

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique
Université de Constantine
Institut de Mathématiques

THESE
En vue de l'obtention du diplôme de Magister

INTITULEE
FIABILITE
Des Systèmes -K-Parmi-M-Consécutifs-Sur-N

Présentée par :
NAMIR GHORAF

Devant le jury d'examen :

Président	: D. AISSANI	Prof	Bejaia
Rapporteur	: B. KSIR	Prof	Constantine
Examineur	: B. MEZERDI	M.C	Biskra
Examineur	: A. AISSANI	Prof	Blida
Examineur :	: H.Ould rouis	M.C	Blida

Soutenue à Constantine 1998



REMERCIEMENTS



Je remercie Monsieur B.KSI d'avoir accepté de diriger les travaux de ma thèse. Je le remercie aussi pour toute l'aide et le suivi qu'il a témoigné pour que je puisse finir ce travail ainsi que la confiance qu'il m'a prodiguée.

Je remercie monsieur D.Aissani professeur à l'université de Béjaia qui a accepté de présider le jury de ma thèse.

Je remercie Monsieur A.Aissani professeur à l'université de Blida et Monsieur B.Mezzerdi d'avoir accepté de juger ma thèse.

Je remercie tous mes collègues de l'institut de Mathématiques qui m'ont donné beaucoup de conseils.

Je remercie toute l'équipe du projet de recherche option Fiabilité et particulièrement Mahmoud Boushaba.

TABLE DE MATIERE

I-Introduction	
II-Rappels	
II-1: Systèmes "k-parmi-n"	
II-1-1 Définition	
II-1-2 Propriétés	
II-1-3 Loi limite du temps de panne du système.	
II-2 Systèmes "k-consécutifs-sur-n"	
II-2-1 Définition	
II-2-2 Propriétés	
II-2-3 Loi limite du temps de panne du système dont la loi de panne des composants est quelconque.	
III Systèmes "k-parmi-m-consécutifs-sur-n".	
III-1 Définition.	
III-2 Propriétés déterministes.	
III-3 Définition (coupe minimale).	
III-4 Calcul de la fiabilité du système.	
III-5 Bornes de la fiabilité du système.	
III-6 Arrangement optimal et importance en fiabilité des composants dans le système.	
IV- Théorèmes asymptotiques pour le temps de panne d'un système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n".	

IV-1 Stabilité asymptotique de la loi de Weibull par composition de structure k-parmi-m-consécutifs-sur-n.

IV-1-1 Cas où les composants sont indépendants et de même loi de panne.

IV-1-2 Cas où les composants sont indépendants et de lois de panne non identiques.

IV-2 Loi limite du temps de panne d'un système dont les composants ont des temps de panne de loi quelconque.

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION :

Notre travail est une étude systématique des systèmes k -parmi- n -consécutifs-sur- n . Ceux-ci généralisent les systèmes k -consécutifs-sur- n et les systèmes k -parmi- n .

On définit un système k -consécutifs-sur- n comme un système qui comporte n composants disposés linéairement ou circulairement et qui tombe en panne si et seulement si au moins k composants consécutifs ($k \leq n$) sont en panne. Ces systèmes sont utilisés particulièrement dans les domaines de la télécommunication, des circuits intégrés, pompage de pétrole par pipelines... [3],[4],[5]. Ils ont été introduits par Kontoleon [1] en 1980 et ils ont fait l'objet de plusieurs travaux dans lesquels soit on propose des formules de calcul direct de la fiabilité du système soit on donne un encadrement de celle-ci. On utilise des méthodes probabilistes ou algorithmiques sous des hypothèses diverses. Pour plus de détails on peut consulter par exemples S.Papastavridis et M.Lambiris [8], J.G.Shanthikumar [7], F.K.Hwang [6], Derman [4], Chiang et Nui [2], Bollinger et Salvia [3]. L'étude asymptotique du temps de panne de ces systèmes a également fait l'objet de beaucoup de publications. Dans Papastavridis [9] (1987) établit un théorème de stabilité pour la loi de Weibull dans le cas où les composants sont supposés indépendants et de même loi de Weibull, en 1990 Chrissaphinou et Papastavridis [10] ont démontré un résultat analogue mais dans un cadre plus général où les composants sont supposés

indépendants et non nécessairement identiques (les temps de panne des composants sont distiribués suivant des lois Weibull).

Ici, nous nous intéressons à d'autres types de systèmes dont la configuration est plus compliquée: les systèmes k -parmi- m -consécutifs-sur- n . Ils sont définis comme suit: un système k -parmi- m -consécutifs-sur- n est un système comportant n composants disposés linéairement où circulairement et qui tombe en panne si et seulement si au moins k composants parmi m consécutifs sont en panne ($k \leq m \leq n$). On remarque que pour $m = k$ et $m = n$ on retrouve les systèmes " k -consécutifs-sur- n " et les systèmes " k -parmi- n " respectivement. On les rencontre souvent dans les problèmes de controle de qualité, les procédures d'inspections, et dans les problèmes de détection des radars [19],[21],[27]. Ces systèmes ont été introduits dans la littérature mathématique par W.S. GRIFITH [18] en 1986. Cet article présente une méthode pour déterminer la fiabilité du sytsème dans le cas ou les composants sont supposés indépendants et de même probabilité de panne via les chaines de Markov. Beaucoup de résultats existent dans le cas ou les composants du système sont supposés indépendants mais non nécessairement identiques: S.G. Papastavridis et M.Sfakianakis [22] (1991) donnent l'arrangement optimal des composants dans le système, J.Cai [21] (1994), Papastavridis et Koutras [20] (1993) proposent un encadrement de la fiabilité du système, M.Sfakianakis, S.Kounias et A.Hilaris [19] (1992) établissent une formule explicite pour la valeur de la fiabilité du système dans le cas i.i.d. L'étude asymptotique du temps de panne du système a

également fait l'objet de quelques travaux, dans [24] (1988) on démontre un théorème de stabilité pour la loi de Weibull dans le cas où les composants du système sont supposés indépendants et dont les temps de panne sont distribués suivant une loi de Weibull. Il est important de remarquer que même dans le cas le plus simple (cas i.i.d) le calcul de la fiabilité de tels systèmes est loin d'être une tâche facile.

Pour mieux présenter les systèmes "k-parmi-m-consécutifs-sur-n", nous rappelons d'abord les propriétés des systèmes "k-parmi-n" et "k-consécutifs-sur-n", ce qui nous permettra par la suite de procéder à des comparaisons de résultats. Ensuite nous généralisons le résultat donné dans [24] au cas où les composants sont supposés indépendants et dont les temps de panne sont distribués suivant des lois de Weibull non nécessairement identiques. Enfin nous démontrons un théorème asymptotique pour le temps de panne d'un système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n" en supposant les composants identiques mais de loi de panne quelconque. Pour établir ce théorème nous proposons d'abord un encadrement de la probabilité de panne du système [théorème (IV.2.1) page 58]. Ainsi nous montrons que pour une loi quelconque F du temps de panne des composants et sous des conditions réalistes sur F , la loi limite lorsque le nombre de composants tend vers l'infini, est du type de Weibull. Ce qui constitue une généralisation des résultats connus [9], [24] où il est supposé que la loi F des temps de panne des composants est de Weibull. Nous traitons quelques exemples de lois suffisamment générales pour les applications.

NOTATIONS USUELLES:

n : nombre de composants dans le système.

m : la série de m composants consécutifs sur n ($m \leq n$).

k : le nombre minimum de composants en panne dans une série de longueur m qui cause la panne du système ($k \leq m$)

X_i : L'état du composant i ($i = 1, 2, \dots, n$) $X_i = 1$ ou 0 suivant que le composant i fonctionne ou tombe en panne. $i = 1, 2, \dots, n$.

$$1-X = (1 - X_1, 1 - X_2, \dots, 1 - X_n)$$

$$(1_i, X) = (X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \dots, X_n) \text{ , } i = 1, 2, \dots, n.$$

$$(0_i, X) = (X_1, X_2, \dots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \dots, X_n) \text{ , } i = 1, 2, \dots, n.$$

$I_i(i)$: Importance relative du composant i .

$\Phi(X)$: la fonction de structure du système.

$$\binom{x}{y} = \frac{x!}{y!(x-y)!}.$$

q_i : la probabilité de panne du composant i .

$$p_i : 1 - q_i$$

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

$R(n, m, k)$: Fiabilité du système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n".

$R(n, k, k)$: Fiabilité du système "k-consécutifs-sur-n"

I_i : Importance en fiabilité du composant i .

A^c : Le complémentaire de l'ensemble A ..

On précise qu'un composants ne possède que deux états il fonctionne où il est en panne, cette dichotomie est valable aussi pour le système lui même (cas binaire).

II) RAPPELS

II-1) SYSTEMES k-PARMI-n:

I-1-1) DEFINITION:

Un système "k-prmi-n" est un système formé de n composants et qui fonctionne si et seulement si au moins k ($k \leq n$) composants fonctionnent. Autrement dit: $\Phi(x) = 1$ si et seulement si au moins k coordonnées du vecteur x valent 1.

Notations:

x_i : variable indiquant l'état du composant i, $i = 1, 2, \dots, n$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $1 - x = (1 - x_1, 1 - x_2, \dots, 1 - x_n)$

$$\prod_{i=1}^n x_i = \max_{1 \leq i \leq n} x_i, \quad \prod_{i=1}^n x_i = \min_{1 \leq i \leq n} x_i$$

La fonction de structure du système est donnée par:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i \geq k \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i < k \end{cases}$$

Ou bien:

$$\Phi(X) = \{X_1, X_2, \dots, X_k\} \prod \{X_1, X_2, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}\} \prod \dots \prod \{X_{n-k+1}, X_{n-k+2}, \dots, X_n\}$$

a) Pour $k=1$ on obtient un système en parallèle

$$\Phi(X) = \prod_{i=1}^n X_i = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - X_i) = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$$

b) Pour $k=n$ on obtient un système en série

$$\Phi(X) = \prod_{i=1}^n X_i = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$$

II-1-2) PROPRIETES.

1) Le dual d'un système "k-parmi-n" est un système "n-k+1-parmi-n"

2) L'importance relative du $i^{ème}$ composant est donnée par la formule:

$$I_{\Phi}(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{k-1}$$

pour tout $i, i = 1, 2, \dots, n$

3) Dans un système "k-parmi-n" chaque sous ensemble de $(n-k+1)$ composants constitue une coupe minimale. Donc le nombre de coupes minimales vaut $\binom{n}{n-k+1}$.

4) La fiabilité d'un système "k-parmi-n" dont les composants sont supposés indépendants et de même fiabilité p est calculée par la formule suivante:

$$r(n, k, p) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

où: $r(n, k, p)$ désigne la fiabilité du système.

5) L'importance en fiabilité du $i^{ème}$ composant est donnée par:

$$I_i = r(n-1, k-1, p) - r(n-1, k, p)$$

où: $r(n-1, k-1, p)$ ($r(n-1, k, p)$ respectivement) est la fiabilité du système "k-1-parmi-n-1" (k-parmi-n-1 respectivement).

Démonstration:

1) Notons par Φ^D la fonction duale de Φ . Par définition on a:

$$\Phi^D(x) = 1 - \Phi(1-x)$$

$$\text{Or: } \Phi(1-x) = \begin{cases} 1 \text{ si } \sum_{i=1}^n (1-x_i) \geq k \\ 0 \text{ si } \sum_{i=1}^n (1-x_i) < k \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ si } \sum_{i=1}^n x_i < n-k+1 \\ 0 \text{ si } \sum_{i=1}^n x_i \geq n-k+1 \end{cases}$$

D'où:

$$\Phi^D(x) = 1 - \Phi(1-x) = \begin{cases} 0 \text{ si } \sum_{i=1}^n x_i < n-k+1 \\ 1 \text{ si } \sum_{i=1}^n x_i \geq n-k+1 \end{cases}$$

Ce qui signifie que $\Phi^D(X)$ est la fonction de structure d'un système " $n-k+1$ -parmi- n "

2) On sait que dans une structure cohérente l'importance relative du $i^{\text{ème}}$ composant est donnée par:

$$I_{\Phi}(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\{x, x_i=1\}} (\Phi(1_i, x) - \Phi(0_i, x))$$

Or pour une structure " k -parmi- n " $\Phi(x) = 1$ si et seulement si au moins k coordonnées du vecteur x valent 1 donc:

$$\Phi(1_i, x) - \Phi(0_i, x) = 1_{\{x_1+x_2+\dots+x_{i-1}+x_{i+1}+\dots+x_n \geq k-1\}}$$

Cette quantité vaut 1 pour $\binom{n-1}{k-1}$ valeurs de $(1_i, x)$. D'où:

$$I_{\Phi}(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{k-1} \forall i = 1, 2, \dots, n$$

3) Il est clair que $(n-k+1)$ est le nombre minimum de composants en panne qui cause la panne du système.

4) On a: $r(n, k, p) = \Pr(\Phi(X) = 1) = \Pr\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq k\right)$. Or les variables aléatoires $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ sont supposées indépendantes et de même loi. D'où le résultat attendu.

5) On sait que:

$$l_i = r(l_i, p) - r(0_i, p) \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Or: $r(l_i, p) = r(n-1, k-1, p)$ et $r(0_i, p) = r(n-1, k, p)$.

II-1-3) LOI LIMITE POUR LE TEMPS DE PANNE DU SYSTEME.

Le temps de panne Z_n d'un système "k-parmi-n" est la $(n-k+1)^{ieme}$ statistique d'ordre de la suite de variables aléatoires $T_i, i = 1, 2, \dots, n$, c'est à dire $Z_n = T_{(n-k+1)}$, où $T_1, T_2, \dots, T_n$ sont les temps de panne respectifs des composants 1, 2, ..., n.

Smirnov (1952) a démontré que trois types de lois sont possibles pour le temps de panne $T_{(k)}$:

- 1) $\frac{1}{(k-1)!} \int_0^{x^\alpha} u^{k-1} \exp(-u) du$ pour $x > 0, \alpha > 0$
- 2) $\frac{1}{(k-1)!} \int_0^{|x^\alpha|} u^{k-1} \exp(-u) du$ pour $x < 0, \alpha > 0$
- 3) $\frac{1}{(k-1)!} \int_0^{\exp(x)} u^{k-1} \exp(-u) du$ pour $-\infty < x < +\infty$.

II-2) SYSTEMES "k-CONSECUTIFS-SUR-n".

II-2-1) DEFINITION.

Un système "k-consécutifs-sur-n" est un système formé de n composants disposés linéairement ou circulairement et qui tombe en panne si et seulement si k composants consécutifs sont en panne.

a) Pour $k=1$ on obtient un système en série.

b) Pour $k=n$ on obtient un système en parallèle.

II-2-2) PROPRIETES DETERMINISTES.

On désigne par $N(j, r, m)$ le nombre de façons de placer j 0 entre r 1 sans qu'il ait plus de m 0 entre deux 1.

1) Cas linéaire: Les composants du système sont disposés linéairement.

