REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES EXACTES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

# THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT D'ETAT EN MATHEMATIQUES

Thème

## « Sur une classe de problèmes aux limites pour équations aux dérivées partielles avec conditions aux bords non standards »

Option : MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Par

ALI HAMEIDA

Devant le jury

- Mr DENCHE Mohamed, Prof — Président
  Université Mentouri, Constantine
- Mr MARHOUNE Ahmed Lakhdar, Prof — Rapporteur
  Université Mentouri, Constantine
- Mr AYADI Abdelhamid, Prof — Examinateur
  Université Larbi Ben Mhidi Oum El Bouaghi
- Mr HEBBECHE Abdallah, M. C. — Examinateur
  Université Mentouri, Constantine
- Mr BOUZIT Mohamed, M. C. — Examinateur
  Université Larbi Ben Mhidi Oum El Bouaghi
- Mr NOUAR Ahmed, M. C. — Examinateur
  Université de Skikda

# Remerciements

J’aimerais remercier en particulier mon encadreur Mr MARHOUNE Ahmed Lakhdar Professeur à l’université Mentouri Constantine pour avoir dirigé ce travail, pour son aide, ses conseils, ses encouragements, sa grande disponibilité et son ouverture d’esprit qui m’ont aidé à mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier vivement Mr DENCHE Mohamed Professeur à l’université Mentouri Constantine qui me fait l’honneur de présider le jury de soutenance.

J’adresse mes remerciements les plus chaleureux à Mr AYADI Abdelhamid Professeur à l’université Larbi Ben Mhidi, Mr HEBBECHE Abdallah Maître de Conférences à l’université Mentouri Constantine, Mr BOUZIT Mohamed, Maître de Conférences à l’université Larbi Ben Mhidi, et Mr NOUAR Ahmed Maître de Conférences à l’université Skikda, qui ont accepté de faire partie du Jury de ce travail.

Je remercie aussi Mr RAHMANI Fouad Lazhar Chef de département de mathématiques.

Je ne voudrais pas oublier tous ceux et celles qui au long de ce travail m’ont soutenu moralement, sans les nommer explicitement car la liste serait longue, je les remercie de leurs encouragements.

Titre :

# « Sur une classe de problèmes aux limites pour équations aux dérivées partielles avec conditions aux bords non standards »

## Résumé

Dans ce travail on étudie un problème mixte avec condition intégrale avec bornes variables pour les équations aux dérivées partielles du type mixte.

On démontre l'existence et l'unicité de la solution dans un espace fonctionnel de Sobolev avec poids.

La démonstration est basée sur une estimation a priori bilatérale et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré.

Mots Clés : Equation parabolique de type mixte, inéquation énergétique, Espace de Sobolev avec poids, Conditions aux bords, Condition intégrale avec bornes variables.

# Abstract

In this work, we study a mixed problem with an integral space variable condition for a parabolic equation of mixed type.

The existence and uniqueness of the solution in functional weighed Sobolev space are proved. The proof is based on two sided a priori estimates and the density of the range of the operator generated by the considered problem.



Key Words: Parabolic Equation of mixed type, Three-point boundary condition, Integral space variable condition, Energy inequalities, Weighted Sobolev Space.

# ملخص


هذا العمل يتطرق إلى دراسة صنف من المسائل ذات القيم الحدّية لمعادلات تفاضليّة ذات مشتقات جزئيّة من النّمط المختلط، و التّكافئية تحتوي على شروط حدّية غير محلّية من النّمط التّكاملي، تكاملات ذات حدود متغيّرة.

نبرهن وجود و وحدانيّة الحل في فضاء تابعي لصوبولاف ذو وزن، البرهان يعتمد على التقديرات القبليّة و على كثافة صورة المؤثر المولّد بالمسألة المعيّنة. النّتائج المحصّل عليها تعد تطوير جديد لطريقة المتراجحات الطّاقويّة لصنف ال مسائل المدروسة.

# Table des matières

# Chapitre 1

# Introduction

Nous étudions dans la présente thèse certaines classes de problèmes aux limites non standards.

Nous développons plus exactement la méthode des inégalités énergétiques à de nouvelles classes de problèmes.

La méthode des inégalités énergétiques s'est avérée un outil efficace dans l'étude des problèmes non classiques. De tels problèmes ont été étudiés par plusieurs auteurs pour différents types d'équations : paraboliques, pseudo-paraboliques, hyperboliques et du type mixte et cela en utilisant différentes méthodes.

La thèse est composée d'une introduction et de deux autres chapitres.

Nous commençons par une introduction où nous présentons l'historique et l'intérêt du thème abordé et nous rappellons certaines notions préliminaires qui seront utilisées par la suite, à savoir les opérateurs de régularisations.

Au second chapitre nous étudions un problème mixte avec condition intégrale à une borne variable pour les équations paraboliques de type mixte. Nous écrivons le problème sous forme opérationnelle, et nous décrivons le cadre fonctionnel en précisant les espaces fonctionnels dans lesquels l'étude est faite. Nous établissons un théorème d'homéomorphisme. La démonstration est basée sur une estimation a priori bilatérale et la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans l'espace d'arrivée $F$.

Dans le troisième chapitre nous étendons la méthode développée au premier chapitre à l'étude d'un problème mixte avec condition intégrale à deux bornes variables pour les équations aux dérivées partielles du type mixte. Nous décrivons le cadre fonctionnel en précisant les espaces fonctionnels dans lesquels l'étude est faite. Nous montrons l'existence et l'unicité de la solution forte. La démonstration est basée sur une inégalité de l'énergie et sur la densité de l'ensemble des valeurs de l'opérateur engendré par l'opérateur en question dans l'espace d'arrivée $F$.

Dans la présente thèse nous donnons un développement important de la méthode des inégalités énergétiques à de nouvelles classes de problèmes non classiques. Elle comporte des résultats intéressants et originaux ayant faits l'objet de publications dans des revues internationales.

La signification physique de base des conditions intégrales (moyenne, flux total, énergie totale, masse totale, moment...) a été la raison essentielle de l'intérêt croissant à ce type de problèmes.

La modélisation mathématique des problèmes avec conditions intégrales est rencontrée en théorie de la conduction thermique [6], [7], [25], [26], [27], dans l'étude des déformations viscoélastiques, dans les matériaux à mémoires (en particulier les polymères), en thermoélasticité [42], dans les semiconducteurs [1], en physique des plasmas [41] et en biotechnologie. On peut également citer qu'un nombre important de problèmes paraboliques avec conditions non locales sont rencontrés en théorie quasi statique de thermoélasticité [12], [13].

De tels problèmes ont étés étudiés dans [2], [3], [4], [5], [6], [8], [9], [10], [14], [25], [26], [27], [28], [43], [52] pour une classe d'équations paraboliques, dans [11] pour les équations pseudo-paraboliques, dans [38] pour les équations hyperboliques et dans [14], [15], [16] pour les équations du type mixte.

La méthode utilisée dans [4], [5], [14], [15], [17], [18], [28], [52] est celle des inégalités énergétiques.

La méthode des inégalités de l'énergie, appelée aussi méthode d'analyse fonctionnelle trouve son origine dans les travaux de I. G. Petrovski [36] et est utilisée dans la résolution du problème de Cauchy lié aux équations du type hyperbolique. Par la suite, des développements importants de la méthode sont dus à L. Leray [35] et I. Garding [22].

La méthode a été également utilisée et développée dans les travaux de O. A. Ladyzenskaya [29] , K. Friedrichs [21], N. I. Yurchuk [45], [46], [47], [48], [49], [50], [51], [52] , Kartynnik A.V [28], M Denche et A L Marhoune [14], [15], [16], [17] et A L Marhoune [32], on peut également citer les travaux de F. Rebbani et V. I. Chesalyn [39], [40] .

Au fait, en 1986 N. I. Yurchuk [52] a utilisé la condition intégrale

$$\left(\int_0^1 u\left(\xi, t\right) d\xi = \varphi\left(t\right)\right)$$

pour certaines équations paraboliques, ensuite plusieurs travaux ont été réalisés en modifiant l'équation ou en utilisant des équations hyperboliques, les équations de type mixte, ...

Jusqu'en 1990 où Kartynnik A.V [28] a développé la méthode des inégalités énergétiques en prenant la condition intégrale avec une borne variable

$$\left(\int_0^l u\left(\xi, t\right) d\xi = \varphi\left(t\right), \text{où } 0 < l < 1\right)$$

à partir de cette période plusieurs autres travaux ont été également réalisés en changeant l'ordre des dérivées ou en changeant l'équation.

En 2007 A L Marhoune [32] a modifié la condition intégrale en prenant

$$\left(\int_0^\alpha u(\xi,t)\,d\xi + \int_\beta^1 u(\xi,t)\,d\xi = 0, \text{où } 0 < \alpha \leq \beta < 1\right)$$

et en prenant une condition périodique au lieu des conditions de Neumann-Dirichlet.

Le schéma de la méthode a été donné pour la première fois par A. A. Dezin [19], et qui peut être résumé comme suit :

D'abord on ramène le problème posé à une équation opérationnelle :

$$Lu = \mathcal{F} \quad , \quad u \in D(L)$$

où l'opérateur $L$ est considéré de l'espace de Banach $E$ dans l'espace de Hilbert $F$ convenablement choisis.

On établit les estimations a priori pour l'opérateur $L$.

On démontre ensuite la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans l'espace $F$.

Plus précisément nous suivrons dans ce travail l'un des deux schémas suivant :

**Schéma 1**

Pour l'opérateur L engendré par le problème considéré, nous démontrons l'inégalité énergétique du type

$$\|u\|_E \leq c\,\|Lu\|_F\,, \qquad \forall u \in D(L) \tag{1.1}$$

Cette démonstration se base sur une analyse précise des formes obtenues en multipliant l'équation donnée par un opérateur $Mu$ contenant la fonction $u$ ou ses dérivées et une certaine fonction poids, et en intégrant sur le domaine.

