

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ "MENTOURI" DE CONSTANTINE
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Numéro D'ORDRE :
Numéro DE SÉRIE :

THÈSE
Présentée Pour L'obtention Du Diplôme De :
DOCTORAT EN SCIENCE
Thème

**ANALYSE NUMÉRIQUE DE QUELQUES PROBLÈMES DE
CONTACT**

Option
EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES
Par :
Khaireddine FERNANE


DEVANT LE JURY

Mr	S. DJEZZAR	Prof à l'université "Mentouri" de Constantine-Algérie	Président
Mr	A. AYADI	Prof à l'université " Larbi Ben M'Hidi " de Oum el Baoughi -Algérie	Rapporteur
Mr	S. DRABLA	Prof à l'université " Ferhat Abbas " de Sétif-Algérie	Examineur
Mr	M. DAIAH	MC à l'université "Mentouri" de Constantine-Algérie	Examineur
Mr	M.Z. AISSAOUI	MC à l'université 8 Mai 1945 de Guelma-Algérie	Examineur
Mr	F. ELLAGGOUNE	MC à l'université 8 Mai 1945 de Guelma-Algérie	Examineur

Soutenue le 04 Juillet 2012


Résumé

Dans cette thèse, nous démontrons la convergence d'une nouvelle formulation variationnelle déduit la formulation de la méthode de l'Hypersphère de type Neumann- Dirichlet. Celui-ci permet d'approcher un problème de contact unilatéral. L'idée est de remplacer dans l'approche proposée, le problème par une inéquation variationnelle combinée avec la méthode des éléments finis non conformes d'une part et d'autre part nous nous plaçons dans le cadre des déformations anti-planes et nous étudions des processus statiques pour des matériaux électro-élastiques. Les résultats que nous obtenons concernant l'existence et l'unicité des solutions.

 **Mots-Clés :** Eléments finis non conformes, contact unilatéral, méthode de l'Hypersphère, matériel électro-élastique, frottement de Tresca, inéquations variationnelles.

Abstract

In this thesis, we prove the convergence of a new variational formulation deduced from the one of the Hypersphere Dirichlet-Neumann type method. This approach allows a unilateral contact problem. The idea is to replace the problem in the proposed approach by a variational inequality using the nonconforming finite element method within the anti-plane strain scheme. We study the static processes for electro-elastic materials. The obtained results concern the existence and the uniqueness of weak solutions.

 **Key-Words:** Nonconforming finite elements, contact problem, The Hypersphere method, electro- elastic material, Tresca's friction, variational inequality.

ملخص

في هذه الأطروحة، نثبت التقارب بين صياغة تباين جديدة ثم استنتاجها من طريقة Hypersphere نوع ديريتشليت-نيومان بهدف تقريب مسألة الاحتكاك. تعتمد الفكرة على تعويض في الصياغة المقترحة، المسألة بمراجعة تغيرية باستخدام طريقة العناصر المنتهية غير المكتملة لحساب الحل العددي واختباره على نموذج هذا من جهة، و من جهة أخرى نتطرق لدراسة نموذج رياضي ضمن سلالة anti-plane. حيث نقوم بدراسة عمليات ثابتة لمرونة المواد الكهربية. النتائج المتحصل عليها هي إثبات وجود ووجدانية الحلول الضعيفة.

الكلمات الإستدلالية: طريقة العناصر المنتهية غير المكتملة ، مسألة الاحتكاك ، طريقة



Hypersphere، الكهربية والمواد المرنة، الاحتكاك لتييريزة، وعدم المساواة بين التغيرات.



Remerciements

Je tiens dans un premier temps à remercier **Monsieur A. AYADI** Prof à l'université Oum el Baoughi -Algérie qui a accepté de diriger ce travail et a veillé au bon déroulement de ces années, en m'apportant des critiques constructives et des conseils pertinents, et ce suite à l'intérêt qu'il a accordé à mes travaux de recherches.

Je remercie vivement **Monsieur S. DJEZZAR** Prof à l'université "Mentouri" de Constantine-Algérie, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury .

Mes sincères remerciements vont à **Monsieur S. DRABLA**, Professeur à l'université de Sétif qui m'a fait l'honneur d'être examinateur de ma thèse. Je leurs adresse tous mes remerciements et toute ma reconnaissance pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail.

Je remercie chaleureusement **Monsieur M. Z. Aissaoui** Maître de Conférences à l'université de Guelma, **Monsieur F. Elaggoune Fateh** Maître de Conférences à l'université de Guelma pour avoir participé au jury et pour avoir examiné cette présente thèse.

Je tiens à remercier **Monsieur M. DALAH** Maître de Conférences l'université "Mentouri" de Constantine, pour son aide précieuse qu'il m'a apporté, pour l'élaboration de ce présent travail.

Enfin, je remercie, aussi mes collègues au département de mathématiques de l'université de Guelma pour leurs amitiés et leurs encouragements.



Dédicace

A mes très chers parents,
A ma petite famille, ma femme et
mon fils Abdelkrim,
A mes Frères, soeurs,
A tous mes amis

Je dédie ce travail



Table des matières

1	Rappels d'analyse fonctionnelle	5
1.1	Notations	5
1.2	Espaces de Sobolev	7
1.2.1	Définitions et propriétés	7
1.3	Ensembles convexes et fonctions convexes	8
1.3.1	Continuité des fonctions convexes	9
1.3.2	Méthode de quadrature de Gauss	10
2	Résultat de convergence pour un problème de contact unilatéral	13
2.1	Introduction	13
2.2	Position du problème	14
2.3	Méthode de L'Hypersphère	15
2.4	Description de La méthode	17
2.4.1	Cas sans contrainte (Hypercerce)	17
2.4.2	Cas avec contrainte d'inégalité (Hypersphère)	18
2.5	Méthode de l'hypersphère pour le problème de l'obstacle abstrait	20
2.6	Méthode de L'hypersphère pour le problème de l'obstacle pour une plaque	23
2.7	Formulation variationnelle de l'hypersphère	23
2.7.1	Interprétation de la contrainte	24
2.8	Discrétisation du problème par la méthode des éléments finis	29
2.9	Analyse des résultats numériques et commentaires	37

2.9.1	Détermination de la région de contact	39
2.9.2	Comportement du moment fléchissant	44
2.10	Résultat de convergence	46
3	Existence et unicité de la solution d'un problème électro-élastique	51
3.1	Introduction	51
3.2	Modèle mathématique	52
3.3	Formulation variationnelle	59



Introduction générale

Le développement de l'analyse numérique, et des mathématiques en général, a été et sera toujours nécessaire pour la résolution des problèmes de plus en plus complexes posés par la physique et les sciences de l'ingénieur. Ainsi, la plupart des phénomènes mécaniques, biologiques ou économiques sont modélisés à l'aide d'équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires et la modélisation de ces sciences passe en partie par une meilleure compréhension des propriétés des solutions de ces équations. D'un point de vue numérique, c'est au début des années 1960 que les méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles ont connu un développement considérable.

Leur traitement numérique nécessite la formulation dite faible des équations. En mécanique, trois types de formulations sont envisageables : la formulation en déplacements (les inconnues du problème sont les déplacements), la formulation en contraintes (les inconnues du problème sont les contraintes) et la formulation mixte. Plusieurs problèmes aux limites sont discrétisés par des formulations mixtes. Une fois l'approximation est choisie, on doit s'assurer que le problème discrétisé est bien posé sans contrainte, tandis que la première catégorie nécessite des contraintes souvent difficiles à vérifier en pratique, c'est le cas des problèmes de contact unilatéral ou bilatéral.

Le problème de contact entre un solide déformable et une fondation rigide, ou entre plusieurs solides déformables est une équation aux dérivées partielles ou un système d'équations aux dérivées partielles avec des contraintes de type inégalités sur la surface ou les surfaces de contact. Sous forme faible, ce problème correspond

à un problème d'optimisation.

Durant les années précédentes, les mathématiciens et les physiciens ont consacré de grands efforts pour l'étude de solutions explicites et numériques des problèmes de contact.

Beaucoup de méthodes efficaces ont été présentées dans ([4], [9], [20]). Parmi elles, la méthode de dualité qui a pour objet la justification rigoureuse du modèle de plaque dans le cadre de la théorie des inéquations variationnelles, en prouvant des résultats d'existence, d'unicité et de stabilité des solutions [5]. Ces dernières années, un intérêt majeur est donné aux méthodes variationnelles mixtes ayant pour objet l'étude des propriétés d'approximation (consistance, stabilité, précision, coût,...) et l'obtention des algorithmes de résolution ainsi que leur mise en œuvre ([3], [7], [10]). Cette thèse se compose de trois parties :

- La première partie constitue un rappel des outils de l'analyse fonctionnelle.
- Dans la deuxième partie, nous nous intéressons au problème de l'optimisation issu de la formulation par éléments finis mixtes pour un problème de plaque en flexion sous l'action d'un obstacle rigide. Nous proposons une méthode variationnelle mixte : l'approximation des efforts résulte de celle des moments de flexion en satisfaisant explicitement les équations de l'équilibre des moments. Nous développons sur ce modèle deux éléments finis mixtes (rectangle à 4 nœuds et 4 degrés de liberté par nœuds) et nous proposons également une forme modifiée de cette formulation. En outre, nous vérifions la convergence des éléments développés à l'aide d'un théorème avec l'évaluation de leur précision à travers une série de cas-tests standards relatifs aux problèmes de plaques [15].
- Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'un problème aux limites de contact, avec ou sans frottement, entre un corps déformable et une fondation. Nous nous plaçons dans le cadre des déformations anti-planes et nous étudions des processus statiques des matériaux électro-élastiques. Les résultats que nous obtenons concernent l'existence et l'unicité des solutions faibles [17].

Rappels d'analyse fonctionnelle



On commence par introduire quelques notions de base et rappeler quelques définitions indispensables à la compréhension du manuscrit (sans donner de démonstrations). On introduit les espaces de Sobolev qui seront utilisés dans l'approximation numérique de ce problème. On pourra consulter pour plus de détails ([24]).

1.1 Notations

On notera $x := (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ les éléments de \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$), $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ est la norme euclidienne de x . Un vecteur $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{N}^n$ est appelé un multi-indice et $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ est la longueur du multi-indice. Pour toute fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ régulière, on note :

$$D^\alpha F(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} F(x)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n} \quad (1.1)$$

Si $\alpha = (0, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{N}^n$, on adopte la convention $D^\alpha F(x) = F(x)$. De même, on notera pour tout $x := (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$:

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (1.2)$$

L'espace des fonctions C^∞ à support compact inclus dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^n est noté $\mathcal{D}(\Omega)$ (espace des fonctions test). L'espace des distributions à support dans Ω est le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$, on le note $\mathcal{D}'(\Omega)$. L'espace $\mathcal{L}^1(\Omega)$ est l'ensemble

des fonctions mesurables et intégrables (pour la mesure de Lebesgue dx) sur Ω .
On note :

$$\|f\|_{\mathbb{L}^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)| dx \quad (1.3)$$

On définit ensuite pour tout $1 \leq p < \infty$ l'espace :

$$\mathbb{L}^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } |f(x)|^p \in \mathbb{L}^1(\Omega) \right\} \quad (1.4)$$

que l'on munit de la norme :

$$\|f\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.5)$$

Lorsque $p = \infty$, on a la définition suivant :

$$\mathbb{L}^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \exists C \text{ t.q. } |f(x)|^p < C \text{ p.p. sur } \Omega \right\} \quad (1.6)$$

dont la norme est :

$$\|f\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} = \inf \{ C, |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \} \quad (1.7)$$

Proposition 1.1.1 (Inégalité de Holder)

Pour tout $f \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ et $g \in \mathbb{L}^{p'}(\Omega)$, $|fg| \in \mathbb{L}^1(\Omega)$ et on a l'égalité :

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{\mathbb{L}^p} \|g\|_{\mathbb{L}^{p'}} \quad (1.8)$$

Avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Lorsque $p = p' = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1.2 Espaces de Sobolev

1.2.1 Définitions et propriétés

Définition 1.2.1 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On pose :

$$\mathbb{H}^1(\Omega) = \left\{ u \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, n \right\} \quad (1.1)$$

Bien entendu, la dérivation est prise au sens des distributions. En d'autres termes, une fonction $u \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ est dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ s'il existe des fonctions v_1, \dots, v_n dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ telles que :

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \phi dx, \quad \forall \phi \in \mathbb{D}(\Omega), \forall i = 1, \dots, n \quad (1.2)$$

L'espace $\mathbb{H}^1(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.3)$$

Proposition 1.2.1 L'espace $\mathbb{H}^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert. De la même façon que dans la définition (1.2.1), on définit les espaces de Sobolev $\mathbb{H}^m(\Omega)$ où m est un entier strictement positif par :

$$\mathbb{H}^m(\Omega) = \left\{ u \in \mathbb{L}^2(\Omega) : D^\alpha u \in \mathbb{L}^2(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}, |\alpha| \leq m \right\} \quad (1.4)$$

On le munit de la norme naturelle :

$$\|u\|_{\mathbb{H}^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.5)$$

Proposition 1.2.2 L'espace $\mathbb{H}^m(\Omega)$ ($\alpha \in \mathbb{N}^*$) muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^m(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.

Définition 1.2.2 On note $\mathbb{H}_0^m(\Omega)$ l'adhérence (pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^m(\Omega)}$) du sous-espace $\mathbb{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{H}^m(\Omega)$.

Proposition 1.2.3 (Inégalité de Poincaré) *Soit Ω un ouvert borné dans une direction. Alors il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que :*

$$\forall u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \quad \|u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \quad (1.6)$$

1.3 Ensembles convexes et fonctions convexes

Définition 1.3.1 *Une partie C de E est dite convexe si pour tout couple $(x, y) \in C^2$, le segment*

$$[x; y] = \{(1-t)x + ty \mid 0 \leq t \leq 1\} \quad (1.1)$$

est inclus dans C . Autrement dit :

$$\forall (x, y) \in C^2, \forall t \in [0, 1], \quad (1-t)x + ty \in C \quad (1.2)$$

Définition 1.3.2 *Une application $J : C \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur une partie convexe C de \mathbb{E} est dite :*

Convexe sur l'ensemble C si :

$$\forall (x, y) \in C^2, \forall t \in [0, 1], \quad J((1-t)x + ty) \leq (1-t)J(x) + tJ(y) \quad (1.3)$$

Strictement convexe sur l'ensemble C si :

$$\forall (x, y) \in C^2, \forall t \in [0, 1], \quad J((1-t)x + ty) < (1-t)J(x) + tJ(y) \quad (1.4)$$

On définit le domaine de J par :

$$\text{dom}(J) = \{x \in \mathbb{E} \mid J(x) < +\infty\} \quad (1.5)$$

Lorsque $\text{dom}(J)$ est non vide, on dit que J est propre.

Une fonction $J : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sera dite convexe si, pour tout $(x, y) \in C^2$ et $t \in]0, 1[$, on a :

$$J((1-t)x + ty) \leq (1-t)J(x) + tJ(y) \quad (1.6)$$

Si, de plus, elle est strictement convexe sur $\text{dom}(J)$, on dira que J est strictement convexe.

1.3.1 Continuité des fonctions convexes

Sauf mention du contraire, on considère dans toute la section un espace de Hilbert \mathbb{V} de dual (topologique) \mathbb{V}' ; on identifiera \mathbb{V} à \mathbb{V}' grâce au théorème de Riesz si nécessaire. On note $\|\cdot\|_{\mathbb{V}}$ la norme de \mathbb{V} .

Lemme 1.3.1 *Soit $J : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe. Si, au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{V}$, J est majorée (dans \mathbb{R}), alors J est continue en x_0 .*

Définition 1.3.3 *Une fonction $J : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est semi-continue inférieurement (sci) sur V si elle satisfait aux conditions équivalentes :*

1. $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \{u \in V \mid J(u) \leq a\}$ est fermé,
2. $\forall \bar{u} \in \mathbb{V}, \quad \liminf_{u \rightarrow \bar{u}} J(u) \geq J(\bar{u})$.

Théorème 1.3.1 *Toute fonction convexe sci pour la topologie de \mathbb{V} est encore sci pour la topologie faible de \mathbb{V} .*

En pratique ce résultat s'utilise sous la forme du corollaire suivant :

Corollaire 1.3.1 *Soit J une fonctionnelle convexe de \mathbb{V} dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sci (par exemple continue) pour la topologie forte. Si v_n est une suite de \mathbb{V} faiblement convergente vers v alors :*

$$J(v) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(v_n) \quad (1.7)$$

Théorème 1.3.2 *On suppose que \mathbb{V} est un Banach réflexif. Soit J une fonctionnelle de \mathbb{V} dans $\overline{\mathbb{R}}$, convexe et semi-continue inférieurement. Soit \mathbb{K} un sous-ensemble convexe, non vide et fermé de \mathbb{V} . On suppose que J est propre (c'est- a-dire qu'il existe un élément v_0 de \mathbb{K} tel que $J(v_0) < +\infty$). Alors le problème de minimisation suivant :*

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathbb{K} \text{ tel que} \\ J(u) = \inf \{J(v) \mid v \in \mathbb{K}\} \end{cases} \quad (1.8)$$

admet au moins une solution dans l'un des cas suivants :

* Soit J est coercive i.e. $\lim_{\|v\|_V \rightarrow +\infty} J(v) = +\infty$,

* Soit \mathbb{K} est borné.

Si, de plus, J est strictement convexe la solution est unique.

Définition 1.3.4 J est dite fortement convexe de module α , ou α -convexe, si :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \forall (u, v) \in \mathbb{V}^2, \quad J((1-t)u + tv) < (1-t)J(u) + tJ(v) - \frac{\alpha}{2} \|u - v\|_{\mathbb{V}}^2 \quad (1.9)$$

Définition 1.3.5 On dit que J est Gâteaux-différentiable en $u \in V$ si la dérivée directionnelle :

$$\forall v \in \mathbb{V}, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{J(u + hv) - J(u)}{h} = \langle J'(u), v \rangle \quad (1.10)$$

existe dans toute direction u de \mathbb{V} et si l'application $J \mapsto \langle J'(u), v \rangle$ est linéaire continue.

Théorème 1.3.3 (Inégalité du gradient d'une fonction convexe)

Soit $J : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ une application Gâteaux-différentiable. Alors :

$$J \text{ est convexe} \Leftrightarrow \forall (u, v) \in V^2, J(v) > J(u) + \langle \nabla J(u), v - u \rangle \quad (1.11)$$

1.3.2 Méthode de quadrature de Gauss

En général on remplace le calcul de l'intégrale par une somme pondérée prise en un certain nombre de points du domaine d'intégration. La méthode de quadrature de Gauss, du nom de Carl Friedrich Gauss, est une méthode de quadrature exacte pour un polynôme de degré $(2n-1)$ avec n points pris sur le domaine d'intégration. Bien souvent le calcul d'intégrales dans le cas bidimensionnel (voire tridimensionnel) peut s'avérer très difficile. C'est pourquoi dans la pratique, on utilise des méthodes

numériques pour approcher de telles intégrales. La méthode de quadrature de Gauss est la méthode que nous utiliserons ici pour calculer notre intégrale.