La fonction de structure est:

$$\Phi_L(X) = \prod_{i=1}^{n-k+1} \prod_{j=i}^{i+k-1} X_j = \max_{1 \leq i \leq n-k+1} \min_{i \leq j \leq i+k-1} X_j$$

La fonction duale s'écrit:

$$\Phi_L^D(X) = \prod_{i=1}^{n-k+1} \prod_{j=i}^{i+k-1} X_j = \min_{1 \leq i \leq n-k+1} \max_{i \leq j \leq i+k-1} X_j$$

c) L'importance relative du composant i est donnée par les formules suivantes:

◇ Pour $i = 1, 2, \dots, k$:

$$I_{\Phi_L}(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=0}^{i-1} \left\{ 2^m \sum_{j=0}^{n-k-m-1} N(j, n-k-m-j, k-1) \right\}$$

◇ Pour $i = k+1, k+2, \dots, n-k$

$$l_{\Phi_L}(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=0}^{k-1} \left\{ \left[\sum_{j=0}^{i-m-1} N(j, i-m-j, k-1) \right] \left[\sum_{j=0}^{n-i-m-k} N(j, n-i-k-m+1, k-1) \right] \right\}$$

Par symétrie on a:

$$l_{\Phi_L}(1) = l_{\Phi_L}(n), l_{\Phi_L}(2) = l_{\Phi_L}(n-1), \dots, l_{\Phi_L}(k) = l_{\Phi_L}(n-k+1)$$

2) Cas circulaire. Les composants du système sont disposés circulairement.

La fonction de structure Φ_C et sa duale Φ_C^D s'écrivent:

$$\Phi_C(X) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=i}^{i+k-1} X_j = \max_{1 \leq i \leq n} \min_{i \leq j \leq i+k-1} X_j$$

$$\Phi_C^D(X) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=i}^{i+k-1} X_j = \min_{1 \leq i \leq n} \max_{i \leq j \leq i+k-1} X_j$$

c) L'importance relative du composant i vaut:

$$l_{\Phi_C}(i) = \frac{k}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{n-k-2} N(j, n-j-k-1, k-1), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

3) Chaque sous ensemble de k composants consécutifs constitue une coupe minimale. Il y'a $(n-k+1)$ coupes minimales dans le cas linéaire.

Les démonstrations de ces propriétés se trouvent dans [12].

PROPRIETES STOCHASTIQUES.

Les systèmes "k-consécutifs-sur-n" ont fait l'objet de plusieurs travaux dans lesquels soit on propose des formules de calcul direct de la fiabilité du système, soit on donne un encadrement de celle-ci. On utilise des méthodes probabilistes ou algorithmiques sous des hypothèses diverses.

L'étude asymptotique du temps de panne de ces systèmes a également fait l'objet de beaucoup de publications. Dans [9] (1987) on établit un théorème de stabilité pour la loi de Weibull dans le cas où les composants sont supposés indépendants et de même loi de Weibull, très récemment en 1990 Chrissaphinou et Papastavridis [10] ont démontré un résultat analogue mais dans un cadre plus général où les composants sont supposés indépendants et non nécessairement identiques (les temps de panne des composants sont distribués suivant des lois de Weibull). Nous rappelons quelques résultats importants.

Cas où les composants sont indépendants et de même fiabilité:

La fiabilité du système est calculée explicitement dans [13] par les formules:

$$R_L(p, n, k, k) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i p^{i-1} q^{ki} \left[\binom{n-ki+1}{i} - q \binom{n-ki}{i} \right] \text{ pour } k \geq 1$$

$$R_C(p, n, k, k) = \sum_{i \geq 0} (-pq^k)^i \binom{n-ki}{i} - q^n + k \sum_{i \geq 0} (-pq^k)^{i+1} \binom{n-k(i+1)-1}{i}$$

Les bornes de la fiabilité sont données dans [4] par:

$$(1 - q^k)^{n-k+1} < R_L(p, n, k, k) \leq (1 - q^k + q^{k+1})^{n-k+1}$$

Cas où les composants sont non identiques:

Dans ce cas le calcul exacte de La fiabilité du système est très compliqué. Pour cette raison on démontre des formules récursives dans [7],[14],[15] permettant le calcul de celle-ci.

Les bornes de la fiabilité sont de la forme [16].

$$\prod_{i=k}^n \left(1 - \prod_{j=i-k+1}^i q_j \right) \leq R_L(n, k, k) \leq \prod_{i=k}^n \left(1 - \prod_{j=i-k+1}^i q_j + \frac{q_{i-k}}{p_{i-k}} \prod_{j=i-k+1}^i q_j \right).$$

II.2.3) LOI LIMITE DU TEMPS DE PANNE DU SYSTEME DONT LA LOI DE PANNE DES COMPOSANTS EST QUELCONQUE

On considère un système "k-consécutifs-sur-n" dont les composants sont disposés linéairement. Ici, on suppose que les composants sont indépendants et de même loi de panne, et on désigne par $F(t)$ leur distribution de panne commune. On démontre que la distribution limite du temps de panne du système est une loi de Weibull. Donc, on généralise le résultat particulier [9] donné dans le cas où la loi de panne des composants est une loi de Weibull.

Nous avons besoin des notations suivantes:

$T_1, T_2, \dots, T_n$ sont les temps de panne respectifs des composants 1, 2, ..., n du système. Le temps de panne Z_n du système est donné par:

$$Z_n = \min_{i \in \{n-k+1, \dots, n\}} \max_{j \in \{i-k+1, \dots, i\}} T_j$$

On définit les quantités suivantes:

$$F_i(t) = \Pr[T_i \leq t] = F(t) \text{ pour tout } i, i = 1, 2, \dots, n$$

$$P_j(t) = \prod_{i=1}^{n-k+1} F_i(t) = F^k(t)$$

$$\sum_{j=1}^{n-k+1} P_j(t) = (n-k+1)F^k(t)$$

Le résultat que nous allons exposer est du à B.Ksir [17]. Il est basé sur un résultat donnant un encadrement de la distribution de panne du système.

THEOREME (II.2.3.1).

Sous les considérations ci-dessus et pour tout entier $\ell \geq 1$ tel que $k \leq k\ell \leq n$, on a:

$$\frac{1}{D(t)} \left(\left\lfloor \frac{n}{k\ell} \right\rfloor - 1 \right) F^k(t) k\ell \leq \Pr[Z_u \leq t] \leq (n - k + 1) F^k(t), t \geq 0$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x et

$$D(t) = 1 + F(t)(2k - 2) + (k\ell - 2k + 1)F^k(t).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \Pr[Z_u \leq t] &= \Pr \left[\min_{1 \leq j \leq n-k+1} \max_{j \leq i \leq j+k-1} T_i \leq t \right] \leq \sum_{j=1}^{n-k+1} \Pr \left[\max_{j \leq i \leq j+k-1} T_i \leq t \right] \leq \\ &\sum_{j=1}^{n-k+1} \prod_{i=j}^{j+k-1} \Pr[T_i \leq t] = \sum_{j=1}^{n-k+1} P_j(t) = (n - k + 1) F^k(t) \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour t fixé considérons la variable aléatoire $Y_j(t)$,

$j = 1, 2, \dots, n - k + 1$, qui prend la valeur 1 si et seulement si tous les composants $j, j + 1, \dots, j + k - 1$ sont en panne et la valeur 0 sinon. D'autre part, définissons la variable aléatoire $Y(t) = \sum_{j=1}^{n-k+1} Y_j(t)$. On remarque que le système tombe en panne si et seulement si $Y(t) > 0$.

Il est clair que : $E(Y(t)) = \sum_{j=1}^{n-k+1} P_j(t) = (n - k + 1) F^k(t)$. On peut écrire:

$$\begin{aligned} \Pr[Z_u \leq t] &= \Pr(Y(t) > 0) \geq \Pr \left(\bigcup_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{k\ell} \right\rfloor - 1} \bigcup_{j=ik\ell+1}^{(i+1)k\ell} (Y_j(t) = 1) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{k\ell} \right\rfloor - 1} \Pr \left(\bigcup_{j=ik\ell+1}^{(i+1)k\ell} (Y_j(t) = 1) \right). \end{aligned}$$

$$\text{Mais : } \Pr \left(\bigcup_{j=ik\ell+1}^{(i+1)k\ell} (Y_j(t) = 1) \right) = \Pr \left(\sum_{j=ik\ell+1}^{(i+1)k\ell} Y_j(t) > 0 \right)$$

De l'inégalité de Schwartz il est possible de démontrer que:

$$\Pr[Y > 0] \geq \frac{(E(Y))^2}{E(Y^2)} \text{ pour toute variable aléatoire } Y \geq 0.$$

Donc:

$$\Pr\left(\sum_{j=ik\ell+1}^{(i+1)k\ell} Y_j(t) > 0\right) \geq \frac{\left(\sum_{j=ik\ell+1}^{(i+1)k\ell} E(Y_j(t))\right)^2}{E\left(\sum_{j=ik\ell+1}^{(i+1)k\ell} Y_j(t)\right)} \geq \frac{k\ell F^k(t)}{1+(2k-2)F(t)+(\ell k-2k-1)F^k(t)} \text{ pour } t > 0$$

En posant: $D(t) = 1 + (2k-2)F(t) + (\ell k-2k-1)F^k(t)$ on obtient:

$$\Pr[Z_n \leq t] \geq \frac{\left(\left[\frac{n}{k\ell}\right]-1\right)}{D(t)} k\ell F^k(t), \quad t > 0 \dots \dots \dots (2)$$

En combinant les inégalités (1) et (2) on obtient le résultat. ■

THEOREME (II.2.3.2):

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} nF^k(a(n,k)t) = \Delta(t)$, ($0 \leq \Delta(t) \leq 1$) avec $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n,k) \rightarrow 0$, on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[a^{-1}(n,k)Z_n \leq t] = \Delta(t).$$

Démonstration:

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} nF^k(a(n,k)t) = \Delta(t)$ on a: $\lim_{n \rightarrow \infty} (n-k+1)F^k(a(n,k)t) = \Delta(t)$

Il suit que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(Z_n \leq a(n,k)t) \leq \Delta(t) \dots \dots \dots (3)$$

D'autre part si on prend dans le théorème (II.2.3.1) $\ell = \ell_n$ tel que $\ell_n \rightarrow \infty$ et $\frac{\ell_n}{n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ (par exemple $\ell_n = [c \log n]$, $c > 0$) on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(a(n,k)t) = 1.$$

Par conséquent:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(Z_n \leq a(n,k)t) \geq \Delta(t) \dots \dots \dots (4)$$

En combinant (3) et (4) on obtient le résultat. ■

Maintenant, nous cherchons la distribution limite de la variable aléatoire normée $a^{-1}(n,k)Z_n$ où $a(n,k) > 0$ est une fonction convenablement choisie.

THEOREME (II.2.3.3).

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} nF^k(a(n,k)t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n F^k(a(\ell_n,k)t) = \Delta(t)$, ($0 \leq \Delta(t) \leq 1$), tel que $a(n,k) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, et pour $\ell_n = c \log n$, $c > 0$.

On a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr [a^{-1}(n,k)Z_n \leq t] = \begin{cases} 1 - \exp(-t^\alpha), & \text{pour } \alpha > 0, t > 0 \\ 0, & \text{pour } t \leq 0 \end{cases}$$

Démonstration:

On considère un système comportant n blocks disposés en parallèle tel que chaque block contient ℓ_n composants ($\ell_n \geq k$) disposés en série. La fonction de fiabilité de chaque composant est $\overline{F^k}(t) = 1 - F^k(t)$. Donc, on a un système "séries-parallèle" régulier et homogène [28] dont la fonction de distribution de panne est donnée par la formule:

$$R_n(t) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \overline{F^k}(t)^{\ell_n}\right)$$

Il est clair que si $V(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \overline{F^k}(\alpha_n t + \beta_n)^{\ell_n}$ avec $\alpha_n > 0$, $\beta_n > 0$. On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(\alpha_n t + \beta_n) = \exp(-V(t)).$$

Mais:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \overline{F^k}(\alpha_n t + \beta_n)^{\ell_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \exp \left[\ell_n \log \left(1 - F^k(\alpha_n t + \beta_n) \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \exp \left[-\ell_n \left(F^k(\alpha_n t + \beta_n) + o \left(F^k(\alpha_n t + \beta_n) \right) \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \exp \left[-\ell_n \left(F^k(\alpha_n t) + \beta_n F^k(\zeta) + o \left(F^k(\alpha_n t) + \beta_n F^k(\zeta) \right) \right) \right]$$

$$, \alpha_n t \searrow \zeta \searrow \alpha_n t + \beta_n$$

En choisissant $\alpha_n = a(n, k)$ tel que: $\lim_{n \rightarrow \infty} n F^k(a(n, k)t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n F^k(a(\ell_n, k)t)$

, $\beta_n = 1$ et $\ell_n = c \log n$ et $c = F^{-k}(\zeta)$, $\zeta > 0$ on obtient:

$$V(t) = \exp \{ -(\Delta(t) + o(\Delta(t))) \}.$$

Or d'après la deuxième partie du théorème 1 [28] on a:

$$V(t) = \begin{cases} \exp(-t^\alpha), & \text{pour } t \geq 0, \quad \alpha > 0 \\ 0, & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

Donc: $\Delta(t) + o(\Delta(t)) = t^\alpha$, pour $t \geq 0$

Ce qui équivaut à:

$$1 - \exp(-\Delta(t)) = t^\alpha, \quad t \geq 0 \quad (\text{i.e. } -\Delta(t) = \log(1 - t^\alpha) = -t^\alpha - o(t^\alpha))$$

Par conséquent:

$$\Delta(t) = t^\alpha + o(t^\alpha) = 1 - \exp(-t^\alpha), \quad t \geq 0.$$

En utilisant le théorème (II.2.3.2) on obtient le résultat. ■

EXEMPLES.

1. $F(t) = (\lambda t)^\beta + o(t^\beta)$, i.e: $F = \text{Weib}(\lambda t, \beta)$ on prend $a(n, k) = \frac{1}{\lambda n^{k\beta}}$.

$$\text{On a: } \lim_{n \rightarrow \infty} n F^k(a(n, k)t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n F^k(a(\ell_n, k)t) = t^{k\beta} + t^{k\beta} o(1).$$

Donc on déduit du théorème (II.2.3.3):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr \left(a^{-1}(n, k) Z_n \leq t \right) = 1 - \exp(-t^\alpha), \quad \alpha = k\beta > 0.$$

C'est à dire $\lambda n^{\frac{1}{k\alpha}} T_n \rightarrow \text{Weib}(t, \alpha)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

2. $F(t) = \int_0^t \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} s^{\beta-1} \exp(-\mu s) ds = \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} (1 - \exp(-\mu t))$, $F(t)$ est la fonction de distribution de la loi gamma.

Si: $a(n, k) = \left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\mu^{k\beta} n} \right)^{\frac{1}{k\beta}}$, on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n F^{k\beta}(a(n, k)t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n F^{k\beta}(a(\ell_n, k)t) = t^{k\beta} + t^{k\beta} o(1).$$

Alors d'après le théorème (II.2.3.3) on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(a^{-1}(n, k) Z_n \leq t) = 1 - \exp(-t^\alpha), \alpha = k\beta > 0.$$

3. $F(t) = (\lambda t)^\beta + t^\beta o(1) + t^\beta \Psi(t)$, avec $\lim_{t \rightarrow 0} \Psi(t) = 0$.

