

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE FRERES MENTOURI-Constantine-1



FACULTE DES SCIENCES EXACTES  
DEPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES

N° d'ordre :143/DS/2018

Série :07/Mat/2018

Thèse présentée en vue de l'obtention  
du diplôme de

**Doctorat en sciences en Mathématiques**

**Option : Analyse Appliquée**

## THÈME

**Chaos et synchronisation (généralisé) dans  
les systèmes dynamiques**

Présentée par :

**Gasri Ahlem**

Soutenue publiquement le : 12/07/2018

**Devant le jury composé de:**

Mr.A. Berkane	M.C.A	Université de Constantine 1	Président
Mr.E. Zeraoulia	Professeur	Université de Tébessa	Rapporteur
Mr. N. Hamri	Professeur	Centre universitaire de Mila	Examineur
Mr.A. Saoudi	M.C.A	Université de Khenchela	Examineur
Mr.T. Hamaizia	M.C.A	Université de Constantine 1	Examineur

# Dédicace

## À la Mémoire de mon très cher père À qui je dois ce que je suis

*J'aurais tant aimé que tu sois là parmi nous pour voir tes souhaits se réaliser.*

*Tu as toujours été pour moi le meilleur ami, le meilleur exemple, le meilleur papa et tu m'as appris à aider les autres.*

*Aucun mot ne saurait témoigner de l'étendue des sentiments que j'éprouve toujours à ton égard.*

*Je te dédie ce travail et le présent diplôme car c'est à toi que je les dois et c'est grâce à toi que je les ai obtenus.*

*Que ce rapport soit l'expression de ma grande affection et en témoignage de mon profond amour.*

## À ma mère artisane de ma réussite

*Aucune dédicace ne saurait exprimer ma reconnaissance, mon grand attachement et mon profond amour.*

*Que Dieu puisse m'aider à te prouver ma sincère gratitude pour ces nombreuses années de sacrifice.*

*Que Dieu te protège et t'accorde longue vie afin que je puisse te combler à mon tour.*

## À mes frères et soeurs

*Qu'ils trouvent l'expression de ma gratitude et de ma grande affection.*

# REMERCIEMENTS

*Ce travail de thèse s'achevant, il vient le moment des remerciements. Mille excuses ont ceux où celles que je vais oublier, mais je vais quand même tâcher de faire de mon mieux!*

*Avant tout, je remercie infiniment Dieu, le Miséricordieux qui m'a donné la force, le courage et la réussite et qui a mis à ma disposition des gens merveilleux qui m'ont supporté et soutenu :*

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes sentiments les plus sincères à monsieur : **E. ZEROUALIA**, professeur à l'université deTébessa, sous la direction duquel j'ai en le plaisir de travailler, ses conseils m'ont permis de mener ce travail à son terme.*

*J'exprime mes sincères remerciements également à monsieur **A. BERKANE**, maître de conférences "A" à l'université frères Mentouri Constantine-1, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse..*

*Mes remerciements vont aussi aux messieurs : **N. HAMRI**, professeur au centre universitaire de Mila, **T. HAMAIZIA**, maître de conférences "A" à l'université frères Mentouri Constantine-1, et **K. SAOUDI**, maître de conférences "A" à l'université de Khenchela, pour avoir accepté d'être membres dans le jury et pour leur volonté de lire et examiner ma thèse.*

*Je n'oublie pas de remercier aussi l'ensemble du corps enseignant et administratif du département de Mathématiques de l'Université frères Mentouri Constantine-1. Merci pour leurs accueils.*

*Je tiens, surtout, à adresser mes grands reconnaissance à mon mari, qui m'a aidé, soutenu et encouragé dans cette période. Ses encouragements m'ont été d'une aide et d'une valeur. Je sais à quel point, sans lui, je n'aurais pu mener cette thèse à son terme.*

*Enfin, je remercie toute ma famille, et tous mes amis, et tous mes collègues sans exception, qui m'ont supporté, soutenu et encouragé tout au long de ces années.*

# Table des matières

<b>Dédicace</b>	<b>i</b>
<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>ii</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>iv</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Préliminaires sur les systèmes dynamiques</b>	<b>4</b>
1.1 Introduction . . . . .	4
1.2 Définitions d'un système dynamique . . . . .	5
1.3 Classification des systèmes dynamiques . . . . .	7
1.3.1 Systèmes dynamiques à temps continu . . . . .	7
1.3.2 Systèmes dynamiques à temps discret . . . . .	8
1.3.3 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs . . . . .	8
1.3.4 Systèmes autonomes et ou non autonomes . . . . .	9
1.4 Comportement des systèmes dynamiques . . . . .	10
1.4.1 Espace de phase . . . . .	10
1.4.2 Espace d'état . . . . .	10
1.4.3 Flot d'un système dynamique . . . . .	10

1.4.4	Trajectoires et orbites . . . . .	11
1.5	Propriétés des systèmes dynamiques . . . . .	11
1.5.1	Point fixe . . . . .	11
1.5.2	Portrait de phase, cycles limites et orbite périodique . . . . .	12
1.6	Stabilité des systèmes dynamiques à temps continu . . . . .	13
1.6.1	Classification des points d'équilibres . . . . .	14
1.6.2	Stabilité au sens de Lyapunov en temps continu . . . . .	15
1.7	Etude qualitative des systèmes dynamiques . . . . .	22
1.7.1	Linéarisation des systèmes dynamiques non linéaires . . . . .	22
1.7.2	Théorème de Hartmann-Grobman . . . . .	23
1.7.3	Variétés (in) stables . . . . .	23
1.8	Bifurcations . . . . .	24
1.8.1	Définitions de bifurcation . . . . .	24
1.8.2	Diagramme de bifurcations . . . . .	25
1.8.3	Différents types de bifurcations . . . . .	25
1.9	Conclusion . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Théorie de chaos</b>	<b>33</b>
2.1	Introduction . . . . .	33
2.2	Systèmes dynamiques chaotiques . . . . .	34
2.3	Caractéristiques du chaos . . . . .	35
2.3.1	La non-linéarité . . . . .	35
2.3.2	Le déterminisme . . . . .	35
2.3.3	L'aspect aléatoire . . . . .	36
2.3.4	Sensibilité aux conditions initiales . . . . .	36
2.3.5	Spectre de puissance . . . . .	37
2.4	Les attracteurs . . . . .	37
2.4.1	Définitions d'attracteur . . . . .	37

2.4.2	Bassin d'attracteur . . . . .	39
2.4.3	Les propriétés d'un attracteur . . . . .	39
2.5	Les différents types d'attracteurs . . . . .	40
2.5.1	Les attracteurs réguliers . . . . .	40
2.5.2	Les attracteurs étranges . . . . .	42
2.5.3	Différents types d'attracteurs chaotiques (étranges) . . . . .	44
2.6	Détection du chaos . . . . .	45
2.6.1	Les exposants de Lyapunov . . . . .	45
2.6.2	Dimension fractale . . . . .	50
2.7	Transitions vers le chaos . . . . .	52
2.7.1	Cascade de doublements de période . . . . .	52
2.7.2	L'intermittence . . . . .	52
2.7.3	La quasi-périodicité . . . . .	52
2.8	Exemples des systèmes dynamiques chaotiques à temps continu . . . . .	53
2.8.1	Système de Lorenz . . . . .	53
2.8.2	Le système de Rössler . . . . .	57
2.9	Exemples des systèmes dynamiques hyperchaotiques . . . . .	59
2.9.1	Le système hyperchaotique de Rössler . . . . .	59
2.9.2	Les systèmes hyperchaotiques de Liu et de Chen . . . . .	60
2.10	Conclusion . . . . .	61
<b>3</b>	<b>Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques</b>	<b>62</b>
3.1	Introduction . . . . .	62
3.2	Point de départ de la synchronisation des systèmes chaotiques . . . . .	63
3.3	Définition de la synchronisation . . . . .	64
3.3.1	Définition générale . . . . .	64
3.3.2	Définitions mathématiques de la synchronisation . . . . .	64
3.4	Différents types de synchronisation . . . . .	65

3.4.1	Synchronisation complète (CS)	66
3.4.2	Anti-synchronisation	67
3.4.3	Synchronisation décalée	67
3.4.4	Synchronisation généralisée (GS)	67
3.4.5	Synchronisation projective (PS)	68
3.4.6	Synchronisation GPS	69
3.4.7	Synchronisation FSPS	72
3.4.8	Synchronisation FSHPS	73
3.4.9	Synchronisation Q-S	74
3.4.10	Synchronisation MPS	74
3.4.11	Synchronisation FPS	75
3.4.12	Synchronisation MFPS	79
3.4.13	Synchronisation GFPS	79
3.4.14	Synchronisation HPS	80
3.4.15	Synchronisation HFPS	81
3.5	Méthodes du contrôle pour la synchronisation	82
3.5.1	Méthode du contrôleur actif	82
3.5.2	La méthode backstepping	84
3.6	Etude d'un problème inverse IHFPS	86
3.6.1	Description des systèmes maître-esclave	86
3.6.2	Définition de la synchronisation IHFPS	87
3.6.3	Méthode de la synchronisation IHFPS	87
3.6.4	Application de la synchronisation IHFPS pour deux systèmes chaotiques en 5-D à temps continu	89
3.7	Conclusion	92

#### **4 La coexistence de GS et IGS entre systèmes chaotiques et hyperchaotiques** **94**

4.1	Introduction . . . . .	94
4.2	Définitions de GS et IGS . . . . .	95
4.3	Coexistence de GS et IGS en 3-D . . . . .	96
4.3.1	Description des systèmes maître-esclave . . . . .	96
4.3.2	Formulation du problème en 3-D . . . . .	97
4.3.3	Résultats analytiques en 3-D . . . . .	97
4.4	Coexistence de IGS et GS en 4-D . . . . .	100
4.4.1	Description des systèmes maître-esclave . . . . .	100
4.4.2	Formulation du problème en 4-D . . . . .	100
4.4.3	Résultats analytiques en 4-D . . . . .	101
4.5	Exemples numériques . . . . .	103
4.5.1	Exemple 1 . . . . .	103
4.5.2	Exemple 2 . . . . .	107
4.6	Conclusion . . . . .	111
<b>5</b>	<b>Différents schémas de la coexistence de FSHFPS et IFSHFPS</b>	<b>113</b>
5.1	Introduction . . . . .	113
5.2	Définition de FSHFPS et IFSHFPS . . . . .	114
5.3	Coexistence de IFSHFPS et FSHFPS en 4-D . . . . .	115
5.4	Coexistence de FSHFPS et IFSHFPS en 3-D . . . . .	119
5.5	Exemples numériques . . . . .	122
5.5.1	Exemple 1 . . . . .	123
5.5.2	Exemple 2 . . . . .	128
5.6	Conclusion . . . . .	133
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>134</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>137</b>



# Table des figures

1.1	Exemple de trajectoire d'un système dynamique. . . . .	11
1.2	Classification des points d'équilibre dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	14
1.3	Différents types de stabilité de Lyapunov. . . . .	18
1.4	Diagrammes de bifurcation : (a) Nœud-col, (b) transcritique. . . . .	27
1.5	Diagramme de bifurcation fourche : (a) super critique, (b) sous critique. . .	29
1.6	Bifurcations hétéroclines. . . . .	30
1.7	Bifurcations homoclines. . . . .	31
2.1	L'aspect aléatoire du système de Rössler. . . . .	36
2.2	Sensibilité aux conditions initiales. . . . .	37
2.3	Bassin d'attracteur, A : Attracteur, B : Bassin d'attraction. . . . .	39
2.4	Les attracteurs réguliers : (a) Points fixes attracteurs, (b) Cycles limites, (c) Un tore. . . . .	42
2.5	Attracteurs chaotiques : (a) de Plykin, (b) de Chua. . . . .	44
2.6	Méthode de Wolf pour estimer le plus grand exposant de Lyapunov. . . . .	49
2.7	Aspects aléatoires de l'état $x$ du système de Lorenz. . . . .	55
2.8	Attracteur étrange de Lorenz. . . . .	56
2.9	Exposants de Lyapunov du système chaotique continu de Lorenz. . . . .	56
2.10	Système chaotique de Rössler : (a) aspect aléatoire, (b) attracteur étrange.	57
2.11	Projection plane de l'attracteur hyperchaotique de Rössler en 4-D. . . . .	60

3.1	La <b>GPS</b> entre deux systèmes identiques de Lorenz : (a) L'évolution dans le temps des vecteurs d'erreur, (b) La projection des attracteurs synchronisés sur le plan $x-z$ après des états transitoires. . . . .	73
3.2	La <b>MPS</b> pour le système de Lorenz : l'évolution des vecteurs d'erreurs pour une matrice $H = \text{diag}(1, 2, 3)$ . . . . .	75
3.3	La variation des erreurs de la <b>FPS</b> et de la fonction mise à l'échelle $H(t)$ pour le système de Lorenz. . . . .	78
3.4	Évolution du temps des erreurs de la synchronisation <b>IHFPS</b> entre le système maître (3.38) et le système esclave (3.39) . . . . .	92
4.1	Les attracteurs chaotiques pour le système maître (4.20) en 2D. . . . .	103
4.2	Les attracteurs chaotiques pour le système esclave (4.21) avec $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ en 2D. . . . .	104
4.3	Evolution du temps des erreurs $e_1, e_2$ et $e_3$ entre le système (4.20) et le système (4.21). . . . .	106
4.4	Les attracteurs chaotiques pour le système maître (4.27) en 2D. . . . .	107
4.5	Les attracteurs chaotiques pour le système esclave (4.28) avec $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ en 2D. . . . .	108
4.6	Evolution du temps des erreurs $e_1, e_2, e_3$ et $e_4$ entre le système (4.27) et le système (4.28). . . . .	111
5.1	Portraits de phase pour le système maître (5.23) en 2D. . . . .	123
5.2	Portraits de phase pour le système maître (5.23) en 3D. . . . .	124
5.3	Portraits de phase pour le système esclave (5.24) en 2D. . . . .	125
5.4	Portraits de phase pour le système esclave (5.24) en 3D. . . . .	125
5.5	Evolution du temps des erreurs $e_1, e_2, e_3$ et $e_4$ entre le système (5.23) et le système (5.24). . . . .	128
5.6	Portraits de phase pour le système maître (5.31) en 2D. . . . .	129

5.7	Portraits de phase pour le système maître (5.31) en 3D. . . . .	129
5.8	Portraits de phase pour le système esclave (5.32) en 2D. . . . .	130
5.9	Portraits de phase pour le système esclave (5.32) en 3D. . . . .	131
5.10	Evolution du temps des erreurs $e_1, e_2$ et $e_3$ entre le système (5.31) et le système (5.32). . . . .	133

# Introduction générale

L'étude des systèmes dynamiques non linéaires ont tardivement fait l'objet d'intenses recherches et explorations. En 1963, le météorologue Edward Lorenz venait de découvrir le phénomène de **sensibilité aux conditions initiales**. Les systèmes répondant à cette propriété seront à partir de 1975 dénommés les **systèmes chaotiques** par Tien-Yien Li et James A Yorke qui ont présenté pour la première fois le terme **chaos**. Cependant, les travaux de David Ruelle et du mathématicien Floris Takens menaient bien avant cette découverte, et vont être très utiles à la compréhension de la dynamique chaotique.

Vers la fin du *XIX<sup>ème</sup>* siècle Henri Poincaré, avait mis en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude astronomique du problème des trois corps. Toujours au *XIX<sup>ème</sup>* siècle, le mathématicien russe Aleksandr Mikhailovich Lyapunov effectuait des recherches sur la stabilité du mouvement. Les travaux de Lyapunov seront très précieux pour étudier certains aspects de **la théorie du chaos**.

Parallèlement aux travaux sur le chaos, une autre branche développée dans le domaine des systèmes dynamiques attire l'intérêt des chercheurs scientifiques, c'est **la synchronisation**. Ce phénomène est devenu un sujet de recherche active. lié au développement de la télécommunication, il a connu des améliorations très remarquables dans le début du *XX<sup>ème</sup>* siècle.

En 1990, Carroll et Pecora, pionniers de la synchronisation, ayant comme idée d'employer un signal chaotique entre deux systèmes dynamiques identiques. Le premier système produisant le signal chaotique, s'appelle le système **émetteur (maître)**, le deuxième est le

système **récepteur** (**esclave**); c'était **la synchronisation identique**.

Vu le développement puissant des moyens de la télécommunication, la synchronisation des systèmes chaotiques commence à attirer l'attention de plusieurs chercheurs multidisciplinaires à travers le monde, notamment les Chinois. De nos jours, elle trouve des applications potentielles dans plusieurs domaines telles que les communications, la programmation, la biologie, l'informatique, l'ingénierie, la physique, la médecine, la robotique, etc.

Par conséquent, plusieurs types de synchronisation sont présentés tels que **la synchronisation généralisée (GS)** (en anglais : **Generalized Synchronization**), **(FSPS)** (en anglais : **Full State Projective Synchronization**), etc. Très récemment, des nouvelles types hybrides sont proposés, par exemple, la synchronisation **(HFPS)** (en anglais : **Hybrid Function Projective Synchronization**) et **FSHFPS** (en anglais : **Full State Hybrid Function Projective Synchronization**).

Bien que l'étude de ces types de synchronisation est assez importante, investir leurs problèmes inverse paraît une idée séduisante. En effet, d'autres schémas sont introduites tels que **(IGS)** inverse de **GS** et **IFSHFPS** l'inverse de la **FSHFPS**. De plus, et pour nos connaissances, l'étude de la combinaison de plusieurs types de synchronisation des systèmes dynamiques est rarement disputée.

Les travaux que nous avons réalisés dans cette thèse s'inscrivent dans ces contextes dont les objectifs sont d'apporter des nouvelles méthodes de synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques et hyperchaotiques à temps continu.

Afin d'atteindre nos objectifs, cette thèse est scindée en cinq chapitres, sa structuration se présente comme suit : le **premier chapitre** est un état de l'art sur les systèmes dynamiques chaotiques et hyperchaotiques en général, en particulier aux systèmes à temps continu. Ainsi, les notions générales sur les systèmes dynamiques seront cernés.

Le **deuxième chapitre** est réservé à la théorie de chaos, une série de définitions de ce phénomène sont introduites et les caractéristiques du chaos seront aussi présentées. Des exemples, célèbres, des systèmes chaotiques et hyperchaotiques clôturent ce chapitre.

Un sujet qui a acquis beaucoup d'attention dans notre thèse est la synchronisation des systèmes chaotiques, notion évoquée dans le **troisième** chapitre. Une étude bibliographique est présentée, ou presque toutes les méthodes sont abordées. Notre première contribution vient par la présentation d'un nouveau type de synchronisation tiré de l'inverse de la synchronisation **HFPS**, notée (**IHFPS**), pour une classe générale des systèmes chaotiques de  $n$ -D à temps continu.

Le **quatrième chapitre** est focalisé sur l'étude de la combinaison de deux types de synchronisation, à savoir **GS** et son inverse, notée (**IGS**) pour les systèmes dynamiques chaotiques et hyperchaotiques d'ordre entier à temps continu en 3-D et 4-D, respectivement. Dans le **cinquième** chapitre, on s'intéresse toujours au phénomène de la coexistence de certains types de synchronisation, mais cette fois-ci, ce sont les schémas hybrides qui nous attirent. Alors, on a illustré des schémas basés sur la coexistence de la synchronisation **FSHFPS** et son inverse, notée (**IFSHFPS**). Ces nouveaux schémas sont conçus pour atteindre la synchronisation entre un système maître tridimensionnel et un système esclave à quatre dimensions en 4-D et 3-D, respectivement.

# Chapitre 1

## Préliminaires sur les systèmes dynamiques

### 1.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de fournir les principales clés pour étudier le comportement d'un système dynamique avec un accent particulier sur le temps continu. On introduit, notamment, les notions de trajectoire, orbite, etc.

Ensuite, on s'intéresse aux questions qualitatives : elles permettent de voir le comportement des solutions sans avoir à résoudre l'équation différentielle du système. Nous rappelons quelques concepts relatifs à la stabilité des systèmes dynamiques en particulier au sens de Lyapunov.

L'analyse d'une bifurcation est une méthode d'étude des valeurs de paramètres sur le comportement du système dynamique. Elle est évoquée à la fin du chapitre où nous présentons les différents types de bifurcations avec illustrations graphiques.

## 1.2 Définitions d'un système dynamique

Un système dynamique est un ensemble mécanique, physique, économique, environnemental ou de tout autre domaine dont l'état (ensemble de grandeurs suffisant à qualifier le système) évolue en fonction du temps. L'étude de l'évolution d'un système nécessite donc la connaissance :

- de son état initial, c'est-à-dire son état à l'instant  $t_0$  ;
- de sa loi d'évolution.

**Définition 1.2.1** *Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble des objets en interaction, il est défini par un triplet  $(X, T, f)$  constitué de l'espace d'état  $X$ , du domaine temporel  $T$ , et d'une application de transition d'état  $f : X \times T \rightarrow T$ , qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales, l'état du système à tout instant.*

Donc, on peut définir un système dynamique comme une description d'un phénomène physique qui évolue au cours du temps (système continu), ou par rapport à une autre variable (système discret).

**Définition 1.2.2** *Un système dynamique sur  $\mathbb{R}^n$  est une application :*

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

définie sur tout  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ , telle que :

- $f(., x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue,
- $f(t, .) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue,
- $f(0, x) = x$ ,
- $f(t + s, x) = f(t, f(s, x))$  pour  $t, s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$ .



**Définition 1.2.3** *Soit le système dynamique linéaire :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}^+, x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

où  $A$  est une matrice constante. La solution de (1.1) est :

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

Le système (1.1) engendre un système dynamique du fait que l'application :

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

qui à tout  $t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$  associe :

$$f(t, x) = e^{At}x. \quad (1.2)$$

vérifiée les quatre propriétés précédentes.

**Définition 1.2.4** *Soit le système non linéaire :*

$$\dot{x}(t) = f(x), \quad (1.3)$$

On appelle point critique ou point d'équilibre du système (1.3) le point  $x^* \in \mathbb{R}^n$  tel que :

$$f(x^*) = 0.$$

**Définition 1.2.5** *Considérons le système (1.3). Le système :*

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

où

$$A = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^*) \right) = Df(x^*), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

et

$$f(x_0) = 0.$$

est appelé linéarisation de (1.3) en  $x_0$ .

**Définition 1.2.6** *On appelle point critique hyperbolique de (1.3), le point  $x_0$  telle que  $A$  n'a aucune valeur propre avec une partie réelle nulle.*

## 1.3 Classification des systèmes dynamiques

### 1.3.1 Systèmes dynamiques à temps continu

Un système dynamique dans un temps continu est représenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\dot{x}_t = f(x, t, p) \quad \text{où } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r. \quad (1.4)$$

où  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  désigne la dynamique du système.

Si on associe à cette dynamique un état initial :

$$x_0 = x(t_0).$$

pour chaque couple choisi,  $(x_0, t_0)$ , on peut identifier une solution unique :

$$\phi(\cdot, x_0, t_0) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

telle que :

$$\phi_f(t_0, x_0, t_0) = x_0 \text{ et } \dot{\phi}_f(t, x_0, t_0) = f(\phi_f(t, x_0, t_0), t). \quad (1.5)$$

Cette solution fournit les états successifs occupés par le système à chaque instant  $t$ .

### 1.3.2 Systèmes dynamiques à temps discret

Un système dynamique dans le cas discret est représenté par une application (fonction itérative) sous la forme :

$$x_{k+1} = f(x_k, p), \quad x_k \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.6)$$

où  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  indique la dynamique du système en temps discret.

On peut également identifier pour chaque couple  $(x_0, k_0)$  une solution unique :

$$\phi_f(\cdot, x_0, k_0) : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

telle que :

$$\phi_f(k_0, x_0, k_0) = x_0 \text{ et } \dot{\phi}_f(k+1, x_0, k_0) = f(\phi_f(k, x_0, k_0), k). \quad (1.7)$$

### 1.3.3 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs

Les systèmes conservatifs sont caractérisés par l'existence d'une quantité, fonction des variables du système, se conservant au cours du mouvement. Les systèmes Hamiltoniens rentrent dans cette catégorie. D'ailleurs, à l'exception de quelques systèmes particuliers, ce sont les seuls systèmes conservatifs généralement considérés.

En étant très schématique, nous dirons que les systèmes conservatifs sont au cœur de la mécanique classique (mécanique céleste en particulier) et de la mécanique statistique, et que les systèmes dissipatifs sont appropriés à la description des phénomènes physiques où il y a justement des sources de dissipation d'énergie, par frottement, par exemple.

**Définition 1.3.1** *Un système déterministe est conservatif, si et seulement si la dynamique du système associée à chaque condition initiale  $x_0$  un et un seul état final  $x(t)$ , il faut pour cela qu'il existe une application bijective  $\varphi$  de l'espace des phases :*

$$\begin{aligned} \varphi : X \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow X, \\ (x, t) &\mapsto \varphi_t(x) = \varphi(x, t). \end{aligned} \tag{1.8}$$

qu'on appelle flot et qui possède les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi_t(x_0) &= x_0, \\ \varphi_{t+s}(x_0) &= \varphi_t(\varphi_s(x_0)) \text{ pour tous } t, s \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \tag{1.9}$$

**Remarque 1.3.1** *Si le système est dissipatif, le flot n'est pas bijectif et existe en générale un (ou plusieurs) attracteur dans l'espace des phases du système.*

### 1.3.4 Systèmes autonomes et ou non autonomes

- Lorsque la variable libre  $t$  apparaît explicitement dans l'expression de  $f$ , le système est dit non autonome.
- En général, c'est un inconvénient majeur pour la résolution numérique et il est préférable de s'en affranchir.
- On peut toujours transformer un système non autonome en système autonome (où  $t$  n'apparaît pas explicitement).

**Remarque 1.3.2** *Par un changement de variable approprié on peut transformer un système non autonome de dimension  $n$  à un système autonome équivalent de dimension  $n+1$ .*

## 1.4 Comportement des systèmes dynamiques

Un système dynamique est caractérisé par un certain nombre de variables d'état, qui est la propriété de définir complètement l'état du système à un instant donné. Le comportement dynamique du système est ainsi relié à l'évolution de chacune de ces variables d'état.

### 1.4.1 Espace de phase

L'espace de phase est un espace souvent multi-dimensionnel permettant d'interpréter géométriquement le mouvement d'un système dynamique décrit par des équations différentielles par rapport au temps.

### 1.4.2 Espace d'état

L'espace d'état est l'ensemble des coordonnées nécessaires à la description complète d'un système. Cet espace peut être continu ou discret.

### 1.4.3 Flot d'un système dynamique

Soit  $M$  un ensemble quelconque, et  $G$  un groupe additif ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}$ ). Considérons  $\{\varphi^t\}_{t \in G}$  un groupe à un paramètre d'applications  $M$  dans  $M$  indexées par le groupe  $G$ .

On appelle flot ou système dynamique le couple  $(M, \{\varphi^t\}_{t \in G})$ . L'ensemble  $M$  précédent constitue l'espace des phases du flot. Tout point  $x$  de cet espace représente un état du système dynamique.

### 1.4.4 Trajectoires et orbites

**Définition 1.4.1** Soient  $(M, \{\varphi^t\}_{t \in G})$  un système dynamique et  $x$  un état de l'espace des phases. On appelle trajectoire d'un point  $x$  de  $M$  l'application définie sur  $G$  et à valeurs dans  $M$  par :

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow M, \\ t &\rightarrow \varphi^t(x). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Donc, la trajectoire est une solution du système différentiel.

**Définition 1.4.2** On appelle orbite d'un point  $x$  (FIG. 1.1), l'image de la trajectoire issue de  $x$  c'est à dire le sous ensemble  $\gamma(x)$  de l'espace des phases défini par :  $\gamma(x) = \varphi^t(x)$ ,  $t \in G$ .

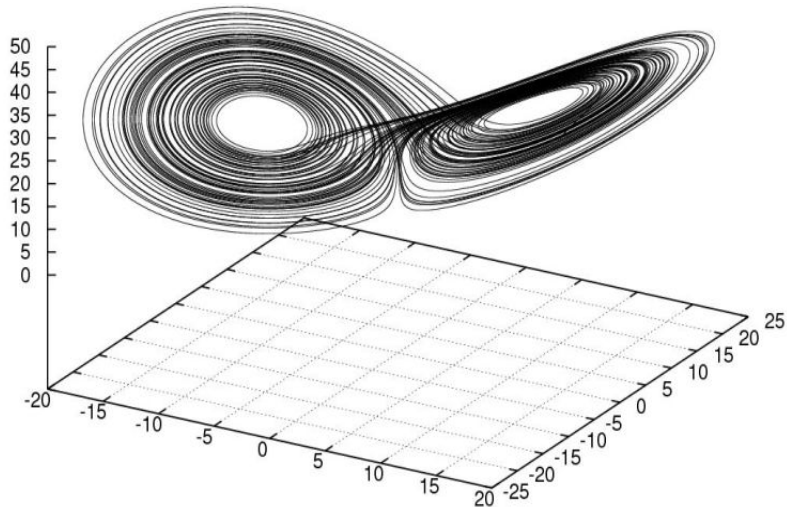


FIG. 1.1 – Exemple de trajectoire d'un système dynamique.

## 1.5 Propriétés des systèmes dynamiques

### 1.5.1 Point fixe

Les propriétés des systèmes dynamiques non linéaires, qui évoluent au cours du temps, sont fortement liées à l'évolution des points d'équilibre du système.

Tout changement dans leur nombre ou leur stabilité agit parfois de façon dramatique sur le comportement du système. De plus, ces changements se font suivant un petit nombre de scénarios qui permettent d'indiquer une classification des changements des comportements.

**Définition 1.5.1 (à temps continu)** *Un point critique (ou point singulier, ou point stationnaire) de l'équation  $\dot{x}_t = f(x, t, p)$  est un point  $x^*$  de l'espace des phases vérifiant l'équation  $f(x^*) = 0$ .*

**Définition 1.5.2 (à temps discret)** *Un point fixe d'une application  $x_{k+1} = f(x_k, p)$  est un point invariant par  $f$ , c'est-à-dire un point  $x^*$  de l'espace des phases vérifiant l'équation  $f(x^*) = x^*$ .*

Géométriquement, le point fixe est une intersection de la courbe de la fonction  $y = f(x)$  avec la bissectrice  $y = x$ .

## 1.5.2 Portrait de phase, cycles limites et orbite périodique

**Définition 1.5.3** *Soit le système planaire :*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1.11)$$

où  $P, Q$  sont des polynômes en  $x$  et  $y$ . Les solutions  $(x(t), y(t))$  du système (1.11) représentent dans le plan  $(x, y)$  des courbes appelées orbites. Les points critiques du système (1.11) sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentés dans le plan  $(x, y)$  s'appelle portrait de phase, et le plan  $(x, y)$  est appelé plan de phase.

**Définition 1.5.4** 1. Une solution périodique du système (1.11) est une solution telle que :

$$(x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t)) \quad \text{pour } T > 0.$$

à toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace des phases.

2. Un cycle limite du système (1.11) est une orbite isolée, c'est-à-dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans son voisinage.
3. L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable  $x$  sur le cycle limite.
4. Un cycle d'ordre  $p$  (ou orbite périodique d'ordre  $p$  ou encore un  $(p - \text{cycle})$ ) est un ensemble de  $p$  points  $\{x_0^*, x_1^*, \dots, x_{p-1}^*\}$  vérifiant :

$$\begin{aligned} x_{i+1}^* &= f(x_i^*), \quad i = 0, 1, \dots, p-2, \\ x_p^* &= f(x_{p-1}^*) = x_0, \\ x_i^* &= f^p(x_i^*), \quad i = 0, 1, \dots, p-1, \\ x_i^* &\neq f^h(x_i^*), \quad i = 0, 1, \dots, p-1, \quad 1 \leq h \leq p. \end{aligned}$$

où  $p$  est l'entier minimal tel que :  $x_0^* = f^p(x_0^*)$ . Ainsi, les  $n$  éléments d'une orbite de période  $n$  correspondent aux points fixes propres de  $f^n$ .

## 1.6 Stabilité des systèmes dynamiques à temps continu

La notion de stabilité d'un système dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires autour des points d'équilibre. L'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet donc d'étudier l'évolution de sa trajectoire d'état lorsque l'état initial est proche d'un point d'équilibre. Il existe quelques concepts pour la stabilité des systèmes dynamiques tels que la stabilité au sens de Lyapunov.



### 1.6.1 Classification des points d'équilibres

#### a. Cas des systèmes linéaires

Considérons le système linéaire :

$$\dot{x}(t) = Ax. \tag{1.12}$$

où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $A$  une matrice constante inversible. Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$ .

**Définition 1.6.1** 1. Si les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sont réelles et de même signe, la solution  $x = 0$  est appelée *noeud*.

2. Si les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sont réelles, non nulles et de signe différent, la solution  $x = 0$  est appelée *selle*.

3. Si les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sont complexes avec  $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0, i = 1, \dots, n$ , la solution  $x = 0$  est appelée *foyer*.

4. Si les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sont complexes avec  $\text{Re}(\lambda_i) = 0, i = 1, \dots, n$ , la solution  $x = 0$  est appelée *centre*.

Tous ces cas sont regroupés (FIG. 1.2).

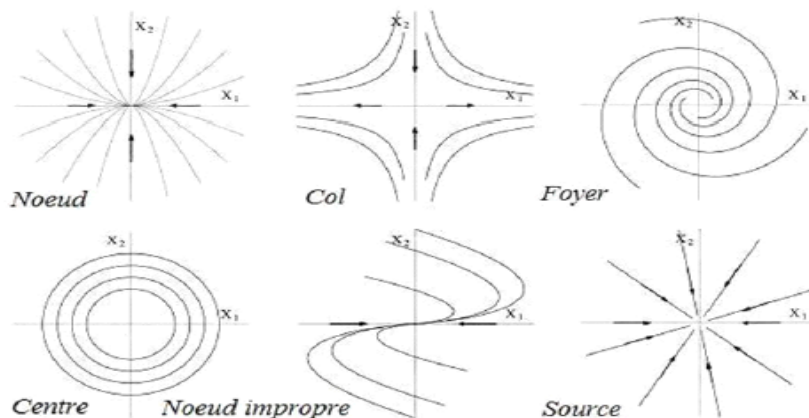


FIG. 1.2 – Classification des points d'équilibre dans  $\mathbb{R}^2$ .

## b. Cas des systèmes non linéaires

Considérons maintenant le système non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x). \quad (1.13)$$

**Définition 1.6.2** *Un point critique de  $x^*$  de (1.13) est appelé puits si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(x^*)$  ont des parties réelles négatives, il est appelé **sources** si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(x^*)$  ont des parties réelles positives, il est appelé **selle** s'il est hyperbolique et si  $A = Df(x^*)$  a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive ou au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.*

**Théorème 1.6.1** *Soit  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1$ , un système dynamique à temps continu. Si  $x^*$  un point fixe ( $f(x^*) = 0$ ), alors si les valeurs propres de  $Df(x^*)$  sont de partie réelle négative  $x^*$  est stable, et instable si l'une de ces valeurs propres de  $Df(x^*)$  est de partie réelle positive.*

### 1.6.2 Stabilité au sens de Lyapunov en temps continu

Considérons une classe des systèmes non linéaires décrits par le système dynamique :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.14)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  et  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue.

Nous désignons par  $x^*$  un point d'équilibre de (1.14)  $f(x^*, t) = 0, \forall t \geq t_0$ , et par  $x(t, t_0, x_0)$  la solution à l'instant  $t \geq t_0$  du système (1.14) initialisée en  $x_0$  à l'instant  $t_0$ , et  $f$  une fonction non linéaire.

**Définition 1.6.3 (Stabilité)** *L'origine est un point d'équilibre  $x^*$  stable au sens de Lyapunov du système (1.14) est :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \implies \|x(t, x(t_0)) - x^*\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0. \quad (1.15)$$

**Définition 1.6.4 (Stabilité uniforme)** *L'origine est un point d'équilibre  $x^*$  uniformément stable au sens de Lyapunov du système (1.14) est :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \implies \|x(t, x(t_0)) - x^*\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0. \quad (1.16)$$

**Définition 1.6.5 (Attractivité)** *L'origine est un point d'équilibre  $x^*$  attractif du système (1.14) est :*

$$\exists \delta = \delta(t_0) > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t, t_0, x_0)) = 0, \forall t \geq t_0. \quad (1.17)$$

Lorsque  $\delta(t_0) = +\infty$ , on dit que l'origine est globalement attractive.