Cas unidimensionnel

Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse et intégrable. On souhaite calculer :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \quad (1.12)$$

Une telle intégrale peut être approchée grâce à une formule d'intégration numérique du type :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{l=1}^n f(\hat{\xi}_l) \hat{w}_l + R = \sum_{l=1}^n f(\hat{\xi}_l) \hat{w}_l \quad (1.13)$$

où n est le nombre de points de quadrature, $\hat{\xi}_l$ est l^e point d'intégration, \hat{w}_l est le poids du l^e point d'intégration et R est le reste.

Il ya plusieurs méthodes pour déterminer les $\hat{\xi}_l$ et les \hat{w}_l , nous ne nous intéresserons qu'à la méthode de quadrature de Gauss.

Cas bidimensionnel

Soit $f : [-1, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse et intégrable. On souhaite calculer :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy \quad (1.14)$$

En fait nous allons appliquer successivement le cas monodimensionnel sur chacune des coordonnées :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 \left(\sum_{l=1}^n f(\hat{\xi}_l, y) \hat{w}_l^1 \right) dy \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n f(\hat{\xi}_l, \hat{\eta}_k) \hat{w}_l^1 \hat{w}_k^2 \end{aligned} \quad (1.15)$$

où $\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_n$ et $\hat{w}_1^1, \dots, \hat{w}_n^1$ sont les points et les poids liés à la variable x , et $\hat{\eta}_1, \dots, \hat{\eta}_m$ et $\hat{w}_1^2, \dots, \hat{w}_m^2$ ceux liés à la variable y .

Remarque 1.3.1 Soit $g: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse et intégrable. On souhaite calculer :

$$\int_{\Omega} g d\Omega \tag{1.16}$$

Il suffit de nous ramener grâce à un changement de variable à l'intégrale sur $[-1, 1]^n$ pour pouvoir appliquer notre formule de quadrature.

Il existe des tables dans certains ouvrages qui donnent également les poids et les points de Gauss pour les simplexes. C'est le cas de l'ouvrage de Ern et Guermond ([14]) aux pages **317 à 319**.



Résultat de convergence pour un problème de contact unilatéral

2.1 Introduction

Le problème biharmonique classique avec les conditions aux limites de Dirichlet a été étudié d'un point de vue théorique et numérique. Une méthode de résolution consiste, à la réduction du problème par un procédé itératif, à la résolution de deux problèmes du second ordre (Glowinski et al. ([21])). D'autres méthodes de résolution numérique utilisent les éléments finis conformes et non-conformes, la référence Ciarlet ([8]) est très utile. Pour les méthodes mixtes, on cite entre autres Mercier ([30]), Scholz ([39]), Rannacher ([34]),.... Pour l'étude des problèmes d'ordre quatre avec contrainte d'inégalité l'ouvrage de Glowinski et al. ([21]) est très important. Quelques méthodes de résolution numérique pour le problème biharmonique ont été généralisées au problème de l'obstacle pour l'opérateur biharmonique. Dans Glowinski et al. ([21]), la méthode de dualité avec l'algorithme d'Uzawa est particulièrement utilisée pour résoudre ce problème. Haslinger ([23]) donne une autre approche basée directement sur la méthode des éléments finis pour résoudre ce type du problème. Dans Caffarelli et Friedman ([7]) des résultats théoriques très importants concernant la régularité de la solution et la nature de la région de contact sont donnés. Il existe diverses formulations spécifiques de problèmes de contact fournissant la base pour une méthode d'analyse numérique.

L'objectif principal du présent chapitre est de proposer une formulation efficace de résolution du problème de contact unilatéral.

2.2 Position du problème

Dans le repère cartésien $OXYZ$, on considère une plaque élastique occupant l'espace entre les deux plans $Z = \pm \frac{l}{2}$ (où le paramètre l désigne l'épaisseur supposée constante). On note par Ω , Γ , la plaque et sa frontière respectivement.

On s'intéresse à l'étude d'une plaque encastrée i.e. fixée le long de sa frontière et centrée en l'origine des coordonnées (Figure 2.1), et soumise à l'action d'un obstacle rigide. On s'intéresse seulement aux petits déplacements verticaux du demi-plan.

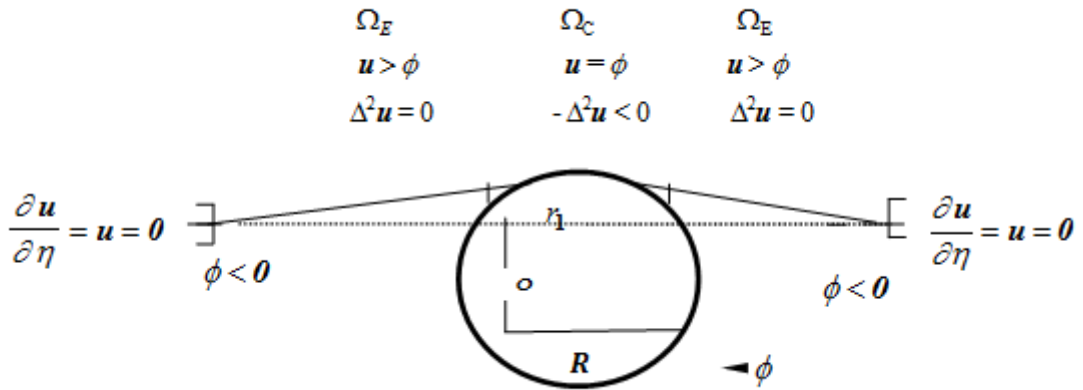


FIGURE 2.1 – Problème de contact entre une plaque élastique et un obstacle rigide

Pour cela, on suppose que la plaque est déplacée sous l'action d'un obstacle rigide lequel dans son état d'équilibre est représenté par la sphère décrite par :

$$x^2 + y^2 + \left(z + \frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad (2.1)$$

L'obstacle rigide est en contact avec seulement une partie de la plaque comme l'indique la figure (2.1).

La figure (2.1) montre aussi l'existence de deux zones : la zone de contact Ω_c et la zone de non contact Ω_e .

Les petits déplacements verticaux de la plaque vérifient :

$$(P) \begin{cases} -\Delta^2 u \leq 0 & \text{dans } \Omega \\ (u - \phi) \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ (u - \phi)\Delta^2 u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.2)$$

où :

$$\phi(x, y) = \begin{cases} -\frac{2}{5} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2}, & \text{si } x^2 + y^2 \leq \left(\frac{3}{10}\right)^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.3)$$

Représente la hauteur de l'obstacle au-dessus du plan.

La région de contact est définie alors par :

$$\Omega_c = \{(x, y) \in \Omega; u(x, y) = \phi(x, y)\}; \quad (2.4)$$

tandis que celle de non-contact est définie par :

$$\Omega_e = \{(x, y) \in \Omega; u(x, y) > \phi(x, y)\} \quad (2.5)$$

La frontière séparant la région de contact et la région de non contact est définie par :

$$\Gamma^* = \partial\Omega_c \cap \partial\Omega_e \quad (2.6)$$

Où Γ^* est une inconnue du problème qu'il faudra déterminer.

2.3 Méthode de L'Hypersphère

L'approximation de la solution des problèmes que l'on rencontre en mathématiques appliquées, en physique ou dans les sciences de l'ingénieur conduit le plus souvent à des problèmes d'analyses numériques matricielles. Ces problèmes interviennent notamment dans la discrétisation par la méthode des éléments finis des équations aux dérivées partielles elliptiques dans la théorie de l'élasticité.

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre de tels problèmes d'élasticité. Cependant,

nous sommes particulièrement intéressés à la méthode de l'hypercercle introduite pour la première fois par Prager et Synge en 1947 ([33]). C'est une méthode variationnelle très appropriée à la méthode des éléments finis. Dans sa forme la plus simple, c'est une conséquence du Théorème de Projection de Hilbert.

Un des avantages de la méthode est qu'elle permet une représentation géométrique du problème à résoudre. Ceci est très important pour l'ingénieur puisqu'il a ainsi un support géométrique à un problème physique.

Au début, la méthode était appliquée seulement pour les problèmes élasto-statiques. Plus tard, Synge ([33]) a montré que la méthode s'applique également à la résolution des problèmes de Dirichlet et de Neumann dans la théorie du potentiel. En 1951 McConnell ([29]) a montré que la méthode est générale et qu'on peut aussi l'utiliser pour résoudre des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre avec conditions au bord.

Dans les années 60, plusieurs auteurs se sont intéressés à la méthode et l'ont utilisée dans des domaines variés. On cite, entre autres, Arthurs ([1]) et les références à l'intérieur.

A partir de 1976, Collins ([10]) développa une théorie sophistiquée utilisant le théorème des deux cônes de Moreau pour généraliser la construction de la méthode de l'hypercercle aux problèmes unilatéraux de la mécanique et aux problèmes de contrôle optimal avec une contrainte d'inégalité sur le contrôle.

Notre travail consiste à utiliser l'inégalité de l'hypersphère pour construire une formulation variationnelle mixte associée au problème de l'obstacle pour une plaque encastrée. Cette formulation variationnelle à son tour est discrétisée par l'utilisation de la méthode des éléments finis rectangulaires non-conformes.

Nous construisons d'abord, la méthode pour le cas simple des problèmes sans contrainte d'inégalité dans un cadre fonctionnel abstrait.

2.4 Description de La méthode

2.4.1 Cas sans contrainte (Hypercercle)

Dans ce cas, la construction de la méthode de l'hypercercle repose sur le théorème de projection de Hilbert.

Soient \mathbf{H} un espace de Hilbert muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) et de la norme $\|\cdot\|$, \mathbf{M} un sous-espace fermé de \mathbf{H} et \mathbf{M}^\perp son complément orthogonal, alors :

$$(x, y) = 0, \quad \forall x \in \mathbf{M} \text{ et } \forall y \in \mathbf{M}^\perp \quad (2.1)$$

Le Théorème de Projection de Hilbert assure que tout vecteur z dans \mathbf{H} admet une décomposition unique, telle que :

$$z = x_0 + y_0, \quad \text{où } x_0 \in \mathbf{M} \text{ et } y_0 \in \mathbf{M}^\perp \quad (2.2)$$

Comme x_0 et y_0 sont les vecteurs de la meilleure approximation sur \mathbf{M} et \mathbf{M}^\perp respectivement, alors :

$$\|z - x_0\|^2 \leq \|z - x\|^2 \quad \forall x \in \mathbf{M} \quad (2.3)$$

$$\|z - y_0\|^2 \leq \|z - y\|^2 \quad \forall y \in \mathbf{M}^\perp \quad (2.4)$$

La deuxième inégalité et le fait que $z = x_0 + y_0$ donnent :

$$\|x_0\|^2 \leq \|z - y\|^2 \quad \forall y \in \mathbf{M}^\perp \quad (2.5)$$

Et, puisque $(x_0, y_0) = 0$, on obtient de la première inégalité :

$$\|x_0\|^2 \geq 2(z, x) - \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbf{M} \quad (2.6)$$

ce qui donne un encadrement de $\|x_0\|$, c-à-d une borne inférieure et supérieure de $\|x_0\|$.

D'après ce qui précède, on peut prendre comme approximation soit $x \in \mathbf{M}$, soit

$w \in \mathbb{H}$ tel que $w = x - y$ et $y \in \mathbb{M}^\perp$, soit $\frac{1}{2}(x + w)$. On démontre alors que :

$$\|x - x_0\|^2 \leq \|x - w\|^2; \quad (2.7)$$

$$\|x_0 - w\|^2 \leq \|x - w\|^2; \quad (2.8)$$

$$\left\| x_0 - \frac{1}{2}(x + w) \right\|^2 \leq \frac{1}{4} \|x - w\|^2 \quad (2.9)$$

$\frac{1}{2}(x + w)$ est une meilleure approximation de x_0 comparativement à x ou w .

La dernière inégalité montre que x_0 se trouve sur la surface d'une hypersphère de centre $\frac{1}{2}(x + w)$ et de rayon la racine carrée de son membre de droite. On sait aussi que $(x_0, y) = 0, y \in \mathbb{M}^\perp$ et $(z - x_0, y) = 0, z \in \mathbb{M}$, c.-à-d. x_0 se trouve sur deux hyperplans. Donc x_0 se trouve aussi sur l'hypercercle intersection de l'hypersphère et de l'hyperplan. Le centre de l'hypercercle est plus proche de la solution x_0 comparativement à le centre de l'hypersphère $\frac{1}{2}(x + w)$.

2.4.2 Cas avec contrainte d'inégalité (Hypersphère)

Moreau ([31]) a généralisé le Théorème de Projection de Hilbert en remplaçant le sous-espace par un cône convexe fermé.

Avant de donner le théorème, nous rappelons certaines notions et définitions.

Définition 2.4.1 Soit \mathbb{H} un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) et de la norme $\|\cdot\|$. L'ensemble $\mathbb{K} \subset \mathbb{H}$ est un cône de sommet à l'origine ainsi si $x \in \mathbb{K}$ alors $\alpha x \in \mathbb{K}, \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$.

Si \mathbb{K} est convexe, on définit alors le cône polaire par :

$$\mathbb{K}' = \{y \in \mathbb{H} \text{ tq } (x, y) < 0, \forall x \in \mathbb{K}\} \quad (2.10)$$

\mathbb{K}' est un cône convexe dans \mathbb{H} avec $\mathbb{K} \cap \mathbb{K}' = \theta$, θ est l'élément neutre de \mathbb{H} .

\mathbb{K}' est fermé même si \mathbb{K} est non fermé ([31]).

Théorème 2.4.1 Soit un vecteur $z \in \mathbb{H}$ et soit un cône convexe fermé non vide

$\mathbb{K} \subset \mathbb{H}$, il existe alors une décomposition unique $x_0 \in \mathbb{K}$ et $y_0 \in \mathbb{K}'$ avec $(x_0, y_0) = 0$ tq :

$$z = x_0 + y_0 \quad (2.11)$$

Il est clair que lorsque \mathbb{K} est un sous-espace de \mathbb{H} et \mathbb{K}' son complément orthogonal alors on retrouve le Théorème de Projection de Hilbert.

De (2.11) on voit que x_0 et y_0 sont les vecteurs de la meilleure approximation de z dans \mathbb{K} et \mathbb{K}' respectivement. En effet :

$$\|z - x_0\|^2 \leq \|z - x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{K} \quad (2.12)$$

$$\|z - y_0\|^2 \leq \|z - y\|^2 \quad \forall y \in \mathbb{K}' \quad (2.13)$$

L'inégalité (2.12) et la relation (2.11) donnent :

$$\|x_0\|^2 \leq \|z - y\|^2 \quad \forall y \in \mathbb{K}' \quad (2.14)$$

avec égalité seulement si $y = y_0$.

Mais puisque $(x_0, y_0) = 0$, (2.12) implique :

$$\|y_0\|^2 = \|z\|^2 - \|x_0\|^2 \leq \|z\|^2 - 2(z, x) + \|x_0\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{K} \quad (2.15)$$

avec égalité seulement si $x = x_0$.

De (2.14) et (2.15), il vient :

$$2(z, x) - \|x\|^2 \leq \|x_0\|^2 \leq \|z - y\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{K}, \forall y \in \mathbb{K}' \quad (2.16)$$

Ou encore :

$$2(z, x) - \|x\|^2 \leq \|x_0\|^2 \leq \|w\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{K}, \forall w \in \mathbb{H} \text{ avec } w = z - y \text{ et } y \in \mathbb{K}' \quad (2.17)$$

La double inégalité (2.17) permet un encadrement de $\|x_0\|$.

On peut prendre aussi comme approximations de x_0 soit $x \in \mathbb{K}$, soit $w \in \mathbb{H}$, $w = z - y$ et $y \in \mathbb{K}'$, ou encore $\frac{1}{2}(x + w)$.

On peut aisément montrer les inégalités suivantes :

$$\|x_0 - x\|^2 \leq \|x - w\|^2 - 2(x, z - w) \quad (2.18)$$

$$\|x_0 - w\|^2 \leq \|x - w\|^2 - 2(x, z - w) \quad (2.19)$$

$$\left\| x_0 - \frac{1}{2}(x + w) \right\|^2 \leq \frac{1}{4} \|x - w\|^2 - 2(x, z - w) \quad (2.20)$$

On déduit alors que $\frac{1}{2}(x + w)$ est une meilleure approximation de x_0 comparativement à x et w .

L'inégalité (2.20) montre que x_0 se trouve sur l'hypersphère de centre $\frac{1}{2}(x + w)$ et de rayon donné par la racine carrée du membre de droite de l'inégalité (2.20).

On donne ci-dessous la construction de la méthode de l'hypersphère pour le problème de l'obstacle abstrait.

2.5 Méthode de l'hypersphère pour le problème de l'obstacle abstrait

Soit \mathbb{H} un espace de Hilbert et soit \mathbb{H}' son dual. On note par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualité entre \mathbb{H} et \mathbb{H}' . Soit \mathbb{H}_1 un autre espace de Hilbert que l'on identifie avec son dual et que l'on munit du produit scalaire $(\cdot; \cdot)_1$ et de la norme $\|\cdot\|_1$. Supposons $T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}_1$ un opérateur linéaire continu, alors son opérateur adjoint $T^* : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}$ est aussi un opérateur linéaire continu, défini par :

$$(v; Tu)_1 = \langle T^*v, u \rangle, \quad \forall u \in \mathbb{H}, \quad \forall v \in \mathbb{H}_1 \quad (2.1)$$

Soit \mathbb{P} un cône convexe non vide dans \mathbb{H} . Le cône polaire $\mathbb{P}^* \subseteq \mathbb{H}'$ de \mathbb{P} est défini par :

$$\mathbb{P}^* = \{v \in \mathbb{H}'; \langle v, u \rangle \leq 0, \forall u \in \mathbb{P}\} \quad (2.2)$$

\mathbb{P}^* est un cône convexe fermé non vide.

Le problème unilatéral abstrait consiste à trouver :

$$(P_0) \begin{cases} u_0 \in \mathbb{H} \\ (u_0 - \varphi) \in \mathbb{P}, (c - T^*T u_0) \in \mathbb{P}^* \\ \langle c - T^*T u_0, u_0 - \varphi \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

avec $\varphi \in \mathbb{H}$, $c \in \mathbb{H}'$ donnés.

Construisons maintenant deux cônes polaires \mathbb{K} et \mathbb{K}' dans \mathbb{H}_1 tel qu'on puisse leur appliquer la décomposition (2.11). Soit $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{H}_1$ défini par :

$$\mathbb{K} = \{x \in \mathbb{H}_1; x = Tu, (u - \varphi) \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{H}\} \quad (2.4)$$

alors \mathbb{K} est l'image par T de \mathbb{P} . Il est facile de montrer que \mathbb{K} est un cône convexe qui n'est pas nécessairement fermé.

