

République Algérienne Démocratique et populaire
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche
scientifique

UNIVERSITÉ CONSTANTINE 1
FRÈRES MENTOURI FACULTÉ
DES SCIENCES EXACTES



DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

N° d'ordre : 25/DS/2024
N° de série : 01/Math/2024

THÈSE

PRÉSENTÉE POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE DOCTORAT EN SCIENCES DE
MATHÉMATIQUES

«Un Survol Sur Les Systèmes Chaotiques Et Leurs Applications »

Par
Filali Aziza

OPTION

Mathématiques Appliquées

Devant le jury :

Président	L. Meddour	M.C.A.	Université Des Frères Mentouri Constantine 1
Encadreur	T. Hamaizia	Prof	Université Des Frères Mentouri Constantine1
Examineur	A. Merad	Prof	Université Larbi Ben M'hidi Oum el Bouagui
Examineur	A. Leulmi	M.C.A	Université Ferhat Abbas Setif
Examineur	S. Boukaf	M.C.A.	Université Abdelhafid Boussouf Mila
Examineur	R.Ouahabi	M.C.A.	Université Des Frères Mentouri Constantine 1

Soutenue le: 23/05/2024

Remerciements

Avant tout, je remercie infiniment Dieu, le miséricordieux qui m'a donné la force, le courage et la réussite et qui a mis à ma disposition des gens merveilleux qui m'ont supporté et soutenu.

*Mes remerciements les plus sincères vont à mon directeur de thèse Mr **Hamaizia Tayeb** professeur au département de mathématiques de Constantine 1 directeur de thèse, qui m'a encouragé tout au long de ce travail. J'ai éprouvé un réel Plaisir à travailler avec lui tout au long de cette thèse.*

*J'exprime également mes remerciements aux membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de thèse. Le grand Merci à Monsieur **Meddour Lotfi**, professeur au département de mathématiques de Constantine 1 de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance et également les examinateurs :*

*Madame **Boukaf Samira** professeur au département de mathématiques de l'université de Mila.*

*Madame **Leulmi Asma** professeur au département de mathématiques de l'université de Sétif.*

*Madame **Ouahabi Rabia** professeur au département de mathématiques de l'université de Constantine 1 .*

*Monsieur **Merad Ahecen** professeur au département de mathématiques de l'université de Oum El Bouagui.*

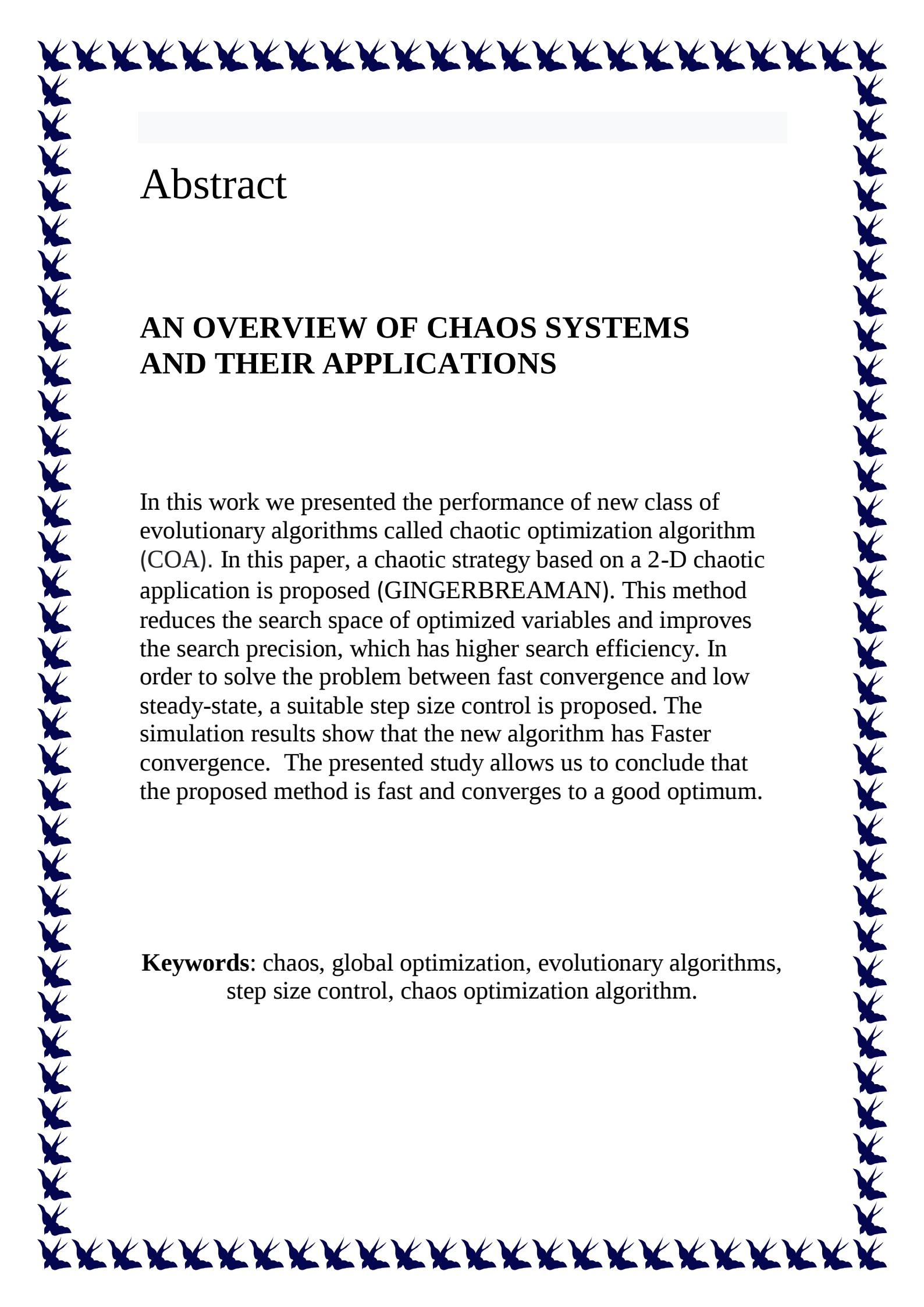
DÉDICACES

***A ma chère mère et mon cher père Qu'Allah leur
fasse miséricorde***

***A mon mari Mostefa et mon fils Mohamed oualaa
eddine et mes filles ayet errahmane et alaa
errahmane***

A mes frères et mes sœurs

A toute ma belle famille

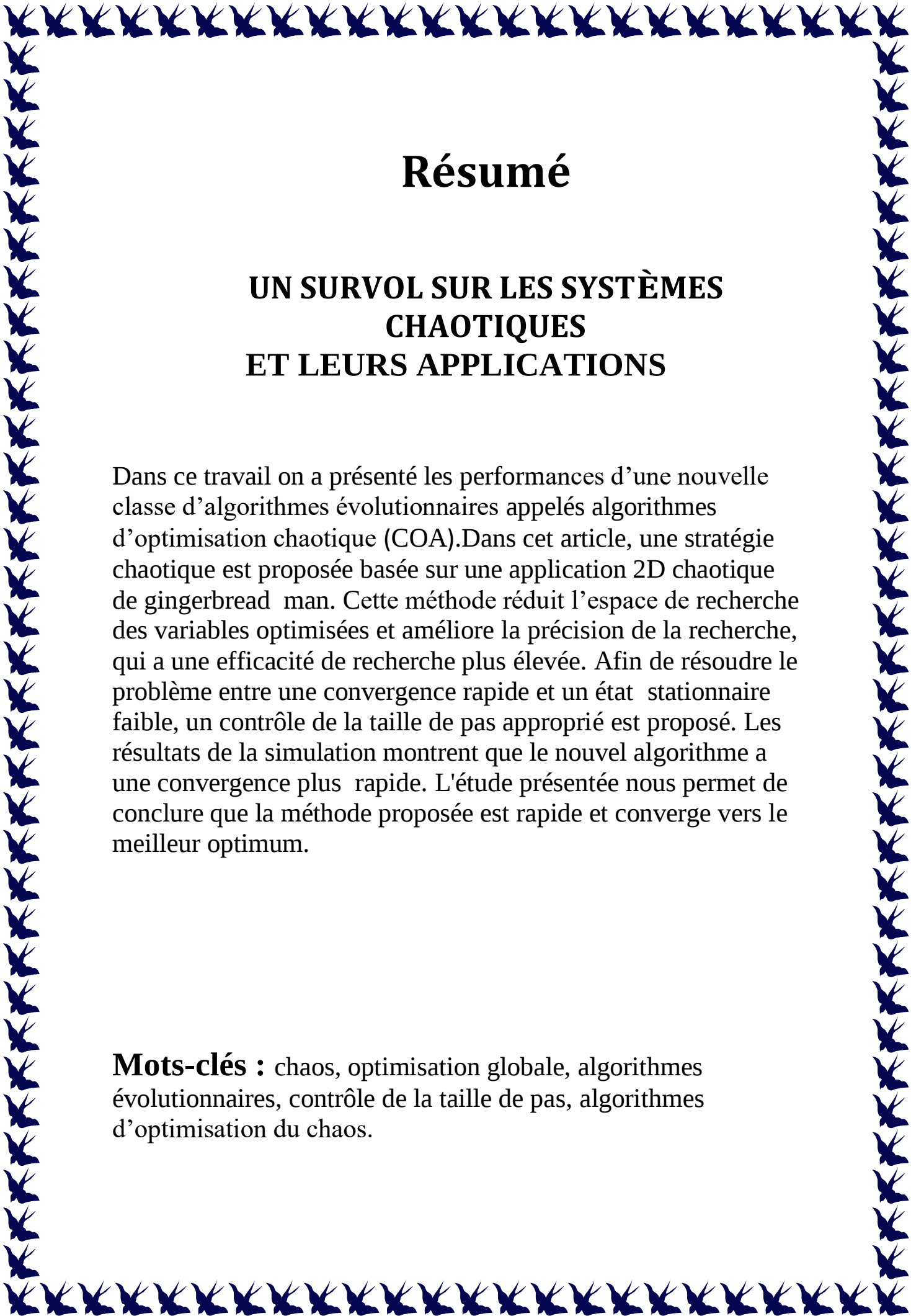
A decorative border of blue birds, possibly swallows, arranged in a rectangular frame around the page content.

Abstract

AN OVERVIEW OF CHAOS SYSTEMS AND THEIR APPLICATIONS

In this work we presented the performance of new class of evolutionary algorithms called chaotic optimization algorithm (COA). In this paper, a chaotic strategy based on a 2-D chaotic application is proposed (GINGERBREAMAN). This method reduces the search space of optimized variables and improves the search precision, which has higher search efficiency. In order to solve the problem between fast convergence and low steady-state, a suitable step size control is proposed. The simulation results show that the new algorithm has Faster convergence. The presented study allows us to conclude that the proposed method is fast and converges to a good optimum.

Keywords: chaos, global optimization, evolutionary algorithms, step size control, chaos optimization algorithm.



Résumé

UN SURVOL SUR LES SYSTÈMES CHAOTIQUES ET LEURS APPLICATIONS

Dans ce travail on a présenté les performances d'une nouvelle classe d'algorithmes évolutionnaires appelés algorithmes d'optimisation chaotique (COA). Dans cet article, une stratégie chaotique est proposée basée sur une application 2D chaotique de gingerbread man. Cette méthode réduit l'espace de recherche des variables optimisées et améliore la précision de la recherche, qui a une efficacité de recherche plus élevée. Afin de résoudre le problème entre une convergence rapide et un état stationnaire faible, un contrôle de la taille de pas approprié est proposé. Les résultats de la simulation montrent que le nouvel algorithme a une convergence plus rapide. L'étude présentée nous permet de conclure que la méthode proposée est rapide et converge vers le meilleur optimum.

Mots-clés : chaos, optimisation globale, algorithmes évolutionnaires, contrôle de la taille de pas, algorithmes d'optimisation du chaos.

ملخص

نظرة عامة علي الأنظمة الفوضوية و تطبيقاتها

في هذا العمل قدمنا أداء فئة جديدة من الخوارزميات التطورية تسمى خوارزمية التحسين الفوضوية. في هذا البحث، تم اقتراح إستراتيجية فوضوية تعتمد على تطبيق رجل خبز الزنجبيل الفوضوي ثنائي الأبعاد. تعمل هذه الطريقة على تقليل مساحة البحث للمتغيرات المحسنة ويحسن دقة البحث الذي يتمتع بكفاءة بحث أعلى. ومن أجل حل المشكلة بين التقارب السريع والحالة المستقرة الضعيفة، تم اقتراح التحكم المناسب في حجم الخطوة المناسبة و المقترحة. وتظهر نتائج المحاكاة أن الخوارزمية الجديدة لديها تقارب أسرع. وتتيح لنا الدراسة المقدمة أن نستنتج أن الطريقة المقترحة سريعة وتتقارب نحو الأفضل.

الكلمات المفتاحية: الفوضى، التحسين الشامل، الخوارزميات التطورية، التحكم في حجم الخطوة، خوارزمية تحسين الفوضى.

Table des matières

DEDICATION	iii
LIST OF TABLES	vii
LIST OF FIGURES	viii
I DYNAMIQUES NON LINÉAIRES ET THÉORIE DU CHAOS	4
1.1 Notion de système dynamique et concepts préliminaire	5
1.1.1 Classification des systèmes dynamiques	6
1.1.2 Système dynamique à temps discret	6
1.1.3 Comportement des systèmes dynamiques	8
1.1.4 Représentation graphique de l'orbite	9
1.1.5 Système autonomes et non autonomes	11
1.1.6 Point limite, ensemble limite et ensemble invariant	12
1.2 Notion de stabilité	13
1.2.1 Définitions de stabilité	14
1.2.2 Dynamique linéaire en dimension deux	14
1.2.3 Dynamique non lineaire	18
1.3 La théorie des bifurcations	21
1.3.1 Bifurcations locales de codimension 1	21
1.3.2 Bifurcation fourche	23
1.3.3 Bifurcations transcritiques	24
1.3.4 Bifurcation de Hopf	25
1.4 Théorie du chaos	28
1.4.1 Historique sur le chaos	28
1.4.2 Définition du chaos	29
1.5 Carcterisation du chaos	30
1.5.1 Sensibilité aux conditions initiales	30
1.5.2 Attracteurs étranges	32

1.5.3	Series temporelles et spectre de puissance	33
1.5.4	Diagramme de Bifurcation	35
1.6	Outils de quantification du chaos	36
1.6.1	Exposants de Lyapunov	37
1.6.2	Cas des systèmes discrets unidimensionnels	37
1.6.3	Cas des systèmes discrets multidimensionnels	38
1.6.4	Dimension fractale	40
1.7	Quelques modèles des systèmes chaotiques discret	44
1.7.1	Le modèle Hénon	44
1.7.2	Le modèle de Lozi	48
1.7.3	L'application logistique	53
1.8	Conclusion	55
II	MÉTHODES D'OPTIMISATION GLOBALE	59
2.1	Introduction	59
2.2	Notions de base en optimisation	60
2.3	Définition de l'optimisation	64
2.4	Méthodes déterministes et non déterministes (probabilistes)	66
2.4.1	Recherches aléatoires	72
2.4.2	Méthode de multi-starts	72
2.4.3	Méthodes de Clustering (regroupement)	73
2.4.4	Algorithme de recherche Tabou	74
2.4.5	Méthodes de recuit simulé	76
2.4.6	Optimisation stochastique	78
2.4.7	Méthodes évolutionnaires	79
2.4.8	Les algorithmes de recherche chaotiques :	81
2.5	Conclusion	86

III	ÉTUDE ET ANALYSE D'UNE MÉTHODE D'OPTIMISATION	87
3.1	Introduction	87
3.2	Principes d'un algorithme d'optimisation chaotique	88
3.3	Les applications (Modèle chaos)	91
3.3.1	L'application de Hénon	91
3.3.2	L'application de Lozi	92
3.3.3	L'application de Guingerbreadman	93
3.3.4	Désigne d un algorithme COA	94
3.3.5	Contrôle de la taille des pas (rôle du λ)	98
3.4	Simulation numériques	99
3.4.1	La fonction de Rosenbrock	99
3.4.2	La fonction de Godstein	100
3.4.3	La fonction de Easom	101
3.4.4	La fonction de Schaffer	102
3.4.5	Résultats numeriques	103
3.4.6	Conclusion	105
	RÉFÉRENCES	112
	INDEX	112

Liste des tableaux

1	Types de bifurcation	22
2	Carte Gingerbreadman basée sur COA pour $\lambda = 0, 1; M_g = 2200, M_l = 300$	104
3	Carte Gingerbreadman basée sur COA pour $\lambda = 0, 001, M_g = 2200, M_l = 300$	104
4	Carte Gingerbreadman basée sur COA pour $0.001 \leq \lambda_i \leq 0.1, M_g = 2200, M_l = 300$	105
5	A table, centered.	111

Table des figures

1	Illustration d'une trajectoire particulière du système de Rössler . . .	7
2	Portrait de phase	8
3	Résistance aux petites perturbations.	13
4	Stabilité d'un point d'équilibre	14
5	Un nœud stable.	16
6	Un <i>col</i>	16
7	Un foyer stable, un centre et un foyer instable.	17
8	Une étoile.	17
9	Un nœud dégénéré stable	18
10	La fonction $f(x, \mu) = \mu - x^2$ en fonction de μ	23
11	Diagrammes de bifurcations noeud-cols.	23
12	La fonction $f(x) = \mu x - x^2$ en fonction de μ	24
13	Diagramme de bifurcation fourche.	24
14	Diagramme de bifurcation transcritique.	25
15	Le comportement des trajectoires $\mu < 0$ et $\mu > 0$	27
16	Diagrammes de bifurcation montrant les solutions en fonction de μ . .	27
17	Diagramme de la bifurcation de Hopf	28
18	Evolution dans le temps pour deux conditions initiales très proches .	31
19	(a) : Attracteur de Hénon ; (b) : Attracteur de Lozi.	33
20	Le modèle de Rössler : (a) Signal périodique ($c = 2.5$), (b) Signal a périodique ($c = 5.7$).	34
21	Diagrammes de bifurcation du système de Rössler	36
22	Ensemble de Cantor.	42
23	Attracteur de Hénon pour $a = 1.4$, $b = 0.3$	46
24	Illustration de la permanence de la structure de l'attracteur de Hénon à différentes échelles.	47
25	Diagramme de bifurcation de Hénon	48

26	Les exposants de Lyapunov en fonction du temps pour l'application de Hénon	49
27	Attracteur de Lozi pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$	50
28	Diagramme de bifurcation de Lozi	52
29	Exposants de Lyapunov du Lozi	53
30	La courbe de la suite logistique et ses points fixes	54
31	La courbe de la suite logistique $0 \leq \mu \leq 1$	55
32	La courbe de la suite logistique $0 \leq \mu \leq 1$	56
33	La courbe de la suite logistique $1 \leq \mu \leq 3$	57
34	Diagramme de bifurcation pour la famille de suite logistique	57
35	Sensibilité aux conditions initiales de l'application logistique	58
36	Courbe représentant les optimums locaux et les optimums globaux . .	64
37	Minima locaux et minima globaux d'une fonction multimodale	68
38	Algorithme de recherche aléatoire où $(x^* = x_0, f^* = y_n)$	82
39	Diagramme de l'algorithme COA.	84
40	Attracteur Hénon thistogramme de distribution des séquences chaotiques générées par le modèle de Hénon	92
41	A first figure.	111
42	A second figure.	111

Introduction générale

La relation entre les systèmes naturels et leurs environnements est caractérisée par des dynamiques nonlinéaires complexes. Afin d'assurer une fidélité vis à vis du comportement réel, ces dynamiques sont souvent modélisées par des équations différentielles caractérisées par des termes non-linéaires tels que les produits de variable sous leur fonctions polynomiales. Le chaos est une sorte de caractéristique des systèmes non-linéaires qui étudie le comportement des systèmes qui suivent des lois déterministes mais qui apparaissent aléatoires et imprévisibles. La théorie du chaos est définie comme une étude des systèmes dynamiques non-linéaires complexes qui sont exprimés par des récurrences et des algorithmes mathématiques et sont dynamiques (non-constants) et non périodique. Elle inclut l'étude qualitative et quantitative d'un comportement instable non périodique et aléatoire des systèmes. La théorie du chaos depuis son évolution a trouvé des applications dans divers domaines importants tels que l'ingénierie, la médecine, la biologie, l'économie et bien d'autres. L'application de la stratégie de recherche chaotique en ingénierie a connu son apogée de popularité pendant les dernières années. Cette approche configure comme une option attirante pour l'optimisation globale. L'un des algorithmes d'optimisation modernes est l'optimisation basée sur le chaos.

Cette thèse s'intéresse à la résolution des problèmes d'optimisations nécessite en premier lieu une définition des paramètres, des variables, de l'espace de recherche ainsi que des fonction à optimiser. Une fois le problème modélisé et formulé une méthode adaptée pour la résolution du problème posé sera choisie.[1] la conception optimale, appelée aussi optimisation de formes devient un outil indispensable pour presque tout les domaines[2]. L'optimisation chaotique en tant que nouvelles méthodes d'optimisation globale a attiré beaucoup d'attention qui sont exprimés par des récurrences dans les domaines non-linéaires. L'algorithme d'optimisation chaotique COA est un outil efficace de résoudre le problème d'optimisation d'une fonction multimodale non-linéaire

avec contrainte de frontière. Du fait de la non-répétition du chaos, il peut effectuer des recherches globales à des vitesses plus élevées que les recherches stochastiques, qui dépendent des probabilités. L'application de séquences chaotiques au lieu de séquences aléatoires dans le COA est une stratégie puissante pour améliorer les performances de COA en empêchant la convergence prématurée vers les minima locaux. Dans cette thèse, un algorithme robuste d'optimisation chaotique est appliqué pour résoudre efficacement le problème d'optimisation d'une fonction multi-modale non-linéaire. Dans la plupart des algorithmes d'optimisation chaotique, les variables chaotiques ont générées par l'application logistique, mais la distribution uniforme affaiblira l'ergodicité des variables chaotique. A ce niveau, différents modèles peuvent être choisies et utilisées pour obtenir des solution optimales de problème. Pour surmonter ce problème, nous choisissons un modèle bidimensionnelle nommé Gingenbread et remplaçons le générateur de variables chaotiques dans l'un des COA existants avec lui et l'on compare pour découvrir que cet générateur est efficace(λ)? Au cours (Lors) de la recherche locale chaotique le pas λ est un parametre très important dans le comportement de convergence de la méthode d'optimisation. La suite de cette thèse est organisée comme suit :

Le premier chapitre est constitué de rappels sur les systèmes dynamiques non linéaires avec un accent particulier porté sur les systèmes à temps continue et discret. Retracer un bref historique de la théorie du chaos déterministe. Dans ce chapitre nous balaierons les différents outils mathématiques qui nous servent à caractériser le comportement Chaotique, tels que les attracteurs étranges, les exposants de lyapunov et la dimension fractale. est une illustration concrète de toutes les notions précédentes par des exemples célèbres tels que le modèle de Lorenz et les modèles de Hénon et Lozi et l'application l'ogistique qui nous servira dans la suite de la thèse.

Le deuxième chapitre est consacré à l'optimisation et les méthodes d'optimisations locaux et globales. Il aborde aussi les définitions générales des méthodes d'optimisation qui se divisent en deux volets déterministes et non déterministes. Les modèles des algorithmes d'optimisation chaotiques sont aussi présentés. Le troisième chapitre présente un algorithme d'optimisation chaotique efficace basé sur *Gingenbread map*, avec des expériences et des résultats de simulation sont présentés. On a donné un état de l'art sur les différentes techniques de COA en utilisant le chaos. Le troisième chapitre donne un état de l'art sur les différentes techniques de l'optimisation globale en utilisant le chaos. En particulier un algorithme d'optimisation chaotique efficace basé sur *Gingenbread map*, avec des expériences et des résultats de simulation sont présentés. Cette recherche globale localement moyenne est appelée COA.

Enfin, la conclusion présente le bilan du travail réalisé.

Ce chapitre a fait l'objet d'une publication :

A. Filali ,T. Hamaizia. An Adaptive Step Size for Chaotic Local Search Algorithm , Université. Frère Mentouri. Constantine-1- ,23 (3) (2023) 273–282 .

Chapitre I

DYNAMIQUES NON LINÉAIRES ET THÉORIE DU CHAOS

La théorie du chaos a commencé à se former dans la seconde moitié du XXe siècle et a été utilisée dans de nombreuses applications et sciences telles que le mathématique, physique, l'ingénierie, la biologie, l'économie et la robotique [3]. En 1963, **Edward Lorenz** a étudié le comportement d'un système dynamique non-linéaire et a souligné que dans les systèmes non-linéaires, de légères différences dans les conditions initiales génèrent à long terme complètement différents systèmes, ou en d'autres termes, des systèmes chaotiques. Dans ce chapitre, nous introduisons les principaux éléments d'une compréhension simple de la théorie des systèmes dynamique et de la théorie du chaos, par une méthode plus simple que possible. [4][5][6]

L'objectif de ce chapitre est de disposer des éléments théoriques nécessaires à l'analyse du comportement d'un système dynamique. Nous partirons de quelques définitions préliminaires permettant de cerner les caractéristiques essentielles des systèmes dynamiques chaotiques. Nous commencerons par définir la notion des systèmes dynamiques, des notions sur la stabilité et les méthodes générales d'étude de cette propriété, puis nous donnerons les différents types de points fixes selon leur stabilité, notion de bifurcation...ect

1.1 Notion de système dynamique et concepts préliminaire

Définition 1 : Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution ou cours du temps d'un ensemble des objets en interaction, il est défini par un triplet (X, T, f) constitue de l'espace d'état X , du domaine temporel T et d'une application de transition $f : X \times T \rightarrow T$ qui permet de définir à partir d'un vecteur de condition initiale, l'état du système a tout instant. Donc, on peut définir un système dynamique comme une description d'un phénomène physique qui évolue au cours du temps (système continue), ou par rapport à une autre variable (système discret).

Définition 2 : un système dynamique sur $\mathbb{R}^n$ est une application :

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

telque :

$$1-f(., x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ est continue}$$

$$2-f(t, .) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ est continue}$$

$$3-f(0, x) = x$$

$$4-f(t + s, x) = f(t, (s, x)) \forall t, s \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Exemple 1.1 Soit le système dynamique linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

où $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^+$ et A est une matrice constante, la solution du (1) est

$$x(t) = x_0 e^{At}$$

Le système 1 engendre un système dynamique du fait que l'application :

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

pour $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$ et

$$f(x, t) = x e^{At} \quad (2)$$

Vérifiée les quatre propriétés précédentes.

1.1.1 Classification des systèmes dynamiques

Définition 1.3 (Système dynamique à temps continu) Dans le cas continu voir [7] le système dynamique est présenté par un système d'équation différentielle ordinaire de la forme :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t, \lambda) \quad (3)$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^q$ où f une application telle que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$.

Exemple : (Système de Rössler) C'est un système de trois équations différentielles nonlinéaire. Ces équations définissent un système dynamique continu. Les équations de ce système sont :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x - yz \\ \frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (4)$$

Où x, y, z sont les variables d'état du système et a, b et c sont des paramètres réels ont été choisis de la manière suivante : $a = 0.2$, $b = 0.2$, $c = 5.7$, avec les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (3, 2, -2)$.

1.1.2 Système dynamique à temps discret

Un système dynamique discret est décrit par une application (fonction itérative), sous la forme :

$$x_{k+1} = f(x_k, \lambda), k \in \mathbb{N} \quad (5)$$

Où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction différentiable, $\lambda \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de paramètres, $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ est la valeur initiale, $x_k \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des états du système à l'itération t_k , pour une valeur initial x_0 on obtient :

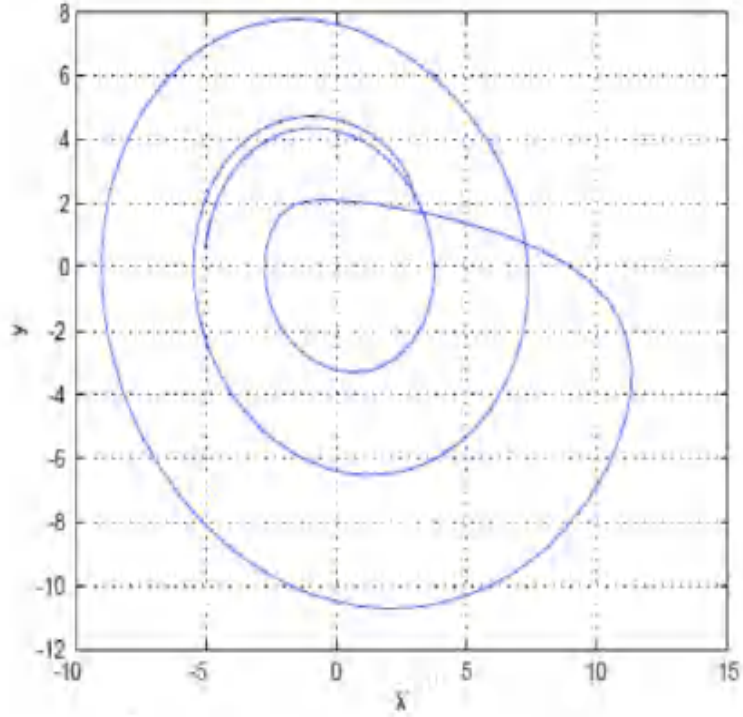


Fig. 1: Illustration d'une trajectoire particulière du système de Rössler

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = f(x_0) \\ x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0) \\ \vdots \\ x_n = f^n(x_0) \end{array} \right. \quad \text{où } f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}} \quad (6)$$

La fonction $f(x_0)$ est appelée la première itération de x_0 par la fonction $f^2(x) = f(f(x_0))$ est appelée la deuxième itération de x_0 par la fonction $f^n(x_0)$ est appelée n^{ieme} itération de x_0 par la fonction f .

