

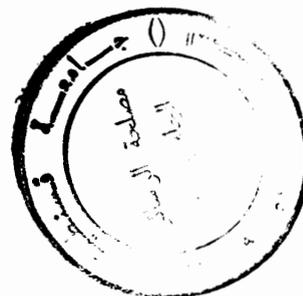
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE CONSTANTINE

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

N° d'ordre :.....

Série :



THESE

Présentée Pour l'obtention du diplôme de Magister

En MATHEMATIQUES

ÉCOULEMENT POTENTIEL ET BIDIMENSIONNEL
ISSU D'UN ORIFICE D'UN RÉSERVOIR

Option

Mathématiques Appliquées

PAR

GASMI Abdelkader

SOUTENUE le ... / ... / 1997

devant le Jury:

Président : M. DENCHE

Rapporteur : H. MEKIAS

Examineurs : S. DJABI

A. AYADI

MC. Université de Constantine

M.C. Université F. Abbas de Sétif

M.C. Université F. Abbas de Sétif

C.C. Université de Constantine

الإهداء

إلى الروح الطاهرة التي ثبتت في معالي الرجولة والصبر والتضحية والكد من أجل بلوغ المعالي .
إلى الذي قضى وخاطره لا يزال حينها يقدر لي مستقبلاً مشرقاً على دروب العلم والمعرفة .
إلى الذي ودع ولم يشأ أن أحفظ له بصورة تذكرنى مرارة اليتيم ولوعة الفراق ولهفة الشوق
إذ كنت يوم فاضت روحه ابن الخامسة من عمري .
إلى والدي طيب الله ثراه وأسكنه الفردوس الأعلى .

إلى التي كانت لي بعد رحيل والدي الأم والأب معا فإن أنا وفيئتها حقها أما عجزت عن إيفائه لها أبا فأسأل الله أن يعينني
على ذلك .

إلى والدي العزيزة حفظها الله وأطال في عمرها .

إلى من يجمعني بهم السقف الواحد أختي وأخوتي .

إلى كل أهلي وكل من أحبني وقدرني فأخلص في ذلك .

إلى وطني الجريح ضمد الله جرحه وفرج كربته .

إلى كل هؤلاء أهدي ثمرة جهدي .

ع/قاسمي

REMERCIEMENTS

Ce travail m'a été proposé par Monsieur H. MEKIAS, je tiens à le remercier pour m'avoir dirigé avec beaucoup de patience.

Je remercie aussi Monsieur M. DENCHE qui a bien voulu examiner ce travail et accepté d'être le président de ce jury.

Je remercie également Messieurs S. DJABI et A. AYADI de m'avoir honoré par leur présence au Jury.

La réalisation de ce travail n'aurait pas été possible sans le soutien matériel de l'institut de mathématiques de l'Université FERHAT Abbas de Sétif. Que tous ces membres trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

J'exprime mes remerciements à tous mes collègues qui m'ont aidé et m'ont encouragé pour mener à terme ce travail.

A tous ceux qui ont contribué de près ou de loin surtout à concrétiser ce travail, merci.

Abdelkader GASMI

TABLE DES MATIERES

	pages
Notations	
Introduction générale.	
Chapitre I. PRELIMINAIRES.	
1.1- Introduction.	5
1.2- Description Lagrangienne et Eulerienne du mouvement d'un fluide.	5
1.3- Ecoulement potentiel.	6
1.3- Equations de base.	7
1.5- Transformation de Schwartz Christoffel.	15
1.6- Analyse dimensionnelle.	17
Chapitre II: PROBLEME DU JET SANS TENSION DE SURFACE.	
2.1- Position du problème.	19
2.2- Ecoulement sous un barrage sans effet de tension de surface.	22
2.2. 1- Formulation et résolution du problème.	23
Chapitre III: ECOULEMENT SOUS UN BARRAGE AVEC TENSION DE SURFACE.	
3.1- Introduction.	35
3.2- Formulation du problème.	35
3.3- Procédure numérique.	38
3.4- Formulation de la série.	43
3.5- Forme de la surface libre et la valeur du degré de contraction.	44
3.6- Résultats et discussion.	47
3.6.1- Solution sans tension de surface.	47
3.6.2- Solution avec tension de surface.	49
3.7- Conclusion	56
Annexe	
1. Méthode de Newton.	58
2. Algorithme de Newton pour la résolution de systèmes non linéaires $f(x)=0$.	59
3. Algorithme de Jordan avec pivotation totale implicite.	60
4. Programme de Newton.	60
Références	

NOTATIONS

C : degré de contraction.

$ds, d\mathcal{V}$: élément de surface, élément de volume.

f : potentiel complexe de la vitesse.

H, L : diamètre, longueur.

K : courbure de la surface.

P : pression.

P_0 : pression au dessus de la surface libre.

q : module de la vitesse.

R : rayon de courbure de la surface.

T : tension de surface.

\bar{u}_n : vecteur normal.

\bar{u}_t : vecteur tangentiel.

ρ : densité.

ξ : vitesse complexe.

U : vitesse à l'infini.

\vec{V} : vecteur vitesse.

u, v : composantes du vecteur vitesse.

ϕ : fonction potentiel.

ψ : fonction de courant.

∇ : gradient.

div : divergence.

Δ : Laplacien.

$\frac{D}{Dt}$: dérivée matérielle.

$\frac{\partial}{\partial t}$: dérivée par rapport au temps.

α : nombre de Weber.

γ : angle de séparation.

z : variable complexe.

INTRODUCTION GENERALE

Dans ce travail, on propose d'étudier un problème d'écoulement potentiel bidimensionnel à surface libre issu d'un orifice d'un réservoir. Comme nous allons le voir, le problème revient à la résolution de l'équation de *Laplace* dans le domaine de l'écoulement avec des conditions aux limites non linéaires sur la surface libre de forme inconnue. Le problème a été déjà étudié par *Ackerberg et Liu* [1] en adoptant une méthode numérique de discrétisation de tout le plan de l'écoulement. Nous adoptons une méthode des transformations conformes qui réduit le problème de discrétisation uniquement sur la surface libre.

Ce travail est composé de trois chapitres. Le premier chapitre est consacré aux définitions et notions préliminaires concernant la théorie des écoulements potentiels et les équations générales du mouvement de fluides.

Dans le second chapitre, on traite le problème dans le cas où la tension de surface est négligée. Dans ce cas, la solution exacte peut être calculée en utilisant la méthode des lignes de courant libre *Batchelor* [2].

Dans le troisième chapitre, on étudie le problème en tenant compte de l'effet de la tension de surface. La solution exacte ne peut pas être calculée, une méthode numérique est alors adoptée. La solution est caractérisée par le nombre de *Weber* α . Le problème a été traité par *Ackerberg et Liu* [1], ils ont été amenés à résoudre l'équation de *Laplace* par la méthode des différences finies, en discrétisant tout le domaine de l'écoulement. Notons que les auteurs n'ont pas déterminés par cette méthode le type de singularité au point de contact de la surface libre avec la paroi rigide verticale du réservoir. Cependant, ils ont trouvés la solution pour tout $\alpha \geq 6.801483$.

Dans notre étude, nous adoptons la méthode de troncation de la série introduite par *Vanden-Broeck et Keller* [9], qui consiste à discrétiser uniquement la surface libre. Par cette méthode on a pu déterminer avec précision la nature de singularité du vecteur vitesse au point de contact. On détermine la solution pour chaque valeur du nombre de *Weber* $\alpha \geq 0.25$.

INTRODUCTION GENERALE

Lorsque $\alpha \rightarrow \infty$, la forme de la surface libre est confondue à celle trouvée paramétriquement dans le chapitre II. Dans ce cas, l'angle de contact γ égal à 3.1415 avec une erreur de $9.1 \cdot 10^{-6}$, ce qui indique que le fluide quitte la paroi tangentiellement. Pour α tel que $0.25 \leq \alpha < \infty$, on obtient $3.1415 < \gamma \leq 4.634$.

À la fin de ce travail, on donne une annexe dont laquelle on présente la méthode et l'algorithme de *Newton* pour la résolution d'un système d'équations non linéaires suivi du programme de notre solution écrit en langage fortran77 *M. Boumahrat et A. Gourdin* [4].

CHAPITRE I

PRELIMINAIRES

Résumé. *Dans ce chapitre, on présente quelques définitions et notions préliminaires concernant les écoulements potentiels, bidimensionnels et les équations générales du mouvement des fluides.*

Contenu :

- 1.1- Introduction.
- 1.2- Description Lagrangienne et Eulerienne du mouvement d'un fluide.
- 1.3- Préliminaires.
- 1.4- Equations de base.
- 1.5- Transformation de *Schwartz Christoffel*.
- 1.6-Analyse dimensionnelle.

1.1- Introduction

Les équations qui régissent le mouvement d'un fluide sont complexes. Des différentes hypothèses sont faites pour simplifier ces équations. L'hypothèse la plus importante est de considérer que le fluide est *newtonnien*, c'est à dire la relation entre le tenseur des contraintes et le tenseur de déformation est linéaire. De plus, si on considère que le fluide est parfait (négliger les effets de viscosité), le champ de vecteur vitesse dérive d'un potentiel, d'ou il découle la théorie des écoulements potentiels.

Une difficulté majeure dans la description des écoulements des fluides provient de l'impossibilité d'identifier toutes les particules du fluide en étude. Cette difficulté est résolue en considérant la description *Eulerienne* qui est bien adopté à la description des mouvements des fluides.

1. 2- Description Lagrangienne et Eulerienne du mouvement d'un fluide.

Avant d'exposer les équations régissant le mouvement d'un fluide, on doit décider de la méthode avec laquelle sera décrit l'écoulement de celui-ci. Chaque particule de fluide dans l'écoulement a une valeur instantanée de la vitesse et de toute autre propriété du fluide (température, densité, viscosité, etc...). Lors du mouvement, les propriétés de la particule vont changer. Au lieu de poursuivre les détails de l'histoire de chaque particule individuellement lors de son mouvement, on trouve qu'il est plus convenable de décrire l'écoulement en donnant les composantes de la vitesse, pression, masse volumique et toute autre propriété en chaque point de l'espace occupé par le fluide en fonction du temps: c'est la description *Eulerienne*. La méthode de *Lagrange* qui s'intéresse à l'histoire des différentes quantités pour chaque particule individuellement est rejetée, en raison de la diffusion moléculaire, qui fait que les particules ne conservent pas longtemps leurs individualité. Il est d'autant plus difficile de définir leurs trajectoires. On décrira alors l'écoulement en utilisant la méthode d'*Euler* qui consiste à se fixer un point dans l'espace et observer les variations des quantités liées aux particules du fluide passant par ce point.

Soit D un domaine occupé par le fluide en étude rapporté à un repère cartésien. Soit (x, y, z) un point quelconque de D et t la variable du temps. Le champ du vecteur vitesse \vec{V} , et autre caractéristique du fluide, est alors décrit en fonction de (x, y, z) et de t . On écrit alors : $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z; t)$.

En description *Eulerienne*, on doit distinguer deux notions de dérivées par rapport au temps. La dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial t}$ qui est la dérivée par rapport au temps en considérant les variables (x, y, z) de l'espace fixes. La dérivée matérielle notée par $\frac{D}{Dt}$, consiste à calculer la variation par rapport au temps d'une caractéristique d'une particule en la suivant dans son mouvement. La relation entre les deux dérivées est donnée par :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad}).$$

1.3- Ecoulement potentiel:

Un écoulement est dit irrotationnel si le rotationnel du champ de vecteur vitesse est nul, c'est à dire :

$$(1.1) \quad \vec{\text{Rot}} \vec{V} = 0$$

Un champ de vecteur dont le rotationnel est nul peut être représentée par le gradient d'une fonction scalaire $\phi(x, y, z)$ car on a toujours:

$$\vec{\text{Rot}} \vec{\text{grad}} \phi = 0$$

Dans le cas de l'écoulement irrotationnel on peut déduire

$$\vec{V} = \vec{\text{grad}} \phi$$

La fonction ϕ est dite le potentiel de vitesse.

Du à l'existence d'une fonction potentielle, les écoulement irrotationnels sont dit écoulements potentiels.

1.4- Equations de base.

1.4.1- Equation de conservation de la masse.

Le principe de conservation de la masse affirme que la masse à l'intérieur d'un volume \mathcal{V} n'est ni créée ni perdue instantanément. Soit \mathcal{V} un volume délimité par une surface S de masse M . Par le principe de conservation de la masse on peut affirmer que l'augmentation de la masse M à l'intérieur de \mathcal{V} est égal à la masse entrante moins la masse sortante à travers la surface S . La masse contenue dans le volume \mathcal{V} à l'instant t est égale à :

$$M = \iiint_{\mathcal{V}} \rho(M, t) d\mathcal{V}$$

ρ étant la masse volumique du fluide. A travers l'élément ds de la surface délimitant le volume considéré, il s'écoule, par unité de temps, une quantité de fluide égale à $(\rho \vec{V}) \cdot \vec{u}_n ds$ où \vec{u}_n est le vecteur unitaire extérieur (dirigé vers l'extérieur du volume \mathcal{V}) normal à l'élément de surface ds . Cette quantité est positive si le fluide sort du volume \mathcal{V} , et négative si le fluide pénètre. La quantité totale du fluide sortant du volume \mathcal{V} par unité de temps est égale à :

$$\iint_S (\rho \vec{V}) \cdot \vec{u}_n ds$$

D'autre part, la variation de la quantité du fluide contenue dans ce volume est donnée par :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}$$

Puisque la masse sortante et entrante est égale à la variation de la masse à l'intérieur du volume \mathcal{V} (la masse n'est ni créée ni perdue à l'intérieur de \mathcal{V}), on a l'identité :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = - \iint_s (\rho \vec{V}) \cdot \vec{u}_n ds$$

d'après le théorème d'intégrale de Gauss :

$$\iint_s (\rho \vec{V}) \cdot \vec{u}_n ds = \iiint_{\mathcal{V}} (\operatorname{div}(\rho \vec{V})) d\mathcal{V}$$

on obtient ainsi

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) \right) d\mathcal{V} = 0.$$

Le domaine étant arbitraire, on a donc

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

cette équation est connue sous le nom de « équation de continuité ». Elle exprime que la masse d'une particule de fluide est conservée au cours de l'écoulement. On peut écrire cette équation sous une autre forme. Nous avons en effet :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = \rho \operatorname{div} \vec{V} + \vec{V} \cdot \operatorname{grad}(\rho)$$

Donc

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0$$

et par suite il vient:

$$(1.2) \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0$$

Dans le cas des fluides incompressibles on a $\rho = cte$ (sa masse volumique est invariable). L'équation de continuité se réduit alors à:

$$\text{div}(\vec{V}) = 0$$

En substituant cette équation dans la définition du potentiel de vitesse, on a:

$$\nabla (\nabla \phi) = 0$$

soit:

$$\Delta \phi = 0$$

Δ désigne le *Laplacien* et ∇ l'opérateur gradient.

Dans le cas d'un écoulement bidimensionnel, ϕ étant une fonction potentielle continue à deux variables alors il existe une fonction ψ dite fonction potentiel conjuguée qui vérifie les relations :

$$(1.3) \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

1.4.2- Equation des Lignes de courant:

La ligne de courant est une courbe tangente en chacun de ces points au vecteur vitesse en ce point. La définition d'une ligne de courant est donnée par l'équation différentielle

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

Où u , v et w sont les composantes du vecteur vitesse \vec{V} .

1.4.3 Ecoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible

On dit qu'un écoulement est bidimensionnel si le vecteur vitesse est parallèle à un plan fixe. Dans ce cas on peut toujours choisir le repère cartésien de telle sorte

que la troisième composante w est nulle. Les autres composantes u et v sont fonctions que des variables x et y .

Dans le cas d'un écoulement bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible, il est parfois commode d'exprimer la vitesse de l'écoulement par la fonction dite de courant. L'équation de continuité

$$(1.4) \quad \operatorname{div} \vec{V} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

montre que les composantes de la vitesse peuvent être représentées sous forme des dérivées :

$$(1.5) \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Les composantes de la vitesse u et v déterminées par ces équations satisfont la continuité. La différentielle exacte de ψ donne:

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \\ &= -v dx + u dy \end{aligned}$$

Dans le cas $\psi = \text{cts}$ on retrouve l'équation de la ligne de courant. On déduit alors que les courbes pour lesquelles $\psi = \text{cts}$ sont des lignes de courant.

