}\mathcal{S}$ est non vide car $\emptyset \in {}^{A}\mathcal{S}$. Pour tout $B \in {}^{A}\mathcal{S}$ d'après la construction de $\mathcal{S}$, la réunion d'une chaîne arbitraire d'éléments de ${}^{A}\mathcal{S}$ qui contient B se réduit à B c'est à dire que tout élément de ${}^{A}\mathcal{S}$ est un élément maximal de ${}^{A}\mathcal{S}$. Ainsi Ω_2 est vérifiée. Or la trace $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{N}$: $\mathcal{S}'=\mathbb{N} \cap \mathcal{S} =\{\{1,\ldots,n\};\{1,\ldots,n\}^c/n\in\mathbb{N}^*\}\cup\{\emptyset,\mathbb{N}\}$ ne vérifie pas Ω_2 , en effet: pour $A=\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$; ${}^{\mathbb{N}^*}\mathcal{S}'$ contient la chaîne $(A_n)_{n\geq 1}$ avec $A_n= \{1,\ldots,n\}$ dont $\bigcup\limits_{n \geq 1} A_n= \mathbb{N}^*$ n'est pas un élément de ${}^{\mathbb{N}^*}\mathcal{S}'$ car $\mathbb{N}^*=\mathbb{N} \cap C_{\mathbb{Z}}\{0\}$ avec $C_{\mathbb{Z}}\{0\} \notin \mathcal{S}$. Ainsi $(\mathbb{N},\mathcal{S}')$ n'est pas un r-espace.

Mais nous allons introduire la notion de sous-ensemble compact qui va garder les memes propriétés d'un r-espace compact.

Définition 1.

a) On dit qu'une partie A d'un r-espace X est un ensemble r-quasi-compact (resp. r_1-quasi-compact) si et seulement si de tout recouvrement de A par des ensembles ouverts dans X, on peut extraire un recouvrement formé de deux ouverts dans X (resp. un recouvrement fini) de A.

b) On dit qu'une partie A d'un r-espace X est séparée si et seulement si quelques soient les points distincts x,y de X, il existe un voisinage V_x de x et un voisinage V_y de y sans point commun.

c) On dit qu'une partie A de X est r-compacte (resp. r_1-compacte) si elle est r-quasi-compacte (resp.r_1-quasi-compacte) et séparée.

Sachant que le complémentaire d'un ouvert dans un r-espace X est un fermé et si $(\theta_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ est un recouvrement de A par des ensembles ouverts dans X, $(C\theta_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ est une famille de fermés dont l'intersection avec A est vide. On déduit alors la conséquence suivante:

<u>Conséquence 1.</u>

Une partie A d'un r-espace X est un r-quasi-compact (resp. r_1-quasi-compact) si et seulement si de toute famille de fermés dans X dont l'intersection avec A est vide, on peut extraire une sous-famille contenant deux fermés (resp. une sous-famille finie) dont l'intersection avec A reste vide.

<u>Remarque 1.</u>

Soit A une partie propre de X, tout r-filtre (resp. r_1-filtre) sur X n'est pas un r-filtre (resp.r_1-filtre) sur A. Mais tout r-filtre (resp. r_1-filtre) sur A est une r-base (resp. r_1-base) d'un r-filtre (resp. r_1-filtre) sur X.

<u>Définition 2.</u>

a) On dit qu'un r-filtre (resp. r_1-filtre) dans A converge vers un point x si et seulement si le r-filtre (resp. r_1-filtre) sur X qui admet cet r-filtre (resp. r_1-filtre) sur A comme r-base (resp. r_1-base) converge vers x.

b) On dit qu'un point x de X est adhérent à une r-base (resp. r_1-base) d'un r-filtre (resp. r_1-filtre) sur A si et seulement s'il est adhérent à cet r-base (resp. r_1-base).

Théorème 1.

Une partie A d'un r-espace X est r-quasi-compacte (resp. r_1-quasi-compacte) si et seulement si tout r-filtre (resp. r_1-filtre) sur A possède au moins un point adhérent dans A.