En prenant: $a(n, k) = \left(\frac{1}{\lambda n^{k\beta}} \right)^{\frac{1}{k\beta}}$ on obtient:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n F^{k\beta}(a(n, k)t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n F^{k\beta}(a(\ell_n, k)t) = t^{k\beta} + t^{k\beta} o(1).$$

En utilisant le théorème (II.2.3.3) on trouve:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(a^{-1}(n, k) Z_n \leq t) = 1 - \exp(-t^\alpha), \alpha = k\beta > 0$$

III - SYSTEMES k-PARMI-m-CONSECUTIFS-SUR-n

III.1) DEFINITION:

Un système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n" est un système formé de n composants disposés linéairement ou circulairement et qui tombe en panne si et seulement si au moins k composants parmi m consécutifs sont en panne.

- a) Pour $m=n$ on obtient un système "n-k+1-parmi-n".
- b) Pour $m=k$ on obtient un système "k-consécutifs-sur-n".

III.2) PROPRIETES DETERMINISTES.

1) Fonction de structure:

On désigne par S_i le sous-système constitué des composants $i, i+1, \dots, i+m-1$, ($i = 1, 2, \dots, n-m+1$). Pour i fixé S_i opère comme s'il était un système (m-k+1-parmi-m) dont la fonction de structure notée $\Phi_i(x)$ est donnée par:

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j=i}^{i+m-1} x_j \geq m-k+1 \\ 0 & \text{si } \sum_{j=i}^{i+m-1} x_j \leq m-k \end{cases}$$

La fonction de structure du système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n" s'écrit:

$$\Phi(X) = \prod_{i=1}^{n-m+1} \Phi_i(X) = \min_{1 \leq i \leq n-m+1} \Phi_i(X)$$

En effet, par définition du système on a:

$\Phi(x) = 1$ si et seulement si chaque m composants consécutifs contient au moins $m-k+1$ composants fonctionnent.

De façon équivalente:

$\Phi(x) = 1$ si et seulement si pour tout i , $i = 1, 2, \dots, n - m + 1$ au moins $m - k + 1$ composants parmi les composants $i, i + 1, \dots, i + m - 1$ fonctionnent.

Par conséquent:

$\Phi(x) = 1$ si et seulement si $\Phi_i(x) = 1$ pour tout i , $i = 1, 2, \dots, n - m + 1$

D'où:

$$\Phi(X) = \prod_{i=1}^{n-m+1} \Phi_i(X) = \min_{1 \leq i \leq n-m+1} \Phi_i(X)$$

2) Fonction duale.

On sait que: $\Phi^D(x) = 1 - \Phi(1 - x)$

D'où:

$$\begin{aligned} \Phi^D(x) &= 1 - \min_{1 \leq i \leq n-m+1} \Phi_i(1 - x) = 1 - \prod_{i=1}^{n-m+1} \Phi_i(1 - x) \\ &= \prod_{i=1}^{n-m+1} (1 - \Phi_i(1 - x)) = \prod_{i=1}^{n-m+1} \Phi_i^D(x) = \max_{1 \leq i \leq n-m+1} \Phi_i^D(x) \end{aligned}$$

où:

$$\Phi_i^D(x) = 1 - \Phi_i(1 - x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j=i}^{i+m-1} x_j \geq k \\ 0 & \text{si } \sum_{j=i}^{i+m-1} x_j \leq k - 1 \end{cases}$$

Donc:

$$\Phi^D(X) = \prod_{i=1}^{n-m+1} \Phi_i^D(X) = \max_{1 \leq i \leq n-m+1} \Phi_i^D(X)$$

C'est à dire le dual d'un système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n" est défini comme un système qui comporte n composants et qui fonctionne si et seulement si il existe m composants consécutifs contenant au moins k composants qui fonctionnent.

REMARQUE

a) On procède de la même manière dans le cas circulaire sauf, qu'ici on remarque que le système comporte n sous-systèmes et $X_{n+j} = X_j, \forall j \geq 0$

Donc on a:

$$\Phi_C(X) = \prod_{i=1}^n \Phi_i(X) = \min_{1 \leq i \leq n} \Phi_i(X)$$

$$\Phi_C^D(X) = \prod_{i=1}^n \Phi_i^D(X) = \max_{1 \leq i \leq n} \Phi_i^D(X)$$

b) Pour $m = k$ ($m = n$ resp) on obtient sans difficulté la formule de la fonction de structure d'un système "k-consécutifs-sur-n" ($n - k + 1$ -parmi- n resp).

3) L'importance relative des composants du système est calculée dans des cas particuliers ($m = n$ et $m = k$).

III.3) DEFINITION (coupe minimale):

Une coupe minimale pour un système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n" est l'ensemble de k composants parmi m consécutifs.

◇ De la définition ci-dessus on a:

1) Toutes les coupes minimales sont de taille k.

2) Le nombre de coupes minimales vaut: $\binom{m}{k} + (n - m) \binom{m-1}{k-1}$.

On peut facilement vérifier que si $m = k$ ($m = n$ respectivement) on obtient le nombre de coupes minimales d'un système "k-consécutifs-sur-n" ($m - k + 1$ -parmi- n respectivement).

III.4) CALCUL DE LA FIABILITE:

Dans tout ce paragraphe, on suppose que les composants du système sont statistiquement indépendants et de fiabilités égales i.e $p_i = p$ pour tout $i, i = 1, 2, \dots, n$.

NOTATIONS:

L : un système linéaire.

C : un système circulaire.

$R_a(p, n, m, k)$: Fiabilité du système ($a = L$ ou $a = C$).

$N_a(j, n, m, k)$ nombre de fois que le système fonctionne sachant que j composants sont en panne. Il est égale au nombre de façons de placer au moins $(m - k + 1)$ composants qui fonctionnent entre k composants en panne sachant qu'il a j composants en panne, $a = L, C$.

III.4.1) CAS OU $k=2$:

Dans ce cas on a les résultats suivants:

LEMME: III.4.1.1: Pour $k=2$

$$a) N_L(j, n, m, 2) = \binom{n-(j-1)(m-1)}{j}.$$

$$b) N_C(j, n, m, 2) = \frac{n}{n-j(m-1)} \binom{n-j(m-1)}{j}.$$

Démonstration.

Voir Nauss [25].

THEOREME III.4.1.2.

Pour $k=2 \leq m \leq n$ les formules de la fiabilité du système sont:

$$R_L(p, n, m, 2) = \sum_{j=0}^r \binom{n-(j-1)(m-1)}{j} p^j (1-p)^{n-j} \text{ ou } r = \left\lceil \frac{n+m-1}{m} \right\rceil$$

$$R_C(p, n, m, 2) = \sum_{j=0}^s \frac{n}{n-j(m-1)} \binom{n-j(m-1)}{j} q^j p^{n-j} \text{ ou } s = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor.$$

Démonstration:

Supposons que j composants du système sont en panne. Le système fonctionne ou non selon la position des composants en panne et en fonctionnement dans le système. Si entre deux composants en panne il existe au moins $(m-1)$ composants qui fonctionnent le système fonctionne, il y a $N_a(j, n, m, 2)$ ($a = L, C$) possibilités. Ainsi pour chaque j chaque possibilité a une probabilité de $p^{n-j} q^j$ qu'elle soit réalisée. Il suit que:

$$R_a(p, n, m, 2) = \sum_{j=0}^n N_a(j, n, m, 2)$$

En appliquant le lemme (III.4.1.1) le théorème est démontré. ■

REMARQUE.

Pour $k \geq 3$ le problème de déterminer une formule explicite pour la fiabilité du système est très compliqué.

III.4.2) CAS OU $n=m+\lambda$: ($\lambda \leq m$)

Dans ce cas la fiabilité du système linéaire est donnée dans le résultat suivant:

THEOREME III.4.2.1.

Pour $n = m + \lambda$ ($\lambda \leq m$) on a:

$$R_L(p, n, m, k) = \sum_{x=1}^k R_L(p, 2\lambda, \lambda, x) \binom{m-\lambda}{k-x} p^{m-\lambda-k+x} q^{k-x}$$

$R_L(p, 2\lambda, \lambda, x) = 1$ pour $x \leq \lambda$.

Démonstration:

Soient les évènements:

$A(\lambda, m-1, x)$: l'évènement "il existe exactement $k-x$ composants en panne parmi les $m-\lambda$ composants $\lambda, \dots, m-1$ ", $x = 1, 2, \dots, k$.

$B(2\lambda, \lambda, x)$: l'évènement "au plus $x-1$ composants tombent en panne parmi chaque λ composants consécutifs parmi les composants $1, 2, \dots, \lambda-1, m, \dots, n$ ", $x = 1, 2, \dots, k$

Il est clair que:

$$\begin{aligned} R_L(p, n, m, k) &= \Pr \left(\bigcup_{x=1}^k B(2\lambda, \lambda, x) A(\lambda, m-1, x) \right) \\ &= \sum_{x=1}^k \Pr(B(2\lambda, \lambda, x)) \Pr(A(\lambda, m-1, x)) \\ &= \sum_{x=1}^k R_L(p, 2\lambda, \lambda, x) \binom{m-\lambda}{k-x} p^{m-\lambda-k+x} q^{k-x} . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

COROLLAIRE III.4.2.2:

a) Pour $n = m+1$ on a:

$$R_L(p, m+1, m, k) = \binom{m-1}{k-1} p^{m-k+2} q^{k-1} + \sum_{x=0}^{k-2} \binom{m-1}{x} p^{m-1-x} q^x$$

b) Pour $n = m+2$ on a:

$$\begin{aligned} R_L(p, m+2, m, k) &= \binom{m-2}{k-1} p^{m-k+3} q^{k-1} + p^2 (1+2q) \binom{m-2}{k-2} p^{m-k} q^{k-2} \\ &\quad + \sum_{x=0}^{k-3} \binom{m-2}{x} p^{m-2-x} q^x . \end{aligned}$$

c) Pour $n = m+3$

$$R_L(p, m+3, m, k) = \sum_{x=0}^{k-4} \binom{m-3}{x} p^{m-3-x} q^x + (1-4q^3+3q^4) \binom{m-3}{k-3} p^{m-k} q^{k-3}$$

$$+ (p^5q + p^4(1+2q) + qp^2(p^3+3qp^2)) \binom{m-3}{k-2} p^{m-k-1} q^{k-2} \\ + p^6 \binom{m-3}{k-1} p^{m-k-2} q^{k-1}$$

Démonstration:

a) En appliquant le théorème III.4.2.1 pour $\lambda = 1$ on obtient:

$$R_L(p, m+1, m, k) = \sum_{x=1}^k R_L(p, 2, 1, x) \binom{m-1}{k-x} p^{m-1-k+x} q^{k-x}$$

$$\text{Or : } R_L(p, 2, 1, x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \geq 1 \\ p^2 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où: } R_L(p, m+1, m, k) = p^2 \binom{m-1}{k-1} p^{m-k} q^{k-1} + \sum_{x=2}^k \binom{m-1}{k-x} p^{m-1-k+x} q^{k-x} \\ = \binom{m-1}{k-1} p^{m-k+2} q^{k-1} + \sum_{x=0}^{k-2} \binom{m-1}{x} p^{m-1-x} q^x$$

b) En utilisant le théorème III.4.2.1 pour $\lambda = 2$ on déduit que:

$$R_L(p, m+2, m, k) = \sum_{x=3}^k R_L(p, 4, 2, x) \binom{m-2}{k-x} p^{m-2-k+x} q^{k-x} + R_L(p, 4, 2, 1) \binom{m-2}{k-1} p^{m-1-k} q^{k-1} \\ + R_L(p, 4, 2, 2) \binom{m-2}{k-2} p^{m-k} q^{k-2}$$

$$\text{Or : } R_L(p, 4, 2, x) = 1 \text{ pour } x \geq 2$$

$$R_L(p, 4, 2, 1) = p^4$$

$$R_L(p, 4, 2, 2) = pR_L(p, 3, 2, 2) + pqR_L(p, 2, 2, 2) = p(p^2q + p) + pq(1+q^2) = p^2(1+2q)$$

$$\text{D'où: } R_L(p, m+2, m, k) = \binom{m-2}{k-1} p^{m-k+3} q^{k-1} + p^2(1+2q) \binom{m-2}{k-2} p^{m-k} q^{k-2} \\ + \sum_{x=0}^{k-3} \binom{m-2}{x} p^{m-2-x} q^x$$

c) Si $\lambda = 3$ le théorème III.4.2.1 entraîne que:

$$R_L(p, m+3, m, k) = \sum_{x=1}^k R_L(p, 6, 3, x) \binom{m-3}{k-x} p^{m-3-k+x} q^{k-x}$$

Or:

$$R_L(p, 6, 3, x) = 1 \text{ pour } x \geq 3$$

$$R_L(p, 6, 3, 3) = 1 - 4q^3 + 3q^4 \text{ (fiabilité du système 3-consécutifs-sur-6).}$$

$$R_L(p, 6, 3, 1) = p^6$$

$$R_L(p, 6, 3, 2) = pR_L(p, 5, 3, 2) + qp^2R_L(p, 3, 3, 2) = p(qp^4 + p^3(1 + 2q)) \\ + qp^2(p^3 + 3qp^2)$$

le résultat c) est obtenue en substituant ces quantités dans la formule de $R_L(p, m+2, m, k)$.

Le corollaire est donc démontré. ■

III 4.3 CALCUL DE LA FIABILITE VIA LES CHAINES DE MARKOV.

Considérons un système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n". Les composants sont supposés indépendants et de fiabilités égales p, autrement dit les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ représentant les états des composants 1, 2, ..., n respectivement sont des v.a de Bernoulli indépendantes et de même loi. Définissons la suite de variables aléatoires $Z_j, j = 1, 2, \dots, n - m + 1$ par $Z_j = (X_j, X_{j+1}, \dots, X_{j+m-1})$. Il est aisé de vérifier que la suite $\{Z_j\}$ forme une chaîne de Markov dont le nombre des états est 2^m . L'ensemble des états peut être décomposé en une partition de deux sous-ensembles.

T = le sous-ensemble des états de panne du système, cet ensemble est constitué des états qui comportent au moins k 0. On vérifie facilement que $\text{card} T = \sum_{i=k}^m \binom{m}{i}$.

T^c = le sous-ensemble des états de fonctionnement du système.

Les probabilités de transition entre les états de T^c sont définis par:

$$T_{ij}^{(r-1)} = \Pr(Z_r = j, Z_\ell \notin T, \ell = 2, 3, \dots, r-1 / Z_1 = i)$$

En utilisant les équations de "Chapman-Kolmogorov" on obtient :

$$T_{ij}^{P^{(r)}} = \sum_{h \notin T} T_{ih} T_{hj}^{P^{(r-1)}} \text{ pour } i, j \notin T$$

On désigne par T' la matrice sous-stochastique obtenue de la matrice de transition de la chaîne en éliminant les lignes et les colonnes correspondant aux états de T . On sait que: $T^{P^{(r)}} = T'^{P^r}$.

Sous ces considérations nous avons le résultat suivant:

THEOREME III.4.3.1:

La fiabilité d'un système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n" est donnée par la formule.

$$R(n, m, k, p) = \sum_{j \notin T} \sum_{i \notin T} T_{ij}^{P^{(n-m)}} \Pr(Z_1 = i)$$

Démonstration:

$$\begin{aligned} R(n, m, k, p) &= \Pr(Z_{n-m+1} \notin T, Z_{n-m} \notin T, \dots, Z_2 \notin T, Z_1 \notin T) \\ &= \sum_{j \notin T} \sum_{i \notin T} \Pr(Z_{n-m+1} = j, T, Z_{n-m} \notin T, \dots, Z_2 \notin T, Z_1 = i) \\ &= \sum_{j \notin T} \sum_{i \notin T} \Pr(Z_{n-m+1} = j, T, Z_\ell \notin T, \ell = 2, 3, \dots, n-m, / Z_1 = i) \Pr(Z_1 = i) \\ &= \sum_{j \notin T} \sum_{i \notin T} T_{ij}^{P^{(n-m)}} \Pr(Z_1 = i) \end{aligned}$$

Le théorème est donc démontré. ■

EXEMPLE.