Si dans un plan, on mène une courbe entre les point a et b le flux Q du fluide à travers cette courbe joignant a et b sera déterminé par la différence des valeurs que prend la fonction de courant en ces points, quelle que soit la forme de la courbe. En effet, si V_n est la projection de la vitesse sur la normale à la courbe au point considéré on a :

$$Q = \rho \int_a^b V_n dl = \rho \int_a^b (-v dx + u dy) = \rho \int_a^b d\psi$$

On déduit alors que:

$$(1.6) \quad Q = \rho (\psi_a - \psi_b)$$

En écoulement bidimensionnel, l'équation du potentiel de vitesse se réduit à:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

et on a pour le potentiel de vitesse:

$$(1.7) \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

En identifiant les systèmes d'équations (1.5) et (1.7) on aboutit aux relations entre ϕ et ψ suivantes :

$$(1.8) \quad \begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

On reconnaît les équations de *Cauchy-Riemann*, qui nous permettent de déduire que ϕ et ψ sont uniformément différentiables dans le domaine de l'écoulement.

1.4.4- Ecoulements à la base de la théorie de la variable complexe.

La théorie des variables complexes offre une méthode très puissante pour obtenir des solutions de quelques écoulements. Si le plan (x, y) est considéré comme plan de la variable complexe $z = x + iy$, la fonction $f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ sera analytique dans le domaine de l'écoulement. De plus

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \frac{df(z)}{dz} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &= u - iv = \xi(z) \end{aligned}$$

sera aussi analytique dans le plan de l'écoulement. Cette très importante propriété va nous permettre d'utiliser, par la suite, la théorie des fonctions analytiques complexes pour résoudre notre problème considéré.

1.4.5- Equation du mouvement:

Les forces qui agissent sur une particule d'un fluide sont de deux types:

- Forces intérieures d'origine moléculaires, elle sont opposées deux à deux et donc leurs résultante est nulle.
- Forces extérieures sont des forces de volume ou des forces de surface.

La forme de l'équation qui gouverne le mouvement d'une particule de fluide dépend des forces que l'on doit considérer. Comme équation générale on a :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{1}{d\mathcal{V}} \sum \vec{F}_{ext}$$

d'où

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = \frac{1}{d\mathcal{V}} \sum \vec{F}_{ext}$$

a- Equation d'Euler :

Soit \mathcal{V} un domaine délimité par une surface S . La résultante des forces surfaciques s'exerçant sur ce volume et donnée par l'intégrale :

$$-\iint_S P \vec{u}_n ds$$

où P est la pression.

En transformant l'intégrale de surface en une intégrale de volume, nous obtenons:

$$-\iint_S P \vec{u}_n ds = -\iiint_{\mathcal{V}} \vec{grad} P d\mathcal{V}$$

Cette égalité montre que l'élément de volume du fluide est soumis à la force $-d\mathcal{V} \vec{\text{grad}} P$ exercée par le fluide environnant. Dans le cas où on ne considère que les forces surfaciques, l'équation de la balance des forces s'écrit alors :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) d\mathcal{V} = - \iiint_{\mathcal{V}} \vec{\text{grad}} P d\mathcal{V}$$

Le domaine étant arbitraire, on aura donc

$$(1.10) \quad \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = - \vec{\text{grad}} P$$

Lorsque le fluide est placé dans un champ (champ de pesanteur, champ magnétique,...), chacun de ses élément de volume est encore soumis à la force \vec{f}_{champ} cette force doit être ajoutée au second membre de l'équation (1.10) de sorte que l'équation (1.10) doit s'écrire sous la forme

$$\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = - \frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} P + \vec{f}_{\text{champ}}$$

Cette équation a été établie par *L. Euler* 1755. [5]

b- Equation de Bernoulli

A partir de l'équation d'*Euler* pour un fluide incompressible et parfait et lorsque les forces de volume dérivent d'un potentiel $\vec{f}_{\text{champ}} = \vec{\text{grad}} \mathcal{U}$ on a :

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = - \frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} P + \vec{\text{grad}} \mathcal{U}$$

On rappelle l'identité vectorielle:

$$(\vec{V} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{V} = \vec{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} \right) + (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \times \vec{V}$$

Ce qui permet d'écrire:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right) + (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \times \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } P - \text{grad } \mathcal{U}$$

On a alors:

$$(1.11) \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \mathcal{U}\right) + (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \times \vec{V} = 0$$

On rappelle la forme du vecteur tourbillon:

$$\vec{Rot} \vec{V} = (\vec{\nabla} \times \vec{V})$$

Dans le cas d'un écoulement permanent (un écoulement du fluide est dit stationnaire (ou permanent) lorsque la \vec{V} de son écoulement reste constante dans le temps en importe quel point de l'espace occupé par le fluide c'est à dire:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$$

l'équation (1.11) s'écrit

$$\text{grad}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \mathcal{U}\right) + \vec{Rot} \vec{V} \times \vec{V} = 0.$$

Sur une ligne de courant de vecteur unitaire \vec{s} , on a :

$$\frac{\partial}{\partial s} = \vec{s} \cdot \text{grad} \text{ ce qui donne:}$$

$$\vec{s} \cdot \text{grad}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \mathcal{U}\right) + \vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \times \vec{V} = 0.$$

Comme \vec{s} et \vec{V} sont colinéaires $\vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \times \vec{V} = 0$.

Ainsi, on a

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \mathcal{U} \right) = 0$$

Le long d'un ligne de courant on a alors:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \mathcal{U} = Cte \quad \text{le long d'une ligne de courant.}$$

En général, la constante change avec la ligne de courant.

Les forces de volume se réduisent le plus souvent à la seule force de pesanteur.

Dans ce cas, on a :

$$(1.12) \quad \frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = Cte$$

1.5- Transformation de Schwarz Christoffel.

Considérons un polygone (fig - 1 -) dans le plan des w , ayant pour sommets w_1, w_2, \dots, w_n et pour angles intérieurs respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Soit w_1, w_2, \dots, w_n les points correspondants respectivement à x_1, x_2, \dots, x_n de l'axe réel du plan des z (fig - 2 -)

La transformation qui représente l'intérieur du polygone considéré sur le demi-plan supérieur du plan des z et la frontière du polygone sur l'axe réel, est donnée par :

$$(1.13) \quad \frac{dw}{dz} = \alpha (z - x_1)^{\alpha_1 - 1} (z - x_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - x_n)^{\alpha_n - 1}$$

ou

$$(1.14) \quad w = \alpha \int (z - x_1)^{\alpha_1 - 1} (z - x_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - x_n)^{\alpha_n - 1} dz + \beta$$

où α et β sont des constantes complexes arbitraires.

On note que :

1- Parmi les n points x_1, x_2, \dots, x_n , on peut en choisir trois arbitrairement.

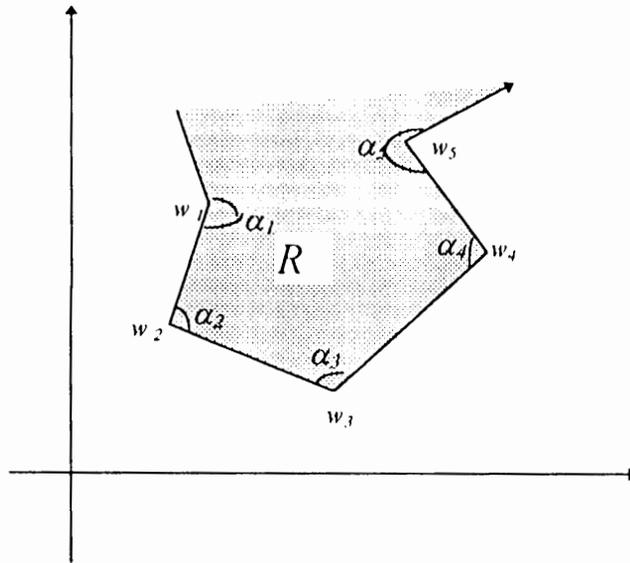


FIG-1

plan de la variable w

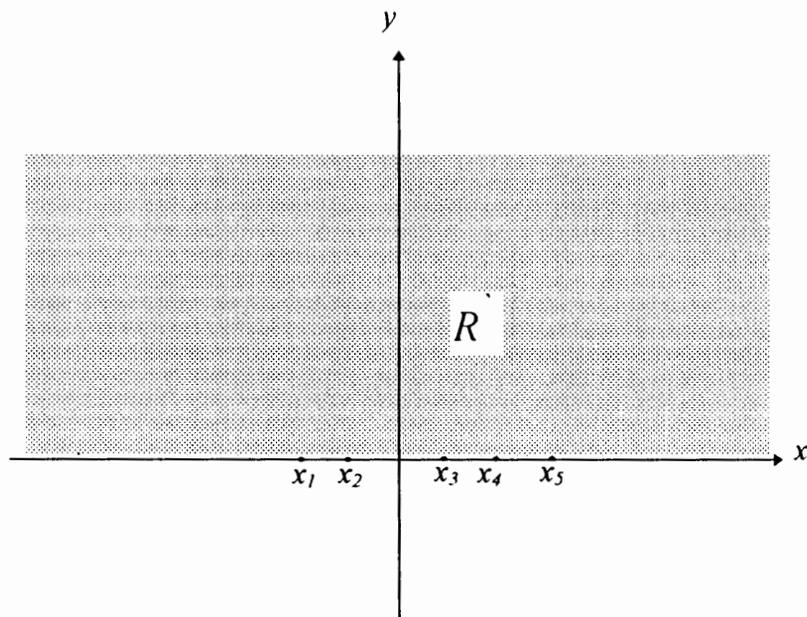


FIG-2

plan de la variable z

- 2- Les constantes α et β déterminent la taille, l'orientation et la position du polygone.
- 3- Il est commode de choisir un point, par exemple x_n , à l'infini, cas dans lequel le dernier facteur de (1.13) et (1.14) n'existe pas.
- 4- Des polygones infinis non fermés peuvent être considérés comme des cas limités de polygones fermés.

1.6. Analyse dimensionnelle

Avant de résoudre un problème, nous devons écrire l'équation qui régit le phénomène en variables non dimensionnelles. Pour cela, nous introduisons quelques notions et théorèmes pour passer d'une équation physique en variables dimensionnelles à une équation dont les variables sont sans dimensions physiques.

Les manipulations formelles requises sont faciles. Nous utilisons le théorème π de *Vachy-Buckingham*, qui montre comment on non dimensionnalise une équation physique. L'emploi des variables non dimensionnelles réduit le nombre de paramètres qui détermine la solution d'un problème. Si un phénomène physique dépend de N variables dimensionnelles, on peut rendre ces variables sans dimension en les réduisant à $N-k$, avec ($k = 1, \dots, 4$). Les quatre variables universellement connues sont la longueur L , la masse M , la température Θ et le temps t . Nous démontrons que les variables non dimensionnelles peuvent être sélectionnées de plusieurs manières. Elles paraissent relativement avec peu de paramètres non dimensionnelles dans chaque cas.

1-5.1 Théorème π de Vachy-Buckingham

Soit un phénomène physique comprenant n variables, dans les dimensions desquelles interviennent p grandeurs fondamentales, l'équation $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ qui régit le phénomène peut se mettre sous forme

$h(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-p}) = 0$. Où $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-p}$ sont des produits sans dimensions indépendants (nombre de *Reynold*, *Froud*, *Weber*, etc...).

CHAPITRE II :
PROBLEME DU JET
SANS TENSION DE SURFACE

Résumé. *L'objet de la présente étude est d'établir la solution exacte d'un problème d'écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux issu d'un orifice d'un réservoir, utilisant la théorie des lignes de courant libres. Les effets de tension de surface et de gravité sont négligés. La solution obtenue nous permet de vérifier le résultat numérique.*

Contenu :

2.1- Position du problème.

2.2- Ecoulement sous un barrage sans effet de tension de surface

2.2.1- Formulation et résolution du problème.

2.1- Position du problème.

Dans tout ce qui suit, les variables notées avec \sim sont avec leurs dimensions physiques et les variables sans \sim désignent les variables sans dimensions.

On considère un écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux, à surface libre issu d'un orifice de largeur $2\tilde{l}$, d'un réservoir (fig.3), où l'effet de gravité est négligé.

Du à la symétrie de l'écoulement par rapport à la ligne de courant EOC, on prend comme axes de coordonnées la ligne de courant EOC sur l'axe $\tilde{x}'\tilde{o}\tilde{x}$ et la paroi AB sur l'axe $\tilde{y}'\tilde{o}\tilde{y}$. Notons que lorsque $\tilde{x} \leq 0$ et $|\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2| \rightarrow \infty$ la vitesse s'approche de zéro et pour \tilde{x} positif l'écoulement est limité supérieurement par la surface libre BC et inférieurement par la surface libre B'C'. Nous supposons que l'écoulement à l'infini ($\tilde{x} \rightarrow +\infty$) est uniforme et de vitesse \tilde{U} et d'élévation \tilde{H} .

Le problème mathématique consiste à déterminer la fonction potentiel de vitesse $\tilde{\phi}(\tilde{x}, \tilde{y})$ qui satisfait l'équation de Laplace donnée par :

$$(2.1) \quad \Delta \tilde{\phi} = 0 \quad \text{dans le domaine de l'écoulement}$$

avec les conditions:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \tilde{\phi} \rightarrow \tilde{U} \tilde{x} & \text{lorsque } \tilde{x} \rightarrow +\infty \text{ (condition de radiation)} \\ \tilde{\phi} \rightarrow \text{cte} & \text{lorsque } |\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2| \rightarrow \infty \text{ et } \tilde{x} < 0 \end{cases}$$

et les conditions aux bords:

$$(2.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} = 0 & \text{sur EOC} \\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} = 0 & \text{sur AB} \end{cases}$$

$$(2.4) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 + \frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho}} = cts \text{ sur la surface libre de forme inconnue.}$$

En raison de la symétrie de l'écoulement par rapport à l'axe $\tilde{x}'\tilde{y}'$, on peut restreindre l'étude du problème au demi-plan supérieur, l'axe de symétrie étant considéré comme ligne de courant, alors la configuration de la (fig. 3) peut servir à l'étude d'un écoulement sous un barrage (fig. 3 bis).

Comme la fonction $\tilde{\phi}$ est harmonique à l'intérieur du domaine de l'écoulement qui est connexe, alors, d'après le théorème de *Cauchy*, pour déterminer la solution en n'importe quel point du domaine de l'écoulement, il suffit de trouver la fonction ϕ qui vérifie l'équation (2.4), avec les conditions (2.2) et (2.3).

Dans ce qui suit, on va utiliser la théorie des fonctions complexes pour résoudre le problème. Pour cela, on identifie le plan d'écoulement $\tilde{x}'\tilde{y}'$ au plan complexe \tilde{z} en écrivant: $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$. Les fonctions $\tilde{f}(\tilde{z}) = \tilde{\phi}(\tilde{x}, \tilde{y}) + i\tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y})$ et $\tilde{\xi} = \tilde{u} - i\tilde{v}$ sont des fonctions analytiques de la variable \tilde{z} .