**Définition 1.6.6 (Stabilité asymptotique)** *L'origine est un point d'équilibre  $x^*$  asymptotiquement (resp.globalement asymptotiquement) stable du système (1.14) s'il est stable et attractif (resp.globalement attractif).*

$$\exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, x(t_0)) - x^*\| = 0. \quad (1.18)$$

Donc, la stabilité asymptotique signifie qu'on peut déterminer un voisinage du point d'équilibre tel que n'importe quelle trajectoire, issue d'un point  $x(0)$  appartenant à un voisinage de  $x^*$ , tend vers  $x^*$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

**Définition 1.6.7 (Stabilité exponentielle)** *L'origine est un point d'équilibre  $x^*$  localement exponentiellement stable du système (1.14) s'il existe deux constantes strictement positives  $a, b$  telles que :*

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta &\implies \|x(t, x(t_0)) - x^*\| < a \|x(t_0) - x^*\| \exp(-bt), \\ \forall t &\geq t_0, \forall x \in B_r. \end{aligned}$$

*Lorsque  $B_r = \mathbb{R}^n$ , on dit que l'origine est globalement exponentiellement stable.*

**Définition 1.6.8 (Instabilité)** *Le point d'équilibre  $x^*$  est dit instable s'il n'est pas stable au sens de Lyapunov.*

**Définition 1.6.9** *Une solution  $\Phi(t)$  du système (1.14) telle que  $\Phi(t_0) = \Phi_0$  est dite stable au sens de Lyapunov tel que toute solution  $x(t)$  de (1.14) dont la valeur initiale  $x(t_0)$  vérifie :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \|x(t_0) - \Phi_0\| < \delta \implies \|x(t) - \Phi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0. \quad (1.19)$$

*si en plus de cette définition on a :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \Phi(t)\| = 0. \quad (1.20)$$

*alors la solution  $\Phi(t)$  est dite asymptotiquement stable.*

Tous ces cas sont montrés (FIG. 1.3).

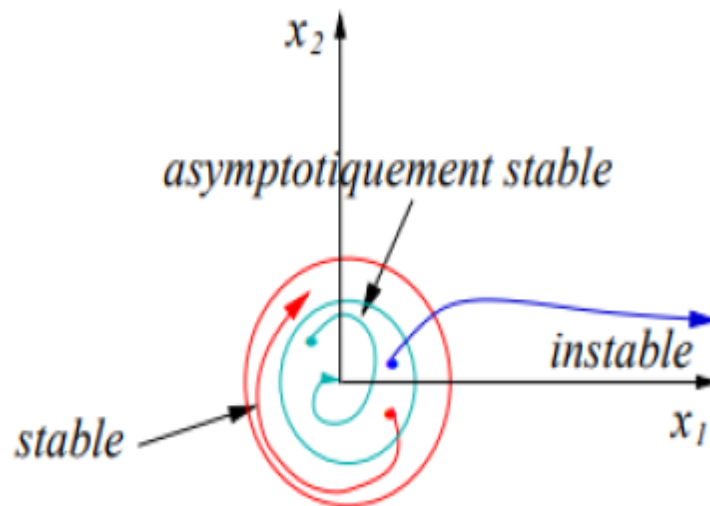


FIG. 1.3 – Différents types de stabilité de Lyapunov.

**Exemple 1.6.1** ( $n = 2$ ) Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y \\ \dot{y}(t) = x \end{cases}; \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

La solution qui vérifie  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$  est :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix}; \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  telle que :

$$\left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < \delta \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon; \quad \forall t > 0.$$

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| &= |x(t)| + |y(t)| = |x_0 \cos t - y_0 \sin t| + |x_0 \sin t - y_0 \cos t| < 2(|x_0| + |y_0|). \\ &= 2 \left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < 2\delta, \quad \text{on prend } \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}; \quad \delta = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

d'où  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est stable au sens de Lyapunov.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} (x^2(t) + y^2(t)) = x_0^2 + y_0^2 = c > 0 \neq 0. \quad (1.23)$$

Donc, la solution n'est pas asymptotiquement stable.

On va présenter les deux méthodes de Lyapunov (**méthode directe** et **méthode indirecte**), ces deux méthodes sont concrétisées par des exemples pratiques tirés de la littérature.

### a. Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte)

La première méthode de Lyapunov est basée sur l'examen de la linéarisation autour du point d'équilibre  $x^*$  du système (1.14). Plus précisément, on examine les valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice Jacobienne évaluée au point d'équilibre. Selon cette méthode, les propriétés de stabilité de  $x^*$  s'expriment comme suit :

- Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle strictement négative,  $x^*$  est exponentiellement stable.
- Si la matrice Jacobienne possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive,  $x^*$  est instable.

**Remarque 1.6.1** *Cette méthode ne permet pas de dire si l'équilibre est stable ou instable quand la matrice Jacobienne comporte au moins une valeur propre nulle, et aucune valeur propre avec partie réelle strictement positive. Dans ce cas, les trajectoires du système convergent vers un sous-espace (une variété) dont la dimension est le nombre de valeurs propres nulles de la matrice Jacobienne, la stabilité de l'équilibre peut être étudiée dans ce sous-espace par la seconde méthode.*

**Exemple 1.6.2 (Méthode indirecte de Lyapunov)** Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x, \\ \dot{y} = x^3 - 2y - xz, \\ \dot{z} = -z + xy. \end{cases} \quad (1.24)$$

L'origine 0 est un point fixe. Son linéarisation est :

$$Df(0) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Les valeurs propres de  $Df(0)$  sont  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $\lambda_3 = -1$  toutes négatives, d'où le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable.

### b. Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe)

La première méthode de Lyapunov est simple à appliquer, mais elle ne permet d'analyser la stabilité des équilibres que très partiellement. En outre, elle ne donne aucune indication sur la taille des bassins d'attraction. La seconde méthode est plus difficile à mettre en œuvre, mais elle est d'une portée beaucoup plus générale. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée  $V(x)$  et appelée fonction de Lyapunov, qui est décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du bassin d'attraction. Le théorème suivant résume cette méthode.

**Théorème 1.6.2** *Le point d'équilibre  $x^*$  du système (1.14) est stable s'il existe une fonction  $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$  continuellement différentiable ayant les propriétés suivantes :*

- i)  $D$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $x^* \in D$ .
  - ii)  $V(x^*) = 0$  et  $V(x) > V(x^*)$ ,  $\forall x \neq x^*$  dans  $D$ .
  - iii)  $\dot{V}(x) \leq 0$ ,  $\forall x \neq x^*$  dans  $D$ .
- Si de plus pour  $x$ ,  $\dot{V}(x) < 0$ ,  $\forall x \neq x^*$  dans  $D$ , alors  $x^*$  est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.
  - Si on suppose encore que  $V$  tend vers l'infini lorsque  $x \in \mathbb{R}^n$  tend vers l'infini (en norme), alors toutes les trajectoires, même celles qui démarrent loin de  $x^*$ , tendent vers  $x^*$  (on dit que  $x^*$  est globalement asymptotiquement stable).

**Remarque 1.6.2** *Il n'y a aucune méthode pour trouver une fonction de Lyapunov.*

**Exemple 1.6.3 (Méthode directe de Lyapunov)** *Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = -x + ay(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (1.26)$$

*Ce système à un point d'équilibre unique  $(0, 0)$ . On pose  $V(x, y) = x^2 + y^2$  :*

*D'après le théorème de Lyapunov :*

- a. *Si  $a < 0$ , le point fixe est asymptotiquement stable.*
- b. *Si  $a = 0$ , le point est au moins stable au sens de Lyapunov.*
- c. *Si  $a > 0$ , le système est stable au sens de Lyapunov.*

**Remarque 1.6.3** *Le Théorème 1.6.2 est une condition suffisante de stabilité mais ne permet pas de guider l'utilisateur dans le choix de la fonction de Lyapunov et ne permet pas conclure si on ne trouve pas une telle fonction.*



## 1.7 Etude qualitative des systèmes dynamiques

L'étude qualitative, en particulier, permet l'étude locale des solutions autour de points d'équilibre. Pour avoir une étude complète d'un système dynamique, on attend en général de la part de l'environnement un comportement stationnaire, ce dernier va être présenté par la disparition des phénomènes transitoires en annulant la fonction de transition ou le champ de vecteurs, dans ce cas le système va avoir l'un des deux états suivants :

1. État d'équilibre (*points fixes, points périodiques*).
2. État chaotique.

Pour faciliter cette étude, on utilise les propriétés de l'algèbre linéaire sur les équations qui décrivent nos systèmes dynamiques, or que la majorité des systèmes dynamiques associés à des phénomènes naturels ne sont pas linéaires, à cet effet, on est obligé de les linéariser.

### 1.7.1 Linéarisation des systèmes dynamiques non linéaires

Considérons le système dynamique non linéaire défini par :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)). \quad (1.27)$$

où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , et  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  et soit  $x^*$  un point d'équilibre de ce système. Supposons qu'une petite perturbation  $\varepsilon(t)$  soit appliquée au voisinage du point d'équilibre  $x^*$ . La fonction  $f$  peut être développée en série de Taylor au voisinage du point  $x^*$  comme suit :

$$\dot{\varepsilon}(t) + \dot{x}^* = f(x^* + \varepsilon(t)) \simeq f(x^*) + J_f(x^*) \cdot \varepsilon(t). \quad (1.28)$$

où  $J_f(x^*)$  est la matrice Jacobienne de la fonction  $f$  définie par :

$$J_f(x^*) = \left( \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right)_{x=x^*}. \quad (1.29)$$

Comme  $f(x^*) = \dot{x}^*$ , alors l'équation (1.28) devient :

$$\dot{\varepsilon}(t) = J_f(x^*) \cdot \varepsilon(t). \quad (1.30)$$

L'écriture (1.30) veut dire que le système (1.27) est linéarisé.

## 1.7.2 Théorème de Hartmann-Grobman

Considérons le système dynamique (1.27). Soit  $x^*$  un point d'équilibre du système (1.27) et soit  $J_f(x^*)$  la matrice Jacobienne au point  $x^*$ , alors le théorème d'Hartmann-Grobman s'énonce :

**Théorème 1.7.1** *Si  $J_f(x^*)$  admet des valeurs propres non nulles ou imaginaires pures, alors il existe un homéomorphisme qui transforme les orbites du flot non linéaire vers celles du flot linéaire dans certains voisinages  $U$  de  $x^*$ .*

Ce théorème va nous permettre de lier la dynamique du système non linéaire (1.27) à la dynamique du système linéarisé (1.30).

## 1.7.3 Variétés (in) stables

**Définition 1.7.1** *La variété stable (resp. instable) d'une solution est la courbe tangente au champ des vecteurs propres associés à une valeur propre du Jacobien dont la partie réelle est négative (resp. positive).*

## 1.8 Bifurcations

L'aspect fondamental de l'étude des systèmes dynamiques est la notion de **bifurcation**. Un terme qui a été introduit par Henri Poincaré au début du XX<sup>e</sup> siècle dans ces travaux sur les systèmes différentiels. Pour certaines valeurs critiques des paramètres de contrôle du système, la solution de l'équation différentielle change qualitativement : on dit qu'il y a bifurcation.

Une première approche pour l'étude des systèmes dynamiques consiste à rechercher les points d'équilibre, c'est-à-dire les solutions stationnaires ne présentant pas l'évolution temporelle.

L'étape suivante consiste à faire varier les paramètres de contrôle du système. On regarde alors que deviennent les points d'équilibre, en particulier ceux qui étaient stables avant de modifier les paramètres du système et les bifurcations qui apparaissent.

Pour les valeurs des paramètres auxquelles de tels changements qualitatifs apparaissent, valeurs dites de bifurcation, la construction du portrait de phase nécessite des outils adaptés.

### 1.8.1 Définitions de bifurcation

Le terme bifurcation est généralement défini, de manière assez vague, comme un changement radical de comportement du système dynamique étudié.

Soit :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu). \quad (1.31)$$

avec le paramètre de contrôle  $\mu$ , et soit  $x^*$  sa solution.

**Définition 1.8.1** *Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution  $x^*$  du système (1.31) lorsqu'on modifie  $\mu$ , et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.*

**Définition 1.8.2** *Un système est dit structurellement stable ou robuste si le portrait de phase ne change pas dans une perturbation de ses paramètres. Par conséquent une bifurcation correspond à une perte de stabilité structurelle (la valeur du paramètre  $\mu$  pour laquelle le système (1.31) ne sois pas structurellement stable).*

## 1.8.2 Diagramme de bifurcations

Dans les systèmes dynamiques, un diagramme de bifurcation montre les comportements possibles d'un système, à long terme, en fonction des paramètres de bifurcation.

**Définition 1.8.3** *Un diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation.*

## 1.8.3 Différents types de bifurcations

Il existe plusieurs types de bifurcation selon les propriétés des secondes dérivées de la famille des fonctions  $f$ .

Chacune de ces bifurcations est caractérisée par une forme normale, qui est l'équation générale typique de ce type de bifurcation.

Parmi les différents types de bifurcations, pour les systèmes dynamiques en temps continu, on peut citer :

- Bifurcation de type noeud-col,
- Bifurcation transcritique,
- Bifurcation de fourche,
- Bifurcations globales.

**a. Bifurcation de type noeud-col**

Une fonction linéaire ne change pas le nombre de racines. Le polynôme le plus simple qui change de nombre de racines en fonction du paramètre  $\mu$  est le polynôme quadratique

$$f(x) = \mu - x^2.$$

Considérons le système (1.32) :

$$f(x, \mu) = \mu - x^2. \quad (1.32)$$

Nous appelons la fonction (1.32) la forme normale de la bifurcation noeud-col. Étudions le comportement de l'équation (1.32).

Les points fixes de cette dernière sont :

$$x_{\pm}^* = \pm\sqrt{\mu}, \quad (1.33)$$

qui existent seulement pour  $\mu > 0$ , leur stabilité est déterminée par :

$$f'(x_{\pm}^*) = -2x_{\pm}^* = -2(\pm\sqrt{\mu}) = \mp 2\sqrt{\mu}, \quad (1.34)$$

Selon les signes de  $f'(x^*)$ , on voit que  $x_+^* = \sqrt{\mu}$  est instable, tandis que  $x_-^* = -\sqrt{\mu}$  est stable.

**Remarque 1.8.1** *Même étude faite lorsque  $f(x, \mu) = -\mu - x^2$ ,  $f(x, \mu) = +\mu + x^2$  et  $f(x, \mu) = -\mu + x^2$ .*

Mais dans tous les cas, il y a une transition à  $\mu = 0$  entre existence d'aucun point fixe et de deux points fixes dont un est stable et l'autre instable.

La figure (FIG. 1.4.a) présente le diagramme de bifurcation noeud-col (la variation du point d'équilibre en fonction de paramètre  $\mu$  pour le cas  $f(x, \mu) = \mu - x^2$ ).

### b. Bifurcation transcritique

Si  $f$  est contrainte de ne pas avoir de terme constant, le développement limité mène à la forme normale d'une bifurcation transcritique, qui est la dernière bifurcation stationnaire dans une dimension :

$$\dot{x} = \mu x - x^2. \quad (1.35)$$

L'analyse usuelle donne :

$$x^*(\mu - x^*) = 0 \implies \begin{cases} x^* = 0, \\ x^* = \mu. \end{cases} \quad (1.36)$$

$$f'(x^*) = \mu - 2x^* = \begin{cases} \mu & \text{pour } x^* = 0, \\ -\mu & \text{pour } x^* = \mu. \end{cases} \quad (1.37)$$

Donc,  $x^* = 0$  est stable pour  $\mu < 0$ , instable pour  $\mu > 0$ , tandis que  $x^* = \mu$  fait le contraire, ces points fixes échangent simplement leur stabilité (FIG. 1.4.b).

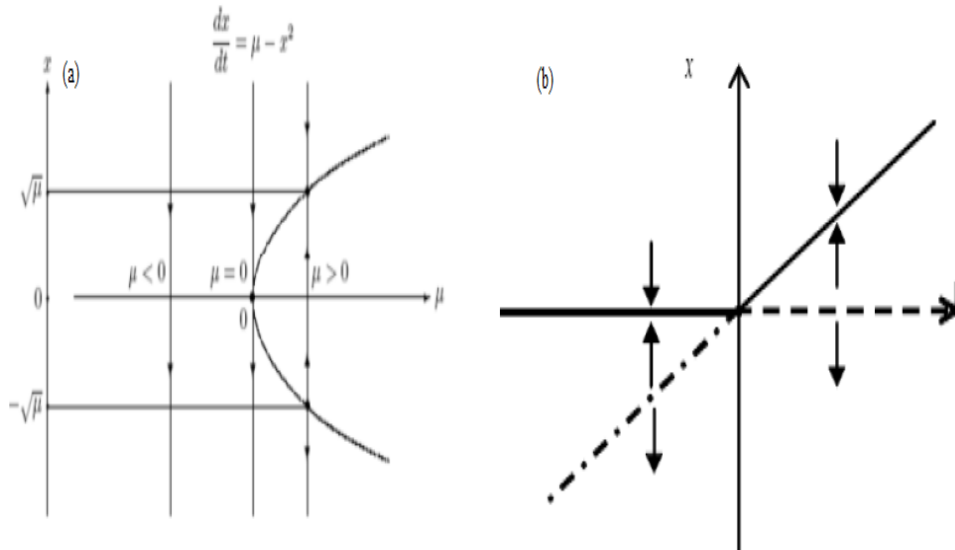


FIG. 1.4 – Diagrammes de bifurcation : (a) Noeud-col, (b) transcritique.

**c. Bifurcation fourche**

Si on peut réduire  $f(x, \mu)$  à un polynôme cubique à ces quatre cas :

$$f(x, \mu) = \mu x - x^3, \quad (1.38)$$

$$f(x, \mu) = \mu x + x^3, \quad (1.39)$$

$$f(x, \mu) = -\mu x + x^3, \quad (1.40)$$

$$f(x, \mu) = -\mu x - x^3. \quad (1.41)$$

L'équation (1.38) s'appelle la forme normale d'une bifurcation fourche super critique.

Nous calculons les points fixes :

$$x^*(\mu - x^{*2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^* = 0 & \text{pour tout } \mu, \\ x^* = \pm\sqrt{\mu} & \text{pour } \mu > 0. \end{cases} \quad (1.42)$$

Nous étudions la stabilité de ces points fixes :

$$f'(x^*) = \mu - 3(x^*)^2 = \begin{cases} \mu & \text{pour } x^* = 0, \\ \mu - 3\mu = -2\mu & \text{pour } x^* = \pm\sqrt{\mu}. \end{cases} \quad (1.43)$$

Le point fixe  $x^* = 0$  est donc stable pour  $\mu < 0$ , et devient instable à  $\mu = 0$  quand les branches de nouveaux points fixes  $x^* = \pm\sqrt{\mu}$  sont créés. Ces nouveaux points fixes sont toujours stables quand ils existent.

Faisons le même calcul pour (1.39) qui est la forme normale d'une bifurcation fourche sous critique.

$$x^*(\mu + (x^*)^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^* = 0 & \text{pour tout } \mu, \\ x^* = \pm\sqrt{-\mu} & \text{pour } \mu < 0. \end{cases} \quad (1.44)$$

$$f'(x^*) = \mu + 3(x^*)^2 = \begin{cases} \mu & \text{pour } x^* = 0, \\ \mu + 3(-\mu) = -2\mu & \text{pour } x^* = \pm\sqrt{-\mu}. \end{cases} \quad (1.45)$$

Comme pour le cas super critique, le point fixe  $x^* = 0$  est stable pour  $\mu < 0$  et devient instable à  $\mu = 0$ . Mais contrairement au cas super critique, les autres points fixes  $\pm\sqrt{\mu}$  existent dans la région où  $x^* = 0$  est stable, et sont toujours instables (FIG. 1.5.).

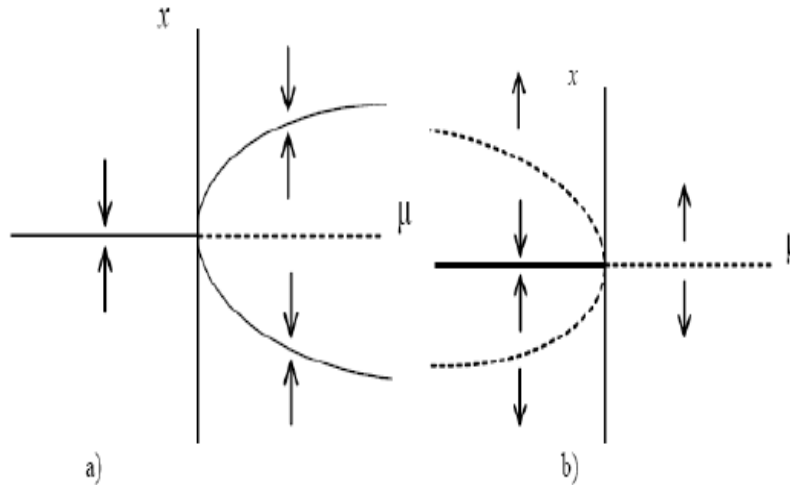


FIG. 1.5 – Diagramme de bifurcation fourche : (a) super critique, (b) sous critique.

#### d. Bifurcations globales

Ces types de bifurcations correspondent à des collisions de deux variétés et elles ne font pas forcément intervenir le voisinage de la solution.

Ici, les linéarisations locales autour de la solution ne seront donc d'aucunes d'aide. C'est pour cela que ces bifurcations sont appelées "**globales**", et deux types sont citées [1] : orbites hétéroclines et orbites homoclines.

Les orbites hétéroclines et homoclines ont une grande importance pour l'étude du comportement chaotique des systèmes dynamiques et les solutions des ondes progressives dans les équations aux dérivées partielles.



**d.1. Orbites hétéroclines :** Ces bifurcations résultent de la collision de variétés stables et instables de deux **selles séparées**. En effet, c'est un phénomène assez rare.

**Exemple 1.8.1** *Un exemple de l'apparition des orbites hétéroclines est montré à partir du système non linéaire qui décrit le mouvement d'un pendule simple :*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = -\sin(x). \end{cases} \quad (1.46)$$

Les points fixes du système (1.46) sont les points  $(x^*, y^*) = (n\pi, 0)$  pour :

$n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ . Si  $n = 0$  ou un nombre pair, les points fixes sont des centres, si  $n$  est un nombre impair, les points fixes sont hyperboliques, points de selle (FIG. 1.6).

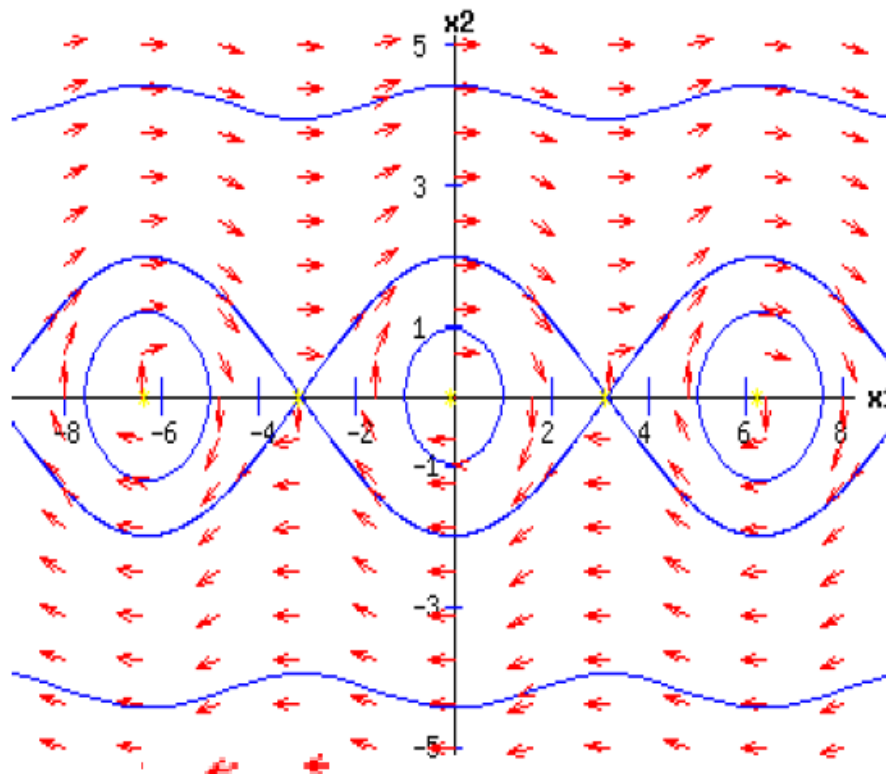


FIG. 1.6 – Bifurcations hétéroclines.

**d.2. Orbites homoclines :** Ce sont les variétés stables et instables d'une même selle qui entrent en collision selon le signe d'une certaine quantité.

**Exemple 1.8.2** On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \mu y + x - x^2 + xy. \end{cases} \quad (1.47)$$

où  $\mu$  est un paramètre. Pour tous les valeurs de  $\mu$ , il y a deux points fixes  $\{(0.0), (1.0)\}$ . Pour tous les valeurs de  $\mu$ ,  $(0.0)$  c'est une selle. Mais pour le point fixe à  $(1.0)$ , il y a un changement de type de bifurcation (FIG. 1.7).

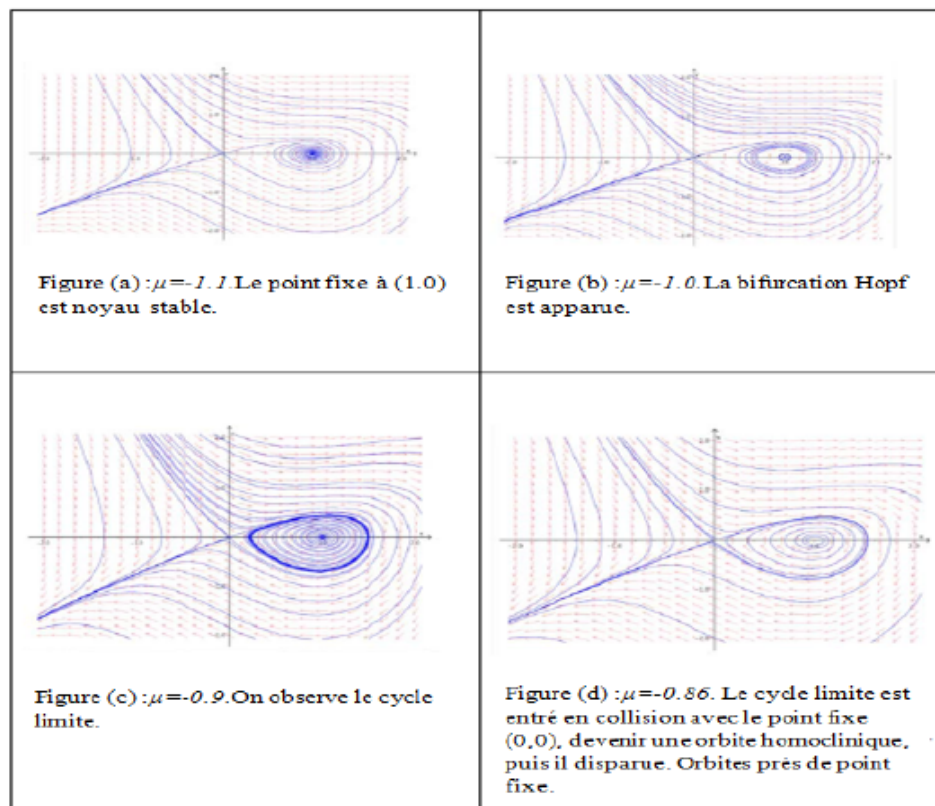


FIG. 1.7 – Bifucations homoclines.

## 1.9 Conclusion

L'intérêt de ce chapitre est de fournir les notions de base des systèmes dynamiques, telles que : la représentation mathématique des systèmes dynamiques, leurs classifications, l'espace de phases, les orbites, les trajectoires, la variété stable, etc...

Ensuite, nous avons donné les différentes définitions relatives à la notion de stabilité. On a aussi présenté les différents types, théorèmes et critères de stabilité ainsi que les méthodes pour l'étude de la stabilité (les deux méthodes de Lyapunov) pour les points d'équilibre d'un système dynamique à temps continu. Et pour une bonne compréhension de la notion de stabilité, plusieurs exemples sont exposés.

À la fin de ce chapitre, nous avons abordé la théorie de bifurcations, définitions et types. L'analyse de bifurcation est finalement une sorte d'analyse des changements brutaux de comportement des systèmes dynamiques.

# Chapitre 2

## Théorie de chaos

### 2.1 Introduction

Chaos, ou un système chaotique, c'est un système produira des comportements différents à long terme lorsque les conditions initiales sont perturbées très légèrement. La sensibilité aux conditions initiales des systèmes chaotiques a fait du chaos une situation indésirable. Alors, l'homme s'interroge sur cette situation depuis la nuit des temps.

De nos jours, la théorie du chaos a envahi la plupart des sciences. En effet, de nombreux modèles mathématiques des processus physiques, des phénomènes biologiques, des réactions chimiques et des systèmes économiques étaient définis en utilisant des systèmes dynamiques chaotiques et hyperchaotiques tant en temps continu qu'à temps discret.

Ce chapitre est dédié aux systèmes dynamiques chaotiques et hyperchaotiques. En commençant par donner quelques caractéristiques du chaos, nous nous attardons les attracteurs réguliers et étranges ainsi que les scénarios de transition vers le chaos. Pour finir, nous donnons des exemples célèbres sur les systèmes dynamiques chaotiques et hyperchaotiques à temps continu.

## 2.2 Systèmes dynamiques chaotiques

Le chaos tel que le scientifique le comprend ne signifie pas l'absence d'ordre ; il se rattache plutôt à une notion d'imprévisibilité, d'impossibilité de prévoir une évolution à long terme du fait que l'état final dépend de manière si sensible de l'état initial.

On appelle un système dynamique chaotique, un système qui dépend de plusieurs paramètres et caractérisé par une extrême sensibilité aux conditions initiales. Ils ne sont pas déterminés ou modélisés par des systèmes d'équations linéaires ni par les lois de la mécanique classique, pourtant, ils ne sont pas nécessairement aléatoires, relevant du seul calcul des probabilités.

On trouve dans la littérature plusieurs définitions mathématiques du chaos, mais jusqu'à présent, il n'existe aucune définition mathématique universelle du chaos, avant de donner la définition du chaos, due à Devaney, quelques définitions de base sont nécessaires.

**Définition 2.2.1** *On dit que la fonction  $f : X \rightarrow X$  possède une sensibilité aux conditions initiales s'il existe  $\delta > 0$  tel que, pour  $x_0 \in X$  et pour tous  $\varepsilon > 0$  il existe un point  $y_0 \in X$  et un entier  $j \geq 0$  satisfait :  $d(x_0, y_0) < \varepsilon \Rightarrow d(f^{(j)}(x_0), f^{(j)}(y_0)) > \delta$ , où représente la distance et  $f^{(j)}(x_0)$  la  $j$  ième itération de  $f$ .*

**Définition 2.2.2** *Supposons que  $X$  un ensemble et  $Y$  un sous-ensemble de  $X$  ( $Y \subset X$ ), on dit que  $Y$  est dense dans  $X$  si, pour tout  $x \in X$ , il existe  $y \in Y$  arbitrairement proche de  $x$ , autrement dit  $Y$  est dense dans  $X$  si pour tout  $x \in X$  on peut trouver une suite  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $Y$  qui convergent vers  $x$ .*

**Définition 2.2.3**  *$f$  est topologiquement transitive si  $U$  et  $V$  étant deux ensembles non vides ouverts dans  $X$ , il existe  $x_0 \in U$  et un indice  $j > 0$ , tel que pour  $f^{(j)}(x_0) \in V$  ou, de façon équivalente, il existe un indice  $j > 0$  tel que pour  $f^{(j)}(U) \cap V \neq \emptyset$ .*

On est maintenant en position d'énoncer la définition du chaos au sens de Devaney.

**Théorème 2.2.1** (*Théorème de Devaney*) [2] : Soit un sous-ensemble  $V$  de  $X$ , la fonction  $f : X \rightarrow X$  est dite chaotique sur  $V$  si :

- i) La fonction  $f$  possède une sensibilité aux conditions initiales,
- ii) La fonction  $f$  est topologiquement transitive, dans le sens que pour toute paire de sous ensembles ouverts  $U, V \subset X$ , il existe  $j > 0$  telque  $f^{(j)}(U) \cap V \neq \emptyset$ ,
- iii) L'ensembles des points périodiques de la fonction  $f$  sont denses dans  $X$ .

## 2.3 Caractéristiques du chaos

### 2.3.1 La non-linéarité

Pour prévoir des phénomènes réels générés par les systèmes dynamiques, la démarche consiste à construire un modèle mathématique qui établit une relation entre un ensemble de causes et un ensemble d'effets. Si cette relation est une opération de proportionnalité, le phénomène est linéaire. Dans le cas d'un phénomène non linéaire, l'effet n'est pas proportionnel à la cause. En général, un système chaotique est un système dynamique non linéaire, un système linéaire ne peut pas être chaotique.

### 2.3.2 Le déterminisme

Un système est dit déterministe lorsqu'il est possible de prédire (de calculer) son évolution au cours du temps. La connaissance exacte de l'état du système à un instant donné, l'instant initial, permis le calcul précis de l'état du système à n'importe quel autre moment. Dans les phénomènes aléatoires, il est absolument impossible de prévoir la trajectoire d'une quelconque particule.

Donc, un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes. Il est généralement régi par des équations différentielles non linéaires qui sont connues, donc par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes.

### 2.3.3 L'aspect aléatoire

Si le mouvement est aléatoire, les points du système remplissent l'espace des phases au hasard : aucune structure n'apparaît. Quand le mouvement est chaotique, les points paraissent à première vue aléatoires. Néanmoins, quand on observe le système suffisamment longtemps, on constate que les points dessinent une forme particulière.

La figure (FIG. 2.1) montre l'aspect aléatoire d'un système dynamique chaotique, en occurrence, le système de Rössler.

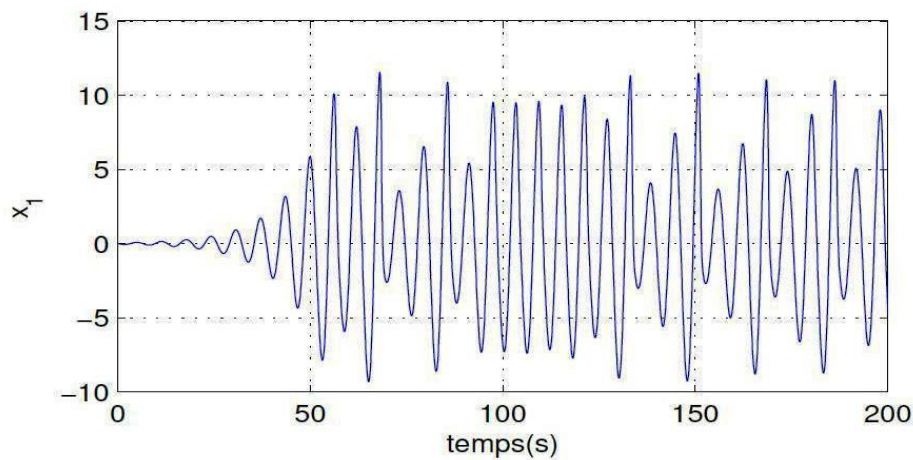


FIG. 2.1 – L'aspect aléatoire du système de Rössler.

### 2.3.4 Sensibilité aux conditions initiales

Une autre propriété des phénomènes chaotiques est qu'ils sont très sensibles aux perturbations. Eduard Lorenz venait de découvrir que dans des systèmes non linéaires, d'infimes différences dans les conditions initiales engendraient à la longue des trajectoires totalement différentes. Lorenz a illustré ce fait par l'effet papillon. Pour deux conditions initiales arbitraires très voisines initialement, les deux trajectoires correspondant à ces données initiales divergent exponentiellement. Par la suite, les deux trajectoires sont incomparables. Une des propriétés essentielles du chaos est donc bien cette sensibilité aux conditions initiales que l'on peut caractériser en mesurant les taux de divergence des trajectoires (FIG. 2.2).