Preuve.

La condition est nécessaire, en effet: supposons qu'il existe un r-filtre $\mathcal{F}$ (resp. r_1-filtre $\mathcal{F}'$) sur A sans point adhérent dans A, les adhérences des ensembles de $\mathcal{F}$ (resp. de $\mathcal{F}'$) forment une famille d'ensembles fermés $\{\overline{F_s}, F_s \in \mathcal{F}\}_S$ (resp. $\{\overline{F'_s}, F'_s \in \mathcal{F}'\}_S$) est tel que $\bigcap\limits_S \overline{F_s} \cap A = \emptyset$ (resp. $\bigcap\limits_S \overline{F'_s} \cap A = \emptyset$) et pour tout $s_1, s_2 \in S$; $\overline{F_{s_1}} \cap \overline{F_{s_2}} \cap A \neq \emptyset$ (resp. et pour toute partie finie M_f de $\{\overline{F'_s}\}_S$; $\bigcap\limits_{M_f} \overline{F'_s} \cap A \neq \emptyset$) car elle contient l'intersection $F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap A$ (resp. l'intersection $\bigcap\limits_{M_f} \overline{F'_s} \cap A$) qui est en vertu de α_2' (resp. de α_2'') non vide. Ce qui contredit le fait que A est r-quasi-compact (resp. r_1-quasi-compact).

La condition est suffisante, en effet: raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il existe une famille $\mathcal{F} = \{Fs, s \in S\}$ de fermés dans X dont leur intersection avec A est vide: c'est à dire $\bigcap\limits_S \overline{F_s} \cap A = \emptyset$. Si pour tout $s_1, s_2 \in S$: $F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap A \neq \emptyset$ (resp. pour toute partie M_f finie de S: $\bigcap\limits_{M_f} \overline{F'_s} \cap A \neq \emptyset$) alors la trace $\mathcal{F}_A$ de $\mathcal{F}$ sur A est une r-base d'un r-filtre (resp. r_1-base d'un r_1-filtre) sur A qui aurait un point adhérent dans A. Mais ce point appartiendrait à tous les ensembles de $\mathcal{F}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Théorème 2.

Dans un r-espace r-quasi-compact (resp. r_1-quasi-compact), tout ensemble fermé est r-quasi-compact (resp. r_1-quasi-compact).

Preuve.

Soit A un ensemble fermé dans un r-espace r-quasi compact (resp. r_1-quasi-compact). Montrons que A est r-quasi-compact (resp. r_1-quasi-compact). D'après le théorème précédent il suffit de montrer que tout r-filtre (resp. r_1-filtre) sur A possède au moins un point adhérent dans A. Soit $\mathcal{F}$ un r-filtre (resp. r_1-filtre) sur A, d'après la remarque 1, $\mathcal{F}$ est la r-base (resp. r_1-base) d'un r-filtre (resp. r_1-filtre) sur X, comme X est r-quasi-compact (resp. r_1-quasi-compact) alors cet r-filtre (resp. r_1-filtre) possède au moins un point adhérent qui est adhérent à tous les ensembles de $\mathcal{F}$ et donc à A qui est un ensemble de $\mathcal{F}$. Ainsi ce point n'est autre qu'un élément de A car A est fermé.

Conséquence 2.

Dans un r-espace X, la réunion d'une famille finie d'ensembles r_1-quasi-compacts est un ensemble r_1-quasi-compact.

En effet: il suffit de montrer que la réunion de deux ensembles r_1-quasi-compacts A,B est r_1-quasi-compact. Soit $\mathfrak{R}$ un recouvrement de A ∪ B, c'est un recouvrement de A et recouvrement de B, donc il contient un recouvrement fini $\mathfrak{R}_1$ de A et un recouvrement fini $\mathfrak{R}_2$ de B; $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_1$ est donc un recouvrement fini de A ∪ B contenu dans $\mathfrak{R}$, d'où la conséquence.