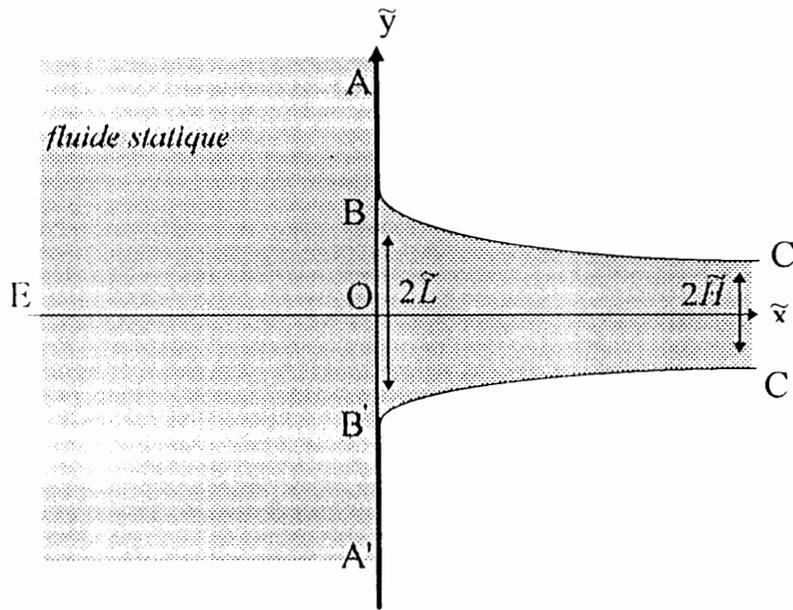


FIG -3-

Le domaine occupé par le fluide dans le plan \tilde{z}

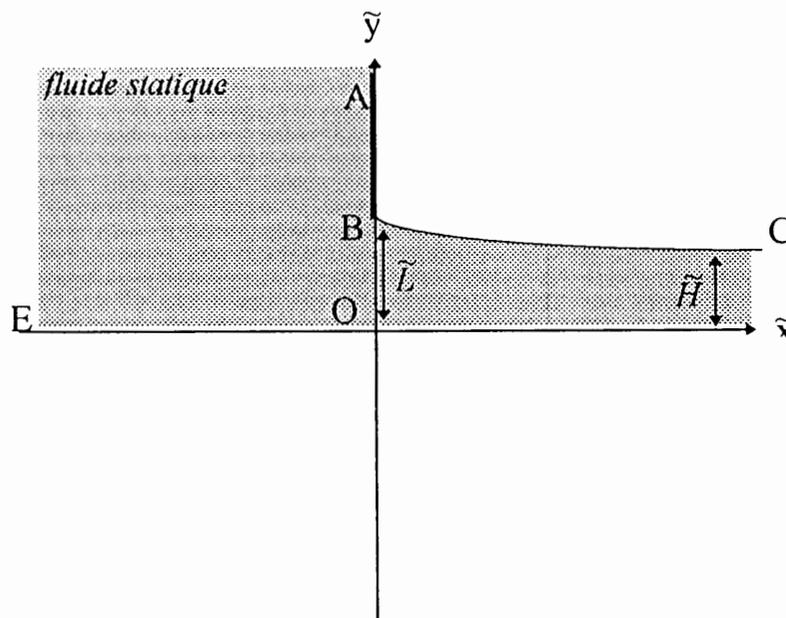


FIG -3(bis)-

Le domaine occupé par le fluide dans le demi plan superieur \tilde{z}

2.2- Écoulement sous un barrage sans effet de tension de surface.

On se propose d'étudier un écoulement à surface libre sous un barrage fig.1bis. Les effets de gravité et de tension de surface sont négligés. Une solution exacte de l'écoulement peut être trouvée en utilisant la méthode des lignes de courant libres introduite par *Kirchoff* (1869). La méthode consiste à considérer les écoulements limités partiellement par des parois rigides rectilignes et et d'autre part par des surfaces libres de formes inconnues. La clé de cette méthode est basée sur l'introduction d'une nouvelle variable complexe, définie par :

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \Omega &= \log \left(\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{f}} \right) = \log (\tilde{u} - i\tilde{v})^{-1} \\ &= \log \tilde{q}^{-1} + i\theta \end{aligned}$$

où $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$, $\tilde{f} = \tilde{\phi} + i\tilde{\psi}$ et \tilde{q} , θ sont le module de la vitesse et l'angle entre le vecteur vitesse et l'horizontale (l'axe $\tilde{x}'\tilde{O}\tilde{x}$). La variable Ω a la propriété suivante: sa partie réelle est constante sur chaque surface libre, et sa partie imaginaire est constante sur chaque paroi rigide rectiligne. Ainsi, le domaine de l'écoulement dans le plan physique est transformé en un polygone dans le plan Ω . Dans ces conditions la solution du problème peut être obtenue exactement. De même la fonction $\tilde{f} = \tilde{\phi} + i\tilde{\psi}$ transforme le domaine de l'écoulement dans le plan physique en une bande infinie (polygone). On sait, d'après le théorème de *Schwarz-Christoffel*, qu'il est toujours possible de trouver une transformation conforme qui applique l'intérieur ou l'extérieur d'un polygone plan en un demi-plan d'un autre plan. Une telle transformation met en correspondance la région indiquée du plan Ω , ainsi que celle du plan \tilde{f} sur la moitié supérieure du plan d'une certaine variable complexe λ . Dans ce cas, on trouve une relation entre Ω et \tilde{f} , qui, à partir de laquelle, une expression de \tilde{f} en fonction de \tilde{z} est obtenue par intégration. Ce procédé sera illustré au paragraphe suivant.

2.2.1- Formulation et résolution du problème.

Notons par $\tilde{\xi} = \tilde{u} - i\tilde{v}$, où (\tilde{u}, \tilde{v}) sont les composantes du vecteur vitesse dans la direction de \tilde{x} et \tilde{y} respectivement et par $\tilde{f} = \tilde{\phi} + i\tilde{\psi}$ la fonction potentiel complexe où $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\psi}$ désignent respectivement la fonction potentielle et la fonction de courant. On suppose que la densité $\tilde{\rho}$ du fluide est constante ainsi que la pression \tilde{P} sur la surface libre (pression atmosphérique). Les conditions sur la surface libre sont données par l'équation de *Bernoulli*.

$$(2.6) \quad \frac{1}{2} |\tilde{\xi}|^2 + \frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho}} = cte \quad \text{sur BC}$$

L'équation (2.6) implique que la vitesse est constante sur la surface libre car $\tilde{P} = cte$ et $\tilde{\rho} = cte$ alors (2.6) devient:

$$(2.7) \quad \tilde{q} = |\tilde{\xi}| = cts \quad \text{sur BC}$$

De la transformation (2.5), il convient de poser:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \Omega &= \log \left(\frac{\tilde{U} d\tilde{z}}{d\tilde{f}} \right) = \log \left(\frac{\tilde{U}}{\tilde{u} - i\tilde{v}} \right) \\ &= \log \frac{\tilde{U}}{\tilde{q}} + i\theta \end{aligned}$$

où θ est l'angle que fait le vecteur vitesse $\vec{V}(\tilde{u}, \tilde{v})$ avec l'axe $\tilde{x}'\tilde{o}\tilde{x}$.

Par cette transformation, le domaine occupé par le fluide dans le plan de la variable \tilde{z} se transforme en une bande semi-infinie (fig. 4). Sans perte de généralités, on choisie $\tilde{\phi} = 0$ au point $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0)$ et $\tilde{\psi} = 0$ sur la ligne EOC.

Par conséquent $\tilde{\psi} = \tilde{H}\tilde{U}$ sur la ligne de courant ABC (fig. 5).

La transformation conforme d'une bande semi-infinie dans le plan Ω au demi plan supérieur d'un autre plan complexe λ est donnée par le théorème de *Schwarz-Christoffel*. En respectant le sens et l'orientation de l'écoulement, On choisit

$B = 1$, $C = 0$ et A à l'infini sur le plan λ (fig. 6). On peut alors écrire:

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = \mathcal{A} (\lambda - 1)^{-\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}}$$

par intégration on trouve:

$$(2.9) \quad \Omega = \mathcal{A} \int (\lambda - 1)^{-\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} d\lambda + \mathcal{B}$$

En faisant le changement de variable $\delta = 2\lambda - 1$ dans (2.9) on obtient

$$\Omega = \mathcal{A} \int \frac{d\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} + \mathcal{B}$$

d'où

$$(2.10) \quad \Omega = \mathcal{A} \operatorname{arg ch} (2\lambda - 1) + \mathcal{B}$$

où \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des constantes à déterminer. Pour la détermination de \mathcal{A} et \mathcal{B} , on utilise les conditions:

$$1) \quad \Omega(1) = -i \frac{\pi}{2} \text{ on trouve } \mathcal{B} = -i \frac{\pi}{2}$$

En substituant \mathcal{B} dans l'équation (2.10), on aura :

$$(2.11) \quad \lambda = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{ch} \left(\frac{\Omega + i \frac{\pi}{2}}{\mathcal{A}} \right) \right)$$

$$2) \quad \Omega(0) = 0 \text{ on obtient } \mathcal{A} = \frac{1}{2}$$

En substituant les valeurs de \mathcal{A} et \mathcal{B} dans l'équation (2.11), on obtient

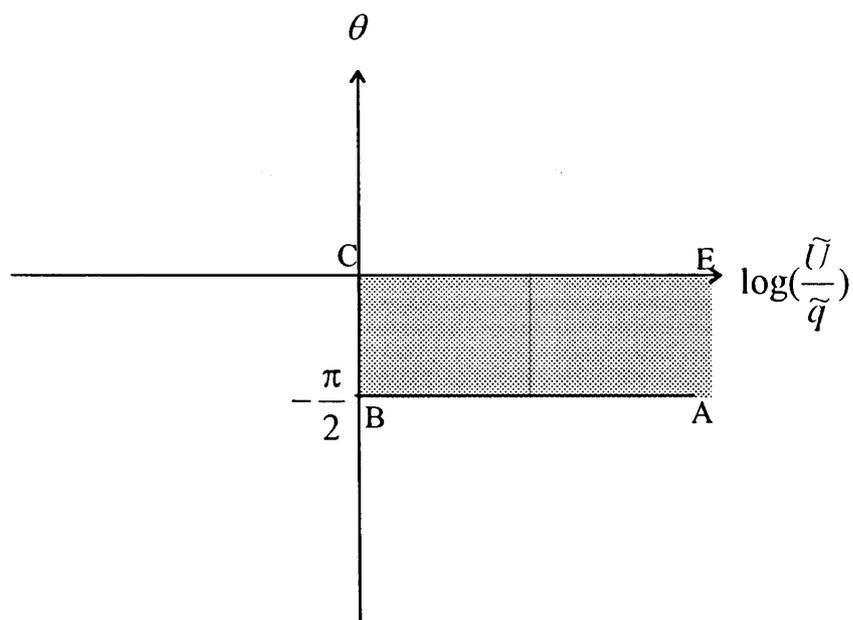


FIG -4-

Le domaine occupé par le fluide dans le plan Ω

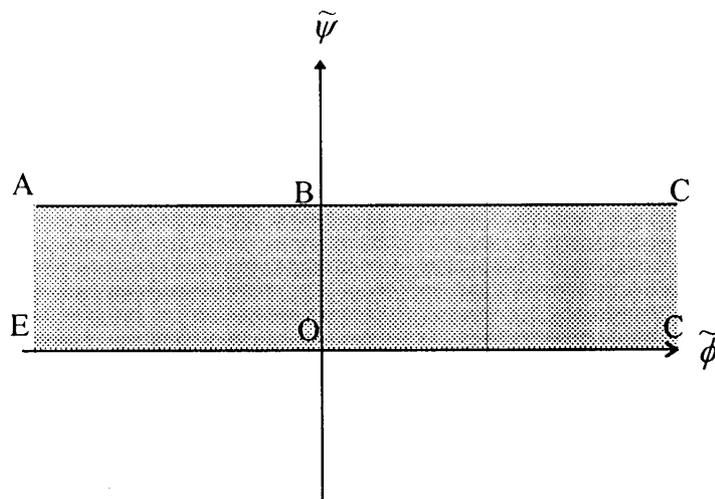


FIG -5-

plan de la variable \tilde{f}

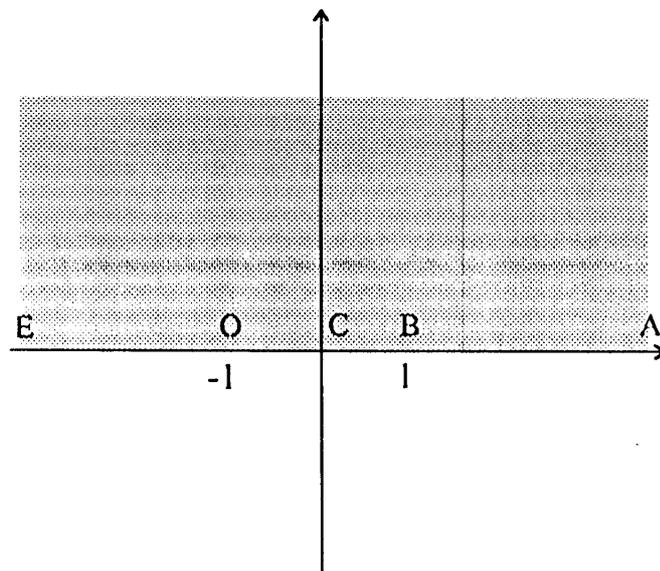


FIG -6-

plan de la variable λ

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} (1 - ch(2\Omega)) \\ &= -sh^2 \Omega \end{aligned}$$

L'équation (2.12) nous donne une relation entre λ et Ω .

La seconde partie du travail consiste à trouver par la méthode des transformations conformes une relation entre λ et \tilde{f} .

En utilisant encore une fois le théorème de *schwarz-christoffel* et en respectant la correspondance des points $A \rightarrow -\infty$, $B = i\tilde{H}$, C à l'infini du plan \tilde{f} au points $B=1$, $C=0$ et A à l'infini sur le plan λ (fig. 6).

$$\frac{d\tilde{f}}{d\lambda} = \mathcal{A}\lambda^{-1}$$

ce qui donne, après intégration

$$(2.13) \quad \tilde{f} = \mathcal{A} \log \lambda + \mathcal{B}$$

Pour déterminer les constantes \mathcal{A} et \mathcal{B} , on utilise le fait qu'au point B on a :

$$(2.14.a) \quad \tilde{f} = i\tilde{H}\tilde{U} \quad \text{et} \quad \lambda = 1$$

et au point O on a :

$$(2.14.b) \quad \tilde{f} = 0 \quad \text{et} \quad \lambda = -1$$

En remplaçant \tilde{f} et λ par les valeurs de la relation (2.14.a) dans (2.13), on trouve

$$\mathcal{B} = i\tilde{H}\tilde{U}.$$

De l'équation (2.13), on déduit:

$$\mathcal{A} = \frac{\tilde{f} - i\tilde{H}\tilde{U}}{\log \lambda}.$$

On sait d'après la relation (2.14.b) que $\tilde{f}(-1) = 0$, donc $\mathcal{A} = \frac{-i\tilde{H}\tilde{U}}{\pi}$.

En substituant \mathcal{A} et \mathcal{B} dans (2.13) on obtient finalement

$$(2.15) \quad \lambda = -\exp\left(\frac{-\pi}{\tilde{H}\tilde{U}}\tilde{f}\right).$$

D'où l'on tire, en utilisant (2.12), la relation entre Ω et \tilde{f} :

$$\lambda = -\exp\left(\frac{-\pi}{\tilde{H}\tilde{U}}\tilde{f}\right) = -sh^2\Omega.$$

Comme

$$(2.16) \quad \lambda = -sh^2\Omega = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\exp(2\Omega) + \exp(-2\Omega)}{2}\right).$$

en substituant (2.6) dans (2.16), on trouve après simplification

$$(2.17) \quad \lambda = -\frac{1}{4}\left(-2 + \tilde{U}^2\left(\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{f}}\right)^2 + \frac{1}{\tilde{U}^2}\left(\frac{d\tilde{f}}{d\tilde{z}}\right)^2\right).$$

on pose $Y = \tilde{U}^2\left(\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{f}}\right)^2$, l'équation (2.17) devient

$$Y^4 - 2(1-2\lambda)Y^2 + 1 = 0.$$

dont la solution s'écrit :

$$Y = \tilde{U}^2\left(\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{f}}\right)^2 = (1-2\lambda) \mp i\sqrt{1-(1-2\lambda)^2}$$

comme $\tilde{U}^2\left(\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{f}}\right)^2 = -i$ lorsque $\lambda = \frac{1}{2}$

on prend donc le signe négatif de la racine, i.e.

$$\tilde{U}^2 \left(\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{f}} \right)^2 = (1-2\lambda) - i\sqrt{1-(1-2\lambda)^2}$$

En résolvant cette équation on trouve .

$$\begin{aligned} \tilde{U} \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{f}} &= \sqrt{\lambda} - i\sqrt{1-\lambda} & \tilde{U} \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{f}} &= \sqrt{1-\lambda} - i\sqrt{\lambda} \\ \tilde{U} \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{f}} &= -\sqrt{\lambda} + i\sqrt{1-\lambda} & \tilde{U} \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{f}} &= -\sqrt{1-\lambda} + i\sqrt{\lambda} \end{aligned}$$

et comme

$$\begin{cases} \tilde{U} \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{f}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{lorsque } \lambda = \frac{1}{2} \\ \tilde{U} \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{f}} = i & \text{lorsque } \lambda = 1 \end{cases}$$

on choisit

$$(2.18) \quad \tilde{U} \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{f}} = \sqrt{1-\lambda} - i\sqrt{\lambda}$$

on a d'autre part

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \tilde{U} \frac{d\tilde{z}}{d\lambda} &= \tilde{U} \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{f}} \frac{d\tilde{f}}{d\lambda} \\ &= \frac{\tilde{H}\tilde{U}}{\pi} \left(-\frac{\sqrt{1-\lambda}}{\lambda} + i\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \end{aligned}$$

par une intégration simple on trouve

$$(2.20) \quad \tilde{z} - \tilde{z}_0 = 2 \frac{\tilde{H}\tilde{U}}{\pi} \left(-\log \frac{\sqrt{1-\lambda}}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{1-\lambda} + i\sqrt{\lambda} \right)$$

où \tilde{z}_0 est la constante d'intégration .

les équations (2.20) et (2.15) donne la solution du problème sous forme

$$(2.21) \quad \begin{cases} z = I'(\lambda) \\ \lambda = -\exp\left(-\frac{\pi}{\tilde{H}\tilde{U}}\tilde{f}\right) \end{cases}$$

Le système (2.21) nous permet de trouver la forme de la surface libre BC. On a

$$\tilde{\psi} = \tilde{H}\tilde{U}, \quad \tilde{\phi} = \tilde{U}\tilde{s} \text{ et } \Omega = i\theta$$

où \tilde{s} désigne la distance le long de la surface libre à partir du point B.