Et soit $\mathbb{K}' \subseteq \mathbb{H}_1$ son cône polaire tel que :

$$\mathbb{K}' = \{y \in \mathbb{H}_1; T^*y \in \mathbb{P}^* \subseteq \mathbb{H}'\} \quad (2.5)$$

Si on prend $z \in \mathbb{H}_1$ tel que $T^*z = c$, alors d'après le théorème des deux cônes de Moreau, z a la décomposition :

$$z = x_0 + y_0 \quad (2.6)$$

où $x_0 \in \overline{\mathbb{K}}$, $y_0 \in \mathbb{K}'$ et $(x_0, y_0) = 0$, $\overline{\mathbb{K}}$ est la fermeture de \mathbb{K} .

L'inégalité (2.20) donne :

$$\left\| Tu_0 - \frac{1}{2}(Tu + w) \right\|_1^2 \leq \frac{1}{4} \|Tu - w\|_1^2 - 2(u - \varphi, c - T^*w) \quad (2.7)$$

et $(u - \varphi) \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{H}$, $u \in \mathbb{H}$, $w \in \mathbb{H}_1$ et $(c - T^*w) \in \mathbb{P}^*$.

Pour le problème de l'obstacle pour une plaque encadrée, on prend : $\mathbb{H} = \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ et $\mathbb{H}_1 = \mathbb{L}^2(\Omega)$.

La dualité entre \mathbb{H} et \mathbb{H}' est notée par :

$$\langle v, u \rangle = \int_{\Omega} u v d\Omega, \quad u \in \mathbb{H}_0^2(\Omega), \quad v \in (\mathbb{H}_0^2(\Omega))' \quad (2.8)$$

On définit le cône $\mathbb{P} \subset \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ par :

$$\mathbb{P} = \left\{ u \in \mathbb{H}_0^2(\Omega); \text{ tq } \quad u \geq \varphi \text{ dans } \Omega \right\} \quad (2.9)$$

Et on prend

$$\left\{ \begin{array}{l} T : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^2(\Omega) \\ u \mapsto T u = \Delta u \end{array} \right. \quad (2.10)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} T^* : \mathbb{L}^2(\Omega) \rightarrow (\mathbb{H}_0^2(\Omega))' \\ y \mapsto T^* y = \Delta y \end{array} \right. \quad (2.11)$$

où Δ désigne l'opérateur de Laplace.

Si $c = 0$, l'inégalité (2.7) donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\| \Delta u_0 - \frac{1}{2}(\Delta u + w) \right\|_1^2 \leq \frac{1}{4} \int_{\Omega} \|\Delta u - w\|_1^2 d\Omega - \int_{\Omega} (u - \varphi) \Delta w d\Omega \\ \forall u \in \mathbb{H}_0^2(\Omega); \text{ tq } \quad u \geq \varphi \\ \forall w \in \mathbb{L}^2(\Omega); \text{ tq } \quad -\Delta w \leq 0 \end{array} \right. \quad (2.12)$$

On déduit alors que $\frac{1}{2}(\Delta u + w)$ est une meilleure approximation de Δu_0 comparativement à Δu et w .

L'inégalité (2.12) est l'inégalité de l'hypersphère associée au problème de l'obstacle pour une plaque encastrée, d'où le problème de minimisation suivant : Trouver $(u_0, w_0) \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega)$ tq :

$$J(u_0, w_0) = \min_{u \in \mathbb{K}, w \in \mathbb{K}'} J(u, w)$$

où $J(u, w)$ est le membre de droite de l'inégalité (2.12) et

$$\mathbb{K} = \left\{ u \in \mathbb{H}_0^2(\Omega); \text{ tq } \quad u \geq \varphi \right\}, \quad (2.13)$$

et

$$\mathbb{K}' = \{w \in \mathbb{L}^2(\Omega); \text{ tq } -\Delta w \leq 0\} \quad (2.14)$$

où φ est une fonction suffisamment régulière telle que la restriction de φ sur Γ soit ≤ 0 .

2.6 Méthode de L'hypersphère pour le problème de l'obstacle pour une plaque

On se propose dans ce paragraphe de décrire le cadre général de la méthode de l'hypersphère. Celle-ci est une méthode mixte qui permet d'obtenir directement une approximation à la fois du déplacement u et du moment fléchissant w . Elle repose sur l'inégalité (2.12) :

$$\int_{\Omega} \left| \Delta u_0 - \frac{1}{2}(\Delta u + w) \right|^2 d\Omega \leq \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\Delta u - w|^2 d\Omega - \int_{\Omega} (u - \phi) \Delta w d\Omega \quad (2.1)$$

$\forall u \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ tel que : $(u - \phi) \geq 0$ et $\forall w \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ tel que : $-\Delta w \leq 0$.

Il est clair que $\frac{1}{2}(\Delta u + w)$ constitue une meilleure approximation de Δu_0 comparativement à Δu et w . On sait aussi que w constitue une approximation de Δu .

2.7 Formulation variationnelle de l'hypersphère

La formulation variationnelle de l'hypersphère consiste à caractériser (u_0, w_0) comme étant la fonction qui minimise la fonctionnelle de l'hypersphère donnée par le terme de droite de l'inégalité (2.1) sur l'espace $\mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega)$.

Le problème est alors équivalent au problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_0, w_0) \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ tel que :} \\ J(u_0, w_0) = \min_{u \in \mathbb{K}, w \in \mathbb{K}'} J(u, w) \\ J(u, w) = \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\Delta u - w|^2 d\Omega - \int_{\Omega} (u - \phi) \Delta w d\Omega \end{array} \right. \quad (2.1)$$

avec :

$$K = \{u \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) : u = \phi\} \text{ et } K' = \{w \in \mathbb{L}^2(\Omega) : -\Delta w \leq 0\} \quad (2.2)$$

On peut transformer l'expression de la fonctionnelle par l'utilisation de la formule de Green pour obtenir une expression mieux adaptée à la méthode des éléments finis. En effet, on a :

$$J(u, w) = \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\Delta u - w|^2 d\Omega - \int_{\Omega} (u - \phi) \Delta w d\Omega; \quad (2.3)$$

ou encore ;

$$J(u, w) = \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\Delta u - w|^2 d\Omega - \int_{\Omega} \nabla(u - \phi) \nabla w d\Omega + \int_{\Gamma} (u - \phi) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (2.4)$$

D'où :

$$J(u, w) = \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\Delta u - w|^2 d\Omega - \int_{\Omega} \nabla(u - \phi) \nabla w d\Omega \quad (2.5)$$

On remarque que la nouvelle fonctionnelle contient seulement des dérivées du premier ordre par rapport à w . Ceci est très avantageux d'un point de vue numérique.

2.7.1 Interprétation de la contrainte

La formulation variationnelle duale et la formulation variationnelle de l'hypersphère fournissent une approximation de la quantité Δu_0 .

D'après la construction du convexe \mathbb{K}' , on a : l'inégalité :

$$-\Delta w \leq 0 \quad \forall w \in \mathbb{L}^2(\Omega) \quad (2.6)$$

où l'inégalité est comprise au sens des distributions.

On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire défini par la dualité entre l'espace de Hilbert $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et son dual $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Soit :

$$D^+(\bar{\Omega}) = \left\{ \phi \in D(\bar{\Omega}) \text{ tq } \phi \geq 0 \text{ dans } \bar{\Omega} \right\} \quad (2.7)$$

l'espace des fonctions test positives et à support compact dans Ω .

Il existe plusieurs interprétations de cette contrainte ([35]), en particulier celle où la contrainte est comprise dans le sens faible i.e. dans le sens des distributions.

En multipliant (2.6) par ϕ , puis en intégrant sur le domaine Ω , on déduit de la formule de Green que :

$$\langle -\Delta w, \phi \rangle = \int_{\Omega} \nabla w \nabla \phi d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial n} \phi d\Gamma \quad (2.8)$$

et comme ϕ est à support compact dans $\bar{\Omega}$, alors (2.8) équivaut à :

$$\langle -\Delta w, \phi \rangle = \int_{\Omega} \nabla w \nabla \phi d\Omega \leq 0, \quad \forall \phi \in D^+(\bar{\Omega}) \quad (2.9)$$

Comme $D^+(\bar{\Omega})$ est dense dans $\mathbb{L}^2(\bar{\Omega})$, il vient :

$$\int_{\Omega} \nabla w \nabla \phi d\Omega \leq 0, \quad \forall \phi \in \mathbb{L}^2(\bar{\Omega}) \quad (2.10)$$

D'après ce qui précède, le problème (2.1) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_0, w_0) \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ tel que :} \\ J(u_0, w_0) = \min_{u \in \mathbb{K}, w \in \mathbb{K}'} J(u, w) \\ J(u, w) = \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\Delta u - w|^2 d\Omega - \int_{\Omega} (u - \phi) \nabla w d\Omega \end{array} \right. \quad (2.11)$$

avec :

$$\mathbb{K} = \{u \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) : u \geq \phi\} \quad (2.12)$$

et

$$\mathbb{K}' = \left\{ w \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \int_{\Omega} \nabla w \nabla \phi d\Omega \leq 0, \quad \forall \phi \in \mathbb{L}^2(\overline{\Omega}) \right\} \quad (2.13)$$

Dans la pratique, cette formulation n'est pas d'intérêt numérique en raison de la présence du terme mixte. Toutefois, elle peut être simplifiée pour obtenir une nouvelle formulation mieux adaptée au calcul de l'estimateur d'erreur.

En effet, en utilisant la formule de Green on obtient :

$$\begin{aligned} J(u, w) &= \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\Delta u - w|^2 d\Omega - \int_{\Omega} (u - \phi) \Delta w d\Omega \\ &= \frac{1}{4} \int_{\Omega} (\Delta u)^2 d\Omega + \frac{1}{4} \int_{\Omega} w^2 d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta u w d\Omega - \int_{\Omega} u \Delta w d\Omega + \int_{\Omega} \phi \Delta w d\Omega \\ &= \frac{1}{4} \int_{\Omega} (\Delta u)^2 d\Omega + \frac{1}{4} \int_{\Omega} w^2 d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \nabla u w d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla u \nabla w d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma} u \nabla w d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla u \nabla w d\Omega + \int_{\Gamma} \phi \nabla w d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla w d\Omega \end{aligned} \quad (2.14)$$

Avec les conditions aux limites, nous aurons :

$$J(u, w) = \frac{1}{4} \int_{\Omega} (\Delta u)^2 d\Omega + \frac{1}{4} \int_{\Omega} w^2 d\Omega + \frac{3}{2} \int_{\Omega} \nabla u \nabla w d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla w d\Omega. \quad (2.15)$$

Puisque $w, \phi \in \mathbb{K}'$, on obtient une nouvelle formulation variationnelle :

$$(P') \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_0, w_0) \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ tel que :} \\ J(u_0, w_0) = \min_{u \in \mathbb{K}, w \in \mathbb{K}'} J(u, w) \\ J(u, w) = \frac{1}{4} \int_{\Omega} (\Delta u)^2 d\Omega + \frac{1}{4} \int_{\Omega} w^2 d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla w d\Omega \end{array} \right. \quad (2.16)$$

En ce qui concerne l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.16) on va donner le résultat classique suivant.

Théorème 2.7.1 *Soit $\mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega)$ un espace de Hilbert réel, $J(.,.)$ un fonctionnelle strictement convexe, semi-continue inférieurement, coercive et $\mathbb{K} \times \mathbb{K}'$ est un sous-espace $\mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega)$ pour la topologie faible. Alors, il existe un unique $(u_0, w_0) \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega)$ qui vérifie le problème (2.16).*

Preuve. On procède en deux étapes :

i.) Montrons que la fonctionnelle est strictement convexe et minorée.

Avec la notation du chapitre 1, on a :

$$\begin{aligned} J(\theta(u_1, w_1) + (1 - \theta)(u_2, w_2)) &= \frac{1}{4} \int_{\Omega} (\theta \Delta u_1 + (1 - \theta) \Delta u_2)^2 d\Omega + \frac{1}{4} \int_{\Omega} (\theta w_1 + (1 - \theta) w_2)^2 d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla (\theta w_1 + (1 - \theta) w_2) d\Omega \\ &= \frac{1}{4} \theta^2 \int_{\Omega} (\Delta u_1)^2 d\Omega + (1 - \theta)^2 \int_{\Omega} (\Delta u_2)^2 d\Omega + \\ &\quad + \frac{2}{4} \theta(1 - \theta) \int_{\Omega} \Delta u_1 \Delta u_2 d\Omega + \frac{1}{4} \theta^2 \int_{\Omega} (w_1)^2 d\Omega \\ &\quad + \frac{1}{4} (1 - \theta)^2 \int_{\Omega} (w_2)^2 d\Omega + \frac{2}{4} \theta(1 - \theta) \int_{\Omega} w_1 w_2 d\Omega \\ &\quad - \theta \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla w_1 d\Omega - (1 - \theta) \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla w_2 d\Omega \end{aligned} \quad (2.17)$$

où : $(u_1, w_1), (u_2, w_2) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}'$ et $\theta \in]0, 1[$.

Ou encore :

$$\begin{aligned}
J(\theta(u_1, w_1) + (1 - \theta)(u_2, w_2)) &= \theta^2 \left[\frac{1}{4} \int_{\Omega} (\Delta u_1)^2 d\Omega + \frac{1}{4} \int_{\Omega} w_1^2 d\Omega \right] - \theta \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla w_1 d\Omega \\
&\quad + (1 - \theta)^2 \left[\frac{1}{4} \int_{\Omega} (\Delta u_2)^2 d\Omega + \frac{1}{4} \int_{\Omega} w_2^2 d\Omega \right] - (1 - \theta) \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla w_2 d\Omega \\
&\quad - \theta(1 - \theta) \frac{2}{4} \left[\int_{\Omega} (\Delta u_1)(\Delta u_2) d\Omega + \int_{\Omega} (w_1)(w_2) d\Omega \right] \\
&\leq \theta J((u_1, w_1)) + (1 - \theta) J((u_2, w_2)) \\
&\quad - \frac{1}{4} \theta(1 - \theta) \left\{ \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)}^2 + \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \right\}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Ce qui montre la α -convexité $\alpha = \frac{1}{2}$.

D'après la notation du chapitre 1, puisque $J(u, w) \geq 0$, $\forall (u, w) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}'$, alors il existe (u_0, w_0) solution de (2.16).

ii). Unicité.

Supposons qu'il existe deux minima distincts i.e.

$$J(u_1, w_1) = \underset{(u, w) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}'}{\text{Min}} J(u, w) = J(u_2, w_2) \tag{2.19}$$

La convexité stricte entraîne :

$$\begin{aligned}
J\left(\frac{u_1+u_2}{2}, \frac{w_1+w_2}{2}\right) &< \frac{1}{2}J(u_1, w_1) + \frac{1}{2}J(u_2, w_2) \\
&= \frac{1}{2} \underset{(u, w) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}'}{\text{Min}} J(u, w) + \frac{1}{2} \underset{(u, w) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}'}{\text{Min}} J(u, w) \\
&= \underset{(u, w) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}'}{\text{Min}} J(u, w)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

et comme $\left(\frac{u_1+u_2}{2}, \frac{w_1+w_2}{2}\right) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}'$; posons $u_3 = \frac{u_1+u_2}{2}$, $w_3 = \frac{w_1+w_2}{2}$, alors il vient :

$$J(u_3, w_3) < \underset{(u, w) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}'}{\text{Min}} J(u, w) \tag{2.21}$$

D'où la contradiction.

D'après (i), (ii) $\exists (u_0, w_0) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}'$ unique tel que :

$$J(u_0, w_0) = \underset{(u, w) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}'}{\text{Min}} J(u, w) \tag{2.22}$$

■

2.8 Discrétisation du problème par la méthode des éléments finis

D'une manière générale, le problème continu est remplacé par un problème discret. Ceci conduit à la résolution d'un problème approché. Plus précisément le problème (2.16) est un problème de dimension infinie.

La solution analytique (exacte) est, généralement, impossible à trouver. Pour cela, on le réduit à un problème de dimension finie en utilisant la méthode de discrétisation des éléments finis.

Les espaces de dimension infinie $\mathbf{H}_0^2(\Omega)$ et $\mathbf{L}^2(\Omega)$ sont remplacés respectivement par des espaces discrets \mathbf{U}_h et \mathbf{W}_h de dimension finie.

De la même façon, on construit les analogues discrets \mathbf{K}_h et \mathbf{K}'_h des cônes convexes \mathbf{K} et \mathbf{K}' respectivement.

Soit le carré Ω ($-1 \leq x, y \leq 1$). Considérons une rectangulation R_h du carré Ω i.e. on subdivise le carré Ω en un nombre finis de rectangles $\{e_i\}_{i=1}^N$. On note par h le pas de discrétisation. Définissons tout d'abord les espaces des éléments finis c-à-d l'espace \mathbf{U}_h approximant l'espace des déplacements admissibles $\mathbf{H}_0^2(\Omega)$ et l'espace \mathbf{W}_h approximant l'espace des moments fléchissants $\mathbf{L}^2(\Omega)$ respectivement par :

$$\mathbf{U}_h = \begin{cases} u_h \in C^0(\overline{\Omega}) : \forall R_i \in R_h, u_h|_{R_i} \in Q_3(R_i), i = 1, \dots, N, \text{ tq} \\ u_h|_{\Gamma} = 0, \text{ et } \frac{\partial u_h}{\partial n}(a) = 0 \forall a \text{ sommet sur } \Gamma, \end{cases} \quad (2.1)$$

et

$$\mathbf{W}_h = \{w_h \in C^0(\overline{\Omega}); \forall R_i \in R_h, w_h|_{R_i} \in Q_1(R_i), \text{ pour } i = 1, \dots, N\} \quad (2.2)$$

où $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ est la fermeture de Ω , et Q_3 désigne l'espace des polynômes en x, y de degré inférieur ou égal à trois et Q_1 désigne l'espace des polynômes en x, y de degré inférieur ou égal à un par rapport à chacune des variables.

Les analogues discrets \mathbf{K}_h et \mathbf{K}'_h des cônes convexes \mathbf{K} et \mathbf{K}' sont définis respecti-

vement par :

$$\mathbb{K}_h = \{u_h \in \mathbb{U}_h : u_h \geq \phi_h\} \quad (2.3)$$

Et

$$\mathbb{K}'_h = \left\{ w_h \in \mathbb{W}_h, \int_{\Omega_h} \nabla w_h \nabla \varphi_h d\Omega_h \leq 0, \forall \varphi_h \in \mathbb{W}_h \right\} \quad (2.4)$$

où ϕ_h représente la valeur de la fonction obstacle aux noeuds intérieurs.

Alors le problème approché s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_{0h}, w_{0h}) \in \mathbb{U}_h(\Omega_h) \times \mathbb{W}_h(\Omega_h) \text{ tel que :} \\ J(u_{0h}, w_{0h}) = \underset{(u_h, w_h) \in \mathbb{K}_h \times \mathbb{K}'_h}{\text{Min}} J(u_h, w_h) \\ \text{où} \\ J(u_h, w_h) = \frac{1}{4} \int_{\Omega_h} (\Delta u_h)^2 d\Omega_h + \frac{1}{4} \int_{\Omega_h} w_h^2 d\Omega_h - \int_{\Omega_h} \nabla \phi_h \nabla w_h d\Omega_h \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Puisqu'on minimise une fonctionnelle strictement convexe et minorée sur un ensemble fermé non vide, la solution (u_{0h}, w_{0h}) du problème approché (2.16) existe et est unique.

