République Algérienne Démocratique Et Populaire
Ministère De L'enseignement Supérieur et De la Recherche Scientifique

Université Mentouri-Constantine
Faculté Des Sciences
Département De Mathématiques

N° d'ordre :
N° de série :

Thèse Présentée Pour L'obtention
Du Diplôme de Doctorat Es-Sciences
En Mathématiques

Spécialité : Probabilité Appliquées et Statistique

Thème

Etude des systèmes r-consécutifs-k-sur-n

Par
Ghoraf Namir

Jury d'examen

Mr : A Ayadi	**Président**	**Prof.**	**C U Oum El Bouaghi**
Mr : B. Ksir	**Rapporteur**	**Prof.**	**Univ. Constantine**
Mr : A. Aissani	**Examinateur**	**Prof.**	**Univ. USTHB**
Mr : K. Khaldi	**Examinateur**	**M C.**	**Univ. Boumerdes**
Mr : F/L Rahmani	**Examinateur**	**M C .**	**Univ. Constantine**

Soutenue à Constantine le 09 Juin 2007

عنـ ـ ـ ـ ـ ـوان الأطروحـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـة

Etudes des systèmes "r-consécutifs-k-sur-n"

ملخـ ـ ـص الأطروحـ ـة

هذا العمل مخصص لدراسة الأنظمة « r-consécutifs-k-sur-n » هذه الأنظمة هي تعميم للأنظمة "k-consécutifs-sur-n" (r-1) و « r-parmi-n » (k-1). الأطروحة تتكون من مقدمة عامة أين قمنا بسرد تاريخ الأنظمة المدروسة وثلاثة فصول معروضة بالشكل التالي

الفصـ ـل الأول:

هذا الفصل مخصص لعرض الأنظمة « k-consécutifs-k-sur-n » من خلال بعض النتائج المهمة و المتعلقة بحساب وثوقية النظام و الحصول على حدود- أعلى و أدنى- للوثوقية وقانون النهاية لزمن عطب النظام وفي الأخير نناقش مسألة الأمية البنيوية لمركبات النظام

الفصل الثـ ـاني:

في هذا الفصل نتناول بالدراسة النضام « r-consécutifs-k-sur-n » أين نقدم نتائجنا المتعلقة بهذا النوع من الأنظمة تعطى في هذه الحالة عبارة إحتمال عطب النظام بدلالة وثوقية النظام « k-consécutifs-sur-n » ثم نقدم نتائج حول مسألة التقارب بالقانون لزمن عطب النظام وكذلك مسألة حساب وترتيب الأهمية البنيوية للمركبات

الفصل الثـالث

**في هذا الفصل نتناول بالدراسة النظام « r-consécutifs-k-sur-n de période »
و نقدم نتيجتنا التي أعطينا من خلالها عبارة إحتمال عطب النظام في حالة مركبات النظام مستقلة ننهي بحثنا هذا بالخلاصة أين سنطرح بعض المسائل التي لم تدرس لحد الآن و التي تشكل مسائل بحث مستقبلية**

كلمـات المفتـ ـاح:

النظام « k-consécutifs-k-sur-n » النظام « r-consécutifs-k-sur-n » متتالية fibonacci النظام « r-consécutifs-k-sur-n de période » الأهمية البنيوية قانون النهاية عبارات الوثوقية.

Abstract

Our work is devoted to the study of "r-consecutive-k-out–of-n : F systems". Those generalize the "consecutive-k-out-of-n F system" (r=1) and the "r-out–of-n : F system" (k=1). The thesis is made up of an introduction where we present a history on the studied systems, and three chapters presented as follow :

- **Chapitre1** : This chapter is devoted to point out some results concerning the calculation and the framing of the reliability of "consecutive-k-out-of-n : F systems", and, the calculation and ordering of structure importance of the components. Thereafter, we present some results concerning the asymptotic behavior of the failure time of the system, where we will quote our result which was the subject of an international publication.
- **Chapitre2** : Here we treat the "r-consecutive-k-out–of-n : F system" where we present our results concerning this kind of systems . First, we give some formulas of the failure probability of the system, thereafter, we establish results on the asymptotic behavior of the failure time of the system and finally, we will discuss the problem of the structure importance of components.
- **Chapitre3** : This final chapter examines the "r-consecutive-k-out-of-n : F system with cycle k" and we give here our result which was the subject of an international publication where we established a formula of the failure probability of this system when the components are supposed to be independent.

We finish our thesis by a conclusion where we quote some problems which not still treated and which can be the subject of later research.

Key words

"consecutive-k-out-of-n F system". "r-consecutive-k-out-of-n F system". "r-consecutive-k-out-of-n F system with cycle k". Fibonacci sequence. structure importance .Limit law. Formulas of reliability

Résumé

Notre travail est consacré à l'étude des systèmes "r-consécutifs-k-sur-n". Ceux-ci généralisent les systèmes ”k-consécutifs-sur-n” ($r = 1$) et les systèmes ”r-parmi-n” ($k = 1$). La thèse est composée d'une introduction où nous présentons un historique sur les systèmes étudiés, et trois chapitres présentés de la manière suivante :

- **Chapitre1** : Ce chapitre est consacré à rappeler quelques résultats concernant le calcul et l'encadrement de la fiabilité des systèmes "k-consécutifs-sur-n", ainsi, le calcul et l'arrangement des importances de structure des composants. Ensuite nous présenterons quelques résultats concernant le comportement asymptotique du temps de panne du système où nous citerons notre résultat qui a fait l'objet d'une publication internationale.
- **Chapitre2** : Ici nous traitons le système "r-consécutifs-k-sur-n" où nous présentons nos résultats concernant ce type de systèmes. D'abord, nous donnerons quelques formules de la probabilité de panne du système, ensuite, nous établissons des résultats sur le comportement asymptotique du temps de panne du système et enfin, nous discuterons le problème de l'importance de structure des composants.
- **Chapitre3** : Ce dernier chapitre examine le système "r-consécutifs-k-sur-n de période k" et nous présenterons ici aussi notre résultat qui a fait l'objet d'une publication internationale où nous avons établi une formule de la probabilité de panne de ce système dans le cas où les composants sont supposés indépendants.

Nous terminons notre thèse par une conclusion où nous citons quelques problèmes qui n'ont pas été encore traités et qui peuvent faire l'objet de recherches ultérieures.

Mots Clés

Système "k-consécutifs-sur-n". Système "r-consécutifs-k-sur-n". Système "r-consécutifs-k-sur-n de période k". Suite de Fibonacci. Importance de structure. Loi limite. Formules de la fiabilité

A ma famille

Remerciements

En premier lieu, je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à l'égard de Monsieur Ksir Brahim pour sa fraîcheur d'esprit, son enthousiasme mathématique, pour l'infinie patience ainsi que la disponibilité permanente qu'il a su m'accorder durant ces années de thèse.

Je suis également très honoré que Monsieur Ayadi Abd El hamid soit le président de jury de ma thèse.

J'exprime mes plus sincères remerciements à .Monsieur Amar Aissani , Monsieur Khaled Khaldi et Monsieur Fouad Lazhar Rahmani qui ont accepté d'être examinateurs de cette thèse

J'adresse mes plus vifs remerciements à l'ensemble des membres de laboratoire de Mathématiques de Besançon (UMR 6623) qui m'ont accordé un excellent accueil, ainsi que leur sympathie pendant mon séjour de recherches dans le cadre d'une bourse nationale. Plus particulièrement, je tiens à exprimer de chaleureux remerciements à Monsieur Stéphane Chrétien, Mohamed et Karima Sbihi, pour l'aide et le soutien qu'ils ont su m'apporter.

Je tiens à remercier vivement le Professeur Olivier Gaudoin qui m'a invité pour exposer mes travaux dans le cadre du groupe de recherche FIMA.

Pour finir, je remercie mes proches qui m'ont soutenu et encouragé.

Table des matières

Introduction Générale

Depuis 1980 la modélisation "k-consécutifs-sur-n" a non seulement fait l'objet de nombreuses publications scientifiques mais également a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs de divers pays. L'ampleur de la bibliographie et la diversité des problèmes traités font que les modèles "k-consécutifs-sur-n" sont devenus un domaine très important dans la littérature de la théorie de la fiabilité au cours de ces dernières deux décennies.

On appelle système ”k-consécutifs-sur-n” un système comportant n composants disposés linéairement où circulairement et qui tombe en panne si et seulement si au moins k composants consécutifs ($k \leq n$) sont en panne. Ces systèmes sont utilisés particulièrement dans les domaines de la télécommunication, des circuits intégrés, pompage de pétrole par pipelines... [4],[5],[6],[7]. Ils ont été introduits dans la littérature mathématique pour la première fois par Kontoleon [3] en1980. Depuis, de nombreux travaux scientifiques ([25] , [28], [29], [40],[41], [45], [47]..) qui sont réalisés sur ce genre de modèles dans différents cadres d'hypothèses (composants du système identiques ou non identiques, indépendance mutuelle des composants, dépendance markovienne etc...) on trouve deux catégories d'articles. Dans la première, les auteurs s'intéressent au calcul exact ou approximatif de la fiabilité du système [3] à [25], ainsi, l'importance des composants dans le système [47], [55], [56] et ce en utilisant des méthodes algorithmiques ([9], [11], [12],[13], [30], [33]) ou des techniques probabilistes ([8],[10], [14]...). Le plus souvent, devant la complexité des hypothèses, on s'est contenté de chercher un encadrement de la valeur de la fiabilité du système ([15], [36], [40], [49]...). Dans la deuxième catégorie on traite plutôt le problème du comportement asymptotique du temps de panne du système sous différentes hypothèses sur les lois des temps de panne des composants [18], [21], [45].[63].....

Dans ce travail nous présenterons une généralisation des modèles "k-consécutifs-sur-n". D'une façon précise l'objet de cette thèse est l'étude systématique des systèmes ”r-consécutifs-k-sur-n". Ceux-ci généralisent les systèmes ”k-consécutifs-sur-n” et les systèmes ”r-parmi-n”. Ils sont définis comme suit : un système ”r-consécutifs-k-sur-n” est un système comportant n composants disposés linéairement où circulairement et qui tombe en panne si et seulement si au moins r séries non chevauchées de k composants consécutifs sont en panne ($rk \leq n$). On précise qu'une série est formée de k composants consécutifs et elle tombe en panne si et seulement si ses k composants sont tous en panne. On remarque que pour $r = 1$ et $k = 1$ on trouve les systèmes ”k-consécutifs-sur-n” et les systèmes ”r-parmi-n” respectivement. On rencontre ces systèmes particulièrement dans les domaines de contrôle de qualité. Ils ont été introduits pour la première fois dans la littérature mathématique par W.S. Grifith [12] en 1986 ; où il a présenté une méthode pour déterminer la fiabilité du système dans le cas ou les composants sont supposés indépendants et de même probabilité de panne via les chaînes de Markov. Et depuis leurs introduction ils ont fait l'objet de beaucoup de travaux scientifiques ([20], [27], [34],..) parmi ceux Papastavridis [26] (1990) a établi une formule récursive pour la probabilité de panne du système dans le cas des composants indépendants et non identiques et une formule exacte ainsi la loi limite du temps de panne du système dans le cas où les composants sont identiques. En (2002) M. Boushaba & N. Ghoraf [59] ont donné des formules de la fiabilité de ce système sous différentes hypothèses sur ses composants et ce en fonction de la fiabilité du système "k-consécutifs-sur-n". Et en (2006) N. Ghoraf [64] a donné autres formules pour la fiabilité du système et la configuration optimale des composants dans le système. Récemment, un système particulier du système ”r-consécutifs-k-sur-n" a été introduit dans la littérature de la fiabilité. Plus exactement en 1999, J.P. Bolland & S. Papastavridis [46] ont défini le système "r-consécutifs-k-sur-n de période k" c'est à dire dans ce cas les probabilités de pannes des composants sont périodiques (un sens à préciser ultérieurement), et ils ont obtenu dans leur article une formule de la probabilité de panne de ce système en conservant toujours l'hypothèse d'indépendance des composants. Et en (2003) N. Ghoraf & M. Boushaba [62] ont présenté une autre formule pour la probabilité de panne de ce dernier système via celle d'un système "k-consécutifs-sur-n".

En vue de la configuration d'un système "r-consécutifs-k-sur-n" qui semble relativement compliquée, Il est important de signaler que l'établissement des résultats concernant ce système dans la plupart des cas est une tâche très difficile et c'est pour cela dans nos propres résultats nous essayons toujours de faire le lien entre ce système et le système "k-consécutifs-sur-n" comme dans [59], [62] ce qui nous permet d'utiliser tous les résultats concernant ce dernier système dans la résolution des problèmes du premier.

Le document que nous présentons ici permet de faire le point sur l'état actuel des recherches concernant les modèles cités ci-dessus, ainsi que sur quelques points non encore traités et indispensables pour mieux comprendre ces modèles. Ainsi, outre nos résultats, on trouve aussi d'autres résultats présentés sans rentrer dans les détails de leurs démonstrations. Ceux-ci pourront être consultés dans les références citées dans la bibliographie générale qui se trouve à la fin de cette thèse.

La thèse est composée d'une introduction où nous présentons un historique sur les systèmes étudiés, et trois chapitres présentés comme suit :

- **Chapitre1** : Ce chapitre est consacré à rappeler quelques résultats concernant le calcul et l'encadrement de la fiabilité des systèmes "k-consécutifs-sur-n", ainsi, le calcul et l'arrangement des importances de structure des composants. Ensuite nous présenterons quelques résultats concernant le comportement asymptotique du temps de panne du système où nous citerons notre résultat qui a fait l'objet d'une publication internationale [63].
- **Chapitre2** : Ici nous traitons le système "r-consécutifs-k-sur-n" où nous présentons nos résultats concernant ce type de systèmes. D'abord, nous donnerons quelques formules de la probabilité de panne du système ([59], [64]), ensuite, nous établissons des résultats sur le comportement asymptotique du temps de panne du système et enfin, nous discuterons le problème de l'importance de structure des composants.
- **Chapitre3** : Ce dernier chapitre examine le système "r-consécutifs-k-sur-n de période k" et nous présenterons ici aussi notre résultat qui a fait l'objet d'une publication internationale [62] où nous avons établi une formule de la probabilité de panne de ce système dans le cas où les composants sont supposés indépendants.

Nous terminons notre thèse par une conclusion où nous citons quelques problèmes qui n'ont pas été encore traités et qui peuvent faire l'objet de recherches ultérieures.

Chapitre 1

Système "k-consécutifs-sur-n"

Dans ce premier chapitre nous allons présenter le système "k-consécutifs-sur-n" à partir de quelques résultats importants concernant le calcul et l'encadrement de la fiabilité dans les deux cas le premier c'est le cas où les composants sont indépendants et le deuxième est le cas markovien. Ensuite, nous rappelons quelques résultats récents sur l'importance de structure des composants. Et enfin, nous traitons le comportement asymptotique du temps de panne du système.

1.1 Définitions et notations.

Dans ce chapitre on note :

- n :le nombre de composants dans le système.
- k :le nombre minimum de composants consécutifs en panne qui cause la panne du système $(k \leq n)$
- X_i :l'état du composant i $X_i = 1$ ou 0 suivant que le composant i fonctionne ou tombe en panne.$i = 1, 2, ..., n$
- $\binom{x}{y} = \frac{x!}{y!(x-y)!}$. coefficient binomial.
- q_i :la probabilité de panne du composant i. pour $i = 1, 2, ..., n$
- p_i : $1 - q_i$
- $R_k(j, p)$:la fiabilité du système "k-consécutifs-sur-j" linéaire ,où $p = (p_1, p_2, ..., p_j)$
- $F_k(j, p)$: probabilité du panne du système "k-consécutifs-sur-j" c à d $F_k(j, p) = 1 - R_k(j, p)$.
- $R_k(j, p)_C$:la fiabilité du système "k-consécutifs-sur-j" circulaire ,où $p = (p_1, p_2, ..., p_j)$

– $I_k^n(i,p)$:Importance en fiabilité du composant $i.$, $i = 1, 2, ..., n$.

Définition 1.1.1. *Un système "k-consécutifs-sur-n" est un système formé de n composants disposés linéairement ou circulairement et qui tombe en panne si et seulement si au moins k composants consécutifs sont en panne. On remarque que pour $k = 1$ ou $k = n$ on obtient un système en série en parallèle respectivement.*

1.1.1 Domaines d'applications

Si on se réfère à la littérature mathématiques sur les modèles "k-consécutifs-sur-n" on constate que les domaines d'applications sont plutôt diversifiés, et parmi ceux nous citons ici les deux exemples suivants :

Exemple 1.1.1. *Une suite de n stations transmet l'information d'un point A vers un point B. Les stations sont placées à égales distances entre A et B. Chaque station transmet l'information k stations plus loin. Il est clair que ce système tombe en panne si et seulement si au moins k stations consécutives sont en panne.*

Exemple 1.1.2. *Pour transporter du Pétrole d'un point A vers un point B on dispose de n pompes. Ces pompes sont placées à égales distances entre A et B. Chaque pompe peut transporter le pétrole k pompes plus loin. Ce système tombe en panne si et seulement si au moins k pompes consécutives sont en panne.*

1.2 Formules et bornes de la fiabilité du système

1.2.1 Cas des composants indépendants

Dans cette section, on considère un système "k-consécutifs-sur-n" dont les composants sont supposés indépendants. On distingue deux cas importants, le premier est le cas où les composants sont identiques et le deuxième c'est le cas où ils ne sont pas nécessairement identiques.

Cas des composants identiques

Dans ce cas, outre l'hypothèse d'indépendance des composants nous supposons qu'ils ont tous la même fiabilité $p = p_1 = p_2 = ... = p_n$,on note $q = 1 - p$

(la probabilité de panne de chaque composant). Sous ces considérations nous rappelons quelques résultats importants dont les objectifs sont le calcul ou l'encadrement de la fiabilité du système.

Formule exacte de la fiabilité du système

Dans le cas des composants indépendants et identiques, la fiabilité du système est donnée explicitement et ce en utilisant les techniques de l'analyse combinatoire On désigne par $N(j,n,k)$ le nombre de fois que le système "k-consécutifs-sur-n" fonctionne sachant que j composants dans le système sont en panne. En utilisant ce nombre on peut écrire $R_k(n,p) = \sum_j q^j p^{n-j} N(j,n,k)$ et par conséquent le problème du calcul de la fiabilité du système dans ce cas se réduit au calcul du nombre $N(j,n,k)$. Les expréssions de $N(j,n,k)$ sont données explicitement dans [4] et [14] par :

$$N(j,n,k) = \begin{cases} \binom{n}{j} & ,j<k \\ 0 & ,j \geq k \\ \sum_{i=0}^{k-1} N(j-i,n-1-i,k) & ,n>j\geq k \geq 1 \end{cases}$$

et d'une façon générale

$$N(j,n,k) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \binom{n-j+1}{i} \binom{n-ki}{n-j} \text{....pour } n>j\geq k\geq 1$$

De plus dans [6] on a établi une relation entre la fiablité du système linéaire et celle d'un système circulaire donnée comme suit :

$$R_k(n,p)_C = p^2 \sum_{l=0}^{k-1} (l+1)\, q^l R_k(n-l-2,p)$$

Alors la fiabilité du système est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.2.1. [14] *Pour $1 \leq k \leq n$, on a :*
1-Cas linéaire

$$R_k(n,p) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i p^{i-1} q^{ki} \left[\binom{n-ki+1}{i} - q\binom{n-ki}{i} \right]$$

2-Cas circulaire

$$R_k(n,p)_C = \sum_{i\geq 0} \left(-pq^k\right)^i \binom{n-ki}{i} - q^n + k\sum_{i\geq 0} \left(-pq^k\right)^{i+1} \binom{n-k(i+1)-1}{i}$$

Formules récursives de la fiabilité

La fiabilté du système est donnée aussi par les formules récursives suivantes :

– Pour $n \geq k$ on a : [4] :

$$R_k(n,p) = p^{n-k+1} + \sum_{i=1}^{n-k+1} \sum_{j=i+1}^{i+k+1} p^i q^{j-i} R_k(n-j,p)$$

– Pour $n \geq k$ on a : [56]

$$R_k(n,p) = \begin{cases} 1 & ,0 \leq n \leq k-1 \\ R_k(i,p) R_k(n-i,p) - pq^k \sum\limits_{s=k+1-i}^{k} R_k(n-i-s,p) & ,1 \leq i < k \\ R_k(i,p) R_k(n-i,p) - p^2 q^k \sum\limits_{s=2}^{k} R_k(n-i-s,p) \times & \\ \sum\limits_{r=k+2-s}^{k} q^{r+s-k-2} R_k(i-r,p) & ,k \leq i \leq \left[\frac{n}{2}\right] \end{cases}$$

Bornes de la fiabilité du système

Plusieurs bornes de la fiabilité du système "k-consécutifs-sur-n" sont données dans le cas des composants indépendants et identiques.

– Dans [15], en utilisant la méthode des probabilités conditionnelles on a montré que

$$l_1 = \left(1-q^k\right)^{n-k+1} \leq R_k(n,p) \leq \left(1-q^k+q^{k+1}\right)^{n-k+1} = u_1$$

– Et en appliquant la méthode de Stein-chen dans [22] on a obtenu :

$$\begin{aligned} l_2 = \exp\left(-(n-k+1)q^k\right) - \left[(2k-1)q^k + 2(k-1)q\right] &\leq R_k(n,p) \\ \leq \exp\left(-(n-k+1)q^k\right) + \left[(2k-1)q^k + 2(k-1)q\right] &= u_2 \end{aligned}$$

– En utilisant la même méthode avec quelques changements dans la démonstration [40] montre que :

$$\begin{aligned} l_3 = \exp\left(-p\left(n-k+1\right)q^k\right) - \left(2kp-1\right)q^k \leq R_k\left(n,p\right) \\ \leq \exp\left(-p\left(n-k+1\right)q^k\right) + \left(2kp-1\right)q^k = u_3 \end{aligned}$$

Le tableau suivant montre que les bornes l_1, u_1 sont meilleures que celles données par la méthode de Stein-Chen :

n	k	q	l_2	l_3	l_1	u_1	u_3	u_2
10	2	0.05	0.8703	0.9669	0.9777	0.9788	0.9909	1.0853
10	2	0.20	0.1777	0.5818	0.6925	0.7462	0.9180	1.2177
10	4	0.10	0.3986	0.9986	0.9993	0.9994	1.0002	1.6000
10	4	0.20	-0.2223	0.9792	0.9889	0.9911	1.0029	2.2001
50	2	0.05	0.7772	0.8781	0.8846	0.8900	0.9021	0.9922
50	2	0.10	0.3826	0.5674	0.6111	0.6421	0.6894	0.8426
50	4	0.05	0.6997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998	1.2998
50	4	0.10	0.3946	0.9950	0.9953	0.9958	0.9966	1.5960
100	2	0.05	0.6733	0.7785	0.7805	0.7903	0.8025	0.8883
100	2	0.10	0.1416	0.3642	0.3697	0.4086	0.4562	0.6016

On remarque d'après le tableau ci-dessus que la méthode de Stein-Chen ne donne pas des bonnes bornes particulièrement quand n est petit (la borne supérieure peut dépasser 1 et l'inférieure peut être négative), mais cette méthode reste toujours valable et nécessaire pour établir les convergences en loi des suites de variables aléatoires binaires et indépendantes.