Considérons un système "2-parmi-3-consécutifs-sur-n" c.à.d $m = 3, k = 2$

on a:

L'espace des états est comme suit:

$$\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0)\}$$

Si on désigne par 1,2,...,8 les états de la chaîne dans leur ordre ci-dessus nous avons: $T = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0,0,0)\} = \{5,6,7,8\}$

$$T^P = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ p & 1-p & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pr(Z_1 = i) = \begin{cases} p^3 & \text{pour } i = 1 \\ p^2(1-p) & \text{pour } i = 2, 3, 4 \end{cases}$$

La fiabilité du système est donnée par:

$$R(n, 3, 2, p) = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 T_{ij}^{P(n-2)} \Pr(Z_1 = i)$$

Les quantités $T_{ij}^{P(n-2)}$ dans l'expression de $R(n, 3, 2, p)$ sont difficiles à calculer pour les grandes valeurs de n .

REMARQUE.

On voit clairement que l'évaluation de la fiabilité d'un système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n" pose de sérieux problèmes sauf dans des cas particuliers (par exemple $n \leq 2m, k = 2$). Le problème se complique plus encore lorsqu'on suppose les composants non identiques. Pour cela des méthodes de simulation sont utilisées dans [26],[27] pour donner des approximations de la fiabilité du système étudié.

III.5) BORNES DE LA FIABILITE DU SYSTEME.

On a déjà vu que le calcul de la fiabilité de notre système est très laborieux même que dans le cas où les composants sont supposés indépendants et de fiabilités égales. On est quelque fois contraint à fournir un encadrement de la valeur de cette fiabilité. L'objet de ce paragraphe est justement de donner une borne supérieure et une borne inférieure pour la fiabilité du système.

III.5.1) CAS DES COMPOSANTS DE FIABILITES EGALES:

Ici on envisage le cas où les variables aléatoires X_i sont indépendants et identiquement distribuées avec $p_i = p$ et $q_i = q \forall i = 1, 2, \dots, n$. Dans ce cas nous avons le résultat suivant:

THEOREME III.5.1.1:

Si $p_i = p$ pour tout i , $i = 1, 2, \dots, n$ on a:

$$L(k, m, n, p) \leq R(n, m, k, p) \leq U(k, m, n, p).$$

$$\text{Où: } L(k, m, n, p) = \left(p^{m-k+1} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{m}{j} (1-p)^j p^{m-j} \right)^{\left\lfloor \frac{n}{2m-k+1} \right\rfloor} \beta$$

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{si: } n - \left\lfloor \frac{n}{2m-k+1} \right\rfloor (2m-k+1) \leq k-1 \\ \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n - \left\lfloor \frac{n}{2m-k+1} \right\rfloor (2m-k+1)}{j} \gamma(j), & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\gamma(j) = (1-p)^j p^{n - \left\lfloor \frac{n}{2m-k+1} \right\rfloor (2m-k+1) - j}.$$

$$U(k, m, n, p) = \left(\sum_{j=0}^{k-1} \binom{m}{j} (1-p)^j p^{m-j} \right)^{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor}$$

Démonstration:

1) Borne supérieure:

Soit: S_i l'évènement "il existe au plus $(k-1)$ composants en panne

parmi les composants $i, i+1, \dots, i+m-1$, $i = 1, 2, \dots, n-m+1$.

Il est clair que:

$$R(n, m, k) = \Pr \left(\bigcap_{i=1}^{n-m+1} S_i \right) \leq \Pr \left(\bigcap_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor - 1} S_{im+1} \right), \text{ car: } \bigcap_{i=1}^{n-m+1} S_i \subseteq \bigcap_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor - 1} S_{im+1}$$

Or les événements $\{S_{im+1}\}$, $i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{m} \rfloor - 1$ sont indépendants d'où:

$$R(n, m, k) \leq \prod_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor - 1} \Pr(S_{im+1}) = \prod_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor - 1} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \binom{m}{j} (1-p)^j p^{m-j} \right) = U(k, m, n, p).$$

2) Borne inférieure:

La borne $L(k, m, n, p)$ est obtenue du fait que le système fonctionne certainement si chaque'un des $\lfloor \frac{n}{2m-k+1} \rfloor$ sous-systèmes non-chevauchés constitué de m composants consécutifs contient au plus $k-1$ composants en panne suivés par $m-k+1$ composants qui fonctionnent.

III.5.2) CAS DES COMPOSANTS NON IDENTIQUES.

Nous avons besoin des notations suivantes

NOTATIONS.

q_{im} : probabilité de panne du composant i , $i = 1, 2, \dots, n$.

p_{im} : probabilité de fonctionnement du composants i , $i = 1, 2, \dots, n$.

F_i : {le composant i tombe en panne}.

A_i : {le sous-système k -parmi- m -consécutifs-sur- i constitué des composants $1, 2, \dots, i$ fonctionne}.

$A(i, j)$: {le sous-système k -parmi- m -consécutifs-sur- $j-i+1$ constitué des composants $i, i+1, \dots, j$ fonctionne}.

$B_l(i, j)$: {il existe exactement l composants en panne parmi les composants $i, i+1, \dots, j$ }.

$B_l^*(i, j) : \{\text{il existe au moins } l \text{ composants en panne parmi les composants } i, i+1, \dots, j\}.$

$G_{in} : \{\text{il existe au plus } (k-1) \text{ composants en panne parmi les composants } i = m+1, i = m+2, \dots, i-1\}.$

$$h_l(i, j) = \Pr(B_l(i, j))$$

$$H_l(i, j) = \Pr(B_l^*(i, j))$$

On définit les quantités suivantes:

$$a_{mn} = b_{mn} = H_k(1, m), c_{mn} = 1$$

$$a_{in} = H_{k-1}(i - m + 1, i - 1)q_{in} \text{ pour } i = m + 1, m + 2, \dots, n.$$

$$b_{in} = h_{k-1}(i - m + 1, i - 1)q_{in} \text{ pour } i = m + 1, m + 2, \dots, n.$$

$$c_{in} = \Pr(A(i - m, i - 1)) = 1 - H_k(i - m, i - 1)$$

$$p_{in} = 1 \text{ pour } i \leq 0.$$

THEOREME III.5.2.1.

soient: $n \geq m \geq k \geq 1$ alors on a:

$$\prod_{i=m}^n (1 - a_{in}) \leq R(n, m, k) \leq \prod_{i=m}^n \left(1 - \frac{b_{in}}{c_{in}} \prod_{j=i-2m+k}^{i-m} p_{ju} \right).$$

Démonstration .

D'après les notations précédentes il suit que:

$$A_n \subset A_{n-1} \subset \dots \subset A_m$$

$$\Pr(A_m^c) = H_k(1, m)$$

$$\Pr(A_i) = 1 \text{ pour } i \leq m-1 \text{ par convention.}$$

La suite des évènement $\{A_i\}$ forme une chaîne de Markov .

Donc pour $n \geq m$ on a :

$$\begin{aligned} R(n, m, k) &= \Pr(A_n) = \Pr(A_m A_{m+1} \dots A_n) \\ &= \Pr(A_m) \Pr(A_{m+1}/A_m) \dots \Pr(A_n/A_{n-1}) = \Pr(A_m) \prod_{i=m+1}^n \Pr(A_i/A_{i-1}) \\ &= \Pr(A_m) \prod_{i=m+1}^n (1 - \Pr(A_i^c/A_{i-1})) = \Pr(A_m) \prod_{i=m+1}^n \left(1 - \frac{\Pr(A_i^c A_{i-1})}{\Pr(A_{i-1})}\right) \end{aligned}$$

Des définitions de $B_i(i, j)$ et $B_i^*(i, j)$ il suit que:

◇ Pour $i = m+1, m+2, \dots, n$ on a :

$$\Pr(A_i^c A_{i-1}) = \Pr(A_{i-1} B_{k-1}(i-m+1, i-1) F_i) \leq \Pr(A_{i-1} B_{k-1}^*(i-m+1, i-1)) q_i$$

En utilisant les propriétés des variables aléatoires associées on obtient:

$$\Pr(A_i^c A_{i-1}) \leq \Pr(A_{i-1}) H_{k-1}(i-m+1, i-1) q_i = \Pr(A_{i-1}) a_{in}$$

En combinant les équations précédentes on déduit:

$$R(n, m, k) \geq \Pr(A_m) \prod_{i=m+1}^n (1 - a_{in}) = \prod_{i=m}^n (1 - a_{in}) \dots \dots \dots (1)$$

◇ Pour $i = m+1, m+2, \dots, 2m-k$ on a :

$$\frac{\Pr(A_i^c A_{i-1})}{\Pr(A_{i-1})} \geq \frac{\Pr(F_1 \dots F_{i-m} B_{k-1}(i-m+1, i-1) F_i)}{\Pr(A_{i-1})} \geq \frac{\left(\prod_{j=1}^{i-m} p_{jn} h_{k-1}(i-m+1, i-1) q_{in}\right)}{\Pr(A(i-m, i-1))} = \frac{b_{in}}{c_{in}} \prod_{j=1}^{i-m} p_{jn} \dots \dots \dots (2)$$

◇ Pour $i = 2m-k+1, \dots, n$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{\Pr(A_i^c A_{i-1})}{\Pr(A_{i-1})} &\geq \frac{\Pr(A_{i-2m+k-1} F_{i-2m+k} \dots F_{i-m} B_{k-1}(i-m+1, i-1) F_i)}{\Pr(A_{i-1})} \\ &= \frac{\Pr(A_{i-2m+k-1})}{\Pr(A_{i-1})} \prod_{j=i-2m+k}^{i-m} p_{jn} h_{k-1}(i-m+1, i-1) q_{in} \geq \\ &= \frac{\Pr(A_{i-2m+k-1})}{\Pr(A_{i-2m+k-1} A(i-m, i-1))} \prod_{j=i-2m+k}^{i-m} p_{jn} h_{k-1}(i-m+1, i-1) q_{in} = \frac{b_{in}}{c_{in}} \prod_{j=i-2m+k}^{i-m} p_{jn} \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

D'après (2) et (3) on a :

$$R(n, m, k) \leq \prod_{i=m}^n \left(1 - \frac{b_{in}}{c_{in}} \prod_{j=i-2m+k}^{i-m} p_{jn}\right) \dots \dots \dots (4)$$

En combinant (1) et (4) on obtient le théorème. ■

◇ Dans le cas particulier $m = k$ les bornes de la fiabilité d'un système

"k-consécutifs-sur-n" sont données par le corollaire suivant.

COROLLAIRE III.5.2.2. Soit $1 \leq k \leq n$ on a:

$$\prod_{i=k}^n \left(1 - \prod_{j=i-k+1}^i q_{jn} \right) \leq R(n, k, k) \leq \left(1 - \prod_{j=1}^k q_{jn} \right) \prod_{i=k+1}^n \left(1 - p_{(i-k)n} \left(1 - \prod_{j=i-k}^i q_{jn} \right)^{-1} \prod_{j=i-k+1}^i q_{jn} \right)$$

Démonstration:

Le corollaire III.5.2.2 suit directement du théorème III.5.2.1 du fait que pour $m = k$ on a:

$$\begin{aligned} a_{kn} &= b_{kn} = H_k(1, k) = \prod_{j=1}^k q_{jn}, \quad c_{kn} = 1 \\ a_{in} &= H_{k-1}(i-k+1, i-1) q_{in} = \prod_{j=i-k+1}^i q_{jn}, \quad i = k+1, k+2, \dots, n \\ b_{in} &= h_{k-1}(i-k+1, i-1) q_{in} = \prod_{j=i-k+1}^i q_{jn}, \quad i = k+1, k+2, \dots, n \\ c_{in} &= \Pr(A(i-k, i-1)) = 1 - H_k(i-k, i-1) = 1 - \prod_{j=i-k}^{i-1} q_{jn}, \quad i = k+1, \dots, n \\ \prod_{j=i-k}^{i-1} p_{jn} &= p_{(i-k)n}. \end{aligned}$$

REMARQUE.

1) La borne inférieure donnée dans le théorème III.5.2.1 est la même que celle donnée dans [20]. Du fait que: $c_{in} = \Pr(A(i-m, i-1)) \leq \Pr(G_{in})$ la borne supérieure dans le théorème III.5.2.1 est une amélioration de celle donnée dans [20] qui est équivalente à:

$$R(n, m, k) \leq \prod_{i=m}^n \left(1 - \frac{b_{in}}{\Pr(G_{in})} \prod_{j=i-2m+k}^{i-m} p_{jn} \right)$$

2) Le corollaire III.5.2.2 montre aussi que:

$$R(n, k, k) \leq \prod_{i=k}^n \left(1 - p_{(i-k)n} \prod_{j=i-k+1}^i q_{jn} \right)$$

qui est la borne supérieure dans [20].

CAS PARTICULIER:

Dans le cas ou les composants ont des fiabilités égales c.à.d. $q_{in} = q_n, p_{in} = 1 - q_n = p_n$ pour tout $i, i = 1, 2, \dots, n$ les quantités a_{in}, b_{in} et c_{in} se simplifient.

On obtient:

$$a_{mn} = b_{mn} = \sum_{j=k}^m \binom{m}{j} q_n^j p_n^{m-j} = a_n^*$$

$$a_{in} = q_n \sum_{j=k-1}^{m-1} \binom{m-1}{j} q_n^j p_n^{m-1-j} = a_n, \quad i = m+1, m+2, \dots, n$$

$$b_{in} = \binom{m-1}{k-1} q_n^k p_n^{m-k} = b_n, \quad i = m+1, m+2, \dots, n$$

$$c_{in} = 1 - a_n^*, \quad i = m+1, m+2, \dots, n$$

$$\prod_{j=i-2m+k}^{i-m} p_{jn} = p_n^{\min(i-m, m-k+1)} = p_{in}^*$$

Sous ces considérations nous avons le résultat suivant:

COROLLAIRE III.5.2.3:

soit $1 \leq k \leq m \leq n$, $q_{in} = q_n, p_{in} = 1 - q_{in} = p_n$, pour tout $i, i = 1, 2, \dots, n$ on a:

$$(1 - a_n^*) (1 - a_n)^{n-m} \leq R(n, m, k) \leq (1 - a_n^*) \prod_{i=m+1}^n \left(1 - \frac{b_n}{1 - a_n^*} p_{in}^* \right)$$

démonstration:

En substituant les quantités précédentes dans le théorème III.5.2.1 le corollaire résulte immédiatement.