D'un point de vue mathématique, on dit que  $f$  montre une dépendance sensible aux conditions initiales lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \exists (y, p) \in D; \|x - y\| < \varepsilon \Rightarrow \|f^p(x) - f^p(y)\| > \delta. \quad (2.1)$$

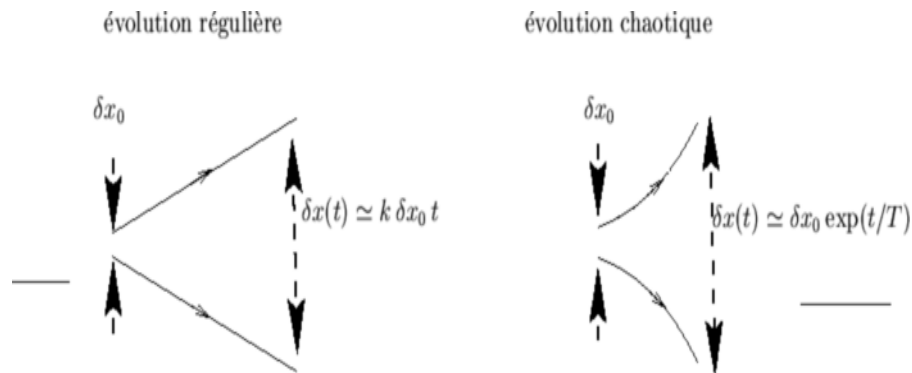


FIG. 2.2 – Sensibilité aux conditions initiales.

### 2.3.5 Spectre de puissance

Le spectre d'une variable d'un tel système ne contient donc qu'une assemblée de raies fines situées aux pulsations  $w_i$ , à leurs harmoniques  $mw_i$  avec  $m \in \mathbb{N}$ , aux combinaisons linéaires de fréquences  $mw_i + nw_j$  avec  $m, n \in \mathbb{Z}$ , les spectres qui sont la combinaison de plusieurs fréquences sans rapport simple sont dits **quasi-périodiques**. L'existence de spectres larges est une caractéristique essentielle des mouvements chaotiques d'un système.

## 2.4 Les attracteurs

### 2.4.1 Définitions d'attracteur

L'étude du comportement asymptotique d'un système dynamique régi par un flot d'équations différentielles non linéaires révèle très souvent la notion d'attracteur, défini comme l'ensemble compact de l'espace des phases invariant par ce flot et vers lequel convergent



toutes les trajectoires du système. En général, un attracteur est défini comme une sous-partie fermée de l'espace des phases qui "attire" tous les autres orbites vers elle.

Nous citons quelques définitions mathématiques d'attracteur :

**Définition 2.4.1** (*Guckenheimer et Holmes*) [3] Soit  $(X, f)$  un système dynamique discret, une sous-partie  $A$  de  $X$  est appelée attracteur si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

1.  $A$  est fermée,
2.  $A$  est positivement invariante,
3.  $A$  est attractive, c'est-à-dire, il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $A$  tel que :
  - a.  $U$  est positivement invariant,
  - b.  $U$  est attiré par  $A$ ;  $\forall u \in U, \lim_{t \rightarrow +\infty} d(f^t(u), A) = 0$ .

**Définition 2.4.2** (*Ruelle*) [4] Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires de l'espace des phases, c'est-à-dire, une situation ou un ensemble de situations vers lesquelles évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales. Mathématiquement, si  $A$  un ensemble compact fermé de l'espace des phases, on suppose que  $A$  est invariant par le flot  $\Phi_t$ , l'ensemble  $A$  est attracteur si :

1. Pour tout voisinage  $U$  de  $A$ , il existe un voisinage  $V$  de  $A$  tel que toute solution  $x(t, x_0) = \Phi_t(x_0)$  restera dans  $U$  si  $x_0 \in V$ ,
2. Il existe une orbite dense dans  $A$ , tel que  $\bigcap_{t \geq 0} \Phi_t(V) = A$ ,  $t \geq 0$ .

**Définition 2.4.3** (*Zeraoulia et Sprott*) [5] Soit  $A$  un ensemble fermé de l'ensemble non-errant  $\Omega(f)$ ,  $A$  est dit attracteur si :

1.  $A$  est invariant par  $f$ , c'est-à-dire  $f(A) = A$ ,
2. Il existe un voisinage  $V$  de  $A$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que :  $\bigcap_{t \geq 0} f^t(V) = A$ ,
3.  $f$  est transitive ( $\exists C, D \subset A$  tel que  $f^n(C) \cap D \neq \emptyset$ ;  $C, D$  ouvert).

## 2.4.2 Bassin d'attracteur

On rappelle que tout voisinage ouvert qui satisfait les conditions **(3.a)** et **(3.b)** dans la **définition (2.4.1)** est appelé voisinage attiré par  $A$ . Il faut remarquer que bien qu'il existe un voisinage attiré  $U$ , on ne peut pas affirmer qu'il est unique : en effet  $A$  peut admettre plusieurs voisinages attirés par lui-même (FIG. 2.3).

**Définition 2.4.4** *Le bassin d'attracteur  $B(A)$  d'un attracteur  $A$  est l'ensemble des points de l'espace des phases qui donnent une trajectoire évoluant vers  $A$ , donc  $B(A) = \cup \Phi_t(V)$ . On appelle bassin d'attracteur  $B(A)$  de  $A$  le plus grand des tels voisinages attirés, c'est-à-dire  $B(A) = \cup \{U \in \Phi(X)\}$ ,  $U$  est un voisinage attiré  $A$ .*

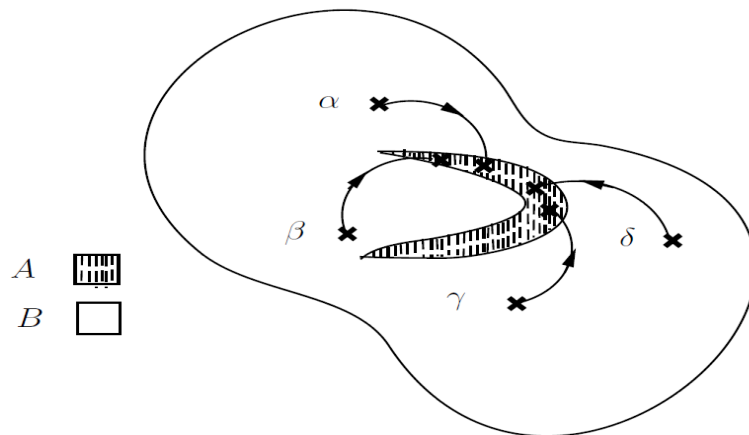


FIG. 2.3 – Bassin d'attracteur,  $A$  : Attracteur,  $B$  : Bassin d'attraction.

## 2.4.3 Les propriétés d'un attracteur

Un attracteur peut avoir les propriétés suivantes :

1. Tous points de l'espace d'état qui appartiennent à un attracteur demeurent à l'intérieur de cet attracteur pour tout  $t$ .
2. Il existe un ensemble  $A \subset B$ , tel que pour tout voisinage de  $A$ , la trajectoire qui prend son origine dans  $B$  se trouve au bout d'un temps fini dans ce voisinage de  $A$ .

Autrement dit, toute trajectoire qui a son origine dans  $B$  tend vers l'attracteur, est le bassin d'attraction.

3. Un attracteur est indécomposable, c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs n'est pas un attracteur.

## 2.5 Les différents types d'attracteurs

Il existe deux types d'attracteurs : les **attracteurs réguliers** et les **attracteurs étranges** (**chaotiques**).

### 2.5.1 Les attracteurs réguliers

Pour tous les attracteurs réguliers, c'est-à-dire pour tous les systèmes non chaotiques, des trajectoires qui partent des "points" proches l'un de l'autre dans l'espace de phase restent indéfiniment voisines. On sait donc prévoir l'évolution de ces systèmes à partir d'une situation connue.

Les attracteurs réguliers, caractérisant l'évolution d'un système non chaotique, peuvent être de quatre sortes :

#### 1. Point fixe

C'est le cas le plus courant et le plus simple d'attracteurs, dans lequel le système évolue vers un état de repos (point). Le point d'équilibre unique d'un pendule amorti est l'exemple classique de ce type d'attracteurs.

**Définition 2.5.1** *Toute solution  $x^*$  vérifiant la relation  $f(x^*) = 0$  est appelée position d'équilibre, point singulier, point fixe, ou encore solution stationnaire.*

On distingue seulement deux types d'attracteurs qui sont des points fixes ; les nœuds stables et les foyers stables (FIG. 2.4.a).

## 2. Cycle-limite périodique (orbites périodiques)

**Définition 2.5.2** Une solution  $X(t)$  d'un système dynamique autonome ou non est périodique s'il existe un entier  $T$  pour lequel : pour tout  $t$ ,  $X(t+T) = X(t)$  et  $X(t+\bar{T}) = X(t)$  pour  $0 < \bar{T} < T$ ,  $T$  est alors appelé la période de la solution.

La représentation d'une telle solution dans le plan de phase nous donne une trajectoire fermée appelé cycle-limite et telle qu'aucune trajectoire commençant, suffisamment proche d'elle, ne soit également fermée. En général, on a trois types de cycle-limite : cycle-limite stable, cycle-limite instable et cycle-limite semi-stable (en pratique instable) (FIG. 2.4.b).

.

- Le cycle limite noté  $C_L$  est stable si toute trajectoire commençant suffisamment proche de  $C_L$ , l'approche pour  $t \rightarrow +\infty$ , c'est-à-dire, s'enroule elle-même sur le cycle-limite  $C_L$ . Un cycle limite stable est aussi ce qu'on appelle **un attracteur périodique**.
- Le cycle-limite noté  $C_L$  est instable si toute trajectoire commençant suffisamment proche de  $C_L$ , l'approche pour  $t \rightarrow -\infty$ , c'est-à-dire, se déroule à partir de  $C_L$ .
- Si les trajectoires approchent  $C_L$  d'un côté et de l'autre s'en éloignent, on dira que  $C_L$  est semi-stable (en pratique instable).

## 3. Cycle-limite pseudo périodique

Il existe des systèmes dont la solution orbitale en régime permanent (dans le plan de phase) oscille entre deux cycles-limites relativement proches sans jamais passer deux fois de suite exactement sur la même trajectoire, on parle alors d'attracteur quasi-périodique.

## 4. Un tore

C'est un cas particulier de précédent. Il est caractérisé par un régime quasi-périodique ayant  $n$  fréquences de bases indépendantes. Le système présente au moins deux périodes simultanées dont le rapport est irrationnel. La trajectoire de phase ne se referme pas sur elle-même, mais s'enroule sur une variété de dimension deux (FIG. 2.4.c).

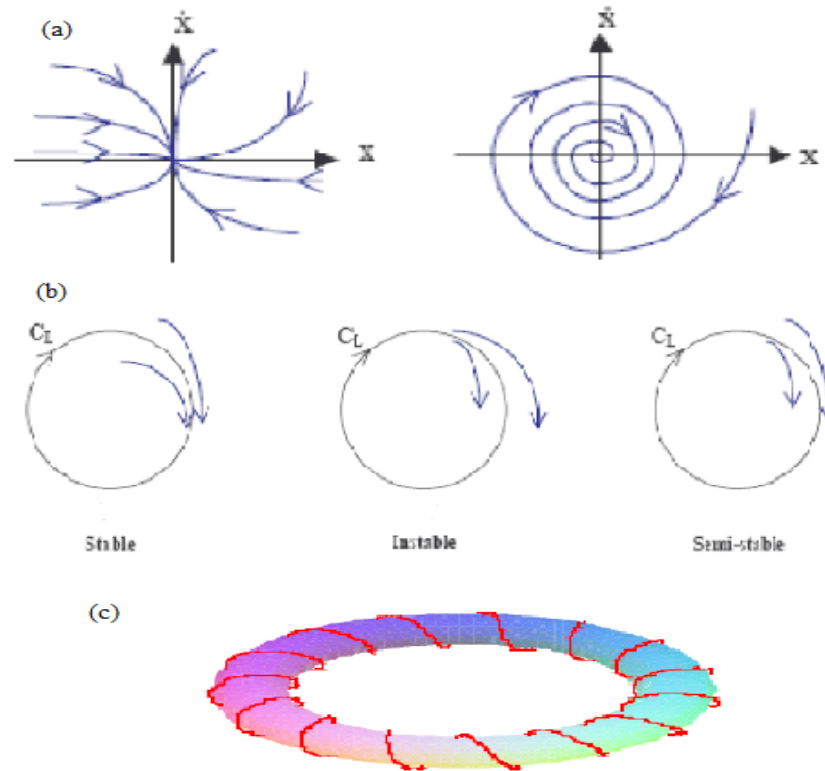


FIG. 2.4 – Les attracteurs réguliers : (a) Points fixes attracteurs, (b) Cycles limites, (c) Un tore.

## 2.5.2 Les attracteurs étranges

Un système chaotique dissipatif possède (au moins) un attracteur d'un type particulier appelé **attracteur étrange**.

Les attracteurs étranges sont caractéristiques de l'évolution des systèmes chaotiques au bout d'un certain temps, tous les points de l'espace des phases (et appartenant au bassin d'attraction de l'attracteur) donnent des trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange.

Un attracteur chaotique possède notamment la propriété remarquable suivante : la trajectoire ne repasse jamais par un même état. Ce qui signifie, entre autres, que cette trajectoire passe par une infinité d'états. Il est à noter que pour observer les trajectoires d'un attracteur, il est parfois intéressant de réduire la dimension de l'espace de phases.

**Définition 2.5.3** *Un sous-ensemble borné  $A$  de l'espace des phases est un attracteur étrange ou chaotique pour une transformation  $T$  de l'espace s'il existe un voisinage  $V$  de  $A$  ; c'est-à-dire que pour tout point de  $A$  il existe une boule contenant ce point et contenue dans  $\mathbb{R}$  vérifiant les propriétés suivantes :*

- 1. Attraction :  $V$  est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par  $T$  dont le point initial est dans  $V$  est entièrement contenue dans  $\mathbb{R}$ . De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de  $A$  que l'on veut.*
- 2. Il est contenu dans un espace fini. Son volume est nul. Sa dimension est fractale (non entière).*
- 3. Presque toute trajectoire sur l'attracteur a la propriété de ne jamais passer deux fois sur le même point : chaque trajectoire est presque sûrement apériodique.*
- 4. Deux trajectoires proches à l'instant  $t$  voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle (sensibilité aux conditions initiales).*

**Définition 2.5.4** *Ruelle et Takens [6] Un attracteur étrange est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales.*

**Définition 2.5.5** *Berge et al. [7] Un attracteur étrange est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales et ayant une dimension fractale.*

**Définition 2.5.6** *Farmer et Sidorowich [8] Un attracteur étrange est un attracteur possédant **un exposant de Lyapunov**  $\lambda_k > 0$ .*

### 2.5.3 Différents types d'attracteurs chaotiques (étranges)

Les attracteurs chaotiques (étranges) peuvent être classés en trois types principaux :

#### 1. Attracteur hyperbolique

Les attracteurs hyperboliques sont des ensembles-limites structurellement stables. Généralement, la plupart des systèmes physiques connus n'appartiennent pas à cette classe des systèmes d'attracteurs hyperboliques.

L'attracteur de Plykin est un exemple d'un attracteur hyperbolique [9] (FIG. 2.5.a).

#### 2. Quasi-attracteur

Ces types d'attracteurs sont des ensembles-limites renfermant des orbites périodiques de différents types topologiques et des orbites structurellement instables. Par exemple, les attracteurs générés par le circuit de Chua [10] (FIG. 2.5.b).

#### 3. Attracteur de type Lorenz

Ces types des attracteurs ne sont pas structurellement stables, mais leurs orbites homoclines et hétéroclines sont structurellement stables (hyperboliques) et aucune des orbites périodiques instables apparaissent sous les petites variations des paramètres, comme par exemple dans le système de Lorenz lui-même [11].

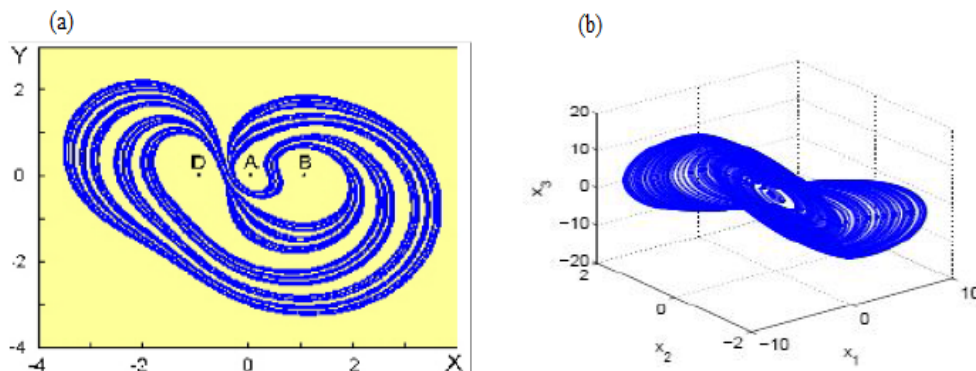


FIG. 2.5 – Attracteurs chaotiques : (a) de Plykin, (b) de Chua.

## 2.6 Détection du chaos

Il existe plusieurs méthodes qui permettent de déterminer si des systèmes non linéaires sont ou non chaotiques. Elles ne sont généralement pas très nombreuses, ni réparties sur un temps suffisamment long à l'échelle du système étudié. On a choisi de mettre en œuvre deux des méthodes les plus couramment utilisées qui sont appelées : la **dimension fractale** et les **exposants de Lyapunov**.

### 2.6.1 Les exposants de Lyapunov

L'évolution chaotique est difficile à appréhender, car la divergence des trajectoires sur l'attracteur est rapide. Lorsque cette divergence croît exponentiellement avec le temps pour presque toutes les conditions initiales voisines d'un point donné, on a le phénomène de sensibilité aux conditions initiales, idée à laquelle sont attachés les exposants de Lyapunov, qui donnent une mesure quantitative de cette divergence exponentielle locale et mesure en fait le degré de sensibilité d'un système dynamique. Rappelons d'abord cette formule et voyons comment Lyapunov a pu arriver à déduire une telle formule.

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_{i-1})|. \quad (2.2)$$

Considérons un système dynamique quelconque dont la condition initiale  $x_0$  est affectée d'une erreur infinitésimale  $E_0$ . Après  $n$  itérations, l'erreur initiale  $E_0$  sera donc amplifiée d'un facteur  $\frac{E_n}{E_0}$ .

Notons que l'erreur diminue lorsque le facteur est inférieur à 1 et augmente s'il est supérieur à 1. Puisque  $\left| \frac{E_n}{E_0} \right| = \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| \cdots \left| \frac{E_2}{E_1} \right| \cdot \left| \frac{E_1}{E_0} \right|$ , il suffit alors de calculer ce produit pour déterminer la façon dont s'amplifie l'erreur initiale.

Le logarithme d'un produit correspond à une somme de logarithmes. Utilisons plutôt le



logarithme du produit pour compléter cette étude.

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| &= \ln \left( \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| \cdots \left| \frac{E_2}{E_1} \right| \cdot \left| \frac{E_1}{E_0} \right| \right) \\ &= \ln \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| + \ln \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| + \ln \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| + \dots + \ln \left| \frac{E_2}{E_1} \right| + \ln \left| \frac{E_1}{E_0} \right| = \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right|. \end{aligned}$$

Avant de faire tendre cette dernière quantité vers l'infini, on calcule d'abord la moyenne de la somme obtenue. On arrive ainsi à l'exposant de Lyapunov.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \right). \quad (2.3)$$

$E_i$  et  $E_{i-1}$  étant de très petites valeurs, le rapport correspond à la dérivée de la fonction associée à l'équation utilisée si naturellement la fonction est dérivable. En effet, soit  $f(x_i)$  cette fonction :

$$E_i = f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1}).$$

et

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = \frac{f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1})}{E_{i-1}}. \quad (2.4)$$

puisque :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x). \quad (2.5)$$

alors, si  $f$  est dérivable on a :

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = \frac{f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1})}{E_{i-1}} = f'(x_{i-1}) \quad \text{lorsque } E_{i-1} \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

par conséquent :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_{i-1})|. \quad (2.7)$$

Lorsque l'exposant de Lyapunov est positif :

$$\ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| > 0. \quad (2.8)$$

et par conséquent :

$$\left| \frac{E_n}{E_0} \right| > 1. \quad (2.9)$$

**Remarque 2.6.1** *Les exposants de Lyapunov sont une généralisation des valeurs propres pour le point fixe et des multiplicateurs caractéristiques pour les solutions périodiques.*

**Remarque 2.6.2** *Pour un attracteur non chaotique, les exposants de Lyapunov sont tous inférieurs ou égaux à zéro et leur somme est négative. Un attracteur étrange possédera toujours au moins trois exposants de Lyapunov, dont un au moins doit être positif (Voir le tableau TAB. 2.1).*

### A. Classification des orbites suivant le signe de l'exposant de Lyapunov

Généralement, on peut distinguer trois cas des orbites suivant le signe de l'exposant de Lyapunov :

1. Si  $\lambda < 0$ , l'orbite est attractive vers un point fixe ou une orbite périodique stable, il caractérise les systèmes dissipatifs. Ce type de système exhibe une stabilité asymptotique, plus l'exposant est négatif, plus la stabilité est grande. Les points fixes et les points périodiques super-stables ont un exposant de Lyapunov  $\lambda$  qui tend vers  $-\infty$ .
2. Si  $\lambda = 0$ , l'orbite est un point fixe neutre. Un système physique avec un tel exposant est dit conservatif. Dans cette situation, les orbites gardent une séparation constante.
3. Si  $\lambda > 0$ , l'orbite est instable et chaotique. Tous les points voisins doivent être visités, ces points sont dits instables. Pour un système discret, on a un ensemble de points sans aucun rapport de liaison. Pour un système continu, l'espace de phase est un ensemble de lignes croisées.

Etat stable	Flot	Dimension de Lyapunov	Exposants de Lyapunov
Point d'équilibre	point	0	$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 \leq 0$
Périodique	cercle	1	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq 0$
Période d'ordre 2	tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_3 \leq 0$
Période d'ordre k	k -tore	k	$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{k+1} \leq 0$
Chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0$ $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$
Hyperchaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$

TAB. 2.1. Classification des régimes permanents selon les exposants de Lyapunov

## B. Caractérisation d'un attracteur par le signe des exposants de Lyapunov

Un exposant de Lyapunov positive indique que selon la direction qu'il représente la divergence entre deux trajectoires voisines augmente exponentiellement avec le temps. Il s'agit donc bien là d'un attracteur étrange.

Pour une application bidimensionnelle, on peut résumer la correspondance entre le type de l'attracteur et signe des exposants de Lyapunov (ici ils sont deux) dans le tableau (TAB.2.2).

Type d'attracteur	Signe des exposants de Lyapunov
Point fixe	-, -, -
Cycle limite périodique	0, -, -
Cycle limite quasi périodique	0, 0, -
Attracteur étrange	+, 0, -

TAB. 2.2. Caractérisation des attracteurs par le signe des exposants de Lyapunov.

### C. Exposant de Lyapunov pour un système à temps continu

En 1985, Wolf *et al.* [12] ont proposé une méthode de calcul du plus grand exposant et de la somme des  $n$  exposants de Lyapunov à partir des séries chronologiques. Leur algorithme est basé sur le contrôle de la divergence entre les trajectoires voisines. On choisit dans un premier temps deux orbites très voisines, et on note  $d(t_0)$  leur distance en un temps ultérieur, soit  $t_1$ , cette distance est devenue  $d'(t_1)$ . On effectue alors un remplacement : on choisit une autre orbite située à une distance  $d(t_1)$  (FIG. 2.6). On recommence alors ces opérations un grand nombre de fois pour les temps  $t_1, \dots, t_M$ , et on calcule l'estimateur du plus grand exposant par la relation suivante :

$$\lambda = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{i=0}^n \ln \frac{d'(t_i)}{d(t_{i-1})}. \quad (2.10)$$

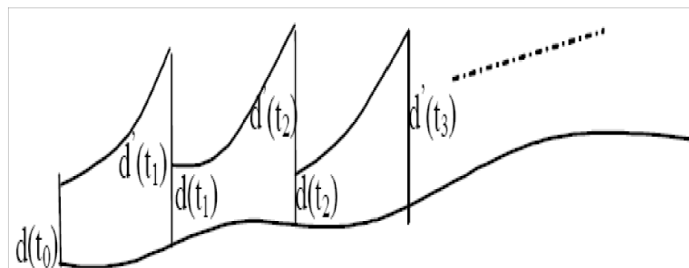


FIG. 2.6 – Méthode de Wolf pour estimer le plus grand exposant de Lyapunov.

## 2.6.2 Dimension fractale

Si, à l'issue du calcul de la dimension de l'attracteur d'un système étudié, nous obtenons une valeur positive non entière, cela signifie que le système possède un attracteur étrange. Plusieurs dimensions ont été proposées telles que la dimension de Kolmogorov, dimension de corrélation, dimension de Lyapunov.

Il y a une différence légère entre chacune de ces dimensions, mais elles caractérisent toutes, l'attracteur étrange avec sa dimension fractale et satisfont les trois propriétés suivantes :

1.  $A \subset B \Rightarrow d(A) \leq d(B)$ .
2.  $A = \emptyset \Rightarrow d(A) = 0$ .
3.  $d(A \times B) = d(A) + d(B)$ .

### A. Dimension de corrélation

Notons  $C(R)$  le nombre de boîtes requises pour chaque dimension  $N$ .

On peut caractériser la dimension de corrélation à l'aide d'une fonction appropriée, une telle fonction est définie par :

$$C(R) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^2} \vartheta. \quad (2.11)$$

avec  $\vartheta$  représente le nombre de paires  $i, j$  dont la distance  $|X_i - X_j| < R$ .

On peut réécrire la fonction (2.11) comme :

$$C(R) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^2} \sum H(R - |X_i - X_j|). \quad (2.12)$$

La dimension de corrélation est alors définie par :

$$v = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log(C(R))}{\log(R)}. \quad (2.13)$$

## B. Dimension de Lyapunov

Cette dimension est définie par Li et Yorke [14] et elle est donnée par :

$$d_l = m + \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{|\lambda_{m+1}|}. \quad (2.14)$$

Classant les exposants de Lyapunov de l'attracteur d'un système dynamique par :

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$  et  $m$  le plus grand entier tel que :

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \leq 0. \quad (2.15)$$

## C. Dimension de capacité (Kolmogorov)

Soit  $X$  un ensemble de points de l'attracteur, on recouvre  $X$  par un nombre minimal  $N(\varepsilon)$  d'hypercube de coté  $\varepsilon$ .

- Si  $X$  est un carré de coté  $L$ , il peut être recouvert par  $N(\varepsilon) = \left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^2$  petits carrés de cotés  $\varepsilon$ .
- Dans le cas général, on a :

$$N(\varepsilon) = \left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^d, \quad (2.16)$$

$$d = \frac{\log N(\varepsilon)}{\log L - \log \varepsilon} \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \log L \ll -\log \varepsilon. \quad (2.17)$$

**Définition 2.6.1** *La dimension de Kolmogorov ou de capacité est définie par :*

$$d_c = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon}. \quad (2.18)$$

## 2.7 Transitions vers le chaos

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage vers le chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus qu'on a déjà appelés bifurcations. On peut citer trois scénarios de transition d'une dynamique régulière à une dynamique chaotique lors de la variation d'un paramètre.

### 2.7.1 Cascade de doublements de période

Ce phénomène se manifeste sur un oscillateur forcé. À mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par 2, puis par 4, puis par 8, etc. Ces doublements de périodes sont de plus en plus rapprochés, lorsque la période est infinie, le système devient chaotique [15, 16].

### 2.7.2 L'intermittence

Un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées de turbulence. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement, la turbulence domine [17, 18].

### 2.7.3 La quasi-périodicité

Ce scénario via la quasi-périodicité a été mis en évidence par les travaux théoriques de Ruelle et Takens [6]. Ce phénomène intervient quand un deuxième oscillateur perturbe un système initialement périodique. Si le rapport des périodes des deux oscillateurs (systèmes) en présence n'est pas rationnel, alors le système est dit quasi-périodique. Si le rapport entre les deux périodes est rationnel, le comportement est périodique.

## 2.8 Exemples des systèmes dynamiques chaotiques à temps continu

### 2.8.1 Système de Lorenz

Le système de Lorenz [11] est un exemple célèbre du système différentiel au comportement chaotique. Ce système est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = x(r - z) - y, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (2.19)$$

Lorsque les paramètres réels  $\sigma$ ,  $r$  et  $b$  prennent les valeurs suivantes :  $\sigma = 10$ , et  $b = \frac{8}{3}$ , le comportement du système (2.19) est chaotique.

Les différents portraits de phases obtenus pour différentes valeurs des paramètres de contrôle sont largement étudiés, comme par exemple dans [13].

#### • Équilibre du modèle

On cherche les points d'équilibre  $(x, y, z)$  vérifiant  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ . Un premier point fixe trivial est  $P_0 = (0, 0, 0)$  pour  $r < 1$ , et pour  $r > 1$ , il y a deux autres points.

On a :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) = 0 \\ \dot{y} = x(r - z) - y = 0 \\ \dot{z} = xy - bz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ z = r - 1, \\ y = \pm\sqrt{b(r - 1)}. \end{cases} \quad (2.20)$$

donc, les deux points sont :

$$P_{1,2} = \left( \pm\sqrt{b(r - 1)}, \pm\sqrt{b(r - 1)}, (r - 1) \right). \quad (2.21)$$

L'étude de la stabilité des points d'équilibre repose sur le signe de la partie réelle des



valeurs propres de la matrice Jacobienne  $DJ$  qui s'écrit par :

$$DJ = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & -x \\ y & 0 & -b \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

• **Stabilité de l'équilibre nul (au point  $(0, 0, 0)$ )**

Au point  $(0, 0, 0)$ , les valeurs propres de la matrice Jacobienne sont :

$$DJ = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Donc  $|A - \lambda I_d|$  est définie par :

$$|A - \lambda I_d| = \begin{pmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b - \lambda \end{pmatrix}$$

Alors, l'équation caractéristique est définie par :

$$P(\lambda) = \det(DJ - \lambda I) = (\lambda + b)(\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)) = 0. \quad (2.23)$$

Pour les racines, on a :

$$\lambda_1 = \frac{-\sigma - 1 + \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(r - 1)}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{-\sigma - 1 - \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(r - 1)}}{2}, \quad \lambda_2 = -b.$$

On reporte les valeurs de  $\sigma$  et  $b$ , on obtient :

$$\lambda_1 = \frac{-11 + \sqrt{40r + 81}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{-11 - \sqrt{40r + 81}}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{8}{3}. \quad (2.24)$$

- Pour  $r < 1$  ; les trois racines réelles sont négatives,  $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$ , l'équilibre est donc nœud stable.
- Pour  $r > 1$  ; une des valeurs propres est positive  $\lambda_1$ , l'équilibre est donc instable (col).
- Il y a une bifurcation quand  $r = 1$  ; l'équilibre est dit : marginal.

Pour  $P_1$  et  $P_2$ , et avec la même procédure, on obtient :

- Pour  $r > 1$ , une des valeurs propres est positive  $\lambda_1$ , l'équilibre est donc instable (col).
- Pour  $r < 1$  ; les trois racines réelles sont négatives,  $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$ , l'équilibre est donc nœud stable.

Donc, les points  $P_1, P_2$  sont stable pour  $|r - 1| \ll 1$ .

• **Aspect aléatoire**

La figure (FIG. 2.7) illustre l'aspect aléatoire de l'état  $x$  du système (2.19).

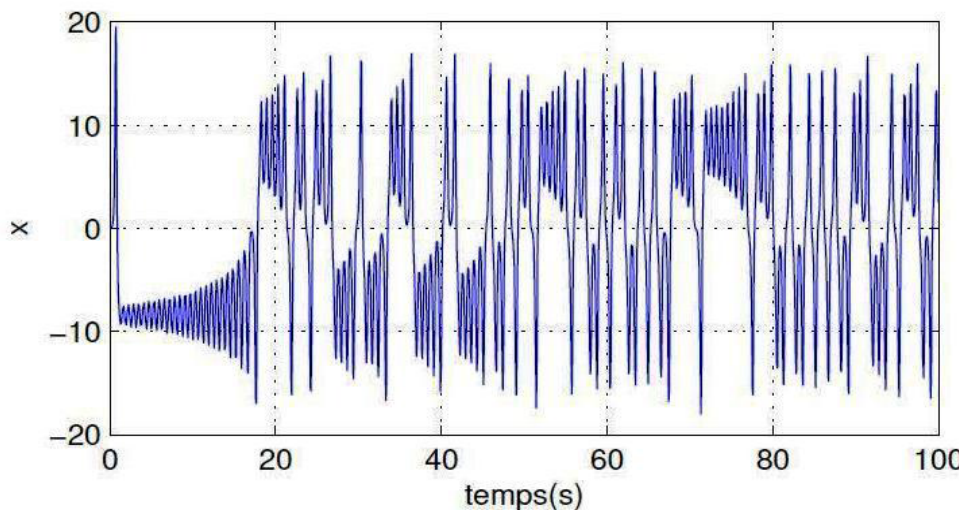


FIG. 2.7 – Aspects aléatoires de l'état  $x$  du système de Lorenz.

• **Attracteur étrange**

Le système chaotique (2.19) présente un superbe attracteur étrange en forme *d'ailes de papillon* (FIG. 2.8) pour les valeurs  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$ ,  $r = 28$ .

On observe que la dynamique du système de Lorenz donné par le système (2.19) est indépendante du temps  $t$  ; par conséquent, ce type de système est qualifié d'être autonome.

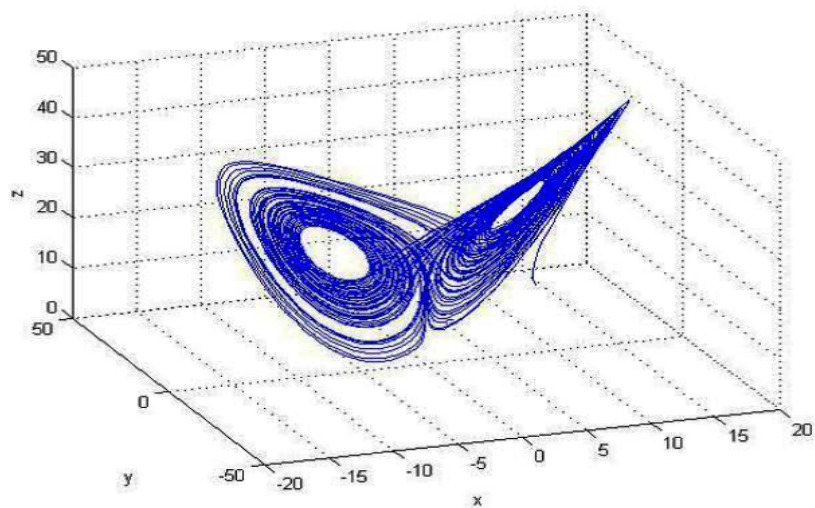


FIG. 2.8 – Attracteur étrange de Lorenz.

- **Les exposants de Lyapunov**

Le calcul des exposants de Lyapunov (FIG. 2.9) donne les valeurs suivantes :

$$\lambda_1 = 0.85922, \lambda_2 = -0.0015763, \lambda_3 = -14.5208.$$

Nous constatons bien qu'il y a un exposant de Lyapunov positif, ce qui signifie que le système est chaotique.

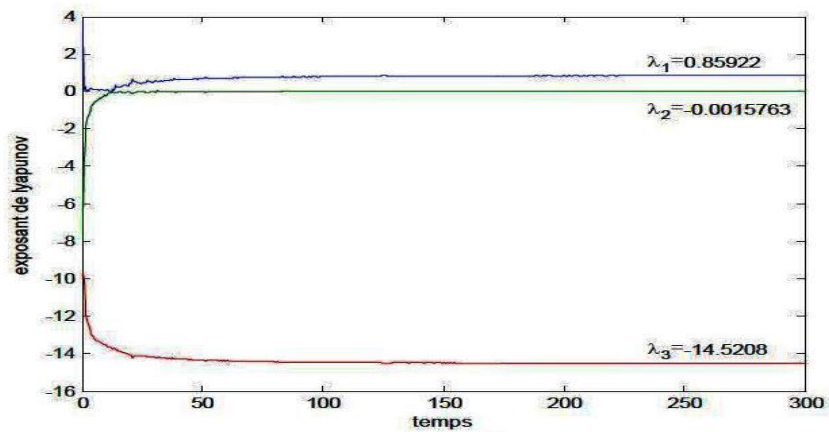


FIG. 2.9 – Exposants de Lyapunov du système chaotique continu de Lorenz.

## 2.8.2 Le système de Rössler

Le système dynamique de Rössler [19] est un système de trois équations différentielles non linéaires suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b - cz + xz. \end{cases} \quad (2.25)$$

avec  $a, b$  et  $c$  des constantes.