Le choix de l'opérateur $Mu$ est fondamental, il est dicté par l'équation et les conditions aux limites. Ensuite dans les topologies fortes des espaces $E$ et $F$ on construit la fermeture $\overline{L}$

de l'opérateur $L$, et la solution de l'équation

$$\overline{L}u = \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} \in F$$

est appelée solution forte du problème considéré. A l'aide d'un passage à la limite, on prolonge l'inégalité 1.1 à $u \in D\left(\overline{L}\right)$ et ainsi est garantie l'existence de la solution sur l'ensemble des images $R\left(\overline{L}\right)$ de l'opérateur $\overline{L}$

Comme l'image de l'opérateur $\overline{L}$ est fermée dans $F$ et que

$$R\left(\overline{L}\right) = \overline{R\left(L\right)}\ ,$$

pour la démonstration de l'existence de la solution forte pour tout $\mathcal{F} \in F$ il suffit d'établir la densité de $R(L)$ dans $F$ qui est obtenue à l'aide des opérateurs de régularisation. L'unicité est déduite de l'inégalité de l'énergie.

Le choix des opérateurs de régularisation est lié au caractère du problème étudié. Dans notre cas nous utilisons les opérateurs de régularisation par rapport à la variable $t$ introduite dans [52] .

**Schéma 2**

On établit deux estimations a priori bilatérales

$$\left\|Lu\right\|_F \leq c\left\|u\right\|_E ,$$

$$\left\|u\right\|_E \leq c\left\|Lu\right\|_F ,$$

Il résulte de la première estimation que l'opérateur $L$ de $E$ dans $F$ est continu, et de la deuxième estimation, qu'il admet un inverse continu, et que l'ensemble des valeurs de l'opérateur $L$ est fermé. En d'autres termes, l'opérateur $L$ réalise un homéomorphisme linéaire de l'espace $E$ sur l'ensemble fermé $R(L)$.

Ainsi, pour démontrer l'unicité de la solution il suffit de démontrer que $R(L)$ est dense dans $F$.

La méthode des estimations a priori est une méthode efficace pour l'étude de beaucoup de problèmes de la physique mathématique, elle est fondée sur un support théorique solide et est développée dans un cadre abstrait élégant. Mais dans l'application de cette méthode on trouve des difficultés parmi lesquelles nous citons :

**Le choix de l'espace des solutions.**

**Le choix du multiplicateur.**

**Le choix de l'opérateur de régularisation.**

Les questions sont tellement variées et récentes, que l'élaboration d'une théorie générale est encore prématurée. Chaque problème nécessite une étude spéciale, d'où l'actualité du thème.

## 1.1 Notions préliminaires

**Opérateurs abstraits de régularisation**

Soit $H$ un espace de Hilbert et soit $A$ un opérateur défini de $D(A)$ vers $H$ avec $\overline{D(A)} = H$

.

**Définition 1** *On dit que l'opérateur $A$ est un opérateur dissipatif si*

$$Re\langle Au, u\rangle \leq 0, \forall u \in D(A)$$

**Définition 2** *On dit que l'opérateur $A$ est accrétif si $(-A)$ est un opérateur dissipatif, i.e.*

$$Re\langle Au, u\rangle \geq 0, \forall u \in D(A)$$

**Définition 3** *Un operateur dissipatif $A$ est dit maximal si son extension est $A$ lui même.*

**Proposition 1** *Soit*

$$A : D(A) \subset X \to X \quad \left(\overline{D(A)} = H\right)$$

alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

$(i)$ $A$ est un opérateur dissipatif

$(ii)$ $\|(A - \lambda I)u\| \geq \operatorname{Re}\lambda\|u\|$ , $\forall u \in D(A)$ et pour tout $\lambda$ Tel que $\operatorname{Re}\lambda > 0$

$(iii)$ $\|(A - \lambda I)u\| \geq \lambda\|u\|$ , $\forall u \in D(A)$ et pour tout $\lambda$ Tel que $\lambda > 0$

**Démonstration.** Supposons que $(i)$ soit vérifiée. Soit $u \in D(A)$ et $\operatorname{Re}\lambda > 0$, alors

$$\operatorname{Re}\langle Au - \lambda u, u\rangle = \operatorname{Re}\langle Au, u\rangle - \operatorname{Re}\lambda \|u\|^2 \leq -\operatorname{Re}\lambda \|u\|^2$$

donc

$$\|Au - \lambda u\| \, \|u\| \geq -\operatorname{Re}\langle Au - \lambda u, u\rangle \geq \operatorname{Re}\lambda \, \|u\|^2$$

ceci implique $(ii)$.

Il est que $(ii)$ imlique $(i)$.

Supposons que $(iii)$ soit vraie. Pour tout $u \in D(A)$ et $\lambda > 0$, on obtient

$$\|Au\|^2 - 2\lambda \operatorname{Re}\langle Au, u\rangle = \|Au - u\|^2 - \lambda^2 \|u\|^2 \geq 0$$

et donc

$$2\lambda \operatorname{Re}\langle Au, u\rangle \leq \|Au\|^2$$

comme $\lambda > 0$ est arbitraire, il résulte que $\operatorname{Re}\langle Au, u\rangle \leq 0$. ■

**Théorème 1** *Tout opérateur dissipatif admet un prolongement fermé, ce prolongement est aussi un opérateur dissipatif.*

**Corollaire 1** *Un opérateur dissipatif maximal est toujours fermé.*

**Théorème 2** *Tout opérateur dissipatif admet un prolongement maximal dissipatif.*

**Proposition 2** *Soit*

$$A : D(A) \subset X \to X \ \left(\overline{D(A)} = H\right)$$

alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

– $A$ est un opérateur maximal dissipatif

– $Im(A - \lambda I) = H$ pour un certain $\lambda$ tel que $\operatorname{Re}\lambda > 0$

– $Im(A - \lambda I) = H$ pour tout $\lambda$ tel que $\lambda > 0$.

**Théorème 3** *Soit*

$$A : D(A) \subset X \to X \ \left(\overline{D(A)} = H\right)$$

alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $A$ est un opérateur dissipatif maximal
- $A$ est fermé, $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(A)$ et $\|(A-\lambda I)^{-1}\| \leq (\operatorname{Re}\lambda)^{-1}$

**Théorème 4** *Soit*

$$A : D(A) \subset X \to X \ \left(\overline{D(A)} = H\right)$$

un opérateur dissipatif maximal, alors :

- $A_\varepsilon^{-1} \in L(H)$
- $\|A_\varepsilon^{-1}\| \leq 1$
- $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} A_\varepsilon^{-1} u = u$ pour tout $u \in H$, où $A_\varepsilon^{-1} = (I - \varepsilon A)^{-1}$ ; $\varepsilon > 0$.

**Démonstration.** Soit $\varepsilon > 0$ alors

$$\{\varepsilon : \varepsilon > 0\} \subset \rho(A)$$

donc $(A - \lambda I)$ est continument inversible d'où $(A-\lambda I)^{-1}$ existe, il est borné et il est défini sur $H$ tout entier.

Puisque

$$\frac{1}{\varepsilon} \in \{\varepsilon : \varepsilon > 0\}$$

on déduit que

$$(A - \frac{1}{\varepsilon}I)^{-1} \in L(H)$$

Mais

$$(A - \frac{1}{\varepsilon}I) = -\frac{1}{\varepsilon}(I - \varepsilon A)$$

d'où

$$(A - \frac{1}{\varepsilon}I)^{-1} = -\varepsilon (I - \varepsilon A)^{-1}$$

on pose

$$A_\varepsilon^{-1} = (I - \varepsilon A)^{-1}$$

on déduit que

$$A_\varepsilon^{-1} \in L\left(H\right)$$

et en utilisant le théorème 8, on trouve

$$\left\| (A - \frac{1}{\varepsilon} I)^{-1} \right\| \leq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} = \epsilon$$

donc

$$\left\| A_\varepsilon^{-1} \right\| \leq 1$$

Supposons tout d'abord $u \in D(A)$ , d'où :

$$\|A_\varepsilon^{-1} u - u\| = \|(I - \varepsilon A)^{-1} u - u\| = \|\varepsilon (I - \varepsilon A)^{-1} A u\| \leq \varepsilon \|Au\|$$

Ainsi, par passage à la limite lorsque $\varepsilon$ tend vers 0, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} A_\varepsilon^{-1} u = u \;\text{ pour tout }\; u \in D\left(A\right)$$

Et comme on a $\overline{D(A)} = H$, alors

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} A_\varepsilon^{-1} u = u \;\text{ pour tout }\; u \in H$$

■

**Exemple 1** *Soit* $A = \frac{\partial}{\partial t}$ *où*

$$D(A) = \{u \in L_2(Q) L_2(Q) \;/\; u(0,t) = 0\}$$

*et*

$$Q = (O, 1) \times (0, T).$$

Alors $A$ est un opérateur accrétif.

**Démonstration.** Nous avons

$$\langle Au, u \rangle = \int_Q \frac{\partial u}{\partial t} u dx dt = \int_0^1 u\overline{u}\left.\right|_0^T dx - \int_Q u \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} dx dt$$

Donc

$$\langle Au,u\rangle+\overline{\langle Au,u\rangle}=\int\limits_0^1 |u|^2\left.\right|^T dx-\int\limits_0^1 |u|^2\left.\right|_0 dx$$

Alors

$$2Re\langle Au,u\rangle=\int\limits_0^1 |u\left(x,T\right)|^2 dx$$

car $u(0,x)=0$

d'où

$$Re\langle Au,u\rangle\geq 0$$

■

**Exemple 2** *On prend $A=\frac{\partial^3}{\partial t^3}$, de domaine de définition*

$$D(A)=\{u\in L_2(0,a)\ /\ \frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\epsilon L_2(0,a),\ u\left(0\right)=0,\frac{\partial u}{\partial t}\left(0\right)=0,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(a\right)=0\}$$

*Alors $A$ est un opérateur dissipatif.*

**Démonstration.** En effet , nous avons

$$\mathrm{Re}\langle Au,u\rangle=\mathrm{Re}\int_0^a\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\overline{u}\left.\right|_0^a dt-\mathrm{Re}\int_0^a\frac{\partial u}{\partial t}\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}dt=-\frac{1}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\left.\right|_{t=a}\leq 0$$

■

On pose $A_\varepsilon^{-1}=(I-\varepsilon A)^{-1}=\left(I-\varepsilon\frac{\partial^3}{\partial t^3}\right)^{-1}$, pour $\varepsilon>0$.