Exemple (Application de Hénon) Soit la récurrence de Hénon [7] donnée comme suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = y_{k+1} + 1 - ax_k^2 \\ y_{k+1} = bx_k \end{array} \right.$$

où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a, b deux paramètres réels, présentée l'attracteur avec les paramètres $a = 1, 4$ et $b = 0, 3$.

1.1.3 Comportement des systèmes dynamiques

Définition (Portrait de phase) Le portrait de phase d'un système dynamique [8] est une représentation graphique (à l'aide des flèches) de plusieurs trajectoire représentatives

dans l'espace de phase. Figure(2) - Portrait de phase

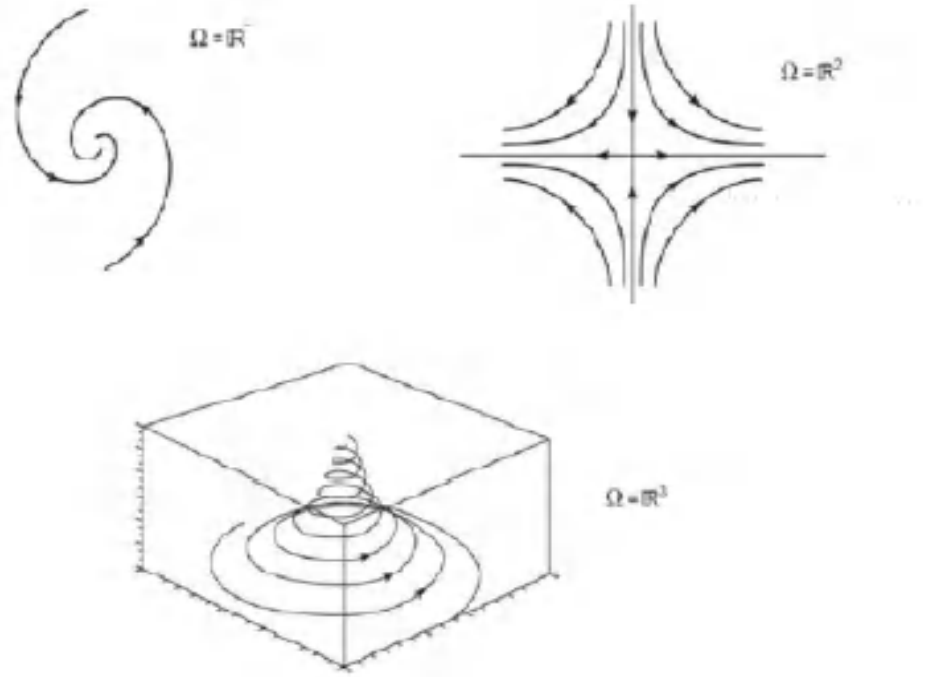


Fig. 2: Portrait de phase

,

Définition : (Trajectoires et orbites) L'orbite positive de x par le système dynamique f est définie par :

$$O_+^f = \{ f^k(x), k \in \mathbb{N} \}$$

Si f est bijective, on définit l'orbite de x par :

$$O^f = \{ f^k(x), k \in \mathbb{Z} \}$$

Ainsi que l'orbite négative :

$$O_-^f = \{ f^{-k}(x), k \in \mathbb{N} \}$$

1.1.4 Représentation graphique de l'orbite

Dans le cas discret où f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ on peut représenter sur le plan (x, y) l'évolution d'une orbite $O(x_0)$ qui commence dans le point $O(x_0, 0)$ en suivant ces étapes :

a) tracer la courbe qui représentant la flèche fonction f et la droite

$$y = x$$

b) placer le point de coordonnées $(x_0, 0)$

c) chercher le point d'ordonnées $f(x_0)$, on l'obtient en traçant une droite verticale passant par $(x_0, 0)$ et en cherchant son intersection avec la courbe de la fonction. Ce qui correspond à x_1 (puisque $x_1 = f(x_0)$)

d) Projeter horizontalement le point de coordonnées (x_0, x_1) , une projection vertical permet ensuite de reporter le point $(x_1, 0)$ sur l'axe des ordonnées. réaliser ensuite pour x_1 les mêmes opérations que pour x_0 afin d'obtenir x_2 .

Définition : (Flot d'une équation différentielle)

cas d'un système équation différentielle linéaires : Soit le système linéaire :

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (7)$$

où A une matrice constante.

La solution du système (7) avec la valeur initiale $x(0) = x_0$ est :

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

L'ensemble des applications et

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

est appelé le flot du système .

1.1.4.1 – Cas d'un système d'équation différentielle non linéaires

Soit le système non linéaire suivant :

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n$$

On note par $I(x)$ l'intervalle maximum d'existence de la solution $\Phi(x, t)$ du problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Définition : Soit E sous ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^n$ et $f \in C^1(E)$, et soit pour $x_0 \in E$ la solution $\Phi(t, x_0)$ du système définie pour $I \subset \mathbb{R}$. Alors pour $t \in I$, l'ensemble des applications Φ_t définit par $\Phi_t = \Phi(t; x_0)$, est appelé le flot du système différentiel (1.10). $f(x_0)$ possède les propriétés suivantes :

Definition 1 1) $\Phi(x_0)$ est de classe C^1

2) $\Phi(x_0) = x_0$

3) $\Phi_{t+s}(x_0) = \Phi_t(\Phi_s(x_0))$

Exemple : On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où $x \in \mathbb{R}^2$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La solution de ce système est :

$$\Phi(t, x_0) = e^{At} x_0$$

où

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Donc le flot associé à ce système est définie par :

$$\begin{aligned} \Phi_t &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x_0 &\rightarrow \Phi_t(x_0) = e^{At} x_0 = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \times x_0 \end{aligned}$$

1.1.5 Système autonomes et non autonomes

On dit que le système différentiel est autonome, si sa loi d'évolution ne dépend pas du temps (la loi est alors dite stationnaire) :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) \quad . \quad (8)$$

On dit que le système différentiel est non autonome, sa loi d'évolution dépend alors du temps.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t) \quad . \quad (9)$$

Exemple : Cette équation est non autonome.

$$\dot{x} = \frac{t}{1+t}$$

Remarque : On peut aussi utiliser le procédé d'extension d'état pour transformer un système non autonome en système autonome. En effet, la non autonomie se traduit par un équation de la forme :

$$\dot{x} = f(x, t, \lambda)$$

Exemple 2 Il suffit dès lors d'ajouter l'état $x^{(n+1)} = t$ la forme ce qui réhabilite la forme : $\dot{x} = f(x, \lambda)$ Avec cette fois $x^{(n+1)} \in \mathbb{R}^{n+1}$ est l'équation supplémentaire.

$$\dot{x}^{(n+1)} = 1$$

Exemple 3 Soit le système non autonome suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 3t \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

On pose $x_3 = t$, alors $\dot{x}_3 = 1$, donc le système autonome est :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 3t \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_3 = 1 \end{cases}$$

1.1.6 Point limite, ensemble limite et ensemble invariant

Définition : Le **point limite** ω d'une trajectoire $x(t) = \Phi(t, x_0)$ est un point P satisfaisant à :

$$P = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k)$$

pour une certaine suite $t_k \rightarrow \infty$. De même, un point P' est le **point limite** α d'une trajectoire $x(t) = \Phi(t, x_0)$ si P' satisfaisant à :

$$P' = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k)$$

pour une certaine suite $t_k \rightarrow -\infty$.

L'ensemble de tous les points limites ω (respectivement α) est désigné par $\omega(x)$ (respectivement $\alpha(x)$). L'ensemble $\omega(x) \cup \alpha(x)$ est appelé l'**ensemble limite** de $x(t)$.

De plus, l'ensemble limite $\omega(t)$ (respectivement $\alpha(x)$) est dit **invariant** si et seulement si toute trajectoire commençant en un point $y \in \omega(x)$ (respectivement $y' \in \alpha(x)$) reste confinée dans $\omega(x)$ (respectivement dans $\alpha(x)$). Les ensembles invariants, sont appelés aussi **variétés invariantes**.

1.2 Notion de stabilité

On désigne par stable tout système qui peut résister aux petites perturbations et qui revient vers son régime stationnaire.

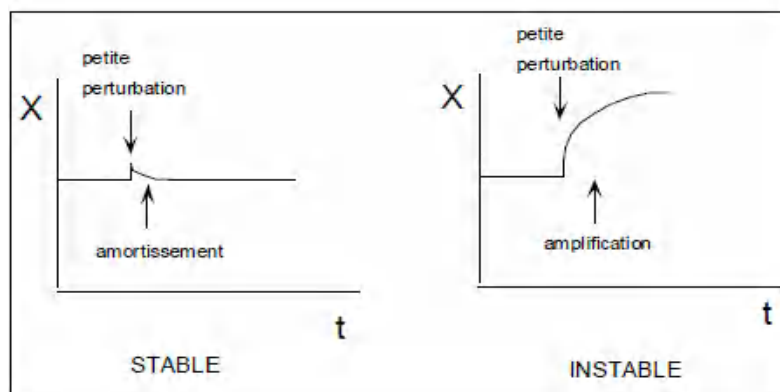


Fig. 3: Résistance aux petites perturbations.

L'étude de la stabilité s'effectue localement autour du point d'équilibre, alors la première étape consiste à trouver ce point. Le point d'équilibre $\bar{x}$ d'un système autonome .

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C^r(u), \quad u \subseteq \mathbb{R}^n$$

est la solution de l'équation algébrique $f(x) = 0$.

C'est une trajectoire particulière et par opposition à toutes les autres trajectoires, c'est la seule à se réduire trivialement à un point, autrement dit :

$$x(t_0) = \bar{x} \Leftrightarrow x(t) = \bar{x}, \quad \text{pour } t \geq t_0$$

Par le changement de variable $\xi = x - \bar{x}$, on peut ramener le point $\bar{x}$ à l'origine.

1.2.1 Définitions de stabilité

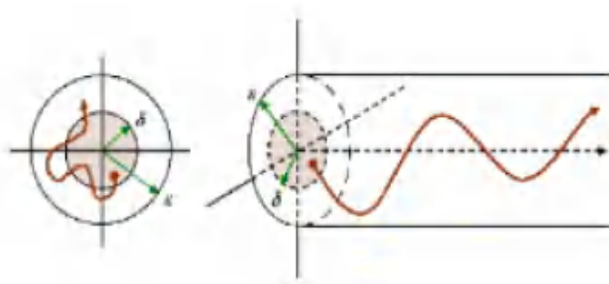


Fig. 4: Stabilité d'un point d'équilibre

Définition 1 : Le point d'équilibre $\bar{x}$ est dit **stable au sens de Lyapunov** si pour tout ϵ positif, il existe α positif tel que : $\|x(0) - \bar{x}\| < \alpha$ implique $\|x(t) - \bar{x}\| < \epsilon$, pour tout t positif.

Définition 2 : $\bar{x}$ est dit **asymptotiquement stable** s'il est stable au sens de Lyapunov et si de plus, $\|x(t) - \bar{x}\| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ ($\|\cdot\|$ désigne une norme sur l'espace des phases).

Remarque : $\bar{x}$ est dit instable, s'il n'est pas stable.

1.2.2 Dynamique linéaire en dimension deux

On considère dans $\mathbb{R}^2$ le système linéaire autonome suivant :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ est une matrice 2×2 non nulle à coefficients réels.

La solution générale se écrit sous la forme :

$$X(t) = e^{At} X_0,$$

On étudie le comportement du système au voisinage de 0. À cet effet, on notera λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres de A . Plusieurs cas sont à considérer :

1. Les valeurs propres sont réelles et distinctes

Les composantes des vecteurs colonnes de la matrice de passage de la base canonique vers la base propre dénotée P , sont celles des vecteurs propres associés aux valeurs propres réelles et distinctes λ_1 et λ_2 .

La matrice représentant A dans la base des vecteurs propres s'obtient à partir de son expression dans la base de départ par la formule :

$$\tilde{A} = P^{-1}AP$$

Où P^{-1} est l'inverse de P . Si on effectue alors le changement de coordonnées $\xi = P^{-1}X$, devient :

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \tilde{A}\xi \\ \xi(0) = \xi_0 \end{cases}$$

Et les solutions s'écrivent donc sous la forme :

$$\begin{cases} \xi_1(t) = e^{\lambda_1 t} \xi_1(0) \\ \xi_2(t) = e^{\lambda_2 t} \xi_2(0) \end{cases}$$

Lorsque les valeurs propres sont de même signe, on a affaire à un point d'équilibre de type *nœud stable* ou *instable* suivant que ces valeurs propres sont négatives ou positives.

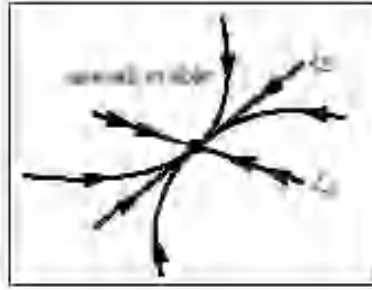


Fig. 5: Un nœud stable.

Représente un *nœud stable* où les trajectoires ont une allure parabolique. Pour voir *un nœud instable*, il suffit de changer le sens des flèches. Lorsque les valeurs propres sont de signe opposé, l'origine est *un point selle* (ou *col*). La figure (6) suivante représente un point selle où les trajectoires ont une allure hyperbolique, elle sont rentrantes dans la direction du vecteur propre associé à la valeur propre négative et sortantes dans l'autre direction du vecteur propre associé à la valeur propre positive.



Fig. 6: Un *col*.

2. Les valeurs propres sont complexes et distinctes

Lorsque les deux valeurs propres sont complexes : $\lambda_1 = \sigma + i \omega$ et $\lambda_2 = \sigma - i \omega$, leurs deux vecteurs propres associés sont également complexes conjugués et distinctes. Si on effectue le changement de coordonnées : $\xi = P^{-1}X$, où P^{-1} est l'inverse de la matrice de passage P , les solutions s'écrivent :

$$\begin{cases} \xi_1(t) = e^{\sigma t} (\cos \omega t + i \sin \omega t) \xi_0 \\ \xi_2(t) = e^{\sigma t} (-\sin \omega t + \cos \omega t) \xi_0 \end{cases}$$

Les trajectoires correspondantes sont associées à *un point spiral* appelé *foyer stable* ou *instable* selon le signe de σ . Dans le cas marginal où $\sigma = 0$, on parle de *point elliptique* ou de *centre* (voir la figure suivante).

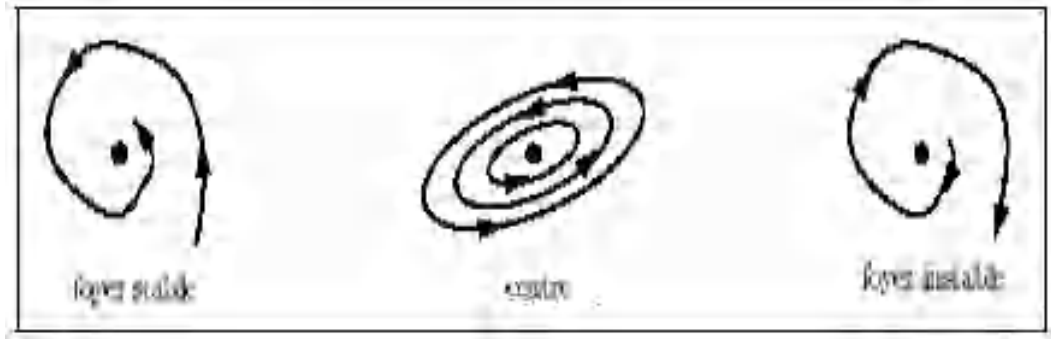


Fig. 7: Un foyer stable, un centre et un foyer instable.

3. Les valeurs propres sont égales et A est diagonalisable

Deux valeurs propres sont égales ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$). Si $a_{12} = 0$ (respectivement $a_{21} = 0$) et de plus $a_{21} = 0$ (respectivement $a_{12} = 0$), alors dans ce cas A est proportionnel à l'opérateur identité I . Le point d'équilibre correspondant stable ou instable (selon le signe de la valeur propre) est appelé *une étoile* (voir la figure suivante) :

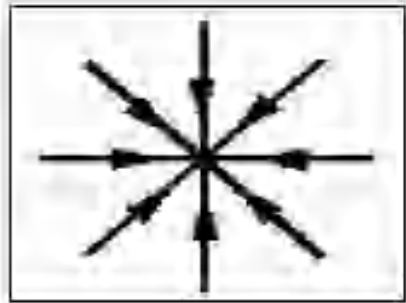


Fig. 8: Une étoile.

4. Les valeurs propres sont égales et A n'est pas diagonalisable

Lorsque les deux valeurs propres sont égales ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$), alors : A possède un seul vecteur propre . On représente A par une matrice sous forme normale de Jordan :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Dans la base propre, on effectue le changement de coordonnées $\xi = P^{-1}X$, où P^{-1} est l'inverse de la matrice de passage P , les solutions s'écrivent

$$\begin{cases} \xi_1(t) = e^{\lambda t} \xi_1(0) \\ \xi_2(t) = e^{\lambda t} \xi_2(0) + t e^{\lambda t} \xi_1(0) \end{cases}$$

On dit que l'origine est *un nœud dégénéré stable* ou *instable* suivant que λ est négative ou positive. La figure suivante représente *un nœud dégénéré stable* :

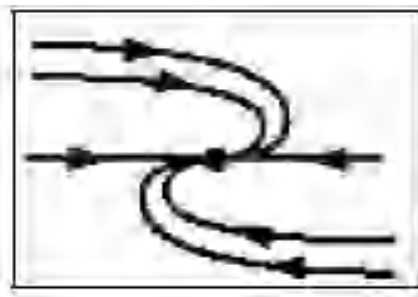


Fig. 9: Un nœud dégénéré stable

Remarque

Les points d'équilibre du type *nœud* ou *foyer* sont généralement appelés *puits* s'ils sont stables et *sources* s'ils sont instables.

1.2.3 Dynamique non linéaire

La première étape dans l'étude de chaque système dynamique non linéaire consiste à le linéariser.

On considère le système différentiel non linéaire suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) , \quad x \in \mathbb{R}^n, f \in C^r(U), U \subseteq \mathbb{R}^n$$

avec : $x(0) = x_0$

Soit $\bar{x}$ le point d'équilibre, au voisinage duquel on veut tester la stabilité. Au voisinage de $\bar{x}$, la solution générale x s'écrit : $x = \bar{x} + \zeta$, où ζ est interprétée comme une petite perturbation à $\bar{x}$.

Le développement de Taylor du premier ordre de $f(x)$ montre que le comportement du système non linéaire ressemble à celui du linéarisé :

$$\frac{d\zeta}{dt} = f(\bar{x}) + J\zeta$$

Où J se présente comme matrice Jacobienne de $f(x)$ par rapport à x .

Introduisant la définition du point d'équilibre, on obtient :

$$\frac{d\zeta}{dt} = J\zeta$$

Nous sommes donc ramenés à un système dynamique linéaire.

D'après le théorème de *Hartmann-Grobman* (voir annexe A), si le spectre de l'opérateur linéarisé ne contient pas de valeurs propres nulles ou de partie réelle nulle, la linéarisation permet de comprendre l'évolution d'une perturbation infinitésimal.

Si une valeur propre est nulle ou de partie réelle nulle, la linéarisation ne donne pas d'information sur la dynamique du problème non linéaire, même si on peut conclure pour le système linéarisé .

On suppose que le point d'équilibre ait été ramené à l'origine par un changement de coordonnées et on suppose également que J possède à la fois : s vecteurs propres $\{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ correspondant aux valeurs propres dont la partie réelle est strictement négative, p vecteurs propres $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ correspondant aux valeurs propres dont la partie réelle est strictement positive et k vecteurs propres $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ correspondant aux valeurs propres dont la partie réelle est nulle.

Le théorème d'*Hadamard-Perron*, permet d'écrire $\mathbb{R}^n$ en somme directe de sous espaces supplémentaire invariant à J :

$$\mathbb{R}^n = E_- \oplus E_+ \oplus E_0$$

où :

E_- est le sous ensemble engendré par les vecteurs propres $\{u_1, u_2, \dots, u_s\}$.

E_+ est le sous ensemble engendré par les vecteurs propres $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$

E_0 est le sous ensemble engendré par les vecteurs propres $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$

Le théorème suivant dit "*théorème de la variété centrale*" précise le comportement de la solution de notre système dynamique au voisinage de $\bar{x} = 0$.

Théorème

Il existe des variétés de classe C^k (k suffisamment grand), stable W^- , instable W^+ et centrale W^0 tangentes respectivement à E_- , E_+ et E_0 en $\bar{x}$. Ces variétés sont invariantes par rapport au flot de $f(x)$. Le théorème de la variété centrale implique que l'on peut choisir les coordonnées $(z_0, z_-, z_+) \in W^0 \times W^- \times W^+$, l'équation devient :

$$\begin{cases} \frac{dz_0}{dt} = A_0 z_0 + f_0(z_0, z_-, z_+) \\ \frac{dz_-}{dt} = A_- z_- + f_-(z_0, z_-, z_+) \\ \frac{dz_+}{dt} = A_+ z_+ + f_+(z_0, z_-, z_+) \end{cases}$$

où :

A_0 est la matrice $k \times k$ dont les valeurs propres ont leur partie réelle nulle.

A_- est la matrice $s \times s$ dont les valeurs propres ont leur partie réelle négative.

A_+ est la matrice $p \times p$ dont les valeurs propres ont leur partie réelle positive.

f_0, f_- et f_+ sont des termes non linéaires.

Pour trouver la variété centrale du système , on pose :

$$z_- = h_-(z_0), \quad z_+ = h_+(z_0)$$

Portant $h_-(z_0)$ et $h_+(z_0)$ dans l'expression de $\frac{dz_0}{dt}$ dans , on obtient :

$$\frac{dz_0}{dt} = A_0 z_0 + f_0(z_0, h_-(z_0), h_+(z_0))$$

Le théorème suivant permet de lier la dynamique de à celle de :

Théorème

Si l'origine de est localement asymptotiquement stable (respectivement instable), alors l'origine de est aussi localement asymptotiquement stable (respectivement instable).

1.3 La théorie des bifurcations

Un autre ensemble de concepts utile à l'analyse des systèmes dynamiques est la théorie des bifurcation. Une bifurcation correspond à un changement qualitatif du comportement du système dynamique quand le paramètre de système traverse une valeur critique. Le changement de la dynamique signifie le changement du nombre des points fixes ou de leur caractère (stabilité, attractivité, etc). La valeur pour laquelle la bifurcation se produit est nommée le point de bifurcation. De nombreux types de bifurcation sont inventoriés dans [9], [10].

1.3.1 Bifurcations locales de codimension 1

Soit un flot autonome dans $\mathbb{R}^n$, noté :

$$\dot{x} = f(x, \mu), x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^k \quad (10)$$

Ce flot est sous la dépendance de tout un ensemble de paramètres, repéré symboliquement par la lettre μ , ($\mu \in \mathbb{R}^k$, s'il ya k paramètres). Le nombre de paramètres qui sont nécessaires de varier pour retrouver une situation structurellement stable 1 partant d'une situation structurellement instable est appelée la codimension du problème. Nous nous intéressons ici aux bifurcations locales de codimension un, cela signifie que l'analyse est focalisée sur une région volontairement limitée autour d'une

Tab. 1: Types de bifurcation

Forme normale (surcritiques)	Forme inverse (sous-critiques)	Nom de la bifurcation
$\dot{x} = \mu - x^2$	$\dot{x} = \mu + x^2$	Noeud-col
$\dot{x} = \mu x - x^2$	$\dot{x} = \mu x + x^2$	Transcritiques
$\dot{x} = \mu x - x^3$	$\dot{x} = \mu x + x^3$	Fourches
$\dot{z} = (\mu + i\gamma)z - z ^2.z$	$\dot{z} = (\mu + i\gamma)z + z ^2.z$	Hopf

solution donnée, et ne prend pas en compte ce qui peut survenir à distance finie de celle-ci. L'étude locale des bifurcations de codimension 1 à partir d'un point fixe peut être ramenée à celle de quelques archétypes relativement simples, il existe quatre types (noeud-col, transcritique, fourche et Hopf), chacune de ces bifurcations est caractérisée par une forme normale, qui est l'équation générale typique de ce type de bifurcation, nous évoquerons les quatre formes que l'on rencontre le plus fréquemment et qui sont rassemblées dans le tableau ci-dessous

Le système (10) est dit structurellement stable si et seulement s'il existe un voisinage V de μ tel que pour tout $\hat{\mu} \in V$ le système (10) est topologiquement équivalent au système $\dot{x} = f(x, \hat{\mu})$

1.3.1.1 Bifurcation noeud-col

L'équation qui nous intéresse est la suivante

$$\dot{x} = \mu - x^2 \quad (11)$$

La bifurcation **noeud-col** est le cas le plus simple de bifurcation. Elle peut survenir dans un système qui n'a pas de points fixes. Au points de bifurcation deux points fixes apparaissent simultanément, l'un stable l'autre instable.

- Il n'existe aucune solution pour $\mu < 0$
- L'équation (11) a un équilibre $x^* = 0$ pour $\mu = 0$
- Pour $\mu > 0$ on a deux équilibres $x_{1,2}^* = \pm\sqrt{\mu}$ on voit que $x_1^* = \sqrt{\mu}$ est stable, tandis que $x_2^* = -\sqrt{\mu}$ est instable.

Ceci conduit au diagramme de bifurcation très simple de la figure suivante :

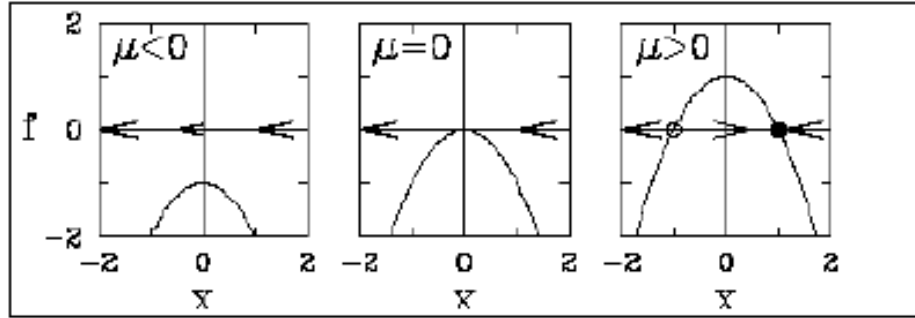


Fig. 10: La fonction $f(x, \mu) = \mu - x^2$ en fonction de μ .

Donc il y a transition à $\mu = 0$ entre existence d'aucune solution d'équilibre et de deux solutions d'équilibre (l'une est stable, l'autre est instable selon le signe de f')

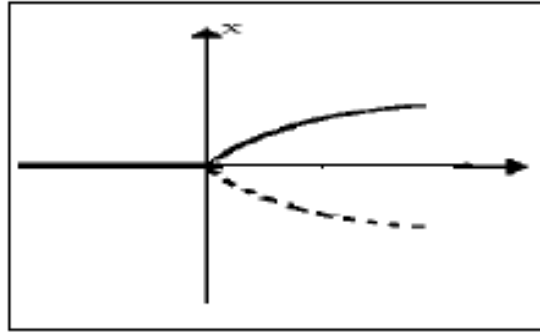


Fig. 11: Diagrammes de bifurcations noeud-cols.

1.3.2 Bifurcation fourche

L'équation qui nous intéresse est la suivante :

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \quad (12)$$

Les solutions stationnaires sont en ce cas $x^* = 0$ et $x^* = \pm\sqrt{\mu}$, ces deux dernières n'étant définies que pour $\mu > 0$: Il faut remarquer que cette forme normale est invariante dans la transformation $x \rightarrow (-x)$.

Le point fixe $x^* = 0$ est stable pour $\mu < 0$ et devient instable à $\mu = 0$, quand les branches de nouveaux points fixes $x^* = \pm\sqrt{\mu}$ sont créées. Ces nouveaux points fixes sont toujours stables quand ils existent. Le diagramme de bifurcation est représenté sur la figure .