Pour simplifier les calculs, on peut écrire la fonctionnelle $J(.,.)$ sous la forme :

$J = \sum_{e=1}^E J_e$ où J_e désigne l'élément de contribution, tel que :

$$J_e = \frac{1}{4} \int_{\Omega_h} (\Delta u_h)^2 dx dy + \frac{1}{4} \int_{\Omega_h} w_h^2 dx dy - \int_{\Omega_h} \nabla \phi_h \nabla w_h dx dy \quad (2.6)$$

où E est le nombre total des éléments de la rectangulation.

En tenant compte de la symétrie axiale, le problème est résolu dans le domaine $(0 \leq x, y \leq 1)$ (région hachurée de la figure (2.2).

Chaque sommet possède quatre degrés de liberté u, u_x, u_y et w .

On subdivise la région hachurée en E éléments finis e_1, e_2, \dots, e_E .

Dans chaque élément $e_i (i = 1, \dots, E)$, u est approximé par une combinaison linéaire de fonctions cubiques i.e. $u_h \in Q_3$.

De la même façon on approxime w par une combinaison linéaire de fonctions affines i.e. $w_h \in Q_1$.

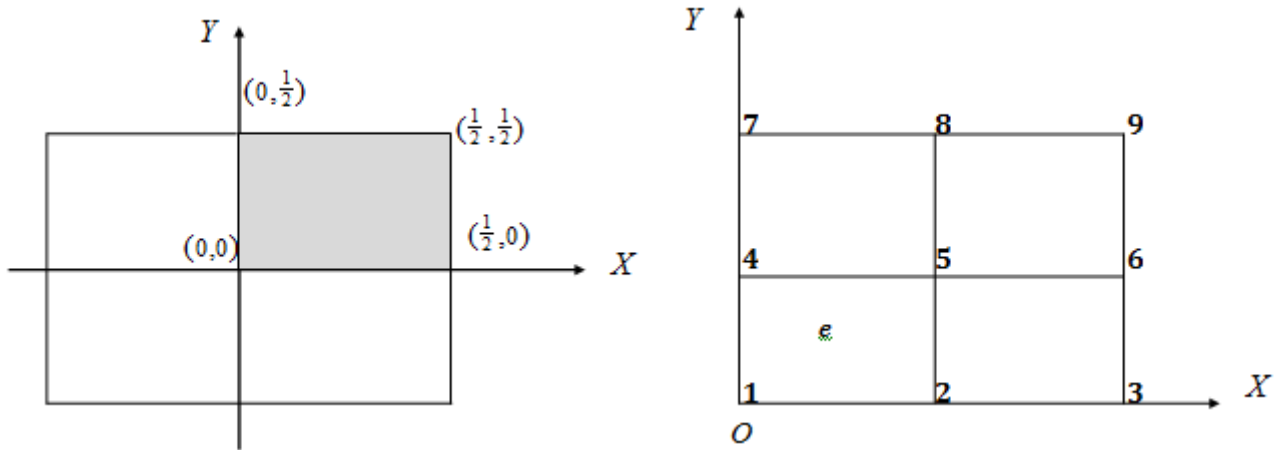


FIGURE 2.2 – Discrétisation du domaine

Pour simplifier les calculs, on adopte un système de coordonnées locales

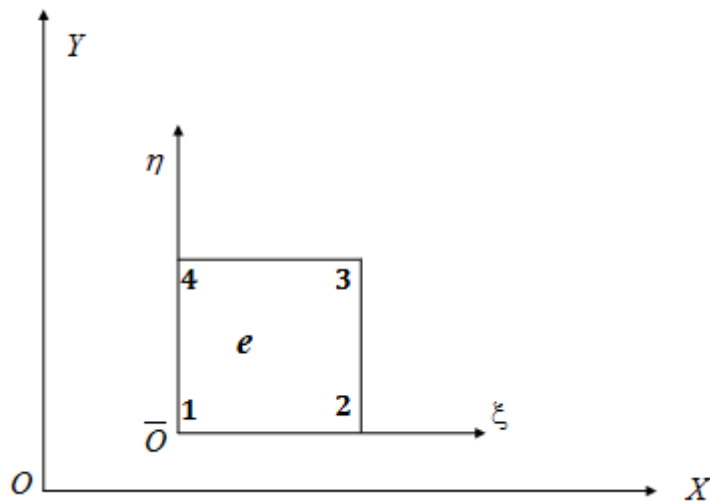


FIGURE 2.3 – Système de coordonnées locales

L'approche que nous utilisons occulte le calcul explicite des fonctions de base. On approxime le déplacement par un polynôme de degré inférieur ou égal à trois par rapport à chaque variable.

Comme l'ensemble des degrés de liberté est égal à douze dans chaque élément, alors on obtient une approximation incomplète i.e. non conforme.

L'espace $Q_3(e)$ est de dimension douze, alors on peut écrire u sous la forme :

$$u_{hL}^e(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\eta^2 + \alpha_6\xi\eta + \alpha_7\xi^3 + \alpha_8\eta^3 + \alpha_9\xi^2\eta + \alpha_{10}\xi\eta^2 + \alpha_{11}\xi^3\eta + \alpha_{12}\xi\eta^3 \quad (2.7)$$

où les indices L, e indiquent les coordonnées locales du système et l'élément e respectivement.

D'après (2.7) la dérivé par rapport à la variable ξ est :

$$\frac{\partial u_{hL}^e(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \alpha_2 + 2\alpha_4\xi + \alpha_6\eta + 3\alpha_7\xi^2 + 2\alpha_9\xi\eta + \alpha_{10}\eta^2 + 3\alpha_{11}\xi^2\eta + \alpha_{12}\eta^3 \quad (2.8)$$

et la dérivé par rapport à la variable η est :

$$\frac{\partial u_{hL}^e(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \alpha_3 + 2\alpha_5\eta + \alpha_6\xi + 3\alpha_8\eta^2 + \alpha_9\xi^2 + 2\alpha_{10}\xi\eta + \alpha_{11}\xi^3 + 3\alpha_{12}\xi\eta^2 \quad (2.9)$$

Les constantes $\{\alpha_i\}_{i=1}^{12}$ sont choisies de telle sorte qu'elles représentent le déplacement u et ses dérivés premières i.e. $\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}$ en chaque nœud de l'élément (e).

En utilisant (2.7), (2.8) et (2.9) à tour de rôle aux nœuds 1, 2, 3, et 4 de l'élément (e), on obtient un système linéaire de la forme :

$$A\underline{\alpha} = \underline{u}_{hL}^e \quad (2.10)$$

où A est une matrice carrée de coordonnées nodales de dimension 12×12 , et $\underline{\alpha}$ est un vecteur nodal de dimension 12.

(\underline{u}_{hL}^e) est un vecteur colonne, représente les valeurs nodales de la fonction u_{hL}^e et ses dérivées $u_{hL\xi}^e, u_{hL\eta}^e$ i.e.

$$(\underline{u}_{hL}^e)^t = [u_{1L}^e, u_{1L\xi}^e, u_{1L\eta}^e, \dots, u_{4L}^e, u_{4L\xi}^e, u_{4L\eta}^e] \quad (2.11)$$

La matrice A étant connue, le vecteur des coefficients $\{\alpha_i\}_{i=1}^{i=12}$ peut être obtenu en inversant la matrice A i.e.

$$\underline{\alpha} = B\underline{u}_{hL}^e \text{ où } B = A^{-1} \quad (2.12)$$

w est approximé par des fonctions linéaires continues par morceaux. Soit w_h une approximation de w , alors w_h s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions de base polynômiales $\in Q_1$ i.e.

$$w_h(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 w_i \Phi_i(\xi, \eta) \quad (2.13)$$

où Φ_i ($i = \overline{1,4}$) sont les fonctions de base tel que $\Phi_j(\xi_i, \eta_i) = \delta_{ij}$, δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker. Les w_i ($i = \overline{1,4}$) sont les valeurs nodales de w_h .

Les fonctions de base Φ_i ($i = \overline{1,4}$) dans chaque élément sont données comme suit :

$$\begin{cases} \Phi_1(\xi, \eta) = (1 - \frac{\xi}{h})(1 - \frac{\eta}{h}) \\ \Phi_2(\xi, \eta) = \frac{\xi}{h}(1 - \frac{\eta}{h}) \\ \Phi_3(\xi, \eta) = \frac{\xi\eta}{h^2} \\ \Phi_4(\xi, \eta) = (1 - \frac{\xi}{h})\frac{\eta}{h} \end{cases} \quad (2.14)$$

De la même façon, on note respectivement par w_1, w_2, w_3 , et w_4 les valeurs nodales de w_h aux nœuds 1, 2, 3, et 4 pour l'élément (e).

Soit J_e un élément de contribution. D'après la formulation (2.5) on a :

$$4J_e = \int_e (\Delta u_h)^2 dx dy + \int_e w_h^2 dx dy - 4 \int_e \nabla \phi_h \nabla w_h dx dy \quad (2.15)$$

Soient

$$\begin{cases} I_1 = \int_e (\Delta u_h)^2 dx dy \\ I_2 = \int_e w_h^2 dx dy \\ I_4 = 4 \int_e \nabla \phi_h \nabla w_h dx dy \end{cases} \quad (2.16)$$

c-à-d :

$$4J_e = \sum_{i=1}^3 I_i \quad (2.17)$$

D'abord, on calcule I_1 . Pour cela la fonction d'approximation u_h donnée par l'expression (2.7) peut s'écrire sous la forme simple suivante :

$$u_{hL}^e(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{12} \alpha_i \xi^{m_i} \eta^{n_i} \quad (2.18)$$

Alors :

$$I_1 = \int_e (\Delta u_{hL}^e)^2 d\xi d\eta = \int_e \left(\sum_{i=1}^{12} a_i (m_i(m_i-1)\xi^{m_i-2}\eta^{n_i} + n_i(n_i-1)\xi^{m_i}\eta^{n_i-2}) \right)^2 d\xi d\eta \quad (2.19)$$

$$= \underline{\alpha}^t G \underline{\alpha} \quad (2.20)$$

Les entrées de la matrice d'intégration $G = [g_{ij}]$ sont données par :

$$g_{ij} = m_i m_j (m_i - 1)(m_j - 1) h(mi + mj - 4, ni + nj) + n_i n_j (n_i - 1)(n_j - 1) h(mi + mj, ni + nj - 4) + [m_i n_j (m_i - 1)(n_j - 1) + m_j n_i (m_j - 1)(n_i - 1)] h(mi + mj - 2, ni + nj - 2) \quad (2.21)$$

où :

$$h(m, n) = \frac{h^{m+n+2}}{(m+1)(n+1)} \quad (2.22)$$

En substituant (2.12) dans (2.20) on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_e (\Delta u_{hL}^e)^2 d\xi d\eta = \underline{\alpha}^t G \underline{\alpha} = (B \underline{u}_L^e)^t G (B \underline{u}_L^e) \\ &= (\underline{u}_L^e)^t B^t G B (\underline{u}_L^e) = (\underline{u}_L^e)^t K_1 (\underline{u}_L^e) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Dans ce qui suit on donne l'écriture matricielle de I_2 . En effet, puisque :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_e (w_h(\xi, \eta))^2 dx dy \\
 &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 w_i w_j \int_e \Phi_i(\xi, \eta) \Phi_j(\xi, \eta) d\xi d\eta
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Il vient :

$$I_2 = \int_e (w_h(\xi, \eta))^2 dx dy = \underline{w}^t K_2 \underline{w} \tag{2.25}$$

K_2 est une matrice carrée symétrique définie positive d'ordre 4×4 .

Pour le dernier terme i.e. I_3 , on utilise un schéma d'intégration numérique de Gauss avec $n = 2$ c-à-d :

$$\int_a^b \int_c^d \nabla \phi_H \nabla w_h dx dy = \left(\frac{(b-a)(d-c)}{4} \right) \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \beta_i \beta_j \nabla \phi_H(\xi_i, \eta_j) \nabla w_h(\xi_i, \eta_j)$$

avec

$$\xi_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} r_i, \quad i = 1, 2;$$

$$\eta_i = \frac{d+c}{2} + \frac{d-c}{2} r_i, \quad i = 1, 2;$$

et

$$r_i = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad i = 1, 2.$$

Comme $n = 2$, alors $\beta_i = 1$ pour $i = 1, 2$.

D'après ce qui précède, et comme : $4J_e = \sum_{i=1}^3 I_i$.

Alors on obtient la forme matricielle suivante :

$$4J_e = \underline{X}^t A_e \underline{X} + b_e^t \underline{X} \tag{2.26}$$

Où A_e est la matrice élémentaire de rigidité, d'ordre 16×16 , \underline{X} est le vecteur des valeurs nodales, b_e est le vecteur de droite.

En choisissant une numérotation appropriée des nœuds et puisque : $J = \sum_{e=1}^E J_e$, la matrice globale A s'obtient alors à partir de la matrice élémentaire A_e .

D'où la forme algébrique équivalente suivante :

$$\frac{1}{2} \underline{Z}^t A \underline{Z} + b^t \underline{Z} \quad (2.27)$$

où A est la matrice globale symétrique, définie positive, \underline{Z} est le vecteur des valeurs nodales, défini comme suit :

$$\underline{Z}^t = [u_1, u_{1x}, u_{1y}, w_1, \dots, u_N, u_{Nx}, u_{Ny}, w_N] \quad (2.28)$$

où N est le nombre total des nœuds, et b est le vecteur de droite.

L'inégalité matricielle $C \underline{Z} \geq \underline{q}$ provient des contraintes :

$$\mathbb{K}_h = \{u_h \in H_h \text{ tq } u_h(x_i, y_i) \geq \phi(x_i, y_i), \quad 1 \leq i \leq N\} \quad (2.29)$$

où $\phi(x_i, y_i)$ représente la valeur de la fonction obstacle aux nœuds intérieurs (x_i, y_i) , et des contraintes :

$$\mathbb{K}'_h = \left\{ w_h \in \mathbb{W}_h, \int_{\Omega_h} \nabla w_h \nabla \varphi_h d\Omega_h \leq 0, \forall \varphi_h \in \mathbb{W}_h \right\} \quad (2.30)$$

et enfin des conditions de symétrie.

Calcul de la matrice de contraintes dans les éléments

la matrice de contraintes peut être obtenue en prend la fonction $w = u$.

Remarque 2.8.1 Avec l'approximation choisie (rectangle a 4 noeuds), les éléments de la matrice de contraintes sont constantes dans chaque élément.

On note C matrice de contraintes globale.

Alors, le problème se ramène à un problème de programmation quadratique de la

forme :

$$(PQ) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser : } \frac{1}{2} X^t A X + b^t X \\ \text{avec} \\ C X \geq D \end{array} \right. \quad (2.31)$$

où X est le vecteur des valeurs nodales, A est une matrice carrée symétrique définie positive, C est une matrice non diagonale et b le vecteur général, D est le vecteur contenant les valeurs de la fonction obstacle aux noeuds.

Le problème (PQ) est résolu en utilisant le logiciel MATLAB.

2.9 Analyse des résultats numériques et commentaires

On présente ici quelques résultats numériques obtenus pour les noeuds A , B , C et D .

Les noeuds A , B , C et D sont choisis tels que A est à l'intérieur de la région de contact Ω_c , B et C sont au voisinage de l'interface Γ^* séparant la région de contact Ω_c et celle de non contact Ω_e , D est à l'extérieur de la région de contact.

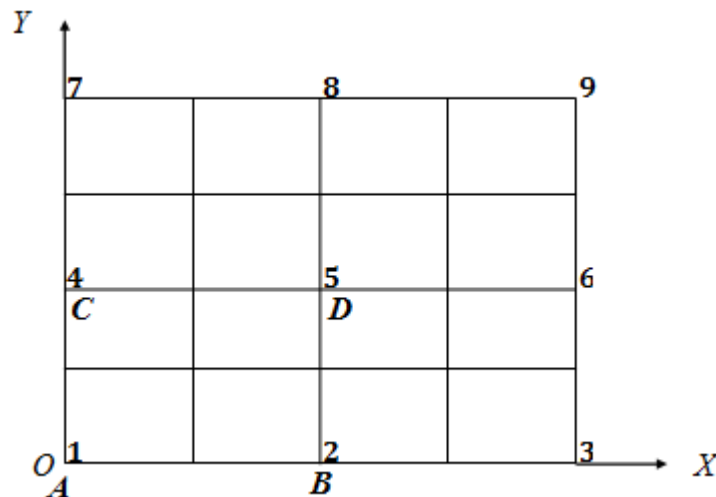


FIGURE 2.4 – Rectangulation du domaine

Ω_4 Les tableaux (1-4) contiennent les résultats numériques correspondant aux 9 noeuds communs aux subdivisions relatives aux pas $\frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{256}$.

2.9 Analyse des résultats numériques et commentaires

		u				
Nodes	step size h	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$
	A		10^{-1}	10^{-1}	10^{-1}	10^{-1}
B		4.8477×10^{-2}	4.8479×10^{-2}	4.848×10^{-2}	4.848×10^{-2}	4.848×10^{-2}
C		4.8477×10^{-2}	4.8479×10^{-2}	4.848×10^{-2}	4.848×10^{-2}	4.848×10^{-2}
D		2.2657×10^{-2}	2.2658×10^{-2}	2.2659×10^{-2}	2.266×10^{-2}	2.266×10^{-2}

Tab.1 : Résultat numérique pour u

		u_x				
Noeuds	h	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$
	B		-2.9575×10^{-2}	-2.9574×10^{-2}	-2.9572×10^{-2}	-2.9571×10^{-2}
D		-2.9576×10^{-2}	-2.9575×10^{-2}	-2.9573×10^{-2}	-2.9571×10^{-2}	-2.9571×10^{-2}

Tab.2 : Résultat numérique pour $u_x = \partial u / \partial x$

		u_y				
Noeuds	h	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$
	C		-2.9575×10^{-2}	-2.9574×10^{-2}	-2.9572×10^{-2}	-2.9571×10^{-2}
D		-2.9576×10^{-2}	-2.9575×10^{-2}	-2.9573×10^{-2}	-2.9571×10^{-2}	-2.9571×10^{-2}

Tab.3 : Résultat numérique pour $u_y = \partial u / \partial y$

		w				
Noeuds	h	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$
	1		-4	-4	-4	-4
2		-3.2702×10^{-2}	-7.1021×10^{-2}	-8.121×10^{-2}	-8.2701×10^{-2}	-8.2702×10^{-2}
3		1.43105	2.48838	2.5001	2.52772	2.52776
4		-3.2701×10^{-2}	-7.1022×10^{-2}	-8.123×10^{-2}	-8.2702×10^{-2}	-8.2702×10^{-2}
5		7.630×10^{-3}	3.01×10^{-3}	-7.124×10^{-3}	-8.081×10^{-3}	-8.08×10^{-3}
6		4.1451×10^{-1}	6.9389×10^{-1}	8.9841×10^{-1}	1.007	1.19224
7		1.43104	2.48836	2.5006	2.52771	2.52775
8		4.1452×10^{-1}	6.9388×10^{-1}	8.9840×10^{-1}	1.006	1.19222
9		1.611494	1.1251	5.662×10^{-1}	1.2916×10^{-1}	2.692×10^{-2}

Tab.4 : Résultat numérique pour w

On dit qu'il y a convergence dès que les valeurs de la fonction inconnue pour deux pas successifs coïncident à deux places décimales.