Remarque 2.

La réunion finie d'ensembles r-quasi-compacts n'est pas r-quasi-compact, comme nous allons l'illustrer à l'aide de l'exemple suivant:

Soit $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$. On définit $\mathcal{S}$ de la manière suivante:

$$\mathcal{S}=\{\ \emptyset,\ \{x_1\},\ \{x_2\},\ \{x_3\},\ \{x_4\},\ X\ \}.$$

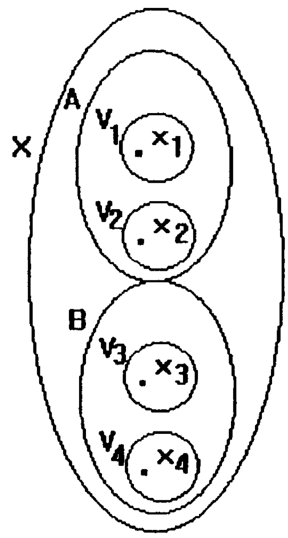


Figure.1

On pose $A=\{x_1,x_2\}$ et $B=\{x_3,x_4\}$, c'est clair que d'après la figure.1, A et B sont r-quasi-compacts mais $A \cup B = X$ n'est pas r-quasi-compact.

<u>Conséquence 3.</u>

La réunion finie d'ensembles fermés dans un r-espace X, r_1-quasi-compact est r_1-quasi-compact.

En effet: Soit $\{F_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de fermés d'un r-espace r_1-quasi-compact, d'après le théorème précédent, c'est une famille finie d'ensembles r_1-quasi-compacts alors d'après la conséquence précédente, la réunion de ces ensembles est r_1-quasi-compact.

III.2 ENSEMBLE FORTEMENT SEPARE .

Définition 3.

Une partie A de X est fortement séparée si et seulement si pour tout x,y tel que $x \in A$ et $y \in X \setminus A$ et pour tout $B \in \mathcal{S}$ tel que $B \subset X\setminus A$, il existe un voisinage Vx de x et un voisinage Vy de y qui contient $B \cup \{x\}$ tel que $Vx \cap Vy = \varnothing$.

Théorème 3.

Dans un r-espace, chaque partie A de X telle que A et $(X\setminus A)$ sont des ouverts dans X est fortement séparée.

Preuve.

Soit A une partie d'un r-espace X telle que A et $X\setminus A$ sont des ouverts dans X. Pour chaque point x,y tel que $x \in A$ et $y \in X\setminus A$ et pour chaque B_1, B_2 de $\mathcal{S}$ tel que $B_1 \subset X\setminus A$ et $B_2 \subset A$, il existe $V_x^1=A$ et $V_y^1=X\setminus A \supset B_1 \cup \{y\}$ tel que $Vx \cap Vy = \varnothing$ et $V_x^2= A \supset B2 \cup \{x\}$ et $V_y^2=X\setminus A$ tel que $Vx \cap Vy = \varnothing$ alors A et $X\setminus A$ sont fortement séparées.

Théorème 4.

Une partie A de X est fortement séparée si et seulement s'il n'existe pas sur X un filtre qui ne converge pas vers un point $x \in A$ et aussi vers un point $y \in X\setminus A$ d'après un ouvert B telque $B \subset X\setminus A$.

Preuve.

La condition est nécessaire, en effet: soient $x \in A$, $y \in X\setminus A$ et $B \in \mathcal{S}$ telque $B \subset X\setminus A$. Suppposons qu'il existe un filtre $\mathcal{F}$ sur X qui converge vers x ou vers y suivant B alors, d'après la définition de la convergence d'un filtre, $\mathcal{F}$ est plus fin que l'ensemble des voisinages $\mathcal{S}(x)$ de x ou de l'ensemble des voisinages de y contenant $B \cup \{y\}$. Ainsi $\mathcal{F}$ est plus fin que la réunion de l'ensemble des voisinages de x, $\mathcal{S}(x)$ et de l'ensemble des voisinages de y contenant $B \cup \{y\}$, $\mathcal{S}(B \cup \{y\})$ soit $\mathcal{S}(x) \cup \mathcal{S}(B \cup \{y\})$. Comme $\mathcal{F}$

est un r-filtre (resp. r_1-filtre) alors en vertu de α_2' (resp. de α_2") pour tout voisinage Vx de x et tout voisinage Vy de y contenant B $\cup$ $\{y\}$ on a: Vx $\cap$ Vy $\neq \emptyset$, d'où A n'est pas fortement séparée.