Les opérateurs $A_\varepsilon^{-1}$ ne sont que ceux qui donnent la solution du problème

$$g_\varepsilon-\varepsilon\frac{\partial^3 g_\varepsilon}{\partial t^3}=g,\ g_\varepsilon\left(0\right)=0,\ \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial t}\left(0\right)=0,\ \frac{\partial^2 g_\varepsilon}{\partial t^2}\left(a\right)=0$$

Donc le problème adjoint est

$$g_\varepsilon^*-\varepsilon\frac{\partial^3 g_\varepsilon^*}{\partial t^3}=g,\ g_\varepsilon^*\left(0\right)=0,\ \frac{\partial g_\varepsilon^*}{\partial t}\left(0\right)=0,\ \frac{\partial^2 g_\varepsilon^*}{\partial t^2}\left(a\right)=0$$

**Proposition 3** *Soit $v\in L_2(0,a)$, alors*

- $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} \|A_\varepsilon^{-1} u - u\|_{L_2(0,a)} = 0$
- $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} \left\|(A_\varepsilon^{-1})^* u - u\right\|_{L_2(0,a)} = 0$

On note par $\Omega = [0,1] \times [0,T]$.

Pour $u \in L_2(\Omega)$, on note par

$$u_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} u, v_\varepsilon^* = \left(A_\varepsilon^{-1}\right)^* u$$

**Propriétés**

- $\frac{\partial^k u_\varepsilon}{\partial t^k} \epsilon L_2(\Omega),\ k = \overline{0,3}$

D'autre part

- $u_\epsilon(x,0) = 0,\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x,T),\ \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}(x,T),\ \forall x \epsilon [0,1]$
- $\frac{\partial^k v_\varepsilon^*}{\partial t^k} \epsilon L_2(\Omega),\ k = \overline{0,3}$

De plus on a

- $v_\epsilon^*(x,0) = 0,\ \frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial t}(x,T),\ \frac{\partial^2 v_\varepsilon^*}{\partial t^2}(x,T),\ \forall x \epsilon [0,1]$
- $\|A_\varepsilon^{-1} u\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|_{L_2(\Omega)} \quad , \ \forall \varepsilon > 0$
- $\left\|(A_\varepsilon^{-1})^* v\right\|_{L_2(\Omega)} \leq \|v\|_{L_2(\Omega)} \quad , \ \forall \varepsilon > 0$
- $\langle A_\varepsilon^{-1} u, v\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle u, (A_\varepsilon^{-1})^* v\rangle_{L_2(\Omega)}$

Si $u \in L_2(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial x} \in L_2(\Omega)$, alors

1. $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \in L_2(\Omega)$, de plus $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\varepsilon$ et $u_\varepsilon(x,T) = A_\varepsilon^{-1}(u(0,T))$
2. $\frac{\partial u_\varepsilon^*}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\varepsilon^*$ et $u_\varepsilon^*(x,T) = (A_\varepsilon^{-1})^*(u(0,T))$
3. Si $u \in L_2(\Omega)$ alors

   a- $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} \|A_\varepsilon^{-1} u - u\|_{L_2(\Omega)} = 0$

   b- $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} \left\|(A_\varepsilon^{-1})^* u - u\right\|_{L_2(\Omega)} = 0$

**Exemple 3** *On prend $A = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, de domaine de définition*

$$D(A) = \{u \in H = L_2(0,a) \ / \ \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \epsilon L_2(0,a),\ u(0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(a) = 0\}$$

*Alors $A$ est un opérateur dissipatif.*

**Démonstration.** En effet , nous avons

$$\operatorname{Re}\langle Au, u\rangle = \operatorname{Re}\int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\overline{u}dt = \operatorname{Re}\frac{\partial u}{\partial t}\overline{u}\mid_0^a - \int_0^a \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dt \leq 0$$

■

L'opérateur

$$u_\varepsilon = \left(A_\varepsilon^{-1}\right)u = \left(u - \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

dont l'adjoint est

$$u_\varepsilon^* = \left(A_\varepsilon^{-1}\right)^* u = \left(u - \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

a les mêmes propriétés que l'opérateur $A = \frac{\partial^3}{\partial t^3}$.

**L'$\varepsilon-$inégalité**

On applique tout au long de ce travail l'$\varepsilon$-inégalité suivante :

$$Re(a, b) \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2, \forall\varepsilon > 0.$$

# Chapitre 2

# Problème mixte avec condition intégrale à une borne variable pour les équations paraboliques de type mixte

Dans ce chapitre on étudie un problème mixte avec condition intégrale à une borne variable pour une classe d'équations paraboliques du type mixte.On démontre l'existence et l'unicité de la solution dans un espace fonctionnel de Sobolev à poids. La démonstration est basée sur une estimation a priori bilatérale et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré..

## 2.1 Introduction

Dans le domaine

$$\Omega = (0, T) \times (0, 1),$$

nous considérons l'équation

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{1}{x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) = f(t, x) \tag{2.1}$$

A l'équation ( 2.1) on associe les conditions initiales,

$$lu = u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in (0, 1) \tag{2.2}$$

$$l_1 u = \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi(x), \quad x \in (0, 1) \tag{2.3}$$

la condition au bord du type Dirichlet,

$$u(t, 1) = 0, \quad t \in (0, T), \tag{2.4}$$

et la condition intégrale,

$$\int_l^1 u(t, \xi)\, d\xi = 0, \qquad 0 < l < 1, \qquad t \in (0, T) \tag{2.5}$$

On suppose que les fonctions $\varphi$ et $\psi$ satisfont les conditions données en (2.4) et (2.5), i.e.

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= 0, \quad \int_l^1 \varphi(x)\,dx = 0 \\ \psi(1) &= 0, \quad \int_l^1 \psi(x)\,dx = 0\end{aligned}$$

## 2.2 Préliminaires

Au problème (2.1)-(2.5) on associe l'opérateur $L = (\mathcal{L}, \ell_1, \ell_2)$, defini de $E$ dans $F$, où $E$ est un espace de Banach constitué des fonctions $u \in L_2(\Omega)$, verifiant les conditions (2.4) et (2.5), et muni de la norme

$$\begin{aligned}\|u\|_E^2 &= \int_\Omega \theta(x)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dxdt + \int_\Omega \theta(x)\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right)\right|^2 dxdt \\ &\quad + \sup_{0\le t\le T}\int_0^1 \theta(x)\left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\right] dx \qquad (2.6)\end{aligned}$$

et $F$ est l'espace de Hilbert constitué des fonctions vectorielles $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi)$ obtenu comme complété de l'espace

$$L_2(\Omega) \times W_{2,0}^2(0,1) \times W_{2,0}^2(0,1)$$

par rapport à la norme

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}\|_F^2 &= \|(f,\varphi,\psi)\|_F^2 = \int_\Omega \theta(x)|f|^2\,dxdt \\ &\quad + \int_0^1 \theta(x)\left[\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2\right] dx \qquad (2.7)\end{aligned}$$

où

$$\theta(x)=\begin{cases} lx, & 0<x\leq l \\ x^2\ , & l\leq x<1 \end{cases} \tag{2.8}$$

En utilisant la méthode des inégalités énergétiques proposée dans [52] , nous établissons une estimation a priori bilatérale. Alors on montre que l'opérateur $L$ est un homéomorphisme linéaire entre les espaces $E$ et $F$.

## 2.3 Estimation a priori bilatérale

**Théorème 5** *Pour chaque fonction $u\in E$ on a l'estimation a priori*

$$\|Lu\|_F\leq C\|u\|_E \tag{2.9}$$

*où $c$ est une constante indépendante de $u$.*

**Démonstration.** De l'équationn (2.1) sous les conditions (2.2) on obtient

$$\int_\Omega \theta(x)\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt\leq \int_\Omega \theta(x)\left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2+\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right)\right|^2\right]dxdt \tag{2.10}$$

et

$$\int_0^1 \theta(x)\left[\left|\frac{dlu}{dx}\right|^2+\left|\frac{dl_1u}{dx}\right|^2\right]dx\leq \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^1 \theta(x)\left[\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2\right]dx \tag{2.11}$$

En combinant les inégalités (2.10) et (2.11), on obtient (2.9) pour tout $u\in E$. ■

**Théorème 6** *Pour toute fonction $u\in E$, on a l'estimation a priori*

$$\|u\|_E\leq\alpha\|Lu\|_F \tag{2.12}$$

*où la constante $\alpha=\frac{e^{-cT}}{8}$ avec $\frac{1}{2}\leq c\leq 1$.*

Avant de démontrer ce théorème, nous donnons tout d'abord le lemme suivant :

**Lemme 1** *Pour toute fonction $u \in E$ vérifiant les conditions (2.3).*

$$\frac{1}{4}\int_0^{\tau}\int_0^1 \theta(x)\, e^{-ct}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right|^2 dxdt + \frac{c-1}{4}\int_0^{\tau}\int_0^1 \theta(x)\, e^{-ct}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxd \tag{2.13}$$

$$\geq \frac{1}{4}\int_0^1 \theta(x)\, e^{-c\tau}\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\right|^2 dx - \frac{1}{4}\int_0^1 \theta(x)\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dxdt$$