On remarque que pour le déplacement u_h la convergence est bonne aux noeuds A, B, C et D où l'on a une précision de trois place décimales.

Pour les mêmes noeuds la convergence est relativement moins bonne pour w_h car on a seulement une précision de deux place.

2.9.1 Détermination de la région de contact

On rappelle que la méthode utilisée est une méthode mixte. On a alors deux inconnues à déterminer le déplacement u et le moment fléchissant w . Pour approximer la région de contact on utilise trois approches :

- 1- L'utilisation du déplacement (u),
- 2- L'utilisation du moment fléchissant (w),
- 3- L'utilisation de la quantité $\frac{1}{2}(\Delta u + w)$.

1). Utilisation du déplacement (u).

D'après ce qui précède la contrainte considérée est de la forme ($u_i \geq \phi_i, 1 \leq i \leq N$) où ϕ indique la valeur de la fonction obstacle aux noeuds i . Alors, on peut déterminer la région de contact Ω_c à partir des valeurs nodales du déplacement u et des valeurs de la fonction obstacle ? aux noeuds i . Si $u_i = \phi_i$, on peut dire que le noeud i appartient à la région de contact Ω_c .

Du point de vue théorique, le noeud i est considéré appartenir à l'intérieur de la région de contact Ω_c si $u_i = \phi_i$. Cependant, dans la pratique le noeud i est considéré appartenir à l'intérieur de la région de contact Ω_c si l'erreur relative correspondant ([3]) :

$$\left| \frac{u_i - \phi_i}{\phi_i} \right| \leq \frac{15}{100}, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.1)$$

L'examen du tableau (5) montre que les noeuds 1, 2 sont à l'intérieur de la région de contact Ω_c .

Noeuds	u_i	ϕ_i	$\frac{ u_i - \phi_i }{\phi_i}$ %
2	0.09300	0.09300	0
3	0.07304	0.07140	2.29
4	0.04848	0.03301	46.85
5	0.09300	0.09300	0
6	0.08591	0.08591	0
7	0.06779	0.06398	5.95
8	0.04519	0.02491	81.35
9	0.07304	0.07140	2.29
10	0.06778	0.06398	5.93
11	0.05407	0.04095	32.02
12	0.04847	0.03301	46.84
13	0.04518	0.02491	81.37
14	0.02449	0	∞

Tab. 5

L'examen du tableau (Tab. 5) montre que les noeuds 1, 2 sont à l'intérieur de la région de contact Ω_c .

La partie hachurée de la figure (2.5) indique une approximation de la région de contact.

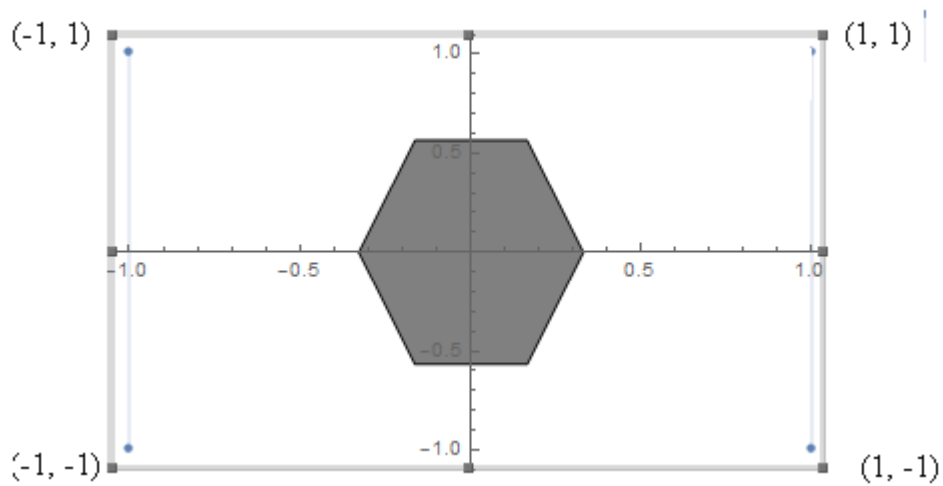


FIGURE 2.5 – Approximation de la région de contact

2). Utilisation du moment fléchissant w .

La deuxième possibilité pour déterminer la région de contact Ω_c est l'utilisation du moment fléchissant w qui représente une approximation de la quantité Δu .

A l'intérieur de la région de contact Ω_c on a $u = \phi$ ou encore $\Delta u = \Delta \phi$ et $\Delta u = w$, dans ce cas la région de contact est approximée par les valeurs nodaux w_i .

Si $w_i = \Delta \phi_i$ ($\Delta \phi_i = \Delta \phi(i)$, $1 \leq i \leq N$), alors on dit que le noeud i appartient à la région de contact.

Pratiquement le noeud i est considéré appartenir à la région de contact si son erreur relative pour

$$\left| \frac{w_i - \Delta \phi_i}{\Delta \phi_i} \right| \leq \frac{15}{100}, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.2)$$

L'examen du tableau (Tab. 6) montre que les noeuds 1, 2, et 3 sont à l'intérieur de la région de contact.

Noeuds	w_i	$\Delta \phi_i$	$\left \frac{w_i - \Delta \phi_i}{\Delta \phi_i} \right \%$
2	-3.95750	-4.11469	3.82
3	-2.20658	-4.50780	51.05
4	-0.82702	-5.38860	84.65
5	-3.95734	-4.11469	3.82
6	-3.85977	-4.23702	8.90
7	-0.71057	-5.61193	87.33
8	-2.20655	-4.50780	51.05
9	-1.90301	-4.65815	59.14
10	-0.82701	-5.38860	84.65
11	-1.90299	-4.65815	59.14
12	-1.22574	-5.18351	76.35
13	-0.71056	-5.61193	87.33
14	-0.00808	0	∞

Tab. 6

La partie hachurée de de la figure (2.6) indique une approximation de la région de contact.

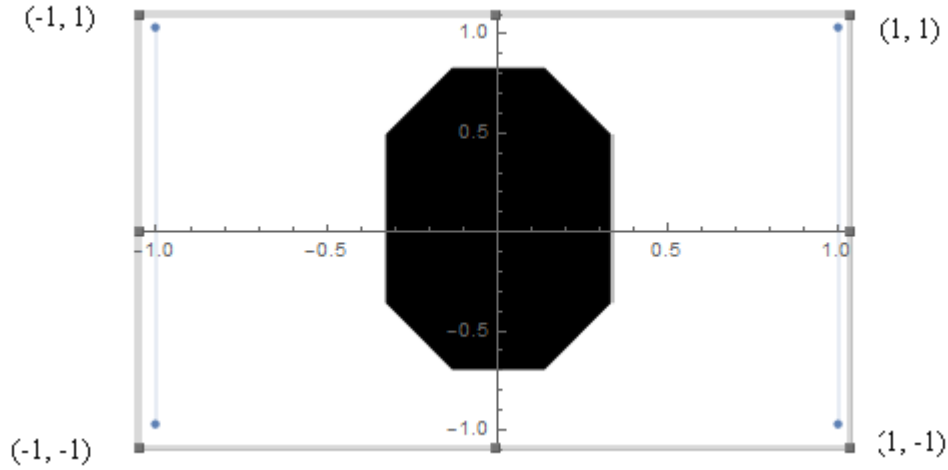


FIGURE 2.6 – Approximation de la région de contact

3). Utilisation de La quantité $\frac{1}{2}(\Delta u + w)$.

La troisième approche pour la détermination de la région de contact est celle utilisant la quantité $\frac{1}{2}(\Delta u + w)$.

A cause de la discontinuité de Δu dans les interfaces entre éléments, sa valeur est calculée en un point intérieur (de préférence le centre de gravité) de chaque élément susceptible d'être dans la région de contact.

Dans la région de contact $u = \phi$ ou encore $\Delta u = \Delta \phi$ et comme on a $\Delta u = w$, on a $\frac{1}{2}(\Delta u + w) = \Delta \phi$, alors la détermination de la région de contact repose sur la comparaison des valeurs $\frac{1}{2}(\Delta u + w)$ et $\Delta \phi$ aux points (centres de gravité). D'un point de vue théorique le point p est considéré appartenir à l'intérieur de la région de contact si $\frac{1}{2}(\Delta u + w)(p) = \Delta \phi(p)$. Mais comme dans les deux approches précédents, on dit que le point p appartient à la région de contact si son erreur relative

$$\left| \frac{\frac{1}{2}((\Delta u_h + w_h)(P) - \Delta \phi(P))}{\Delta \phi(P)} \right| \leq \frac{15}{100} \quad (2.3)$$

pour le pas le plus fin i.e. $h = \frac{1}{256}$, l'examen du tableau (Tab. 7) montre que seul le point 1 et 2 appartient à l'intérieur de la région de contact et par conséquent tout l'élément dont il est représenté le centre de gravité se trouve dans la région de contact.

Centre de gravité de l'élément	Δu_h	w_h	$\Delta\phi(P)$	$\left \frac{\frac{1}{2}((\Delta u_h + w_h)(P) - \Delta\phi(P))}{\Delta\phi(P)} \right \%$
1	-4.01066	-3.94365	-4.05643	1.95
2	-2.95474	-2.98171	-4.30129	30.99
3	-1.37340	-1.41179	-4.90557	71.61
4	-0.23363	-0.24667	-6.26759	96.16
5	-2.93773	-2.98166	-4.30129	31.19
6	-2.05541	-2.22287	-4.58162	51.31
7	-1.10178	-1.06075	-5.28391	80.33
8	-1.37310	-1.41178	-4.90557	71.61
9	-1.01765	-1.06075	-5.28391	80.33
10	-0.45647	-0.51031	-6.26759	92.28
11	-0.23341	-0.24667	-6.26759	96.17

Tab. 7

La partie hachurée de de la figure (2.7) indique une approximation de la région de contact.

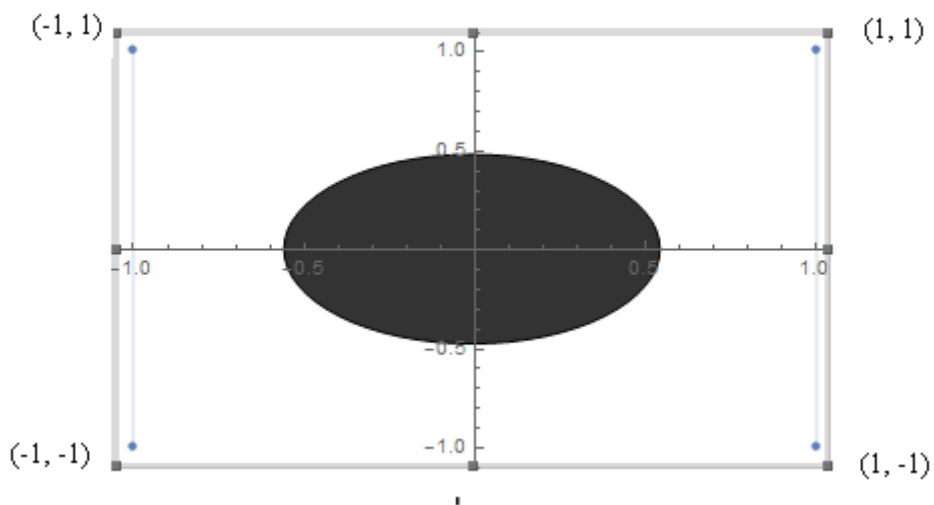


FIGURE 2.7 – Approximation de la région de contact

Commentaire.

En l'absence de résultats théoriques concernant la nature géométrique de la région de contact, la géométrie du problème étudiée ainsi que l'intuition physique suggèrent une forme plus au moins circulaire de la région de contact.

Ceci est presque exactement le cas pour les figures ((2.5), (2.6), (2.7)).

2.9.2 Comportement du moment fléchissant

Au vu des résultats numériques précédents, la résolution du problème original (P) par l'utilisation de la méthode proposée nous, permet d'obtenir directement une approximation à la fois du déplacement et du moment fléchissant qui sont des quantités physiques très importantes à connaître.

Ces résultats nous permettent de déterminer le comportement du moment fléchissant suivant les axes de symétrie (i.e. les variations) du w suivant les axes de symétrie. Pour cela, soit les trois directions suivants pour lesquelles on détermine le comportement de w .

- i) La direction suivant l'axe $X = 0$.
 - ii) La direction suivant l'axe $X = \frac{1}{2}$.
 - iii) La direction suivant l'axe $X = \frac{1}{4}$.
- i). Suivant l'axe $X = 0$.

On remarque que la plus grande valeur de w (en valeur absolue) et à l'origine des coordonnées est égale à 4, tandis que la plus petite valeur de w (en valeur absolue) est égale à 0.26646 se trouve au noeud de coordonnées $(\frac{1}{3}, 0)$.

La figure (2.8)) montre les variations du w suivant l'axe de symétrie $X = 0$

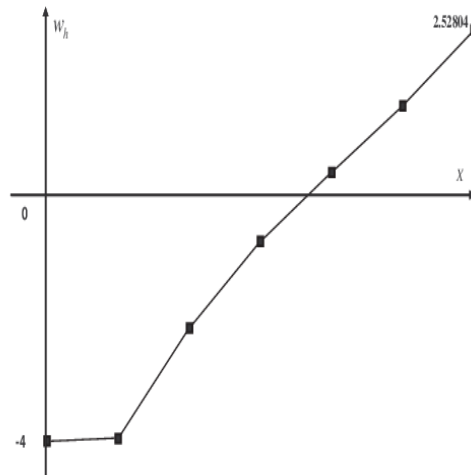


FIGURE 2.8 –

ii). Suivant l'axe $X = \frac{1}{2}$.

Dans cette direction la plus grande valeur de w (en valeur absolue) est égale à 1.19224 se trouve au noeud de coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, tandis que la plus petite valeur de w (en valeur absolue) est égale à 0.00808 se trouve au noeud de coordonnées $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

La figure (2.9)) montre les variations du w suivant l'axe de symétrie $X = \frac{1}{2}$.

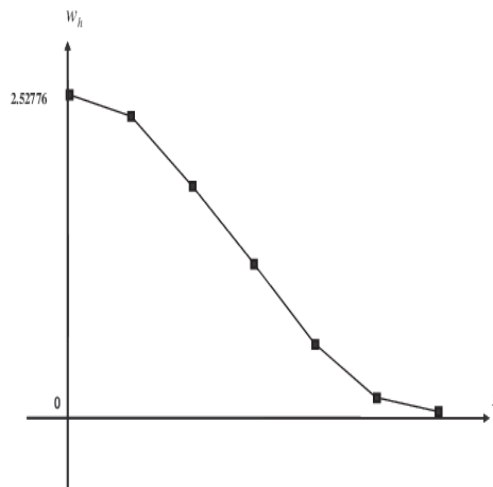


FIGURE 2.9 –

iii). Suivant l'axe $X = \frac{1}{4}$.

La figure (2.10)) montre que la plus grande valeur de w (en valeur absolue) se trouve au noeud de coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, est égale à 2.52776, tandis que la plus petite valeur de w (en valeur absolue) se trouve au noeud de coordonnées $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ est égale à 0.02692. La figure (2.10)) montre les variations du w suivant l'axe de symétrie $X = \frac{1}{4}$.

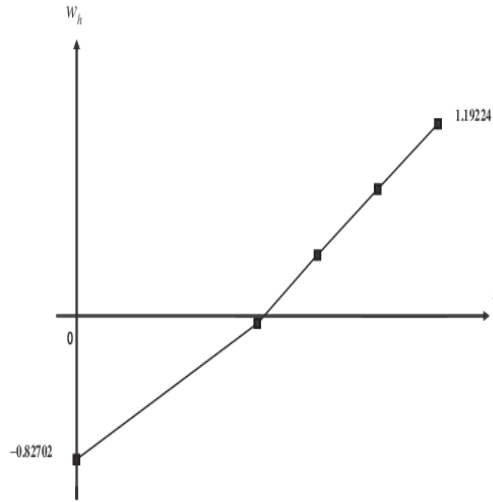


FIGURE 2.10 –

2.10 Résultat de convergence

L'analyse des résultats numériques que l'on vient d'obtenir n'est pas convenable à cause du nombre important des données à manipuler. Il sera donc plus avantageux et intéressant d'avoir une vue globale du comportement de la solution approché sur tout le domaine en utilisant les normes Hilbertienne $\mathbb{H}^1(\Omega)$ et $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Pour cela on va généraliser cette étude, on donne un théorème de convergence.

Avant de donner ce théorème, nous ferons quelques hypothèses caractérisant l'approximation :

i) $\forall (u, w) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}'$, $\exists (u_h, w_h) \in \mathbb{K}_h \times \mathbb{K}'_h$ tel que :

$$\begin{cases} u_h \rightarrow u \\ w_h \rightarrow w \end{cases} \quad (2.1)$$

fortement dans $\mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega)$ lorsque $h \rightarrow 0$.

ii) $(u_h, w_h) \in \mathbb{K}_h \times \mathbb{K}'_h$ et

$$\begin{cases} u_h \rightarrow u \\ w_h \rightarrow w \end{cases} \quad (2.2)$$

faiblement dans $\mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega)$ lorsque $h \rightarrow 0$, alors $(u, w) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}'$.

Alors, sous les hypothèses précédentes, on a :

Théorème 2.10.1 *Soit (u_{0h}, w_{0h}) la solution approchée du problème (2.16) , alors sous les notations et les hypothèses précédentes, la solution approchée converge fortement dans $\mathbb{H}^1(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega)$ si $h \rightarrow 0$ vers (u_0, w_0) solution du problème (2.16) i.e. :*

$$1) \lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_{0h}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} = 0.$$

$$2) \lim_{h \rightarrow 0} \|w - w_{0h}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0.$$

Preuve. Remarquons d'abord que les hypothèses de convexité et de convexité forte peuvent s'écrire : $\forall \theta \in [0, 1], \forall (u_1, w_1) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}'$ et $\forall (u_2, w_2) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}'$:

$$\begin{aligned} J(\theta u_1 + (1 - \theta)u_2, \theta w_1 + (1 - \theta)w_2) &\leq \theta J(u_1, w_1) + (1 - \theta)J(u_2, w_2) \\ &\quad - \frac{1}{4}\theta(1 - \theta) \left(\|u_1 - u_2\|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)}^2 + \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \right) \\ &\leq \theta J(u_1, w_1) + (1 - \theta)J(u_2, w_2) \\ &\quad - \frac{1}{4}\theta(1 - \theta) \left(\|u_1 - u_2\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}^2 + \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} \{J(\theta u_1 + (1 - \theta)u_2, \theta w_1 + (1 - \theta)w_2) - J(u_2, w_2)\} \\ \leq J(u_1, w_1) - J(u_2, w_2) - \frac{1}{4} \left(\|u_1 - u_2\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}^2 + \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} \{J(\theta u_1 + (1 - \theta)u_2, \theta w_1 + (1 - \theta)w_2) - J(u_2, w_2)\} \\ = \left(J'(u_1, w_1) - J(u_2, w_2), (u_1 - u_2, w_1 - w_2) \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

qui est la dérivé au sens de Gateaux de la fonctionnelle $J(.,.)$ au point (u_2, w_2) dans la direction $(u_1 - u_2, w_1 - w_2)$.