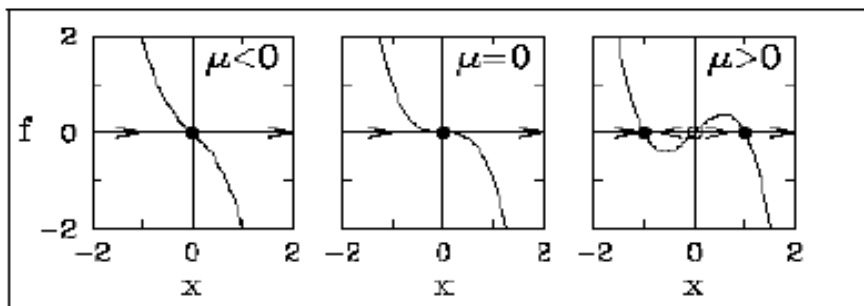


Fig. 12: La fonction $f(x) = \mu x - x^2$ en fonction de μ .

Augmentant encore le paramètre μ , c'est à dire qu'il devient positif, une paire de solutions est créée. Le diagramme de bifurcation est donné dans la figure suivante :

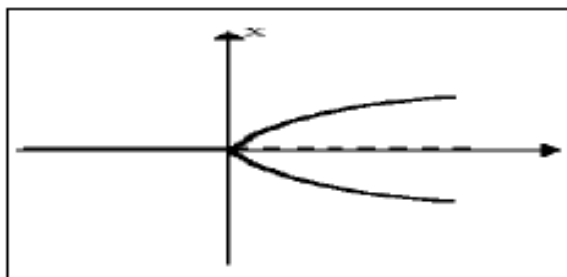


Fig. 13: Diagramme de bifurcation fourche.

1.3.3 Bifurcations transcritiques

L'équation qui nous intéresse est la suivante :

$$\dot{x} = \mu x - x^2 \quad (13)$$

Deux solutions stationnaires $x^* = 0$ et $x^* = \mu$ coexistent. Il est facile de voir que

la solution $x^* = 0$ est stable si $\mu < 0$ et instable si $\mu > 0$, tandis que c'est le contraire pour

la solution $x^* = \mu$, Il y a donc échange de stabilité entre ces deux solutions au point de bifurcation.

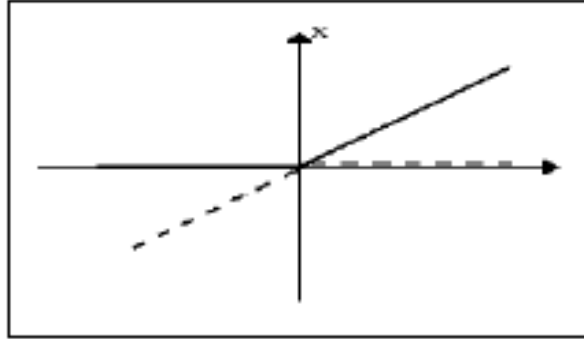


Fig. 14: Diagramme de bifurcation transcritique.

1.3.4 Bifurcation de Hopf

La bifurcation de Hopf se produit lorsque le paramètre de bifurcation prend une valeur critique r_0 , pour la quelle la matrice jacobienne du système a une paire de valeurs propres complexes conjuguées qui traversent l'axe imaginaire. Ce qui veut dire qu'au point de bifurcation de Hopf, la partie réelle des valeurs propres s'annule, et le type de stabilité de l'équilibre existant change. De plus, à ce moment, un cycle limite se crée avec un fréquence angulaire correspondant à la partie imaginaire des valeurs propres. Le déterminant de la matrice jacobienne garde le même signe après la bifurcation Tandis que toutes les bifurcations que nous avons décrites sont stationnaires, la bifurcation de Hopf donne naissance à des solutions oscillantes, l'espace des phases a maintenant deux composantes et la forme normale s'écrit dans le plan complexe

$$\dot{z} = (\mu + i\gamma)z - |z|^2 \cdot z \quad (14)$$

On note que cette forme normale est l'équivalent complexe de la bifurcations

fourches. Pour faire apparaître ses solutions il est commode de passer en variable réelles, en étulisant un repère soit cartisien, soit polaire. Posant par exemple $z = x + iy$; la forme normale s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = [\mu - (x^2 + y^2)]x - \gamma y \\ \dot{y} = \gamma x + [\mu - (x^2 + y^2)]y \end{cases} \quad (15)$$

Outre la solution stationnaire $z = 0$ (soit $x = y = 0$) il existe une autre solution telle que $|z|^2$ soit indépendant du temps, soit :

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \mu$$

On note que cette forme normale est l'équivalent complexe de la bifurcations fourches. Pour faire apparaître ses solutions il est commode de passer en variable réelles, en étulisant un repère soit cartisien, soit polaire. Posant par exemple $z = x + iy$; la forme normale s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = [\mu - (x^2 + y^2)]x - \gamma y \\ \dot{y} = \gamma x + [\mu - (x^2 + y^2)]y \end{cases} \quad (16)$$

outre la solution stationnaire $z = 0$ (soit $x = y = 0$) il existe une autre solution telle que $|z|^2$ soit indépendant du temps, soit :

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \mu$$

Cette condition définit l'équation d'un cercle dans le plan (x, y) , de rayon égale à $\sqrt{\mu}$.

$\mu < 0$, le seul point d'équilibre est l'origine qui est stable. La création du cycle limite stable en $\mu = 0$ a rendu instable le point d'équilibre stationnaire.

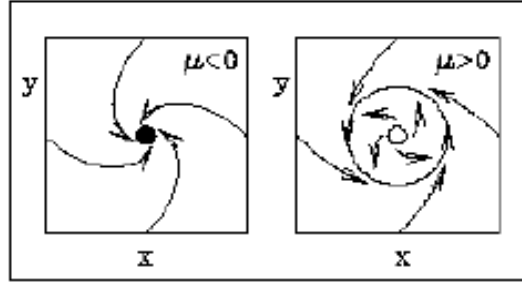


Fig. 15: Le comportement des trajectoires $\mu < 0$ et $\mu > 0$

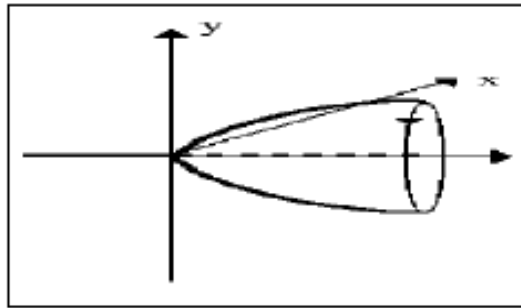


Fig. 16: Diagrammes de bifurcation montrant les solutions en fonction de μ .

Remarque . Les formes normales envisagées au paragraphe précédent correspondant toutes à des situations surcritiques, pour trouver les formes génériques de la bifurcation sous-critique, il suffit de changer le signe du terme non linéaire dans les formes normales décrite auparavant. L'étude de la bifurcation sous-critique est similaire que la bifurcation surcritique. Cette section sera notre premier pas vers l'étude des comportements complexes des systèmes, vers la théorie du chaos.

La théorie de bifurcation étudie le changement de comportement d'une application (ou un système dynamique) sous la variation d'un paramètre ou plus, donc la bifurcation signifie un changement dans le comportement qualitatif d'une application, suite à une variation d'un paramètre d'application. Ce changement se produit à des points particuliers appelés points de bifurcation. par exemple déstabilisation d'un point fixe stable, apparition ou disparition d'un attracteur ou d'un cycle limite.

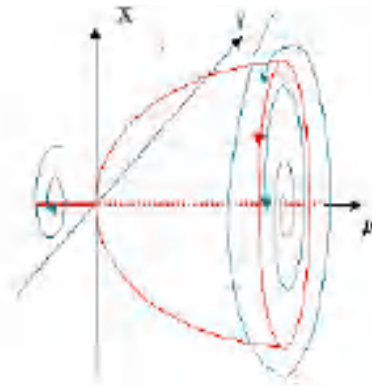


Fig. 17: Diagramme de la bifurcation de Hopf

1.4 *Théorie du chaos*

1.4.1 Historique sur le chaos

Depuis longtemps, le chaos a été synonyme de désordre et de confusion. La science était caractérisée par le déterminisme, la prévisibilité et la réversibilité. La vision déterministe,

qui était celle notamment de Newton (1642-1727) ou de Laplace (1749-1827), reposait sur le fait que l'univers serait régi par des lois immuables et qu'il serait possible de connaître l'avenir et le passé à partir du simple présent. Poincaré (1854-1912) fut l'un des premiers à entrevoir la théorie du chaos [11][12]. Il découvrit la notion de sensibilité aux conditions initiales à travers le problème de l'interaction de trois corps célestes. En effet, l'étude de l'interaction de deux corps peut facilement être menée par les lois de Newton, mais la considération d'un troisième corps implique des comportements complexes s'apparentant au hasard. La sensibilité aux conditions initiales est l'une des caractéristiques du chaos. Elle correspond au fait que de petites causes entraînent de grands effets. Plus tard, en 1960, le phénomène a été mis en évidence par un météorologue, Lorenz. Il implémenta un programme informatique simplifié, impliquant trois équations différentielles, pour modéliser quelque élément météorologique. Le terme "chaos" définit un état particulier d'un système dont le

comportement ne se répète jamais, et il est très sensible aux conditions initiales. Des chercheurs d'horizons divers ont alors commencé à s'intéresser à des problèmes non linéaires jusqu'alors sans solution parce qu'imprédictibles et regroupés sous la dénomination de chaos. Le système chaotique est un système déterministe, mais avec des résultats imprévisibles[13][14][15].

1.4.2 Définition du chaos

On trouve dans la littérature plusieurs définition mathématique du chaos, mais jusqu'à présent, il n'existe aucune définition mathématique universelle du chaos. Avant de donner la définition du chaos, due à Devaney, quelques définitions de base sont nécessaires.

Définition 1 : Soient X un espace métrique et $g : X \rightarrow X$. On dit que l'application g est topologiquement transitive si pour toute paire d'ensembles ouverts $U, V \in X$ il existe un élément $x_0 \in U$ et un nombre naturel $n \in \mathbb{N}$ tels que $g^n(x_0) \in V$. Cette définition n'est pas toujours facile à vérifier en pratique. Voici un critère.

Théorème 1 : Soit $g : X \rightarrow X$ une fonction. Supposons qu'il existe un point $x_0 \in X$ tel que son orbite

$$\gamma(x_0) = \{g^n(x_0), n \in \mathbb{N}\}$$

est dense dans X . Autrement dit, quel que soit l'ensemble ouvert $U \in X$ il contient au moins un point de l'orbite $\gamma(x_0)$. Alors $g(x)$ est topologiquement transitive [16].

Définition 2 : Soit (X, d) un espace métrique et $g : X \rightarrow X$ une application continue. On dit que le système dynamique topologique (X, g) possède la propriété de sensibilité aux conditions initiales lorsqu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in X, \exists n \in \mathbb{N} : d(x, y) < \varepsilon \text{ et } d(g^n(x), g^n(y)) > c$$

Cette propriété caractérise la part de l'imprévisible dans le comportement d'un système dynamique. En effet, même si les conditions initiales de deux orbites sont

très proches elles s'éloignent l'une de l'autre au bout de quelque temps.

Définition 3 : (Ensemble dense) Supposons que X est un ensemble et Y un sous ensemble de X . Y est dense dans X si la fermeture de Y est égale à X c'est-à-dire $Y = X$. Ce qui revient à dire que pour tout $x \in X$ on peut trouver une suite $\{y_n\} \in Y$ qui convergent vers x . Nous sommes prêts maintenant à donner les définitions de chaos au sens de Devaney(1989)

Définition 4 : Soit g une application. Supposons que le système dynamique correspondant possède un attracteur A [17]. On dit que ce système est chaotique sur son attracteur si

- $g : A \rightarrow A$ est topologiquement transitive.
- L'ensemble de points périodiques de g est dense dans A .
- g a une dépendance sensible des conditions initiales.

Le théorème suivant est une conséquence.

Théorème 2 : Soit $g : A \rightarrow A$ une application. Supposons que

- $g : A \rightarrow A$ est topologiquement transitive.
- L'ensemble de points périodiques de g est dense dans A . Alors si A contient un

nombre infini de points, le système dynamique défini par g est **chaotique** sur A [18].

1.5 Carcterisation du chaos

On s'intéresse dans cette section à l'étude de la détermination effective des phénomènes de dépendance sensible aux conditions initiales et leur structure fractale afin de pouvoir caractériser le chaos présent dans un régime dynamique complexe observé expérimentalement [19][20]

1.5.1 Sensibilité aux conditions initiales

La sensibilité des trajectoires chaotiques aux conditions initiales est une caractéristique permettant de reconnaître un comportement chaotique. Quelle que soit

la proximité de deux états initiaux, les trajectoires qui en sont issues divergent rapidement l'une de l'autre. Elles restent cependant liées au même attracteur donc, confinées dans un espace borné. Il est en particulier clair que, la moindre erreur ou simple imprécision sur la condition initiale, interdit de décider à tout temps quelle sera la trajectoire effectivement suivie, et en conséquence, de faire une prédiction autre que statistique sur le devenir à long terme du système. Ainsi, bien qu'on les traite de systèmes déterministes, il est impossible de prévoir à long terme leurs comportements. Illustrons ce phénomène de SCI par une simulation numérique. On affecte au système chaotique de Lorenz ci-dessous, deux conditions initiales très proches. Dans un premier temps, les deux systèmes évoluent de la même manière mais très vite, leur comportement devient différent. Ceci est illustré dans la figure Fig (??).

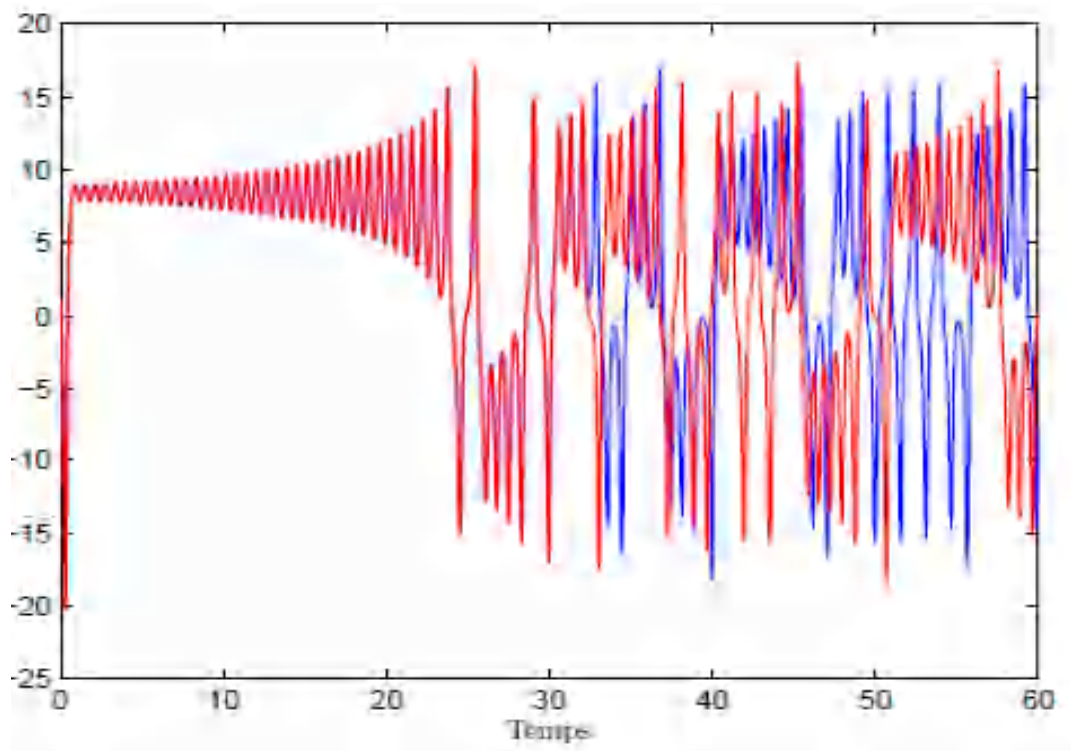


Fig. 18: Evolution dans le temps pour deux conditions initiales très proches

1.5.2 Attracteurs étranges

La représentation de l'évolution d'un système chaotique dans l'espace des phases en fonction du temps se comporte de manière "étrange" par rapport aux attracteurs des systèmes simples. Comme l'expliquent M. Dubois, P. Atten et P. Bergé (1987) [21], le caractère étrange d'un tel attracteur vient du fait que sa structure doit refléter deux tendances apparemment antagonistes : l'attraction des trajectoires vers l'attracteur et leur divergence sur ce dernier. L'attraction est liée au caractère dissipatif de tout système réel : sous l'effet des forces de frottement, les trajectoires tendent à venir se rejoindre sur l'attracteur. La divergence vient, quant à elle, de la sensibilité aux conditions initiales. La divergence exponentielle des deux trajectoires reste cependant un phénomène local, et comme les attracteurs ont des dimensions finies, il est impossible que les deux trajectoires divergent de manière infinie, de sorte que l'attracteur doit se replier sur lui-même à un moment ou à un autre. En d'autres termes l'attracteur étrange est le résultat de trois opérations simultanées, contraction, étirement et repliement qui vont donner naissance à une structure caractéristique en forme de fer à cheval qui va être à son tour aplatie, étirée et repliée. Ainsi, les trajectoires d'un attracteur étrange possèdent également les caractéristiques d'un objet fractal, c'est-à-dire d'un objet qui présente une structuration qui reste du même type quelle que soit l'échelle à laquelle on la regarde et de plus sa dimension est non entière 1. A cause de cette géométrie particulière, fractale, ces attracteurs sont qualifiés d'étranges. Ils sont la signature du chaos. C'est cette signature qui permet d'authentifier un comportement chaotique et de la caractériser quantitativement, quelques attracteurs étranges des systèmes chaotiques à temps discret sont illustrés dans les figures suivantes .

Dans les systèmes chaotiques dissipatifs, les attracteurs sont forcément des courbes beaucoup plus complexes qui présentent une symétrie interne. On les appelle des attracteurs étranges. Ils ont des régimes imprévisibles et infiniment complexes. La révolution de l'attracteur étrange nécessite une observation prolongée dans le temps

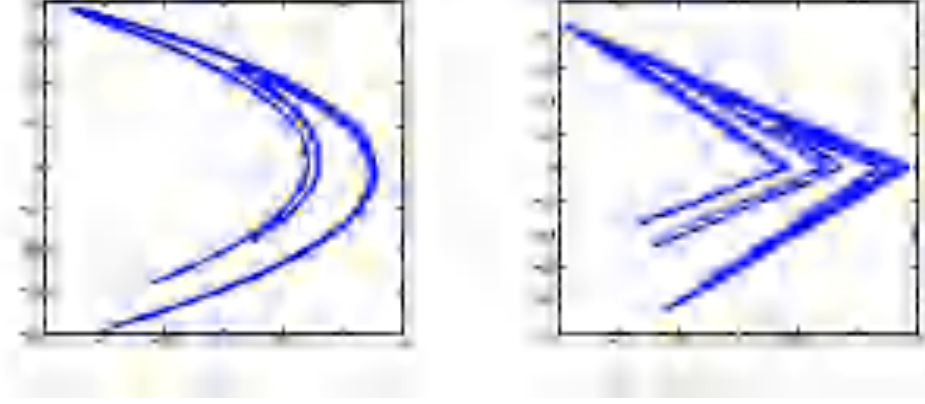


Fig. 19: (a) : Attracteur de Hénon ; (b) : Attracteur de Lozi.

et une connaissance du système. Géométriquement, un tel attracteur peut être décrit comme le résultat des opérations d'étirements et repliments d'un cycle de l'espace des phases, répété un nombre infini de fois. La dimension d de l'attracteurs étrange d'un système continu et autonome est fractale (non-entière) avec

$2 < d < n$; où n est la dimension de l'espace de phases.

Otto Rössler [22] a introduit en 1976 un système d'équations différentielles tridimensionnel définit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + (x - c)z \end{cases} \quad (17)$$

où a ; b et c représente les paramètres du système. Rössler [23] à démontrer que pour les valeurs de paramètres : $a = 0.398$, $b = 2$ et $c = 4$, le système admet un attracteur étrange .

1.5.3 Series temporelles et spectre de puissance

Les informations acquises se présentent le plus souvent sous la forme de séries temporelles de mesure effectuées sur le système. Il s'agit donc d'un problème de traitement du signal qui a pour intérêts essentiels :

- La description du passage vers un régime chaotique d'un système dynamique.

-La reconstruction des orbites dans un pseudo espace des phases (construction d'un système équivalent) pour déterminer les propriétés significatives de la structure topologique de l'attracteur.

La **série temporelle** est la valeur d'une des variables du système dynamique, soit $x(t)$ cette variable.

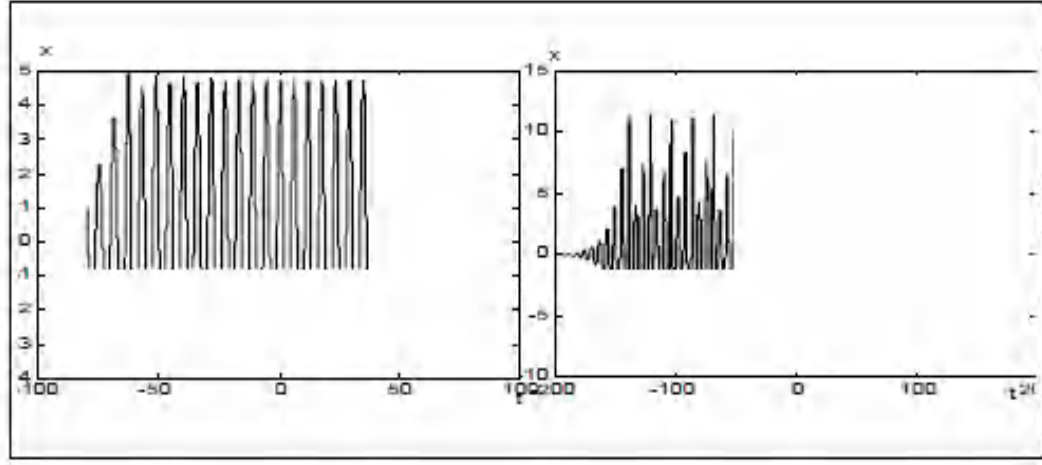


FIG. 20: Le modèle de Rössler : (a) Signal périodique ($c = 2.5$), (b) Signal a périodique ($c = 5.7$).

Le **spectre de puissance (ou de Fourier)** de $x(t)$ (On suppose que $x(t)$ est intégrable) est la quantité :

$$S(s) = |X(s)|^2$$

$X(s)$ est la transformation de Fourier de $x(t)$ dans $\mathbb{C}$ et elle est donnée par :

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi i s t} dt$$

Numériquement [?], on utilise la transformation de Fourier discrète :

$$X(n \Delta s) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k \Delta t) e^{-\frac{i 2 \pi n k}{N}}$$

Avec

$$\Delta s = \frac{1}{N \Delta t}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Si $x(t)$ est une variable de l'espace des phases, alors sa partie imaginaire est nulle. En donnant N et Δt , $x(k \Delta t)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$ seront calculés par la méthode de Runge-Kutta .

Alors le spectre de puissance est donné par :

$$S(n \Delta s) = |X(n \Delta s)|^2$$

Le spectre de puissance du signal périodique ou quasi-périodique est discontinu, mais il est continu si le signal est apériodique.

1.5.4 Diagramme de Bifurcation

Le passage d'un point fixe à un cycle limite de période-2, puis à un cycle limite de période-4, est un évènement important dans la dynamique d'un système. On dit qu'il y a une bifurcation lorsqu'un tel changement qualitatif des solutions se produit à l'occasion de la variation d'un paramètre. Les graphiques qui explicitent ces bifurcations, sont logiquement appelés diagrammes de bifurcation. Cette notion est centrale dans l'étude du chaos. Lorsque l'on examine de tels graphiques, il faut faire attention aux axes. Sur un axe nous prenons le paramètre, et sur l'autre la variable d'état, formant l'espace paramétrique. Un diagramme de bifurcation délimite des zones de l'espace paramétrique dans lesquelles le comportement qualitatif du système est similaire. On voit apparaître aussi un enchaînement très rapide de doublements de période qui mène à une situation chaotique. Ce mécanisme de doublements de période est une des routes vers le chaos. La figure suivante représente les diagrammes de bifurcation du système de Rössler 2

(a) variation du paramètre a et les valeurs des autres paramètres b et c sont fixé à :

$$b = 0.2, c = 5.7.$$

(b) variation du paramètre b et les valeurs des autres paramètres a et c sont fixé à :

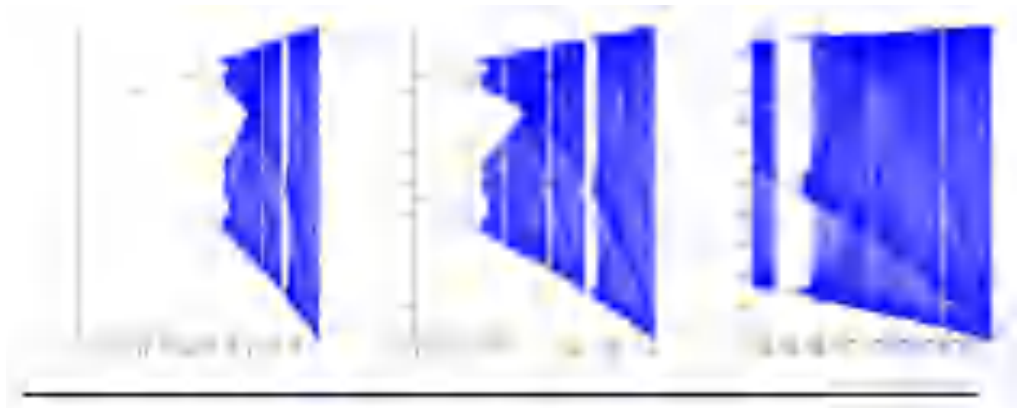


Fig. 21: Diagrammes de bifurcation du système de Rössler

$$a = 0.2, c = 5.7.$$

(c) : variation du paramètre c et les valeurs des autres paramètres a et b sont fixé à :

$$a = 0.2, b = 0.2.$$

1.6 Outils de quantification du chaos

L'espace des phases est un moyen de visualiser une trajectoire d'un système dynamique, il permet une appréciation purement qualitative de l'évolution. Il est possible d'y repérer l'ordre du chaos au travers de structures géométriques. Mais il n'est pas possible d'en extraire directement des informations quantitatives sur cet ordre caché. De plus, de très nombreux systèmes dynamiques évoluent dans un espace de dimension supérieure à 4, pour lequel même une coupe de Poincaré ne permet plus de donner des informations visuelles dans notre espace quotidien limité à 3 dimensions. Les notions que nous allons maintenant définir permettent une analyse chiffrée de l'évolution globale d'une trajectoire chaotique, même dans un espace des phases de dimension élevée.

1.6.1 Exposants de Lyapunov

L'**exposant de Lyapunov** sert à mesurer le degré de stabilité d'un système. Peut on associer une mesure au comportement chaotique ? Cette question et les réponses que l'on peut y donner sont d'une grande importance. Parce que le but de la théorie du chaos n'est pas de pouvoir donner une définition formelle à un phénomène très complexe. Le but est de pouvoir maîtriser ce phénomène. dans bien des situations le comportement chaotique est indésirable dans un système. On doit donc pouvoir le prédire et savoir comment l'éviter ou au moins diminuer ses méfaits. Dans d'autres situations on voudrait bien exploiter les propriétés des systèmes chaotiques. Pour tout cela il faut bien pouvoir caractériser le chaos quantitativement[24][25] . La complexité et la diversité des effets que l'on peut observer dans un système chaotique incite à définir plusieurs caractéristiques. Une partie de définitions concernent la géométrie de l'attracteur. Très souvent, ces ensembles sont difficiles à décrire. On cherche à les mesurer en définissant des dimensions spécifiques (dimension de Hausdorf, dimension de corrélation etc). Une autre caractéristique est liée plutôt à l'instabilité des orbites. Nous allons définir dans cette section la notion de l'exposant de Lyapunov. Nous savons que dans les systèmes chaotiques mêmes les orbites partant des points voisins s'éloignent. L'exposant de Lyapunov est la mesure de cette divergence. Lyapunov a démontré que le nombre d'exposants de Lyapunov est égal à la dimension de l'espace des phases. Par exemple, pour un système à temps continue d'ordre 3, la seule possibilité pour avoir un attracteur chaotique est telle que : $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0$.

1.6.2 Cas des systèmes discrets unidimensionnels

Commençons par le cas de systèmes dynamique de dimension 1 décrit par une application discrète $f : I \rightarrow I : (x_n = f(x_{n-1}))$ et soit x_0 une condition initiale, perturbons x_0 par l'ajout d'une très petite erreur " et on cherche à évaluer la distance exponentielle entre deux orbites après n itérations :

$$|f^n(x_0) - f^n(x_0 + \varepsilon)| \simeq \varepsilon e^{n\lambda(x_0)}$$

En faisant ε tendre vers zéro, on trouve :

$$\varepsilon e^{n\lambda(x_0)} \simeq \left| \frac{d}{dx} f^n(x_0) \right|$$

En utilisant la règle de dérivation en chaîne, on obtient :

$$\frac{d}{dx} f^n(x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i)$$

On définit l'exposant de Lyapunov comme suit :

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln f'(x_i)$$

Par sa définition, l'exposant de Lyapunov caractérise la stabilité d'une orbite $\gamma(x_0)$.