La condition est suffisante: supposons que A n'est pas fortement séparée cela veut dire d'après la définition qu'il existe $x \in A$, $y \in X\backslash A$ et $B \in \mathcal{S}$ telque $B \subset X\backslash A$. Vérifions, pour tout voisinage Vx de x et pour tout voisinage Vy de y contenant $(B \cup \{y\})$ on a: Vx $\cap$ Vy $\neq \emptyset$, alors:

- L'ensemble des voisinages de x et des voisinages de y contenant $(B \cup \{y\})$ converge vers $x \in A$ et vers $y \in X\backslash A$ suivant B alors converge vers $x \in A$ <u>ou</u> vers $y \in X\backslash A$ suivant $B \in \mathcal{S}$ tel que $B \subset X\backslash A$.
- L'ensemble des voisinages $\mathcal{S}(x)$ de x est une r_1-base d'un r_1-filtre qui converge vers $x \in A$ <u>ou</u> l'ensemble des voisinages de y contenant B soit $\mathcal{S}(B \cup \{y\})$ est une r_1-base d'un r_1-filtre qui converge vers $y \in X\backslash A$ suivant $B \in \mathcal{S}$ tel que $B \subset X\backslash A$.

Nous savons que: dans un espace topologique séparé, tout ensemble compact est fermé. Mais dans un r-espace séparé, un ensemble compact n'est pas forcément fermé comme nous allons le montrer à l'aide de l'exemple suivant:

<u>Exemple 2.</u>

Soit $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, nous définissons $\mathcal{S}$ ensemble des ouverts dans X de la manière suivante:

$$\mathcal{S} =\{\emptyset,\{x_1\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_1,x_2\},\{x_2,x_3\},X\}.$$

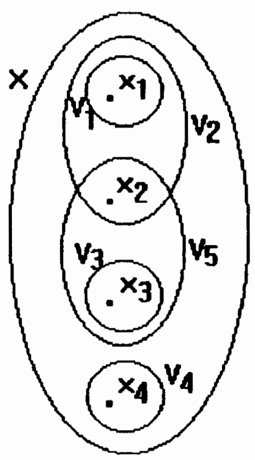


Figure.2

D'après la figure.2, X est un séparé car,

$$\left[\begin{array}{l} x_1 \neq x_2 \\ x_1 \neq x_3 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad V_1 \cap V_5 = \emptyset$$

$$\begin{array}{llll} x_1 \neq x_4 & \text{et} & V_1 \cap V_4 = \emptyset \\ x_2 \neq x_3 & \text{et} & V_2 \cap V_3 = \emptyset \\ x_2 \neq x_4 & \text{et} & V_2 \cap V_4 = \emptyset \\ x_3 \neq x_4 & \text{et} & V_3 \cap V_4 = \emptyset \end{array}$$

Soit $A = \{x_1, x_2\}$ est r-quasi-compact donc r_1-quasi-compact or $V_3 \subset X\backslash A$ et $x_4 \in X\backslash A$ mais d'après la figure il n'existe aucun ouvert qui contient $\{x_4\} \cup V_3$ qui soit contenu dans $X\backslash A$. Ainsi $X\backslash A$ n'est pas ouvert et par conséquent A n'est pas un fermé.

Définition 4.

Si A est une partie de X, B un ouvert de X et x un point de X, alors x est un point adhérent à A suivant B si pour tout voisinage V_x de x contenant $B \cup \{x\}$: $V_x \cap A \neq \emptyset$.