**Proof of lemma.** En partant de

$$\int_0^{\tau}\int_0^1 \theta(x)\, e^{-ct}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} dxdt$$

ensuite en intégrant par parties et en utilisant des inégalités élémentaires, on obtient (2.13) ∎

**Proof of theorem.** On définit

$$J_x g = \int_x^1 g(t,\xi)\, d\xi \ ,$$

et

$$Mu = \begin{cases} lxu, & 0 < x \leq l \\ x^2 u + x J_x u \ , & l \leq x < 1 \end{cases}$$

en multipliant l'équation (2.1) par

$$M\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}e^{-ct}$$

et en intégrant sur

$$\Omega^{\tau} = (0,\tau)\times(0,1)\,,$$

on obtient

$$\mathrm{Re}\int_0^{\tau}\int_0^1 \mathcal{L}uM\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}e^{-ct}dxdt = \int_0^{\tau}\int_0^1 e^{-ct}\theta(x)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dxdt$$

$$+\,\mathrm{Re}\int_0^{\tau}\int_0^1 \theta(x)\, e^{-ct}\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}dxdt + \frac{1}{2}\int_0^{\tau}\int_l^1 e^{-ct}\left|J_x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dxdt \tag{2.14}$$

en intégrant par parties

$$\mathrm{Re}\int_0^\tau\int_0^1\theta\left(x\right)e^{-ct}\frac{\partial^3u}{\partial t^2\partial x}\frac{\partial^2u}{\partial t\partial x}dxdt,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}\mathcal{L}uM\overline{\frac{\partial^2u}{\partial t^2}}dxdt+\frac{1}{2}\int_0^1\theta\left(x\right)\left|\frac{dl_1u}{dx}\right|^2dx\\
=&\int_0^\tau\int_0^1\theta\left(x\right)e^{-ct}\left|\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right|^2dxdt+\frac{1}{2}\int_0^1\left[\theta\left(x\right)e^{-c\tau}\left|\frac{\partial^2u\left(\tau,x\right)}{\partial x\partial t}\right|^2\right]dx\\
&+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_l^1 e^{-ct}\left|J_x\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right|^2dxdt+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^1\theta\left(x\right)ce^{-ct}\left|\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}\right|^2dxdt \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

et en utilisant des inégalités élémentaires, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}\mathcal{L}uM\overline{\frac{\partial^2u}{\partial t^2}}dxdt\leq\frac{3}{2}\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}\theta\left(x\right)\left|\mathcal{L}u\right|^2dxdt\\
&+\frac{1}{4}\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}\theta\left(x\right)\left|\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right|^2dxdt+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_l^1 e^{-ct}\left|J_x\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right|^2dxdt. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

de l'équation (2.1) on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}\theta\left(x\right)\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2u}{\partial t\partial x}\right)\right|^2dxdt\leq\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}\theta\left(x\right)\left|\mathcal{L}u\right|^2dxdt\\
&+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^1 e^{-ct}\theta\left(x\right)\left|\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right|^2dxdt \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

en combinant les inégalités (2.14), (2.15) , (2.16) et le lemme 1 on a

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{-cT}}{4}\int_\Omega\theta\left(x\right)\left|\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right|^2dxdt+\frac{e^{-cT}}{2}\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^1\theta\left(x\right)\left|\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}\right|^2dx+\\
&\frac{e^{-cT}}{4}\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^1\theta\left(x\right)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2dx+\frac{e^{-cT}}{4}\int_\Omega\theta\left(x\right)\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2u}{\partial t\partial x}\right)\right|^2dxdt\\
&\leq 2\int_\Omega\theta\left(x\right)\left|\mathcal{L}u\right|^2dxdt+\frac{1}{2}\int_0^1\theta\left(x\right)\left|\frac{d\psi}{dx}\right|^2dx+\frac{1}{4}\int_0^1\theta\left(x\right)\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2dx \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Comme le membre de gauche de (2.18) est indépendant de $\tau$, en prenant le *sup* du membre droit par rapport à $\tau$ sur l'intervalle $[0,T]$, on obtient l'inégalité désirée. ■

## 2.4 Résolvabilité du problème

Des estimations (2.9) et (2.12), on déduit que l'opérateur $L : E \longrightarrow F$ est continu et que son image $R(L)$ est fermée dans $F$ . D'où l'opérateur inverse $L^{-1}$ existe et est continu de $R(L)$ dans $E$, ainsi $L$ est un homéomorphisme de $E$ dans $R(L)$. Pour obtenir l'unicité de la solution, il suffit de montrer que $R(L) = F$.

La démonstration est basée sur le théorème suivant :

**Théorème 7** *Soit*

$$D_0(L) = \{u \in D(L) \ / \ lu = 0, \ l_1 u = 0\}.$$

*Si*

$$\int_\Omega \theta(x) \mathcal{L} u \overline{\omega} dx dt = 0 \tag{2.19}$$

*pour $\omega$ telle que*

$$\theta(x) \omega \in L_2(\Omega)$$

et tout $u \in D_0(L)$, alors $\omega$ s'annule partout sur $\Omega$.

**Démonstration.** En remplaçant dans (2.19)

$$h = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \text{où} \quad h, \ x\frac{\partial h}{\partial x}, \ \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial h}{\partial x}\right) \in L_2(\Omega)$$

et $h$ vérifiant les conditions au bord (2.4)-(2.5) on obtient

$$\int_\Omega \theta(x) h \overline{\omega} dx dt = \int_\Omega \frac{1}{x} \theta(x) \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial h}{\partial x}\right) J_t \overline{\omega} dx dt$$

$$= \int_\Omega \frac{1}{x^2} \theta(x) \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}(xh)\right) J_t \overline{\omega} dx dt$$

$$-2\int_\Omega \frac{1}{x^2} \theta(x) \frac{\partial}{\partial x}(xh) J_t \overline{\omega} dx dt + \int_\Omega \frac{1}{x^3} \theta(x)(xh) J_t \overline{\omega} dx dt \tag{2.20}$$

où

$$J_t \omega = \int_t^T \omega(\tau, x) d\tau$$

.

Le membre gauche de (2.20) montre que l'application

$$xh \longmapsto \int_\Omega \frac{1}{x}\theta(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial h}{\partial x}\right)J_t\omega dxdt$$

est une fonctionnelle linéaire. Apartir du membre droit de (2.20) il s'ensuit que ceci est vrai si la fonction $\omega$ vérifie les propriétés suivantes

$$\frac{\theta(x)}{x^3}J_t\omega,\ \frac{\theta(x)}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}(J_t\omega),\ \frac{\theta(x)}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}(J_t\omega)\right)\in L_2(\Omega)$$

et

$$J_t\omega|_{x=1}=0$$

Pour la fonction $\omega$ donnée, de légalité (2.19) on définit la fonction

$$v=\begin{cases} J_t\omega, & 0<x\leq l \\ -\int_x^1 J_t\omega(t,\xi)\frac{1}{\xi}d\xi + J_t\omega, & l\leq x<1 \end{cases}$$

Alors on déduit que

$$\int_x^1 v(t,\xi)d\xi = -\int_x^1 d\xi\int_\xi^1 J_t\omega(t,\eta)d\eta + \int_x^1 J_t\omega(t,\xi)d\xi$$

$$= x\int_x^l J_t\omega(t,\xi)\frac{1}{\xi}d\xi,$$

$$J_xv = x(v-J_t\omega) \qquad \text{and} \qquad \int_l^1 v(t,x)dx=0 \tag{2.21}$$

en remplaçant $h=J_t^\star v$ dans (2.20), où

$$J_t^\star v=\int_0^t v(\tau,x)d\tau,$$

on obtient

$$\int_\Omega J_t^\star v\frac{\partial}{\partial x}(M\overline{v})dxdt = \int_\Omega \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}J_t^\star v\right)M\overline{v}dxdt \tag{2.22}$$

en faisant les mêmes calculs que dans le théorème 2 , en remplaçant $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ par $v$ , et en tenant compte de (2.21), on obtient

$$\int_{\Omega} \theta(x) |v|^2 \, dxdt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_l^1 |J_x v|^2 \leq 0,$$

alors $v = 0$, d'où $\omega = 0$. Ceci montre le théorème 3. ∎

**Théorème 8** *L'image $R(L)$ de $L$ coincide avec $F$*

**Démonstration.** Comme $F$ est un espace de Hilbert, on a $R(L) = F$ si et seulement si la relation

$$\int_{\Omega} \theta(x) \mathcal{L}u\overline{f} dxdt + \int_0^1 \theta(x) \left[ \left| \frac{dlu}{dx} \frac{\overline{d\varphi}}{dx} \right|^2 + \left| \frac{dl_1 u}{dx} \frac{\overline{d\psi}}{dx} \right|^2 \right] dx = 0 \tag{2.23}$$

qui implique

$$\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi) = 0.$$

En particulier, si on met $lu = 0$ et $l_1 u = 0$ dans (2.23), nous concluons à partir du théoreme 3 que $f = 0$, il découle de (2.23)

$$\int_0^1 \theta(x) \left[ \left| \frac{dlu}{dx} \frac{\overline{d\varphi}}{dx} \right|^2 + \left| \frac{dl_1 u}{dx} \frac{\overline{d\psi}}{dx} \right|^2 \right] dx = 0$$

Comme l'image de l'opérateur trace $(\ell_1, \ell_2)$ est partout dense dans l'espace de hilbert muni de la norme

$$\left[ \int_0^1 \theta(x) \left[ \left| \frac{d\varphi}{dx} \right|^2 + \left| \frac{d\psi}{dx} \right|^2 \right] dx \right]^{\frac{1}{2}},$$

alors

$$\varphi = 0, \psi = 0.$$

Et par conséquent, $\mathcal{F} = 0$; ∎

# Chapitre 3

# Problème mixte avec condition intégrale à deux bornes variables pour les équations aux dérivées partielles du type mixte.