- Si $\lambda(x_0) > 0$, l'orbite $\gamma(x_0)$ est instable.
- Si $\lambda(x_0) \leq 0$, elle est stable.

1.6.3 Cas des systèmes discrets multidimensionnels

Il est possible de définir l'exposant de Lyapunov dans le cas des systèmes de dimension arbitraire, $m > 1$. Soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application telle que le système correspondant est chaotique. Pour chaque $n \geq 1$ considérons le jacobien de l'application f^n (notons le $\mathfrak{J}(n, x_0)$ évalué en un point x_0). Tout comme dans le cas de dimension 1 nous avons :

$$\mathfrak{J}(n, x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} \mathfrak{J}(x_i)$$

où $x_i = f^i(x_0)$ sont les points de l'orbite $\gamma(x_0)$ et $\mathfrak{J}(x)$ est le jacobien de l'application $f(x)$. Notons

$$\rho(x_0, n) = \max \{ |\lambda|, \lambda \in \text{Spec}(J(n, x_0)) \}$$

c'est le rayon spectral 3 de la matrice $\mathfrak{S}(n, x_0)$. Alors, l'exposant de Lyapunov est défini comme suit :

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \rho(n, x_0)$$

Dans la plupart des systèmes dynamiques rencontrés dans des applications l'exposant de Lyapunov a une propriété importante : $\lambda(x_0)$ est constant pour presque tous les $x_0 \in D$.

Cela signifie que pour tous les points x_0 on a : $\lambda(x_0) = \lambda$

Ainsi l'exposant de Lyapunov est une caractéristique globale, concernant presque toutes les orbites du système. Donc si $\lambda > 0$ toutes les orbites du système sont, **instables** et cela est un pas vers la détection du chaos : le plus souvent un tel système se trouve chaotique. Il existe, cependant, différents algorithmes pour calculer les exposants de Lyapunov, l'un des plus célèbres étant certainement l'algorithme de Wolf [rb]. Cet algorithme permet de calculer les exposants de Lyapunov à partir du calcul effectif de la divergence de deux trajectoires après t pas de temps par rapport à la perturbation introduite parallèlement. Le nombre d'exposants de Lyapunov est égal à la dimension de l'espace des phases et ils sont généralement indexés du plus grand au plus petit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$. L'apparition du chaos exige que les exposants de Lyapunov doivent remplir trois conditions :

- Un des $\lambda_i > 0$ pour expliquer la divergence des trajectoires.
- Un des $\lambda_i < 0$ pour justifier le repliement des trajectoires.
- $\sum \lambda_i < 0$ pour expliquer qu'un système est dissipatif.

De plus, pour un attracteur étrange, un des exposants de Lyapunov est toujours nul (théorème de Haken [26] 4) (chaque trajectoire est issue d'un ensemble d'équations différentielles et varie continûment en fonction du temps). Cela signifie que pour

respecter la condition $\Sigma \lambda_i < 0$, pour un système continu dans le temps un attracteur étrange doit avoir au minimum trois exposants de Lyapunov : positif, négatif et nul. En d'autres termes, un système continu dans le temps doit être au moins de dimension trois pour générer une dynamique chaotique.

1.6.4 Dimention fractale

Cette méthode correspond à une mesure de la dimension de l'attracteur reconstruit du système étudié ; nous pouvons calculer la dimension de l'attracteur du système étudié et ainsi déterminer si oui ou non il est construit de manière fractale. Si, à l'issue du calcul, nous obtenons une valeur positive non entière, cela signifie que le système possède un attracteur étrange. Plusieurs dimensions ont été proposées, on cite quelques une : Il ya une différence légère entre chaque'une de ces dimension, mais elles caractérisent toutes, l'attracteur étrange avec sa dimension fractale et satisfont les propriétés suivantes

La dimension fractale est l'une des propriétés importantes de l'attracteur étrange. Pour deux ensembles A et B dans $\mathbb{R}^n$, elle vérifie les propriétés suivantes :

1. Si $A \subset B$, alors $d(A) \leq d(B)$.
2. Si $A = \emptyset$, alors $d(A) = 0$.
3. $d(A \cup B) = \max(d(A), d(B))$.

Il existe plusieurs types de dimensions, les plus célèbres [27], [28] sont :

1.6.4.1 Dimension de Kolmogorov

Considérons un segment de longueur L. Ce segment peut toujours être recouvert par $N(\epsilon)$ petits segments de longueur ϵ .

Où $N(\epsilon) = L \left(\frac{1}{\epsilon} \right)$.

Pour un carré de côté L, on peut avoir un recouvrement par $N(\epsilon) = \left(\frac{L}{\epsilon} \right)^2$ petits carrés de côté ϵ .

En général, on a $N(\epsilon) = \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^d$.

En passant au logarithme, on obtient :

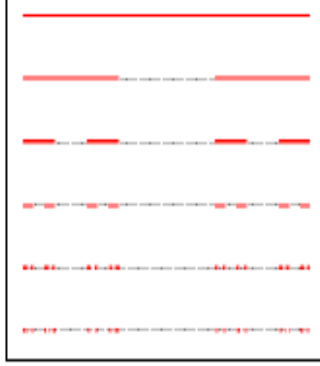


Fig. 22: Ensemble de Cantor.

$$d = \frac{\log N(\epsilon)}{\log L - \log \epsilon}$$

A la limite pour de très petits ϵ , le terme $\log L$ dans (3.24) devient négligeable devant $-\log \epsilon$, d'où la définition de la dimension de capacité d_c [29] :

$$d_c = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \epsilon}$$

En appliquant par exemple la définition (3.25) à :

Ensemble de Cantor, on trouve : $d_c \simeq 0.6309$ et au Triangle de Sierpinski, on trouve : $d_c \simeq 1.5849$.

1.6.4.2 Dimension de Hausdorff

Soit M un ensemble de $\mathbb{R}^n$ recouvert par des ensembles A_i de petits diamètres

C'est-à-dire :

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad 0 < \delta(A_i) \leq \epsilon$$

On définit la mesure de Hausdorff d -dimensionnelle [30] par :

$$\mu_d(A) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^d, \quad |A_i| \leq \epsilon \right.$$

La dimension de Hausdorff de l'ensemble M est le réel d_H défini par :

$$\mu_d(M) = \begin{cases} 0 & \text{si } d > d_H \\ +\infty & \text{si } d < d_H \end{cases}$$

Dans plusieurs cas, la dimension de Hausdorff est égale à la dimension de capacité grâce au théorème de Hutchinson suivant :

Théorème (*Hutchinson*)

Si l'ensemble M est l'attracteur d'un système de fonctions itérées :

$$\{\omega_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Avec un facteur de contraction S_i , $i = 1, 2, \dots, N$ et si les images des ω_i sont déconnectées ou seulement juxtaposées, alors $d_H = d_c = D$, où D est l'unique solution de :

$$|s_1|^D + |s_2|^D + \dots + |s_N|^D = 1$$

Si $d_H > 0$, alors $\mu_{d_H}(M)$ est un réel positif.

1.6.4.3 Exposant de lyapunov et dimension fractale

(a) DIMENSION DE KAPLAN ET YORK

Soit j un entier positif tel que :

$$\sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0$$

C'est à dire, il y a un rétrécissement d'un facteur $e^{\sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i t}$ et un allongement d'un facteur $e^{\sum_{i=1}^j \lambda_i t}$.

On définit la dimension de Kaplan et York D_{xy} par

$$: D_{xy} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}$$

(b) DIMENSION DE MORI

Soient m_0 le nombre d'exposants de Lyapunov nul, m_+ le nombre d'exposants de Lyapunov positif, $\overline{\lambda_+}$ la moyenne des exposants positifs et $\overline{\lambda_-}$ celle des exposants négatifs.

On définit la dimension de Mori D_M par :

$$D_M = m_0 m_+ \left(1 + \frac{\overline{\lambda_+}}{|\overline{\lambda_-}|} \right) \quad (18)$$

1.7 Quelques modèles des systèmes chaotiques discrets

Le modèle de Hénon et le modèle de Lozi, l'application logistique

1.7.1 Le modèle Hénon

L'application de Poincaré correspondante au modèle de Lorenz étant fortement dissipative, donc difficile à calculer précisément. M. Hénon en 1976, dans le but de simplifier le système de trois équations différentielles du modèle de Lorenz, proposa l'application suivante du plan sur lui-même :

$$\begin{cases} X_{n+1} = y_n + 1 - aX_n^2 \\ y_{n+1} = bX_n \end{cases} \quad (3.1)$$

a et b étant deux paramètres réels, où la valeur de la constante a contrôle la non linéarité de l'étirement et celle de b traduit le rôle de la dissipation[34]. Les valeurs habituellement utilisées pour a et b sont : $a = 1.4$ et $b = 0.3$, ce sont les valeurs adoptées dans la suite. Partant d'un point du plan de coordonnées (x_0, y_0) on peut calculer les coordonnées (x_1, y_1) du point suivant, et ainsi de suite. L'application de Hénon est inversible, son inverse est :

$$f^{-1}(x, y) = (b^{-1}y, x - 1 + ab^{-2}y^2) \quad (3.2)$$

La matrice jacobienne ici a pour expression

$$J = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

La déterminant de la matrice jacobienne est égale à $|J| = -b$

Ainsi, les aires sont multipliées à chaque itération par un facteur de $|b|$, il y a donc contraction des aires si $|b| < 1$. Considérons l'application de Hénon

$$f(x, y) = (1 + y - ax^2, bx) \quad \text{avec } 0 < b < 1 \quad (3.4)$$

Cette application a deux points fixes

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b-1+\sqrt{(1-b)^2+4a}}{2a}, y_1 = bx_1 \\ x_2 = \frac{b-1-\sqrt{(1-b)^2+4a}}{2a}, y_2 = bx_2 \end{cases}$$

trouvés en faisant la définition des points d'équilibres :

$$f(x, y) = (1 + y - ax^2, bx) = (x, y)$$

Le déterminant $(1 - b)^2 + 4a$ est négative si $a < a_0$:

$$a < a_0 = -\frac{(1 - b)^2}{4} = -0.1225$$

dans ce cas il n'y a pas des points fixes.

1.7.1.1 *Stabilité des points fixes :*

La matrice jacobienne J a pour valeurs propres, les valeurs propres données par :

$$\lambda_{1,2} = -ax \pm \sqrt{a^2x^2 + b}$$

si l'on calcule les valeurs absolues des valeurs propres absolues des valeurs propres, on constate que la plus petite des valeurs propres est toujours inférieur à 1, tandis que la plus grand est inférieur, égale ou supérieur à 1 suivant que $|x|$ inférieur, égale ou supérieur à $\frac{(1-b)}{2a}$, on en déduit que le point fixe (x_2, y_2) est un point selle.

L'autre point fixe stable si $a < \frac{3(1-b)^2}{4} = 0.3675$

Si $a = \frac{3(1-b)^2}{4}$, on a $\lambda_1(x_1, y_1) = b$ et $\lambda_2(x_2, y_2) = -1$

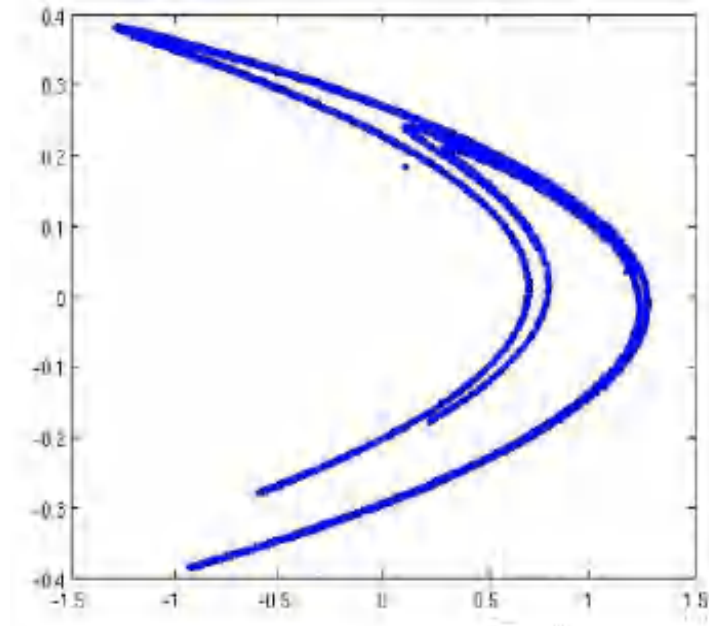


Fig. 23: Attracteur de Hénon pour $a = 1.4$, $b = 0.3$

Diagramme de bifurcation

La construction de diagramme de bifurcation est faite en faisant varier le paramètre a de 0 à 2 avec un pas de 0.0005, b est égale à 0.3. Le diagramme obtenu est représenté par la figure

(1.23). Ce diagramme est de type de bifurcation de doublement de période, l'attracteur de Hénon contient deux points fixes. La partie stable se situe dans l'intervalle $[0, 0.3675]$: Un 2-cycle stable commence à $a = 0.3675$ suivi d'un 4-cycle stable à $a = 0.9$ et ainsi de suite. La période continue de doubler jusqu'à une valeur déterminée où le trajectoire commence à prendre une forme particulière. Pour $a = 1.4$, on ne

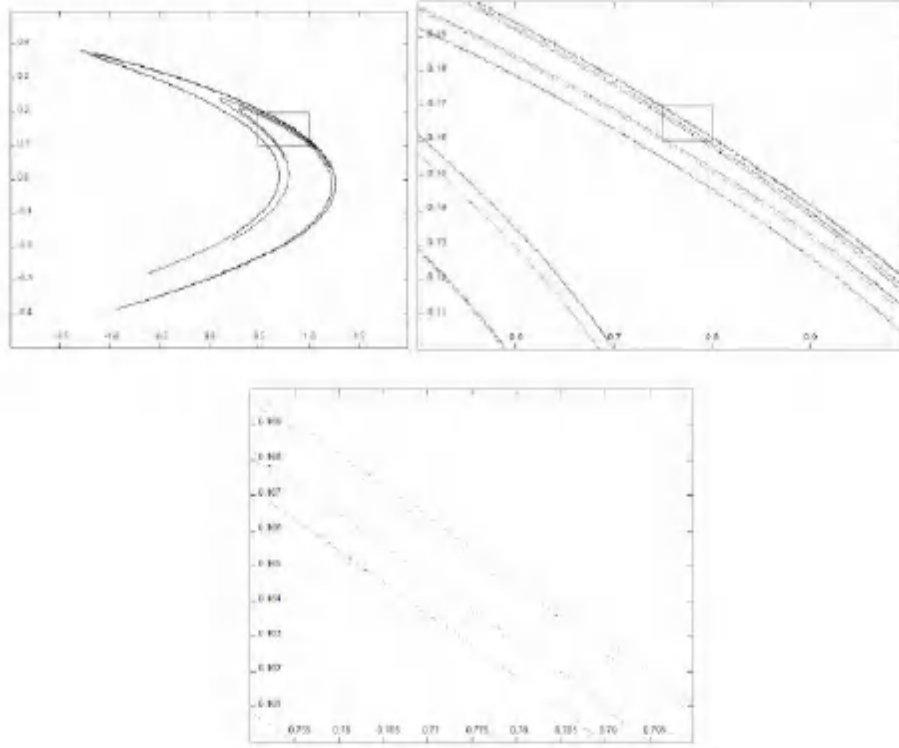


FIG. 24: Illustration de la permanence de la structure de l'attracteur de Hénon à différentes échelles.

distingue plus les cycle ; le système est chaotique. L'attracteur de Hénon pour $a = 1.4$, $b = 0.3$ est représenté dans la figure(1.24) : la structure de l'attracteur se répète identiquement à elle-même aux échelles d'observation successives. Cette structure dont la permanence à différent échelle est caractéristique d'un objet fractale. Par ailleurs, la dimension de Hausdorff de l'attracteur de Hénon objet intermédiaire entre une ligne et une surface, est $D = 1.26$: On peut aussi calculer la dimension de l'attracteur de Hénon par la dimension de Lyapunov. On a pour $a = 1.4$, $b = 0.3$, l'application de Hénon a deux exposants de Lyapunov $\lambda_1 = 0.42205$, $\lambda_2 = -1.626$ la dimension de Lyapunov par définition est égale à $D_L = 1.2596$.

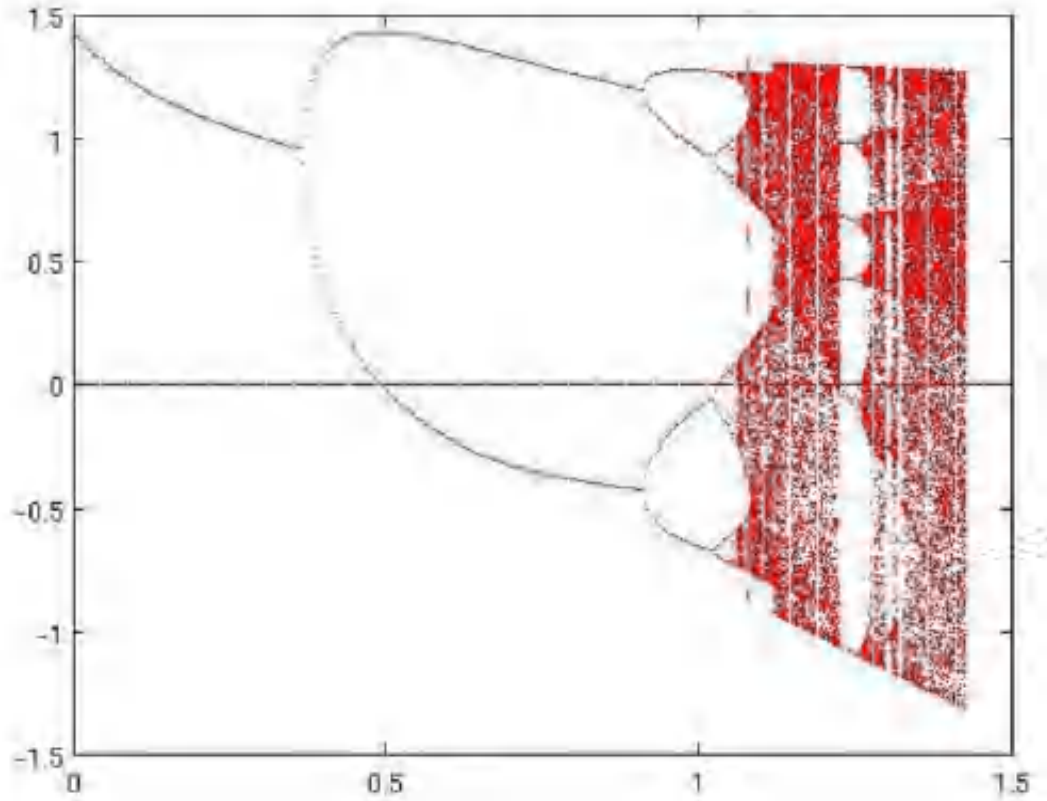


Fig. 25: Diagramme de bifurcation de Hénon

1.7.2 Le modèle de Lozi

Dans le but de simplifier l'attracteur de Hénon, René Lozi [35] , propose l'application suivante :

$$\begin{cases} L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (y + 1 - a|x|, bx) \end{cases} \quad (3.5)$$

1.7.2.1 Propriétés de l'application de Lozi

1• La seule différence entre l'application de Hénon et de Lozi est que le terme non linéaire x^2 de l'application de Hénon est remplacé par $|x|$ dans l'application de Lozi. Cette modification de l'application de Hénon est linéaire pour $x \succ 0$, $x \prec 0$.

2• L'application de Lozi n'est pas différentiable.

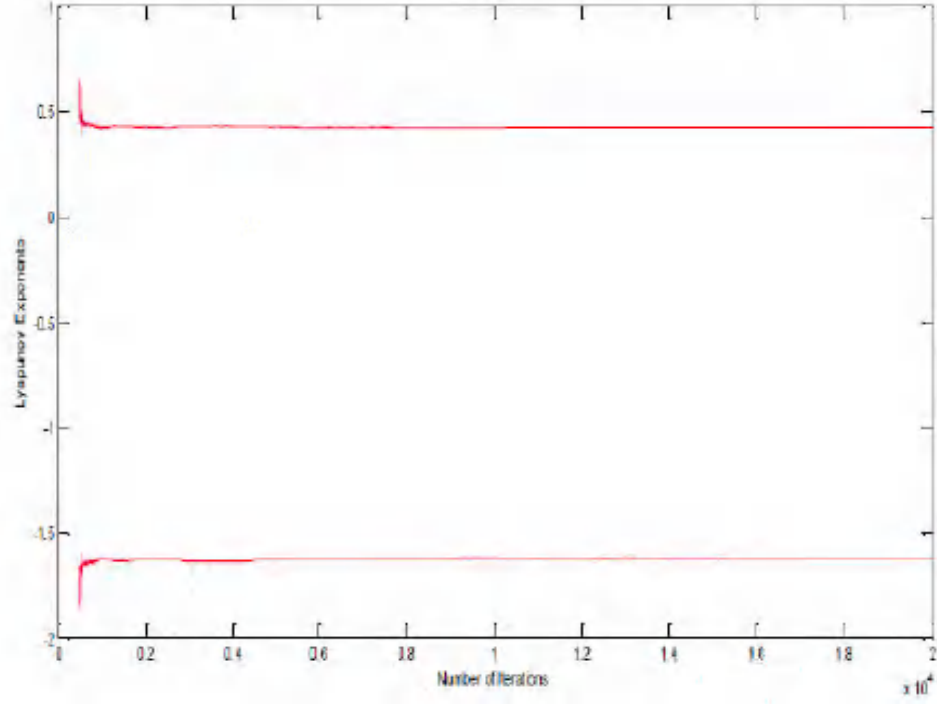


FIG. 26: Les exposants de Lyapunov en fonction du temps pour l'application de Hénon

3• Si $a = 0$, L'application de Lozi est une application linéaire, donc, on pose toujours $a \neq 0$.

4• L'application de Lozi est inversible, son inverse est :

$$f^{-1}(x, y) = (b^{-1}y, x - 1 + a/b|y|) \quad (3.6)$$

5• Le déterminant de la matrice Jacobienne est égale à $|J| = -b$, alors il y a contraction des aires pour $|b| < 1$

Cette application possède deux points fixes hyperbolique définit par :

$$\begin{cases} P_1 = (\bar{x}_1, \bar{y}_1) = \left(\frac{1}{1+a-b}, \frac{b}{1+a-b} \right), \text{ si } b < a + 1 \\ P_2 = (\bar{x}_2, \bar{y}_2) = \left(\frac{1}{1-a-b}, \frac{b}{1-a-b} \right), \text{ si } b < 1 - a \end{cases} \quad (3.7)$$

On peut facilement déterminer la stabilité locale de ces points par l'évolution des valuation des valeurs propres de la matrice Jacobienne.

$$Df(x) = \begin{pmatrix} -a \frac{\partial |x|}{\partial x} & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

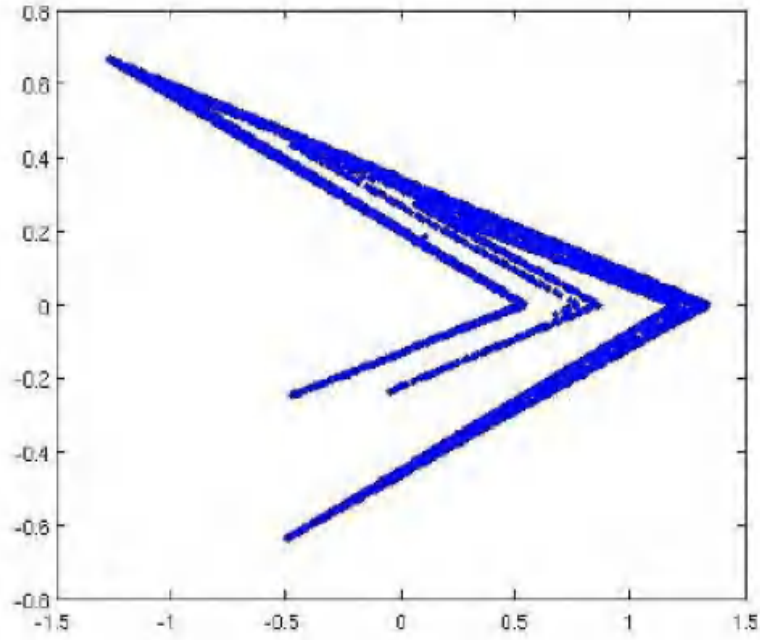


Fig. 27: Attracteur de Lozi pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$

1.7.2.2 Structure fractal

Pour déterminer la structure de l'attracteur de Lozi, on peut faire un agrandissement d'une région de l'attracteur et on observe que la structure se répète. Contrairement au cas de l'application de Hénon, le route vers le chaos par l'application de Lozi n'est pas une bifurcation de doublement de période. Puisque la dérivée de l'application de Lozi n'est pas continue. Le diagramme obtenu est représenté par la figure (3. 10).

Exposants de Lyapunov pour l'application de Lozi

1.7.2.3 Stabilité des points fixes

L'équation caractéristique de la matrice Jacobienne est :

$$\begin{cases} \lambda^2 + a\lambda - a & \text{pour } P_1 \\ \lambda^2 - a\lambda - a & \text{pour } P_2 \end{cases} \quad (3.9)$$

Stabilité de P_1 :

- Pour $b \succ \frac{-a^2}{4}$, Les valeurs propres sont des réelles.

-Pour $b \prec \frac{-a^2}{4}$, Les valeurs propres sont des complexes.

Elle sont de module inférieur à un si :

$b \succ -1, b \prec a + 1$ et $b \prec 1 - a$. Et le point fixe P_1 est stable.

Les valeurs propres sont de module supérieur à un si :

$b \prec -1, b \prec a + 1$ et $b \prec 1 - a$. Et le point fixe P_1 est instable.

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont $|\lambda_1| \prec 1$ et $|\lambda_2| \succ 1$ si :

$b \succ a + 1$ et $b \succ 1 - a$. Et le point fixe P_1 est une point selle ou col.

Stabilité de P_2 :

L'équation caractéristique pour P_2 est définit par

$$\lambda^2 - a\lambda - b$$

$$\Delta = a^2 + 4b$$

L'existence de P_2 est pour $b \succ 1 - a$, alors $\Delta = a^2 + 4b \succ 0$ et les valeurs propres sont toujours des réelles.

Elle sont de modules supérieurs à un si :

$b \succ -a + 1$ et $b \succ 1 + a$. Et le point fixe P_2 est une point instable.

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont $|\lambda_1| \prec 1$ et $|\lambda_2| \succ 1$ si

$b \succ a + 1$ et $b \succ 1 - a$. Et le point fixe P_2 est une point selle ou col.

Pour plus de détails voir les références cités à la fin de cette étude, en particulier [32] [33] [34] .

Misiurewicz dans [33] prouve l'existence d'un attracteur étrange de l'application de Lozi.

Pour les paramètres $a = 1.7$ et $b = 0.6$ la suite de points itérés par l'application de Lozi converge vers un attracteur étrange représenté par la **Figure()**

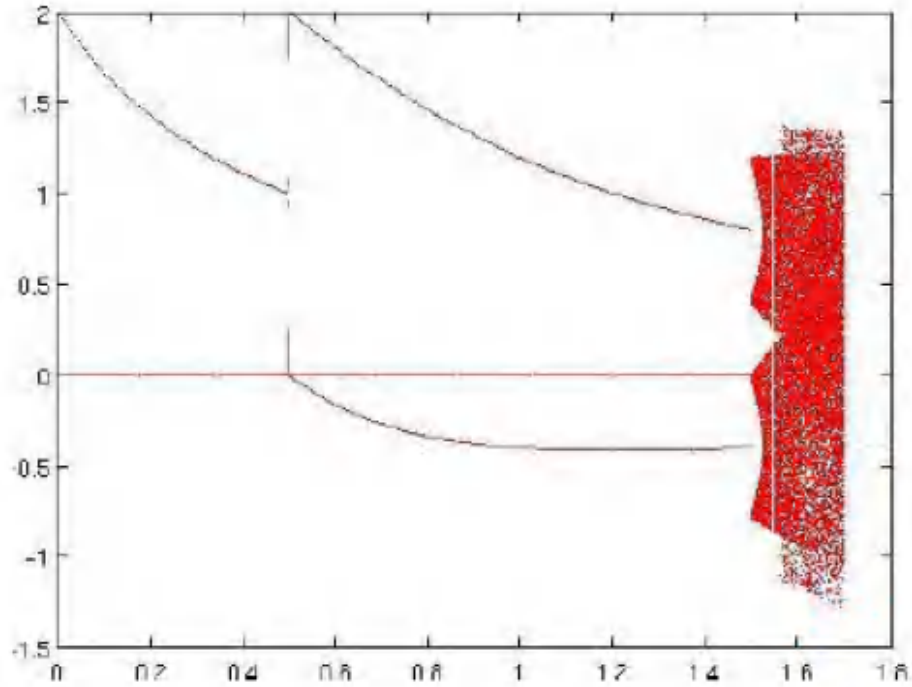


Fig. 28: Diagramme de bifurcation de Lozi

Pour $a = 1.7$, $b = 0.5$, l'application de Lozi a deux exposants de Lyapunov $\lambda_1 = 0.69314$ qui est positif, $\lambda_2 = -1.204$. On vérifie bien cependant que la somme de ces

exposants est strictement négative. La figure) représente la variation des exposants de Lyapunov en fonction du temps pour l'application de Lozi.