THEOREME III.5.2.4:

Soit $1 \leq k \leq m$, $\sum_{i=m}^n b_{in} \rightarrow \theta$ quand $n \rightarrow +\infty$, ($0 \leq \theta \leq +\infty$) il existe une suite $\{d_n\}$ tel que pour tout $i, (i = 1, 2, \dots, n)$ $q_{in} \leq d_n$ et $nd_n^{k+1} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ alors on a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R(n, m, k) = \exp(-\theta)$$

La démonstration du théorème est une conséquence du résultat suivant:

LEMME III.5.2.5:

Soit pour n et $1 \leq i \leq n$, $0 \leq \mu_{in} \leq 1$, $\sum_{i=1}^n \mu_{in} \rightarrow \mu$ quand $n \rightarrow \infty$, ($0 \leq \mu \leq \infty$)
s'il existe une suite $\{\mu_n\}$ tel que pour tout i , $\mu_{in} \leq \mu_n$ avec $\mu_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^n (1 - \mu_{in}) = \exp(-\mu).$$

Démonstration. Evident.

Démonstration du théorème:

Il est clair que $md_n^{k+1} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ entraîne que $d_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et d'après les définitions des a_{in} et b_{in} on a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^n a_{in} &= b_{mn} + \sum_{i=m+1}^n \sum_{l=k-1}^{m-1} h_l(i-m+1, i-1) q_{in} \\ &= \sum_{i=m}^n b_{in} + \sum_{i=m+1}^n \sum_{l=k}^{m-1} h_l(i-m+1, i-1) q_{in} \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

Si: $m=k$ d'après (1) on a: $\sum_{i=m}^n a_{in} = \sum_{i=m}^n b_{in}$

Pour: $m > k$ de la définition de $h_l(i, j)$ et la condition $q_{in} \leq d_n \forall i$ on a:

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{i=m+1}^n \sum_{l=k}^{m-1} h_l(i-m+1, i-1) q_{in} &\leq \sum_{i=m+1}^n \sum_{l=k}^{m-1} \binom{m-1}{l} d_n^l d_n \leq \\ &c(n-m) \sum_{l=k}^{m-1} d_n^{l+1} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty, \left(c = \max_{k \leq h \leq m-1} \binom{m-1}{h} \right). \end{aligned}$$

Donc (1) entraîne que pour $1 \leq k \leq m$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=m}^n a_{in} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=m}^n b_{in} = \theta$$

D'autre part nous avons:

$$0 \leq b_{mn} \leq a_{mn} = H_k(1, m) \leq \sum_{l=k}^m \binom{m}{l} d_n^l$$

et pour $i = m+1, \dots, n$:

$$0 \leq b_{in} \leq a_{in} = \sum_{l=k-1}^{m-1} h_l (i-m+1, l-1) q_{in} \leq \sum_{l=k-1}^{m-1} \binom{m-1}{l} d_n^{l+1} \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty.$$

En appliquant le lemme III.5.2.5 à a_{in} et b_{in} le théorème III.5.2.4 suit directement du théorème III.5.2.1. ■

THEOREME III.5.2.6:

Soit $m=k \geq 1$, $\sum_{i=k}^n \prod_{j=i-k+1}^i q_{jn} = \mu$ quand $n \rightarrow \infty$, ($0 \leq \mu \leq \infty$). Il existe une suite $\{h_n\}$ tel que pour tout $i=1, 2, \dots, n$ $q_{in} \leq h_n$ et $h_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Alors on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(n, k, k) = \exp(-\mu)$$

Démonstration:

En appliquant le lemme III.5.2.5 à $\prod_{j=i-k+1}^i q_{jn}$ le théorème III.5.2.6 découle directement du corollaire III.5.2.2.

REMARQUE:

Dans le théorème III.5.2.6 si on prend $q_{in} = h_n = \lambda n^{-\frac{1}{k}}$, $i=1, 2, \dots, n$. Il est clair que $\mu = \lambda^k$ et on déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} R(n, k, k) = \exp(-\lambda^k)$. Donc le résultat donné dans [15] est un cas particulier du théorème III.5.2.6

THEOREME III.5.2.7:

Soit $1 \leq k \leq m$, $q_{in} = \lambda n^{-\frac{\alpha}{k}}$, $i=1, 2, \dots, n$, ou $0 < \lambda < 1$ et $\alpha \geq 0$ alors on a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R(n, m, k) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq \alpha < 1 \\ \exp\left(-\lambda^k \binom{m-1}{k-1}\right), & \text{si } \alpha = 1 \\ 1 & \text{, si } \alpha > 1 \end{cases}$$

Démonstration:

Si: $\alpha = 0$ c.à.d $q_{in} = \lambda = c^{te}$ pour tout n et $1 \leq i \leq n$ alors il est clair d'après le corollaire III.5.2.3 que:

$$R(n, m, k) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Pour tout n , quand tous les composants ont la même probabilité de panne: $q_{in} = q_n = \lambda n^{-\frac{\alpha}{k}}$ alors on a pour tout $1 \leq i \leq n$, et $\alpha > 0$:

$$0 \leq b_{in} \leq a_{in} \leq a_{nn} = b_{nn} = \sum_{l=k}^m \binom{m}{l} \lambda^l n^{-l\frac{\alpha}{k}} (1 - \lambda n^{-\frac{\alpha}{k}})^{m-l} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty, \dots (1)$$

Si: $0 < \alpha < 1$: $\sum_{i=m}^n b_{in} \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, d'où d'après l'équation (1) $\sum_{i=m}^n a_{in} \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, il résulte donc d'après le lemme III.5.2.5 et le théorème III.5.2.1 que:

$$R(n, m, k) \rightarrow \exp(-\infty) = 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

$$\text{Si: } \alpha = 1 \text{ alors: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=m}^n b_{in} = \lambda^k \binom{m-1}{k-1}.$$

$$\text{Si: } \alpha > 1 \text{ dans ce cas on a: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=m}^n b_{in} = 0.$$

D'autre part on a: $\lim_{n \rightarrow \infty} n b_{nn}^{k+1} = 0$, alors on déduit d'après le théorème III.5.2.4 que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R(n, m, k) = \begin{cases} \exp(-\lambda^k \binom{m-1}{k-1}) & , \text{ si } \alpha = 1 \\ 1 & , \text{ si } \alpha > 1 \end{cases}.$$

Le résultat est donc démontré. ■

REMARQUES.

1) Pour des valeurs de n assez grandes et $\alpha > 0$ alors λ est une constante positive satisfaisant la condition $0 < \lambda n^{-\frac{\alpha}{k}} < 1$.

2) Il est aussi possible de démontrer le théorème III.5.2.7 dans le cas où q_{in} est de la forme: $q_{in} = 1 - \exp\left(-\lambda n^{-\frac{\alpha}{k}}\right)$ ($\lambda > 0, \alpha > 0$) car:

$$1 - \exp\left(-\lambda n^{-\frac{\alpha}{k}}\right) \approx \lambda n^{-\frac{\alpha}{k}} \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

EXEMPLES NUMERIQUES.

1) On considère un système "4-parmi-5-consécutifs-sur-100" ($k = 4, m = 5, n = 100$) dont la probabilité de panne d'un composant est $q_{in} = 0.4n^{-\frac{\alpha}{k}}, i = 1, 2, \dots, 100$. On a dans ce cas:

a) Les résultats du théorème III.5.2.7 sont comme suit:

$$R(100, 5, 4) \simeq \begin{cases} 1 & , \text{ pour } \alpha = 2 \text{ i.e } p_{in} = 0.96 \\ \exp\left(- (0.4)^4 \binom{4}{3}\right) = 0.90267, & \text{ pour } \alpha = 1 \text{ i.e } p_{in} = 0.87 \\ 0 & , \text{ pour } \alpha = 0.25 \text{ i.e } p_{in} = 0.70 \end{cases}$$

b) Les bornes du corollaire III.5.2.3 sont comme suit:

$$0.99904 \leq R(100, 5, 4) \leq 0.99912, \text{ pour } p_{in} = 0.96$$

$$0.90549 \leq R(100, 5, 4) \leq 0.92962, \text{ pour } p_{in} = 0.87$$

$$0.08654 \leq R(100, 5, 4) \leq 0.32245, \text{ pour } p_{in} = 0.70$$

2) posons: $LB = \prod_{i=m}^n (1 - a_{in})$ et $UB = \prod_{i=m}^n \left(1 - \frac{b_{in}}{\Pr(G_{in})} \prod_{j=i-2m+k}^{i-m} p_{jn}\right)$ (i.e les bornes de la fiabilité du système données dans [20]) alors pour $p_{in} = 1 - \frac{1}{2^k}$ on a:

$$LB = 0.8394 \leq R(5, 2, 2) = 0.8520 \leq 0.8548 = UB$$

$$LB = 0.9721 \leq R(5, 4, 3) = 0.9724 \leq 0.9729 = UB$$

$$LB = 0.9982 \leq R(5, 5, 4) = 0.9982 \leq 0.9982 = UB$$

$$LB = 0.8388 \leq R(10, 2, 2) = 0.8515 \leq 0.8543 = UB$$

$$LB = 0.7608 \leq R(10, 5, 2) = 0.7639 \leq 0.7646 = UB$$

$$LB = 0.9666 \leq R(10, 5, 3) = 0.9672 \leq 0.9672 = UB$$

$$LB = 0.9615 \leq R(20, 10, 3) = 0.9615 \leq 0.9615 = UB$$

$$LB = 0.7530 \leq R(20, 10, 2) = 0.7531 \leq 0.7531 = UB$$

$$LB = 0.7608 \leq R(50, 5, 2) = 0.7635 \leq 0.7646 = UB$$

REMARQUE.

On remarque d'après les exemples numériques ci-dessus que les bornes supérieures et inférieures approximent bien la fiabilité du système. Dans la pratique, on se contente de cette approximation vue la difficulté d'obtenir la valeur exacte de la fiabilité du système.

III.6 ARRANGEMENT OPTIMAL ET IMPORTANCE EN FIABILITE DES COMPOSANTS DANS UN SYSTEME "k-PARMI-m-CONSECUTIFS- SUR-n"

III.6.1 ARRANGEMENT OPTIMAL DES COMPOSANTS.

Ici on considère un système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n" dont les composants sont supposés indépendants et de probabilités de panne non nécessairement identiques. Le but de ce paragraphe est de déterminer par permutation des composants la configuration plus fiable pour le système parmi toutes les configurations linéaires possibles. On suppose que pour tout n on peut disposer les composants dans tous les ordres linéaires possibles.

Une coupe minimale, comme on l'a déjà défini, est l'ensemble de k composants parmi m consécutifs. On dit qu'elle est efficace si tous ses k composants sont en panne.

Nous avons besoin des notations suivantes:

NOTATIONS:

q_i : La probabilité de panne du composant i , $i = 1, 2, \dots, n$.

$p_i : 1 - q_i$

π : La permutation $(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$ des entiers $1, 2, \dots, n$.

$\pi_{i,j}$: La permutation obtenue de π par changement des entiers dans les positions i et j.

$$P_{\pi} : (P_{\pi(1)}, P_{\pi(2)}, \dots, P_{\pi(n)}) .$$

$R(p_{\pi})$: Fiabilité du système si les composants sont arrangés suivant les indices de la permutation π .

F : L'évènement: "le système tombe en panne".

F_i : L'évènement: "le composant dans la position i tombe en panne"

, $i = 1, 2, \dots, n$.

Sous les hypothèse précédentes on a les résultats:

LEMME III.6.1.1:

Dans un système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n" on a:

pour: $1 \leq i \leq \min(m-1, n-m)$: $\Pr(F/F_i F_{i+1}^c) \leq \Pr(F/F_i^c F_{i+1})$.

Démonstration:

Soit: $S = \{1, 2, \dots, n\} - \{i, i+1\} = \{1, 2, \dots, i-1, i+2, \dots, n\}$ un ensemble d'indices

on définit les évènements suivants:

A : "la coupe minimale est efficace et tous ses k composants ayant des indices dans S "

B_i : "il existe un ensemble de $(k-1)$ composants en panne avec des indices dans $B \subseteq S$ tel que $B \cup \{i\}$ soit une coupe minimale".

B_{i+1} : "il existe un ensemble de $(k-1)$ composants en panne avec des indices dans $B^* \subseteq S$ tel que $B^* \cup \{i+1\}$ soit une coupe minimale".

On remarque alors que lorsque le composant $i+1$ fonctionne on a:

$$F = A \cup A^c B_i$$

car le système tombe en panne si:

a) les k composants constituant la coupe minimale et ayant des indices dans S tombent en panne.

b) $(k - 1)$ composants ayant des indices dans S tombent en panne et leur réunion avec $\{i\}$ constitue une coupe minimale.

Donc d'après la définition des probabilités conditionnelles on a:

$$\Pr(F/F_i F_{i+1}^c) = \frac{\Pr(F F_i F_{i+1}^c)}{\Pr(F_i F_{i+1}^c)} = \frac{\Pr(A F_i F_{i+1}^c) + \Pr(A^c B_i F_i F_{i+1}^c)}{\Pr(F_i F_{i+1}^c)}$$

$$= \frac{\Pr(A) \Pr(F_i F_{i+1}^c) + \Pr(A^c B_i) \Pr(F_i F_{i+1}^c)}{\Pr(F_i F_{i+1}^c)} = \Pr(A) + \Pr(A^c B_i) \dots \dots \dots (1).$$

On procède de la même manière pour le membre de droite; sauf qu'ici on remarque que lorsque le composant i fonctionne on peut écrire:

$$F = A \cup A^c B_{i+1}$$

On obtient:

$$\Pr(F/F_i F_{i+1}^c) = \Pr(A) + \Pr(A^c B_{i+1}) \dots \dots \dots (2).$$

D'après (1) et (2) pour démontrer le lemme III.6.1.1 il suffit de montrer que :

$$\Pr(A^c B_i) \leq \Pr(A^c B_{i+1}) \text{ ,ou encore que } B_i \subseteq B_{i+1}$$

Or on a $1 \leq i \leq \min(m-1, n-m)$ donc si $B \subseteq S$ et $B \cup \{i\}$ est une coupe minimale alors $B \cup \{i+1\}$ est aussi une coupe minimale, ce qui entraîne que $B_i \subseteq B_{i+1}$.

Le lemme est donc démontré. ■

COROLLAIRE III.6.1.2.

Pour: $\max(m, n-m+1) \leq i \leq n-1$ on a l'inégalité suivante:

$$\Pr(F/F_i F_{i+1}^c) \geq \Pr(F/F_i^c F_{i+1}).$$

Démonstration:

le corollaire III.6.1.2 suit directement du lemme III.6.1.1 pour une raison de symétrie.

THEOREME III.6.1.3:

Dans un système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n" si:

a) pour $1 \leq i \leq \min(m-1, n-m)$: $q_{\pi(i+1)} \leq q_{\pi(i)}$

b) pour $\max(m, n-m+1) \leq i \leq n-1$: $q_{\pi(i+1)} \geq q_{\pi(i)}$

On a:

$$R(p_\pi) \geq R(p_{\pi_{i,i+1}})$$

Démonstration.