De (2.12) et (2.15) on peut écrire

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \lambda &= \sin^2 \theta \\ &= \exp\left(\frac{\pi\tilde{s}}{\tilde{H}}\right) \end{aligned}$$

Puisque au point B on a $\tilde{z}(1) = i\tilde{L}$, en substituant dans (2.20), on trouve $\tilde{z}_0 = i\tilde{L}$, on obtient la forme de la surface libre par l'équation paramétrique suivante :

$$(2.23) \quad \begin{cases} \tilde{x} = \frac{2\tilde{H}}{\pi} \left(-\log\left(\frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}\right) - \cos\theta \right) \\ \tilde{y} = \tilde{L} - \frac{2\tilde{H}}{\pi} (1 + \sin\theta) \end{cases} \quad \frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq 0$$

L'amplitude de l'écoulement à l'infini est donnée par

$$(2.24) \quad \tilde{H} = \lim_{\tilde{s} \rightarrow +\infty} y(\tilde{s}) = \tilde{L} - \frac{2\tilde{H}}{\pi}$$

ce qui donne

$$(2.25) \quad \frac{\tilde{H}}{\tilde{L}} = \frac{\pi}{\pi + 2} = 0.611$$

La valeur $\frac{H}{L} = 0.611$ représente le degré de contraction de l'écoulement.

On pose

$$\begin{cases} x = \frac{\tilde{x}}{\tilde{L}} \\ y = \frac{\tilde{y}}{\tilde{L}} \end{cases}$$

et comme $\frac{\tilde{H}}{\tilde{L}}$ est donné par (2.19), l'équation paramétrique de la surface libre devient alors

$$(2.26) \quad \begin{cases} x = \frac{2}{2+\pi} \left(-\log\left(\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta}\right) - \cos\theta \right) \\ y = 1 - \frac{2}{2+\pi} (1 + \sin\theta) \end{cases} \quad \frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq 0$$

Pour déterminer la forme de la surface libre du jet il suffit de prendre la symétrie de la courbe dans (2.26) par rapport à l'axe x'ox

$$(2.27) \quad \begin{cases} x = \frac{2}{2+\pi} \left(-\log\left(\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta}\right) - \cos\theta \right) \\ y = -1 + \frac{2}{2+\pi} (1 + \sin\theta) \end{cases} \quad \frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq 0$$

et par suite, les figures 7 et 8 représentent respectivement le graphe de l'équation (2.26) et la forme du jet.

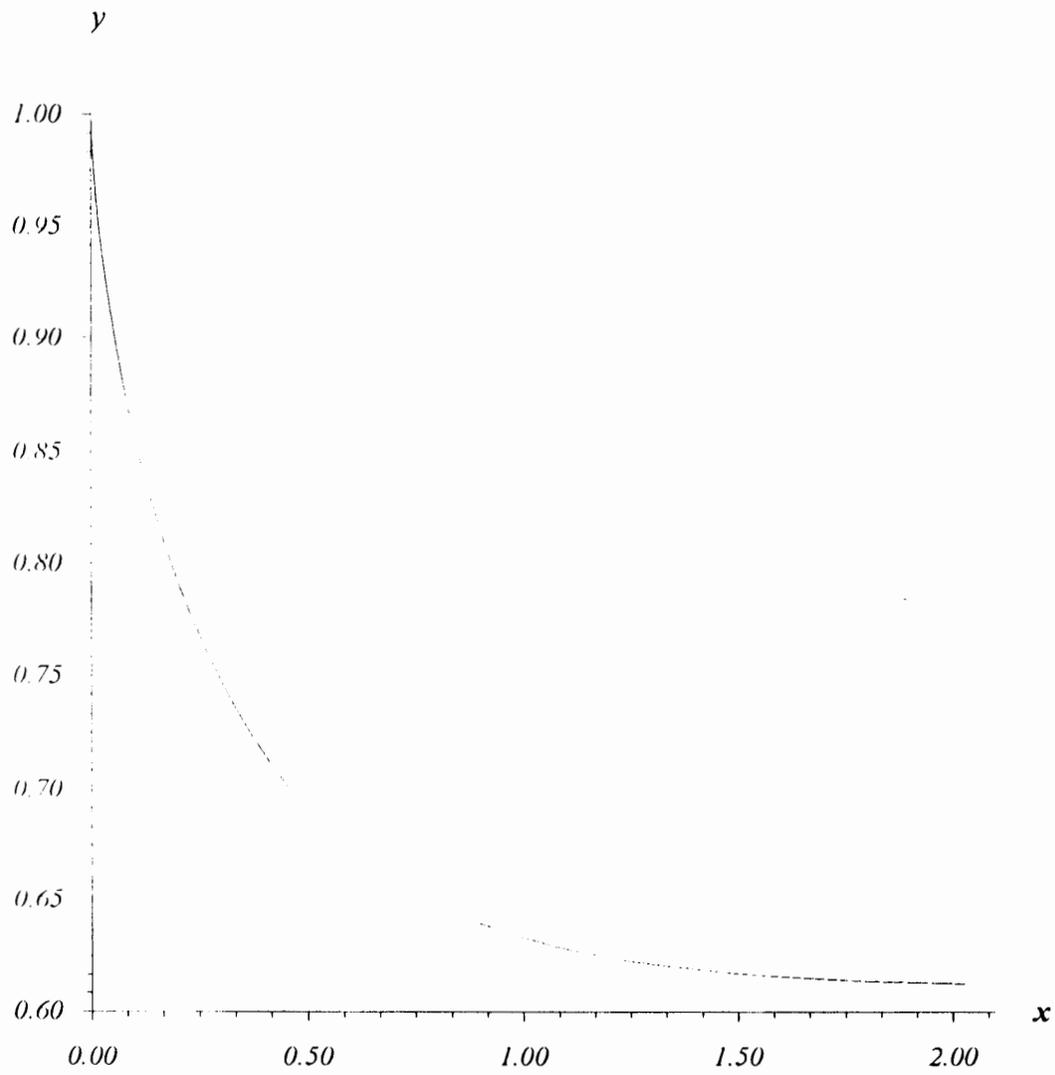


figure 7

— le graphe de l'équation (2.26)

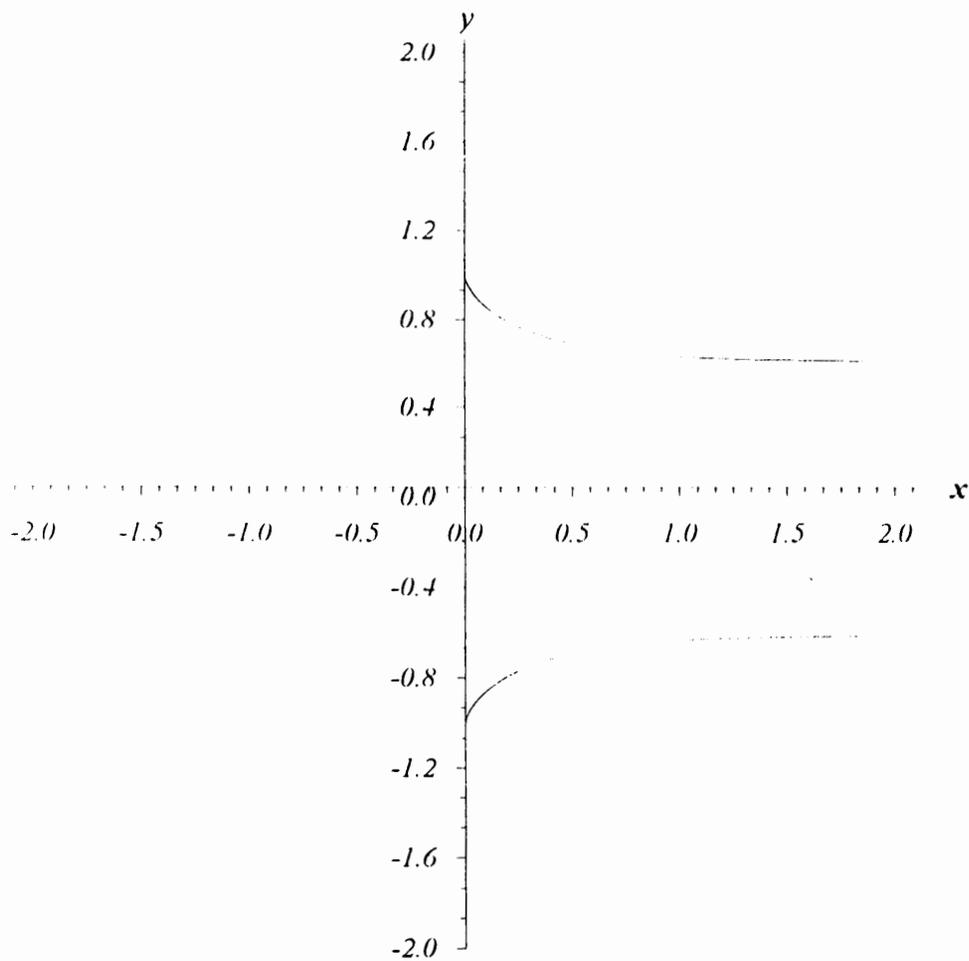


FIG.8

——— *Forme de la surface libre du jet*

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse au problème de l'écoulement d'un fluide sous un barrage dans le cas particulièrement où l'on tient compte de l'effet de la tension de surface. Les notations étant celles du chapitre II. La solution exacte du problème envisagé est impossible à obtenir explicitement à cause de la présence du terme non linéaire intervenant dans l'équation de *Bernoulli*. Pour cette raison, on résoud le problème par une approche numérique. La technique de résolution utilisée est celle de *Vandn - Broeck* et *Keller*. La solution est obtenue pour différentes valeurs du nombre de *Weber* α . Le problème a été traité par *Ackerberg et Liu* [1], ils ont été amenés à résoudre l'équation de *Laplace* par la méthode des différences finies, en discrétisant tout le domaine de l'écoulement. Nos résultats confirment et améliorent les résultats de *Ackerberg et Liu*.

3.2 Formulation du problème.

Nous considérons un écoulement potentiel, bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux sous un barrage d'ouverture \tilde{L} , (fig. 3bis). On prend comme repère de coordonnées le fond du barrage sur l'axe $\tilde{x}'\tilde{o}\tilde{x}$ et la paroi AB sur l'axe $\tilde{y}'\tilde{o}\tilde{y}$. Notons que lorsque $\tilde{x} \rightarrow -\infty$, la vitesse tend vers zéro, pour \tilde{x} positif, l'écoulement est limité supérieurement par la ligne de courant libre BC. Lorsque $\tilde{x} \rightarrow +\infty$, nous supposons que l'écoulement est uniforme de vitesse \tilde{U} et d'élévation \tilde{H} ,

Notons par $\tilde{\xi} = \tilde{u} - i\tilde{v}$, où \tilde{u} et \tilde{v} sont respectivement les composantes du vecteur vitesse dans la direction de $\tilde{x}'\tilde{o}\tilde{x}$ et de $\tilde{y}'\tilde{o}\tilde{y}$ et par $\tilde{f} = \tilde{\phi} + i\tilde{\psi}$ la fonction potentielle complexe, où $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\psi}$ désignent respectivement la fonction potentielle et la fonction de courant.

Sans perte de généralité, nous choisissons $\tilde{\phi} = 0$ au point $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, \tilde{L})$ et $\tilde{\psi} = 0$ sur la ligne de courant ABC (fig.9). Il s'ensuit que $\tilde{\psi} = -\tilde{L}\tilde{U}$ sur la ligne de courant EOC. En utilisant le fait que l'écoulement est potentiel, les composantes du vecteur vitesse sont alors données en fonction de $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\psi}$ par les relations:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \tilde{u} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}} \\ \tilde{v} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \end{cases}$$

ou $C = \frac{\tilde{H}}{\tilde{L}}$ désigne le degré de contraction de l'écoulement. Les relations ci-dessus - (conditions de *Cauchy-Riemann*) - montrent que la vitesse complexe $\tilde{\xi}$ et la fonction potentielle \tilde{f} sont des fonctions analytiques en $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$.

On note par \tilde{P}_0 la pression atmosphérique qui est constante au dessus de la surface libre et \tilde{P} la pression du fluide sur la surface libre. Lorsque $\tilde{x} \rightarrow +\infty$ la surface libre est une droite parallèle $\tilde{x}'\tilde{o}\tilde{x}$ donc $\tilde{P} = \tilde{P}_0$. Dans ces conditions, l'équation de *Bernoulli* sur la surface libre est donnée par :

$$(3.2) \quad \frac{1}{2} \tilde{q}^2 + \frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho}} = \frac{\tilde{P}_0}{\tilde{\rho}} + \frac{1}{2} \tilde{U}^2 \quad \text{sur BC}$$

\tilde{q} désigne le module de la vitesse. Le membre de droite de l'équation (3.2) est évalué selon les conditions de l'écoulement à l'infini ($\tilde{x} \rightarrow +\infty$).

La relation entre \tilde{P} et \tilde{P}_0 est donnée par la loi de *Laplace* [1]:

$$(3.3) \quad \tilde{P} - \tilde{P}_0 = \frac{\tilde{T}}{\tilde{R}}$$

Où \tilde{T} et \tilde{R} désignent respectivement la tension de surface et le rayon de courbure de la surface libre. On a par définition $\tilde{K} = \frac{1}{\tilde{R}}$. Puisque le centre de courbure est en dehors du

domaine de l'écoulement, alors \tilde{R} est de signe négatif.

En substituant (3.3) dans (3.2), on trouve:

$$(3.4) \quad \frac{1}{2} \tilde{q}^2 - \frac{\tilde{T}}{\tilde{\rho}} \tilde{K} = \frac{1}{2} \tilde{U}^2 \quad \text{sur BC}$$

Pour des raisons de simplification de l'équation ci-dessus, on est conduit à choisir

certaines grandeurs, qui, à partir desquelles, on peut exprimer (3.4) en variables non dimensionnelles. Pour cela, nous choisissons \tilde{L} et \tilde{U} comme étant respectivement des références de la longueur et de la vitesse. On pose:

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x} / \tilde{L}, y = \tilde{y} / \tilde{L}, u = \tilde{u} / \tilde{U}, v = \tilde{v} / \tilde{U}, K = \tilde{L}\tilde{K} \\ q &= \tilde{q} / \tilde{U}, \psi = \tilde{\psi} / C\tilde{L}\tilde{U}, \phi = \tilde{\phi} / C\tilde{L}\tilde{U}, \end{aligned}$$

Où les nouvelles variables x, y, K, q, ψ et ϕ sont non dimensionnelles, dans ce cas l'équation (3.4) devient :

$$(3.5) \quad \frac{1}{2} q^2 - \frac{1}{\alpha} K = \frac{1}{2}$$

où $\alpha = \frac{\tilde{\rho}\tilde{H}\tilde{U}^2}{\tilde{T}}$ désigne le nombre de *Weber*.