Dans ce chapitre on étudie un problème mixte avec condition intégrale avec deux bornes variables pour les équations aux dérivées partielles du type mixte.On démontre l'existence et l'unicité de la solution dans un espace fonctionnel de Sobolev à poids. La démonstration est basée sur une estimation a priori bilatérale et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré..

## 3.1 Introduction

Dans lc domainc

$$\Omega = \{(x,t) \in (0,1) \times (0,T)\,,\ T > 0\}$$

nous considérons l'équation

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a\,(t)\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = f(x,t). \tag{3.1}$$

où la fonction $a(t)$ et ses dérivées sont bornées sur l'intervallel $[0,T]$ :

$$0 < a_0 < a\,(t) \leq a_1,$$

$$0 < a_2 \leq \frac{da\,(t)}{dt} \leq a_3.$$

A l'équation (3.1) on associe les conditions initiales,

$$\begin{cases} \ell_1 u = u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (0,1), \\ \\ \ell_2 u = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi\,(x)\,,\ x \in (0,1), \end{cases} \tag{3.2}$$

la condition au bord du type Dirichlet,

$$u(0,t) = u(1,t) \quad t \in (0,T), \tag{3.3}$$

et la condition intégrale,

$$\int_0^\alpha u(\xi,t)d\xi + \int_\beta^1 u(\xi,t)d\xi = 0 \tag{3.4}$$

$$\alpha > 0,\ \beta > 0,\quad \alpha \leq \beta\ ,\quad \alpha+\beta = 1 \qquad , \qquad t \in (0,T)$$

Où, les fonctions $\varphi$ et $\psi$ sont données vérifiant les conditions de compatibilité suivantes :

$$\varphi(0) = \varphi(1), \qquad \int_0^\alpha \varphi(x)dx + \int_\beta^1 \varphi(x)dx = 0,$$

$$\psi\,(0) = \psi\,(1)\,, \qquad \int_0^\alpha \psi(x)dx + \int_\beta^1 \psi(x)dx = 0.$$

Lors de l'étude classique de la solution du problème (3.1)-(3.4), avec la condition (3.4) les conditions suivantes doivent être remplies

$$a(0)\left(\psi^{"}(1) - \psi^{"}(0)\right) = f(0,0) - f(1,0),$$

$$a(0)\left\{\int_0^\alpha \psi''(x)dx + \int_\beta^1 \psi''(x)dx\right\} + \int_0^\alpha f(x,0)dx + \int_\beta^1 f(x,0)dx = 0.$$

La modélisation mathématique de différents phénomènes conduit à des problèmes avec des conditions non locles ou des conditions au bord du type integrales . De telles conditions se produisent dans le cas où l'on mesure une valeur moyenne de certains paramètres à l'intérieur du domaine,

Dans ce chapitre nous étudions un problème avec condition intégrale à deux bornes variables pour une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre.

Au problème (3.1)-(3.4) on associe l'opérateur

$$L = (\mathcal{L}, \ell_1, \ell_2)$$

defini de $E$ dans $F$, où $E$ est un espace de Banach constitué des fonctions $u \in L_2(\Omega)$, verifiant les conditions (3.3) et (3.4), et muni de la norme

$$\|u\|_E^2 = \int_\Omega \frac{\theta(x)}{2}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}\right|^2\right] dxdt + \sup_{0\le t\le T}\int_0^1 \frac{\theta(x)}{2}\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right|^2\right\} dx$$

$$+ \sup_{0\le t\le T}\int_0^\alpha \left\{|u|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right\} dx + \sup_{0\le t\le T}\int_\beta^1 \left\{|u|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right\} dx, \tag{3.5}$$

et $F$ est l'espace de Hilbert constitué des fonctions vectorielles

$$\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi)$$

obtenu comme complété de l'espace

$$L_2(\Omega) \times W_2^2(0,1) \times W_2^2(0,1)$$

par rapport à la norme

$$\|\mathcal{F}\|_F^2 = \|(f,\varphi,\psi)\|_F^2 = \int_\Omega \frac{\theta(x)}{2}|f|^2 dxdt + \int_0^1 \frac{\theta(x)}{2}\left\{\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 + \left|\frac{d\psi}{dx}\right|^2\right\} dx$$

$$+ \int_0^\alpha \left\{|\varphi|^2 + |\psi|^2\right\} dx + \int_\beta^1 \left\{|\varphi|^2 + |\psi|^2\right\} dx, \tag{3.6}$$

où

$$\theta(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x \le \alpha \\ (1-\beta)^2 & \alpha \le x \le \beta \\ (1-x)^2 & \beta \le x < 1. \end{cases}$$

En utilisant la méthode des inégalités énergétiques proposée dans [52], nous établissons une estimation a priori bilatérale. Alors on montre que l'opérateur $L$ est un homéomorphisme linéaire entre les espaces $E$ et $F$.

## 3.2 Estimation a priori bilatérale

**Théorème 9** *Pour chaque fonction $u \in E$ on a l'estimation a priori*

$$\|Lu\|_F \leq c\,\|u\|_E\,, \tag{3.7}$$

*où $c$ est une constante indépendante de $u$.*

**Démonstration.** De l'équation (3.1) sous les conditions (3.2) on obtient

$$\int_\Omega \frac{\theta(x)}{2}\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt \leq 2\int_\Omega \frac{\theta(x)}{2}\left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 + a_1^2\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}\right|^2\right] dxdt, \tag{3.8}$$

$$\int_0^1 \frac{\theta(x)}{2}\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx \leq \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^1 \frac{\theta(x)}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx, \tag{3.9}$$

$$\int_0^1 \frac{\theta(x)}{2}\left|\frac{d\psi}{dx}\right|^2 dx \leq \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^1 \frac{\theta(x)}{2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right|^2 dx, \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\alpha |\varphi|^2 dx &\leq \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^\alpha |u|^2 dx,\\
\int_0^\alpha |\psi|^2 dx &\leq \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^\alpha \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_\beta^1 |\varphi|^2 dx &\leq \sup_{0\leq t\leq T}\int_\beta^1 |u|^2 dx,\\
\int_\beta^1 |\psi|^2 dx &\leq \sup_{0\leq t\leq T}\int_\beta^1 \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

En combinant les inégalités (3.8), (3.9), (3.10), (3.11) et (3.12), on obtient (3.7) pour tout $u \in E$. ■

**Lemme 2** *[23] Pour $u \in E$,on a*

$$\frac{1}{4}\int_0^\alpha \left|\int_x^\alpha \frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t^2} d\xi\right|^2 dx \leq \int_0^\alpha x^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dx. \tag{3.13}$$

**Lemme 3** *[23] Pour $u \in E$, on a*

$$\frac{1}{4}\int_{\beta}^{1}\left|\int_{\beta}^{x}\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t^2}d\xi\right|^2 dx \leq \int_{\beta}^{1}(1-x)^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dx. \tag{3.14}$$

**Lemme 4** *Pour toute fonction $u \in E$ vérifiant les conditions initiales (3.2) et $c \geq 1$ on a*

$$\int_0^1 \exp(-c\tau)\ \theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\right|^2 dx \leq \int_0^{\tau}\int_0^1 \exp(-ct)\ \theta(x)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right|^2 dxdt$$

$$+\int_0^1 \theta(x)\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx. \tag{3.15}$$

**Démonstration.** En partant de

$$\int_0^{\tau}\int_0^1 \exp(-c\tau)\ \theta(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}dxdt,$$

ensuite en intégrant par parties et en utilisant les inégalités élémentaires, on obtient (3.15). ■

**Lemme 5** *Pour toute fonction $u \in E$ vérifiant les conditions initiales (3.2) et $c \geq 1$ on a*

$$\begin{aligned}\int_0^{\alpha}\exp(-c\tau)\ |u(x,\tau)|^2 dx &\leq \int_0^{\tau}\int_0^{\alpha}\exp(-ct)\ \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt + \int_0^{\alpha}|\varphi|^2 dx, \\ \int_{\beta}^1\exp(-c\tau)\ |u(x,\tau)|^2 dx &\leq \int_0^{\tau}\int_{\beta}^{1}\exp(-ct)\ \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt + \int_{\beta}^{1}|\varphi|^2 dx.\end{aligned} \tag{3.16}$$

**Démonstration.** En intégrant par parties les expressions

$$\begin{gathered}\int_0^{\tau}\int_0^{\alpha}\exp(-c\tau)\, u\ \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dxdt, \\ \int_0^{\tau}\int_{\beta}^{1}\exp(-c\tau)\, u\ \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dxdt,\end{gathered}$$

et en utilsant des inégalités élémentaires on déduit (3.16). ■

**Théorème 10** *Pour toute fonction $u \in E$, on a l'estimation a priori*

$$\|u\|_E \leq k\,\|Lu\|_F\,, \tag{3.17}$$

*où*

$$k=\frac{\exp(cT)\max\left(33,\frac{a_0}{2}\right)}{\min\left(\frac{7}{16},\frac{a_0^2}{2},\frac{a_0}{2}\right)},$$

*et la constante c vérifie*

$$c\geq 1\quad,\quad ca_0\geq a_3. \tag{3.18}$$

**Démonstration.** On définit

$$Mu=\begin{cases} x^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2x\int_x^\alpha \frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t^2}d\xi & 0<x\leq\alpha \\ \\ (1-\beta)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & \alpha\leq x\leq\beta \\ \\ (1-x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\left(1-x\right)\int_\beta^x \frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t^2}d\xi & \beta\leq x<1 \\ . \end{cases}$$