La fonctionnelle $J'(.,.)$ est continue sur $\mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega)$ et par conséquent est continue sur $\mathbb{H}^1(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega)$.

Soit $(u_h, w_h) \in \mathbb{K}_h \times \mathbb{K}'_h$ une suite d'approximation de $(u, w) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}'$.

On utilisant l'hypothèse (i), on trouve :

$$\begin{cases} u_h \rightarrow u_0 \in \mathbb{K} \\ w_h \rightarrow w_0 \in \mathbb{K}' \end{cases} \text{ fortement si } h \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

La solution (u_{0h}, w_{0h}) du problème (2.16) est caractérisés comme étant l'unique solution de :

$$J(u_{0h}, w_{0h}) \leq J(u_h, w_h) \quad (2.7)$$

D'autre part $J(.,.)$ étant continue car α -convexe différentiable, alors on a clairement :

$$\limsup_{h \rightarrow 0} J(u_{0h}, w_{0h}) \leq \lim_{h \rightarrow 0} J(u_h, w_h) = J(u_0, w_0). \quad (2.8)$$

La suite $J(u_{0h}, w_{0h})$ est donc bornée, car (u_{0h}) et (w_{0h}) est bornée et elle est coercive. Mais tout borné dans un Hilbert est faiblement compact, donc on peut extrait une sous suite $(u_{0h'}, w_{0h'}) \in \mathbb{K}_h \times \mathbb{K}'_h$ et un élément $(\hat{u}, \hat{w}) \in \mathbb{H}^1(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} u_{0h'} \rightarrow \hat{u} \in \mathbb{K} \text{ faiblement dans } \mathbb{H}^1(\Omega) \\ w_{0h'} \rightarrow \hat{w} \in \mathbb{K}' \text{ faiblement dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \end{cases} \text{ si } h' \rightarrow 0. \quad (2.9)$$

D'après l'hypothèse (ii) on a : $(\hat{u}, \hat{w}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}'$. $J(.,.)$ est continue ce qui implique que $J(.,.)$ est faiblement semi-continue inférieurement.

La S.c.i faible de $J(.,.)$ entrane :

$$J(\hat{u}, \hat{w}) \leq \liminf_{h' \rightarrow 0} J(u_{0h'}, w_{0h'}) \quad (2.10)$$

De (2.81) et (2.82) , on tire facilement : $\hat{u} = u_0$, $\hat{w} = w_0$ et ainsi (sans extraction de sous-suites).

$$\begin{cases} u_{0h} \rightarrow u_0 \in \mathbb{K} \\ w_{0h} \rightarrow w_0 \in \mathbb{K}' \end{cases} \text{ faiblement si } h \rightarrow 0$$

ou encore :

$$\lim_{h' \rightarrow 0} J(u_{0h'}; w_{0h'}) = J(u_0; w_0). \quad (2.11)$$

La α -convexité permet d'écrire :

$$\begin{aligned} J(\theta u_1 + (1 - \theta)u_2, \theta w_1 + (1 - \theta)w_2) &\leq \theta J(u_1, w_1) + (1 - \theta)J(u_2, w_2) \\ &\quad - \frac{1}{4}\theta(1 - \theta) \left(\|u_1 - u_2\|_{\mathbb{H}_0^2(\Omega)}^2 + \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \right) \\ &\leq \theta J(u_1, w_1) + (1 - \theta)J(u_2, w_2) \\ &\quad - \frac{1}{4}\theta(1 - \theta) \left(\|u_1 - u_2\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}^2 + \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Alors, quand $h \rightarrow 0$ il vient que :

$$\begin{cases} J(u_{0h}; w_{0h}) - J(u_0, w_0) \rightarrow 0 \\ (J'(u_0; w_0), (u_{0h} - u_0, w_{0h} - w_0)) \rightarrow 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

car $J'(\cdot, \cdot)$ est borné, donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\|u - u_{0h}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}^2 + \|w - w_{0h}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2) = 0 \quad (2.14)$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_{0h}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}^2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|w - w_{0h}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 = 0 \quad (2.15)$$

ou encore :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_{0h}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|w - w_{0h}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0 \quad (2.16)$$

■

Conclusion.

Dans ce travail on a étudié une méthode d'éléments finis de type mixte pour le problème de l'obstacle pour une plaque encastrée soumise à l'action d'un obstacle

rigide.

D'un point de vue théorique la solution du problème original (P) existe et est unique mais impossible à trouver analytiquement. Des difficultés existent quant à sa régularité et la détermination de la nature géométrique et topologique de la région de contact.

La solution approchée d'un problème par éléments finis dépend du type de l'élément fini choisi, du raffinement du maillage, mais aussi de la position des noeuds dans le maillage. Pour cela la résolution du problème (P) par l'utilisation de la méthode des éléments finis de classe C^1 peut présenter des difficultés d'ordre numérique telles que la dimensionalité, le volume de calcul, la préparation des données...etc.

La mise en oeuvre pratique de la méthode des éléments finis de classe C^0 peut surmonter, certaines de ces difficultés et représente un des avantages importants de la méthode des éléments finis non-conformes.

Pour toutes ces raisons et en tenant compte de la géométrie de l'obstacle, nous suggérons l'utilisation des éléments finis triangulaires. En effet, les éléments triangulaires permettent d'avoir une meilleure approximation de la région de contact et utiliser les symétries axiale et diagonales pour étudier le problème seulement sur le $\frac{1}{8}$ du domaine.



Existence et unicité de la solution d'un problème électro-élastique

3.1 Introduction

Les déformations de cisaillement anti-plane sont les exemples les plus simples des déformations qui peuvent subir des solides en cisaillement anti-plane d'un corps cylindrique, le déplacement est parallèle aux génératrices du cylindre et est dépendant de la coordonnée axiale ([24], [28], [32], [43]). Les matériaux piézo-électriques dont les propriétés mécaniques sont élastiques sont appelés matériaux électro-élastiques et ceux dont ces propriétés sont visco-élastiques sont appelés matériaux électro-viscoélastiques. On trouvera des modèles généraux pour les matériaux électro-élastiques dans ([12], [43]). Les problèmes de contacts frottement statiques pour les matériaux électro-élastiques et de contact pour ceux électro-viscoélastiques ont été considéré dans ([43], [44]). Dans toutes ces références, la condition faite sur le phénomène est de supposer qu'il soit isolé de l'électricité.

Dans les dernières années, une attention considérable a été donnée à l'analyse des déformations de cisaillement anti-plane dans le contexte de la théorie de l'élasticité (voir par exemple ([3], [43], [40])). Les processus d'adhésion sont importants dans l'industrie où les parties, généralement métalliques, sont collées ensemble. Récemment, les matériaux composites ont atteint la notoriété, car ils sont très solides et légers et donc d'une importance considérable dans l'aviation et l'industrie automobile. Cependant, les matériaux composites subissent une délamination sous tension, dans laquelle les différentes couches se déplacent l'une par rapport à l'autre.

Dans ce chapitre, nous étudions un problème de contact avec frottement entre un

corps cylindrique déformable et une fondation. Ce travail est une continuation des travaux ([43], [44]). Nous nous intéressons au cas des déformations anti-planes, i.e. le champ des déplacements est parallèle aux génératrices du cylindre et est indépendant de la coordonnée axiale. De tels problèmes ont déjà été étudiés par plusieurs auteurs, sous plusieurs lois de contact et de frottement et différentes lois de constitution ; citons par exemple ([24], [28]). Dans l'étude de ce problème nous négligeons les termes d'inerties dans l'équation du mouvement ce qui nous conduit à un problème quasistatique. Nous considérons une forme faible de ce problème sous forme d'une inéquation variationnelle d'évolution integro-differentielle.

La structure de ce chapitre est la suivante, dans la section 2, nous présentons le problème mécanique considéré, par la suite, dans la section 3, nous listons les hypothèses et donnons les formulations variationnelles, enfin, dans la section 4, nous présentons notre principal résultat d'existence, d'unicité et de convergence, à savoir le Théorème (??) ainsi que les étapes de la démonstration de ce théorème [[17]].

3.2 **Modèle mathématique**

Le modèle physique est la suivante : nous considérons un corps cylindrique \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 , rapporté à un repère orthonormal (Ox_1, x_2, x_3) , situé dans une configuration d'origine fixe et non déformée. Nous admettons que les génératrices de ce cylindre \mathcal{B} sont parallèles à l'axe Ox_3 . Sa coupe transversale est un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, repéré dans le plan (Ox_1, x_2) . Le corps cylindrique est supposé suffisamment long afin de négliger les effets dans la direction axiale, nous pouvons alors écrire $\mathcal{B} = \Omega \times]-\infty, +\infty[$. Notons $\partial\Omega = \Gamma$ la frontière de ce domaine Ω divisée en trois parties mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3 avec $\text{mes } \Gamma_1 > 0$. Le cylindre est bloqué sur cette partie $\Gamma_1 \times]-\infty, +\infty[$, subit à la fois des forces volumiques f_0 dans \mathcal{B} et des forces surfaciques f_2 sur $\Gamma_2 \times]-\infty, +\infty[$ et est en contact avec une fondation tout au long de la partie $\Gamma_3 \times]-\infty, +\infty[$.

Nous supposons que les forces sont de la forme :

$$f_0 = (0, 0, f_0) \text{ avec } f_0 = f_0(x_1, x_2, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

$$f_2 = (0, 0, f_2) \text{ avec } f_2 = f_2(x_1, x_2, t) : \Gamma_2 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

$$q_0 = q_0(x_1, x_2, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

$$q_2 = q_2(x_1, x_2, t) : \Gamma_b \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

Les forces (3.1), (3.2) et les charges électriques (3.3), (3.4) peuvent donner lieu à des déformations et de charges électriques du cylindre piézoélectrique correspondant à un déplacement u et à un champ électrique potentiels φ qui sont indépendants de x_3 et ont la forme :

$$u = (0, 0, u) \text{ avec } u = u(x_1, x_2, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.5)$$

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Ci-dessous on considère les indices i et j qui désignent les composantes des vecteurs et des tenseurs variés de $\mathbf{1}$ à $\mathbf{3}$, en se référent au calcul indiciel. Nous notons par \mathcal{S}^3 l'espace de tenseurs symétrique de deuxième ordre sur \mathbb{R}^3 (formellement matrice symétrique d'ordre $\mathbf{3}$). Nous désignons par, $\|\cdot\|$ le produit scalaire et la norme Euclidienne sur \mathbb{R}^3 et \mathcal{S}^3 respectivement ; nous avons :

$$u \cdot v = u_i v_i, \quad \|v\| = (v \cdot v)^{1/2} \text{ pour tous } u = (u_i), v = (v_i) \in \mathbb{R}^3 \quad (3.7)$$

et

$$\sigma \cdot \tau = \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad \|\tau\| = (\tau \cdot \tau)^{1/2} \text{ pour tous } \sigma = (\sigma_{ij}), \tau = (\tau_{ij}) \in \mathcal{S}^3. \quad (3.8)$$

Le tenseur des déformations infinitésimales est noté $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}))$ et le champ de

contrainte par $\sigma = (\sigma_{ij})$. On note aussi $E(\varphi) = (E_i(\varphi))$ le champ électrique et par $\mathbf{D} = (D_i)$ le champ de déplacement électrique. Ici et ci-dessous, afin de simplifier la notation, nous n'indiquons pas la dépendance des diverses fonctions de x_1, x_2, x_3 ou t et nous rappelons que :

$$\epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_i(\varphi) = -\varphi_{,i}. \quad (3.9)$$

Le matériau est modélisé par la loi constitutive électro-élastique suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi), \quad (3.10)$$

$$\mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \beta\mathbf{E}(\varphi), \quad (3.11)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé, $\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \varepsilon_{ii}(\mathbf{u})$ est le tenseur unité de \mathbb{R}^3 , β est la permittivité électrique, \mathcal{E} représente le tenseur des constantes piézoélectrique (c'est un tenseur d'ordre 3) et \mathcal{E}^* est son transposer. En utilisant les équations constitutives (3.10), (3.11), le champ des contraintes et le champ de déplacement électrique sont donnés par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} eu_{,1} - \beta\varphi_{,1} \\ eu_{,2} - \beta\varphi_{,2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

où

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \mu \partial_{x_1} u \quad (3.14)$$

Et

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = \mu \partial_{x_2} u \quad (3.15)$$

On suppose que :

$$\mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} e(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{31}) \\ e(\varepsilon_{23} + \varepsilon_{32}) \\ e\varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij}) \in \mathcal{S}^3 \quad (3.16)$$

où e est un coefficient piézo-électrique.

Nous supposons également que les coefficients θ , μ , β et e dépendent des variables spatiales x_1 , x_2 , mais ils sont indépendants de la variable spatiale x_3 . Puisque $\zeta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \zeta^* \boldsymbol{v}$ pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{S}^3$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$, il découle de (3.16) que :

$$\zeta^* \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ev_1 \\ 0 & 0 & ev_2 \\ ev_1 & ev_2 & ev_3 \end{pmatrix} \quad \forall \boldsymbol{v} = (v_i) \in \mathbb{R}^3. \quad (3.17)$$

Nous supposons que le processus est mécaniquement et électriquement quasi statique et est donc régie par les équations d'équilibre

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0}, \quad D_{i,i} - q_0 = 0 \quad \text{dans } B \times (0, T) \quad (3.18)$$

où $\text{Div } \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j})$ représente la divergence du champ de tenseurs $\boldsymbol{\sigma}$. Compte tenu de (3.1), (3.3), (3.5), (3.6), (3.12) et (3.13), les équations d'équilibre ci-dessus sont réduits aux équations scalaires suivantes :

$$\text{div}(\mu \nabla u) + \text{div}(e \nabla \varphi) + f_0 = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.19)$$

$$\text{div}(e \nabla u - \beta \nabla \varphi) = q_0 \quad (3.20)$$

en utilisant la notation :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = \tau_{1,1} + \tau_{1,2} \quad \text{dans } \boldsymbol{\tau} = (\tau_1(x_1, x_2, t), \tau_2(x_1, x_2, t)) \quad (3.21)$$

et

$$\nabla v = (v_{,1}, v_{,2}), \quad \partial_\nu v = v_{,1} \nu_1 + v_{,2} \nu_2 \quad \text{pour } v = v(x_1, x_2, t). \quad (3.22)$$

Nous décrivons maintenant les conditions aux limites, alors on suppose que le cylindre est fixé sur $\Gamma_1 \times (-\infty, +\infty)$ et que le potentiel électrique inexistant sur $\Gamma_1 \times (-\infty, +\infty)$; donc, (3.5) et (3.6) impliquent que :

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3.23)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \times (0, T). \quad (3.24)$$

Soit $\boldsymbol{\nu}$ le vecteur unitaire normale sur $\Gamma \times (-\infty, +\infty)$. Nous avons :

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, 0) \quad \text{avec } \nu_i = \nu_i(x_1, x_2) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2. \quad (3.25)$$

Pour un vecteur \boldsymbol{v} nous désignons par σ_ν et σ_τ les composantes normales et tangentielles à la frontière, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{v}_\tau = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\nu \boldsymbol{\nu}. \quad (3.26)$$

Les composantes normales et tangentielles du champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ notées respectivement par σ_ν et σ_τ sont définies par les égalités :

$$\sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \sigma_\tau = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}. \quad (3.27)$$

Compte tenu des relations (3.12), (3.13) et (3.25), le vecteur des contraintes de

Cauchy et la composante normale du champ de déplacement électrique adopte une forme particulière dans le cas des problèmes antiplans :

$$\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} = (0, 0, \mu \partial_{\nu} u + e \partial_{\nu} \varphi), \quad \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = e \partial_{\nu} u - \beta \partial_{\nu} \varphi. \quad (3.28)$$

Compte tenu de (3.2), (3.4) et (3.28), la condition de traction sur $\Gamma_2 \times (-\infty, \infty)$ et les conditions électriques sur $\Gamma_b \times (-\infty, \infty)$ sont donnés par :

$$\mu \partial_{\nu} u + e \partial_{\nu} \varphi = f_2 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (3.29)$$

$$e \partial_{\nu} u - \beta \partial_{\nu} \varphi = q_2 \text{ sur } \Gamma_b \times (0, T). \quad (3.30)$$

Présentons la condition de contact et de frottement électrique $\boldsymbol{\nu}$. La première remarque vient de l'observation des relations (3.5) et (3.25) qui impliquent que $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{0}$, donc le contact est bilatéral en notant aussi la forme particulière du composante tangentielle du champ de déplacement. Comme le contact est supposé maintenu durant tout le processus. En utilisant les équations (3.5), (3.25) et (3.27), on conclut que :

$$\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\tau}} = (0, 0, u), \quad \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\tau}} = (0, 0, \sigma_{\boldsymbol{\tau}}) \quad (3.31)$$

où

$$\sigma_{\boldsymbol{\tau}} = (0, 0, \mu \partial_{\nu} u + e \partial_{\nu} \varphi). \quad (3.32)$$

Nous supposons que le frottement est invariant par rapport à l'axe x_3 et est modélisée par la loi de frottement de Tresca, qui est :

$$\begin{cases} |\sigma_{\boldsymbol{\tau}}(t)| \leq g, \\ |\sigma_{\boldsymbol{\tau}}(t)| = -g \frac{\dot{u}_{\boldsymbol{\tau}}}{|\dot{u}_{\boldsymbol{\tau}}|} \text{ if } \dot{u}_{\boldsymbol{\tau}} \neq 0 \text{ dans } \Gamma_3 \times [0, T] \end{cases} \quad (3.33)$$

où $g: \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction donnée, et \dot{u}_τ représente la vitesse tangentielle à la frontière de contact, (pour plus de détails voir ([41], [42])). De l'équation (3.31) nous pouvons affirmer que la loi de frottement (3.33) implique :

$$\begin{cases} |\mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi| \leq g, \\ |\mu \partial_\nu u + e \partial_\nu \varphi| = -g \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \text{ tq } \dot{u} \neq 0 \text{ sur } \Gamma_3 \times [0, T] \end{cases} \quad (3.34)$$

Ensuite, puisque la fondation est électriquement conductrice et le contact est bilatéral, nous supposons que le composant normal du champ de déplacement électrique (ou la charge est libre) est proportionnel à la différence entre le potentiel sur la fondation et la surface du corps. Ainsi,

$$\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = k (\varphi - \varphi_F) \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.35)$$

où φ_F représente le potentiel électrique de la fondation et k est le coefficient de conductivité électrique. Nous utilisons (3.28) et de l'égalité précédente on obtient :

$$e \partial_\nu u - \beta \partial_\nu \varphi = k (\varphi - \varphi_F) \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (3.36)$$

Il ne reste plus qu'à compléter ces équations en donnant le déplacement initial :

$$u(0) = u_0 \text{ dans } \Omega, \quad (3.37)$$

où u_0 est une fonction donnée sur Ω .