On note par $\xi = u - iv$ et puisque $u - iv$ est analytique on définit la fonction $\tau - i\theta$ par la relation

$$(3.6) \quad \xi = u - iv = \exp(\tau - i\theta)$$

Où θ est l'angle entre le vecteur vitesse et l'horizontale.

Evaluons maintenant la courbure K , on a :

$$\vec{V} = \exp(\tau)(\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j})$$

et dans les coordonnées intrinsèques

$$\vec{V} = |\vec{V}|\vec{u}_\tau$$

ici $\vec{u}_\tau = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$ est le vecteur unitaire tangentiel.

$$\begin{aligned} \vec{u}_\eta &= R \frac{d\vec{u}_\tau}{ds} = R \frac{d\vec{u}_\tau}{dt} \frac{dt}{ds} \\ &= \operatorname{Re} \exp(-\tau) \left(\frac{\partial\theta}{\partial\phi} \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial\theta}{\partial\phi} \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} \right) \frac{d\vec{u}_\tau}{d\theta} \\ &= R \exp(\tau) \frac{\partial\theta}{\partial\phi} (-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) \end{aligned}$$

\vec{u}_n est le vecteur unitaire normal et ds désigne l'élément de longueur sur la surface libre.

Finalement, on obtient :

$$K = \frac{1}{R} = \exp(\tau) \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|$$

on remplace K par sa valeur dans l'équation (3.5) on trouve

$$\frac{1}{2} q^2 - \frac{1}{\alpha} q \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| = \frac{1}{2}$$

d'autre part, on sait que $\theta(\phi)$ est une fonction croissante lorsque $0 \leq \phi < +\infty$ sur la surface libre BC, alors l'équation de *Bernoulli* dans le plan f s'écrit :

$$(3.7) \quad \frac{1}{2} \exp(2\tau) - \frac{1}{\alpha} \exp(\tau) \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = \frac{1}{2} \quad \text{sur BC}$$

avec les conditions

$$(3.8) \quad \begin{cases} \theta = 0, & \psi = -1, & -\infty < \phi < +\infty, \\ \theta = \frac{\pi}{2}, & \psi = 0, & \phi < 0 \end{cases}$$

Le problème mathématique est de déterminer la fonction $\tau - i\theta$ qui est analytique dans la bande $-1 < \psi < 0$, voir (fig 9) et qui vérifie les conditions (3.7) et (3.8)

3.3 Procédure numérique.

Pour résoudre ce problème numériquement, on applique la technique de troncation de la série utilisée par *Vanden-Broeck et Keller* [9]. On transforme le domaine occupé par le fluide dans le plan f (fig. 8), en un quart de disque unité dans le plan de la variable ω figure 10 par la transformation

$$(3.9) \quad f = \frac{2}{\pi} \log \left(\frac{-2i\omega}{1-\omega^2} \right)$$

les points A, B, C et E dans le plan z sont transformés respectivement aux points $\omega = 0$, $\omega = i$, $\omega = 1$ et $\omega = 0$. La surface libre BC est transformée en une circonférence de cercle (figure 10). Les points de la surface libre dans le plan ω sont donnés par la relation

$$(3.10) \quad \omega = |\omega| \exp(i\sigma) = \exp(i\sigma) \quad \text{tel que} \quad 0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}$$

et dans le plan f par la relation:

$$(3.11) \quad f = \phi, \quad \text{tel que} \quad \phi \geq 0 \quad \text{sur la surface libre}$$

Pour résoudre le problème, on doit écrire l'équation (3.7) dans le plan t . Pour cela, on doit évaluer $\frac{\partial \theta}{\partial \phi}$, dans le plan ω .

En substituant (3.10) dans l'équation (3.9) on trouve :

$$f = \phi = \frac{2}{\pi} \log \left(\frac{-2i \exp(i\sigma)}{1 - \exp(2i\sigma)} \right) = \frac{2}{\pi} \log \left(\frac{1}{\sin(\sigma)} \right)$$

ce qui implique que

$$df = d\phi = -\frac{2}{\pi} \cot(\sigma) d\sigma$$

d'où

$$(3.12) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \phi} = -\frac{2}{\pi} \tan(\sigma)$$

D'autre part, on a sur la surface libre

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} &= \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \phi} \\ &= -\frac{\pi}{2} \tan(\sigma) \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \end{aligned}$$

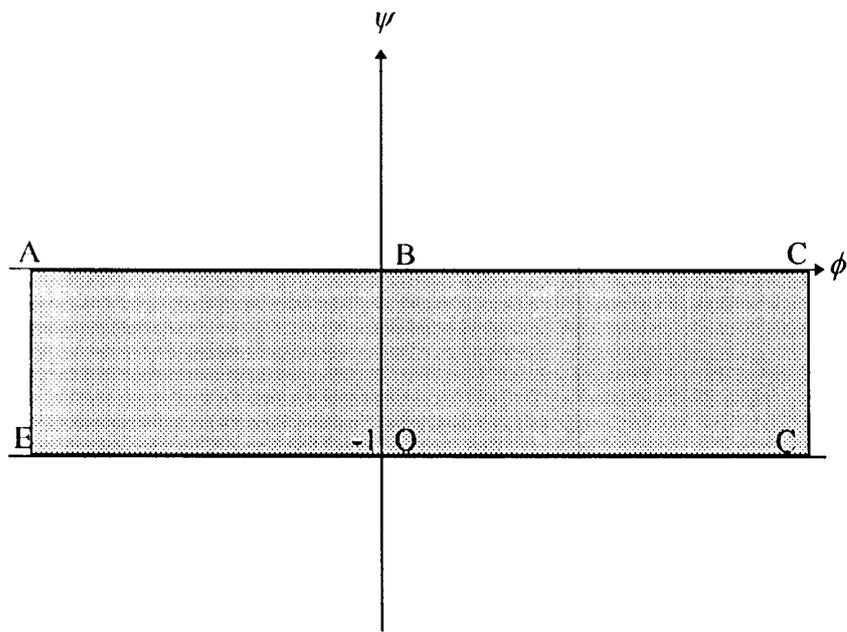


FIG. 9
plan de la variable f

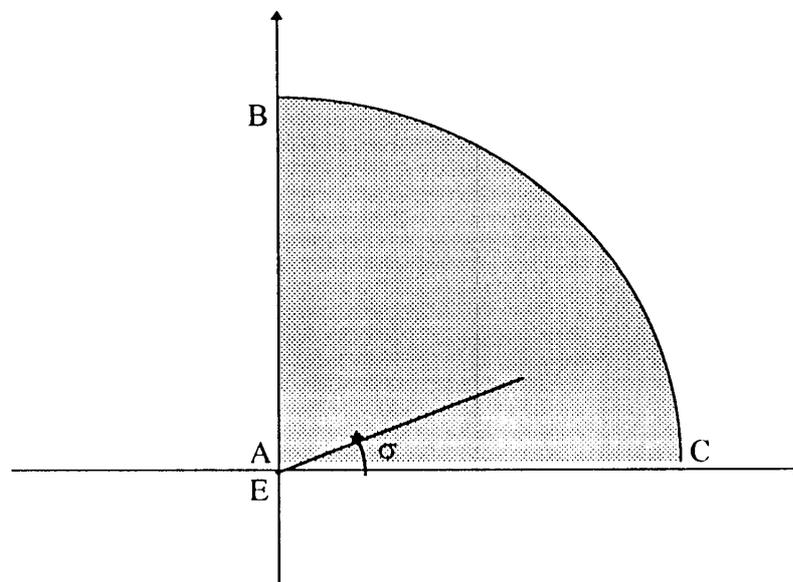


FIG. 10
plan de la variable ω

Finalement l'équation de *Bernoulli* devient

$$(3.13) \quad \exp(2\tau) + \frac{\pi}{\alpha} \exp(\tau) \cdot \tan(\sigma) \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = 1 \quad \text{sur BC'}$$

3.3.1 Comportement de la vitesse au voisinage de $-\infty$.

Loin et à l'origine de l'écoulement, l'ouverture du barrage BO apparaît comme un puit. Donc l'écoulement est caractérisé par la fonction potentielle suivante :

$$f \sim -\frac{2}{\pi} \log(z) \quad \text{lorsque } |z| \rightarrow \infty \text{ et } x < 0$$

ce qui donne

$$(3.14) \quad z \sim \exp\left(-\frac{\pi}{2} f\right) \quad \text{lorsque } \phi \rightarrow \infty \text{ et } 0 < \psi < 1$$

En substituant (3.9) dans l'équation ci-dessus, on trouve

$$z = \frac{i(1-\omega^2)}{2\omega}$$

Comme $\xi = C \frac{df}{dz}$ on trouve

$$\xi = -C \frac{2}{\pi} \frac{1}{z} = i \frac{2C}{\pi} \frac{2\omega}{1-\omega^2}$$

Donc

$$(3.15) \quad \xi = O(\omega) \quad \text{lorsque } \omega \rightarrow 0$$

3.3.2 Comportement de la vitesse au voisinage de point de séparation.

Localement au point de séparation nous avons un écoulement dans un angle qui égal à γ , donc l'écoulement est caractérisé par la fonction potentiel suivante:

$$(3.16) \quad f \sim \frac{a}{n} z^n \quad \text{où } n = \frac{\pi}{\gamma}$$

Alors

$$(3.17) \quad \xi = C \frac{df}{dz} \sim aC z^{\frac{\pi}{\gamma}-1} \quad \text{lorsque } z \rightarrow i$$

on a:

$$(3.18) \quad f = \phi = \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{-2i\omega}{1-\omega^2}\right) \quad \text{sur BC}$$

de l'équation (3.16) et (3.18) on trouve

$$(3.19) \quad z \sim \left(\frac{2}{a\gamma} \log\left(\frac{-2i\omega}{1-\omega^2}\right)\right)^{\frac{\gamma}{\pi}}, \quad \text{lorsque } z \rightarrow i$$

En substituant (3.19) dans (3.17) on trouve

$$\xi \sim aC \left(\left(\frac{2}{a\gamma} \log\left(\frac{-2i\omega}{1-\omega^2}\right) \right)^{\frac{\gamma}{\pi}} \right)^{\frac{\pi}{\gamma}-1}, \quad \text{lorsque } \omega \rightarrow i$$

d'où

$$\xi \sim aC \left(\frac{2}{a\gamma} \log\left(\frac{-2i\omega}{1-\omega^2}\right) \right)^{\frac{\gamma}{\pi}}, \quad \text{lorsque } \omega \rightarrow i$$

Le développement de la fonction potentiel complexe f au voisinage du point $\omega = i$ est donné par:

$$f = \frac{1}{\pi} (\omega - i)^2 + O((\omega - i)^3)$$

et comme $(\omega - i) = O(\omega^2 + 1)$ lorsque $\omega \rightarrow i$

on peut écrire alors

$$(3.20) \quad \xi = O(\omega^2 + 1)^{2 - \frac{2\gamma}{\pi}} \quad \text{lorsque } \omega \rightarrow i$$

3.4 Formulation de la série.

Nous définissons la fonction $\Omega(\omega)$ comme suit:

$$\xi(\omega) = g(\omega)\Omega(\omega)$$

où $g(\omega)$ contient les singularités et les zéros. La fonction $\Omega(\omega)$ est analytique à l'intérieur du disque unité $|\omega| < 1$, alors elle se développe en série. C'est à dire :

$$(3.21) \quad \xi(\omega) = g(\omega) \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \omega^n\right)$$

En utilisant les conditions aux limites (3.8) et les relations (3.15) et (3.20), alors l'équation (3.21) devient:

$$(3.22) \quad \begin{aligned} u - iv &= \omega(\omega^2 + 1)^{2 - \frac{2\gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \omega^{2k}\right) \\ &= \omega(\omega^2 + 1)^{2 - \frac{2\gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_{k-1} \omega^{2(k-1)}\right) \end{aligned}$$

où les a_k et γ sont des constantes réelles à déterminer. L'équation (3.22) vérifie toutes les conditions aux limites sauf la condition de *Bernoulli* (3.13). On détermine a_k et γ de sorte que l'équation de *Bernoulli* soit vérifiée.

En substituant l'équation (3.10) dans (3.22) on obtient

$$\exp(\tau - i\theta) = (2 \cos(\sigma))^{2 - \frac{2\gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2(k-1)\sigma) + i\left(3\sigma - \frac{2\gamma}{\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin(2(k-1)\sigma)\right)\right)$$

D'où

$$(3.23-a) \quad \theta(\sigma) = -\left(3\sigma - \frac{2\gamma}{\pi}\sigma + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin(2(k-1)\sigma)\right)$$

$$(3.23-b) \quad \exp(\tau(\sigma)) = (\cos(\sigma))^{2\frac{2\gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2(k-1)\sigma)\right)$$

En substituant (3.23-a) et (3.23-b) dans l'équation (3.13), on trouve :

$$(3.24) \quad \begin{aligned} & (\cos(\sigma))^{4\frac{4\gamma}{\pi}} \exp\left(2\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2(k-1)\sigma)\right) - \frac{\pi}{2\alpha} \tan(\sigma) (\cos(\sigma))^{2\frac{2\gamma}{\pi}} \times \\ & \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2(k-1)\sigma)\right) \left(3 - \frac{2\gamma}{\pi} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 2(k-1) \sin(2(k-1)\sigma)\right) = 1 \end{aligned}$$

pour déterminer les coefficients a_k et l'angle γ , faisons une troncation de la série après N

termes. Ainsi on introduit la discrétisation de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ en $N+1$ points

$$(3.25) \quad \sigma(I) = \frac{\pi}{2(N+1)} \left(I - \frac{1}{2}\right) \quad I = 1, 2, \dots, N+1$$

utilisons (3.24) et (3.25) on obtient le système de $N+1$ équations à $N+1$ inconnues

$$(3.26) \quad \begin{cases} (\cos(\sigma(I)))^{4\frac{4\gamma}{\pi}} \exp\left(2\sum_{k=1}^N a_k \cos(2(k-1)\sigma(I))\right) - \frac{\pi}{2\alpha} \tan(\sigma(I)) (\cos(\sigma(I)))^{2\frac{2\gamma}{\pi}} \times \\ \exp\left(\sum_{k=1}^N a_k \cos(2(k-1)\sigma(I))\right) \left(3 - \frac{2\gamma}{\pi} + \sum_{k=1}^N a_k 2(k-1) \sin(2(k-1)\sigma(I))\right) = 1 \quad I = 1, N+1 \end{cases}$$

Pour résoudre ce système on utilise la méthode de Newton.