Considérons pour $u\in E$ la forme quadratique suivante

$$\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^\ell \exp\left(-ct\right)\mathcal{L}u\overline{Mu}dxdt, \tag{3.19}$$

où la constante $c$ satisfait (3.18), obtenue en multipliant l'équation (3.1) par

$$\exp(-ct)\overline{Mu},$$

et en intégrantsur $\Omega^\tau$, où

$$\Omega^\tau=(0,1)\times(0,\tau)\,,\ \text{avec}\quad 0\leq\tau\leq T,$$

et en prenant la partie réelle. Intégrant par parties dans (3.19) en utilisant les conditions au bord (3.3) et (3.4), on obtient

$$\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^1 \exp\left(-ct\right)\mathcal{L}uM\overline{u}dxdt=\int_0^\tau\int_0^1\theta(x)\exp\left(-ct\right)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2dxdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^\alpha \exp\left(-ct\right)\left|\int_x^\alpha\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t^2}\right|^2dxdt+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_\beta^1\exp\left(-ct\right)\left|\int_\beta^x\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t^2}\right|^2dxdt$$

$$+\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^1 \exp(-ct)\,\theta(x)a\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\frac{\partial^3\overline{u}}{\partial x\partial t^2}dxdt$$

$$+2\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^\alpha \exp(-ct)\,\frac{\partial u}{\partial t}a\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial t^2}dxdt+2\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_\beta^1 \exp(-ct)\,\frac{\partial u}{\partial t}a\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial t^2}dxdt, \tag{3.20}$$

D'autre part, en utilisant les inégalités élémentaires, le lemme3 et le lemme 4 on obtient

$$\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^1 \exp(-ct)\,\mathcal{L}uM\overline{u}dxdt+\int_0^\alpha|\varphi|^2dx+\int_\beta^1|\varphi|^2dx+\int_0^1\theta(x)\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2dx\geq$$

$$\int_0^\tau\int_0^1\theta(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2dxdt+\int_0^\alpha\exp(-c\tau)\ |u(x,\tau)|^2dx$$

$$-\int_0^\tau\int_0^\alpha\exp(-ct)\ \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dxdt+\int_\beta^1\exp(-c\tau)\ |u(x,\tau)|^2dx-\int_0^\tau\int_\beta^1\exp(-ct)\ \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dxdt$$

$$+\int_0^1\exp(-c\tau)\ \theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\right|^2dx-\int_0^\tau\int_0^1\exp(-ct)\ \theta(x)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2dxdt$$

$$+\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^1\exp(-ct)\ \theta(x)a\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\frac{\partial^3\overline{u}}{\partial x\partial t^2}dxdt$$

$$+2\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^\alpha \exp(-ct)\,\frac{\partial u}{\partial t}a\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial t^2}dxdt+2\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_\beta^1 \exp(-ct)\,\frac{\partial u}{\partial t}a\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial t^2}dxdt. \tag{3.21}$$

On intègre une autre fois par parties le deuxième, le troisième et le qutième du membredroit de (3.21) , en tenant compte des conditions initiales (3.2) et (3.18) on a alors

$$\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^1\exp(-ct)\ \theta(x)a\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\frac{\partial^3\overline{u}}{\partial x\partial t^2}dxdt-\int_0^\tau\int_0^1\exp(-ct)\ \theta(x)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2dxdt\geq$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1\exp(-c\tau)\ \theta(x)a(\tau)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}(x,\tau)\right|^2dx-\frac{1}{2}\int_0^1\theta(x)a(0)\left|\frac{d\psi}{dx}\right|^2dx, \tag{3.22}$$

$$\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^\alpha\exp(-ct)\,\frac{\partial u}{\partial t}a\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial t^2}dxdt-\int_0^\tau\int_0^\alpha\exp(-ct)\ \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dxdt\geq$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\alpha\exp(-c\tau)\,a(\tau)\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)\right|^2dx-\frac{1}{2}\int_0^\alpha a(0)\,|\psi|^2dx, \tag{3.23}$$

$$\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_\beta^1\exp(-ct)\,\frac{\partial u}{\partial t}a\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial t^2}dxdt-\int_0^\tau\int_\beta^1\exp(-ct)\ \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dxdt\geq$$

$$\frac{1}{2}\int_\beta^1\exp(-c\tau)\,a(\tau)\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)\right|^2dx-\frac{1}{2}\int_\beta^1 a(0)\,|\psi|^2dx. \tag{3.24}$$

En remplaçant (3.22), (3.23) et (3.24) dans (3.21) on obtient

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^1 \exp(-ct)\,\mathcal{L}uM\overline{u}dxdt+\int_0^\alpha a(0)\left|\psi\right|^2dx+\int_\beta^1 a(0)\left|\psi\right|^2dx.\\
&+\frac{1}{2}\int_0^1 \theta(x)a(0)\left|\frac{d\psi}{dx}\right|^2dx+\int_0^\alpha \left|\varphi\right|^2dx+\int_\beta^1\left|\varphi\right|^2dx\\
&+\int_0^1\theta(x)\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2dx\geq\int_0^\tau\int_0^1\theta(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right|^2dxdt\\
&+\frac{1}{2}\int_0^1\exp(-c\tau)\;\theta(x)a(\tau)\left|\frac{\partial^2u}{\partial t\partial x}(x,\tau)\right|^2dx+\int_0^1\exp(-c\tau)\;\theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\right|^2dx\\
&+\int_0^\alpha\exp(-c\tau)\;\left|u(x,\tau)\right|^2dx+\int_\beta^1\exp(-c\tau)\;\left|u(x,\tau)\right|^2dx\\
&+\int_0^\alpha\exp(-c\tau)\,a(\tau)\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)\right|^2dx+\int_\beta^1\exp(-c\tau)\,a(\tau)\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)\right|^2dx.
\end{aligned}\tag{3.25}$$

En utilisant des inégalités élémentaires dans la première intégrale dans le membre gauche de (3.25) et en utilisant le lemme 1 et le lemme 2, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{23}{32}\int_0^\tau\int_0^1\theta(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right|^2dxdt+\frac{1}{2}\int_0^1\exp(-c\tau)\;\theta(x)a(\tau)\left|\frac{\partial^2u}{\partial t\partial x}(x,\tau)\right|^2dx\\
&+\int_0^\alpha\exp(-c\tau)\,a(\tau)\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)\right|^2dx+\int_\beta^1\exp(-c\tau)\,a(\tau)\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)\right|^2dx.\\
&+\int_0^1\exp(-c\tau)\;\theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\right|^2dx+\int_0^\alpha\exp(-c\tau)\;\left|u(x,\tau)\right|^2dx\\
&+\int_\beta^1\exp(-c\tau)\;\left|u(x,\tau)\right|^2dx\leq 16\int_0^\tau\int_0^1\theta(x)\exp(-ct)\left|\mathcal{L}u\right|^2dxdt\\
&+\frac{1}{2}\int_0^1\theta(x)a(0)\left|\frac{d\psi}{dx}\right|^2dx+\int_0^\alpha\left|\varphi\right|^2dx+\int_\beta^1\left|\varphi\right|^2dx\\
&+\int_0^1\theta(x)\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2dx+\int_0^\alpha a(0)\left|\psi\right|^2dx+\int_\beta^1 a(0)\left|\psi\right|^2dx.
\end{aligned}\tag{3.26}$$

De l'équation (3.1) on a

$$\frac{a_0}{2}\int_0^\tau\int_0^1\theta(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial^3u}{\partial t\partial x^2}\right|^2dxdt\leq\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^1\exp(-ct)\;\theta(x)\left|\mathcal{L}u\right|^2dxdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\tau}\int_0^1 \exp\left(-ct\right)\ \theta(x)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dxdt. \tag{3.27}$$

En combinant les inégalités (3.26), (3.27) on obtient

$$\frac{33}{2}\int_{\Omega}\theta(x)\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt+\frac{a_1}{2}\int_0^1 \theta(x)\left\{\left|\frac{d\psi}{dx}\right|^2+\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2\right\}dx+\frac{a_1}{2}\int_0^{\alpha}\left\{|\psi|^2+|\varphi|^2\right\}dx$$

$$+\frac{a_0}{2}\int_{\beta}^1\left\{|\psi|^2+|\varphi|^2\right\}dx\geq \exp(-cT)\left(\frac{7}{32}\int_0^{\tau}\int_0^1 \theta(x)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dxdt\right.$$

$$+\frac{a_0}{2}\int_0^1 \theta(x)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}(x,\tau)\right|^2 dx+\frac{a_0}{2}\int_0^{\alpha}\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)\right|^2 dx+\frac{a_0}{2}\int_{\beta}^1\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau)\right|^2 dx$$

$$+\int_0^1 \exp\left(-c\tau\right)\ \theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\right|^2 dx+\int_0^{\alpha}\exp\left(-c\tau\right)\ \left|u(x,\tau)\right|^2 dx$$

$$\left.+\int_{\beta}^1 \exp\left(-c\tau\right)\ \left|u(x,\tau)\right|^2 dx+\frac{a_0^2}{4}\int_0^{\tau}\int_0^1 \theta(x)\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}\right|^2 dxdt\right). \tag{3.28}$$

Comme le membre de gauche de (3.28) est indépendant de $\tau$, en prenant le *sup* du membre droit par rapport à $\tau$ sur l'intervalle $[0,T]$, on obtient l'inégalité désirée.. ■

## 3.3 Résolvabilité du problème

Des estimations (3.7) et (3.17) on déduit que l'opérateur $L : E \longrightarrow F$ est continu et que son image $R\left(L\right)$ est fermée dans $F$ . D'où l'opérateur inverse $L^{-1}$ existe et est continu de $R\left(L\right)$ dans $E$, ainsi $L$ est un homéomorphisme de $E$ dans $R\left(L\right)$. Pour obtenir l'unicité de la solution, il suffit de montrer que $R\left(L\right)=F$. La démonstration est basée sur le lemme suivant :

**Lemme 6** *Soit*

$$D_0\left(L\right)=\left\{u\in E:\ell_1 u=0,\quad \ell_2 u=0\right\}.$$

*Si pour tout* $u\in D_0\left(L\right)$ *et un certain* $\omega\in L_2\left(\Omega\right)$, *on a*

$$\int_{\Omega}\phi(x)\mathcal{L}u\varpi dxdt=0, \tag{3.29}$$

*where*

$$\phi(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq \alpha \\ \\ (1-\beta) & \alpha \leq x \leq \beta \\ \\ (1-x) & \beta \leq x < 1, \end{cases}$$

*alors,* $\omega = 0$.