Théorème 5.

Soit une partie A de X fortement séparée et compacte dans un r-espace X.
Si A possède la propriété suivante:

" Si un point x de X est adhérent à A suivant $B \in \mathcal{B}$, où, $B \subset X\backslash A$, ensuite chaque système fini $\{\vartheta_i\}_{1\leq i\leq n}$ de voisinage du point x qui contient B

vérifie $(\bigcap_{i=1}^{n} \vartheta_i) \cap A \neq \emptyset$."

alors A est fermé.

Preuve.

Raisonnons par l'absurde, en supposant que $X\backslash A$ n'est pas un ouvert, c'est à dire qu'il existe un point $x \in X\backslash A$ et un ouvert B contenu dans $X\backslash A$ telque: pour tout voisinage V de x contenant le prévoisinage $B \cup \{x\}$: $V \cap A \neq \emptyset$; ce qui veut dire que x est un point adhérent à A suivant B. Comme A est fortement séparée alors, pour tout $y \in A$, il existe un voisinage $T(x,y)$ contenant le prévoisinage $B \cup \{x\}$ et un voisinage $U(x,y)$ de y qui ne se rencontrent pas:

$T(x,y) \cap U(x,y) = \emptyset$ puisque A est r-quasi-compact (resp. r_1-quasi-compact) alors, il existe deux ouverts $U(x,y_1)$, $U(x,y_2)$ qui recouvrent A (resp. un nombre fini n de points y_i de A telque les $U(x,y_i) 1 \leq i \leq n$ forment un recouvrement de A), soit $A \subset U(x,y_1) \cup U(x,y_2)$ (resp. $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U(x,y_i)$).
Ensuite $\{T(x,y_1), T(x,y_2)\}$ (resp. $\{T(x,y_i); 1 \leq i \leq n\}$) est un système fini de voisinages de x qui contiennent B et x est un point adhérent à A d'après B; alors:

$$(U(x,y_1) \cup U(x,y_2)) \cap (T(x,y_1) \cap T(x,y_2)) \supset A \cap (T(x,y_1) \cap T(x,y_2)) \neq \emptyset$$

or $(U(x,y_1) \cup U(x,y_2)) \cap (T(x,y_1) \cap T(x,y_2)) = \emptyset$

(resp. $\left(\bigcup_{i=1}^{n} U(x,y_i)\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} T(x,y_i)\right) \supset A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} T(x,y_i)\right) \neq \emptyset$)

$$\text{or } \left(\bigcup_{i=1}^{n} U(x,y_i)\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} T(x,y_i)\right) = \left[U(x,y_1) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} T(x,y_i)\right)\right] \cup \left[U(x,y_2) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} T(x,y_i)\right)\right] \cup \ldots \cup \left[U(x,y_n) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} T(x,y_i)\right)\right].$$

et $\forall i, 1 \leq i \leq n$

$$U(x,y_i) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} T(x,y_i)\right) = [U(x,y_i) \cap T(x,y_i)] \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} T(x,y_j)\right) = \emptyset \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} T(x,y_j)\right) = \emptyset.$$

d'où $\left(\bigcup_{i=1}^{n} U(x,y_i)\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} T(x,y_i)\right) = \emptyset$
ce qui est absurde, d'où X\A est un ouvert alors A est un fermé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI.N. Eléments de mathématiques, Topologie générale Chapitre 1 à 4. Hermann, Paris,1971.

[2] KELLEY.J.L. General Topology. D.Van Norstand company, New York 1955.

[3] ZUZČÀK.I. Generalized Topological spaces. Math Slova 33, 1983, n°3, 249-256.

[4] ZUZČÀK.I. Bases in r-spaces. Math Slova 35, 1985, n°2, 175-1984.

[5] ZUZČÀK.I. Homeomorphism and continuity of r-space. Math Slova 34, 1984, n°4, 345-354.