3.5 Forme de la surface libre et la valeur du degré de contraction :

3.5.1 Calcul du degré de contraction

De la relation (3.1), on tire $\xi = C \frac{df}{dz}$

d'où

$$(3.27) \quad dz = dx + idy = C \exp(-\tau + i\theta) (d\phi + id\psi).$$

comme $d\psi = 0$ sur la surface libre, il vient :

$$\begin{cases} dx = C \exp(-\tau) \cos(\theta) d\phi \\ dy = C \exp(-\tau) \sin(\theta) d\phi \end{cases}$$

par suite

$$(3.28) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \sigma} = C \exp(-\tau) \cos(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma} = C \exp(-\tau) \sin(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \end{cases}$$

En substituant (3.23-a), (3.23-b) et (3.12) dans (3.28) on obtient le système d'équation suivant :

$$(3.29) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \sigma}(\sigma(I)) = -\frac{2C'}{\pi} \cot(\sigma(I)) (\cos(\sigma(I)))^{2-\frac{2\gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{k=1}^N a_k \cos(2(k-1)\sigma(I))\right) \times \\ \cos\left(3 - \frac{\lambda}{\pi} + \sum_{k=1}^N a_k \sin(2(k-1)\sigma(I))\right) & (1) \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma}(\sigma(I)) = \frac{2C'}{\pi} \cot(\sigma(I)) (\cos(\sigma(I)))^{2-\frac{2\gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{k=1}^N a_k \cos(2(k-1)\sigma(I))\right) \times \\ \sin\left(3 - \frac{\lambda}{\pi} + \sum_{k=1}^N a_k \sin(2(k-1)\sigma(I))\right) & (2) \end{cases} \quad I = 1, N+1$$

Pour déterminer le degré de contraction C on procède comme suit :

on remplace approximativement la dérivé contenue dans l'équation (2) de (3.29) par

$$\frac{\partial y}{\partial \sigma}(\sigma(I)) \approx \frac{y(\sigma(I)) - y(\sigma(I-1))}{h} \quad I=2, N+1$$

où $h = \frac{\pi}{2(N+1)}$

alors :

$$y(\sigma(I-1)) = y(\sigma(I)) - h \frac{\partial y}{\partial \sigma}(\sigma(I-1)), \quad I=2, N+1$$

pour $I = N+1$, on a $y(\sigma(N)) = y(\sigma(N+1)) - h \frac{\partial y}{\partial \sigma}(\sigma(N))$

par récurrence on trouve

$$\begin{aligned} y(\sigma(1)) &= y(\sigma(N+1)) - h \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma}(\sigma(N)) + \frac{\partial y}{\partial \sigma}(\sigma(N-1)) + \dots + \frac{\partial y}{\partial \sigma}(\sigma(1)) \right) \\ &= y(\sigma(N+1)) - h \sum_{i=1}^N \frac{\partial y}{\partial \sigma}(\sigma(i)) \end{aligned}$$

comme $y(N+1) = 1$ (au point B) et $y(1) = \frac{H}{L} = C'$, on aura :

$$(3.30) \quad C' = \frac{H}{L} = y(\sigma(1)) = 1 - h \sum_{i=1}^N \frac{\partial y}{\partial \sigma}(\sigma(i))$$

en substituant l'équation (2) du système (3.29) dans (3.30) on trouve :

$$C' = 1 - h \sum_{i=1}^N \frac{2\sigma^i}{\pi} \cot(\sigma(i)) (\cos(\sigma(i)))^{2-2\sigma^i} \exp\left(\sum_{k=1}^N a_k \cos(2(k-1)\sigma(i))\right) \sin\left(3 - \frac{\lambda}{\pi} + \sum_{k=1}^N a_k \sin(2(k-1)\sigma(i))\right)$$

d'où

$$(3.31) \quad C' = \frac{1}{1 + h \sum_{i=1}^N \frac{2\sigma^i}{\pi} \cot(\sigma(i)) (\cos(\sigma(i)))^{2-2\sigma^i} \exp\left(\sum_{k=1}^N a_k \cos(2(k-1)\sigma(i))\right) \sin\left(3 - \frac{\lambda}{\pi} + \sum_{k=1}^N a_k \sin(2(k-1)\sigma(i))\right)}$$

Cette valeur exprime le degré de contraction de l'écoulement.

3.5.2-Forme de la surface libre BC

On remplace C' donné par la relation (3.31) dans (3.29), en utilisant la méthode d'Euler pour résoudre le système obtenu, on trouve les valeurs de x et y en

chaque point $\sigma(i)$, pour $i=1, N+1$, avec les conditions initiales $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

3.6- Résultats et discussion

3.6.1-Solution sans tension de surface :

Lorsque la tension de surface est négligée, le nombre de *Weber* tend vers l'infini l'équation (3.13) devient :

$$(3.32) \quad \exp(2\tau) = u^2 + v^2 = 1 \quad \text{sur la surface libre}$$

et le système (3.26) se réduit à :

$$(3.33) \quad (\cos(\sigma(l)))^{2\frac{2\gamma}{\pi}} \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2(k-1)\sigma(l))\right) - 1 = 0 \quad l = 1, N+1$$

où $\sigma(l)$ est donnée par la relation (3.25)

La méthode décrite ci-dessus nous permet de trouver l'angle γ et les coefficients a_k de la série (3.22). Le tableau ci-dessous montre quelques valeurs des coefficients a_k et l'angle γ obtenue pour α tend vers l'infini.

γ	a_1	a_{10}	a_{20}	a_{30}	a_{40}	a_{50}
3.1415	$-0.2298 \cdot 10^{-7}$	$0.2908 \cdot 10^{-8}$	$0.1118 \cdot 10^{-8}$	$0.5554 \cdot 10^{-9}$	$0.2564 \cdot 10^{-9}$	$0.3991 \cdot 10^{-10}$

tableau . 1

On peut aisement voir que $\gamma \sim \pi$ et $a_k \sim 0$ pour $k \geq 1$. C'est à dire:

$$u - iv \sim \omega$$

cette solution est la même obtenue par la méthode de *Kirchoff* dans le chapitre II. L'angle de séparation $\gamma = \pi$ montre qu'il n'y a pas de singularité au point de séparation B, et que le fluide quitte la paroi AB tangentiellement. Le degré de contraction $C = 0.610999$. Graphiquement, on trouve la forme de la surface libre dans ce cas confondu à celle trouvée paramétriquement au chapitre II, avec une erreur de 10^{-6} (figure 11.)

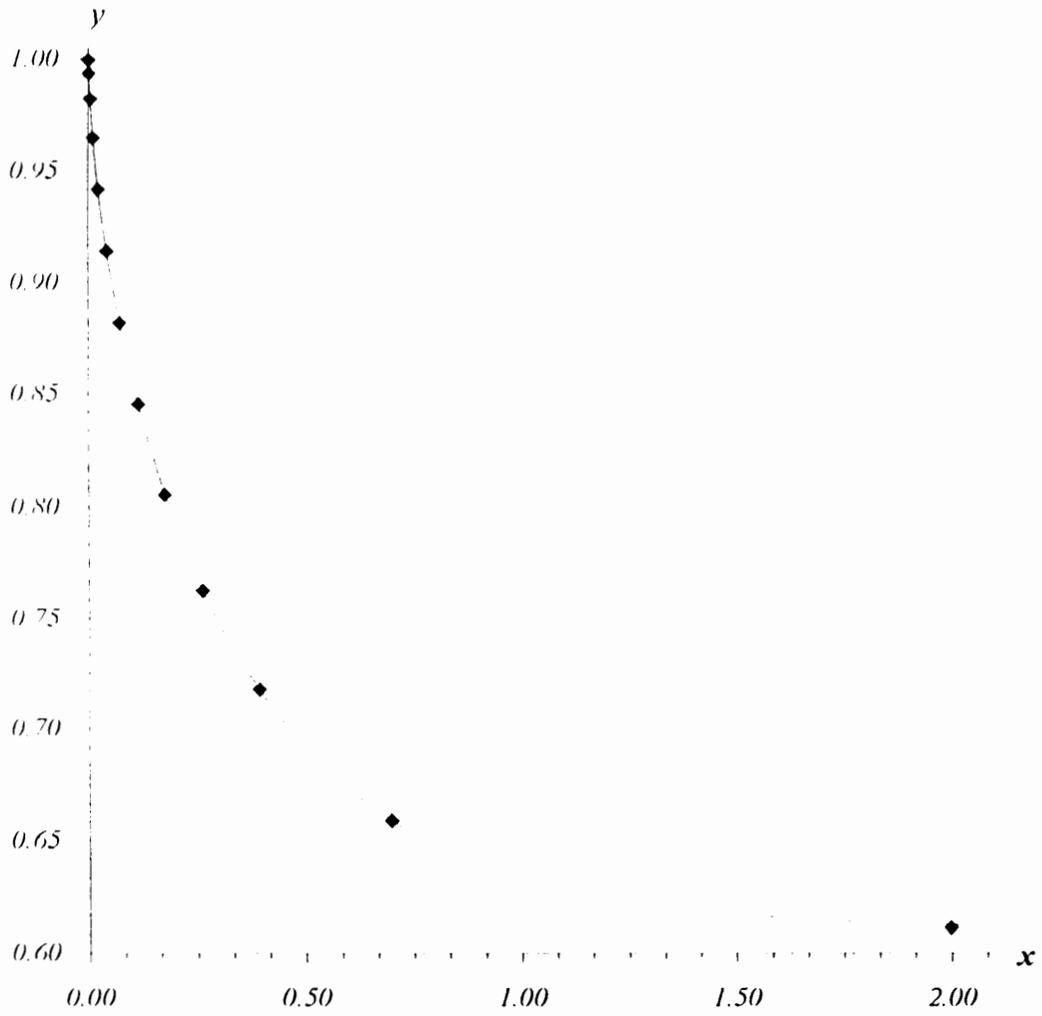


FIG -11-

— forme exacte de la surface libre
 ◆ la forme de la surface libre approximée

3.6.2-Solution avec tension de surface :

On utilise la même méthode pour résoudre le système non linéaire (3.26) pour différentes valeurs de nombre de *Weber* α . On trouve pour chaque valeur de α l'angle γ et les coefficients a_k de la série (3.19), le tableau ci-dessous présente quelques valeurs des coefficients a_k et l'angle γ . Ces résultats ont été trouvés pour $N=50$.

α	γ	a_1	a_{10}	a_{20}	a_{30}	a_{40}	a_{50}
1	4.416	$0.5689 \cdot 10^{-1}$	$0.1500 \cdot 10^{-3}$	$0.4498 \cdot 10^{-4}$	$0.177 \cdot 10^{-4}$	$0.6627 \cdot 10^{-5}$	$0.8479 \cdot 10^{-6}$
3	3.842	$0.6169 \cdot 10^{-1}$	$0.3669 \cdot 10^{-4}$	$0.4946 \cdot 10^{-4}$	$0.3159 \cdot 10^{-4}$	$0.1408 \cdot 10^{-4}$	$0.1881 \cdot 10^{-5}$
5	3.773	$0.2856 \cdot 10^{-1}$	$0.9603 \cdot 10^{-4}$	$-0.1837 \cdot 10^{-4}$	$0.1786 \cdot 10^{-4}$	$0.1405 \cdot 10^{-4}$	$0.2141 \cdot 10^{-5}$
6.8	3.729	$0.7668 \cdot 10^{-2}$	$0.3207 \cdot 10^{-3}$	$-0.3028 \cdot 10^{-4}$	$0.3845 \cdot 10^{-5}$	$0.1299 \cdot 10^{-4}$	$0.2303 \cdot 10^{-5}$
10	3.629	$-0.1280 \cdot 10^{-1}$	$0.3646 \cdot 10^{-3}$	$0.4239 \cdot 10^{-4}$	$-0.9728 \cdot 10^{-5}$	$0.1031 \cdot 10^{-4}$	$0.2539 \cdot 10^{-5}$
15	3.541	$-0.2730 \cdot 10^{-1}$	$0.5933 \cdot 10^{-3}$	$0.6652 \cdot 10^{-4}$	$0.5228 \cdot 10^{-5}$	$0.5480 \cdot 10^{-5}$	$0.2829 \cdot 10^{-5}$
20	3.488	$-0.3386 \cdot 10^{-1}$	$0.7588 \cdot 10^{-3}$	$0.9140 \cdot 10^{-4}$	$0.2910 \cdot 10^{-4}$	$0.2386 \cdot 10^{-5}$	$0.3052 \cdot 10^{-5}$
25	3.452	$-0.6371 \cdot 10^{-1}$	$0.8499 \cdot 10^{-3}$	$0.1126 \cdot 10^{-3}$	$0.3078 \cdot 10^{-4}$	$0.2246 \cdot 10^{-5}$	$0.3225 \cdot 10^{-5}$
32	3.416	$-0.3933 \cdot 10^{-1}$	$0.9636 \cdot 10^{-3}$	$0.1327 \cdot 10^{-3}$	$0.2858 \cdot 10^{-4}$	$0.6501 \cdot 10^{-5}$	$0.3403 \cdot 10^{-5}$
50	3.362	$-0.4020 \cdot 10^{-1}$	$0.1072 \cdot 10^{-2}$	$0.1568 \cdot 10^{-3}$	$0.4100 \cdot 10^{-4}$	$0.1612 \cdot 10^{-4}$	$0.3626 \cdot 10^{-5}$
10^2	3.297	$-0.3673 \cdot 10^{-1}$	$0.1211 \cdot 10^{-2}$	$0.1947 \cdot 10^{-3}$	$0.5679 \cdot 10^{-4}$	$0.2009 \cdot 10^{-4}$	$0.3317 \cdot 10^{-5}$
10^3	3.189	$-0.1681 \cdot 10^{-1}$	$0.1085 \cdot 10^{-2}$	$0.2435 \cdot 10^{-3}$	$0.8799 \cdot 10^{-3}$	$0.2772 \cdot 10^{-4}$	$0.1141 \cdot 10^{-6}$

Tableau 2

quelques valeurs des coefficients a_k de la série (3.22), et l'angle γ

Comme il apparaît dans le tableau 2 les coefficients a_k sont décroissants et l'angle γ croit lorsque α décroît. On constate aussi que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \omega^{2(k-1)}$ est absolument convergente car on a:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k \omega^{2(k-1)}| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^k$$

Le tableau 3 présente la comparaison du terme générale de la série (3.22) avec $\left(\frac{4}{5}\right)^k$ pour $\alpha = 50$ et $\alpha = 1000$.

<i>k</i>	$\alpha = 1000$	$\alpha = 50$	$(4/5)^k$
	a_k	a_k	
1	1.6812294582676531 10 ⁻²	4.0200486596189555 10 ⁻²	0.8000000000000000
2	2.3796042043657827 10 ⁻²	6.2128468450938312 10 ⁻²	0.6400000000000000
3	1.0468481008173310 10 ⁻²	2.5805007640193311 10 ⁻²	0.5120000000000000
4	5.9869976902937982 10 ⁻³	1.0574684412812367 10 ⁻²	0.4096000000000000
5	4.0465481265333919 10 ⁻³	7.2484248896597791 10 ⁻³	0.3276800000000000
6	2.8570181694816509 10 ⁻³	3.8966927083604036 10 ⁻³	0.2621440000000000
7	2.1753140306176443 10 ⁻³	3.1558007960257411 10 ⁻³	0.2097152000000000
8	1.6709530202116484 10 ⁻³	1.8953897366564631 10 ⁻³	0.1677721600000000
9	1.3483807861158994 10 ⁻³	1.6887560836954634 10 ⁻³	0.1342177280000000
10	1.0848118122899076 10 ⁻³	1.0717553346530477 10 ⁻³	0.1073741824000000
11	9.0658871655981210 10 ⁻⁴	1.0096128455207058 10 ⁻³	0.0858993459200000
12	7.5118833365602066 10 ⁻⁴	6.5368438752427104 10 ⁻⁴	0.0687194767360000
13	6.4279128093010517 10 ⁻⁴	6.5110118146936635 10 ⁻⁴	0.0549755813888000
14	5.4362522661230172 10 ⁻⁴	4.3817271158715370 10 ⁻⁴	0.0439804651110400
15	4.7323634897879696 10 ⁻⁴	4.5468933230957181 10 ⁻⁴	0.0351843720888300
16	4.0632512316874352 10 ⁻⁴	2.9941235302663676 10 ⁻⁴	0.0281474976710700
17	3.5841128949168993 10 ⁻⁴	3.1677053328845256 10 ⁻⁴	0.0225179981368500
18	3.1137033639066863 10 ⁻⁴	2.1766314262851291 10 ⁻⁴	0.0180143985094800
19	2.7759289810735493 10 ⁻⁴	2.4213377448125483 10 ⁻⁴	0.0144115188075900
20	2.4347747627130489 10 ⁻⁴	1.5681915843900234 10 ⁻⁴	0.0115292150460700
21	2.1902371888187019 10 ⁻⁴	1.7674629950319589 10 ⁻⁴	0.0092233720368550
22	1.9367644001822575 10 ⁻⁴	1.2396321686338132 10 ⁻⁴	0.0073786976294840
23	1.7559544018471379 10 ⁻⁴	1.4012515722350879 10 ⁻⁴	0.0059029581035870
24	1.5638293179246012 10 ⁻⁴	8.7995316235149323 10 ⁻⁵	0.0047223664828700
25	1.4276179415350864 10 ⁻⁴	1.1089622068740327 10 ⁻⁴	0.0037778931862960
26	1.2792367965214843 10 ⁻⁴	7.4133740081605270 10 ⁻⁵	0.0030223145490370
27	1.1745124183063934 10 ⁻⁴	8.2831534305864418 10 ⁻⁵	0.0024178516392290
28	1.0574687908454745 10 ⁻⁴	5.717572222635128 10 ⁻⁵	0.0019342813113830
29	9.7474616400691205 10 ⁻⁵	7.1909569509722470 10 ⁻⁵	0.0015474250491070
30	8.7986842282194732 10 ⁻⁵	4.1000153727209664 10 ⁻⁵	0.0012379400392850
31	8.1198842756168609 10 ⁻⁵	5.6986405930851669 10 ⁻⁵	0.0009903520314283
32	7.3230318970932975 10 ⁻⁵	3.7217426618418808 10 ⁻⁵	0.0007922816251426
33	6.7380993971616354 10 ⁻⁵	4.1831474814871510 10 ⁻⁵	0.0006338253001141
34	6.0408464884498880 10 ⁻⁵	2.9992159238850613 10 ⁻⁵	0.0005070602400913
35	5.5103584229360180 10 ⁻⁵	3.7098435410821606 10 ⁻⁵	0.0004056481920730
36	4.8769341619898176 10 ⁻⁵	1.9491050572936852 10 ⁻⁵	0.0003245185536584
37	4.3772909623172162 10 ⁻⁵	3.2107912716915348 10 ⁻⁵	0.0002596148429267
38	3.7893891839362259 10 ⁻⁵	1.6316566387781317 10 ⁻⁵	0.0002076918743414
39	3.3141362377979388 10 ⁻⁵	2.2261345809167767 10 ⁻⁵	0.0001661534994731
40	2.7715619430827997 10 ⁻⁵	1.6121589217613238 10 ⁻⁵	0.0001329227995785
41	2.3312326439549110 10 ⁻⁵	1.5852243212360095 10 ⁻⁵	0.0001063382396628
42	1.8500044951754723 10 ⁻⁵	1.1415757979532847 10 ⁻⁵	0.0000850705917302
43	1.4683424380707063 10 ⁻⁵	1.4835976872989822 10 ⁻⁵	0.0000680564733841
44	1.0744409340181010 10 ⁻⁵	5.3857711121407692 10 ⁻⁶	0.0000544451787073
45	7.7975153883675529 10 ⁻⁶	1.2809356398004520 10 ⁻⁵	0.0000435561429658
46	4.9800291933397050 10 ⁻⁶	3.5653105711011795 10 ⁻⁶	0.0000348449143727
47	3.1022691600066737 10 ⁻⁶	7.1854013838813446 10 ⁻⁶	0.0000278759314981
48	1.5028282113978191 10 ⁻⁶	4.5264218836387548 10 ⁻⁶	0.0000223007451985
49	6.7201049996718986 10 ⁻⁷	1.8648513095233271 10 ⁻⁶	0.0000178405961588
50	1.1406518567615538 10 ⁻⁷	3.6264399891614107 10 ⁻⁶	0.0000142724769270

tableau 3

Le tableau suivant exprime la variation du degré de contraction C en fonction du nombre de *Weber* α