*Outre les bornes citées précédemment un résultat intéressant est donné en 2000 dans [49] comme suit :

Théorème 1.2.2. *Si $1 < k < n$ et $0 < p < 1$ alors on a pour tout m $(k \leq m < n)$:*

$$R_k\left(m,p\right)R_k\left(n-m+k-1,p\right) < R_k\left(n,p\right) < R_k\left(m,p\right)R_k\left(n-m,p\right)$$

En appliquant ce théorème pour $m = k$ on obtient

$$\left(1-q^k\right)R_k\left(n-1,p\right) < R_k\left(n,p\right) < \left(1-q^k\right)R_k\left(n-k,p\right)$$

et si on procède de la même manière on trouve :

$$\left(1-q^{k}\right)^{n-k+1}<R_{k}\left(n,p\right)<\left(1-q^{k}\right)^{\left[\frac{n}{k}\right]}$$

Et on remarque que : $\left(1-q^{k}\right)^{n-k+1}=l_{1}$ mais $\left(1-q^{k}\right)^{\left[\frac{n}{k}\right]}<u_{1}=\left(1-q^{k}+q^{k+1}\right)^{n-k+1}$ c'est à dire la borne supérieure donnée par ce théorème est meilleure que u_1.

Cas des composants non identiques

Ici nous conservons toujours l'hypothèse d'indépendance des composants mais on les suppose non nécessairement identiques. Dans ce cas le calcul exacte de la fiabilité du système est très compliqué pour cette raison dans plusieurs travaux scientifiques [8],[9], [11], [13], [30], et [31] on démontre des formules récursives permettant le calcul de celle-ci. Le plus souvent dans ce cas on s'est contenté d'encadrer la valeur de la fiabilité du système. Et comme précédemment nous rappelons ici quelques résultats importants concernant le calcul, l'encadrement de la fiabilité et le comportement asymptotique du temps de panne du système.

Formules récursives de la fiabilité du système

On considère un système "k-consécutifs-sur-n" les composants sont supposés non nécessairement identiques. Danc ce cas la fiabilité du système est donnée par les formules récursives suivantes :

Théorème 1.2.3. [9] *Pour $k\geq 1$ on a :*

$$R_{k}\left(n,p\right)=\begin{cases}1 & ,n\leq k-1\\ R_{k}\left(n-1,p\right)-R_{k}\left(n-k-1,p\right)p_{n-k}\prod\limits_{j=n-k+1}^{n}q_{j} & ,n\geq k\end{cases}$$

Si les composants sont identiques on obtient

$$R_{k}\left(n,p\right)=\begin{cases}1 & ,n\leq k-1\\ R_{k}\left(n-1,p\right)-pq^{k}R_{k}\left(n-k-1,p\right) & ,n\geq k\end{cases}$$

Et dans le cas particulier $k\leq n\leq 2k$ on a

$$R_{k}\left(n,p\right)=1-q^{k}-pq^{k}\left(n-k\right)$$

Théorème 1.2.4. [13] *Pour $k \geq 2$ on a*

$$F_k(n,p) = \begin{cases} 0 & ,n \leq k-1 \\ \prod_{j=1}^{n} q_j & ,n = k \\ F_k(n-1,p) - p_{n-1}q_n F_k(n-2,p) & \\ + \prod_{j=n-k+1}^{n} q_j \left[p_{n-k} F_k(n-k-1,p) + \prod_{i=1}^{n-k} p_i \right] & ,n \geq k+1 \end{cases}$$

Si les composants sont identiques ($p_1 = p_2 = ... = p_n = p$ et $q = 1-p$) on obtient :

$$F_k(n,p) = \begin{cases} 0 & ,n \leq k-1 \\ q^n & ,n = k \\ F_k(n-1,p) - pqF_k(n-2,p) & \\ +q^k \left[pF_k(n-k-1,p) + p^{n-k} \right] & ,n \geq k+1 \end{cases}$$

Et dans le cas circulaire on a :

Théorème 1.2.5. [31] *pour $k \geq 1$ on a :*

$$R_k(n,p)_C = \begin{cases} 1 & ,n \leq k-1 \\ 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i & ,n = k \\ 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i - \sum_{i=1}^{n} p_i \prod_{j=i-1}^{i+1} q_j & ,n = k+1 \\ p_n R_k(n-1,p) + q_n R_k(n-1,p)_C - \sum_{i=0}^{k-1} p_{n-k+i} \prod_{j=i}^{n-k+i+1} q_j \times & \\ p_{i+1} R_k((i+2, n-k+i-1), p) & ,n > k+1 \end{cases}$$

Où ici $p_{n+i} = p_i$ pour $i \geq 0$ et $R_k((i+2, n-k+i-1), p)$ est la fiabilité du système "k-consécutifs-sur-$(n-k-2)$" linéaire constitué des composants $i+1, i+2, ..., n-k+i-1$.

Bornes de la fiabilité du système

Si on se réfère aux travaux réalisés sur l'encadrement de la fiabilité du système et aux calculs numériques traités, on trouve que les meilleures bornes dans ce cas sont données par le théorème suivant :

Théorème 1.2.6. [36] *: Pour $1 \leq k \leq n$, on a :*

$$\prod_{i=k}^{n}\left(1-\prod_{j=i-k+1}^{i} q_j\right) \leq R_k\left(n,p\right) \leq \left(1-\prod_{j=1}^{k} q_j\right)\prod_{i=k+1}^{n}\left(1-\frac{p_{i-k}\prod\limits_{j=i-k+1}^{i} q_j}{1-\prod\limits_{j=i-k}^{i-1} q_j}\right)$$

Si les composants sont identiques on obtient :

$$\left(1-q^k\right)^{n-k+1} \leq R_k\left(n,p\right) \leq \left(1-q^k\right)\left(1-\frac{pq^k}{1-q^k}\right)^{n-k}$$

Il est clair que la borne supérieure donnée par le théorème précédent dans le cas identiques est aussi meilleure que u_1. En effet, il suffit seulement de voir que :

$$\left(1-q^k\right)\left(1-\frac{pq^k}{1-q^k}\right)^{n-k} \leq \left(1-q^k+q^{k+1}\right)^{n-k+1} = \left(1-pq^k\right)^{n-k+1} = u_1$$

1.3 Système "k-consécutifs-sur-n" Cas Markovien

Dans la section précédente l'hypothèse d'indépendance des composants du système a été toujours présente et elle a joué un rôle important dans les calculs. Malheureusement, dans la pratique cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée. A titre d'exemple si on considère le système de transport du pétrole constitué de n pompes disposées linéairement, si une certaine pompe tombe en panne alors la pompe précédente supporte une plus grande charge d'assurer le pompage du pétrole et donc sa probabilité de panne peut être augmenter et donc ici nous avons une dépendance entre les pompes. Pour cette raison on trouve des travaux scientifiques qui traitent le système "k-consécutifs-sur-n" dont les composants sont dépendants on peut consulter par exemple [17],[19],[23]...pour plus de détails.

Dans la présente section on considère le cas où les composants du système possèdent une dépendance Markovienne c'est à dire l'état de chaque composant dépend seulement de l'état du composant qu'il précède. Autrement dit les états des composants sont des variables aléatoires binaires formant une chaîne de Markov à deux états, et nous rappelons ici deux résultats concernant le calcul de la fiabilité du système. Le premier est le cas où les états forment une chaîne de Markov homogène dont les probabilités de transition sont identiques et on obtient ici une formule exacte de la fiabilité du système. Le deuxième c'est le cas où les probabilités de transition sont non nécessairement identiques et dans ce cas la formule est récursive.

Ici nous avons besoin tout d'abord des notations suivantes :

- $p = \Pr[X_1 = 1]\,;\, q = 1 - p$
- $p_{i,0} = \Pr[X_i = 1/X_{i-1} = 0]$, probabilité que le composant i fonctionne sachant que le précédent $(i-1)$ est en panne pour $i = 2, 3, ..., n$;
  $q_{i,0} = 1 - p_{i,0}$
- $p_{i,1} = \Pr[X_i = 1/X_{i-1} = 1]$, probabilité que le composant i fonctionne sachant que le précédent $(i-1)$ fonctionne aussi pour $i = 2, 3, ..., n$;
  $q_{i,1} = 1 - p_{i,1}$
- $R_k(n)$: Fiabilité du système "k-consécutifs-sur-n"
- $[x]$: la partie entière de x.

1.3.1 Cas où les probabilités de transition sont identiques

On considère un système "k-consécutifs-sur-n" dont les états des composants $X_1, X_2, ..., X_n$ forment une chaîne de Markov homogène avec

$p_{i,0} = p_0, q_{i,0} = q_0, p_{i,1} = p_1, q_{i,1} = q_1$, pour $i = 2, 3, ..., n$. Alors sous ces considérations on a le théorème suivant :

Théorème 1.3.1. [23]*Pour $n \geq k$ on a :*

$$\begin{aligned} R_k(n) = pp_1^{n-1} &+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{\min(i,n-i)} M(i,m,k-1)\, M(n-i,m)\, p_0^m p_1^{n-i-m} q q_0^{i-m} q_1^{m-1} \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{\min(i,n-i)} M(i,m,k-1)\, M(n-i,m)\, pp_0^{m-1} p_1^{n-i-m} q_0^{i-m} q_1^m \\ &+ \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{m=1}^{\min(i,n-i-1)} M(i,m,k-1)\, M(n-i,m+1)\, pp_0^m p_1^{n-i-m-1} q_0^{i-m} q_1^m \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{m=2}^{\min(i,n-i-1)} M(i,m,k-1)\, M(n-i,m-1)\, p_0^{m-1} p_1^{n-i-m+1} q q_0^{i-m} q_1^{m-1} \end{aligned}$$

Où $M(i,m,k-1) = \sum_{\lambda=0}^{\min\left(m,\left[\frac{i-m}{k-1}\right]\right)} \binom{m}{\lambda} (-1)^\lambda \binom{i-(k-1)\lambda-1}{m-1}$ *pour* $i \geq m > 0$

et $M(n-i,m) = \binom{n-i-1}{m-1}$ *pour* $n - i \geq m > 0$

Démonstration. on peut consulter [23]. □

1.3.2 Cas où les probabilités de transition sont non identiques

Dans ce cas la fiabilité du système est donnée par la formule récursive suivante :

Théorème 1.3.2. [19]*Si* $n < k$ *on a* $R_k(n) = 1$
Si $n \geq k$ *on a :*

$$R_k(n) = R_k(n-1) + \frac{q_{n,0}q_{n-k+1,1}}{q_{n-k+1,0}q_{n-k,1}}(p_{n-k,1} - p_{n-k,0})(R_k(n-1) - R_k(n-2)) - \prod_{j=n-k+2}^{n} q_{j,0}(q_{n-k+1,1}p_{n-k,0})R_k(n-k-1)$$

Démonstration. La démonstration est analogue a la démonstration du théorème1.4.1 seulement ici on utilise l'hypothèse que les composants sont dépendants. □

Remarque 1.3.1. *1) Si on suppose que les composants du système sont indépendants la formule donnée par ce dernier théorème se réduit au formule suivante :*

$$R_k(n) = R_k(n-1) - p_{n-k}\prod_{j=n-k+1}^{n} q_{j,0}R_k(n-k-1)$$

2) Grâce à ce théorème on peut donner aussi une formule récursive pour la fiabilité du système dans le cas où les probabilités de transition sont identiques. Cette formule est comme suit :

$$R_k(n) = R_k(n-1) + (p_1 - p_0)(R_k(n-1) - R_k(n-2)) - q_0^{k-1}q_1p_0R_k(n-k-1)$$

1.4 Importance de structure des composants

On considère un système "k-consécutifs-sur-n" dont les composants sont supposés indépendants. Le but de la présente section est de donner les formules exactes [47] de l'importance de structure du $i^{ème}$ composant $(i = 1, 2, ..., n)$, et pour cela nous avons d'abord les définitions suivantes :

Définition 1.4.1. *: L'importance en fiabilité (ou importance au sens de Birnbaum) du $i^{ème}$ composant $(i = 1, 2, ..., n)$ est donnée par la formule :*

$$I_k^n(i,p) = \frac{\partial R_k(n,p)}{\partial p_i}, i = 1, 2, ..., n$$

Définition 1.4.2. *Dans le cas où tous les composants sont identiques avec $p_i = p = \frac{1}{2}$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$ l'importance au sens de Birnbaum du $i^{ème}$ composant est dite dans ce cas importance de structure du composant i notée $I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right)$.*

Lemme 1.4.1. *Pour $i = 1, 2, ..., n$ on a :*

$$I_k^n(i,p) = \frac{R_k(i-1,p)\,R_k(n-i,p) - R_k(n,p)}{(1-p_i)}$$

Démonstration. On désigne par $R_k(n, 0_i, p)$ et $R_k(n, 1_i, p)$ la fiabilité du système sachant que le composant i est en panne, fonctionne respectivement. Alors on peut écrire

$$\begin{aligned} R_k(n,p) &= p_i R_k(n,1_i,p) + (1-p_i)\,R_k(n,0_i,p) \\ &= p_i R_k(i-1,p)\,R_k(n-i,p) + (1-p_i)\,R_k(n,0_i,p) \end{aligned}$$

donc on obtient :

$$I_k^n(i,p) = \frac{\partial R_k(n,p)}{\partial p_i} = R_k(i-1,p)\,R_k(n-i,p) - R_k(n,0_i,p)\,, \quad i = 1, 2, ..., n$$

et comme on a :

$$R_k(n,0_i,p) = \frac{R_k(n,p) - p_i R_k(i-1,p)\,R_k(n-i,p)}{(1-p_i)}$$

on déduit que :

$$I_k^n(i,p) = \frac{R_k(i-1,p)\,R_k(n-i,p) - R_k(n,p)}{(1-p_i)} \tag{1.1}$$

d'où le lemme □

Définition 1.4.3. *La suite de Fibonacci d'ordre k est la suite de terme général noté $f_{k,n}$ donné par :*

$$f_{k,n} = \begin{cases} 0 & , 0 \leq n \leq k-1 \\ 1 & , n = k \\ \sum\limits_{j=n-k}^{n-1} f_{k,j} & , n \geq k+1 \end{cases}$$

Les expressions explicites des termes de cette suite sont données dans [47] par :

$$f_{k,n} = \begin{cases} 2^{n-k-1} & , k+1 \leq n \leq 2k \\ 2^{n-k-1} - (n-2k+1)\, 2^{n-2k-2} & , 2k+1 \leq n \leq 3k+1 \\ 2f_{k,n-1} - f_{k,n-k-1} & , n \geq k+2 \end{cases} \tag{1.2}$$

Maintenant, nous considérons un système "k-consécutifs-sur-n" linéaire dont les composants sont identiques avec $p_i = \frac{1}{2}$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$. Sous ces considérations on a le théorème suivant :

Théorème 1.4.1. $R_k\left(n, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n f_{k,n+k+1}$

Démonstration. Soit $A(n,k)$ l'évènement "le système "k-consécutifs-sur-n" tombe en panne" alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} 1 - R_k\left(n, \frac{1}{2}\right) &= \Pr\left(A(n,k)\right) \\ &= \Pr\left(A(n,k) \bigcap A(n-1,k)\right) + \Pr\left(A(n,k) \bigcap A^c(n-1,k)\right) \\ &= \Pr\left(A(n-1,k)\right) \\ &+ \Pr\left(X_{n-k} = 1\right) \Pr\left(X_{n-k+1} = X_{n-k+2} = ...X_n = 0\right) \Pr\left(A^c(n-k-1,k)\right) \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} 1 - R_k\left(n, \frac{1}{2}\right) = 1 &- R_k\left(n-1, \frac{1}{2}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} R_k\left(n-k-1, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Alors on a :

$$R_k\left(n,\frac{1}{2}\right)=R_k\left(n-1,\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}R_k\left(n-k-1,\frac{1}{2}\right) \tag{1.3}$$

Et donc
1) Pour $0\leq n\leq k-1$

$$R_k\left(n,\frac{1}{2}\right)=1=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}f_{k,n+k+1}$$

car dans ce cas on a d'après les formules1.2 $f_{k,n+k+1}=2^n$.
2) Pour $n\geq k$ soit j le dernier composant qui fonctionne dans le système (en commençant du premier composant). Alors le système fonctionne si et seulement si $n-k+1\leq j\leq n$ et le sous-système "k-consécutifs-sur-$j-1$" fonctionne. Donc :
Pour $n=k$

$$\begin{aligned}R_k\left(k,\frac{1}{2}\right)&=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-j+1}R_k\left(j-1,\frac{1}{2}\right)\\&=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-j+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}f_{k,j+k}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{k}f_{k,2k+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k}f_{k,n+k+1}\end{aligned}$$

Et pour $n>k$ on peut obtenir $R_k\left(n,\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}f_{k,n+k+1}$ par récurrence et ce grâce au formule1.3. □

Remarque 1.4.1. *D'après la formule de la fiabilité donnée par le théorème précédent, il est clair que le terme $f_{k,n+k+1}$ peut être interpréter comme le nombre de fois que le système "k-consécutifs-sur-n" fonctionne.*

Formules explicites de l'importance de structure via la suite de Fibonacci

Dans ce paragraphe, nous discutons le problème de l'importance de structure de chaque composant dans le système. Plus exactement, en utilisant les termes de la suite de Fibonacci on donne la formule explicite de $I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right)$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$ ensuite, suivant les valeurs de n et k on arrange ces importances.

Théorème 1.4.2. *Pour tout $i = 1, 2, ..., n$ on a*

$$I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right) = I_k^n\left(n - i + 1, \frac{1}{2}\right)$$

Démonstration. D'après la formule1.1 on a :

$$\begin{aligned}
I_k^n\left(n - i + 1, \frac{1}{2}\right) &= 2\left[R_k\left(n - i, \frac{1}{2}\right) R_k\left(n - (n - i + 1), \frac{1}{2}\right) - R_k\left(n, \frac{1}{2}\right)\right] \\
&= 2\left[R_k\left(n - i, \frac{1}{2}\right) R_k\left(i - 1, \frac{1}{2}\right) - R_k\left(n, \frac{1}{2}\right)\right] \\
&= I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Le théorème précédent signifie clairement que les importances de structure des composants dans un système "k-consécutifs-sur-n" sont symétriques par rapport au composant du centre du système. Donc grâce à cette propriété il suffit seulement de calculer la valeur de $I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right)$ pour $i \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Théorème 1.4.3. *Pour $i = 1, 2, ..., n$ on a*

$$I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left[2 f_{k,i+k} f_{k,n-i+k+1} - f_{k,n+k+1}\right]$$

Démonstration. On a :

$$I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right) = 2\left[R_k\left(i - 1, \frac{1}{2}\right) R_k\left(n - i, \frac{1}{2}\right) - R_k\left(n, \frac{1}{2}\right)\right]$$

Mais :

$$R_k\left(n, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n f_{k,n+k+1}$$

donc

$$I_k^n\left(i,\frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} f_{k,i+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i} f_{k,n-i+k+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n} f_{k,n+k+1}\right]$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[2f_{k,i+k}f_{k,n-i+k+1} - f_{k,n+k+1}\right]$$

le théorème est donc démontré. □

Lemme 1.4.2. *Pour* $1 \leq i \leq n-k$

$$I_k^n\left(i,\frac{1}{2}\right) = \sum_{j=n-k}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} I_k^j\left(i,\frac{1}{2}\right)$$

Démonstration. Pour $i \leq n-k$ on a d'après le théorème1.4.3 et les formules1.2

$$2^{n-1}I_k^n\left(i,\frac{1}{2}\right) = 2f_{k,i+k}f_{k,n-i+k+1} - f_{k,n+k+1} = 2f_{k,i+k}\sum_{j=n-i+1}^{n-i+k} f_{k,j} - \sum_{j=n+1}^{n+k} f_{k,j}$$
$$= \sum_{j=n+1}^{n+k}\left(2f_{k,i+k}f_{k,j-i} - f_{k,j}\right) = \sum_{j=n-k}^{n-1}\left(2f_{k,i+k}f_{k,j-i+k+1} - f_{k,j+k+1}\right)$$
$$= \sum_{j=n-k}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} I_k^j\left(i,\frac{1}{2}\right)$$

d'où le lemme. □

Théorème 1.4.4. *Pour* $k+1 \leq n \leq 2k$ *on a :*

$$I_k^n\left(i,\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \frac{i}{2^k} & , 1 \leq i \leq n-k \\ \frac{n-k+2}{2^k} & , n-k < i \leq \left[\frac{n}{2}\right] \end{cases}$$

où $\left[\frac{n}{k}\right]$ *est la partie entière de* $\frac{n}{k}$.

Démonstration. Soient :
$W = \{(X_1, X_2, ..., X_n), X_j = 0$ ou 1, tel que le système "k-consécutifs-sur-n" fonctionne$\}$
$S_i = \{(X_1, X_2, ..., X_n), X_j = 0$ ou 1, tel que les deux sous-système "k-consécutifs-sur-$i-1$" constitué des $(i-1)$ premiers composants et "k-consécutifs-sur-$n-i$" constitué des $(n-i)$ derniers composants fonctionnent$\}$
On a $card\,(W) = f_{k,n+k+1}$ et comme le composant i a deux états on a $card\,(S_i) =$

$2f_{k,i+k}f_{k,n-i+k+1}$. Notons aussi que $W \subseteq S_i$ et d'autre part chaque élément dans S_i avec $X_i = 1$ est aussi dans W

Et soit $k+1 \leq n \leq 2k$ alors :

Si $n-k < i \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ dans ce cas chaque k composants consécutifs contenant le composant i qui causent la panne du système si leur $i^{ème}$ composant est en panne.

Autrement dit :

$S_i - W = \{(X_1, X_2, ..., X_n), X_j = 0$ ou 1, tel que le système "k-consécutifs-sur-n" est en panne$\}$.

Donc :

$$\begin{aligned}
I_k^n\left(i,\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} card\,(S_i - W) = 2\left[1 - R_k\left(k,\frac{1}{2}\right)\right] \\
&= 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n f_{k,n+k+1}\right] \\
&= 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[2^n - (n-k+2)\,2^{n-k-1}\right]\right) \\
&= \frac{n-k+1}{2^k}
\end{aligned}$$

Si : $1 \leq i \leq n-k$ alors on a $k \leq n-i \leq 2k-1$, et donc :

$$\begin{aligned}
I_k^n\left(i,\frac{1}{2}\right) &= 2\left[R_k\left(i-1,\frac{1}{2}\right) R_k\left(n-i,\frac{1}{2}\right) - R_k\left(n,\frac{1}{2}\right)\right] \\
&= 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i} f_{k,n-i+k+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n f_{k,n+k+1}\right]
\end{aligned}$$

et comme : $2k+1 \leq n-i+k+1 \leq 3k$ et $2k+1 \leq n+k+1 \leq 3k+1$ on déduit que :

$$\begin{aligned}
I_k^n\left(i,\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i-1} \left[2^{n-i} - (n-i-k)\,2^{n-i-k-1}\right] \\
&\quad - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left[2^n - (n-k)\,2^{n-k-1}\right] \\
&= \frac{i}{2^k}
\end{aligned}$$

alors le théorème est démontré. □

Outre, les formules citées précédemment il existe d'autres résultats très importants concernant l'importance de structure, nous les représentons ici sans démonstrations et ce pour pouvoir les utiliser par la suite.

Théorème 1.4.5. *Pour* $s \geq 1$
1) $I_k^n\left(i+s,\frac{1}{2}\right) - I_k^n\left(i,\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \sum_{j=1}^{s} \left[I_k^{n-k-j}\left(i,\frac{1}{2}\right) - I_k^{n-k-j}\left(i+s-k-j,\frac{1}{2}\right)\right]$
2) $I_k^n\left(i+s,\frac{1}{2}\right) - I_k^n\left(i,\frac{1}{2}\right) = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{j} \left[I_k^{n-j}\left(i+s-j,\frac{1}{2}\right) - I_k^{n-j}\left(i,\frac{1}{2}\right)\right].$

Théorème 1.4.6. *Soient* $a_{k,i} = \frac{f_{k,i+1}}{f_{k,i}}$ *et* $n \geq 3$*. Alors on a pour* $1 \leq i \leq \left[\frac{n-1}{2}\right]$

$$I_k^n\left(i+1,\frac{1}{2}\right) > I_k^n\left(i,\frac{1}{2}\right) \Longleftrightarrow a_{k,i+k} > a_{k,n-i+k}$$

Pour obtenir l'arrangement des importances de structure, on remarque que les trois derniers théorèmes nous donnent des outils pour comparer directement les importances de structure de deux composants. Dans le théorème suivant on donne suivant les valeurs de n et k l'arrangement des importances de structure, pour la démonstration on utilise seulement les résultats ci-dessus (ou on peut consulter [47] pour plus de détails).