En appliquant la loi des probabilités totales on a:

$$\begin{aligned} 1-R(p_\pi) &= \Pr\left\{F\left(F_i F_{i+1} \cup F_i F_{i+1}^c \cup F_i^c F_{i+1} \cup F_i^c F_{i+1}^c\right)\right\} \\ &= \Pr(F F_i F_{i+1}) + \Pr(F F_i F_{i+1}^c) + \Pr(F F_i^c F_{i+1}) + \Pr(F F_i^c F_{i+1}^c) \\ &= \Pr(F_i F_{i+1}) \Pr(F/F_i F_{i+1}) + \Pr(F_i F_{i+1}^c) \Pr(F/F_i F_{i+1}^c) \\ &\quad + \Pr(F_i^c F_{i+1}) \Pr(F/F_i^c F_{i+1}) + \Pr(F_i^c F_{i+1}^c) \Pr(F/F_i^c F_{i+1}^c) \\ &= q_{\pi(i)} q_{\pi(i+1)} \Pr(F/F_i F_{i+1}) + q_{\pi(i)} (1 - q_{\pi(i+1)}) \Pr(F/F_i F_{i+1}^c) \\ &= (1 - q_{\pi(i)}) q_{\pi(i+1)} \Pr(F/F_i^c F_{i+1}) + (1 - q_{\pi(i)}) (1 - q_{\pi(i+1)}) \Pr(F/F_i^c F_{i+1}^c) \end{aligned}$$

On procède de la même manière pour $R(p_{\pi_{i,i+1}})$, on obtient:

$$\begin{aligned} 1-R(p_{\pi_{i,i+1}}) &= q_{\pi(i+1)} q_{\pi(i)} \Pr(F/F_i F_{i+1}) + q_{\pi(i+1)} (1 - q_{\pi(i)}) \Pr(F/F_i F_{i+1}^c) \\ &\quad + (1 - q_{\pi(i+1)}) q_{\pi(i)} \Pr(F/F_i^c F_{i+1}) + (1 - q_{\pi(i+1)}) (1 - q_{\pi(i)}) \Pr(F/F_i^c F_{i+1}^c) \end{aligned}$$

Par conséquent:

$$R(p_{h_{i,i+1}}) - R(p_\pi) = (q_{\pi(i)} - q_{\pi(i+1)}) \left(\Pr(F/F_i F_{i+1}^c) - \Pr(F/F_i^c F_{i+1}) \right)$$

En combinant a) et le lemme III.6.1.1 (ou bien b) et le corollaire III.6.1.2) on obtient:

$$R(p_{h_{i,i+1}}) - R(p_\pi) \leq 0$$

Le résultat est donc démontré. ■

REMARQUE.

Le théorème (III.6.1.3) montre que la fiabilité d'un système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n" est plus grande si on place les composants dont la fiabilité est plus grandes au milieu du système.

III.6.2) IMPORTANCES EN FIABILITE DES COMPOSANTS.

On suppose que les composants du système sont indépendants et identiquement distribués. En utilisant le théorème (III.6.1.3) on démontre des inégalités sur l'importance en fiabilité des composants dans le système.

L'importance en fiabilité du composant i est donnée par:

$$I_i = R(p, p, \dots, p, 1_i, p, \dots, p) - R(p, p, \dots, 0_i, p, \dots, p) = R(1_i, p) - R(0_i, p)$$

On établit d'abord le lemme suivant:

LEMME III.6.2.1:

a) Pour $1 \leq i \leq \min(m-1, n-m)$ on a:

$$R(1_{(i+1)}, p_\pi) \geq R(1_{(i)}, p_\pi) \dots\dots\dots a.1$$

$$R(0_{(i+1)}, p_\pi) \leq R(0_{(i)}, p_\pi) \dots\dots\dots a.2$$

b) Pour $\max(m, n - m + 1) \leq i \leq n - 1$ on a:

$$R(1_{(i+1)}, p_\pi) \leq R(1_{(i)}, p_\pi) \dots\dots\dots b.1$$

$$R(0_{(i+1)}, p_\pi) \geq R(0_{(i)}, p_\pi) \dots\dots\dots b.2$$

$$\text{Où: } R(1_{(i)}, p_\pi) = R(p_{(1)}, p_{(2)}, \dots, p_{(i-1)}, 1_{(i)}, p_{(i+1)}, \dots, p_{(n)})$$

$$R(0_{(i)}, p_\pi) = R(p_{(1)}, p_{(2)}, \dots, p_{(i-1)}, 0_{(i)}, p_{(i+1)}, \dots, p_{(n)})$$

Démonstration

◇ a) Pour: $1 \leq i \leq \min(m - 1, n - m)$, soit la permutation π correspondant à $q_{\pi(i)} = 0 \Leftrightarrow p_{\pi(i)} = 1$, et $q_{\pi(j)} = q$ pour $j \neq i$, donc pour $\pi_{i,i+1}$ nous avons $q_{\pi(i)} \geq q_{\pi(i+1)}$ et d'après le théorème (III.6.1.3) on a (a.1). Pour établir a.2) on considère la permutation π correspondant à $q_{\pi(i+1)} = 1 \Leftrightarrow p_{\pi(i+1)} = 1$, et $q_{\pi(j)} = q$ pour $j \neq i + 1$, donc pour $\pi_{i,i+1}$ on a $q_{\pi(i)} \geq q_{\pi(i+1)}$. Par conséquent (a.2) suit directement du théorème (III.6.1.3).

◇ b) On procède de la même manière en considérant la permutation π tel que: $q_{\pi(i+1)} = 0 \Leftrightarrow p_{\pi(i+1)} = 1$ pour démontrer (b.1), et $q_{\pi(i)} = 1 \Leftrightarrow p_{\pi(i+1)} = 0$ pour établir (b.2). Le lemme est donc démontré. ■

THEOREME III.6.2.2.

Dans un système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n" dont les composants sont identiques on a

$$1) I_i \leq I_{i+1} \text{ pour } 1 \leq i \leq \min(m - 1, n - m)$$

$$2) I_i \geq I_{i+1} \text{ pour } \max(m, n - m + 1) \leq i \leq n - 1$$

Démonstration: La démonstration du théorème est une conséquence directe du lemme (III.6.2.1).

IV) THEOREMES ASYMPTOTIQUES POUR LE TEMPS DE PANNE D'UN SYSTEME "k-PARMI-m-CONSECUTIFS-SUR-n"

Le but de ce chapitre est d'établir des résultats concernant le comportement asymptotique du temps de panne d'un système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n" quand n tend vers l'infini. Plus exactement en conservant toujours l'hypothèse d'indépendance des composants nous nous proposons de démontrer des théorèmes limites pour le temps de panne du système en examinant les deux cas suivants:

a) La stabilité asymptotique de la loi de Weibull par composition de structures "k-parmi-m-consécutifs-sur-n".

Les composants du système sont supposés indépendants et leurs temps de panne suivent des lois de Weibull. On démontre dans ce cas que la distribution limite lorsque n tend vers l'infini du temps de panne du système est aussi une loi Weibull.

b) La loi limite du temps de panne dans le cas où les composants possèdent une loi de panne quelconque.

Nous démontrons un théorème asymptotique pour le temps de panne d'un système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n" en supposant les composants identiques mais de loi de panne quelconque. Pour établir ce théorème nous proposons d'abord un encadrement de la probabilité de panne du système. Ainsi nous montrons que pour une loi quelconque F du temps de

panne des composants et sous des conditions réalistes sur F , la loi limite de la distribution de panne lorsque le nombre de composants tend vers l'infini, est du type de Weibull. Ce qui constitue une généralisation du résultat connu [24] où il est supposé que la loi F des temps de panne des composants est de Weibull. Nous traitons quelques exemples de lois suffisamment générales pour les applications.

IV.1) STABILITE DE LA LOI DE WEIBULL PAR COMPOSITION DE STRUCTURES "k-PARMI-m-CONSECUTIFS-SUR-n"

Notre but ici est d'établir un théorème de stabilité de la loi de Weibull pour le temps de panne du système analogue à celui donné dans [24] mais dans un cadre plus général; c'est à dire dans le cas où les composants sont supposés indépendants et de distributions de panne non nécessairement identiques (les lois de panne sont toujours supposés des lois de Weibull). Nous énonçons d'abord le cas où les composants sont supposés indépendants et de même loi de panne.

IV.1.1) CAS OU LES COMPOSANTS SONT INDEPENDANTS ET DE MEME LOI DE PANNE.

On considère un système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n" les composants sont supposés indépendants et de même loi. soit T le temps de panne d'un composant et T_n celui du système. Si $q(t)$ est la distribution de panne d'un composant, on a le résultat suivant:

THEOREME IV.1.1.1.

Pour: $m \geq k \geq 2$. Si $q(t)$ est de la forme $q(t) = (\lambda t)^a + o(t^a)$, $\forall t \geq 0$ où a et λ sont des constantes positives alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ n^{\frac{1}{ka}} T_n \leq t \right\} = 1 - \exp \left(- (\lambda t)^{ak} \sum_{j=k}^m \binom{j-2}{k-2} \right)$$

Ce qui exprime le fait que si T suit une loi de Weibull $W(a, \lambda)$ alors

$n^{-\frac{1}{ka}} T_n$ converge vers une loi de Weibull $W\left(a, \lambda \left(\sum_{j=k}^m \binom{j-2}{k-2}\right)^{\frac{1}{ka}}\right)$. On peut facilement démontrer que $\sum_{j=k}^m \binom{j-2}{k-2} = \binom{m-1}{k-1}$.

REMARQUE:

Dans le cas $m=k$ c'est à dire le cas d'un système "k-consécutifs-sur-n" ce théorème est démontré dans [9].

Démonstration.

La démonstration est basé sur l'inégalité de Barbour et Eagleson [11] (théorème2 p399 1984).

On considère l'ensemble:

$A = \{(i-j+1, i-j+2, \dots, i-1, i), 1 \leq i-j+1, i \leq n, k \leq j \leq m\}$ de tous les j-uples de nombres 1,2,...,n qui représentent les composants du système. Soit $J = (i-j+1, i-j+2, \dots, i-1, i) \in A$ et soit X_J la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si et seulement si les composants $i-j+1$ et i sont en panne et il existe k composants en panne parmi les composants $i-j+1, i-j+2, \dots, i-1, i$, dans tous les autres cas X_J prend la valeur 0. Si on définit la variable aléatoire $X = \sum_{J \in A} X_J$ alors le système tombe en panne si et seulement si $X > 0$. En posant $t_n = nt_n^{-\frac{1}{ka}}$, $t \geq 0$ on obtient:

$$P_J = E(X_J) = \binom{j-2}{k-2} q(t_n)^k (1 - q(t_n))^{j-k}$$

$$E(X) = (n - m + 1) q(t_n)^k \sum_{j=k}^m \binom{j-2}{k-2} (1 - q(t_n))^{j-k} + \sum_J P_J$$

où la deuxième somme porte sur tous les j-uples de nombres 1,2,...,m seulement.

Or on a:

$$q(t_n)^k = \frac{(\lambda t)^{ak}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Par conséquent:

$$E(X) \rightarrow (\lambda t)^{ak} \sum_{j=k}^m \binom{j-2}{k-2} \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

car la deuxième somme tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.

En appliquant le théorème 2 p399 de Barbour et Egleson [11] nous avons:

$$|\Pr(X > 0) - (1 - \exp(-E(X)))| \leq \min(1, E(X)^{-1}) \left(\sum_{J \in A} P_J^2 + \sum_{\{J=K, |J \cap K| \geq 1\}} (P_J P_K + E(X_J X_K)) \right)$$

Il est clair que:

$$P_J P_K = \frac{(\lambda t)^{2ak}}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ pour } J, K \in A$$

et:

$$E(X_J X_K) = O\left(\frac{1}{n^{1+k}}\right), \text{ pour } J, K \in A \text{ et } |J \cap K| \geq 1.$$

D'où la borne donnée par Barbour et Eagleson tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.

Le résultat est donc démontré. ■

IV.1.2) CAS OÙ LES COMPOSANTS SONT INDÉPENDANTS ET DE LOIS DE PANNE NON IDENTIQUES.

Nous allons établir un résultat plus général que théorème précédent. Ici on s'intéresse au cas où les composants sont supposés indépendants et de distributions de panne non identiques. La démonstration est basée sur un résultat donnant un encadrement de la distribution de panne du système.

Soient $T_1, T_2, \dots, T_n$ les temps de panne respectifs des composants $1, 2, \dots, n$ et Z_n celui du système. On désigne par $F_i(t)$ $t \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ la fonction de répartition de la variable aléatoire T_i c.à.d: $F_i(t) = \Pr(T_i \leq t)$

Nous définissons les quantités suivantes:

$$h_\ell(i, j) = \Pr[\text{il existe exactement } \ell \text{ composants en panne parmi les composants } i, i+1, \dots, j].$$

$$H_\ell(i, j) = \Pr[\text{il existe au moins } \ell \text{ composants en panne parmi les composants } i, i+1, \dots, j].$$

$$a_i(t) = F_i(t) H_{k-1}(i+1, i+m-1), \quad i = 1, 2, \dots, n-m+1.$$

$$b_i(t) = F_i(t) h_{k-1}(i+1, i+m-1), \quad i = 1, 2, \dots, n-m+1.$$

$$D_n(t) = \sum_{i=1}^{n-m+1} a_i(t).$$

$$P(t) = \max_{1 \leq i \leq n} F_i(t), \quad q(t) = \inf_{1 \leq i \leq n} F_i(t).$$

Sous ces considérations on démontre le théorème suivant:

THEOREME IV.1.2.1.

Pour tout entier $\ell \geq 1$ tel que: $2 \leq k \leq m \leq \ell m \leq n$ on a :

$$\frac{1}{W(t)} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor - 1} \Delta_i(t) \leq \Pr(Z_n \leq t) \leq D_n(t)$$

$$\text{où: } \Delta_i(t) = \sum_{j=im\ell+1}^{(i+1)m\ell-m+1} b_j(t).$$

$$\text{et: } W(t) = 1 + 2((\ell-2)m+1) \binom{m-1}{k-1} \frac{P^k(t)}{(1-P(t))^{m-k}} \left(\frac{P(t)}{q(t)}\right)^k \\ + 2(m-1)a(2m-k+1) \frac{P(t)}{(1-P(t))^{m-k}} \left(\frac{P(t)}{q(t)}\right)^k$$

$$a = \frac{\max_{k-1 \leq h \leq 2m-1} \binom{2m-1}{h}}{\binom{m}{k-1}}$$

Démonstration:

Pour démontrer l'inégalité de droite on définit les évènements suivants pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ par E_i : "le composant i tombe en panne et il existe au moins $k-1$ composants en panne parmi les composants $i+1, i+2, \dots, i+m-1$ ".

On a: $\Pr(E_i) = a_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n-m+1$ et

$$\Pr(Z_n \leq t) = \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n-m+1} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n-m+1} \Pr(E_i) = D_n(t).$$

Par ailleurs, pour t fixé, considérons la variable aléatoire Y_j qui prend la valeur 1 si et seulement si le composant j tombe en panne et il existe $k-1$ composants en panne parmi les composants $j+1, j+2, \dots, j+m-1$ et la valeur 0 sinon, $j = 1, 2, \dots, n-m+1$. D'autre part, définissons la variable aléatoire $Y = \sum_{j=1}^{n-m+1} Y_j$. On remarque que le système tombe en panne si et seulement si: $Y > 0$.

Il est clair que: $E(Y_j) = b_j(t)$, et $E(Y) = \sum_{j=1}^{n-m+1} b_j(t) \leq D_n(t)$.