α	1	2.5	4	6.8	10	15	20	25	32	50	100	1000	$\alpha \rightarrow \infty$
C	0.955	0.868	0.802	0.738	0.703	0.677	0.662	0.653	0.645	0.634	0.623	0.612	0.611

Tableau 4

*Variation de coefficient de contraction C
en fonction du nombre de Weber α*

On remarque que le coefficient de contraction C croît lorsque α décroît. La figure 12 montre la variation de C en fonction du nombre de *Weber* α .

La forme de la surface libre pour différentes valeurs du nombre de *Weber* est représentée dans la figure 13

On constate que les valeurs de l'angle de séparation γ décroît lorsque α croît. Le tableau 5 présente quelques valeurs de γ en fonction de α . La figure 14 représente la variation de l'angle de séparation γ en fonction du nombre de *Weber* α

α	0.25	0.5	1	6.8	10	15	20	25	32	50	100	1000	$\alpha \rightarrow \infty$
γ	4.663	4.587	4.416	3.729	3.629	3.541	3.488	3.452	3.416	3.362	3.297	3.189	3.141

Tableau 5

*Variation de l'angle de séparation γ
en fonction du nombre de Weber α*

Lorsque α s'approche de 0 la forme de la surface libre tend vers une demi droite $y = L$ où L est la largeur de l'orifice. Dans ce cas puisque l'écoulement dans le plan réel est un polygone, la solution peut être déterminé explicitement.

En effet : On transforme le plan réel de l'écoulement au demi plan supérieur de la variable λ (figure 6), en utilisant la transformation de *Schwartz - Cristoffel*, on trouve:

$$z = a \int (\lambda - 1)^{\frac{3\alpha}{2}} \lambda^{-1} d\lambda + b$$

Après intégration on trouve :

$$(3.34) \quad z = 2ai(\sqrt{1-\lambda} - \text{Log} \frac{\sqrt{1-\lambda}-1}{\sqrt{\lambda}}) + b$$

Pour déterminer les constantes a et b on utilise les conditions suivantes:

- Pour $\lambda = 1$, $z = i$
- Pour $\lambda = -1$, $z = 0$

d'où:

$$a = \frac{-1}{2 \log(\sqrt{2}-1) + 2\sqrt{2} - 3i\pi}$$

$$b = \frac{\pi + 2i(\log(\sqrt{2}-1) + \sqrt{2})}{2 \log(\sqrt{2}-1) + 2\sqrt{2} - 3i\pi}$$

On remplace a et b par ces valeurs dans l'équation (3.32) on trouve

$$(3.35) \quad z = \frac{-2i}{2 \log(\sqrt{2}-1) + 2\sqrt{2} - 3i\pi} (\sqrt{1-\lambda} - \text{Log} \frac{\sqrt{1-\lambda}-1}{\sqrt{\lambda}}) + \frac{\pi + 2i(\log(\sqrt{2}-1) + \sqrt{2})}{2 \log(\sqrt{2}-1) + 2\sqrt{2} - 3i\pi}$$

finalement de l'équation (2.10) et (3.33) on obtient :

$$(3.35) \quad z = \frac{-2i}{2 \log(\sqrt{2}-1) + 2\sqrt{2} - 3i\pi} \left(\sqrt{1 - \exp\left(\frac{-\pi}{LU} \phi\right)} - \text{Log} \frac{\sqrt{1 - \exp\left(\frac{-\pi}{LU} \phi\right)} - 1}{\sqrt{\exp\left(\frac{-\pi}{LU} \phi\right)}} \right) + \frac{\pi + 2i(\log(\sqrt{2}-1) + \sqrt{2})}{2 \log(\sqrt{2}-1) + 2\sqrt{2} - 3i\pi}$$

D'après la figure 14, on peut conclure que pour chaque valeur du nombre de *Weber* α il existe une et une seule solution du problème considéré. En effet d'après les résultats trouvés on a pour chaque valeur de α un seul angle de séparation γ et par suite, la relation (3.22) s'écrit d'une seule manière.

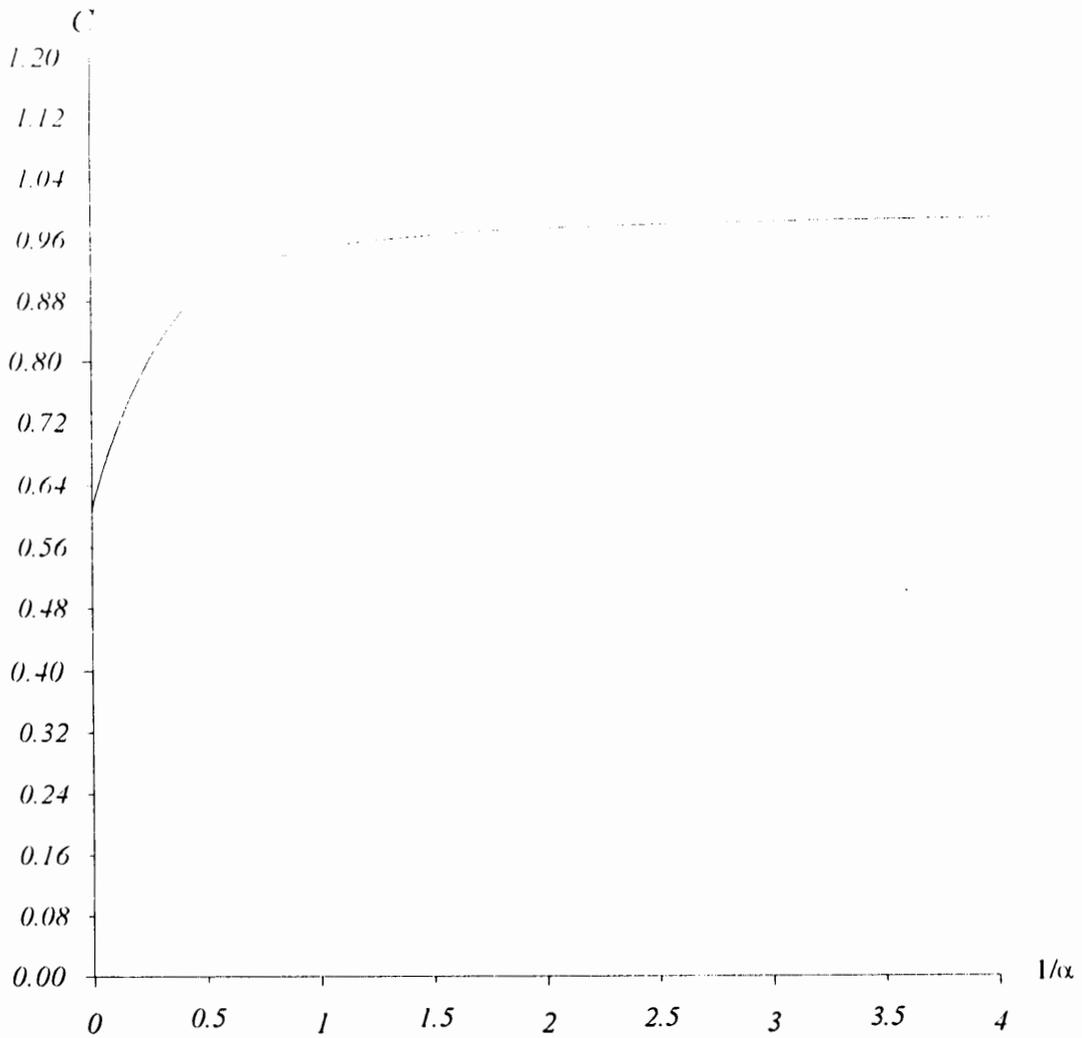


FIG -12-

*La variation de coefficient de contraction
en fonction du nombre de Weber*

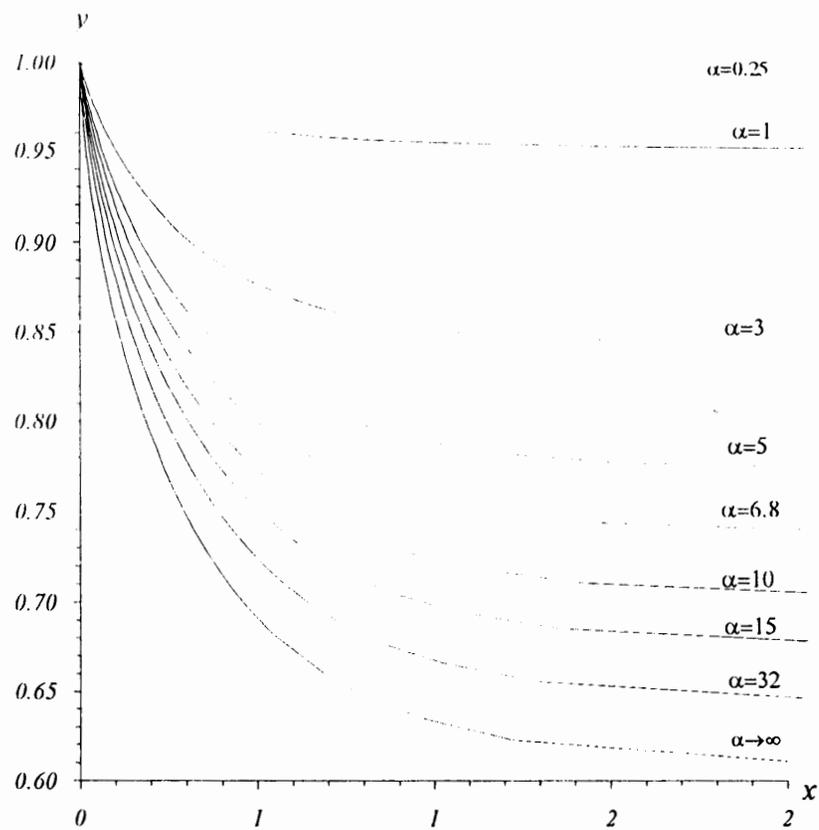


FIG -13-

*forme de la surface libre pour
différentes valeurs du nombre de Weber α*

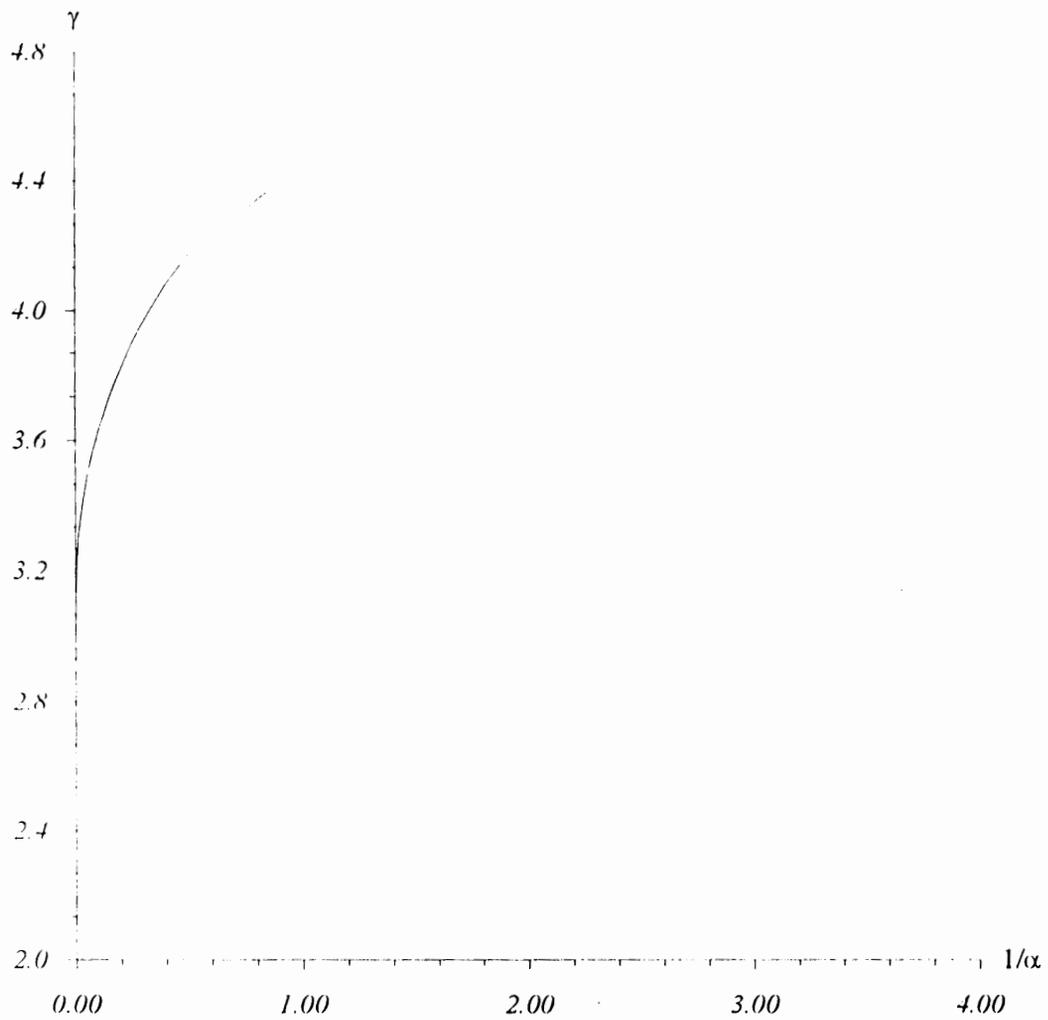


FIG -14-

*la variation de l'angle de séparation γ
en fonction du nombre de Weber α*

3.7- Conclusion.

L'emploi de la méthode de troncation de la série que nous avons utilisé est très puissante relativement à l'emploi de la méthode des différences finies utilisée par *Ackerberg* et *liu* [1]. Ils ont trouvé la solution que pour $\alpha \geq 6.801483$. Par contre nous avons pu trouver la solution numériquement du problème pour tout $\alpha \geq 0.25$, cela nous a permis de conclure que le problème admet une solution unique pour tout $\alpha \geq 0$. La solution pour $\alpha = 0$ peut être obtenue par la méthode des transformations conformes utilisée dans le chapitre II.