Théorème 1.4.7. *Pour un système "k-consécutifs-sur-n" on a :*
1. Si $k = 1$ *ou* $k = n$

$$I_k^n\left(i,\frac{1}{2}\right) = I_k^n\left(j,\frac{1}{2}\right) \quad pour 1 \leq i < j \leq n$$

2. Si $k = 2$*, pour* $1 \leq i \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]$

$$I_2^n\left(2i-1,\frac{1}{2}\right) < I_2^n\left(2i+1,\frac{1}{2}\right) < I_2^n\left(2i,\frac{1}{2}\right)$$
$$I_2^n\left(2i,\frac{1}{2}\right) > I_2^n\left(2i+2,\frac{1}{2}\right)$$

3. Si $2k = n$ *ou* $2k = n+1$

$$I_k^n\left(1,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(2,\frac{1}{2}\right) < ... < I_k^n\left(k,\frac{1}{2}\right)$$

4. Si $2k > n+1$

$$I_k^n\left(1,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(2,\frac{1}{2}\right) < ... < I_k^n\left(n-k+1,\frac{1}{2}\right)$$
$$I_k^n\left(n-k+1,\frac{1}{2}\right) = I_k^n\left(n-k+2,\frac{1}{2}\right) = ... = I_k^n\left(k,\frac{1}{2}\right)$$
$$I_k^n\left(n,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(n-1,\frac{1}{2}\right) < ... < I_k^n\left(k,\frac{1}{2}\right)$$

5.Si $3 \le k \le \left[\frac{n-1}{2}\right]$

$$I_k^n\left(1,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(2,\frac{1}{2}\right) < ... < I_k^n\left(k,\frac{1}{2}\right)$$

$$I_k^n\left(k+1,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(k+2,\frac{1}{2}\right) < ... < I_k^n\left(2k,\frac{1}{2}\right)$$
$$I_k^n\left(2k+1,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(2k+2,\frac{1}{2}\right) < ... < I_k^n\left(3k-1,\frac{1}{2}\right)$$
$$I_k^n\left(3k,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(2k,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(k,\frac{1}{2}\right)$$
$$I_k^n\left(1,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(k+1,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(2k+1,\frac{1}{2}\right)$$

$$I_k^n\left(jk,\frac{1}{2}\right) > I_k^n\left(jk+1,\frac{1}{2}\right) \quad pourj = 1,2,3$$
$$I_k^n\left(k-1,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(k+1,\frac{1}{2}\right)$$

* *Pour* $2k+2 \le i \le \left[\frac{n+1}{2}\right]$

$$I_k^n\left(2k+1,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(i,\frac{1}{2}\right) < I_k^n\left(2k,\frac{1}{2}\right)$$

Le théorème précédent confirme que pour $k = 1$ ou $k = n$ ou $k \ge \frac{n}{2}$ les importances de structure sont complètement arrangées. Cependant, pour les autres valeurs de k l'arrangement est partiel.

Nous avons les exemples numériques suivants : on considère un système "k-consécutifs-sur-14" avec $k = 2$, $k = 7$, $k = 12$. Alors on a :

$$R_2\left(14, \frac{1}{2}\right) = 0.06024170$$

$$R_7\left(14, \frac{1}{2}\right) = 0.96484375$$

$$R_{12}\left(14, \frac{1}{2}\right) = 0.99951172$$

et les importances de structure des composants sont données dans le tableau suivant :

i	$I_2\left(i, \frac{1}{2}\right)$	$I_7\left(i, \frac{1}{2}\right)$	$I_{12}\left(i, \frac{1}{2}\right)$
1	0.02844238	0.00781250	0.00024414
2	0.06359863	0.01562500	0.00048828
3	0.05017090	0.02343750	0.00097656
4	0.05529785	0.03125000	0.00097656
5	0.05334473	0.03906250	0.00097656
6	0.05407715	0.04687500	0.00097656
7	0.05383301	0.05468750	0.00097656
8	0.05383301	0.05468750	0.00097656
9	0.05407715	0.04687500	0.00097656
10	0.05334473	0.03906250	0.00097656
11	0.05529785	0.03125000	0.00097656
12	0.05017090	0.02343750	0.00097656
13	0.06359863	0.01562500	0.00048828
14	0.02844238	0.00781250	0.00024414

on peut facilement vérifier que les résultats du théorème précédent sont réalisés dans ces trois exemples

1.5 Loi limite du temps de panne

1.5.1 Cas des composants non identiques

Dans cette section on désigne par T_i $(i = 1, 2, ..., n)$ le temps de panne du $i^{ème}$ composant et par F_i sa distribution de panne c à d $F_i(t) = \Pr[T_i \leq t]$ pour

$t \geq 0$, $(i = 1, 2, ..., n)$. Le temps de panne du système noté Z_n est donné par :

$$Z_n = \min_{1 \leq j \leq n-k+1} \max_{j \leq i \leq j+k-1} T_i$$

On définit $P_j(t) = \prod_{i=j}^{j+k-1} F_i(t)$, $j = 1, 2, ..., n-k+1$. $P(t) = \max_{1 \leq i \leq n} F_i(t)$ et $\lambda(t) = \sum_{j=1}^{n-k+1} P_j(t)$.

Sous ces considérations et en utilisant la méthode de Stein-Chen on obtient :

$$|\Pr(Z_n \leq t) - (1 - \exp(-\lambda(t)))| \leq (2k-1)\, p^k(t) + (2k-2)\, p(t)$$

cette inégalité nous permet d'établir la loi limite du temps de panne du système. Alors on précise les conditions suivantes :

(a) Soient les nombres positifs λ_i, α_i et les fonctions ϕ_i tel que $F_i(t) = (\lambda_i t)^{\alpha_i} + t^{\alpha_i} \phi_i(t)$, $i = 1, 2, ...$ pour $0 \leq t \leq \delta$, ou δ est un nombre positif.

(b) On suppose que $\lim_{t \to \infty} \phi_i(t) = 0$, uniformément en i.

(c) $\lim_{i \to \infty} \lambda_i = \lambda$.

Sous ces conditions on a

Théorème 1.5.1. *On a :*
(1) *Si* $\alpha = \inf \alpha_i = \alpha_i$ *pour tout* $i = 1, 2, ...,$ *alors*

$$\lim_{n \to \infty} \Pr\left(n^{\frac{1}{k\alpha}} Z_n \leq t\right) = 1 - \exp\left[-(\lambda t)^{\alpha k}\right]$$

(2) *Si* $\alpha > 0$ *et pour tout* $i = 1, 2, ...$ *il existe* j *avec* $i \leq j \leq i + k - 1$ *tel que* $\alpha_j > \alpha$, *on a*

$$\lim_{n \to \infty} \Pr\left(n^{\frac{1}{k\alpha}} Z_n \leq t\right) = 0$$

Démonstration. Pour la démonstration, il suffit de montrer que la borne donnée par la méthode de Stein Chen (au temps $t_n = tn^{-\frac{1}{k\alpha}}$) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. □

Ce théorème veut dire que sous les conditions $a)$ $b)$ et $c)$, quand le nombre de composants tend vers l'infini la variable aléatoire $n^{\frac{1}{k\alpha}} Z_n$ converge en loi vers une variable aléatoire de Weibull $(Weib(\alpha k, \lambda))$, ce qui nous permet en pratique d'approximer la fiabilité du système par une loi de Weibull quand n est suffisamment grand. On peut facilement montrer que le théorème précédent est applicable dans les deux exemples suivants

Exemple 1.5.1. *On suppose le $i^{\text{éme}}$ composant a pour distribution de panne la distribution de Weibull donnée par :*

$$F_i(t) = 1 - \exp\left[-(\lambda_i t)^\alpha\right] = (\lambda_i t)^\alpha + t^\alpha \circ (1)$$
$$\text{où } \lim_{i\to\infty} \lambda_i = \lambda$$

Exemple 1.5.2. *On considère une distribution mixte Weibull et gamma. (λ_i) et (μ_i) sont deux suites de nombres positifs qui convergent vers λ et $\lambda\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ respectivement. Et soient les distributions de panne des composants données par :*

$$F_{2i-1}(t) = 1 - \exp\left[-(\lambda_i t)^\alpha\right] = (\lambda_i t)^\alpha + t^\alpha \circ (1)$$

$$F_{2i}(t) = \int_0^t \frac{\mu_i^\alpha}{\Gamma(\alpha)} s^{\alpha-1} \exp\left[-(\mu_i s)\right] ds = \frac{\mu_i^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha + t^\alpha \circ (1)$$

Remarque 1.5.1. *Si on note par Z_n^C le temps de panne d'un système "k-consécutifs-sur-n" alors on a d'après [6]*

$$\Pr(Z_n \le t) \le \Pr\left(Z_n^C \le t\right) \le \Pr(Z_n \le t) + \sum_{j=n-k+2}^{n} \prod_{i=j}^{j+k-1} F_i(t)$$

et par conséquent sous les conditions $(a), (b)$ et (c) on a :

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(n^{\frac{1}{k\alpha}} Z_n^C \le t\right) = \lim_{n\to\infty} \Pr\left(n^{\frac{1}{k\alpha}} Z_n \le t\right)$$

c'est à dire le théorème précédent est vrai même pour un système circulaire.

1.5.2 Cas des composants identiques

Dans ce paragraphe nous allons présenter un résultat concernant le temps de panne d'un système qui généralise le système "k-consécutifs-sur-n" à savoir le système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n". On définit un système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n" comme un système qui comporte n composants disposés linéairement ou circulairement et qui tombe en panne si et seulement si au moins k composants parmi m composants consécutifs sont en panne. On remarque que pour $m = k$ ou $m = n$ on obtient un système "k-consécutifs-sur-n" , "k-sur-n" respectivement. Ce type de système a fait l'objet de plusieurs articles entre autres [12], [36], [40], [45] . Ici nous présentons notre résultat [63] où nous avons démontré que sous quelques conditions sur la loi de panne commune des composants la loi limite du temps de panne du système est toujours de Weibull.

Alors, On considère ici un système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n", les composants sont supposés indépendants et de même distribution de panne $F(t)$ c à d pour tout $i = 1, 2, ..., n$: $\Pr(T_i \leq t) = F(t)$.

On définit d'abord les quantités suivantes :

- $A(t) = \binom{m-1}{k-1} F^k(t)(1 - F(t))^{m-k}$
- $B(t) = \sum\limits_{h=k-1}^{m-1} \binom{m-1}{h} F^{h+1}(t)(1 - F(t))^{m-h-1}$
- $D_n(t) = (n - m + 1) B(t)$.
- $W(t) = 1 + 2m(\ell - 1) A(t) + 2a(m - 1)(2m - k + 1) \frac{F(t)}{(1-F(t))^{m-k}}$

où $a = \frac{\max\limits_{k-1 \leq h \leq 2m-1} \binom{2m-1}{h}}{\binom{m-1}{k-1}}$ et ℓ est un entier positif.

Sous les considérations ci-dessus on a le résultat suivant :

Théorème 1.5.2. *Pour tout entier $\ell \geq 1$ tel que $m \leq \ell m \leq n$, on a :*

$$\frac{1}{W(t)} \left(\left[\frac{n}{m\ell} \right] - 1 \right) m\ell A(t) \leq \Pr(Z_n \leq t) \leq D_n(t)$$

Démonstration. Soit E_i l'évènement : "le composant i tombe en panne et au moins $(k-1)$ composants parmi $i+1, i+2, ..., i+m-1$ sont en panne", pour $i = 1, 2, ..., n - m + 1$, alors on a :

$$\Pr(Z_n \leq t) = \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n-m+1} E_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n-m+1} \Pr(E_i) = D_n(t) \tag{1.4}$$

Maintenant, soit t fixé et soit la variable aléatoire $Y_j(t)$, $j = 1, 2, ..., n - m + 1$, qui prend la valeur 1 si et seulement si le composant j tombe en panne et il existe exactement $(k-1)$ composants en panne parmi les composants $j+1, j+2, ..., j+m-1$ et la valeur 0 dans les autres cas. En posant $Y(t) = \sum\limits_{j=1}^{n-m+1} Y_j(t)$ on remarque que le système tombe en panne si $Y(t) > 0$.

Il est clair que : $E(Y_j) = A(t)$ et $E(Y) = (n-m+1)A(t) \leq D_n(t)$ .Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\Pr(Z_n \leq t) &= \Pr(Y(t) > 0) \geq \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\left[\frac{n}{m\ell}\right]-1} \bigcup_{j=im\ell+1}^{(i+1)m\ell} (Y_j(t) = 1)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{m\ell}\right]-1} \Pr\left(\bigcup_{j=im\ell+1}^{(i+1)m\ell} (Y_j(t) = 1)\right)
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de "Chung-Erdos" on obtient :

$$\begin{aligned}
\Pr(Z_n \leq t) &\geq \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{m\ell}\right]-1} \frac{\left(\sum\limits_{j=im\ell+1}^{(i+1)m\ell} \Pr(Y_j = 1)\right)^2}{\sum\limits_{j=im\ell+1}^{(i+1)m\ell} \Pr(Y_j = 1) + \sum\limits_{u \neq v} \Pr(Y_u = 1, Y_v = 1)} \\
&\geq \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{m\ell}\right]-1} \frac{(m\ell A(t))^2}{(m\ell A(t)) + 2m(\ell-1)m\ell A^2(t) + 2\ell m(2m-k+1)(m-1)C^{te}F^{k+1}(t)} \\
&= \frac{\left(\left[\frac{n}{m\ell}\right] - 1\right) m\ell A(t)}{1 + 2m(\ell-1)A(t) + 2(2m-k+1)(m-1)aF(t)(1-F(t))^{k-m}}
\end{aligned}$$

où $C^{te} = \max\limits_{k-1 \leq h \leq 2m-1} \binom{2m-1}{h}$.
En posant :

$$W(t) = 1 + 2m(\ell-1)A(t) + 2(2m-k+1)(m-1)a\frac{F(t)}{(1-F(t))^{m-k}}$$

on obtient :

$$\Pr(Z_n \leq t) \geq \frac{1}{W(t)}\left(\left[\frac{n}{m\ell}\right] - 1\right) m\ell A(t) \tag{1.5}$$

En combinant les deux inégalités 1.4 et 1.5 on obtient notre résultat. □

Nous donnerons dans les théorèmes suivants la limite de la distribution de probabilité de la variable aléatoire $a^{-1}(n,k)Z_n$ où $a(n,k)$ est une fonction convenablement choisie. Alors, on a :

Théorème 1.5.3. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} nF^k(a(n,k)t) = \Delta(t)$, $0 \leq \Delta(t) \leq 1$, *avec* $a(n,k) \to 0$, *quand* $n \to \infty$, *on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \Pr\left(a^{-1}(n,k) Z_n \le t\right) = \binom{m-1}{k-1} \Delta(t)$$

Démonstration. Il est bien clair que si :

$$\lim_{n\to+\infty} nF^k(a(n,k)t) = \Delta(t)$$

alors :

$$\lim_{n\to+\infty} D_n(a(n,k)t) = \binom{m-1}{k-1} \Delta(t)$$

donc, d'une part on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \Pr\left(a^{-1}(n,k) Z_n \le t\right) \le \binom{m-1}{k-1} \Delta(t) \tag{1.6}$$

D'autre part on utilise l'inégalité de gauche du théorème 1.5.2 pour $\ell = \ell_n$ tel que $\ell_n \to +\infty$ et $\frac{\ell_n}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$ (par exemple $\ell_n = [c \log n], c > 0$). Alors on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} W(a(n,k)t) = 1$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \Pr\left(a^{-1}(n,k) Z_n \le t\right) &\ge \lim_{n\to+\infty} \left(\left[\frac{n}{m\ell_n}\right] - 1\right) m\ell_n A(a(n,k)t) \\
&\ge \binom{m-1}{k-1} \Delta(t) \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

En combinant les inégalités 1.6 et 1.7 on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \Pr\left(a^{-1}(n,k) Z_n \le t\right) = \binom{m-1}{k-1} \Delta(t)$$

Et donc on a le résultat. □

Théorème 1.5.4. *Si* $\lim_{n\to\infty} nF^k(a(n,k)t) = \lim_{n\to\infty} \ell_n F^k(a(\ell_n,k)t) = \Delta(t)$ $0 \le \Delta(t) \le 1$, *tel que* $a(n,k) \to 0$ *quand* $n \to \infty$, *pour* $\ell_n = c \log n$, $c > 0$. *Alors* *on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \Pr\left(a^{-1}(n,k)\, Z_n \leq t\right) = \begin{cases} 1-\exp\left(-\binom{m-1}{k-1}t^{\alpha}\right) & ,t>0,\alpha>0 \\ 0 & ,t\leq 0 \end{cases}$$

Démonstration. On considère un système composé de n blocs disposés en parallèle, chaque bloc contient ℓ_n composants disposés en séries ($\ell_n \geq m$). La fiabilité de chaque composant est : $\overline{F^k(t)} = 1 - F^k(t)$. Alors, on a ici un système "séries-parallèle" homogène [35] sa fiabilité est donnée par la formule suivante :

$$R_n(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \overline{F^k(t)}^{\ell_n}\right)$$

Il est clair que si :

$$V(t) = \lim_{n\to\infty} n\overline{F^k(\alpha_n t + \beta_n)}^{\ell_n} \text{avec } \alpha_n > 0, \beta_n \geq 0$$

Alors :

$$\lim_{n\to\infty} R_n(\alpha_n t + \beta_n) = 1 - \exp(-V(t))$$

Mais :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} n\overline{F^k(\alpha_n t + \beta_n)}^{\ell_n} &= \lim_{n\to+\infty} n\exp\left[\ell_n \log\left(1 - F^k(\alpha_n t + \beta_n)\right)\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} n\exp\left[-\ell_n\left(F^k(\alpha_n t + \beta_n) + o\left(F^k(\alpha_n t + \beta_n)\right)\right)\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} n\exp\left[-\ell_n\left(F^k(\alpha_n t) + \beta_n F^k(\zeta) + o\left(F^k(\alpha_n t) + \beta_n F^k(\zeta)\right)\right)\right] \end{aligned}$$

où $\alpha_n t < \zeta < \alpha_n t + \beta_n$

En choisissant $\alpha_n = a(n,k)$ tel que : $\lim\limits_{n\to\infty} nF^k(a(n,k)\,t) = \lim\limits_{n\to\infty} \ell_n F^k(a(\ell_n,k)\,t)$, $\beta_n = 1$ et $\ell_n = c\log n$ avec $c = F^{-k}(\zeta)$, $\zeta > 0$. on obtient :

$$V(t) = \exp\{-(\Delta(t) + o(\Delta(t)))$$

Et d'après la deuxième partie du théorème 1 [35] on a :

$$V(t) = \begin{cases} \exp(-t^{\alpha}) & ,t\geq 0,\alpha>0 \\ 0 & ,t<0 \end{cases}$$

Donc :

$$\Delta(t) + o(\Delta(t)) = t^{\alpha}, t \geq 0$$

alors:

$$1 - \exp(-\Delta(t)) = t^{\alpha}, t \geq 0$$

par conséquent

$$-\Delta(t) = \log(1 - t^{\alpha}) = -t^{\alpha} - o(t^{\alpha}))$$

Et enfin :pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \binom{m-1}{k-1}\Delta(t) &= \binom{m-1}{k-1}t^{\alpha} + \binom{m-1}{k-1}o(t^{\alpha}) \\ &= 1 - \exp\left(-\binom{m-1}{k-1}t^{\alpha}\right) \end{aligned}$$

et en appliquant le théorème 1.5.3 on obtient notre résultat. □

Remarque 1.5.2. *Le théorème 1.5.4 montre que pour un système "k-parmi-m-consécutifs-sur-n" quand les composants possèdent une même loi de panne $F(t)$, alors pour toute loi $F(t)$ et sous quelques conditions, on peut approcher la fiabilité du système par un terme exponentiel. Autrement dit, pour toute loi $F(t)$ le temps de panne du système converge en loi vers une loi de Weibull.*

*Dans le corollaire suivant nous donnerons la loi limite du temps de panne d'un système "k-consécutifs-sur-n" alors on a :

Corollaire 1.5.1. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} nF^{k}(a(n,k)t) = \lim\limits_{n\to\infty} \ell_n F^{k}(a(\ell_n,k)t) = \Delta(t)$ $0 \leq \Delta(t) \leq 1$, *tel que* $a(n,k) \to 0$ *quand* $n \to \infty$, *pour* $\ell_n = c\log n$, $c > 0$. *Alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} \Pr\left(a^{-1}(n,k)Z_n \leq t\right) = \begin{cases} 1 - \exp(-t^{\alpha}) & ,t > 0, \alpha > 0 \\ 0 & ,t \leq 0 \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit de prendre $m = k$ dans le théorème 1.5.4. □

Remarque 1.5.3. *Un cas particulier de notre résultat est donné dans les références [21] et [36] où :* $F(t) = Weibull(\lambda t, \beta)$ *c à d pour tout* $i = 1, 2, ..., n$ *:*

$$F(t) = (\lambda t)^{\beta} + o\left(t^{\beta}\right)$$

et dans ce cas : $a(n,k) = \frac{1}{\lambda n^{\frac{1}{k\beta}}}$*.Donc ici nous avons obtenu une généralisation de ce cas.*

Exemples numériques

1). Soit $F = Weibull(\lambda t,\beta)$ i.e

$$F(t) = (\lambda t)^{\beta} + o\left(t^{\beta}\right)$$

on prend $a(n,k) = \frac{1}{\lambda n^{\frac{1}{k\beta}}}$. Alors on a :

$$\lim_{n\to\infty} nF^k(a(n,k)t) = \lim_{n\to\infty} \ell_n F^k(a(\ell_n,k)t) = t^{k\beta} + t^{k\beta}o(1)$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \Pr\left(a^{-1}(n,k) Z_n \leq t\right) = 1 - \exp\left(-\binom{m-1}{k-1} t^{\alpha}\right), \alpha = k\beta > 0$$

c à d $\lambda n^{\frac{1}{\alpha}} Z_n \to Weibull\left(\binom{m-1}{k-1}^{\frac{1}{\alpha}},\alpha\right)$ quand $n \to +\infty$.

* le Tableau 1 donne un exemple numérique du cas $F(t) = (\lambda t)^{\beta} + o\left(t^{\beta}\right)$, tel que $\beta = \lambda = 1$, et $k = m = 2$. Les colonnes du tableau donnent les valeurs $G_n(t) = \Pr\left(a^{-1}(n,k) Z_n \leq t\right)$ où $a(n,k) = \frac{1}{n^{\frac{1}{k\beta}}}$ pour $n = 5, 10, 15, ..., 35$. et on pose $G(t) = 1 - \exp\left(-\binom{m-1}{k-1} t^k\right)$

n	t= 0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
5	0.135	0.368	0.576	0.728	0.830	0.895	0.936
10	0.160	0.437	0.668	0.819	0.907	0.953	0.977
15	0.171	0.469	0.709	0.856	0.934	0.971	0.988
20	0.177	0.488	0.733	0.877	0.948	0.979	0.992
25	0.182	0.502	0.750	0.890	0.956	0.984	0.994
30	0.185	0.512	0.763	0.900	0.962	0.987	0.995
35	0.188	0.520	0.772	0.908	0.967	0.989	0.996
$G(t)$	0.221	0.632	0.894	0.981	0.998	0.999	0.999

Tableau1

– * Soit $F(t) = 1 - \exp(-t)$, on prend $a(n,k) = n^{-\frac{1}{k}}$, on obtient le tableau 2..

n	m	k	$a(n,k)$	t	$G_n(t)$	$G(t)$
5	3	2	0.447	1.55	0.992	0.991
5	3	2	0.447	0.23	0.105	0.100
10	5	3	0.464	1.49	1	0.999
10	5	3	0.464	0.22	0.068	0.061
10	5	5	0.794	0.87	0.798	0.392
50	10	5	0.457	1.51	1	0.999
50	10	5	0.457	0.23	0.078	0.077
50	30	2	0.141	0.74	1	0.999
100	3	2	0.1	1.05	0.891	0.889
100	10	2	0.1	1.05	1	0.999

Tableau2.