**Démonstration.** En remplaçant $\mathcal{L}u$ par son expression dans (3.29) on a

$$\int_{\Omega} \phi(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \varpi dxdt = \int_{\Omega} \phi(x) a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \varpi dxdt. \tag{3.30}$$

A partir de

$$\omega(x,t) \in L_2(\Omega)$$

on construit la fonction $v$ telle que

$$v(x,t) = \begin{cases} \omega - \int_x^{\alpha} \frac{\omega(\xi,t)}{\xi} d\xi & 0 < x \leq \alpha \\ \\ \omega & \alpha \leq x \leq \beta \quad . \\ \\ \omega - \int_{\beta}^{x} \frac{\omega(\xi,t)}{1-\xi} d\xi & \beta \leq x < 1. \end{cases}$$

En intégrant par parties par rapport à $\xi$, on obtient

$$\phi(x)\omega = \begin{cases} xv + \int_x^{\alpha} v(\xi,t) d\xi & 0 < x \leq \alpha \\ \\ (1-\beta)\, v & \alpha \leq x \leq \beta \\ \\ (1-x)v + \int_{\beta}^{x} v(\xi,t) d\xi & \beta \leq x < 1, \end{cases}$$

qui implique que

$$\int_x^\alpha v(\xi,t)d\xi = \int_\beta^1 v(\xi,t)d\xi = 0. \tag{3.31}$$

Ainsi, de l'égalité (3.30) on obtient

$$-\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\overline{Nv}dxdt = \int_\Omega A(t)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{v}dxdt, \tag{3.32}$$

où

$$\begin{aligned} Nv &= \phi(x)v, \\ &\text{et} \\ A(t)u &= -a(t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right). \end{aligned}$$

Introduisons les opérateur de régularisation $t$ [18], [22], [23] et [24],

$$J_\xi^{-1} = \left(I + \xi\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1} et \left(J_\xi^{-1}\right)^*,$$

alors ces opérateurs fournissent les solutions des problèmes respectifs :

$$\begin{aligned} \xi\frac{dg_\xi(t)}{dt} + g_\xi(t) &= g(t) \\ g_\xi(t)\,|_{t=0} &= 0, \end{aligned} \tag{3.33}$$

et

$$\begin{aligned} -\xi\frac{dg_\xi^*(t)}{dt} + g_\xi^*(t) &= g(t) \\ g_\xi(t)\,|_{t=T} &= 0, \end{aligned} \tag{3.34}$$

et ces opérateurs vérifient les propriétés suivantes :

Pour $g \in L_2(0,T)$, les fonctions

$$g_\xi = \left(J_\xi^{-1}\right) g \quad \text{et} \quad g_\xi^* = \left(J_\xi^{-1}\right)^* g$$

sont dans $W_2^1\left(0,T\right)$ telles que

$$g_\xi \mid_{t=0}= 0 et g_\xi^* \mid_{t=T}= 0.$$

D'ailleurs, $J_\xi^{-1}$ commute avec $\frac{\partial}{\partial t}$, et on a

$$\int_0^T \left|g_\xi - g\right|^2 dt \longrightarrow 0, \int_0^T \left|g_\xi^* - g\right|^2 dt \longrightarrow 0 \; pour \xi \longrightarrow 0.$$

En remplaçant

$$u = \int_0^t \int_0^\eta \exp(c\tau) v_\xi^* \left(x,\tau\right) d\tau d\eta$$

dans (3.32), où la constante $c$ satisfait

$$ca_0 - a_3 - \frac{\xi a_3^2}{2a_0} \geq 0,$$

et en utilisant (3.34), on obtient

$$-\int_\Omega \exp(ct) v_\xi^* \overline{Nv} dx dt = +\int_\Omega A\left(t\right) \frac{\partial u}{\partial t} \exp(-ct) \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} dx dt - \xi \int_\Omega A\left(t\right) \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \overline{v_\xi^*}}{\partial t} dx dt. \tag{3.35}$$

En intégrant par parties chaque terme dans le membre gauche de (3.35) et en prenant la la partie réelle on obtient

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \int_\Omega A\left(t\right) \frac{\partial u}{\partial t} \exp(-ct) \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} dx dt &= \int_0^1 a\left(t\right) \exp(-ct) \phi(x) \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x,T)\right|^2 dx \\ &+ \int_\Omega \exp(-ct) \phi(x) \left(ca\left(t\right) - \frac{da(t)}{dt}\right) \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right|^2 dx dt, \end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\operatorname{Re}\left(-\xi \int_\Omega A\left(t\right) \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \overline{v_\xi^*}}{\partial t} dx dt\right) = \operatorname{Re}\left(\xi \int_\Omega \frac{da(t)}{dt} \phi(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial \overline{v_\xi^*}}{\partial x} dx dt\right)$$

$$+\int_{\Omega} a\,(t)\exp(-ct)\phi(x)\left|\frac{\partial\overline{v_{\xi}^{*}}}{\partial x}\right|^{2} dxdt. \tag{3.37}$$

En utilisant l'$\varepsilon$-inégalité on obtient

$$\operatorname{Re}\left(-\xi\int_{\Omega} A\,(t)\,u\frac{\partial\overline{v_{\xi}^{*}}}{\partial t}dxdt\right) \geq \frac{-\xi}{2a_0}\int_{\Omega}\exp(-ct)\phi(x)\left|\frac{da(t)}{dt}\right|^{2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right|^{2} dxdt. \tag{3.38}$$

En combinant (3.36) et (3.38) on obtient

$$-\operatorname{Re}\left(\int_{\Omega}\exp(ct)v_{\xi}^{*}\overline{Nv}dxdt\right) \geq \int_{\Omega}\exp(-ct)\phi(x)\left(ca_0 - a_3 - \frac{\xi a_3^2}{2a_0}\right)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right|^{2} dxdt \geq 0. \tag{3.39}$$

En utilisant (3.39), on a

$$\operatorname{Re}\int_{\Omega}\exp(ct)v_{\xi}^{*}\overline{Nv}dxdt \leq 0.$$

Alors, pour $\xi \longrightarrow 0$ on obtient

$$\operatorname{Re}\int_{\Omega}\exp(ct)v\overline{Nv}dxdt = \int_{\Omega}\exp(ct)\phi(x)\left|v\right|^{2} dxdt \leq 0.$$

On conclut alors que $v = 0$ ; donc, $\omega = 0$, ce qui achève la démonstration du lemme. ■

**Théorème 11** *L'image $R(L)$ de $L$ coincide avec $F$*

**Démonstration.** Comme $F$ est un espace de Hilbert, on a $R(L) = F$ si et seulement si la relation

$$\int_{\Omega}\frac{\theta(x)}{2}\mathcal{L}u\overline{f}dxdt + \int_{0}^{1}\frac{\theta(x)}{2}\left\{\frac{d\ell_1 u}{dx}\frac{d\overline{\varphi}}{dx} + \frac{d\ell_2 u}{dx}\frac{d\overline{\psi}}{dx}\right\}dx$$

$$+\int_{0}^{\alpha}\left\{\ell_1 u\overline{\varphi} + \ell_2 u\overline{\psi}\right\}dx + \int_{\beta}^{1}\left\{\ell_1 u\overline{\varphi} + \ell_2 u\overline{\psi}\right\}dx = 0, \tag{3.40}$$

pour tout $u \in E$ et $(f, \varphi, \psi) \in F$, implique que

$$f = 0,\ \ \varphi = 0 \quad \text{et} \quad \psi = 0.$$

Soit $u \in D_0(L)$ alors de (3.40), on conclut à partir du lemme 5 que $\psi f = 0$, alors $f = 0$, où

$$\psi f = \begin{cases} xf & 0 < x \leq \alpha \\ \\ (1-\beta)f & \alpha \leq x \leq \beta \\ \\ (1-x)f & \beta \leq x < 1 \\ \end{cases} .$$

En prenant $u \in E$ dans (3.40) on obtient :

$$\int_0^1 \frac{\theta(x)}{2} \left\{ \frac{d\ell_1 u}{dx} \frac{d\overline{\varphi}}{dx} + \frac{d\ell_2 u}{dx} \frac{d\overline{\psi}}{dx} \right\} dx + \int_0^\alpha \left\{ \ell_1 u \overline{\varphi} + \ell_2 u \overline{\psi} \right\} dx + \int_\beta^1 \left\{ \ell_1 u \overline{\varphi} + \ell_2 u \overline{\psi} \right\} dx = 0 \ .$$

Comme l'image de l'opérateur trace $(\ell_1, \ell_2)$ est partout densedans l'espace de hilbert muni de la norme

$$\left[ \int_0^1 \frac{\theta(x)}{2} \left\{ \left| \frac{d\varphi}{dx} \right|^2 + \left| \frac{d\varphi}{dx} \right|^2 \right\} dx + \int_0^\alpha \left\{ |\varphi|^2 + |\psi|^2 \right\} dx + \int_\beta^1 \left\{ |\varphi|^2 + |\psi|^2 \right\} dx \right]^{\frac{1}{2}} ;$$

alors, $\varphi = 0$ et $\psi = 0$. ■

# Bibliographie


[1] Allegretto W., Lin Y., and Zhou A., Abox schememe for coupled systems resulting from microsensor thermistor problems, *Dynam. Contin. Discete Impuls. Systems, 5 (1999), 1-4, 573-578.*

[2] Batten G. W. Jr., Second-order correct boundary conditions for the numerical solution of mixed boundary problem for parabolic equations, *Math. Comp., 17 (1963), 405-413.*

[3] Beilin A. B., Existence of solutions for one-dimentional wave equation with a nonlocal condition, *Electron. J. Diff. Equa., Vol. 2001 (2001), n°*76 *, 1-8.*

[4] Benouar N.E.; Yurchuk, N.I. :Mixed Problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessel operator, *Differ. Equations, 27, N*∘ 12, *pp. 1482-1487 (1991).*

[5] Bouziani A. and Benouar N.E. : Mixed Problem with an integral condition for a third order parabolic equation, *Kobe J. Math. 15, pp. 47-58 (1998).*

[6] Cahlon B., Kulkarni D. M. and Shi P., Stepwise stability for the heat equation with non local constraint, *SIAM J. Numer. Anal., 32 (1995), 2, 571-593.*

[7] P. Cannarasa and V. Vespri, On Maximal Lp-regularity for abstract Cauchy problem, Boll. Unione Mat. Italiana, 1986 pp 165-175.