De plus, on a déterminé avec précision la nature de singularité au point de séparation de la surface libre avec la paroi vertical du réservoir.

ANNEXE

Contenu :

1. Méthodes de *Newton*
2. Algorithme de *Newton* pour la résolution de systèmes non linéaires $f(x)=0$
3. Algorithme de *Jordan* avec pivotation totale implicite
4. Programme de *Newton*

$$f_*(x) = 0$$

i.e.

$$f(x^*) + E(x^*)(x - x^*) = 0$$

En suivant la procédure précédente, la méthode générale de Newton consiste à prendre une approximation initiale x_0 à la solution x , puis tenter à l'améliorer itérativement comme suit :

$$x_{k+1} = x_k - S_k^{-1} \cdot f_k \quad k = 1, 2, \dots, n$$

en prenant $f_k = f(x_k)$ et avec la définition de la matrice Jacobienne

$$S_{kj} = E_{ij}(x_k)$$

On continue jusqu'à ce que $|f_i(x_{k+1})| < \varepsilon$

2. Algorithme de Newton pour la résolution de systèmes non linéaires $f(x)=0$

Étant donné

1. Calculer

$$\left. \begin{array}{l} E_{ij}^{(k)} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \Big|_{x=x_k} \\ f_i^{(k)} = -f_i(x_k) \end{array} \right\} \begin{array}{l} j = 1, 2, \dots, n \\ i = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

2. Résoudre le système linéaire :

$$\sum_{j=1}^n E_{ij}^{(k)} \Delta X_j^{(k)} = f_i^{(k)} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

3. Calculer

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta X_i^{(k)} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

4. Si

$$|f_i(x_{k+1})| < \varepsilon \quad i = 1, \dots, n$$

est vérifié, arrêter

3. Algorithme de Jordan avec pivotation totale implicite

• *Choix du pivot*

$$p_k = a_{l_k c_k} \text{ où } a_{l_k c_k} = \max_{ij} |a_{ij}|$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad i \neq l_1, l_2, \dots, l_{k-1}$$

$$j = 1, 2, \dots, n \quad i \neq c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$$

• *Normalisation*

$$a_{l_k j} = \frac{a_{l_k j}}{p_k} \quad j = 1, 2, \dots, n+1$$

Réduction

$$w = a_{i c_k}$$

$$a_{ij} = a_{ij} - w \cdot a_{l_k j} \quad \left. \begin{array}{l} j = 1, n+1 \\ i = 1, n \text{ et } i \neq l_k \end{array} \right\}$$

$k = 1, 2, \dots, n$

• *Remise en ordre*

$$x_{c_k} = a_{l_k, n+1}$$

Le programme suivant écrit en fortran 77, nous a permis de résoudre le système non linéaire du chapitre III

4. PROGRAMME DE NEWTON

```
EXTERNAL sum1,sum2,sum3,sum4
```

```
PARAMETER(n=51,nmaxb=200,h2=31415.D-4/(2.*n))
```

```
PARAMETER(Epsilon=1.D-5,Pivotmin=1.D-3)
```

```
DOUBLE PRECISION A(n-1),sum1,sum2,sum3,sum4,h,F,alpha,t(n),h1(n-1)
```

```
l,deltaA(n,1),y(n+1),sa(n),EF(n,n+1),f1(n),f2(n),x(n+1),
```

```
lA1(n-1),lamda,lamda1
```

```
OPEN(7,file='res2.dat',status='old')
```

```
READ(7,*)lamda,(A(i),i=1,50)
```

```
CLOSE(7)
```

```
c READ(*,*)(A(i),i=1,n-1),lamda
```

```
DATA pi,alpha/31415.D-4,1000.d0/
```

```
x(n+1)=0.
```

```
y(n+1)=1.
```

**WRITE(*,*)'APRES QUELQUES INSTANTS LES RESULTATS SERONT
AFFICHES'**

DO 400 nbiteration=1,nmaxb

WRITE(*,'(1X,80(1h*)/1x,A,I3)')iteration:',nbiteration

c -----

c *******LA FORMULE QUI EXPRIME LES ANGLE SIGMA******

c -----

DO 1 i=1,n

t(i)=pi/(2*n)*(float(i)-5.D-1)

1 **CONTINUE**

c -----

c *******EVALUATION DE LA FONCTION F*******

c -----

DO 51 i=1,n

51 **EF(i,n+1)=F(A,t(i),n-1,alpha,lamda)**

c -----

c *******EVALUATION DE LA JACOBIENNE E*******

c -----

DO 40 i=1,n

DO 41 j=1,n-1

DO 42 k=1,n-1

h1(k)=0.001

42 **CONTINUE**

DO 43 k=1,n-1

IF(k.NE.j)THEN

h1(k)=0.

END IF

43 **CONTINUE**

DO 44 k=1,n-1

44 **A1(k)=A(k)+h1(k)**

lamda1=lamda+0.001

EF(i,j)=(F(A1,t(i),n-1,alpha,lamda)-F(A,t(i),n-1,alpha,lamda))/

10.001

41 CONTINUE

 $EF(i,n)=(F(A,t(i),n-1,alpha,lamda1)-F(A,t(i),n-1,alpha,lamda))/$

10.001

40 CONTINUE

c -----

c *****CALCUL DE LA VITESSE*****

c -----

DO 3 i=1,n

 $sa(i)=(DCOS(t(i)))^{**}(2*(1-lamda/3.1415))*DEXP(sum2(A,t(i),n-1))$

3 CONTINUE

c -----

CALLJORDAN(EF,n,deltaA,pivotmin)

c -----

c REACTUALISATION DU VECTEUR X

c -----

DO 8 i=1,n-1

 $A(i)=A(i)-deltaA(i,1)$

8 CONTINUE

 $lamda=lamda-deltaA(n,1)$

c -----

c CALCULE DE LA NORME DE F

c -----

h=0.

DO 9 i=1,n

IF(DABS(F(A,t(i),n-1,alpha,lamda)).gt.DABS(h))THEN

h=F(A,t(i),n-1,alpha,lamda)

END IF

9 CONTINUE

WRITE(*,*)'h=',h

IF(DABS(h).LT.Epsilon) GO TO 100

400 CONTINUE

100 CONTINUE

```
OPEN(7,file='res2.dat',status='old')
WRITE (7,*)lamda,(A(i),i=1,n-1)
CLOSE(7)
DO10 i=1,n
f1(i)=-2./(pi*DTAN(t(i)))*(DCOS(t(i))**(2*(-1+lamda/
13.1415))*DEXP(-sum2(A,t(i),n-1))*DCOS(3*t(i)-2*t(i)*lamda/3.1415+
1sum1(A,t(i),n-1))
f2(i)=2./(pi*DTAN(t(i)))*(DCOS(t(i))**(2*(-1+lamda/
13.1415))*DEXP(-sum2(A,t(i),n-1))*DSIN(3*t(i)-2*t(i)*lamda/3.1415+
1sum1(A,t(i),n-1))
10 CONTINUE
sk1=0.
DO 111 j=1,n
111 sk1=sk1+h2*f2(j)
c=1./(1.+sk1)
DO11 j=0,n-1
x(n-j)=x(n-j-1)-h2*c*f1(n-j)
y(n-j)=y(n-j-1)-h2*c*f2(n-j)
11 CONTINUE
c=1./(1.+sk1)
OPEN(6,file='res.dat',status='old')
WRITE(6,*)c
WRITE(6,*)lamda
WRITE(6,*)'alpha=',alpha
WRITE(6,105)'les resultat'
105 FORMAT(1x,80(1h*),A,13)
DO 12 i=1,n
WRITE(6,106)i,t(i),A(i),x(i),y(i),sa(i)
12 CONTINUE
106 FORMAT(i5,5E12.4)
107 FORMAT(A,T11,A,T23,A,T35,A,T48,A,T59,A,T65,A/)
```

```

CLOSE(6)
STOP'FIN DU PROGRAME'
END
c -----
c *RESOLUTION DE LA N*N+1 SYSTEME LINEAIRE PAR LA METHODE
c DE JORDAN AVEC PIVOTATION TOTAL IMPLICIT*
c -----
SUBROUTINE JORDAN(EF,n,deltaA,pivotmin)
PARAMETER(Nmax=81)
INTEGER c(Nmax),l(Nmax),s
DOUBLE PRECISION EF(n,n+1), deltaa(n,1)
DOUBLE PRECISION p(Nmax),w
DO 8 k=1,n
p(k)=0.
DO 3 i=1,n
DO 2 j=1,n
IF(k.GT.1)THEN
DO 1 s=1,k-1
IF(i.EQ.l(s))GO TO 3
IF(j.EQ.c(s))GO TO 2
1 CONTINUE
ENDIF
IF(DABS(EF(i,j)).GT.DABS(p(k)))then
p(k)=EF(i,j)
l(k)=i
c(k)=j
ENDIF
2 CONTINUE
3 CONTINUE
IF(DABS(p(k)).EQ.pivotmin)THEN
WRITE(*,*)'pivot petitmatrice DSINguliŠre'
RETURN
ENDIF

```

```
      DO 4 j=1,n+1
      EF(l(k),j)=EF(l(k),j)/p(k)
4     CONTINUE
      DO 6 i=1,n
          IF(i.NE.l(k))THEN
              w=EF(i,c(k))
              DO 7 j=1,n+1
                  EF(i,j)=EF(i,j)-w*EF(l(k),j)
7         CONTINUE
          ENDIF
6     CONTINUE
8     CONTINUE
      DO 9 k=1,n
          DO 9 j=n+1,n+1
              deltaΛ(c(k),j-n)=EF(l(k),j)
9         CONTINUE
          RETURN
      END
c -----
      DOUBLE PRECISION function sum1(c,s,m)
      DOUBLE PRECISION c(81)
      DOUBLE PRECISION s
      sum1=0.
      DO 1 k=1,m
          sum1=sum1+c(k)*DSIN(2.*(k-1)*s)
1     CONTINUE
      RETURN
      END
c -----
      DOUBLE PRECISION function sum2(c,s,m)
      DOUBLE PRECISION c(81)
      DOUBLE PRECISION s
```

```

sum2=0.
DO 1 k=1,m
1 sum2=sum2+c(k)*DCOS(2.*(k-1)*s)
RETURN
END
c -----
DOUBLE PRECISION function sum3(c,s,m)
DOUBLE PRECISION c(81)
DOUBLE PRECISION s
sum3=0.
DO 1 k=1,m
1 sum3=sum3+2.*(k-1)*c(k)*DSIN(2.*(k-1)*s)
RETURN
END
c -----
DOUBLE PRECISION function sum4(c,s,m)
DOUBLE PRECISION c(81)
DOUBLE PRECISION s
sum4=0.
DO 1 k=1,m
1 sum4=sum4+2.*(k-1)*c(k)*DCOS(2.*(k-1)*s)
RETURN
END
c -----
DOUBLE PRECISION function F(c,s,m,alpha,r)
DOUBLE PRECISION c(81)
DOUBLE PRECISION s,alpha,sum2,sum4,r
F=-1.+(2*DCOS(s))**(4*(1-r/3.1415))*DEXP(2.*(sum2(c,s,m)))
1-3.1415D0/alpha*DTAN(s)*(2*DCOS(s))**(2*(1-r/3.1415))*
1DEXP(sum2(c,s,m))*DABS((3-2*r/3.1415+sum4(c,s,m)))
RETURN
END
END

```

REFERENCES

- [1] **R. C. Ackerberg and Ta-jo Liu.** *The effects of capillarity on the contraction coefficient of a jet emanating from a slot*, Phys. Fluids 30 (2). Februray 1987, p. 289-296.
- [2] **G.K. Batchelors.** *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge, 1967.
- [3] **M. Damou.** *Mécanique des fluides* (O.P.U), Septembre 1993
- [4] **A. Gourdin M. Boumahrat.** *Methodes numériques appliquées* (O.P.U), 1991.
- [5] **L. Landau E. Lifchitz.** *Mécanique des fluides.* edition Mir Moscou 1994.
- [6] **H. Mekias.** *Two-dimentional free-surface flows due to a point singularity*, thèse de doctorat d'état, University of Wisconsin-Madison, August 1991.
- [7] **R. Ouziaux J. Perrier** *Mécanique des fluides appliquée* (Bordas, paris, 1978).
- [8] **M. R. Spiegel.** *Variables complexes cours et problèmes* (série Schaum). McGraw-Hill, new york 1973.
- 9] **Jean-Marc Vanden-Broeck and J. B. Keller,** *free-surface flows due to a sink*, J. Fluid Mech. 175, 109 (1987).
- 10] **Jean-Marc Vanden-Broeck.** *Rising bubbles in a tow-dimensional tube With surface tension*, Phys. Fluids 27 (11), November 1984, p. 2604-2607.
- 11] **Jean-Marc Vanden-Broeck.** *Bubbles rising in a tube and jets falling from a nozzle*, Phys. Fluids 27 (5), May 1984, p.1090-1093
- 12] **Jean-Marc Vanden-Broeck.** *Flow under a gate*, Phys. Fluids 29 (10), October 1986, p.3148-3151
- 13] **Jean-Marc Vanden-Broeck.** *Free streamline model for a rising bubble*, Phys. Fluids 29 (9), September 1986, p. 2798-2801
- [14] **Jean-Marc Vanden-Broeck.** *The influence of surface tension on cavitating flow past a curved obstacle*, j. Fluid Mech. (1983), vol. 133, p. 255-264
- 15] **Jean-Marc Vanden-Broeck.** *Two-dimentional nonlinear free-surface flows past semi-infinite bodies*, Thèse de Doctorat d'état, University of Adelaide April 1978.
- [16] **Chia-shun yih.** *fluid méchanics*. West river press. Michigan 1979

ملخص. في هذا البحث نهتم بدراسة مسألة تدفق سائل غير قابل للانضغاط وغير لزج ينفذ عبر ثقب خزان في فضاء ذو بعدين. المسألة المطروحة تتميز بشرط غير خطي معطى بمعادلة برنولي (*l'équation de Bernoulli*) على السطح الحر للسائل ذو شكل غير معروف. المسألة تمت معالجتها من طرف اكربارج و ليو (*Ackerberg et Liu*) متبيين طريقة عددية تعتمد على تقسيمة كل مساحة التدفق ، أما نحن فقد تبيننا طريقة أخرى تعتمد على تحويلات المتطابقة . تقنية الحل هي نفسها المستعملة من طرف فندان بروك و كلر (*Vanden-Broeck et Keller*). النتائج المحصل عليها أكدت وحسنت نتائج اكربارج و ليو (*Ackerberg et Liu*).

الكلمات المفاتيح: سائل، تدفق، سطح حر، تدفق كموني، عدد ويبير (*Weber*) ، توتر سطحي.

Abstract: In this work, we study a two dimensional and irrotational flow of an incompressible and inviscid fluid issued from an opening of a container. The flow is characterized by the nonlinear condition (the Bernoulli condition) on the free surface of unknown equation. This problem was considered before by Ackerberg and Liu. These authors solved the problem via the finite difference method and the mesh points were throughout the fluid domain. They computed solutions for all Weber number $\alpha > 6.8$. We adopted a different method based on conforming mapping in the complex plane and a series representation of analytic functions. We solved the fully nonlinear problem numerically and the mesh points were only on the free surface. We computed solutions for all Weber numbers $\alpha > 0.25$. Our results confirm and extend the results of Ackerberg and Liu.

Key words: Fluid, flow, free surface, potential flow, Weber number, surface tension.

Résumé. Dans ce travail on s'intéresse à un problème d'écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux issu d'un orifice d'un réservoir. Le problème considéré est caractérisé par la condition non linéaire donnée par l'équation de Bernoulli sur la surface libre qui est de forme inconnue. Le problème a été déjà étudié par Ackerberg et Liu en adoptant une méthode numérique de discrétisation de tout le domaine de l'écoulement. Il ont calculés les résultats pour $\alpha > 6.8$. Nous adoptons une méthode des transformations conformes qui réduit le problème de discrétisation uniquement sur la surface libre. La technique de résolution utilisée est celle de Vanden -Broeck et Keller. Nous avons calculés les résultats pour $\alpha > 0.25$. Nos résultats confirment et améliorent les résultats de Ackerberg et Liu.

Mots clés : Fluide, écoulement, surface libre, nombre de Weber, tension de surface.