2). Si $F(t)$ est la distribution gamma c à d :

$$F(t) = \int_0^t \frac{\mu^\beta}{\Gamma(\beta+1)} s^{\beta-1} \exp(-\mu s)\, ds = \frac{\mu^\beta}{\Gamma(\beta+1)} t^\beta + t^\beta o(1)$$

on prend : $a(n,k) = \left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\mu^{k\beta} n}\right)^{\frac{1}{k\beta}}$. donc :

$$\lim_{n\to\infty} nF^k(a(n,k)\,t) = \lim_{n\to\infty} \ell_n F^k(a(\ell_n,k)\,t) = t^{k\beta} + t^{k\beta} o(1)$$

Alors on a :

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(a^{-1}(n,k)\, Z_n \leq t\right) = 1 - \exp\left(-\binom{m-1}{k-1} t^\alpha\right), \alpha = k\beta > 0.$$

Si on prend $\mu = 1$ et $\beta = 2$ on a $F(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$, $a(n,k) = \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2k}}$ et $G(t) = 1 - \exp\left(-\binom{m-1}{k-1} t^{2k}\right)$. on obtient le tableau3..

n	m	k	$a(n,k)$	t	$G_n(t)$	$G(t)$
5	3	2	0.795	2.19	0.992	0.999
5	3	2	0.795	0.34	0.105	0.026
10	5	3	0.764	2.37	1	0.999
10	5	3	0.764	0.36	0.068	0.023
10	5	5	0.851	1.64	0.798	0.999
50	10	5	0.724	2.25	1	0.999
50	10	5	0.724	0.40	0.078	0.013
50	30	2	0.447	1.05	1	1
100	3	2	0.376	1.50	0.891	0.999
100	10	2	0.376	1.50	1	1

Table3.

3). Soit : $F(t) = (\lambda t)^{\beta} + t^{\beta} o(1) + t^{\beta}\Psi(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0}\Psi(t) = 0$.
on prend : $a(n,k) = \frac{1}{\lambda n^{\frac{1}{k\beta}}}$,donc on a :

$$\lim_{n\to\infty} nF^k(a(n,k)t) = \lim_{n\to\infty} \ell_n F^k(a(\ell_n,k)t) = t^{k\beta} + t^{k\beta}o(1)$$

Et alors :

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(a^{-1}(n,k) Z_n \leq t\right) = 1 - \exp\left(-\binom{m-1}{k-1} t^{\alpha}\right), \alpha = k\beta \rangle 0.$$

Chapitre 2

Système "r-consécutifs-k-sur-n"

Le but de ce chapitre est l'étude du système "r-consécutifs-k-sur-n". Ce type de systèmes a été introduit dans la littérature de la théorie de fiabilité en 1986 par W.S Griffith [12] comme une généralisation des modèles envisagés dans le premier chapitre et pour expliquer cette généralisation on peut dire que dans le cas d'un système "k-consécutifs-sur-n" la panne du système est causée par l'existence d'une seule série de k composants consécutifs en panne, cependant la panne du système en question ne peut pas être réalisée sauf si le nombre de séries de k composants consécutifs en panne est supérieur ou égale à r. Donc d'après cette comparaison entre les deux modèles, il est très clair que le système "r-consécutifs-k-sur-n" a une configuration plus compliquée que celle d'un système "k-consécutifs-sur-n". Mais, on peut dire qu'en pratique si on dispose de n composants et on a le choix de réaliser une des deux configurations alors le mieux toujours est de choisir la configuration la plus fiable qui est bien sûr la configuration "r-consécutifs-k-sur-n". Notons aussi que ce genre de systèmes a fait l'objet de plusieurs articles scientifiques dans un cadre théorique de la manière suivante : pour une suite de variables aléatoires de Bernoulli on s'intéresse à l'étude de la variable aléatoire $N_{n,k}$ qui représente le nombre de séries de 1 non chevauchées de longueur k , on peut consulter par exemple [27], [34], [42]. Par conséquent, l'étude de la fiabilité d'un système "r-consécutifs-k-sur-n" se réduit à l'étude de la loi de distribution de la variable aléatoire $N_{n,k}$.

Dans le présent chapitre nous allons présenter le modèle "r-consécutifs-k-sur-n" linéaire en essayant de donner en premier lieu quelques formules de sa fiabilité , ensuite, la loi limite de son temps de panne et enfin l'importance de structure des composants.

2.1 Définitions et notations

Définition 2.1.1. *: Un système "r-consécutifs-k-sur-n" est un système formé de n composants disposés linéairement ou circulairement et qui tombe en panne si et seulement si au moins r séries non chevauchées de k composants consécutifs tombent en panne.*
On remarque que si $r = 1$ ($k = 1$ resp.) on obtient un système "k-consécutifs-sur-n" (r-parmi-n resp.).

Définition 2.1.2. *: Une série est l'ensemble de k composants consécutifs. On dit qu'elle est en panne si et seulement si tous ses composants sont en panne. On précise que : sk composants consécutifs sont traités comme s séries non chevauchées de k composants consécutifs.*

2.1.1 Domaines d'applications

Si on se réfère à la littérature concernant ces modèles on constate que ses domaines d'applications sont aussi diversifiés. Nous citons ici un exemple de ces domaines.

Exemple 2.1.1. *(contrôle de la qualité)*
Supposons qu'on veut contrôler la qualité d'un certain produit. Et pour cela on suppose que les éléments de ce produit sortent consécutivement d'une chaîne de production et qu'ils soient alors inspectés par des inspecteurs (ou des machines d'inspection) alors si on dispose de k types d'inspecteurs, chacun étudie un certain aspect de qualité. On s'intéresse à assurer la qualité et ainsi à adopter la procédure qu'un élément sortant de la chaîne de production est consécutivement inspecté par les k inspecteurs ensuite il subit à une deuxième et troisième .etc inspection par ces k inspecteurs et on décide de l'accepter si on a au moins r inspections (de taille k) positives (une inspection est positive si et seulement si toutes les caractéristiques à contrôler sont bonnes c à d les k inspecteurs acceptent cet élément). D'autre part si le nombre total de contrôles à faire sur chaque élément est n (avec $n \geq rk$) alors on a ici un système "r-consécutifs-k-sur-n".

Dans toute la suite nous utiliserons les notations suivantes.

- n : nombre de composants dans le système "r-consécutifs-k-sur-n"
- r : nombre minimum de séries (de taille k) non chevauchées dont leur panne cause la panne du système.
- k : nombre de composants dans une série.
- X_i : l'état du composant i $X_i = 1$ ou 0 suivant que le composant i fonctionne ou tombe en panne.$i = 1, 2, ..., n$
- q_i : la probabilité de panne du i ^{éme}composant , $i = 1, 2, ..., n$
- $p_i = 1 - q_i$: fiabilité du i ^{éme}composant , $i = 1, 2, ..., n$
- $F_{k,r}(n, p)$: probabilité de panne du système "r-consécutifs-k-sur-n" où $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$
- $R_{k,r}(n, p) = 1 - F_{k,r}(n, p)$: fiabilité du système "r-consécutifs-k-sur-n".
- $F_k(n, p)$: probabilité de panne du système "k-consécutifs-sur-n" (c à d pour $r = 1$).
- $R_k(n, p) = 1 - F_k(n, p)$: fiabilité du système "k-consécutifs-sur-n".
- $R_{k,r}(j - i + 1, p_i, p_{i+1}, ..., p_j) = 1 - F_{k,r}(j - i + 1, p_i, p_{i+1}, ..., p_j)$: fiabilité du système "r-consécutifs-k-sur-$(j - i + 1)$" constitué des composants $i + 1, i + 2, ..., j$. $(i < j \leq n)$.
- $I^n_{k,r}(i, p)$: importance en fiabilité (ou au sens de Birnbaum) du $i^{éme}$ composants $i = 1, 2, ..., n$.
- $\binom{x}{y} = \frac{x!}{y!(x-y)!}$. le coefficient binomial.
- $\overline{A}$: Le complémentaire de l'ensemble A.

2.2 Formules de la Probabilité de panne du système

Dans cette section on considère un système "r-consécutifs-k-sur-n". Les états des composants sont des variables aléatoires nous les supposons indépendantes. Nous présentons ici nos résultats qui donnent les formules de la probabilité de panne du système. Et avant de présenter ces résultast nous rappelons d'abord celui donné dans [26] pour procéder à des comparaisons.

2.2.1 Formules récursives de la probabilité de panne du système

Dans le cas où les composants du système ne sont pas nécessairement identiques la probabilité de panne du système est donnée par la formule récursive suivante :

Théorème 2.2.1. *Pour* $n \geq kr+1,$ *et* $F_{k,0}(0,p)=1$ *on a*

$$\begin{aligned}F_{k,r}(n,p) &= F_{k,r}(n-1,p)\\ &\quad + \sum_{s=1}^{r} p_{n-sk} \prod_{i=1}^{sk} q_{n-sk+i}\left(F_{k,r-s}(n-sk-1,p) - F_{k,r-s+1}(n-sk-1,p)\right)\end{aligned}$$

Démonstration. Soit $A(n,r)$ l'évènement "le système r-consécutifs-k-sur-n tombe en panne"
Alors on a :

$$\begin{aligned}F_{k,r}(n,p) &= \Pr(A(n,r))\\ &= \Pr\left(A(n,r) \bigcap A(n-1,r)\right) + \Pr\left(A(n,r) \bigcap \overline{A(n-1,r)}\right)\\ &= \Pr(A(n-1,r)) + \Pr\left(A(n,r) \bigcap \overline{A(n-1,r)}\right)\\ &= F_{k,r}(n-1,p) + \Pr\left(A(n,r) \bigcap \overline{A(n-1,r)}\right)\end{aligned}$$

Mais :
$\Pr\left(A(n,r) \bigcap \overline{A(n-1,r)}\right)$

$$= \Pr\left(\bigcup_{s=1}^{r} \left(X_{n-sk+1} = X_{n-sk+2} ... = X_n = 0, X_{n-sk} = 1, E_{1,n-sk-1}(r-s)\right)\right)$$

où $E_{1,n-sk-1}(r-s)$ ="parmi les composants $1,2,...,n-sk-1$, il existe exactement $(r-s)$ séries non chevauchées de k composants consécutifs en panne". Donc

$$\Pr\left[E_{1,n-sk-1}(r-s)\right] = F_{k,r-s}(n-sk-1,p) - F_{k,r-s+1}(n-sk-1,p)$$

par conséquent :

$$\Pr\left(A(n,r)\bigcap\overline{A(n-1,r)}\right)=\sum_{s=1}^{r}p_{n-sk}\prod_{i=1}^{sk}q_{n-sk+i}\times$$
$$\left(F_{k,r-s}\left(n-sk-1,p\right)-F_{k,r-s+1}\left(n-sk-1,p\right)\right)$$

Le résultat est donc démontré. □

Les deux cas particuliers suivants résultent directement du théorème précédent :

1) Si $r=1$. La probabilité de panne d'un système "k-consécutifs-sur-n" est donnée par la formule :

Corollaire 2.2.1. *Soit* $n\geq k+1$ *alors :*

$$F_k\left(n,p\right)=F_k\left(n-1,p\right)+p_{n-k}\prod_{i=1}^{k}q_{n-k+i}\left(1-F_k\left(n-k-1,p\right)\right)$$

Démonstration. Il suffit de prendre $r=1$ dans le théorème2.2.1. □

2) Si les composants du système sont supposés identiques c à d $p_1=p_2=\ldots=p_n=p=1-q$. Alors on a le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.2. *Soit* $n\geq kr+1$ *alors :*

$$F_{k,r}\left(n,p\right)=F_{k,r}\left(n-1,p\right)+\sum_{s=1}^{r}pq^{sk}\left(F_{k,r-s}\left(n-sk-1,p\right)-F_{k,r-s+1}\left(n-sk-1,p\right)\right)$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer l'hypothèse $p_1=p_2=\ldots=p_n=p$ dans le théorème2.2.1 □

Remarque 2.2.1. *D'après les formules précédentes on remarque que la probabilité de panne d'un système "r-consécutifs-k-sur-n" est donnée en fonction de celles des systèmes "*$(r-s)$*-consécutifs-k-sur-*$(n-sk-1)$*" ou* $0\leq s\leq r$*.*

2.2.2 Formule explicite de la probabilité de panne du système

Dans cette section les composants du système sont supposés indépendants et identiques, en utilisant les techniques de l'analyse combinatoire on a établi une formule exacte de la probabilité de panne du système. Donc on a le résultat suivant :

Théorème 2.2.2. *Soit* $p_1 = p_2 = ... = p_n = p$ *, et* $n \geq kr$ *alors*

$$F_{k,r}(n,p) = \sum_{s=r}^{\left[\frac{n}{k}\right]} \sum_{i=sk}^{n} \binom{s+n-i}{s} N(i-sk, n-i+1) \, q^i p^{n-i}.$$

où $\left[\frac{n}{k}\right]$ *est la partie entière de* $\frac{n}{k}$ *et* $N(i,j) = \sum_{m=0}^{j} \binom{j}{m} \binom{i+j-1-mk}{i-mk} (-1)^m$ *.*

Démonstration. Voir [26]. □

2.3 Probabilité de panne du système "r-consécutifs-k-sur-n" Via celle du système "k-consécutifs-sur-n".

Dans ce paragraphe, l'hypothèse d'indépendance des composants est toujours conservée. Nous voulons ici bénéficier de la relation existante entre les deux systèmes et la bibliographie concernant le calcul de la fiabilité du système "k-consécutifs-sur-n" dans le calcul de la probabilité de panne du système "r-consécutifs-k-sur-n". Plus précisément, comme il existe un grand nombre de résultats concernant le système "k-consécutifs-sur-n" et comme le système "r-consécutifs-k-sur-n" le généralise, alors il est intéressant d'exprimer la probabilité de panne de ce dernier en fonction de celle du premier [59]. Alors nous avons les résultats suivants :

2.3.1 Cas des composants non identiques

Nous supposons ici que les composants du système ne sont pas nécessairement identiques. Nous utilisons la notation $F_{k,r}(n, p_1, p_2, ..., p_n)$ au lieu de $F_{k,r}(n,p)$

pour pouvoir faire la distinction entre les sous-systèmes et on définit l'évènement $A_i = \{X_i = X_{i+1} = ... = X_{i+k-1} = 0\}$, pour $i = 1, 2, ..., n-k+1$ Sous ces considérations on a le résultat :

Théorème 2.3.1. *pour $n \geq rk$ et $r \geq 1$ on a*

$$\begin{aligned} F_{k,r}(n, p_1, p_2, ..., p_n) = & \prod_{j=1}^{k} q_j F_{k,r-1}(n-k, p_{k+1}, p_{k+2}, ..., p_n) \\ & + \sum_{i=2}^{n-rk+1} R_k(i-2, p_1, p_2, ..., p_{i-2})\, p_{i-1} \times \\ & \prod_{j=i}^{i+k-1} q_j F_{k,r-1}(n-k-i+1, p_{i+k}, p_{i+k+1}, ..., p_n) \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $B_k^n(r)$ l'évènement : {le système "r-consécutifs-k-sur-n" constitué des composants $1, 2, ..., n$ tombe en panne}.
Alors on a :

$$\begin{aligned} F_{k,r}(n, p_1, p_2, ..., p_n) &= \Pr[B_k^n(r)] \\ &= \Pr[A_1]\Pr[B_k^n(r) \diagup A_1] + \Pr[\overline{A}_1]\Pr[B_k^n(r) \diagup \overline{A}_1] \\ &= \Pr[A_1]\Pr[B_k^n(r) \diagup A_1] + \Pr[\overline{A}_1 \cap A_2]\Pr[B_k^n(r) \diagup \overline{A}_1 \cap A_2] \\ &+ \Pr[\overline{A}_2 \cap \overline{A}_1]\Pr[B_k^n(r) \diagup \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2] \end{aligned}$$

De la même manière on obtient :

$$\begin{aligned} F_{k,r}(n, p_1, p_2, ..., p_n) &= \Pr[B_k^n(r)] \\ &= \Pr[A_1]\Pr[B_k^n(r) \diagup A_1] \\ &+ \sum_{i=2}^{n-rk+1} \Pr\left(\bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{A}_j \cap A_i\right) \Pr\left[B_k^n(r) \diagup \bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{A}_j \cap A_i\right] \\ &+ \Pr\left[\bigcap_{j=1}^{n-rk+1} \overline{A}_j\right] \Pr\left[B_k^n(r) \diagup \bigcap_{j=1}^{n-rk+1} \overline{A}_j\right] \end{aligned}$$

Mais :

$$\Pr\left[B_k^n(r) \diagup \bigcap_{j=1}^{n-rk+1} \overline{A}_j\right] = 0$$

Donc :

$$\begin{aligned} F_{k,r}(n,p_1,p_2,...,p_n) &= \Pr\left[B_k^n(r)\right] \\ &= \Pr\left[A_1\right]\Pr\left[B_k^n(r)\diagup A_1\right] \\ &+ \sum_{i=2}^{n-rk+1}\Pr\left(\bigcap_{j=1}^{i-1}\overline{A}_j\cap A_i\right)\Pr\left[B_k^n(r)\diagup\bigcap_{j=1}^{i-1}\overline{A}_j\cap A_i\right] \end{aligned}$$

Or on a :

$$\Pr\left[A_1\right] = \prod_{j=1}^{k} q_j$$

et

$$\Pr\left[B_k^n(r)\diagup A_1\right] = F_{k,r-1}(n-k,p_{k+1},p_{k+2},...,p_n)$$

et

$$\Pr\left(\bigcap_{j=1}^{i-1}\overline{A_j}\cap A_i\right) = \begin{cases} p_{i-1}\prod\limits_{j=i}^{i+k-1} q_j & ,i\leq k+1 \\ R_k(i-2,p_1,p_2,.,p_{i-2})\,p_{i-1}\prod\limits_{j=i}^{i+k-1} q_j & ,i\geq k+2 \end{cases}$$

et

$$\Pr\left[B_k^n(r)\diagup\bigcap_{j=1}^{i-1}\overline{A_j}\cap A_i\right] = F_{k,r-1}(n-k-i+1,p_{i+k},p_{i+k+1},...,p_n)$$

Alors d'après les égalités ci-dessus on a :

$$\begin{aligned} F_{k,r}(n,p_1,p_2,...,p_n) &= \prod_{j=1}^{k} q_j F_{k,r-1}(n-k,p_{k+1},p_{k+2},...,p_n) \\ &+ \sum_{i=2}^{k+1} p_{i-1}\prod_{j=i}^{i+k-1} q_j F_{k,r-1}(n-k-i+1,p_{i+k},p_{i+k+1},...,p_n) \\ &+ \sum_{i=k+2}^{n-rk+1} R_k(i-2,p_1,p_2,...,p_{i-2})\,p_{i-1}\times \\ &\prod_{j=i}^{i+k-1} q_j F_{k,r-1}(n-k-i+1,p_{i+k},p_{i+k+1},...,p_n) \end{aligned}$$

Mais :

$$R_k\left(i-2, p_1, p_2, ..., p_{i-2}\right) = 1 \ \text{ pour } i-2 \leq k-1$$

Alors le résultat suit directement. □

Remarque 2.3.1. *D'après le théorème2.3.1 on remarque que (on peut appliquer la formule a $F_{k,r-1}$ ensuite a $F_{k,r-2}$ ainsi de suite) la probabilité de panne d'un système "r-consécutifs-k-sur-n" est donnée directement en fonction de celle d'un système "k-consécutifs-sur-n".*

Le corollaire suivant montre que dans le cas $r = 2$ la probabilité de panne du système "2-consécutifs-k-sur-n" est directement donnée en fonction de celle d'un système "k-consécutifs-sur-n".

Corollaire 2.3.1. *pour $n \geq 2k+1$ on a :*

$$\begin{aligned} F_{k,2}\left(n, p_1, p_2, ..., p_n\right) = &\prod_{j=1}^{k} q_j F_k\left(n-k, p_{k+1}, p_{k+2}, ..., p_n\right) \\ &+ \sum_{i=2}^{n-2k+1} R_k\left(i-2, p_1, p_2, ..., p_{i-2}\right) p_{i-1} \times \\ &\prod_{j=i}^{i+k-1} q_j F_k\left(n-k-i+1, p_{i+k}, p_{i+k+1}, ..., p_n\right) \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de prendre $r = 2$ dans le théorème2.3.1. □

Comparaisons des résultats

Si $r = 2$ alors on a d'après le théorème2.2.1.

$$\begin{aligned} F_{k,2}\left(n,p\right) = &F_{k,2}\left(n-1,p\right) \\ &+ \sum_{s=1}^{2} p_{n-sk} \prod_{i=1}^{sk} q_{n-sk+i} \left(F_{k,2-s}\left(n-sk+1,p\right) - F_{k,3-s}\left(n-sk-1,p\right)\right) \end{aligned}$$

donc le terme $F_{k,2}$ intervient toujours dans la formule et ce n'est pas le cas dans notre formule (corollaire2.3.1). Pour cette raison on peut dire que notre formule est plus rapide dans le calcul de la probabilité de panne du système.

2.3.2 Cas des composants identiques

Ici on suppose que les composants du système sont identiques c'est à dire $p_1 = p_2 = ... = p_n = p$. Alors dans ce cas nous avons les résultats suivants :

Corollaire 2.3.2. *Pour $n \geq rk$*

$$F_{k,r}(n,p) = q^k F_{k,r-1}(n-k,p) + pq^k \sum_{i=2}^{n-rk+1} R_k(i-2,p) F_{k,r-1}(n-k-i+1,p)$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer l'hypothèse $p_1 = p_2 = ... = p_n = p$ dans le théorème2.3.1. □

Théorème 2.3.2. *Pour $n \geq rk$ et $r \geq 1$ on a*

$$\begin{aligned} F_{k,r}(n,p) &= q^{(r-1)k}[F_k(n-(r-1)k,p) \\ &+ \sum_{j=1}^{r-1} \binom{r-1}{j} p^j \sum_{i_1,i_2,.,i_j} \prod_{l=1}^{j} R_k(i_l-2,p) F_k(n-(r-1)k-\alpha_j+j,p)] \end{aligned}$$

Où $\alpha_0 = 0$, $\alpha_j = \sum_{l=1}^{j} i_l$, et i_s prend les valeurs de 2 à $n - rk - \alpha_{s-1} + s$,pour $s = 1, 2, \quad , r-1$.