Dimension de l'attracteur de Lozi

On a pour $a = 1.7$, $b = 0.6$, l'application de Lozi a deux exposants de Lyapunov

$\lambda_1 = 0.69314$, $\lambda_2 = -1.204$. alors la dimension de Lyapunov est égale à $D_L = 1.5757$.

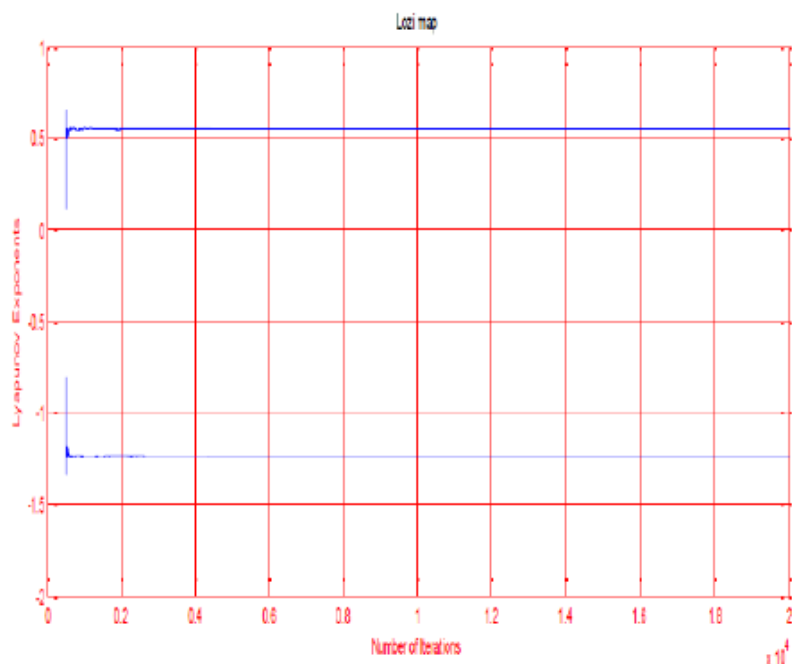


Fig. 29: Exposants de Lyapunov du Lozi

1.7.3 L'application logistique

Un exemple remarquable de système dynamique à temps discret est fourni par l'application logistique :

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n) \quad (19)$$

où les x_n appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$ et où $\mu \in [0, 4]$ est un paramètre.

Cette application définit donc, un système de la forme $([0, 1], f)$, où l'espace des phases $[0, 1]$ est une variété de dimension un.

1.7.3.1 Points fixes

Pour la suite, il peut être utile de trouver les points fixes de l'application f : ces points sont donnés par :

$$f(x) = \mu x(1-x) = x \quad (20)$$

Une solution évidente de cette équation est $x_1^* = 0$

L'autre solution est $x_2^* = 1 - \frac{1}{\mu}$ et celle-ci n'est valable que pour $\mu \geq 1$, car les solutions x de () doivent évidemment appartenir à l'espace des phases $[0, 1]$. Il y a donc une bifurcation

(transcritique) en $\mu = 1$.

$$x^* \in [0, 1] \Rightarrow 0 \leq x^* \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{1}{\mu} \leq 1$$

$$\Rightarrow \mu \geq 1.$$

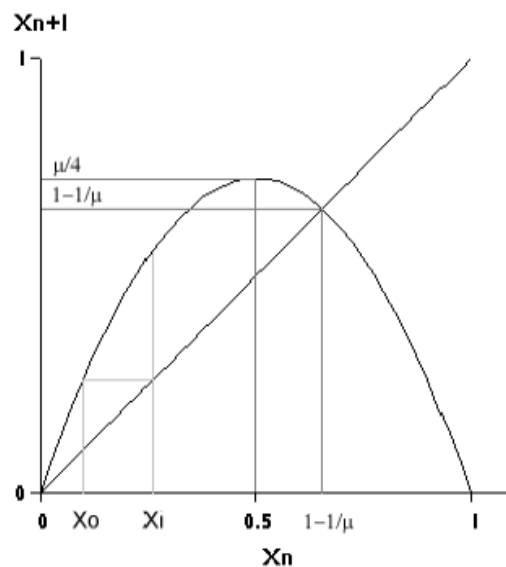


Fig. 30: La courbe de la suite logistique et ses points fixes

Stabilité des points fixes

chaque point de $[0, 1]$ est dans le bassin d'attraction du point fixe $x = 0$ (pas d'autres orbites périodiques d'une période quel conque)

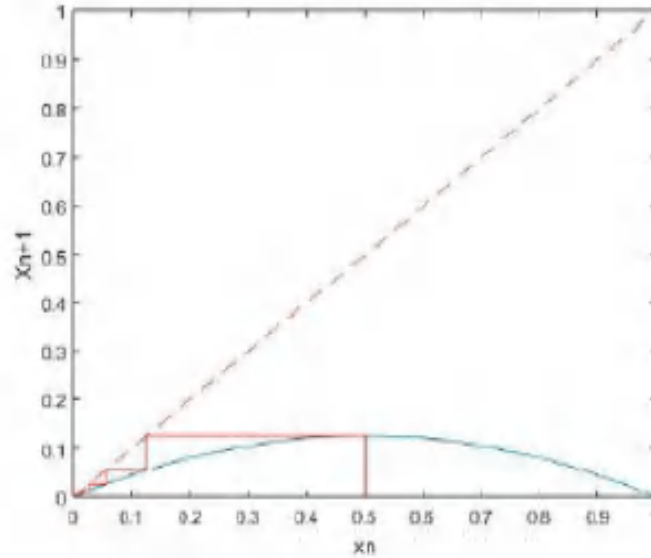


Fig. 31: La courbe de la suite logistique $0 \leq \mu \leq 1$

On peut montrer que chaque point de $[0, 1]$ se trouve dans le bassin d'attraction de $x^* = 1 - \frac{1}{\mu}$

Lorsque μ s'approche de 4, plus rien n'est prévisible, la suite admet tantôt des cycles d'ordre qui semblent arbitraires, tantôt pas de cycles du tout ! C'est le chaos. Un diagramme de bifurcation permet de résumer graphiquement les différents cas :

1.8 Conclusion

La théorie du chaos est vaste, pour la bien comprendre il faut savoir comment atteindre ce phénomène (le chaos) et comment le caractériser. La variation du paramètre de contrôle peut conduire à une variation de la nature des régimes dynamiques, c'est à dire un système d'un comportement régulier peut perdre sa stabilité et évoluer vers un autre d'un comportement chaotique en impliquant une série de bifurcation. Cette transition suit des chemins dits "chemins vers le chaos" qu'on n'a pas encore pu savoir sous quelles conditions ses phénomènes (de transition vers le chaos) se produisent. Les trois voies célèbres vers le chaos sont : *La quasi-périodicité, la cascade*

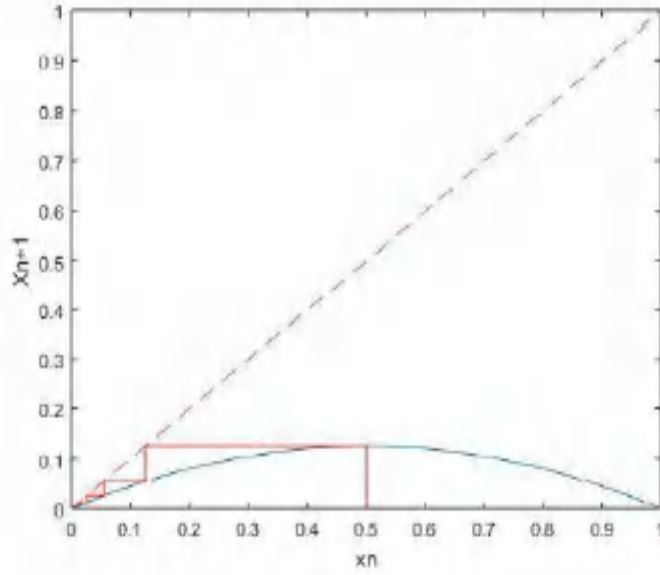


Fig. 32: La courbe de la suite logistique $0 \leq \mu \leq 1$

sous harmonique et les intermittences.

Pour rendre quantitatives les observations faites sur des systèmes chaotiques, nous avons présenté dans la deuxième partie de ce chapitre des moyens quantitatifs souvent complémentaires entre elles : *la série temporelle*, *le spectre de Fourier*, *la dimension fractale* dont nous avons donné la définitions de plusieurs dimension : *dimension de Kolmogorov*, *dimension de Kaplan et York* et *dimension de Mori*. Ces deux dernières dimensions sont fonction des *exposants de Lyapunov* dont nous avons présenté une méthode pour les calculer.

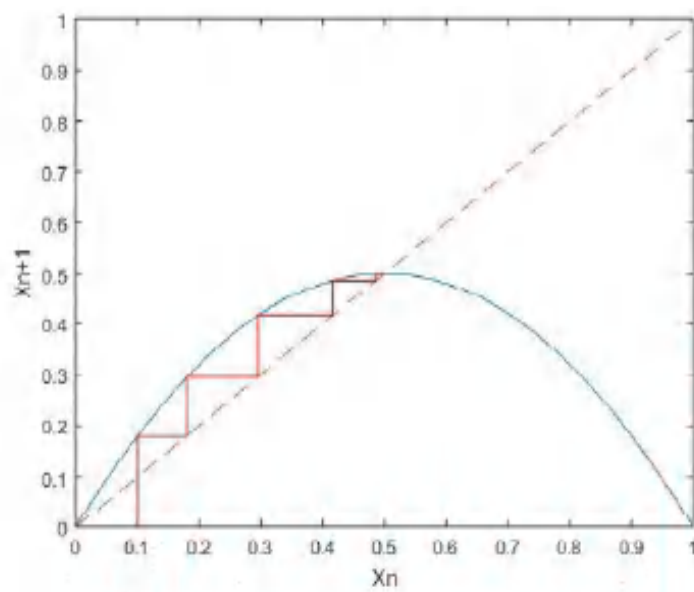


Fig. 33: La courbe de la suite logistique $1 \leq \mu \leq 3$

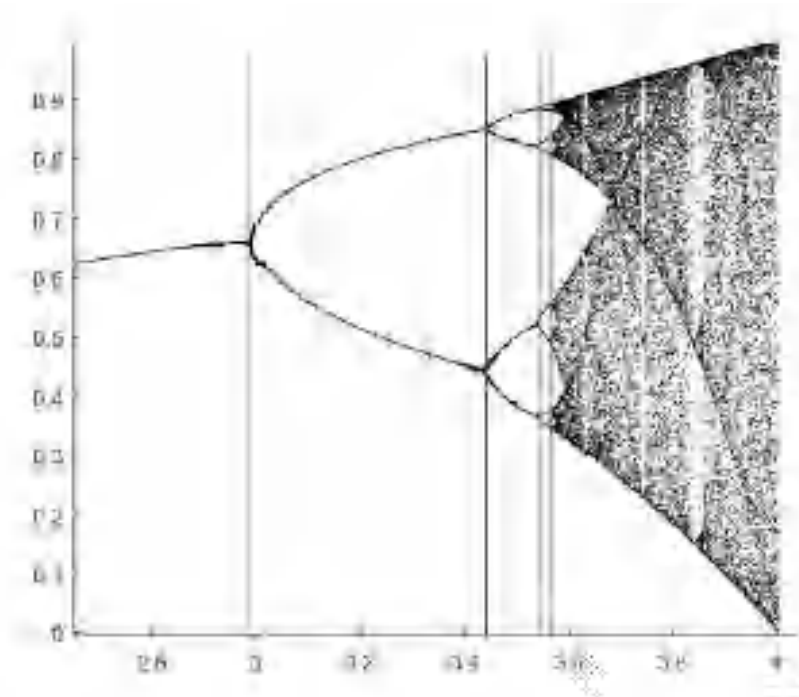


Fig. 34: Diagramme de bifurcation pour la famille de suite logistique

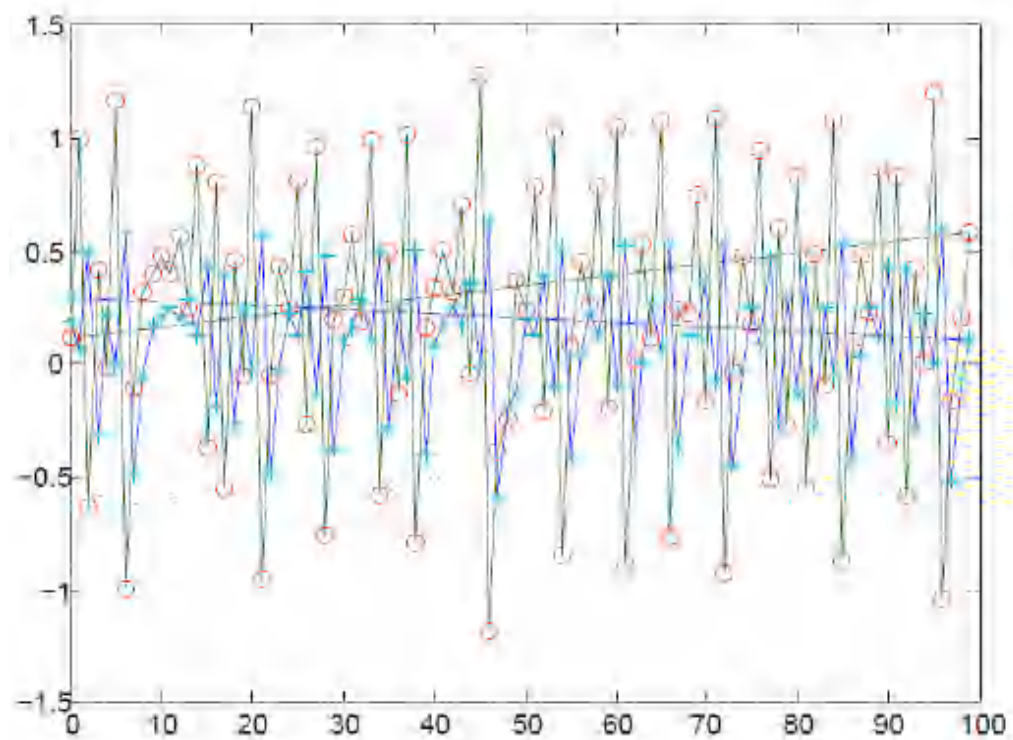


Fig. 35: Sensibilité aux conditions initiales de l'application logistique

Chapitre II

MÉTHODES D'OPTIMISATION GLOBALE

2.1 *Introduction*

Le problème d'optimisation occupent à notre époque une place prépondérante : l'optimisation étant nécessaire dans différents domaines de production, du transport, de la logistique, etc. La résolution de tels problèmes a fait l'objet de nombreux travaux en utilisant diverses méthodes d'optimisation. De nos jours l'optimisation est devenue un domaine indispensable pour résoudre plusieurs problèmes que se soit dans l'industrie ou d'autres secteurs. Les algorithmes d'optimisation utilisés dans le filtrage adaptatif présentent plusieurs difficultés liées aux besoins de l'utilisateur (recherche d'une solution globale, fiabilité et précision de la solution, temps de calculs disponible, ...), aux caractéristiques du problème traité (non linéarité, interférence, bruit, ...) et aux temps de calculs importants. Nous aborderons dans ce chapitre les définitions générales des méthodes d'optimisation qui se divisent en deux grandes classes : les méthodes déterministes et les méthodes non déterministes. D'un point de vue mathématique, l'optimisation consiste à rechercher le minimum ou le maximum d'une fonction avec ou sans contraintes. L'optimisation possède ses racines au 18^{ème} siècle dans les travaux de

- Taylor, Newton, Lagrange, qui ont élaboré les bases des développements limites.

- Cauchy ([1847]) fut le premier à mettre en œuvre une méthode d'optimisation, méthode du pas de descente, pour la résolution de problèmes sans contrainte. Il n'existe pas de méthode unique permettant de résoudre correctement tous les problèmes d'optimisation. C'est pour quoi de nombreuses méthodes d'optimisation ont été développées pour résoudre différents types de problèmes d'optimisation [35] [36].

2.2 *Notions de base en optimisation*

Deux types de problèmes d'optimisation sont distingués : des problèmes de minimisation et des problèmes de maximisation. Un problème d'optimisation (de minimisation ou de maximisation) est défini par un ensemble de données et un ensemble de contraintes. Un ensemble de solutions S est associé au problème d'optimisation. Parmi les solutions S , un sous-ensemble $X \subseteq S$ représente des solutions réalisables respectant les contraintes C du problème, à chaque solution s est associée une valeur $f(s)$ qui représente sa qualité. La résolution du problème d'optimisation consiste à trouver une solution $s^* \in X$ qui minimise ou maximise la valeur $f(s)$.

Quelque soit le type du problème d'optimisation, ce dernier est défini par le 6-uplet $\langle D, C, S, X, f, mode \rangle$. Où D représente les données du problème, C les contraintes que doit satisfaire une solution afin d'être admissible, S l'ensemble des solutions possibles du problème traité, X un sous-ensemble de S représentant les solutions réalisables (admissibles), f une fonction du coût (aussi appelée fonction « objectif » ou fonction fitness) qui associe à chaque solution s une valeur numérique $f(s)$ (nombre réel ou entier) représentant la qualité de s , mode indique le type du problème, il permet de savoir est ce qu'on doit minimiser ou maximiser les valeurs des solutions de X . Dans ce qui suit nous présentons quelques définitions tirées de la littérature liées aux problèmes d'optimisation en généra[37] [38].

Définition 1 : Inspirée de [Papadimitriou et Steiglitz, 1982] : Une instance d'un problème de minimisation (maximisation) est un couple (X, f) . Où $X \subseteq S$ est un ensemble fini de solutions potentielles admissibles et f est une fonction du coût (fonction objectif) à minimiser (à maximiser), $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. L'objectif est de trouver $s^* \in X$ tel que $f(s^*) \leq f(s)$ (Au cas de maximisation : $f(s^*) \geq f(s)$) pour n'importe quelle solution $s \in X$.

Définition 2 : Inspirée de [Sakarovitch, 1984] : Un problème d'optimisation combinatoire est défini par l'ensemble S des solutions possibles d'un problème. $X \subseteq S$

est l'ensemble des solutions réalisables . $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction que l'on nomme fonction «objectif». La résolution du problème consiste à minimiser (maximiser) la valeur $f(s)$, où $s \in X$.

Définition 3 : Inspirée de [Papadimitriou et Steiglitz, 1982] : Un problème mono-objectif est décrit par la formule 1.1

$$\begin{aligned}
 & \text{Tel que} \left\{ \begin{array}{l} \text{Modex } f(x) \\ C_i(s) \Delta 0, \ i = 1 \dots m \\ H_i(s) = 0, \ i = 1 \dots p \\ s \in S \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right. \quad (21) \\
 \\
 & \text{Où} \quad \text{Mode} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Min au cas de problème de minimisation} \\ \text{Max au cas de problème de maximisation} \end{array} \right. \\
 \\
 & \Delta \text{ est remplacé par} \left\{ \begin{array}{l} \leq \text{ au cas de problème de minimisation} \\ \geq \text{ au cas de problème de maximisation} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

f est la fonction du coût (la fonction «objectif») à minimiser (ou à maximiser). C_i sont des contraintes d'inégalité et H_i sont des contraintes d'égalité. S est l'ensemble de solutions possibles (l'espace de recherche). s est une solution admissible, elle appartient à S et respecte les contraintes du problème.

Définition 4 : Inspirée de [Fonseca et Fleming, 1993] : Un problème multi-objectif est décrit par la formule 1.2

$$\begin{aligned}
 & \text{Tel que} \left\{ \begin{array}{l} \text{Modex}_x \vec{f}(x) \\ \vec{C}_i(s) \Delta 0, \ i = 1 \dots m \\ \vec{H}_i(s) = 0, \ i = 1 \dots p \\ s \in S \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right. \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Où} \quad \text{Mode} &= \begin{cases} \text{Min au cas de problème de minimisation} \\ \text{Max au cas de problème de maximisation} \end{cases} \\ \Delta \text{ est remplacé par} &\begin{cases} \leq \text{ au cas de problème de minimisation} \\ \geq \text{ au cas de problème de maximisation} \end{cases} \end{aligned}$$

Dans le cas de problèmes d'optimisation multi-objectifs, la fonction «objectif» est représentée par un vecteur $\vec{f}$ regroupant N fonctions «objectif». Aussi les contraintes sont représentées par des vecteurs regroupant les contraintes de chaque fonction «objectif».

Définition 5 : Une solution d'un problème d'optimisation est un ensemble de quantités souvent numériques pour lesquelles des valeurs sont à choisir. L'ensemble de ces valeurs est généralement regroupé dans un vecteur représentant une solution. Supposant un problème de taille n , le vecteur représentant la solution s est représenté par :

$$\vec{s} = [s_1, s_2, s_3, \dots, s_n]$$

Les différentes valeurs prises par les variables $(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$ constituent l'ensemble de solutions envisageables. Selon le type des variables $(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$, le type du problème d'optimisation peut être reconnu. Par conséquent, on distingue deux classes de problèmes d'optimisation : des problèmes continus et des problèmes discrets. Dans la première classe (i.e. la classe des problèmes continus), les variables composant une solution donnée sont de type réel. Tandis que, dans les problèmes de la deuxième classe (i.e. la classe des problèmes discrets), les variables composant une solution donnée peuvent être de type entier, naturel ou binaire.

Définition 6 : Une contrainte d'un problème est une restriction imposée par la nature et les caractéristiques du problème sur les solutions proposées.

Définition 7 : L'espace de recherche S d'un problème est composé de l'ensemble de valeurs pouvant être prises par les variables $(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$ qui construisent la solution s .

Définition 8 : Le voisinage $V(s)$ d'une solution s est un sous ensemble de S , dont les membres sont des solutions proches (voisines) de la solution s . En effet, on dit qu'une solution « s' » est une voisine de s , si elle peut être obtenue en modifiant légèrement la solution s .

Définition 9 : L'optimum local est la meilleure solution appartenant à un voisinage $V(s)$ de la solution s . une solution s' (appartenant à S) est un optimum local de la structure du $V(s)$ de la solution s si elle vérifie la condition suivante :

$$f(s') \leq f(s), \forall s \in V(s) \quad (23)$$

Pour un problème de maximisation l'inégalité est inversée [39] [40], c-à-d. la condition (22) sera remplacée par la condition (23) :

$$f(s') \geq f(s), \forall s \in V(s) \quad (24)$$

Il est à noter que l'optimum local est aussi nommé maximum local au cas de problème de maximisation et minimum local au cas de problème de minimisation.

Définition 10 : Une solution optimale (L'optimum global) : Une solution s^* est dite optimale (ou optimum global) si les deux contraintes suivantes sont vérifiées :

1• Elle est réalisable : tirée de l'ensemble de solutions possibles (l'espace de recherche S) et respecte toutes les contraintes du problème posé.

2•
$$\begin{cases} f(s^*) = \max_{s \in X} \{f(s)\} \text{ En cas de problème de maximisation} \\ f(s^*) = \min_{s \in X} \{f(s)\} \text{ En cas de problème de minimisation} \end{cases} \quad \text{où X est l'ensemble de solutions réalisables.}$$

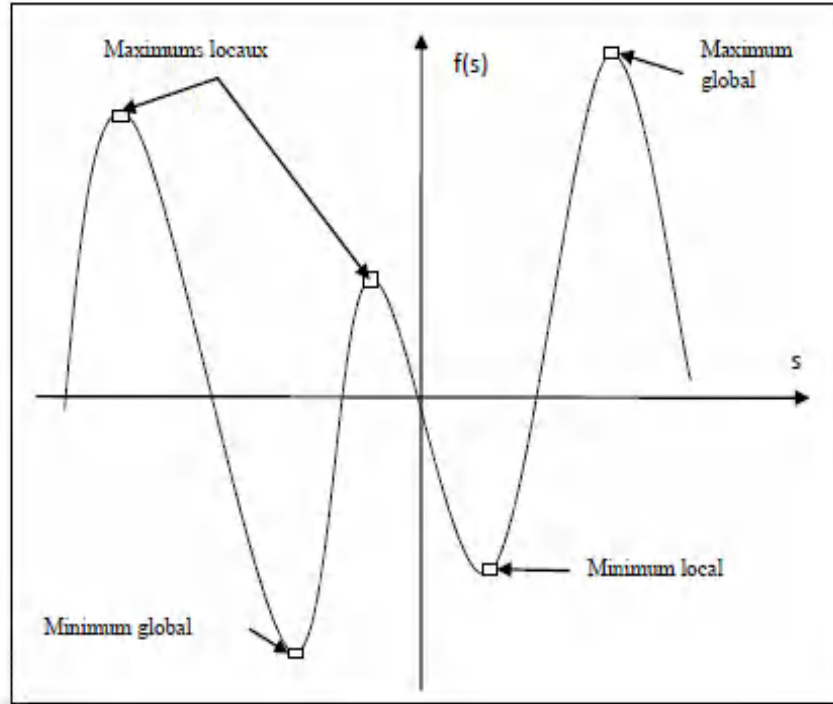


Fig. 36: Courbe représentant les optimums locaux et les optimums globaux

Autrement dit, l'optimum global est le meilleur optimum local. Ainsi, une solution est dite optimum global si :

$$\begin{cases} f(s^*) \geq f(s), \forall s \in E(S) \text{ au cas de problème de maximisation} \\ f(s^*) \leq f(s), \forall s \in E(S) \text{ au cas de problème de minimisation} \end{cases}.$$

où $E(S)$ est l'ensemble d'optimums locaux. Il est à noter que l'optimum global est aussi nommé maximum global au cas de problème de maximisation et minimum global au cas de problème de minimisation.

La figure représente une courbe représentant les optimums locaux et les optimums globaux d'une fonction d'évaluation.

2.3 Définition de l'optimisation

Les premières méthodes d'optimisation ont été inspirées à l'origine par les travaux de La grange et Hamilton sur plusieurs méthodes de calcul itératives, étudiées

à l'époque par Newton et Gauss. En fait, nous avons assisté ces dernières années à une croissance très rapide du travail utilisant des méthodes d'optimisation, alors qu'est-ce que l'optimisation ? L'optimisation est un terme fréquemment et largement utilisé pour décrire et gérer les processus de conception pour développer des produits. Ils'agit d'améliorer la conception en termes d'un ou plusieurs aspects. Mathématiquement, l'optimisation est une partie des mathématiques qui concerne l'identification d'une solution globale parmi un ensemble des solutions candidates qui constituent l'espace de recherche d'un problème étudié. L'optimisation a été utilisée dans de nombreux domaines scientifiques dans le cadre de la conception optimale de dispositifs d'ingénierie, etc. A travers ce qui précède, le but de l'optimisation est d'atteindre la solution optimale à un problème spécifique appelé fonction objective linéaire ou non linéaire. L'optimisation peut être définie comme le processus de recherche des conditions donnant la valeur maximale ou minimale d'une fonction. Un problème d'optimisation peut être énoncé comme suit.

Trouver $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ qui minimise $f(X)$, sous réserve des contraintes

$$\begin{cases} g_j(X) \leq 0, & j = 1, 2, \dots, m \\ l_j(X) = 0, & j = 1, 2, \dots, p \end{cases}$$

où X est un vecteur à n dimension appelée vecteur de conception, $f(X)$ est appelée fonction objective et $g_j(X)$ et $l_j(X)$ sont respectivement contraintes d'inégalité et d'égalité. Certains problèmes d'optimisation n'imposent aucune contrainte et peuvent être définis comme suit :

Trouver $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ qui minimise $f(X)$, Ce genre de problèmes sont appelés problèmes d'optimisation sans contrainte. Nous nous intéressons dans ce qui suit aux problèmes d'optimisation sans contrainte.

2.4 Méthodes déterministes et non déterministes (probabilistes)

On peut conclure que la difficulté d'un problème d'optimisation peut s'avérer plus ou moins compliquée selon la nature des éléments suivants :

- la nature des variables (discrètes ou continus),
- la nature des contraintes (linéaires ou non-linéaires),
- la nature de la fonction de coût (linéaire, quadratique, convexe, etc . . .), le nombre de fonctions objectives à optimiser (mono objective, multi objectives).

En fonction de la nature du problème, on distingue deux types d'optimisation.

1. L'optimisation statique pour la quelle la fonction objective ne dépend que des valeurs des variables a un instant donné.