Nous recueillons les équations ci-dessus et les conditions pour obtenir le modèle mathématique qui décrit le cisaillement anti-plan d'un cylindre électro-élastique en contact de frottement avec une fondation rigide. Par conséquent, notre problème antiplan peut se formuler comme suit :

Problème *pelectro-elastic*

Trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et le potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$\operatorname{div}(\mu\nabla u) + \operatorname{div}(e\nabla\varphi) + f_0 = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.38)$$

$$\operatorname{div}(e\nabla u - \alpha\nabla\varphi) = q_0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.39)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3.40)$$

$$\mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (3.41)$$

$$\begin{cases} |\mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi| \leq g, \\ |\mu\partial_\nu u + e\partial_\nu\varphi| = -g \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \quad \text{si } \dot{u} \neq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \end{cases} \quad (3.42)$$

$$e\partial_\nu u - \alpha\partial_\nu\varphi = q_2 \quad \text{sur } \Gamma_b \times (0, T), \quad (3.43)$$

$$e\partial_\nu u - \alpha\partial_\nu\varphi = k(\varphi - \varphi_F) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.44)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.45)$$

Notez qu'une fois que le champ de déplacement u et le potentiel électrique φ qui résolvent des problèmes *Pelectro-elastic* sont connus, alors le tenseur des contraintes σ et le champ de déplacement électrique D peut être obtenue en utilisant les lois constitutives (3.12) et (3.13), respectivement.

3.3 Formulation variationnelle

Dans cette section, nous listons les hypothèses ainsi que les notations utilisées par la suite et donnons la formulations variationnelle du problème physique envisagé. À cet effet, nous introduisons les espaces fonctionnels :

$$\mathbb{V} = \{v \in \mathbb{H}^1(\Omega) : v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1\} \quad (3.1)$$

et

$$\mathbb{W} = \{\psi \in \mathbb{H}^1(\Omega) : \psi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a\} \quad (3.2)$$

nous notons w pour γw qui la trace d'une fonction $w \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ sur Γ . Puisque $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$ et $\text{mes}(\Gamma_a) > 0$. Il est facile de remarquer que les deux espaces \mathbb{V} et \mathbb{W} sont des espaces de Hilbert muni des produits scalaires suivants :

$$(u, v)_{\mathbb{V}} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad \forall u, v \in \mathbb{V} \quad (3.3)$$

et

$$(\varphi, \psi)_{\mathbb{W}} = \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi dx \quad \forall \varphi, \psi \in \mathbb{W} \quad (3.4)$$

En outre, les normes associées :

$$\|v\|_{\mathbb{V}} = \|\nabla v\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \quad \forall v \in \mathbb{V}, \quad \|\psi\|_{\mathbb{W}} = \|\nabla \psi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \quad \forall \psi \in \mathbb{W} \quad (3.5)$$

sont équivalentes sur \mathbb{V} et \mathbb{W} , respectivement, avec la norme usuelle $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}$. D'après le théorème de trace de Sobolev on en déduit qu'il existe deux constantes positives $c_{\mathbb{V}} > 0$ et $c_{\mathbb{W}} > 0$ tel que :

$$\|v\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)} \leq c_{\mathbb{V}} \|v\|_{\mathbb{V}} \quad \forall v \in \mathbb{V}, \quad P\psi|_{\mathbb{L}^2(\Gamma_3)} \leq c_{\mathbb{W}} \|\psi\|_{\mathbb{W}} \quad \forall \psi \in \mathbb{W} \quad (3.6)$$

Pour un espace de Banach réel $(X, \|\cdot\|_X)$, nous utilisons la notation habituelle pour les espaces $\mathbb{L}^p(0, T; X)$ et $\mathbb{W}^{k,p}(0, T; X)$ où $1 \leq p \leq \infty, k = 1, 2, \dots$; nous notons également $C([0, T]; X)$ l'espace des fonctions continues et continûment différentiable sur $[0, T]$ à valeurs dans X , muni de la norme :

$$\|x\|_{C([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|_X \quad (3.7)$$

et nous utilisons les notations standart pour l'espace de Lebesgue $\mathbb{L}^2(0, T; X)$ ainsi que l'espace de Sobolev $\mathbb{W}^{1,2}(0, T; X)$. En particulier, rappelons que la norme sur l'espace $\mathbb{L}^2(0, T; X)$ est donnée par la formule :

$$\|u\|_{\mathbb{L}^2(0,T;X)}^2 = \int_0^T \|u(t)\|_X^2 dt \quad (3.8)$$

et la norme sur l'espace $\mathbb{W}^{1,2}(0,T;X)$ est donnée par la formule :

$$\|u\|_{\mathbb{W}^{1,2}(0,T;X)}^2 = \int_0^T \|u(t)\|_X^2 dt + \int_0^T \|\dot{u}(t)\|_X^2 dt. \quad (3.9)$$

Enfin, nous supposons que l'argument X lorsque $X = \mathbb{R}$; ainsi, par exemple, on utilise la notation $\mathbb{W}^2(0,T)$ pour l'espace $\mathbb{W}^2(0,T;\mathbb{R})$ et la notation $\|\cdot\|_{\mathbb{W}^2(0,T)}$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{W}^2(0,T;\mathbb{R})}$.

Dans l'étude de Problème *$P^{electro-elastic}$* , nous supposons que le coefficient de permittivité électrique satisfait :

$$\alpha \in L^\infty(\Omega) \quad \text{et il existe } \alpha^* > 0 \text{ tq } \alpha(x) \geq \alpha^* \text{ pour } x \in \Omega \quad (3.10)$$

Nous supposons également que le coefficient de Lamé et le coefficient piézoélectrique satisfait :

$$\mu \in \mathbb{L}^\infty(\Omega) \quad \text{et } \mu(x) > 0 \text{ pour } x \in \Omega \quad (3.11)$$

$$e \in L^\infty(\Omega) \quad (3.12)$$

Les forces, de tractions, le volume et la densité de surface de charge vérifient la régularité

$$f_0 \in \mathbb{W}^{1,2}(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega)), \quad f_2 \in \mathbb{W}^{1,2}(0,T;\mathbb{L}^2(\Gamma_2)) \quad (3.13)$$

$$q_0 \in \mathbb{L}^2(\Omega), \quad q_2 \in \mathbb{L}^2(\Gamma_b) \quad (3.14)$$

Le coefficient de conductivité électrique et la fonction g de friction satisfassent aux propriétés suivantes :

$$k \in \mathbb{L}^\infty(\Gamma_3) \text{ et } k(x) \geq 0 \text{ pour } x \in \Gamma_3 \quad (3.15)$$

$$g \in \mathbb{L}^\infty(\Gamma_3) \text{ et } g(x) \geq 0 \text{ pour } x \in \Gamma_3 \quad (3.16)$$

Enfin, nous supposons que le potentiel électrique de la fondation vérifié :

$$\varphi_F \in \mathbb{L}^2(\Gamma_3) \quad (3.17)$$

Les données initiales sont choisies de telle sorte que

$$u_0 \in \mathbb{V} \quad (3.18)$$

en outre,

$$a_\mu(u_0, v) + a_e(\varphi_0, v) + j(v) \geq (f(0), v)_{\mathbb{V}} \quad \forall v \in \mathbb{V} \quad (3.19)$$

où φ_0 est l'unique élément de \mathbb{W} qui vérifient la propriété suivante :

$$a_\beta(\varphi_0, \psi)_{\mathbb{V}} - a_e(\varphi_0, \psi) = (q(0), v)_{\mathbb{W}} \quad \forall \psi \in \mathbb{W} \quad (3.20)$$

Nous définissons maintenant la fonctionnelle $j: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ donnée par la formule :

$$j(v) = \int_{\Gamma_3} g|v| da \quad \forall v \in \mathbb{V} \quad (3.21)$$

Nous désignons par $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{V}$ et $q: [0, T] \rightarrow \mathbb{W}$, les fonctions basées sur la représentation de Riesz's respectivement, par :

$$(f(t), v)_{\mathbb{V}} = \int_{\Omega} f_0(t)v dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t)v da \quad (3.22)$$

$$(q(t), \psi)_{\mathbb{W}} = \int_{\Omega} q_0(t)\psi dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t)\psi da + \int_{\Gamma_3} k\varphi_F(t)\psi da \quad (3.23)$$

pour tout $v \in \mathbb{V}$, $\psi \in \mathbb{W}$ et $t \in [0, T]$.

Il résulte des hypothèses (3.13) et (3.14), que les intégrales ci-dessus sont bien définis et :

$$f \in \mathbb{W}^{1,2}(0, T; \mathbb{V}) \quad (3.24)$$

$$q \in \mathbb{W}^{1,2}(0, T; \mathbb{W}) \quad (3.25)$$

Ensuite, nous définissons les formes bilinéaires $a_\mu : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $a_e : \mathbb{V} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}$, $a_e : \mathbb{W} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$, et $a_\alpha : \mathbb{W} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}$, par :

$$a_\mu(u, v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v dx \quad (3.26)$$

$$a_e(u, \varphi) = \int_{\Omega} e \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = a_e(\varphi, u) \quad (3.27)$$

$$a_\alpha(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \beta \nabla \varphi \cdot \nabla \psi dx + \int_{\Gamma_3} k \varphi \psi dx \quad (3.28)$$

pour tout $u, v \in \mathbb{V}$, $\varphi, \psi \in \mathbb{W}$. Les hypothèses (3.21) et (3.23) signifient que les intégrales ci-dessus sont bien définis. En utilisant (3.5) et (3.6), il s'ensuit que les formes a_μ , a_e et a_e sont continues ; par ailleurs, les formes a_μ et a_α sont symétriques, en plus, la forme a_α est \mathbb{W} -elliptique, puisque :

$$a_\alpha(\psi, \psi) \geq \alpha^* \|\psi\|_{\mathbb{W}}^2 \quad \forall \psi \in \mathbb{W} \quad (3.29)$$

La formulation variationnelle du problème est basée sur le résultat suivant :

Lemme 3.3.1 *Si (u, φ) est solution régulière du Problème $P^{\text{electro-elastic}}$, alors $(u(t), \varphi(t)) \in X$ et :*

$$a_\mu(u(t), v - \dot{u}(t)) + a_e(\varphi(t), v - \dot{u}(t)) + j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_{\mathbb{V}} \quad (3.30)$$

$$\forall v \in \mathbb{V}, t \in [0, T]$$

$$a_\alpha(\varphi(t), \psi) - a_e(u(t), \psi) = (q(t), \psi)_{\mathbb{W}} \quad \forall \psi \in \mathbb{W}, t \in [0, T] \quad (3.31)$$

$$u(0) = u_0 \quad (3.32)$$

Démonstration

Soit (u, φ) une solution régulière du Problème *P^{electro-elastic}*, nous avons $u(t) \in \mathbb{V}$, $\dot{u}(t) \in \mathbb{V}$ et $\varphi(t) \in \mathbb{W}$ pour $t \in [0, T]$. En utilisant (3.38), (3.40) et (3.41), on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mu \nabla u(t) \cdot \nabla (v - \dot{u}(t)) dx + \int_{\Omega} e \nabla \varphi(t) \cdot \nabla (v - \dot{u}(t)) dx = \\ & \int_{\Omega} f_0(t)(v - \dot{u}(t)) dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t)(v - \dot{u}(t)) da + \\ & + \int_{\Gamma_3} \left(|\mu \partial_\nu u(t) + e \partial_\nu \varphi(t)| \right) (v - \dot{u}(t)) da, \quad \forall v \in \mathbb{V}, t \in (0, T) \end{aligned} \quad (3.33)$$

D'autre part de (3.39) et (3.43)-(3.44) on obtient aussi :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \alpha \nabla \varphi(t) \cdot \nabla \psi dx - \int_{\Omega} e \nabla u(t) \cdot \nabla \psi dx = \\ & \int_{\Omega} q_0(t) \psi dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \psi da + \int_{\Gamma_3} k \varphi_F(t) \psi da, \quad \forall \psi \in \mathbb{W}, t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.34)$$

En utilisant (3.42) et (3.21) on obtient :

$$\begin{aligned} & a_\mu(u(t), v - \dot{u}(t)) + a_e(\varphi(t), v - \dot{u}(t)) - \\ & \int_{\Gamma_3} \left(|\mu \partial_\nu u(t) + e \partial_\nu \varphi(t)| \right) (v - \dot{u}(t)) da = (f(t), v - \dot{u}(t))_{\mathbb{V}}, \quad \forall v \in \mathbb{V}, t \in [0, T] \end{aligned} \quad (3.35)$$

en tenant compte de (3.23) et (3.27)-(3.28), nous trouvons la deuxième égalité du Lemme (3.3.1), i.e.,

$$a_\alpha(\varphi(t), \psi) - a_e(u(t), \psi) = (q(t), \psi)_{\mathbb{W}} \quad \forall \psi \in \mathbb{W}, t \in [0, T] \quad (3.36)$$

L'utilisation de la condition de contact à friction (3.42) et (3.21) sur $\Gamma_3 \times (0, T)$, nous donne pour tout $t \in [0, T]$:

$$j(\dot{u}(t)) = - \int_{\Gamma_3} (|\mu \partial_\nu u(t) + e \partial_\nu \varphi(t)|) \dot{u}(t) da \quad (3.37)$$

Il est clair que :

$$j(v) \geq - \int_{\Gamma_3} (|\mu \partial_\nu u(t) + e \partial_\nu \varphi(t)|) v da, \quad \forall v \in \mathbb{V} \quad (3.38)$$

La première inégalité du Lemme (3.3.1) résulte alors de (3.35), (3.37) et (3.38).

Or, d'après le lemme (3.3.1) la condition (3.32) conduit au problème variationnelle suivant :

Problème $PV^{electro-elastic}$

Trouver le champ de déplacement $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{V}$ et le champ de potentiel électrique $\varphi: [0, T] \rightarrow \mathbb{W}$ tel que :

$$\begin{aligned} a_\mu(u(t), v - \dot{u}(t)) + a_e(\varphi(t), v - \dot{u}(t)) + \\ j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_{\mathbb{V}}, \quad \forall v \in \mathbb{V}, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$a_\alpha(\varphi(t), \psi) - a_e(u(t), \psi) = (q(t), \psi)_{\mathbb{W}}, \quad \forall \psi \in \mathbb{W}, t \in [0, T] \quad (3.40)$$

$$u(0) = u_0 \quad (3.41)$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème est donnée par le résultat suivant :

Théorème 3.3.1 *On suppose que les relations (3.10)-(3.25) sont vérifiées. Alors, le problème variationnel $PV^{electro-elastic}$ possède une solution unique (u, φ) qui satisfait :*

$$u \in \mathbb{W}^{1,2}(0, T; \mathbb{V}), \quad \varphi \in \mathbb{W}^{1,2}(0, T; \mathbb{W}) \quad (3.42)$$

Notons que l'élément (u, φ) qui résout le problème $PV^{\text{electro-elastic}}$ est appelé solution faible du contact antiplane $PV^{\text{electro-elastic}}$. Nous concluons à partir du théorème (3.3.2) que le problème $P^{\text{electro-elastic}}$ de contact anti-plane a une unique solution faible, à condition que (3.10)-(3.25) sont satisfaites.

Démonstration

Nous commençons par la démonstration du théorème (3.3.2), qui sera réalisé en plusieurs étapes. Nous supposons dans toute la suite que les relations (3.10)-(3.25) sont satisfaites.

Dans la première étape, nous allons considérer le lemme suivant :

Lemme 3.3.2 Soit (u, φ) solution de $PV^{\text{electro-elastic}}$ ayant la régularité (3.42). Alors il existe une forme bilinéaire notée $a(\cdot, \cdot) : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est symétrique et \mathbb{V} -elliptique ainsi qu'une fonction $\bar{f} \in W^{1,2}(0, T; \mathbb{V})$ telle que :

$$a(u(t), v - \dot{u}(t)) + j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq (\bar{f}(t), v - \dot{u}(t))_{\mathbb{V}} \quad (3.43)$$

$$\forall v \in \mathbb{V}, \text{ p.p.t } \in [0, T]$$

$$u(0) = u_0 \quad (3.44)$$

Par ailleurs, la condition initiale u_0 vérifié :

$$u_0 \in V \quad (3.45)$$

et

$$a(u_0, v) + j(v) \geq (\bar{f}(0), v)_V \quad \forall v \in \mathbb{V} \quad (3.46)$$

Démonstration

Nous utilisons le théorème de représentation de Riesz pour définir les opérateurs $B : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}$ et $C : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ par :

$$(B\varphi, \psi)_{\mathbb{W}} = a_{\beta}(\varphi, \psi) \quad \forall \varphi, \psi \in \mathbb{W} \quad (3.47)$$

et :

$$(Cv, \psi)_{\mathbb{W}} = a_e(v, \varphi) \quad \forall \varphi, \psi \in \mathbb{W}, \quad \forall v \in \mathbb{V} \quad (3.48)$$

de (3.48) il s'ensuit que l'opérateur B satisfait les propriétés suivantes :

- B est un opérateur symétrique,
- B est un opérateur positif défini sur \mathbb{W} satisfait :

$$(B\varphi, \varphi)_{\mathbb{W}} = a_{\beta}(\varphi, \varphi) = \int_{\Omega} \beta \nabla \varphi \nabla \varphi dx \geq \beta \|\nabla \varphi\|_{\mathbb{W}}^2 > 0 \quad (3.49)$$

D'autre part, à partir de (3.48) il s'ensuit que l'opérateur C satisfait les propriétés suivantes :

- C est un opérateur linéaire,

C est un opérateur continu.

En remplaçant (3.47) et (3.48) dans (3.40) on obtient :

$$B\varphi(t) = Cu(t) + q(t) \quad p.p.t \in [0, T] \quad (3.50)$$

Gardant à l'esprit que l'opérateur B est inversible, alors l'égalité (3.50) devient :

$$\varphi(t) = B^{-1}Cu(t) + B^{-1}q(t) \quad p.p.t \in [0, T] \quad (3.51)$$

où $B^{-1} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}$ représenter l'opérateur inverse de B . En injectant (3.51) dans (3.39) on a :

$$\begin{aligned} a_\mu(u(t), v - \dot{u}(t)) + a_e(B^{-1}Cu(t) + B^{-1}q(t), v - \dot{u}(t)) + \\ j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_{\mathbb{V}}, \quad \forall v \in \mathbb{V}, t \in [0, T] \end{aligned} \quad (3.52)$$

et par la suite on obtient :

$$\begin{aligned} a_\mu(u(t), v - \dot{u}(t)) + a_e(B^{-1}Cu(t), v - \dot{u}(t)) + j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq \\ (f(t), v - \dot{u}(t))_{\mathbb{V}} - a_e(B^{-1}q(t), v - \dot{u}(t)), \quad \forall v \in \mathbb{V}, t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Ensuite, nous définissons les formes bilinéaires $a(\cdot, \cdot) : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$a(u(t), v) = a_\mu(u(t), v) + a_e(B^{-1}Cu(t), v), \quad \forall u, v \in \mathbb{V} \quad (3.54)$$

et soit $\bar{f}(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{V}$ la fonction définie par :

$$(\bar{f}(t), v)_{\mathbb{V}} = (f(t), v)_{\mathbb{V}} - a_e(B^{-1}q(t), v) \quad \forall v \in \mathbb{V} \quad (3.55)$$

Il est clair que $a(\cdot, \cdot)$ défini par (3.54) est une forme bilinéaire continue sur V et ceci résulte de la continuité des opérateurs B^{-1} et C respectivement.