Démonstration. Notre démonstration est par récurrence sur r.
Pour $r = 1$ le théorème est évident.
Supposons que le théorème est vrai jusqu'a l'ordre r et démontrons le pour $r+1$.
D'après le corollaire2.3.2. on a

$$\begin{aligned} F_{k,r+1}(n,p) &= q^k F_{k,r}(n-k,p) \\ &+ pq^k \sum_{i_r=2}^{n-(r+1)k+1} R_k(i_r-2,p) F_{k,r}(n-k-i_r+1,p) \end{aligned} \tag{2.1}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence on obtient

$$\begin{aligned} F_{k,r}(n-k,p) &= q^{(r-1)k}[F_k(n-rk,p) \\ &+ \sum_{j=1}^{r-1} \binom{r-1}{j} p^j \sum_{i_1,i_2,...,i_j} \prod_{l=1}^{j} R_k(i_l-2,p) F_k(n-rk-\alpha_j+j,p)] \end{aligned} \tag{2.2}$$

où $\alpha_j = \sum_{l=1}^{j} i_l$ et $i_s \in \{2, 3, ..., n - (r+1)\,k - \alpha_{s-1} + s\}$.
Et pour $i_r = 2, 3, ..., n - (r+1)\,k + 1$

$$\begin{aligned} F_{k,r}\,(n - k - i_r + 1, p) &= q^{(r-1)k} F_k\,(n - rk - i_r + 1, p) \\ &+ q^{(r-1)k} \sum_{i=1}^{r-1} \binom{r-1}{i} p^i \sum_{j_1, j_2, .., j_i} \\ &\prod_{l=1}^{i} R_k\,(j_l - 2, p)\, F_k\,(n - rk - i_r - \beta_i + i + 1, p) \end{aligned} \tag{2.3}$$

où $\beta_0 = 0, \beta_i = \sum_{l=1}^{i} j_l$ et $j_s \in \{2, 3, ..., n - (r+1)\,k - i_r - \beta_{s-1} + s + 1\}$
En remplaçant2.2 et 2.3 dans 2.1 on obtient :

$$\begin{aligned} F_{k,r+1}\,(n, p) &= q^{rk} F_k\,(n - rk, p) \\ &+ q^{rk} \sum_{i=1}^{r} \left[\binom{r-1}{i-1} + \binom{r-1}{i} \right] p^i \sum_{j_1, j_2, ..., j_i} \\ &\prod_{l=1}^{i} R_k\,(j_l - 2, p)\, F_k\,(n - rk - \theta_i + i, p) \end{aligned}$$

où $\theta_0 = 0$, $\theta_s = \sum_{l=1}^{s} j_l$ et $j_s \in \{2, 3, ..., n - (r+1)\,k - \theta_{s-1} + s\}$
Enfin comme $\binom{r-1}{i-1} + \binom{r-1}{i} = \binom{r}{i}$ on a

$$\begin{aligned} F_{k,r+1}\,(n, p) &= q^{rk} F_k\,(n - rk, p) \\ &+ q^{rk} \sum_{i=1}^{r} \binom{r}{i} p^i \sum_{j_1, j_2, ..., j_i} \prod_{l=1}^{i} R_k\,(j_l - 2, p)\, F_k\,(n - rk - \theta_i + i, p) \end{aligned}$$

Donc le théorème est vrai pour $r + 1$. D'où le résultat. □

Remarque 2.3.2. *Grâce à nos résultats cités dans cette section et en utilisant les formules et les bornes de la fiabilité du système "k-consécutifs-sur-n" on peut facilement établir les bornes et les formules de la fiabilité du système "r-consécutifs-k-sur-n" dans les deux cas (cas iid où le cas des composants non identiques).*

2.3.3 Autre Formule de la fiabilité du système

Nous proposons ici une autre formule de la fiabilité du système. Plus exactement nous donnerons une formule pour la fiabilité d'un système "r-consécutifs-k-sur-n" en fonction de celles des sous système "$(r-h)$-consécutifs-k-sur-$(n-j)$". Alors on a le théorème suivant :

Théorème 2.3.3. *Pour $n \geq rk$*

$$R_{k,r}(n,p) = \sum_{h=1}^{r} \sum_{j=(h-1)k+1}^{hk} p_j \left(\prod_{i=1}^{j-1} q_i \right) R_{k,r-h+1}(n-j, p_{j+1}, ..., p_n)$$

Démonstration. On considère un système "r-consécutifs-k-sur-n" et soit j le premier composant qui fonctionne dans le système, alors on a : le système fonctionne si et seulement si $1 \leq j \leq rk$ et le sous système "$\left(r - \left[\frac{j-1}{k}\right]\right)$-consécutifs-k-sur-$(n-j)$" constitué par les composants $j+1, j+2, ..., n$ fonctionne. Donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} R_{k,r}(n,p) &= \sum_{j=1}^{rk} p_j \left(\prod_{i=1}^{j-1} q_i \right) R_{k,r-\left[\frac{j-1}{k}\right]}(n-j, p_{j+1}, ..., p_n) \\ &= \sum_{h=1}^{r} \sum_{j=(h-1)k+1}^{hk} p_j \left(\prod_{i=1}^{j-1} q_i \right) R_{k,r-h+1}(n-j, p_{j+1}, ..., p_n) \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

*Dans le cas où les composants du système sont identiques on obtient le corollaire suivant

Corollaire 2.3.3. *Pour $n \geq rk$*

$$R_{k,r}(n,p) = \sum_{h=1}^{r} \sum_{j=(h-1)k+1}^{hk} pq^{j-1} R_{k,r-h+1}(n-j,p)$$

Démonstration. Il suffit de prendre $p_1 = p_2 = ... = p_n = p$ dans le théorème précédent. □

*Pour $r = 1$ la fiabilité d'un système "k-consécutifs-sur-n" est donnée par la formule suivante :

$$R_k\,(n,p) = \sum_{j=1}^{k} p_j \left(\prod_{i=1}^{j-1} q_i\right) R_k\,(n-j, p_{j+1}, ..., p_n)$$

et dans le cas des composants identiques on obtient :

$$R_{k,r}\,(n,p) = \sum_{j=1}^{k} pq^{j-1} R_k\,(n-j,p)$$

2.4 Formule de la probabilité de panne et configuration optimale du système pour $n \leq (r+1)\,k$

Dans cette section on considère un système "r-consécutive-k-sur-n" avec $n \leq (r+1)\,k$. Nous donnerons ici une formule de la probabilité de panne du système, ensuite, on s'intéresse à savoir comment peut-on placer les n composants dans les n positions du système pour obtenir un système plus fiable.

2.4.1 Formule de la probabilité de panne pour $n \leq (r+1)\,k$

La probabilité de panne d'un système "r-consécutive-k-sur-n" avec $n \leq (r+1)\,k$ est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.4.1. *Pour* $n \leq (r+1)\,k$ *on a :*

$$F_{k,r}\,(n,p) = \prod_{j=1}^{rk} q_j + \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{i=1}^{n-rk} p_{sk+i} \prod_{j=sk+i+1}^{rk+i} q_j F_{k,s}\,(sk+i-1,p)$$

Démonstration. Soit $B\,(j,s)$ l'évènement : $\{X_{sk+j} = X_{sk+j+1} = ... = X_{rk+j-1} = 0\}$, pour $0 \leq s \leq r-1$, et $1 \leq j \leq n-rk$, et soit E l'évènement :{le système tombe en panne}
Alors on a : $F_{k,r}\,(n,p)= \Pr(E) = \Pr(E \cap B\,(1,0))$
$+\sum\limits_{j=1}^{n-rk} \Pr\left(E \cap \left(\bigcap\limits_{i=1}^{j} \overline{B\,(i,0)} \cap B\,(j+1,0)\right)\right) + \sum\limits_{s=1}^{r-1} \Pr\left(E \cap \left(\bigcap\limits_{i=0}^{s-1}\left(\bigcap\limits_{j=1}^{n-rk+1} \overline{B\,(j,i)}\right) \cap B\,(1,s)\right)\right)$
$+\sum\limits_{s=1}^{r-1}\sum\limits_{h=1}^{n-rk} \Pr\left(E \cap \bigcap\limits_{i=0}^{s-1}\left(\bigcap\limits_{j=1}^{n-rk+1} \overline{B\,(j,i)}\right)\left(\bigcap\limits_{l=1}^{h} \overline{B\,(l,s)} \cap B\,(h+1,s)\right)\right) + \Pr\left(E \cap \left(\bigcap\limits_{i=0}^{r-1}\bigcap\limits_{j=1}^{n-rk+1} \overline{B\,(j,i)}\right)\right)$

Mais pour $s \geq 1$: $\Pr\left(E \cap \left(\bigcap_{i=0}^{s-1}\left(\bigcap_{j=1}^{n-rk+1}\overline{B(j,i)}\right) \cap B(1,s)\right)\right) = 0 = \Pr\left(E \cap \left(\bigcap_{i=0}^{r-1}\bigcap_{j=1}^{n-rk+1}\overline{B(j,i)}\right)\right)$

Donc : $F_{k,r}(n,p) = \Pr(B(1,0))\Pr(E|B(1,0))$

$+\sum_{j=1}^{n-rk}\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{j}\overline{B(i,0)} \cap B(j+1,0)\right)\Pr\left(E|\left(\bigcap_{i=1}^{j}\overline{B(i,0)} \cap B(j+1,0)\right)\right)$

$+\sum_{s=1}^{r-1}\sum_{h=1}^{n-rk}\Pr\left(\bigcap_{i=0}^{s-1}\left(\bigcap_{j=1}^{n-rk+1}\overline{B(j,i)}\right)\left(\bigcap_{l=1}^{h}\overline{B(l,s)} \cap B(h+1,s)\right)\right)$

$\Pr\left(E|\bigcap_{i=0}^{s-1}\left(\bigcap_{j=1}^{n-rk+1}\overline{B(j,i)}\right)\left(\bigcap_{l=1}^{h}\overline{B(l,s)} \cap B(h+1,s)\right)\right)$

et on a : $\Pr(E|B(1,0)) = 1$, $\Pr(B(1,0)) = \prod_{j=1}^{rk} q_j$

et pour $1 \leq\ j \leq n-rk$, $\Pr\left(E|\left(\bigcap_{i=1}^{j}\overline{B(i,0)} \cap B(j+1,0)\right)\right) = 1$

et $\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{j}\overline{B(i,0)} \cap B(j+1,0)\right) = p_j\prod_{i=j+1}^{rk+j} q_i$

pour $1 \leq s \leq r-1, 1 \leq h \leq n-rk$: $\Pr\left(\bigcap_{i=0}^{s-1}\left(\bigcap_{j=1}^{n-rk+1}\overline{B(j,i)}\right)\left(\bigcap_{l=1}^{h}\overline{B(l,s)} \cap B(h+1,s)\right)\right) =$

$p_{sk+h}\prod_{j=sk+h+1}^{rk+h} q_j$

et $\Pr\left(E|\bigcap_{i=0}^{s-1}\left(\bigcap_{j=1}^{n-rk+1}\overline{B(j,i)}\right)\left(\bigcap_{l=1}^{h}\overline{B(l,s)} \cap B(h+1,s)\right)\right) = F_{k,s}(sk+h-1,p)$

Enfin on a :

$F_{k,r}(n,p) = \prod_{j=1}^{rk} q_j + \sum_{j=1}^{n-rk} p_j\prod_{i=j+1}^{rk+j} q_i + \sum_{s=1}^{r-1}\sum_{h=1}^{n-rk} p_{sk+h}\prod_{j=sk+h+1}^{rk+h} q_j F_{k,s}(sk+h-1,p)$

$= \prod_{j=1}^{rk} q_j + \sum_{s=0}^{r-1}\sum_{i=1}^{n-rk} p_{sk+i}\prod_{j=sk+i+1}^{rk+i} q_j F_{k,s}(sk+i-1,p)$. □

Dans le cas ou composants du système ont la même fiabilité on a le corollaire suivant :

Corollaire 2.4.1. *si $p_i = p$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$, alors on a :*

$$F_{k,r}(n,p) = q^{rk} + p\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{i=1}^{n-rk} q^{(r-s)k}F_{k,s}(sk+i-1,p)$$

Démonstration. il suffit de prendre $p_1 = p_2 = ... = p_n = p$ et $q = 1-p$ dans le théorème2.4.1 . □

Cas particuliers Dans les cas suivants on verra que la formule de $F_{k,r}(n,p)$ est donnée explicitement en fonction des fiabilities des composants :

– Pour $n = rk + 1$ on a :

$$F_{k,r}(n,p) = \prod_{i=1}^{rk} q_i + p_1 \prod_{i=2}^{rk+1} q_i + \sum_{s=1}^{r-1} p_{sk+1} \prod_{i=1}^{sk} q_i \prod_{h=sk+2}^{rk+1} q_h$$

– Pour $r = 1$ et $n \leq 2k$ on obtient :

$$F_k\,(n,p) = \prod_{j=1}^{k} q_j + \sum_{i=1}^{n-k} p_i \prod_{j=i+1}^{k+i} q_j$$

– Pour $r = 2$, et $n \leq 3k$:

$$F_{k,2}\,(n,p) = \prod_{j=1}^{2k} q_j + \sum_{i=1}^{n-2k} p_i \prod_{j=i+1}^{2k+i} q_j + \sum_{i=1}^{n-2k} p_{k+i} \prod_{j=k+i+1}^{2k+i} q_j \left[\prod_{j=1}^{k} q_j + \sum_{l=1}^{i-1} p_l \prod_{h=l+1}^{k+l} q_h\right]$$

2.4.2 Configuration optimale du système pour $n \leq (r+1)\,k$

On suppose que nous avons n composants avec les fiabilities $p_1, p_2, ..., p_n$ dont on peut les arranger dans l'ordre croissant $p_{[1]} < p_{[2]} < ... < p_{[n]}$. Notre but ici est de placer ces n composants dans n positions de façon que la fiabilité du système soit maximum. Autrement dit, comme il existe plusieurs configurations pour un système de n composants, alors on s'intéresse ici de trouver la configuration qui maximise la fiabilité du système. Une configuration optimale est dite invariante si elle dépend seulement de l'ordre des fiabilités des composants du système mais pas de leurs valeurs.

Soit π une permutation quelconque de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ et π_{ij} la permutation obtenue de π par un changement des composants dans les positions i et j. On designe par $R_{k,r}\,(n,p)_\pi$ $(R_{k,r}\,(n,p)_{\pi_{ij}})$ la fiabilité du système si les composants sont arrangés suivant la permutation π (π_{ij} respectivement), et par $R_{k,r}\,(n, p, x_i, y_j)$ la fiabilité du système sachant que le composant dans la position i est dans l'état x et le composant dans la position j est dans l'état y pour $i, j = 1, 2, ..., n$, $i \neq j$ et $x, y = 0, 1$. Alors nous avons les résultats suivants :

Lemme 2.4.1.

$$R_{k,r}\,(n,p)_{\pi} - R_{k,r}\,(n,p)_{\pi_{ij}} = (p_i - p_j)\,(R_{k,r}\,(n,p,1_i,0_j) - R_{k,r}\,(n,p,0_i,1_j))$$

Démonstration. Soit G l'évènement {le système fonctionne} alors on a :

$$R_{k,r}\,(n,p) = \sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} \Pr(X_i = x)\Pr(X_j = y)\Pr(G|X_i = x, X_j = y)$$

donc :

$$R_{k,r}\,(n,p)_{\pi} = q_i q_j R_{k,r}\,(n,p,0_i,0_j) + q_i p_j R_{k,r}\,(n,p,0_i,1_j) + p_i q_j R_{k,r}\,(n,p,1_i,0_j) + p_i p_j R_{k,r}\,(n,p,1_i,1_j)$$

et :

$$R_{k,r}\,(n,p)_{\pi_{ij}} = q_j q_i R_{k,r}\,(n,p,0_i,0_j) + q_j p_i R_{k,r}\,(n,p,0_i,1_j) + p_j q_i R_{k,r}\,(n,p,1_i,0_j) + p_j p_i R_{k,r}\,(n,p,1_i,1_j)$$

donc :

$$\begin{aligned} R_{k,r}\,(n,p)_{\pi} - R_{k,r}\,(n,p)_{\pi_{ij}} &= (q_i p_j - q_j p_i)\,R_{k,r}\,(n,p,0_i,1_j) - (p_j q_i - p_i q_j)\,R_{k,r}\,(n,p,1_i,0_j) \\ &= (p_i - p_j)\,(R_{k,r}\,(n,p,1_i,0_j) - R_{k,r}\,(n,p,0_i,1_j)) \end{aligned}$$

Alors le lemme est démontré. □

le théorème suivant donne les conditions nécessaires d'une configuration optimale.

Théorème 2.4.2. *Les conditions nécessaires d'une configuration optimale sont :*
1. *Arranger les composants de la position* 1 *jusqu'à la position* k *dans un ordre croissant des fiabilités*
2. *Arranger les composants de la position* $n-k+1$ *jusqu'à la position* n *dans un ordre décroissant des fiabilités*
3. *Arranger les* $r\,((r+1)\,k-n)$ *Composants qui possèdent les grandes fiabilités de la position* $n-(r-j)\,k+1$ *jusqu'à la position* $(j+1)\,k$ *pour* $j = 0, 1, ..., r-1$ *dans n'importe quel ordre si* $n < (r+1)\,k$.

Démonstration. On designe par $R_{k,r}\,(u-v+1, p_v, p_{v+1}, ..., p_u)$ la fiabilité du système "r-consécutifs-k-sur-$(u-v+1)$" constitué des composants $v, v+1, ..., u$

1.Soit i et j tels que $1 \leq i < j \leq k$ alors on a :

$$R_{k,r}\,(n, p, 0_i, 1_j) = R_{k,r}\,(n - j, p_{j+1}, p_{j+2}, ..., p_n)$$

et

$$\begin{aligned} R_{k,r}\,(n, p, 1_i, 0_j) &= \frac{R_{k,r}\,(n, p, 1_i) - p_j R_{k,r}\,(n, p, 0_i, 1_j)}{q_j} \\ &= \frac{R_{k,r}\,(n - i, p_{i+1}, p_{i+2}, ..., p_n) - p_j R_{k,r}\,(n - j, p_{j+1}, p_{j+2}, ..., p_n)}{q_j} \end{aligned}$$

en utilisant le lemme précédent on obtient :

$$R_{k,r}\,(n,p)_\pi - R_{k,r}\,(n,p)_{\pi_{ij}} = \frac{p_i - p_j}{q_j}\,(R_{k,r}\,(n - i, p_{i+1}, p_{i+2}, ..., p_n) - R_{k,r}\,(n - j, p_{j+1}, p_{j+2}, ..., p_n))$$

et comme $1 \leq i < j \leq k$ on a $R_{k,r}\,(n - j, p_{j+1}, p_{j+2}, ..., p_n) > R_{k,r}\,(n - i, p_{i+1}, p_{i+2}, ..., p_n)$ alors :

$$R_{k,r}\,(n,p)_\pi > R_{k,r}\,(n,p)_{\pi_{ij}} \iff p_i < p_j$$

Donc la configuration π est plus fiable que la configuration π_{ij} si $p_i < p_j$ c à d pour obtenir une configuration plus fiable il est nécessaire de placer le composant le plus fiable dans la position j et le moins fiable dans la position pour tous $1 \leq i < j \leq k$. Et donc nous avons la première partie du théorème

2. Soit $n - k + 1 \leq i < j \leq n$ dans ce cas on a :

$$R_{k,r}\,(n, p, 1_i, 0_j) = R_{k,r}\,(i - 1, p_1, p_2, ..., p_{i-1})$$

et

$$\begin{aligned} R_{k,r}\,(n, p, 0_i, 1_j) &= \frac{R_{k,r}\,(n, p, 1_j) - p_i R_{k,r}\,(n, p, 1_i, 1_j)}{q_i} \\ &= \frac{R_{k,r}\,(j - 1, p_1, p_2, ..., p_{j-1}) - p_i R_{k,r}\,(i - 1, p_1, p_2, ..., p_{i-1})}{q_i} \end{aligned}$$

donc :

$$R_{k,r}\,(n,p)_\pi - R_{k,r}\,(n,p)_{\pi_{ij}} = \frac{p_i - p_j}{q_i}\,(R_{k,r}\,(i - 1, p_1, p_2, ..., p_{i-1}) - R_{k,r}\,(j - 1, p_1, p_2, ..., p_{j-1}))$$

et comme $n - k + 1 \leq i < j \leq n$ on a $R_{k,r}\,(j - 1, p_1, p_2, ..., p_{j-1}) < R_{k,r}\,(i - 1, p_1, p_2, ..., p_{i-1})$

alors :

$$R_{k,r}\,(n,p)_{\pi} > R_{k,r}\,(n,p)_{\pi_{ij}} \iff p_i > p_j$$

Par conséquent dans ce cas la configuration π est plus fiable que la configuration π_{ij} si $p_i > p_j$. Donc nous avons la deuxième partie du théorème.
3. Si $n < (r+1)\,k$ alors d'après le théorème 2.4.1 on peut voir facilement que dans chaque état de panne du système les composants dans les positions $n-(r-j)\,k+1$,$n-(r-j)\,k+2$,...,$(j+1)\,k$ pour $j=0,1,...,r-1$ doivent tous tomber en panne . Alors , ces positions devront être occupées par les composants les plus fiables dans n'importe quel ordre. □

Dans le théorème suivant on donne la configuration optimale invariante d'un système "r-consécutifs-sur-$(rk+1)$" . Alors on a le théorème suivant :

Théorème 2.4.3. *La configuration optimale invariante d'un système "r-consécutifs-sur-$(rk+1)$" est obtenue si en arrangeant :*
1. *les $(r+1)$ composants moins fiables dans n'importe quel ordre dans les positions $jk+1$, pour $j=0,1,2,...,r$*
2. *les $r\,(k-1)$ composants plus fiables dans n'importe quel ordre dans les autres positions.*

Démonstration. 1. a.Pour $j=0,1,2,...,r-1$ on a :
$R_{k,r}\,(rk+1,p)_{\pi} - R_{k,r}\,(rk+1,p)_{\pi_{jk+1,(j+1)k+1}} =$

$$\begin{aligned}
&= \left(p_{jk+1}-p_{(j+1)k+1}\right)\left(R_{k,r}\left(rk+1,p,1_{jk+1},0_{(j+1)k+1}\right)-R_{k,r}\left(rk+1,p,0_{jk+1},1_{(j+1)k+1}\right)\right)\\
&= \left(p_{jk+1}-p_{(j+1)k+1}\right)\left(\prod_{i=1}^{jk} q_i \prod_{h=jk+2}^{(j+1)k} q_h \prod_{l=(j+1)k+2}^{rk+1} q_l - \prod_{i=1}^{jk} q_i \prod_{h=jk+2}^{(j+1)k} q_h \prod_{l=(j+1)k+2}^{rk+1} q_l\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

alors $R_{k,r}\,(rk+1,p)_{\pi} = R_{k,r}\,(rk+1,p)_{\pi_{jk+1,(j+1)k+1}}$ c à d pour $j=0,1,....,r-1$ on ne peut pas améliorer la fiabilité du système par un changement des composants dans les positions $jk+1$ et $(j+1)\,k+1$. Alors les composants dans ces positions peuvent être arrangés dans n'importe quel ordre.
1.b.Pour tout $j=0,1,2,...,r-1$, et $i=2,3,...,rk$ avec $i \neq jk+1$

$R_{k,r}(rk+1,p)_{\pi} - R_{k,r}(rk+1,p)_{\pi_{i,jk+1}} =$

$$\begin{aligned} &= (p_i - p_{jk+1})\left(R_{k,r}(rk+1,p,1_i,0_{jk+1}) - R_{k,r}(rk+1,p,0_i,1_{jk+1})\right) \\ &= (p_i - p_{jk+1})\left[1 - R_{k,r}(rk+1,p,0_i,1_{jk+1})\right] \end{aligned}$$

Alors

$$R_{k,r}(rk+1,p)_{\pi} > R_G^{k,r}(rk+1,p)_{\pi_{i,jk+1}} \iff p_i > p_{jk+1}$$

c à d pour obtenir une configuration plus fiables il faut placer le composant le plus fiable dans la position i tel que $i \neq jk+1$

D'après 1.a et 1.b on obtient la première partie du théorème.