Pour  $a = 0,2$ ,  $b = 0,2$  et  $c = 5,7$ , nous obtenons l'évolution aléatoire dans le temps de la coordonnée  $z$  et l'attracteur de Rössler (FIG. 2.10).

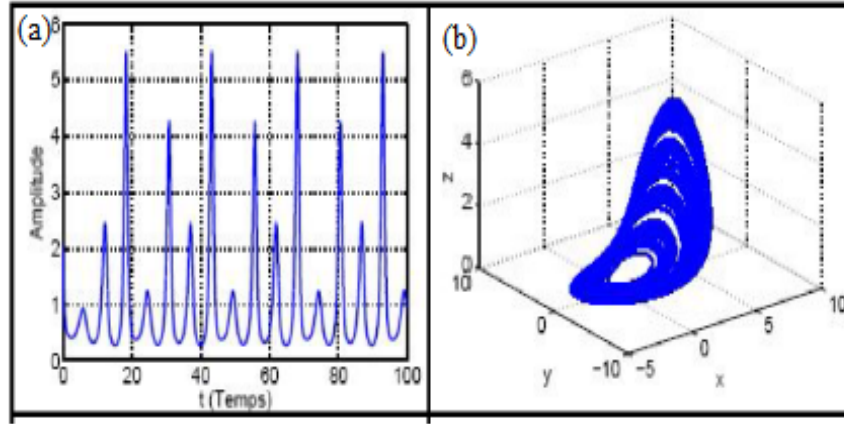


FIG. 2.10 – Système chaotique de Rössler : (a) aspect aléatoire, (b) attracteur étrange.

### • Points fixes

Pour trouver les points fixes, les trois équations du système de Rössler sont posées égales à zéro, le système est alors résolu et donne le résultat suivant :

$$\begin{cases} -(y + z) = 0 \\ x + ay = 0 \\ b - cz + xz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -y, \\ x = -ay, \\ y_1 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, y_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}. \end{cases} \quad (2.26)$$

donc :

$$x = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, y = -\left(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}\right), z = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}. \quad (2.27)$$

ce qui maintenant peut être utilisé pour présenter les points fixes pour des valeurs données de paramètres :

$$\left(\frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}\right),$$

$$\left(\frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}\right).$$

L'un des points instables est situé au centre de la spirale et l'autre se situe hors de l'attracteur.

• **Régimes périodiques et chaotiques**

Posant  $a = 0, 1$  et  $b = 0, 1$  et en faisant varier le paramètre  $c$ , le système passe successivement par divers régimes périodiques ou chaotiques.

$$Df \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0,1 & 0 \\ z & 0 & -c \end{pmatrix}.$$

$$|A - \lambda I_d| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 0,1 - \lambda & 0 \\ z & 0 & -c - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2(0,1 - c) + 0,1c\lambda - c = 0.$$

Selon  $c$ , on va trouvé les types des points :

$$c = 4 \quad \Rightarrow \text{période 1.}$$

$$c = 6 \quad \Rightarrow \text{période 2.}$$

$$c = 8,5 \quad \Rightarrow \text{période 4.}$$

$c = 9 \Rightarrow$  chaotique.

$c = 12 \Rightarrow$  période 3.

$c = 12,6 \Rightarrow$  période 6.

$c = 13 \Rightarrow$  chaotique.

$c = 18 \Rightarrow$  chaotique.

## 2.9 Exemples des systèmes dynamiques hyperchaotiques

**Définition 2.9.1** *Un attracteur hyperchaotique est généralement défini, comme étant un comportement chaotique avec au moins deux exposants de Lyapunov positifs.*

**Remarque 2.9.1** *La dimension minimale d'un système hyperchaotique (continu) est quatre (4).*

### 2.9.1 Le système hyperchaotique de Rössler

Le premier système hyperchaotique à 4 dimensions a été proposé en 1979 par Rössler [20, 21]. Ce système est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + ay + w, \\ \dot{z} = b + xz, \\ \dot{w} = -cz + dw. \end{cases} \quad (2.28)$$

Le système suit un comportement hyperchaotique (FIG. 2.11), quand les paramètres  $a, b, c$  et  $d$  prennent les valeurs suivantes :  $a = 0.25, b = 3, c = 0.5$  et  $d = 0.05$ .

Les conditions initiales peuvent prendre les valeurs suivantes :

$$x_0 = -10, \quad y_0 = -6, \quad z_0 = 0, \quad w_0 = 10.$$

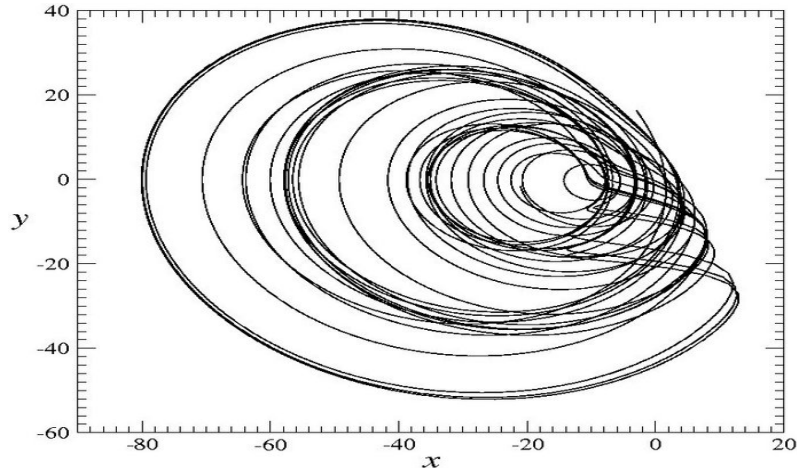


FIG. 2.11 – Projection plane de l'attracteur hyperchaotique de Rössler en 4-D.

Les quatre exposants de Lyapunov correspondants sont :  $\lambda_1 = 0.112$ ,  $\lambda_2 = 0.119$ ,  $\lambda_3 = 0$ , et  $\lambda_4 = -25.118$ . On constate bien que ce système répond aux conditions de passage du chaos vers l'hyperchaos. Le caractère hyperchaotique de ce comportement n'est pas si évident à partir de cette projection d'avion, qui ressemble un peu à un attracteur chaotique "bruyant".

### 2.9.2 Les systèmes hyperchaotiques de Liu et de Chen

Le système de Liu [22] est proposé en 2001, il est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = a_2x_1 + x_1x_3 - x_4, \\ \dot{x}_3 = -a_3x_3 + x_1x_2 + x_4, \\ \dot{x}_4 = x_4x_1 + x_2. \end{cases} \quad (2.29)$$

où  $a_1 = 10$ ,  $a_2 = 35$  et  $a_3 = 1.4$  et  $a_4 = 5$ .

Le système hyperchaotique de Chen est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_1x_1 + a_1x_2, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + a_2x_2 + 4x_4 - 10x_1x_3, \\ \dot{x}_3 = -a_3x_3 + x_2^2, \\ \dot{x}_4 = -a_4x_1. \end{cases} \quad (2.30)$$

où  $a_1 = 35$ ,  $a_2 = 21$ ,  $a_3 = 3$  et  $a_4 = 2$ .

**Remarque 2.9.2** *Seulement peu de comportements hyperchaotiques expérimentaux ont été identifiés. L'occurrence du comportement hyperchaotique a été trouvée, par exemple, dans un circuit électronique [23].*

## 2.10 Conclusion

Un système chaotique est un système déterministe et imprévisible, mais c'est aussi et surtout un système non linéaire. Le lien qui relie ces deux notions paradoxales, déterministe et imprévisible, est la propriété de sensibilité aux conditions initiales. La sensibilité aux conditions initiales des systèmes chaotiques a fait du chaos une situation indésirable pendant plusieurs années.

En effet, ce chapitre est réservé à la théorie du chaos. Le phénomène du chaos est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales, son attracteur étrange, sa dimension fractale et au moins l'un de ses exposants de Lyapunov est positif. Cependant, il existe un certain nombre de scénarios de transition vers le chaos qui permettent de décrire l'évolution d'un système dynamique.

Pour clôturer le chapitre, nous avons présenté quelques exemples, les plus célèbres, qui illustrent le comportement des systèmes dynamiques chaotiques et hyperchaotiques en temps continu. D'autres nouveaux systèmes sont exposés dans les deux derniers chapitres.



# Chapitre 3

## Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques

### 3.1 Introduction

Le phénomène de synchronisation est manifesté lorsque deux systèmes dynamiques évoluent d'une manière identique en fonction du temps. L'une des configurations de synchronisation les plus populaires est la configuration maître-esclave pour laquelle un système dynamique appelé système esclave suit le rythme et la trajectoire imposés par un autre système dynamique appelé système maître. Les perspectives de l'utilisation du chaos dans diverses applications ont motivé les chercheurs à étudier la question de l'éventuelle possibilité de synchroniser le chaos. Cette synchronisation paraît difficile à réaliser, car à la différence de la synchronisation où l'on cherche à reproduire seulement une période d'oscillation, la synchronisation chaotique présente plus de contraintes.

Ce chapitre peut être vu comme une synthèse bibliographique compacte sur les différentes méthodes de synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques (hyperchaotiques), dont l'intérêt principal est de mieux mettre en évidence l'originalité des résultats que nous proposerons dans ce chapitre et dans les deux derniers chapitres.

## 3.2 Point de départ de la synchronisation des systèmes chaotiques

La synchronisation des oscillateurs non linéaires est un phénomène qui a attiré l'attention des chercheurs depuis le constat et la description de ce phénomène par Christian Huygens en 1673. Ce célèbre scientifique néerlandais a rapporté son observation : deux horloges à pendule supportées par une même planche en bois, finissaient par avoir les mêmes oscillations périodiques (même phase, même fréquence) ; c'est-à-dire que les deux horloges avaient une parfaite synchronisation. Dans la terminologie moderne, cela signifie que les deux horloges ont été synchronisées.

Dans la littérature, plusieurs concepts de synchronisation chaotique ont été proposés, en premier par Fujisaka et Yamada [24]. Par la suite, des concepts importants liés à la synchronisation chaotique ont été développés par Afraimovich et *al.* [25].

En 1990, Pecora et Carroll [26] ont montré que deux systèmes chaotiques identiques peuvent se synchroniser. Alors, ils ont défini la synchronisation chaotique connue sous le nom de la **synchronisation identique**, développée sur la base de circuits chaotiques couplés. Le premier système produisant le signal chaotique, s'appelle le **système émetteur (maître)** et le deuxième, c'est le système **récepteur (esclave)**. Cette découverte a ouvert la voie pour des applications du chaos aux différents domaines et encore d'autres méthodes pour synchroniser le chaos.

Une autre solution plus récente est la méthode de **synchronisation généralisée** dont Rulkov et *al.* [27] ont posé les bases. Cette approche considère aussi une paire de systèmes configurés en maître-esclave, mais cette fois le couplage n'est pas réservé à l'identité. De leurs part, Mainieri et Rehacek [28] ont présenté en 1997 la **synchronisation projective**. Bien que la synchronisation a trouvé un champs vaste dans les communications, cela a motivé les chercheurs à exploiter des propriétés cryptographiques du chaos dans les applications de télécommunication et de transmission sécurisée d'informations. Alors, différents

régimes de synchronisation ont été introduites tels que la synchronisation impulsive [29], la synchronisation de phase [30] et la synchronisation adaptative [31]. De nos jours, plusieurs méthodes pour la synchronisation des systèmes chaotiques et hyperchaotiques ont été développés, ils ont été résumés dans les sections suivantes de cette thèse.

## 3.3 Définition de la synchronisation

### 3.3.1 Définition générale

Les relations humaines se synchronisent sont l'une des premières choses que nous avons apprises, car un bébé qui répond au sourire de sa mère, ne fait rien d'autre que de se synchroniser sur les expressions du visage de sa mère.

**Définition 3.3.1** (de Larousse) *Synchronisation est un mot grec décomposé en deux parties : **Syn** veut dire ensemble et **Chrono** veut dire temps. C'est l'action de mettre en phase pour créer une simultanéité entre plusieurs opérations, en fonction du temps.*

**Définition 3.3.2** (générale) *La synchronisation est une manière de faire l'entretien d'un mouvement périodique (ou chaotique). La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue en suivant le comportement de l'autre système.*

### 3.3.2 Définitions mathématiques de la synchronisation

Après plusieurs tentatives pour définir un mouvement synchronisé, Brown et Kocarev [32] ont récemment fourni une définition mathématique de la synchronisation. Pour construire la définition, ils supposent qu'un système dynamique, global, de dimension finie et déterministe est divisible en deux sous-systèmes :

$$\dot{X} = F(X(t)), \dot{Y} = G(Y(t)). \quad (3.1)$$

où,  $X(t) \in \mathbb{R}^n$  et  $Y(t) \in \mathbb{R}^m$  sont des vecteurs qui peuvent avoir des dimensions différentes.

Soit  $\varphi(w_0)$  une trajectoire du système globale donné par (3.1) avec la condition initiale  $w_0 = [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ .

Pour chaque sous-système, on forme une trajectoire  $\varphi_x(w_0)$  et  $\varphi_y(w_0)$  ( $w_0$  étant une condition initiale donnée).

On note par  $\chi$  l'espace de toutes les trajectoires du premier sous-système, et par  $\zeta$  l'espace de toutes les trajectoires du second sous-système, et on considère deux fonctions (propriétés)  $g_x : \chi \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  et  $g_y : \zeta \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ , qui ne sont pas identiquement nulle, le premier  $\mathbb{R}$  représente le temps, nous disons que les fonctions  $g_x$  et  $g_y$  sont des propriétés des sous-systèmes définis par (3.1) respectivement.

Enfin, pour définir un état synchronisé, Brown et Kocarev [32] exigent une fonction  $h(g_x, g_y) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  telle que  $\|h\| = 0$  ou  $\|h\| \rightarrow 0$  (où  $\|\cdot\|$  est toute norme). Nous disons que la fonction  $h$ , qui est indépendante du temps, compare les propriétés mesurées sur les deux sous-systèmes, et les deux mesures convergent dans le temps si et seulement si  $h(g_x, g_y) = 0$ .

**Définition 3.3.3** *Brown et Kocarev [32] Les sous-systèmes dans les équations (3.1) sont synchronisés sur la trajectoire de  $\varphi(w_0)$ , par rapport aux propriétés  $g_x$  et  $g_y$ , s'il existe un instant indépendant de l'application  $h$  tel que  $\|h(g_x, g_y)\| = 0$ .*

Avec le choix de  $g_x$ ,  $g_y$  et  $h$  on peut déterminer le type de synchronisation. Cette approche conduit à l'idée qu'il existe des différents types de synchronisation qui pourraient être englobés dans un même formalisme.

**Théorème 3.3.1** *Le système maître et le système esclave sont synchronisés si et seulement si tous les exposants de Lyapunov du système esclave, appelés les exposants de Lyapunov conditionnels, sont négatifs.*

## 3.4 Différents types de synchronisation

Depuis le résultat de Pecora et Carroll [26], une multitude d'articles a été consacrée à la synchronisation de systèmes chaotiques et de nombreux critères de synchronisabilité ont alors été définis.

Dans cette section, au sens d'une étude bibliographique extensive, nous avons recueilli différents types et schémas de la synchronisation telle que la synchronisation complète (**CS**), l'anti-synchronisation (**AS**), la synchronisation décalée, la synchronisation généralisée (**GS**), la synchronisation projective (**PS**), etc.

### 3.4.1 Synchronisation complète (CS)

On considère un système chaotique maître représenté par :

$$\dot{X} = F(X(t)), \quad (3.2)$$

où  $X(t)$  est le vecteur d'état du système maître de dimension  $n$ , et le système esclave représenté par la formule suivante :

$$\dot{Y} = G(Y(t)) + U. \quad (3.3)$$

où  $Y(t)$  est le vecteur d'état du système esclave de dimension  $m$ ,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  et  $U = (u_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$  déterminent le vecteur de contrôle.

L'erreur de la synchronisation complète est définie par :

$$e(t) = Y(t) - X(t) \quad \text{telle que} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0. \quad (3.4)$$

où  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne.

- Si  $F = G$ , la relation devient une synchronisation complète identique.

- Si  $F \neq G$ , c'est une synchronisation complète non identique.

Donc, la synchronisation (**CS**) est une coïncidence complète entre les variables d'état des deux systèmes synchronisés.

### 3.4.2 Anti-synchronisation

**Définition 3.4.1** *On dit que deux systèmes sont en anti-synchronisation, si le système maître et le système esclave ont des vecteurs d'état identiques en valeur absolue, mais avec signes opposés, et la somme de ces vecteurs d'état de deux systèmes tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Alors, l'erreur de l'anti-synchronisation est présentée par :*

$$e(t) = Y(t) + X(t). \quad (3.5)$$

### 3.4.3 Synchronisation décalée

**Définition 3.4.2** *Diao et al.[33] On dit que deux systèmes dynamiques chaotiques non-identiques présentent une synchronisation décalée si et seulement si le temps est décalé.*

**Définition 3.4.3** *Si les variables d'état  $Y(t)$  du système chaotique esclave convergent vers les variables d'état  $X(t)$  du système maître en temps décalé, on dit qu'il existe une synchronisation retardée comme l'indique la relation suivante :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t) - X(t - \epsilon)\| = 0, \quad \forall x(0). \quad (3.6)$$

### 3.4.4 Synchronisation généralisée (GS)

La synchronisation généralisée est considérée comme une généralisation de la synchronisation complète, l'anti-synchronisation et la synchronisation projective dans le cas des systèmes chaotiques de dimensions et de modèles différents [34]. Elle se manifeste par une relation fonctionnelle entre les deux systèmes chaotiques.

En comparaison avec la synchronisation identique, la synchronisation généralisée notée par **GS** (en anglais : **Generalized Synchronization**) peut donner une dynamique plus riche, car elle peut aussi envisager certains cas désynchronisés, dus aux disparités des paramètres, aux déformations des canaux de transmission et autres. En conséquence, les possibilités d'appliquer la **GS** peuvent être plus larges que la synchronisation identique.

Parmi les premières publications sur cette méthode, on cite les travaux de Rulkov et *al.* [27] et de Kocarev et Parlitz [35]. Yan et Li [36] ont introduit la synchronisation généralisée pour des systèmes chaotiques unifiés. Récemment, cette méthode est étudiée pour les systèmes chaotiques de dimension arbitraire par un contrôle non linéaire [37].

Cependant, il n'existe que peu de résultats théoriques sur la synchronisation généralisée des systèmes dynamiques chaotiques de différentes dimensions, alors ce type de recherche est juste en début.

Pour définir la **GS**, on considère un couple de systèmes maître-esclave représenté par :

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X(t)), \\ \dot{Y} = G(Y(t)) + U. \end{cases} \quad (3.7)$$

où  $X(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $Y(t) \in \mathbb{R}^m$  sont les états du système maître et le système esclave, respectivement,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  et  $U = (u_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$  est un contrôleur à déterminer.

**Définition 3.4.4** *S'il existe une fonction  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , telles que toutes les trajectoires du système maître et du système esclave, avec les conditions initiales  $x(0)$  et  $y(0)$  vérifient :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t) - \Phi(X(t))\| = 0, \quad \forall x(0), y(0). \quad (3.8)$$

*alors, les systèmes maître-esclave (3.7) se synchronisent au sens généralisé par rapport à la fonction  $\Phi$ .*

### 3.4.5 Synchronisation projective (PS)

Parmi tous les types de synchronisation de chaos, la synchronisation projective notée par **PS** (en anglais : **Projective Synchronization**) a été largement étudiée au cours des dernières années, car elle peut réaliser une communication plus rapide avec sa caractéristique proportionnelle.

La **PS** a été d'abord rapportée par Mainieri et Rehacek [28] dans les systèmes chaotiques partiellement linéaires, dans lesquels les réponses des deux systèmes identiques synchronisent jusqu'à **un facteur d'échelle constant**.

Puis, Daolin Xu [38] a montré que le facteur échelle de **PS** de deux systèmes couplés partiellement linéaires est imprévisible et peut être arbitrairement manœuvré par l'introduction d'un contrôle de rétroaction au système maître.

Xu *et al.* [39] ont également introduit plusieurs régimes de contrôle basés sur la théorie de stabilité de Lyapunov pour mener le facteur échelle à une valeur souhaitée et dérivé la condition générale pour la synchronisation projective que tous conditionnels des exposants de Lyapunov sont non-positifs pour les systèmes en temps continu.

Plus tard, certains auteurs étendus à réaliser **PS** pour les systèmes partiellement non linéaires qui est une classe générale des systèmes chaotiques sans limitation partielle de linéarité [40, 41]. Par la suite, plusieurs schémas de **PS** ont été largement examinés [42, 43].

**Définition 3.4.5** *On dit qu'on a une synchronisation **PS** si les variables d'état  $y_i(t)$  du système chaotique esclave  $Y(t) = (y_i(t))_{1 \leq i \leq n}$  (3.3) se synchronisent avec une constante multiple de l'état  $x_i(t)$  du système chaotique maître  $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq n}$  (3.2) tels que :*

$$\exists \alpha_i \neq 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \|y_i(t) - \alpha_i x_i(t)\| = 0, \forall (x(0), y(0)), i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.9)$$

- *Le cas où tous les  $\alpha_i$  sont égaux à 1 représente un cas de synchronisation complète.*
- *Le cas où tous les  $\alpha_i$  sont égaux à  $-1$  représente un cas d'anti-synchronisation complète.*



### 3.4.6 Synchronisation GPS

La synchronisation notée **GPS** (en anglais : **Generalized Projective Synchronization**) signifie que les vecteurs émetteur et récepteur synchronisent jusqu'à un **facteur d'échelle**  $h$ , c'est-à-dire que les vecteurs deviennent proportionnels.

On considère le système chaotique suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X(t)), \\ \dot{Y} = G(Y(t)) + U. \end{cases} \quad (3.10)$$

où  $X(t)$  est le vecteur d'état du système maître de dimension  $n$ ,  $Y(t)$  est le vecteur d'état du système esclave de dimension  $n$ ,  $F$  et  $G$  sont des champs de vecteurs,  $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $U = (u_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$  est un contrôleur à déterminer.

**Définition 3.4.6** *Yan et Li [36]* Pour le système (3.10), on dit qu'il y a une synchronisation **GPS**, s'il existe une constante  $h$  ( $h \neq 0$ ), telle que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t) - hY(t)\| = 0$ , ainsi, la **GPS** du système (3.10) est atteinte, et nous appelons  $h$  **facteur d'échelle**.

Quelques études ont été menées pour investir **GPS** telle que les travaux de Li [44].

**Exemple 3.4.1** Prenons l'exemple du système chaotique identique de Lorenz dont le système maître est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_m = \sigma(y_m - x_m), \\ \dot{y}_m = x_m(r - z_m) - y_m, \\ \dot{z}_m = x_m y_m - b z_m. \end{cases} \quad (3.11)$$

où ( $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$ ,  $r = 28$ ), pour assurer l'attracteur chaotique.

Afin d'atteindre **GPS**, à l'aide de la technique de contrôle actif, le système esclave est

construit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_s = \sigma(y_s - x_s) + u_1, \\ \dot{y}_s = x_s(r - z_s) - y_s + u_2, \\ \dot{z}_s = x_s y_s - b z_s + u_3. \end{cases} \quad (3.12)$$

Il y a trois fonctions de contrôle  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) qu'elles vont être déterminées ultérieurement.

Définissons le vecteur d'erreur en tant que :

$$e_1 = x_m - h x_s, \quad e_2 = y_m - h y_s, \quad e_3 = z_m - h z_s. \quad (3.13)$$

où  $h$  est le facteur d'échelle désiré.

Ensuite, on obtient le système d'erreur dynamique en soustrayant (3.11) à partir de (3.12) :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \sigma(e_2 - e_1) - h u_1, \\ \dot{e}_2 = r e_1 - e_2 - x_m z_m + (x_m - e_1)(z_m - e_3)/h - h u_2, \\ \dot{e}_3 = x_m y_m - (x_m - e_1)(y_m - e_2)/h - b e_3 - h u_3. \end{cases} \quad (3.14)$$

Se référant aux méthodes originales de contrôle actif, on définit les trois fonctions de contrôle  $u_i$  comme suit :

$$\begin{cases} h u_1 = -v_1, \\ h u_2 = -v_2 - x_m z_m + (x_m - e_1)(z_m - e_3)/h, \\ h u_3 = -v_3 + x_m y_m - (x_m - e_1)(y_m - e_2)/h. \end{cases} \quad (3.15)$$

d'où, le système d'erreur devient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = v_1 + \sigma(e_2 - e_1), \\ \dot{e}_2 = v_2 + r e_1 - e_2, \\ \dot{e}_3 = v_3 - b e_3. \end{cases} \quad (3.16)$$

Le système d'erreur (3.16) devra être contrôlé en un système linéaire d'une entrée de

contrôle actif  $v_1, v_2$  et  $v_3$  en fonction des erreurs  $e_1, e_2, e_3$ . Tant que ces évaluations stabilisent le système (3.16),  $e_1, e_2, e_3$  convergent vers zéro à mesure que le temps tend vers l'infini, ce qui implique que **GPS** de deux systèmes identiques de Lorenz est obtenue avec un facteur d'échelle  $h$ .

Il y a beaucoup de choix possibles pour les contrôleurs  $v_1, v_2$  et  $v_3$ . Afin de rendre le système (3.16) en boucle fermée stable, le bon choix du contrôle devrait garantir que le système de rétroaction doit avoir toutes les valeurs propres en parties réelles négatives. Pour simplifier, on choisit :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Dans ce choix particulier, les trois valeurs propres du système en boucle fermée (3.16) sont  $-\sigma, -1$  et  $-b$ . Comme le système en boucle fermée a toutes les valeurs propres qui sont trouvées avoir des parties réelles négatives, le système se converge. Autrement dit, ce choix se traduira par un système stable et la **GPS** de deux systèmes identiques de Lorenz est atteinte.

Ce qui mérite d'être mentionné, c'est que les valeurs des valeurs propres jouent un rôle important dans la stabilité du système d'erreur. Afin d'accélérer le rythme de convergence, on devra rendre ces valeurs plus petites.

Les résultats numériques pour le facteur d'échelle  $h = 5$  sont montrés (FIG. 3.1).

### 3.4.7 Synchronisation FSPS

Wen et Xu [40] ont présenté la synchronisation notée **FSPS** (en anglais : **Full State Projective Synchronization**) qui signifie que les deux systèmes émetteur et récepteur synchronisent jusqu'à **une constante non-nulle**  $h$ .

**Définition 3.4.7** Pour le système (3.10), on dit qu'il y a une synchronisation **FSPS**, s'il existe un constant  $h$  ( $h \neq 0$ ), telle que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t) - hX(t)\| = 0$ , c'est-à-dire,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y_i(t) - hx_i(t)\| = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , ainsi, la (**FSPS**) de système (3.10) est atteinte.

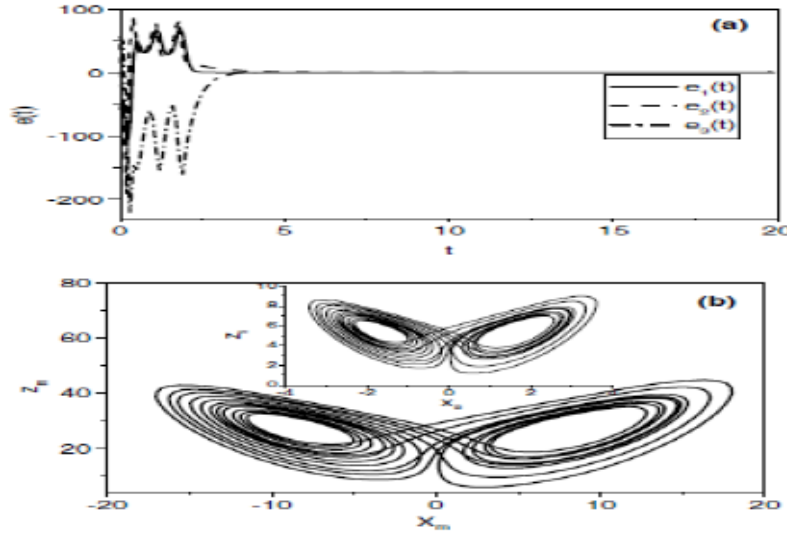


FIG. 3.1 – La **GPS** entre deux systèmes identiques de Lorenz : (a) L'évolution dans le temps des vecteurs d'erreur, (b) La projection des attracteurs synchronisés sur le plan  $x$ - $z$  après des états transitoires.

### 3.4.8 Synchronisation FSHPS

La synchronisation notée **FSHPS** (en anglais : **Full State Hybrid Projective Synchronization**) signifie que les vecteurs émetteur et récepteur se synchronisent jusqu'à une **matrice diagonale de mise en échelle constante**  $H$ . La synchronisation **FSHPS** a été annoncée pour la première fois par Hu et *al.* [45].

**Définition 3.4.8** Pour le système (3.10), on dit qu'il y a une synchronisation **FSHPS**, s'il existe une matrice diagonale constante  $H$  ( $H \neq 0$ ) et  $H = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_n)$  telle que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t) - HX(t)\| = 0$ , c'est-à-dire,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y_i(t) - h_i x_i(t)\| = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , ainsi, la **FSHPS** du système (3.10) est atteinte.

**Remarque 3.4.1** *Il est facile de voir que la définition de la synchronisation **FSHPS** englobe la synchronisation complète, l'anti-synchronisation et la synchronisation projective en posant la matrice  $H$  égale à  $I$ ,  $-I$  et  $\alpha I$  ( $\alpha$  est une constante), respectivement.*

Plusieurs études ont été menées à travers cette méthode pour la synchronisation des systèmes chaotiques et hyperchaotiques et ainsi pour les systèmes d'ordre différent et pour les systèmes à temps discret [46, 47, 48, 49].

### 3.4.9 Synchronisation Q-S

La synchronisation **Q-S** est considérée comme une généralisation de tous les types de synchronisations précédentes [50].

**Définition 3.4.9** *Nous disons qu'un système maître,  $n$ -dimensionnelle,  $X(t)$  et un système esclave,  $m$  dimensionnelle,  $Y(t)$  sont en synchronisation **Q-S** dans la dimension  $d$ , s'il existe un contrôleur  $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$  et deux fonctions  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$  telle que l'erreur de synchronisation  $e(t) = Q(X(t)) - S(Y(t))$ , vérifie  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0$ .*

### 3.4.10 Synchronisation MPS

Guo-Hui Li [51] a proposé une nouvelle méthode de synchronisation appelée la synchronisation notée **MPS** (en anglais : **Modified Projective Synchronization**), où les deux systèmes émetteur et récepteur se synchronisent jusqu'à une **matrice de mise à l'échelle constante**. Certains critères globaux de synchronisation sont donnés pour le placement de pôle technique de cette méthode.

Par rapport à la synchronisation projective **PS**, la **MPS** est caractérisée par une matrice de mise à l'échelle et que les deux systèmes se synchronisent proportionnellement.

**Définition 3.4.10** *Pour le système (3.10), s'il existe une matrice constante :*

$H = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_n)$  telle que :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t) - HY(t)\| = 0$ , alors nous appelons cette synchronisation **MPS** et nous appelons  $H$  matrice de mise à l'échelle.

**Remarque 3.4.2** *En toute évidence, la synchronisation complète **CS** et la synchronisation projective **PS** sont des cas particuliers de la synchronisation **MPS***

*lorsque  $h_1 = h_2 \dots = h_n = 1$  et  $h_1 = h_2 \dots = h_n$ , respectivement.*

**Exemple 3.4.2** *Pour le système chaotique de Lorenz (3.11), les résultats de la simulation numériques montrent que la réponse de temps de l'erreur de synchronisation*

*$e = [e_1, e_2, e_3]^T$  tend vers zéro lorsque  $t \rightarrow +\infty$  (FIG. 3.2).*

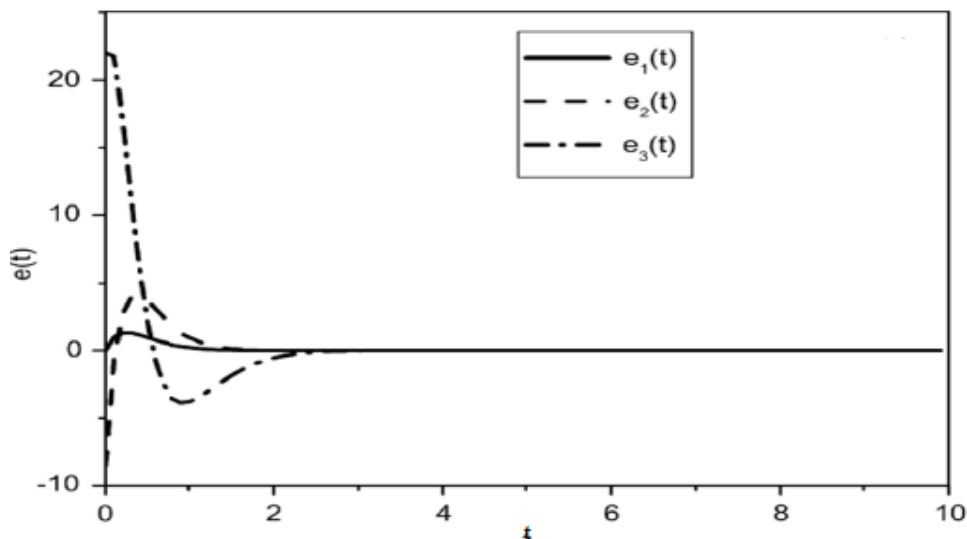


FIG. 3.2 – La **MPS** pour le système de Lorenz : l'évolution des vecteurs d'erreurs pour une matrice  $H = \text{diag}(1, 2, 3)$ .

### 3.4.11 Synchronisation FPS

La plupart des efforts de recherche mentionnés ci-dessus se sont concentrés sur l'étude d'un facteur d'échelle constant. Récemment, Chen et Li [52] ont présenté une nouvelle méthode de synchronisation notée **FPS** (en anglais : **Function Projective Synchronization**). Par la suite, Hongyue Du et *al.* [53] ont montré qu'un contrôle peut être utilisé pour manipuler le facteur échelle de telle sorte que le système émetteur et le système récepteur peuvent être synchronisés jusqu'à une fonction de mise à l'échelle souhaitée.

La **FPS** est une définition plus générale de la **PS**. En comparaison avec la **PS**, la **FPS** signifie que les deux systèmes maître-esclave peuvent être synchronisés à **une fonction de mise en échelle**, mais **pas une constante**. Cette fonction pourrait être utilisée pour obtenir une communication plus sécurisée, car il est évident que l'imprévisibilité de l'échelle de la fonction dans la méthode **FPS** peut en outre améliorer la sécurité de la communication.

Pour le meilleur de nos connaissances, à l'heure actuelle, il y a peu de résultats théoriques sur la **FPS**. Motivés par cette raison, nous référons aux travaux de Hongyue Du et *al.* [53] pour donner une définition et un exemple de la méthode.

Pour définir la synchronisation **FPS**, on décrit le terme d'erreur par :

$$e(t) = X(t) - H(t)Y(t)$$

où  $H(t)$  est une fonction continûment différentiable bornée et  $H(t) \neq 0$  pour tout  $t$ .

**Définition 3.4.11** *Pour le système (3.10), s'il existe une fonction de mise à l'échelle  $H(t)$  telle que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0$ , alors nous appelons cette synchronisation **FPS**.*

**Remarque 3.4.3** *Il est facile de voir que la définition de la **FPS** englobe la **PS** lorsque la fonction de mise à l'échelle  $H(t)$  est prise par une constante  $h$ .*

Nous allons montrer, par la suite, que le contrôle peut être utilisé pour manipuler le facteur d'échelle de telle sorte que les deux systèmes émetteur et récepteur pourraient être synchronisés jusqu'à une fonction de mise à l'échelle désirée.

**Exemple 3.4.3** *Par souci de commodité, on considère l'exemple de système chaotique partiellement linéaire pour montrer la faisabilité de la méthode **FPS**, qui est le système de Lorenz (3.11).*

Les deux systèmes chaotiques identiques (3.11) couplés à travers la variable  $z$  sous la forme (3.18) avec les contrôleurs adaptatifs donnés par :

$$\begin{cases} \dot{x}_d = \sigma(y_d - x_d), \\ \dot{y}_d = x_d(r - z) - y_d, \\ \dot{z} = x_d y_d - bz, \\ \dot{x}_r = \sigma(y_r - x_r) + u_1, \\ \dot{y}_r = x_r(r - z) - y_r + u_2. \end{cases} \quad (3.18)$$

où  $\{x_d, y_d\}$  et  $\{x_r, y_r\}$  sont les vecteurs émetteur et récepteur, respectivement.