2. L'optimisation dynamique pour la quelle la fonction objective dépend des décisions prises antérieurement aussi bien que de l'état actuel du système électrique et qui est a réaliser sur un intervalle de temps donné.

En revanche des méthodes conventionnelles, les Méta-heuristiques ne besoin pas des informations mathématiques de la fonction traitée, elles sont encore capable de résoudre les problèmes non linéaires ou encore les problèmes dénommés difficiles, les méthodes classiques restantes capables de traiter les problèmes discontinus et certains problèmes non convexes, elles s'adaptent uniquement pour les problèmes linéaires et continus convexes qui se caractérisent par un seul optimum local et qui est global, contrairement au problèmes non convexes ces derniers se trouvent piéger dans un des minimums locaux, on peut regrouper les méthodes conventionnel les dans 04 sous groupes principaux suivants et qui dépendent de la nature des contraintes et des objectifs a optimiser :

- La programmation linéaire (Linear Programming) qui traite une fonction objective linéaire et des contraintes linéaires.

- La programmation linéaire en nombres entiers mixtes (Mixed-Integer Programming) pour la quelle toutes les variables prennent des valeurs entières.
- La programmation quadratique (Quadratic Programming) dont la fonction objective comporte des termes quadratiques, et les contraintes restant linéaires.
- La programmation nonlinéaire (Non-linear Programming) qui considère des termes non-linéaires dans l'objectif ou les contraintes.

Ce pendant les méthodes globales sont basées sur un aspect de recherche stochastique aléatoire commençant par une population de solution de taille fixe aux cours des générations en quête de la solution optimale globale et qui ne donne pas importance ni a la nature de la fonction a optimisée ni a ses contraintes a respecter, on peut palper maintenant clairement l'avantage qu'elles nous offrent en matière d'optimisation des problèmes marquant par une difficulté grandissante.

Définitions des problèmes d'optimisations :

Considérons le problème général d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in D \end{cases}$$

Où f est la fonction objectif et D est le domaine faisable.

Optimiser la fonction f consiste à déterminer les éléments $x \in D$ tels que f atteigne sa valeur minimale (resp. sa valeur maximale) en x , on parle alors de minimisation (resp. maximisation).

Dans la suite nous traiterons uniquement des problèmes de minimisation car un problème de maximisation se ramène à une minimisation par la relation :

$$\max_{x \in D} f(x) = -\min_{x \in D} f(-x)$$

On distingue deux types d'optimisation, locale et globale.

- x^* est un minimum local de f s'il existe un voisinage $V(x)$ de x tel que

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in V(x) \cap D$$

- x^* est un minimum global de f si

$$f(x) \leq f(x), \forall x \in D$$

.

Remarque :

Un minimum global est un minimum local mais la réciproque est fausse, sauf dans des rares cas, le minimum local coïncide avec le minimum global. Par exemple la minimisation d'une fonction convexe sur un ensemble convexe.

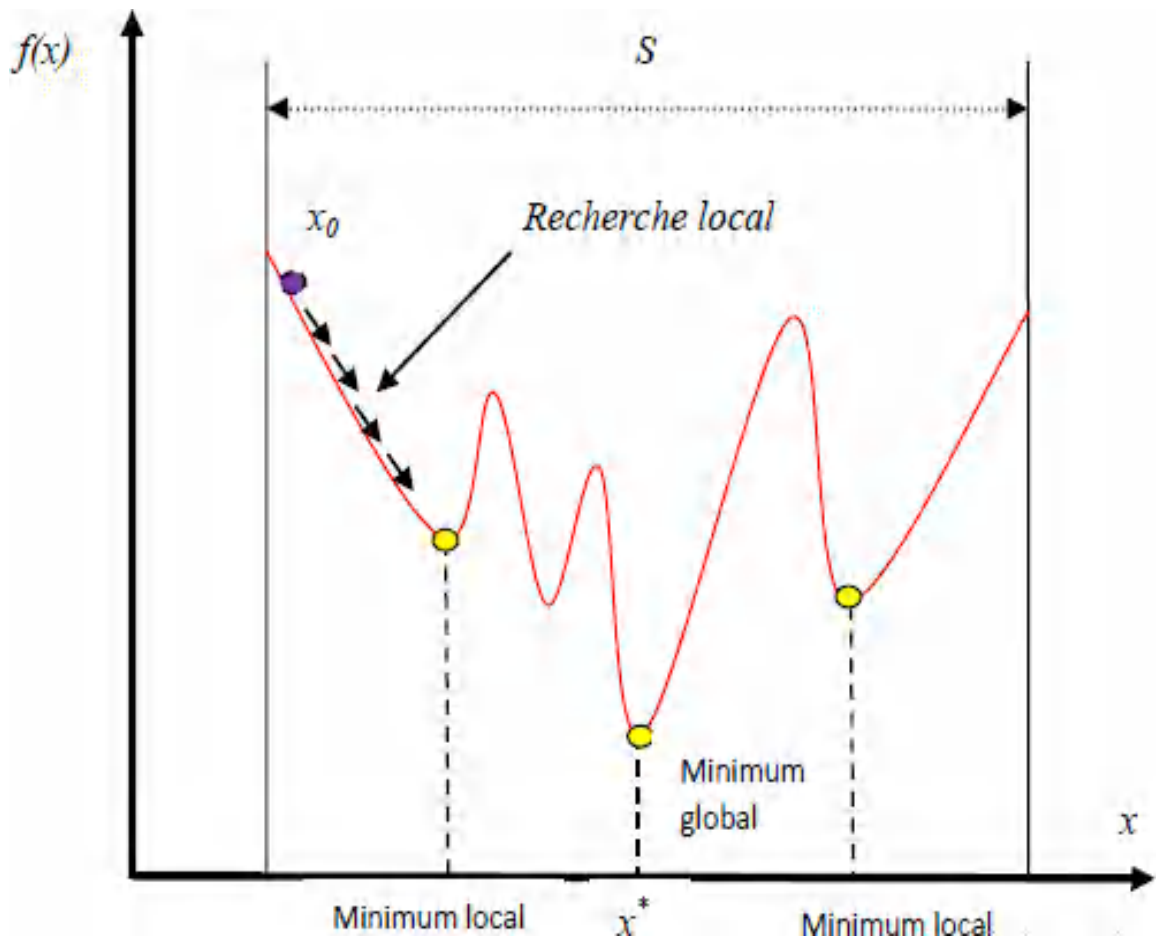


Fig. 37: Minima locaux et minima globaux d'une fonction multimodale

L'optimisation peut se faire avec ou sans contraintes ; on parle alors d'optimisation sans contrainte et d'optimisation avec contraintes.

Le problème d'optimisation sans contraintes s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } x^* \in \mathbb{R} \text{ telque :} \\ f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Le problème d'optimisation avec contraintes s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } x^* \in D \text{ telque :} \\ f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in D \subsetneq \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Définition : Une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ est dite coéercive si

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

Définition : (Convexité) Soit E un espace vectoriel et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est convexe si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \text{ pour tout } x, y \in E \text{ et } t \in [0, 1]$$

On dit que f est strictement convexe si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y) \text{ pour tout } (x, y) \in E^2, x \neq y \text{ et } t \in]0, 1[$$

Sur l'espace E , on dit que $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est fortement convexe de module $a > 0$, si pour

tout $x, y \in \text{dom } f$ et tout $t \in [0, 1]$, on a

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - \frac{a}{2}t(1-t)\|x - y\|^2$$

Après définition de la fonction objectif, le choix d'une méthodologie adaptée s'impose pour la résolution du problème. Les méthodes d'optimisation, répondent à deux classements distincts

- méthodes déterministes.
- méthodes non déterministes

Méthodes déterministes

L'efficacité des méthodes déterministes s'articule autour de la rapidité de l'évaluation de la fonction ou selon la connaissance à priori de ladite fonction. La recherche des extrema d'une fonction f revient à résoudre un système de n équations à n inconnues, linéaire ou non :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

On peut donc utiliser des méthodes classiques telles que la méthode du gradient ou la méthode de Gauss-Seidel [41][42]. En général, l'utilisation de ces méthodes nécessite comme étape préliminaire la localisation des extrema. Celle-ci peut être faite, par exemple, sur un graphique ou par une discrétisation de l'espace de recherche. La fonction à optimiser est évaluée en chacun des points de discrétisation. La valeur maximale est alors considérée comme une bonne approximation de l'optimum de la fonction. Cette méthode est brutale et le temps de calcul augmentera exponentiellement en fonction du nombre de variables.

En effet, considérons une optimisation sur huit variables. Si on discrétise l'intervalle de définition de chaque variable en seulement 3 points, une exploration systématique nécessite $3^8 = 6561$ exécutions du modèle. Dans le cas d'un modèle physique nécessitant 10 secondes de calcul sur un PC standard, cela représente 18 heures de calcul, pour un résultat inutilisable !

Méthodes non déterministes

L'application des méthodes non déterministes pour des cas complexes en reflète le pragmatisme, tel que, par exemple :

- Temps de calcul important.
- Nombreux optimums locaux.
- Fonctions non dérivables.
- Fonctions fractales.
- Fonctions bruitées.

Ces méthodes font appel à des tirages de nombres aléatoires. Elles permettent d’explorer l’espace de recherche de manière plus exhaustive. Citons entre autres[43] :

- Les méthodes Monte Carlo : la fonction est évaluée en un grand nombre de points choisis aléatoirement.
- Les méthodes hybrides : on peut par exemple utiliser la méthode des gradients en partant d’un grand nombre de points choisis aléatoirement. On peut ainsi espérer déterminer au fur et à mesure tous les optima locaux de la fonction.
- Le recuit simulé : on effectue des déplacements aléatoires à partir d’un point initial. Si un déplacement mène à une valeur plus optimale de la fonction f , il est accepté. Sinon, la probabilité s’impose :

$$p = e^{-\frac{|\Delta f|}{kT}}$$

où “ f ” est la variation de la fonction, T est assimilé à une température qui décroît au cours du temps et k est une constante. Cette méthode est basée sur une analogie avec les processus de recuit utilisés en métallurgie et qui visent à atteindre une conguration d’énergie minimale ($-f$ est alors assimilée à une énergie).

- Les Algorithmes Evolutionnaires : le principe est de simuler l’évolution d’une population d’individus divers auxquels on applique différents opérateurs génétiques où l’on soumet à chaque génération à une sélection propre.

Ces algorithmes sont de plus en plus utilisés dans l’industrie car ils sont particulièrement adaptés aux problèmes d’optimisation comportant de nombreux paramètres.

2.4.1 Recherches aléatoires

Dans ce groupe de méthodes on peut avoir des recherches aléatoires pures, qui consistent à tirer un point, au hasard, à chaque itération. La fonction coût est évaluée en ce point, et s'il y a une amélioration, ce point et la fonction correspondante sont enregistrés, et le processus continue. Les recherches aléatoires peuvent aussi être associées aux recherches locales. Ainsi des points au hasard sont pris pour réinitialiser des recherches locales. Ces réinitialisations sont susceptibles de converger plusieurs fois vers les mêmes minima locaux. De plus, il n'y a pas de discrimination entre régions prometteuses ou non prometteuses [41].

2.4.2 Méthode de multi-starts

La méthode multi-départ diffère simplement de la recherche aléatoire par le fait qu'elle applique une procédure de recherche locale au point initial avant de tester si son image est meilleure[44]. Elle présente donc l'avantage de traiter le point généré, mais par contre le point obtenu sera souvent le même. En effet, l'inconvénient de Multi-départ est que le même minimum local peut s'identifier plusieurs fois menant à une recherche globale inefficace.

Durant les années soixante et soixante-dix, la méthode Multistart [45] est la plus utilisée en optimisation global. Sa popularité est due à son importance pratique et qu'elle utilise des méthodes d'optimisation locale qui étaient largement développées dans cette époque. Cette méthode consiste à faire des recherches multiples de minima locaux en partant de différents points initiaux. Ces points sont généralement choisis parmi les éléments d'un maillage uniforme. La difficulté de cette méthode est essentiellement due au fait que, pour être sûr de trouver le minimum global avec une précision voulue, on doit prendre un nombre de point initiaux beaucoup plus grand que le nombre de minimiseur locaux, or ce dernier est presque toujours inconnu. Si les minimiseurs locaux sont éloignés on doit envisager des modifications de Multistart

et de souvent, par l'une des deux façons

suivantes :

- On essaie de localiser chaque minimiseur local par un voisinage, puis on applique une procédure de descente LS (local search). Si un point de recherche atteint l'un de ces voisinages, alors l'algorithme convergera vers le minimum local correspondant. Cette approche n'est possible que si l'on est capable de choisir les voisinages qui sont des domaines d'attraction des minimiseurs locaux. Ceci est très difficile, dans les majorités des cas.

- La deuxième modification s'appelle méthode des points candidats. On effectue des descentes locales simultanées à partir des points initiaux en remplaçant les points voisins par celui qui a la plus petite valeur de la fonction objectif.

Algorithm : ALGORITHME DE BASE DE MULTISTART (MS)

1.**Etape 0** Choisir un point $x_0 \in D$ et poser $f = f(x_0)$ et $k = 0$.

2.**Etape 1** Choisir un point x_k de la grille, et appliquer **LS** à x_k qui donne $\acute{x}_k$.

3.**Etape 2** Si $f(x_k) \prec f^*$, alors poser $f^* = f(x_k)$ et $x^* = \acute{x}_k$.

4.**Etape 3** Si la condition d'arrêt est satisfaite, alors arrêter et retourner la meilleure solution trouvée, Sinon, incrémenter k et retourner à l'étape 1.

2.4.3 Méthodes de Clustering (regroupement)

Les méthodes de groupements peuvent être considérées comme une forme modifiée de l'algorithme standard de multi-départ. Ces méthodes essayent d'éviter l'inefficacité introduite par la méthode de multi-départ en choisissant soigneusement les points auxquels la recherche locale est lancée. Les trois étapes principales des méthodes de groupements sont :

- Echantillonnage du domaine de recherche.
- Transformation des points pour les groupes autour des minima locaux.

– Application d’une technique groupante pour identifier les groupes que représentent les voisinages des minima locaux.

Bien évidemment, la difficulté consiste à regrouper judicieusement les points de manière à ce que tous les points ayant le même groupe. Et si ce procédé identifie avec succès ces groupes ; qui représentent les voisinages des minima locaux ; alors un nombre important des recherches locales peuvent être évité en commençant simplement une recherche locale d’un certain point dans chaque groupe [46]. Deux méthodes existent pour exécuter cette opération de groupement : le groupement de densité et la liaison simple, détaillées dans [47]. Un désavantage de ces méthodes est qu’elles sont peu performantes pour les fonctions ayant de nombreux minima. Dans ces cas, en effet, un grand nombre d’échantillons est nécessaire.

2.4.4 Algorithme de recherche Tabou

La recherche tabou a été largement utilisée pour la résolution de problèmes d’optimisation difficiles comme : le problème du voyageur de commerce, les problèmes du sac à dos, les problèmes de routage,

d’ordonnancement, de coloration de graphes, d’exploitation géologique, etc. C’est une méthode facile à mettre en oeuvre, rapide, donne souvent de bons résultats et permet de se sauver du premier optimum local rencontré contrairement à la méthode de la recherche locale simple. En revanche, la liste tabou demande de ressources importantes si elle est de grande taille. En fait, elle demande une gestion soigneuse de sa taille et de ce qu’elle doit contenir comme informations sur les solutions trouvées, de manière à ne pas être très exigeante en temps de parcours et d’espace mémoire requis et aussi pour éviter les confusions causées par la ressemblance des attributs des solutions qui bloquent la recherche. Il est à noter qu’il existe plusieurs variantes de la recherche tabou. Ces variantes dépendent essentiellement du choix du voisinage et de la manière de gérer la liste tabou. L’algorithme représente un schéma général

de l'algorithme de la recherche tabou.

La recherche tabou (RT) à été proposée en 1986 par Glover [52]. Elle fait appel à un ensemble de règles et de mécanismes généraux pour guider la recherche de manière intelligente [53]. L'optimisation de la solution avec la recherche tabou se base sur deux astuces :

- L'utilisation de la notion du voisinage.
- L'utilisation d'une mémoire permettant le guidage intelligent du processus de la recherche.

En parcourant le voisinage de la solution courante x , la recherche tabou ne s'arrête pas au premier optimum local rencontré. Elle examine un échantillonnage de solution du voisinage de x et retient toujours la meilleure solution voisine $\acute{x}$, même si celle -ci est de piètre qualité que la solution courante x , afin d'échapper de la vallée de l'optimum local et donner au processus de la recherche d'autres possibilités d'exploration de l'espace de recherche afin de rencontrer l'optimum global. En fait, les solutions de mauvaise qualité peuvent avoir de bons voisinages et donc guider la recherche vers de meilleures solutions.

Cependant, cette stratégie peut créer un phénomène de cyclage (i.e. on peut revisiter des solutions déjà parcourues plusieurs fois). Afin de pallier à ce problème, la recherche tabou propose l'utilisation d'une mémoire permettant le stockage des dernières solutions rencontrées pour ne pas les visiter dans les prochaines itérations et tomber dans le problème du cyclage répétitif. Cette mémoire est appelée « la liste tabou » , (noté L_t). La taille de la liste tabou est limitée, ce qui empêche l'enregistrement de toutes les solutions rencontrées. C'est la raison pour laquelle la liste tabou procède comme une pile FIFO (First In First Out), où la plus ancienne solution sera écartée pour laisser place à la dernière solution rencontrée. Le but de faciliter la gestion de la liste tabou en termes de temps de calcul ou d'espace mémoire nécessaires à pousser les chercheurs à proposer de ne conserver dans la liste que des attributs (i.e.

caractéristiques) des solutions au lieu des solutions complètes. Particulièrement, dans le cas où le nombre de variables est très élevé. Toutefois, l'utilisation de la liste tabou peut mener à un blocage dans certains cas. En fait, les nouvelles solutions qui possèdent des attributs des solutions tabou, seront considérées tabou aussi même si elles ne sont pas encore été visitées. Pour remédier à ce problème, on a défini une technique appelée « critère d'aspiration » permettant de sortir du blocage causé par la ressemblance des attributs des solutions tabou. Le critère d'aspiration permet d'omettre le statut tabou sur une solution lorsque certaines circonstances sont respectées. Un critère d'aspiration très classique consiste à autoriser une solution tabou si celle-ci est l'une des meilleures solutions rencontrées depuis le démarrage de la recherche.

Algorithme :ALGORITHME DE RECHERCHE TABOU (RT)

1.Etape 0 x_0 : une solution initiale,

$$x = x_0, \quad x^* = x_0, \quad f^* = f(x_0), \quad L_t = \emptyset$$

.

2.Etape 1 Générer un sous-ensemble de solution au voisinage de $x, \acute{x} \in N(x)$ tel que

$$\forall y \in N(x), \quad f(y) \geq f(\acute{x}) \text{ et } \acute{x} \notin L_t$$

Si

$$f(\acute{x}) < f^* \text{ alors } x^* = \acute{x} \text{ et } f = f(\acute{x})$$

Mise-à-jour de L_t .

3.Etape 2 Si la condition où critère d'arrêt est atteinte, stop x^* et la solution optimal.

Sinon retour à l'étape 1.

2.4.5 Méthodes de recuit simulé

La méthode du recuit simulé (SA : Simulated annealing) trouve ses origines dans le formalisme de mécanique statistique (algorithme Metropolis [54]). Elle a été mise

au point par trois chercheurs de la société IBM, S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt et M.P. Vecchi en 1983 [55], et indépendamment par Cerny en 1985 [56]. Le principe de la méthode est inspiré de la technique du recuit utilisée en métallurgie. Le recuit permet d'améliorer la qualité d'un matériau en augmentant sa température puis en contrôlant le refroidissement par un apport externe de chaleur. Le refroidissement, suivant un rythme convenable a pour effet d'atteindre la configuration optimale des atomes pour avoir la meilleure stabilité. Ce qui permet d'obtenir un métal plus homogène en éliminant les impuretés. De manière analogue, pour le recuit simulé, nous parlerons de l'énergie du système et nous cherchons à atteindre la configuration du système qui possède l'énergie la plus faible. Cette méthode est transposée en optimisation pour trouver les extrema d'une fonction : la fonction objectif, assimilée à l'énergie d'un matériau, est alors minimisée, moyennant l'introduction d'une température fictive, qui est contrôlée par une fonction décroissante qui définit un schéma de refroidissement. L'algorithme commence par générer une solution initiale (soit de façon aléatoire ou par une heuristique). À chaque nouvelle itération, une solution x_0 est générée de manière aléatoire dans le voisinage $N(x)$ de la solution courante x : La solution $\acute{x}$ est retenue si elle est de performance inférieure ou égale à celle de la solution courante, i.e. $f(\acute{x}) \leq f(x)$ Dans le cas contraire, $\acute{x}$ est acceptée avec une probabilité $\exp\left(\frac{-\Delta f}{T}\right)$. Cette probabilité dépend de deux facteurs :

d'une part l'importance de la dégradation ($\Delta f = f(\acute{x}) - f(x)$). Les dégradations plus faibles sont plus facilement acceptées, d'autre part, un paramètre de température T une température élevée correspond à une probabilité plus grande d'accepter des dégradations.

Ainsi, au début de la recherche, la probabilité d'accepter des dégradations est élevée et elle diminue progressivement.

Dans la méthode SA, les mécanismes d'intensification et de diversification sont contrôlés par la température. La température T ne fait que décroître pendant

le processus de recherche, de sorte que la recherche tend à s'intensifier vers la fin de l'algorithme. L'idée est de diminuer petit à petit la chance d'accepter des solutions qui dégradent la fonction objectif. L'algorithme s'arrête lorsque la température atteint une valeur proche de zéro, ou la chaîne (chaîne de Markov) atteint une certaine longueur maximale.

Algorithm : ALGORITHME DE RECUIT SIMULÉ (SA)

1. **Etape 0** Donner T_0 : température initiale, poser $T = T_0$ et choisir T_{fin} , comme température finale.

(a) Donner L , la longueur maximale de la chaîne.

(b) Choisir une solution initiale x_0 , et poser $x = x_0$, $k = 0$.

2. **Etape 1** Choisir x_0 suivant une certaine loi de probabilité, calculer $\Delta f = f(\hat{x}) - f(x)$, Si $\Delta f \leq 0$, alors poser $x = x_0$, Sinon, générer un nombre aléatoire $r \in [0; 1[$: Si $\exp\left(\frac{-\Delta f}{T_k}\right) \succ r$, alors poser $x = x_0$.

3. **Etape 2** Si $k < L$, alors poser $k = k + 1$ et répéter l'étape 1. sinon décroître la température T . Si $T > T_{fin}$, poser $k = 0$ et répéter l'étape 1. sinon, retourner la meilleure solution trouvée.

2.4.6 Optimisation stochastique

L'optimisation stochastique est une méthode qui génère et utilise des variables aléatoires. Ces variables aléatoires apparaissent dans la formulation du problème d'optimisation lui-même, qui impliquent des fonctions objectif aléatoires ou des contraintes aléatoires, par exemple. Certaines méthodes d'optimisation stochastiques aléatoires itérées sont utilisées pour résoudre des problèmes stochastiques, en combinant les deux significations de l'optimisation stochastique.

En effet les méthodes d'optimisation stochastique généralisent les méthodes déterministes pour les problèmes déterministes. De plus, une demande croissante existe pour la résolution de problèmes d'optimisation issus du monde réel, pour les quels les

données ou les fonctions objectifs ont souvent incertaines, et où il s'avère parfois nécessaire de trouver des solutions robustes à des modifications ultérieures susceptibles de survenir sur les variables de décision. C'est la prise en compte de ces incertitudes dans le processus d'optimisation qui a donné naissance à l'optimisation stochastique.

Autrement dit, l'optimisation stochastique est un domaine de la programmation mathématique classique qui tient compte de l'incertitude du problème. La notion d'incertitude dans la programmation mathématique est apparue pour la première fois dans les années cinquante. Elle a rencontré depuis un développement rapide. Les avancées récentes sont ouvertes de nouvelles perspectives qui devraient être fructueuses tant d'un point de vue théorique que pratique. L'optimisation stochastique n'est pas une famille de problèmes, de modèles et d'outils différents des autres domaines d'optimisation (programmation linéaire, non-linéaire, dynamique), au contraire, elle constitue un complément de ces familles lorsque la notion d'incertitude intervient. Dans ce cas nous parlerons de programmation stochastique linéaire, non-linéaire ou bien de programmation stochastique dynamique. En effet, le but qui se fixe dans un problème d'optimisation stochastique est de prendre la meilleure décision vis à vis des situations qui comportent de l'incertitude.

2.4.7 Méthodes évolutionnaires

Les méthodes évolutionnaires sont des méthodes d'optimisation probabilistes qui sont souvent présentées par analogie avec la théorie de la sélection naturelle de Darwin. Les individus les plus performants d'une population ont une plus grande probabilité de survivre et de se reproduire, en donnant des descendants encore mieux adaptés. La correspondance avec la minimisation d'une fonction est la suivante : un "individu" est un point x , la "population" est un ensemble de points, et "la performance d'un individu" x est évaluée par sa valeur de fonction coût $f(x)$. En partant d'une

échantillonnage de l'espace de recherche (une population initiale), ces méthodes réalisent des tirages de nouvelles populations (des générations) à l'aide d'opérations de sélection, croisement et mutation [54, 55, 56, 57]. Les différents algorithmes évolutionnaires se distinguent par la mise en oeuvre de ces opérations. Historiquement, ils ont été développés indépendamment en trois variantes : algorithmes génétiques, stratégies d'évolution et programmation évolutive. Un exemple de structure d'algorithme évolutionnaire est le suivant :

- initialisation de la population $P(t), t = 0$ (au hasard, par exemple) ;
- évaluation de la population courante $P(t)$: calcul de la fonction coût f pour tous les points de la population ;
- sélection de certains individus de $P(t)$ en fonction de leur fonction coût f par exemple les meilleurs : les parents $P_0(t)$,
- croisement entre parents et création des "enfants" $\Rightarrow P_1(t)$,
- Mutation perturbation aléatoire des individus de $P_1(t) \Rightarrow P_2(t)$,
- Évaluation de $P_2(t)$,
- Formation de la nouvelle population $P(t + 1)$ à partir des individus de $P(t)$ et de $P_2(t)$, par exemple en choisissant les meilleurs individus appartenant à $P(t)$ et à $P_2(t)$;
- $t \leftarrow t + 1$;
- Si le critère d'arrêt n'est pas satisfait, retour en 3.

Une quatrième famille de méthodes évolutionnaires, plus distante de la métaphore biologique et au formalisme plus rigoureux, est la famille des algorithmes d'optimisation statistique. À partir des individus sélectionnés (étape 3), une densité de probabilité de présence de l'optimum est estimée. Cette densité servira à générer des nouveaux individus (étapes 4 et 5). Ces méthodes peuvent être considérées comme des algorithmes évolutionnaires sans opérateurs. Les algorithmes évolutionnaires permettent de réaliser des recherches globales, formellement grâce à l'étape

5. Leurs intérêts pratiques réside dans leurs applicabilité à une très large gamme de problèmes car ils n'utilisent que la fonction coût (pas de dérivées) et peuvent accommoder des variables mixtes. Cependant, pour trouver un optimum, ils ont besoin d'un grand nombre d'évaluations de la fonction coût. Ainsi, ils ne sont considérés directement utilisables que pour les problèmes où le calcul de la fonction ne nécessite pas de ressources importantes.

2.4.8 Les algorithmes de recherche chaotiques :

On a traité dans la section précédente une classe des approches probabilistes bases sur l'observation. Parmi ces méthodes, l'algorithme de recherche aléatoire est probablement le plus robuste, le plus simple et n'est pas le moins efficace. Les algorithmes de recherche aléatoire peuvent être utilisés d'une manière intelligente, de manière à ce que leur efficacité puisse être améliorée et leurs avantages restent valables en même temps. L'idée principale est de construire des algorithmes de recherche chaotique qui explorent l'espace de recherche d'une manière chaotique. Les algorithmes d'optimisation chaotiques comme une méthode émergente de l'optimisation globale ont attiré beaucoup d'attention dans les applications d'ingénierie. Leurs bonnes performances ont été soulignées. Dans le cadre d'algorithmes évolutionnaires, l'utilisation de séquences chaotiques au lieu de celle ci a été introduite par Caponetto et al. [41]. Depuis leur travail original, la littérature sur l'optimisation chaotique est florissante. Ils sont utilisés dans le cadre de la méthode de réglage pour déterminer les paramètres du PID d'un régulateur de tension automatique, ou également pour l'optimisation de la conception technique et dans beaucoup d'autres problèmes physiques, économiques et biologiques.

La Recherche Chaotique de l'optimum

La méthode de la recherche chaotique est une méthode très simple, non affectée par la dimension du problème d'optimisation. Cette méthode est basée sur l'exploration de

l'espace de recherche S d'une manière chaotique afin de trouver un point qui minimise la fonction objective f . Cette méthode consiste à sélectionner à chaque itération une solution au hasard. La fonction objective f est évaluée en ce point. La nouvelle valeur est comparée à la précédente, si elle est meilleure que la précédente, cette valeur est enregistrée, ainsi que la solution correspondante, et le processus continue. Sinon on repart du point précédent et on recommence le procédé, jusqu'à ce que les conditions d'arrêt soient atteintes. La figure (2.3) résume l'algorithme.