2. dans chaque état de panne du système on a les $r(k-1)$ composants dans les positions $jk+2$,$jk+3$,...,$(j+1)k$ pour $j=0,1,...,r-1$ sont tous en panne. Par conséquent, ces positions doivent étre occupées par les composants les plus fiables dans n'importe quel ordre pour augmenter la fiabilité du système □

Remarque 2.4.1. *d'après le théorème 2.4.3 on peut voir qu'il existe* $(r+1)!\,(r(k-1))!$ *configurations optimale invariantes possibles . Comme exemple on a si* $r=k=2$, $n=5$ *on a les configurations possibles suivantes (la notation* $[i]$ *veut dire le composant qui a la fiabilité* $p_{[i]}$) :

$$\begin{aligned} C_1 &= \{[1],[4],[2],[5],[3]\}, C_2 = \{[1],[5],[2],[4],[3]\} \\ C_3 &= \{[2],[4],[1],[5],[3]\}, C_4 = \{[2],[5],[1],[4],[3]\} \\ C_5 &= \{[1],[4],[3],[5],[2]\}, C_6 = \{[1],[5],[3],[4],[2]\} \\ C_7 &= \{[3],[4],[2],[5],[1]\}, C_8 = \{[3],[5],[2],[4],[1]\} \\ C_9 &= \{[2],[4],[3],[5],[1]\}, C_{10} = \{[2],[5],[3],[4],[1]\} \\ C_{11} &= \{[3],[4],[1],[5],[2]\}, C_{12} = \{[3],[5],[1],[4],[2]\} \end{aligned}$$

2.5 Importance de structure des composants

Dans la présente section on considère un système "r-consécutifs-k-sur-n" avec des composants indépendants et identiques où la fiabilité de chaque composant est $p=\frac{1}{2}$. Nous avons deux objectifs, le premier concerne le calcul des importances de structure des composants du système, cependant notre deuxième objectif est consacré à établir l'arrangement de ces importances. Pour simplifier les notations ici on utilise $I_{k,r}^{n}(i)$, $F_{k,r}(n)$ et $F_{k,r}(n,1_i)$ au lieu de $I_{k,r}^{n}\left(i,\frac{1}{2}\right)$, $F_{k,r}\left(n,\frac{1}{2}\right)$ et $F_{k,r}\left(n,1_i,\frac{1}{2}\right)$ respectivement.

2.5.1 Calcul de l'importance de structure

Lemme 2.5.1. *Pour $i = 1, 2, ..., n$ on a*

$$I_{k,r}^{n}(i) = 2\left[F_{k,r}(n) - F_{k,r}(n,1_i)\right]$$

Démonstration. L'importance en fiabilité du $i^{ème}$ composant est par définition :

$$I_{k,r}^{n}(i,p) = \frac{\partial R_{k,r}(n,p)}{\partial p_i} = R_{k,r}(n,1_i;p) - R_{k,r}(n,0_i;p)$$

Mais on a :

$$R_{k,r}(n,0_i;p) = \frac{R_{k,r}(n,p) - p_i R_{k,r}(n,1_i;p)}{1-p_i}$$

d'où :

$$I_{k,r}^{n}(i,p) = \frac{R_{k,r}(n,1_i;p) - R_{k,r}(n,p)}{1-p_i} = \frac{F_{k,r}(n,p) - F_{k,r}(n,1_i,p)}{1-p_i}$$

et comme l'importance de structure est le cas où $p_i = \frac{1}{2}$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$ on a :

$$I_{k,r}^{n}(i) = 2\left[F_{k,r}(n) - F_{k,r}(n,1_i)\right]$$

d'où le lemme. □

Lemme 2.5.2. *Pour $i = 1, 2, ..., n$ on a :*

$$I_{k,r}^{n}(i) = I_{k,r}^{n}(n-i+1)$$

Démonstration. Pour $i = 1, 2, ..., n$ on a

$$I_{k,r}^{n}(n-i+1) = 2\left[F_{k,r}\left(n,\frac{1}{2}\right) - F_{k,r}(n,1_{n-i+1})\right]$$

Mais il est clair que :

$$F_{k,r}(n,1_{n-i+1}) = F_{k,r}(n,1_i)$$

Et donc le lemme est démontré. □

Ce lemme signifie clairement que dans un système "r-consécutifs-k-sur-n" les importances de structure des composants sont symétriques par rapport au composant du centre du système. Donc grâce à cette propriété il nous suffit seulement de calculer la valeur de $I_k^n\left(i, \frac{1}{2}\right)$ pour $i \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]$

Théorème 2.5.1. *Pour* $1 \leq i \leq k$

$$I_{k,r}^n(i) = 2\left[F_{k,r}(n) - F_{k,r}(n-i)\right]$$

Démonstration. On a :

$$I_{k,r}^n(i) = 2\left[F_{k,r}(n) - F_{k,r}(n, 1_i)\right]$$

et il est clair que pour $1 \leq i \leq k$, on a

$$F_{k,r}(n, 1_i) = F_{k,r}(n-i)$$

par conséquent nous avons le résultat. □

Théorème 2.5.2. *Pour* $jk \prec i \leq (j+1)\,k \quad j = 1, ..., r-1$

$$I_{k,r}^n(i) = 2\left[F_{k,r}(n) - \sum_{l=1}^{j}\left[F_{k,l}(i-1) - F_{k,l+1}(i-1)\right]F_{k,r-l}(n-i) - R_k(i-1)\,F_{k,r}(n-i)\right]$$

Démonstration. Soit $N_{k,n}(1,n)$ la variable aléatoire qui représente le nombre de séries non chevauchées de k composants consécutifs parmi les composants $1, 2, ..., n$.
On a

$$I_{k,r}^n(i) = 2\left[F_{k,r}(n) - F_{k,r}(n, 1_i)\right]$$

où :

$$F_{k,r}(n, 1_i) = \Pr\left[N_{k,n}(1,n) \geq r \diagup X_i = 1\right]$$

alors on peut écrire :

$$F_{k,r}(n, 1_i) = \Pr\left[N_{k,i-1}(1, i-1) + N_{k,n-i}(i+1, n) \geq r\right]$$

donc :

$$F_{k,r}(n, 1_i) = \sum_{l=0}^{j} \Pr[N_{k,n-i}(i+1, n) \geq r-l] \Pr[N_{k,i-1}(1, i-1) = l]$$

alors

$$\begin{aligned} F_{k,r}(n, 1_i) &= \sum_{l=0}^{j} \Pr[N_{k,n-i}(i+1, n) \geq r-l] \Pr[N_{k,i-1}(1, i-1) \geq l] \\ &- \sum_{l=0}^{j} \Pr[N_{k,n-i}(i+1, n) \geq r-l] \Pr[N_{k,i-1}(1, i-1) \geq l+1] \\ &= \Pr[N_{k,n-i}(i+1, n) \geq r][1 - \Pr[N_{k,i-1}(1, i-1) \geq 1]] \\ &+ \sum_{l=1}^{j} \Pr[N_{k,n-i}(i+1, n) \geq r-l] \Pr[N_{k,i-1}(1, i-1) \geq l] \\ &- \sum_{l=1}^{j} \Pr[N_{k,n-i}(i+1, n) \geq r-l] \Pr[N_{k,i-1}(1, i-1) \geq l+1] \end{aligned}$$

et enfin :

$$F_{k,r}(n, 1_i) = R_k(i-1) F_{k,r}(n-i) + \sum_{l=1}^{j} [F_{k,l}(i-1) - F_{k,l+1}(i-1)] F_{k,r-l}(n-i)$$

d'où le résultat. □

Théorème 2.5.3. *Pour* $rk < i \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]$

$$\begin{aligned} I_{k,r}^{n}(i) &= 2[F_{k,r}(n) - R_k(i-1) F_{k,r}(n-i)] \\ &- 2\left[\sum_{l=1}^{r-1} [F_{k,l}(i-1) - F_{k,l+1}(i-1)] F_{k,r-l}(n-i) - F_{k,r}(i-1)\right] \end{aligned}$$

Démonstration. En utilisant la même notation dans la démonstration précédente on a dans ce cas :

$$F_{k,r}(n, 1_i) = \Pr[N_{k,i-1}(1, i-1) + N_{k,n-i}(i+1, n) \geq r]$$

donc

$$F_{k,r}\left(n,1_{i}\right)=\sum_{l\geq 0}\Pr\left[N_{k,n-i}\left(i+1,n\right)\geq r-l\right]\Pr\left[N_{k,i-1}\left(1,i-1\right)=l\right]$$

alors

$$F_{k,r}\left(n,1_{i}\right)=\sum_{l=0}^{r-1}\Pr\left[N_{k,n-i}\left(i+1,n\right)\geq r-l\right]\Pr\left[N_{k,i-1}\left(1,i-1\right)=l\right]+\Pr\left[N_{k,i-1}\left(1,i-1\right)\geq r\right]$$

et par conséquent :

$$F_{k,r}\left(n,1_{i}\right)=\sum_{l=0}^{r-1}\Pr\left[N_{k,n-i}\left(i+1,n\right)\geq r-l\right]\Pr\left[N_{k,i-1}\left(1,i-1\right)\geq l\right]$$

$$-\sum_{l=0}^{r-1}\Pr\left[N_{k,n-i}\left(i+1,n\right)\geq r-l\right]\Pr\left[N_{k,i-1}\left(1,i-1\right)\geq l+1\right]+\Pr\left[N_{k,i-1}\left(1,i-1\right)\geq r\right]$$

donc :

$$F_{k,r}\left(n,1_{i}\right)=\Pr\left[N_{k,n-i}\left(i+1,n\right)\geq r\right]\left[1-\Pr\left[N_{k,i-1}\left(1,i-1\right)\geq 1\right]\right]$$

$$+\sum_{l=1}^{r-1}\Pr\left[N_{k,n-i}\left(i+1,n\right)\geq r-l\right]\Pr\left[N_{k,i-1}\left(1,i-1\right)\geq l\right]$$

$$-\sum_{l=1}^{r-1}\Pr\left[N_{k,n-i}\left(i+1,n\right)\geq r-l\right]\Pr\left[N_{k,i-1}\left(1,i-1\right)\geq l+1\right]+\Pr\left[N_{k,i-1}\left(1,i-1\right)\geq r\right]$$

enfin

$$F_{k,r}\left(n,1_{i}\right)=\sum_{l=1}^{r-1}\left[F_{k,l}\left(i-1\right)-F_{k,l+1}\left(i-1\right)\right]F_{k,r-l}\left(n-i\right)+R_{k}\left(i-1\right)F_{k,r}\left(n-i\right)+F_{k,r}\left(i-1\right)$$

et d'où le résultat. □

Le corollaire suivant montre que pour un système "k-consécutifs-sur-n" les formules de l'importance de structure données dans le chapitre1 sont des cas particuliers des résultats de cette section. Alors on a :

Corollaire 2.5.1. *Pour $r=1$ l'importance de structure du $i^{\grave{e}me}$ composant dans* *un système "k-consécutifs-sur-n" est donnée par :*

$$I_k^n(i) = 2\left[R_k(n-i) - R_k(n)\right] \;\; \textit{pour } i \leq k$$
$$I_k^n(i) = 2\left[R_k(i-1)\,R_k(n-i) - R_k(n)\right] \;\; \textit{pour } i > k$$

Démonstration. Il suffit de prendre $r = 1$ dans le théorème2.5.1 pour obtenir le cas $i \leq k$ et le théorème2.5.3 pour obtenir le cas $i > k$. □

2.5.2 Arrangement des importances de structure des composants du système "r-consécutifs-k-sur-n"

Cette sous-section résume l'arrangement des importances de structure pour quelques valeurs de k, r et n.

Proposition 2.5.1. *Pour les deux cas $k = 1$ et $n = rk$ on a : $I_{k,r}^n(i) = I_{k,r}^n(j)$ pour $1 \leq i < j \leq n$*

Démonstration. -Pour $n = rk$ on obtient un système en série de rk composants, donc on a :

$$I_{k,r}^n(i) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n$$

-Pour $k = 1$ on obtient un système "r-parmi-n", donc on a pour tout $1 \leq i \leq n$

$$I_{1,r}^n(i) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \binom{n-1}{r-1}$$

la proposition est donc démontrée. □

Proposition 2.5.2. *Pour tous r, k et $n \geq rk + 1$*

$$\begin{aligned} I_{k,r}^n(1) &< I_{k,r}^n(2) < \ldots < I_{k,r}^n(k) \\ I_{k,r}^n(n) &< I_{k,r}^n(n-1) < \ldots < I_{k,r}^n(n-k) \end{aligned}$$

Démonstration. On a pour tout $i = 1, 2, \ldots, k-1$

$$I_{k,r}^n(i+1) - I_{k,r}^n(i) = F_{k,r}(n-i) - F_{k,r}(n-i-1) > 0$$

La seconde inégalité resulte par symmétrie. □

Proposition 2.5.3. *Pour* $n = rk + 1$:
$I_{k,r}^{rk+1}(1) = I_{k,r}^{rk+1}(k+1) = ... = I_{k,r}^{rk+1}((r-1)k+1) < I_{k,r}^{rk+1}(jk+2) = I_{k,r}^{rk+1}(jk+3) = ... = I_{k,r}^{rk+1}((j+1)k) = I_{k,r}^{rk+1}(2)$ *pour* $j = 0, 1, ..., r-1$.

Démonstration. Si $n = rk + 1$ alors :

$$F_{k,r}(n, 1_{jk+2}) = F_{k,r}(n, 1_{jk+3}) = ... = F_{k,r}\left(n, 1_{(j+1)k}\right) = 0, \text{ pour } j = 0, 1, ..., r-1$$

et

$$F_{k,r}(n, 1_1) = F_{k,r}(n, 1_{k+1}) = ... = F_{k,r}\left(n, 1_{(r-1)k+1}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{rk} > 0$$

Donc : $I_{k,r}^{rk+1}(1) = I_{k,r}^{rk+1}(k+1) = ... = I_{k,r}^{rk+1}((r-1)k+1) = 2\left[F_{k,r}(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^{rk}\right] < 2F_{k,r}(n) = I_{k,r}^{rk+1}(jk+2) = I_{k,r}^{rk+1}(jk+3) = ... = I_{k,r}^{rk+1}((j+1)k)$. □

Proposition 2.5.4. *Pour* $n < (r+1)k$: $I_{k,r}^{n}(i) < I_{k,r}^{n}(k) = I_{k,r}^{n}(2k) = ... = I_{k,r}^{n}(rk)$ *pour* $i \neq jk$, $j = 1, 2, ..., r$.

Démonstration. Si $n < (r+1)k$, alors

$$\begin{aligned} F_{k,r}(n, 1_{jk}) &= 0 \text{ pour } j = 1, 2, ..., r \\ F_{k,r}(n, 1_i) &> 0 \text{ pour } i \neq jk \end{aligned}$$

la proposition est donc démontrée. □

Proposition 2.5.5. *For* $n = (r+1)k$: $I_{k,r}^{n}(k) > I_{k,r}^{n}(2k) > .... > I_{k,r}^{n}(rk) > I_{k,r}^{n}((r+1)k)$

Démonstration. Dans ce cas on a pour $j = 1, 2, ..., r+1$

$$F_{k,r}((r+1)k, 1_{jk}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{(r-j+1)k} \Pr[N(1, jk-1) = j-1]$$

Donc pour : $j = 1, 2, ..., r+1$: $I_{k,r}^{n}(jk) - I_{k,r}^{n}((j+1)k) =$
$= \left(\frac{1}{2}\right)^{(r-j+1)k}\left[2^k \Pr[N(1, (j+1)k-1) = j] - \Pr[N(1, jk-1) = j-1]\right] > 0.$
d'ou on a la proposition. □

Remarque 2.5.1. *1. D'après les propositions ci-dessus on peut voir que pour* $k = 1$,*ou* $n = rk$, *ou* $n = rk+1$, *les importances de structures sont complètement arrangées . Mais, pour les autres cas les importances sont partiellement arrangées.*

2. D'après l'étude ci-dessus on déduit que les deux composants dans les positions k et $n-k+1$ possèdent les plus grandes importances de structure et les deux composants dans les positions 1 et n possèdent les plus petites importances de structure.

2.5.3 Importances de structure d'un système "2-consecutifs-k -sur-n" via la suite de Fibonacci

Dans cette section on considère un système "2-consecutifs-k-sur-n" $(n \geq 2k+1)$ (c à d $r = 2$) notre but ici est de donner les formules de l'importance de structure en fonction des termes de la suite de Fibonacci d'ordre k. On rappelle que la suite de Fibonacci d'ordre k est la suite dont le terme général $f_{k,n}$ donné par :

$$f_{k,n} = \begin{cases} 0 & ,0 \leq n \leq k-1 \\ 1 & ,n = k \\ \sum\limits_{j=n-k}^{n-1} f_{k,j} & ,n \geq k+1 \\ 2^{n-k-1} & ,k+1 \leq n \leq 2k \\ 2^{n-k-1} - (n-2k+1)\,2^{n-2k-2} & ,2k+1 \leq n \leq 3k+1 \\ 2f_{k,n-1} - f_{k,n-k-1} & ,n \geq k+2 \end{cases} \tag{2.4}$$

Nous avons d'abord le lemme suivant :

Lemme 2.5.3. *pour* $1 \leq i \leq n-k$

$$f_{k,n} = 2^i f_{k,n-i} - \sum_{j=0}^{i-1} 2^j f_{k,n-j-k-1}$$

Démonstration. La démonstration de ce lemme est par induction sur i .
Pour $i = 1$ nous avons

$$f_{k,n} = 2f_{k,n-1} - f_{k,n-k-1}$$

donc le lemme est vrai pour $i = 1$
Supposons que le lemme est vrai à l'ordre $i-1$ c à d :

$$f_{k,n} = 2^{i-1} f_{k,n-i+1} - \sum_{j=1}^{i-2} 2^j f_{k,n-j-k-1}$$

mais d'aprés 2.4 :

$$f_{k,n-i+1} = 2f_{k,n-i} - f_{k,n-k-i}$$

alors :

$$\begin{aligned} f_{k,n} &= 2^{i-1}\left(2f_{k,n-i} - f_{k,n-k-i}\right) - \sum_{j=1}^{i-2} 2^j f_{k,n-j-k-1} \\ &= 2^i f_{k,n-i} - \sum_{j=0}^{i-1} 2^j f_{k,n-j-k-1} \end{aligned}$$

d'où le lemme $\square$

Maintenant, On définit la suite suivante :

$$g_{k,n} = \begin{cases} 0 & ,n \leq k \\ \sum\limits_{i=1}^{n-k} \left(2^{n-i} - f_{k,n+k-i+1}\right) f_{k,k+i-1} & ,n \geq k+1 \end{cases}$$

Alors la probabilité de panne du système "2-consecutifs-k-sur-n" dont les composants sont i.i.d components avec une fiabilité $p = \frac{1}{2}$, st donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.5.4. *Pour tous n, et k :*

$$F_{k,2}(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n g_{k,n-k+1}$$

Alors d'après la formule de $F_{k,2}(n)$ ci-dessus, on déduit que $g_{k,n-k+1}$ est le nombre de fois que le système est en panne.

Démonstration. Pour $0 \leq n \leq 2k-1$,

$$F_{k,2}(n) = 0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n g_{k,n-k+1}$$

Pour $n = 2k$

$$F_{k,2}(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} g_{k,k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n g_{k,n-k+1}$$

Pour $n \geq 2k+1$, On prend $r = 2$, $p = \frac{1}{2}$,$i = 1, 2, ..., n$ dans le corollaire 2.3.2 on obtient

$$F_{k,2}(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^k F_k(n-k) + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \sum_{i=2}^{n-2k+1} R_k(i-2) F_k(n-k-i+1)$$

et d'après le théorème 1.4.1 :

$$\begin{cases} F_k(n-k) = & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} f_{k,n+1} \\ R_k(i-2) = & \left(\frac{1}{2}\right)^{i-2} f_{k,i+k-1} \\ F_k(n-k-i+1) = & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-i+1} f_{k,n-i+2} \end{cases}$$

alors :

$$F_{k,2}(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} f_{k,n+1}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \sum_{i=2}^{n-2k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-2} f_{k,i+k-1} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-i+1} f_{k,n-i+2}\right)$$

comme $f_{k,k} = 1$ on obtient :

$$\begin{aligned} F_{k,2}(n) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \sum_{i=1}^{n-2k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-2} f_{k,i+k-1} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-i+1} f_{k,n-i+2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{i=1}^{n-2k+1} \left(2^{n-k-i+1} - f_{k,n-i+2}\right) f_{k,i+k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n g_{k,n-k+1} \end{aligned}$$

et on a notre résultat. □

Maintenant on peut donner les formules de l'imporatnce de structure en fonction de $f_{k,n}$ et $g_{k,n}$. Alors, on a le théorème suivant :

Théorème 2.5.5. *Pour $i \geq 1$:*

$$I_{k,2}^n(i) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left[g_{k,n-k+1} - 2f_{k,i+k} g_{k,n-i-k+1} - 2f_{k,n-i+k+1}\left[2^{i-1} - f_{k,i+k} + g_{k,i-k}\right]\right]$$

Démonstration. -D'après le théorème 2.5.1 on a : Pour : $1 \leq i \leq k$

$$I_{k,2}^n(i) = 2\left[F_{k,2}(n) - F_{k,2}(n-i)\right]$$

et on a

$$\begin{cases} F_{k,2}(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n g_{n,n-k+1} \\ et \\ F_{k,2}(n-i) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i} g_{n,n-i-k+1} \end{cases}$$

Alors

$$F_{k,2}(n) - F_{k,2}(n-i) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[g_{k,n-k+1} - 2^i g_{k,n-i-k+1}\right]$$

-D'après le théorème 2.5.2 :Pour $k+1 \leq i \leq 2k$

$$\begin{aligned} I_{k,2}^n(i) &= 2\left[F_{k,2}(n) - R_k(i-1)F_{k,2}(n-i) - F_k(i-1)F_k(n-i)\right] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[g_{k,n-k+1} - 2f_{k,i+k}g_{k,n-i-k+1} - 2f_{k,n-i+k+1}\left[2^{i-1} - f_{k,i+k}\right]\right] \end{aligned}$$

- D'après le théorème 2.5.3 :Pour $i \geq 2k+1$

$$\begin{aligned} I_{k,2}^n(i) &= 2\left[F_{k,2}(n) - R_k(i-1)F_{k,2}(n-i) - F_k(i-1)F_k(n-i) - R_k(n-i)F_{k,2}(i-1)\right] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[g_{k,n-k+1} - 2f_{k,i+k}g_{k,n-i-k+1} - 2f_{k,n-i+k+1}\left[2^{i-1} - f_{k,i+k} + g_{k,i-k}\right]\right] \end{aligned}$$

Comme : $g_{k,i-k} = 0$, pour $i \leq 2k$ et $f_{k,i+k} = 2^{i-1}$ pour $1 \leq i \leq k$, on obtient notre résultat.. □

Corollaire 2.5.2. *Pour* $1 \leq i \leq k$

$$2^{n-1} I_{k,2}^n(i) = g_{k,n-k+1} - 2^i g_{k,n-i-k+1}$$

pour :$k+1 \leq i \leq 2k$

$$2^{n-1} I_{k,2}^n(i) = g_{k,n-k+1} - 2f_{k,i+k}g_{k,n-i-k+1} - 2f_{k,n-i+k+1}\left[2^{i-1} - f_{k,i+k}\right]$$

Démonstration. le corollaire suit directement du théorème 2.5.5 car.$g_{k,i-k} = 0$, pour $i \leq 2k$ et $f_{k,i+k} = 2^{i-1}$ pour $1 \leq i \leq k$. □

Remarque 2.5.2. *En utilisant le théorème 2.5.5 on peut aussi établir des relations entre l'importance des composants dans les deux systèmes "2-consecutifs-k-sur-n" "k-consecutifs-sur-n". Comme par exemple :*

$$2^n I_{k,2}^n(1) = 2^{n-2k-2} \sum_{j=1}^{n-2k-1} I_k^{n-2k-1}(j) + (n-2k+4)\, f_{k,n-k}$$

où $I_k^{n-2k-1}(j)$ est l'importance de structure du $j^{ième}$ composant dans le système "k-consecutifs-sur-$(n-2k-1)$".

2.6 Loi limite du temps de panne du système

Le but de cette section est d'établir des résultats concernant le comportement asymptotique du temps de panne d'un système "r-consécutifs-k-sur-n" quand n tend vers l'infini. Plus exactement en conservant toujours l'hypothèse d'indépendance des composants nous nous proposons de démontrer deux théorèmes limites pour le temps de panne du système en examinant les deux cas suivants :

1. Le cas où les composants du système sont identiques.
2. Le cas où les composants sont non nécéssairement identiques.

Donc nous allons démontrer ici que sous des hypothèses suffisament générales pour les applications, la loi limite du temps de panne du système quand le nombre de composants tend vers l'infini est une loi de Poisson.