On définit les erreurs de la **FPS** comme suit :

$$\begin{cases} e_1 = x_d - H(t)x_r, \\ e_2 = y_d - H(t)y_r. \end{cases} \quad (3.19)$$

où  $H(t)$  est la fonction de mise à l'échelle.

Il est évident que, si le vecteur d'erreur  $e(t)$  tend vers zéro, la **FPS** a lieu avec la fonction de mise à l'échelle souhaitée.

La dérivée du temps de l'équation (3.19) est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \dot{x}_d - H(t)\dot{x}_r - \dot{H}(t)x_r, \\ \dot{e}_2 = \dot{y}_d - H(t)\dot{y}_r - \dot{H}(t)y_r. \end{cases} \quad (3.20)$$

En substituant (3.18) dans (3.20), on obtient les erreurs dynamiques suivantes :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \sigma(y_d - x_d) - H(t)(\sigma(y_r - x_r) + u_1) - \dot{H}(t)x_r, \\ \dot{e}_2 = x_d(r - z) - y_d - H(t)(x_r(r - z) - y_r + u_2) - \dot{H}(t)y_r. \end{cases} \quad (3.21)$$



En présentant la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2. \quad (3.22)$$

la dérivée temporelle de  $V$  le long des trajectoires des équations (3.22) est :

$$\begin{aligned} \dot{V} = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 = e_1 & \left[ \sigma (y_d - x_d) - H(t) (\sigma (y_r - x_r) + u_1) - \dot{H}(t) x_r \right] \\ & + e_2 \left[ x_d (r - z) - y_d - H(t) (x_r (r - z) - y_r + u_2) - \dot{H}(t) y_r \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ainsi, la fonction de contrôle peut être formulée sous la forme :

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha(t)} \begin{pmatrix} \sigma e_2 - \dot{H}(t) x_r \\ (r - z) e_1 - \dot{H}(t) y_r \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

En substituant (3.24) dans (3.23), on obtient :

$$\dot{V} = -\sigma e_1^2 - e_2^2 < 0. \quad (3.25)$$

Selon la théorie de stabilité de Lyapunov, le vecteur d'erreur  $e(t)$  tend vers zéro asymptotiquement, ce qui implique que toutes les variables d'état ont tendance à synchroniser dans une relation de fonction proportionnelle. Une simulation numérique des erreurs  $e_1$  et  $e_2$ , de la **FPS**, et de la fonction d'échelle  $H(t)$  est représentée (FIG. 3.3).

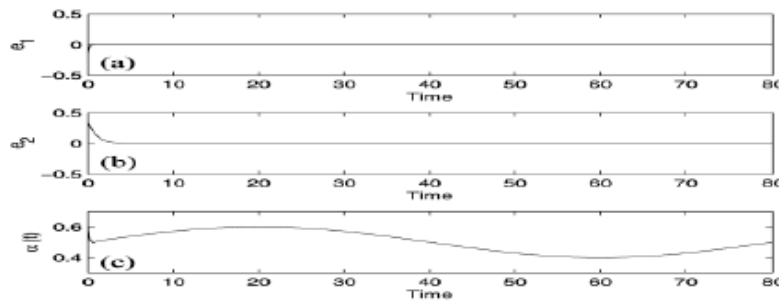


FIG. 3.3 – La variation des erreurs de la **FPS** et de la fonction mise à l'échelle  $H(t)$  pour le système de Lorenz.

### 3.4.12 Synchronisation MFPS

Une nouvelle méthode de synchronisation notée **MFPS** (en anglais : **Modified Function Projective Synchronization**) a été présentée par Hongyue Du et *al.* [54]. Dans ce type de synchronisation, les deux systèmes émetteur et récepteur synchronisent jusqu'à **une matrice de fonction de mise à l'échelle désirée**. La synchronisation **MFPS** est une définition plus générale de **MPS** et **FPS** où la matrice de fonction de mise à l'échelle est prise par une matrice constante  $H$  et une fonction de mise à l'échelle  $H(t)$ , respectivement. Il est évident que l'imprévisibilité de la matrice de fonction de mise à l'échelle dans la synchronisation **MFPS** peut en outre améliorer la sécurité des communications.

Pour définir la synchronisation **MFPS**, le terme d'erreur est donné par :

$$e(t) = X(t) - H(t)Y(t)$$

où  $H(t)$  est une matrice diagonale d'ordre  $n$ ,  $H(t) = \text{diag}(h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))$  et  $h_i(t)$  est une fonction continûment différentiable bornée, et  $h_i(t) \neq 0$  pour tout  $t$ .

**Définition 3.4.12** *Pour le système (3.10), s'il existe une matrice de fonction de mise à l'échelle telle que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0$ , alors nous appelons cette synchronisation **MFPS**.*

**Remarque 3.4.4** *Il est facile de voir que la **FPS** et la **MPS** sont des cas particuliers de la **MFPS**, où  $h_1(t) = h_2(t) = \dots, h_n(t) = h(t)$  et  $h_1(t) = h_1, h_2(t) = h_2, \dots, h_n(t) = h_n$ , respectivement.*

### 3.4.13 Synchronisation GFPS

En 2010, la synchronisation notée **GFPS** (en anglais : **Generalized Function Projective synchronization**) a été présentée par Yu et Li [55], où les deux systèmes émetteur et récepteur se synchronisent vers une **matrice de fonction de mise à l'échelle**.

Pour définir la synchronisation **GFPS**, le terme d'erreur est présenté par :

$$e(t) = Y(t) - H(t)X(t)$$

où  $e(t) = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$ ,  $H(t) = \text{diag}(h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))$  est réversible et différentiable et  $h_i(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h_i(t) \neq 0$  sont des fonctions continûment différentiables bornées.

**Définition 3.4.13** *Pour le système (3.10), s'il existe une matrice de fonction de mise à l'échelle  $H(t)$  d'ordre  $n$  telle que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0$ , alors nous appelons cette synchronisation **Generalized Function Projective synchronization (GFPS)**.*

- Si  $h_1(t) = h_2(t), \dots = h_n(t)$ , alors la **GFPS** est simplifiée à la **FPS**.
- Si  $h_i(t) = h_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) où  $h_i \in \mathbb{R}$  et  $h_i \neq 0$ , la **GPS** est atteinte.
- Si  $H = \lambda I_n$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une constante et  $I_n$  est la matrice identité, la **GFPS** est réduite à la **PS**.

### 3.4.14 Synchronisation HPS

Très récemment, la synchronisation notée **HPS** (en anglais : **Hybrid Projective Synchronization**) a été proposé par Manfeng Hu *et al.* [56]. Dans ce type de synchronisation, les deux systèmes émetteur et récepteur peuvent synchroniser jusqu'à **des différents facteurs d'échelle**. La **HPS** peut être considérée comme une extension de la synchronisation projective **PS**, car la synchronisation complète et anti-synchronisation sont ses deux cas particuliers. Depuis, la synchronisation **HPS** ne cesse d'être étudiée pour plusieurs disciplines, en particulier les communications [57].

Pour définir la synchronisation **HPS**, le terme d'erreur est proposé comme :

$$e(t) = H(t)Y(t) - X(t)$$

où  $H(t)$  est une matrice de mise à l'échelle,  $H(t) = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_n)$ ,  $h_i$  est un facteur d'échelle et  $h_i \neq 0$  pour tout  $t$ .

**Définition 3.4.14** *Pour le système (3.10), s'il existe une matrice réversible de mise à l'échelle  $H$  d'ordre  $n$  telle que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0$ . il est dit qu'il y a une synchronisation **HPS**.*

**Remarque 3.4.5**

- Si  $H = I$ , où  $I$  est la matrice unité, alors la synchronisation est appelée **CS**.
- Si  $H = -I$ , alors la synchronisation est nommée **AS**.
- Si  $H = \alpha I$ , et  $\alpha \neq \pm 1$  un réel constant différent de zéro, alors la synchronisation est appelée **PS**.
- Si  $H = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_n)$  et  $h_1, h_2, \dots, h_n$  sont des constantes différentes non nulles, alors la synchronisation est nommée **MPS**. Donc **CS**, **AS**, **PS** et **MPS** sont des cas particuliers de la **HPS**.

### 3.4.15 Synchronisation HFPS

Zhang et Li [58] ont développé un nouveau type de synchronisation notée par **HFPS** (en anglais : **Hybrid Function Projective Synchronization**), dans laquelle les deux systèmes émetteur et récepteur se synchronisent jusqu'à **une matrice de fonction de mise à échelle**. De sa part, cette méthode améliore la sécurité dans les télécommunications.

Pour définir la synchronisation **HFPS**, le terme d'erreur est fourni par :

$$e(t) = Y(t) - H(t)X(t)$$

où  $H(t)$  est une matrice de fonction de mise à l'échelle,  $H(t) = \text{diag}(h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))$ , et  $h_i(t)$  est une fonction continûment différentiable bornée et  $h_i(t) \neq 0$  pour tout  $t$ .

**Définition 3.4.15** *Pour le système (3.10), s'il existe une matrice de fonction de mise à échelle  $H$  telle que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0$ , il est dit qu'il y a une synchronisation **HFPS**.*

## 3.5 Méthodes du contrôle pour la synchronisation

Cette section est consacrée à la présentation de diverses méthodes pour la synchronisation les plus performantes et les plus rencontrées.

### 3.5.1 Méthode du contrôleur actif

L'application du contrôle actif pour la synchronisation des systèmes chaotiques a été proposée par Bai et Lonngren [59]. C'est une technique efficace qui a montré sa puissance non seulement pour la synchronisation des systèmes identiques, mais aussi pour la synchronisation des systèmes non identiques. De plus, cette méthode offre une simplicité remarquable pour l'implémentation de l'algorithme [60].

Soit deux systèmes chaotiques à synchroniser, maître et esclave, définis par :

$$\dot{X} = F(X(t)), \quad (3.26)$$

$$\dot{Y} = G(Y(t)) + U. \quad (3.27)$$

où  $X(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $Y(t) \in \mathbb{R}^n$  sont les états des systèmes maître et esclave, respectivement,  $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , et  $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$  est un contrôleur à déterminer.

Pour que les deux systèmes se synchronisent, il faut que l'erreur entre les trajectoires des deux systèmes converge vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Cette erreur est obtenue comme suit :

$$\dot{e}(t) = \dot{Y}(t) - \dot{X}(t) = G(Y(t)) - F(X(t)) + U. \quad (3.28)$$

Si on peut écrire la quantité  $G(Y(t)) - F(X(t))$  de la façon suivante :

$$G(Y(t)) - F(X(t)) = Ae(t) + N(X(t), Y(t)). \quad (3.29)$$

l'erreur peut être exprimée comme suit :

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + N(X(t), Y(t)) + U. \quad (3.30)$$

où  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice constante et  $N$  une fonction non linéaire. Le contrôleur  $U$  est proposé comme suit :

$$U = V - N(X(t), Y(t)). \quad (3.31)$$

où  $V$  est le contrôleur actif défini par :

$$V = -Le(t). \quad (3.32)$$

où  $L$  est une matrice de contrôle inconnue. Donc, on obtient la formule finale suivante de l'erreur :

$$\dot{e}(t) = (A - L)e(t). \quad (3.33)$$

Donc le problème de la synchronisation entre le système maître (3.26) et le système esclave (3.27) est transformé en problème de zéro-stabilité du système (3.33). Maintenant le Théorème qui suit est un résultat immédiat de la théorie de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires continues.

**Théorème 3.5.1** *Le système maître (3.26) et le système esclave (3.27) sont globalement synchronisés sous la loi du contrôle (3.31), si et seulement si la matrice de contrôle  $L$  est choisie telles que les valeurs propres de  $(A - L)$  se trouvant à l'intérieur du disque de l'unité.*

### 3.5.2 La méthode backstepping

La méthode du backstepping est une méthode récursive qui se base sur le choix d'une fonction de Lyapunov avec la conception du contrôleur nécessaire [61, 62].

En considère que le système maître et le système esclave sont définis comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n). \end{array} \right. \quad (3.34)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{y}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dots \\ \dot{y}_n = f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + u. \end{array} \right. \quad (3.35)$$

où  $f_1$  est une fonction linéaire,  $f_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) sont des fonctions non linéaires et  $u$  est un contrôleur qui doit être choisi convenablement pour obtenir la synchronisation entre les systèmes (3.34) et (3.35).

L'erreur de synchronisation est définie comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = y_1 - x_1, \\ e_2 = y_2 - x_2, \\ \dots \\ e_n = y_n - x_n. \end{array} \right. \quad (3.36)$$

Alors, la dynamique du système d'erreur s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = g_1(e_1, e_2), \\ \dot{e}_2 = g_2(e_1, e_2, e_3), \\ \dots \\ \dot{e}_n = g_n(e_1, e_2, \dots, e_n) + u. \end{cases} \quad (3.37)$$

où  $g_1$  est une fonction linéaire,  $g_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) sont des fonctions non linéaires.

L'objectif est de calculer une loi de contrôle  $u$  qui assure la convergence du système  $e_i$ , ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) vers l'origine en utilisant l'algorithme backstepping. Pour cela, le système d'erreur (3.37) doit être décomposé en sous-système :

$$e_1, (e_1, e_2), (e_1, e_2, e_3), \dots, (e_1, e_2, \dots, e_n).$$

Et pour chaque sous-système, on définit une fonction de Lyapunov  $V$  positive :  $V_j(e_j, u_j, \alpha_j)$ , où  $j$  est l'ordre du sous-système,  $u_j, \alpha_j$  représentent, respectivement, la loi de contrôle et le contrôleur virtuel du sous système d'ordre  $j$ ;  $u_j$  et  $\alpha_j$  sont calculés à chaque fois de telle sorte que :  $\dot{V}_j < 0$ .

**Remarque 3.5.1** *Il existe plusieurs avantages dans cette méthode :*

- *Elle présente une procédure systématique pour la sélection du contrôleur.*
- *Elle peut être appliquée à différents systèmes chaotiques.*
- *Elle offre la possibilité de réaliser la synchronisation avec un seul contrôleur.*
- *Le contrôleur calculé offre une simplicité dans l'implémentation de l'algorithme.*



## 3.6 Etude d'un problème inverse IHFPS

Parmi les synchronisations qui sont largement considérées, on peut citer la synchronisation notée **FSHPS** (**F**ull **S**tate **H**ybrid **F**unction **P**rojective **S**ynchronization) [58].

Dans la synchronisation **HFPS**, le système maître et le système esclave pourraient être synchronisés avec une matrice de fonction de mise à l'échelle, l'imprévisibilité de la matrice de fonction de mise à l'échelle dans le schéma **HFPS** peut améliorer la sécurité dans la télécommunication. D'autre part, l'étude du problème **inverse** de la **HFPS** qui produit un nouveau type de synchronisation notée **IHFPS** (en anglais : **I**nverse **H**ybrid **F**unction **P**rojective **S**ynchronization) est une idée séduisante et importante.

Dans cette section, nous introduisons la **IHFPS** pour une classe générale des systèmes chaotiques de  $n$ -dimensions à temps continu. Pour atteindre la **IHFPS**, nous proposons un schéma général fondé sur des nouveaux contrôleurs non linéaires. Les résultats théoriques ainsi dérivés sont prouvés en utilisant la théorie de stabilité de Lyapunov. Afin de vérifier l'efficacité de la méthode proposée, nous l'appliquons à des systèmes chaotiques en 5-D à temps continu. Des simulations sont données pour montrer l'efficacité du nouveau résultat. Le contenu de cette section a fait l'objet d'une publication internationale : "**A General Control Method for Inverse Hybrid Function Projective Synchronization of a Class of Chaotic Systems**" [63].

### 3.6.1 Description des systèmes maître-esclave

Nous considérons le système chaotique maître décrit par :

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{p_n=1}^d \dots \sum_{p_1=1}^d \alpha_{p_1 \dots p_n}^{(i)} x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n} + \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.38)$$

où  $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $(\alpha_{p_1 \dots p_n}^{(i)}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n)$ , tels que :

$\alpha_{10 \dots 0}^{(i)} = 0$ ,  $\alpha_{01 \dots 0}^{(i)} = 0$ , ...,  $\alpha_{00 \dots 1}^{(i)} = 0$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n)$ ,  $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont des nombres réels.

Comme système esclave, nous considérons le système chaotique décrit par :

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j + \sum_{p_n=1}^d \dots \sum_{p_1=1}^d \beta_{p_1 \dots p_n}^{(i)} y_1^{p_1} \dots y_n^{p_n} + \delta_i + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.39)$$

où  $(b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $(\beta_{p_1 \dots p_n}^{(i)}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n)$ , tels que :

$\beta_{10 \dots 0}^{(i)} = 0$ ,  $\beta_{01 \dots 0}^{(i)} = 0$ , ...,  $\beta_{00 \dots 1}^{(i)} = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $(\delta_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont des nombres réels et  $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont des contrôleurs à déterminer.

### 3.6.2 Définition de la synchronisation IHFPS

Tout d'abord, signalons que nous avons précédemment donné la définition de la synchronisation **HFPS** (**Section 3.4.15**). Maintenant, nous présentons la définition de la synchronisation notée **IHFPS** (en anglais : **Inverse Hybrid Function Projective Synchronization**) pour les systèmes chaotiques maître-esclave donnés dans les équations (3.38) et (3.39).

**Définition 3.6.1** *Le système maître (3.38) et le système esclave (3.39) on dit synchronisés au sens de la synchronisation **IHFPS**, s'il existe des contrôleurs  $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$  et des fonctions continûment différentiables bornées  $h_i(t) \neq 0$ , pour tous  $t$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tels que les erreurs de synchronisation  $e_i(t) = x_i - h_i(t) y_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , satisfaites :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e_i(t) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .*

### 3.6.3 Méthode de la synchronisation IHFPS

Selon la **Définition 3.6.1**, le système d'erreur entre le système maître (3.38) et le système esclave (3.39) peut être dérivé comme suit :

$$\dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j(t) + \phi_i + \varphi_i + \psi_i - h_i(t) u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.40)$$

où

$$\phi_i = \sum_{p_n=1}^d \dots \sum_{p_1=1}^d \alpha_{p_1 \dots p_n}^{(i)} x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.41)$$

$$\varphi_i = -h_i \sum_{p_n=1}^d \dots \sum_{p_1=1}^d \beta_{p_1 \dots p_n}^{(i)} y_1^{p_1} \dots y_n^{p_n}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.42)$$

et

$$\psi_i = h_i(t) \sum_{j=1}^n (a_{ij} - b_{ij}) y_j - \dot{h}_i(t) y_i + \gamma_i - h_i(t) \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.43)$$

Pour atteindre la synchronisation **IHFPS** entre le système maître (3.38) et le système esclave (3.39), nous choisissons la loi de contrôle comme suit :

$$u_i = \frac{1}{h_i(t)} \left( \sum_{j=1}^{i-1} (2a_{ij} + a_{ji}) e_j(t) + k_i e_i(t) - \sum_{j=i+1}^n a_{ji} e_j(t) + \phi_i + \varphi_i + \psi_i \right). \quad (3.44)$$

pour  $i = 1, 2, \dots, n$ , où  $(k_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont des constantes de contrôle à déterminer ultérieurement.

En substituant l'équation (3.44) dans l'équation (3.40), le système d'erreur peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1(t) \\ \dot{e}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{e}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - k_1 & a_{21} + a_{12} & \dots & \dots & a_{n1} + a_{1n} \\ -(a_{21} + a_{12}) & a_{22} - k_2 & \dots & \dots & a_{n2} + a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_{n1} + a_{1n}) & -(a_{n2} + a_{2n}) & \dots & \dots & a_{nn} - k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_n(t) \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Maintenant, la réécriture du système d'erreur (3.45) dans la forme compacte :

$$\dot{e}(t) = (L + K - L^T) e(t). \quad (3.46)$$

où  $K = \text{diag} \{(a_{11} - k_1), \dots, (a_{nn} - k_n)\}$  et  $L = (l_{ij})_{n \times n}$  tels que :

$$l_{ij} = \begin{cases} -(a_{ij} + a_{ji}) & \text{si } j < i \\ 0 & \text{si } j \geq i. \end{cases} \quad (3.47)$$

**Théorème 3.6.1** *Si les constantes de contrôle  $(k_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont choisies telles que :*

*$k_i > a_{ii}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , alors les deux systèmes (3.38) et (3.39) sont globalement synchronisés au sens **IHFPS** sous les contrôleurs (3.44).*

**Preuve.** Considérons la fonction de Lyapunov sous la forme :  $V(e(t)) = \frac{1}{2} e^T(t) e(t)$ , alors nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= \frac{1}{2} (\dot{e}^T(t) e(t) + e^T(t) \dot{e}(t)) \\ &= \frac{1}{2} (e^T(t) (L^T + K^T - L) e(t) + e^T(t) (L + K - L^T) e(t)) \\ &= e^T(t) K e(t) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} - k_i) e_i^2(t) < 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

■

Ainsi, par la théorie de stabilité de Lyapunov, il est montré immédiatement que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Nous concluons que les systèmes (3.38) et (3.39) sont globalement synchronisés au sens de la synchronisation **IHFPS**.

### 3.6.4 Application de la synchronisation IHFPS pour deux systèmes chaotiques en 5-D à temps continu

Un exemple de deux systèmes chaotiques est considéré pour valider cette nouvelle méthode de synchronisation chaotique. Le système maître et le système esclave sont décrits,

respectivement, comme étant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = a_1 (x_2 - x_1) + x_2 x_3 x_4 x_5, \\ \dot{x}_2 = a_2 (x_1 + x_2) - x_1 x_3 x_4 x_5, \\ \dot{x}_3 = -x_3 + 0.1x_1^2, \\ \dot{x}_4 = -a_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_5, \\ \dot{x}_5 = -a_4 (x_5 - x_4) - a_5 x_1 + x_1 x_2 x_3 x_4. \end{array} \right. \quad (3.49)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = a_1 (y_2 - y_1) + y_2 y_3 y_4 y_5 + u_1, \\ \dot{y}_2 = a_2 (y_1 + y_2) - y_1 y_3 y_4 y_5 + u_2, \\ \dot{y}_3 = -y_3 + 0.1y_1^2 + u_3, \\ \dot{y}_4 = -a_3 y_4 + y_1 y_2 y_3 y_5 + u_4, \\ \dot{y}_5 = -a_4 (y_5 - y_4) - a_5 y_1 + y_1 y_2 y_3 y_4 + u_5. \end{array} \right. \quad (3.50)$$

où  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  sont des paramètres de bifurcations et  $(u_i)_{1 \leq i \leq 5}$  sont des contrôleurs de synchronisation. Le système (3.49) a un attracteur chaotique,

quand  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (37, 14.5, 10.5, 15, 9.5)$  [58].

Selon la méthode de contrôle présentée, les erreurs de synchronisation entre le système maître (3.49) et système esclave (3.50) peuvent être dérivées comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_1(t) = a_1 (e_2(t) - e_1(t)) + R_1 - h_1(t) u_1, \\ \dot{e}_2(t) = a_2 (e_1(t) + e_2(t)) + R_2 - h_2(t) u_2, \\ \dot{e}_3(t) = -e_3(t) + R_3 - h_3(t) u_3, \\ \dot{e}_4(t) = -a_3 e_4(t) + R_4 - h_4(t) u_4, \\ \dot{e}_5(t) = -a_4 (e_5(t) - e_4(t)) - a_5 e_1(t) + R_5 - h_5(t) u_5. \end{array} \right. \quad (3.51)$$

où

$$\begin{cases} R_1 = x_2 x_3 x_4 x_5 - h_1(t) y_2 y_3 y_4 y_5 - \dot{h}_1(t) y_1, \\ R_2 = -x_1 x_3 x_4 x_5 + h_2(t) y_1 y_3 y_4 y_5 - \dot{h}_2(t) y_2, \\ R_3 = 0.1 x_1^2 - h_3(t) (0.1 y_1^2) - \dot{h}_3(t) y_3, \\ R_4 = x_1 x_2 x_3 x_5 - h_4(t) y_1 y_2 y_3 y_5 - \dot{h}_4(t) y_4, \\ R_5 = x_1 x_2 x_3 x_4 - h_5(t) y_1 y_2 y_3 y_4 - \dot{h}_5(t) y_5. \end{cases} \quad (3.52)$$

et  $(h_i(t))_{1 \leq i \leq 5}$  sont les fonctions de mise à l'échelle.

Pour atteindre la synchronisation **IHFPS** entre les deux systèmes (3.49) et (3.50), les contrôleurs de synchronisation sont proposés comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{h_1(t)} (a_2 e_2(t) - a_5 e_5(t) + R_1), \\ u_2 = \frac{1}{h_2(t)} (a_1 e_1(t) + k e_2(t) + R_2), \\ u_3 = \frac{1}{h_3(t)} R_3, \\ u_4 = \frac{1}{h_4(t)} (a_4 e_5(t) + R_4), \\ u_5 = \frac{1}{h_5(t)} R_5. \end{cases} \quad (3.53)$$

où  $k$  est une constante de contrôle à déterminer.

Ensuite, les erreurs de synchronisation (3.51) peuvent être décrites comme :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1(t) \\ \dot{e}_2(t) \\ \dot{e}_3(t) \\ \dot{e}_4(t) \\ \dot{e}_5(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & a_1 - a_2 & 0 & 0 & a_5 \\ a_2 - a_1 & a_2 - k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_3 & -a_4 \\ -a_5 & 0 & 0 & a_4 & -a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \\ e_4(t) \\ e_5(t) \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Et en utilisant la même procédure de la preuve du **Théorème 3.6.1**, nous pouvons obtenir le résultat suivant :

**Corollaire 3.6.1** *Si une constante de contrôle  $k$  est choisie telle que :  $k > a_2$ , alors les deux systèmes (3.49) et (3.50) sont globalement synchronisés de type **IHFPS** sous la loi*

de contrôle (3.53).

Afin de valider les résultats théoriques obtenus, une simulation numérique est élaborée (FIG. 3.4).

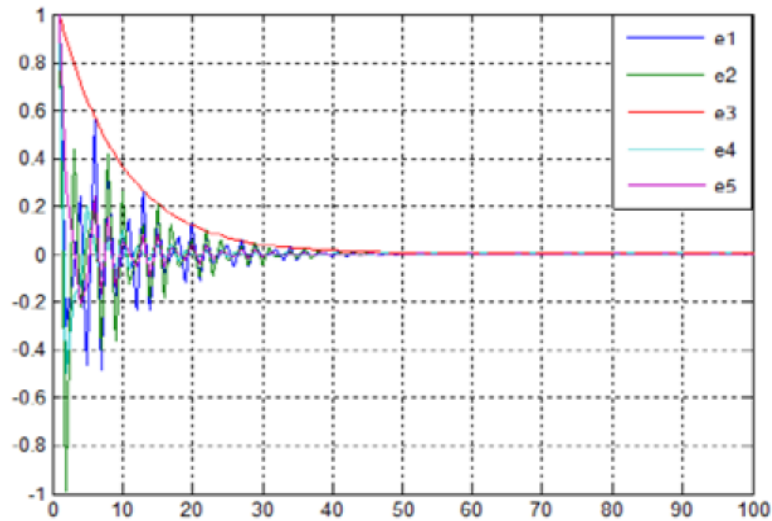


FIG. 3.4 – Évolution du temps des erreurs de la synchronisation **IHFPS** entre le système maître (3.38) et le système esclave (3.39)

### 3.7 Conclusion

L'objectif principal de ce chapitre était de présenter les différents types de synchronisation et les diverses méthodes de synchronisation les plus performantes. On a tout d'abord abordé l'histoire de la synchronisation chaotique. Nous avons ensuite défini plusieurs schémas de synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques (hyperchaotiques). Le contrôle actif et le backstepping sont les méthodes les plus utilisées pour réaliser la synchronisation des systèmes dynamiques.

L'étude des problèmes inverses est un sujet qui vient d'être traité très récemment, elle donne naissance à des nouveaux schémas de synchronisation assurant la sécurité dans les télécommunications.

En effet, nous avons introduit la synchronisation (**IHFPS**) (en anglais : **Inverse Hybrid Function Projective Synchronization**), inspirée de **HFPS**, pour une classe générale  $n$ -dimensionnelle des systèmes chaotiques à temps continu. Le résultat théorique obtenu est prouvé en utilisant la théorie de stabilité de Lyapunov. Afin de vérifier l'efficacité de la méthode proposée, nous l'avons appliquée aux systèmes chaotiques 5-D à temps continu. Quoique l'étude du problème inverse est largement évoquée, le concept de la combinaison de différents types de synchronisation, notamment un type avec son inverse, reste une nouveauté. Alors, ce sujet sera abordé dans les deux derniers chapitre.



# Chapitre 4

## La coexistence de GS et IGS entre systèmes chaotiques et hyperchaotiques

### 4.1 Introduction

Le comportement non linéaire telles que la stabilité, le contrôle et la synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques et hyperchaotiques est devenu un domaine de recherche actif. Il a attiré de plus en plus l'attention de nombreux chercheurs dans les domaines de la science et de la technique en raison de ses applications potentielles dans différentes disciplines [64, 65, 66, 67]. Vu l'importance des systèmes dynamiques non linéaires, ces applications ont trouvé des champs importants [68, 69, 70, 71, 72, 73].

À la recherche de la stabilité, plusieurs méthodes robustes et pratiques ont été développées, par exemple, le contrôle actif et le backstepping [74, 75]. Par conséquent, beaucoup types de synchronisation des systèmes chaotiques (hyperchaotiques) à temps continu qu'à temps discret ont été présentés et introduites, telles que **CS** [76], **A-S** [77], la **GS** [80, 78, 79], **PS** [80, 81], la synchronisation  $\Lambda - \phi$  [82] et la synchronisation  $\Phi - \Theta$  [83].

Parmi tous ces types de synchronisation, la synchronisation généralisée (**GS**) (**Generalized synchronization**) est largement considérée. L'étude de son inverse donne naissance à un nouveau schéma de synchronisation pour assurer la sécurité dans la télécommunication, c'est la synchronisation notée (**IGS**) (en anglais : **Inverse Generalized synchronization**) [84].

Bien que Ouannas et *al.* [85] ont rapporté pour la première fois la coexistence de (**GS**) et (**IGS**) pour les systèmes d'ordres fractionnaires de différentes dimensions, les études pour la coexistence de la (**GS**) et (**IGS**) pour des systèmes dynamiques différentiels d'ordres entiers de dimensions différentes n'ont pas encore été explorés. Alors, ce chapitre se concentre sur la coexistence de la synchronisation (**GS**) et son inverse (**IGS**) entre les systèmes chaotiques et hyperchaotiques en 3-D et 4-D.

En utilisant la théorie de stabilité de Lyapunov et la théorie de stabilité des systèmes dynamiques linéaires à temps continu, quelques conditions suffisantes ont été dérivé pour prouver la coexistence de (**GS**) et (**IGS**) pour synchroniser deux systèmes de dimensions différentes, à savoir, un système chaotique maître en 3-D et un système esclave hyperchaotique en 4-D. Le contenu de ce chapitre est une version remaniée d'une publication : "**Coexistence of generalized synchronization and inverse generalized synchronization between chaotic and hyperchaotic systems**" [86].

## 4.2 Définitions de GS et IGS

La synchronisation généralisée **GS** est caractérisée par l'existence d'une relation fonctionnelle  $\phi$  entre l'état  $Y(t)$  du système esclave et l'état  $X(t)$  du système maître, de sorte que  $Y(t) = \phi(X(t))$  après un temps transitoire [87]. Différents types de synchronisation peuvent être obtenus à partir du **GS** en fonction du choix de  $\phi$ . Une variation est représentée par son inverse (**IGS**). Pour **IGS**, la synchronisation devient  $X(t) = \phi(Y(t))$  après un temps transitoire.

Pour définir **GS** et **IGS**, nous considérons le système maître et le système esclave, respectivement par :

$$\dot{X}(t) = F(X(t)), \quad (4.1)$$

$$\dot{Y}(t) = G(Y(t)) + U. \quad (4.2)$$

où  $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ ,  $Y(t) = (y_i(t))_{1 \leq i \leq m}$  sont les états du système maître et du système esclave, respectivement,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  et  $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$  est un contrôleur vectoriel.

**Définition 4.2.1** *Le système maître (4.1) et le système esclave (4.2) sont en synchronisation généralisée (**GS**), s'il existe un contrôleur  $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$  et une fonction différentiable  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , tel que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t) - \phi(X(t))\| = 0$ .*

**Définition 4.2.2** *Le système maître (4.1) et le système esclave (4.2) sont en synchronisation (**IGS**), s'il existe un contrôleur  $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$  et une fonction différentiable  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tel que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t) - \varphi(Y(t))\| = 0$ .*

## 4.3 Coexistence de GS et IGS en 3-D

### 4.3.1 Description des systèmes maître-esclave

Ici, nous supposons que le système maître peut être considéré comme suit :

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j(t) + f_i(X(t)), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.3)$$

où  $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq 3}$  est l'état du système maître (4.3),  $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Aussi, nous considérons le système esclave comme suit :

$$\dot{y}_i(t) = g_i(Y(t)) + u_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.4)$$

où  $Y(t) = (y_i(t))_{1 \leq i \leq 4}$  est l'état du système esclave (4.4),  $g_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  sont des contrôleurs.

### 4.3.2 Formulation du problème en 3-D

**Définition 4.3.1** *On dit que **GS** et **IGS** coexistent dans la synchronisation du système maître (4.3) et du système esclave (4.4), s'il existe des contrôleurs  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , et des fonctions différentiables  $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ , de telle sorte que les erreurs de synchronisation :*

$$\begin{cases} e_1(t) = y_1(t) - \phi_1(X(t)), \\ e_2(t) = x_2(t) - \varphi(Y(t)), \\ e_3(t) = y_3(t) - \phi_2(X(t)). \end{cases} \quad (4.5)$$

satisfont  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e_i(t) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

### 4.3.3 Résultats analytiques en 3-D

Le système d'erreur (4.5) peut être dérivé comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= \dot{y}_1(t) - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_j} \dot{x}_j(t), \\ \dot{e}_2(t) &= \dot{x}_2(t) - \sum_{j=1}^4 \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \dot{y}_j(t), \\ \dot{e}_3(t) &= \dot{y}_3(t) - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_j} \dot{x}_j(t), \end{aligned} \quad (4.6)$$

En outre, le système d'erreur (4.6) peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= u_1 + R_1, \\ \dot{e}_2(t) &= -\sum_{j=1}^4 \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} u_j + R_2, \\ \dot{e}_3(t) &= u_3 + R_3. \end{aligned} \tag{4.7}$$

où

$$\begin{aligned} R_1 &= g_1(Y(t)) - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j(t) + f_i(X(t)) \right), \\ R_2 &= \sum_{j=1}^3 a_{2j} x_j(t) + f_2(X(t)) - \sum_{j=1}^4 \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} g_j(Y(t)), \\ R_3 &= g_3(Y(t)) - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_j} \left( \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j(t) + f_i(X(t)) \right). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Pour atteindre la synchronisation entre le système maître (4.3) et le système esclave (4.4), nous supposons que :  $\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \neq 0$  et les contrôleurs  $u_i$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) sont construits comme suit :

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{j=1}^3 (a_{1j} - c_{1j}) e_j(t) - R_1, \\ u_2 &= -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}} \left( \sum_{j=1}^3 (a_{1j} - c_{1j}) e_j(t) - R_1 \right) - \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}} \left( \sum_{j=1}^3 (a_{2j} - c_{2j}) e_j(t) - R_2 \right) \\ &\quad - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y_3}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}} \left( \sum_{j=1}^3 (a_{3j} - c_{3j}) e_j(t) - R_3 \right), \\ u_3 &= \sum_{j=1}^3 (a_{3j} - c_{3j}) e_j(t) - R_3, \\ u_4 &= 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

où  $(c_{ij})_{3 \times 3}$  sont des constantes de contrôle.

En substituant la loi de contrôle (4.9) dans (4.7), le système d'erreur peut être écrit comme suit :

$$\dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^3 (a_{ij} - c_{ij}) e_j(t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.10)$$

ou sous la forme compacte :

$$\dot{e}(t) = (A - C) e(t). \quad (4.11)$$

où  $e(t) = (e_i(t))_{1 \leq i \leq 3}$ ,  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$  et  $C = (c_{ij})_{3 \times 3}$ .