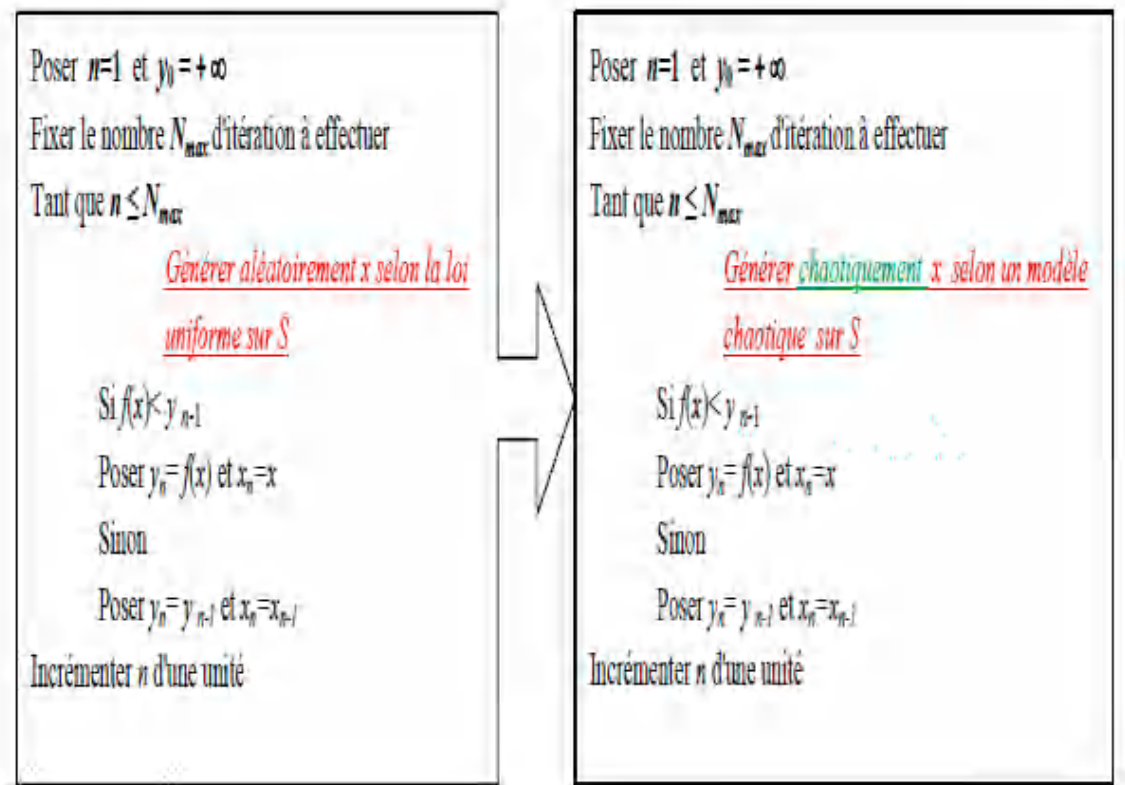


Fig. 38: Algorithme de recherche aléatoire où $(x^* = x_0, f^* = y_n)$

2.4.8.1 Principes et étapes du COA :

Beaucoup de problèmes d'optimisation sans contrainte avec des variables continues peuvent être formulés comme des problèmes d'optimisation de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_x f(x) \\ \text{telque} \\ X = [x_1, x_2, \dots, x_n] \\ x_i \in [L_i, U_i], \quad i = 1, \dots, n, \end{array} \right.$$

La f est appelée fonction objectif, X représente le vecteur des variables d'optimisation la procédure de recherche chaotique basée sur le modèle 2-D (Lozi) peut être illustrée comme suit :

Entrées :

M_g : le nombre maximal d'itérations de la recherche globale chaotiques.

M_l : le nombre maximum d'itérations de la recherche locale chaotiques.

$M_l + M_g$: le critère d'arrêt de la méthode d'optimisation chaotique.

λ : le pas de la recherche locale chaotique.

Sorties : X : la meilleure solution d'exécution en cours de recherche chaotique.

f : la meilleure fonction objectif.

Le processus de base de **COA** comporte généralement deux phases principales définir un générateur de séquences chaotiques basées sur une application chaotique (ici 2-D chaotique map). puis on génère un point candidat x_c dans la région de recherche $[L, U]$, l'optimum x , est le point candidat ayant obtenu la plus petite valeur de $f(x_c)$.

Le processus est schématisé par l'algorithme de la page suivante, les points x_c sont générés dans le domaine $[L, U]$ au moyen du vecteur chaotique z . Dans cet algorithme, nous supposons que les composantes de z sont restreintes à l'intervalle $[0, 1]$.

A chaque itération, un nouveau vecteur de séquences chaotiques est généré en utilisant le modèle chaotique.

Algorithme : COIM

1. étape 1 : initialiser le numéro M_g, M_l de recherche chaotique et

d'initialisation de variables et d'ensembles de conditions initiales $k = 1, y(0)$,

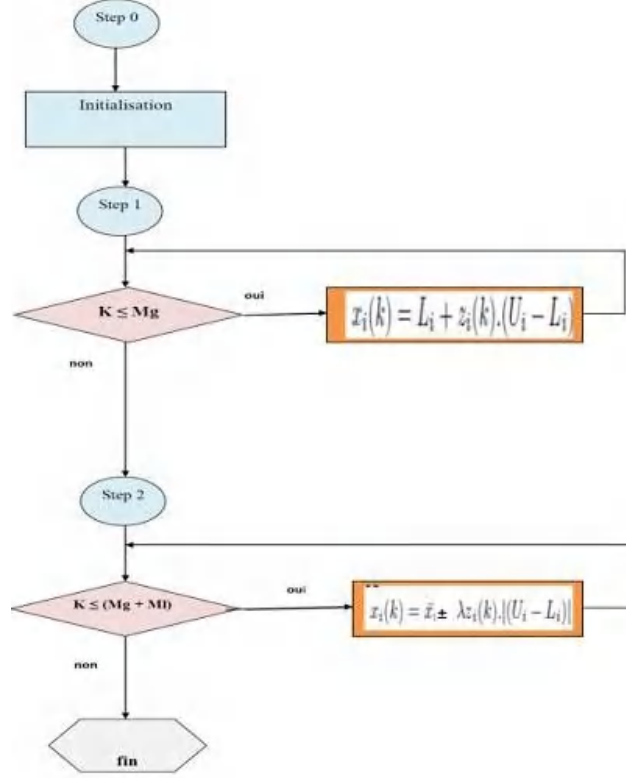


Fig. 39: Diagramme de l'algorithme COA.

$y_1(0)$, $a = 1.7$ et $b = 0.5$ de la carte de lozi
définies la meilleure fonction initiale $\bar{f} = +\infty$

1. étape 2 : algorithme de recherche globale chaotique :

On obtient un nouvel optimum local x . L'étape deux de cet algorithme de la recherche chaotique globale est similaire à la technique d'optimisation de Monte-Carlo qui converge lentement et obtient l'optimum global avec une faible probabilité. La première étape de cet algorithme est utilisée pour obtenir un bon optimum pour l'étape de raffinement où la recherche chaotique locale. z est toujours le modèle chaotique et λ est un paramètre scalaire lié au rayon de la recherche autour de x . Les optima locaux sont mis à jour chaque fois qu'un point est trouvé de mieux telle que la procédure se poursuit pour la recherche au voisinage du nouveau point optimal.

Algorithm : COLM

1 -**Step 1** : Initialize the number M_g , M_l of chaotic search and initialization of variables and initial conditions Set $k = 1$, $y(0)$, $y_1(0)$, $a = 1.7$ and $b = 0.5$ of Lozi map.

Set the initial best objective function $\bar{f} = +\infty$

2 -**Step 2 : algorithm of chaotic global search :**

while $k \leq M_g$ do $x_i(k) = L_i + z_i(k).(U_i - L_i)$

if $f(X(k)) < \bar{f}$ then

$\bar{X} = X(k); \bar{f} = f(x(k))$

end if

$k = k + 1$

end while

Step 3 : algorithm of chaotic local search :

while $k \leq (M_g + M_l)$ do

if $r \leq 0.5$ then

$x_i(k) = \bar{x}_i + \lambda z_i(k).|(U_i - L_i)|$

else

$x_i(k) = \bar{x}_i - \lambda z_i(k).|(U_i - L_i)|$

end if

if $f(X(k)) < \bar{f}$ then

$\bar{X} = X(k); \bar{f} = f(x(k))$

end if

$k = k + 1$

end while

2.5 *Conclusion*

Dans ce chapitre, nous avons fourni une définition générale de l'optimisation et abordé quelques méthodes d'optimisation, où nous nous sommes concentrés sur l'optimisation globale et locale à la fois déterministe et stochastique. Parmi les méthodes déterministes, les méthodes de recouvrement qui ont la réputation d'être efficaces en dimension1. Contrairement aux méthodes déterministes, les méthodes stochastiques ont l'avantage d'être facilement exécutables sur machine. Ce pendant, ces méthodes ne sont pas efficaces mais elles sont utilisées lorsqu'il n'est pas possible de résoudre le problème avec une méthode déterministe. Dans ce chapitre aussi, nous avons également fourni un exemple des algorithmes d'optimisation chaotique, dont nous présenterons une application sur ces algorithmes dans le prochain chapitre.

Chapitre III

ÉTUDE ET ANALYSE D'UNE MÉTHODE D'OPTIMISATION

3.1 *Introduction*

L'identification de l'optimum global d'une fonction multimodale reste encore une tâche très difficile, malgré la puissance de la technologie de l'information d'aujourd'hui et les multitudes de techniques de recherche qui existent. Le chaos est désormais un concept bien établi et il y a une vaste littérature sur la nature du chaos. Depuis plus de trois décennies, le comportement inhabituel des systèmes chaotiques a attiré l'attention de plusieurs différentes communautés scientifiques. Les comportements chaotiques ont été observés dans différents domaines des sciences, par exemple l'ingénierie, la médecine, la biologie et l'économie. Le chaos est mathématiquement défini comme un modèle aléatoire généré par des systèmes déterministes simples. En général, le chaos a trois importantes propriétés :

- la sensibilité aux conditions initiales.
- la propriété de semi-stochastique.
- la propriété quasi-aléatoire.

L'utilisation des systèmes chaotiques au lieu des processus aléatoires a été remarqué dans plusieurs domaines. Un de ces champs est la théorie de l'optimisation. Dans les algorithmes d'optimisation aléatoire le rôle du hasard peut être joué par une dynamique chaotique. Des études expérimentales ont affirmé que les avantages de l'utilisation des modèles chaotiques au lieu des modèles aléatoires sont souvent évidents mais il n'est pas encore mathématiquement prouvé. A partir de ces propriétés

du chaos, certains nouveaux algorithmes de recherche appelés algorithmes d’optimisation chaotique (COA) sont présentés dans la littérature. Les méthodes (COA) peuvent facilement échapper à des minima locaux contrairement aux algorithmes d’optimisation stochastiques. L’algorithme d’optimisation stochastique s’échappe souvent à des minima locaux en acceptant quelques mauvaises solutions selon une certaine probabilité. Mais les COA s’échappent à des minima locaux à cause de la régularité des mouvements chaotiques. On présente dans ce chapitre l’algorithme d’optimisation chaotique. Puis on définit trois fonctions tests. En suite, on applique cet algorithme sur ces fonctions, en employant quatre chao map. Nous présentons également les résultats numériques obtenus[59].

3.2 Principes d’un algorithme d’optimisation chaotique

Parmi les stratégies de recherche couramment utilisées dans l’optimisation globale, la stratégie de recherche chaotique s’inspire du phénomène de chaos dans la nature. Le chaos peut être généré par un système dynamique non-linéaire de structure assez simple, une simple équation de récurrence peut produire des dynamiques chaotiques assez complexes et riches. Les signaux chaotiques possèdent de nombreuses caractéristiques distinctes, telles que :

- Haute sensibilité aux conditions initiales et aux paramètres du système.
- Auto-et inter corrélations proches de celles des signaux aléatoires.
- Pseudo-aléatoire et imprevisible à long terme.
- Déterministe.
- Ergodique, c.- a-d, la plupart des orbites conduisent a la même distribution.

L’idée d’utiliser des systèmes chaotiques au lieu des processus aléatoires a été remarquée dans plusieurs domaines. Un de ces champs est la théorie de l’optimisation. Dans les algorithmes d’optimisation aléatoire le rôle du hasard peut être joué par

une dynamique chaotique. Des études expérimentales ont affirmé que les avantages de l'utilisation des modèles chaotiques au lieu des modèles aléatoires sont souvent évidents mais il n'est pas encore mathématiquement prouvé.

Beaucoup de problèmes d'optimisations sans contraintes avec des variables continues peuvent être formulés comme des problèmes d'optimisation de la manière suivante :

$$\begin{cases} \min f(X) & \text{tel que,} \\ X = [x_1, x_2, \dots, x_n] \\ x_i \in [L_i, U_i], \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

où : f est appelée fonction objectif, X représente le vecteur des variables d'optimisation. La procédure de recherche chaotique basée sur certain modèle chaotique peut être illustrée comme suit :

Données :

M_l : le nombre maximum d'itérations de la recherche locale chaotiques.

M_g : le nombre maximum d'itérations de la recherche globale chaotiques.

$M_l + M_g$: le critère d'arrêt de la méthode d'optimisation chaotique.

λ : le pas de la recherche locale chaotique.

Sorties :

$\bar{X}$: la meilleure solution d'exécution en cours de recherche chaotique.

$\bar{f}$: la meilleure valeur de la fonction objectif.

Le processus de base de COA comporte généralement deux phases principales ; De plus, définir un générateur de séquences chaotiques basées sur une application chaotique. puis on génère un point candidat x_c dans la région de recherche $[L, U]$, l'optimum $\bar{x}$, est le point candidat ayant obtenu la plus petite valeur de $f(x_c)$. Le processus est schématisé par l'algorithme suivant, les points x_c sont générés dans le domaine $[L, U]$ au moyen du vecteur chaotique z . Dans cet algorithme , nous supposons que les composantes de z sont restreintes à l'intervalle $[0, 1]$. A chaque itération, un

nouveau vecteur de séquences chaotiques est généré en utilisant le modèle chaotique.

Algorithme 1 :

1 -**étape 1** : initialiser le numéro M_g, M_l de recherche chaotique et d'initialisation de variables et d'ensembles de conditions initiales définies $k = 1, y(0), y_1(0), a = 1$ et $b = 1$ de Gingerbreadman. définir la meilleure fonction objectif initiale $f = +\infty$

2 -**étape 2 : algorithme de recherche globale chaotique :**

alors que $k \leq Mg$ **faire**

$$x_i(k) = L_i + z_i(k) \cdot (U_i - L_i)$$

si $f(X(k)) < \bar{f}$ **alors**

$$\bar{X} = X(k); \bar{f} = f(x(k))$$

fin si

$$k = k + 1$$

fin tout en

-**étape 3 : algorithme de recherche locale chaotique :**

alors que $k \leq (Mg + M_l)$ **faire**

si $r \leq 0 : 5$ **alors**

$$x_i(k) = \bar{x}_i + \lambda z_i(k) \cdot |(U_i - L_i)|$$

autre

$$x_i(k) = \bar{x}_i - \lambda z_i(k) \cdot |(U_i - L_i)|$$

fin si

si $f(X(k)) < f$ **alors**

$$\bar{X} = X(k); \bar{f} = f(x(k))$$

fin si

$$k = k + 1$$

fin tout en

On obtient un nouvel optimum local $\bar{x}$. L'étape deux de cet algorithme de la

recherche chaotique globale est similaire à la technique d'optimisation de Monte-Carlo qui converge lentement et obtient l'optimum global avec une faible probabilité. La première étape de cet algorithme est utilisée pour obtenir un bon optimum pour l'étape de raffinement où la recherche chaotique locale z est toujours le modèle chaotique et est un paramètre scalaire lié au rayon de la recherche autour de $\bar{x}$. Les optima locaux sont mis à jour chaque fois qu'un point est trouvé de mieux telle que la procédure se poursuit pour la recherche au voisinage du nouveau point optimal.

3.3 *Les applications (Modèle chaos)*

Un modèle chaotique est un modèle qui présente un certain type de comportement chaotique. Dans ce travail, nous avons appliqué trois modèles chaotiques différentes qui sont courantes dans la littérature, à savoir le modèle de Hénon, le modèle de Lozi, le modèle de Gingerbread man. La forme mathématique d'un modèle bidimensionnelle chaotique le quelle modèle de carré de l'unité est $I \times I$,

où $I = [0, 1]$ sur lui-même. Plus tard, nous utiliserons ces modèles dans les recherches chaotiques.

3.3.1 L'application de Hénon

L'application Hénon est un système dynamique au temps discret [21]. C'est l'un des exemples les plus étudiés des systèmes dynamiques qui présentent un comportement chaotique. L'application de Poincaré correspondante au modèle de Lorenz étant fortement dissipative, donc difficile à calculer précisément. M. Hénon en 1976, dans le but de simplifier le système de trois équations différentielles du modèle de Lorenz, proposa l'application suivante du plan sur lui même :

$$\begin{cases} y_1(k) = 1 - a(y_1(k-1))^2 + by(k-1) \\ y(k) = y_1(k-1) \end{cases}$$

où k est le numéro d'itération.

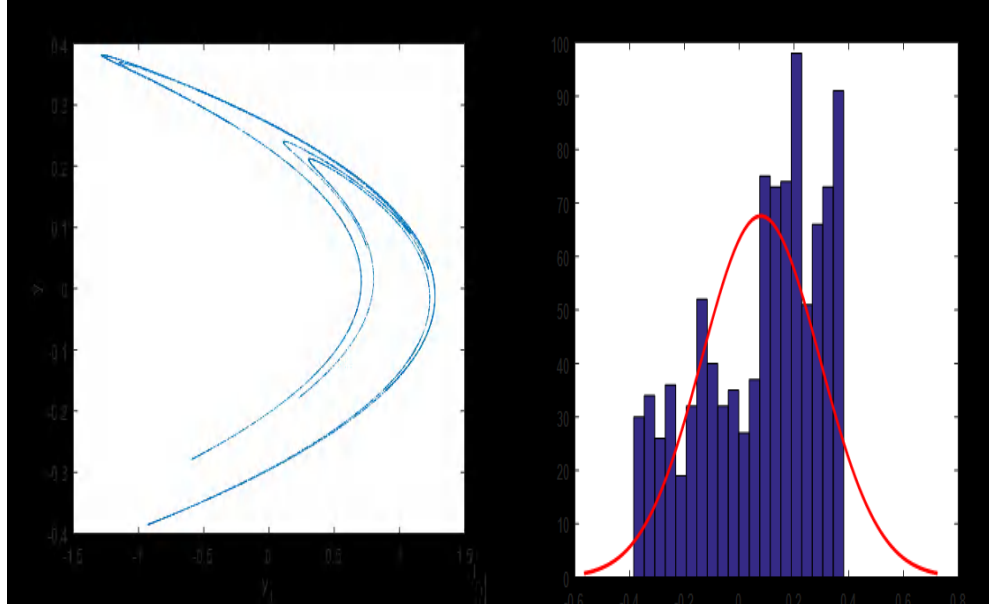
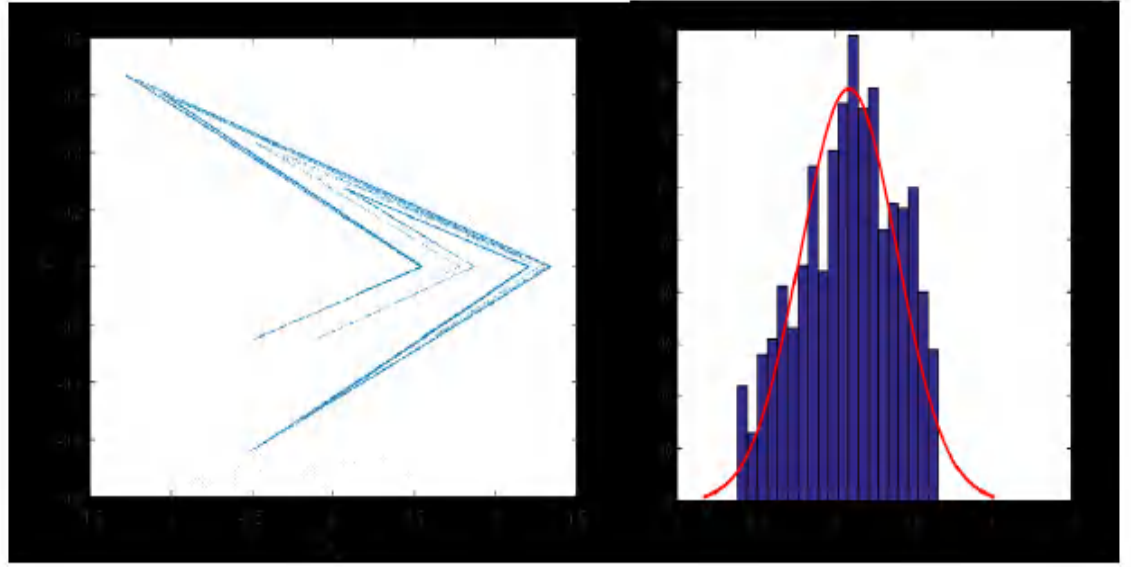


FIG. 40: Attracteur Hénone thistogramme de distribution des séquences chaotiques générées par le modèle de Hénon

3.3.2 L'application de Lozi

Modèle de Lozi [22,23] qui est une simplification linéaire par morceaux de modèle de Hénon et qui admet des attracteurs étranges. Il est donné par morceau

$$\begin{cases} y_1(k) = 1 - a|y_1(k-1)| + by(k-1) \\ y(k) = y_1(k-1) \end{cases}$$

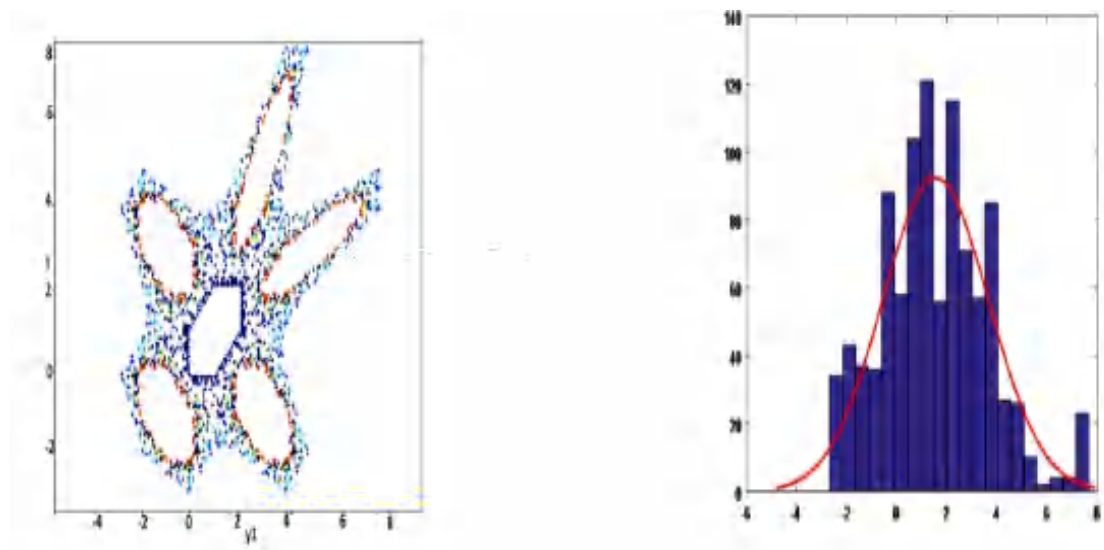


Attracteur de Lozi et histogramme de distribution des séquences chaotiques générées par le modèle de Lozi

3.3.3 L'application de Guingerbreadman

Dans la théorie des systèmes dynamiques, le modèle de Gingerbread man [25] est un modèle bidimensionnelle chaotique. Elle est donnée par la transformation linéaire par morceau

$$\begin{cases} y_1(k) = 1 - a(y_1(k-1))^2 + by(k-1) \\ y(k) = y_1(k-1) \end{cases}$$



Attracteur Gingerbreaman et histogramme de distribution des séquences chaotiques
générées par le modèle Gingerbreaman

3.3.4 Désigne d un algorithme COA

L'étude du chaos s'est rapidement développée et a attiré une grande attention en raison d'une variété d'applications scientifiques et technologiques, par exemple. optimisation globale basée sur le chaos. Les systèmes chaotiques peuvent également être classés en systèmes de haute et basse dimensions. Les systèmes chaotiques de faible dimension ont une efficacité élevée et une faible consommation de ressources. Les systèmes de faible dimension les plus couramment utilisés sont le modèle logistique[57]. Le comportement chaotique de ces systèmes. Il est difficile de s'assurer que la séquence de sortie a une grande période. En revanche, les systèmes chaotiques de grande dimension ont un comportement dynamique non-linéaire plus complexe.

La périodicité de la séquence de sortie d'un modèle chaotique numérique bidimensionnelle est évidemment plus grande que celle de la séquence de sortie d'un modèle chaotique numérique unidimensionnelle, et son caractère aléatoire est également meilleur. L'algorithme d'optimisation chaotique COA est l'un des sujets brûlant sa cours des dernières années. COA est une méthode efficace pour résoudre le problème d'optimisation d'une fonction multi modale non-linéaire avec contrainte aux limites. Les algorithmes d'optimisation chaotique (COA) utilisent généralement différentes modèles unidimensionnelles (logistique,tente,Chebyshev,Circle,...) comme générateur de variables chaotiques dans les problèmes d'optimisation nonlinéaire. Le principal défaut de cette méthode est que la distribution des séquences chaotiques produites par les modèles choisis est non uniforme et leur densité peu élevée au voisinage du point optimal global conduisant à la constringence lente. Ce la a donné naissance à l'idée sur la quelle nous travaillons ; Qui stipule que nous recherchons et choisissons les modèles qui ont un bon comportement chaotique et une densité a déquate en élevant la dimension des modèles utilisées dans l'algorithme d'optimisation à la dimension $2 - D$ nombreuses stratégies chaotiques dans COA comprennent généralement deux étapes principales : la phase globale et la phase locale. Tout d'abord, pendant la phase globale, des points chaotiques sont extraits du domaine de recherche $[L, U]$ selon un certain modèle chaotique $2 - D$. En suite, la fonction objectif est évaluée en ces points et choisit le point avec la fonction objectif minimale comme optimum actuel. Deuxièmement, pendant la phase locale, l'optimum courant est supposé être proche de l'optimum global après certaines itérations et il est considéré comme le centre avec une petite perturbation chaotique et l'optimum globale et obtenu par la recherche fine. Considérons le problème d'optimisation suivant sur le minimum de fonctions, si la fonction cible $f(x_i)$ est continue et différentiable, le problème objet à optimiser est présenté dans : Trouver x_i à minimiser $f(x_i)$, $x_i \in [L_i, U_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Les principale sprocédures de cet algorithme sont présentées comme suit :

Entrées :

M_g : nombre maximum d'itérations de la recherche globale.

M_l : nombre maximal d'itérations de la recherche locale.

$M_l + M_g$: critère d'arrêt de la méthode d'optimisation chaotique en itérations

λ : taille de pas dans la recherche locale chaotique

Sorties :

$\bar{X}$: meilleure solution de l'exécution actuelle de la recherche chaotique.

$\bar{f}$: meilleure fonction objectif (problème de minimisation).

Étape1 : initialisation des nombres M_g , M_l d'étapes de recherche chaotique et initialisation des paramètres et conditions initiales. Soient $k = 1$, $y(0)$, $y_1(0)$, $a = 1.4$ et $b = 0.3$ de modèle de Hénon,

$a = 1.7$ et $b = 0.5$ de modèle de Lozi, $a = 1$ et $b = 1$ de modèle de Gingerbreadman

. Définit la fonction initiale du meilleur objectif $\bar{f} = \text{infini}$.

Étape2 : algorithme de recherche globale chaotique :

soient les variables chaotiques

$$z_i(k) = \frac{(x_i(k) - L_i)}{(U_i - L_i)}$$

dans les variables d'optimisation $x_i(k)$ par l'équation suivante dans la fonction de modèle chaotique :

$$x_i(k) = L_i + (U_i - L_i)z_i(k) \quad \text{Où} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

.

Il est déterminé par la phase des séquences chaotiques générées par chaque modèle chaotique pour sélectionner quelle équation. Comme les séquences chaotiques générées par les modèles chaotiques sont l'intervalle $[0, 1]$, elles peuvent appliquer $[0, 1]$ dans l'intervalle $[L, U]$ pour les variables d'optimisation.