Soit $u, v \in V$ et soit $B^{-1}Cu = w \in W$, $B^{-1}Cv = z \in W$, i.e. $Cu = Bw$ et $Cv = Bz$ respectivement ; en utilisant (3.47) , il résulte :

$$\int_{\Omega} \beta \nabla w \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} e \nabla u \nabla \varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathbb{W} \quad (3.56)$$

De même, en utilisant (3.48) on obtient :

$$\int_{\Omega} \beta \nabla z \nabla \psi dx = \int_{\Omega} e \nabla v \nabla \psi dx \quad \forall \psi \in \mathbb{W} \quad (3.57)$$

Ce qui donne :

$$a_e(B^{-1}Cu, v) = a_e(w, v) = \int_{\Omega} e \nabla w \nabla v dx \quad (3.58)$$

de (3.54)-(3.55) il s'ensuit que :

$$a_e(w, v) = a_e(u, z) \quad (3.59)$$

$$B^{-1}Cu = w \quad (3.60)$$

et

$$B^{-1}Cv = z \quad (3.61)$$

En remplaçant v par ψ dans (3.58) et en utilisant (3.57) nous avons :

$$a_e(B^{-1}Cu, \psi) = \int_{\Omega} e \nabla w \nabla \psi dx = \int_{\Omega} \beta \nabla z \nabla w dx \quad (3.62)$$

En utilison (3.59)-(3.61) pour $w = \varphi$ on obtient :

$$a_e(B^{-1}Cu, v) = \int_{\Omega} \beta \nabla z \nabla u dx \quad (3.63)$$

ce qui donne le résultat suivant :

$$a_e(B^{-1}Cu, v) = a_e(u, B^{-1}Cv) \quad (3.64)$$

Par conséquent, on déduit de (3.64) et donc, la forme bilinéaire $a_e(\cdot, \cdot)$ est symétrique.

D'autre part , pour tout $u \in \mathbb{V}$ on a :

$$a_e(B^{-1}Cu, v) = a_e(w, v) = \int_{\Omega} e \nabla w \nabla v dx \quad (3.65)$$

et en utilisant (3.59) et (3.61) avec $\varphi = v$, il vient :

$$a_e(B^{-1}Cu, v) = \int_{\Omega} e \nabla w \nabla w dx \geq 0 \quad (3.66)$$

La dernière inégalité donne :

$$a(u, u) = a_{\mu}(u, u) + a_e(B^{-1}Cu, u) \geq \mu^* \|u\|_{\mathbb{V}}^2 \quad \forall u \in \mathbb{V} \quad (3.67)$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$a(u, u) \geq \mu^* \|u\|_{\mathbb{V}}^2 \quad \forall u \in \mathbb{V} \quad (3.68)$$

ce qui prouve que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est V -elliptique. Enfin, la régularité $f \in \mathbb{W}^{1,2}(0, T; \mathbb{V})$ et $q \in \mathbb{W}^{1,2}(0, T; \mathbb{W})$ combinée avec la définition de $\bar{f}(\cdot)$ dans (3.61), nous donne :

$$\bar{f} \in \mathbb{W}^{1,2}(0, T; \mathbb{V}) \quad (3.69)$$

l'inégalité (3.53) combinée avec l'inégalité (3.54) et (3.55) prouvent que la forme bilinéaire $a_e(\cdot, \cdot)$ satisfait (3.43) et (3.44).

Par ailleurs, en utilisant (3.20), il vient que :

$$B\varphi_0 = Cu_0 + q(0) \quad (3.70)$$

ce qui implique :

$$\varphi_0 = B^{-1}Cu_0 + B^{-1}q(0) \quad (3.71)$$

Nous combinons (3.70) et (3.71) on en déduit que :

$$a_{\mu}(u_0, v) + a_e(B^{-1}Cu_0, v) + j(v) \geq (f(0), v)_{\mathbb{V}} - a_e(B^{-1}q(0), v), \quad \forall v \in \mathbb{V}. \quad (3.72)$$

En utilisant (3.54) et (3.55), il s'en suit que u_0 satisfait (3.45) et (3.46), ainsi le Lemme est démontré.

Dans la deuxième étape nous démontrons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 3.3.2 *Soit X un espace de Hilbert et supposons que (3.45), (3.46), (3.54), (3.55), (3.21), (3.68), (3.69) sont satisfaites, et que j définie par (3.21) est une fonctionnelle convexe, propre et s.c.i. Alors il existe une unique solution u du problème (3.43) et (3.44) qui satisfait $u \in \mathbb{W}^{1,2}(0, T; X)$.*

Démonstration

La preuve du théorème (3.48) sera réalisée en plusieurs étapes et est basée sur l'étude d'une suite d'inéquations variationnelle d'évolution.

Lemme 3.3.3 *Il existe une unique fonction u solution du problème (3.43) et (3.44) qui satisfait $u \in \mathbb{W}^{1,2}(0, T; \mathbb{V})$.*

Démonstration

L'existence et l'unicité de la solution du problème (3.43) et (3.44) résulte du théorème (3.3.2) appliqué pour l'espace $X = \mathbb{V}$. En effet, d'après le Lemme (3.3.20), il résulte que la forme bilinéaire définie par (3.54) est continue, symétrique et V -elliptique, par ailleurs la fonction $\bar{f}(\cdot)$ définie par ((3.55)) a la régularité $\bar{f} \in \mathbb{W}^{1,2}(0, T; V)$, et le déplacement initial u_0 satisfait (3.45) et (3.46). En outre, la fonctionnelle j défini par (3.21) est convexe semicontinue inférieurement sur \mathbb{V} .

En conclusion, les hypothèses du Théorème (3.3.2) sont satisfait alors, il existe une unique $u \in \mathbb{W}^{1,2}(0, T; \mathbb{V})$.

Nous avons maintenant tous les données pour présenter la démonstration du Théorème (3.3.1).

Démonstration (Preuve du Théorème (3.3.1))

Soit $u \in \mathbb{W}^{1,2}(0, T; \mathbb{V})$ la solution du problème (3.43) et (3.44) obtenue dans le lemme (3.3.2), et soit $\varphi: [0, T] \rightarrow \mathbb{W}$ le champ de potentiel électrique défini par (3.50). Pour $u \in \mathbb{W}^{1,2}(0, T; V)$ et $q \in \mathbb{W}^{1,2}(0, T; \mathbb{W})$ on a $\varphi \in \mathbb{W}^{1,2}(0, T; \mathbb{W})$.

De (3.50) il s'ensuit que :

$$(B\varphi, \psi)_W - (Cu, \psi)_W = (q(t), \psi)_W \quad \forall \psi \in W, \quad p.p.t \in [0, T] \quad (3.73)$$

En utilisant la définition (3.47) et (3.48) des opérateurs B et C , respectivement, il résulte que (u, φ) satisfait (3.44).

Des arguments similaires combinés avec la définition (3.47) de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ et de la définition (3.48) de la fonction $\bar{f}(\cdot)$ prouvent que le couple (\mathbf{u}, φ) satisfait (3.43); nous concluons que (\mathbf{u}, φ) est la solution du Problème $PV^{\text{electro-elastic}}$ avec la régularité (3.42), ce qui prouve l'existence dans le Théorème (3.3.2).

Pour l'unicité de la solution du problème (3.43) et (3.44), elle résulte du lemme (3.3.2) associée à (3.50). Ainsi s'achève la démonstration du théorème (3.3.1).

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons proposé et analysé des méthodes numériques pour des problèmes de contact et déformation anti-plane. Pour les problèmes de contact, nous avons étudié la méthode modifiée afin d'éliminer le terme mixte, le résultat essentiel est de démontré la convergence de la solution approché. Dans la deuxième partie de cette thèse, nous avons étudié un modèle de déformation anti-plane. Où nous avons démontré un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible. Pour les perspectives, il serait intéressant de trouver un estimateur d'erreur qui conserve les écarts entre les résultats des simulations numériques et la réalité physique. Pour la parité numérique il est intéressant de faire des testes sur le problème déformation anti-plane. Enfin, l'étude menée dans cette thèse pourrait être étendue aux grandes déformations et à des applications industrielles plus réalistes.



Bibliographie

- [1] A. M. ARTHURS, *On Variational Principles and the Hypercircle for Boundary Value Problems*, PROC. R. I. A., Vol 77, SECT. A. University of York, Published, 9 Decembre 1977.
- [2] G.A. BAKER, *Finite element methods for elliptic equations using nonconforming elements*, Math. Comput. (31) 1977, pp.45-59.
- [3] I. BABUSKA & W. C. RHEINBOLDT, *Mathematical Problems of Computational Decisions in the Finite Element Method*, In *Mathematical Aspects of Finite Element Methods*, I. Calligani & E. Maglines (Eds.), Lecture Notes In Maths. N. 606, Springer Verlag, Berlin.
- [4] S.C. BRENNER, L.-Y. Sung, C^0 interior penalty methods for fourth order elliptic boundary value problems on polygonal domains, *J. Sci. Comput.* (22/23) 2005, pp.83-118.
- [5] F. BREZZI, *On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle point Problems Arising From Lagrangian Multipliers*, RAIRO Anal. Num., (8)1974, pp. 129-151.
- [6] BRUNEAU, HERZOG Ph., KERGOMARD J. and POLACK J.D., "General Formulation of the Dispersion Equation in Bounded Visco-thermal Fluids, and Application to some Simple Geometries", *Wave Motion* (11) 1989, pp. 441-451.
- [7] L. CAFFARELLI and A. FRIEDMAN, *The Obstacle Problem for the Biharmonic Operator*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Vol. 6, 1979, pp. 151-184.
- [8] P.G. CIARLET, *Mathematical Elasticity, Volume II : Theory of Plates*, North-Holland, 1997.

- [9] F. CIRAK and E. RAMM, *A Posteriori Error estimation And Adaptivity For Linear Elasticity Using Reciprocal Theorem*, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 156(1-4) 1998, pp. 351-362.
- [10] W. D. COLLINS, *An Extension of the Method of the Hypercircle to Linear Operator Problems with Unilateral Constraints*, *Proceeding of the Royal Society of Edinburgh 85A*, 1980, pp. 173-193.
- [11] P. COOREVITS, P. HILD, and M. HJIAJ. *A posteriori error control for finite element approximations of Coulomb frictional contact*. *SIAM Journal on Scientific Computing*, (23) 2001 pp. 976-999, 2001.
- [12] M. DALAH, *Etude des problèmes paraboliques à données manquantes*, thèse de doctorat, Université "Mentouri" de Constantine, 2008.
- [13] M. DALAH, *Antiplane Frictional Contact of Electro-Viscoelastic Cylinders*. *Electronic Journal of Differential Equations*. (118) 2009, pp. 1-15.
- [14] A. ERN et JEAN-LUC GUERMOND, *Éléments finis, théorie, applications, mise en oeuvre*. Springer, 2002.
- [15] K. FERNANE and A. AYADI, *Dual Variational Formulation Applied to an Acoustic Model Problem*, *Int. Journal of Math. Analysis*, Vol. 4, 2010, no. 23, pp. 1117 - 1133.
- [16] K. FERNANE and A. AYADI, *Nonconforming Finite Element Analysis for a Plate Contact Problem*, *International Journal of Mathematics and Computation*, 2011, Volume 11, Number J11, pp. 118-129.
- [17] K. FERNANE and M. DALAH and A. AYADI, *Existence and uniqueness solution of a quasistatic electro-elastic antiplane contact problem with Tresca friction law*, *IApplied Sciences*, Vol.14, 2012, pp. 45-59. *Balkan Society of Geometers*, *Geometry Balkan Press* 2012.
- [18] K. FERNANE and H. SISSAOUI, *Une méthode variationnelle mixte pour la résolution numérique du problème de l'obstacle pour la plaque*, *Memoire de Magister*, Université BADJI MOKHTAR de Annaba 1997.

- [19] B. FRAEIJIS, DE VEUBEKE. *Displacement and equilibrium Models in the Finite Element Method. International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (52) 2001, pp. 287-342.
- [20] E.H. GEORGOULIS, P. HOUSTON, *Discontinuous Galerkin methods for the biharmonic problem, IMA J. Numer. Anal.* 2008, doi :10.1093/imanum/drn015.
- [21] R. GLOWINSKI; P. LE TALLEC; V. RUAS.- *Approximate Solution of Non-linear Problems in Incompressible Finite Elasticity- Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics- Ruhr- Universität Bochum* , W. Wunderlich, E. Stein, K.J. Bathe, eds, Springer Verlag, Berlin, 1981, pp. 666-695.
- [22] P. HANSBO, M.G. LARSON, *A discontinuous Galerkin method for the plate equation, Calcolo* 39 (1) 2002, pp.41-59.
- [23] J. HASLINGER, *On Numerical Solution of a Variational Inequality of the Fourth Order by Finite Element Method, Aplikace Matematiky* 23, 1978, pp. 334-345.
- [24] T-V. HOARAU-MANTEL and A. MATEI, *Analysis of a viscoelastic antiplane contact problem with slip-dependent friction. Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* (12)2002, pp.51-58.
- [25] J. JACQUES VIENNE, *Analyse fonctionnelle - Théorie et applications*,2009, Dunod.
- [26] M. KEMPENEERS. *Eléments finis statiquement admissibles et estimation d'erreur par analyse duale. PhD thesis, Dir P. Beckers, Université de Liège*, 2006.
- [27] A. MATEI et T. VINCENT et H. MANTEL, *Problèmes antiplans de contact avec frottement pour des matériaux viscoélastiques à mémoire longue, Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser. Volume 32, 2005, Pages 200-206. ISSN : 1223-6934*
- [28] A. MATEI, V. MOTREANU and M. SOFONEA, *A quasistatic antiplane contact problem with slip dependent friction. Advances in Nonlinear Variational Inequalities.* (4)2001, pp.1-21.

- [29] A. J. MCCONNELL, *The Hypercircle Method of Approximation for a System of Partial Differential Equations of the Second Order. Proc. R. Acad. 54 A(17), pp. 263-290.*
- [30] B. MERCIER, *Numerical Solution of the Biharmonic Problem by Mixed Finite Elements of Class, Bollettino U. M. I. (4) Vol. 10, 1974, pp. 133-149.*
- [31] J. MOREAU, *Décomposition Orthogonale d'un Espace Hilbertien Selon Deux Cônes Mutuellement Polaires, C. R. Acad. SCI. 255, 1962, pp. 238- 240.*
- [32] C. NICULESCU, A. MATEI and M. SOFONEA, *An Antiplane Contact Problem for Viscoelastic Materials with Long-Term Memory. Mathematical Modelling and Analysis. (11)2006, pp. 213-228.*
- [33] W. PRAGER and J. L. SYNGE, *Approximations In Elasticity On The Concept of Function Space, Quart Appl Math. 5, 1947, pp. 241-269.*
- [34] R. RANNACHER, *On Nonconforming and Mixed Finite Element Methods For Plate Bending Problems, the Linear Case, R. A. I. R. O. Analyse Numérique, Vol. 13, N 4, 1979, pp. 369-387.*
- [35] R. RANNACHER AND F. T. STUTTMEIER, *A Posteriori Error Control In Finite Elements Method Via Duality Techniques : Application To Perfect Plasticity, Comput. Mech., 21 1998, pp. 123-133.*
- [36] M. ROSSI, *Electroacoustique, Traité d'Electncité de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Vol.XX1, (Presses Polytechniques Romandes, 1986.*
- [37] B. RIVIERE, M.F. WHEELER, *Optimal Error Estimates for Discontinuous Galerkin Methods Applied to Linear Elasticity Problems, Technical Report 00-30, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics.*
- [38] M.A. SAUM, *Adaptive Discontinuous Galerkin Finite Element Methods for Second and Fourth Order Elliptic Partial Differential Equations, Ph.D. Thesis, The University of Tennessee, 2006.*
- [39] R. SCHOLZ, *A Mixed Method for Fourth Order Problems Using Linear Finite Elements, R. A. I. R. O. Analyse Numerique, Vol. 12, N. 1, 1978, pp. 85-90.*
- [40] M. SHILLOR, M. SOFONEA and J. TELEGA, *Models and Analysis of Quasi-static Contact. Lect. Notes Phys. 655, Springer,2004, Berlin Heidelberg.*

- [41] Z. SKVOR, *Vibrating Systems and their Equivalent Circuits*, (Elsevier Science Publishers, Amsterdam, Oxford, New-York, Tokyo, 1991).
- [42] H. SISSAOUI, *Variational Methods for Inequality Constraint Problems*, Ph.D. Thesis, University of She eld, 1983, pp. 194-269.
- [43] M. SOFONEA and M. DALAH, *Antiplane Frictional Contact of Electro-Viscoelastic Cylinders*. *Electronic Journal of Differential Equations*. (161)2007, pp. 1-14.
- [44] M. SOFONEA and M. DALAH and A. AYADI, *Analysis of an antiplane electro-elastic contact problem*. *Adv. Math. Sci. Appl.* (17) 2007, pp. 385-400.
- [45] R. VERFÜRTH, *A Review Of A Posteriori Estimation and Adaptative Mesh Refinement Techniques*, Wiley-Teubner, Stuttgart, 1996.
- [46] G. WARZEE, *Théorèmes énergétiques et variationnels Notes de cours ULB*, Presses Universitaires de Bruxelles, 1ère édition 1996.
- [47] S.K. WONG G. and T.F.W. EMBLETON, "Amngement for Precision Reciprocity Calibration of Condenser Microphones", *J. Acoust. Soc. Am.* (66) 1979, pp. 1275-1280.
- [48] XIAOBING FENG, O.A. KARAKASHIAN, *Fully discrete dynamic mesh discontinuous Galerkin methods for the Cahn–Hilliard equation of phase transition*, *Math. Comput.* (76) 2007 pp. 1093-1117.
- [49] XIAOBING FENG, O.A. KARAKASHIAN, *Two-level non-overlapping Schwarz preconditioners for a discontinuous Galerkin approximation of the bi-harmonic equation*, *J. Sci. Comput.* (22-23) 2005, pp. 289-314.
- [50] O. C. ZIENKIEWICZ and R. L. TAYLOR, *The Finite Element Method. Volume 1 : Basic Formulation and Linear Problems*, 4th edition, Mc Graw-Hill, ISBN 0-07-084174-8, London, 1989.