Construire la fonction candidate de Lyapunov sous la forme  $V(e(t)) = e^T(t)e(t)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= \dot{e}^T(t)e(t) + e^T(t)\dot{e}(t) \\ &= e^T(t)(A - C)^T e(t) + e^T(t)(A - C)e(t) \\ &= e^T(t) [(A - C)^T + (A - C)] e(t). \end{aligned}$$

Si la matrice de contrôle  $C$  est choisie telle que :  $(A - C)^T + (A - C)$  est une matrice définie négative, nous obtenons  $\dot{V}(e(t)) < 0$ .

Ainsi, à partir de la théorie de stabilité de Lyapunov, c'est la solution nulle du système d'erreur (4.11) qui est globalement asymptotiquement stable, c'est-à-dire :

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e_i(t)\| = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Par conséquent, les systèmes (4.3) et (4.4) sont globalement synchronisés.

**Théorème 4.3.1** *Il existe une matrice de contrôle appropriée  $C = (c_{ij})_{3 \times 3}$  pour réaliser la coexistence de **GS** et **IGS** entre le système maître (4.3) et le système esclave (4.4) sous la loi de contrôle (4.9).*

## 4.4 Coexistence de IGS et GS en 4-D

### 4.4.1 Description des systèmes maître-esclave

Maintenant, le système maître et le système esclave peuvent être écrits, respectivement, dans les formes suivantes :

$$\dot{x}_i(t) = f_i(X(t)), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.12)$$

$$\dot{y}_i(t) = \sum_{j=1}^4 b_{ij}y_j(t) + g_i(Y(t)) + u_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.13)$$

où  $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq 3}$ ,  $Y(t) = (y_i(t))_{1 \leq i \leq 4}$  sont les états du système maître et du système esclave, respectivement,  $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $i = 1, 2, 3$ ),  $(b_{ij}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ,  $g_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions non linéaires et  $u_i$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) sont des contrôleurs.

### 4.4.2 Formulation du problème en 4-D

**Définition 4.4.1** *On dit que GS et IGS coexistent dans la synchronisation du système maître (4.12) et du système esclave (4.13), s'il existe des contrôleurs  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , et des fonctions différentiables  $\chi_1, \chi_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , de telle sorte que les erreurs de synchronisation :*

$$\begin{cases} e_1(t) = x_1(t) - \chi_1(Y(t)), \\ e_2(t) = y_2(t) - \psi_1(X(t)), \\ e_3(t) = x_3(t) - \chi_2(Y(t)), \\ e_4(t) = y_4(t) - \psi_2(X(t)). \end{cases} \quad (4.14)$$

satisfont  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e_i(t)\| = 0$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

### 4.4.3 Résultats analytiques en 4-D

Le système d'erreur (4.14) peut être décrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1(t) &= -\sum_{j=1}^4 \frac{\partial \chi_1}{\partial y_j} u_j + T_1, \\
 \dot{e}_2(t) &= u_2 + T_2, \\
 \dot{e}_3(t) &= -\sum_{j=1}^4 \frac{\partial \chi_2}{\partial y_j} u_j + T_3, \\
 \dot{e}_4(t) &= u_4 + T_4.
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

où

$$\begin{aligned}
 T_1 &= f_1(X(t)) - \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \chi_1}{\partial y_i} \left( \sum_{j=1}^4 b_{ij} y_j(t) + g_i(Y(t)) \right), \\
 T_2 &= \sum_{j=1}^4 b_{2j} y_j(t) + g_2(Y(t)) - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_j} f_j(X(t)), \\
 T_3 &= f_3(X(t)) - \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \chi_2}{\partial y_i} \left( \sum_{j=1}^4 b_{ij} y_j(t) + g_i(Y(t)) \right), \\
 T_4 &= \sum_{j=1}^4 b_{4j} y_j(t) + g_4(Y(t)) - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_j} f_j(X(t)).
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Dans ce cas, nous supposons que :  $\frac{\partial \chi_1}{\partial y_3} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_1} - \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_3} \neq 0$ .

Ensuite, les contrôleurs  $u_i$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), sont conçus comme suit :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \sum_{i=1}^4 \alpha_i \left( \sum_{j=1}^4 (b_{ij} - l_{ij}) e_j(t) - T_i \right), \\
 u_2 &= \sum_{j=1}^4 (b_{2j} - l_{2j}) e_j(t) - T_2, \\
 u_3 &= \sum_{i=1}^4 \beta_i \left( \sum_{j=1}^4 (b_{ij} - l_{ij}) e_j(t) - T_i \right), \\
 u_4 &= \sum_{j=1}^4 (b_{4j} - l_{4j}) e_j(t) - T_4.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$



où  $(l_{ij})_{4 \times 4}$  sont des constantes de contrôle, et :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\frac{\partial \chi_2}{\partial y_3}}{\frac{\partial \chi_1}{\partial y_3} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_1} - \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_3}}, & \alpha_2 &= \frac{\frac{\partial \chi_2}{\partial y_3} \frac{\partial \chi_1}{\partial y_2} - \frac{\partial \chi_1}{\partial y_3} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_2}}{\frac{\partial \chi_1}{\partial y_3} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_1} - \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_3}}, \\ \alpha_3 &= \frac{-\frac{\partial \chi_1}{\partial y_3}}{\frac{\partial \chi_1}{\partial y_3} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_1} - \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_3}}, & \alpha_4 &= \frac{\frac{\partial \chi_2}{\partial y_3} \frac{\partial \chi_1}{\partial y_4} - \frac{\partial \chi_1}{\partial y_3} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_4}}{\frac{\partial \chi_1}{\partial y_3} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_1} - \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_3}}, \\ \beta_1 &= \frac{-\frac{\partial \chi_2}{\partial y_1}}{\frac{\partial \chi_1}{\partial y_3} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_1} - \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_3}}, & \beta_2 &= \frac{\frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_2} - \frac{\partial \chi_1}{\partial y_2} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_1}}{\frac{\partial \chi_1}{\partial y_3} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_1} - \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_3}}, \\ \beta_3 &= \frac{\frac{\partial \chi_1}{\partial y_1}}{\frac{\partial \chi_1}{\partial y_3} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_1} - \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_3}}, & \beta_4 &= \frac{\frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_4} - \frac{\partial \chi_1}{\partial y_4} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_1}}{\frac{\partial \chi_1}{\partial y_3} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_1} - \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_3}}. \end{aligned}$$

En utilisant la loi de contrôle (4.17), le système d'erreur (4.15) peut être écrit comme suit :

$$\dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^4 (b_{ij} - l_{ij}) e_j(t), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.18)$$

où

$$\dot{e}(t) = (B - L) e(t). \quad (4.19)$$

où  $e(t) = (e_i(t))_{1 \leq i \leq 4}$ ,  $B = (b_{ij})_{4 \times 4}$ ,  $L = (l_{ij})_{4 \times 4}$  est une matrice constante de contrôle.

Dans ce cas, la matrice de contrôle  $L$  est sélectionnée de sorte que toutes les valeurs propres de  $B - L$  aient une partie réelle négative.

Ainsi, par la stabilité asymptotique des systèmes linéaires à temps continu, toutes les solutions du système d'erreur (4.19) tend vers zéro comme  $t \rightarrow \infty$ . Par conséquent, les systèmes (4.12) et (4.13) sont globalement synchronisés.

**Théorème 4.4.1** *Il existe une matrice de contrôle appropriée  $L = (l_{ij})_{4 \times 4}$  pour réaliser la coexistence de **IGS** et **GS** entre le système maître (4.12) et le système esclave (4.13) sous la loi de contrôle (4.18).*

## 4.5 Exemples numériques

### 4.5.1 Exemple 1

En tant que système maître, nous considérons un nouveau système chaotique 3-D proposé par Pham et *al.* [88] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_3, \\ \dot{x}_2 = bx_1x_3 - cx_3^3, \\ \dot{x}_3 = x_1^4 + x_2^4 - k - dx_1x_3. \end{cases} \quad (4.20)$$

Lorsque les valeurs de paramètre sont prises comme :  $a = 0.1$ ,  $b = 3$ ,  $c = 2.2$ ,  $d = 0.2$ , et  $k = 0.81$ , le système (4.20) présente un comportement chaotique, avec des équilibres situés sur la boucle carrée arrondie (FIG. 4.1).

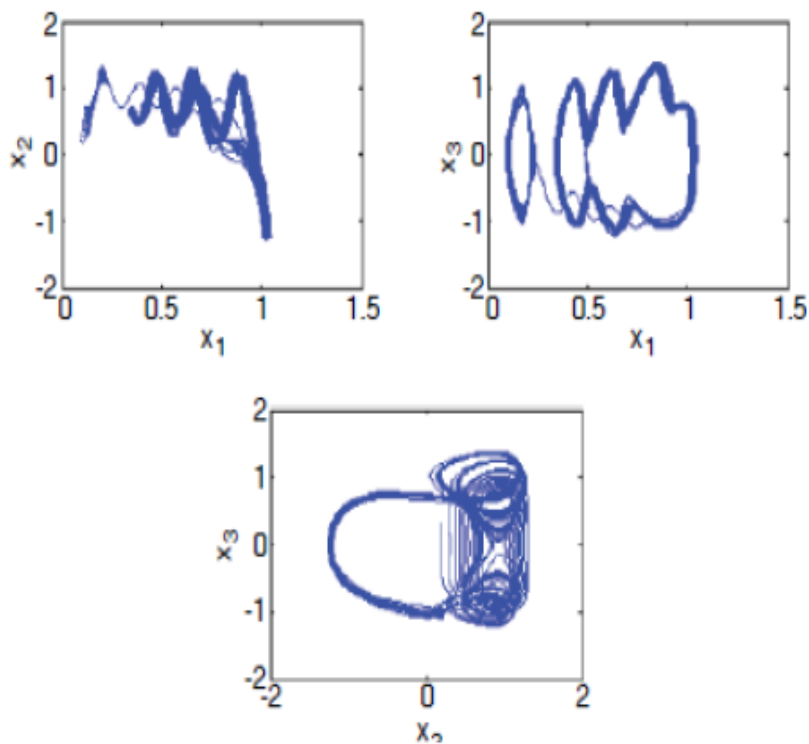


FIG. 4.1 – Les attracteurs chaotiques pour le système maître (4.20) en 2D.

En tant que système esclave, nous considérons un nouveau système hyperchaotique en 4-D introduit par Vaidyanathan [89] :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha (y_2 - y_1) + y_2 y_3 + y_4 + u_1, \\ \dot{y}_2 = -\gamma y_1 y_3 + \delta y_2 + u_2, \\ \dot{y}_3 = y_1 y_2 - \beta + u_3, \\ \dot{y}_4 = -\epsilon (y_1 + y_2) + u_4. \end{cases} \quad (4.21)$$

Le système (4.21), avec  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ , présente un attracteur hyperchaotique étrange pour les valeurs des paramètres  $\alpha = 60$ ,  $\beta = 27$ ,  $\gamma = 160$ ,  $\delta = 0.3$  et  $\epsilon = 2.8$ .

Le système (4.21) n'a pas de points d'équilibre. Par conséquent, le système (4.21) a des attracteurs cachés. Lorsque les conditions initiales sont prises :

$(y_1(0), y_2(0), y_3(0), y_4(0)) = (1.2, 0.4, 0.3, 1.4)$ , la projection en 3D du nouveau système hyperchaotique est montrée (FIG. 4.2).

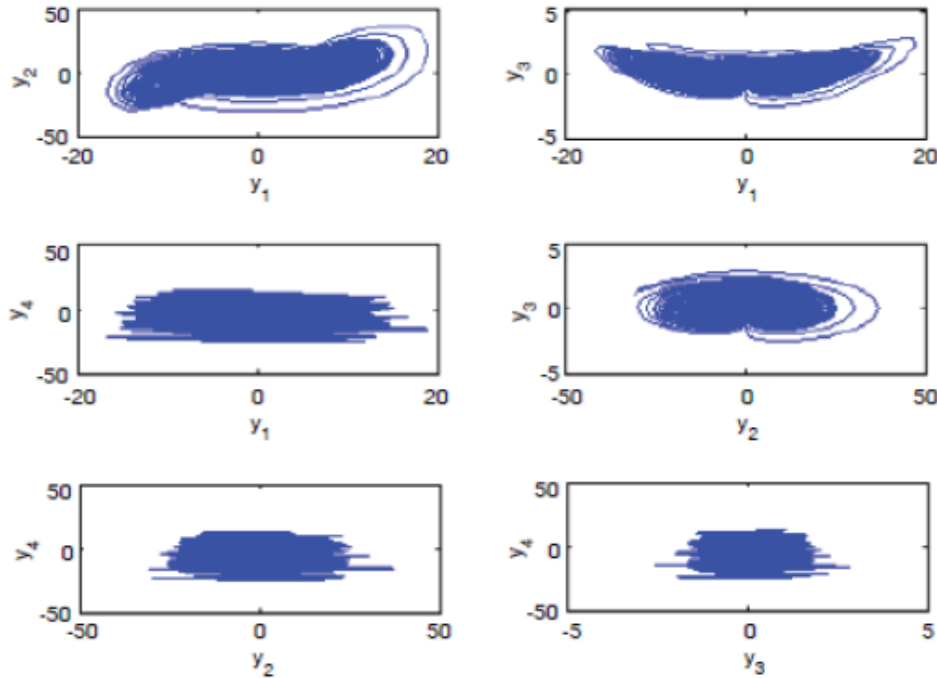


FIG. 4.2 – Les attracteurs chaotiques pour le système esclave (4.21) avec  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$  en 2D.

Selon la **Définition (4.3.1)**, les erreurs entre le système maître (4.20) et le système esclave (4.21) sont décrites comme suit :

$$\begin{cases} e_1 = y_1 - \phi_1(x_1, x_2, x_3), \\ e_2 = x_2 - \varphi(y_1, y_2, y_3, y_4), \\ e_3 = y_3 - \phi_2(x_1, x_2, x_3). \end{cases} \quad (4.22)$$

où  $\phi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$ ,  $\varphi(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4^2$ ,

et  $\phi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_3$ . Alors,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 1$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = 2$  et  $\frac{\partial \varphi}{\partial y_3} = 3$ .

En utilisant les notations présentées dans la **Section 4.3**, la partie linéaire  $A$  et la partie non linéaire  $f$  du système maître (4.20) sont données comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } f = \begin{pmatrix} 0 \\ bx_1x_3 - cx_3^3 \\ x_1^4 + x_2^4 - k - dx_1x_3 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, la matrice de contrôle  $C$  est choisie comme suit :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

En s'appuyant sur l'équation (4.9), les contrôleurs  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$  sont conçus comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = -e_1 - R_1, \\ u_2 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}R_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}R_2 + \frac{9}{2}e_3 + \frac{3}{2}R_3, \\ u_3 = -3e_3 - R_3, \\ u_4 = 0. \end{cases} \quad (4.24)$$

où

$$\begin{cases} R_1 = \alpha(y_2 - y_1) + y_2y_3 + y_4 + ax_3 + (d - b)x_1x_3 + cx_3^3 - x_1^4 - x_2^4 + k, \\ R_2 = bx_1x_3 - cx_3^3 - (\alpha + 2\delta)y_2 + \alpha y_1 - y_4 + 2\gamma y_1y_3 + 3\beta - y_2(3y_1 + y_3) \\ \quad + 2\epsilon y_4(y_1 + y_2), \\ R_3 = y_1y_2 - \beta + ax_2x_3 - bx_1^2x_3 + cx_3^3 - x_1^4 - x_2^4 + k + dx_1x_3. \end{cases} \quad (4.25)$$

Il est facile de montrer que :  $(A - C)^T + (A - C)$  est une matrice définie négative. Par conséquent, les systèmes (4.20) et (4.21) sont globalement synchronisés en 3-D.

Le système d'erreur peut être décrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -e_1, \\ \dot{e}_2 = -2e_2, \\ \dot{e}_3 = -3e_3. \end{cases} \quad (4.26)$$

La figure FIG. 4.3 montre l'évolution du temps des erreurs  $e_1, e_2$  et  $e_3$  entre le système maître (4.20) et le système esclave (4.21).

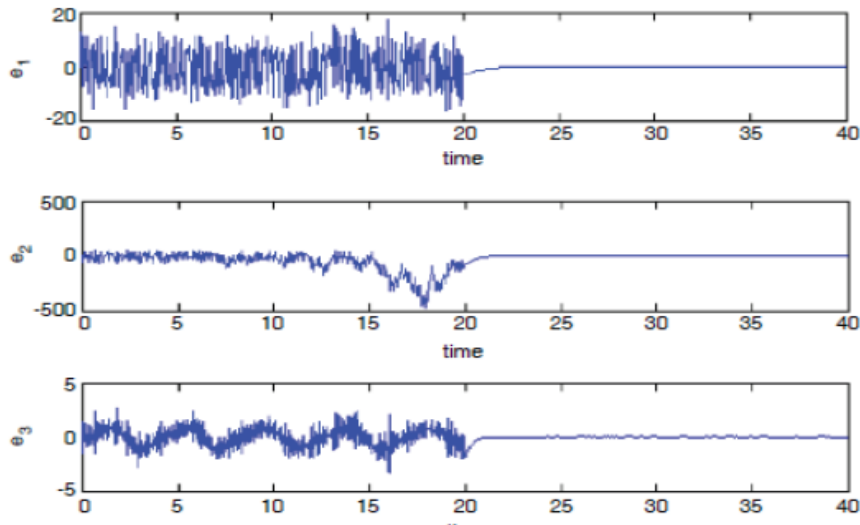


FIG. 4.3 – Evolution du temps des erreurs  $e_1, e_2$  et  $e_3$  entre le système (4.20) et le système (4.21).

### 4.5.2 Exemple 2

Dans cet exemple, le système maître est défini par le nouveau système 3-D suivant [90] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_3x_2, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - ax_1x_2 - bx_1x_3 + c. \end{cases} \quad (4.27)$$

Quand  $(a, b, c) = (15, 1, -0.001)$  et les conditions initiales  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0, 0.5, 0.5)$ , le système (4.27) présente un attracteur chaotique sans équilibre (FIG. 4.4).

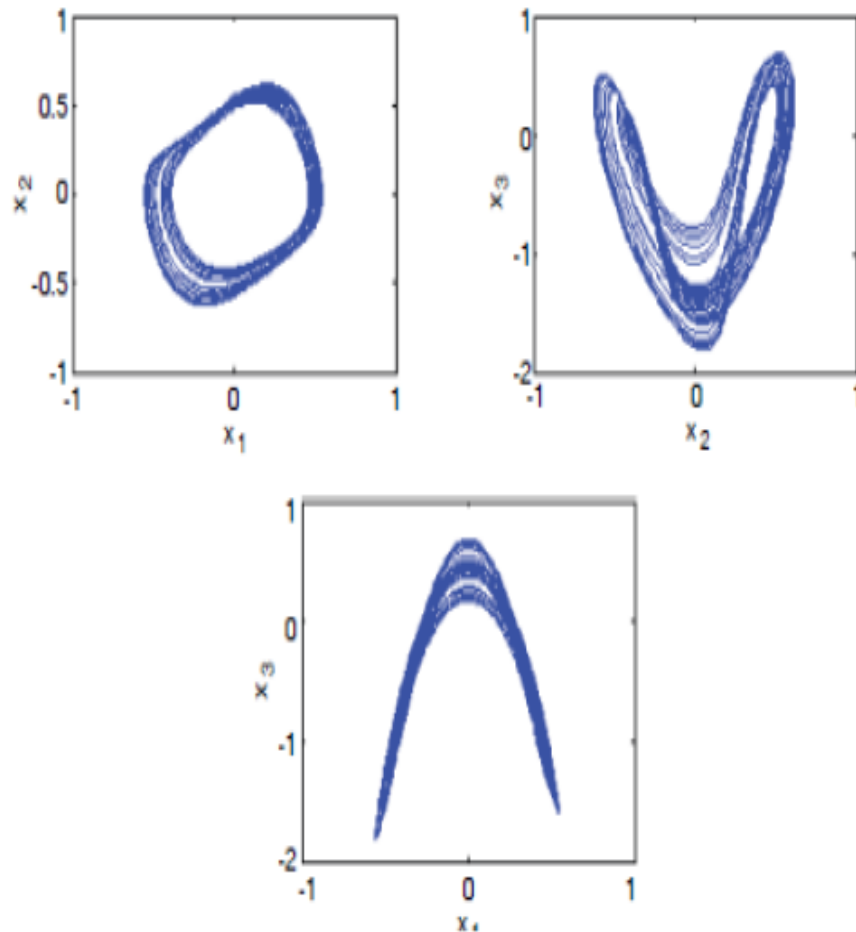


FIG. 4.4 – Les attracteurs chaotiques pour le système maître (4.27) en 2D.

Le système esclave est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha (y_2 - y_1) + \gamma y_4 + u_1, \\ \dot{y}_2 = -y_1 y_3 - y_2 + \gamma y_4 + u_2, \\ \dot{y}_3 = y_1 y_2 - y_3 - \beta + u_3, \\ \dot{y}_4 = -\delta (y_1 + y_2) + u_4. \end{cases} \quad (4.28)$$

Le système (4.28) présente un attracteur hyperchaotique étrange pour les valeurs des paramètres  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 20$ ,  $\gamma = 0.2$  et  $\delta = 0.5$  [91]. Le système (4.28) n'a pas de points d'équilibre. Par conséquent, le système a des attracteurs cachés. Lorsque les conditions initiales sont prises  $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0.4, 0.4, 0.4, 0.4)$ , la projection 3-D du nouveau système hyperchaotique est présentée (FIG. 4.5).

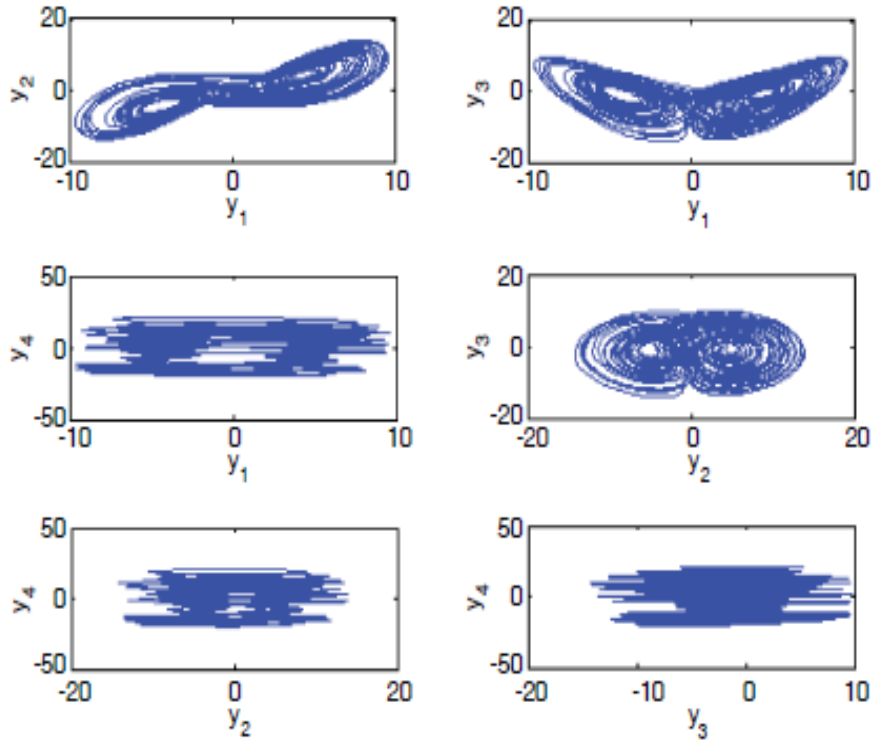


FIG. 4.5 – Les attracteurs chaotiques pour le système esclave (4.28) avec  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$  en 2D.

Selon la **Définition (4.4.1)**, le système d'erreur entre le système maître (4.27) et le système esclave (4.28) est décrit par :

$$\begin{cases} e_1 = x_1 - \chi_1(y_1, y_2, y_3, y_4), \\ e_2 = y_2 - \psi_1(x_1, x_2, x_3), \\ e_3 = x_3 - \chi_2(y_1, y_2, y_3, y_4), \\ e_4 = y_4 - \psi_2(x_1, x_2, x_3). \end{cases} \quad (4.29)$$

où  $\chi_1(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1 + y_3 + y_2y_4$ ,  $\psi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$ ,

$\chi_2(y_1, y_2, y_3, y_4) = \frac{1}{3}(y_1^3 - y_3 + y_2y_4)$  et  $\psi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2x_3$ .

Alors,  $\frac{\partial \chi_1}{\partial y_3} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_1} - \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_3} = y_1^2 + 1 \neq 0$ .

Sur la base des notations utilisées dans la **Section 4.4**, la partie linéaire  $B$  et la partie non linéaire  $g$  du système esclave (4.28) sont données comme suit :

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0.2 \\ 0 & -1 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } g = \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1y_3 \\ y_1y_2 - \beta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, la matrice de contrôle  $L$  est sélectionnée comme suit :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$



Selon l'équation (4.17), les contrôleurs  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$  sont conçus comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{y_1^2+1} [(4e_1 + T_1) + 2y_4(e_2 + T_2) + (e_3 + T_3) + 2y_2(3e_4 + T_4)], \\ u_2 = -e_2 - T_2, \\ u_3 = \frac{4y_1^2}{y_1^2+1} (e_1 + T_1) + y_4(e_2 + T_2) - \frac{1}{y_1^2+1} (e_3 + T_3) + 3y_2(e_4 + T_4), \\ u_4 = -3e_4 - T_4. \end{cases} \quad (4.31)$$

où

$$\begin{cases} T_1 = x_2 - \alpha(y_2 - y_1) + y_4(-\gamma + y_1y_3 + y_2 - \gamma y_4) - y_1y_2 + y_3 + \beta \\ \quad + \delta y_2(y_1 + y_2), \\ T_2 = -y_1y_3 - y_2 + \gamma y_4 + x_1(2 + bx_3) - x_2(1 + x_3) + ax_1x_2 - c, \\ T_3 = -x_1 - ax_1x_2 - bx_1x_3 + c - y_1^2(\alpha(y_2 - y_1) + \gamma y_4) \\ \quad - y_4(-y_1y_3 - y_2 + \gamma y_4) + (y_1y_2 - y_3 - \beta) - y_2(-\delta(y_1 + y_2)), \\ T_4 = -\delta(y_1 + y_2) - x_2(x_3^2 + c) + x_1x_2(1 + ax_2 + bx_3) + x_1x_3. \end{cases} \quad (4.32)$$

Nous pouvons montrer que toutes les valeurs propres de  $B - L$  ayant des parties réelles négatives. Par conséquent, les systèmes (4.27) et (4.28) sont globalement synchronisés en 4-D.

Le système d'erreur peut être écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -4e_1, \\ \dot{e}_2 = -e_2, \\ \dot{e}_3 = -e_3, \\ \dot{e}_4 = -3e_4. \end{cases} \quad (4.33)$$

Les résultats numériques représentés montrent l'efficacité du schéma proposé (FIG. 4.6).

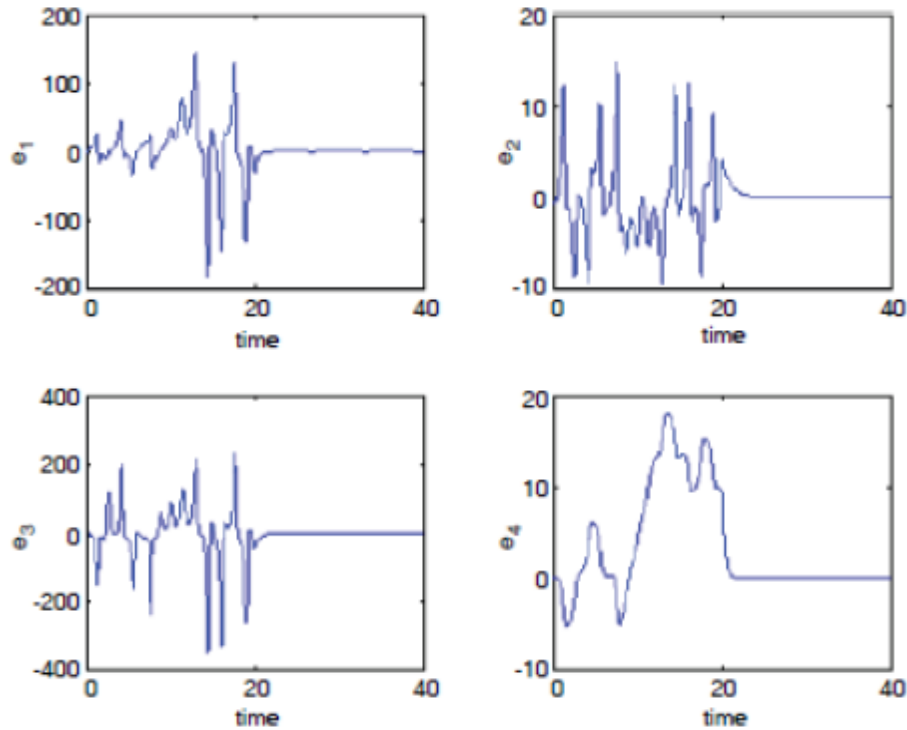


FIG. 4.6 – Evolution du temps des erreurs  $e_1, e_2, e_3$  et  $e_4$  entre le système (4.27) et le système (4.28).

## 4.6 Conclusion

Motivés par l'importance de la synchronisation généralisée pour améliorer la sécurité et la transmission rapide de l'information, nous avons présenté dans ce chapitre un nouveau schéma de synchronisation. Ce nouveau schéma est basé sur la combinaison de la synchronisation généralisée (**GS**) et son inverse (**IGS**) entre un système en 3-D arbitraire et un système esclave à 4-D dans différentes dimensions.

En utilisant la théorie de stabilité de Lyapunov, nous avons d'abord analysé la coexistence de (**GS**) et (**IGS**) en 3-D basé sur le contrôle de la partie linéaire du système maître. Ensuite, nous avons prouvé la coexistence de la synchronisation (**IGS**) et (**IGS**) en 4-D en contrôlant la partie linéaire du système esclave en utilisant la théorie de la stabilité des systèmes linéaires à temps continu. Quelques exemples numériques sont incorporés dont l'attention de montrer l'efficacité des approches développées.

En étudiant la combinaison de deux différents types de synchronisation, à savoir (**GS**) et (**IGS**), nous sommes trouvés fascinés par ce type analyse toujours en progression. Alors, c'est tout à fait logique que nous introduisons dans le dernier chapitre deux schémas basés sur la coexistence d'autres types de synchronisation chaotique (hyperchaotique).

# Chapitre 5

## Différents schémas de la coexistence de **FSHFPS** et **IFSHFPS**

### 5.1 Introduction

Récemment, le concept de synchronisation hybride est étendu pour réaliser la coexistence de plus de deux types de synchronisation entre différents systèmes chaotiques dimensionnels (hyperchaotiques) dans les systèmes à temps discret, les systèmes différentiels à ordre entier et les systèmes différentiels à ordre fractionnaires [92, 93, 94, 96, 97, 98, 99, 100].

Parmi les différents types de synchronisation des systèmes dynamiques, la synchronisation notée **FSHPS** [49]. Lorsque le schéma inversé est mis en œuvre, la synchronisation inverse notée **IFSHPS** (en anglais : **Inverse Full State Hybrid Projective Synchronization**) est obtenue [101]. À partir de ce schéma, on peut obtenir des schémas de synchronisation hybrides notée (**FSHFPS**) (**Full State Hybrid Function Projective Synchronization**) [102] et son inverse **IFSHFPS** (**Inverse Full State Hybrid Function Projective Synchronization**) [95], respectivement.

À notre connaissance, l'étude de la coexistence de la synchronisation (**FSHFPS**) et son inverse (**IFSHFPS**) pour des systèmes dynamiques différentiels d'ordres entiers de dimen-

sions différentes n'a pas encore été explorée. Alors, le présent chapitre se focalise sur la combinaison de **(FSHFPS)** et **(IFSHFPS)** entre les systèmes chaotiques et hyperchaotiques de dimensions non identiques et différentes.

Spécifiquement, ce travail illustre de nouveaux schémas, qui prouvent la coexistence de **(FSHFPS)** et **(IFSHFPS)** entre un système maître tridimensionnel et un système esclave à quatre dimensions en 4-D et 3-D, respectivement. Ces systèmes maître-esclave appartiennent à des classes générales, qui comprennent plusieurs systèmes chaotiques (hyperchaotiques) caractérisés par des dimensions différentes. Le contenu de ce chapitre est une version remaniée d'une publication : "**Different Schemes of Coexistence of Full State Hybrid Function Projective Synchronization and Inverse Full State Hybrid Function Projective Synchronization**" [103].

## 5.2 Définition de FSHFPS et IFSHFPS

Pour la synchronisation **(FSHPS)**, chaque variable du système esclave se synchronise avec une combinaison linéaire de variables du système maître. Lorsque les facteurs d'échelle sont remplacés par des fonctions d'échelle, on obtient des schémas de synchronisation hybrides basés sur cette fonction, soit la synchronisation **(FSHFPS)** [102] et son inverse **(IFSHFPS)** [95].

Pour définir ces deux types de synchronisation, nous considérons le système maître et le système esclave, respectivement :

$$\dot{X}(t) = F(X(t)), \quad (5.1)$$

$$\dot{Y}(t) = G(Y(t)) + U. \quad (5.2)$$

où  $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ ,  $Y(t) = (y_i(t))_{1 \leq i \leq m}$  sont les états du système maître et du système esclave, respectivement,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  et  $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$  est un vecteur de contrôle.

**Définition 5.2.1** *On dit qu'il y a une synchronisation **FSHFPS** entre le système maître (5.1) et le système esclave (5.2), s'il existe des contrôleurs*

$U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ , et des fonctions différentiables  $\alpha_{ij} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$  de telle sorte que les erreurs de synchronisation :

$$e_i(t) = y_i(t) - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(t) x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

satisfont  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e_i(t) = 0$ .

**Définition 5.2.2** *On dit qu'il y a une synchronisation **IFSHFPS** entre le système maître (5.1) et le système esclave (5.2), s'il existe des contrôleurs*

$U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ , et des fonctions différentiables  $\beta_{ij} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$  de telle sorte que les erreurs de synchronisation :

$$e_i(t) = x_i(t) - \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(t) y_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

satisfont  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e_i(t) = 0$ .

### 5.3 Coexistence de IFSHFPS et FSHFPS en 4-D

Ici, nous supposons que le système maître peut être considéré comme suit :

$$\dot{x}_i(t) = f_i(X(t)), \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.3)$$

où  $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq 3}$  est le vecteur d'état du système maître (5.3),  $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$ .

En outre, on considère le système esclave comme suit :

$$\dot{y}_i(t) = \sum_{j=1}^4 b_{ij} y_j(t) + g_i(Y(t)) + u_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (5.4)$$

où  $Y(t) = (y_i)_{1 \leq i \leq 4}$  est le vecteur d'état du système esclave (5.4),  $(b_{ij}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ,  $g_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions non linéaires et  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , sont les contrôleurs à concevoir.

**Définition 5.3.1** Soit  $(\alpha_j(t))_{1 \leq j \leq 4}$ ,  $(\beta_j(t))_{1 \leq j \leq 3}$ ,  $(\gamma_j(t))_{1 \leq j \leq 4}$  et  $(\theta_j(t))_{1 \leq j \leq 3}$  étant continûment différentiables et des fonctions bornées, on dit que **IFSHFPS** et **FSHFPS** coexistent dans la synchronisation du système maître (5.3) et du système esclave (5.4), s'il existe des contrôleurs  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , de telle sorte que les erreurs de synchronisation :

$$\begin{aligned} e_1(t) &= x_1(t) - \sum_{j=1}^4 \alpha_j(t) y_j(t), \\ e_2(t) &= y_2(t) - \sum_{j=1}^3 \beta_j(t) x_j(t), \\ e_3(t) &= x_3(t) - \sum_{j=1}^4 \gamma_j(t) y_j(t), \\ e_4(t) &= y_4(t) - \sum_{j=1}^3 \theta_j(t) x_j(t). \end{aligned} \quad (5.5)$$

satisfont  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e_i(t) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Les conditions suffisantes de la coexistence de **IFSHFPS** et du **FSHFPS** entre les systèmes (5.3) et (5.4) sont donnés par le **Théorème 5.3.1** suivant.