Étape3 : calculez la valeur de la fonction $f(x(k))$. Si

$$f(x(k)) < \bar{f} \text{ alors } \bar{f} = f(x(k))$$

et la solution optimale $\bar{x} = x(k)$

Étape4 : utilise une fonction de modèle chaotique pour générer les prochaines variables chaotiques $z_i(k+1)$.

Étape5 : $k = k + 1$. Si $k \leq M_g$ passez à l'étape 2, si non termine z la première étape de recherche.

Étape6 : algorithme de recherche locale chaotique :

Si $r < 0.5$ alors (où r est un aléatoire uniformément distribué)

Appliquer les variables chaotiques $z_i(k)$ dans les variables d'optimisation $x_i(k)$ par l'une des équations suivantes de la fonction de modèle chaotique :

$$\begin{aligned}x_i(k+1) &= \bar{x}_i + \lambda \cdot z_i(k) \cdot |U_i - \bar{L}_i| \\x_i(k+1) &= x_i - \lambda \cdot z_i(k) \cdot |U_i - \bar{L}_i|\end{aligned}$$

Où $i = 1, 2, \dots, n$.

-Étape7 : On calcule la valeur de la fonction $f(x(k_1)), f(x(k_2))$. Prenez la valeur minimale dans les deux comme $f(x(k))$. Si

$$f(x(k_1)) < f(x(k_2))$$

alors

$$x(k) = x(k_1), f(x(k)) = f(x(k_1))$$

si non

$$x(k) = x(k_2), f(x(k)) = f(x(k_2))$$

Comparez $f(x(k_1))$ avec la valeur optimale jusqu'ici $\bar{f}$. Si

$$f(x(k)) < \bar{f} \text{ alors } \bar{f} = f(x(k))$$

et la solution optimale

$$\bar{x} = x(k)$$

— **Étape8** : utilise une fonction de modèle chaotique pour générer les prochaines variables chaotiques $z_i(k+1)$.

— **Étape9** : $k = k + 1$. Si $k \leq M_g + M_l$ passez à l'étape 6, si non terminez la deuxième étape de recherche.

3.3.5 Contrôle de la taille des pas (rôle du λ)

Durant de la recherche locale chaotique le pas λ est un parametre très important dans le comportement de convergence de la méthode d'optimisation[59] qui permet de :

- Régler le rayon autour de $\bar{x}$
- La taille du pas λ est utilisée pour la génération d'une nouvelle solution.
- Utiliser pour contrôler l'impact de $\bar{x}_k$ sur la génération $\bar{x}_{k+1}$.
- Un petit λ sert a réaliser l'exploitation pour voir les résultats par recherche locale.
- Tandis qu'un grand λ tend a faciliter une exploration globale de l'espace de recherche.
- Un petit λ sert a bien exploiter $\bar{x}$.
- Un grand λ facilite l'exploration de l'espace de recherche. Une valeur convenable pour le pas λ fournit l'équilibre entre les capacites d'exploration globales et locales et par consequent une réduction du nombre d'itérations nécessaires pour trouver la solution optimale.

λ est un paramètre scalaire lié au rayon de la recherche autour de $\bar{x}$. Les optima locaux sont mis à jour chaque fois qu'un point est trouvé de mieux telle que la procédure se poursuit pour la recherche au voisinage du nouveau point optimal.

3.4 *Simulation numériques*

En mathématiques appliquées, les fonctions de test sont utiles pour évaluer les caractéristiques des algorithmes d'optimisation. La nature, la complexité et les autres propriétés de ces fonctions de référence peuvent être facilement obtenues à partir de leurs définitions. Les niveaux de difficulté de la plupart des fonctions de référence sont réglables en définissant leurs paramètres. À partir de l'ensemble standard de problèmes de référence disponibles dans la littérature, deux fonctions importantes (une contenant de nombreux optima locaux, mais un seul optimal global) sont considérées pour tester l'efficacité de l'algorithme proposé.

Toutes les fonctions tests sont résolues par l'algorithme d'optimisation chaotique (COA) dont les variables de ces fonctions sont générées par les applications chaotiques. Elles sont normalisées entre 0 et 1. Nous comparons les résultats obtenus par l'algorithme (COA) avec la solution exacte. Dans chaque étude de cas, 200 itérations ont été effectuées de l'algorithme (COA) afin de trouver l'optimum global.

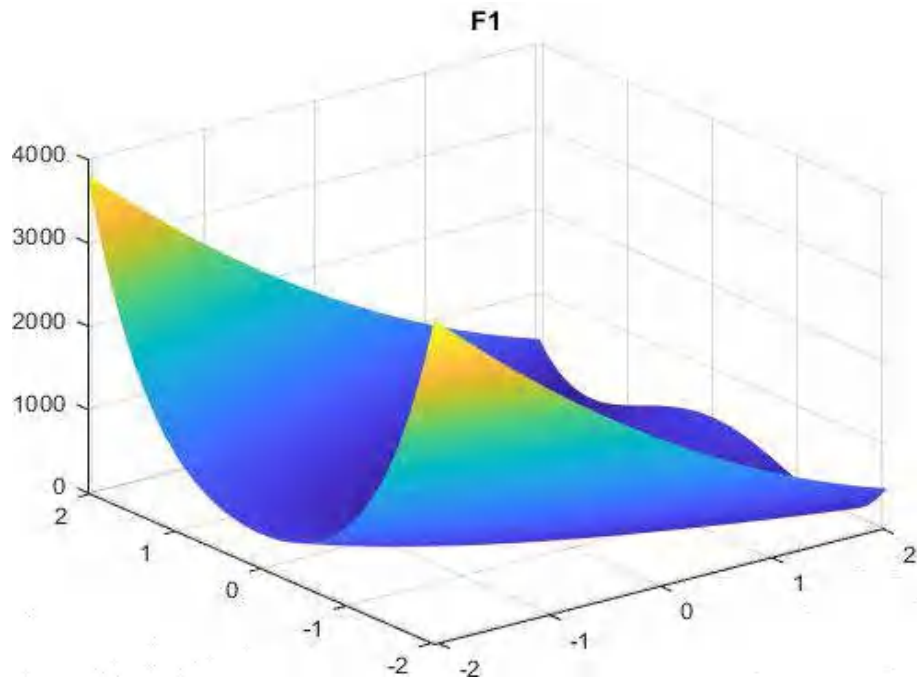
pour tester l'efficacité de la nouvelle approche proposée, et d'enrichir notre étude, nous allons l'appliquer à certaines fonctions test dont la recherche de minimum est difficile en choisissant différentes valeurs du nombre d'itérations et de pas λ :

3.4.1 La fonction de Rosenbrock

La première fonction est la fonction de **Rosenbrock** à deux variables définie par :

$$f_1(x, y) = 100(x_1^2 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2$$

- Domaine de recherche : $-2,048 \leq x_i \leq 2,048, i = 1, 2$.
- Nombre de minima locaux : pas de minima local hormis le global.
- Les minima globaux : $\bar{x} = (1, 1)$, $f(\bar{x}) = 0$.



La fonction de Rosenbrock

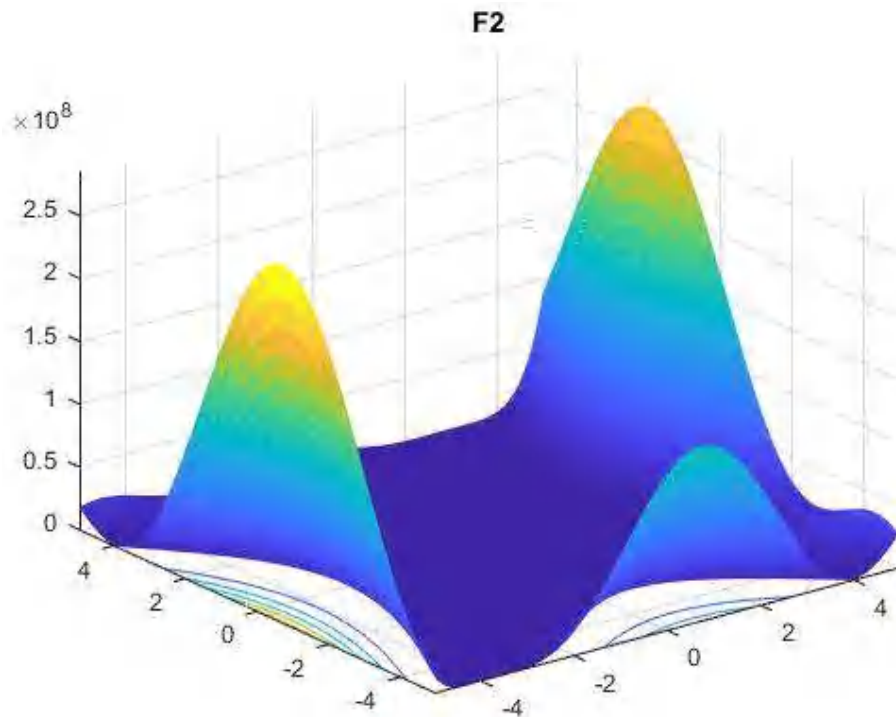
3.4.2 La fonction de Godstein

La deuxième fonction est la fonction de Godstein à deux variables définie par

$$f_2(x, y) = (1 + (x_1 + x_2 + 1)^2 + (19 - 14x_1 + 3x_1^2 - 14x_2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2)) \\ (30 + (2x_1 - 3x_2)^2 (18 - 32x_1 + 12x_1^2 + 48x_2 - 36x_1x_2 + 27x_2^2))$$

son minimum global est $f_2(0, -1) = 3$

- Domaine de recherche : $-2 \leq x_i \leq 2, i = 1, 2$.
- Nombre de minima locaux : plusieurs minima locaux.
- Les minima globaux : $\bar{x} = (0, -1), f(\bar{x}) = 3$.



La fonction de Godstein

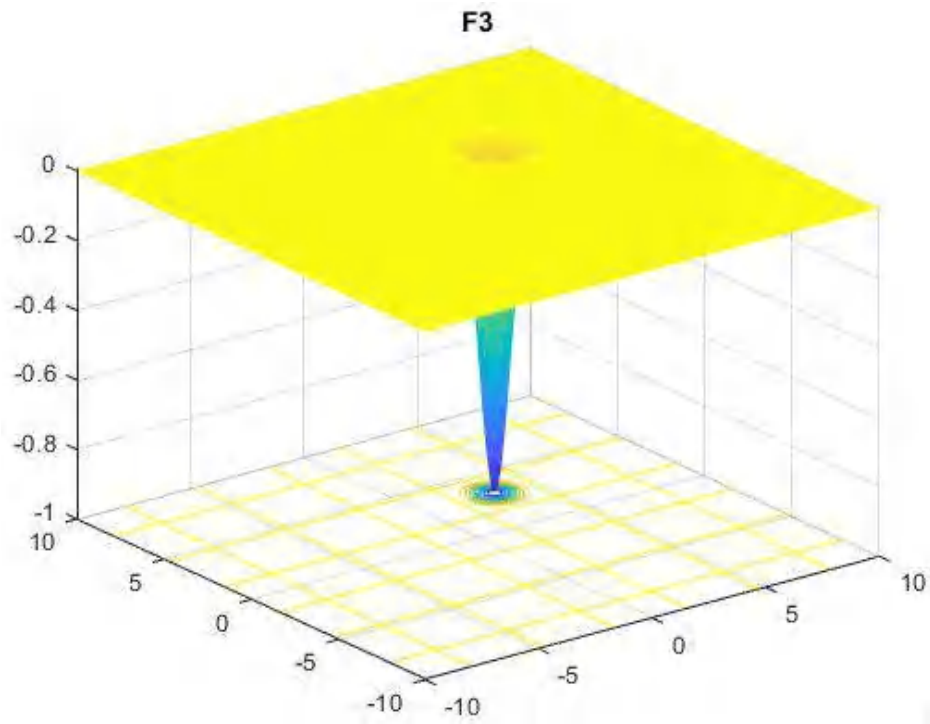
3.4.3 La fonction de Easom

La troisieme fonction de Easom a deux variables définie par

$$f_3(x, y) = -\cos(x_1)\cos(x_2)\exp(-(x_1 - \pi)^2 - (x_2 - \pi)^2)$$

son minimum global est $f_3(\pi; \pi) = -1$

- Domaine de recherche : $-10 \leq x_i \leq 10, i = 1, 2$.
- Nombre de minima locaux : plusieurs minima locaux.
- Les minima globaux : $\bar{x} = (\pi, \pi), f(\bar{x}) = -1$.



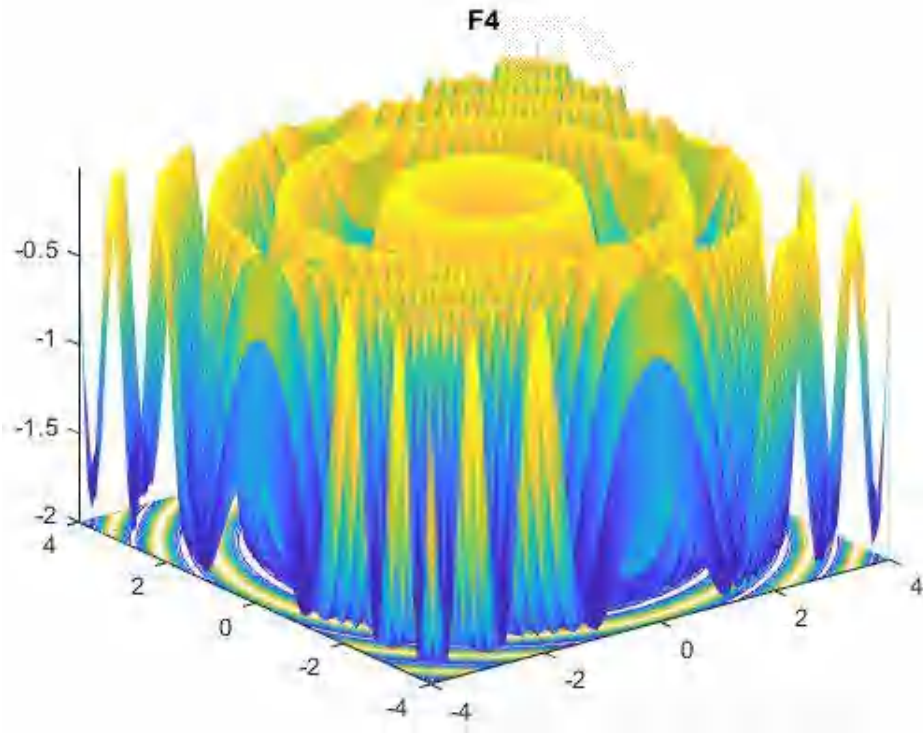
La fonction de Easom

3.4.4 La fonction de Schaffer

La quatrième fonction de Schaffer a deux variables définie par

$$F_4 = -0,5 + \left(\frac{((\sin \sqrt{(x_1^2 - x_2^2)})^2 - 0,5)}{(1 + 0.001(x_1^2 - x_2^2))^2} \right)$$

- Domaine de recherche : $-4 \leq x_i \leq 4, i = 1, 2$.
- Nombre de maxima locaux : qui a des maxima locaux infinis.
- Le maximum global : $\bar{x} = (0, 0), f(\bar{x}) = -1$.



La fonction de Schaffer

3.4.5 Résultats numériques

Les cartes tridimensionnelles des quatre fonctions

La fonction F_1 est la fonction de Rosenbrock, qui a des minima globaux $\bar{x} = (1, 1)$, et valeur optimale de la fonction objectif $F_1(\bar{x}) = 0$. La fonction F_2 est la valeur de Goldstein et Price. fonction, qui a des minima locaux infinis et un minimum global $\bar{x} = (0, 1)$; $F_2(\bar{x}) = 3$. La fonction F_3 est la fonction d'Easom, qui possède de nombreux minima locaux et un minimum global. minimum $\bar{x} = (-\pi, \pi)$ et $F_3(\bar{x}) = -1$. Fonction F_4 la fonction de Schaffer, qui a des maxima locaux infinis et un maximum global $\bar{x} = (0, 0)$, et $F_4(\bar{x}) = -1$. Ces quatre les fonctions multimodales non linéaires sont souvent utilisées pour tester la convergence, l'efficacité et précision des algorithmes d'optimisation [3]. Lors de la recherche locale chaotique, la taille du pas λ

	<i>BestValue</i>	<i>MeanValue</i>	<i>Std.Dev</i>	$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$	<i>Time</i>
F_1	0.0000	0.0003	0.0003	(0.9913, 0.9831)	33.9249s
F_2	3.0031	3.0031	0.0000	(0.0032, -0.9978)	34.4000s
F_3	-0.9961	-0.9961	0.0000	(3.1364, 3.0906)	37.6054s
F_4	-0.9993	-0.9989	0.0001	(-0.0310, 0.0080)	35.7883s

Tab. 2: Carte Gingerbreadman basée sur COA pour $\lambda = 0, 1$; $M_g = 2200$, $M_l = 300$

	<i>BestValue</i>	<i>MeanValue</i>	<i>Std.Dev</i>	$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$	<i>Time</i>
F_1	0.0000	0.0000	0.0000	(1.0001, 1.0002)	33.8875s
F_2	3.0000	3.0000	0.0000	(-0.0001, -1.0001)	33.9260s
F_3	-1.0000	-0.9997	0.0001	(3.1438, 3.1411)	37.1161s
F_4	-0.9999	-0.9998	0.0001	(-0.0006, -0.0017)	35.7883s

Tab. 3: Carte Gingerbreadman basée sur COA pour $\lambda = 0, 001$, $M_g = 2200$, $M_l = 300$

est un paramètre important en convergence comportement de la méthode d'optimisation, qui ajuste les petites plages ergodiques. La marche la taille λ est utilisée pour contrôler l'impact de la meilleure solution actuelle sur la génération d'une nouvelle solution d'essai. Un petit λ a tendance à effectuer une exploitation pour affiner les résultats par recherche, tandis qu'un grand modèle tend à faciliter une exploration globale de l'espace de recherche [2, 13]. Une valeur appropriée pour la taille du pas λ fournit généralement un équilibre entre global et local. capacités d'exploration et par conséquent une réduction du nombre d'itérations nécessaires pour trouver la solution optimale. Dans ce travail, en utilisant le même nombre d'évaluations de fonctions : $M_g + M_l$. Nous effectuons 50 exécutions avec différentes conditions initiales pour la cartographie des valeurs testées de la taille du pas dans Les méthodes d'optimisation chaotiques basées sur la carte Gingerbreadman sont décrites comme suit : Meilleure valeur Valeur moyenne Std. Dev $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ Temps.

	<i>BestValue</i>	<i>MeanValue</i>	<i>Std.Dev</i>	$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$	<i>Time</i>
F_1	0.0000	0.0001	0.0001	(1.0044, 1.0088)	35.2739s
F_2	3.0000	3.0027	0.0010	(0.0024, -0.9985)	35.4629s
F_3	-0.9994	-0.9963	0.0008	(3.1374, 3.0952)	38.2361s
F_4	-0.9996	-0.9989	0.0001	(-0.0290, 0.0063)	36.9733s

TAB. 4: Carte Gingerbreadman basée sur COA pour $0.001 \leq \lambda_i \leq 0.1$, $M_g = 2200$, $M_l = 300$

3.4.6 Conclusion

La méthode d'optimisation chaotique basée sur les méthodologies **Gingerbreadman map** COGM ont été validés avec succès pour tester quatre coûts de fonctions différents. À partir des études de cas et comparaison des résultats à travers trois approches COGM testées, il a été démontré que le paramètre de taille de pas λ est essentiel au bon profil de convergence. Dans ce contexte, le paramètre λ régule le compromis entre l'exploration globale et locale. capacités de la recherche locale chaotique. Ce pendant, dans les travaux futurs, ils incluront une étude détaillée étude d'heuristiques auto-adaptatives pour la conception de tailles de pas.

RÉFÉRENCES

- [1] R. Caponetto, L. Fortuna, S. Fazzino, M. G. Xibilia : Chaotic sequences to improve the performance of evolutionary algorithms, IEEE Transactions on Evolutionary Computation 7(3) 289-304 (2003).
- [2] M. Bucolo, R. Caponetto, L. Fortuna, M. Frasca, A. Rizzo : Does chaos work better than noise ? IEEE Circuits and Systems, Magazine 2(3) 4-19 (2002).
- [3] C-M. Marle. Systèmes dynamiques : une introduction. C-M. Marle, P. Pilibossian, ellipses édition. (2003).
- [4] S.H. Strogatz, Nonlinear dynamics and chaos, Massachusetts : Perseus Publishing, (2000).
- [5] B. Li, W.S. Jiang, Optimizing complex function by chaos search, Cybernetics and Systems 29(4)(1998)409-419
- [6] YX. Li, LX. Yang, Peng H, XD. Wang , An optimization method inspired by chaotic ant behavior, Int J Bifurcat Chaos, 16 2351-2364 (2006).
- [7] B.R. Hunt, J.A. Kennedy, T.Y. Li, H. Nusse : The Theory of Chaotic Attractors. Springer, New-York (2003).
- [8] V. Arnold. Equation différentielles ordinaires. Mir, moscow édition. (1974)
- [9] H. Dang-Vu, and C. Delcarte, "Bifurcations et chaos : une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica," Marketing, Paris : Ellipses Ed. 24-27, 53 (2000) .
- [10] P. Berger and Pomeau, Yves and Vidal, Charles, "L'ordre dans le Chaos : Vers une Approche Déterministe de la Turbulence," Paris : Hermann, 27 (1984).
- [11] J. Gleick , Chaos : Making a New Science, New York, NY, USA : Viking, (1987).

- [12] T.Y. Li and J.A.Yorke, Period three implies chaos,Amer. Math.Monthly, 82, 985-992 (1975).
- [13] B.Li,W.S. Jiang, Optimizing complex function by chaos search. Cyber-netics and Systems 29(4) 409-419 (1998).
- [14] S.H.Strogatz, Non-linear dynamics and chaos, Massachussets : Perseus Publishing (2000).
- [15] D.X.Yang, G.Li, G.D.Cheng, On the efficiency of chaos optimization algorithms for global optimization,Chaos, Soli.Fract,vol.34,no.4,pp. 1366-1375, (2007).
- [16] H. Dang-Vu et C. Delcarte. Bifurcations et Chaos. Paris : Ellipses, (2000).
- [17] D. Kaplan, et L. Glass, Finite-difference equations. Understanding nonlinear dynamics. New-York : Springer-Verlag, 1-53(1995).
- [18] R. Hilborn, Chaos and Nonlinear Dynamics an Introduction for Scientists and Engineers, Oxford Student Edition, (1994).
- [19] J.O. Fortrat, Y. Yammoto et R.L. Hughson. Respiratory influences on nonlinear dynamics of heart rate variability in humans. Biol Cybern , 77 1-10 (1997).
- [20] R.L. Hughson, Y.Yamamoto et J.O. Fortrat. Is the pattern of breathing at rest chaotic, A test of the Lyapunov exponent. Adv Exp Med Biol , 393, 15-19 (1995).
- [21] T. Back, U. Hammel, H.-P.Schwefel. Evolutionary Computation : Comments on the History and Current State. IEEE Transactions on Evolutionary Computations,1(1), 3-17 (1997).
- [22] L. Honger, P. Sailhac, M. Alexandrescu et J. Dubois. Nonlinear and multifractals approaches of the geomagnetic field. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 110, 157-190 (1999).
- [23] Fujisaka, Hirokazu and Yamada, Tomoji. "Stability theory of synchronized motion in couple doscillator systems,"Progress of Theoretical Physics,vol. 69, no. 1, pp. 32-47, (1983) .

- [24] A.Wolf, J. Swift, H. Swinney and J. Vastano. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica* , 16 D, 285-317 (1985).
- [25] QI, G. Du, S. Chen, G. Chen, Z. and Yuan. On a four-dimensional chaotic system, *Chaos, Solution and Fractals*, Vol. 23, pp. 1671-1682, (2005).
- [26] Johnston,P. R. Pilgrim, D. H. Parameter optimization for watershed models.*Water Resources Research*, 12(3), 477-486 (1976).
- [27] H. Dang-Vu et C. Delcarte. *Bifurcations et Chaos*. Paris : Ellipses (2000).
- [28] J.O.Fortrat, Y. Yammoto et R.L. Hughson. Respiratory influences on nonlinear dynamics of heart rate variability in humans. *Biol Cybern* , 77, 1,1-10 (1997).
- [29] A.Wolf, J. H. Swift, H. Swinney and J. Vastano. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica*, 16 D, 285-317 (1985).
- [30] M. Rosenstein, J. Collins et C. Deluca. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents for small data sets. *Physica* , D 65, 117-134 (1993).
- [31] Y.Yamamoto. Detection of chaos and fractals from experimental time series. *Modern techniques in neuroscience research*. Berlin Heidelberg New-York Tokyo : Springer-Verlag, 669-687(1999).
- [32] N. Lorenze, *J. Atmos Sci.* 20, 130-141(1963).
- [33] M. Hénon, A Two Dimentionnal Mapping with a Strange Attractor. *Comm. Math. Phys.* 50, pp. 69-76 (1976).
- [34] Lozir. Un Attracteur étrange (?) du Type Attracteur de Hénon . *Journal de Physique. Colloque C5 ; Supplément au no8, Tome 39*,pp.9-10 (1978).
- [35] A.A. Zhigljavsky. *Theory of Global Random Search. Mathematics and its applications*, Kluwer Academic Publishers, (1991).
- [36] L. C. Dixon, G. P Szego. 1er Ed. *Towards Global Optimization 2*. Norti-Holland Amsterdam, pp. 472 (1978).

- [37] L. C. Dixon, G. P Szego. Global Optimization, Springer Verlag Lecture Notes in Computer Science vol. 350 (1987).
- [38] A. Nemirovsky, D.Yudin. Problem Complexity and Method Efficiency in Optimization, John Wiley et Sons, (1983).
- [39] C. H. Papadimitriou, K. Steiglitz. Combinatorial Optimization : Algorithms and Complexity, Prentice Hall, (1982).
- [40] P. M. Pardalos, J. B. Rosen. Constrained Global Optimization : Algorithms and Applications, Springer-Verlag, (1987).
- [41] T. Hamaizia, (Systemes Dynamiques et Chaos "Application à l'optimisation a l'aide d'algorithme chaotique"), Université de Constantine -1-, thèse doctorat (2013).
- [42] S.S. Rao, Engineering Optimization Theory and Practice. Wiley, (2009)
- [43] L.D.S. Coelho : Tuning of PID Controller for an Automatic Regulator Voltage System using Chaotic Optimization Approach. Chaos, Solitons and Fractals. 39(4), 1504-1514 (2009)
- [44] A. A. ATorn, Program for Global Optimization, Multistart with Clustering (MSC), Proceedings of Euro IFIP 79, North-Holland, pp. 427-434 (1979).
- [45] B. Li, W. Jiang, Optimization of complex functions by chaos search, International Journal of Cybernetics and Systems 29 (4) 409-419 (1998).
- [46] R. W. Becker, G. V. A. Lago. Global Optimization Algorithm, Proceedings of the 8th Allerton Conference on Circuits and Systems Theory, (1997).
- [47] A. H. G. Rinnooy Kan, G. T. Timmer, Stochastic Global Optimization Methods ; Part I : Clustering Methods, Mathematical Programming, vol. 39, pp. 27-56, (1987)..
- [48] R. Horst, P. M. Pardalos, Handbook of Global Optimization, Kluwer Academic Publishers, pp. 829-869, (1995).

- [49] A.A.Torn, , A. Zilinskas. Global Optimization. Springer-Verlag, Berlin (1989).
- [50] T. Back . Evolutionary Algorithms in Theory and Practice. Oxford Univ. Press (1996).
- [51] J. H. Holland,. Outline for a logical theory of adaptive systems. Journal of the Association for Computing Machinery, 3, pp.297-314 (1962).
- [52] B.Li,W.S. Jiang, Chaos optimization method and its application, Journal of Control Theory and Application14(4) (1997) 613-615.
- [53] B.Li,W.S.Jiang, Optimizing complex function by chaos search, Cyber-netics and Systems 29 (4) 409-419 (1998).
- [54] YX LiLX,Yang , H. Peng ,XD. Wang. An optimization method inspired by chaotic an tbehavior,IntJBifurcat Chaos;16 :2351-2364 (2006).
- [55] JS. Arora ,OA. Elwakeil, AI. Chahande, CC. Hsieh. Global optimization methods for engineering application : areview, Struct Optimization. 9 137-159 (1995) .
- [56] J.C.Sprott, Chaos and Times-Series Analysis, Oxford University Press, Oxford, UK, (2003).
- [57] F. Druiche, thèse doctorat (Analyse de l'effet d'utilisation du chaos sur l'amélioration des performances des méthodes numériques), Université de Oum El Bouaghi (2021)
- [58] A. Djaout, thèse doctorat (Analyse et application des systèmes discrets a Dynamiques chaotiques), Université. Frère Mentouri. Constantine-1- (2022).
- [59] A. Filali ,T. Hamaizia An Adaptive Step Size for Chaotic Local Search Algorithm , Université. Frère Mentouri. Constantine-1- ,23 (3) 273–282 (2023).