On peut écrire:

$$\Pr(Z_n \leq t) = \Pr(Y > 0) \geq \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{m\ell} \rfloor - 1} \bigcup_{j=im\ell+1}^{(i+1)m\ell-m+1} (Y_j = 1)\right) \\ = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{m\ell} \rfloor - 1} \Pr\left(\bigcup_{j=im\ell+1}^{(i+1)m\ell-m+1} (Y_j = 1)\right)$$

$$\text{Posons: } \Delta_i(t) = \sum_{j=im\ell+1}^{(i+1)m\ell-m+1} \Pr(Y_j = 1)$$

En utilisant l'inégalité de "Erdos-Chung" on a :

$$\Pr(Z_u \leq t) \geq \frac{\left[\frac{n}{m} \right] - 1}{\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{m} \right] - 1}} \frac{\Delta_i^2(t)}{\Delta_i(t) + B_i(t)}$$

$$\begin{aligned} \text{où: } B_i(t) &= \sum_{u=v} \Pr(Y_u = 1, Y_v = 1) = 2 \sum_{u=v \geq 0} \Pr(Y_u = 1, Y_v = 1) \\ &= 2 \sum_{r=1}^{(\ell-1)m} \sum_{u=v=r} \Pr(Y_u = 1, Y_v = 1) \\ &= 2 \sum_{r=m}^{(\ell-1)m} \sum_{u=v=r} \Pr(Y_u = 1) \Pr(Y_v = 1) + 2 \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{u=v=r} \Pr(Y_u = 1, Y_v = 1) \\ &\leq 2 \sum_{r=m}^{(\ell-1)m} \sum_{u=v=r} b_u(t) b_v(t) \\ &\quad + 2 \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{u=v=r} F_u(t) F_v(t) H_{k-1}(v+1, v+2, \dots, u-1, u+1, \dots, u+m-1). \end{aligned}$$

Mais pour tout i , $i = 1, 2, \dots, n$: $F_i(t) \leq P(t)$ d'où on a:

$$b_i(t) \leq \binom{m-1}{k-1} P(t)^k, \text{ pour tout } i$$

Par conséquent:

$$\begin{aligned} B_i(t) &\leq 2 \sum_{r=m}^{(\ell-1)m} \sum_{u=v=r} \left(\binom{m-1}{k-1} P(t)^k \right)^2 + 2 \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{u=v=r} \sum_{h=k-1}^{2m-r} \binom{2m-r}{k-1} P^{h+2}(t) \\ &\leq 2 \sum_{r=m}^{(\ell-1)m} ((\ell-1)m + 1 - r) \left(\binom{m-1}{k-1} P^k(t) \right)^2 \\ &\quad + 2 \sum_{r=1}^{m-1} ((\ell-1)m + 1 - r) c^{lw} (2m - k + 1) P^{k+1}(t) \end{aligned}$$

$$\text{où: } c^{lw} = \max_{k-1 \leq h \leq 2m-1} \binom{2m-1}{h}$$

$$\begin{aligned} \text{Enfin : } B_i(t) &\leq 2(\ell m - 2m + 1)(\ell m - m + 1) \left(\binom{m-1}{k-1} P^k(t) \right)^2 \\ &\quad + 2(m-1)c^{lw} (2m - k + 1) (\ell m - m + 1) P^{k+1}(t) \end{aligned}$$

D'autre part:

$$\Delta_i(t) = \sum_{j=im\ell+1}^{(i+1)m\ell-m+1} b_j(t) \geq (\ell m - m + 1) \binom{m-1}{k-1} q^k(t) (1 - P(t))^{m-k}$$

Posons:

$$\begin{aligned} W(t) &= 1 + 2((\ell-2)m + 1) \frac{P^k(t)}{(1-P(t))^{m-k}} \left(\frac{P(t)}{q(t)} \right)^k \\ &\quad + 2(m-1)a(2m-k+1) \frac{P(t)}{(1-P(t))^{m-k}} \left(\frac{P(t)}{q(t)} \right)^k \end{aligned}$$

On déduit que:

$$\Pr(Z_n \leq t) \geq \frac{1}{W(t)} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{mt} \rfloor - 1} \Delta_i(t).$$

Grâce à ce théorème on peut établir le résultat suivant qui nécessite les conditions suivantes:

a) Il existe des nombres positifs λ_i, α_i et des fonctions Φ_i tels que:

$$F_i(t) = (\lambda_i t)^{\alpha_i} + t^{\alpha_i} \Phi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ pour } 0 \leq t < \delta \text{ et un certain } \delta > 0.$$

b) $\lim_{t \rightarrow 0} \Phi_i(t) = 0$ uniformément en i .

c) $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = \lambda$.

THEOREME IV.1.2.2. Sous les conditions a), b) et c) on a :

1) Si: $\alpha = \inf_i \alpha_i = \alpha_i$ pour $i = 1, 2, \dots$ alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left(n^{\frac{1}{k\alpha}} Z_n \leq t\right) = 1 - \exp\left[-(\lambda t)^{k\alpha} \binom{m-1}{k-1}\right]$$

2) Si: $\alpha > 0$ et pour chaque $i = 1, 2, \dots$ il existe un j avec $i \leq j \leq i + m - 1$

tel que $\alpha_j > \alpha$ alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left(n^{\frac{1}{k\alpha}} Z_n \leq t\right) = 0$$

Démonstration:

En posant $t_n = n^{-\frac{1}{k\alpha}} t$ on a: $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left(n^{\frac{1}{k\alpha}} Z_n \leq t\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(Z_n \leq t_n)$

1) On montre d'abord que lorsque $n \rightarrow \infty$ $n(P(t_n))^{k+1} \rightarrow 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n(t_n) \leq$

$$D(t) = 1 - \exp\left[-(\lambda t)^{k\alpha} \binom{m-1}{k-1}\right]$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n(P(t_n))^{k+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\max_{1 \leq i \leq n} F_i\left(n^{-\frac{1}{k\alpha}} t\right) \right)^{k+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\max_{1 \leq i \leq n} \left((\lambda_i n^{-\frac{1}{k\alpha}} t)^{\alpha_i} + \left(n^{-\frac{1}{k\alpha}} t\right)^{\alpha_i} \Phi_i\left(n^{-\frac{1}{k\alpha}} t\right) \right) \right)^{k+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\max_{1 \leq i \leq n} \left((\lambda_i n^{-\frac{1}{k\alpha}} t)^{\alpha} + \left(n^{-\frac{1}{k\alpha}} t\right)^{\alpha} \Phi_i\left(n^{-\frac{1}{k\alpha}} t\right) \right) \right)^{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{n^k} \left((\lambda_i t)^\alpha + t^\alpha \Phi_i \left(\left(n^{-\frac{1}{\alpha k}} t \right) \right) \right) \right)^{k+1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{k+1}{k}}} \left(\max_{1 \leq i \leq n} \left((\lambda_i t)^\alpha + t^\alpha \Phi_i \left(\left(n^{-\frac{1}{\alpha k}} t \right) \right) \right) \right)^{k+1} = 0
\end{aligned}$$

D'autre part:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} D_n(t_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-m+1} a_i(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-m+1} F_i(t_n) H_{k-1}(i+1, i+m-1) \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-m+1} \sum_{j=k-1}^{m-1} \binom{m-1}{j} (P(t_n))^{j+1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (n-m+1) \sum_{j=k-1}^{m-1} \binom{m-1}{j} (P(t_n))^{j+1} \\
&= \binom{m-1}{k-1} (\lambda t)^{\alpha k} + \binom{m-1}{k-1} (\lambda t)^{\alpha k} o(1) \\
&= 1 - \exp \left(- (\lambda t)^{\alpha k} \binom{m-1}{k-1} \right) = D(t) \dots \dots \dots (1) .
\end{aligned}$$

Par ailleurs, si on prend $\ell = \ell_n$ dans l'inégalité de gauche du théorème IV.1.2.1 avec $\ell_n \rightarrow \infty$ et $\frac{\ell_n}{n} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ (par exemple $\ell_n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, ou $\ell_n = \lfloor \log n \rfloor + 1$) on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{m \ell_n} \rfloor - 1} \Delta_i(t_n) = D(t) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left\lfloor \frac{n}{m \ell_n} \right\rfloor - 1 \right)^{\frac{(\ell_n m - m + 1)}{n}} = D(t)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(t)}{n^{\frac{1}{k}}} = 0, \quad \frac{P(t_n)}{q(t_n)} = \frac{P(t)}{q(t)}$$

$$\text{donc : } \lim_{n \rightarrow \infty} W(t) = 1$$

$$\text{d'où : } \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(Z_n \leq t_n) \geq D(t) \dots \dots \dots (2).$$

En combinant (1) et (2) on obtient le résultat.

2) Ici on doit montrer que lorsque $n \rightarrow \infty$, $D_n(t_n) \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
\text{Mais: } \lim_{n \rightarrow \infty} D_n(t_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-m+1} a_i(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-m+1} F_i(t_n) H_{k-1}(i+1, i+m-1) \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-m+1} \sum_{j=k-1}^{m-1} \binom{m-1}{j} (P(t_n))^{j+1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (n-m+1) \sum_{j=k-1}^{m-1} \binom{m-1}{j} (P(t_n))^{j+1}
\end{aligned}$$

$$\text{Donc il suffit de montrer que: } \lim_{n \rightarrow \infty} n (P(t_n))^k = 0$$

Sachant que $\forall i = 1, 2, \dots$ il existe un $j = j_i : i \leq j_i \leq i+m-1$ tel que $\alpha_{j_i} > \alpha$

on a:

$$\begin{aligned}
 P(t_n) &= \max_{1 \leq i \leq n} F_i \left(n^{-\frac{1}{\alpha k}} t \right) = \max_{1 \leq i \leq n-m+1} \max_{i \leq j \leq i+m-1} F_j \left(n^{-\frac{1}{\alpha k}} t \right) \\
 &= \max_{1 \leq i \leq n-m+1} F_{j_i} \left(n^{-\frac{1}{\alpha k}} t \right) = \max_{1 \leq i \leq n-m+1} \left(\left(\lambda_{j_i} n^{-\frac{1}{\alpha k}} t \right)^{\alpha_{j_i}} + \left(n^{-\frac{1}{\alpha k}} t \right)^{\alpha_{j_i}} \Phi_{j_i} \left(n^{-\frac{1}{\alpha k}} t \right) \right) \\
 &= \left(\lambda n^{-\frac{1}{\alpha k}} t \right)^{\beta} + \left(n^{-\frac{1}{\alpha k}} t \right)^{\beta} \Phi \left(n^{-\frac{1}{\alpha k}} t \right)
 \end{aligned}$$

où $\beta = \max_{1 \leq i \leq n-m+1} \alpha_{j_i} \geq \alpha$ et un certain Φ tel que $\lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t) = 0$.

$$\begin{aligned}
 \text{Donc: } \lim_{n \rightarrow \infty} n(P(t_n))^k &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left(\lambda n^{-\frac{1}{\alpha k}} t \right)^{\beta} + \left(n^{-\frac{1}{\alpha k}} t \right)^{\beta} \Phi \left(n^{-\frac{1}{\alpha k}} t \right) \right)^k \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^{\frac{\beta}{\alpha}}} \left((\lambda t)^{\beta} + t^{\beta} \Phi \left(n^{-\frac{1}{\alpha}} t \right) \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Le théorème est donc démontré. ■

VI.2) LOI LIMITE DU TEMPS DE PANNE D'UN SYSTEME DONT LES COMPOSANTS ONT DES TEMPS DE PANNE DE LOI QUELCONQUE

On considère un système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n". Les composants sont supposés indépendants et de même loi, autrement dit les temps de panne $T_1, T_2, \dots, T_n$ des composants du système sont des variables aléatoires (positives) indépendantes et identiquement distribuées. En outre on suppose que la distribution de panne des composants est de loi quelconque et on s'intéresse à la loi limite du temps de panne Z_n du système sous des hypothèses suffisamment larges pour l'ensemble des applications.

On désigne par $F(t)$ la fonction de distribution commune des variables aléatoires $T_i, i = 1, 2, \dots, n$, Z_n le temps de panne du système et on note:

$$F_i(t) = \Pr(T_i \leq t) = F(t), \text{ pour tout } i, i = 1, 2, \dots, n$$

$$A(t) = \binom{m-1}{k-1} F^k(t) (1-F(t))^{m-k}$$

$$B(t) = \sum_{h=k-1}^{m-1} \binom{m-1}{h} F^{h+1}(t) (1-F(t))^{m-h-1}$$

$$D_n(t) = (n - m + 1) B(t).$$

THEOREME IV.2.1.

Sous les considérations précédentes et pour tout entier $\ell \geq 1$ tel que $m \leq \ell m \leq n$, on a:

$$\frac{1}{W(t)} \left(\left\lceil \frac{n}{m\ell} \right\rceil - 1 \right) m^\ell A(t) \leq \Pr(Z_n \leq t) \leq D_n(t)$$

où: $[x]$ est la partie entière de x .

$$W(t) = 1 + 2m(\ell - 1)A(t) + 2a(m-1)(2m-k+1) \frac{F(t)}{(1-F(t))^{m-k}}$$

$$\text{avec: } a = \frac{\max_{k-1 \leq h \leq 2m-1} \binom{2m-1}{h}}{\binom{m-1}{k-1}}$$

Démonstration:

On définit les événements: E_i : "le composant i tombe en panne et il existe au moins $k-1$ composants en panne parmi les composants $i+1, i+2, \dots, i+m-1$ ", $i = 1, 2, \dots, n$. Il est clair que: $\Pr(E_i) = B(t)$

D'où:

$$\Pr(Z_n \leq t) = \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n-m+1} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n-m+1} \Pr(E_i) = D_n(t) \dots (1)$$

Par ailleurs, pour t fixé considérons la variable aléatoire $Y_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n-m+1$, qui prend la valeur 1 si et seulement si le composant j tombe en panne et il existe $(k-1)$ composants en panne parmi les composants $j+1, j+2, \dots, j+m-1$ et 0 si non. Soit $Y(t) = \sum_{j=1}^{n-m+1} Y_j(t)$, donc le système tombe en panne si et seulement si

$$Y(t) > 0.$$

Il est clair que: $E(Y_j) = A(t)$ et $E(Y) = (n-m+1)A(t) \leq D_n(t)$.

On peut écrire:

$$\Pr(Z_n \leq t) = \Pr(Y > 0) \geq \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{m\ell} \rfloor - 1} \bigcup_{j=i m \ell + 1}^{(i+1)m\ell} (Y_j = 1)\right) \\ = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{m\ell} \rfloor - 1} \Pr\left(\bigcup_{j=i m \ell + 1}^{(i+1)m\ell} (Y_j = 1)\right).$$

En appliquant l'inégalité de "Chung-Erdos" on obtient:

$$\Pr(Z_n \leq t) \geq \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{m\ell} \rfloor - 1} \frac{\left(\sum_{j=i m \ell + 1}^{(i+1)m\ell} \Pr(Y_j = 1)\right)^2}{\sum_{j=i m \ell + 1}^{(i+1)m\ell} \Pr(Y_j = 1) + \sum_{u=v} \Pr(Y_u = 1, Y_v = 1)}$$

$$\geq \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{m\ell} \right\rfloor - 1} \frac{(m\ell A(t))^2}{(m\ell A(t)) + 2m(\ell-1)m\ell A^2(t) + 2\ell m(2m-k+1)(m-1)C^{\text{de}} F^{k+1}(t)}$$

$$= \frac{\left(\left\lfloor \frac{n}{m\ell} \right\rfloor - 1\right)m\ell A(t)}{1 + 2m(\ell-1)A(t) + 2(2m-k+1)(m-1)aF(t)(1-F(t))^{k-m}} \text{ où } C^{\text{de}} = \max_{k-1 \leq h \leq 2m-1} \binom{2m-1}{h}$$

Posons : $W(t) = 1 + 2m(\ell-1)A(t) + 2(2m-k+1)(m-1)a \frac{F(t)}{(1-F(t))^{m-k}}$

On obtient:

$$\Pr(Z_n \leq t) \geq \frac{1}{W(t)} \left(\left\lfloor \frac{n}{m\ell} \right\rfloor - 1 \right) m\ell A(t) \dots\dots\dots (2)$$

En combinant les inégalités (1) et (2) on obtient le résultat. ■

THEOREME IV.2.2:

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} nF^k(a(n,k)t) = \Delta(t)$, $0 \leq \Delta(t) \leq 1$, avec $a(n,k) \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow$

∞ , on a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(a^{-1}(n,k)Z_n \leq t) = \binom{m-1}{k-1} \Delta(t)$$

Démonstration:

Il est clair que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} nF^k(a(n,k)t) = \Delta(t)$ alors: $\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n(a(n,k)t) = \binom{m-1}{k-1} \Delta(t)$.