**Théorème 5.3.1** La coexistence de **IFSHFPS** et **FSHFPS** entre le système maître (5.3) et le système esclave (5.4) se produira si  $\alpha_3(t) \gamma_1(t) - \alpha_1(t) \gamma_3(t) \neq 0$ , et la loi de contrôle

est conçue comme suit :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \sum_{i=1}^4 P_i \left( \sum_{j=1}^4 (b_{ij} - c_{ij}) e_j(t) - R_i \right), \\
 u_2 &= \sum_{j=1}^4 (b_{2j} - c_{2j}) e_j(t) - R_2, \\
 u_3 &= \sum_{i=1}^4 Q_i \left( \sum_{j=1}^4 (b_{ij} - c_{ij}) e_j(t) - R_i \right), \\
 u_4 &= \sum_{j=1}^4 (b_{4j} - c_{4j}) e_j(t) - R_4.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

où  $(c_{ij})_{4 \times 4}$  sont les constantes de contrôle à sélectionner, et

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{\gamma_3(t)}{\alpha_3(t) \gamma_1(t) - \alpha_1(t) \gamma_3(t)}, \\
 P_2 &= \frac{\gamma_3(t) \alpha_2(t) - \alpha_3(t) \gamma_2(t)}{\alpha_3(t) \gamma_1(t) - \alpha_1(t) \gamma_3(t)}, \\
 P_3 &= \frac{-\alpha_3(t)}{\alpha_3(t) \gamma_1(t) - \alpha_1(t) \gamma_3(t)}, \\
 P_4 &= \frac{\gamma_3(t) \alpha_4(t) - \alpha_3(t) \gamma_4(t)}{\alpha_3(t) \gamma_1(t) - \alpha_1(t) \gamma_3(t)}, \\
 Q_1 &= \frac{-\gamma_1(t)}{\alpha_3(t) \gamma_1(t) - \alpha_1(t) \gamma_3(t)}, \\
 Q_2 &= \frac{\alpha_1(t) \gamma_2(t) - \alpha_2(t) \gamma_1(t)}{\alpha_3(t) \gamma_1(t) - \alpha_1(t) \gamma_3(t)}, \\
 Q_3 &= \frac{\alpha_1(t)}{\alpha_3(t) \gamma_1(t) - \alpha_1(t) \gamma_3(t)}, \\
 Q_4 &= \frac{\alpha_1(t) \gamma_4(t) - \alpha_4(t) \gamma_1(t)}{\alpha_3(t) \gamma_1(t) - \alpha_1(t) \gamma_3(t)},
 \end{aligned} \tag{5.7}$$



et

$$\begin{aligned}
 R_1 &= f_1(X(t)) - \sum_{j=1}^4 \dot{\alpha}_j(t) y_j(t) - \sum_{i=1}^4 \alpha_i(t) \left( \sum_{j=1}^4 b_{ij} y_j(t) + g_i(Y(t)) \right), \\
 R_2 &= \sum_{j=1}^4 b_{2j} y_j(t) + g_2(Y(t)) - \sum_{j=1}^3 \dot{\beta}_j(t) x_j(t) - \sum_{j=1}^3 \beta_j(t) \dot{x}_j(t), \\
 R_3 &= f_3(X(t)) - \sum_{j=1}^4 \dot{\gamma}_j(t) y_j(t) - \sum_{i=1}^4 \gamma_i(t) \left( \sum_{j=1}^4 b_{ij} y_j(t) + g_i(Y(t)) \right), \\
 R_4 &= \sum_{j=1}^4 b_{4j} y_j(t) + g_4(Y(t)) - \sum_{j=1}^3 \dot{\theta}_j(t) x_j(t) - \sum_{j=1}^3 \theta_j(t) \dot{x}_j(t).
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

**Preuve.** Le système d'erreur (5.5) peut être différencié comme suit :

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1(t) &= \dot{x}_1(t) - \sum_{j=1}^4 \dot{\alpha}_j(t) y_j(t) - \sum_{j=1}^4 \alpha_j(t) \dot{y}_j(t), \\
 \dot{e}_2(t) &= \dot{y}_2(t) - \sum_{j=1}^3 \dot{\beta}_j(t) x_j(t) - \sum_{j=1}^3 \beta_j(t) \dot{x}_j(t), \\
 \dot{e}_3(t) &= \dot{x}_3(t) - \sum_{j=1}^4 \dot{\gamma}_j(t) y_j(t) - \sum_{j=1}^4 \gamma_j(t) \dot{y}_j(t), \\
 \dot{e}_4(t) &= \dot{y}_4(t) - \sum_{j=1}^3 \dot{\theta}_j(t) x_j(t) - \sum_{j=1}^3 \theta_j(t) \dot{x}_j(t).
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

De plus, le système d'erreur (5.9) peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1(t) &= \sum_{j=1}^4 \alpha_j(t) u_j + R_1, \\
 \dot{e}_2(t) &= u_2 + R_2, \\
 \dot{e}_3(t) &= \sum_{j=1}^4 \gamma_j(t) u_j + R_3, \\
 \dot{e}_4(t) &= u_4 + R_4,
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

■

où  $R_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , ont été décrits dans (5.8).

En substituant la loi de contrôle (5.6) dans (5.10), le système d'erreur peut être écrit comme suit :

$$\dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^4 (b_{ij} - c_{ij}) e_j(t), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (5.11)$$

ou sous la forme compacte :

$$\dot{e}(t) = (B - C) e(t). \quad (5.12)$$

où  $B = (b_{ij})_{4 \times 4}$  et  $C = (c_{ij})_{4 \times 4}$  sont les matrices de contrôle.

Si nous sélectionnons la matrice de contrôle  $C$  de sorte que toutes les valeurs propres de  $B - C$  sont strictement négatives, il est immédiat que toutes les solutions du système d'erreur (5.12) tendent à zéro quand  $t \rightarrow \infty$ . Par conséquent, les systèmes (5.3) et (5.4) sont globalement synchronisés en 4-D.

## 5.4 Coexistence de FSHFPS et IFSHFPS en 3-D

Maintenant, le système maître et le système esclave peuvent être écrits, respectivement, dans les formes suivantes :

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j(t) + f_i(X(t)), \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.13)$$

$$y_i(t) = g_i(Y(t)) + u_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (5.14)$$

où  $X(t) = (x_i)_{1 \leq i \leq 3}$ ,  $Y(t) = (y_i)_{1 \leq i \leq 4}$  sont les états du système maître et du système esclave, respectivement,  $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions non-linéaires,  $g_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u_i, i = 1, 2, 3, 4$ , sont les contrôleurs à construire.

**Définition 5.4.1** Soit  $(\lambda_j(t))_{1 \leq j \leq 3}$ ,  $(\mu_j(t))_{1 \leq j \leq 4}$  et  $(\sigma_j(t))_{1 \leq j \leq 3}$  étant continûment différentiables et des fonctions bornées, on dit que **FSHFPS** et **IFSHFPS** coexistent dans la synchronisation du système maître (5.13) et du système esclave (5.14), s'il existe des

contrôleurs  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  de telle sorte que les erreurs de synchronisation :

$$\begin{aligned} e_1(t) &= y_1(t) - \sum_{j=1}^3 \lambda_j(t) x_j(t), \\ e_2(t) &= x_2(t) - \sum_{j=1}^4 \mu_j(t) y_j(t), \\ e_3(t) &= y_3(t) - \sum_{j=1}^3 \sigma_j(t) x_j(t). \end{aligned} \quad (5.15)$$

satisfont  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e_i(t) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Par conséquent, nous avons le **Théorème 5.4.1** suivant :

**Théorème 5.4.1** *Pour réaliser la coexistence de FSHFPS et IFSHFPS entre le système maître (5.13) et le système esclave (5.14), on suppose que  $\mu_2(t) \neq 0$  et la loi de contrôle est construit comme suit :*

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{j=1}^3 (a_{1j} - l_{1j}) e_j(t) - R_1, \\ u_2 &= -\frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)} \left( \sum_{j=1}^3 (a_{1j} - l_{1j}) e_j(t) - R_1 \right) - \frac{1}{\mu_2(t)} \left( \sum_{j=1}^3 (a_{2j} - l_{2j}) e_j(t) - R_2 \right) \\ &\quad - \frac{\mu_3(t)}{\mu_2(t)} \left( \sum_{j=1}^3 (a_{3j} - l_{3j}) e_j(t) - R_3 \right), \\ u_3 &= \sum_{j=1}^3 (a_{3j} - l_{3j}) e_j(t) - R_3, \\ u_4 &= 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

où  $(l_{ij})_{3 \times 3}$  sont des constantes de contrôle à déterminer, alors que  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  sont

choisies comme suit :

$$\begin{aligned}
 R_1 &= g_1(Y(t)) - \sum_{j=1}^3 (a_{1j} - l_{1j}) e_j(t) - \sum_{j=1}^3 \dot{\lambda}_j(t) x_j(t) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^3 \lambda_i(t) \left( \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j(t) + f_i(X(t)) \right), \\
 R_2 &= \sum_{j=1}^3 a_{2j} x_j(t) + f_2(X(t)) - \sum_{j=1}^3 (a_{2j} - l_{2j}) e_j(t) \\
 &\quad - \sum_{j=1}^4 \dot{\mu}_j(t) y_j(t) - \sum_{j=1}^4 \mu_j(t) g_j(Y(t)), \\
 R_3 &= g_3(Y(t)) - \sum_{j=1}^3 (a_{3j} - l_{3j}) e_j(t) - \sum_{j=1}^3 \dot{\sigma}_j(t) x_j(t) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^3 \sigma_i(t) \left( \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j(t) + f_i(X(t)) \right).
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

**Preuve.** Le système d'erreur (5.15), entre le système maître (5.13) et le système esclave (5.14), peut être dérivé comme suit :

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1(t) &= \dot{y}_1(t) - \sum_{j=1}^3 \dot{\lambda}_j(t) x_j(t) - \sum_{j=1}^3 \lambda_j(t) \dot{x}_j(t), \\
 \dot{e}_2(t) &= \dot{x}_2(t) - \sum_{j=1}^4 \dot{\mu}_j(t) y_j(t) - \sum_{j=1}^4 \mu_j(t) \dot{y}_j(t), \\
 \dot{e}_3(t) &= \dot{y}_3(t) - \sum_{j=1}^3 \dot{\sigma}_j(t) x_j(t) - \sum_{j=1}^3 \sigma_j(t) \dot{x}_j(t).
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Le système d'erreur (5.18), après quelques manipulations algébriques, devient :

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1(t) &= \sum_{j=1}^3 (a_{1j} - l_{1j}) e_j(t) + u_1 + R_1, \\
 \dot{e}_2(t) &= \sum_{j=1}^3 (a_{2j} - l_{2j}) e_j(t) - \sum_{j=1}^4 \mu_j(t) u_j + R_2, \\
 \dot{e}_3(t) &= \sum_{j=1}^3 (a_{3j} - l_{3j}) e_j(t) + u_3 + R_3.
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

où  $R_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , ont été données par (5.17).

En considérant la loi de contrôle (5.16), il s'ensuit que les erreurs dynamiques entre les systèmes (5.13) et (5.14) sont décrites par :

$$\dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^3 (a_{ij} - l_{ij}) e_j(t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.20)$$

ou sous la forme compacte :

$$\dot{e}(t) = (A - L) e(t). \quad (5.21)$$

où  $e(t) = (e_i(t))_{1 \leq i \leq 3}$ ,  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ ,  $L = (l_{ij})_{3 \times 3}$ .

Construire la fonction candidate Lyapunov sous la forme  $V(e(t)) = e^T(t)e(t)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= \dot{e}^T(t)e(t) + e^T(t)\dot{e}(t) \\ &= e^T(t)(A - L)^T e(t) + e^T(t)(A - L)e(t) \\ &= e^T(t) [(A - L)^T + (A - L)] e(t). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Si la matrice de contrôle  $L$  est choisie telle que  $(A - L)^T + (A - L)$  est une matrice définie négative, on obtient  $\dot{V}(e(t)) < 0$ .

Ainsi, à partir de la théorie de stabilité de Lyapunov, c'est la solution nulle du système d'erreur (5.21) est globalement asymptotiquement stable, c'est-à-dire :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e_i(t) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Par conséquent, les systèmes (5.13) et (5.14) sont globalement synchronisés en

3-D. ■

## 5.5 Exemples numériques

Dans cette section, nous fournissons deux exemples de la coexistence de **FSHFPS** et **IFSHFPS** entre des systèmes chaotiques 3-D et des systèmes hyperchaotiques 4-D en 4-D et en 3-D, respectivement. Chaque exemple numérique est lié à l'un des théorèmes développés dans les **Sections 5.3** et **5.4**.

### 5.5.1 Exemple 1

Dans cet exemple, le système maître est défini par le nouveau système 3-D suivant [104] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = x_1x_3, \\ \dot{x}_3 = 50 - a_2x_1^2 - a_3x_3. \end{cases} \quad (5.23)$$

Quand  $a_1 = 2.9$ ,  $a_2 = 0.7$ ,  $a_3 = 0.6$  et les conditions initiales sont prises comme :  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0.6, 0.5, 0.4)$ , le système (5.23) présente des attracteurs chaotiques (FIG. 5.1 et FIG. 5.2).

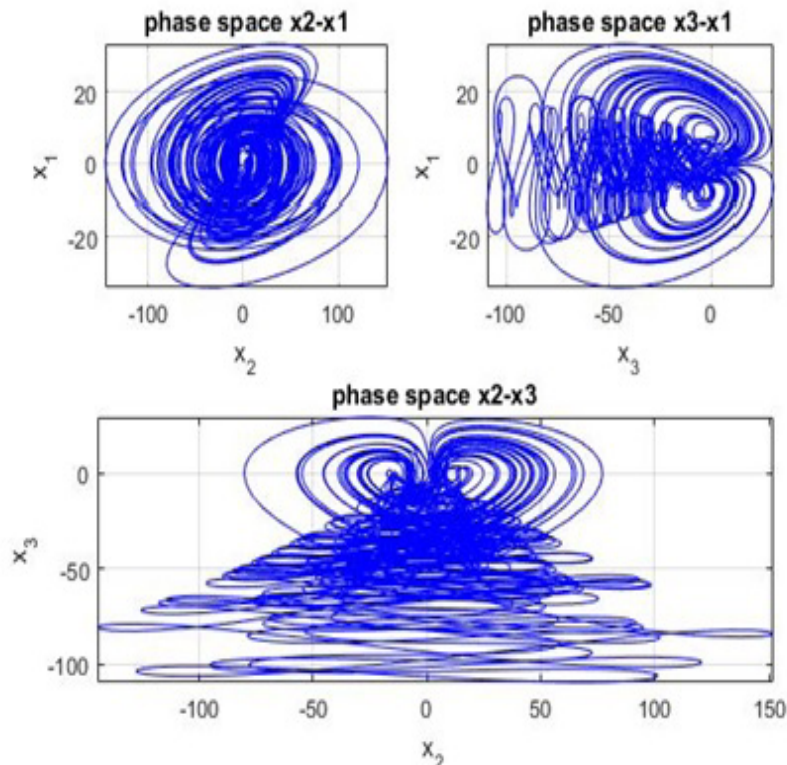


FIG. 5.1 – Portraits de phase pour le système maître (5.23) en 2D.

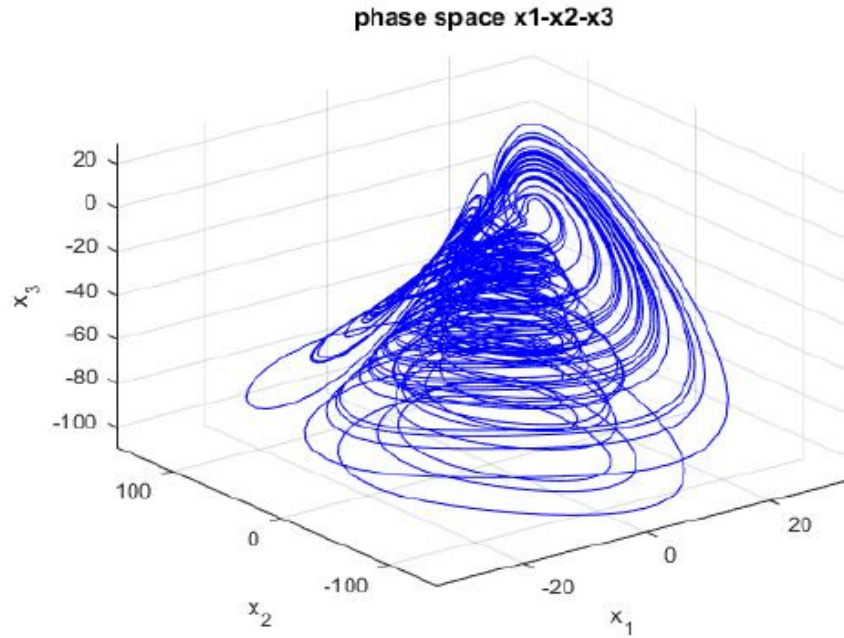


FIG. 5.2 – Portraits de phase pour le système maître (5.23) en 3D.

Le système esclave est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = b_1(y_2 - y_1) + y_2 y_3 + y_4 + u_1, \\ \dot{y}_2 = b_2 y_1 + y_4 - b_3 y_1 y_3 + u_2, \\ \dot{y}_3 = -b_4 y_3 + b_5 y_1 y_2 + u_3, \\ \dot{y}_4 = -y_1 - y_2 + u_4. \end{cases} \quad (5.24)$$

Lorsque les contrôleurs  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ ,  $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = (18, 40, 5, 3, 4)$  et les conditions initiales sont données comme  $(y_1(0), y_2(0), y_3(0), y_4(0)) = (0.5, 0.8, 0.2, 1.3)$ , le système (5.24) présente des attracteurs hyperchaotiques [105] (FIG. 5.3 et FIG. 5.4).

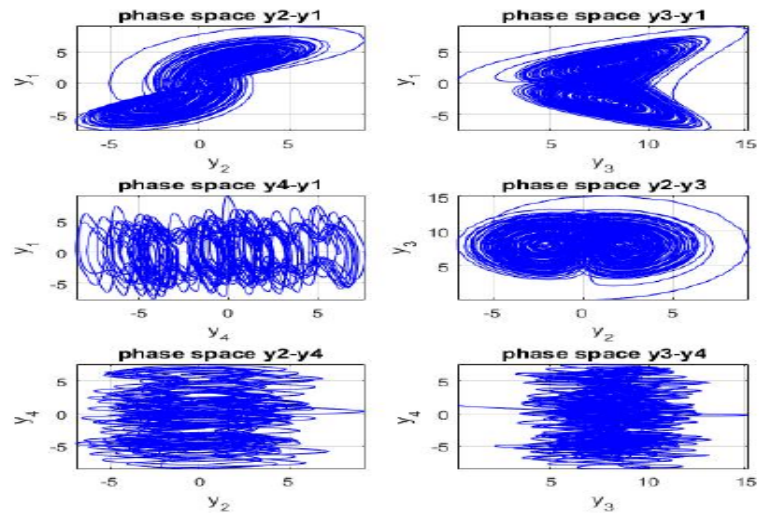


FIG. 5.3 – Portraits de phase pour le système esclave (5.24) en 2D.

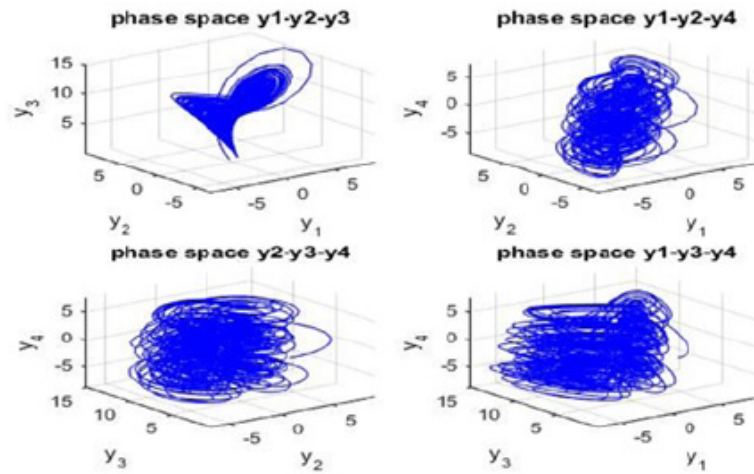


FIG. 5.4 – Portraits de phase pour le système esclave (5.24) en 3D.



En s'appuyant sur les notations utilisées dans la **Section 5.3**, la partie linéaire  $B$  et la partie non linéaire  $g$  du système esclave (5.24) sont données comme suit :

$$B = \begin{pmatrix} -18 & 18 & 0 & 1 \\ 40 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } g = \begin{pmatrix} y_2 y_3 \\ -5y_1 y_3 \\ 4y_1 y_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Selon l'approche développée dans la **Section 5.3**, les erreurs de synchronisation entre le système maître (5.23) et le système esclave (5.24) sont définies comme suit :

$$\begin{cases} e_1 = x_1 - \alpha_1(t) y_1 - \alpha_2(t) y_2 - \alpha_3(t) y_3 - \alpha_4(t) y_4, \\ e_2 = y_2 - \beta_1(t) x_1 - \beta_2(t) x_2 - \beta_3(t) x_3, \\ e_3 = x_3 - \gamma_1(t) y_1 - \gamma_2(t) y_2 - \gamma_3(t) y_3 - \gamma_4(t) y_4, \\ e_4 = y_4 - \theta_1(t) x_1 - \theta_2(t) x_2 - \theta_3(t) x_3. \end{cases} \quad (5.25)$$

où  $\alpha_1(t) = \sin t$ ,  $\alpha_2(t) = 1$ ,  $\alpha_3(t) = \frac{1}{t+1}$ ,  $\alpha_4(t) = 2$ ,  $\beta_1(t) = 3$ ,  $\beta_2(t) = \cos t$ ,  $\beta_3(t) = 4$ ,  $\gamma_1(t) = e^{-t}$ ,  $\gamma_2(t) = 2$ ,  $\gamma_3(t) = 0$ ,  $\gamma_4(t) = \frac{1}{t^2+1}$ ,  $\theta_1(t) = \frac{t}{t+1}$ ,  $\theta_2(t) = 0$ ,  $\theta_3(t) = \sin 3t$ .  
Alors,

$$\alpha_3(t) \gamma_1(t) - \alpha_1(t) \gamma_3(t) = \frac{1}{e^t(t+1)} \neq 0. \quad (5.26)$$

La coexistence de la synchronisation **IFSHFPS** et la synchronisation **FSHFPS**, dans cet exemple, est atteinte lorsque la matrice de contrôle  $C$  est sélectionnée comme suit :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 18 & 0 & 1 \\ 40 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

et les contrôleurs  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , sont construits selon (5.6) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = -2e^t(-e_2 - R_2) + e^t(-3e_3 - R_3) - \frac{e^t}{t^2+1}(-e_4 - R_4), \\ u_2 = -e_2 + 5y_1y_3 - 40y_1 - y_4 - R_2, \\ u_3 = -(t+1)(-18e_1 - R_1) \\ + e^t(t+1) \left[ -(2 + 2e_2 + 2R_2 + 3e_3 + R_3) \sin t + \left( \frac{\sin t}{t^2+1} - e^{-t} \right) (-e_4 - R_4) \right], \\ u_4 = -e_4 + y_1 + y_2 - R_4. \end{array} \right. \quad (5.28)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = 2.9(x_2 - x_1) - y_1 \cos t + \frac{1}{(t+1)^2}y_3 - \sin t(18(y_2 - y_1) + y_2y_3) \\ + \frac{1}{t+1}(4y_1y_2 - 3y_3) - y_1 - y_2, \\ R_2 = -5y_1y_3 + 40y_1 + y_4 + x_2 \sin t - 8.7(x_2 - x_1) - x_1x_3 \cos t, \\ R_3 = 50 - 0.7x_1^2 - 0.6x_3 + e^{-t}y_1 + \frac{2t}{(t^2+1)^2}y_4 - e^{-t}(18(y_2 - y_1) + y_2y_3) \\ + 10y_1y_3 + 80y_1 - 2y_4 + \frac{1}{t^2+1}(y_1 + y_2), \\ R_4 = -y_1 - y_2 - \frac{t+1-t^2}{(t+1)^2}x_1 - 3x_3 \cos 3t - \frac{2.9t}{t+1}(x_2 - x_1) \\ - (50 - 0.7x_1^2 - 0.6x_3) \sin 3t. \end{array} \right. \quad (5.29)$$

Nous pouvons montrer que toutes les valeurs propres de  $B - C$  ont des parties réelles négatives. On peut voir que toutes les conditions du **Théorème 5.3.1** sont satisfaites.

Par conséquent, les fonctions d'erreur entre les systèmes (5.23) et (5.24) sont décrites par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_1 = -18e_1, \\ \dot{e}_2 = -e_2, \\ \dot{e}_3 = -3e_3, \\ \dot{e}_4 = -e_4. \end{array} \right. \quad (5.30)$$

Les résultats numériques indiquent que la coexistence de **IFSHFPS** et de **FSHFPS** est effectivement réalisée dans 4-D (FIG. 5.5).

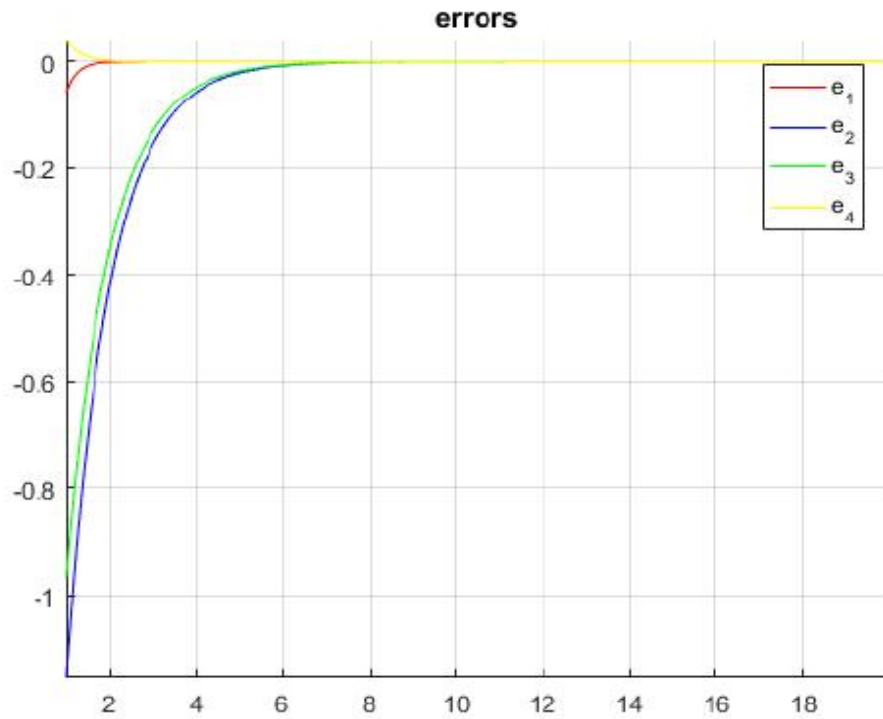


FIG. 5.5 – Evolution du temps des erreurs  $e_1, e_2, e_3$  et  $e_4$  entre le système (5.23) et le système (5.24).

### 5.5.2 Exemple 2

Ici, le système maître est sélectionné comme un système chaotique 3-D. Ce système proposé dans [106] est donné par le système EDO suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -c_1 x_1 (1 - x_1) - x_2 + c_2 x_2^2. \end{cases} \quad (5.31)$$

Le système (5.31), quand  $(c_1, c_2) = (0.2, 0.01)$  et  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0.0.1, -0.0.1, 0.0.1)$ , possède des attracteurs chaotiques représentés (FIG. 5.6 et FIG. 5.7).

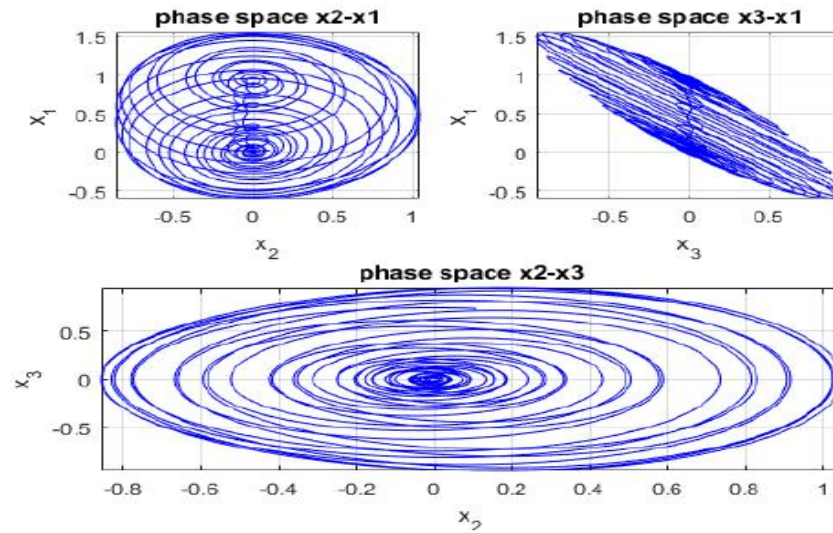


FIG. 5.6 – Portraits de phase pour le système maître (5.31) en 2D.

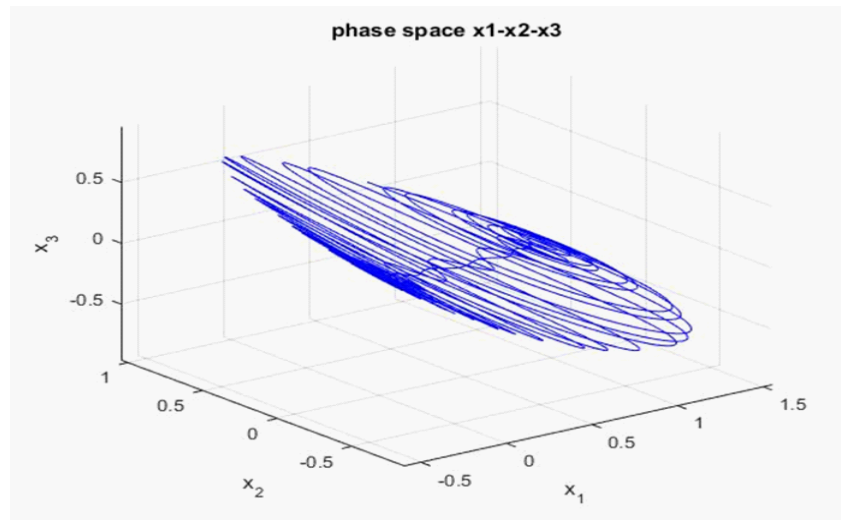


FIG. 5.7 – Portraits de phase pour le système maître (5.31) en 3D.

En utilisant les notations présentées dans **la Section 5.4**, la partie linéaire  $A$  et la partie non linéaire  $f$  du système maître (5.31) sont données comme suit :

$$A = (a_{ij})_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.2x_1^2 + 0.01x_2^2 \end{pmatrix}.$$

En tant que système maître esclave, nous considérons un nouveau système hyperchaotique 4-D donné par le système EDO suivant [107] :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = d_1(y_2 - y_1) + y_2y_3 - y_4 + u_1, \\ \dot{y}_2 = d_2y_2 - y_1y_3 + y_4 + u_2, \\ \dot{y}_3 = y_1y_2 - d_3y_3 + u_3, \\ \dot{y}_4 = -d_4(y_1 + y_2) + u_4. \end{cases} \quad (5.32)$$

Le système (5.32), lorsque  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ ,  $(d_1, d_2, d_3, d_4) = (40, 20.5, 5, 2.5)$  et  $(y_1(0), y_2(0), y_3(0), y_4(0)) = (0.5, 0.8, 0.6, 0.2)$ , affiche les attracteurs hyperchaotiques (FIG. 5.8 et FIG. 5.9).

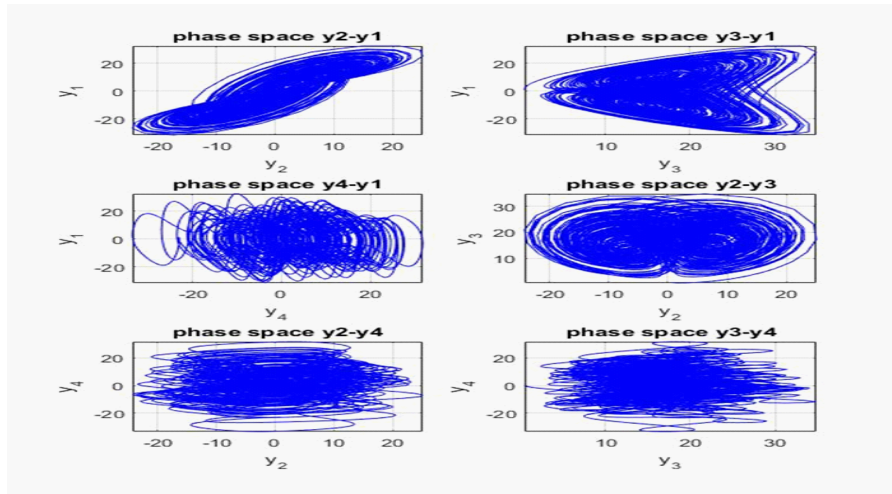


FIG. 5.8 – Portraits de phase pour le système esclave (5.32) en 2D.

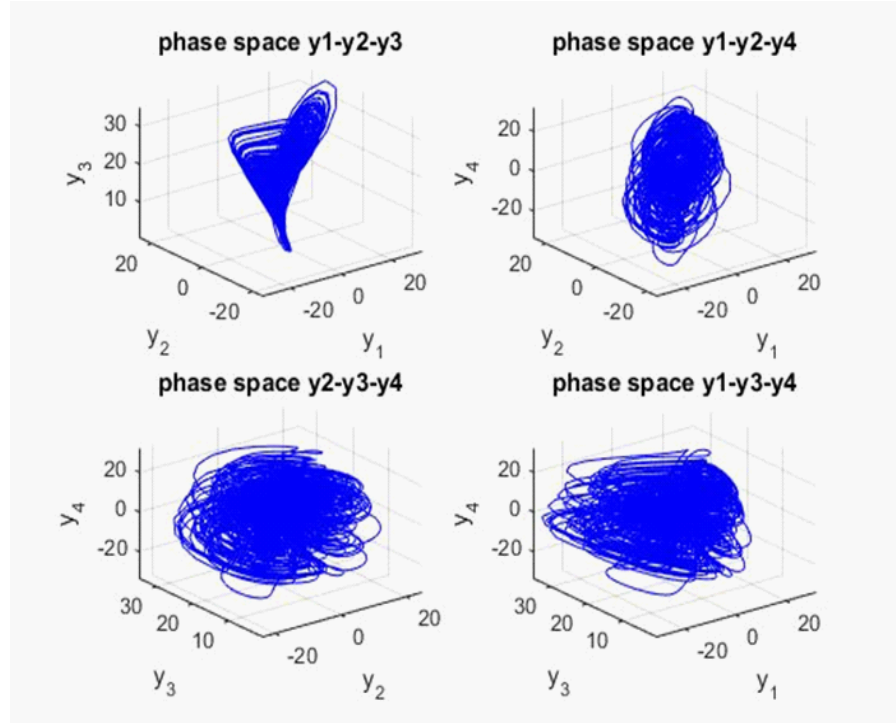


FIG. 5.9 – Portraits de phase pour le système esclave (5.32) en 3D.

Selon le schéma de contrôle présenté dans la **Section 5.4**, les erreurs de synchronisation pour cet exemple sont données comme suit :

$$\begin{cases} e_1 = y_1 - \lambda_1(t)x_1 - \lambda_2(t)x_2 - \lambda_3(t)x_3, \\ e_2 = x_2 - \mu_1(t)y_1 - \mu_2(t)y_2 - \mu_3(t)y_3 - \mu_4(t)y_4, \\ e_3 = y_3 - \sigma_1(t)x_1 - \sigma_2(t)x_2 - \sigma_3(t)x_3. \end{cases} \quad (5.33)$$

où  $\lambda_1(t) = e^{-t}$ ,  $\lambda_2(t) = \sin 2t$ ,  $\lambda_3(t) = 0$ ,  $\mu_1(t) = 0$ ,  $\mu_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$ ,  $\mu_3(t) = \frac{1}{1+\cos^2 t}$ ,  $\mu_4(t) = 4$ ,  $\sigma_1(t) = \frac{1}{\ln(t+1)}$ ,  $\sigma_2(t) = \frac{1}{1+\sin^2 t}$  et  $\sigma_3(t) = 0$ .