2.6.1 Cas des composants identiques

On considère un système "r-consécutifs-k-sur-n". Les composants sont supposés indépendants et de même loi. Soit T_i ,$(i = 1, 2, ..., n)$ le temps de panne du $i^{ème}$ composant et Z_n celui du système. On désigne par $F(t)$ la distribution de panne de chacun des composants c'est à dire $F(t) = \Pr[T_i < t]$ pour $i = 1, 2, ..., n$. Sous ces considérations on a le théorème :

Théorème 2.6.1. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} nF^k(a(n,k)t) = \delta(t)$, $0 \leq \delta(t) \leq 1$, *avec* $\lim\limits_{n\to+\infty} a(n,k) = 0$, *on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \Pr\left(a^{-1}(n,k) Z_n \leq t\right) = 1 - \sum_{m=0}^{r-1} \exp\left[-(\delta(t))^{\alpha}\right] \frac{(\delta(t))^{\alpha m}}{m!}$$

Démonstration. Comme les composants du système sont indépendants et de même distribution de panne $F(t)$ et comme on a aussi

$$\lim_{n\to+\infty} nF^k(a(n,k)t) = \delta(t)$$

alors d'aprés le théorème 3.1 page 271 (partie 1) de J.C. Fu [34] (1993) on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \Pr\left(Z_n \leq ta\left(n,k\right)\right) &= \lim_{n\to+\infty} \Pr\left(a^{-1}\left(n,k\right) Z_n \leq t\right) \\ &= 1 - \sum_{m=0}^{r-1} \exp\left[-\left(\delta\left(t\right)\right)^{\alpha}\right] \frac{\left(\delta\left(t\right)\right)^{\alpha m}}{m!}\end{aligned}$$

d'où le théorème. □

Maintenant nous cherchons la loi limite de la variable aléatoire $a^{-1}(n,k) Z_n$ où $a(n\ ,k) > 0$ est une fonction convenablement choisie. Alors on a :

Théorème 2.6.2. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} nF^k\left(a\left(n,k\right)t\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \ell_n F^k\left(a\left(\ell_n,k\right)t\right) = \delta\left(t\right)$, $0 \leq \delta\left(t\right) \leq 1$,*avec* $\lim\limits_{n\to+\infty} a\left(n,k\right) = 0$, *et* $\ell_n = \left[c\log n\right]$, $c\ \rangle 0$. *Alors on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \Pr\left(a^{-1}\left(n,k\right) Z_n \leq t\right) = \begin{cases} 1 - \sum\limits_{m=0}^{r-1} \exp\left[-t^{\alpha}\right] \frac{t^{\alpha m}}{m!} & ,t\rangle 0, \alpha\rangle 0 \\ 0 & ,t \leq 0 \end{cases}$$

Démonstration. Soit un système constitué de n blocks disposés linéairement, chaque block est un sous système en série de ℓ_n composants, ($\ell_n \geq r$). Tel que le système fonctionne si et seulement si au moins r blocks fonctionnent. La fonction de fiabilité de chaque composant est $\overline{F^k\left(t\right)} = 1 - F^k\left(t\right)$. Alors, dans ce cas on a un système "séries-r-sur-n" régulier homogène (voir [35]) sa fonction de fiabilité notée $R_n\left(t\right)$est donnée par la formule :

$$R_n\left(t\right) = 1 - \sum_{m=0}^{r-1} \binom{n}{m} \left(\overline{F^k\left(t\right)}^{\ell_n}\right)^m \left(1 - \overline{F^k\left(t\right)}^{\ell_n}\right)^{n-m}$$

Donc il est clair que si :

$$L\left(t\right) = \lim_{n\to\infty} n\overline{F^k\left(\alpha_n t + \beta_n\right)}^{\ell_n} \qquad \text{,avec } \alpha_n > 0, \beta_n \geq 0$$

alors :

$$\lim_{n\to\infty} R_n\left(\alpha_n t + \beta_n\right) = 1 - \sum_{m=0}^{r-1} \frac{\left(L\left(t\right)\right)^m}{m!} \exp\left(-L\left(t\right)\right)$$

Mais

$$\begin{aligned}
L(t) &= \lim_{n\to+\infty} n\overline{F^k(\alpha_n t+\beta_n)}^{\ell_n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} n\exp\left[\ell_n \log\left(1-F^k(\alpha_n t+\beta_n)\right)\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} n\exp\left[-\ell_n\left(F^k(\alpha_n t+\beta_n)+o\left(F^k(\alpha_n t+\beta_n)\right)\right)\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} n\exp\left[-\ell_n\left(F^k(\alpha_n t)+\beta_n F^k(\zeta)+o\left(F^k(\alpha_n t)+\beta_n F^k(\zeta)\right)\right)\right]
\end{aligned}$$

où $\alpha_n t<\zeta<\alpha_n t+\beta_n$
donc en choisissant $\beta_n=1$ et $\alpha_n=a(n,k)$ tel que $\lim_{n\to\infty} nF^k(a(n,k)t)=\lim_{n\to\infty}\ell_n F^k(a(\ell_n,k)t)=\delta(t)$ avec $\ell_n=[c\log n]$, $c=F^{-k}(\zeta)$, $\zeta>0$ on obtient :

$$L(t)=\exp-\{\delta(t)\}, \qquad t\geq 0$$

Mais d'aprés [35] $L(t)$ est donnée dans ce cas par :

$$L(t)=\begin{cases}\exp(-t^{\alpha}) & ,t\geq 0,\alpha>0\\ \infty & ,t<0.\end{cases}$$

Alors en combinant ces deux dernières égalités on obtient :

$$\delta(t)=t^{\alpha} \text{ pour } t\geq 0$$

En utilisant le théorème2.6.1 on obtient le résultat. □

Remarque 2.6.1. *1) Si on prend $r=1$ dans le théorème2.6.2 on obtient la loi limite du temps de panne d'un système "k-consécutifs-sur-n" ce résultat est donné dans le premier chapitre aussi.*
2) Un cas particulier de ce résultat est le cas où les composants du système possèdent la même distribution de panne donnée par la formule (une loi de Weibull)

$$F(t)=(\lambda t)^{\alpha}+o(t^{\alpha}) \quad ,\lambda>0,\alpha>0$$

et dans ce cas $a(n,k)=\frac{1}{\lambda n^{\frac{1}{\alpha k}}}$. Ce cas particulier a été démontré aussi dans [26].et donc nous l'avons généralisé ici.

Exemple 2.6.1. *Outre, l'exemple cité dans la $2^{\text{ème}}$ partie de la remarque précédente on a les deux exemples suivants où le théorème2.6.2 est applicable.*

1. Soit $F(t)=\int\limits_0^t \frac{\mu^\beta}{\Gamma(\beta+1)}s^{\beta-1}\exp(-\mu s)\,ds=\frac{\mu^\beta}{\Gamma(\beta+1)}t^\beta+t^\beta o(1)$ *,*$F(t)$ *est la fonction de distribution de la loi gamma. Si :* $a(n,k)=\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\mu^{k\beta}n}\right)^{\frac{1}{k\beta}}$ *. On a :*

$$\lim_{n\to\infty} nF^k(a(n,k)t)=\lim_{n\to\infty}\ell_n F^k(a(\ell_n,k)t)=t^{k\beta}+t^{k\beta}o(1).$$

Alors d'après le théorème2.6.2 on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\Pr\left(a^{-1}(n,k)Z_n\le t\right)=\begin{cases}1-\sum\limits_{m=0}^{r-1}\exp\left[-t^\alpha\right]\frac{t^{\alpha m}}{m!} & ,t\rangle 0,\alpha=k\beta\\ 0 & ,t\le 0\end{cases}$$

2. Soit $F(t)=(\lambda t)^\beta+t^\beta o(1)+t^\beta\Psi(t)$ *,avec* $\lim\limits_{t\to 0}\Psi(t)=0$*.Alors si on pose :* $a(n,k)=\frac{1}{\lambda n^{\frac{1}{k\beta}}}$ *on obtient :*

$$\lim_{n\to\infty} nF^k(a(n,k)t)=\lim_{n\to\infty}\ell_n F^k(a(\ell_n,k)t)=t^{k\beta}+t^{k\beta}o(1)$$

et d'après le théorème2.6.2 on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\Pr\left(a^{-1}(n,k)Z_n\le t\right)=\begin{cases}1-\sum\limits_{m=0}^{r-1}\exp\left[-t^\alpha\right]\frac{t^{\alpha m}}{m!} & ,t\rangle 0,\alpha=k\beta\\ 0 & ,t\le 0\end{cases}$$

2.6.2 Cas des composants non identiques

Ici, on considère un système " r-consécutifs-k-sur-n", les composants sont supposés indépendants mais non nécéssairement identiques. Autremet dit, les temps de panne $T_1,T_2,...,T_n$ des composants du système sont des variables aléatoires (positives) indépendantes et non identiquement distribuées. Soit $F_i(t)$ la distribution de panne du $i^{ème}$ composant c à d $F_i(t)=\Pr[T_i<t]$ pour $i=1,2,...,n$. On définit les quantités suivantes :

$$P_j(t)=\prod_{i=j}^{j+k-1}F_i(t),\ j=1,2,...,n-k+1$$

$$P(t)=\max_{1\le i\le n}F_i(t)$$

et on précise les conditions suivantes :

a- Il existe des nombres positifs λ_i, α_i et des fonctions Φ_i telles que :

$F_i(t) = (\lambda_i t)^{\alpha_i} + t^{\alpha_i}\Phi_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$ pour $0 \leq t \leq \delta$ et $\delta \rangle 0$.

b- $\lim\limits_{t\to 0} \Phi_i(t) = 0$ uniformément en i.

c- $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i = \lambda$.

Sous ces considérations nous démontrons le théorème suivant

Théorème 2.6.3. *Sous les conditions a, b et c on a :*

1- Si : $\alpha = \inf\limits_i \alpha_i = \alpha_i$ *pour* $i = 1, 2, ...$ *alors :*

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(n^{\frac{1}{k\alpha}} Z_n \leq t\right) = 1 - \sum_{m=0}^{r-1} \exp\left[-(\lambda t)^{k\alpha}\right] \frac{(\lambda t)^{k\alpha m}}{m!}$$

2- Si : $\alpha \rangle 0$ *et pour tout* $i, i = 1, 2, ...$ *il existe un* j *,*$i \leq j \leq i + k - 1$ *tel que* $\alpha_j \rangle \alpha$ *alors :*

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(n^{\frac{1}{k\alpha}} Z_n \leq t\right) = 0$$

Démonstration. En posant $t_n = n^{-\frac{1}{\alpha k}} t$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(n^{\frac{1}{k\alpha}} Z_n \leq t\right) = \lim_{n\to\infty} \Pr(Z_n \leq t_n)$$

1- D'après le théorème 3.1 (partie 2) p.271 de J.C.Fu (1993) [34] il suffit de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} P(t_n) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-k+1} P_j(t_n) = (\lambda t)^{k\alpha}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-k+1} (P_j(t_n))^2 = 0$$

Mais on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(t_n) &= \lim_{n\to\infty} \max_{1\leq i\leq n} F_i\left(n^{-\frac{1}{\alpha k}}t\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}}\left((\lambda_i t)^{\alpha} + t^{\alpha}\Phi_i\left(\left(n^{-\frac{1}{\alpha k}}t\right)\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}} \max_{1\leq i\leq n} \left((\lambda_i t)^{\alpha} + t^{\alpha}\Phi_i\left(\left(n^{-\frac{1}{\alpha k}}t\right)\right)\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-k+1} P_j(t_n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-k+1} \prod_{i=j}^{j+k-1} F_i(t_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-k+1} \left(\left(\lambda_j n^{-\frac{1}{k\alpha}}t\right)^{\alpha} + \left(n^{-\frac{1}{k\alpha}}t\right)^{\alpha}\Phi_j\left(n^{-\frac{1}{k\alpha}}t\right)\right)... \\
&\left(\left(\lambda_{j+k-1} n^{-\frac{1}{k\alpha}}t\right)^{\alpha} + \left(n^{-\frac{1}{k\alpha}}t\right)^{\alpha}\Phi_{j+k-1}\left(n^{-\frac{1}{k\alpha}}t\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-k+1} \left((\lambda_j t)^{\alpha} + t^{\alpha}\Phi_j\left(n^{-\frac{1}{k\alpha}}t\right)\right)...\left((\lambda_{j+k-1} t)^{\alpha} + t^{\alpha}\Phi_{j+k-1}\left(n^{-\frac{1}{k\alpha}}t\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n-k+1}{n}\frac{1}{n-k+1} \sum_{j=1}^{n-k+1} \left((\lambda_j t)^{\alpha} + t^{\alpha}\Phi_j\left(n^{-\frac{1}{k\alpha}}t\right)\right)... \\
&\left((\lambda_{j+k-1} t)^{\alpha} + t^{\alpha}\Phi_{j+k-1}\left(n^{-\frac{1}{k\alpha}}t\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-k+1} \sum_{j=1}^{n-k+1} \left((\lambda_j t)^{\alpha} + t^{\alpha}\Phi_j\left(n^{-\frac{1}{k\alpha}}t\right)\right)... \\
&\left((\lambda_{j+k-1} t)^{\alpha} + t^{\alpha}\Phi_{j+k-1}\left(n^{-\frac{1}{k\alpha}}t\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left((\lambda_n t)^{\alpha} + t^{\alpha}\Phi_n\left(n^{-\frac{1}{k\alpha}}t\right)\right)...\left((\lambda_{n+k-1} t)^{\alpha} + t^{\alpha}\Phi_{n+k-1}\left(n^{-\frac{1}{k\alpha}}t\right)\right) \\
&= (\lambda t)^{\alpha k}
\end{aligned}$$

De la même manière on a :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n-k+1}\left(P_j\left(t_n\right)\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n-k+1}{n^2}\frac{1}{n-k+1}\sum_{j=1}^{n-k+1}\left(\left(\lambda_j t\right)^{\alpha}+t^{\alpha}\Phi_j\left(n^{-\frac{1}{k\alpha}}t\right)\right)^2 ...$$
$$...\left(\left(\lambda_{j+k-1}t\right)^{\alpha}+t^{\alpha}\Phi_{j+k-1}\left(n^{-\frac{1}{k\alpha}}t\right)\right)^2$$
$$=0$$

et par conséquent :

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left(n^{\frac{1}{k\alpha}}Z_n\leq t\right)=1-\sum_{m=0}^{r-1}\exp\left[-\left(\lambda t\right)^{k\alpha}\right]\frac{\left(\lambda t\right)^{k\alpha m}}{m!}$$

2) Dans ce cas on remarque que lorsque $n\to\infty$ on a $\sum_{j=1}^{n-k+1}P_j\left(t_n\right)\to 0$ et donc le résultat suit immédiatement. □

Le théorème précédent généralise celui donné dans le cas d'un système "k-consécutifs-sur-n" cité dans le premier chapitre comme le prouve le corollaire suivant.

Corollaire 2.6.1. *Si $r=1$ alors pour un système "k-consécutifs-sur-n" on a : Sous les conditions a), b) et c) on a :*
1- Si : $\alpha=\inf_i \alpha_i=\alpha_i$ pour $i=1,2,...$ alors :

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left(n^{\frac{1}{k\alpha}}Z_n\leq t\right)=1-\exp\left[-\left(\lambda t\right)^{k\alpha}\right]$$

2- Si : $\alpha\rangle 0$ et pour tout $i, i=1,2,...$ il existe un j ,$i\leq j\leq i+k-1$ tel que $\alpha_j\rangle\alpha$ alors :

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left(n^{\frac{1}{k\alpha}}Z_n\leq t\right)=0$$

On peut appliquer facilement le résultat sur les deux exemples suivants :

Exemple 2.6.2. *On suppose que le $i^{éme}$ composant a pour distribution de panne la distribution de Weibull donnée par :*

$$F_i\left(t\right)=1-\exp\left[-\left(\lambda_i t\right)^{\alpha}\right]=\left(\lambda_i t\right)^{\alpha}+t^{\alpha}\circ\left(1\right)$$

où $\lim_{i\to\infty}\lambda_i=\lambda$

Exemple 2.6.3. *Dans cet exemple on donnera une distribution mixte Weibull et gamma. Soient* (λ_i) *et* (μ_i) *deux suites de nombres positifs qui convergent vers* λ *et* $\lambda \left(\Gamma \left(\alpha+1\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. *Et soient les distributions de panne des composants données par :*

$$F_{2i-1}\left(t\right) = 1 - \exp\left[-\left(\lambda_i t\right)^{\alpha}\right] = \left(\lambda_i t\right)^{\alpha} + t^{\alpha} \circ \left(1\right)$$

$$F_{2i}\left(t\right) = \int_0^t \frac{\mu_i^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha\right)} s^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\mu_i s\right)\right] ds = \frac{\mu_i^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha+1\right)} t^{\alpha} + t^{\alpha} \circ \left(1\right)$$

Chapitre 3

Système "r-consécutifs-k-sur-n de période k"

Ce dernier chapitre examine un cas particulier du système "r-consécutifs-k-sur-n" qui est le système "r-consécutifs-k-sur-n de période k". Ce système a été présenté pour la première fois en 1999 par J. Boland et al [46] dans un article où ils ont donné une formule de sa probabilité de panne dans le cas des composants indépendants, et en 2003 sous la même hypothèse dans notre article [62] nous avons établi une autre formule de la probabilité de panne du système en fonction de celle d'un système "k-consécutifs-sur-n". Alors, dans le présent chapitre nous allons présenter notre résultat concernant la probabilité de panne du système.

Définition 3.0.1. *On appelle un système "r-consécutifs-k-sur-n de période k" tout système "r-consécutifs-k-sur-n" possède la propriéte suivante :*

$$q_j = q_i, \text{ pour tout } j = mk + i, (1 \leq i \leq k), m \geq 0$$

La définition précédente veut dire que dans un système "r-consécutifs-k-sur-n de période k" les probabilités de panne des composants sont périodiques (la période est k) et dans ce cas on distingue k probabilité de panne (où k types de composants) seulement (q_i ,$i = 1, 2, ..., k$).

3.1 Formules de la Probabilité de panne du système

On considère ici un système "r-consécutifs-k-sur-n de période k" dont les composants sont supposés indépendants. Et nous utilisons les notations suivantes :

- $Q = \prod_{j=1}^{k} q_j$
- $F_{k,r}(p_i, ..., p_j)$:la probabilité de panne d'un système "r-consécutifs-k-sur-(j-i+1)" constitué des composant $i, i+1, ..., j$, $(1 \leq i < j \leq n)$
- $R_{k,r}(p_i, p_{i+1}, ..., p_j) = 1 - F_{k,r}(p_i, ..., p_j)$
- $R_k(p_i, p_{i+1}, ..., p_j)$: fiabilité du système "k-consécutifs-sur-$(j-i+1)$" constitué des composant $i, i+1, ..., j$, $(1 \leq i < j \leq n)$
- $F_k(p_i, ..., p_j) = 1 - R_k(p_i, p_{i+1}, ..., p_j)$

Sous ces considérations on a le théorème suivant :

Théorème 3.1.1. *Pour $r \geq 2$ et $rk \leq n$*

$$F_{k,r}(p_1, .., p_n) = Q^{r-1} F_k\left(p_{(r-1)k+1}, .., p_n\right) + Q^{r-1} \sum_{j=1}^{r-1} \binom{r-1}{j} \sum_{i_1, i_2, ..., i_j} F_k\left(p_{(r-1)k+\alpha_j-j+1}, .., p_n\right) \times \prod_{l=1}^{j} R_k\left(p_{\alpha_{l-1}-l+2}, ..., p_{\alpha_l-l-1}\right) p_{\alpha_l-l}$$

où $\alpha_0 = 0$, $\alpha_j = \sum_{l=1}^{j} i_l$ et i_s prend ses valeurs de 2 à $n - mk - \alpha_{s-1} + s$ pour $s = 1, 2, ..., r-1$.

Démonstration. La démonstration est par induction sur r $(r \geq 2)$.

Soient les évènement :

$B_{k,2}(1, ..., n)$: "le système 2-consécutifs-k-sur-n constitué des composants $1, 2, ..., n$ tombe en panne"

$A_i = \{X_i = X_{i+1} = ... = X_{i+k-1} = 0\}$, pour $i = 1, 2, ..., n-k+1$.