Donc d'une part on a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(a^{-1}(n,k)Z_n \leq t) \leq \binom{m-1}{k-1} \Delta(t) \dots\dots\dots (3).$$

D'autre part, on utilise l'inégalité du gauche du théorème IV.2.2 pour $\ell = \ell_n$ tel que $\ell_n \rightarrow +\infty$ et $\frac{\ell_n}{n} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ (par exemple $\ell_n = [c \log n]$, $c > 0$).

On déduit que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} W(a(n,k)t) = 1$

Par conséquent:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(a^{-1}(n,k)Z_n \leq t) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left\lfloor \frac{n}{m\ell_n} \right\rfloor - 1 \right) m\ell_n A(a(n,k)t) \geq \binom{m-1}{k-1} \Delta(t) \dots\dots (4)$$

Les inégalités (3) et (4) entraînent que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(a^{-1}(n, k) Z_n \leq t) = \binom{m-1}{k-1} \Delta(t). \blacksquare$$

Maintenant, nous cherchons la distribution limite de la variable aléatoire normée $a^{-1}(n, k) Z_n$ ou $a(n, k) > 0$ est une fonction convenablement choisie.

THEOREME IV.2.3.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} n F^k(a(n, k)t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n F^k(a(\ell_n, k)t) = \Delta(t)$, $0 \leq \Delta(t) \leq 1$,

tel que $a(n, k) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, pour $\ell_n = c \log n$, $c > 0$. Alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr(a^{-1}(n, k) Z_n \leq t) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\binom{m-1}{k-1} t^c\right), & t > 0, c > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Démonstration:

On considère un système composé de n blocks disposés en parallèle, chaque block contient ℓ_n composants disposés en série ($\ell_n \geq m$). La fonction de fiabilité de chaque composant est $\overline{F^k}(t) = 1 - F^k(t)$. Donc, nous avons un système "série-parallèle" régulier et homogène [28] dont la fonction de distribution de panne est donnée par la formule:

$$\overline{R_n}(t) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \overline{F^k}(t)^{\ell_n}\right)$$

Il est clair que si $V(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \overline{F^k}(\alpha_n t + \beta_n)^{\ell_n}$ avec $\alpha_n > 0$, $\beta_n \geq 0$. On a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{R_n}(\alpha_n t + \beta_n) = \exp(-V(t)).$$

Mais:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} n \overline{F^k}(\alpha_n t + \beta_n)^{\ell_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \exp \left[\ell_n \log \left(1 - F^k(\alpha_n t + \beta_n) \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \exp \left[-\ell_n \left(F^k(\alpha_n t + \beta_n) + o \left(F^k(\alpha_n t + \beta_n) \right) \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \exp \left[-\ell_n \left(F^k(\alpha_n t) + \beta_n F^k(\zeta) + o \left(F^k(\alpha_n t) + \beta_n F^k(\zeta) \right) \right) \right]\end{aligned}$$

où $\alpha_n t < \zeta < \alpha_n t + \beta_n$

En choisissant: $\alpha_n = a(n, k)$ tel que: $\lim_{n \rightarrow \infty} n F^k(a(n, k) t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n F^k(a(\ell_n, k) t)$

$\beta_n = 1$ et $\ell_n = c \log n$ avec $c = F^{-k}(\zeta)$, $\zeta > 0$ on obtient:

$$V(t) = \exp\{- (\Delta(t) + o(\Delta(t)))\}$$

Or d'après la deuxième partie du théorème 1 [28] on a:

$$V(t) = \begin{cases} \exp(-t^\alpha), & t \geq 0, \quad \alpha > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Donc: $\Delta(t) + o(\Delta(t)) = t^\alpha$, $t \geq 0$.

Ce qui équivaut à:

$$1 - \exp(-\Delta(t)) = t^\alpha, \quad t \geq 0 \quad (\text{i.e. } -\Delta(t) = \log(1 - t^\alpha) = -t^\alpha - o(t^\alpha)).$$

D'où: $\Delta(t) = t^\alpha + o(t^\alpha)$.

Par conséquent:

$$\binom{m-1}{k-1} \Delta(t) = \binom{m-1}{k-1} t^\alpha + \binom{m-1}{k-1} o(t^\alpha) = 1 - \exp\left(-\binom{m-1}{k-1} t^\alpha\right), \quad t \geq 0$$

En utilisant le théorème IV.2.2 on obtient le résultat. ■

EXEMPLES.

1. $F(t) = (\lambda t)^\beta + o(t^\beta)$, i.e: $F = \text{Weib}(\lambda t, \beta)$, on prend $a(n, k) = \frac{1}{\lambda n^{k\beta}}$. Il est

clair que: $\lim_{n \rightarrow \infty} n F^k(a(n, k) t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n F^k(a(\ell_n, k) t) = t^{k\beta} + t^{k\beta} o(1)$.

Donc on déduit du théorème IV.2.3:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr \left(a^{-1}(n, k) Z_n \leq t \right) = 1 - \exp \left(- \binom{m-1}{k-1} t^\alpha \right), \alpha = k\beta > 0.$$

C'est à dire $\lambda n^{\frac{1}{k\beta}} T_n \rightarrow \text{Weib} \left(\left(\binom{m-1}{k-1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} t, \alpha \right)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

2. $F(t) = \int_0^t \frac{\mu^\beta}{\Gamma(\beta+1)} s^{\beta-1} \exp(-\mu s) ds = \frac{\mu^\beta}{\Gamma(\beta+1)} t^\beta + t^\beta o(1)$, $F(t)$ est la fonction de distribution de la loi gamma.

Si: $a(n, k) = \left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\mu^{k\beta} n} \right)^{\frac{1}{k\beta}}$. On a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n F^k(a(n, k) t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n F^k(a(\ell_n, k) t) = t^{k\beta} + t^{k\beta} o(1).$$

Alors d'après le théorème (IV.2.3) on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left(a^{-1}(n, k) Z_n \leq t \right) = 1 - \exp \left(- \binom{m-1}{k-1} t^\alpha \right), \alpha = k\beta > 0.$$

3. $F(t) = (\lambda t)^\beta + t^\beta o(1) + t^\beta \Psi(t)$, avec $\lim_{t \rightarrow 0} \Psi(t) = 0$.

En prenant: $a(n, k) = \frac{1}{\lambda n^{\frac{1}{k\beta}}}$ on trouve:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n F^k(a(n, k) t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n F^k(a(\ell_n, k) t) = t^{k\beta} + t^{k\beta} o(1).$$

En utilisant le théorème IV.2.3 on obtient:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left(a^{-1}(n, k) Z_n \leq t \right) = 1 - \exp \left(- \binom{m-1}{k-1} t^\alpha \right), \alpha = k\beta > 0$$

REFERENCES

- [1] J.M.Kontoleon, "Reliability determination of a r-successive-out-of-n:F System", IEEE Trans. Reliability, vol. r-29, 1980 Dec. pp.43
- [2] D.T.Chiang, S.C.Nui, "Reliability of consecutive-k-out-of-n:F System", IEEE Trans. Reliability, vol.R-30, 1981 Apr. pp.87-89.
- [3] R.C.Bollinger, A.A.Salvia, "Consecutive-k-out-of-n:F System networks", IEEE Trans. Reliability, vol R-31 1982 Apr. pp.53-56.
- [4] C.Dermann, J.Lieberman, S.Ross, "On the consecutive-k-out-of-n:F System", IEEE Trans. Reliability, vol. R-31 (1982) Apr. pp.576
- [5] R.C.Bollinger, "Direct computation for consecutive-k-out-of-n:F System", IEEE Trans. Reliability. Vol. R-31 (1982) Dec. pp.442-444.
- [6] F.K.Hwang, "Fast solutions for consecutive-k-out-of-n:F System", IEEE Trans. Reliability, Vol. R-31 (1982) Dec. pp.445-4450
- [7] J.G.Shanthikumar, "Recursive algorithm to evaluate the reliability of a consecutive-k-out-of-n:F System", IEEE Trans. Reliability. Vol.31 (1982) Dec. pp. 442-443.
- [8] S.Papastavridis, M.Lambiris, "Reliability of a consecutive-k-out-of-n:F System for Markov dependent component", IEEE Trans. Reliability , Vol. R-36 (1987) Apr. pp. 78-79.
- [9] S.Papastavridis, "A limit theorem for the reliability of consecutive-k-out-of-n:F System", Adv. App. Prob. 19, 746-748 (1987).
- [10] O.Chrysaphinou, S.Papastavridis "Limit distribution for a consecutive-k-out-of-n:F System", Adv. App. Prob. 22 R-35 pp.491-493 (1990).
- [11] A.D.Barbour, G.K.Eagleson, "Poisson convergence for dissociated statistics", J.R.Statist. soc.B.46, 1984, pp.397-402.
- [12] M.Boushaba, "Fiabilité des systèmes k-consécutifs-sur-n", Thèse de Magister soutenue le 20/05/1992.
- [13] F.K.Hwang, "Simplified reliabilities for consecutive-k-out-of-n systems", Siam J. ALG. Disc. Meth. 1986.Vol.7, No.2. pp. 258-264.
- [14] J.S.Wu, R.J.Chen, "Efficient algorithm for reliability of a circular consecutive-k-out-of-n:F System", IEEE Tans. Reliability, Vol.42, No.1, 1993 March. pp. 163-164.
- [15] M.T.Chao, J.C.Fu, M.V.Koutras, "Survey of reliability studies of consecutive-k-out-of-n:F & Related Systems", IEEE Trans. Reliability, Vol.44. No.1. 1995 March. pp. 120-127.

- [16]J.C.Fu, "Bounds for reliability of large consecutive-k-out-of-n: F System with unequal component reliability ", IEEE Trans. Reliability. Vol.R-35 (1986) Aug. pp. 316-318.
- [17]B.Ksir, "A Weibull limit law for an arbitrary component law of a consecutive-k-out-of-n:F System", Submitted 1998.
- [18]W.S.Griffith,"On Consecutive-k-out-of-n failure systems and their generalizations", A.P.Basu (ed), Reliability and quality control, 1986, pp 157-165; Elsevier (North-Holland).
- [19]M.Sfakianakis, S.Kounias, A.Hilaris,"Reliability of a Consecutive-k-out-of-r-from-n:F System", IEEE Transactions On Reliability, Vol.41,No.3, 1992 September, pp 442-447.
- [20]S.G.Papastavridis, M.V.Kontras, "Bounds for Reliability of Consecutive-k-within-m-out-of-n:F Systems", IEEE Transactions On Reliability, Vol.42,No.1, 1993 March, pp 156-160.
- [21]Jun Cai, "Reliability of a large Consecutive-k-out-of-r-from-n:F System with Unequal Component-Reliability", IEEE Transactions On Reliability, Vol.43,No.1, 1994 March, pp 107-111.
- [22]S.G.Papastavridis, M.E.Sfakianakis, "Optimal-Arrangement & Importance of the Components in a Consecutive-k-out-of-r-from-n:F System", IEEE Transactions On Reliability, Vol.40,No.3, 1991August, pp 277-279.
- [23]M.Sfakianakis, "Optimal-Arrangement of Components in a Consecutive-k-out-of-r-from-n:F System", Microelectron. Reliab., Vol.33,No.10, pp 1573-1578, 1993 Printed in Great Britain.
- [24]S.G.Papastavridis, "A Weibull Limit for Reliability of a Consecutive-k-within-m-out-of-n System", Advances in Applied Probability, vol.20, 1988 pp 690-692.
- [25]J.Nauss, "An extension of the birthday problem" , The American Statistician, vol 22, 1968 feb, pp 27-29.
- [26]F.S.Makri, Z.M.Psilakis, "Reliability evaluation of a Consecutive-k-out-of-r-from-n:F System a Simulation approach" ,Proc. Second IASTED Int'l Conf. Reliability, Quality Control and Risk Assessment, 1993 Oct, pp 137-139; Cambridge.
- [27]Zaharias, M.Psilakis, "A Simulation Algorithm for Computing Failure Probability of a Consecutive-k-out-of-r-from-n:F System", IEEE Transactions On Reliability, Vol.44, No.3, 1995 September.

[28] Krzysztof Kłowrocki, "The classes of asymptotic reliability functions for series-parallel & parallel-series systems", *Reliability Engineering and System Safety* 46, 1994, pp179-188.

CONCLUSION

Nous avons d'abord démontré que la loi limite du temps de panne d'un système « k-parmi-m-consécutifs-sur-n » est une loi de Weibull lorsque les temps de panne des composants suivent des lois de Weibull non nécessairement identiques ; ensuite nous avons établi que la variable aléatoire $a(n,k)T$ converge vers une loi de Weibull de paramètres (α, β) pour une loi commune arbitraire F des variables aléatoires T_i , $i=1,2,\dots,n$ qui sont les temps de panne des composants $1,2,\dots,n$ et sur lesquelles on fait des hypothèses raisonnables. Il serait intéressant de prolonger ce dernier résultat au cas où les composants sont non identiques. Ceci fera l'objet d'une recherche ultérieure.

RESUME :

L'objet de notre travail est l'étude des systèmes « k-parmi-m-consécutifs-sur-n ». ceux ci sont définis comme des systèmes qui tombent en panne si et seulement si au moins k composants parmi m consécutifs sont en panne. L'étude de leurs propriétés déterministes ou aléatoires revient à étudier les statistiques X et T qui représentent respectivement l'état du système et son temps de panne. On suppose que les composants et le système lui même sont dichotomiques (c à d ou ils fonctionnent ou ils sont en panne). Dans notre travail nous avons présenté d'abord les propriétés de ces systèmes puis nous avons intéressé essentiellement au comportement asymptotique de la statistique T convenablement normée .

Plus précisément nous avons démontré que la variable aléatoire $a(n,k)T$ converge vers une loi de Weibull de paramètres (α, β) pour une loi commune arbitraire F des variable aléatoires T_i ($i=1, \dots, n$) qui représente des temps de panne des composants sur lesquelles on fait des hypothèses suffisamment larges pour les applications. Pour démontrer celui-ci nous avons dû d'abord établir une double inégalité nous permettant d'encadrer la quantité $\Pr(a(n,k)T \leq t)$.

MOTS.CLES :

Systèmes « k-parmi-m-consécutifs-sur-n ». Loi de Weibull. Distribution de panne arbitraire. Loi limite.