En sélectionnant la matrice de contrôle  $L$  comme suit :

$$L = \begin{pmatrix} 0.1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -0.2 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

et en utilisant (5.16), les contrôleurs  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$  sont conçus comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = -e_1 - R_1, \\ u_2 = -(\sqrt{t} + 1)(-2e_2 - R_2) - \frac{\sqrt{t+1}}{1+\cos^2 t}(-3e_3 - R_3), \\ u_3 = -3e_3 - R_3, \\ u_4 = 0. \end{cases} \quad (5.35)$$

où

$$\begin{aligned} R_1 &= 40(y_2 - y_1) + y_2 y_3 - y_4 + e_1 + e^{-t} x_1 - 2x_2 \cos 2t - x_2 e^{-t} \\ &\quad - x_3 \sin 2t, \\ R_2 &= x_3 + 2e_2 - \frac{y_2}{2\sqrt{t}(\sqrt{t} + 1)^2} - y_3 \frac{2 \sin t \cos t}{(1 + \cos^2 t)} - \frac{1}{\sqrt{t} + 1} (20.5y_2 - y_1 y_3 + y_4) \\ &\quad - \frac{1}{1 + \cos^2 t} (y_1 y_2 - 5.5y_3) + 10(y_1 + y_2), \\ R_3 &= y_1 y_2 - 5.5y_3 + 3e_3 + \frac{1}{(t + 1) \ln^2(t + 1)} x_1 + \frac{2 \sin t \cos t}{(1 + \sin^2 t)} x_2 \\ &\quad - \frac{x_2}{\ln(t + 1)} - \frac{x_3}{1 + \sin^2 t}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

il est clair de voir que  $(A - L)^T + (A - L)$  est une matrice définie négative.

De plus, on peut facilement montrer que toutes les conditions du **Théorème 5.4.1** sont satisfaites. Par conséquent, les fonctions d'erreur entre les systèmes (5.31) et (5.32) sont décrites par :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -0.1e_1, \\ \dot{e}_2 = -2e_2, \\ \dot{e}_3 = -3e_3. \end{cases} \quad (5.37)$$

D'après nos résultats numériques, on peut conclure que la coexistence de la synchronisation **FSHFPS** et de la synchronisation **IFSHFPS** est effectivement réalisée en 3-D (FIG. 5.10).

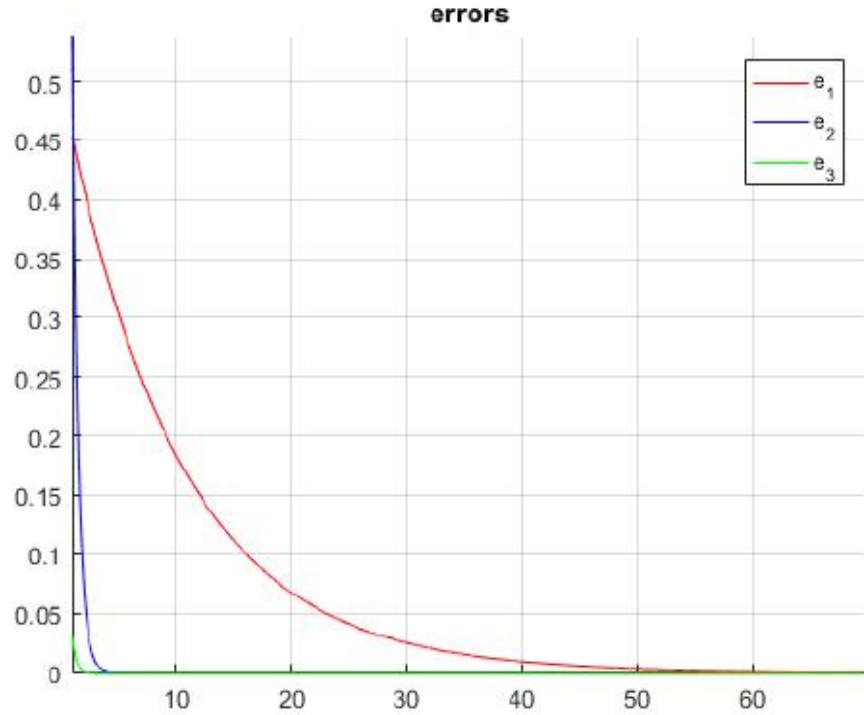


FIG. 5.10 – Evolution du temps des erreurs  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$  entre le système (5.31) et le système (5.32).

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté de nouveaux résultats liés à la combinaison de la synchronisation (**FSHFPS**) et son inverse (**IFSHFPS**) entre des systèmes chaotiques non identiques et de différentes dimensions. Plus précisément, nous avons proposé de nouveaux schémas, qui assurent la coexistence de (**FSHFPS**) et (**IFSHFPS**) entre un système maître en 3-D et un système esclave en 4-D.

Les schémas réalisés sont conçus par des approches générales et la seule restriction sur les fonctions de mise à l'échelle est qu'elles doivent être des fonctions différentiables et bornées. Deux exemples numériques de la coexistence de types de synchronisation sont introduites afin de montrer clairement l'efficacité de l'approche développée ici. Notez que cette approche permet de prouver la coexistence de (**FSHFPS**) et (**IFSHFPS**) dans plusieurs cas.



# Conclusion générale et perspectives

On a étudié dans cette thèse la synchronisation des systèmes dynamiques à temps continu. On a réservé la première partie à la présentation des systèmes dynamiques chaotiques (hyperchaotiques), ils peuvent présenter des régimes permanents très complexes. La non-linéarité, le déterminisme et l'aspect aléatoire sont leurs principales caractéristiques.

Depuis la nuit des temps, les études sur les systèmes dynamiques chaotiques ne cessent de s'amplifier. Cependant, le problème de synchroniser deux systèmes dynamiques est apparu difficile à atteindre, même impossible. Néanmoins, les chercheurs du dernier siècle venait de déchiffrer ce phénomène complexe.

En effet, dans les deux dernières décennies, plusieurs méthodes et schémas de synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques et hyperchaotiques ont été proposés et appliquées telles que : (**CS**), (**GS**) et (**PS**). Cette dernière a été largement considérée vue son efficacité dans les communications sécurisées.

Plus récemment, les synchronisations hybrides telles que la synchronisation (**HPS**), dont les différentes variables d'état peuvent synchroniser jusqu'à des facteurs de mise à l'échelle différents, est évoquée. Cependant, la synchronisation (**HFPS**) pour des systèmes chaotiques est largement considérée. D'autre part, étudiant le problème inverse des schémas produit des nouveaux type de synchronisation, est une idée séduisante et importante. Les types inverses ont été trouvé très efficace dans la cryptologie.

Dans la synchronisation (**HFPS**) (en anglais : **Hybrid Function Projective Synchronization**), le système maître et le système esclave pourraient être synchronisés avec une matrice de fonction de mise à l'échelle pouvant améliorer la sécurité dans la télécommunication. Ainsi, nous avons contribué à présenter une nouvelle méthode de synchronisation notée (**IHFPS**) qui est l'inverse de (**HFPS**). Cette nouvelle méthode de synchronisation pourrait être, de sa part, utilisée pour obtenir une communication plus sécurisée, car il est évident que l'imprévisibilité de la fonction de matrice de mise en échelle dans ce concept de synchronisation peut en outre améliorer la sécurité de la communication. Afin de montrer l'efficacité de cette méthode proposée, elle a été appliquée pour synchroniser des systèmes dynamiques chaotiques identiques continus en 5-D. Un exemple numérique est exploité pour illustrer l'efficacité de la méthode proposée.

À notre connaissance, l'étude de la coexistence de deux types de synchronisation pour des systèmes dynamiques est rarement discutée. En premier temps, on a prouvé la coexistence de la synchronisation généralisée (**GS**) et son inverse (**IGS**) en 4-D en contrôlant la partie linéaire du système esclave et en utilisant la théorie de la stabilité des systèmes linéaires à temps continu. Les exemples numériques ont clairement confirmé l'efficacité de l'analyse théorique.

En deuxième temps, on a examiné la coexistence de la synchronisation notée (**FSHPS**) (en anglais : **Full State Hybrid Function Projective Synchronization**) et son inverse notée (**IFSHFPS**) pour des systèmes dynamiques en 4-D et 3-D. Sur la base de la complexité des nouveaux schémas proposés, on peut améliorer et rendre rapide la communication d'informations.

Le schéma de la synchronisation proposé peut être utilisé pour synchroniser : i) de larges classes de systèmes maître-esclave chaotique (hyperchaotique) ; ii) des systèmes non identiques avec des dimensions différentes ; iii) des schémas dans lesquels le facteur d'échelle de la combinaison linéaire peut être n'importe quelle fonction arbitraire différentiable.

Pour mettre en évidence les approches proposées, deux exemples numériques sont testés.

Ainsi, la thèse arrive à son aboutissement, plusieurs perspectives sont envisagées :

- Dans le but de confirmer les résultats de la nouvelle méthode proposée notée **IHFPS**, il serait très intéressant de la faire appliquer à d'autres systèmes dynamiques de dimensions différentes, entres autres, en temps discret et aussi son extension pour des systèmes hyperchaotiques.
- D'autres développements et analyses approfondies concernant l'application des approches proposées dans les dispositifs de communications chaotique et les systèmes de communication sécurisés devraient être mis en œuvre.
- En outre, de nouveaux schémas complexes basés sur la coexistence de différents types de synchronisation peuvent être étudiés dans le futur.

# Bibliographie

- [1] E. S. Aly El-Garib. "On bifurcation analysis and control for some chaotic dynamical systems", Phd Thesis, Mansoura University, 2013.
- [2] R. L. Devaney. "An introduction to chaotic dynamical dystems", Addison-Wesley, New York, 1987.
- [3] J. Guckenheimer, P. Holmes. "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields", Springer-Verlag, New York.B, 1983.
- [4] D. Ruelle. "Chaotic Evolution and Strange Attractors", Cambridge : Cambridge University Press, 1989*b*.
- [5] E. Zeraoulia, J. C. Sprott. "A two-dimensional discrete mapping with  $C^1$ -multifold chaotic attractors", Electronic Journal of Theoretical Physics, vol. 5(17), pp .107-120, 2008.
- [6] D. Ruelle, F. Takens. "On the nature of turbulence", communication in Mathematica physics, vol. 20, pp .167-192, 1971.
- [7] P. Berge, Y. Pomeau, C. Vidal. "Order Within Chaos", Hermann and John Wiley and Sons, Paris, France, 1984.
- [8] J. D. Farmer, J. J. Sidorowich. "Predicting chaotic time series", Phys. Rev.Lett., vol. 59, 845, 1987.
- [9] R. Plykin, E. A. Sataev , C. V. Shlyachkov. "Strange attractors", Dynamical systems 9, Encyclopedia of Math. Sciences, 66, Springer-Verlag, 1991.

- [10] L. O. Chua, C. W. Wu, A. Huang, G. Q. Zhong. "A universal circuit for studying and generating chaos, part II : Routes to chaos", IEEE Trans. Circuit syst I : Fundamental Theoryapplications, vol. 40(10), pp .733, 1993.
- [11] E. N. Lorenz. "Deterministic nonperiodic flow", Journal of the Atmospheric Sciences, vol. 20(2), pp. 130-141, 1963.
- [12] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano. "determining Lyapunov Exponents from a time Series", Physica, vol. 16 D, 17D, pp. 285-317, 1985.
- [13] E. G. da Silva. "Introduction aux systèmes dynamiques et chaos", Engineering school, Institut Polytechnique de Grenoble, pp. 23, 2004.
- [14] T. Y. Li, J. A. Jorke. "Period three implies chaos", American Mathematical Monthly", vol. 82, pp. 481-485, 1975.
- [15] D. Kaplan, L. Glass. "Finite-difference equations. Understanding nonlinear dynamics", New-York : Springer-Verlag, pp. 1-53, 1995.
- [16] R. Hilborn. "Chaos and Nonlinear Dynamics an Introduction for Scientists and Engineers", Oxford Student Edition, 1994.
- [17] Y. Pomeau,P. Manneville. "Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems", Commun. Math. Phys., vol. 74(2), pp. 189-197, 1980.
- [18] J. P. Eckmann. "Roads to turbulence in dissipative dynamical systems", Rev. Mod. Phys., vol. 53, pp. 643-5, 1981.
- [19] O. E. RöSSLer. "An equation for continuous chaos", Phys.Lett. A, vol. 57(5), pp. 397-398, 1976.
- [20] O. E. RöSSLer. "Continuous chaos-four prototype equations", Bifurcation theory and applications in scientific disciplines, Ann. New York Acad. Sci., vol. 316, pp. 376-392, 1979.
- [21] O. E. RöSSLer. "An equation for hyperchaos", Phys. Lett. A., vol. 71, pp. 155-157, 1979.

- [22] Z. Liu. "Strange nonchaotic attractors from periodically excited Chua's circuit", Int. J. of Bifurcation and Chaos in App. Sci. and Eng., vol. 11(1), pp. 225-230, 2001.
- [23] T. Matsumoto. "A chaotic attractor from Chua's circuit", IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 31(12), pp. 1055-1058, 1984.
- [24] H. Fujisaka, T. Yamada. "Stability theory of synchronized motion in coupled- oscillator systems", Prog. Theor. Phys., vol. 69, pp. 32-90, 1983.
- [25] V. S. Afraimovich, N. N. Verichev, M. N. Rabinovich. "Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems", Radiophys. and Quantum Electronics, vol. 29(9), pp. 795-803, 1986.
- [26] L. M. Pecora, T. L. Carroll. "Synchronization in chaotic systems", Phys. Rev. Lett., vol. 64, pp. 821-825, 1990.
- [27] N. F. Rulkov, K. M. Sushchik, L. S. Tsimring , H. D. I. Abarbanel. "Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems", Phys. Rev. E, vol. 51, pp. 980-994, 1995.
- [28] R. Mainieri, J. Rehacek. "Projective synchronization in three-dimensional chaotic systems", Phys.Rev. Lett., vol. 82, pp. 3042-5, 1999.
- [29] T. Yang, L. Chua. "Impulsive stabilization for control and synchronization of chaotic systems : Theory and application to secure communication", IEEE Trans. on Circ. Syst. I : Regular Papers, vol. 44, pp. 976-988, 1997.
- [30] K. W. Wong, J. Y. Chen , L. M. Cheng. "A secure communication scheme based on the phase synchronization of chaotic systems", Chaos, vol. 13(2), pp. 508-514, 2003.
- [31] A. Loria, E. Panteley, A. Zavala. "Adaptive observers with persistency of excitation for synchronization of chaotic systems", IEEE Trans. on Circ. Syst. I : Regular Papers, vol. 56(12), pp. 2703-2716, 2009.
- [32] R. Brown, L. Kocarev. "A unifying definition of synchronization for dynamical systems", Chaos, vol. 10(2), pp. 344-349, 2000.

- [33] M. Diao, Y. G. Yu, S. Wang, J. Z. Yu, "Hybrid lag function projective synchronization of discrete chaotic systems with different orders", *Inter. J. Nonl. Sci. Num. Simu.*, vol. 11(7), pp. 503-508, 2010.
- [34] Z. Ma, Z. Liu, G. Zhang. "Generalized synchronization of discrete systems", *Appl.Math. Mech.*, vol. 28 (5), pp. 609-614, 2007.
- [35] L. Kocarev, U. Parlitz, "Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 76, pp. 1816-1819, 1996.
- [36] J. Yan, C. Li, "Generalized projective synchronization of a unified chaotic system", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 26, pp. 1119-1124, 2005.
- [37] X. He, C. Li, J. Huang, L. Xiao, "Generalized synchronization of arbitrary-dimensional chaotic systems", *Optik*, vol. 126, pp. 454-459, 2015.
- [38] D. Xu. "Control of projective synchronization chaotic systems", *Phys. Rev. E.*, vol. 63 :027201, 2001.
- [39] D. Xu, Z. Li, R. Bishop. "Manipulating the scaling factor of projective synchronization in three-dimensional chaotic systems", *Chaos*, vol. 11(3), 439-42, 2001.
- [40] G. Wen, D. Xu. "Nonlinear observer control for full-state projective synchronization in chaotic continuous-time systems", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 26(1), pp. 71-77, 2005.
- [41] J. Yan, C. Li. "Generalized projective synchronization of a unified chaotic system", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 26(4), pp. 1119-1124, 2005.
- [42] Q. Jia. "Projective synchronization of a new hyperchaotic Lorenz system", *Phys. Lett. A.*, vol. 370 (1), pp. 40-45, 2007.
- [43] Z. Li, D. Xu. "A secure communication scheme using projective chaos synchronization", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 22(2), pp. 477-481, 2004.

- [44] G. H. Li. "Generalized projective synchronization of two chaotic systems by using active control", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 30(1), pp. 77-82, 2006.
- [45] M. F. Hu, Z. Y. Xu, R. Zhang. "Full state hybrid projective synchronization in continuous-time chaotic (hyperchaotic) systems", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 13, pp. 456-464, 2008.
- [46] M. F. Hu, Z. Y. Xu, R. Zhang, A. Hu. "Parameters identification and adaptive Full state hybrid projective synchronization of chaotic (hyperchaotic) systems", *Phys. Lett A.*, vol. 361, pp. 231-237, 2007.
- [47] M. F. Hu, Z. Y. Xu, R. Zhang, A. Hu. " Adaptive Full state hybrid projective synchronization of chaotic systems with the same and different order ", *Phys. Lett A.*, vol. 365, pp. 315-327, 2007.
- [48] Y. D. Chu, Y. X. Chang, J. G. Zhang, X . F. Li, X. L. An. "Full state hybrid projective synchronization in hyperchaotic systems", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 42(3), pp. 1502-1510, 2009.
- [49] A. Ouannas. "On the full-state hybrid projective synchronization of general discrete chaotic systems", *Journal of nonlinear dynamics*, vol. 2014, Article ID983293, 6p., 2014.
- [50] M. Manfeng, Z. Xu. "General scheme for Q-S synchronization of chaotic systems", *Nonlinear Analysis : Theory, methods and applications*, vol. 69(4), pp. 1091-1099, 2008.
- [51] G. H. Li. "Modified projective sychronization of chaotic systems", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 32(5), pp. 1786-1790, 2007.
- [52] Y. Chen, X. Li. "Function projective synchronization betwen two identical chaotic systems", *International journal of modern physics C.*, vol. 18(5), pp. 883-888, 2007.
- [53] H. Du, Q. Zeng, C. Wang. "Function projective synchronization of different chaotic systems with uncertain parameters", *Phy. Lett.A.*, vol. 372, pp. 5402-5410, 2008.



- [54] H. Du, Q. Zeng, C. Wang. "Modified function projective synchronization of chaotic systems", *Chaos, Solitons Fractals*, vol. 42(4), pp. 2399-2404, 2009.
- [55] Y. G. Yu, H. X. Li. "Adaptive generalized function projective synchronization of uncertain chaotic systems", *Non linear Anal-Real.*, vol. 11, pp. 2456-2464, 2010.
- [56] M. Hu, Y. Yang, Z. Xu, L. Guo. "Hybrid projective synchronization in chaotic complex nonlinear system", *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 79, pp. 449-457, 2008.
- [57] A. Khan, N. R Garg, G. Jain. "Hybrid projective synchronization and chaos control", *International Refereed Journal of Engineering and Science*, vol. 3(1), pp. 09-14, 2014.
- [58] C. L. Zhang, J. M. Li. " Hybrid Function projective synchronization of chaotic systems with uncertain Time-varying parameters via Fourier series expansion", *International Journal of Automation and Computing*, vol. 9(4), pp. 388-394, 2012.
- [59] E. Bai, K. E. Lonngren. "Sequential synchronization of two Lorenz systems using active control", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 11(7), pp. 1041-1044, 2008.
- [60] M. A. Ahan. "Synchronization of different 3-D chaotic systems by generalized active control", *J. Infor. Comp. Sci.*, vol. 7(4), pp. 272-283, 2012.
- [61] X. Tan, J. hang, Y. Yang. "Synchronizing chaotic systems using backstepping design", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 16(1), pp. 37-45, 2003.
- [62] S. Bowong, F. M. M. Moukam Kakmeni. "Synchronization of uncertain chaotic systems via backstepping approach", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 21(4), pp. 999-1011, 2004.
- [63] A. Gasri, A. Ouannas, "A General Control Method for Inverse Hybrid Function Projective Synchronization of a Class of Chaotic Systems", *International Journal of Mathematical Analysis*, vol. 9(5), pp. 429-436, 2015.

- [64] O. I. Olusola, A. N. Njah, U. E. Vincent, E. Ali. "Control and synchronization of chaos in biological systems via backstepping design", *International Journal of Nonlinear Science*, vol. 11(1), pp. 121-128, 2011.
- [65] K. S. Ojo, A. N. Njah. "A new active control method for control and tracking chaotic systems", *African Journal of Mathematical Physics*, vol. 9, pp. 59-71, 2010.
- [66] Q. Gan. "Exponential synchronization of generalized neural networks with mixed time varying delays and diffusion reaction via periodically intermittent control", *Chaos*, vol. 27(1) :013113, 2017.
- [67] B. Naderi, H. Kheiri . "Exponential synchronization of chaotic system and application in secure communication", *Opik-International Journal for Light and Electron Optics*, vol. 127, pp. 2107-2412, 2016.
- [68] K. S. Ojo, S. T. Ogunjo. "Synchronization of 4-D Rabinovich hyperchaotic systems for secure communication", *Journal of the Nigeria Association of Mathematical Physics*, vol. 21, pp. 35-40, 2012.
- [69] B. R. Nana Nbandjo, H. G. E. Kadji, H. A. Cerdeira. "Synchronization enhancement via an oscillatory bath in a network of self-excited cells", *Pramana-journal of Physics*, vol. 84(2), pp. 257-272, 2015.
- [70] E. B. M. Ngouonkadi, H. B. Fotsin, P. L. Fotso, V. K. Tamba, H. A. Cerdeira. "Bifurcations and multistability in the extended Hindmarsh-Rose neuronal oscillator", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 85, pp. 151-163, 2016.
- [71] A. C. Rodrigues, H. A. Cerdeira, B. S. Machado. "The influence of hubs in the structure of a neuronal network during an epileptic seizure", *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 225(1), pp. 75-82, 2016.
- [72] V. S. G. Martins, A. C. Rodrigues, H. A. Cerdeira, B. S. Machado. "Phase-lag synchronization analysis in complex systems with directed interrelations", *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 225 (1), pp. 41-49, 2016.

- [73] A. Mishra, S. Saha, C. Hens, P. K. Roy, M. Bose, P. Louodop, H. A. Cerdeira. "Coherent liberation to coherent rotational dynamics via chimeralike states and clustering in a Josephson junction array", *Physical Review E*. vol. 95(1) :010201, 2017.
- [74] K. S. Ojo, A. N. Njah, S. T. Ogunjo. "Comparison of backstepping and modified active control in projective synchronization of chaos in an extended Bonhoffer-van der Pol oscillator", *Pramana-journal of Physics*, vol. 80(5), pp. 825-835, 2013.
- [75] E. Padmanaban, R. Banerjee, S. K. Dana. "Targeting and control of synchronization in chaotic oscillators", *Int.J.of Bifurcation and Chaos in App. Sci. and Eng.*, vol. 22(7) :1250177(12 pp), 2012.
- [76] X. F. Li, A. C. S. Leung, X. P. Han, X. J. Liu, Y. D. Chu. "Complete (anti synchronization) of chaotic systems with fully uncertain parameters by adaptative control", *Nonlinear Dynamics*, vol. 63(1-2), pp. 263-275, 2011.
- [77] X. Zhang, H. Zhu. "Anti-synchronization of two different hyperchaotic systems via active and adaptative control", *International journal of Sciences*", vol. 6, pp. 216-223, 2008.
- [78] G. Zhang, Z. Liu, Z. Ma. "Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamical systems", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 32, pp. 773-779, 2007.
- [79] A. Ouannas. "A new generalized type of synchronization for discrete chaotic dynamical systems", *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. 10 (6) :061019-5, 2015.
- [80] J. Quiang. "Projective synchronization of new heperchaotic lorenz system chaotic systems", *Phys.Lett.A.*, vol. 370, pp. 40-45, 2007.
- [81] A. Ouannas, R. Abu-Saris. "On matrix projective synchronization and inverse matrix projective synchronization for different and identical dimensional discrete-time chaotic systems", *Journal of Chaos*, vol. 2016, Article ID 4912520, pp. 1-7.2016.

- [82] A. Ouannas, M. M. Al-sawalha. "On  $\Lambda - \phi$  generalized synchronization of chaotic dynamical systems in continuous-time", *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 225 (1), pp. 187-196, 2016.
- [83] A. Ouannas, M. M. Al-Sawalha. "Synchronization between different dimensional chaotic systems using two scaling matrices", *Optik -International Journal for Light and Electron Optics*, vol. 127, pp. 959-963, 2016.
- [84] A. Ouannas, Z. Odibat. "On inverse generalized synchronization of continuous chaotic dynamical systems", *Int. J. Appl. Comput. Math.*, vol. 2, pp. 1-11, 2016.
- [85] A. Ouannas, A. T. Azar, S. Vaidyanathan. "A robust method for new fractional hybrid chaos synchronization", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 40(5), pp. 1804-1812, 2017.
- [86] A. Gasri, A. Ouannas, K. S. Ojo, V. T. Pham. "Coexistence of generalized synchronization and inverse generalized synchronization between chaotic and hyperchaotic systems", *Nonlinear Analysis : Modelling and Control*, vol. 23(4), pp. 583-598, 2018.
- [87] R. Martínez-Guerra, C. D. Cruz-Ancona, C. A. Pérez-Pinacho. "Generalized multi-synchronization viewed as a multi-agent leader-following consensus problem", *Applied Mathematics and Computation*, vol. 282, pp. 226-236, 2016.
- [88] V. T. Pham, S. Jafari, C. Volos, A. Giakoumis, S. Vaidyanathan, T. Kapitaniak. "A chaotic system with equilibria located on the rounded square loop and its circuit implementation", *Circuits and Systems II : IEEE Transactions*. vol. 63(9), 2016.
- [89] S. Vaidyanathan., "Analysis, control and synchronization of a novel 4-D hyperchaotic system with hidden attractors", In : Azar A. T, Vaidyanathan S (eds) *Advances in Chaos Theory and Intelligent Control*, *Studies in computational intelligence*, Springer-Verlag, Germany, 2015.
- [90] V. T. Pham, C. Volos, S. Jafari, W. Zhouchao, X. Wang. "Constructing a novel no-equilibrium chaotic system", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 24(5), ID 1450073, 2014.

- [91] S. Vaidyanathan. "A novel 4-D hyperchaotic Thermalconvection system and its adaptive control", In : Azar A. T, Vaidyanathan S(eds) *Advances in Chaos Theory and Intelligent Control*, Studies in computational intelligence, Springer-Verlag, Germany, 2015.
- [92] A. Ouannas. "Coexistence of various synchronization types in hyperchaotic maps", *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, vol. 16(3), pp. 312-321, 2016.
- [93] A. Ouannas, G. Grassi. "A new approach to study coexistence of some synchronization types between chaotic maps with different dimensions", *Nonlinear Dynamics*, vol. 86(2), pp. 1319-1328, 2016.
- [94] A. Ouannas, A. T. Azar, V. Sundarapandian. "New hybrid synchronization schemes based on co-existence of various types of synchronization between master-slave hyperchaotic systems", *Int. J. Computer Applications in Technology*, vol. 55(2), pp. 112-120, 2017.
- [95] A. Ouannas, A. T. Azar, T. Ziar. "On inverse full state hybrid function projective synchronization for continuous-time chaotic dynamical Systems with arbitrary dimensions", *Differential Equations and Dynamical Systems*, pp. 1-14. DOI :10.1007/s12591-017-0362-x.
- [96] A. Ouannas, A. T. Azar, R. Abu-Saris. "A new type of hybrid synchronization between arbitrary hyperchaotic maps", *International journal of Learning Machin and Cybernetic*, vol. 8(6), pp. 1887-1894, 2017.
- [97] A. Ouannas. "Co-existence of various synchronization-types in hyperchaotic maps", *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, vol. 16(3), pp. 312-321, 2016.
- [98] A. Ouannas, S. Abdelmalek, S. Bendoukha. "Co-existence of some chaos synchronization types in fractiona-order differential equations", *Electronic Journal of Differential Equations*, vol. 2017(128), pp. 1-15, 2017.

- [99] A. Ouannas, X. Wang, V. T. Pham, T. Ziar. "Dynamic analysis of complex synchronization scheme between integer-order and fractional-order chaotic systems with different dimensions", *Complexity*, Article ID 4948392, 12 pages, 2017.
- [100] A. Ouannas, A. T. Azar, S. Vaidyanathan. "A new fractional hybrid chaos synchronization", *International Journal of Modelling, Identification and Control*, vol. 27(4), pp. 314-323, 2017.
- [101] A. Ouannas, G. Grassi. "Inverse Full State Hybrid Projective Synchronization for Chaotic Maps with Different Dimensions", *Chinest Physics B.*, vol. 25(9), pp. 090503-6, 2016.
- [102] G. Cai, L. Yao, P. Hu, X. Fang. "Adaptive full state hybrid function projective synchronization of financial hyperchaotic systems with uncertain parameters", *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B.*, vol. 18, pp. 2019-2028, 2013.
- [103] A. Gasri. "Different Schemes of Coexistence of Full State Hybrid Function Projective Synchronization and Inverse Full State Hybrid Function Projective Synchronization", *Non linear dynamics and systems theory*, vol. 18(2), pp. 154-169, 2018.
- [104] S. Vaidyanathan. "Global chaos synchronization of a novel 3-D chaotic system with two quadratic nonlinearities via active and adaptive control", In : Azar A.T, Vaidyanathan S (eds) *Advances in Chaos Theory and Intelligent Control, Studies in computational intelligence*, Springer-Verlag, Germany, 2016.
- [105] S. Vaidyanathan, C. K. Volos, V. T. Pham. "Hyperchaos, control, synchronization and circuit simulation of a novel 4-D hyperchaotic system with three quadratic nonlinearities", In : Azar A. T, Vaidyanathan S (eds) *Advances in Chaos Theory and Intelligent Control, Studies in computational intelligence*, Springer-Verlag, Germany, 2016.
- [106] S. Vaidyanathan. "A novel 3-D conservative Jerk chaotic system with two quadratic nonlinearities and its adaptive control", In : Azar A. T, Vaidyanathan S (eds)

Advances in Chaos Theory and Intelligent Control, Studies in computational intelligence, Springer-Verlag, Germany, 2016.

- [107] S. Vaidyanathan, A. T. Azar. "Qualitative study and adaptive control of a novel 4-D hyperchaotic system with three quadratic nonlinearities", In : Azar A. T., Vaidyanathan S (eds) Advances in Chaos Theory and Intelligent Control, Studies in computational intelligence, Springer-Verlag, Germany, 2016.

# Résumé

Dans la dernière décennie, la synchronisation de chaos a été amplement explorée et étudiée à cause de ses applications potentielles dans les communications, les réactions chimiques, les systèmes biologiques, la science de l'information, etc. De ce fait, diverses approches ont été proposées pour la synchronisation des systèmes chaotiques, comme la synchronisation complète, la synchronisation généralisée, la synchronisation projective, etc.

Récemment, la synchronisation (**HFPS**) des systèmes chaotiques est largement considérée. D'autre part, étudier le problème inverse de ce schéma produit un nouveau type de synchronisation notée (**IHFPS**) est une idée séduisante et importante. Alors, nous avons introduit dans cette thèse la synchronisation (**IHFPS**) pour une classe générale de systèmes chaotiques à 5-D en temps continu. Le résultat tiré est prouvé en utilisant la théorie de stabilité de Lyapunov.

Plus récemment, les nouvelles recherches ont porté sur l'étude de la combinaison de plusieurs types de synchronisation. Par conséquent, et en premier temps, nous avons construit un nouveau type de synchronisation chaotique hybride basé sur la coexistence de la synchronisation généralisée (**GS**) et son inverse (**IGS**). En utilisant la théorie de stabilité de Lyapunov et la théorie de la stabilité des systèmes linéaires à temps continu, quelques conditions suffisantes sont dérivées pour prouver l'existence de (**GS**) et (**IGS**) entre un système maître à 3-D et un système esclave à 4-D en 3D et 4D, respectivement. Dans un second temps, nous avons illustré des nouveaux schémas qui prouvent la coexistence de la synchronisation (**FSHFPS**) et de son inverse (**IFSHFPS**) entre un système maître à 3-D et un système esclave à 4-D en 4D et 3D. Quelques exemples avec simulations numériques nous ont permis de vérifier l'efficacité des analyses théoriques développées ici.

## Mots clés

*Chaos, Erreur de synchronisation, Stabilité de Lyapunov, Synchronisation généralisée, Synchronisation Projective, Systèmes Dynamiques, Vecteur de contrôle.*



# Abstract

In recent years, chaos synchronization has been widely explored and studied because of its potential applications, such as in secure communication, chemical reactions, biological systems, information science. Thereby, a variety of approaches have been proposed for the synchronization of chaotic systems, such as complete synchronization, generalized synchronization and projective synchronization.

Recently, hybrid function projective synchronization (**HFPS**) for chaotic systems is extensively considered. On the other hand, studying the inverse problem of this scheme with produce, a new synchronization type called Inverse Hybrid Function Projective Synchronization (**IHFPS**), is an attractive and important idea. So, we introduce in this thesis the **IHFPS** for 5-D general class of chaotic systems in continuous-time. To achieve **IHFPS**, we use the lyapunov stability theory.

More recently, new research has focused on studying the combination of several types of synchronization. Therefore, at the first, we constructed a new type of hybrid chaos synchronization based on the on coexistence of **Generalized Synchronization (GS)** and its inverse (**IGS**). By using Lyapunov stability theory and stability theory of linear continuous-time, some sufficient conditions are derived to prove the existence of (**GS**) and (**IGS**) between 3-D master system and 4-D slave hyperchaotic system in 3D and 4D, respectively. Secondly, we illustrate new schemes which prove the existence of the **Full State Hybrid Function Projective Synchronization (FSHFPS)** and its inverse (**IFSHFPS**) between a 3-D master system and a 4-D salve system in 4D and 3D, respectively. Some examples with numerical simulations allowed us to verify the effectiveness of the theoretical analyzes developed herein.

## Key words

*Chaos, Synchronization Error, Lyapunov Stability, Generalized Synchronization, Projective Synchronization, Dynamical Systems, Vector Controllers.*

## ملخص

في العشرية الأخيرة، عرفت البحوث المتعلقة بمزامنة الفوضى انتشارا واسعا حيث قدمت العديد من الدراسات ويرجع ذلك إلى تطبيقاتها المتنوعة لا سيما في مجالات الاتصالات المؤمنة، التفاعلات الكيميائية، الأنظمة البيولوجية، الإعلامية، وغيرها. على هذا الأساس، اقترحت مجموعة متنوعة من النهج لتزامن الفوضى لجمليتين فوضويتين، مثل المزامنة المكتملة، العامة، المتبادلة، الخ.

حديثا، عرفت مزامنة الدالة المتبادلة الهجينة (HFPS) للجمل الفوضوية توسعا ملحوظا. من ناحية أخرى، دراسة المشكلة العكسية لهذا المنهاج ينتج منهاجا جديدا يسمى المزامنة الدالة المتبادلة الهجينة العكسية، ويعتبر ذلك فكرة جذابة وهامة. وعليه، في هذه الأطروحة سنقدم المزامنة الدالة المتبادلة الهجينة العكسية (IHFPS) لقسم عام من الأنظمة الفوضوية ذات خمسة أبعاد في الزمن المستمر. لتحقيق هذه المزامنة، نقترح نظرية الإستقرار لليابونوف.

في الآونة الأخيرة، تركزت البحوث الجديدة على إيجاد التعايش بين أنواع مختلفة من المزامنات. في هذا الإطار، وفي مرحلة أولى، قمنا بتحقيق الجمع بين المزامنة العامة (GS) وعكسها (IGS) للأنظمة الديناميكية الفوضوية ذات ثلاثة وأربعة أبعاد باستخدام نظرية الاستقرار لليابونوف ونظرية استقرار الأنظمة الخطية المستمرة. في المرحلة الثانية، أثبتنا الجمع بين المزامنة الهجينة (FSHFPS) و معكوسها (IFSHFPS) للأنظمة الديناميكية ذات أربعة وثلاثة أبعاد على التوالي.

الأمثلة العددية و النمذجة الرقمية تؤكد فعالية التحليل النظري الذي تم عرضه في هذه الأطروحة.

**الكلمات المفتاحية:** الفوضى، خطأ المزامنة، إستقرار ليابونوف، المزامنة العامة، المزامنة المتبادلة، الأنظمة الديناميكية، شعاع المراقبة.