Pour $r = 2$ on a :

$$\begin{aligned}F_{k,2}(p_1, p_2, ..., p_n) &= \Pr B_{k,2}(1, 2, ..., n) = \Pr[A_1] \Pr[B_{k,2}(1, 2, ..., n) \diagup A_1] \\ &+ \sum_{i=2}^{n-2k+1} \Pr\left(\bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{A_j} \cap A_i\right) \Pr\left[B_{k,2}(1, 2, ..., n) \diagup \bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{A_j} \cap A_i\right] \\ &+ \Pr\left[\bigcap_{j=1}^{n-2k+1} \overline{A_j}\right] \Pr\left[B_{k,2}(1, 2, ..., n) \diagup \bigcap_{j=1}^{n-2k+1} \overline{A_j}\right]\end{aligned}$$

Mais :

$$\Pr\left[B_{k,2}(1, 2, ..., n) \diagup \bigcap_{j=1}^{n-2k+1} \overline{A_j}\right] = 0$$

Alors :

$$\begin{aligned}F_{k,2}(p_1, p_2, ..., p_n) &= \Pr[B_{k,2}(1, 2, ..., n)] = \Pr[A_1] \Pr[B_{k,2}(1, 2, ..., n) \diagup A_1] \\ &+ \sum_{i=2}^{n-2k+1} \Pr\left(\bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{A_j} \cap A_i\right) \Pr\left[B_{k,2}(1, 2, ..., n) \diagup \bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{A_j} \cap A_i\right]\end{aligned}$$

Or on a :

$\Pr[A_1] = \prod_{j=1}^{k} q_j = Q$

$\Pr[B_{k,2}(1, 2, ..., n) \diagup A_1] = F_k(p_{k+1}, p_{k+2}, ..., p_n)$

$\Pr\left(\bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{A_j} \cap A_i\right) = R_k(p_1, p_2, ..., p_{i-2})\, p_{i-1} \prod_{j=i}^{i+k-1} q_j = R_k(p_1, p_2, ..., p_{i-2})\, p_{i-1} Q,$

car $q_{mk+i} = q_i \; (1 \leq i \leq k, m \geq 0)$

$\Pr\left[B_{k,2}(1, 2, ..., n) \diagup \bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{A_j} \cap A_i\right] = F_k(p_{i+k}, p_{i+k+1}, ..., p_n)$

Donc :

$$F_{k,2}(p_1, p_2, ..., p_n) = Q\left[F_k(p_{k+1}, ..., p_n) + \sum_{i_1=2}^{n-2k+1} F_k(p_{k+i_1}, ..., p_n)\, R(p_1, ..., p_{i_1-2})\, p_{i_1-1}\right]$$

Alors le résultat est vrai pour $r = 2$

Supposons que la formule est vraie jusqu'à l'ordre $r-1$ c à d.

$$F_{k,r-1}(p_1,..,p_n)=Q^{r-2}F_k\left(p_{(r-2)k+1},..,p_n\right)+Q^{r-2}\sum_{j=1}^{r-2}\binom{r-2}{j}\sum_{i_1,i_2,..,i_j}F\left(p_{(r-2)k+\alpha_j-j+1},..,p_n\right)\times$$
$$\prod_{l=1}^{j}R_k\left(p_{\alpha_{l-1}-l+2},...,p_{\alpha_l-l-1}\right)p_{\alpha_l-l}$$

et démontrons la pour r. D'abord nous démontrons que pour $r\geq 2$:

$$\begin{aligned}F_{k,r}(p_1,p_2,...,p_n)&=QF_{k,r-1}(p_{k+1},p_{k+2},...,p_n)\\&+Q\sum_{i=2}^{n-rk+1}R_k(p_1,p_2,...,p_{i-2})\,p_{i-1}F_{k,r-1}(p_{i+k},p_{i+k+1},...,p_n)\end{aligned}$$

En effet :

$$F_{k,r}(p_1,...,p_n)=\Pr\left[B_{k,r}(1,2,...,n)\right]$$

où $B_{k,r}(1,...,n)$ est l'évènement "le système r-consécutifs-k-sur-n constitué des composants $1,2,...,n$ tombe en panne" ,
donc on a :

$$\begin{aligned}F_{k,r}(p_1,p_2,...,p_n)&=\Pr[A_1]\Pr\left[B_{k,r}(1,2,...,n)\diagup A_1\right]\\&+\sum_{i=2}^{n-rk+1}\Pr\left(\bigcap_{j=1}^{i-1}\overline{A_j}\cap A_i\right)\Pr\left[B_{k,r}(1,2,...,n)\diagup\bigcap_{j=1}^{i-1}\overline{A_j}\cap A_i\right]\\&+\Pr\left[\bigcap_{j=1}^{n-rk+1}\overline{A_j}\right]\Pr\left[B_{k,r}(1,2,...,n)\diagup\bigcap_{j=1}^{n-rk+1}\overline{A_j}\right]\end{aligned}$$

Mais :

$$\Pr\left[B_{k,r}(1,2,...,n)\diagup\bigcap_{j=1}^{n-rk+1}\overline{A_j}\right]=0$$

Donc :

$$\begin{aligned}F_{k,r}(p_1,p_2,...,p_n)&=\Pr\left[B_{k,r}(1,2,...,n)\right]=\Pr[A_1]\Pr\left[B_{k,r}(1,2,...,n)\diagup A_1\right]\\&+\sum_{i=2}^{n-rk+1}\Pr\left(\bigcap_{j=1}^{i-1}\overline{A_j}\cap A_i\right)\Pr\left[B_{k,r}(1,2,...,n)\diagup\bigcap_{j=1}^{i-1}\overline{A_j}\cap A_i\right]\end{aligned}$$

Or on a ici :

$\Pr[A_1] = \prod_{j=1}^{k} q_j = Q$

$\Pr[B_{k,r}(1,2,...,n) \diagup A_1] = F_{k,r-1}(p_{k+1}, p_{k+2}, ..., p_n)$

$\Pr\left(\bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{A_j} \cap A_i\right) = R_k(p_1, p_2, ..., p_{i-2})\, p_{i-1} \prod_{j=i}^{i+k-1} q_j = R_k(p_1, p_2, ..., p_{i-2})\, p_{i-1} Q$

$\Pr\left[B_{k,r}(1,2,...,n) \diagup \bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{A_j} \cap A_i\right] = F_{k,r-1}(p_{i+k}, p_{i+k+1}, ..., p_n)$

Alors :

$$\begin{aligned} F_{k,r}(p_1, p_2, ..., p_n) &= QF_{k,r-1}(p_{k+1}, p_{k+2}, ..., p_n) \\ &\quad + Q \sum_{i=2}^{n-rk+1} R_k(p_1, p_2, ..., p_{i-2})\, p_{i-1} F_{k,r-1}(p_{i+k}, p_{i+k+1}, ..., p_n) \end{aligned}$$

Enfin en utilisant l'hypothèse de récurrence on obtient notre résultat. □

3.2 Comparaisons des résultats

Nous proposons ici de comparer notre résultat avec celui de Boland et al [46] (1999). Ces auteurs dans leur théorème 2.2 p159 ont donné la formule de la probabilité de panne comme suit :

En utilisant : $\forall\, k \leq n$, $\exists m \geq 0$, tel que $n = mk + i$, $(1 \leq i < k)$, (une relation entre le nombre des comopsants dans le système et la période k), ils ont montré que :

$$\begin{aligned} F(mk+i, r) = F(mk, r) + \sum_{j>0} \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \sum_{\substack{s_1,...,s_j \\ s_1+...+s_j \leq m}} (-1)^t \binom{j}{t} \sigma_j(i) \times \\ Q^{s_1+...+s_j} F((m - s_1 - ... - s_j)\, k, r - s_1 - ... - s_j + t) \end{aligned}$$

où : $F(mk+i, r) = F_{k,r}(p_1, ..., p_n)$ (d'après nos notations dans ce paragraphe), $\sigma_j(i)$ est le polynôme symétrique de degré j dans $p_1, ..., p_i$.

Alors il est clair que ce résultat qui a le même but que notre théorème ci-dessus est plus compliqué que notre formule. En effet, d'après notre théorème ci-dessus, il est très clair que la probabilité de panne du système en question est donnée en fonction de celle d'un système "k-consécutifs-sur-n" seulement, ce qui nous permet d'utiliser tous les résultats concernant le calcul de la fiabilité de ce dernier système et qui sont très nombreux pour trouver des résultats intéressants concernant le système "r-consécutifs-k-sur-n de période k". A titre d'exemple on a :

Soit $n = 3k$ et $r = 2$, d'après notre théorème

$$F_{k,2}(p_1, p_2, ..., p_{3k}) = Q\left[F_k(p_{k+1}, ..., p_{3k}) + \sum_{i=2}^{k+1} F_k(p_{k+i}, ..., p_{3k})\, p_{i-1}\right]$$

où $F_k(p_{k+1}, ..., p_{3k})$ est la probabilité de panne d'un système "k-consécutifs-sur-2k" qui peut être calculée facilement en utilisant les formules citées en premier chapitre. Donc $F_{k,2}(p_1, p_2, ..., p_{3k})$ est donnée directement en fonction de la probabilité de panne d'un système "k-consécutifs-sur-n".

Et d'après la formule de Boland et al on a

$$F_{k,2}(p_1, p_2, ..., p_{3k}) = F_{k,2}(p_1, p_2, ..., p_{3k-1}) - p_{2k}Q.F_k(p_1, p_2, ..., p_{2k-1})$$

et on remarque que le terme $F_{k,2}(p_1, p_2, ..., p_{3k-1})$ qui est la probabilité de panne du système "2-consécutifs-k-out-of-(3k-1) de période k" est toujours présent dans la formule, et pour arriver à exprimer $F_{k,2}(p_1, p_2, ..., p_{3k})$ en fonction de la probabilité de panne d'un système "k-consécutifs-sur-n" il faut appliquer la même formule k fois.

Donc on peut dire que notre formule est plus rapide dans le calcul que celle de Boland et al car notre théorème donne directement la probabilité de panne du système en question en fonction de celle d'un système "k-consécutifs-sur-n" par contre celle de Boland et al donne la même chose mais après plusieurs étapes. Et nous avons l'exemple numérique suivant :

Exemple 3.2.1. *On considère un système "3-consécutifs-3-sur-11 de période 3" alors :*
En utilisant notre théorème ci-dessus on a :

$$F_{3,3}(p_1, ..., p_{11}) = Q^2[F_3(p_7, ..., p_{11}) + 2F_3(p_8, ..., p_{11})\, p_1] + Q^2 F_3(p_9, ..., p_{11})\, p_2[2 + p_1]$$

où :

$$\begin{aligned} F_3(p_9, p_{10}, p_{11}) &= Q \\ F_3(p_8, ..., p_{11}) &= Q + p_2 Q \\ F_3(p_7, ..., p_{11}) &= Q(1 + p_2 + p_1) \end{aligned}$$

Donc on obtient directement

$$F_{3,3}(p_1, ..., p_{11}) = Q^3 [1 + 3p_1 + 3p_2 + 3p_1 p_2]$$

Et en utilisant la formule de Boland et al on obtient :

$$\begin{aligned} F(11,3) = {} & F(9,3) + p_2 Q F(7,2) + p_1 Q F(6,2) + p_2 Q^2 F(4,1) \\ & + p_1 Q^2 F(3,1) + p_1 Q^3 + p_2 Q^3 \end{aligned}$$

Mais pour calculer $F(7,2)$ *il faut appliquer la même formule une deuxième fois :*

$$F(7,2) = F(6,2) + p_1 Q F(3,1) + p_1 Q^2$$

et on obtient :

$$F_{3,3}(p_1, ..., p_{11}) = F(11,3) = Q^3 [1 + 3p_1 + 3p_2 + 3p_1 p_2]$$

Conclusion

Dans ce travail nous avons présenté les modèles "r-consécutifs-k-sur-n" à travers quelques résultats concernant le calcul de la fiabilité du système. Ainsi, nous avons établi des résultats concernant le comportement asymptotique du temps de panne du système. Le calcul et l'arrangement des importances de structure des composants a été étudié aussi dans cette thèse. Et à partir de nos résultats cités dans cette thèse nous avons vu qu'on peut toujours résoudre les problèmes d'un système "r-consécutifs-k-sur-n" via les résultats des systèmes "k-consécutifs-sur-n" qui sont nombreux. Notons aussi que nous avons traité ici seulement le cas linéaire unidimensionnel et non réparable de ces modèles. Nous signalons que beaucoup de problèmes utiles pour mieux présenter ces modèles restent ouverts et nous citons ici quelques uns de ces problèmes qui nous semblent très importants :

- **L'étude des versions bidimensionnelle et tridimensionnelle du système "r-consécutifs-k-sur-n" :** On les définit comme suit : un système "r-consécutifs-k-sur-n" bidimensionnel (tridimensionnel resp.) est un système formé de n^2 (n^3 resp.) composants disposés suivant une grille carrée (cubique resp.) de cotés n et il tombe en panne si et seulement si au moins r sous-grille carrées (cubiques resp.) de coté k non chevauchées tombent en panne. Une sous grille est en panne si et seulement si tous ces composants sont en panne. La question qui se pose ici : est ce qu'on peut établir des résultats sur ces deux modèles comme dans le cas de $r = 1$, et le cas unidimensionel.
- **Le cas réparable du système "r-consécutifs-k-out-of-n" :** Le cas des systèmes réparables pose un grand problème pour les chercheurs dans la plupart des cas mais on peut essayer au moins de généraliser quelques résultats (par exemple [61], [53]) donnés dans le cas d'un système "k-consécutifs-sur-n".
- **Le cas des composants dépendants :** En pratique l'hypothèse d'indépendance des composants n'est pas toujours vérifiée. Donc il est intéressant d'étudier le cas où les composants sont dépendants comme par exemlpe dans [17] et [53] on a supposé que l'état de chaque composant dans un système "k-consécutifs-sur-n" dépend des états des (k-1) composants qu'il précèdent, alors on peut au moins essayer d'obtenir des résultats sur le système "r-consécutifs-k-sur-n" sous cette hypothèse.

Bibliographie

[1] Miles, E.D."Generalized Fibonacci numbers and associated metrices" Ann. Math. Monthly 60 **(1962)** pp745-752.

[2] Birnbaum, Z.W., "on the importance of different components in a multicomponent system" in P.R. Krishnaiah (ed), Multivariate Analysis-II, Academic Press, New York, (**1969)**, pp 581-592.

[3] Kontoleon, J.M., " Reliability determination of a r-successive-k-out-of-n : F systems", IEEE. Trans. Reliab., vol R-29 **(1980)** p 437.

[4] Chiang, D.T, Nui, S.C., "Reliability of consecutive-k-out-of-n : F system", IEEE. Trans. Reliab. ,Vol R-30 Apr **(1981),** pp 87-89.

[5] Bollinger, R.C , Salvia, A.A "Consecutive k-out-of-n : F networks", IEEE Trans. Reliab., Vol R-31, Apr (**1982)** , pp 53-56.

[6] Derman, C., Lieberman, G.J., Ross, S.M., "On the consecutive-k-out-of-n : F system", IEEE. Trans. Reliab., Vol R-31 Apr (**1982)** pp 57-63.

[7] Bollinger R C, "Direct computation for consecutive-k-out-of-n : F system", IEEE. Trans. Reliab. ,Vol R-31 Dec (1982) ,pp 444-446**.**

[8] Hwang F. K., "Fast solutions for consecutive-k-out-of-n : F systems",IEEE. Trans. Reliab., vol R-31, Dec **(1982)** pp 447-448.

[9] Shantikumar, J.G."reliability algorithm to evaluate the reliability of a consecutive k-out-of-n F system" IEEE Trans. Reliab. vol R-31 Dec.(**1982)**,pp 442-443.

[10] Lambiris, M., Papastavridis, S.G., " Exact reliability formulas for linear & circular consecutive-k-out-of-n : F systems", IEEE. Trans. Reliab. , Vol R-34 Jun **(1985)** pp 124-126.

[11] Bollinger R C, "An algorithm for direct computation in consecutive-k-out-of-n : F systems", IEEE. Trans. Reliab. ,Vol R-35 No 5, Dec **(1986)** ,pp 611-612.

[12] Grifith W.S, ”On Consecutve-k-out-of-n failure systems and their generalizations”, A.P.Basu (ed), Reliability and quality control, Elsevier (North-Holland), (**1986)**, pp 157-165

[13] Papastavridis, S.G., ” Algorithms for strict consecutive-k-out-of-n : F systems”, IEEE Trans. Reliab., Vol R-35, No 5 December (**1986**), pp 613-615.

[14] Hwang F. K., ”Simplified Reliabilities for Consecutive–k-out-of-n systems” SIAM J Alg. Disc. Meth. vol.7, N° 2, april (**1986)**.pp 258-264.

[15] Fu, J.C., ”Bounds for reliability of a large consecutive-k-out-of-n : F systems with unequal component reliability”, IEEE. Trans. Reliab. ,Vol R-35, Aug (**1986a**) pp 316-319.

[16] Fu, J.C., ”Reliability of a consecutive-k-out-of-n : F system with (k-1)-step Markov dependence”, IEEE. Trans. Reliab., Vol R-35 (**1986b**) pp 602-606.

[17] Fu, J.C., Hu, Beihua, ”On reliability of a consecutive-k-out-of-n : F system with (k-1)-step Markov dependence”, IEEE. Trans. Reliab., Vol R-36 (**1987**) pp 75-77.

[18] Papastavridis, S.G., ” A limit theorem for the reliability of a consecutive-k-out-of-n : F system”, Adv.Appl. Probab.,vol.19, (**1987a**), pp 746-748.

[19] Papastavridis , S G , Lambiris M, "Reliability of a consecutive-k-out-of-n : F system for Markov-Dependent components" IEEE Trans. Reliab. Vol 36, No 1, Apr (**1987**), pp 78-79.

[20] Chrysaphinou, O, Papastavridis, S.G., ”The occurence of sequence patterns in repeated dependent expriments” Theory Probab., vol 35, Appl.(**1990a**), pp 145-151.

[21] Chrysaphinou, O, Papastavridis, S.G., ” Limit disribution for a consecutive-k-out-of-n : F system”, Adv. Appl. Probab., vol 22, (**1990b**), pp 491-493.

[22] Chrysaphinou, O, Papastavridis, S.G., ”Reliability of a consecutive-k-out-of-n : F system in a random environment”, J. Appl. Probab., vol. 27, (**1990c**), pp 452-458.

[23] Ge, G. P., Wang, L. S "Exact reliability formula of a consecutive-k-out-of-n : F systems with homogeneous markov dependence" IEEE Trans. on Reliab. Vol 39, No 5, Decem. (**1990**),pp 600-602.

[24] Kuo W, Zhang W, Zuo M, "A consecutive-k-out-of-n : G system : The Mirror Image of a Consecutive-k-out-of-n : F system", IEEE Transactions on Reliability, vol.39, No.2, June (**1990**), pp 244-253.

[25] Salvia, A.A.,Lacher, W.C., "2-Dimensional consecutive-k-out-of-n :F models " ,IEEE Trans. Reliability, vol.39, Aug (**1990**), pp. 382-385.

[26] Papastavridis, S.G., "m-consecutive-k-out-of-n : F systems", IEEE Trans. Reliab., vol 39, N 3, Aug. (**1990**). pp 386-388.

[27] Godbole, A.P., "Poisson approximations for runs and patterns of rare events", Adv. Appl. Probab.,vol. 23, (**1991**), pp 851-865.

[28] Ksir B, "Comment on 2-Dimensional consecutive -k-out-of-n :F models" ,IEEE Trans. Reliability, vol. 41, No .4, Dec (**1992**) p 575.

[29] Ksir, B., Boushaba, M., "Reliability bounds and exact formula of consecutive-k-out-of-n : F system with Markov dependence" Microelec. and Reliab. Journal vol 33 ,N° 3 , (**1993**) pp 313-317.

[30] Wu, J.S., Chen, R.J., " Efficient algorithm for reliability of a circular consecutive-k-out-of-n : F system", IEEE. Trans. Reliab. ,vol-42, No 1, March **(1993)** pp 163-164.

[31] Hwang F. K, "An $O\,(nk)$-time algorithm for computing the reliability of a circular consecutive-k-out-of-n : F system" IEEE. Trans. Reliab. ,vol-42, No 1, March **(1993)** pp 161-162.

[32] Koutras, M.V., Papadopoulos, G.K.,.Papastavridis, S.G." Reliability of 2-Dimensional consecutive-k-out-of-n :Systems" ,IEEE Trans.Reliability,vol. 42, No.4, **(1993)** ,pp.658-661

[33] Sfakianakis M, Papastavridis S G, "Reliability of a general consecutive-k-out-of-n : F system" IEEE. Trans. Reliab. ,vol-42, No 3, September **(1993)** pp 491-496.

[34] Fu, J.C., "Poisson convergence in reliability of a large linearly connected system as related to coin tossing", Statistica Sinica, 3, **(1993)**, pp 261-275.

[35] Krzyztof Klowrocki,"The classes of asymptotic reliability functions for series-parallel & parallel-series systems", Reliability Engineering and System Safety.46, **(1994)**, pp179-188.

[36] Jun Cai, "Reliability of a large Consecutive-k-out-of-r-from-n :F System with Unequal Component-Reliability", IEEE Transactions On Reliability, Vol.43,No.1, March **(1994)** , pp 107-111.

[37] Mohanty, S.G., "Success runs of lenght k in Markov dependent trials", Ann. Inst. Satist. Math ,vol. 46, **(1994)**, pp 777-796.

[38] Fu, J.C., Koutras, M.V., "Poisson approximations for 2-dimensional patterns", Ann. Inst. Satist. Math , vol. 46, **(1994a)**, pp 179-192.

[39] Fu, J.C., Koutras, M.V., "Distribution theory of runs : A Markov chain approch", J. Amer. Statist. Assoc.,vol 89, **(1994b)**, pp 1050-1058.

[40] Chao, M.T., Fu, J.C., Koutras, M.V., "Survey of reliability studies of consecutive-k-out-of-n : F & related systems", IEEE. Trans. Reliab., vol 44, **(1995)**, pp 120-127.

[41] Hwang F. K., Wright, P.E., "An $O\left(k^3.\log\left(\frac{n}{k}\right)\right)$ algorithm for the consecutive -k-out-of-n : F System" IEEE. Trans. Reliab. ,Vol 44, **(1995),** pp 128-131.

[42] Koutras, M.V., Papadopoulos, G.K., Papastatvridis, S.G., " Runs on circle", J.Appl. Prob., vol. 32, **(1995)**, pp 396-404.

[43] Fu, J.C., "Distribution theory of runs and patterns associated with sequence of multi-state trials", Statistica Sinica, 6, **(1996)**, pp 957-974.

[44] Ghoraf N, "Fiabilité des systèmes k-parmi-m-consécutifs-sur-n", thèse de Magister soutenue le 25/11/1998, Constantine **(1998)**, (Direceur de thèse Ksir B).

[45] Ghoraf N, Ksir B, "A Weibull limit law for the failure time of consecutive-k-out-of-m-from-n : F systems with unequal components reliability" 1999 Proceedings, 5th ISSAT International conference on Reliability and Quality in Design , Las Vegas, Nevada, USA, August 11-13, **(1999),** pp 371-374.

[46] Boland, P.J ,Papastavridis, S.G., "Consecutive-k-out-of-n : F systems with cycle k" Statistics & Probability Letters, 44, **(1999)**, pp 155-160.

[47] Fen-Hui Lin, Way Kuo, Frank Hwang, "Structure importance of consecutive-k-out-of-n systems", Operations Research Letters, 25, **(1999)**, pp 101-107.

[48] Ghoraf N , Boushaba M, Ksir B, "Etudes des modèles k-consécutifs-sur-n" Rencontre 2000 des Mathématiciens Algériens, Institut Superieur de Gestion et de Planification (I.S.G.P) Bordj El-Kifan, Algérie. 21-24 Mai **(2000).**

[49] Muselli, M., " Useful inequalities for longest run distribution", Statistics & Probability letters, vol. 46, **(2000)**, pp 239-249.

[50] Hwang, F.K., Cui, L., Chang, J.C., Lin, W.D., " Comments on Reliability and component importance of a consecutive-k-out-of-n system by Zuo", Microelc. Reliab., vol. 40, **(2000)**, pp 1061-1063.

[51] Lam, Y., Zhang, Y.L., " Repairable consecutive-k-out-of-n : F system with Markov dependence", Naval Research Logistics, vol. 47, **(2000)**, pp 18-39.

[52] Zuo, M.J., Lin, D., Wu, Y., " Reliability evaluation of combined k-out-of-n : F, consecutive-k-out-of-n : F and linear connected-(r,s)-out-of-(m,n) : F system structures", IEEE. Trans. Reliab. , Vol R-49, **(2000)**, pp 99-104.

[53] Lam Yeh, Hon Keung Tony Ng , "A general model for consecutive-k-out-of-n : F repairable system with exponential distribution and (k-1)-step Markov dependence", European Journal of Operations Research, 129, **(2001)**, pp 663-682.

[54] Demetrios, L., Antzoulakos, D.L., Chadjiconstantinidis, S., " Distributions of numbers of success runs of fixed lenght in Markov dependent trials", Ann. Inst. Satist. Math , vol. 53, **(2001)**, pp 599-619

[55] Hwang F K., "A new index of components importance" Operations research letters 28, **(2001)**, pp 75-79.

[56] Chang H W, Chen R J, Hwang F K, "the structural Birnbaum Importance of Consecutive-k systems" , Journal of Combinatorial Optimization , 6 , **(2002)**, pp 183-197.

[57] Ghoraf N, Boushaba M, "Systèmes 2-k-consécutifs-sur-n", 3ème Rencontre Internationale d'analyse mathématique et ses applications (RAMA III), Béjaia, 21-23 Mai **(2002).**

[58] Boushaba M., Ghoraf N., "A tridimensional consecutive-k-out-of-n : F system", International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, Vol 9, No 2 ,**(2002)**,pp 193-198.

[59] Boushaba M,.Ghoraf, N., "m-consecutive-k-out-of-n : F system Via consecutive-k-out-of-n : F system", 2002 Proceeding 8th ISSAT International

Conference on reliability and quality in design, Anaheim California USA,.07. 09 Aug **(2002)**, pp 171-174.

[60] Cui, L., " The IFR property for consecutive-k-out-of-n : F systems", Statistics & Probability Letters, vol 59, **(2002)**, pp 405-414.

[61] Yam R, Zuo M, Zhang Y, "A methode for evaluation of reliability indices for repairable circular consecutive-k-out-of-n : F systems", Reliability engineering and system safety 79, **(2003),** pp 1-9.

[62] N Ghoraf, M Boushaba, "Fast Formula of a Reliability of m-Consecutive-k-out-of-n : F System with cycle k", Top, Sociedad de Estadistica e Investigacion Operativa , Vol. 11, No. 2, December **(2003),** pp. 275-283.

[63] Namir GHORAF, Brahim KSIR ,"A Weibull limit law for the failure time of cousecutive-k-out-of-m-from-n : F System", International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, Vol. 13, No. 5, October **(2006),** pp 421-431.

[64] Ghoraf Namir, "Reliability formula & Optimal assignment of "r-consecutive-k-out-of-n : systems" for $n \leq (r+1)\,k$", Far East Journal of Theoretical Statistics, Volume 21, Issue 1, January **(2007), pp 83-96**