[8] J.R. Cannon, The solution of the heat equation subject to the specification of energy, *Quart. Appl. Math.*, **21** (1963), 155-160.

[9] J.R. Cannon, The one-dimensional heat equation, in *encyclopedia of mathematics and its applications* **23**, Addison-Wesley, Mento Park, CA (1984).

[10] Y.S. Choi and K.Y. Chan, A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electrochemistry, *Nonlinear Anal.*, **18** (1992), 468-475.

[11] Chouiter F., Problèmes mixtes avec conditions aux limites du type non classique, memoire de magister, Departement de Mathematiques, Faculté des Sciences Exactes, Université Mentouri Constantine, mars (2001).

[12] Day W. A., A decreasing property of solutions of parabolic equations with applications to thermoelasticity, Quart. Appl. Math. 40 (1982), 4, 319-330.

[13] Day W. A., Extensions of a property of the heat equation to linear thermoelasticity and other theories, Quart. Appl. Math. 41 (1983), 3, 319-330.

[14] M. Denche and A.L. Marhoune : High-order mixed type differential equations with weighted integral boundary conditions. *Electronic journal of differential equation, vol. 2000 (2000) , n°* 60, pp. 1-10.

[15] M. Denche and A.L. Marhoune , Mixed problem with non local boundary conditions for a third-order partial differential equation of mixed type. *IJMMS 26 : 7(2001) 417-426.*

[16] M. Denche and A.L. Marhoune , Mixed problem with integral boundary condition for a high order mixed type partial differential equation. *Journal of applied mathematics and stochastic analysis, 16 : 1* (2003) , 69-79.

[17] M. Denche and A.L. Marhoune : A three-point boundary value problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessel operator. *Applied mathematics letters 13(2000) 85-89.*

[18] M. Denche, A. Memou, Boundary value problem with integral conditions for alinear third-order equation. *J. Appl. Math. (2003), n○ 11, 553-567.*

[19] Dezin A. A., Theoremes d'existence et d'unicité de la solution pour les problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionnels. *Usp. Math. Naouk, T. 14 (1987), n°3 , 22-73.*

[20] R.E. Ewing and T. Lin, A class of parameter estimation techniques for fluid flow in porous media, *Adv. Water Ressources*, **14** (1991), 89-97.

[21] Friderichs K., Symetric hyperbolic linear differential equations, *Comm. pure appl. math. 7, N°2 (1954), 345-392.*

[22] Garding L., Cauchy's problem for hypebolic equations, *University of Chicago, Lecture notes, 1957.*

[23] G.H. Hardy, J.E. Littlewood & G. Polya, Inequalities, Cambridge Press, 1934. Zbl 0010.10703 | JFM 60.0169.01

[24] M. Hieber and J. Prüss, Heat Kernels and Maximal Lp-Lq estimates for parabolic evolution equations, Comm. Partial Differential Equations, **22** : 1997 pp 164761669.

[25] Ionkin N.I. : Stability of a problem in Heat-condition, *Differentsial'nye Uravnenya, 13 N○ 2, pp. 294-304 (1977).*

[26] Ionkin N.I. : A problem for the Heat-condition equation with a tow-point boundary condition, *Differentsial'nye Uravnenya, 15 N○ 7, pp. 1284-1295 (1979).*

[27] Kamynin N.I. : A boundary value problem in the theory of the condition with non classical boundary condition, *Th. Vychist. Mat. Fiz., vol. 43, N○ 6, pp. 1006-1024 (1964).*

[28] Kartynnik A.V. : Tree-point boundary-value problem with an integral space-variable condition for a second-order parabolic equation, *Differ. Equations, 26, N○* 9, *pp. 1160-1166 (1990).*

[29] Ladyzhenskaya O. A., Mixed problemfor hyperbolic equations, *Edition Mir nauka, 1974.*

[30] Latrous C., Mixed problem with integral boundary conditions for a third order partial differential equation, *Tr. Inst. Mat., Minsk, 2004, 6, 115-119.*

[31] Latrous C., Memou A., Atree point boundary value problem with an integral condition for a third-order partial diffrential equation, *Abstract and Applied Analysis, 1, (2005), 33-44.*

[32] A.L. Marhoune : A three-point boundary value problem with an integral two-space variables condition for parabolic equations. *Computers and mathematics with applications 53 (2007), pp 940-947.*

[33] A.L. Marhoune and M. Bouzit : : High-order differential equations with integral boundary condition. *Far east J.math. sci. (FJMS) 18(3) (2005) , 341-350.*

[34] Muravei L.A., Philinovskii A.V., On a certain non-local boundary-value problem for hyperbolic equation, Matem. Zametski, **54**(1993), 98-116.

[35] Leray J., Lecture on hyperbolic differential equations with variable coefficiens. *Princeton, Justfor adv. Study, 1952.*

[36] Petrovsky I. G., Uber Das Cauchyshe problem for system von linearen partiallen differentialgeichungen in gebit der nichtanalystischen funktionen, bull. Univ d'etat, moscow, 1938,N°7, 1-74.

[37] J. Prüss and Gieri Simonett, Maximal regularity for evolution equations in weighted Lp-spaces, Fachbereich Mathematik und Informatik, Martin-Luter-Universität Halle-Wittenberg, July 2002.

[38] Pulkina L. S., A non local problem with integral conditions for hyperbolic equations, *Electronic Journal of Differential Equations, 45 (1999), pp.1-6.*

[39] Rebbani F., Chesalyn V. I., Problèmes aux limites pour équations différentielles d'ordre impair dans le rectangle, Izvestia akad. nauk. BSSR (en russe), Serie phys. Math. Nauk *N°3 (1985)*

[40] Rebbani F., Chesalyn V. I., Problèmes aux limites pour équations différentielles opérationnelles dans le rectangle, Doklady akad. nauk. BSSR (en russe), T.30 $N^{\circ}12$ *pp. 1061-1063.*

[41] Samarskii, A.A. : Some problem in differential equations theory, *Differentsial'nye Uravnenya, 16 N∘ 11, pp. 1221-1228 (1980).*

[42] P. Shi, weak solution to evolution problem with a nonlocal constraint, *Siam J. Anal.*, **24** (1993), 46-58.

[43] P. Shi and M. Shillor, *Design of Contact Patterns in One Dimentional Thermoelasticity,* in Theoretical Aspects of Industrial Design, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1992.

[44] Tanabe H. Equation of evolution, *Pitman publishing limited, London, (1979)*

[45] Yurchuk N. I., Boundary value problems for equations whose principal part contains operators of the form $\left(\frac{d^{2m}}{dt^{2m+1}}\right) + A$, *Differential Equations, 10,* $N^{\circ}4$ *(1974), pp. 589-592.*

[46] Yurchuk N. I., Boundary value problems for equations whose principal part contains operators of the form $\left(\frac{d^{2m}}{dt^{2m}}\right) + A$, *Differential Equations, 10,* $N^{\circ}5$ *(1974), pp. 735-737.*

[47] Yurchuk N. I., A priori estimates of solutions of boundary value problems for certain differential equations, *Differential Equations, 12,* $N^{\circ}4$ *(1976), pp. 512-518.*

[48] Yurchuk N. I., Boundary value problems for differential equations whith operator valued coefficients depending on parameter, *Differential Equations, 12,* $N^{\circ}9$ *(1976), pp. 1157-1168.*

[49] Yurchuk N. I., Solvability of boundary value problems for certain differential operationels equations , *Differential Equations, 13,* $N^{\circ}4$ *(1977), pp. 423-429.*

[50] Yurchuk N. I., The energy inequality method in the investigation of certain degenerat linear operational differential equation, *Differential Equations, 14,* $N^{\circ}12$ *(1978), pp. 1558-1567.*

[51] Yurchuk N. I., Mixed problem for parabolic equations of variable order, *Soviet. Math. Dokl. 26* N°12 *(1982), pp. 39-41.*

[52] Yurchuk N. I., Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations, *Differential Equations, 22, (1986), pp. 1457-1463.*

# Résumé

Dans ce travail on étudie un problème mixte avec condition intégrale avec bornes variables pour les équations aux dérivées partielles du type mixte.

On démontre l'existence et l'unicité de la solution dans un espace fonctionnel de Sobolev avec poids.

La démonstration est basée sur une estimation a priori bilatérale et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré.

**Mots Clés** : Equation parabolique de type mixte, inéquation énergétique, Espace de Sobolev avec poids, Conditions aux bords, Condition intégrale avec bornes variables.

# Abstract

In this work, we study a mixed problem with an integral space variable condition for a parabolic equation of mixed type.

The existence and uniqueness of the solution in functional weighed Sobolev space are proved. The proof is based on two sided a priori estimates and the density of the range of the operator generated by the considered problem.

**Key Words** : Parabolic Equation of mixed type, Three-point boundary condition, Integral space variable condition, Energy inequalities, Weighted Sobolev Space.